Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2011

Robert de Sousa

O princípio do módulo máximo e teoremas do tipo Phragmén-Lindelöf

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2011

Robert de Sousa

O princípio do módulo máximo e teoremas do tipo Phragmén-Lindelöf

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações perfil Empresarial e Tecnológica, realizada sob a orientação científica do Prof. Catedrático Helmuth Robert Malonek , Professor do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Dedico este trabalho aos meus queridos irmãos e à minha querida mãe que sempre me apoiam, fortalecem e incentivam a triunfar.

O júri

Presidente	**Professor Doutor Luís Filipe de Castro** *Professor Catedrático do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro*
Vogais	**Professor Doutor Helmuth Robert Malonek** *Professor Catedrático do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro*
	Professora Doutora Maria Irene Ferrão Carvalho Ribeiro Almeida Falcão *Professora Associada do Departamento de Matemática e Aplicações da Universidade do Minho*

agradecimentos / acknowledgements

É com muito gosto que aproveito esta oportunidade para agradecer a todos os que me ajudaram, directa ou indirectamente ao longo destes anos de altos e baixos e em concreto a materializar este trabalho.

Ao meu orientador, Professor Catedrático Helmuth Robert Malonek, pelo apoio, dedicação, incentivo e oportunos comentários, pois, sem os quais não seria possível realizar este trabalho.

A todos os meus entes queridos. À minha querida mãe, Maria do Livramento dos Reis, aos meus irmãos, Luisette Andrade de Sousa, David Andrade, Jean Jacques de Sousa, Francisco de Sousa, Bruno Ribeiro, um muito obrigado por tudo, pois, tudo que fiz e percorri até hoje é um mero reflexo desta extraordinária família. Não queria também deixar de agradecer ao Zé de Porto e ao Gino Ribeiro por tudo.

À Indira Semedo, minha querida e amada namorada, que apesar da distância ao longo destes anos, tem-se revelado uma amiga e "companheira". Obrigado pelo amor e carinho.

Por fim, e não menos importantes, a todos os meus amigos que me acompanharam neste percurso, pela amizade, força, carinho, convivência, atenção e companheirismo. Um muito obrigado a todos os meus Professores e à Universidade de Aveiro, por contribuírem para que este trabalho se tornasse uma realidade.

Obrigado pela vida, saúde e luz.

palavras-chave *Função holomorfa, princípio do módulo máximo, teoremas de tipo Phragmén-Lindelöf, transformações conformes.*

resumo *Este trabalho dedica-se ao estudo de várias variantes do princípio do módulo máximo para funções holomorfas de uma variável complexa, incluindo as suas importantes generalizações para domínios ilimitados obtidos pelo E. Phragmén e L.Lindelöf em 1908. Nas suas demonstrações foram usados métodos que incluem técnicas baseadas, por exemplo, em representações integrais, séries de potências, propriedades de carácter topológico e transformações conformes. Através do estudo deste princípio fundamental conseguiu-se assim ilustrar a aplicação de métodos específicos que resultam das diferentes abordagens de Cauchy, de Weierstrass e de Riemann à Análise Complexa.*

keywords *Holomorphic function, maximum modulus principle, theorems type Phragmén-Lindelöf, conformal mapping.*

abstract *This work is dedicated to the study of several variants of the maximum-modulus principle for holomorphic functions, including its important generalizations to unbounded domains obtained by E. Phragmén and L. Lindelöf in 1908. The proofs make use of methods which include techniques based on integral representations, power series expansions, properties of topological character and conformal mappings. In this way, the application of specific methods arising from the different approaches of Cauchy, Weierstrass and Riemann to Complex Analysis could be illustrated through the study of this fundamental principle.*

Conteúdo

Lista de Figuras

Lista de Símbolos e Abreviaturas

$\mathbb{R}_0^+$	Conjunto dos números reais positivos inclusive 0
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^2$	Representação do plano
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
Ω	Domínio em $\mathbb{C}$
$\partial\Omega$	Fronteira de Ω
$D(z_0; r)$	Disco de raio $r > 0$ centrado em z_0
$\partial D(z_0; r)$	Circunferência de raio $r > 0$ centrado em z_0
$\overline{D(z_0; r)}$	Aderência ou fecho do disco de raio $r > 0$ centrado em z_0
γ	Curva em $\mathbb{C}$
$tr\gamma$	Traço da curva γ
$L(tr\gamma)$	Comprimento do traço da curva γ

Introdução

Esta dissertação debruça-se sobre um conjunto de teoremas fundamentais da análise complexa, relacionados com o princípio do módulo máximo. Como sabemos, falar de $\mathbb{C}$ é basicamente falar do espaço vectorial $\mathbb{R}^2$ (sobre o ponto de vista de conjuntos), no entanto são distintas no que diz respeito a estruturas algébricas sobre o mesmo conjunto de pares ordenados de números reais.

Desse modo, ao considerarmos o corpo complexo como um espaço vectorial sobre si mesmo, é de constatar que, a sua métrica é compatível com a métrica euclidiana usada em $\mathbb{R}^2$, isto é, ambos espaços vectoriais são isométricos. A classe de funções complexas de uma variável complexa que possuem a propriedade de ser diferençiável complexa (holomorfa) está no centro deste trabalho. Para essas funções é válido *o princípio do módulo máximo (mínimo)*, como veremos no decorrer deste trabalho.

De facto, esta dissertação dedica-se ao estudo do princípio do módulo máximo, e sua generalização através de teoremas do tipo Phragmén-Lindelöf, que constituem um resultado importante da análise complexa. O francês, Augustin Louis Cauchy (21/08/1789 - 23/05/1857), entre muitos outros matemáticos, falou e usou por muitos anos o princípio do módulo máximo, sem no entanto, o mencionar directamente. Em geral, o princípio do módulo máximo apareceu subentendido no estudo de funções harmónicas (Bernhard Riemann, William Osgood, Friedrich Schottky, etc) ([21]). Só em 1927 na segunda edição do livro *Introdução à transformação conforme (Einführung in die konforme Abbildung)*, que o alemão, Ludwig Bieberbach (04/12/1886 - 01/09/1982), falou explicitamente pela primeira vez sobre o *princípio do módulo máximo* ([21]). Mais tarde, os matemáticos, Lars Edvard Phragmén (2/09/1863 - 13/03/1937) de origem sueca e Ernst Leonard Lindelöf (7/03/1870 - 4/06/1946) de origem finlandesa, em 1908, demonstraram versões mais fortes do princípio do módulo máximo (Acta Matemática. 31, 1908, 381 - 406).

A motivação principal para o estudo do princípio do módulo máximo e teoremas do tipo

Phragmén-Lindelöf deve-se ao facto de neles se basearem imensos resultados, aplicações e sobre tudo demonstrações da análise complexa. Na verdade, o princípio do módulo máximo e teoremas do tipo Phragmén-Lindelöf mantêm uma ponte de ligação clara e evidente entre vários aspectos da análise complexa, tornando seu estudo, ainda mais interessante.

O presente trabalho é constituído por 2 secções e 3 capítulos, sendo as secções referentes à introdução e à considerações finais, respectivamente.

O Capítulo 1 intitula-se preliminares, e procura-se fazer referência aos conceitos considerados fundamentais, para um melhor entendimento do trabalho ([1], [5], [15], [22]).

No Capítulo 2, apresentamos o princípio do módulo máximo na sua forma inicial, onde impomos que as funções em estudo sejam holomorfas em domínios limitados. No mesmo Capítulo podemos constatar enunciados e demonstrações de variantes do mesmo princípio, das quais se pode mencionar as seguintes: com representação integral de uma função holomorfa, de séries de potências, com o teorema da aplicação aberta e por métodos topológicos ([1], [21], [22], [26]).

Por fim, no Capítulo 3, estudaremos a generalização do princípio do módulo máximo, através de teoremas do tipo Phragmén-Lindelöf. Nesta parte, em vez de impormos que os domínios das funções holomorfas sejam limitados, permitimos que estes possam também ser ilimitados. Iremos considerar dois enunciados diferentes de teoremas do tipo Phragmén-Lindelöf, um para um sector e outro para uma faixa, ligados através de transformações conformes ([15]).

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo relembramos alguns conceitos relevantes para uma boa compreensão do trabalho, no geral. Entre estes encontram-se teoremas bem conhecidos, tais como, de Weierstrass, do valor médio para funções holomorfas, da identidade, bem como conceitos de holomorfia, analiticidade, transformação conforme e outros. Mas antes, relembremos algumas noções básicas de topologia, em $\mathbb{C}$, necessárias para o nosso estudo.

1.1 Noções básicas de topologia em $\mathbb{C}$

É de realçar que nesta secção seguiu-se essencialmente ([5], [15]).

Definição 1.1.1
Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ um ponto arbitrário. Chama-se *vizinhança* de z_0 de raio $r > 0$, o subconjunto de $\mathbb{C}$ representado por:

$$D(z_0; r) = \{z : |z - z_0| < r\}.$$

O mesmo conjunto é também chamado de bola ou disco aberto de raio $r > 0$ centrado em $z_0 \in \mathbb{C}$.

Após esta definição, estamos em condições de introduzir os demais conceitos topológicos básicos.

Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ e suponhamos que existe um $r > 0$ arbitrário.

Definição 1.1.2
O ponto arbitrário $z_0 \in \mathbb{C}$ é ponto de *acumulação* ou ponto *limite* do conjunto Ω,

se $\forall r > 0,\ (D(z_0;r)\diagdown\{z_0\}) \cap \Omega \neq \varnothing.$

Definição 1.1.3
Diz-se que um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ é ponto *interior* de $\Omega,$ se a bola aberta centrado em z_0 e raio r for um subconjunto de $\Omega,$ isto é, $D(z_0;r) \subset \Omega.$

Designa-se por interior de Ω o conjunto de todos os pontos interiores do mesmo e é costume representa-lo por $int(\Omega)$.

Definição 1.1.4
Diz-se que o ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ é ponto *exterior* de $\Omega,$ se $D(z_0;r) \cap \Omega = \varnothing.$

Designa-se por exterior de Ω o conjunto de todos os pontos exteriores do mesmo e é costume representa-lo por $ext(\Omega)$.

Definição 1.1.5
Diz-se que o ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ é ponto *fronteiro* de Ω se não é ponto interior nem ponto exterior de $\Omega.$ Por outras palavras se qualquer vizinhança de z_0 contiver pontos tanto de $\Omega,$ como do seu complementar.

Designa-se por fronteira de Ω o conjunto de todos os pontos fronteiro de Ω e representa-se por $fr(\Omega)$ ou $\partial\Omega$.

Definição 1.1.6
Diz-se que o ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ é ponto *aderente* a $\Omega,$ se $D(z_0;r) \cap \Omega \neq \varnothing.$

O conjunto de todos os pontos aderentes de Ω chama-se *fecho* ou *aderência* e representa-se por $\overline{\Omega}$. Desse modo, por definição, tem-se que, $\overline{\Omega} = int(\Omega) \cup fr(\Omega)$.

Definição 1.1.7
Seja $z_0 \in \Omega \subset \mathbb{C}$, diz-se que Ω é um *conjunto aberto* se $\Omega = int(\Omega),$ um *conjunto fechado* se $\Omega = \overline{\Omega},$ um *conjunto limitado* se $\exists r > 0$ tal que, $\Omega \subset D(z_0;r)$ *e um conjunto compacto* se Ω for limitado e fechado.

