Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
Ano 2009

Telma Daniela Pereira de Pinho

Realizações Parciais de Sistemas Discretos

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações, realizada sob a orientação científica da Doutora Maria Raquel Rocha Pinto, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

À professora Raquel

o júri

Presidente

Prof. Doutor Luís Filipe Pinheiro de Castro
professor catedrático da Universidade de Aveiro

Prof. Doutora Maria Paula Macedo Rocha Malonek
professora catedrática da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Prof. Doutora Maria Raquel Rocha Pinto
professora auxiliar da Universidade de Aveiro

agradecimentos

À professora Raquel por toda a disponibilidade, paciência e carinho com que sempre me brindou. Por todo o apoio científico e orientação na realização desta dissertação e, acima de tudo, por me ter feito sempre acreditar, mesmo nos momentos mais difíceis, que este projecto era possível de concretizar. Por tudo, obrigada!

À professora Paula por me mostrar que existe sempre um caminho a seguir e pelo encorajamento constante.

Ao professor Paolo Vettori por toda a ajuda prestada com a linguagem Latex.

À Andreia pela amizade incondicional de sempre.

Aos meus pais, à minha irmã Tanokas e ao maninho Tiago pela compreensão de todas as horas e pelo suporte familiar que sempre me souberam dar. Adoro-vos!

Ao meu Tiago por ter “ficado” sempre comigo.

palavras-chave

Sistema discreto, parâmetros de Markov, realização parcial

resumo

Nesta dissertação estuda-se o problema de obtenção de uma realização de dimensão mínima, cujos parâmetros de Markov sejam uma extensão de uma dada sequência finita de matrizes da mesma dimensão.

keywords Discrete system, Markov parameters, parcial realization

abstract In this thesis we study the problem of constructing a realization of minimal dimension which corresponding Markov parameters are an extension of a given finite sequence of matrices of the same dimension.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Neste documento estudar-se-ão resultados associados a sistemas dinâmicos discretos, lineares e invariantes no tempo. Esta escolha é motivada, por um lado, pelo facto da análise desta classe de sistemas poder ser feita com base em resultados simples, intuitivos e com os quais estamos mais familiarizados e por outro lado, pelo facto de uma grande parte dos sistemas físicos poderem ser interpretados de uma forma bastante natural através de sistemas discretos. Este último argumento representa uma mais valia sob o ponto de vista prático. Como exemplos de aplicação destes sistemas na modelação de fenómenos podemos referir a modelação ambiental, as previsões económicas ou a teoria dos códigos convolucionais. Importa ainda realçar que a maioria das técnicas desenvolvidas para sistemas discretos também são válidas, embora com as devidas alterações, para sistemas contínuos [Ols94], que não são alvo deste estudo.

Dado um sistema, a relação entrada-saída caracteriza o comportamento do mesmo, permitindo assim estabelecer uma relação que especifica as características do sistema que se pretende estudar. Porém, essa descrição externa do sistema considera-se completa quando é possível relacionar algumas componentes físicas, recorrendo a variáveis auxiliares, denominadas variáveis de estado, obtendo-se uma descrição interna do sistema. No entanto a descrição interna de um sistema não é única, podendo variar o número de variáveis auxiliares introduzidas (isto é, a dimensão do espaço de estados). Por uma questão de eficiência é importante considerar as descrições com dimensão de espaço de estados mínima.

Em 1950, Kalman provou que a relação entrada-saída anteriormente referida permite aceder à parte atingível e observável de um sistema e que esta é a que tem menor dimensão do espaço de estados associado, sobre sistemas que possuem a mesma relação entrada-saída. A determinação de uma descrição interna com dimensão mínima, partindo da descrição externa, ficou conhecida como o problema da realização mínima. Na tentativa de obter resposta para este problema, Kalman determinou uma forma de reduzir um sistema à sua forma atingível e observável. Este passo foi o ponto de partida para a resolução do problema da realização mínima. [KFA69] fornece um algoritmo, designado por algoritmo de Ho, que permite calcular uma descrição mínima de um sistema com relação entrada-saída expressa em termos de uma sucessão de matrizes denominadas parâmetros de Markov. Porém este algoritmo assenta no pressuposto de que existe um número infinito de parâmetros de Markov disponíveis. Uma vez que este pressuposto nem sempre se verifica, iniciou-se a procura de um método que solucionasse o problema quando existe apenas um número finito de parâmetros de Markov conhecidos, isto é, quando a informação sobre o sistema é limitada. Este documento dará especial destaque à resolução desta questão. A este problema chamamos problema da realização parcial. Perante este novo conceito, o objectivo é determinar as descrições de sistemas com menor dimensão de espaço de estados e cuja sucessão de parâmetros de Markov tenha como primeiros parâmetros os parâmetros de Markov inicialmente disponíveis. Obtêm-se assim sistemas que possuem um comportamento inicial semelhante ao sistema original.

Deste modo, estabelecemos como objectivos primordiais deste estudo conhecer propriedades de realizações parciais mínimas, averiguar se são únicas e determinar uma realização parcial de menor dimensão directamente a partir dos dados do sistema disponíveis.

O documento está organizado como se descreve a seguir.

Capítulo 2 - Noções básicas

Na primeira secção deste capítulo introduzem-se alguns conceitos básicos da teoria dos sistemas lineares, nomeadamente a representação de um sistema através de um modelo de espaço de estados. Desta descrição resultará um dos conceitos fundamentais deste estudo, os parâmetros de Markov, que como veremos assumem especial importância no tema desta dissertação. Nas duas últimas secções, para além de se introduzir as propriedades de atingibilidade e de observabilidade de um sistema, apresenta-se um processo para obter sistemas atingíveis e observáveis com os mesmos parâmetros de Markov.

Capítulo 3 - Teoria da realização

Os resultados deste capítulo são importantes para o estudo das realizações parciais. Deste modo, começa-se por introduzir a noção de realização de uma sucessão de parâmetros de Markov por um sistema e averigua-se quando é que uma sucessão deste tipo é de facto realizável, evidenciando a importância da relação que se pode estabelecer entre as matrizes de atingibilidade e observabilidade do sistema e a matriz de Hankel, definida à custa dos parâmetros de Markov. Introduz-se ainda o problema da realização mínima. Na secção seguinte apresenta-se um dos mais interessantes resultados descobertos na teoria da realização que estabelece que dois sistemas mínimos com os mesmos parâmetros de Markov são algebricamente equivalentes. Seguidamente apresenta-se um algoritmo conhecido por algoritmo de Ho que fornece explicitamente a realização mínima pretendida. Na última secção, apresentam-se dois exemplos ilustrativos da aplicação do algoritmo de Ho.

Capítulo 4 - Realizações parciais

Este capítulo é destinado exclusivamente ao estudo de realizações parciais mínimas para uma sequência finita de parâmetros de Markov, contendo assim os resultados mais importantes no âmbito desta tese, e subdivide-se em duas etapas. Na primeira etapa define-se um critério para a existência de uma realização parcial mínima única, com base no conceito de extensão da sequência dada a uma sucessão de parâmetros de Markov. Quando o critério estabelecido é satisfeito, constrói-se a realização parcial mínima recorrendo novamente ao Algoritmo de Ho. Na segunda etapa dá-se resposta ao problema da determinação de uma realização parcial mínima quando o critério referido anteriormente não é satisfeito. Finalmente explora-se exaustivamente um exemplo ilustrativo deste último caso.

Capítulo 5 - Conclusão

Este capítulo apresenta algumas considerações finais que importam reter.

Capítulo 2

Noções básicas

A grande maioria dos fenómenos naturais e/ou processos tecnológicos podem ser descritos através de modelos/sistemas matemáticos cujas características são encaradas como variáveis. Matematicamente, o estudo destes fenómenos traduz-se na concretização das variáveis dos sistemas que os descrevem, sendo estas, como veremos de seguida, classificadas como variáveis de entrada e de saída, existindo também variáveis auxiliares que são conhecidas como variáveis de estado.

Quando as variáveis sofrem uma evolução ao longo do tempo, estamos na presença de sistemas dinâmicos. Assim, as variáveis de um sistema dinâmico são funções do tempo e tomam valores num determinado conjunto designado por universo das variáveis. Deste modo, designando por T o conjunto temporal do sistema e por W o universo das variáveis, o conjunto de todas as funções de T em W dado por $\mathrm{W}^{\mathrm{T}} = \{w | w : \mathrm{T} \rightarrow \mathrm{W}\}$ representa o conjunto das variáveis do sistema que se pretende descrever. Nesta dissertação vamos considerar que o conjunto temporal do sistema assume valores inteiros, isto é, que $\mathrm{T} = \mathbb{Z}$. Estes sistemas são denominados sistemas discretos.

As variáveis de um sistema dinâmico e discreto relacionam-se mediante leis que o definem. Geralmente estas leis transmitem relações causa-efeito. As variáveis de entrada são consideradas os agentes exteriores que actuam no sistema (causa), influenciando o valor das restantes variáveis (efeito). Mais especificamente é possível estabelecer relações entre as variáveis de estado, de entrada e de saída que modelam um sistema. Estas relações permitem conhecer, por um lado,o valor das variáveis de estado de um sistema num determinado instante, recorrendo ao valor das variáveis de estado e de entrada no instante anterior e por outro lado, a resposta de um sistema num determinado instante, recorrendo ao valor das variáveis de estado e de entrada nesse mesmo instante. Quando estas relações são lineares, estamos na presença de sistemas lineares.

Um outra propriedade que se assume neste estudo é a invariância no tempo, na medida em que as leis que modelam o sistema não mudam ao longo do tempo. Ou seja, desde que se mantenham as mesmas condições iniciais e a mesma entrada, a resposta produzida pelo sistema é a mesma independentemente do intervalo de tempo considerado.

Assim, de agora em diante, por uma questão de simplificação de linguagem, sempre que nos referirmos a sistemas estaremos a considerar sistemas dinâmicos, discretos, lineares e invariantes no tempo.

O estudo de sistemas pode ser realizado recorrendo a uma descrição com base num modelo matemático designado por *modelo de espaço de estados* que se define na secção seguinte. Serão ainda analisadas propriedades pertinentes destes modelos nas secções posteriores. Para maior detalhe ver [Roc08], [FM94] e [Kai80].

2.1 Modelo de espaço de estados

Definição 2.1.1. *Um modelo de Espaço de Estados permite descrever um sistema através das seguintes equações*

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde

$$x(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \ , \ u(t) := \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \ e \ y(t) := \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

designam o vector de estado, o vector de entrada, e o vector de saída do sistema no instante t, respectivamente. As matrizes de números reais A, B, C e D têm dimensões $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$ e $p \times m$, respectivamente. O sistema descrito por (2.1) representa-se por $\Sigma = (A, B, C, D)$ e diz-se que tem dimensão n. Os números inteiros m e p representam o número de entradas e de saídas do sistema, respectivamente. O espaço vectorial $\mathbb{R}^n$ é designado espaço dos estados e os seus elementos são chamados estados do sistema. Os espaços vectoriais $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^p$ são designados espaço das entradas e das saídas, respectivamente.

A primeira equação de (2.1) caracteriza o sistema internamente e designa-se por *equação de estados* enquanto que a segunda equação de (2.1) representa uma descrição externa do sistema designada por *equação de saída*.

Importa reforçar a ideia que, considerando um instante inicial $t = t_0$, o estado nesse instante inicial contém toda a informação necessária para conhecer o comportamento do sistema, isto é, os valores de $x(t)$ e $y(t)$ para $t \geq t_0$, desde que $u(t)$ seja conhecido para $t \geq t_0$. Uma vez que estamos na presença de sistemas invariantes no tempo, o comportamento do sistema não depende do instante inicial escolhido. Por uma questão de simplificação, vamos então considerar de agora em diante que o instante inicial é nulo, isto é, $t_0 = 0$. Assim, o valor do estado, num instante arbitrário $k \geq 1$, depende somente do estado inicial, $x(0)$, e dos valores da entrada, $u(.)$, nos instantes $0, 1, ..., k-1$, e é dado por

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B u(i). \tag{2.2}$$

De facto, para $k = 1$, substituindo t por 0 na equação de estados de $\Sigma = (A, B, C, D)$, $x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$, obtemos

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0).$$

Supondo, por indução matemática, que (2.2) é verdadeira para k, vamos provar que também o é para $k + 1$. Assim

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\
&= A(A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(i)) + Bu(k) \\
&= A^{k+1} x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{(k+1)-1-i} Bu(i) + Bu(k) \\
&= A^{k+1} x(0) + \sum_{i=0}^{k} A^{(k+1)-1-i} Bu(i),
\end{aligned}
$$

o que prova (2.2), para todo $k \geq 1$.

Atendendo agora à equação de saída de $\Sigma = (A, B, C, D)$ dada por $y(t) = Cx(t) + Du(t)$, temos que a saída, num instante arbitrário $k \geq 1$, é dada por

$$
y(k) = CA^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-1-i} Bu(i) + Du(k). \tag{2.3}
$$

As matrizes D e $CA^l B$, para $l \geq 0$, que aparecem em (2.3) têm um significado interessante na descrição de um sistema em que se considera as condições iniciais nulas, isto é, $x(0) = 0$.

Definição 2.1.2. *Os parâmetros de Markov Y_i, para $i \geq 0$ de um sistema, $\Sigma = (A, B, C, D)$, com m entradas e p saídas, são matrizes de $\mathbb{R}^{p \times m}$ definidas do seguinte modo*

$$
\begin{aligned}
Y_0 &= D \\
Y_i &= CA^{i-1} B, \text{ para } i \geq 1.
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

Tendo em conta a definição anterior é possível reescrever (2.3) do seguinte modo

$$
y(k) = CA^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} Y_{k-i} u(i) + Y_0 u(k), \text{ para } k \geq 1.
$$

Suponhamos agora que o sistema $\Sigma = (A, B, C, D)$ se encontra inicialmente em repouso, isto é, $x(0) = 0$. Neste caso é possível estabelecer uma relação entre as entradas $u(.)$ e as saídas $y(.)$ do sistema com base nos seus parâmetros de Markov, da seguinte forma,

$$\begin{array}{rcl}
y(0) & = & Y_0u(0) \\
y(1) & = & Y_1u(0) + Y_0u(1) \\
y(2) & = & Y_2u(0) + Y_1u(1) + Y_0u(2) \\
 & \vdots & \\
y(k) & = & Y_ku(0) + \cdots + Y_1u(k-1) + Y_0u(k) \\
 & \vdots &
\end{array}$$

Deste modo, concluímos que a resposta de um sistema fica completamente determinada pelos seus parâmetros de Markov. Observe-se ainda que se aplicarmos a entrada $u(.)$, definida por

$$u(k) = \begin{cases} e_i & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases},$$

onde e_i representa o i-ésimo vector da base canónica de $\mathbb{R}^n$, então a saída do sistema é dada por

$$y(0) = De_i \quad \text{e} \quad y(k) = CA^{k-1}Be_i, \quad \text{para} \quad k \geq 1.$$

Estas saídas designam-se por resposta ao impulso para um impulso unitário aplicado a i-ésima entrada. Note-se que $y(0)$ é a i-ésima coluna de D e $y(k)$ corresponde à i-ésima coluna da matriz $CA^{k-1}B$ para $k \geq 1$. Consequentemente a sucessão

$$D, CB, CAB, CA^2B, \ldots$$

é designada por resposta ao impulso do sistema. Repare-se que os termos desta sucessão correspondem precisamente aos parâmetros de Markov do sistema. Assim, para sistemas lineares discretos, a sucessão dos parâmetros de Markov $\mathcal{Y} = \{Y_0, Y_1, ...\}$ corresponde à resposta impulsional do sistema.

Definição 2.1.3. *Seja $\mathcal{Y} = \{Y_0, Y_1, Y_2...\}$ uma sucessão infinita de matrizes do tipo $p \times m$. Dizemos que $\Sigma = (A, B, C, D)$ é uma realização da sucessão $\mathcal{Y}$ se (2.4) acontece. Neste caso, diz-se que $\mathcal{Y}$ é realizável.*

Definição 2.1.4. *Dois sistemas $\Sigma = (A, B, C, D)$ e $\tilde{\Sigma} = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ de dimensão n*

dizem-se algebricamente equivalentes se existe uma matriz invertível T, do tipo $n \times n$, tal que

$$\tilde{A} = T^{-1}AT, \quad \tilde{B} = T^{-1}B, \quad \tilde{C} = CT \quad e \quad \tilde{D} = D. \tag{2.5}$$

A proposição seguinte mostra que dois sistemas algebricamente equivalentes são realizações da mesma sucessão de parâmetros de Markov.

Proposição 2.1.5. *Dois sistemas algebricamente equivalentes têm os mesmos parâmetros de Markov.*

Prova: Sejam $\Sigma = (A, B, C, D)$ e $\tilde{\Sigma} = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, D)$ sistemas algebricamente equivalentes de dimensão n. Pretendemos provar que

$$CA^iB = \tilde{C}\tilde{A}^i\tilde{B}, \text{ para } i \geq 0.$$

Por definição de sistemas algebricamente equivalentes, sabemos que existe uma matriz T invertível, do tipo $n \times n$, tal que (2.5) acontece. Assim, vem que

$$\tilde{C}\tilde{A}^i\tilde{B} = (CT)(T^{-1}AT)^i(T^{-1}B). \tag{2.6}$$

Observe-se que $(T^{-1}AT)^i = T^{-1}A^iT$, para $i \geq 0$. Portanto, de (2.6), resulta que, para $i \geq 0$,

$$\begin{aligned} \tilde{C}\tilde{A}^i\tilde{B} &= CTT^{-1}A^iTT^{-1}B \\ &= CA^iB, \end{aligned}$$

como se pretendia mostrar. $\square$

Por fim, vamos ver que os parâmetros de Markov de um sistema, excluindo o primeiro parâmetro, obedecem a uma relação de recursividade. O teorema seguinte é crucial na demonstração deste resultado e vai ser extremamente útil no decorrer deste documento.

Teorema 2.1.6. ***(Cayley-Hamilton*** *[HJ85]) Sejam A uma matriz quadrada de dimensão $n \times n$ e $p(\lambda) = det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_0$ o seu polinómio* *característico, onde* $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n-1$. *Então* $p(A) = 0_n$, *i.e.,*

$$A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \alpha_0 I_n = 0_n.$$

Embora o próximo resultado seja usado somente na próxima secção optamos por considerá-lo nesta fase do documento uma vez que segue directamente do teorema anterior.

Corolário 2.1.7. *Seja* A *uma matriz quadrada de dimensão* $n \times n$. *Então, para* $k \geq 0$, *existem escalares* $\mu_{k,i}$, *para* $i = 0, \dots, n-1$, *tais que*

$$A^k = \mu_{k,0}I_n + \mu_{k,1}A + \cdots + \mu_{k,n-1}A^{n-1}. \tag{2.7}$$

Prova: Se $k < n$, então (2.7) é trivialmente satisfeita. Basta considerar $\mu_{k,k} = 1$ e $\mu_{k,0} = \cdots = \mu_{k,k-1} = \mu_{k,k+1} = \cdots = \mu_{k,n-1} = 0$.

Se $k = n$, então, pelo Teorema de Cayley-Hamilton (Teorema 2.1.6) , sabemos que existem escalares $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n-1$, tais que

$$A^n = -\alpha_0 I - \cdots - \alpha_{n-1}A^{n-1}. \tag{2.8}$$

Logo (2.7) é satisfeita para $\mu_{k,i} = -\alpha_i$.

Seja $k \geq n$. Suponhamos, por indução matemática, que (2.7) é satisfeita para k. Pretendemos provar que (2.7) também é satisfeita para $k+1$, isto é, que A^{k+1} é combinação linear de I_n, A,...,A^{n-1}.

Observe-se que $A^{k+1} = A^k A$, então por hipótese de indução sabemos que existem escalares $\mu_{k,0}, ..., \mu_{k,n-1} \in \mathbb{R}$ tais que (2.7) é satisfeita. Assim sendo, resulta que

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= (\mu_{k,0}I_n + \mu_{k,1}A + ... + \mu_{k,n-1}A^{n-1})A \\ &= \mu_{k,0}A + \mu_{k,1}A^2 + ... + \mu_{k,n-1}A^n. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Finalmente, de (2.8) e (2.9) obtém-se

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= \mu_{k,0}A + \mu_{k,1}A^2 + ... + \mu_{k,n-1}(-\alpha_0 I_n - \alpha_1 A - ... - \alpha_{n-1}A^{n-1}) \\ &= -\alpha_0\mu_{k,n-1}I_n + (\mu_{k,0} - \alpha_1\mu_{k,n-1})A + ... + (\mu_{k,n-2} - \alpha_{n-1}\mu_{k,n-1})A^{n-1}, \end{aligned}$$

como se pretendia provar. □

O teorema seguinte também é consequência do Teorema de Cayley-Hamilton (Teorema 2.1.6)

Teorema 2.1.8. *Seja $\Sigma = (A, B, C, D)$ um sistema de dimensão n. Então existem escalares $\beta_0, ..., \beta_{n-1} \in \mathbb{R}$ tais que*

$$Y_{n+k} = \beta_0 Y_k + ... + \beta_{n-1} Y_{n+k-1}, \tag{2.10}$$

para $k \geq 1$.

