Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2010

Hugo Cardoso Albuquerque

Lógica Proposicional via Lindenbaum-Tarski e Curry-Howard

Propositional Logic via Lindenbaum-Tarski and Curry-Howard

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2010

Hugo Cardoso Albuquerque

Lógica Proposicional via Lindenbaum-Tarski e Curry-Howard

Propositional Logic via Lindenbaum-Tarski and Curry-Howard

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações, realizada sob a orientação científica do Doutor Dirk Hofmann, Professor auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Aos meus pais.

o júri

Presidente

Prof. Doutor Manuel António Gonçalves Martins
Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Prof. Doutor Dirk Hofmann
Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Prof. Doutor Jaime Arsénio de Brito Ramos
Professor Auxiliar do Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico

agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Dirk Hofmann, pela sua disponibilidade e paciência, diárias, durante estes últimos 6 meses. Deu-me liberdade total de escolher o caminho, e apoio incansável a trilhá-lo. Foi um privilégio privar consigo enquanto matemático, e um prazer enquanto pessoa. Esta tese não teria sido possível sem a sua orientação matemática tão eclética e rigorosa.

Ao Professor Manuel Martins, por acreditar em mim desde a primeira aula. A sua presença e conselhos foram uma constante ao longo de todo o Mestrado. É graças a si que sigo o Doutoramento em Lógica Algébrica Abstracta. Foi tanto de professor como de amigo.

Aos meus primeiros professores de Lógica, Álgebra e Cálculo Lambda, ainda na Licenciatura, Professores Cristina Sernadas, Manuel Ricou e Carlos Caleiro. O conteúdo, e principalmente a forma, das suas aulas, ditaram o meu gosto e a minha atitude na Matemática.

Ao projecto Mondrian (PTDC/EIA-CCO/108302/2008), ao qual me encontro associado sob uma Bolsa de Investigação da FCT (BI/UI97/4950/2010).

Ao meu irmão, por me dar sempre um exemplo a seguir.

À Patrícia, ao lado de quem tudo fica mais simples. A Matemática, em particular: “Há infinitos números, não há? Então, há infinitos números primos!”

No Yoga, agradecemos cada aula ao nosso mestre, ao mestre deste, e ao primeiro mestre, pelo conhecimento que através deles nos é transmitido. Em Matemática, isto chamar-se-ia um “agradecimento por indução”. Do mesmo modo, agradeço a todos os que fazem de mim uma pessoa melhor, a todos os que o fazem a estes, *ad infinitum*, por hipótese de indução.

Aos meus pais, por tudo. Logicamente.

palavras-chave

Álgebra de Lindenbaum-Tarksi, Isomorfismo de Curry-Howard, Lógica Proposicional Clássica, Lógica Proposicional Intuicionista, Cálculo Lambda.

resumo

Pretendemos neste trabalho estudar a Lógica Proposicional enquanto "projecção" de duas correspondências diferentes que a têm como parte comum. A primeira estabelece uma ponte lógico-algébrica, a Álgebra de Lindenbaum-Tarski, e a segunda uma ponte lógico-operacional, o Isomorfismo de Curry-Howard. Debruçamo-nos sobre os dois paradigmas proposicionais que historicamente motivaram estas correspondências: a Lógica Proposicional Clássica e a Lógica Proposicional Intuicionista, respectivamente. Introduzimos três cálculos lógicos e duas semânticas para ambos os paradigmas, e ainda o cálculo operacional por excelência – o Cálculo Lambda. Recorrendo à noção de assinatura em Álgebra Universal, uniformizamos o tratamento dado às três teorias em estudo. A título de exemplo do alcance das correspondências estabelecidas, exibimos duas consequências para as Lógicas Proposicionais Clássica e Intuicionista provenientes via Lindenbaum-Tarski e Curry-Howard: o Teorema de Glivenko e a consistência das Lógicas, respectivamente. Finalmente, propomos uma explicação geral para a "tradução" das reduções lambda, via Curry-Howard, enquanto normalização de provas onde ocorra o Metateorema de Dedução imediatemante seguido do Metateorema do Modus Ponens. O famoso *Hauptsatz* de Gentzen resulta como caso particular. Sugerimos ainda como desenvolvimento futuro uma generalização do Cálculo Lambda à 1ª ordem que segue de muito perto o seu tratamento tradicional.

keywords

Lindenbaum-Tarski algebra, Curry-Howard isomorphism, Classical Propositional Logic, Intuicionistic Propositional Logic, Lambda Calculus.

abstract

In this work we intend to study Propositional Logic as "projection" of two different correspondences that have it as common part. The first one establishes a logical-algebraic bridge, the Lindenbaum-Tarski, and the second one a logical-operational bridge, the Curry-Howard isomorphism. We focus our attention on the two propositional paradigms which historically motivated these correspondences: Classical Propositional Logic and Intuitionistic Propositional Logic, respectively. We introduce three logical calculi and two semantics for both paradigms, as well as the operational calculus by excellence – the Lambda Calculus. Borrowing the notion of signature from Universal Algebra, we uniformize the treatment given to the three theories under study. As an example of the established correspondences' range, we exhibit two consequences for Classical and Intuitionistic Propositional Logic given via Lindenbaum-Tarski and Curry-Howard: Glivenko's Theorem and the consistency of both Logics, respectively. Finally, we propose a broader explanation for the "translation" of the lambda reductions, via Curry-Howard, as proof normalization where the Deduction Metatheorem occurs immediately followed by the Detachment Metatheorem. Gentzen's famous *Hauptsatz* results as a particular case. We also suggest as future development a first order generalization of the Lambda Calculus which follows very closely its traditional treatment.

Índice

Lista de Tabelas

Introdução

Pretendemos neste trabalho expor a Lógica Proposicional à luz de duas correspondências diferentes que a têm como parte comum. De algum modo, o objectivo passa por estudar a Lógica Proposicional enquanto "projecção" de duas teorias aparentemente ortogonais. Estabeleceremos assim duas correspondências, uma algébrica e outra operacional, que partilham por metade a Lógica Proposicional. A saber: a *Álgebra de Lindenbaum-Tarski* e o *Isomorfismo de Curry-Howard*.

O método de Lindenbaum-Tarski lança luz sobre o lado algébrico da Lógica. Em Lógica Algébrica Abstracta, esta designação atribui-se hoje à construção geral da contra-parte algébrica de uma Lógica, cujo universo é dado pelo quociente das fórmulas segundo a relação de equivalência de interderivabilidade, e as operações induzidas pelos conectivos lógicos. Deste modo, os teoremas lógicos são identificados na classe de equivalência do elemento topo da álgebra em causa, dita álgebra de Lindenbaum-Tarski.

A primeira referência a este processo data de 1935, numa nota de rodapé de um artigo de Tarski, onde o autor constrói a álgebra de Lindenbaum-Tarski para a Lógica Proposicional Clássica [Monk, 1986, p. 899]. Desde então, foi adaptado a várias outras Lógicas, como a Lógica Intuicionista e a Lógica Modal, resultando em diferentes classes de álgebras.

O isomorfismo de Curry-Howard lança luz sobre o lado operacional, ou computacional, da Lógica. É também designado por correspondência *formulas-as-types*, ou *proofs-as-terms*. Este lado operacional toma forma na teoria matemática do Cálculo Lambda, onde tipos correspondem a fórmulas, termos lambda a provas, e habitação de tipos a provabilidade.

Convém clarificar desde já o abuso de terminologia que cometemos ao empregar a expressão "isomorfismo", cuja definição matemática figura entre as mais nobres da disciplina. Em rigor, a *correspondência de Curry-Howard* não preserva operações entre duas estruturas algébricas. Mas a comunhão entre as duas partes desta correspondência é de tal modo intrínseca, que é comum empregar a expressão "isomorfismo" para a designar, talvez para lhe emprestar algum do brilho e peso que esta palavra encerra em si, e arrasta consigo, e que a palavra "correspondência" falha em transmitir.

A primeira referência ao isomorfismo de Curry-Howard data de 1942, novamente numa nota de rodapé, de um artigo de Curry [Sørensen and Urzyczyn, 2006, p. 97]. Desde então, o isomorfismo tem sido exaustivamente estudado por vários autores. Credita-se a Howard a correspondência entre reduções lambda e normalização de provas, num artigo que apenas publicou em 1980, embora já circulasse não oficialmente desde 1969 [Sørensen and Urzyczyn, 2006, p. 97]. No capítulo 12 propomos uma explicação geral para esta correspondência, independente do cálculo em causa.

Ambas as correspondências foram estabelecidas originalmente para uma Lógica Proposicional (Clássica, no caso algébrico; e Intuicionista, no caso operacional), e posteriormente generalizadas à 1ª ordem do mesmo paradigma lógico, e a outros paradigmas. Neste trabalho apenas nos debruçaremos sobre o caso proposicional das duas Lógicas que motivaram ambas as descobertas.

A Lógica Clássica, ou pelo menos *uma* lógica clássica, remonta aos famosos silogismos de Aristóteles. Os tratamentos formais que estudaremos neste trabalho devem-se a Hilbert e Gentzen, ambos nos finais da década de 20 e inícios da década de 30 do século XX. Para uma pequena resenha histórica da Lógica Clássica, bem como dos diferentes cálculos aqui tratados, consulte-se [Bibel and Eder, 1993, 2. A Survey of Logical Calculi].[1]

A Lógica Intuicionista foi idealizada por Brouwer no início do século XX, e formalizada por Heyting em 1930. Podemos dizer que Heyting concretizou a contra-parte formal do programa filosófico intuicionista de Brouwer. Desde logo é notável que ideias originalmente filosóficas tenham vindo a encontrar fundamentos matemáticos que as exprimissem logicamente. Para uma breve revisão histórica da Lógica Intuicionista consulte-se [Moschovakis, 2009, 1. Historical Development of Intuitionistic Logic], ou [van Dalen, 2002, 1. A Short History].

A característica mais sonante do intuicionismo prende-se com a rejeição do *princípio do terceiro excluído*, também conhecido por *tertium non datur*, que nos diz que qualquer afirmação caí num de dois casos: ou é verdadeira, ou é falsa (não-verdadeira). De facto, o intuicionismo rejeita a própria noção clássica de verdade. Para Brouwer, uma afirmação é verdadeira somente quando exibida uma sua prova. Esta noção construtiva de verdade colide frontalmente com o princípio do terceiro excluído, que falha em apresentar uma prova quer da afirmação em causa, quer da sua negação.

> "Consequently, the theorems which are usually considered as *proved* in mathematics, ought to be divided into those that are *true* and those that are *non-contradictory*."
>
> *Brouwer* [Moschovakis, 2009, p. 80]

Afastando-se deste e doutros princípios comummente aceites na Matemática dita Clássica, a escola intuicionista tratou de re-construir (ou antes, de *construir*) toda a Matemática conhecida (a menos claro de Axiomas da Escolha e outros que tais), rivalizando com as correntes de pensamento matemático vigentes à data, como o Logicismo de Frege e Russel, e o Formalismo de Hilbert.

O Cálculo Lambda (em rigor, a Lógica Combinatória) surgiu nos anos 20 e 30 do século XX, enquanto estudo das propriedades estruturais que regem a abstracção, aplicação e substituição em funções. A criação da Lógica Combinatória é geralmente atribuída a Curry, embora versões anteriores e independentes já existissem. O Cálculo Lambda propriamente dito (ainda que inconsistente numa primeira versão), foi criado por Church, contando mais tarde com a contribuição preciosa de dois seus alunos, Kleene e Rosser. Para uma revisão histórica, quer do Cálculo Lambda quer da Lógica Combinatória, consulte-se [Cardone and Hindley, 2009]. Não resistimos em citar aqui a origem da notação lambda.

> "In Principia Mathematica the notation for the function f with $f(x) = 2x + 1$ is $2\hat{x} + 1$. Church originally intended to use the notation $\hat{x}.2x + 1$. The typesetter could not position the hat on top of the x and placed it in front of it, resulting in ${\scriptstyle\wedge}x.2x + 1$. Then another typesetter changed it into $\lambda x.2x + 1$."
>
> [Barendregt, 1997, p. 182]

[1] Pode encontrar-se aqui a origem da notação $\vdash$, devida a Frege.

Dividimos a estrutura do presente trabalho em duas partes: Lógica *vs.* Álgebra e Lógica *vs.* Lambda. Passamos a descrever o seu conteúdo.

Parte I:

A primeira parte do nosso trabalho encontra-se estruturada em sete capítulos. Os dois primeiros introduzem a Lógica Proposicional Clássica e Intuicionista; os dois que se lhes seguem tratam as respectivas contra-partes algébricas, a classe das álgebras booleanas e pseudo-booleanas; os dois seguintes estabelecem a correcção e completude (através da álgebra de Lindenbaum-Tarski) de todos os cálculos clássicos e intuicionistas segundo as respectivas semânticas; e finalmente o último capítulo apresenta uma consequência que advém do lado algébrico para o lado lógico "via Lindenbaum-Tarski" – o Teorema de Glivenko.