Definição 1.1.8
Sejam A e B subconjuntos arbitrários de $\mathbb{C},$ *ambos disjuntos, ambos abertos ou ambos fechados.* Diz-se que Ω *é conexo* se não é possível escrever $\Omega = (\Omega \cap A) \cup (\Omega \cap B),$ e é um *domínio* se é um conjunto aberto e conexo.

Definição 1.1.9

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$. Chama-se *curva* ou *linha* em $\mathbb{C}$, a qualquer aplicação contínua $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Diz-se que a curva γ é *fechada,* se a origem e a extremidade da curva coincidem, isto é, $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Designa-se por *equação paramétrica* da curva, a equação $\gamma(t) = x(t) + iy(t),\ t \in [a, b]$, onde t denomina o parâmetro da curva γ. Diz-se que a curva γ é *regular,* se para $t \in [a, b]$, as funções $x(t)$ e $y(t)$ têm derivada contínua em $[a, b]$. A curva γ é *seccionalmente regular* em $[a, b]$ se existir uma decomposição neste intervalo, isto é, para $a = t_0 < t_1 ... < t_{k-1} < t_k = b$ tal que as restrições $\gamma_{|]t_n,t_{n+1}[}, n = 0, 1, ..., k-1$, são curvas regulares.

O conjunto imagem de γ, ou seja, o contradomínio da aplicação chama-se *caminho* ou traço da curva γ e representa-se por $tr(\gamma)$. O *comprimento do traço* da curva γ representa-se por

$$L(tr\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt.$$

Definição 1.1.10

Sejam γ_1 e γ_2 duas curvas seccionalmente regulares que se intersectam num ponto z, $f(\gamma_1)$ e $f(\gamma_2)$ as imagens de γ_1 e γ_2 por uma aplicação f contínua de domínio Ω do plano complexo no plano complexo. Sejam ainda, θ_1 e θ_2 os ângulos entre o eixo real e as tangentes as curvas γ_1 e γ_2 no ponto z, ϑ_1 e ϑ_2 os ângulos entre o eixo real e as tangentes as curvas $f(\gamma_1)$ e $f(\gamma_2)$ no ponto $w = f(z)$. A Figura 1.1 ilustra esta situação.

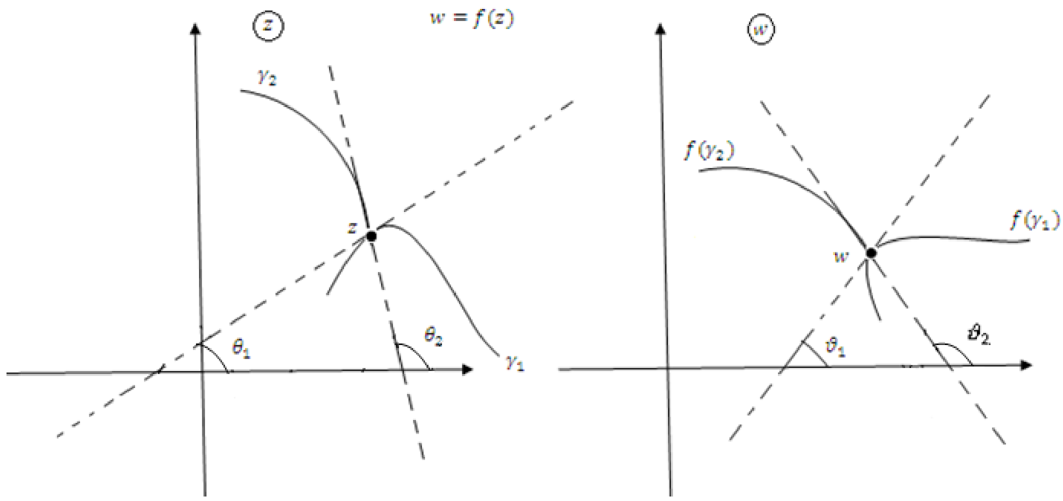

Figura 1.1: Ilustração da transformação conforme

Diz-se que a aplicação (transformação) f é *localmente conforme* se f transforma curvas em curvas e preserva ângulos em valor absoluto e sentido em cada ponto de Ω, isto é, se $\vartheta_2 - \vartheta_1 = \theta_2 - \theta_1$. Diz-se que, f *é conforme* se f for localmente conforme e bijectiva em Ω.

Vamos, de seguida definir mais alguns conceitos básicos de análise complexa, bem como estabelecer o teorema de Weierstrass.

1.2 Teorema de Weierstrass

Começa-se por definir o conceito de limite e continuidade de uma função complexa.

Definição 1.2.1
Sejam $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \overline{\Omega}$. Diz-se que o limite de f é A se pudermos tornar a distância de f a A tão pequena quanto se pretende quando tomamos z suficientemente próximo de z_0 e escreve-se $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$. Topológicamente escreve-se,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ :\ 0 < |z - z_0| < \delta \text{ e } z \in \Omega \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon.$$

Definição 1.2.2
Sejam $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \Omega$. Diz-se que f é contínua no ponto z_0 se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ :\ |z - z_0| < \delta \text{ e } z \in \Omega \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Com facilidade podemos mostrar que as propriedades das funções contínuas definidas em subconjuntos de $\mathbb{C}$, são idênticas às propriedades das funções reais, contínuas definidas em subconjuntos de $\mathbb{R}^2$.

No entanto, nem sempre é possível transferir resultados de $\mathbb{R}^2$ directamente para $\mathbb{C}$. Com efeito, podemos fazer uma adaptação em alguns casos de resultados de um conjunto para o outro. Por exemplo, um resultado importante a ter em mente neste trabalho, é o bem conhecido teorema de Weierstrass de funções reais definidas em $\mathbb{R}^2$. Segue-se, a adaptação do mesmo em $\mathbb{C}$.

Teorema 1.2.1 (De Weierstrass)
Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ compacto e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função contínua, então:

i) $\left|f\right|$ *é limitada em* Ω.

ii) $\left|f\right|$ *tem máximo e mínimo em* Ω, *ou seja, existem* z_a *e* z_b *pontos arbitrários de* Ω *tais que* $\left|f(z_a)\right| = \underset{z\in\Omega}{min}\left|f(z)\right|$ *e* $\left|f(z_b)\right| = \underset{z\in\Omega}{max}\left|f(z)\right|$.

Como podemos constatar $\left|f\right|$ é encarado como se fosse uma função definida num subconjunto de $\mathbb{R}^2$ com valores em $\mathbb{R}_0^+$ e a limitação de f em Ω é vista como a limitação de $\left|f\right|$ em Ω ([5]).

A demonstração do Teorema de Weierstrass pode ser encontrado em ([14]).

A unificação dos conceitos de holomorfia e analiticidade, constitui um resultado chave para os resultados mais à frente. Assim, daremos ênfase a isso na seguinte secção.

1.3 Holomorfia e Analiticidade

Comecemos por estabelecer o significado dos termos holomorfia e analiticidade, bem como, estabelecer a equivalência ou unificação dos mesmos, pois como veremos a seguir estes dois conceitos estão intimamente ligados, permitindo-nos assim relaciona-los facilmente.

Definição 1.3.1

Sejam Ω *um domínio em* $\mathbb{C}$ *e* $f:\Omega\to\mathbb{C}$ *uma função complexa. Diz-se que* f *é* holomorfa *em* $z_0\in\Omega$ *se existe o limite,*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}. \tag{1.1}$$

O limite em (1.1) *é a derivada de* f *em* z_0 *e representa-se por* $f'(z_0)$.

Como podemos notar, é evidente que a diferenciabilidade complexa corresponde a holomorfia, sendo que qualquer função é *holomorfa* no seu domínio quando é diferenciável em todos os pontos desse domínio. Diz-se ainda, que f é *inteira* se é holomorfa em todo o plano complexo ([1], [5], [15], [22]).

Definição 1.3.2

Sejam Ω *um domínio em* $\mathbb{C}$ *e* $f:\Omega\to\mathbb{C}$ *uma função complexa. Diz-se que* f *é* analítica, *numa vizinhança de* $z_0\in\Omega$, *se existe uma série de potências com raio de convergência* $r>0$ *tal que, para todo* $z\in\Omega$ *e* $D(z_0;r)=\{z:|z-z_0|<r\}$, $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$, *onde* $a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ *(* [1], [5], [15], [22]).

É de constatar que podemos estabelecer uma equivalência entre estes dois conceitos, isto é, holomorfia e analiticidade, pois as funções definidas por séries de potências são holomorfas, assim como toda função analítica também é holomorfa.

Na verdade, podemos estabelecer várias equivalências com abordagens diferentes a holomorfia como podemos verificar a seguir.

Sejam Ω um domínio em $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função complexa. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

i) f é holomorfa em Ω.

ii) $f = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ é diferenciável real em ordem a x e y e satisfaz as equações de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ \\ u_y = -v_x. \end{cases}$$

iii) f é localmente a soma de uma série de potências.

iv) f é localmente integrável, isto é, f é contínua em Ω e permite uma primitiva local.

Podemos encontrar a demonstração das equivalências (i, ii, iii e iv) em ([7], [11]).

Portanto, em geral quando falamos do princípio do módulo máximo ou de teoremas do tipo Phragmén-Lindelöf, a analiticidade ou qualquer outro termo equivalente usado para as funções em estudo, é o mesmo que a holomorfia dos mesmos nos seus domínios.

Todavia, e sem perda de generalidade, neste trabalho vamos adoptar o termo função holomorfa no seu domínio, em detrimento de função analítica ou qualquer outro termo equivalente acima mencionado.

Relembremos a seguir, a propriedade do valor médio.

1.4 Propriedade do valor médio

Teorema 1.4.1 (Do valor médio)
Sejam Ω um domínio em $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Diz-se que f goza da propriedade do valor médio se $\forall z \in \Omega$ existe $r > 0$ tal que,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta.$$

Demonstração:

Pela fórmula de integral de Cauchy ([4]) sabemos que:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D(z_0;r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \tag{1.2}$$

e em particular, se $z = z_0$, ficamos com:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi. \tag{1.3}$$

Com uma parametrização de $|\xi - z_0| = r$ temos que, $\xi = z_0 + re^{i\theta}$ onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Fazendo uma mudança de variável na expressão (1.3), obtemos

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \tag{1.4}$$

A expressão (1.4) fornece-nos o valor de f no ponto central z_0, ou seja, é o valor médio de $g(\theta) = f(z_0 + re^{i\theta})$ ($\theta \in \big[0 \; 2\pi\big]$) na circunferência $\partial D(z_0; r) = |\xi - z_0| = r$ e é independente do raio r ([11]). $\blacksquare$

Para finalizar este capítulo, consideremos dois teoremas importantes neste trabalho.

1.5 Teorema da identidade e desigualdade de Cauchy

O teorema da identidade, bem como a desigualdade de Cauchy constituem ferramentas importantes neste trabalho. Através dos seus resultados, é possível tirar conclusões interessantes referentes ao estudo do princípio do módulo máximo.

Enuncie-se, então o teorema da identidade e de seguida a desigualdade de Cauchy.