Prova: Pelo Teorema de Cayley-Hamilton (Teorema 2.1.6), sabemos que existem escalares reais $\beta_i = -\alpha_i$, para $i = 0, \ldots, n-1$, tais que

$$A^n = -\alpha_0 I - \cdots - \alpha_{n-1}A^{n-1}. \tag{2.11}$$

Seja $k \geq 1$. Multiplicando (2.11), à direita, por A^{k-1} vem que

$$A^{n+k-1} = -\alpha_0 A^{k-1} - \cdots - \alpha_{n-1}A^{n+k-2}. \tag{2.12}$$

Multiplicando (2.12), à esquerda, por C e, à direita, por B temos que

$$CA^{n+k-1}B = -\alpha_0 CA^{k-1}B - \cdots - \alpha_{n-1}CA^{n+k-2}B. \tag{2.13}$$

De acordo com a Definição 2.1.2, (2.13) é equivalente a

$$Y_{n+k} = -\alpha_0 Y_k - \cdots - \alpha_{n-1}Y_{n+k-1},$$

como pretendíamos mostrar. □

2.2 Atingibilidade

Nesta secção vamos estudar em que medida as entradas que se introduzem num sistema influenciam a sua dinâmica. Para tal, introduziremos o conceito de atingibilidade. Concretamente, estamos interessados em caracterizar o conjunto de estados que são possíveis alcançar partindo de um determinado estado inicial conhecido e através de determinadas entradas incutidas ao sistema. Em particular, e relembrando que nesta dissertação estamos a considerar apenas sistemas lineares e invariantes no tempo, considere-se que o valor do estado em $t_0 = 0$ é nulo, isto é, o sistema encontra-se inicialmente em repouso.

Definição 2.2.1. *Sejam $\Sigma = (A, B, C, D)$ um sistema de dimensão n e $k \in \mathbb{N}$. Um estado $x^* \in \mathbb{R}^n$ é atingível em k passos se, assumindo $x(0) = 0$, existe uma entrada $u(.)$ tal que*

$$x^* = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}Bu(i) \tag{2.14}$$

$$= \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{k-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}. \tag{2.15}$$

Ao conjunto de todos os estados atingíveis em k passos denotamos por $\mathcal{R}_k(A, B)$.

Proposição 2.2.2. *Sejam $\Sigma = (A, B, C, D)$ um sistema de dimensão n e $k \in \mathbb{N}$. O conjunto $\mathcal{R}_k(A, B)$ é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$.*

Prova: É óbvio que $\mathcal{R}_k(A, B) \subset \mathbb{R}^n$ e que $\mathcal{R}_k(A, B) \neq \emptyset$, pois 0 é atingível em k passos. De facto, se considerarmos $u \equiv 0$, temos que $0 = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}Bu(i)$.

Temos ainda de mostrar que se $x_1,\ x_2 \in \mathcal{R}_k(A, B)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ então $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathcal{R}_k(A, B)$.

Sejam $x_1,\ x_2 \in \mathcal{R}_k(A, B)$ arbitrários. Uma vez que $x_1 \in \mathcal{R}_k(A, B)$ temos, pela Definição 2.2.1 que existe $u_1(.)$ tal que $x_1 = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}Bu_1(i)$. Do mesmo modo, sabemos que existe $u_2(.)$ tal que $x_2 = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}Bu_2(i)$. Portanto, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vem que

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}B(\alpha u_1 + \beta u_2)(i). \tag{2.16}$$

Logo existe $u(.) := (\alpha u_1+\beta u_2)(.)$ tal que (2.14) acontece, como se pretendia provar. $\square$

Ao subespaço vectorial $\mathcal{R}_k(A, B)$ chamamos *subespaço atingível em k passos.* Observe-se ainda que de (2.15) segue que $\mathcal{R}_k(A, B) = Im \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{k-1}B \end{bmatrix}$.

A definição seguinte caracteriza um estado atingível.

Definição 2.2.3. *Seja $\Sigma = (A, B, C, D)$ um sistema de dimensão n. Um estado $x^* \in \mathbb{R}^n$ diz-se atingível, se for atingível em k passos, para algum $k \in \mathbb{N}$. O conjunto de todos os estados atingíveis denota-se por $\mathcal{R}(A, B)$.*

Note-se que $\mathcal{R}(A, B) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{R}_k(A, B)$. Além disso, observe-se que os subespaços atingíveis em k passos, para $k \geq 1$, satisfazem a seguinte cadeia de inclusão

$$\mathcal{R}_1(A, B) \subseteq \mathcal{R}_2(A, B) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{R}_n(A, B) \subseteq \mathcal{R}_{n+1}(A, B) \subseteq \cdots . \tag{2.17}$$

De facto, se $x^* \in \mathcal{R}_k(A, B)$ então existem $u(0), ..., u(k-1)$ tais que

$$x^* = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{k-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix},$$

e portanto

$$x^* = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{k-1}B & A^kB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k-1) \\ \vdots \\ u(0) \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}_{k+1}(A, B).$$

Assim, $\mathcal{R}_k(A,B) \subseteq \mathcal{R}_{k+1}(A,B)$, para $k \geq 1$. Além disso, (2.17) é estacionária para $k \geq n$, pois $\mathcal{R}_k(A,B) = Im\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{k-1}B \end{bmatrix}$ e pelo Corolário 2.1.7, $A^kB = \mu_{k,0}B + \mu_{k,1}AB + \cdots + \mu_{k,n-1}A^{n-1}B$, para alguns $\mu_{k,0}, ..., \mu_{k,n-1} \in \mathbb{R}$. Ou seja, $\mathcal{R}_n(A,B) = \mathcal{R}_k(A,B)$, para $k \geq n$. Assim cada estado em $\mathcal{R}(A,B)$ é atingível em pelo menos n passos, e portanto

$$\mathcal{R}(A,B) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{R}_k(A,B) = \mathcal{R}_n(A,B) = Im\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$. A matriz $\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ de dimensão $n \times nm$, diz-se *matriz de atingibilidade* do sistema $\Sigma = (A,B,C,D)$, ou simplesmente do par (A,B), e representa-se por $R(A,B)$.

Definição 2.2.4. *Seja $\Sigma = (A,B,C,D)$ um sistema de dimensão n. $\mathcal{R}(A,B)$ é o subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$ constituído pelos estados atingíveis de Σ e designa-se por subespaço atingível.*

O resultado seguinte enuncia uma propriedade do subespaço atingível de um sistema que será usada na próxima secção.

Lema 2.2.5. *Seja $\mathcal{R}(A,B)$ o subespaço atingível de um sistema $\Sigma = (A,B,C,D)$. Então $\mathcal{R}(A,B)$ é A-invariante.*

Prova: Pretendemos provar que se $x \in \mathcal{R}(A,B)$ então $Ax \in \mathcal{R}(A,B)$. Suponhamos que Σ tem dimensão n.

Seja $x \in \mathcal{R}(A,B)$ arbitrário. Então $x \in \mathcal{R}(A,B) = Im\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$, o que implica que $Ax \in Im\begin{bmatrix} AB & A^2B & \cdots & A^nB \end{bmatrix}$ e consequentemente $Ax \in \mathcal{R}_{n+1}(A,B) = Im\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^nB \end{bmatrix}$. Deste modo, e porque $\mathcal{R}(A,B) = \mathcal{R}_n(A,B) = \mathcal{R}_{n+1}(A,B)$, resulta que $Ax \in \mathcal{R}(A,B)$. $\square$

Nesta fase da dissertação interessa definir os sistemas em que todos os estados são atingíveis já que a exploração deste tipo de sistemas possibilita estabelecer propriedades interessantes no estudo que se pretende realizar, como se verá nos capítulos seguintes.

Definição 2.2.6. *Seja $\Sigma = (A, B, C, D)$ um sistema de dimensão n. Então Σ é atingível, ou simplesmente o par (A, B) é atingível, se $\mathcal{R}(A, B) = \mathbb{R}^n$.*

O teorema seguinte fornece um critério simples para verificarmos se um dado sistema é atingível e é consequência imediata da Definição 2.2.6 e de (2.18).

Teorema 2.2.7. *Dado um sistema $\Sigma = (A, B, C, D)$ de dimensão n, as seguintes condições são equivalentes.*

(1) *O par (A, B) é atingível;*

(2) $\operatorname{rank} R(A, B) = n$.

Observe-se que, apesar de sabermos que se $\Sigma = (A, B, C, D)$ é um sistema atingível de dimensão n, todos os seus estados são atingidos em pelo menos n passos, pode acontecer que todos os estados sejam atingidos em N passos, para algum $N < n$.

Considere-se a seguinte notação

$$R_t(A, B) = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{t-1}B \end{bmatrix}, \text{ para } t \geq 1,$$

que será útil na próxima definição.

Definição 2.2.8. *Dado um sistema $\Sigma = (A, B, C, D)$ atingível, de dimensão n. Chamamos índice de atingibilidade ao menor inteiro N tal que*

$$\operatorname{rank} R_N(A, B) = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{N-1}B \end{bmatrix} = n.$$

2.3 Decomposição de atingibilidade de Kalman

Nesta secção veremos que, dado um sistema não atingível é sempre possível obter um sistema atingível, de dimensão menor ao inicialmente considerado, com os mesmos parâmetros de Markov.

Definição 2.3.1. *Seja $\Sigma = (A, B, C, D)$ um sistema onde*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e os blocos A_{11},A_{12}, A_{22} e B_1 são matrizes do tipo $r \times r$, $r \times (n-r)$, $(n-r) \times (n-r)$ e $r \times m$, respectivamente e o par (A_{11}, B_1) é atingível. Dizemos que Σ se encontra na forma de atingibilidade de Kalman.

Proposição 2.3.2. *Todo o sistema é algebricamente equivalente a um sistema na forma de atingibilidade de Kalman.*

Prova: Seja $\Sigma = (A, B, C, D)$ um sistema de dimensão n. Se (A, B) é atingível, então Σ encontra-se na forma de atingibilidade de Kalman.

Suponhamos agora que (A, B) não é atingível. Então sabemos que

$$\operatorname{rank} R(A, B) = r, \text{ para algum } r < n.$$

Seja $\mathcal{B}_1 = (b_1, b_2, ..., b_r)$ uma base de $Im\ R(A, B)$. Complete-se a base $\mathcal{B}_1$ de forma a obter uma base de $\mathbb{R}^n$, digamos $\mathcal{B}_2 = (b_1, b_2, ..., b_r, b_{r+1}, ..., b_n)$. Defina-se agora a matriz invertível $T = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_r & b_{r+1} & \cdots & b_n \end{bmatrix}$ e um novo sistema, $\tilde{\Sigma} = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ algebricamente equivalente a Σ, onde $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}) = (T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D)$. Vamos ver que $\tilde{\Sigma}$ está na forma de atingibilidade de Kalman, isto é, que

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde os blocos A_{11}, A_{12}, A_{22} e B_1 são matrizes do tipo $r \times r$, $r \times (n-r)$, $(n-r) \times (n-r)$ e $r \times m$, respectivamente e que o par (A_{11}, B_1) é atingível.

Observe-se que

$$\begin{aligned} AT &= A \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_r & b_{r+1} & \cdots & b_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_r & Ab_{r+1} & \cdots & Ab_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por outro lado, como $b_1, b_2, ..., b_r \in \mathcal{R}(A,B)$ e, pelo Lema 2.2.5, $\mathcal{R}(A,B)$ é A- invariante, temos que $Ab_1, Ab_2, ..., Ab_r \in \mathcal{R}(A,B)$, ou seja $\begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_r \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} A_{11} \\ 0 \end{bmatrix}$, onde A_{11} é uma matriz do tipo $r \times r$. Logo $\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$, onde A_{12}, A_{22} são matrizes do tipo $r \times (n-r)$ e $(n-r) \times (n-r)$, respectivamente.

Observe-se ainda que as colunas de B são elementos do subespaço vectorial $\mathcal{R}(A,B) = Im \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$. Logo são combinação linear dos vectores $b_1, b_2, ..., b_r$, ou seja,

$$B = T \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde B_1 é uma matriz do tipo $r \times m$. Logo $\tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Assim, provou-se que as matrizes $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ têm a forma pretendida.

Pretendemos agora mostrar que o par (A_{11}, B_1) é atingível. Pelo Teorema 2.2.7 basta provar que rank $\begin{bmatrix} B_1 & \cdots & A_{11}^{r-1}B_1 \end{bmatrix} = r$. Note-se que

$$\begin{bmatrix} \tilde{B} & \cdots & \tilde{A}^{n-1}\tilde{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & \cdots & A_{11}^{n-1}B_1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} rank \begin{bmatrix} B_1 & \cdots & A_{11}^{n-1}B_1 \end{bmatrix} &= rank \begin{bmatrix} \tilde{B} & \cdots & \tilde{A}^{n-1}\tilde{B} \end{bmatrix} \\ &= rank \quad T^{-1} \begin{bmatrix} B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Uma vez que a matriz T^{-1} é invertível, concluímos que

$$\begin{aligned} rank \begin{bmatrix} B_1 & \cdots & A_{11}^{n-1}B_1 \end{bmatrix} &= rank \begin{bmatrix} B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \\ &= r \end{aligned}$$

Além disso, pelo Teorema de Cayley-Hamilton (Teorema 2.1.6), como A_{11} tem dimensão

$r \times r$,

$$rank \begin{bmatrix} B_1 & \cdots & A_{11}^{r-1} B_1 \end{bmatrix} \;=\; rank \begin{bmatrix} B_1 & \cdots & A_{11}^{n-1} B_1 \end{bmatrix}$$

e, portanto

$$rank \begin{bmatrix} B_1 & \dots & A_{11}^{r-1} B_1 \end{bmatrix} \;=\; r,$$

como pretendíamos mostrar. □

O resultado que se estabelece de seguida permite concluir que dado um sistema na forma de atingibilidade de Kalman é possível obter um seu subsistema atingível tal que ambos possuem os mesmos parâmetros de Markov.

Proposição 2.3.3. *Seja $\Sigma = (A, B, C, D)$ um sistema de dimensão n, com m entradas e p saídas, na forma de atingibilidade de Kalman, isto é, tal que*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}, \tag{2.19}$$

onde os blocos A_{11}, A_{12} e A_{22} são matrizes do tipo $r \times r$, $r \times (n-r)$, $(n-r) \times (n-r)$, respectivamente, para $r \leq n$. As matrizes B_1, C_1 e C_2 têm dimensão $r \times m$, $p \times r$, $p \times (n-r)$, respectivamente e o par (A_{11}, B_1) é atingível. Então os sistemas Σ e $\Sigma_1 = (A_{11}, B_1, C_1, D)$ têm os mesmos parâmetros de Markov.

Prova: Basta provar que

$$CA^i B = C_1 A_{11}^i B_1, \quad i \geq 0. \tag{2.20}$$

Seja $i \geq 0$. De (2.19) resulta que

$$CA^i B \;=\; \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Note-se que

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}^i = \begin{bmatrix} A_{11}^i & L_i \\ 0 & A_{22}^i \end{bmatrix},$$

onde L_i é uma matriz do tipo $r \times (n-r)$. Logo,

$$\begin{aligned} CA^iB &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^i & L_i \\ 0 & A_{22}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_1A_{11}^i & \bar{L}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

para $\bar{L}_i = C_1L_i + C_2A_{22}^i$. E portanto, $CA^iB = C_1A_{11}^iB_1$, como se pretendia mostrar.

□

Em suma, das Proposições 2.1.5, 2.3.2 e 2.3.3 concluímos que dado um sistema Σ, de dimensão n, é possível determinar um sistema atingível, de dimensão $r \leq n$, com os mesmos parâmetros de Markov. A pertinência desta conclusão torna-se mais evidente quando aliada ao facto de que, como vimos anteriormente, o comportamento de um sistema é completamente determinado pelos seus parâmetros de Markov.

2.4 Observabilidade

O conceito de observabilidade de um sistema linear discreto refere-se à possibilidade de se obter informação sobre o estado inicial a partir da entrada e da saída do sistema.

Definição 2.4.1. *Um sistema $\Sigma = (A, B, C, D)$ é observável se*

$$\exists\, t^* > 0 : u(0) = \cdots = u(t^*) = 0,\ y(0) = \cdots = y(t^*) = 0 \Rightarrow x(0) = 0 \tag{2.21}$$

A condição (2.21) da definição anterior pode ser reformulada como se segue

$$\exists\, t^* > 0 : y(t) = CA^tx(0) = 0, t = 0, 1, 2, .., t^* \Rightarrow x(0) = 0,$$

que é equivalente a

$$\exists\, t^* > 0 \quad : \quad \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{t^*-1} \end{bmatrix} x(0) = 0 \Rightarrow x(0) = 0.$$

Ou seja, $\Sigma = (A, B, C, D)$ é observável se e só se

$$\exists\, t^* > 0 \quad : \quad ker \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{t^*-1} \end{bmatrix} = \{0\}. \tag{2.22}$$

Facilmente se vê que

$$ker\ C \supseteq ker \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} \supseteq \cdots \supseteq ker \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \supseteq ker \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n} \end{bmatrix} \supseteq \cdots$$

Por outro lado, para $k \geq n-1$, o Teorema de Cayley-Hamilton (Teorema 2.1.6) implica que

$$ker \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k} \end{bmatrix} = ker \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Concluímos assim que Σ é observável se e só se

$$ker \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \{0\}. \tag{2.23}$$

À matriz $\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$, de dimensão $np \times n$, chamamos *matriz de observabilidade* e representamos por $O(C, A)$. De (2.23) segue imediatamente o teorema seguinte.

Teorema 2.4.2. *Um sistema $\Sigma = (A, B, C, D)$, de dimensão n, é observável (ou o par (A, C) é observável) se e só se*

$$\operatorname{rank} O(C, A) = n \tag{2.24}$$

Defina-se

$$O_s(C, A) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{s-1} \end{bmatrix}, \text{ para } s \geq 1.$$

Um sistema observável é caracterizado por $\operatorname{rank} O(C, A) = n$. No entanto pode existir um inteiro, N', menor do que n para o qual $\operatorname{rank} O_{N'}(C, A) = n$.

Definição 2.4.3. *Dado um sistema $\Sigma = (A, B, C, D)$, de dimensão n. Chamamos índice de observabilidade ao menor inteiro N' tal que*

$$\operatorname{rank} O_{N'}(C, A) = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{N'-1} \end{bmatrix} = n.$$

2.5 Decomposição de observabilidade de Kalman

Veremos nesta secção que, dado um sistema não observável é sempre possível obter um sistema observável, de dimensão menor ao inicialmente considerado e com os mesmos parâmetros de Markov.

Definição 2.5.1. *Seja $\Sigma = (A, B, C, D)$ um sistema onde*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix}$$

e os blocos A_{11}, A_{21}, A_{22} e C_1 são matrizes do tipo $r \times r$, $(n-r) \times r$, $(n-r) \times (n-r)$ e $p \times r$, respectivamente e o par (A_{11}, C_1) é observável. Dizemos que Σ se encontra na forma de observabilidade de Kalman.

Tal como na secção anterior, é sempre possível determinar um sistema na forma de observabilidade de Kalman algebricamente equivalente a um dado sistema. Na demonstração deste resultado utilizaremos o conceito de dualidade que, na prática, representa um recurso bastante eficiente sempre que se está na presença de um sistema não atingível ou não observável, e se pretende obter um sistema atingível ou observável, respectivamente, no caso de já termos informação sobre o sistema dual.

Proposição 2.5.2. *Todo o sistema é algebricamente equivalente a um sistema na forma de observabilidade de Kalman.*

Prova: Seja $\Sigma = (A, B, C, D)$ um sistema de dimensão n com m entradas e p saídas. Se (A, C) é observável, então Σ encontra-se na forma de observabilidade de Kalman.

Suponhamos agora que (A, C) não é observável. Então sabemos que

$$\operatorname{rank} O(C, A) = r, \text{ para algum } r < n. \tag{2.25}$$

Consideremos o dual de Σ, isto é, o sistema $\hat{\Sigma} = (A^T, C^T, B^T, D^T)$. Uma vez que $R(A^T, C^T) = O(C, A)^T$, temos que

$$\operatorname{rank} R(A^T, C^T) = r. \tag{2.26}$$

Portanto $\hat{\Sigma}$ não é atingível. Pela Proposição 2.3.2, sabemos que existe uma matriz V, do tipo $n \times n$, invertível que permite obter um sistema algebricamente equivalente a $\hat{\Sigma}$ na forma de atingibilidade de Kalman, isto é,

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= V^{-1}A^TV = \begin{bmatrix}\tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12}\\ 0 & \tilde{A}_{22}\end{bmatrix}\\ \tilde{C} &= V^{-1}C^T = \begin{bmatrix}\tilde{C}_1\\ 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

onde os blocos $\tilde{A}_{11}$, $\tilde{A}_{12}$, $\tilde{A}_{22}$ e $\tilde{C}_1$ são matrizes do tipo $r\times r$, $r\times(n-r)$, $(n-r)\times(n-r)$ e $r\times p$, respectivamente e o par $(\tilde{A}_{11},\tilde{C}_1)$ é atingível, isto é, $\operatorname{rank} R(\tilde{A}_{11},\tilde{C}_1)=r$.