No capítulo 1 trataremos a Lógica Proposicional Clássica (de ora em diante, denotada por **LPC**). Introduziremos a linguagem das fórmulas proposicionais clássicas e três cálculos para **LPC**: o Cálculo Natural, o Cálculo de Hilbert e o Cálculo de Gentzen. A título de exemplo de um resultado expresso nos três cálculos considerados, demonstraremos separadamente o Metateorema da Dedução na sua versão sintáctica clássica.

Procederemos no capítulo 2 a um estudo idêntico para a Lógica Proposicional Intuicionista (de ora em diante, denotada por **LPI**). De igual modo, introduziremos a linguagem das fórmulas proposicionais intuicionistas e as versões intuicionistas do três cálculos clássicos estudados. Mais uma vez, enunciaremos o Metateorema da Dedução na sua versão sintáctica intuicionista para os três cálculos considerados.

Definiremos no capítulo 3 a contra-parte algébrica de **LPC**, a classe das álgebras booleanas. Introduziremos duas semânticas para **LPC**: a Semântica Denotacional e a Semântica Algébrica. Provaremos a equivalência entre as semânticas. Tal como nos capítulos sintácticos, demonstraremos o Metateorema da Dedução, agora na sua versão semântica para as álgebras booleanas.

Analogamente, no capítulo 4 definiremos a contra-parte algébrica de **LPI**, a classe das álgebras de Heyting. Introduziremos novamente duas semânticas para **LPI**: a Semântica Algébrica e a Semântica de Kripke. Provaremos igualmente a equivalência entre ambas. Mais uma vez, demonstraremos o Metateorema da Dedução na sua versão semântica para as álgebras pseudo-booleanas.

Dedicaremos o capítulo 5 à correcção e completude dos três cálculos introduzidos no capítulo 1 segundo as semânticas introduzidas no capítulo 3. Demonstraremos a correcção para a álgebra booleana **2** e a completude para a classe das álgebras booleanas **BA**. A completude será feita construindo, passo a passo, a álgebra de Lindenbaum-Tarski para cada cálculo. Terminaremos este capítulo com algumas observações sobre este processo.

De igual modo, no capítulo 6 trataremos a correcção e completude dos três cálculos introduzidos no capítulo 2 segundo as semânticas introduzidas no capítulo 4. Demonstraremos tanto a correcção como para a completude a classe das álgebras de Heyting **HA**. A completude será feita, mais uma vez, construindo passo a passo a álgebra de Lindenbaum-Tarski para cada cálculo. Terminaremos novamente com algumas considerações sobre este processo, nomeadamente sobre as diferenças em relação ao caso clássico.

Finalmente, no capítulo 7 estabeleceremos uma consequência para **LPC** e **LPI** proveniente das suas contra-partes algébricas. Provaremos uma versão semântica do Teorema de Glivenko, e enunciaremos as três versões sintácticas via Lindenbaum-Tarski. O teorema de Glivenko caracteriza, com um enunciado surpreendentemente simples, a fronteira entre os dois paradigmas lógicos estudados nesta primeira parte do trabalho.

Parte II:

A segunda parte do nosso estudo também se encontra estruturada em sete capítulos. O primeiro introduz o fragmento implicacional intuicionista; os dois que se lhe seguem apresentam duas versões do cálculo lambda: o *Cálculo Lambda sem tipos* e o *Cálculo Lambda com tipos*; os capítulos seguintes tratam o isomorfismo de Curry-Howard: estabelecem-no primeiro para o fragmento implicacional intuicionista, analisam a "tradução" das reduções lambda -β e -η na parte lógica, e estendem-no finalmente a toda a Lógica Proposicional Intuicionista; e o último capítulo apresenta novamente uma consequência para **LPC** e **LPI**, agora proveniente do lado lambda para o lado lógico "via Curry-Howard".

Dedicaremos o capítulo 8 ao fragmento implicacional intuicionista (que passaremos a denotar por **LPI** $\rightarrow$), composto apenas pelas regras do conectivo implicação e pelos esquemas de axiomas base, de cada cálculo. Provaremos aqui não só a completude deste fragmento para a semântica de Kripke, como também que **LPI** é uma extensão conservativa de **LPI** $\rightarrow$. Ou seja, qualquer fórmula implicacional derivável em **LPI** também pode ser derivada em **LPI** $\rightarrow$.

O tratamento da variante sem tipos do Cálculo Lambda será feito no capítulo 9, onde introduziremos todos os conceitos auxiliares à correcta formulação da sintaxe lambda. Pelo caminho iremos enunciando alguns resultados menores, mas importantes para a compreensão desta teoria matemática, cuja notação e manipulação requer algum hábito.

No capítulo 10 tipificaremos o Cálculo Lamba, generalizaremos as noções vistas no capítulo anterior para termos lambda com tipos, e provaremos vários resultados centrais do Cálculo Lambda com tipos. Nomeadamente, o Teorema de Church-Rosser, o Teorema da Redução do Sujeito e o Teorema da Normalização Forte.

Estabeleceremos a correspondência de Curry-Howard entre o fragmento implicacional intuicionista e o Cálculo Lambda com tipos no capítulo 11. Demonstraremos isoladamente este resultado para o Cálculo Natural, de Hilbert e de Gentzen. O estudo separado destes cálculos é tradicionalmente realizado utilizando regras de tipificação diferentes para cada cálculo, pelo que o isomorfismo estabelece-se entre entidades lambda diferentes. Por exemplo, os três cálculos lógicos acima referidos correspondem ao cálculo lambda (na sua formulação tradicional), à lógica combinatória e ao cálculo de substituição explícita, respectivamente [Sørensen and Urzyczyn, 2006]. Optaremos no entanto por manter fixas as regras de tipificação de termos lambda para os três cálculos, o que nos permitirá comparar ao mesmo nível a tradução via Curry-Howard de cada cálculo. Como veremos, o Metateorema da Dedução desempenhará aqui um papel preponderante.

Analisaremos no capítulo 12 a "tradução" via Curry-Howard das reduções lambda nos diferentes cálculos lógicos. Chegaremos a uma explicação generalizada para a correspondência entre reduções lambda e normalização de provas, que em particular para o Cálculo de Gentzen, toma a forma do famoso *Hauptsatz* de Gentzen. Saliente-se que esta generalização surge naturalmente quando comparados os três cálculos sobre as mesmas regras de tipificação.

Finalmente, no capítulo 13, estendemos o isomorfismo de Curry-Howard a toda a Lógica Proposicional Intuicionista. Para isso, teremos que criar novos termos lambda, novos tipos, e novas regras de tipificação. Este processo tornará mais claro e intuitivo os moldes em que o isomorfismo de Curry-Howard se establece. Isto porque chegados a este ponto, e uma vez conhecido o isomorfismo, estaremos a construir um lado da correspondência (a parte lambda) à custa do que queremos que surja no outro lado (a parte lógica, cuja extensão já conhecemos, e é dada por **LPI**).

Concluiremos o presente trabalho no capítulo 14 com mais uma consequência para **LPC** e **LPI**, neste caso a consistência. Esta advirá sem esforço, via Curry-Howard, face à pletora de resultados entretanto demonstrados, algébricos e operacionais. Deste modo, o nosso estudo como que se fecha sobre si próprio, e, como tal, encontra um lugar privilegiado para findar.

Para uma melhor localização dos conteúdos consultados, explicitámos as páginas das referências bibliográficas citadas. Terminámos ainda todos os capítulos discriminando as fontes nas quais foram baseados. Isto visa isolar de algum modo a matéria em estudo, mas também, a bem da verdade autoral, enfatizar aquelas referências que efectivamente suportam o presente trabalho.

Uma última nota quanto ao estilo e à forma da exposição. Não se pretendeu de todo realizar uma exposição exaustiva, mas antes um resumo dos conceitos e resultados centrais de cada teoria. A preocupação transversal a todo o trabalho foi uniformizar o tratamento dos diferentes cálculos e semânticas, muitas vezes introduzidos como assuntos separados, e em várias fontes diferentes. Recorreu-se para isso à noção de *assinatura* de Álgebra Universal como ponto de partida para todas as linguagens, fossem elas lambda ou lógicas, fossem sintácticas ou semânticas. Procurou-se, por outro lado, demonstrar todos os teoremas enunciados com alguma demora e detalhe (excepção feita a provas por indução cujo argumento seja o esperado).

0 | Preliminares

Neste capítulo introduzimos todos os conceitos que serão assumidos como conhecidos no seguimento, algébricos e lógicos. A exposição pretendeu-se muito breve.

O objectivo deste capítulo é não só delinear um ponto de partida para o estudo que se lhe segue, mas também tornar este trabalho o mais auto-contido possível.

Metalinguagem

A distinção entre *linguagem* e *meta-linguagem* é subtil, mas de extrema relevância. A primeira é utilizada quando falamos *dentro* do sistema formal, e a segunda quando falamos *sobre* o sistema formal (muitas vezes na própria Língua em que nos expressamos).

Embora esta distinção possa parecer um preciosismo, é importante aperceber-mo-nos que os símbolos de operação das linguagens em Lógica coincidem tradicionalmente com os símbolos que empregamos na meta-linguagem. Assim sendo, vamos desde já fixar os símbolos da metalinguagem que utilizaremos no seguimento.[1]

- Meta-negação: $\neg\!\!\!\neg$, ou a expressão *não*;
- Meta-conjunção: $\bigwedge\!\!\!\!\bigwedge$, ou a expressão *e*;
- Meta-disjunção: $\bigvee\!\!\!\!\bigvee$, ou a expressão *ou*;
- Meta-implicação: $\Rightarrow$, ou as expressões *implica*, ou *se* ... *então* ... ;
- Meta-quantificador universal: $\forall\!\!\!\forall$, ou a expressão *para todo*;
- Meta-quantificador existencial: $\exists\!\!\exists$, ou as expressões *para algum*, ou *existe*.

Os respectivos símbolos de operação das linguagens lógicas são dados por $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists$.

No seguimento, privilegiaremos o uso dos meta-símbolos para os quantificadores e a implicação, e as meta-expressões para os restantes conectivos.

Ordem

O conceito de *ordem* formaliza a intuitiva e abrangente noção de comparação entre elementos de um mesmo conjunto.

Definição 0.1. Seja S um conjunto. Uma *ordem parcial em* S é uma relação $\leq$ em S tal que para quaisquer $x, y, z \in S$ verificam-se as seguintes condições:

- Reflexividade:
$$x \leq x \ ;$$

[1] Esta notação é da autoria do Professor Hernandez Manfredini.

- Transitividade:
$$x \leq y \text{ e } y \leq z \Rightarrow x \leq z \; ;$$

- Anti-simetria:
$$x \leq y \text{ e } y \leq x \Rightarrow x = y \; .$$

Também denotamos $x \leq y$ por $y \geq x$. Denotamos ainda por $<$ a relação *estrita* induzida por $\leq$, i.e., a relação em S definida por

$$x < y \Leftrightarrow x \leq y \text{ e } x \neq y \; .$$

Um conjunto munido de uma relação de ordem parcial recebe um nome próprio.

Definição 0.2. Um *sistema parcialmente ordenado (s.p.o.)* é um par $\langle S, \leq \rangle$ tal que $\leq$ é uma ordem parcial em S.

Seja $\langle S, \leq \rangle$ um s.p.o.. Alguns elementos em S são distinguidos em virtude das propriedades que gozam face a $\leq$. Um elemento $\perp \in S$ diz-se *base em* S, se $\perp \leq x$ para todo $x \in S$; analogamente, um elemento $\top \in S$ diz-se *topo em* S, se $\top \geq x$ para todo $x \in S$. A unicidade dos elementos topo e base em S segue imediatamente da anti-simetria de $\leq$.

Seja agora $P \subseteq S$. Um elemento $x \in P$ diz-se *maximal em* P, se não é menor que nenhum elemento em P, i.e., se $x \leq y \; , \; y \in P \Rightarrow x = y$; analogamente, um elemento $x \in P$ diz-se *minimal em* P, se não é maior que nenhum elemento em P, i.e., se $x \geq y \; , \; y \in P \Rightarrow x = y$. Um elemento $x \in S$ diz-se *majorante de* P, se é maior ou igual que todos os elemento em P, i.e., se $x \geq y$ para todo $y \in P$; e diz-se *minorante de* P, se é menor ou igual que todos os elemento em P, i.e., se $x \leq y$ para todo $y \in P$. Ao menor majorante de P chamamos *supremo de* P; e ao maior minorante de P chamamos *ínfimo de* P. No caso em que x é supremo de P e $x \in P$, diz-se *máximo de* P; no caso em que x é ínfimo de P e $x \in P$, diz-se *mínimo de* P. A unicidade dos elementos máximo e mínimo de P segue mais uma vez imediatamente da anti-simetria de $\leq$.