Teorema 1.5.1 (Teorema da Identidade)
Sejam f e g duas funções holomorfas no domínio Ω. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

i) $f \equiv g$.

ii) Existe um conjunto infinito de pontos $S \subset \Omega$ com (pelo menos) um ponto de acumulação em Ω onde f e g coincidem.

Demonstração:

i) Seja a um ponto de acumulação de S. Então existem uma sucessão $\{z_n\}$ e um $r > 0$ tal que $z_n \underset{n\to\infty}{\to} a$ em $D(a; r)$. Defina-se f e g da seguinte forma:

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + ...$$

$$g(z) = b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + ...$$

e seja ainda $f(z_n) = g(z_n)$. Seguidamente, por continuidade de g e f (são funções holomorfas) ([16]), obtém-se $f(a) = g(a)$, isto é, $a_0 = b_0$ (ver Figura 1.2).

Portanto, segue-se que,

$$a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+... = b_1(z-a)+b_2(z-a)^2+... \Leftrightarrow a_1+a_2(z-a)+... = b_1+b_2(z-a)+...,$$

como $z_n \underset{n\to\infty}{\to} a$ em $D(a; r)$ então $a_1 = b_1$.

Replicando o processo, ao fim de k vezes conclui-se que

$$a_k = b_k, \quad (k = 0, 1, 2, ...).$$

Assim, $f(z) = g(z)$ em $D(a; r) \subset \Omega$.

ii) Seja z^* um ponto arbitrário de $S \subset \Omega$ e L uma curva contínua. Então continuando o mesmo processo descrito em (i) ao longo da curva L como representada na figura 1.3, é possível chegar a $f(z^*) = g(z^*)$. Como z^* é arbitrário, concluímos que $f \equiv g$ em Ω ([18]). ■

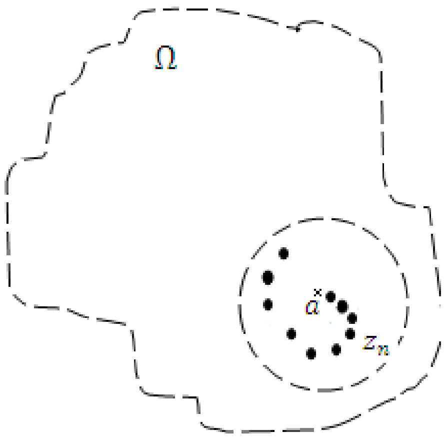

Figura 1.2: Ilustração da convergência de z_n para o ponto a

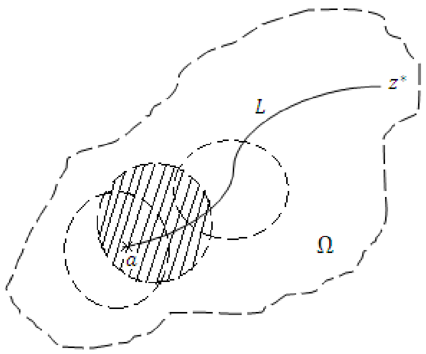

Figura 1.3: Ilustração da continuidade da curva L

O resultado anterior garante-nos que, uma função holomorfa num domínio, só é determinada pelos seus valores em qualquer conjunto que tenha pelo menos um ponto de acumulação (limite) no seu domínio de holomorfia. Isto implica que uma função holomorfa f em Ω e igual a zero num subconjunto aberto e conexo é identicamente zero em Ω. Assim, se uma função é holomorfa num subconjunto de Ω, onde esta não é identicamente nula, então existem zeros isolados da mesma. Analogamente, se f é igual a uma constante C num subdomínio D de Ω, então f é igual a constante C em todo o Ω.

Teorema 1.5.2 (Desigualdade de Cauchy)
Sejam f uma função holomorfa no disco fechado $\{z : |z - z_0| \leq r\}$ e δ tal que $0 < \delta \leq r$. A função f e suas derivadas satisfazem a desigualdade

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{r \cdot n!}{\delta^{n+1}} \cdot M \quad (n = 0, 1, 2, ...),$$

para qualquer $z : |z - z_0| \leq r - \delta$ *e onde* $M = \max\limits_{|\xi - z_0| = r} |f(\xi)|$.

Demonstração:

Da relação de funções holomorfas e séries de potências ([18]), sabe-se que no disco $D(z_0; r)$ podemos estabelecer a seguinte igualdade:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial D(z_0; r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi. \tag{1.5}$$

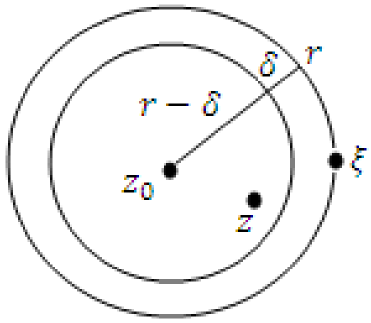

Figura 1.4: Disco de raio r centrado em z_0

Da Figura 1.4 podemos então estabelecer as seguintes desigualdades:

$$|z - z_0| \leq r - \delta$$

$$\Rightarrow |\xi - z| \geq \delta$$

$$\Rightarrow |f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{1}{\delta^{n+1}} \cdot M \Leftrightarrow |f^{(n)}(z)| \leq \frac{r \cdot n!}{\delta^{n+1}} \cdot M \quad (n = 0, 1, 2, ...), \tag{1.6}$$

uma vez que $\max\limits_{\gamma} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z|^{n+1}} \leq \frac{M}{\delta^{n+1}}$ e $2\pi r = L(tr\gamma)$ (comprimento da circunferência na figura 1.4 representada por uma curva qualquer γ) ([15], [21], [25], [26]). ■

Da desigualdade (1.6) podemos tirar algumas consequências. Por exemplo, fazendo $\delta = r$ e $z = z_0$ sai que,

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot M, \quad (n = 0, 1, 2, ...), \tag{1.7}$$

e para a série de potências convergente $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ obtém-se,

$$|a_n| = \frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!} \leq \frac{M}{r^n} \quad ([18]). \tag{1.8}$$

Uma vez esclarecidos alguns conceitos, passemos ao capítulo central sobre o princípio do módulo máximo.

Capítulo 2

Princípio do módulo máximo e métodos da sua demonstração

No presente capítulo pretende-se dar uma visão global do princípio do módulo máximo. Neste sentido, serão apresentadas algumas variações deste mesmo princípio, em concreto, no que diz respeito a enunciados e suas demonstrações. Genericamente falando, o enunciado do princípio do módulo máximo garante-nos que, sendo uma função holomorfa num domínio limitado e contínua na sua fronteira, o máximo do módulo da função, nunca pode ser atingido no interior do referido domínio, mas sim, só na sua fronteira.

Portanto, estamos a afirmar que uma função nas condições acima mencionadas é constante, ou, para qualquer ponto arbitrário pertencente ao interior do seu domínio, existem pontos na sua vizinhança tais que, o módulo da função tem valores maiores nesses pontos.

Como anteriormente foi referido na introdução, é objectivo neste capítulo efectuar um estudo do princípio do módulo máximo de funções holomorfas em domínios limitados, sendo este generalizado no capítulo 3, onde expandimos este princípio a funções holomorfas em domínios ilimitados. Estas generalizações são conhecidas como teoremas de tipo Phragmén-Lindelöf.

2.1 Princípio do módulo máximo, versão 1

A primeira versão do princípio do módulo máximo, baseia-se na aplicação da propriedade do valor médio, que resultou da representação integral de Cauchy.

Teorema 2.1.1
Sejam Ω um domínio limitado em $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa e contínua na

fronteira $\partial\Omega$ de Ω. Se existir um ponto $z_0 \in \ int(\Omega)$ tal que $|f(z_0)| \geq |f(z)|\ \forall z \in \Omega$, então $\big|f\big|$ é constante em Ω. Caso contrário, o ponto z_0 onde f assume seu máximo, é um ponto da fronteira, isto é, $z_0 \in \partial\Omega$

Demonstração:

Por hipótese, f é contínua em $\overline{\Omega}$ e pelo teorema de Weierstrass temos a garantia da existência de um valor máximo de $\big|f(z)\big|$. Portanto, existe um qualquer $z_0 \in \overline{\Omega}$, tal que, $\big|f(z_0)\big| \geq \big|f(z)\big|\ \forall z \in \overline{\Omega}$.

Mostremos que, existe um ponto $z_0 \in \ int(\Omega)$ com $|f(z_0)| \geq |f(z)|$, para todo $z \in \Omega$ significa que $f(z) = const$. Caso contrário, o teorema de Weierstrass implica imediatamente que o máximo do módulo é atingido na fronteira.

Pela propriedade do valor médio, $\forall z_0 \in \ int(\Omega)$ existe um $r > 0$ tal que $\overline{D(z_0; r)} \subset \Omega$, então

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta.$$

Por conseguinte,

$$\big|f(z_0)\big| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big|f(z_0 + re^{i\theta})\big|d\theta,$$

ou seja,

$$2\pi|f(z_0)| \leq \int_0^{2\pi} \big|f(z_0 + re^{i\theta})\big|d\theta.$$

Atendendo a que $\big|f(z_0)\big|$ é o valor máximo de $\big|f(z)\big|\ \forall z \in \Omega$, segue-se que

$$\big|f(z_0 + re^{i\theta})\big| \leq \big|f(z_0)\big| \quad \forall\, \theta \in \big[0,\ 2\pi\big],$$

portanto,

$$2\pi\big|f(z_0)\big| \leq \int_0^{2\pi} \big|f(z_0 + re^{i\theta})\big|d\theta \leq \int_0^{2\pi} \big|f(z_0)\big|d\theta = 2\pi\big|f(z_0)\big|,$$

onde conclui-se que,

$$\int_0^{2\pi} \big|f(z_0 + re^{i\theta})\big|d\theta = 2\pi\big|f(z_0)\big|. \tag{2.1}$$

Nas condições estabelecidas pelo teorema, falta-nos mostrar que,

$$\big|f(z_0 + re^{i\theta})\big| = \big|f(z_0)\big| \quad \forall\theta \in \big[0,\ \ 2\pi\big], \tag{2.2}$$

isto é, $\big|f\big|$ é constante na circunferência $\big|z - z_0\big| = r$. Para tal, admita-se que existe um ponto da circunferência onde, $\big|f\big|$ não assume o valor $\big|f(z_0)\big|$, ou seja,

$$\exists\, \alpha \in [0,\ \ 2\pi] : \big|f(z_0 + re^{i\alpha})\big| < \big|f(z_0)\big|$$

em concreto, para certo $\varepsilon > 0$ tem-se, $\big|f(z_0 + re^{i\alpha})\big| < \big|f(z_0)\big| - \varepsilon$.

Seja $\delta > 0$ tal que $[\alpha-\delta,\ \alpha+\delta] \subset\ ]0,\ \ 2\pi[$ e $\big|f(z_0 + re^{i\alpha})\big| \leq \big|f(z_0)\big| - \varepsilon$ em $[\alpha-\delta,\ \alpha+\delta]$.