Assim, definindo $S=(V^{-1})^T$, temos que

$$\begin{aligned}S^{-1}AS = V^TA(V^{-1})^T = (V^{-1}A^TV)^T = \tilde{A}^T &= \begin{bmatrix}\tilde{A}_{11}^T & 0\\ \tilde{A}_{12}^T & \tilde{A}_{22}^T\end{bmatrix}\\ CS = C(V^{-1})^T = (V^{-1}C^T)^T = \tilde{C}^T &= \begin{bmatrix}\tilde{C}_1^T & 0\end{bmatrix},\end{aligned}$$

onde o par $(\tilde{A}_{11}^T,\tilde{C}_1^T)$ é observável, visto que $\operatorname{rank} O(\tilde{C}_1^T,\tilde{A}_{11}^T)=\operatorname{rank} R(\tilde{A}_{11},\tilde{C}_1)^T=r$.

Assim, o sistema $\bar{\Sigma}=(S^{-1}AS,S^{-1}B,CS,D)$ está na forma de observabilidade de Kalman e é algebricamente equivalente a Σ, como se pretendia. □

De modo análogo ao que foi estabelecido para um sistema na forma de atingibilidade de Kalman, dado um sistema que se encontra na forma de observabilidade de Kalman, é possível obter um seu subsistema observável com os mesmos parâmetros de Markov, como se enuncia no resultado que se segue.

Proposição 2.5.3. *Seja $\Sigma=(A,B,C,D)$ um sistema de dimensão n, com m entradas e p saídas, na forma de observabilidade de Kalman, isto é, tal que*

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & 0\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}\quad e\quad C=\begin{bmatrix}C_1 & 0\end{bmatrix}$$

e os blocos A_{11}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2 e C_1 são matrizes do tipo $r\times r$, $(n-r)\times r$, $(n-$

$r) \times (n-r)$, $r \times m$, $(n-r) \times m$ e $p \times r$, respectivamente, para $r \leq n$ e o par (A_{11}, C_1) é observável.

Então os sistemas Σ e $\Sigma_1 = (A_{11}, B_1, C_1, D)$ têm os mesmos parâmetros de Markov.

Prova: A demonstração é análoga à demonstração da Proposição 2.3.3. □

Analogamente ao que foi estabelecido anteriormente, das Proposições 2.1.5, 2.5.2 e 2.5.3, concluímos que dado um sistema Σ, de dimensão n, é possível determinar um sistema observável, de dimensão $r \leq n$, com os mesmos parâmetros de Markov.

2.6 Realizações atingíveis e observáveis

Seja $\Sigma = (A, B, C, D)$ um sistema. Nas secções 2.3 e 2.5 vimos como determinar um sistema atingível e um sistema observável, respectivamente, com dimensão menor ou igual à dimensão de Σ e com os mesmos parâmetros de Markov. Nesta secção vamos ver como obter um sistema simultaneamente atingível e observável, $\hat{\Sigma}$, com dimensão menor ou igual à dimensão de Σ, e cujos parâmetros de Markov coincidam com os parâmetros de Markov de Σ.

Proposição 2.6.1. *Seja $\Sigma = (A, B, C, D)$ um sistema de dimensão n, com m entradas e p saídas. Então existe uma matriz $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertível tal que $\hat{\Sigma} = (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, D)$ onde*

$$\begin{aligned} \hat{A} &= Q^{-1}AQ \\ \hat{B} &= Q^{-1}B \\ \hat{C} &= CQ \end{aligned}$$

e as matrizes $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ definidas anteriormente têm a seguinte forma

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} & 0 \\ 0 & \hat{A}_{22} & 0 \\ \hat{A}_{31} & \hat{A}_{32} & \hat{A}_{33} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_{11} \\ 0 \\ \hat{B}_{31} \end{bmatrix} \quad e \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} \hat{C}_{11} & \hat{C}_{12} & 0 \end{bmatrix},$$

para algumas matrizes $\hat{A}_{11}$, $\hat{A}_{12}$, $\hat{A}_{22}$, $\hat{A}_{31}$, $\hat{A}_{32}$, $\hat{A}_{33}$, $\hat{B}_{11}$, $\hat{B}_{31}$, $\hat{C}_{11}$ e $\hat{C}_{12}$ do tipo $k \times k$, $k \times (r-k)$, $(r-k) \times (r-k)$, $(n-r) \times k$, $(n-r) \times (r-k)$, $(n-r) \times (n-r)$, $k \times m$, $(n-r) \times m$, $p \times k$ e $p \times (r-k)$, respectivamente, onde $k \leq r \leq n$. Além disso, o sistema $\hat{\Sigma}_1 = (\hat{A}_{11}, \hat{B}_{11}, \hat{C}_{11}, D)$ é atingível e observável.

Prova: Suponhamos que Σ não é observável, isto é, que $\operatorname{rank} O(C, A) = r$, para algum $r < n$. Então sabemos que existe uma matriz S, do tipo $n \times n$, invertível tal que

$$\tilde{A} = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

$$\tilde{B} = S^{-1}B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

$$\tilde{C} = CS = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

onde os blocos $\tilde{A}_{11}$, $\tilde{A}_{21}$ e $\tilde{A}_{22}$ são matrizes do tipo $r \times r$, $(n-r) \times r$ e $(n-r) \times (n-r)$, respectivamente. As matrizes $\tilde{B}_1$, $\tilde{B}_2$ e $\tilde{C}_1$ são do tipo $r \times m$, $(n-r) \times m$ e $p \times r$, respectivamente, e o par $(\tilde{A}_{11}, \tilde{C}_1)$ é observável. Assim sendo, o sistema $\tilde{\Sigma}_1 = (\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1, D)$ tem dimensão r e é observável.

Se Σ é observável consideremos $S = I_n$, $\tilde{\Sigma}_1 = \Sigma$ e $r = n$.

Porém nada garante que este sistema $\tilde{\Sigma}_1$ obtido é atingível. Suponhamos que, de facto, o par $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$ não é atingível, isto é, $\operatorname{rank} R(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1) = k$, para algum $k < r$. À semelhança do raciocínio realizado anteriormente sabemos que existe uma matriz, S_1, invertível, do tipo $r \times r$, e consequentemente é possível determinar um novo sistema $\bar{\Sigma}_1 = (\bar{A}_1, \bar{B}_1, \bar{C}_1, D)$, dado por

$$\bar{A}_1 = S_1^{-1}\tilde{A}_{11}S_1 = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

$$\bar{B}_1 = S_1^{-1}\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} \hat{B}_{11} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

$$\bar{C}_1 = \tilde{C}_1 S_1 = \begin{bmatrix} \hat{C}_{11} & \hat{C}_{12} \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

onde os blocos $\hat{A}_{11}$, $\hat{A}_{12}$ e $\hat{A}_{22}$ são matrizes do tipo $k \times k$, $k \times (r-k)$ e $(r-k) \times (r-k)$, respectivamente. As matrizes $\hat{B}_{11}$, $\hat{C}_{11}$ e $\hat{C}_{12}$ são do tipo $k \times m$, $p \times k$ e $p \times (r-k)$, respectivamente, e tal que o par $(\hat{A}_{11}, \hat{B}_{11})$ é atingível. Assim, é possível determinar um sistema $\hat{\Sigma}_1 = (\hat{A}_{11}, \hat{B}_1, \hat{C}_1, D)$, de dimensão $k < r$, atingível.

Construa-se agora uma nova matriz, igualmente invertível, e de ordem n, T, com base na matriz S_1 anteriormente referida, da seguinte forma

$$T := \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}.$$

Se $\tilde{\Sigma}_1$ é atingível consideremos $S_1 = I_r$ e, portanto $T = I_n$. Defina-se a matriz $Q = ST$.

Recorde-se que de (2.27), (2.28) e (2.29) sabemos que $A = S\tilde{A}S^{-1}$, $B = S\tilde{B}$ e $C = \tilde{C}S^{-1}$. Então, das considerações feitas anteriormente resulta que

$$\begin{aligned}
\hat{A} &= Q^{-1}AQ \\
&= (ST)^{-1}A(ST) \\
&= T^{-1}S^{-1}S\tilde{A}S^{-1}ST \\
&= T^{-1}\tilde{A}T \\
&= \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} S_1^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} S_1^{-1}\tilde{A}_{11}S_1 & 0 \\ \tilde{A}_{21}S_1 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

onde, por (2.30) temos que a matriz $\hat{A}$ possui a seguinte estrutura

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} & 0 \\ 0 & \hat{A}_{22} & 0 \\ \hat{A}_{31} & \hat{A}_{32} & \hat{A}_{33} \end{bmatrix},$$

onde $\hat{A}_{33} = \tilde{A}_{22}$ e $\hat{A}_{31}$ e $\hat{A}_{32}$ são matrizes de dimensão adequada tais que $\begin{bmatrix} \hat{A}_{31} & \hat{A}_{32} \end{bmatrix} = \tilde{A}_{21}S_1$.

Raciocinando de modo análogo e tendo em conta (2.28) vem que

$$\begin{aligned}
\hat{B} &= Q^{-1}B \\
&= (ST)^{-1}B \\
&= T^{-1}S^{-1}B \\
&= T^{-1}\tilde{B} \\
&= \begin{bmatrix} S_1^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} S_1^{-1}\tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

onde, por (2.31), obtém-se que a matriz $\hat{B}$ possui a estrutura

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_{11} \\ 0 \\ \hat{B}_{31} \end{bmatrix},$$

para $\hat{B}_{31} = \tilde{B}_2$.

Finalmente, por (2.29), também é possível ver que

$$\begin{aligned}
\hat{C} &= CQ \\
&= C(ST) \\
&= \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 S_1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

onde, por (2.32), obtém-se que a matriz $\hat{C}$ possui a estrutura

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} \hat{C}_{11} & \hat{C}_{12} & 0 \end{bmatrix}.$$

A explanação que se segue pretende mostrar que o sistema $\hat{\Sigma}_1 = (\hat{A}_{11}, \hat{B}_1, \hat{C}_1, D)$ é atingível e observável.

De facto, pela construção feita anteriormente $\hat{\Sigma}_1$ é atingível. Basta ver que continua a ser observável.

Atendendo ao Teorema 2.4.2, basta-nos garantir que

$$\operatorname{rank} O(\hat{C}_1, \hat{A}_{11}) = k. \tag{2.33}$$

Sabemos que o par $(\tilde{A}_{11}, \tilde{C}_1)$ é observável, ou seja,

$$\operatorname{rank} O(\tilde{C}_1, \tilde{A}_{11}) = r. \tag{2.34}$$

Por (2.30) e (2.32), temos que, para $i \geq 1$,

$$\begin{array}{rcl} \tilde{C}_1 \tilde{A}_{11}^i & = & (\bar{C}_1 S_1^{-1})(S_1 \bar{A}_1 S_1^{-1})^i \\ & = & \bar{C}_1 \bar{A}_1^i S_1^{-1} \end{array} \tag{2.35}$$

o que implica que

$$O(\tilde{C}_1, \tilde{A}_{11}) = O(\bar{C}_1, \bar{A}_1) S_1^{-1}. \tag{2.36}$$

Uma vez que o par $(\tilde{A}_{11}, \tilde{C}_1)$ é observável, S_1^{-1} é uma matriz invertível e de (2.36) resulta que

$$\operatorname{rank} O(\bar{C}_1, \bar{A}_1) = \operatorname{rank} O(\tilde{C}_1, \tilde{A}_{11}) = r. \tag{2.37}$$

De seguida, calcule-se a matriz de observabilidade do par $(\bar{A}_1, \bar{C}_1)$, por forma a observar a sua estrutura. Uma vez que

$$\bar{A}_1^i = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}^i = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11}^i & L_i \\ 0 & \hat{A}_{22}^i \end{bmatrix}$$

onde L_i é uma matriz do tipo $k \times (r-k)$, para $i \geq 1$, segue que

$$O(\bar{C}_1, \bar{A}_1) = \begin{bmatrix} \hat{C}_{11} & \hat{C}_{12} \\ \hat{C}_{11}\hat{A}_{11} & * \\ \hat{C}_{11}\hat{A}_{11}^2 & * \\ \vdots & \\ \hat{C}_{11}\hat{A}_{11}^{k-1} & * \\ \vdots & \\ \hat{C}_{11}\hat{A}_{11}^{r-1} & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O(\hat{C}_1, \hat{A}_{11}) & * \end{bmatrix}$$

De facto, uma vez que $\operatorname{rank} O(\bar{C}_1, \bar{A}_1) = r$, então as r colunas de $O(\bar{C}_1, \bar{A}_1)$ são linearmente independentes , o que implica que a matriz $O(\hat{C}_1, \hat{A}_{11})$ formada pelas primeiras k colunas de $O(\bar{C}_1, \bar{A}_1)$ tem característica k. Logo, o par $(\hat{A}_{11}, \hat{C}_1)$ é observável, como pretendíamos mostrar. □

Proposição 2.6.2. *Seja $\Sigma = (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, D)$ um sistema de dimensão n na forma*

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} & 0 \\ 0 & \hat{A}_{22} & 0 \\ \hat{A}_{31} & \hat{A}_{32} & \hat{A}_{33} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_{11} \\ 0 \\ \hat{B}_{31} \end{bmatrix} \quad e \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} \hat{C}_{11} & \hat{C}_{12} & 0 \end{bmatrix},$$

onde $\hat{A}_{11}$, $\hat{A}_{12}$, $\hat{A}_{22}$, $\hat{A}_{31}$, $\hat{A}_{32}$, $\hat{A}_{33}$ do tipo $k \times k$, $k \times (r-k)$, $(r-k) \times (r-k)$, $(n-r) \times k$, $(n-r) \times (r-k)$ e $(n-r) \times (n-r)$, respectivamente; $\hat{B}_{11}$, $\hat{B}_{31}$, $\hat{C}_{11}$ e $\hat{C}_{12}$ do tipo $k \times m$, $(n-r) \times m$, $k \times p$, $(r-k) \times p$ respectivamente, para $k \leq r \leq n$, e tal que o sistema $\hat{\Sigma} = (\hat{A}_{11}, \hat{B}_{11}, \hat{C}_{11})$ é atingível e observável. Então os sistemas Σ e $\hat{\Sigma}$ têm os mesmos parâmetros de Markov.

Prova: A demonstração é análoga à demonstração da Proposição 2.3.3. □

Em suma, pelas Proposições 2.1.5, 2.6.1 e 2.6.2, dado um sistema Σ é possível determinar um sistema de dimensão menor ou igual à dimensão de Σ, atingível e observável e é tal que os parâmetros de Markov de ambos os sistemas coincidem.

Capítulo 3

Teoria da realização

Neste capítulo vamos estudar o problema da realização de uma sucessão de matrizes do tipo $p \times m$, $\mathcal{Y} = \{Y_0, Y_1, Y_2, ...\}$, por um sistema (para mais detalhes ver [KFA69] e [Son98]). Como vimos no capítulo anterior, $\mathcal{Y}$ é realizável se existe um sistema $\Sigma = (A, B, C, D)$, com parâmetros de Markov dados pelos elementos de $\mathcal{Y}$, isto é,

$$\begin{aligned} Y_0 &= D \\ Y_i &= CA^{i-1}B, \text{ para } i \geq 1. \end{aligned}$$

Note-se que D coincide com Y_0 pelo que, para obter tal sistema, basta determinar as matrizes A, B e C tais que

$$Y_i = CA^{i-1}B, \text{ para } i \geq 1.$$

Assim sendo, poder-se-á reformular o problema da realização com base nos parâmetros de Markov do seguinte modo: dada uma sucessão de matrizes do tipo $p \times m$, $\mathcal{Y} = \{Y_1, Y_2, ...\}$, pretendemos determinar um sistema $\Sigma = (A, B, C)$ tal que

$$Y_i = CA^{i-1}B, \text{ para } i \geq 1. \tag{3.1}$$

3.1 Realizações mínimas

De agora em diante vamos designar uma sucessão de $p \times m$ matrizes reais, $\mathcal{Y} = \{Y_1, Y_2, ...\}$, como uma sucessão de Markov. As definições e os resultados que se seguem suportam a construção de um critério que permite averiguar quando é que uma determinada sucessão de Markov é realizável.

Definição 3.1.1. *Dada uma sucessão de Markov $\mathcal{Y} = \{Y_1, Y_2, ...\}$ e s e t números inteiros positivos, a (s,t)- ésima matriz de Hankel associada a $\mathcal{Y}$ é a matriz real dada por*

$$\mathcal{H}_{s,t}(\mathcal{Y}) := \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_t \\ Y_2 & Y_3 & \cdots & Y_{t+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_s & Y_{s+1} & \cdots & Y_{s+t-1} \end{pmatrix},$$

de dimensão $ps \times mt$, constituída por blocos de dimensão $p \times m$, cujo (i,j)-ésimo bloco é dado por Y_{i+j-1}.

Relembre-se a notação utilizada no Capítulo 2,

$$O_s(C,A) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{s-1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R_t(A,B) = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{t-1}B \end{bmatrix}, \quad s,t \geq 1$$

onde A, B e C são matrizes do tipo $n \times n$, $n \times m$ e $p \times n$, respectivamente, de um dado sistema $\Sigma = (A, B, C)$.

A proposição que se segue representa um resultado importante para o estudo que se pretende fazer, uma vez que estabelece um critério para verificar se uma sucessão de Markov é realizável por um sistema, em termos das matrizes descritas acima e das matrizes de Hankel associadas à sucessão de Markov.

Proposição 3.1.2. *Sejam $\Sigma = (A, B, C)$ um sistema e $\mathcal{Y} = \{Y_1, Y_2, ...\}$ uma sucessão* *de Markov. Então Σ realiza $\mathcal{Y}$, se e só se*

$$O_s(C,A)R_t(A,B) = \mathcal{H}_{s,t}(\mathcal{Y}),\ \forall\ s,t \in \mathbb{N}.$$

Prova: Sejam $s,t \in \mathbb{N}$ arbitrários. Então, uma vez que

$$\begin{aligned} O_s(C,A)R_t(A,B) &= \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{s-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{t-1}B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} CB & CAB & \cdots & CA^{t-1}B \\ CAB & CA^2B & \cdots & CA^tB \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ CA^{s-1}B & CA^sB & \cdots & CA^{s+t-2}B \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{H}_{s,t}(\mathcal{Y}) = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_t \\ Y_2 & Y_3 & \cdots & Y_{t+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Y_s & Y_{s+1} & \cdots & Y_{s+t-1} \end{bmatrix}$$

temos, por (3.1) que Σ realiza $\mathcal{Y}$ se e só se $O_s(C,A)R_t(A,B) = \mathcal{H}_{s,t}$, para todos $s,t \in \mathbb{N}$. □

Corolário 3.1.3. *Seja $\Sigma = (A,B,C)$ uma realização de dimensão n de uma sucessão de Markov $\mathcal{Y} = \{Y_1, Y_2, Y_3, ...\}$. Então*

$$\operatorname{rank} \mathcal{H}_{s,t}(\mathcal{Y}) \leq max\{\operatorname{rank} O_s(C,A), \operatorname{rank} R_t(A,B)\} \leq n,\ \forall\ s,t \in \mathbb{N}.$$

Prova: O resultado segue imediatamente da Proposição 3.1.2 e do facto de $\operatorname{rank} O_s(C,A) \leq n$ e $\operatorname{rank} R_t(A,B) \leq n$ para todos $s,t \in \mathbb{N}$. □

Seja $\Sigma = (A, B, C)$ um sistema de dimensão n, atingível e observável, isto é, tal que as matrizes $O_s(C, A)$ e $R_t(A, B)$ têm característica n, para $s \geq N'$ e $t \geq N$ onde N e N' são os índices de atingibilidade e observabilidade, respectivamente. Então existem duas matrizes $O_s^\sharp(C, A)$ e $R_t^\sharp(A, B)$, tais que $O_s^\sharp(A, C)$ é inversa à esquerda de $O_s(C, A)$ e $R_t^\sharp(A, B)$ é inversa à direita de $R_t(A, B)$, ou seja,

$$O_s^\sharp(C, A)O_s(C, A) = I_n \quad \text{e} \quad R_t(A, B)R_t^\sharp(A, B) = I_n.$$

Proposição 3.1.4. *Seja $\mathcal{Y}$ uma sucessão de Markov realizável por um sistema $\Sigma = (A, B, C)$ de dimensão n, atingível e observável, com índices de atingibilidade e observabilidade N e N', respectivamente. Então*

$$\operatorname{rank} \mathcal{H}_{s,t}(\mathcal{Y}) = n, \ \textit{para } s \geq N' \textit{ e } t \geq N.$$

Prova: Pelo Corolário 3.1.3 temos que

$$\operatorname{rank} \mathcal{H}_{s,t}(\mathcal{Y}) \leq n, \ \text{para } s, t \in \mathbb{N}.$$

Para provar a igualdade pretendida resta demonstrar que $\operatorname{rank} \mathcal{H}_{s,t}(\mathcal{Y}) \geq n$, para $s \geq N'$ e $t \geq N$.

Sejam $s \geq N'$ e $t \geq N$. Note-se que, como Σ é atingível, com índice de atingibilidade N, observável, com índice de observabilidade N', e $O_s(C, A)$ admite inversa à esquerda, $O_s^\sharp(C, A)$, e $R_t(A, B)$ admite inversa à direita, $R_t^\sharp(A, B)$. Logo, uma vez que pela Proposição 3.1.2, $O_s(C, A)R_t(A, B) = \mathcal{H}_{s,t}(\mathcal{Y})$ temos que

$$I_n = O_s^\sharp(C, A)O_s(C, A)R_t(A, B)R_t^\sharp(A, B) = O_s^\sharp(C, A)\mathcal{H}_{s,t}(\mathcal{Y})R_t^\sharp(A, B),$$

o que implica que

$$n \;=\; \operatorname{rank} I_n = \operatorname{rank} O^\sharp(A, C)\mathcal{H}_{s,t}(\mathcal{Y})R^\sharp(A, B)$$

Portanto $\operatorname{rank} \mathcal{H}_{s,t}(\mathcal{Y}) \geq n$, como pretendíamos demonstrar. $\square$

Como vimos no Capítulo 1 um dos objectivos deste estudo é, observando a resposta impulsional de um sistema, determinar uma realização do mesmo. Porém existem muitas realizações que satisfazem este objectivo. Pretendemos determinar uma realização de menor dimensão possível, por forma a realizar o tratamento dos dados de modo eficiente.