Uma ordem (parcial) diz-se *total*, ou *linear*, se todos os elementos são comparáveis entre si, i.e., se para quaisquer $x, y, z \in S$ verifica-se adicionalmente a seguinte condição:

- Tricotomia:
$$x \leq y \text{ ou } x \geq y \text{ ou } x = y \; .$$

Finalmente, denotamos por $\uparrow x$ o conjunto de todos os elementos em S maiores ou iguais que x, i.e.,
$$\uparrow x = \{y \in S : y \geq x\} \; ,$$
e por $\downarrow x$ o conjunto de todos os elementos em S menores ou iguais que x, i.e.,
$$\downarrow x = \{y \in S : y \leq x\} \; .$$

Assinaturas e Álgebras

As noções de *assinatura* e *álgebra (livre)* serão a base comum à sintaxe e semântica de todas as entidades que estudaremos neste trabalho.

Definição 0.3. Uma *assinatura* é um conjunto Σ, cujos elementos se designam por *símbolos de função*, tal que a cada elemento $f \in \Sigma$ corresponde um inteiro não negativo, dito *aridade de* f. Um símbolo de função de aridade n diz-se um *símbolo* n*-ário*.

Definição 0.4. Seja Σ uma assinatura. Uma Σ-*álgebra* $\mathcal{A}$ é um tuplo

$$\mathcal{A} = \langle A, \langle f^{\mathcal{A}} \rangle_{f \in \Sigma} \rangle \ ,$$

onde A é um conjunto não-vazio, dito *universo de* $\mathcal{A}$, e cada elemento $f^{\mathcal{A}}$ indexado pelo símbolo n-ário $f \in \Sigma$ é uma função n-ária em A, dita *operação de* $\mathcal{A}$.

É usual deixar cair o super-índice $^{\mathcal{A}}$ nas operações da álgebra. No caso em que a assinatura Σ é finita, digamos $\Sigma = \langle f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle$, denotamos a Σ-álgebra $\mathcal{A}$ simplesmente por

$$\mathcal{A} = \langle A, f_1^{\mathcal{A}}, f_2^{\mathcal{A}}, \ldots, f_m^{\mathcal{A}} \rangle \ .$$

Denotamos ainda a classe de todas as Σ-álgebras por $\mathrm{Alg}(\Sigma)$.

Introduzimos agora a noção de homomorfismo entre Σ-álgebras, que consiste numa função entre Σ-álgebras que preserve a estrutura das mesmas (i.e., que é compatível com as suas operações da assinatura Σ).

Definição 0.5. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas Σ-álgebras. Uma função $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ diz-se um *homomorfismo de álgebras*, se para cada símbolo n-ário $f \in \Sigma$ se verifica a seguinte condição:

$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)) \ .$$

Um homomorfismo de álgebras $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ diz-se um *monomorfismo*, se é injectivo; diz-se um *epimorfismo*, se é sobrejectivo; diz-se um *isomorfismo*, se é um monomorfismo e um epimorfismo; e diz-se um *endomorfismo*, se $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Um caso particular de um endomorfismo ocorre quando a álgebra em causa é a álgebra dos termos. Nesse caso, estamos perante uma *substituição*.

Definição 0.6. Sejam K uma classe de Σ-álgebras, X um conjunto, e $\mathcal{F}$ uma Σ-álgebra tal que $X \subseteq F$. Dizemos que $\mathcal{F}$ *tem a propriedade de aplicação universal para* K *sobre* X, ou que $\mathcal{F}$ *é livre para* K *sobre* X, se para qualquer $\mathcal{A} \in \mathrm{K}$ e para toda a função $\alpha : X \to A$, existe um único homomorfismo $\overline{\alpha} : \mathcal{F} \to \mathcal{A}$ que estende α (i.e., tal que $\overline{\alpha} \restriction_X = \alpha$).

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook, "i"'] & A \\
\mathcal{F} \arrow[ur, dashed, "\overline{\alpha}"'] &
\end{tikzcd}$$

Se $\mathcal{F} \in \mathrm{K}$, dizemos que $\mathcal{F}$ *é livre em* K *sobre* X. Prova-se que a Σ-álgebra livre para $\mathrm{Alg}(\Sigma)$ sobre qualquer conjunto X existe, e é única, a menos de isomorfismo, uma vez fixa a cardinalidade de X. Esta Σ-álgebra é conhecida por *álgebra dos termos sobre* X.

Definição 0.7. Sejam Σ uma assinatura e X um conjunto. O *conjunto dos termos sobre* X, que denotaremos por $T(\Sigma, X)$ é definido recursivamente como se segue:

- $X \subseteq T(\Sigma, X)$;
- se $f \in \Sigma$ é um símbolo de função n-ário e $t_i \in T(\Sigma, X)$, com $i = 1, \ldots, n$, então $f(t_1, \ldots, t_n) \in T(\Sigma, X)$.

Definição 0.8. Sejam Σ uma assinatura e X um conjunto tais que $T(\Sigma, X)$ é não vazio. A Σ-*álgebra dos termos sobre* X, que denotaremos por $\mathcal{T}(\Sigma, X)$, é a Σ-álgebra com universo $T(\Sigma, X)$ e tal que para cada símbolo de função n-ário $f \in \Sigma$ e quaisquer termos $t_i \in T(\Sigma, X)$, com $i = 1, \ldots, n$, tem-se $f^{\mathcal{T}(\Sigma,X)}(t_1, \ldots, t_n) = f(\Sigma, X)(t_1, \ldots, t_n)$.

Todos os conceitos e resultados comuns à teoria de grupos, teoria de anéis, teoria de reticulados, etc., (p.e., as definições de subgrupo, subanel, subreticulado, e os teoremas de homomorfismos para grupos, anéis, reticulados), encontram versões mais gerais na teoria de álgebra universal. Uma referência é [Meinke and Tucker, 1993].

Reticulados

Existem duas abordagens para introduzir a noção de *reticulado*. Uma privilegia a sua natureza algébrica, e outra a sua natureza de conjunto ordenado. A escolha entre ambas prende-se com a intuição subjacente à propriedade que se pretende exprimir.

As próximas definições formalizam as duas abordagens referidas, e o lema que se lhes segue estabelece a "equivalência" entre ambas (no sentido em que uma induz a outra).

Definição 0.9. Um *reticulado* é um s.p.o. $\langle L, \leq \rangle$ tal que quaisquer dois elementos de L possuem ínfimo e supremo. Denotamos o ínfimo e o supremo de $x, y \in L$ por $\inf(x, y)$ e $\sup(x, y)$, respectivamente.

Definição 0.10. Um *reticulado* é uma álgebra $\langle L, \wedge, \vee \rangle$, tal que para quaisquer $x, y \in L$ verificam-se as seguintes condições:

- Comutatividade de $\wedge$ e $\vee$:
$$x \wedge y = y \wedge x \; ;$$
$$x \vee y = y \vee x \; ;$$
- Associatividade de $\wedge$ e $\vee$:
$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) \; ;$$
$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) \; ;$$
- Idempotência de $\wedge$ e $\vee$:
$$(x \wedge x) = x \; ;$$
$$(x \vee x) = x \; ;$$
- Absorção de $\wedge$ e $\vee$:
$$x \wedge (x \vee y) = x \; ;$$
$$x \vee (x \wedge y) = x \; .$$

Chamamos às operações binárias $\wedge$ e $\vee$, *ínfimo* e *supremo*, respectivamente.

É prática comum identificar, ora o s.p.o. $\langle L, \leq \rangle$, ora a álgebra $\langle L, \wedge, \vee, \rangle$, com o conjunto L, e referir-mo-nos simplesmente ao reticulado L. Atente-se ainda na ambiguidade que surge ao referir-mo-nos à operação ínfimo $\wedge$ (respectivamente, à operação supremo $\vee$) e ao elemento ínfimo $x \wedge y$ (respectivamente, ao elemento supremo $x \vee y$). Estes abusos de notação ficam claros consoante o contexto, e são legitimados pelo próximo lema.

Lema 0.11. *Um reticulado enquanto s.p.o. induz um reticulado enquanto álgebra, e vice-versa.*

Demonstração.

Seja $\langle L, \leq \rangle$ um reticulado segundo a definição 0.9, e sejam $x, y \in L$. Definimos as operações binárias $\wedge$ e $\vee$ em L como se segue:

$$x \wedge y = \inf(x, y) \qquad , \qquad x \vee y = \sup(x, y) \ .$$

Deixa-se por verificar que estas operações satisfazem as leis da comutatividade, associatividade, idempotência e absorção [Davey and Priestley, 2002, Theorems 2.8 and 2.9, p. 39].

Seja agora $\langle L, \wedge, \vee, \rangle$ um reticulado segundo a definição 0.10, e sejam $x, y \in L$. Definimos a relação $\leq$ em H como se segue:

$$x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x \Leftrightarrow x \vee y = y \ .$$

Deixa-se por verificar que esta relação é uma relação de ordem em H, e que, além disso, o ínfimo e supremo de x, y são dados por $\inf(x, y) = x \wedge y$ e $\sup(x, y) = x \vee y$, respectivamente [Davey and Priestley, 2002, Theorem 2.10, p. 40].

□

Ao acrescentarmos condições extra à definição de reticulado, quer enquanto s.p.o. quer enquanto álgebra, obtemos refinamentos da definição de reticulado.

As condições mais naturais de adicionarmos, seguindo de perto as definições das estruturas algébricas mais comuns, serão a distributividade, a existência de elementos neutros, e a existência de inversos (aqui designados por complementos). Já segundo uma perspectiva de ordem, será a existência de elemento topo e base. Explicitamente, estas condições (com excepção dos elementos neutros para as operações, que ficam caracterizados enquanto elementos topo e base) tomam a forma:

- Distributividade entre $\inf(x, y)$ e $\sup(x, y)$ em $\langle L, \leq \rangle$:

$$\forall x, y, z \in L \quad \inf(x, \sup(y, z)) = \sup(\inf(x, y), \inf(x, z)) \ ;$$

$$\forall x, y, z \in L \quad \sup(x, \inf(y, z)) = \inf(\sup(x, y), \sup(x, z)) \ .$$

- Distributividade entre $\wedge$ e $\vee$ em $\langle L, \wedge, \vee, \rangle$:

$$\forall x, y, z \in L \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \ ;$$

$$\forall x, y, z \in L \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \ .$$

- Existência de elementos topo e base em $\langle L, \leq \rangle$:

$$\exists \top \in L \ \forall x \in L \quad x \leq \top \ ;$$

$$\exists \bot \in L \ \forall x \in L \quad x \geq \bot \ .$$

- Existência de elementos topo e base em $\langle L, \wedge, \vee, \rangle$:

$$\exists \top \in L \ \forall x \in L \quad x \wedge \top = x \ ;$$

$$\exists \bot \in L \ \forall x \in L \quad x \vee \bot = x \ .$$

- Existência de complementos em $\langle L, \leq \rangle$:

$$\forall x \in L \ \exists y \in L \quad \inf(x, y) = \bot \qquad , \qquad \sup(x, y) = \top \ .$$

- Existência de complementos em $\langle L, \wedge, \vee, \rangle$:

$$\forall x \in L\ \exists y \in L \quad x \wedge y = \bot \qquad , \qquad x \vee y = \top\ .$$

Fica aqui bem patente quão artificiais se podem revelar alguns conceitos quando traduzidos para a abordagem que lhes é "contra-natura". As noções de distributividade e complementação são melhor descritas segundo a abordagem algébrica, pois exprimem precisamente conceitos de natureza algébrica. Por outro lado, a noção de elementos mínimo e máximo é mais intuitiva na presença de uma relação de ordem parcial.

Estas condições motivam as próximas definições.

Definição 0.12. Um reticulado L diz-se *distributivo*, se o ínfimo e o supremo verificam as leis da distributividade.

Na verdade, basta exigir uma das condições da respectiva distributividade para que se verifiquem ambas [Rasiowa and Sikorski, 1963, p. 48].

Definição 0.13. Um reticulado L diz-se *limitado*, se existem elementos topo e base em L.

Definição 0.14. Um reticulado limitado L diz-se *complementado*, se qualquer elemento em L possui complemento.

Esta definição *per se* não garante a unicidade dos complementos. Num reticulado distributivo, porém, um complemento é único. De facto, sejam $y, z \in L$ dois complementos de $x \in L$ e suponha-se L distributivo. Tem-se:

$$y = y \wedge \top = y \wedge (x \vee z) = (y \wedge x) \vee (y \wedge z) = \bot \vee (y \wedge z) = y \wedge z\ ,$$

i.e., $y \leq z$. Analogamente para $z \leq y$.