Então,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \big|f(z_0 + re^{i\theta})\big| d\theta &= \int_0^{\alpha-\delta} \big|f(z_0 + re^{i\theta})\big| d\theta + \int_{\alpha-\delta}^{\alpha+\delta} \big|f(z_0 + re^{i\theta})\big| d\theta + \\
&\qquad + \int_{\alpha+\delta}^{2\pi} \big|f(z_0 + re^{i\theta})\big| d\theta \\
&\leq \big|f(z_0)\big|(\alpha-\delta) + (\big|f(z_0)\big| - \varepsilon)[(\alpha+\delta) - (\alpha-\delta)] + \\
&\qquad + \big|f(z_0)\big|[2\pi - (\alpha+\delta)] \\
&= 2\pi\big|f(z_0)\big| - 2\varepsilon\delta.
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon\delta > 0$ concluímos que,

$$\int_0^{2\pi} \big|f(z_0 + re^{i\theta})\big| d\theta \neq 2\pi\big|f(z_0)\big|, \tag{2.3}$$

o que contradiz o que havíamos estabelecido em (2.1).

Assim, para qualquer ponto da circunferência $\big|z - z_0\big| = r$,

$$\big|f(z_0 + re^{i\theta})\big| = \big|f(z_0)\big| \quad \forall\, \theta \in \big[0,\ \ 2\pi\big], \tag{2.4}$$

isto é, $|f|$ é constante em qualquer ponto da circunferência como pretendíamos.

Falta mostrarmos que o máximo do módulo em todo Ω é constante. Para isto, seja w um ponto qualquer de Ω e $\gamma : [0, 1] \to \Omega \subset \mathbb{C}$ uma curva que une z_0 a w, isto é, $\gamma(0) = z_0$ e $\gamma(1) = w$.

Se $\big|f(w)\big| = \big|f(\gamma(1))\big| < \big|f(z_0)\big|$, seja $t^* = sup\{t > 0 : \big|f(\gamma(t))\big| = \big|f(z_0)\big|\}$. Então, para $0 < t^* < 1$ e por continuidade temos que, $\big|f(\gamma(t^*))\big| = \big|f(z_0)\big|$ e o mesmo numa vizinhança de $\gamma(t^*)$. Concluímos assim, que não existe $z_0 \in \Omega$ tal que $\left|f(z_0)\right|$ seja o valor máximo de $\left|f\right|$, ou seja, é sempre constante. Mas pelo teorema de Weierstrass, o máximo existe e tem que ser atingido na fronteira de Ω como pretendíamos ([5]). $\blacksquare$

O teorema que acabamos de demonstrar acima, resume praticamente toda a teoria por detrás do princípio do módulo máximo. Outras versões do teorema enunciam o mesmo resultado, mas de forma variada com condições acrescidas ou não.

Por exemplo, uma outra maneira de enunciar o princípio do módulo máximo consiste em admitir que a função $|f|$ não tem máximo em Ω, a não ser que, f seja constante em Ω.

Vejamos, a seguir a demonstração da segunda versão que usa outros argumentos.

2.2 Princípio do módulo máximo, versão 2

Como anteriormente vimos, se tivermos, Ω um domínio em $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa, então se existir um $r > 0$ e $\overline{D(z_0;r)} \subset \Omega$, pela propriedade do valor médio, podemos estabelecer que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta. \tag{2.5}$$

Portanto,

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|d\theta. \tag{2.6}$$

Tendo em conta o que anteriormente foi dito, passamos a enunciar a segunda versão do princípio do módulo máximo:

Teorema 2.2.1

Sejam Ω um domínio em $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Então $\forall z \in \Omega$, a menos que $f(z)$ seja constante em Ω, $|f(z)|$ não assume máximo em Ω.

Demonstração:

Admita-se que o máximo de $f(z)$ é M e é atingido em $z = z_0 \in int(\Omega)$. Pretendemos mostrar que $f(z)$ (nesse caso o mesmo que $|f(z)|$) é constante em Ω. Escolhendo r, tal que

$\overline{D(z_0;r)} \subset \Omega$, então por (2.6) tem-se,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(M - \left|f(z_0 + re^{i\theta})\right|)d\theta \leq M - \left|f(z_0)\right| = 0.$$

Seja $M - |f(z_0 + re^{i\theta})|$ uma função contínua de θ satisfazendo $M - |f(z_0 + re^{i\theta})| \geq 0$. Escolhendo $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{D(z_0;r)} \subset \Omega$, então $|f(z_0 + re^{i\theta})| = M$ para todo $z_0 + re^{i\theta}$ com $0 < r < \varepsilon$, isto é, $|f(z)| = M$ em $D(z_0;\varepsilon)$.

Seja $\Upsilon = \{z \in \Omega : |f(z)| = M\}$. Se $z_0 \in \Upsilon$, então existe um $\varepsilon > 0$ tal que $D(z_0;\varepsilon) \subset \Upsilon$, portanto Υ é aberto.

Por outro lado, uma vez que $|f(z)|$ é uma função contínua de z, Υ também é fechado. Uma vez que Ω é um domínio, concluímos que $\Omega = \Upsilon$, isto é, $|f(z)| = M$ $\forall z \in \Omega$.

Se $M = 0$, nada se pode fazer. Então assuma-se que $M > 0$. Fazendo $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, ficamos com $u^2 + v^2 = |f(z)|^2 = M^2$ em Ω, de onde sai que

$$uu_x + vv_x = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u^2 + v^2) = 0, \tag{2.7}$$

$$uu_y + vv_y = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(u^2 + v^2) = 0. \tag{2.8}$$

Combinando as equações em (2.7) e (2.8) com as de Cauchy-Riemann, isto é, $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$ ([16]), obtemos dois sistemas de equações. Um com incógnitas u_x e u_y

$$\begin{cases} uu_x - vu_y = 0 \\ vu_x + uu_y = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

e outro com incógnitas v_x e v_y

$$\begin{cases} vv_x - uv_y = 0 \\ -uv_x + vv_y = 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Representando os sistemas de equações (2.9) e (2.10) matricialmente, temos respectivamente

$$\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

e

$$\begin{pmatrix} v & u \\ -u & v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Como

$$\begin{vmatrix} u & -v \\ v & u \end{vmatrix} = u^2 + v^2 = M^2 > 0 \Rightarrow u_x = u_y = 0 \Rightarrow u = const$$

e

$$\begin{vmatrix} v & u \\ -u & v \end{vmatrix} = u^2 + v^2 = M^2 > 0 \Rightarrow v_x = v_y = 0 \Rightarrow v = const.$$

Desse modo, $f(z) = u + iv$ tem que ser constante como pretendíamos ([12]). ■

Resumindo, o módulo de funções holomorfas e não constantes definidas em domínios limitados, não pode atingir máximos no interior destes domínios.

Referimos de seguida a demonstração de uma terceira versão do princípio do módulo máximo, usando séries de potências e uma fórmula de Gutzmer ([21]) pouco conhecida.

2.3 Princípio do módulo máximo, versão 3

Para demonstrar o princípio do módulo máximo através de séries de potências teremos de recorrer antes a dois resultados que apresentamos de seguida.

Sejam Ω um domínio em $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa e $r > 0$. Consideremos a parametrização da circunferência $|z - z_0| = r$, dado por $z = z_0 + re^{i\theta}$ com $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Assim, substituindo $z = z_0 + re^{i\theta}$ na função de série de potências

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

obtemos a função de série trigonométrica

$$\begin{aligned} f(z_0 + re^{i\theta}) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (re^{i\theta})^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{i\theta n}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Por conseguinte, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{i(n-m)\theta}$ obtida através da multiplicação de (2.13) com $e^{-im\theta}$ converge uniformemente para a função $f(z_0 + re^{i\theta})e^{-im\theta}$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

Isto permite uma integração termo a termo ([8]), o que resulta em

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})e^{-im\theta}d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}d\theta. \tag{2.14}$$

Ora, então para um R qualquer tal que $0 < r < R$ e $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ para $z \in D(z_0; R)$ a igualdade (2.14) resume-se na seguinte igualdade:

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.15}$$

pois,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}d\theta = \begin{cases} 1, & \text{se } n = m \\ 0, & \text{se } n \neq m. \end{cases}$$

Notemos que este tratamento da série de potências relembra alguns factos sobre a ortogonalidade em espaços vectoriais de funções, usados na teoria das séries de Fourier.

Partindo dos resultados apresentados até agora, vamos demonstrar a fórmula de Gutzmer, e de seguida estabelecer a sua ligação com o princípio do módulo máximo ([21]).

Teorema 2.3.1 (Fórmula de Gutzmer)
Sejam $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ com $0 < r < R$, $z \in D(z_0; R)$ e $M = \max_{|z-z_0|=r}|f(z)|$. Então é válida a fórmula de Gutzmer

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta \leq M^2.$$

Demonstração:

Por definição de conjugado complexo segue-se

$$\overline{f(z_0 + re^{i\theta})} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} r^n e^{-in\theta}. \tag{2.16}$$

Temos ainda,

$$\overline{f(z_0 + re^{i\theta})} f(z_0 + re^{i\theta}) = |f(z_0 + re^{i\theta})|^2. \tag{2.17}$$

De (2.16) e (2.17) resulta que

$$|f(z_0 + re^{i\theta})|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} r^n f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta}, \tag{2.18}$$

onde a série em (2.18) converge uniformemente no intervalo $[0, 2\pi]$.

Mas então, integrando termo a termo (2.18) ([8]) obtemos

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} r^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta,$$

e por (2.15) conclui-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} r^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} r^n a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}. \tag{2.19}$$

Como $M = \max\limits_{|z-z_0|=r} |f(z)|$, logo $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta \leq M^2$, como pretendíamos ([21]). ■

Da fórmula de Gutzmer, podem obter-se alguns resultados interessantes relacionados com o princípio do módulo máximo. Por exemplo notemos que particularizando a desigualdade

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq M^2, \tag{2.20}$$

ficamos com a seguinte expressão

$$|a_n|^2 r^{2n} \leq M^2. \tag{2.21}$$

Consequentemente,

$$|a_n|^2 \leq \frac{M^2}{r^{2n}} \Rightarrow |a_n| \leq \frac{M}{r^n}, \tag{2.22}$$

que é exactamente a desigualdade de Cauchy, conforme vimos nos preliminares no Teorema 1.5.2.

Outro resultado directo é o próprio princípio do módulo máximo, como se pode notar no teorema a seguir.

Teorema 2.3.2

Sejam Ω um domínio em $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ arbitrário e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Então f é constante em Ω, ou cada vizinhança de z_0 contém um ponto z_1 tal que $|f(z_0)| \leq |f(z_1)|$, isto é, f é constante ou $|f|$ não tem máximo local para qualquer ponto no interior de Ω.

Demonstração:

Assuma-se que existe um $R > 0$ tal que $D(z_0; R) \subset \Omega$ e $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, $\forall z \in D(z_0; R)$. Representando $f(z)$ pela série de Taylor, tem-se

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Logo, para todo $r < R$ e usando a fórmula de Gutzmer sai que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq |f(z_0)|^2 = |a_0|^2. \tag{2.23}$$

Consequentemente, por (2.23) $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n = ... = 0$ e $f(z) = f(z_0) = a_0$ no disco $D(z_0; R)$ contido em Ω. Mas, como $D(z_0; R)$ é um subconjunto de Ω, por um resultado do teorema 1.5.1 (teorema da identidade) concluímos que f é constante em Ω ([22]). $\blacksquare$

Tal como nas versões anteriores, esta versão do princípio do módulo máximo, garante-nos que funções não constantes holomorfas em domínios limitados, não podem alcançar máximos no interior destes domínios.