Definição 3.1.5. *Seja $\mathcal{Y} = \{Y_1, Y_2, ...\}$ uma sucessão de Markov realizável. Uma realização $\Sigma = (A, B, C)$ de $\mathcal{Y}$ diz-se mínima se qualquer outra realização de $\mathcal{Y}$ tiver dimensão maior ou igual à dimensão de Σ.*

Teorema 3.1.6. *Seja $\mathcal{Y} = \{Y_1, Y_2, ...\}$ uma sucessão de Markov realizável e $\Sigma = (A, B, C)$ uma sua realização. Então Σ é mínima se e só se é atingível e observável.*

Prova: No sentido de demonstrar a implicação directa observe-se que se Σ é uma realização mínima de $\mathcal{Y}$, isto é, qualquer outra realização de $\mathcal{Y}$ tem dimensão maior ou igual à dimensão de Σ, então segue imediatamente que Σ é atingível e observável. Note-se que se tal não acontecesse, pelo que vimos na Secção 2.6, existiria outra realização de dimensão menor, que realizava a mesma sucessão de Markov, o que contradiz a hipótese.

Para demonstrar a implicação recíproca, suponhamos que Σ é uma realização de $\mathcal{Y}$, de dimensão n, atingível e observável. Logo, pela Proposição 3.1.4, tem-se que $\operatorname{rank} \mathcal{H}_{s,t}(\mathcal{Y}) = n,$ para $s, t \geq n$ (pois os índices de atingibilidade e observabilidade de Σ são menores ou iguais a n). Suponhamos agora, com vista ao absurdo, que Σ não é mínima. Logo, existe outra realização, digamos $\tilde{\Sigma} = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ de dimensão r, menor que n, que realiza $\mathcal{Y}$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\tilde{\Sigma}$ é atingível e observável, o que implica, pela Proposição 3.1.4 que

$$\operatorname{rank} \mathcal{H}_{s,t}(\mathcal{Y}) = r \text{ para } s, t \geq r.$$

O que contradiz o facto de $\operatorname{rank} \mathcal{H}_{s,t}(\mathcal{Y}) = n,$ para $s, t \geq n.$ □

Assim, se conhecermos uma realização Σ de uma sucessão de Markov $\mathcal{Y}$, uma realização mínima de $\mathcal{Y}$ é facilmente construída calculando uma realização, algebricamente equivalente a Σ, como na Proposição 2.6.1 e considerando o seu subsistema atingível e observável.

Definição 3.1.7. *A característica de uma sucessão de Markov $\mathcal{Y}$ é dada por*

$$\sup_{s,t} \operatorname{rank} \mathcal{H}_{s,t}(\mathcal{Y})$$

e denota-se por $\operatorname{rank} \mathcal{Y}$.

O seguinte resultado segue imediatamente da Proposição 3.1.4 e do Teorema 3.1.6.

Proposição 3.1.8. *Seja $\mathcal{Y} = \{Y_1, Y_2, ...\}$ uma sucessão de Markov realizável e $\Sigma = (A, B, C)$ uma sua realização mínima. Então a dimensão de Σ é dada por* $\operatorname{rank} \mathcal{Y}$.

Facilmente se observa que se uma sucessão de Markov, $\mathcal{Y}$, é realizável por um sistema $\Sigma = (A, B, C)$, então

$$O_s(C, A) A R_t(A, B) = \sigma(\mathcal{H}_{s,t}(\mathcal{Y})), \text{ para } s, t \geq 1, \tag{3.2}$$

onde

$$\sigma\mathcal{H}_{s,t}(\mathcal{Y}) = \begin{bmatrix} Y_2 & Y_3 & \cdots & Y_{t+1} \\ Y_3 & Y_4 & \cdots & Y_{t+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{s+1} & Y_{s+2} & \cdots & Y_{s+t} \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Este facto vai ser importante na demonstração do próximo resultado.

Teorema 3.1.9. *Sejam $\Sigma = (A, B, C)$ e $\tilde{\Sigma} = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ duas realizações mínimas da mesma sucessão de Markov $\mathcal{Y}$. Então Σ é algebricamente equivalente a $\tilde{\Sigma}$.*

Prova: Pretendemos provar que existe uma matriz invertível T tal que

$$\tilde{A} = T^{-1} A T, \quad \tilde{B} = T^{-1} B \quad e \quad \tilde{C} = C T. \tag{3.4}$$

Com o intuito de simplificar a notação denote-se $R = R(A, B)$, $O = O(C, A)$, $\tilde{R} =$

$R(\tilde{A},\tilde{B})$ e $\tilde{O} = O(\tilde{C},\tilde{A})$ as matrizes de atingibilidade e observabilidade de Σ e $\tilde{\Sigma}$, respectivamente. Note-se que como Σ e $\tilde{\Sigma}$ têm a mesma dimensão, por serem realizações mínimas, as matrizes O e $\tilde{O}$, bem como as matrizes R e $\tilde{R}$ são do mesmo tipo.

Pela Proposição 3.1.2 e por (3.2) resulta, simultaneamente, que

$$OR = \tilde{O}\tilde{R} \quad \text{e} \quad OAR = \tilde{O}\tilde{A}\tilde{R}. \tag{3.5}$$

Sejam $\tilde{R}^\sharp$ a matriz inversa à direita de $\tilde{R}$ e $\tilde{O}^\sharp$ a matriz inversa à esquerda de $\tilde{O}$. Então $OR = \tilde{O}\tilde{R} \Leftrightarrow \tilde{O}^\sharp OR\tilde{R}^\sharp = I$, isto é, $R\tilde{R}^\sharp = (\tilde{O}^\sharp O)^{-1}$. Defina-se

$$T := R\tilde{R}^\sharp = (\tilde{O}^\sharp O)^{-1}$$

Então (3.4) segue de (3.5), como se mostra de seguida,

$$\begin{aligned} OAR &= \tilde{O}\tilde{A}\tilde{R} \Leftrightarrow \tilde{O}^\sharp OAR\tilde{R}^\sharp = \tilde{O}^\sharp\tilde{O}\tilde{A}\tilde{R}\tilde{R}^\sharp \Leftrightarrow T^{-1}AT = \tilde{A}, \\ OB &= \tilde{O}\tilde{B} \Leftrightarrow \tilde{O}^\sharp OB = \tilde{O}^\sharp\tilde{O}\tilde{B} \Leftrightarrow T^{-1}B = \tilde{B}, \\ CR &= \tilde{C}\tilde{R} \Leftrightarrow CR\tilde{R}^\sharp = \tilde{C}\tilde{R}\tilde{R}^\sharp \Leftrightarrow CT = \tilde{C}. \end{aligned}$$

□

3.2 Critério de existência de realização

Nesta fase do estudo interessa averiguar quando é que uma dada sucessão de Markov, $\mathcal{Y}$, é realizável.

Teorema 3.2.1. *Sejam $\mathcal{Y}$ uma sucessão de Markov e $\mathcal{H}_{s,t}(\mathcal{Y})$, $s,t \in \mathbb{N}$, as correspondentes matrizes de Hankel. Então $\mathcal{Y}$ é realizável se e só se existem inteiros positivos M e M' tais que*

$$\operatorname{rank}\mathcal{H}_{s,t}(\mathcal{Y}) = \operatorname{rank}\mathcal{H}_{M',M}(\mathcal{Y}),\ \textit{para } s \geq M' \textit{ e } t \geq M, \tag{3.6}$$

isto é, se e só se $\operatorname{rank}\mathcal{Y}$ *é finita.*

Prova: Sejam $\mathcal{Y}$ uma sucessão de Markov realizável, $\Sigma = (A, B, C)$ uma realização mínima de $\mathcal{Y}$, de dimensão n, e N e N' os índices de atingibilidade e observabilidade, respectivamente, com $N\ ,\ N' \leq n$. Então, pela Proposição 3.1.4,

$$\operatorname{rank}\mathcal{H}_{s,t}(\mathcal{Y}) = n, \text{ para } s \geq N' \text{ e } t \geq N,$$

o que prova (3.6).

Para provar a implicação recíproca temos, por hipótese, que existem inteiros positivos, M e M', tais que $\operatorname{rank}\mathcal{H}_{s,t}(\mathcal{Y}) = \operatorname{rank}\mathcal{H}_{M',M}(\mathcal{Y})$, para $s \geq M'$ e $t \geq M$.

Uma vez que $\mathcal{H}_{M',M}(\mathcal{Y})$ é uma submatriz de $\mathcal{H}_{s,t}(\mathcal{Y})$, para $s > M'$ e $t > M$, temos que, em particular,

$$\operatorname{rank}\mathcal{H}_{s,M+1}(\mathcal{Y}) = \operatorname{rank}\mathcal{H}_{s,M}(\mathcal{Y}), \text{ para } s > M'.$$

Portanto, para todo $s > M'$, a $(M+1)$-ésima coluna de blocos de $\mathcal{H}_{s,M+1}(\mathcal{Y})$ é uma combinação linear das M colunas de blocos anteriores, isto é,

$$\begin{bmatrix} Y_{M+1} \\ Y_{M+2} \\ Y_{M+3} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \end{bmatrix} P_1 + \begin{bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ \vdots \end{bmatrix} P_2 + \cdots + \begin{bmatrix} Y_M \\ Y_{M-1} \\ Y_{M-2} \\ \vdots \end{bmatrix} P_M, \tag{3.7}$$

onde $P_1, P_2, \ldots, P_M$ são matrizes do tipo $m \times m$.

Sejam A, B e C matrizes do tipo $mM \times mM$, $mM \times m$ e $p \times mM$, respectivamente, definidas por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & P_1 \\ I_m & & & \\ & \ddots & & \\ & & I_m & P_M \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} Y_1 & \cdots & Y_M \end{bmatrix}.$$

Vamos verificar que $\Sigma = (A, B, C)$ realiza $\mathcal{Y}$. Para tal, vamos começar por mostrar, por indução matemática, que

$$CA^k = \begin{bmatrix} Y_{k+1} & \cdots & Y_{M+k} \end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

para todo $k \geq 0$. Para $k = 0$, é imediato ver que (3.8) é satisfeita. Suponhamos que (3.8) é satisfeita para k e vamos provar que também o é para $k + 1$. Como $CA^{k+1} = CA^k A$ temos, por hipótese de indução, que

$$\begin{aligned} CA^{k+1} &= \begin{bmatrix} Y_{k+1} & \cdots & Y_{M+k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & P_1 \\ I_m & & & \\ & \ddots & & \\ & & I_m & P_M \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Y_{k+2} & \cdots & Y_{M+k} & Y_{k+1}P_1 + \cdots + Y_{M+k}P_M \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De (3.7) vem que $Y_{M+k+1} = Y_{k+1}P_1 + \cdots + Y_{M+k}P_M$, concluindo-se que $CA^{k+1} = \begin{bmatrix} Y_{k+2} & \cdots & Y_{M+k} & Y_{M+k+1} \end{bmatrix}$ como pretendido. Logo (3.8) é verdadeira para todo $k \geq 0$ e portanto $CA^kB = Y_{k+1}$, para $k \geq 0$, o que mostra que $\Sigma = (A, B, C)$ realiza $\mathcal{Y}$.

$\square$

Proposição 3.2.2. *Sejam $\mathcal{Y}$ uma sucessão de Markov realizável e $\Sigma = (A, B, C)$ uma sua realização mínima. Então, se N e N' são os menores inteiros tais que*

$$\operatorname{rank} \mathcal{H}_{s,t}(\mathcal{Y}) = \operatorname{rank} \mathcal{Y}, \text{ para } s \geq N' \text{ e } t \geq N,$$

temos que N e N' são os índices de atingibilidade e de observabilidade de Σ, respectivamente.

Prova: Sejam $\tilde{N}$ e $\tilde{N}'$ os índices de atingibilidade e observabilidade de Σ. Observe-se que $\mathcal{H}_{s,t}(\mathcal{Y}) = O_s(C, A)R_t(A, B)$, para $s, t \in \mathbb{N}$, e que Σ tem dimensão $\operatorname{rank} \mathcal{Y}$. Para $s < \tilde{N}'$ temos que $\operatorname{rank} O_s(C, A) < \operatorname{rank} \mathcal{Y}$. Da mesma forma, $t < \tilde{N}$ implica que

$\operatorname{rank} R_t(A,B) < \operatorname{rank} \mathcal{Y}$. Concluímos assim que

$$\operatorname{rank} \mathcal{H}_{s,t}(\mathcal{Y}) < \operatorname{rank} \mathcal{Y},$$

para $s < \tilde{N}'$ ou $t < \tilde{N}$. A Proposição 3.1.4 e a Proposição 3.1.8 também permitem concluir que

$$\operatorname{rank} \mathcal{H}_{s,t}(\mathcal{Y}) = \operatorname{rank} \mathcal{Y},$$

para $s \geq \tilde{N}'$ ou $t \geq \tilde{N}$. Logo $N' = \tilde{N}'$ e $N = \tilde{N}$. □

Importa reforçar a ideia de que estamos em condições de averiguar se uma sucessão de Markov é realizável e caso seja, conhecemos a dimensão de uma sua realização mínima. A secção que se segue fornece uma construção da realização mínima pretendida.

3.3 Algoritmo de Ho

Nesta secção apresenta-se um algoritmo que determina uma fórmula explícita para o cálculo das matrizes A, B e C de uma realização mínima de uma sucessão de Markov. De seguida, introduziremos algumas notações e resultados necessários.

Lema 3.3.1. *Seja $\Sigma = (A,B,C)$ um sistema atingível, de dimensão n, com índice de atingibilidade N. Então existem matrizes $F_0, F_1, ..., F_{N-1}$ do tipo $m \times m$ tais que*

$$Y_{N+k+1} = Y_{k+1}F_0 + Y_{k+2}F_1 + \cdots + Y_{N+k}F_{N-1},$$

para $k \geq 0$.

Prova: Uma vez que Σ é atingível, com índice de atingibilidade N, temos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{rank} R_N(A,B) &= \operatorname{rank} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{N-1}B \end{bmatrix} \\
&= \operatorname{rank} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{N-1}B & A^N B \end{bmatrix} \\
&= \operatorname{rank} R_{N+1}(A,B)
\end{aligned}$$

e portanto, as colunas de $A^N B$ são combinação linear das colunas de $R_N(A,B)$, isto é, existem matrizes $F_0, F_1, ..., F_{N-1}$ do tipo $m \times m$ tais que $A^N B = BF_0 + ABF_1 + \cdots + A^{N-1}BF_{N-1}$ e, portanto,

$$A^{N+k}B = A^k BF_0 + A^{k+1}BF_1 + \cdots + A^{N+k-1}BF_{N-1}, \text{ para } k \geq 0.$$

Logo

$$CA^{N+k}B = CA^k BF_0 + CA^{k+1}BF_1 + \cdots + CA^{N+k-1}BF_{N-1},$$

para $k \geq 0$, de onde resulta imediatamente que

$$Y_{N+k+1} = Y_{k+1}F_0 + Y_{k+2}F_1 + \cdots + Y_{N+k}F_N, \text{ para } k \geq 0.$$

□

Estabeleça-se um resultado semelhante para o caso de uma realização observável.

Lema 3.3.2. *Seja $\Sigma = (A,B,C)$ um sistema observável, de dimensão n, com índice de observabilidade N'. Então existem matrizes $G_0, G_1, ..., G_{N'-1}$ do tipo $p \times p$ tais que*

$$Y_{N'+k+1} = G_0 Y_{k+1} + G_1 Y_{k+2} + \cdots + G_{N'-1} Y_{N'+k}$$

para $k \geq 0$.

Prova: A demonstração é análoga à demonstração do Lema 3.3.1. □

Sejam $\Sigma = (A,B,C)$ um sistema, de dimensão n, atingível e observável com índices de atingibilidade e observabilidade N e N' , respectivamente e $F_0, F_1, ..., F_{N-1}$ e G_0, G_1,...,$G_{N'-1}$ as matrizes do tipo $m \times m$ e $p \times p$, respectivamente, consideradas nos Lemas 3.3.1 e 3.3.2. Definam-se as matrizes

$$X = \begin{bmatrix} 0_p & I_p & 0_p & \dots & 0_p \\ 0_p & 0_p & I_p & \dots & 0_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0_p & 0_p & 0_p & \dots & I_p \\ G_0 & G_1 & G_2 & \dots & G_{N'-1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} 0_m & 0_m & 0_m & \dots & F_0 \\ I_m & 0_m & 0_m & \dots & F_1 \\ 0_m & I_m & 0_m & \dots & F_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0_m & 0_m & 0_m & \dots & F_{N-1} \end{bmatrix}.$$

Seja $\mathcal{Y}$ a sucessão dos parâmetros de Markov de Σ. Por uma questão de simplificação denote-se $\mathcal{H}_{N',N}(\mathcal{Y})$ por $\mathcal{H}_{N',N}$. De seguida vejamos que $X\mathcal{H}_{N',N} = \mathcal{H}_{N',N}U$.

Por um lado temos que

$$
\begin{aligned}
X\mathcal{H}_{N',N} &= \begin{bmatrix} 0_p & I_p & 0_p & \cdots & 0_p \\ 0_p & 0_p & I_p & \cdots & 0_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0_p & 0_p & 0_p & \cdots & I_p \\ G_0 & G_1 & G_2 & \cdots & G_{N'-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_N \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Y_{N'} & Y_{N'+1} & \cdots & Y_{N+N'-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} Y_2 & \cdots & Y_{N+1} \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{N'} & \cdots & Y_{N+N'-1} \\ G_0Y_1 + \cdots + G_{N'-1}Y_{N'} & \cdots & G_0Y_N + \cdots + G_{N'-1}Y_{N+N'-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Note-se que, pelo Lema 3.3.2, $Y_{N'+1} = G_0Y_1 + G_1Y_2 + \cdots + G_{N'-1}Y_{N'}$ e $Y_{N'+N} = G_0Y_N + G_1Y_{N+1} + \cdots + G_{N'-1}Y_{N+N'-1}$.

Por outro lado, temos que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_{N',N}U &= \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_N \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Y_{N'} & Y_{N'+1} & \cdots & Y_{N+N'-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_m & 0_m & 0_m & \cdots & F_0 \\ I_m & 0_m & 0_m & \cdots & F_1 \\ 0_m & I_m & 0_m & \cdots & F_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0_m & 0_m & 0_m & \cdots & F_{N-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} Y_2 & \cdots & Y_N & Y_1F_0 + \cdots + Y_NF_{N-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ Y_{N'+1} & \cdots & Y_{N+N'-1} & Y_{N'}F_0 + \cdots + Y_{N'+N-1}F_{N-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Note-se que, pelo Lema 3.3.1, $Y_{N+1} = Y_1F_0 + \cdots + Y_NF_{N-1}$ e $Y_{N'+N} = Y_{N'}F_0 + \cdots + Y_{N'+N-1}F_{N-1}$. Pelo que, acabámos de mostrar que, de facto, $X\mathcal{H}_{N',N} = \mathcal{H}_{N',N}U$.

Uma consequência imediata é que

$$X^{i-1}\mathcal{H}_{N',N} = \mathcal{H}_{N',N}U^{i-1}, \quad \text{para } i \geq 1. \tag{3.9}$$

Uma outra propriedade que vamos averiguar, recorrendo à indução matemática, é dada por

$$\sigma^i \mathcal{H}_{N',N} = X^i \mathcal{H}_{N',N}, \text{ para } i \geq 0, \tag{3.10}$$

onde $\sigma^i \mathcal{H}_{N',N}$ é a submatriz de $\mathcal{H}_{N'+i,N}$ sem as primeiras i linhas de blocos, isto é, sem as primeiras $i \times p$ linhas.

De facto, se $i = 0$, então (3.10) é trivialmente satisfeita. Suponha-se que (3.10) é satisfeita para $i-1$. Pretendemos provar que (3.10) também é satisfeita para i. Uma vez que

$$X^i \mathcal{H}_{N',N} = X X^{i-1} \mathcal{H}_{N',N} \tag{3.11}$$

então, por hipótese de indução, (3.11) resulta em

$$\begin{aligned}
X^i \mathcal{H}_{N',N} &= X \sigma^{i-1} \mathcal{H}_{N',N} \\
&= \begin{bmatrix} 0_p & I_p & 0_p & \cdots & 0_p \\ 0_p & 0_p & I_p & \cdots & 0_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0_p & 0_p & 0_p & \cdots & I_p \\ G_0 & G_1 & G_2 & \cdots & G_{N'-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_i & Y_{i+1} & \cdots & Y_{N+i-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Y_{N'+i-1} & Y_{N'+i} & \cdots & Y_{N+N'+i-2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} Y_{i+1} & \cdots & Y_{N+i} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ Y_{N'+i-1} & \cdots & Y_{N+N'+i-2} \\ G_0 Y_i + \cdots + G_{N'-1} Y_{N'+i-1} & \cdots & G_0 Y_{N+i-1} + \cdots + G_{N'-1} Y_{N+N'+i-2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.3.2, temos que

$$Y_{N'+i} = G_0 Y_i + \cdots + G_{N'-1} Y_{N'+i-1} \quad \text{e} \quad Y_{N'+N+i-1} = G_0 Y_{N+i-1} + \cdots + G_{N'-1} Y_{N+N'+i-2}$$

e portanto,

$$X^i\mathcal{H}_{N',N} = \begin{bmatrix} Y_{i+1} & \cdots & Y_{N+i} \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{N'+i} & \cdots & Y_{N+N'+i-1} \end{bmatrix} = \sigma^i\mathcal{H}_{N',N},$$

como se pretendia.