Existe ainda outra forma de complementação que dará origem à classe de reticulados sobre a qual este trabalho se debruça, dita *pseudo-complementação*. Esta noção é uma generalização da complementação usual (mais fraca, portanto). Vejamos as condições que definem ambas as noções.

Um complemento de $x \in L$, que denotaremos por $-x$, verifica as seguintes condições:

- Complemento de x em $\langle L, \leq \rangle$:

$$\inf(x, -x) = \bot \qquad , \qquad \sup(x, -x) = \top\ .$$

- Complemento de x em $\langle L, \wedge, \vee, \rangle$:

$$x \wedge -x = \bot \qquad , \qquad x \vee -x = \top\ .$$

Um *pseudo-complemento de* x, que continuaremos a denotar por $-x$, verifica agora a seguinte condição:

- Pseudo-complemento de x em $\langle L, \leq \rangle$:

$$-x = \max\{y : \inf(x, y) = \bot\}\ .$$

- Pseudo-complemento de x em $\langle L, \wedge, \vee, \rangle$:

$$-x = \max\{y : x \wedge y = \bot\}\ .$$

Note-se que, por definição, um pseudo-complemento é único. Note-se ainda que um complemento de x é um elemento maximal do conjunto $\{z : x \wedge z = \bot\}$, mas não necessariamente o máximo (num contexto não distributivo, claro está). A unicidade do pseudo-complemento é ganha à custa de deixar cair a segunda condição na definição de complemento.

Um *pseudo-complemento de* $x \in L$ *relativo a* $y \in L$, que denotaremos por $x \to y$, verifica a seguinte condição:

- Pseudo-complemento de x relativo a y em $\langle L, \leq \rangle$:

$$x \to y = \max\{z : \inf(x, z) \leq y\} \ .$$

- Pseudo-complemento de x relativo a y em $\langle L, \wedge, \vee, \rangle$:

$$x \to y = \max\{z : (x \wedge z) \wedge y = x \wedge z\} \ .$$

Mais uma vez, um pseudo-complemento relativo é único, por definição. Podemos caracterizar o pseudo-complemento de x relativo a y como se segue:

$$\forall z \in L \quad z \leq x \to y \Leftrightarrow x \wedge z \leq y \ . \tag{1}$$

A implicação da direita para a esquerda segue imediatamente da definição. A implicação recíproca segue por transitividade de $x \wedge z \leq x \wedge x \to y$ (por compatibilidade do ínfimo sobre a hipótese $z \leq x \to y$) e $x \wedge x \to y \leq y$ (por definição). Fica evidente desta caracterização que o pseudo-complemento de $x \in L$ não é mais do que o pseudo-completo de x relativo a $\bot$. A pseudo-complementação relativa é assim uma generalização da pseudo-complementação.

As noções de pseudo-complementação e pseudo-complementação relativa motivam as próximas definições.

Definição 0.15. Um reticulado L com elemento base diz-se *pseudo-complementado*, se qualquer elemento em L possui pseudo-complemento.

Definição 0.16. Um reticulado L diz-se *relativamente pseudo-complementado*, se quaisquer dois elementos em L possuem pseudo-complemento relativo.

Estamos finalmente em condições de introduzir as duas principais classes de reticulados deste trabalho.

Definição 0.17. Um reticulado L diz-se *booleano*, se é distributivo, limitado e complementado.

Definição 0.18. Um reticulado L diz-se *de Heyting*, se é distributivo, limitado e relativamente pseudo-complementado.

Na verdade, a distributividade e a existência de elemento topo figuram aqui redundantes, pois ambas seguem da pseudo-complementação relativa. A prova para a distributividade pode encontrar-se em [Rasiowa and Sikorski, 1963, I 12.1, p. 59]. A prova para a existência de elemento topo segue de

$$\top \text{ existe sse } x \to x \text{ existe} \ ,$$

com $x \in L$. De facto, se existe $x \to x$, então segue por (1) que $\forall z \in L \quad z \leq x \to x \Leftrightarrow x \wedge z \leq x$. Mas o lado direito desta equivalência é verdadeiro, por definição de ínfimo. Logo,

$x \to x$ é o elemento topo em L. Reciprocamente, se existe $\top \in L$, então segue por definição de topo que $\forall x \in L \quad x \leq \top$, i.e., $\forall x \in L \quad x \wedge \top = x$, donde $\forall x \in L \quad x \wedge \top \leq x$. Mas $\top$ é por defeito o maior elemento que verifica esta condição. Logo, $\top$ é o pseudo-complemento de x relativo a x. Concluímos que num reticulado relativamente pseudo-complementado, tem-se $\top = x \to x$, com $x \in L$.

A última noção que precisamos da teoria de reticulados é a de *filtro*.

Definição 0.19. Seja L um reticulado. Um subconjunto não-vazio $F \subseteq L$ diz-se um *filtro*, se verifica as seguintes condições:

- $x, y \in F \Rightarrow x \wedge y \in F$;
- $x \in L, y \in F$ e $x \geq y \Rightarrow x \in F$.

Note-se que $\top$ pertence a qualquer filtro. Caso não exigíssemos F não-vazio, teríamos que adicionar $\top \in F$ como condição extra à definição.

Um filtro $F \subseteq L$ diz-se *próprio*, se $F \neq L$. É fácil verificar que um filtro F é próprio sse $\perp \notin F$. Um filtro próprio $P \subset L$ diz-se *primo*, se satisfaz adicionalmente a seguinte condição:

- $x, y \in L$ e $x \vee y \in P \Rightarrow x \in P$ ou $y \in P$.

Finalmente, note-se que o conjunto $\uparrow x$ é um filtro, dito *filtro principal gerado por* $x \in L$.

A noção dual de filtro é a de *ideal*, da qual apenas precisaremos da definição de *ideal principal gerado por* $x \in L$, i.e., $\downarrow x$.

Lógica

Assumimos por fim como conhecida a definição usual de *lógica*, i.e., a definição Tarskiana de lógica enquanto um conjunto e uma relação de consequência (*cf.* definição A.3). Acontece que no seguimento também referiremos propriedades das lógicas enquanto um conjunto e um operador de consequência. Mais, na verdade, apresentá-las-emos segundo conjuntos de axiomas e regras de inferência. Assim sendo, pareceu-nos mais apropriado dedicar um anexo próprio às várias definições de *lógica* e respectivas "equivalências" (*cf.* anexo A).

Dado o carácter mais exaustivo e pormenorizado imprimido ao tratamento destes conteúdos, no que respeita às noções preliminares neles presentes, bastar-nos-ão as várias definições de lógica, e, enfim, reconhecer que todas elas se equiparam.

Referências

[Rasiowa and Sikorski, 1963]
[Meinke and Tucker, 1993]
[Davey and Priestley, 2002]

Parte I

Lógica *vs.* Álgebra

"The interpretation of the algebra of logic in sentential algorithm can clearly be modified so as to avoid the replacement of logical identity by another equivalence relation. To obtain this modification we consider, instead of sentences $x \in S$, the equivalence classes $X \subseteq B$ each of which consists of all sentences y which are equivalent [...] to some sentence x."

[Tarski, 1956, nota de rodapé 1, p. 349]

1 | Lógica Proposicional Clássica

Uma Lógica pode ser apresentada através de uma *linguagem* e de um *cálculo*.[1] Uma linguagem dá-nos um conjunto de expressões gramaticalmente correctas, e um cálculo dá-nos um conjunto de regras através das quais podemos manipular sintacticamente as expressões da linguagem.

Fixa uma linguagem, podem existir vários cálculos que dêem origem à mesma Lógica. Ou seja, embora segundo lógicas diferentes (enquanto formalizações de uma relação de consequência), as fórmulas que os diferentes cálculos permitem provar são as mesmas (i.e., induzem a mesma relação de consequência). Distinguimos assim a apresentação da relação de consequência – a *lógica* – da relação em si – a *Lógica*.[2] Neste capítulo apresentamos três lógicas para a Lógica Proposicional Clássica: o *Cálculo Natural*, o *Cálculo de Hilbert* e o *Cálculo de Gentzen*. Pretendeu-se não só introduzir os cálculos referidos, mas sobretudo uniformizar o seu tratamento, de modo a evidenciar quer as semelhanças entre todos os cálculos, quer as especificidades de cada cálculo.

As referências para a Lógica Clássica são imensas. A referência principal neste capítulo foi [Sernadas and Sernadas, 2003]. Uma referência clássica para os cálculos Natural e de Gentzen é [Prawitz, 1965].

1.1 Linguagem para LPC

No contexto geral de Teoria da Computação, um *alfabeto* é um conjunto não-vazio, cujos elementos se designam por *letras*. Um subconjunto de sequências de letras diz-se uma *linguagem*, e os seus elementos designam-se por *palavras*. Às palavras que respeitam as regras de construção de uma dada gramática, chamamos *palavras bem formadas*.

No contexto de Lógica, admitimos que um alfabeto possa ser vazio (embora este caso tenha pouco interesse), e designamos as suas letras por *variáveis*. Os símbolos da gramática que ditam a estrutura das palavras são designados por *conectivos lógicos*, e passam a fazer parte integrante da linguagem. Esta consiste agora num subconjunto das sequências das letras do alfabeto e dos conectivos da gramática. Às palavras bem-formadas, chamamos *fórmulas*.

No contexto particular da Lógica Proposicional Clássica, estes conceitos podem ser definidos como se segue.

Definição 1.1. O *alfabeto proposicional* é um conjunto numerável

$$\Pi_{\mathbf{LPC}} = \{\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots\} \ ,$$

[1] Estamos aqui a considerar a definição Tarskiana de lógica, composta por um conjunto e uma relação de consequência sobre esse conjunto (*cf.* definição A.3).

[2] A distinção entre *lógica* e *Lógica* foi dada a conhecer ao autor no tutorial *The World of Possible Logics*, dado por Jean-Ives Beziau durante a *World Congress and School on Universal Logic III*.

cujos elementos se designam por *variáveis proposicionais*, ou *símbolos proposicionais*, ou *átomos proposicionais*.

Definição 1.2. A *assinatura proposicional* é a assinatura

$$\Sigma_{\mathbf{LPC}} = \langle \neg, \wedge, \vee, \to \rangle \ ,$$

cujos elementos se designam por *conectivos (primitivos) proposicionais*, e onde:

- $\neg$ é um conectivo unário, dito *negação*;
- $\wedge$ é um conectivo binário, dito *conjunção*;
- $\vee$ é um conectivo binário, dito *disjunção*;
- $\to$ é um conectivo binário, dito *implicação*.

Definição 1.3. A *linguagem proposicional* é a $\Sigma_{\mathbf{LPC}}$-álgebra livre em $\mathrm{Alg}(\Sigma_{\mathbf{LPC}})$ sobre $\Pi_{\mathbf{LPC}}$,

$$\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}} = \langle \Pi_{\mathbf{LPC}}, \neg^{\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}}, \wedge^{\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}}, \vee^{\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}}, \to^{\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}} \rangle \ ,$$

cujos elementos se designam por *fórmulas proposicionais*.

É usual identificar a álgebra $\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ com a linguagem gerada pela gramática

$$\varphi := \pi \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \to \varphi \ .$$

Consideramos ainda um conectivo não-primitivo binário, $\leftrightarrow$, dito *equivalência*, definido por $\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$.

A intuição por detrás de uma fórmula proposicional é a seguinte: uma variável proposicional π tem o significado que o nome indica; uma negação $\neg\varphi$ significa que a proposição φ não se verifica; uma conjunção $\varphi \wedge \psi$ significa que φ e ψ se verificam; uma disjunção $\varphi \vee \psi$ significa que φ ou ψ se verificam; e uma implicação $\varphi \to \psi$ significa que se φ se verifica, então ψ também se verifica.

São usuais algumas convenções na manipulação de fórmulas proposicionais. Nomeadamente, omitimos parêntesis exteriores, e consideramos a prioridade dos conectivos pela ordem em que foram apresentados. Assim, por exemplo, a fórmula proposicional $\neg\varphi\wedge\psi$ deve entender-se como $((\neg\varphi) \wedge \psi)$ e a fórmula proposicional $\varphi \vee \psi \to \rho$ deve entender-se como $((\varphi \vee \psi) \to \rho)$.

1.2 Cálculos para LPC

Como havíamos referido, vamos apresentar três cálculos para a Lógica Proposicional Clássica. O Cálculo Natural baseia-se nas tabelas de verdade dos conectivos lógicos presentes na assinatura proposicional.[3] O Cálculo de Hilbert assume uma abordagem axiomática. Nesta abordagem é privilegiada a manipulação sintáctica através de axiomas em vez de regras de inferência. Finalmente, o Cálculo de Gentzen assenta na noção de *sequente*, e é também conhecido como *cálculo de sequentes*.