Este facto, também é reforçada na quarta versão do princípio do módulo máximo, onde analogamente usamos séries de potências na sua demonstração, no entanto, é totalmente diferente como veremos.

2.4 Princípio do módulo máximo, versão 4

A presente secção, tem como objectivo demonstrar o princípio do módulo máximo, utilizando uma outra técnica pouco conhecida baseada em propriedades de séries de potências. Salienta-se que nesta versão a demonstração é feita por redução ao absurdo, como podemos constatar a seguir.

Teorema 2.4.1
Sejam Ω um domínio limitado em $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa em Ω. Então $|f(z)|$ não pode atingir o seu máximo em nenhum ponto interior de Ω, excepto no caso em que $f(z)$ é constante.

Demonstração:

A demonstração é feita por redução ao absurdo. Por isso, suponhamos que $f(z)$ não é constante e que em $z_0 \in int(\Omega)$ é igual a $f(z_0) = a_0 \neq 0$. Além disso, suponhamos que $\forall z \in \Omega$, $|f(z)| \leq a_0$.

Escolhemos $\varepsilon > 0$ e $\forall z \in \Omega$, na vizinhança de $z_0 : |z - z_0| < \varepsilon$, e seja

$$f(z) = a_0 + a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + ..., \, onde \;\; a_k \neq 0.$$

Obtém-se,

$$f(z) = a_0 + a_k(z - z_0)^k + (z - z_0)^k \underbrace{\left[a_{k+1}(z - z_0) + a_{k+2}(z - z_0)^2 + ...\right]}_{p_z}. \qquad (2.24)$$

Consideremos uma vizinhança de z_0 $D(z_0; \delta)$, com $0 < \delta < \varepsilon$, $|p_z| < \frac{1}{2}|a_k|$.

Seja ainda, $\theta = \arg \frac{a_0}{a_k}$, onde $0 \leq \arg \frac{a_0}{a_k} < 2\pi$. Então para algum ξ na vizinhança $D(z_0; \delta)$, com $\xi = z_0 + \delta e^{i\frac{\theta}{k}}$ temos que $\arg(\xi - z_0) = \frac{\theta}{k}$.

Adicionalmente, temos

$$\arg\left[a_k(\xi - z_0)^k\right] = \arg a_k + k \arg(\xi - z_0) = \arg a_k + \arg \frac{a_0}{a_k} = \arg a_0,$$

e ao longo do raio correspondente $\arg a_0$ temos

$$|a_0 + a_k(\xi - z_0)^k| = |a_0| + |a_k||\xi - z_0|^k. \qquad (2.25)$$

Assim,

$$|f(\xi)| = |a_0 + a_k(\xi - z_0)^k + a_{k+1}(\xi - z_0)^{k+1} + ...| \qquad (2.26)$$

$$\geq |a_0 + a_k(\xi - z_0)^k| - \underbrace{|a_{k+1}(\xi - z_0)^{k+1} + ...|}_{p_\xi}. \qquad (2.27)$$

Observemos que $p_\xi = |(\xi - z_0)^k|| \underbrace{a_{k+1}(\xi - z_0) + a_{k+2}(\xi - z_0)^2 + ...}_{<\frac{1}{2}|a_k|}|$.

Então, por (2.25) e (2.27) temos

$$|f(\xi)| > |a_0| + |a_k|\delta^k - \delta^k|\underbrace{a_{k+1}(\xi - z_0) + a_{k+2}(\xi - z_0)^2 + ...}_{<\frac{1}{2}|a_k|}| \tag{2.28}$$

$$> |a_0| + |a_k|\delta^k - \delta^k\frac{1}{2}|a_k| = |a_0| + \frac{1}{2}|a_k|\delta^k. \tag{2.29}$$

Sendo assim, concluímos que $|f(\xi)| > |a_0| = f(z_0)$, o que é uma contradição, pois estamos a afirmar que na vizinhança do máximo existe um elemento maior que o próprio máximo ([20]). ■

A demonstração do princípio do módulo máximo, na quinta versão é de carácter topológico e baseia-se no teorema da aplicação aberta.

2.5 Princípio do módulo máximo, versão 5

Nesta secção iremos dar continuidade ao estudo do princípio do módulo máximo, para tal, usaremos como ferramenta alguns resultados.

Para começar segue-se o primeiro resultado.

Lema 2.5.1
Seja f uma função holomorfa em $\overline{D(z_0;r)}$. Se

$$|f(z_0)| < \min_{|\xi - z_0| = r} |f(\xi)|,$$

então f possui um zero em $D(z_0;r)$.

Demonstração:

Suponhamos, por redução ao absurdo, que a função f não possui nenhum zero em $D(z_0;r)$. Então, a função $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ é holomorfa em $\overline{D(z_0;r)}$. Consideremos a desigualdade de Cauchy para $n = 0$,

$$|g(z_0)| \leq \max_{|\xi - z_0| = r} |g(\xi)| \ , \tag{2.30}$$

isto é,

$$|g(z_0)| = \frac{1}{|f(z_0)|} \leq \max_{|\xi - z_0| = r} \frac{1}{|f(\xi)|} = \frac{1}{\min\limits_{|\xi - z_0| = r} |f(\xi)|} \ . \tag{2.31}$$

Da expressão (2.31) conclui-se que,

$$\min_{|\xi - z_0| = r} |f(\xi)| \leq |f(z_0)| \,, \tag{2.32}$$

que é uma contradição. Portanto, f possui um zero no disco $D(z_0; r)$ ([21]). ■

Uma consequência evidente do Lema 2.5.1, é que, sendo f uma função holomorfa em $\overline{D(z_0; r)}$ e sendo $d \in \mathbb{C}$ uma constante arbitrária, se

$$|f(z_0) - d| < \min_{|\xi - z_0| = r} |f(\xi) - d| \,, \tag{2.33}$$

então f é igual a d pelo menos num ponto z^* em $D(z_0; r)$. Isso é óbvio, basta aplicar o lema 2.5.1para a função $g(z) = f(z) - d$.

Teorema 2.5.1 (Teorema da aplicação aberta)
Seja f uma função holomorfa e não constante no domínio Ω, então a imagem de Ω, isto é, $f(\Omega)$, também é um domínio.

Demonstração:

Para demonstrar este teorema basta mostrarmos que a imagem de Ω, $f(\Omega)$ é um conjunto conexo e aberto, que na verdade é a definição de um domínio como vimos nos preliminares.

i) Sejam $w_1, w_2 \in f(\Omega)$ e $z_1, z_2 \in \Omega$ arbitrários, tais que $w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$ e γ uma curva (caminho) em Ω que liga z_1 com z_2.

Como por hipótese f é holomorfa logo é contínua, por isso

$$\gamma_1 = f \circ \gamma \subset f(\Omega) \tag{2.34}$$

é um caminho que liga w_1 com w_2. Portanto, $f(\Omega)$ é conexo. Falta mostrar que $f(\Omega)$ é aberto.

ii) Sejam $w_0 \in f(\Omega)$ e $z_0 \in \Omega$ arbitrários, tal que $f(z_0) = w_0$. Seja ainda, z_0 um zero da função holomorfa $g(z) = f(z) - w_0$.

Como sabemos, existe um $r > 0$ tal que z_0 é o único ponto em $|z - z_0| \leq r$ onde $f(z_0) = w_0$, ou seja, a função g tem zeros isolados (consequência do teorema da identidade).

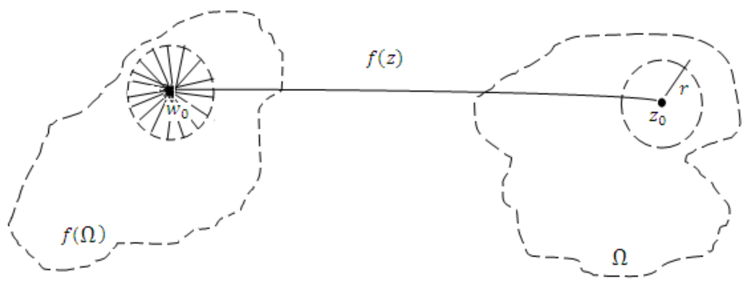

Figura 2.1: Imagem de $f(z_0) = w_0$

Por conseguinte, usando o Lema 2.5.1, sabemos que

$$0 < \mu = \min_{|z-z_0|=r} |f(z) - w_0| = \min_{|z-z_0|=r} |g(z)| \, . \tag{2.35}$$

Consideremos

$$V_\mu = \{w : |w - w_0| < \frac{\mu}{2}\} \, , \tag{2.36}$$

isto é, uma vizinhança de w_0 em $f(\Omega)$. Seja $w_1 \in V_\mu$ arbitrário, então

$$f(z) - w_1 = f(z) - w_0 + (w_0 - w_1). \tag{2.37}$$

Sendo assim, pelas expressões (2.35), (2.36) e (2.37), deduzimos que,

$$|f(z) - w_1| \geq \Big| |f(z) - w_0| - |w_0 - w_1| \Big| > \mu - \frac{\mu}{2} = \frac{\mu}{2} \, . \tag{2.38}$$

Tendo em conta que,

$$|f(z_0) - w_1| = |w_0 - w_1| < \frac{\mu}{2} \, , \tag{2.39}$$

obtemos que,

$$|f(z_0) - w_1| < \frac{\mu}{2} = \min_{|z-z_0|=r} |f(z) - w_1| \, . \tag{2.40}$$

Aplicando o Lema 2.5.1, sabemos que existe um ponto z^* em $|z - z_0| < r$ tal que $f(z^*) = w_1$, ou seja, z^* é zero da função $g(z) = f(z) - w_1$, isto é, $w_1 \in f(\Omega)$. Uma vez que, w_1 é um ponto arbitrário de V_μ, concluímos que, $V_\mu \subset f(\Omega)$ logo, $f(\Omega)$ é aberto, como pretendíamos demonstrar ([1], [3], [21]). ■

Estamos agora em condições de demonstrar o princípio do módulo máximo, usando o teorema da aplicação aberta.

Teorema 2.5.2 (Princípio do módulo máximo)
Sejam Ω um domínio e $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Se $|f|$ tem um máximo local em $z_0 \in \Omega$, então f é constante em Ω. Se Ω é um domínio limitado e f é contínua em $\overline{\Omega}$, então o máximo de $|f|$ em $\overline{\Omega}$ é atingida em $\partial\Omega$, isto é,

$$|f(z)| \leq \max_{\xi \in \partial\Omega} |f(\xi)| \, .$$

Demonstração:

Suponhamos que f não é constante.