Considere-se

$$E_{m\times n} = \begin{cases} \begin{bmatrix} I_m & 0_{m\times(n-m)} \end{bmatrix} & \text{se } m < n \\ I_m & \text{se } m = n \\ \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{(m-n)\times n} \end{bmatrix} & \text{se } m > n \end{cases}$$

onde $0_{k\times l}$ representa a matriz nula do tipo $k \times l$.

Observe-se que como Σ é atingível e observável, temos que Σ é uma realização mínima de $\mathcal{Y}$. Além disso, como a dimensão de Σ é n, resulta que $n = \operatorname{rank}\mathcal{Y} = \operatorname{rank}\mathcal{H}_{s,t}$, para $s \geq N'$ e $t \geq N$. Logo, pelo algoritmo do factor invariante, existem matrizes invertíveis P e M, do tipo $N'p \times N'p$ e $Nm \times Nm$, respectivamente, tais que

$$P\mathcal{H}_{N',N}M = E_{N'p\times n}E_{n\times Nm}. \tag{3.12}$$

Defina-se a matriz $\mathcal{H}^+_{N',N}$ dada por

$$\mathcal{H}^+_{N',N} = ME_{Nm\times n}E_{n\times N'p}P. \tag{3.13}$$

Esta matriz designa-se por pseudo-inversa de $\mathcal{H}_{N',N}$, no sentido em que

$$\mathcal{H}_{N',N}\mathcal{H}^+_{N',N}\mathcal{H}_{N',N} = \mathcal{H}_{N',N}. \tag{3.14}$$

Vejamos de seguida que, de facto, (3.14) acontece. Por definição de $\mathcal{H}^+_{N',N}$, tem se que

$$\mathcal{H}_{N',N}\mathcal{H}^+_{N',N}\mathcal{H}_{N',N} = \mathcal{H}_{N',N}ME_{Nm\times n}E_{n\times N'p}P\mathcal{H}_{N',N} \tag{3.15}$$

Por outro lado, como $P\mathcal{H}_{N',N}M = E_{N'p\times n}E_{n\times Nm}$, temos que $\mathcal{H}_{N',N} = P^{-1}E_{N'p\times n}E_{n\times Nm}M^{-1}$, e (3.15) é dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{N',N}\mathcal{H}^{+}_{N',N}\mathcal{H}_{N',N} &= P^{-1}E_{N'p\times n}E_{n\times Nm}M^{-1}ME_{Nm\times n}E_{n\times N'p}PP^{-1}E_{N'p\times n}E_{n\times Nm}M^{-1}\\
&= P^{-1}E_{N'p\times n}E_{n\times Nm}M^{-1}\\
&= \mathcal{H}_{N',N}
\end{aligned}$$

como se pretendia mostrar.

Finalmente estamos em condições de enunciar o algoritmo de Ho e de provar que este fornece uma realização mínima de uma sucessão de Markov.

Teorema 3.3.3. *(**Algoritmo de Ho**) Seja $\mathcal{Y}$ uma sucessão de Markov realizável. Então a execução dos passos que se seguem fornece uma realização mínima, $\Sigma = (A, B, C)$, de $\mathcal{Y}$.*

1º - Determinar os menores inteiros positivos N e N' e a matriz de Hankel $\mathcal{H}_{N',N}(\mathcal{Y})$, que satisfazem o Teorema 3.2.1, isto é, tais que

$$\operatorname{rank}\mathcal{H}_{s,t} = \operatorname{rank}\mathcal{H}_{N',N} = n, \ \text{para } s \geq N' \text{ e } t \geq N. \tag{3.16}$$

2º - Usando o algoritmo do factor invariante, encontrar matrizes invertíveis P e M de dimensões $N'p \times N'p$ e $Nm \times Nm$, respectivamente, tais que

$$\begin{aligned}
P\mathcal{H}_{N',N}M &= \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times(Nm-n)} \\ 0_{(N'p-n)\times n} & 0_{(N'p-n)\times(Nm-n)} \end{bmatrix}\\
&= E_{N'p\times n}E_{n\times Nm}.
\end{aligned}$$

3º - Construir as matrizes A, B e C dadas por

$$A = E_{n\times N'p}P(\sigma\mathcal{H}_{N',N})ME_{Nm\times n} \tag{3.17}$$

$$B = E_{n\times N'p}P\mathcal{H}_{N',N}E_{Nm\times m} \tag{3.18}$$

$$C = E_{p\times N'p}\mathcal{H}_{N',N}ME_{Nm\times n} \tag{3.19}$$

onde $\sigma\mathcal{H}_{N',N}$ se encontra definida em (3.3).

Prova: Vamos começar por provar que $\Sigma = (A, B, C)$ é uma realização de $\mathcal{Y} = \{Y_1, Y_2, ...\}$, isto é, que

$$Y_i = CA^{i-1}B, \text{ para } i \geq 1.$$

onde A, B e C são dados por (3.17), (3.18) e (3.19).

Com as notações introduzidas nesta secção observe-se que

$$\begin{array}{rcll}
Y_i & = & E_{p\times N'p}[\sigma^{i-1}\mathcal{H}_{N',N}]E_{Nm\times m} & \\
 & = & E_{p\times N'p}X^{i-1}\mathcal{H}_{N',N}E_{Nm\times m} & \text{, por (3.10)} \\
 & = & E_{p\times N'p}X^{i-1}\mathcal{H}_{N',N}\mathcal{H}^{+}_{N',N}\mathcal{H}_{N',N}E_{Nm\times m} & \text{, por (3.14)} \\
 & = & E_{p\times N'p}X^{i-1}\mathcal{H}_{N',N}ME_{Nm\times n}E_{n\times N'p}P\mathcal{H}_{N',N}E_{Nm\times m} & \text{, por (3.13)} \\
 & = & E_{p\times N'p}X^{i-1}\mathcal{H}_{N',N}ME_{Nm\times n}B & \text{, por definição de } B \\
 & = & E_{p\times N'p}\mathcal{H}_{N',N}U^{i-1}ME_{Nm\times n}B & \text{, por (3.9)} \\
 & = & E_{p\times N'p}\mathcal{H}_{N',N}\mathcal{H}^{+}_{N',N}\mathcal{H}_{N',N}U^{i-1}ME_{Nm\times n}B & \text{, por (3.14)} \\
 & = & E_{p\times N'p}\mathcal{H}_{N',N}ME_{Nm\times n}E_{n\times N'p}P\mathcal{H}_{N',N}U^{i-1}ME_{Nm\times n}B & \text{, por (3.13)} \\
 & = & CE_{n\times N'p}P\mathcal{H}_{N',N}U^{i-1}ME_{Nm\times n}B & \text{, por definição de } C \\
 & = & CE_{n\times N'p}PX^{i-1}\mathcal{H}_{N',N}ME_{Nm\times n}B & \text{, por (3.9)}
\end{array}$$

Para provar a igualdade pretendida, uma vez que $A = E_{n\times N'p}P(\sigma\mathcal{H}_{N',N})ME_{Nm\times n} = E_{n\times N'p}PX\mathcal{H}_{N',N}ME_{Nm\times n}$, resta verificar que

$$(E_{n\times N'p}PX\mathcal{H}_{N',N}ME_{Nm\times n})^{i-1} = E_{n\times N'p}PX^{i-1}\mathcal{H}_{N',N}ME_{Nm\times n}, \text{ para } i \geq 1. \quad (3.20)$$

Esta prova será feita por indução matemática Se $i = 1$, temos que

$$\begin{array}{rcll}
I_n & = & E_{n\times N'p}P\mathcal{H}_{N',N}ME_{Nm\times n} & \\
 & = & E_{n\times N'p}E_{N'p\times n}E_{n\times Nm}E_{Nm\times n} & \text{, por (3.12)} \\
 & = & I_n &
\end{array}$$

Suponhamos agora que (3.20) é verdadeira para $i-1$ e vejamos que também o é para

i, com $i \geq 1$. De facto, por hipótese de indução, temos que

$$\begin{aligned}(E_{n\times N'p}PX\mathcal{H}_{N',N}ME_{Nm\times n})^i &= E_{n\times N'p}PX\mathcal{H}_{N',N}ME_{Nm\times n}(E_{n\times N'p}PX\mathcal{H}_{N',N}ME_{Nm\times n})^{i-1} \\ &= E_{n\times N'p}PX\mathcal{H}_{N',N}ME_{Nm\times n}E_{n\times N'p}PX^{i-1}\mathcal{H}_{N',N}ME_{Nm\times n}.\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}(E_{n\times N'p}PX\mathcal{H}_{N',N}ME_{Nm\times n})^i &= E_{n\times N'p}PX\mathcal{H}_{N',N}\mathcal{H}^{+}_{N',N}X^{i-1}\mathcal{H}_{N',N}ME_{Nm\times n} && \text{, por (3.13)} \\ &= E_{n\times N'p}PX\mathcal{H}_{N',N}\mathcal{H}^{+}_{N',N}\mathcal{H}_{N',N}U^{i-1}ME_{Nm\times n} && \text{, por (3.9)} \\ &= E_{n\times N'p}PX\mathcal{H}_{N',N}U^{i-1}ME_{Nm\times n} && \text{, por (3.14)} \\ &= E_{n\times N'p}PXX^{i-1}\mathcal{H}_{N',N}ME_{Nm\times n} && \text{, por (3.9)} \\ &= E_{n\times N'p}PX^{i}\mathcal{H}_{N',N}ME_{Nm\times n}\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

É óbvio que, uma vez que A é uma matriz de dimensão $n \times n$, $\Sigma = (A, B, C)$ tem dimensão igual à característica de $\mathcal{Y} = \{Y_1, Y_2, ...\}$ e portanto Σ é uma realização mínima de $\mathcal{Y}$. □

Observe-se que, por uma questão de eficiência, consideramos no primeiro passo do algoritmo os menores inteiros N e N' que satisfazem (3.16), ou seja, os índices de atingibilidade e observabilidade, respectivamente, de uma realização mínima de $\mathcal{Y}$. No entanto facilmente se vê que o algoritmo de Ho também permite determinar uma realização mínima de $\mathcal{Y}$ se escolhermos, no primeiro passo, $M \geq N$ e $M' \geq N'$.

3.4 Alguns exemplos ilustrativos da aplicação do algoritmo de Ho

Seguem-se dois exemplos onde se pretende ilustrar o problema da realização mínima e onde vamos considerar, separadamente, duas sucessões de matrizes. Pretendemos para cada sucessão $\mathcal{Y} = \{Y_0, Y_1, ...\}$, com base nos resultados anteriormente desenvolvidos e com especial destaque para a aplicação do Algoritmo de Ho, determinar um sistema

$\Sigma = (A, B, C, D)$ cujos parâmetros de Markov dados pelos elementos das sucessões sejam

$$\begin{aligned} Y_0 &= D \\ Y_i &= CA^{i-1}B, \quad i \geq 1 \end{aligned}$$

e o tamanho de A seja o menor possível.

O primeiro exemplo considerado pretende determinar uma realização mínima para a sucessão de Fibonacci. Esta escolha é motivada pelas fortes e interessantes conexões que se podem estabelecer entre a matemática e o quotidiano através desta sucessão.

Exemplo 3.4.1. Considere-se a sucessão de Fibonacci definida por $Y_0 = 0$, $Y_1 = 1$ e $Y_i = Y_{i-1} + Y_{i-2}$, para $i \geq 2$, isto é, $\mathcal{Y} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...\}$. Note-se que $D = Y_0 = 0$, por conseguinte, e de forma a utilizar os resultados desenvolvidos ao longo deste capítulo consideremos a sucessão de Markov $\tilde{\mathcal{Y}} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, ...\}$ e a matriz de Hankel $\mathcal{H}_{s,t}(\tilde{\mathcal{Y}})$ para $s, t \geq 3$, associada a esta sucessão, dada por

$$\mathcal{H}_{s,t}(\tilde{\mathcal{Y}}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & & \cdots \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}. \tag{3.21}$$

Observe-se que, por definição da sucessão de Fibonacci, para $i \geq 3$, a i-ésima linha é combinação linear da duas linhas anteriores, e portanto todas as linhas de $\mathcal{H}_{s,t}(\tilde{\mathcal{Y}})$, são combinações lineares das primeiras duas linhas. O mesmo se pode dizer relativamente às colunas de $\mathcal{H}_{s,t}(\tilde{\mathcal{Y}})$. Repare-se que, para $j \geq 3$, a j-ésima coluna é combinação linear das duas colunas anteriores, e portanto as colunas de $\mathcal{H}_{s,t}(\tilde{\mathcal{Y}})$, são combinações lineares das duas primeiras colunas. Consequentemente temos que

$$\operatorname{rank} \mathcal{H}_{s,t}(\tilde{\mathcal{Y}}) = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{2,2}(\tilde{\mathcal{Y}}), \text{ para } s, t \geq 2, \tag{3.22}$$

e portanto $\tilde{\mathcal{Y}}$ é realizável. Repare-se que $\operatorname{rank} \mathcal{H}_{1,2}(\tilde{\mathcal{Y}}) = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{2,1}(\tilde{\mathcal{Y}}) = 1$, pelo que, neste caso, os menores inteiros N' e N que satisfazem o Teorema 3.2.1 são $N' = N = 2$.

Para executar os passos descritos pelo algoritmo de Ho, considere-se a matriz $\mathcal{H}_{2,2}(\tilde{\mathcal{Y}})$ que satisfaz o Teorema 3.2.1. Além disso, uma vez que a característica desta matriz é 2, então a dimensão de uma realização mínima é 2. Para determinar a realização pretendida basta proceder à execução dos segundo e terceiro passos do Algoritmo de Ho, para este caso particular em que $m = p = 1$ e $N' = N = n = 2$. Assim, consideremos as matrizes $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ invertíveis que verificam

$$P\mathcal{H}_{2,2}(\tilde{\mathcal{Y}})M = I_2 = E_{2\times 2}E_{2\times 2},$$

e construamos as matrizes A, B e C do tipo 2×2, 2×1 e 1×2, respectivamente, dadas por

$$\begin{aligned} A &= E_{2\times 2}P(\sigma\mathcal{H}_{2,2})ME_{2\times 2} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde $\sigma\mathcal{H}_{2,2}(\tilde{\mathcal{Y}}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ é a submatriz de $\mathcal{H}_{3,2}(\tilde{\mathcal{Y}})$ sem a primeira linha de blocos,

$$\begin{aligned} B &= E_{2\times 2}P\mathcal{H}_{2,2}E_{2\times 1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} C &= E_{1\times 2}\mathcal{H}_{2,2}ME_{2\times 2} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Deste modo, a sucessão de Fibonacci é descrita pelo sistema $\Sigma = (A, B, C, D)$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } D = 0.$$

Observe-se que $Y_0 = D = 0$, $Y_1 = CB = 1$ e $Y_2 = CAB = 1$. Vamos ver que $Y_i = CA^{i-1}B$, para $i \geq 3$. De facto, uma vez que o polinómio característico de A é $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$, pelo Teorema de Cayley-Hamilton (Teorema 2.1.6), temos que $A^2 - A - I_2 = 0 \Leftrightarrow A^2 = A + I_2$, o que implica que $A^{i-1} = A^{i-2} + A^{i-3}$, para $i \geq 3$. Logo, multiplicando à esquerda por C e à direita por B, vem imediatamente que $CA^{i-1}B = CA^{i-2}B + CA^{i-3}B$, o que é equivalente a dizer que $Y_i = Y_{i-1} + Y_{i-2}$, que sabemos ser verdade pela definição de Y_i, para $i \geq 3$. $\diamond$

Exemplo 3.4.2. Considere-se agora a sucessão $\mathcal{Y} = \left\{ Y_i = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}_{i \geq 1}$. Vamos determinar uma realização $\Sigma = (A, B, C)$ de $\mathcal{Y}$.

Com vista à aplicação do algoritmo de Ho, pretendemos determinar N' e N tais que o Teorema 3.2.1 é satisfeito.

À semelhança do exemplo anterior considere-se a matriz $\mathcal{H}_{s,t}$, para $s, t \geq 2$, associada a $\mathcal{Y}$ dada por

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

Por observação da matriz anterior facilmente se vê que, à excepção da primeira, todas as linhas ímpares são combinação linear das duas linhas imediatamente anteriores.

Além disso, as linhas pares são todas iguais à segunda linha. Assim, podemos garantir que

$$\operatorname{rank} \mathcal{H}_{s,t}(\mathcal{Y}) = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{1,t}(\mathcal{Y}) = 2, \text{ para } s \geq 1,$$

e portanto podemos concluir que o índice de observabilidade de uma realização mínima de $\mathcal{Y}$ é $N' = 1$.

Obviamente $t \geq 2$ e uma vez que a característica de $\mathcal{H}_{1,2}(\mathcal{Y})$ é 2 concluímos que $N = 2$ representa o índice de atingibilidade de uma realização mínima de $\mathcal{Y}$.

Considerando as matrizes P e M invertíveis dadas por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

respectivamente, temos que $P\mathcal{H}_{1,2}(\mathcal{Y})M = I_2 = E_{2\times 2}E_{2\times 2}$, como se pretendia.

Construamos as matrizes A, B e C, do tipo 2×2, 2×1 e 2×2, respectivamente, dadas por

$$\begin{aligned} A &= E_{2\times 2}P(\sigma\mathcal{H}_{1,2})ME_{2\times 2} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde $\sigma\mathcal{H}_{1,2}(\mathcal{Y})$ é a submatriz de $\mathcal{H}_{2,2}(\mathcal{Y})$ sem a primeira linha de blocos,

$$\begin{aligned} B &= E_{2\times 2}P\mathcal{H}_{1,2}E_{2\times 1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} C &= E_{2\times 2}\mathcal{H}_{1,2}ME_{2\times 2} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Deste modo, a sucessão $\mathcal{Y}$ possui um realização mínima $\Sigma = (A, B, C)$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Observe-se que

$$Y_1 = CB = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y_2 = CAB = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.24}$$

Uma vez que o polinómio característico de A é $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2$, temos que $A^2 = 2A - I_2$ e portanto $A^{k+2} = 2A^{k+1} - A^k$, para $k \geq 0$. Consequentemente $CA^{k+2}B = 2CA^{k+1}B - CA^kB$, ou equivalentemente, $Y_{k+3} = 2Y_{k+2} - Y_{k+1}$, para $k \geq 3$. Note-se que se, para $i \geq 2$, $Y_{i-2} = \begin{bmatrix} i-2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $Y_{i-1} = \begin{bmatrix} i-1 \\ 1 \end{bmatrix}$, temos que $Y_i = 2Y_{i-1} - Y_{i-2} = \begin{bmatrix} 2i-2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i-2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$, o que conjuntamente com (3.24) mostra que $\mathcal{Y} = \left\{ Y_i = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}_{i\geq 1}$ é a sucessão dos parâmetros de Markov de Σ. $\diamond$

Capítulo 4

Realizações parciais

Este capítulo representa um dos focos de especial interesse deste documento. De facto, na prática, é com base nos resultados estudados nesta fase da dissertação que é possível descrever através de um modelo de espaço de estados o comportamento inicial de um determinado sistema. Mais especificamente, veremos que se inicialmente estiverem disponíveis apenas uma sequência finita de parâmetros de Markov, é possível encontrar um sistema cujos primeiros parâmetros de Markov coincidem com os da sequência dada. O objectivo mantém-se na tentativa de obtenção de um sistema de dimensão mínima, cujos parâmetros de Markov sejam uma extensão da sequência inicialmente considerada, construindo-o à custa do Algoritmo de Ho. O estudo deste tema baseou-se essencialmente em [Tet70].

Definição 4.0.3. *Seja* $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$ *uma sequência finita de* N_0 *matrizes do tipo* $p \times m$. *O sistema* $\Sigma = (A, B, C)$ *diz-se uma realização parcial, de ordem* N_0, *de* $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$ *se*

$$Y_i = CA^{i-1}B \quad para \quad i = 1, ..., N_0.$$

Definição 4.0.4. *Seja* $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$ *uma sequência finita de* N_0 *matrizes do tipo* $p \times m$. *O sistema* $\Sigma = (A, B, C)$ *diz-se uma realização parcial mínima, de ordem* N_0, *de* $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$ *se é uma realização parcial, de ordem* N_0, *de* $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$ *e se a dimensão da matriz* A *é mínima relativamente a qualquer outra realização parcial, de ordem* N_0, *de* $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$.

Como vimos na primeira secção do Capítulo 2, dado um sistema $\Sigma = (A, B, C)$, inicialmente em repouso, é possível estabelecer uma relação entre as entradas $u(.)$ e as saídas $y(.)$ do sistema com base nos parâmetros de Markov da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcl} y(1) & = & Y_1 u(0) \\ y(2) & = & Y_2 u(0) + Y_1 u(1) \\ & \vdots & \\ y(N_0) & = & Y_{N_0} u(0) + \cdots + Y_1 u(N_0 - 1) \\ & \vdots & \end{array}$$

Desta relação entre as entradas e as saídas de um sistema resulta a seguinte proposição.