[3]Esta afirmação é algo redutora, já que as regras do conectivo implicação não reflectem a sua tabela de verdade. Os chamados métodos de *tableaux* são talvez melhores candidatos a esta caracterização, como se defende em [D'Agostino, 1999, Is Natural Deduction Really 'Natural'?, pp. 63]

1.2.1 Cálculo Natural

As regras do Cálculo Natural para a Lógica Proposicional Clássica são introduzidas na próxima definição.

Definição 1.4. A relação $\vdash^c_{\mathrm{N}} \subseteq \mathscr{P}(\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}) \times \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ é definida recursivamente pelas seguintes regras:

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi}\ \mathbf{Ax}$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash^c_{\mathrm{N}} \psi \qquad \Gamma, \varphi \vdash^c_{\mathrm{N}} \neg\psi}{\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \neg\varphi}\ \neg\mathbf{I} \qquad\qquad \frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash^c_{\mathrm{N}} \psi \qquad \Gamma, \neg\varphi \vdash^c_{\mathrm{N}} \neg\psi}{\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi}\ \neg\mathbf{E}$$

$$\frac{\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \qquad \Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \psi}{\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \wedge \psi}\ \wedge\mathbf{I} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi}\ \wedge\mathbf{E}\ \frac{\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \psi}$$

$$\frac{\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi}{\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \vee \psi}\ \vee\mathbf{I}\ \frac{\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \psi}{\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \vee \psi} \qquad \frac{\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \vee \psi \qquad \Gamma, \varphi \vdash^c_{\mathrm{N}} \rho \qquad \Gamma, \psi \vdash^c_{\mathrm{N}} \rho}{\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \rho}\ \vee\mathbf{E}$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash^c_{\mathrm{N}} \psi}{\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \to \psi}\ \to\mathbf{I} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi}{\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \psi}\ \to\mathbf{E}$$

$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi$ representa a notação *infix* para $\langle \Gamma, \varphi \rangle \in \vdash^c_{\mathrm{N}}$.

São usuais os seguintes relaxamentos de notação: $\vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi$ em vez de $\varnothing \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi$; e $\Gamma, \psi \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi$ em vez de $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi$.

Importa ainda fixar duas convenções de notação, para qualquer relação de consequência, que passaremos a utilizar sem futura referência: sempre que escrevermos $\Gamma, \psi \vdash \varphi$ supomos implicitamente que $\psi \notin \Gamma$; e denotaremos também a meta-negação $\boldsymbol{\neg}\Gamma \vdash \varphi$ por $\Gamma \nvdash \varphi$.

Note-se que temos duas regras para cada conectivo lógico, uma de introdução e outra de eliminação. Note-se ainda que a regra **Ax** (axioma) não tem premissas.

As regras da negação podem parecer redundantes à primeira vista. Mas atente-se que se tomarmos $\varphi = \neg\rho$ em $\neg\mathbf{I}$, a conclusão será $\neg\neg\rho$, e não ρ. Como veremos mais à frente, residirá precisamente na eliminação da dupla negação a divergência entre a abordagem clássica e a abordagem intuicionista ao Cálculo Natural.

Verifica-se que a relação $\vdash^c_{\mathrm{N}}$ satisfaz as seguintes propriedades (*cf.* definição A.3):

(i) **Extensividade:** se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi$;

(ii) **Monotonia:** se $\Gamma_1 \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi$ e $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, então $\Gamma_2 \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi$;

(iii) **Corte:** se $\Delta \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi$ e $\forall \delta \in \Delta\ \ \Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \delta$, então $\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi$;

(iv) **Estruturalidade:** se $\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi$ e $s : \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}} \to \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ é uma substituição, então $s(\Gamma) \vdash^c_{\mathrm{N}} s(\varphi)$;

(v) **Finitário:** se $\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi$, então $\Gamma' \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi$, para algum subconjunto finito $\Gamma' \subseteq_f \Gamma$.

Por outras palavras, o par $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}, \vdash^c_{\mathrm{N}} \rangle$ é uma lógica estrutural e finitária.

Aliado às regras de um cálculo está o conceito de *prova* para esse mesmo cálculo. Intuitivamente, uma prova será uma sequência (finita) de hipóteses e de aplicações das regras do cálculo a passos anteriores dessa sequência. Formalmente, temos a próxima definição.

Definição 1.5. Uma *prova*, ou *certificado, de* $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ *a partir de* $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$, é uma sequência finita $c_1, \ldots, c_n$, tal que:

- $c_n = \Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi$;
- para todo $i = 1, \ldots, n$:
  - ou $c_i = \Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \gamma$, para algum $\gamma \in \Gamma$, caso que etiquetamos com **Ax**;
  - ou c_i é a conclusão de uma regra do Cálculo Natural cuja(s) premissa(s) ocorre(m) em $c_1, \ldots, c_{i-1}$, caso que etiquetamos com o nome da regra.

Se existe uma prova de φ a partir de Γ, denotamos esse facto por $\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi$.

Atente-se no abuso de notação que cometemos ao denotar por $\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi$, tanto a existência de uma prova de φ a partir de Γ, como a relação de pertença $\langle \Gamma, \varphi \rangle \in \vdash^c_{\mathrm{N}}$. No entanto, demonstra-se que existe uma prova de φ a partir de Γ sse $\langle \Gamma, \varphi \rangle \in \vdash^c_{\mathrm{N}}$. A implicação da esquerda para a direita segue por indução nas regras da relação $\vdash^c_{\mathrm{N}}$, e a implicação contrária segue por indução no comprimento da prova.

É natural perguntar-mo-nos quais as fórmulas que se podem provar a partir de um dado conjunto Γ. As próximas definição e teorema respondem a esta pergunta.

Definição 1.6. O *conjunto das consequências sintácticas de* $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$, ou *fecho sintáctico de* Γ, que se denota por $\Gamma^{\vdash^c_{\mathrm{N}}}$, é o menor conjunto que contém Γ e é fechado para a relação $\vdash^c_{\mathrm{N}}$.

Teorema 1.7. $\varphi \in \Gamma^{\vdash^c_{\mathrm{N}}}$ *sse* $\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi$.

Demonstração.
É fácil ver que $\Gamma^{\vdash^c_{\mathrm{N}}} = \{\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}} : \langle \Gamma, \varphi \rangle \in \vdash^c_{\mathrm{N}}\}$. Segue das provas por indução acima mencionadas que $\Gamma^{\vdash^c_{\mathrm{N}}} = \{\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}} : \Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi\}$.

□

Ou seja, uma fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ é consequência sintáctica de um conjunto de fórmulas $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ sse existe uma prova de φ a partir de Γ.

As propriedades vistas para a relação $\vdash^c_{\mathrm{N}}$ traduzem-se nas seguintes propriedades para o fecho sintáctico de um conjunto de fórmulas (*cf.* definição A.5):

(i) **Extensividade:** $\Gamma \subseteq \Gamma^{\vdash^c_{\mathrm{N}}}$;

(ii) **Monotonia:** se $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, então $\Gamma_1^{\vdash^c_{\mathrm{N}}} \subseteq \Gamma_2^{\vdash^c_{\mathrm{N}}}$;

(iii) **Idempotência:** $\Gamma^{\vdash^c_{\mathrm{N}}} = \left(\Gamma^{\vdash^c_{\mathrm{N}}}\right)^{\vdash^c_{\mathrm{N}}}$;

(iv) **Estruturalidade:** $s(\Gamma^{\vdash^c_{\mathrm{N}}}) = (s(\Gamma))^{\vdash^c_{\mathrm{N}}}$, para qualquer substituição $s : \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}} \to \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$;

(v) **Finitário:** se $\varphi \in \Gamma^{\vdash^c_{\mathrm{N}}}$, então $\varphi \in \Gamma'^{\vdash^c_{\mathrm{N}}}$ para algum $\Gamma' \subseteq_f \Gamma$ finito.

Vejamos por fim um exemplo de uma prova no Cálculo Natural.

Exemplo 1.8. Uma prova para o silogismo hipotético

$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \rho\} \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \to \rho$$

é dada por:

1.	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \rho, \varphi\} \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \to \psi$	**Ax**
2.	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \rho, \varphi\} \vdash^c_{\mathrm{N}} \psi \to \rho$	**Ax**
3.	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \rho, \varphi\} \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi$	**Ax**
4.	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \rho, \varphi\} \vdash^c_{\mathrm{N}} \psi$	$\to \mathbf{E}\ 3, 1$
5.	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \rho, \varphi\} \vdash^c_{\mathrm{N}} \rho$	$\to \mathbf{E}\ 4, 2$
6.	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \rho\} \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \to \rho$	$\to \mathbf{I}\ 5$

1.2.2 Cálculo de Hilbert

As regras do Cálculo de Hilbert são introduzidas na próxima definição.

Definição 1.9. A relação $\vdash^c_{\mathrm{H}} \subseteq \mathscr{P}(\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}) \times \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ é definida recursivamente pelas seguintes regras:

$$\frac{}{\vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \to (\psi \to \varphi)}\ \mathbf{Ax1}$$

$$\frac{}{\vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \wedge \psi \to \varphi}\ \mathbf{Ax2} \qquad \frac{}{\vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \wedge \psi \to \psi}\ \mathbf{Ax3} \qquad \frac{}{\vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))}\ \mathbf{Ax4}$$

$$\frac{}{\vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \to \varphi \vee \psi}\ \mathbf{Ax5} \qquad \frac{}{\vdash^c_{\mathrm{H}} \psi \to \varphi \vee \psi}\ \mathbf{Ax6} \qquad \frac{}{\vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \vee \psi \to ((\varphi \to \rho) \to ((\psi \to \rho) \to \rho))}\ \mathbf{Ax7}$$

$$\frac{}{\vdash^c_{\mathrm{H}} (\varphi \to (\psi \to \rho)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \rho))}\ \mathbf{Ax8}$$

$$\frac{}{\vdash^c_{\mathrm{H}} (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)}\ \mathbf{Ax9} \qquad \frac{}{\vdash^c_{\mathrm{H}} (\neg\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \neg\psi) \to \varphi)}\ \mathbf{Ax10}$$

$$\frac{\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \qquad \Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \to \psi}{\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \psi}\ \mathbf{MP}$$

$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi$ representa a notação *infix* para $\langle \Gamma, \varphi \rangle \in \vdash^c_{\mathrm{H}}$.

Este cálculo é portanto composto por dez esquemas de axiomas e apenas uma regra de inferência, conhecida por *modus ponens*.

Observe-se que estes axiomas (com excepção dos axiomas **Ax1** e **Ax8**) são a tradução imediata das regras do Cálculo Natural (com excepção das regras para a implicação) introduzidas na subsecção 1.2.1. A regra $\to \mathbf{E}$ corresponde obviamente à regra *modus ponens*.

Seria razoável traduzir também a regra $\to$ **I**, que representa o Metateorema da Dedução (*cf.* secção 1.3). Acontece que o axioma **Ax8** traduz parte do processo que permite remover o Metateorema da Dedução numa *derivação à Hilbert*. Este consiste em substituir todas as linhas ψ da derivação (bem entendido, as fórmulas à direita do símbolo $\vdash^c_{\mathrm{N}}$) por $\varphi \to \psi$, onde φ é a premissa a remover. Ora, se esta substituição ocorrer numa regra de *modus ponens* que tenha como premissa a fórmula ψ, tomará agora a forma:

$$\frac{\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \to (\psi \to \rho)}{\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \to \rho}\,.$$

A tradução imediata desta regra resulta no axioma

$$\frac{}{\vdash^c_{\mathrm{H}} (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \rho)) \to (\varphi \to \rho))}\,\mathbf{Ax8'},$$

que também poderia ter sido escolhido. O axioma **Ax8** resulta da tradução da mesma regra, mas trocando a ordem das premissas, e é mais usual na literatura.

Resta-nos o axioma **Ax1**, aparentemente "a mais" em relação ao Cálculo Natural. Este axioma traduz efectivamente uma regra do Cálculo Natural, mas uma *regra estrutural*, que no caso do Cálculo Natural é redundante face às restantes regras para os conectivos. Esta regra, conhecida por *Enfraquecimento*, é dada por

$$\frac{\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi}{\Gamma, \psi \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi}\,,$$

e facilmente se vê que corresponde à monotonia da relação $\vdash^c_{\mathrm{N}}$. Se traduzirmos directamente esta regra obtemos o axioma **Ax1**.

Verifica-se que a relação $\vdash^c_{\mathrm{H}}$ satisfaz as seguintes propriedades (*cf.* definição A.3):

(i) **Extensividade:** se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi$;

(ii) **Monotonia:** se $\Gamma_1 \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi$ e $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, então $\Gamma_2 \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi$;

(iii) **Corte:** se $\Delta \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi$ e $\forall \delta \in \Delta \;\; \Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \delta$, então $\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi$;

(iv) **Estruturalidade:** se $\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi$ e $s : \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}} \to \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ é uma substituição, então $s(\Gamma) \vdash^c_{\mathrm{H}} s(\varphi)$;

(v) **Finitário:** se $\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi$, então $\Gamma' \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi$, para algum subconjunto finito $\Gamma' \subseteq_f \Gamma$.