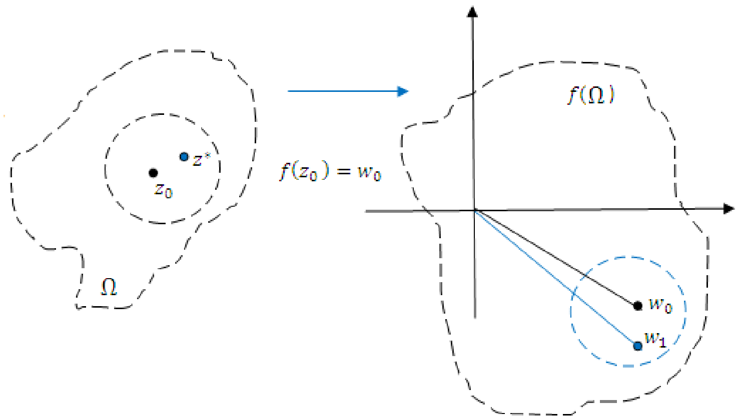

Figura 2.2: Ilustração da aplicação aberta

Tendo em conta a definição de V_μ usada no Teorema 2.5.1 (da aplicação aberta), então existe um w_1 e um $V_\mu(w_0)$ tal que, $|w_1| > |w_0|$. Também existe $z^* \in D(z_0; r)$ tal que, $f(z^*) = w_1$. Com efeito, se $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ em $D(z_0; r)$, temos neste caso um máximo local, então, isto implica que $|f(z_0)| = |w_0| < |f(z^*)| \leq |f(z_0)|$. Portanto, f não pode ser não constante.

Demonstremos a segunda parte do teorema. Suponhamos que f não é constante, mas contínua em $\overline{\Omega}$, então não existe um ponto $z^* \in \Omega$ tal que $f(z^*) = \max_{z \in \Omega} |f(z)|$. Por outro lado, $|f(z)|$ é contínua e o seu máximo deve ser atingido em $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Por conseguinte, concluímos que $\max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{\xi \in \partial\Omega} |f(\xi)|$, como pretendíamos demonstrar ([1], [21]). ■

A seguir, apresenta-se a última versão do princípio do módulo máximo.

2.6 Princípio do módulo máximo, versão 6

Teorema 2.6.1
Sejam Ω um domínio limitado em $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa e contínua na fronteira de Ω. Então o máximo de $|f|$ é assumido na fronteira de Ω.

Demonstração:

Como Ω é fechado e limitado, neste caso o teorema de Weierstrass garante-nos que $|f(z)|$ tem um máximo em Ω. Suponha-se que este máximo é atingido num ponto qualquer $z_0 \in \Omega$. Se z_0 é um ponto da fronteira, então não há nada a provar. Se z_0 é um ponto do interior, então $|f(z_0)|$ é também o máximo de $|f(z)|$ no disco $|z - z_0| < \varepsilon$ contido em Ω. Mas pelo teorema da identidade, isso não é possível, a menos que $f(z)$ seja constante no interior de Ω que contém z_0. Segue-se por continuidade que $|f(z)|$ é igual ao seu máximo em toda a fronteira. Esta fronteira não é vazia e contém a fronteira de Ω. Assim sendo, o máximo é sempre assumido no ponto situado na fronteira ([1]). ■

Como podemos ver, de forma sucinta e simples, fica evidente que o máximo da função módulo quando este não é constante, só é verificado na fronteira do domínio onde a função está definida.

2.7 Aplicações do princípio do módulo máximo

2.7.1 Princípio do módulo mínimo

Nas secções anteriores abordou-se o princípio do módulo máximo. Também, se pode falar do *princípio do módulo* mínimo, desde que, se acrescente uma pequena condição. A função não se deve anular em nenhum ponto pertencente a aderência do seu domínio.

O corolário salienta este facto.

Corolário 2.7.1 (Princípio do módulo mínimo)
Seja f uma função não constante, holomorfa no domínio limitado $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, e contínua na fronteira $\partial\Omega$. Se $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$, então existe um $z_0 \in \partial\Omega$ arbitrário, tal que $|f(z_0)| \leq |f(z)|$, ou seja, o mínimo do módulo é atingido na fronteira de Ω.

Demonstração:

Seja f uma função arbitrária holomorfa num domínio limitado Ω e contínua na fronteira do mesmo. Queremos mostrar que existe um ponto $z_0 \in \partial\Omega$ tal que $|f(z_0)| \leq |f(z)|, \forall z \in \Omega$.

Consideremos $g(z) = \frac{1}{f(z)}$. Então, como por hipótese $f(z) \neq 0$, concluímos que g satisfaz o princípio do módulo máximo. Sendo assim, existe um $z_0 \in \partial\Omega$, tal que $\frac{1}{|f(z_0)|} \geq \frac{1}{|f(z)|}$, ou seja, $|g(z_0)| \geq |g(z)|, \ \forall z \in \Omega$. Por conseguinte, $\frac{1}{|g(z_0)|} = |f(z_0)| \leq |f(z)| = \frac{1}{|g(z)|}$, como pretendíamos provar. ■

É de salientar que os pontos onde $f(z) = 0$, são os mínimos locais de $|f|$. Assim, os únicos pontos onde a função módulo pode atingir mínimos são pontos na fronteira do domínio, desde que as funções sejam contínuas neste mesmo domínio, ou pontos onde a função é zero.

Torna-se interessante reter deste corolário que sendo f uma função não nula em qualquer ponto de aderência do seu domínio então existirá sempre outra função g, também não nula em nenhum ponto deste mesmo domínio, e um ponto qualquer na fronteira que é máximo de $|f|$ e mínimo de $|g|$ ou vice-versa.

Ainda se pode dizer que f e g são tais que, $g(z) \cdot f(z) = 1$, para qualquer z no respectivo domínio. Portanto, concluímos que o máximo do módulo de uma função nunca pode ser zero.

Visualização das formas possíveis e impossíveis para o gráfico (superfície) $\Gamma = \{(x, y, w) : w = |f(z)|, z = x + iy\}$

A Figura 2.3 ilustra 4 casos possíveis quando consideramos os princípios do módulo máximo ou mínimo.

Como podemos observar na Figura 2.3, nos casos a e b, o máximo e mínimo do módulo de uma função holomorfa num dado domínio limitado, nunca podem ser alcançados no interior do referido domínio. No caso c, podemos observar que a função módulo pode alcançar mínimos locais iguais a zero para pontos onde a função se anula (está assente no domínio). E por fim, no caso d (sela) onde se apresenta um ponto de sela da função módulo no domínio, isto é, quando numa direcção se atinge um máximo (máximo na direcção das pernas) e, na outra direcção, um mínimo (mínimo na direcção longitudinal) no mesmo

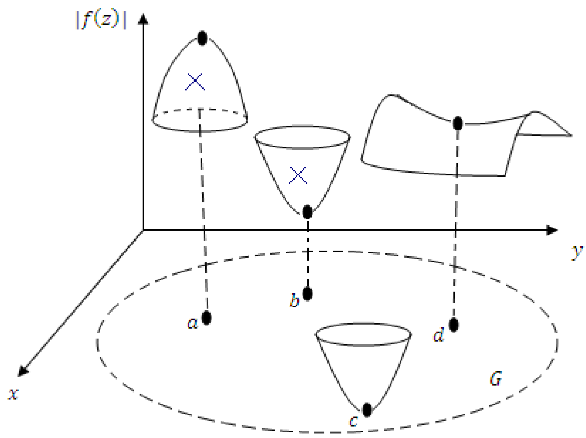

Figura 2.3: Ilustração de 4 casos no princípio do módulo máximo (mínimo)

ponto.

2.7.2 Lema de Schwarz

O lema de Schwarz, é uma consequência do princípio do módulo máximo, e basicamente afirma que se considerarmos uma função f holomorfa no disco $D(0;r)$, onde f é contínua no fecho $\overline{D(0;r)}$, e se $|f|$ for majorada por uma constante $M > 0$ na fronteira do disco, então M continuará maior que f no interior do disco e a igualdade só será verificada se a função f for uma constante com valor absoluto igual a M.

Lema 2.7.1 (Lema De Schwarz)
Seja $r > 0$ arbitrário e f uma função holomorfa no disco $D(0;r) = \{z : |z| < r\}$, contínua em $\overline{D(0;r)}$ tal que $f(0) = 0$. Suponhamos ainda que, $|f(z)| \leq M < \infty$ $\forall z \in D(0;r)$. Então, para todo $z \in D(0;r)$ é válido

$$|f(z)| \leq \frac{M}{r}|z|, \tag{2.41}$$

e além disso

$$|f'(0)| \leq \frac{M}{r}. \tag{2.42}$$

A igualdade em (2.41) $\forall z \neq 0$ ou em (2.42) é verificada se e somente se $f(z)$ é uma função da seguinte forma:

$$f(z) = \frac{M}{r}e^{i\theta}z, \ \theta \in \mathbb{R}. \tag{2.43}$$

Demonstração:

Consideremos em $\overline{D(0;r)}$ a função g definida da seguinte forma:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{se } z \neq 0 \\ \\ f'(0) & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

Podemos observar que:

$$\lim_{z \to 0} g(z) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = f'(0) = g(0),$$

logo esta função é contínua em $\overline{D(0;r)}$.

Por ser contínua em $\overline{D(0;r)}$, a função é holomorfa em $D(0;r)$ ([5]).
Ao longo da circunferência $|z| = r$ tem-se

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} = \frac{|f(z)|}{r} \Rightarrow |f(z)| = \frac{|f(z)|}{|r|}|z| \leq \frac{M}{r}|z|. \tag{2.44}$$

Aplicando o princípio do módulo máximo à função g em $\overline{D(0;r)}$, sabemos que o valor máximo de $|g|$ é atingido na fronteira de $\overline{D(0;r)}$, ou seja, na circunferência $|z| = r$. Assim, $|g(z)| \leq \frac{|M|}{r}$ $\forall z \in D(0;r)$, e uma vez que,

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \frac{M}{r} \Leftrightarrow |f(z)| \leq \frac{M}{r}|z|$$

para $z \neq 0$, ainda temos que

$$|g(0)| \leq \frac{|M|}{r} \Leftrightarrow |f'(0)| \leq \frac{M}{r}. \tag{2.45}$$

Como, por hipótese, $f(0) = 0$, concluímos que $\forall z \in \overline{D(0;r)}$, $|f(z)| \leq \frac{M}{r}|z|$.

Agora prove-se a segunda parte do lema, isto é, que a igualdade em (2.41) $\forall z \neq 0$ ou em (2.42) é verificada, se e somente se, $f(z)$ é uma função da seguinte forma:

$$f(z) = \frac{M}{r} e^{i\theta} z, \ \forall\, \theta \in \mathbb{R}.$$

Pelo princípio do módulo máximo, a desigualdade $|g(z)| \leq \frac{M}{r}$ é uma igualdade, se e somente se, $g(z) \equiv const$ em $D(0;r)$. Uma vez que, esta constante tem valor absoluto, $\frac{M}{r}$, e como, $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$, sabemos que $|e^{i\theta}| = |\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$, logo obtém-se o resultado,

$$g(z) = \frac{M}{r} e^{i\theta} \Leftrightarrow f(z) = \frac{M}{r} e^{i\theta} z \Leftrightarrow |f(z)| = \frac{M}{r}|z|,$$

como pretendíamos ([15], [22]). ■

Geometricamente, o lema de Schwarz afirma que f é uma aplicação holomorfa do disco $D(0;r)$ para o mesmo disco $D(0;r)$ que deixa fixa a origem, contraindo a distância à origem ou f é uma rotação. As Figuras 2.4 e 2.5 ilustram um caso particular deste Lema, isto é, onde $r = M = 1$.

i) f aplica um disco de centro na origem, noutro disco de centro na origem, contraindo as distâncias à origem.