Proposição 4.0.5. *Sejam $\Sigma = (A, B, C)$ e $\tilde{\Sigma} = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ duas realizações parciais, de ordem N_0, de uma sequência finita de N_0 matrizes do tipo $p \times m$. Então as saídas $\tilde{y}(i)$ produzidas por $\tilde{\Sigma}$ coincidem com as saídas $y(i)$ produzidas por Σ para os primeiros N_0 instantes para condições iniciais nulas e para a mesma entrada $u(i)$ para $i = 1, ..., N_0$.*

Deste modo, se conhecermos apenas os primeiros N_0 parâmetros de Markov de um sistema, uma realização parcial destes parâmetros de Markov constitui uma boa aproximação do sistema original, no sentido em que descreve exactamente o comportamento do sistema até ao instante N_0.

Assim coloca-se a questão da existência de realizações parciais para uma dada sequência finita de parâmetros de Markov, que se analisa na secção seguinte.

4.1 Existência de realizações parciais

Nesta secção vamos começar por introduzir um resultado que garante que, dada uma sequência finita $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$ de N_0 matrizes do tipo $p \times m$, existe sempre uma sua realização parcial, de ordem N_0. Observe-se que $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$ admite uma realização parcial de ordem N_0 se e só se existir uma sucessão de Markov, $\mathcal{Y}$, realizável que é uma extensão de $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$, isto é, tal que $\mathcal{Y} = \{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}, Y_{N_0+1}, Y_{N_0+2}, ...\}$, onde Y_i é uma matriz do tipo $p \times m$, para $i > N_0$.

Teorema 4.1.1. *Dada uma sequência finita, $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$, de N_0 matrizes do tipo $p \times m$, existe sempre uma sua realização parcial de ordem N_0.*

Prova: Sejam $\beta_0, ..., \beta_{N_0-1} \in \mathbb{R}$. Defina-se

$$Y_{N_0+k} = \beta_0 Y_k + ... + \beta_{N_0-1} Y_{N_0+k-1}, \tag{4.1}$$

para $k \geq 1$.

Consequentemente, para $s, t \geq N_0$, todas as colunas e linhas de $\mathcal{H}_{s,t}(\mathcal{Y})$ são combinações lineares das primeiras $N_0 \times m$ colunas e das primeiras $p \times N_0$ linhas, respectivamente. Tal implica que

$$\operatorname{rank} \mathcal{H}_{s,t} = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N_0,N_0}, \text{ para } s \geq N_0 \text{ e } t \geq N_0.$$

Resulta, pelo Teorema 3.2.1, que a sucessão de Markov $\mathcal{Y} = \{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}, Y_{N_0+1}, ...\}$ é realizável, isto é, existe $\Sigma = (A, B, C)$ que realiza $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}, Y_{N_0+1}, ...\}$. Logo Σ é uma realização parcial, de ordem N_0, de $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$, como se pretendia. $\square$

Pelo teorema anterior, existe sempre uma realização parcial para uma dada sequência finita, $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$, de N_0 matrizes do tipo $p \times m$. É óbvio que existe pelo menos uma que tem dimensão menor relativamente às outras. Assim, surge a questão de como determinar uma realização parcial de menor dimensão possível, para uma dada sequência finita de matrizes. Esta questão é conhecida como o problema da realização parcial mínima, que se enuncia de seguida.

Problema da realização parcial mínima

Dada uma sequência finita $\{Y_1, ..., Y_{N_0}\}$ de N_0 matrizes do tipo $p \times m$ pretende-se determinar uma realização parcial, de ordem N_0, $\Sigma = (A, B, C)$ tal que

a) $Y_i = CA^{i-1}B$, *para* $i = 1, ..., N_0$;

b) *a dimensão da matriz A é mínima, entre todas as realizações parciais de $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$.*

Perante este problema é pertinente averiguar se, à semelhança do que acontece para uma sucessão de Markov, uma dada sequência finita de matrizes tem uma realização parcial mínima única, de acordo com a Definição 2.1.4, ou se existem duas suas realizações parciais mínimas que não são algebricamente equivalentes. A próxima secção pretende dar resposta a esta questão.

4.2 Unicidade de realizações parciais mínimas

Nesta secção vamos caracterizar as sequências finitas de matrizes que têm uma única realização parcial mínima e vamos construir uma realização parcial mínima para estas sequências.

Definição 4.2.1. *Sejam* $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$ *uma sequência finita de* N_0 *matrizes do tipo* $p \times m$ *e* $\Sigma = (A, B, C)$ *uma realização parcial mínima de* $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$*. Dizemos que* Σ *é única se qualquer outra realização parcial mínima de* $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$ *for algebricamente equivalente a* Σ*.*

Como vimos no Capítulo 2, realizações algebricamente equivalentes têm os mesmos parâmetros de Markov. Por outras palavras, sabemos que se existem duas extensões distintas da sequência $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$, $\mathcal{Y}$ e $\bar{\mathcal{Y}}$, que produzem duas realizações parciais mínimas de $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$, $\Sigma = (A, B, C)$ e $\bar{\Sigma} = (\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$, respectivamente, então Σ e $\bar{\Sigma}$ não são algebricamente equivalentes. Assim, tendo em conta a Proposição 3.1.8, a definição anterior pode reformular-se como se segue.

Definição 4.2.2. *Sejam* $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$ *uma sequência finita de* N_0 *matrizes do tipo* $p \times m$ *e* $\Sigma = (A, B, C)$ *uma sua realização parcial mínima. Então* $\Sigma = (A, B, C)$ *é única se e só se a extensão da sequência finita* $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$ *para uma sucessão de Markov realizável, definida por* $Y_i = CA^{i-1}B$ *para* $i \geq 1$*, for a única extensão de* $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$ *com característica igual à dimensão de* Σ*.*

Para uma dada sequência finita $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$ definamos as matrizes de Hankel $\mathcal{H}_{s,t}$ para $s + t \leq N_0 + 1$, de forma análoga à Definição 3.1.1. No seguimento deste texto vamos encontrar matrizes de Hankel referentes a sequências finitas e a sucessões (infinitas) de Markov, que se diferenciarão pelo contexto.

Teorema 4.2.3. *Seja* $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$ *uma sequência finita de* $p \times m$ *matrizes que* *satisfaz*

$$rank\mathcal{H}_{M',M} = rank\mathcal{H}_{M'+1,M} = rank\mathcal{H}_{M',M+1}$$

para alguns inteiros positivos M e M' tais que $M' + M = N_0$. Então existe uma única realização parcial mínima de $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$.

Prova: De acordo com a Proposição 4.2.2, basta mostrar que existe uma única sucessão de Markov $\mathcal{Y}$ cujos primeiros N_0 parâmetros de Markov são $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$, e para a qual

$$\text{rank}\,\mathcal{H}_{s,t}(\mathcal{Y}) = \text{rank}\,\mathcal{H}_{M',M}(\mathcal{Y}),\ \text{para } s \geq M' \text{ e } t \geq M.$$

De facto, como os elementos de $\mathcal{H}_{M',M}(\mathcal{Y})$ pertencem ao conjunto $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$ temos que qualquer sucessão de Markov com $Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}$ como primeiros parâmetros de Markov tem característica maior ou igual a $\text{rank}\,\mathcal{H}_{M',M}$. Uma vez que é possível decompor a matriz $\mathcal{H}_{M'+1,M}$ da seguinte forma

$$\mathcal{H}_{M'+1,M} = \begin{bmatrix} & \mathcal{H}_{M',M} & \\ Y_{M'+1} & \cdots & Y_{N_0} \end{bmatrix}$$

e, como $\text{rank}\,\mathcal{H}_{M',M} = \text{rank}\,\mathcal{H}_{M'+1,M}$, existem M' matrizes, $G_0, G_1, ..., G_{M'-1}$, do tipo $p \times p$ tais que

$$Y_j = G_{M'-1}Y_{j-1} + \cdots + G_0 Y_{j-M'},\ \text{para } j = M'+1, ..., N_0. \tag{4.2}$$

Utilizando um raciocínio análogo é possível decompor a matriz $\mathcal{H}_{M',M+1}$ do seguinte modo

$$\mathcal{H}_{M',M+1} = \begin{bmatrix} & Y_{M+1} \\ \mathcal{H}_{M',M} & \vdots \\ & Y_{N_0} \end{bmatrix}$$

e, uma vez que $\text{rank}\,\mathcal{H}_{M',M+1} = \text{rank}\,\mathcal{H}_{M',M}$, existem M matrizes, $F_0, F_1, ..., F_{M-1}$, do tipo $m \times m$ tais que

$$Y_j = Y_{j-1}F_{M-1} + \cdots + Y_{j-M}F_0,\ \text{para } j = M+1, ..., N_0. \tag{4.3}$$

Vamos construir a extensão $\mathcal{Y} = \{Y_1, ..., Y_{N_0+1}, Y_{N_0+2}, ...\}$ de $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$ definindo

$$Y_j = G_{M'-1}Y_{j-1} + \cdots + G_0 Y_{j-M'}, \text{ para } j > N_0, \tag{4.4}$$

e seguidamente mostramos, por indução matemática em j, que

$$Y_j = Y_{j-1}F_{M-1} + \cdots + Y_{j-M}F_0, \text{ para } j > N_0. \tag{4.5}$$

Suponhamos que $j > N_0$ e que (4.3) acontece para $j - M', ..., j - 1$. Vejamos que, (4.3) também acontece para j. Note-se que, por (4.3) e porque $N_0 + 1 - M' = M + 1$, temos que (4.4) é verdadeira para $j = M + 1, ..., N_0$. Por (4.4) e por hipótese de indução, temos que

$$\begin{aligned}
Y_j &= G_{M'-1}Y_{j-1} + G_{M'-2}Y_{j-2} + \cdots + G_0Y_{j-M'} \\
&= G_{M'-1}(Y_{j-2}F_{M-1} + \cdots + Y_{j-M-1}F_0) + G_{M'-2}(Y_{j-3}F_{M-1} + \cdots + Y_{j-M-2}F_0) + \\
&\quad + \cdots + G_0(Y_{j-M'-1}F_{M-1} + \cdots + Y_{j-M-M'}F_0) \\
&= (G_{M'-1}Y_{j-2} + G_{M'-2}Y_{j-3} + \cdots + G_0Y_{j-M'-1})F_{M-1} + \\
&\quad + \cdots + (G_{M'-1}Y_{j-M-1} + G_{M'-2}Y_{j-M-2} + \cdots + G_0Y_{j-M-M'})F_0
\end{aligned}$$

Consequentemente, por (4.2) e (4.4) temos que

$$Y_j = Y_{j-1}F_{M-1} + \cdots + Y_{j-M}F_0,$$

como queríamos provar.

De (4.2), (4.3), (4.4) e (4.5), concluímos que

$$\operatorname{rank} \mathcal{H}_{s,t}(\mathcal{Y}) = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{M',M}(\mathcal{Y}), \text{ para } s \geq M' \text{ e } t \geq M,$$

e que, portanto, $\mathcal{Y}$ é realizável e tem característica $\operatorname{rank} \mathcal{H}_{M'M}(\mathcal{Y})$.

Com o intuito de provar que $\mathcal{Y}$ é única, suponhamos que existe outra sucessão de Markov $\tilde{\mathcal{Y}} = \{\tilde{Y}_1, ..., \tilde{Y}_{N_0}, ...\}$ cujos primeiros N_0 parâmetros de Markov são $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N_0}$

e tal que *rank* $\tilde{\mathcal{Y}} =$ *rank* $\mathcal{Y}$. Sejam $N, N', \tilde{N}$ e $\tilde{N}'$ os menores inteiros tais que

$$rank\ \mathcal{H}_{N',N}(\mathcal{Y}) = rank\ \mathcal{H}_{\tilde{N}',\tilde{N}}(\tilde{\mathcal{Y}}) = rank\ \mathcal{Y}.$$

Observe-se que como $\operatorname{rank} \mathcal{H}_{M',M}(\mathcal{Y}) = \operatorname{rank} \mathcal{Y}$, $M + M' = N_0$ e os N_0 primeiros parâmetros de $\mathcal{Y}$ e $\tilde{\mathcal{Y}}$ coincidem, temos que $N = \tilde{N} \leq M$ e $N' = \tilde{N}' \leq M'$ e, portanto, também $\mathcal{H}_{N',N}(\mathcal{Y}) = \mathcal{H}_{\tilde{N}',\tilde{N}}(\tilde{\mathcal{Y}})$.

Consideremos a sucessão de Markov $\hat{\mathcal{Y}} := \mathcal{Y} - \tilde{\mathcal{Y}}$. Note-se que, representando $\hat{\mathcal{Y}} = \{\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \dots\}$, temos que $\hat{Y}_1 = \hat{Y}_2 = \cdots = \hat{Y}_{N_0} = 0$.

Sejam $\Sigma_1 = (A_1, B_1, C_1)$ e $\Sigma_2 = (A_2, B_2, C_2)$ realizações mínimas de $\mathcal{Y}$ e $\tilde{\mathcal{Y}}$, respectivamente. Logo, pela Proposição 3.1.8, Σ_1 e Σ_2 têm dimensão *rank* $\mathcal{Y}$. Além disso, pela Proposição 3.2.2, N e N' são os índices de atingibilidade e de observabilidade, respectivamente, de Σ_1 e Σ_2. Consideremos as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} C_1 & -C_2 \end{bmatrix}.$$

$\Sigma = (A, B, C)$ é uma realização de $\hat{\mathcal{Y}}$ uma vez que, para $i \geq 1$, tem-se que

$$\begin{aligned} CA^{i-1}B &= \begin{bmatrix} C_1 & -C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^{i-1} & 0 \\ 0 & A_2^{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \\ &= C_1 A_1^{i-1} B_1 - C_2 A_2^{i-1} B_2 \\ &= Y_i - \tilde{Y}_i \\ &= \hat{Y}_i. \end{aligned}$$

Facilmente se vê que N é o índice de atingibilidade e N' é o índice de observabilidade de Σ. Pelo Lema 3.3.2 existem matrizes, $\hat{G}_0, \hat{G}_1, \dots, \hat{G}_{N'-1}$, do tipo $p \times p$ tais que

$$\hat{Y}_{N'+k+1} = \hat{G}_0 \hat{Y}_{k+1} + \cdots + \hat{G}_{N'-1} \hat{Y}_{N'+k},$$

para $k \geq 0$. Como $\hat{Y}_1 = \hat{Y}_2 = \cdots = \hat{Y}_{N_0} = 0$ e $N' < N_0$, temos então que $\hat{Y}_l = 0$, para $l > N_0$, e consequentemente, $\hat{\mathcal{Y}} \equiv 0$, ou seja, $\mathcal{Y} = \tilde{\mathcal{Y}}$. $\square$

Obtemos assim o seguinte critério de verificação da existência de uma realização parcial mínima para uma sequência finita $\{Y_1, ..., Y_{N_0}\}$.

Critério da existência de uma única realização parcial mínima

Sejam $\{Y_1, ..., Y_{N_0}\}$ *uma sequência finita de* N_0 *matrizes do tipo* $p \times m$ *e* $\mathcal{H}_{i,j}$*, com* $i + j \leq N_0$*, matrizes de Hankel com elementos pertencentes a* $\{Y_1, ..., Y_{N_0}\}$*. Então existe uma única realização parcial mínima para* $\{Y_1, ..., Y_{N_0}\}$ *se e só se existem inteiros positivos* M *e* M' *tais que:*

a) $M + M' = N_0$*;*

b) $\operatorname{rank} \mathcal{H}_{M',M} = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{M'+1,M} = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{M',M+1}$.

Seja $\{Y_1, ..., Y_{N_0}\}$ uma sequência finita de $p \times m$ matrizes, que admite uma única realização parcial mínima, isto é, que obedece ao critério enunciado acima. Então, uma realização parcial mínima de $\{Y_1, ..., Y_{N_0}\}$ será uma realização mínima da sucessão de Markov $\mathcal{Y} = \{Y_1, ..., Y_{N_0}, Y_{N_0+1}, ...\}$, construída na demonstração do Teorema 4.2.3, com $\operatorname{rank} \mathcal{Y} = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{M',M}(\mathcal{Y})$, onde $M + M' = N_0$. Assim, esta realização poderá ser obtida através da aplicação do algoritmo de Ho a $\mathcal{Y}$. Observe-se, no entanto, que como $\operatorname{rank} \mathcal{Y} = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{M',M}(\mathcal{Y})$, o algoritmo de Ho considerará apenas as matrizes

$$\mathcal{H}_{M',M}(\mathcal{Y}) = \begin{bmatrix} Y_1 & \cdots & Y_M \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{M'} & \cdots & Y_{N_0-1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma\mathcal{H}_{M',M}(\mathcal{Y}) = \begin{bmatrix} Y_2 & \cdots & Y_{M+1} \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{M'+1} & \cdots & Y_{N_0} \end{bmatrix}.$$

cujos elementos pertencem a $\{Y_1, ..., Y_{N_0}\}$, não sendo necessário determinar $\mathcal{Y}$.

Nesta fase da dissertação sabemos que se uma dada sequência finita, $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$, de N_0 matrizes do tipo $p \times m$ satisfaz o critério de existência de uma única realização parcial mínima então existe um único sistema de dimensão mínima que a realiza, no sentido da Definição 4.0.4. Na secção seguinte pretende explorar-se o mesmo problema de obtenção de uma realização mínima para sequências finitas que não satisfazem o critério referido anteriormente.

4.3 Teorema da realização parcial mínima

Considere-se uma sequência finita, $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$, de N_0 matrizes do tipo $p \times m$ que não satisfaz o critério de existência de uma única realização parcial mínima. O nosso objectivo é determinar uma realização parcial mínima de $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$, de entre todas as realizações parciais possíveis. Comecemos por calcular a dimensão mínima de uma realização parcial de $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$.

Observe-se que qualquer extensão, $\mathcal{Y}$, de $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$ tem característica maior ou igual à característica de $\mathcal{H}_{N_0,N_0}(\mathcal{Y})$. Tendo em conta este facto, o próximo lema fornece-nos um limite inferior para a característica de uma extensão de $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$ e, consequentemente, para a dimensão mínima, de uma realização parcial de $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$.

Lema 4.3.1. *Sejam $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$ uma sequência finita de N_0 matrizes do tipo $p \times m$ e $\Sigma = (A, B, C)$ uma sua realização parcial mínima. Então a dimensão de Σ é tal que*

$$\begin{aligned} dim(\Sigma) \geq n(N_0) \quad &:= \quad \operatorname{rank} \mathcal{H}_{1,N_0} + (\operatorname{rank} \mathcal{H}_{2,N_0-1} - \operatorname{rank} \mathcal{H}_{1,N_0-1}) + \\ &\quad\quad + \cdots + (\operatorname{rank} \mathcal{H}_{N_0,1} - \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N_0-1,1}) \end{aligned}$$

Prova: Observe-se que como Σ é uma realização parcial mínima de $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$, a sua dimensão é o mínimo das características de todas as extensões de $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$. Facilmente se observa que

$$\begin{aligned} \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N_0,N_0}(\mathcal{Y}) \quad &= \quad \operatorname{rank} \mathcal{H}_{1,N_0}(\mathcal{Y}) + (\operatorname{rank} \mathcal{H}_{2,N_0}(\mathcal{Y}) - \operatorname{rank} \mathcal{H}_{1,N_0}(\mathcal{Y})) + \\ &\quad\quad + \cdots + (\operatorname{rank} \mathcal{H}_{j+1,N_0}(\mathcal{Y}) - \operatorname{rank} \mathcal{H}_{j,N_0}(\mathcal{Y})) + \\ &\quad\quad + \cdots + (\operatorname{rank} \mathcal{H}_{N_0,N_0}(\mathcal{Y}) - \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N_0-1,N_0}(\mathcal{Y})), \end{aligned}$$

para qualquer extensão $\mathcal{Y}$ de $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$. Além disso, como $\mathcal{H}_{j,N_0}(\mathcal{Y})$ é uma submatriz de $\mathcal{H}_{j+1,N_0}(\mathcal{Y})$ temos que $\operatorname{rank} \mathcal{H}_{j+1,N_0}(\mathcal{Y}) - \operatorname{rank} \mathcal{H}_{j,N_0}(\mathcal{Y}) \geq 0$.

Assim, uma vez que $\operatorname{rank} \mathcal{Y} \geq \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N_0,N_0}(\mathcal{Y})$, temos que

$$\begin{aligned} dim(\Sigma) \;\geq\;& \min\ \operatorname{rank}\mathcal{H}_{1,N_0} + \min\,(\operatorname{rank}\mathcal{H}_{2,N_0} - \operatorname{rank}\mathcal{H}_{1,N_0}) + \\ & + \cdots + \min\,(\operatorname{rank}\mathcal{H}_{j+1,N_0} - \operatorname{rank}\mathcal{H}_{j,N_0}) + \\ & + \cdots + \min\,(\operatorname{rank}\mathcal{H}_{N_0,N_0} - \operatorname{rank}\mathcal{H}_{N_0-1,N_0}), \end{aligned}$$

onde $\min\ \operatorname{rank}\mathcal{H}_{1,N_0} = \min\{\operatorname{rank}\mathcal{H}_{1,N_0}(\mathcal{Y}) : \mathcal{Y}$ é uma extensão de $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}\}$ e $\min\,(\operatorname{rank}\mathcal{H}_{j+1,N_0} - \operatorname{rank}\mathcal{H}_{j,N_0})$ é igual a

$$\min\{\operatorname{rank}\mathcal{H}_{j+1,N_0}(\mathcal{Y}) - \operatorname{rank}\mathcal{H}_{j,N_0}(\mathcal{Y}) : \mathcal{Y} \text{ é uma extensão de } \{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}\},$$

para $j = 1, ..., N_0 - 1$.