Por outras palavras, o par $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}, \vdash^c_{\mathrm{H}} \rangle$ é uma lógica estrutural e finitária.

A noção de prova à Hilbert define-se de modo análogo ao Cálculo Natural. A base desta definição recursiva é agora dada pelos axiomas do Cálculo de Hilbert, e pelos elementos de Γ.

Definição 1.10. Uma *prova à Hilbert*, ou *certificado à Hilbert*, *de* $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ *a partir de* $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$, é uma sequência finita $c_1, \ldots, c_n$ tal que:

- $c_n = \Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi$;
- para todo $i = 1, \ldots, n$:
  - ou $c_i = \Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \gamma$, para algum $\gamma \in \Gamma$, caso que etiquetamos com **Hip**;

- ou c_i é o axioma j do Cálculo de Hilbert, $j = 1, \ldots, 10$, caso que etiquetamos com **Ax j**;
- ou c_i é a conclusão da regra *modus ponens* do Cálculo de Hilbert cujas premissas c_j, c_k ocorrem em $c_1, \ldots, c_{i-1}$, caso que etiquetamos com **MP** j, k.

Se existe uma prova à Hilbert de φ a partir de Γ, denotamos esse facto por $\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi$.

Mais uma vez, atente-se no abuso de notação $\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi$.

Definição 1.11. O *conjunto das consequências à Hilbert de* $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$, *ou fecho à Hilbert de* Γ, que se denota por $\Gamma^{\vdash^c_{\mathrm{H}}}$, é o menor conjunto que contém Γ e é fechado para a relação $\vdash^c_{\mathrm{H}}$.

Teorema 1.12. $\varphi \in \Gamma^{\vdash^c_{\mathrm{H}}}$ *sse* $\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi$.

Demonstração.

$$\Gamma^{\vdash^c_{\mathrm{H}}} = \{\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}} : \langle \Gamma, \varphi \rangle \in \vdash^c_{\mathrm{H}}\} = \{\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}} : \Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi\}$$

□

Ou seja, $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ é uma consequência à Hilbert de um conjunto de fórmulas $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ sse existe uma prova à Hilbert de φ a partir de Γ.

As propriedades vistas para a relação $\vdash^c_{\mathrm{H}}$ traduzem-se nas seguintes propriedades para o fecho à Hilbert de um conjunto de fórmulas (*cf.* definição A.5):

(i) **Extensividade:** $\Gamma \subseteq \Gamma^{\vdash^c_{\mathrm{H}}}$;

(ii) **Monotonia:** se $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, então $\Gamma_1^{\vdash^c_{\mathrm{H}}} \subseteq \Gamma_2^{\vdash^c_{\mathrm{H}}}$;

(iii) **Idempotência:** $\Gamma^{\vdash^c_{\mathrm{H}}} = \left(\Gamma^{\vdash^c_{\mathrm{H}}}\right)^{\vdash^c_{\mathrm{H}}}$;

(iv) **Estruturalidade:** $s(\Gamma^{\vdash^c_{\mathrm{H}}}) = (s(\Gamma))^{\vdash^c_{\mathrm{H}}}$, para qualquer substituição $s : \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}} \to \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$;

(v) **Finitário:** se $\varphi \in \Gamma^{\vdash^c_{\mathrm{H}}}$, então $\varphi \in \Gamma'^{\vdash^c_{\mathrm{H}}}$ para algum $\Gamma' \subseteq_f \Gamma$ finito.

Vejamos por fim um exemplo de uma prova no Cálculo de Hilbert.

Exemplo 1.13. Uma prova à Hilbert para o silogismo hipotético

$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \rho\} \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \to \rho$$

é dada por:

1.	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \rho\} \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \to \psi$	**Hip**
2.	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \rho\} \vdash^c_{\mathrm{H}} \psi \to \rho$	**Hip**
3.	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \rho\} \vdash^c_{\mathrm{H}} (\psi \to \rho) \to (\varphi \to (\psi \to \rho))$	**Ax1** e monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{H}}$
4.	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \rho\} \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \to (\psi \to \rho)$	**MP** $2, 3$
5.	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \rho\} \vdash^c_{\mathrm{H}} (\varphi \to (\psi \to \rho)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \rho))$	
.		**Ax8** e monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{H}}$
6.	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \rho\} \vdash^c_{\mathrm{H}} (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \rho)$	**MP** $4, 5$
7.	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \rho\} \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \to \rho$	**MP** $1, 6$

1.2.3 Cálculo de Gentzen

Antes de introduzirmos as regras do Cálculo de Gentzen, ou cálculo de sequentes, precisamos de definir o conceito que dá nome ao cálculo. Um *sequente* em $\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ é um par $\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle$, onde Δ_1, Δ_2 são multi-conjuntos finitos em $\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$. Um multi-conjunto difere de um conjunto pois pode conter elementos repetidos, e difere de uma sequência pois a ordem dos seus elementos é irrelevante.

É usual denotar-se um sequente $\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle$ por $\Delta_1 \to \Delta_2$, mas como o símbolo $\to$ já desempenha um papel central neste trabalho, deixamos cair esta notação, e optamos por uma abordagem relacional análoga à dos cálculos anteriores.

As regras do Cálculo de Gentzen para a Lógica Proposicional Clássica são introduzidas na próxima definição.

Definição 1.14. A relação $\vdash^c_{\mathrm{G}}$ entre multi-conjuntos finitos em $\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ é definida recursivamente pelas seguintes regras:

$$\frac{}{\Delta_1, \varphi \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi, \Delta_2}\ \mathbf{Ax}$$

$$\frac{\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi, \Delta_2 \qquad \varphi, \Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2'}{\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2 \cup \Delta_2'}\ \mathbf{Cut}$$

$$\frac{\Delta_1, \varphi \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2}{\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \neg\varphi, \Delta_2}\ \neg\mathbf{R} \qquad \frac{\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi, \Delta_2}{\Delta_1, \neg\varphi \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2}\ \neg\mathbf{L}$$

$$\frac{\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi, \Delta_2 \qquad \Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \psi, \Delta_2}{\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi \wedge \psi, \Delta_2}\ \wedge\mathbf{R} \qquad \frac{\Delta_1, \varphi \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2}{\Delta_1, \varphi \wedge \psi \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2}\ \wedge\mathbf{L}\ \frac{\Delta_1, \psi \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2}{\Delta_1, \varphi \wedge \psi \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2}$$

$$\frac{\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi, \Delta_2}{\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi \vee \psi, \Delta_2}\ \vee\mathbf{R}\ \frac{\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \psi, \Delta_2}{\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi \vee \psi, \Delta_2} \qquad \frac{\Delta_1, \varphi \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2 \qquad \Delta_1, \psi \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2}{\Delta_1, \varphi \vee \psi \vdash^c_{\mathrm{N}} \Delta_2}\ \vee\mathbf{L}$$

$$\frac{\Delta_1, \varphi \vdash^c_{\mathrm{G}} \psi, \Delta_2}{\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi \to \psi, \Delta_2}\ \to\mathbf{R} \qquad \frac{\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi, \Delta_2 \qquad \Delta_1, \psi \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2'}{\Delta_1, \varphi \to \psi \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2 \cup \Delta_2'}\ \to\mathbf{L}$$

$\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2$ representa a notação *infix* para $\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle \in \vdash^c_{\mathrm{G}}$.

Chamamos *antecedente* de $\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2$ a Δ_1, e *consequente* de $\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2$ a Δ_2. Quando nos referimos a um sequente simplesmente como s, denotamos o seu antecedente por $\mathrm{Ant}(s)$ e o seu consequente por $\mathrm{Cons}(s)$. A intuição (semântica) a ter em mente ao lermos estas regras é a seguinte: um sequente é válido sempre que, se todas as fórmulas do antecedente se verificam, então existe pelo menos uma fórmula do consequente que se verifica.

Note-se que existe uma regra esquerda e uma regra direita para cada conectivo primitivo da assinatura proposicional. As regras direitas correspondem de algum modo às regras de introdução do Cálculo Natural e as regras esquerdas às regras de eliminação.

A regra **Ax** (axioma) não tem premissas, e a regra **Cut** (corte) é análoga à regra *modus ponens* do Cálculo de Hilbert.

Note-se que se considerarmos o caso particular em que o consequente é um conjunto singular, estamos na presença de uma relação de consequência. Verifica-se que a relação $\vdash^c_{\mathrm{G}}$ satisfaz as seguintes propriedades (*cf.* definição A.3):

(i) **Extensividade:** se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash^c_{\mathrm{G}} \gamma$;

(ii) **Monotonia:** se $\Gamma_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi$ e $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, então $\Gamma_2 \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi$;

(iii) **Corte:** se $\Delta \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi$ e $\forall \delta \in \Delta \;\; \Gamma \vdash^c_{\mathrm{G}} \delta$, então $\Gamma \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi$;

(iv) **Estruturalidade:** se $\Gamma \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi$ e $s : \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}} \to \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ é uma substituição, então $s(\Gamma) \vdash^c_{\mathrm{G}} s(\varphi)$;

(v) **Finitário:** se $\Gamma \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi$, então $\Gamma' \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi$, para algum subconjunto finito $\Gamma' \subseteq_f \Gamma$.

Por outras palavras, o par $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}, \vdash^c_{\mathrm{G}} \rangle$ é uma lógica estrutural e finitária.

A noção de prova à Gentzen define-se de modo ligeiramente diferente dos casos anteriores. O primeiro passo do certificado é agora dado pela expressão que se pretende provar, e a base desta definição recursiva dá-se quando uma fórmula proposicional ocorre simultaneamente no antecedente e consequente de um sequente.

Definição 1.15. Uma *prova à Gentzen*, ou *certificado à Gentzen, para o sequente* $\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle$, é uma sequência finita $c_1, \ldots, c_n$, tal que:

- $c_1 = \Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2$;
- para todo $i = 1, \ldots, n$:
  - ou existe $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ pertencente ao antecedente e ao consequente de c_i, caso que etiquetamos com **Ax**;
  - ou c_i é a conclusão de uma regra do Cálculo de Gentzen cuja(s) premissa(s) ocorre(m) em $c_{i+1}, \ldots, c_n$, caso que etiquetamos com o nome da regra.

Se existe uma prova à Gentzen para o sequente $\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle$, denotamos esse facto por $\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2$.

Mais uma vez, atente-se no abuso de notação $\Gamma \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi$.

Definição 1.16. O *conjunto das consequências à Gentzen de* $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$*, ou fecho à Gentzen de* Γ, que se denota por $\Gamma^{\vdash^c_{\mathrm{G}}}$, é o menor conjunto que contém Γ e é fechado para a relação $\vdash^c_{\mathrm{G}}$.

Teorema 1.17. $\varphi \in \Gamma^{\vdash^c_{\mathrm{G}}}$ *sse* $\Gamma \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi$.

Demonstração.

$$\Gamma^{\vdash^c_{\mathrm{G}}} = \{\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}} : \langle \Gamma, \varphi \rangle \in \vdash^c_{\mathrm{G}}\} = \{\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}} : \Gamma \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi\}$$

□

Ou seja, $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ é uma consequência à Gentzen de um conjunto de fórmulas $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ sse existe uma prova à Gentzen de φ a partir de Γ.

As propriedades vistas para a relação $\vdash^c_{\mathrm{G}}$ traduzem-se nas seguintes propriedades para o fecho à Genzten de um conjunto de fórmulas (*cf.* definição A.5):

(i) **Extensividade:** $\Gamma \subseteq \Gamma^{\vdash^c_G}$;

(ii) **Monotonia:** se $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, então $\Gamma_1^{\vdash^c_G} \subseteq \Gamma_2^{\vdash^c_G}$;

(iii) **Idempotência:** $\Gamma^{\vdash^c_G} = \left(\Gamma^{\vdash^c_G}\right)^{\vdash^c_G}$;

(iv) **Estruturalidade:** $s(\Gamma^{\vdash^c_G}) = (s(\Gamma))^{\vdash^c_G}$, para qualquer substituição $s : \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}} \to \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$;

(v) **Finitário:** se $\varphi \in \Gamma^{\vdash^c_G}$, então $\varphi \in \Gamma'^{\vdash^c_G}$ para algum $\Gamma' \subseteq_f \Gamma$ finito.

Vejamos por fim um exemplo de uma prova no Cálculo de Gentzen.