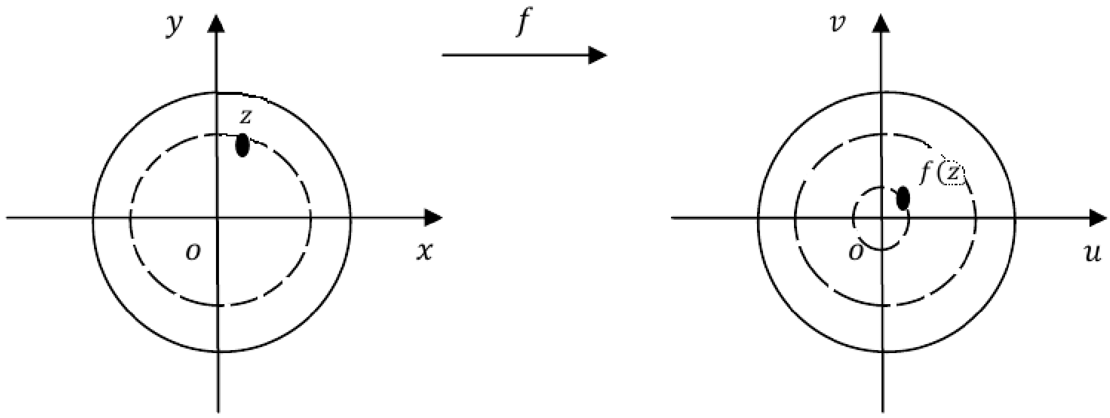

Figura 2.4: Contracção de distâncias à origem

ii) Se à distância a origem de algum ponto z_0 se mantém invariante por f, ou seja, se $|f(z_0)| = |z_0|$, então f é uma rotação em torno da origem.

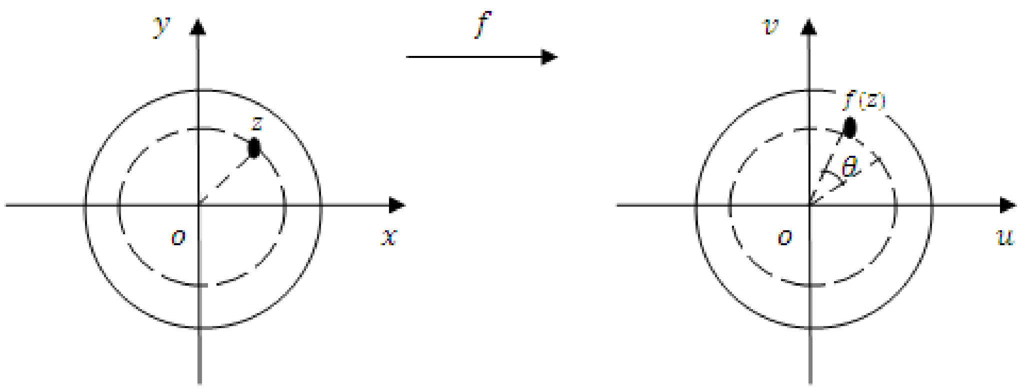

Figura 2.5: Rotação em torno da origem

Capítulo 3

Teoremas do tipo Phragmén-Lindelöf como generalização do princípio do módulo máximo

Como já se tinha mencionado na introdução deste trabalho, pretende-se neste capítulo continuar a abordagem do princípio do módulo máximo, em concreto pretende-se dar uma generalização conhecida como teorema do tipo Phragmén-Lindelöf.

Estudar-se-á esta generalização sobre um sector no plano complexo e, em seguida, sobre uma faixa.

3.1 Teorema do tipo Phragmén-Lindelöf para um sector

No capítulo anterior, viu-se através das diferentes versões do teorema do princípio do módulo máximo, que sendo a função $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa no domínio limitado Ω e contínua na fronteira do mesmo domínio, então o máximo de $|f|$ é atingido na fronteira do domínio Ω.

Porém notemos que, caso o domínio Ω não seja limitado, o que foi dito anteriormente, não é sempre verdade. Ora analisemos o seguinte exemplo:

Seja $f = e^{e^z}$ definida na faixa $\left\{ -\frac{\pi}{2} < Im(z) < \frac{\pi}{2} \right\}$. O problema em questão, é que a função f tende para infinito muito mais rápido do que z tende para infinito ao longo do eixo real positivo.

Como sabemos $|e^{e^z}| = |e^{e^{x+iy}}| = e^{Re(e^{x+iy})} = e^{e^x.\cos y}$, onde $z = x + iy$, $y = Im(z)$ é fixo e $\cos y > 0$. Ao analisarmos esta função podemos notar que esta "expande", uma vez que, $x = Re(z) \to \infty$. Por outro lado, para $\cos y = 0$, a função é limitada. Sendo assim, na faixa $\{ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \}$ a função $f = e^{e^z}$ é limitada nos limites da faixa (orlas), no entanto, tende para infinito, quando $x \to \infty$ ([22]).

O teorema Phragmén-Lindelöf resolve-nos problemas descritos em circunstâncias como as do exemplo anterior. De facto, este teorema mostra-nos que podemos limitar ou diminuir a rapidez com que as funções tendem para infinito e, consequentemente, mostrar que é possível limitar funções em domínios ilimitados.

Teorema 3.1.1 (Phragmén-Lindelöf para um sector)

Seja G um sector com uma abertura de $\alpha\pi$ onde $0 < \alpha \leq 2$ como se mostra na Figura 3.1.

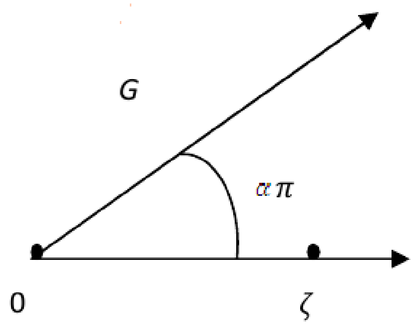

Figura 3.1: Sector G com abertura de $\alpha\pi$

Seja f uma função holomorfa em G e para qual as seguintes propriedades são válidas $\forall\zeta$ na fronteira de G :

i)

$$\overline{\lim_{z\to\zeta}} \left|f(z)\right| \leq C < \infty. \tag{3.1}$$

ii)

$$\varrho = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} < \frac{1}{\alpha}, \tag{3.2}$$

onde $M(r) = max\left[e, \sup_{|z|=r} \left|f(z)\right| \right]$, $\forall z \in G$.

Então, segue-se que

$$|f(z)| \leq C, \tag{3.3}$$

em todo o domínio G e o sinal da igualdade só é possível se $\big|f(z)\big| \equiv const.$

Demonstração:

A desigualdade (3.2) significa que: $\forall \varrho_1$ tal que $\varrho < \varrho_1 < \frac{1}{\alpha}$ existe $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $R_n < R_{n+1}$ e

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \infty \text{ e } \big|f(z)\big| < e^{\big|z\big|^{\varrho_1}} \text{ para } \big|z\big| = R_n,\ n = 1, 2, \cdots . \tag{3.4}$$

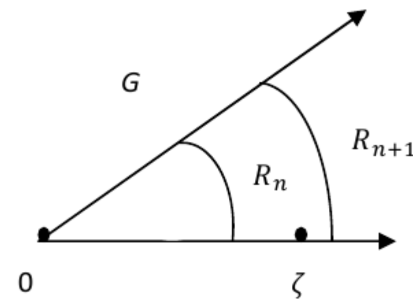

Figura 3.2: Ilustração de R_n e R_{n+1}

Embora o sector G pode estar numa posição arbitrária, considere-se agora a posição de G tal como se mostra na Figura 3.3.

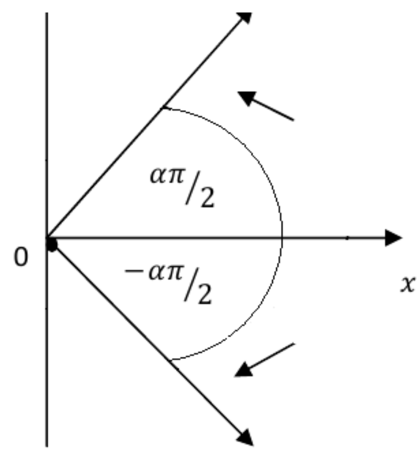

Figura 3.3: Ilustração de G numa outra posição

Consideremos a função auxiliar:

$$F_\varepsilon(z) = f(z) \cdot e^{(-\varepsilon z^{\varrho_2})}, \ \ \varepsilon > 0, \tag{3.5}$$

onde $\varrho_1 < \varrho_2 < \frac{1}{\alpha}$ e z^{ϱ_2} representa o ramo de $z^{\varrho_2} = e^{\varrho_2 Lnz}$ que tem valores positivos se z for real e positivo , isto é, $z^{\varrho_2} = e^{\varrho_2 \ln z}$.

Tomemos um sub-sector g_{R_n} de G com fronteira dado por R_n, tal que $\left|z\right| < R_n$.

Então, em cada ponto ζ nas "semi-rectas"da fronteira temos pelas expressões (3.1) e (3.5) que :

$$\overline{lim}_{z\to\zeta} \left|F_\varepsilon(z)\right| \leq C \cdot \underset{z\to\zeta}{lim} \left| \, e^{-\varepsilon z^{\varrho_2}} \right| = C \cdot e^{-\varepsilon r^{\varrho_2} \cos \varrho_2 \theta} \leq C,$$

uma vez que, se $z = re^{i\theta}$ então $-\varepsilon z^{\varrho_2} = -\varepsilon(r^{\varrho_2}[\cos(\varrho_2\theta) + i\sin(\varrho_2\theta)])$, logo $Re(-\varepsilon z^{\varrho_2}) = -\varepsilon r^{\varrho_2}\cos(\varrho_2\theta)$.

É de salientar que, em G tem-se que $|\varrho_2\theta| < \frac{\alpha\pi}{2\alpha} = \frac{\pi}{2}$, por isso $\cos\varrho_2\theta > 0$. Na fronteira circular (arco do sector) de g_{R_n}, $\left|z\right| = R_n$ e pelas expressões (3.4) e (3.5) obtem-se:

$$\left|F_\varepsilon(z)\right| < e^{(R_n^{\varrho_1} - \varepsilon R_n^{\varrho_2} \cos\varrho_2\theta)} \leq e^{[R_n^{\varrho_1} - \varepsilon R_n^{\varrho_2} \cos(\varrho_2 \frac{\alpha\pi}{2})]}, \tag{3.6}$$

e uma vez que $\cos(\varrho_2\frac{\alpha\pi}{2}) > 0$ e $\varrho_1 < \varrho_2$ o lado direito da desigualdade da expressão (3.6) converge para 0 quando $R_n \to \infty$. Escolhendo R_n suficientemente grande, de forma que qualquer ponto arbitrário z_0 escolhido em G, fique dentro de g_{R_n} e o lado direito da desigualdade (3.6) fique menor do que C. Então, em todo g_{R_n} tem-se na fronteira:

$$\overline{lim}_{z\to\zeta}\left|F_\varepsilon(z)\right| \leq C, \tag{3.7}$$

por outro lado, aplicando o princípio do módulo máximo concluímos que

$$\left|F_\varepsilon(z_0)\right| \leq C, \tag{3.8}$$

Notemos que a desigualdade da expressão (3.8) é uma igualdade se $F_\varepsilon(z_0) = C$. Escrevendo $F_\varepsilon(z_0)$ explicitamente, e se deixarmos ε tender para 0, obtemos através das expressões (3.5) e (3.8) que

$$\underset{\varepsilon\to 0}{lim}\left|f(z_0) \cdot e^{-\varepsilon z_0^{\varrho_2}}\right| = \left|f(z_0)\right| \leq C. \tag{3.9}$$

No caso de $\left|f(z_0)\right| = C$, tem-se que o módulo de f atinge o seu valor máximo no interior de G e consequentemente, $f(z) \equiv const$ ([15]). ■

3.2 Teorema do tipo Phragmén-Lindelöf para uma faixa

Teorema 3.2.1 (Teorema do tipo Phragmén-Lindelöf para uma faixa (strip)) *Seja D a faixa*

$$-\frac{h\pi}{2} < y < \frac{h\pi}{2}$$

de largura h como se mostra na Figura 3.4.