De seguida analisemos, separadamente, o que representa o mínimo da diferenças das características anteriormente referidas. Observe-se que, para $\mathcal{Y} = \{Y_1, ..., Y_{N_0}, Y_{N_0+1}, ...\}$, $\operatorname{rank}\mathcal{H}_{j+1,N_0}(\mathcal{Y}) - \operatorname{rank}\mathcal{H}_{j,N_0}(\mathcal{Y})$ traduz o aumento da característica de $\mathcal{H}_{j,N_0}(\mathcal{Y})$ após a adjunção da linha de blocos $\begin{bmatrix} Y_{j+1} & \cdots & Y_{N_0+j} \end{bmatrix}$.

Uma vez que os elementos de $\mathcal{H}_{1,N_0}(\mathcal{Y})$ são $Y_1, ..., Y_{N_0}$, que são os elementos disponíveis, é óbvio que

$$\min\ \operatorname{rank}\mathcal{H}_{1,N_0} = rank \begin{bmatrix} Y_{j+1} & \cdots & Y_{N_0+j} \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\mathcal{H}_{1,N_0}.$$

Vejamos agora o que representa $\min\,(\operatorname{rank}\mathcal{H}_{2,N_0} - \operatorname{rank}\mathcal{H}_{1,N_0})$. Por forma a facilitar a visualização pretendida considere-se a matriz

$$\mathcal{H}_{2,N_0}(\mathcal{Y}) = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_{N_0-1} & Y_{N_0} \\ Y_2 & Y_3 & \cdots & Y_{N_0} & Y_{N_0+1} \end{bmatrix}.$$

Uma vez que Y_{N_0+1} é desconhecido, $\min\,(\operatorname{rank}\mathcal{H}_{2,N_0} - \operatorname{rank}\mathcal{H}_{1,N_0})$ ocorre quando as linhas da segunda linha de blocos de $\mathcal{H}_{2,N_0-1}(\mathcal{Y})$, que são combinação linear das linhas de $\begin{bmatrix} Y_1 & \cdots & Y_{N_0-1} \end{bmatrix}$, se mantêm dependentes quando se adiciona o bloco de colunas

$\begin{bmatrix} Y_{N_0} \\ Y_{N_0+1} \end{bmatrix}$ à matriz $\mathcal{H}_{2,N_0-1}(\mathcal{Y})$. Assim,

$$\min\left(\operatorname{rank}\mathcal{H}_{2,N_0} - \operatorname{rank}\mathcal{H}_{1,N_0}\right) = \operatorname{rank}\mathcal{H}_{2,N_0-1} - \operatorname{rank}\mathcal{H}_{1,N_0-1}.$$

Efectuando um raciocínio análogo para averiguar o que representa $\min\left(\operatorname{rank}\mathcal{H}_{j+1,N_0} - \operatorname{rank}\mathcal{H}_{j,N_0}\right)$, considere-se a matriz de Hankel

$$\mathcal{H}_{j+1,N_0}(\mathcal{Y}) = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_{N_0-j} & Y_{N_0-j+1} & \cdots & Y_{N_0} \\ Y_2 & Y_3 & \cdots & Y_{N_0-j+1} & Y_{N_0-j+2} & \cdots & Y_{N_0+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_j & Y_{j+1} & \cdots & Y_{N_0-1} & Y_{N_0} & \cdots & Y_{N_0+j-1} \\ Y_{j+1} & Y_{j+2} & \cdots & Y_{N_0} & Y_{N_0+1} & \cdots & Y_{N_0+j} \end{bmatrix}.$$

Analogamente, o $\min\left(\operatorname{rank}\mathcal{H}_{j+1,N_0} - \operatorname{rank}\mathcal{H}_{j,N_0}\right)$ ocorre quando as linhas da $(j+1)$-ésima linha de blocos de $\mathcal{H}_{j+1,N_0-j}$, que são combinação linear das linhas de $\mathcal{H}_{j,N_0-j}$, se mantêm dependentes, após se adicionar os blocos de colunas

$$\begin{bmatrix} Y_{N_0-j+1} & \cdots & Y_{N_0} \\ Y_{N_0-j+2} & \cdots & Y_{N_0+1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ Y_{N_0+1} & \cdots & Y_{N_0+j} \end{bmatrix},$$

onde Y_{N_0+1}, Y_{N_0+2},...,Y_{N_0+j} são elementos desconhecidos. Concluímos assim que

$$\min\left(\operatorname{rank}\mathcal{H}_{j+1,N_0} - \operatorname{rank}\mathcal{H}_{j,N_0}\right) = \operatorname{rank}\mathcal{H}_{j+1,N_0-j} - \operatorname{rank}\mathcal{H}_{j,N_0-j}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} dim(\Sigma) \;\geq\; & \operatorname{rank}\mathcal{H}_{1,N_0} + \left(\operatorname{rank}\mathcal{H}_{2,N_0-j} - \operatorname{rank}\mathcal{H}_{1,N_0-j}\right) + \\ & + \cdots + \left(\operatorname{rank}\mathcal{H}_{N_0,1} - \operatorname{rank}\mathcal{H}_{N_0-1,1}\right), \end{aligned}$$

como pretendíamos. $\square$

Deste modo, é possível obter um limite inferior para a dimensão de uma realização parcial mínima, de ordem N_0, de $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$.

O exemplo que se segue ilustrará, ao longo desta secção, os resultados expostos.

Exemplo 4.3.2. Considere-se a seguinte sequência finita de matrizes $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$, onde

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_3 = \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y_4 = \begin{bmatrix} 22 & 15 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

De acordo com o Lema 4.3.1 sabemos que existe um minorante para a dimensão de uma realização parcial mínima de $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$, dado por

$$\begin{aligned} n(4) &= \operatorname{rank}\mathcal{H}_{1,4} + (\operatorname{rank}\mathcal{H}_{2,3} - \operatorname{rank}\mathcal{H}_{1,3}) + \\ &\quad +(\operatorname{rank}\mathcal{H}_{3,2} - \operatorname{rank}\mathcal{H}_{2,2}) + (\operatorname{rank}\mathcal{H}_{4,1} - \operatorname{rank}\mathcal{H}_{3,1}). \end{aligned}$$

Deste modo, considerem-se as seguintes matrizes de Hankel e calculem-se as suas respectivas características.

$$\operatorname{rank}\mathcal{H}_{1,4} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & 10 & 7 & 22 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 2,$$

$$\operatorname{rank}\mathcal{H}_{2,3} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 10 & 7 & 22 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 4,$$

$$\operatorname{rank}\mathcal{H}_{3,2} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_2 & Y_3 \\ Y_3 & Y_4 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 10 & 7 & 22 & 15 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 4,$$

$$\operatorname{rank}\mathcal{H}_{4,1} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 4 & 3 \\ 0 & 0 \\ 10 & 7 \\ 1 & 1 \\ 22 & 15 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = 2,$$

$$\operatorname{rank}\mathcal{H}_{1,3} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2,$$

$$\operatorname{rank}\mathcal{H}_{2,2} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_2 & Y_3 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3,$$

$$\operatorname{rank}\mathcal{H}_{3,1} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 4 & 3 \\ 0 & 0 \\ 10 & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2.$$

Logo, $n(4) = 2 + (4-2) + (4-3) + (2-2) = 5$. $\diamond$

Definição 4.3.3. *Dada uma sequência finita* $\{Y_1, ..., Y_{N_0}\}$ *de* $p \times m$ *matrizes, sejam* $N'(N_0)$ *o menor inteiro tal que todas as linhas da matriz de blocos* $\begin{bmatrix} Y_{N'(N_0)+1} & \cdots & Y_{N_0} \end{bmatrix}$ *são combinação linear das linhas de* $\mathcal{H}_{N'(N_0),N_0-N'(N_0)}$ *e* $N(N_0)$ *o menor inteiro tal que todas as colunas da matriz de blocos* $\begin{bmatrix} Y_{N(N_0)+1} \\ \vdots \\ Y_{N_0} \end{bmatrix}$ *são combinação linear das colunas de* $\mathcal{H}_{N_0-N(N_0),N(N_0)}$. *Se não existir tal* $N'(N_0)$ *considere-se* $N'(N_0) = N_0$. *Da mesma forma, se não existir tal* $N(N_0)$*, considere-se* $N(N_0) = N_0$.

Com base na definição anterior, vamos determinar $N(N_0)$ e $N'(N_0)$ para o exemplo considerado nesta secção.

Exemplo 4.3.4. (Continuação do Exemplo 4.3.2) Obviamente que $N'(4)$ e $N(4)$ são menores ou iguais a $N_0 = 4$. Uma vez que

$$\operatorname{rank} \mathcal{H}_{3,1} = 2 = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{4,1} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix}, \tag{4.6}$$

temos que qualquer linha de Y_4 é combinação linear das linhas de $\mathcal{H}_{3,1}$. Assim, temos que $N'(4) \leq 3$. Vejamos se é possível que $N'(4) \leq 2$. À semelhança do raciocínio feito anteriormente temos que

$$\operatorname{rank} \mathcal{H}_{2,2} = 3 \neq 4 = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{3,2} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_2 & Y_3 \\ Y_3 & Y_4 \end{bmatrix},$$

o que significa que existe uma linha de $\begin{bmatrix} Y_3 & Y_4 \end{bmatrix}$ que não é combinação linear das linhas de $\mathcal{H}_{2,2}$. Logo $N'(4) = 3$.

De seguida vamos determinar $N(4)$. Adoptando um raciocínio análogo vejamos se $N(4) \leq 3$. Sabemos que $\operatorname{rank} \mathcal{H}_{1,3} = 2 = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{1,4}$, portanto qualquer coluna de Y_4 é linearmente dependente das colunas de $\mathcal{H}_{1,3}$. Consequentemente $N(4) \leq 3$. Averigue-se agora se $N(4) \leq 2$. Uma vez que

$$\operatorname{rank} \mathcal{H}_{2,2} = 3 \neq 4 = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{2,3} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{bmatrix},$$

existe uma coluna de $\begin{bmatrix} Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix}$ que não é combinação linear da matriz $\mathcal{H}_{2,2}$. Logo $N(4) = 3$. Concluímos assim que $N'(4) = N(4) = 3$. $\diamond$

Indo de encontro a um dos objectivos traçados para este trabalho, vamos ver que existe uma realização parcial da sequência finita $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$ cuja dimensão é igual ao limite inferior referido no Lema 4.3.1, $n(N_0)$, para as dimensões das realizações parciais de $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$. Para tal basta provar que existe uma extensão de $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$ para a qual $n(N_0)$ é a dimensão de uma sua realização mínima. O lema que apresentamos de seguida traduz uma propriedade interessante destas extensões e terá bastante utilidade no desenvolvimento desta secção.

Lema 4.3.5. *Seja $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$ uma sequência finita de matrizes do tipo $p \times m$. Então qualquer extensão $\mathcal{Y} = \{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}, Y_{N_0+1}, ...\}$ com característica $n(N_0)$ é tal que*

$$n(N_0) = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N'(N_0),N(N_0)}(\mathcal{Y}) = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N'(N_0)+1,N(N_0)}(\mathcal{Y}) = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N'(N_0),N(N_0)+1}(\mathcal{Y}) \tag{4.7}$$

Além disso, $N(N_0)$ e $N'(N_0)$ são os menores inteiros para os quais (4.7) é satisfeita.

Prova: Vamos começar por mostrar que $N'(N_0)$ e $N(N_0)$ são tais que o número mínimo de linhas linearmente independentes de $\mathcal{H}_{N_0,N_0}(\mathcal{Y})$, que sabemos ser $n(N_0)$, coincide com o número mínimo de linhas linearmente independentes de $\mathcal{H}_{N'(N_0),N(N_0)}(\mathcal{Y})$.

Pela Definição 4.3.3 temos que as linhas de $\begin{bmatrix} Y_{N'(N_0)+1} & \cdots & Y_{N_0} \end{bmatrix}$ são combinação linear das linhas de $\mathcal{H}_{N'(N_0),N_0-N'(N_0)}(\mathcal{Y})$, e portanto

$$\operatorname{rank} \mathcal{H}_{N'(N_0)+1,N_0-N'(N_0)}(\mathcal{Y}) = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N'(N_0),N_0-N'(N_0)}(\mathcal{Y}).$$

Eliminando o primeiro bloco de $\begin{bmatrix} Y_{N'(N_0)+1} & \cdots & Y_{N_0} \end{bmatrix}$ obtemos que as linhas de blocos de $\begin{bmatrix} Y_{N'(N_0)+2} & \cdots & Y_{N_0} \end{bmatrix}$ são combinação linear da submatriz de $\mathcal{H}_{N'(N_0),N_0-N'(N_0)}(\mathcal{Y})$ sem a primeira coluna de blocos e, consequentemente, as linhas de $\begin{bmatrix} Y_{N'(N_0)+2} & \cdots & Y_{N_0} \end{bmatrix}$ são combinação linear das linhas de $\mathcal{H}_{N'(N_0)+1,N_0-N'(N_0)-1}(\mathcal{Y})$, ou seja,

$$\operatorname{rank} \mathcal{H}_{N'(N_0)+2,N_0-N'(N_0)-1}(\mathcal{Y}) = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N'(N_0)+1,N_0-N'(N_0)-1}(\mathcal{Y}).$$

Efectuando sucessivamente este raciocínio, obtemos que

$$\operatorname{rank} \mathcal{H}_{N'(N_0)+j,N_0-N'(N_0)-j+1}(\mathcal{Y}) = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N'(N_0)+j-1,N_0-N'(N_0)-j+1}(\mathcal{Y})$$

para $j = 1, ..., N_0 - N'(N_0)$. Observe-se que

$$\begin{aligned} n(N_0) &= \min \ \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N_0,N_0} \\ &= \min \ \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N'(N_0),N_0} + (\operatorname{rank} \mathcal{H}_{N'(N_0)+1,N_0-N'(N_0)} - \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N'(N_0),N_0-N'(N_0)}) + \\ &\quad + \cdots + (\operatorname{rank} \mathcal{H}_{N_0,1} - \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N_0-1,1}). \end{aligned}$$

Mas, pelo que vimos anteriormente, todas as parcelas desta adição, à excepção da primeira, são nulas. Logo

$$n(N_0) = \min \ \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N'(N_0),N_0}.$$

Vejamos agora que $n(N_0) = \min \ \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N'(N_0),N(N_0)}$. De facto, uma vez que $N(N_0)$ é tal que satisfaz a Definição 4.3.3, sabemos que

$$\operatorname{rank} \mathcal{H}_{N_0-N(N_0),N(N_0)+1} = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N_0-N(N_0),N(N_0)}.$$

Utilizando o mesmo argumento, mas agora sobre as colunas de $\mathcal{H}_{N'(N_0),N_0}$ também podemos garantir que

$$\operatorname{rank} \mathcal{H}_{N_0-N(N_0)-j+1,N(N_0)+j}(\mathcal{Y}) = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N_0-N(N_0)-j+1,N(N_0)+j-1}(\mathcal{Y}) \tag{4.8}$$

para $j = 1, ..., N_0 - N(N_0)$.

Consideremos $N'(N_0) \geq N_0 - N(N_0)$. Uma vez que

$$\begin{aligned}
n(N_0) = \min\ \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N_0,N_0} &= \min\ \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N'(N_0),N_0} \\
&= \min\ \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N'(N_0),N(N_0)} + \\
&\quad +(\operatorname{rank} \mathcal{H}_{N_0-N(N_0)-1,N(N_0)+2} - \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N_0-N(N_0)-1,N(N_0)+1}) + \\
&\quad +(\operatorname{rank} \mathcal{H}_{N_0-N(N_0)-2,N(N_0)+3} - \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N_0-N(N_0)-2,N(N_0)+2}) + \\
&\quad + \cdots + (\operatorname{rank} \mathcal{H}_{1,N_0} - \operatorname{rank} \mathcal{H}_{1,N_0-1}),
\end{aligned}$$

resulta, por (4.8), que $n(N_0) = \min\ \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N'(N_0),N(N_0)}$. Facilmente se vê que este resultado também é verdadeiro se $N'(N_0) < N_0 - N(N_0)$.

Uma vez que, por um lado, $n(N_0) = \operatorname{rank} \mathcal{Y}$ e, por outro lado, $n(N_0) = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N'(N_0),N(N_0)}(\mathcal{Y})$, temos que

$$\operatorname{rank} \mathcal{H}_{s,t}(\mathcal{Y}) = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N'(N_0),N(N_0)}(\mathcal{Y}), \text{ para } s \geq N'(N_0) \text{ e } t \geq N(N_0).$$

Logo,

$$\operatorname{rank} \mathcal{H}_{N'(N_0),N(N_0)}(\mathcal{Y}) = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N'(N_0)+1,N(N_0)}(\mathcal{Y}) = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N'(N_0),N(N_0)+1}(\mathcal{Y})$$

como se pretendia mostrar. O facto de $N(N_0)$ e $N'(N_0)$ serem os menores inteiros que verificam (4.7), segue das suas próprias definições. $\square$

O resultado que apresentamos de seguida será útil na demonstração do teorema apresentado a seguir, que representa o resultado principal desta secção.

Lema 4.3.6. *Dadas matrizes X_1, X_2 e X_3 do tipo $p \times p'$, $p \times r$ e $s \times p'$, respectivamente, tais que*

$$\operatorname{rank} X_1 = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

então existe uma e uma só uma matriz X_4, do tipo $s \times r$ tal que

$$\operatorname{rank} X_1 = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} X_1. \tag{4.10}$$

Prova: Uma vez que $\operatorname{rank} X_1 = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \end{bmatrix}$, existe uma matriz β do tipo $s \times p$ tal que $X_3 = \beta X_1$. Consideremos $X_4 := \beta X_2$. Então $\begin{bmatrix} X_3 & X_4 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix}$, e portanto, $\operatorname{rank} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix}$ e , consequentemente X_4 satisfaz (4.10). Paralelamente, como $\operatorname{rank} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \end{bmatrix}$, existe uma matriz α do tipo $p' \times r$ tal que $\begin{bmatrix} X_2 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \end{bmatrix} \alpha$, e portanto

$$X_4 = X_3\alpha \quad \text{e} \quad X_2 = X_1\alpha. \tag{4.11}$$

Vamos ver que X_4 é única. Suponhamos que existe X_4', do tipo $s \times r$, tal que (4.10) é satisfeita. Então existem matrizes α' e β' do tipo $p' \times r$ e $s \times p$, respectivamente, tais que

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \end{bmatrix} \alpha' = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_4' \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \beta' \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_3 & X_4' \end{bmatrix},$$

isto é,

$$X_1\alpha' = X_2, \quad X_3\alpha' = X_4', \quad \beta' X_1 = X_3 \quad \text{e} \quad \beta' X_2 = X_4'. \tag{4.12}$$

Então, de (4.11) e (4.12) resulta que

$$X_4 = X_3\alpha = \beta' X_1 \alpha = \beta' X_2 = X_4',$$

o que prova que X_4 é única. □

Teorema 4.3.7. ***(Teorema da realização parcial mínima)*** *Sejam $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$ uma sequência finita de N_0 matrizes do tipo $p \times m$ e $n(N_0)$, $N'(N_0)$ e $N(N_0)$ os inteiros definidos anteriormente de acordo com o Lema 4.3.1 e a Definição 4.3.3. Então*

1) *$n(N_0)$ é a dimensão de uma realização parcial mínima $\Sigma = (A, B, C)$ de $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$.*

2) *$N(N_0)$ e $N'(N_0)$ são os menores inteiros para os quais o critério da existência de uma realização (Teorema 3.2.1) é satisfeito para todas as extensões de $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$ de característica mínima.*

3) *existe uma extensão de característica mínima, de ordem $P(N_0) = N(N_0) + N'(N_0)$, de $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$ cuja realização obtida através do algoritmo de Ho tem dimensão $n(N_0)$.*

4) *qualquer extensão que é fixa até $P(N_0)$ é univocamente determinada após $P(N_0)$.*

Prova: Se $P(N_0) \leq N_0$, a sequência $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$ satisfaz o critério de existência de uma única realização parcial mínima e portanto 1)-4) são satisfeitas.

Suponhamos que $P(N_0) > N_0$. Observe-se que se a afirmação 3) for satisfeita e a realização parcial mínima obtida tiver dimensão $n(N_0)$ então, pelo Lema 4.3.1, a afirmação 1) é satisfeita. Paralelamente, pelo Lema 4.3.5, a afirmação 2) também é satisfeita. Finalmente, provaremos na fase final desta demonstração que se 3) for satisfeita então a afirmação 4) também se verifica.