Exemplo 1.18. Uma prova para o silogismo hipotético

$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \rho\} \vdash^c_G \varphi \to \rho$$

é dada por:

1.	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \rho\} \vdash^c_G \varphi \to \rho$	$\to$ **R** 2
2.	$\{\varphi, \varphi \to \psi, \psi \to \rho\} \vdash^c_G \rho$	$\to$ **L** 3, 4
3.	$\{\varphi, \psi \to \rho\} \vdash^c_G \varphi, \rho$	**Ax**
4.	$\{\psi, \varphi, \psi \to \rho\} \vdash^c_G \rho$	$\to$ **L** 5, 6
5.	$\{\psi, \varphi\} \vdash^c_G \psi, \rho$	**Ax**
6.	$\{\rho, \psi, \varphi\} \vdash^c_G \rho$	**Ax**

1.3 Metateorema da Dedução

Pretendemos nesta última secção demonstrar um resultado para **LPC** segundo os três cálculos introduzidos. A escolha recaíu sobre o *Metateorema da Dedução*, já que no seguimento apelaremos a este resultado vezes sem conta.

O Metateorema da Dedução expressa a (meta-)equivalência lógica entre a implicação e a meta-implicação:

$$A \Rightarrow B \text{ sse } A \to B\ .$$

Em boa verdade, o Metateorema da Dedução (MTD) corresponde apenas à implicação da esquerda para a direita. A implicação recíproca corresponde ao *Metateorema do Modus Ponens* (MTMP).

Enunciamos o próximo teorema para uma relação de consequência clássica geral $\vdash^c$, sendo que deve ser entendido com qualquer dos índices $_{\mathrm{N}}$, $_{\mathrm{H}}$ e $_{\mathrm{G}}$.

Teorema 1.19 (Metateorma da Dedução - versão sintáctica clássica)**.**

$$\Gamma, \varphi \vdash^c \psi \textit{ sse } \Gamma \vdash^c \varphi \to \psi$$

Demonstração. (para o Cálculo Natural)

Suponhamos que $\Gamma, \varphi \vdash^c_N \psi$. Considere-se o seguinte certificado para a fórmula $\varphi \to \psi$ a partir de Γ:

1.	$\Gamma, \varphi \vdash^c_{\mathrm{N}} \psi$	hipótese
2.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \to \psi$	$\to$ **I** 1

Reciprocamente, suponhamos que $\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \to \psi$. Considere-se o seguinte certificado para a fórmula ψ a partir de Γ, φ:

1.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \to \psi$	hipótese
2.	$\Gamma, \varphi \vdash^c_{\mathrm{N}} \psi$	$\to$ **E** 1

□

Demonstração. (para o Cálculo de Hilbert)
Suponhamos que $\Gamma, \varphi \vdash^c_{\mathrm{H}} \psi$. Seja $c_1, \ldots, c_n$ um certificado à Hilbert que testemunha este facto. Considere-se a sequência de fórmulas dada por $c'_1 = \varphi \to c_1, \ldots, c'_n = \varphi \to c_n$. A prova segue por indução no comprimento do certificado, $n \in \mathbb{N}$.

Base: c_1 é um axioma ou um elemento de Γ.
Considere-se o seguinte certificado à Hilbert para c'_1 a partir de Γ:

1.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} c_1$	**Hip** ou **Ax 1**, $\ldots$, **10**
2.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} c_1 \to (\varphi \to c_1)$	**Ax1** e monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{H}}$
3.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \to c_1 = c'_1$	**MP** 1,2

Passo: c_n segue por *modus ponens* de $c_i = \psi$ e $c_j = \psi \to \rho$, com $i, j < n$ (ou coincide novamente com o caso base, caso que omitimos).
Segue por hipótese de indução que existem certificados $d_1, \ldots, d_m$ e $e_1, \ldots, e_l$ para $c'_i = \varphi \to c_i$ e $c'_j = \varphi \to c_j$, respectivamente. Considere-se o seguinte certificado à Hilbert para c'_n:

1.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} d_1$	
$\vdots$	$\cdots$	
m.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \to \psi = d_m$	HI
m+1.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} e_1$	
$\vdots$	$\cdots$	
m+l.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \to (\psi \to \rho) = e_l$	HI
m+l+1.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} (\varphi \to (\psi \to \rho)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \rho))$	**Ax8** e monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{H}}$
m+l+2.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \rho)$	**MP** $m+l, m+l+1$
m+l+3.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \to \rho = c'_n$	**MP** $m, m+l+2$

Reciprocamente, suponhamos que $\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \to \psi$. Segue por monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{H}}$ que $\Gamma, \varphi \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \to \psi$. Considere-se o seguinte certificado à Hilbert para a fórmula ψ a partir de Γ, φ:

1.	$\Gamma, \varphi \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \to \psi$	hipótese
2.	$\Gamma, \varphi \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi$	**Hip**
3.	$\Gamma, \varphi \vdash^c_{\mathrm{H}} \psi$	**MP** 1,2

□

Demonstração. (para o Cálculo de Gentzen)

Suponhamos que $\Gamma, \varphi \vdash^c_{\mathrm{G}} \psi$. Seja $c_1, \ldots, c_n$ um certificado à Gentzen que testemunha este facto. Considere-se o seguinte certificado à Gentzen para o sequente $\Gamma \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi \to \psi$:

1.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi \to \psi$	$\to$ **R** 2
2.	$\Gamma, \varphi \vdash^c_{\mathrm{G}} \psi$	c_1
$\vdots$	$\ldots$	
n+1.		c_n

Reciprocamente, suponhamos que $\Gamma \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi \to \psi$. Segue por monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{G}}$ que $\Gamma, \varphi \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi \to \psi$. Seja $c_1, \ldots, c_n$ um certificado à Gentzen que testemunha este facto. Considere-se o seguinte certificado à Gentzen para o sequente $\Gamma, \varphi \vdash^c_{\mathrm{G}} \psi$:

1.	$\Gamma, \varphi \vdash^c_{\mathrm{G}} \psi$	**Cut** 2,5
2.	$\Gamma, \varphi, \varphi \to \psi \vdash^c_{\mathrm{G}} \psi$	$\to$ **L** 3,4
3.	$\Gamma, \varphi \vdash^c_{\mathrm{G}} \psi, \varphi$	**Ax**
4.	$\Gamma, \varphi, \psi \vdash^c_{\mathrm{G}} \psi$	**Ax**
5.	$\Gamma, \varphi \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi \to \psi$	c_1
$\vdots$	$\ldots$	
n+5.		c_n

□

Note-se que a prova para o Cálculo Natural é imediata, já que as regras da implicação $\to$ **I** e $\to$ **E** simulam precisamente o MTD e o MTMP, respectivamente. Analogamente, para a regra **MP** e o MTMP no Cálculo de Hilbert; e para a regra $\to$ **R** e o MTD no Cálculo de Gentzen. Estas observações serão relembradas no capítulo 12.

Referências

[Sernadas and Sernadas, 2003]

2 | Lógica Proposicional Intuicionista

A Lógica Proposicional Intuicionista é sintacticamente semelhante à Lógica Proposicional Clássica. A linguagem coincide, e as regras de inferência sofrem alterações apenas para o conectivo negação. Na verdade, somente a eliminação da negação levanta objecções ao paradigma intuicionista. No entanto, esta regra bastará para dar origem a uma nova Lógica Proposicional.

O exemplo mais famoso de uma fórmula proposicional derivável classicamente, mas não--derivável intuicionisticamente, é a fórmula $\varphi \vee \neg\varphi$, conhecida por *princípio do terceiro excluído*, ou *tertium non datur*. A próxima proposição ilustra uma demonstração que faz uso deste princípio.

Proposição 2.1. *Existem soluções da equação $x^y = z$, com x, y irracionais e z racional.*

Demonstração.
Sabemos que $\sqrt{2}$ é irracional. Temos dois casos a considerar:

- Se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é racional, então tome-se $x = \sqrt{2}$ e $y = \sqrt{2}$;

- Se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é irracional, então tome-se $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $y = \sqrt{2}$.

$\square$

É flagrante nesta demonstração o uso do princípio do terceiro excluído: ou $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é racional, ou $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é irracional. Esta demonstração não é, portanto, intuicionisticamente aceite.

Outro tipo de demonstrações que não é reconhecida pelos intuicionistas é a demonstração por absurdo, ou *reductio ad absurdum*. Este tipo de demonstrações faz uso da eliminação da dupla negação, classicamente derivável, mas intuicionisticamente não-derivável.[1]

Vamos novamente apresentar os três cálculos clássicos estudados, agora sob uma formalização intuicionista. A exposição é agora mais breve, demorando-se apenas num ou noutro aspecto que evidencie as diferenças entre o caso clássico e o caso intuicionista.

As referências para a Lógica Intuicionista também abundam. O problema aqui surge no tratamento dos diferentes cálculos, que se pretendeu o mais uniforme entre os cálculos

[1] É interessante referir que a famosa demonstração de Euclides da infinitude dos primos não é uma verdadeira demonstração por absurdo! De facto, ao supormos que existe um número finito de números primos não estamos a negar que existe um número infinito de primos, mas antes a retirar a negação ao termo *infinito*, que é "definido" como *não-finito*. Ou seja, a prova termina com uma introdução da negação, e não com uma eliminação da negação. É portanto, e felizmente, intuicionisticamente aceite!

intuicionistas, e ao mesmo tempo o mais facilmente generalizável a partir dos cálculos clássicos. Diferentes referências trabalham com diferentes regras de inferência, ou diferentes axiomas, para cada cálculo. A referência principal neste capítulo (pelo facto explicado) foi [Dummett, 1977]. Um tratamento mais formal da Lógica Intuicionista pode ser encontrado em [van Dalen, 2002].

2.1 Linguagem para LPI

A Lógica Proposicional Intuicionista opera sobre a mesma linguagem que a Lógica Proposicional Clássica. Formalmente,

$$\Pi_{\mathbf{LPI}} = \Pi_{\mathbf{LPC}} \ ,$$

$$\Sigma_{\mathbf{LPI}} = \Sigma_{\mathbf{LPC}} \ ,$$

e

$$\mathcal{L}_{\mathbf{LPI}} = \langle \Pi_{\mathbf{LPI}}, \neg^{\mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}}, \wedge^{\mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}}, \vee^{\mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}}, \rightarrow^{\mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}} \rangle \ .$$

A intuição por detrás das fórmulas proposicionais é no entanto diferente do caso clássico:[2] uma variável proposicional tem o significado que o nome indica; uma negação $\neg\varphi$ representa um método que transforma qualquer prova de φ numa contradição, ou absurdo; uma conjunção $\varphi \wedge \psi$ representa um par, formado por uma prova de φ e uma prova de ψ; uma disjunção $\varphi \vee \psi$ representa uma par, formado por uma etiqueta de φ e uma prova de φ, ou uma etiqueta de ψ e uma prova de ψ; e uma implicação $\varphi \rightarrow \psi$ representa um método que transforma qualquer prova de φ numa prova de ψ.[3]

Vejamos alguns exemplos que da interpretação BHK para as fórmulas proposicionais.

Exemplo 2.2.

1. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$: Dada uma prova de φ (chamemos-lhe prova A), queremos construir um método que transforme qualquer prova de ψ numa prova de φ. O método que procuramos é o seguinte: dada qualquer prova de ψ (chamemos-lhe prova C), aplicar a prova C à "função" constante que retorna a prova A.

2. $\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$: Dado um método que transforme qualquer prova de φ numa contradição (chamemos-lhe método A), e dada uma prova de φ (chamemos-lhe prova B), queremos construir um método que transforme, qualquer método que transforme qualquer prova de φ numa contradição, numa contradição. O método que procuramos é o seguinte: aplicar a prova B ao método A.

3. $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$: Dada um método que transforme, qualquer método que transforme qualquer prova de φ numa contradição, numa contradição (chamemos-lhe método A), queremos construir uma prova de φ. Esta construção é claramente irrealizável, porque precisaríamos à partida de uma prova de φ (precisamente o que pretendemos provar) para aplicá-la ao método A.

[2]Esta interpretação intuicionista das fórmulas proposicionais é também conhecida por *interpretação BHK*, de Brouwer, Heyting e Kolmogorov.

[3]Em [Dummett, 1977, pp. 12-13], Michael Dummet faz notar que devemos exigir, por definição, que estes métodos sejam por nós *reconhecidos* como capazes de fazer aquilo que deles pretendemos. Caso contrário, não poderíamos supor que, quando confrontados com uma prova, a reconheceríamos como tal.

2.2 Cálculos para LPI

Pretendemos de novo manipular sintacticamente as fórmulas proposicionais, agora sob um ponto de vista intuicionista. Nesta secção introduzimos os três cálculos vistos para a Lógica Clássica, agora para a Lógica Proposicional Intuicionista.

2.2.1 Cálculo Natural

As regras do Cálculo Natural para a Lógica Proposicional Intuicionista são introduzidas na próxima definição.