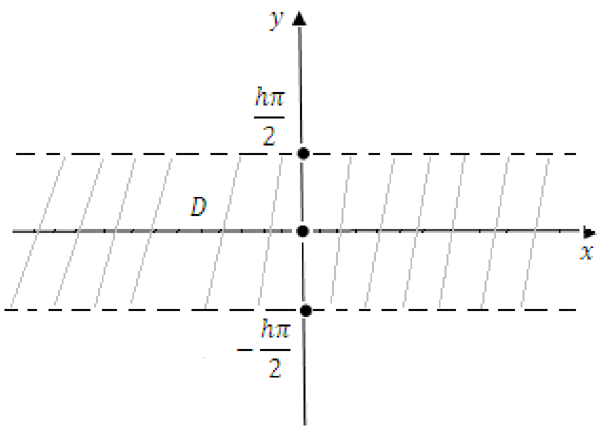

Figura 3.4: Faixa D

Seja f uma função holomorfa em D. Suponhamos ainda que as seguintes propriedades são válidas para todo ζ na fronteira de D:

i)

$$\overline{lim}_{z \to \zeta} \left|f(z)\right| \leq C < \infty, \tag{3.10}$$

ii)

$$\overline{lim}_{x \to -\infty} \left|f(x+iy)\right| \leq C, \tag{3.11}$$

iii)

$$\underline{lim}_{x \to +\infty} \frac{\ln \mu(x)}{e^{\frac{x}{h}}} \leq 0, \tag{3.12}$$

onde

$$\mu(x) = \sup_{-\frac{h\pi}{2}<y<\frac{h\pi}{2}} \left|f(x+iy)\right|. \tag{3.13}$$

Então $\left|f(z)\right| \leq C$ *para todo o* $z \in D$. *Se além disso,* $\left|f(z_0)\right| = C$ *para algum* $z_0 \in D$, *então*

$$f(z) \equiv C.$$

Demonstração:

A função

$$z' = e^{\frac{z}{h}}$$

transforma a faixa D na metade direita do plano G, onde G é o interior de qualquer ângulo de π radianos. As extremidades da faixa, $x = -\infty$ e $x = \infty$ são transformadas nos pontos $z' = 0$ e $z' = \infty$, respectivamente. A função ainda transforma cada segmento de recta $x = const$ em sem-círculos com centro em 0. A Figura 3.5 ilustra isso.

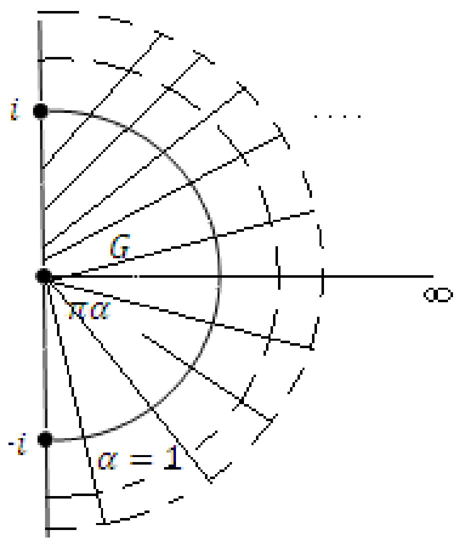

Figura 3.5: Ilustração da transformação da faixa em semicírculos

Portanto, se escrevermos

$$f(\ln hz') = F(z'),$$

então, como $F(z')$ é uma transformação conforme é holomorfa em G e pelo princípio do módulo máximo satisfaz a desigualdade

$$\overline{lim}_{z' \to \zeta'} \left| F(z') \right| \leq C \tag{3.14}$$

para todo ζ' na fronteira de G. Seja $r' = |z'|$ e $x = Rez$, onde $r' = e^{\frac{x}{h}}$, então

$$M(r') = \sup_{|z'|=r'} \left| F(z') \right| = \sup_{Rez=x} \left| f(z) \right| = \mu(x), \tag{3.15}$$

assim sendo,

$$\frac{\ln M(r')}{r'} = \frac{\ln \mu(x)}{e^{\frac{x}{h}}}. \tag{3.16}$$

Segue-se que,

$$\underline{lim}_{r' \to \infty} \frac{\ln M(r')}{r'} = \underline{lim}_{x \to +\infty} \frac{\ln \mu(x)}{e^{\frac{x}{h}}} \leq 0. \tag{3.17}$$

Se aplicarmos Phragmén-Lindelöf para o domínio G com $\alpha = 1$, sabemos que $\left| F(z') \right| \leq C$ para todo $z' \in G$. Ora, então $\left| f(z) \right| \leq C$ para todo $z \in D$. Analogamente, se $\left| f(z_0) \right| = C$ para algum $z_0 \in D$ então, $\left| F(z'_0) \right| = C$ para $z'_0 = e^{\frac{z'_0}{h}}$ portanto, $F(z') \equiv C$ implica que $f(z) \equiv C$ ([15]). ■

Considerações finais

O princípio do módulo máximo é um dos mais fundamentais teoremas na Teoria das Funções e permite através das suas diferentes demonstrações estudar métodos específicos que resultam das diferentes abordagens de Cauchy, de Weierstrass e de Riemann à Análise Complexa. Além disso, permitiram as suas generalizações na forma de teoremas do tipo Phragmén-Lindelöf, estudar um dos mais poderosos métodos geométricos da Análise Complexa, nomeadamente o método das transformações conformes.

No Capítulo 2 abordamos várias e diferentes versões do princípio do módulo máximo como base para as suas generalizações, os teoremas do tipo Phragmén-Lindelöf. Neste capítulo, ainda se considerou, na última secção, também duas importantes consequências do princípio do módulo máximo: o princípio do módulo mínimo e o lema de Schwarz.

Finalmente, no Capítulo 3 estudamos duas formas diferentes de generalizar o princípio do módulo máximo: num domínio dado como um sector e num outro dado como uma faixa. Ambos teoremas estão ligadas através de transformações conformes entre o sector e a faixa. São denominadas teoremas do tipo Phragmén-Lindelöf e generalizam o princípio do módulo máximo, pois, com os teoremas do tipo Phragmén-Lindelöf foi possível expandir o princípio de módulo máximo para funções holomorfas em domínios ilimitados. Como se observou ao longo do mesmo capítulo, a técnica adoptada por Phragmén e Lindelöf foi limitar a rapidez de crescimento da função holomorfa para infinito no interior do sector ou da faixa.

Para concluir, ressalta-se que o princípio do módulo máximo e sua expansão permitem resultados com aplicações em diversas áreas da matemática, entre estes, figuram problemas sobre equações diferenciais parciais elípticas não lineares, problemas da análise harmónica, o estudo da função zeta, a teoria analítica dos números, etc. Actualmente, encontramos a aplicação dos teoremas do tipo Phragmén-Lindelöf na forma do princípio de Saint-Venant, que está no centro de vários trabalhos científicos, que por sua vez, tem resultados interessantes na Física e Mecânica ([2], [10]).

Bibliografia

[1] Ahlfors, L. V.: *Complex Analysis: An Introduction the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*. 3ed. McGRAW-HILL. Singapore, 1979.

[2] Babenkova, E. and J, Kaplunov.: *Low-frequency decay conditions for a semi-infinite elastic strip*. Proc. R. Soc. Lond. A 460, 2004, 2153-2169.

[3] Bak, J. and Newman, D.: *Complex Analysis*. 2ed. Springer-Verlag. New York, 1997.

[4] Beardon, A. F.: *Complex Analysis: The Argument Principle in Analysis and Topology*. John Wiley and Sons. Cambridge, 1979.

[5] Carreira, M. A. and Nápoles, M. S. M.: *Variável Complexa: Teoria Elementar e Exercicios Resolvidos*. McGRAW-HILL. Portugal, 1998.

[6] Conway, J. B.: *Functions of one complex variable*. 2ed. Springer-Verlag. New York, 1978.

[7] Duncan, J.: *The elements of complex analysis*. John Wiley and Sons. Aberdeen, 1968.

[8] Ferreira, C. J.: *Introdução à Análise Matemática*. 8ed. Fundação Caloustre Gulbenkian. Lisboa, 2005.

[9] Gong, S.: *Concise Complex Analysis*. World Scientific. Singapore, 2001.

[10] Gregory, R. D. and Wan, F. Y. M. .: *On Plate Theories and Saint-Venant´s Principle*. International Journal of Solids and Structures Vol 21, Issue 10, 1985, 1005-1024.

[11] Krantz, S. G.: *Complex Variables: A Physical Approach with Applications and MATLAB*. Chapman and Hall/CRC. Boca Raton, 2008.

[12] Kodaira, K.: *Complex Analysis*. 2ed. Cambridge University Press. Cambridge, 2007.

[13] Lang, S.: *Complex Analysis*. 4ed. Springer-Verlag. New York, 1999.

[14] Lima, E. L.: *Curso de análise vol.2*. 4ed. Impa. Rio de Janeiro, 1981.

[15] Markushevich, A. I.: *Theory of functions of a complex variable*. 2ed. Chelsea Publishing Company. New York, 1977.

[16] Mathews, J. H. and Russel, H.: *Complex Analysis for Mathematics and Engineering*. 5ed. Jones and Bartlett. Sudbury, 2006.

[17] Needham, T.: Visual Complex Analysis. Oxford University Press. New York, 1997.

[18] Norman, L. and Redheffer, R. M.: *Curso de variable compleja*. Reverté, S. A. Barcelona, 1975.

[19] Palka, Bruce P.: *An Introductions to Complex Function Theory*. Springer-Verlag. New York, 1991.

[20] Privalov, I.: *Introduction to the Theory of Functions of Complex Variable*. Nauka. Moscow-Leningrad, 1948.

[21] Remmert, R.: *Theory of Complex Functions*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. New York, 1991.

[22] Rudin, W.: *Real and Complex Analysis*. 3ed. McGRAW-HILL. New York, 1987.

[23] Rudin, W.: *Analyse réelle et complexe*. 3ed. Dunod. Paris, 1998.

[24] Segal, S. L.: *Nine Introductions in Complex Analysis*. Jan van Mill. Amsterdam, 2008.

[25] Spiegel, Murray. R: Theory and Problems of Complex variables with an introduction to comformal mapping and its application. McGRAW-HILL. New York, 1974.

[26] Ullrich, D. C.: *Complex Made Simple*. Graduate studies in mathematics;v. 97. AMS. Providence, R. I, 2008.

Índice