Deste modo, vamos começar por provar que a afirmação 3) é sempre satisfeita. Para tal temos de construir as matrizes Y_{N_0+1},...,$Y_{P(N_0)}$ tais que

$$n(N_0) = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N'(N_0),N(N_0)} = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N'(N_0)+1,N(N_0)} = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N'(N_0),N(N_0)+1}$$

Consideremos a seguinte matriz de Hankel

$$\mathcal{H}_{N'(N_0)+1,N(N_0)+1} = \begin{bmatrix} Y_1 & \cdots & Y_{N_0-N'(N_0)} & \cdots & Y_{N(N_0)-1} & Y_{N(N_0)} & Y_{N(N_0)+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{N_0-N(N_0)} & \cdots & Y_{2N_0-P(N_0)-1} & \cdots & Y_{N_0-2} & Y_{N_0-1} & Y_{N_0} \\ Y_{N_0-N(N_0)+1} & \cdots & Y_{2N_0-P(N_0)} & \cdots & Y_{N_0-1} & Y_{N_0} & Y_{N_0+1} \\ Y_{N_0-N(N_0)+2} & \cdots & Y_{2N_0-P(N_0)+1} & \cdots & Y_{N_0} & Y_{N_0+1} & Y_{N_0+2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{N'(N_0)} & \cdots & Y_{P(N_0)-1} & \cdots & & & \\ Y_{N'(N_0)+1} & \cdots & Y_{P(N_0)} & \cdots & & & \end{bmatrix}$$

Sabemos que o minorante, $n(N_0)$, da dimensão de qualquer extensão, $\mathcal{Y}$, de $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{N_0}\}$ pode ser obtido pelo número mínimo de linhas (ou colunas) linearmente independentes da matriz de Hankel $\mathcal{H}_{N_0,N_0}$. Assim, o objectivo é escolher matrizes Y_{N_0+1},...,$Y_{P(N_0)}$, de modo que a característica de $\mathcal{H}_{N'(N_0),N(N_0)}$, $n(N_0)$, seja preservada.

Para tal considere-se o seguinte procedimento. Foquemos a nossa atenção no último bloco de linhas da matriz $\mathcal{H}_{N_0-N(N_0)+1,N(N_0)}$. Se alguma linha deste bloco for combinação linear das linhas da matriz $\mathcal{H}_{N_0-N(N_0),N(N_0)}$ preenchemos a parte da linha correspondente ao parâmetro Y_{N_0+1}, em $\mathcal{H}_{N_0-N(N_0)+1,N(N_0)+1}$, de forma a preservar a dependência linear já existente. Note-se que, de acordo com o Lema 4.3.6, é fácil ver que esta determinação é única. Procedendo desta forma para todas as linhas linearmente dependentes do último bloco de linhas de $\mathcal{H}_{N_0-N(N_0)+1,N(N_0)}$, determinando assim as linhas correspondentes em Y_{N_0+1}, podemos garantir que

$$\operatorname{rank} \mathcal{H}_{N_0-N(N_0)+1,N(N_0)+1} = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N_0-N(N_0),N(N_0)+1},$$

independentemente da escolha das restantes linhas de Y_{N_0+1}. Com vista a determinar as linhas de Y_{N_0+1} ainda desconhecidas, consideremos, de seguida a matriz $\mathcal{H}_{N_0-N(N_0)+2,N(N_0)}$. Repare-se que as linhas do último bloco de linhas de $\mathcal{H}_{N_0-N(N_0)+2,N(N_0)}$, que faziam parte de linhas linearmente dependentes dos blocos anteriores, no último bloco de linhas de $\mathcal{H}_{N_0-N(N_0)+1,N(N_0)+1}$, mantêm-se linearmente dependentes. Isto acontece devido à forma especial das matrizes de Hankel.

Centremos agora a nossa atenção nas linhas do último bloco de linhas de $\mathcal{H}_{N_0-N(N_0)+2,N(N_0)-1}$ que eram linearmente independentes das anteriores no último bloco de linhas da matriz $\mathcal{H}_{N_0-N(N_0)+1,N(N_0)}$, visto serem estas as linhas que correspondem às linhas de Y_{N_0+1} ainda por determinar. O preenchimento dos correspondentes elementos de Y_{N_0+1} em $\mathcal{H}_{N_0-N(N_0)+2,N(N_0)}$ será feito como anteriormente, isto é, de forma a preservar a dependência linear já existente. Porém, importa realçar que, nesta fase da construção, a escolha de tais elementos pode não ser única já que o Lema 4.3.6 pode não ser aplicável. Mas note-se simultaneamente que a liberdade desta escolha em nada influencia a dependência linear.

Se ainda existirem linhas, neste último bloco, linearmente independentes (e, consequentemente, linhas de Y_{N_0+1} por determinar), aplicamos o mesmo processo à matriz $\mathcal{H}_{N_0-N(N_0)+3,N(N_0)-2}$ e assim sucessivamente até obtermos todas as linhas de Y_{N_0+1}.

Salienta-se que é sempre possível obter todos os elementos de Y_{N_0+1} desta forma, pois pela definição de $N'(N_0)$, o último bloco de linhas de $\mathcal{H}_{N'(N_0)+1,N_0-N'(N_0)}$ é linearmente dependentes das linhas de $\mathcal{H}_{N'(N_0),N_0-N'(N_0)}$.

Escolhendo os elementos de Y_{N_0+1} da forma descrita anteriormente garantimos que a característica de $\mathcal{H}_{N'(N_0),N(N_0)}$ se mantém a menor possível. Consequentemente, a sequência finita $\{Y_1, ..., Y_{N_0}, Y_{N_0+1}\}$ é tal que $n(N_0+1)$ será igual a $n(N_0)$. Aplicando o mesmo processo a esta sequência obtemos Y_{N_0+2}.

Este procedimento continua, por indução, até se determinarem todas as matrizes, Y_{N_0+1},...,$Y_{P(N_0)}$, necessárias.

Pelo modo como $Y_{N_0+1}, ..., Y_{P(N_0)}$ foram construídas, temos que $n(N_0) = \cdots = n(P(N_0)-1) = n(P(N_0))$, e portanto

$$\operatorname{rank} \mathcal{H}_{N'(N_0),N(N_0)} = n(N_0) = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N'(N_0)+1,N(N_0)}.$$

Por definição de $N(N_0)$, sabemos que

$$\operatorname{rank} \mathcal{H}_{N_0-N(N_0),N(N_0)} = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N_0-N(N_0),N(N_0)+1}. \tag{4.13}$$

A matriz Y_{N_0+1} foi calculada de forma a que o número de linhas linearmente independentes em $\mathcal{H}_{N_0-N(N_0)+1,N(N_0)}$ coincida com o número de linhas linearmente independentes de $\mathcal{H}_{N_0-N(N_0)+1,N(N_0)+1}$. Logo,

$$\begin{aligned} \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N_0-N(N_0)+1,N(N_0)+1} - \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N_0-N(N_0),N(N_0)+1} \quad = \quad & \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N_0-N(N_0)+1,N(N_0)} - \\ & - \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N_0-N(N_0),N(N_0)} \end{aligned}$$

o que implica, por (4.13) que

$$\operatorname{rank} \mathcal{H}_{N_0-N(N_0)+1,N(N_0)+1} = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N_0-N(N_0)+1,N(N_0)}. \tag{4.14}$$

Aplicando sucessivamente o mesmo raciocínio partindo de (4.14), obtemos que

$$\operatorname{rank} \mathcal{H}_{N'(N_0),N(N_0)} = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N'(N_0),N(N_0)+1}.$$

Portanto, temos que

$$\operatorname{rank} \mathcal{H}_{N'(N_0),N(N_0)} = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N'(N_0)+1,N(N_0)} = \operatorname{rank} \mathcal{H}_{N'(N_0),N(N_0)+1}.$$

Logo, pelo critério da existência de uma única realização parcial mínima existe uma realização parcial de $\{Y_1, ..., Y_{N_0+1}, ..., Y_{P(N_0)}\}$ e, consequentemente de $\{Y_1, ..., Y_{N_0}\}$, de dimensão $n(N_0)$ e, portanto mínima. Além disso, para $Y_{N_0+1}, ..., Y_{P(N_0)}$ fixos esta realização é única, o que prova a afirmação 4) do teorema.

Assim é possível, através do algoritmo de Ho, determinar uma realização Σ de dimensão $n(N_0)$, salvaguardando o facto de que esta realização pode não ser única no sentido em que os elementos da Y_{N_0+1},...,$Y_{P(N_0)}$ podem não ser univocamente determinados. □

Exemplo 4.3.8. (Continuação do Exemplo 4.3.4)

Retomando o exemplo considerado anteriormente, sabemos que, de acordo com o Teorema 4.3.7, existe uma realização parcial mínima, $\Sigma = (A, B, C)$, de ordem 4, de $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$ com dimensão $n(4) = 5$. Além disso, $P(4) = N(4) + N'(4) = 3 + 3 = 6$, pelo que existe uma extensão, de ordem 6, de $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$ cuja realização, obtida através do algoritmo de Ho, tem dimensão 5. Assim, qualquer extensão de $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$ é univocamente determinada após a determinação dos parâmetros Y_5 e Y_6. Vamos começar por determinar $Y_5 = \begin{bmatrix} y_{51} & y_{52} \\ y_{53} & y_{54} \end{bmatrix}$ e depois $Y_6 = \begin{bmatrix} y_{61} & y_{62} \\ y_{63} & y_{64} \end{bmatrix}$, utilizando o procedimento da demonstração do Teorema 4.3.7.

Consideremos a matriz de Hankel $\mathcal{H}_{N_0-N(N_0)+1,N(N_0)} = \mathcal{H}_{2,3}$. Uma vez que

$$\operatorname{rank} \mathcal{H}_{2,3} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 10 & 7 & 22 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 4$$

temos que todas as linhas de $\mathcal{H}_{2,3}$ são linearmente independentes e, consequentemente nenhuma linha da linha de blocos $\begin{bmatrix} Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{bmatrix}$ é combinação linear das linhas anteriores.

Consideremos agora a matriz

$$\mathcal{H}_{3,2} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_2 & Y_3 \\ Y_3 & Y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 10 & 7 & 22 & 15 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que $\operatorname{rank} \mathcal{H}_{22} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} & \mathcal{H}_{22} & & \\ 10 & 7 & 22 & 15 \end{bmatrix}$, a linha $\begin{bmatrix} 10 & 7 & 22 & 15 \end{bmatrix}$ é combinação linear das linhas de $\mathcal{H}_{22}$. Temos então de escolher os correspondentes elementos desta linha de Y_5 em $\mathcal{H}_{3,3}$, por forma a preservar a dependência linear já existente. Uma vez que

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 22 & 15 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 4 & 3 & 10 & 7 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

temos que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 10 & 7 & 22 & 15 & y_{51} & y_{52} \end{bmatrix} &= -2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & 10 & 7 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &\quad + 3 \begin{bmatrix} 4 & 3 & 10 & 7 & 22 & 15 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

obtendo-se assim que, $\begin{bmatrix} y_{51} & y_{52} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & 31 \end{bmatrix}$.

Importa reforçar a ideia de que esta escolha não é univocamente determinada no sentido do Lema 4.3.6 . Este lema não é aplicável neste caso uma vez que, fazendo $X_1 = \mathcal{H}_{2,2}$, $X_2 = \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 1 & 1 \\ 22 & 15 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ e $X_3 = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 22 & 15 \end{bmatrix}$ não é verdade que

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} X_1 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \end{bmatrix}.$$

De facto, facilmente se vê que os coeficientes da combinação linear de (4.15) não são únicos.

No entanto a linha $\begin{bmatrix}1 & 1 & 3 & 3\end{bmatrix}$ não é combinação linear das linhas de $\mathcal{H}_{2,2}$, pelo que, para determinarmos $\begin{bmatrix}y_{53} & y_{54}\end{bmatrix}$, temos de considerar a matriz de Hankel

$$\mathcal{H}_{4,1} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 4 & 3 \\ 0 & 0 \\ 10 & 7 \\ 1 & 1 \\ 22 & 15 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, a linha correspondente $\begin{bmatrix}3 & 3\end{bmatrix}$ é combinação linear das linhas de $\mathcal{H}_{3,1}$. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix}3 & 3\end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}4 & 3\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}10 & 7\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix},$$

o que implica que

$$\begin{bmatrix}y_{53} & y_{54}\end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix}4 & 3\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}10 & 7\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}22 & 15\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12 & 9\end{bmatrix},$$

e portanto, temos que $Y_5 = \begin{bmatrix}46 & 31 \\ 12 & 9\end{bmatrix}$. Segue-se, de forma análoga, a construção de Y_6. Observe-se que como as linhas de $\mathcal{H}_{2,3}$ são linearmente independentes o mesmo acontece relativamente às linhas de $\mathcal{H}_{2,4}$. Considere-se então a matriz

$$\mathcal{H}_{3,3} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ Y_3 & Y_4 & Y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 10 & 7 & 22 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 10 & 7 & 22 & 15 & 46 & 31 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 12 & 9 \end{bmatrix}.$$

Já sabemos que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 10 & 7 & 22 & 15 & 46 & 31 \end{bmatrix} &= -2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & 10 & 7 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \\ &\quad +3\begin{bmatrix} 4 & 3 & 10 & 7 & 22 & 15 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo, vamos determinar $\begin{bmatrix} y_{61} & y_{62} \end{bmatrix}$ por forma a preservar esta dependência linear, ou seja,

$$\begin{bmatrix} y_{61} & y_{62} \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 22 & 15 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 46 & 31 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 12 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 94 & 63 \end{bmatrix}.$$

Considerando agora

$$\mathcal{H}_{4,2} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_2 & Y_3 \\ Y_3 & Y_4 \\ Y_4 & Y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 10 & 7 & 22 & 15 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 22 & 15 & 46 & 31 \\ 3 & 3 & 12 & 9 \end{bmatrix},$$

Temos que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 12 & 9 \end{bmatrix} &= 5\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 4 & 3 & 10 & 7 \end{bmatrix} + \\ &\quad +1\begin{bmatrix} 10 & 7 & 22 & 15 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

o que implica que

$$\begin{bmatrix} y_{63} & y_{64} \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 10 & 7 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 22 & 15 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 46 & 31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 31 \end{bmatrix}$$

Logo, obtemos $Y_6 = \begin{bmatrix} 94 & 63 \\ 30 & 21 \end{bmatrix}$.

Finalmente o algoritmo de Ho fornece uma realização parcial mínima, $\Sigma = (A, B, C)$, de ordem 4, de $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$. Do desenvolvimento dos Exemplos 4.3.2 e 4.3.4 sabemos que os menores inteiros para os quais o Teorema 3.2.1 é satisfeito são $N(4) = N'(4) = 3$ e a dimensão de uma realização parcial mínima de $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$ é 5.

Considerando as matrizes P e M invertíveis dadas por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -6 & 1 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

respectivamente, temos que $P\mathcal{H}_{3,3}M = \begin{bmatrix} I_5 & 0_1 \end{bmatrix} = E_{6\times 5}E_{5\times 6}$, como se pretendia.

Construamos as matrizes A, B e C, do tipo 5×5, 5×2 e 2×5, respectivamente, dadas por

$$\begin{aligned} A &= E_{5\times 6}P(\sigma\mathcal{H}_{3,3})ME_{6\times 5} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde $\sigma\mathcal{H}_{3,3}(\mathcal{Y})$ é a submatriz de $\mathcal{H}_{4,3}(\mathcal{Y})$ sem a primeira linha de blocos,

$$\begin{aligned} B &= E_{5\times 6} P \mathcal{H}_{3,3} E_{6\times 2} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} C &= E_{2\times 6} \mathcal{H}_{3,3} M E_{6\times 5} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Assim, $\Sigma = (A, B, C)$, constitui uma realização parcial mínima, de ordem 4, de $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$.

De facto,

$$Y_1 = CB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_2 = CAB = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_3 = CA^2B = \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$Y_4 = CA^3B = \begin{bmatrix} 22 & 15 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

$\diamond$

Capítulo 5

Conclusão

A primeira parte desta dissertação centrou-se na teoria da realização de sucessões de Markov. O estudo efectuado permitiu concluir que as realizações de uma sucessão de Markov admitem propriedades interessantes, destacando-se o facto de que duas realizações mínimas de uma mesma sucessão de Markov são algebricamente equivalentes, e portanto, nesse sentido, únicas. Seguidamente estabeleceu-se um critério que possibilita averiguar quando é que uma determinada sucessão de Markov é realizável e caso o seja determinou-se a dimensão de uma sua realização mínima. É de destacar que todo o desenvolvimento referido anteriormente é suportado pelo conceito fundamental de matriz de Hankel associada a uma determinada sucessão de Markov. Nesta dissertação, explorou-se ainda o célebre algoritmo de Ho na obtenção de uma realização mínima de uma sucessão de Markov. Pudemos constatar que este método é vantajoso no sentido em que determina, directamente a partir dos parâmetros de Markov e através de transformações adequadas nas respectivas matrizes de Hankel, uma realização de uma sucessão de Markov, de menor dimensão. Existem outros algoritmos que fornecem uma realização mínima de uma sucessão de Markov. Estes algoritmos podem classificar-se em dois grupos. Do primeiro grupo fazem parte aqueles que, partindo de uma realização conhecida que não é minima, obtêm uma mínima. Estes algoritmos não são tão eficientes como os que recorrem às matrizes de Hankel para a obtenção da realização mínima, e que compõe o segundo grupo. De entre estes, o algoritmo de Ho é dos mais eficientes visto tirar partido da factorização de uma dada matriz de Hankel nas matrizes de atingibilidade e observabilidade de uma realização mínima. Para maior detalhe ver [Sch00]).

A segunda parte desta dissertação centrou-se no problema das realizações parciais de uma sequência finita de parâmetros de Markov. Verificou-se que este problema é sempre solúvel, ou seja, é sempre possível determinar uma realização parcial. Além disso, é sempre possível obter uma que seja mínima. Também foi possível estabelecer um critério para averiguar a existência de uma única realização parcial mínima que permite descrever completamente o sistema caracterizado pelo comportamento inicial definido pela sequência dada. No entanto, mesmo quando os N_0 parâmetros de Markov aos quais temos acesso inicialmente, não são suficientes para garantir uma realização parcial mínima única, podemos completar esta informação de forma adequada, estimando as respostas necessárias do sistema, com vista à obtenção de uma realização parcial eficiente, que representa uma excelente aproximação das leis que descrevem o sistema para os primeiros N_0 instantes. Consequentemente, estes resultados podem ser directamente aplicados em problemas reais cuja principal preocupação seja determinar a relação entre as entradas e as saídas de um sistema, para um conjunto finito de instantes. É de notar que o algoritmo de Ho continua a constituir um bom método para obter uma realização parcial mínima directamente a partir dos dados.

Dado um determinado sistema sobre o qual conhecemos o seu comportamento, nos primeiros N_0 instantes, as realizações parciais mínimas também podem ser utilizadas para reduzir a dimensão do sistema inicial. Tal facto pode traduzir-se na prática numa melhoria significativa em termos da eficiência do sistema. Importa salientar que em termos da aplicabilidade destes resultados existem várias áreas que deles beneficiam. Com os desenvolvimentos realizados nesta área começou-se nas últimas décadas a modelar comportamentos de sistemas não lineares complexos, como é disso exemplo o problema da identificação de procedimentos que aproximem o comportamento inicial, isto é, as respostas produzidas por caldeiras e turbinas. Com esta teoria, torna-se ainda possível construir sistemas através da identificação em tempo real da realização parcial mínima, onde os estimadores das matrizes do sistema A, B e C são continuamente actualizados à medida que se faz a leitura dos dados, originando constantemente novas formas de descrever o sistema, ou seja, novas realizações mais fidedignas. Note-se que, quando os dados do sistema aos quais se tem acesso passam a ser suficientes para aplicar o critério da existência de uma única realização parcial mínima, é possível efectuar-se dois tipos de análise. Por um lado podemos ter acesso às leis que de facto modelaram o sistema em instantes anteriores, obtendo informação sobre a qualidade da estimação obtida anteriormente. Por outro lado estamos em condições de averiguar se o sistema em estudo está, por algum motivo, em mudança, havendo necessidade de reajustar a sua descrição.

Em suma, dado um conjunto finito de parâmetros de Markov vimos que é sempre possível determinar uma sua realização parcial mínima, permitindo assim modelar um sistema, que num intervalo finito de tempo, descreve as leis que originam os parâmetros de Markov.

Bibliografia

[FM94] E. Fornasini and G. Marchesini. *Appunti di Teoria dei Sistemi.* Edizioni Libreria Progetto, Padua, 1994.

[HJ85] R. Horn and C. Johnson. *Matrix Analysis.* Cambridge University Press, 1985.

[Kai80] T. Kailath. *Linear Systems.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J, 1980.

[KFA69] R. Kalman, P. Falb, and M. Arbib. *Topics in Mathematical Systems Theory.* MacGarw-Hill, New York, 1969.

[Ols94] G. Olsder. *Mathematical Systems Theory.* Delftse Uitgevers Maatschappjij, The Netherlands, 1994.

[Roc08] P. Rocha. *Apontamentos de Controlo Linear.* http://www2.mat.ua.pt/pessoais/procha/, 2008.

[Sch00] B. Schutter. *Minimal state-space realization in linear system theory: an overview.* Jour. of Comp. and App. Math., **121** (2000), 331–354.

[Son98] E. Sontag. *Mathematical Control Theory.* Springer, new York, 1998.

[Tet70] A. Tether. *Construction of minimal linear state-variable models from finite input-output data.* IEEE Trans. on Aut. Control, **AC-15, no4** (1970), 427–436.