Definição 2.3. A relação $\vdash^i_{\mathrm{N}} \subseteq \mathscr{P}(\mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}) \times \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$ é definida recursivamente pelas seguintes regras:

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi}\ \mathbf{Ax}$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash^i_{\mathrm{N}} \psi \qquad \Gamma, \varphi \vdash^i_{\mathrm{N}} \neg\psi}{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \neg\varphi}\ \neg\mathbf{I} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi \qquad \Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \neg\varphi}{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \psi}\ \neg\mathbf{E}$$

$$\frac{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi \qquad \Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \psi}{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi \wedge \psi}\ \wedge\mathbf{I} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi}\ \wedge\mathbf{E}\ \frac{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \psi}$$

$$\frac{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi}{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi \vee \psi}\ \vee\mathbf{I}\ \frac{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \psi}{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi \vee \psi} \qquad \frac{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi \vee \psi \qquad \Gamma, \varphi \vdash^i_{\mathrm{N}} \rho \qquad \Gamma, \psi \vdash^i_{\mathrm{N}} \rho}{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \rho}\ \vee\mathbf{E}$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash^i_{\mathrm{N}} \psi}{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi \to \psi} \to \mathbf{I} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi}{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \psi} \to \mathbf{E}$$

$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi$ representa a notação *infix* para $\langle \Gamma, \varphi \rangle \in \vdash^i_{\mathrm{N}}$.

Constatamos que as regras do Cálculo Natural Intuicionista são precisamente as mesmas do Cálculo Natural Clássico, com excepção da regra $\neg$**E**. De facto, a eliminação da dupla negação implicitamente presente na regra $\neg$**E** clássica não é intuicionistiscamente derivável, como vimos no exemplo 2.2. Precisamos de uma regra "mais fraca" que elimine a negação, no sentido em que dela não possa seguir a eliminação da dupla negação. De acordo com a regra $\neg$**E** intuicionista, a existência de uma prova de φ juntamente com um método que transforme qualquer prova de φ numa contradição, garante-nos a existência de um método que transforme qualquer prova de φ numa prova de ψ (dado pela função vazia). A introdução da dupla negação, implicitamente presente na regra $\neg$**I** clássica, já permanece intuicionisticamente derivável, como também vimos no exemplo 2.2.

As restantes regras facilmente se verificam ser intuicionisticamente válidas por argumentos semelhantes aos expostos no referido exemplo.

O par $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}, \vdash^i_{\mathrm{N}} \rangle$ ainda é uma lógica estrutural e finitária.

Definição 2.4. Uma *prova*, ou *certificado*, *de* $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$ *a partir de* $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$, é uma sequência finita $c_1, \ldots, c_n$, tal que:

- $c_n = \Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi$;

- para todo $i = 1, \ldots, n$:
  - ou $c_i = \vdash^i_{\mathrm{N}} \gamma$, para algum $\gamma \in \Gamma$, caso que etiquetamos com **Ax**;
  - ou c_i é a conclusão de uma regra do cálculo natural cuja(s) premissa(s) ocorre(m) em $c_1, \ldots, c_{i-1}$, caso que etiquetamos com o nome da regra.

Se existe uma prova de φ a partir de Γ, denotamos esse facto por $\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi$.

Definição 2.5. O *conjunto das consequências sintácticas de* $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$, ou *fecho sintáctico de* Γ, que se denota por $\Gamma^{\vdash^i_{\mathrm{N}}}$, é o menor conjunto que contém Γ e é fechado para a relação $\vdash^i_{\mathrm{N}}$.

Teorema 2.6. $\varphi \in \Gamma^{\vdash^i_{\mathrm{N}}}$ *sse* $\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi$.

Demonstração.

$$\Gamma^{\vdash^i_{\mathrm{N}}} = \{\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}} : \langle \Gamma, \varphi \rangle \in \vdash^i_{\mathrm{N}}\} = \{\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}} : \Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi\}$$

□

Ou seja, uma fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$ é consequência sintáctica de um conjunto de fórmulas $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$ sse existe uma prova de φ a partir de Γ.

2.2.2 Cálculo de Hilbert

As regras do cálculo de Hilbert são introduzidas na próxima definição.

Definição 2.7. A relação $\vdash^i_{\mathrm{H}} \subseteq \mathscr{P}(\mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}) \times \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$ é definida recursivamente pelas seguintes regras:

$$\frac{}{\vdash^i_{\mathrm{H}} \varphi \to (\psi \to \varphi)}\ \mathbf{Ax1}$$

$$\frac{}{\vdash^i_{\mathrm{H}} \varphi \wedge \psi \to \varphi}\ \mathbf{Ax2} \qquad \frac{}{\vdash^i_{\mathrm{H}} \varphi \wedge \psi \to \psi}\ \mathbf{Ax3} \qquad \frac{}{\vdash^i_{\mathrm{H}} \varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))}\ \mathbf{Ax4}$$

$$\frac{}{\vdash^i_{\mathrm{H}} \varphi \to \varphi \vee \psi}\ \mathbf{Ax5} \qquad \frac{}{\vdash^i_{\mathrm{H}} \psi \to \varphi \vee \psi}\ \mathbf{Ax6} \qquad \frac{}{\vdash^i_{\mathrm{H}} \varphi \vee \psi \to ((\varphi \to \rho) \to ((\psi \to \rho) \to \rho))}\ \mathbf{Ax7}$$

$$\frac{}{\vdash^c_{\mathrm{H}} (\varphi \to (\psi \to \rho)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \rho))}\ \mathbf{Ax8}$$

$$\frac{}{\vdash^i_{\mathrm{H}} (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)}\ \mathbf{Ax9} \qquad \frac{}{\vdash^i_{\mathrm{H}} (\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)}\ \mathbf{Ax10}$$

$$\frac{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} \varphi \qquad \Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} \varphi \to \psi}{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} \psi}\ \mathbf{MP}$$

$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} \varphi$ representa a notação *infix* para $\langle \Gamma, \varphi \rangle \in \vdash^i_{\mathrm{H}}$.

Constatamos que as regras do Cálculo de Hilbert Intuicionista correspondem à tradução integral das regras do Cálculo Natural Intuicionista, com os casos especiais dos axiomas **Ax1** e **Ax8** conforme as explicações dadas aquando do Cálculo de Hilbert Clássico.

Note-se que, também para o Cálculo de Hilbert, as abordagens clássica e intuicionista diferem apenas no axioma da eliminação da negação.

O par $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}, \vdash^i_{\mathrm{H}} \rangle$ ainda é uma lógica estrutural e finitária.

Definição 2.8. Uma *prova à Hilbert*, ou *certificado à Hilbert, de* $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$ *a partir de* $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$, é uma sequência finita $c_1, \ldots, c_n$ de pares de conjuntos de fórmulas e fórmulas tal que:

- $c_n = \Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} \varphi$;
- para todo $i = 1, \ldots, n$:
  - ou $c_i = \Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} \gamma$, para algum $\gamma \in \Gamma$, caso que etiquetamos com **Hip**;
  - ou c_i é o axioma j do Cálculo de Hilbert, $j = 1, \ldots, 10$, caso que etiquetamos com **Ax j**;
  - ou c_i é a conclusão da regra *modus ponens* do Cálculo de Hilbert cujas premissas c_j, c_k ocorrem em $c_1, \ldots, c_{i-1}$, caso que etiquetamos com **MP** j, k.

Se existe uma prova à Hilbert de φ a partir de Γ, denotamos esse facto por $\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} \varphi$.

Definição 2.9. O *conjunto das consequências à Hilbert de* $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$, *ou fecho à Hilbert de* Γ, que se denota por $\Gamma^{\vdash^i_{\mathrm{H}}}$, é o menor conjunto que contém Γ e é fechado para a relação $\vdash^i_{\mathrm{H}}$.

Teorema 2.10. $\varphi \in \Gamma^{\vdash^i_{\mathrm{H}}}$ *sse* $\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} \varphi$.

Demonstração.

$$\Gamma^{\vdash^i_{\mathrm{H}}} = \{\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}} : \langle \Gamma, \varphi \rangle \in \vdash^i_{\mathrm{H}}\} = \{\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}} : \Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} \varphi\}$$

□

Ou seja, $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$ é uma consequência à Hilbert de um conjunto de fórmulas $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$ sse existe uma prova à Hilbert de φ a partir de Γ.

2.2.3 Cálculo de Gentzen

As regras do Cálculo Natural para a Lógica Proposicional Intuicionista são introduzidas na próxima definição.

Definição 2.11. A relação $\vdash^i_{\mathrm{G}}$ entre multi-conjuntos finitos em $\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ é definida recursivamente pelas seguintes regras:

$$\frac{}{\Delta, \varphi \vdash^i_{\mathrm{G}} \varphi}\,\mathbf{Ax}$$

$$\frac{\Delta \vdash^i_{\mathrm{G}} \varphi \qquad \varphi, \Delta \vdash^i_{\mathrm{G}} \delta}{\Delta \vdash^i_{\mathrm{G}} \delta}\,\mathbf{Cut}$$

$$\frac{\Delta, \varphi \vdash^i_{\mathrm{G}}}{\Delta \vdash^i_{\mathrm{G}} \neg\varphi}\,\neg\mathbf{R} \qquad \frac{\Delta \vdash^i_{\mathrm{G}} \varphi}{\Delta, \neg\varphi \vdash^i_{\mathrm{G}}}\,\neg\mathbf{L}$$

$$\frac{\Delta \vdash^i_{\mathrm{G}} \varphi \qquad \Delta \vdash^i_{\mathrm{G}} \psi}{\Delta \vdash^i_{\mathrm{G}} \varphi \wedge \psi}\,\wedge\mathbf{R} \qquad \frac{\Delta, \varphi \vdash^i_{\mathrm{G}} \delta}{\Delta, \varphi \wedge \psi \vdash^i_{\mathrm{G}} \delta}\,\wedge\mathbf{L}\,\frac{\Delta, \psi \vdash^i_{\mathrm{G}} \delta}{\Delta, \varphi \wedge \psi \vdash^i_{\mathrm{G}} \delta}$$

$$\frac{\Delta \vdash^i_{\mathrm{G}} \varphi}{\Delta \vdash^i_{\mathrm{G}} \varphi \vee \psi}\,\vee\mathbf{R}\,\frac{\Delta \vdash^i_{\mathrm{G}} \psi}{\Delta \vdash^i_{\mathrm{G}} \varphi \vee \psi} \qquad \frac{\Delta, \varphi \vdash^i_{\mathrm{G}} \delta \qquad \Delta, \psi \vdash^i_{\mathrm{G}} \delta}{\Delta, \varphi \vee \psi \vdash^i_{\mathrm{N}} \delta}\,\vee\mathbf{L}$$

$$\frac{\Delta, \varphi \vdash^i_{\mathrm{G}} \psi}{\Delta \vdash^i_{\mathrm{G}} \varphi \to \psi}\,\to\mathbf{R} \qquad \frac{\Delta \vdash^i_{\mathrm{G}} \varphi \qquad \Delta, \psi \vdash^i_{\mathrm{G}} \delta}{\Delta, \varphi \to \psi \vdash^i_{\mathrm{G}} \delta}\,\to\mathbf{L}$$

$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{G}} \varphi$ representa a notação *infix* para $\langle \Gamma, \varphi \rangle \in \vdash^i_{\mathrm{G}}$.

Constatamos que as regras do Cálculo de Gentzen Intuicionista, com excepção das regras da negação, correspondem às respectivas regras do Cálculo de Gentzen Clássico restringindo os consequentes a um conjunto singular. É esta a interpretação intuicionista que esperávamos para um sequente, já que a disjunção das fórmulas presentes num consequente não explicita qual delas se verifica. Como tal, exigimos que qualquer sequente intuicionista contenha apenas uma fórmula proposicional no seu consequente.

Note-se que as regras $\neg\mathbf{R}$ e $\neg\mathbf{L}$ admitem sequentes com consequente dado pelo conjunto vazio. Este caso degenerado não viola a definição de multi-conjunto! A interpretação sintáctica a dar a um consequente vazio é a derivação de um absurdo a partir do respectivo antecedente. A interpretação semântica é a de que não existe nenhuma valoração que satisfaça o antecedente (*cf.* secções 3.2 e 4.2).

A restrição imposta aos consequentes, obriga-nos a acrescentar duas novas regras ao Cálculo de Gentzen Intuicionista, que nos permitem trocar entre consequentes vazios e singulares:

$$\frac{\Delta \vdash^i_{\mathrm{G}}}{\Delta \vdash^i_{\mathrm{G}} \psi}\,\textbf{Take Empty} \qquad \frac{\Delta, \psi, \neg\psi \vdash^i_{\mathrm{G}} \varphi}{\Delta, \psi, \neg\psi \vdash^i_{\mathrm{G}}}\,\textbf{Make Empty}$$

Uma última observação. A regra clássica *reductio ad absurdum* pode escrever-se na forma

$$\frac{\Delta, \neg\varphi \vdash^i_{\mathrm{G}}}{\Delta \vdash^i_{\mathrm{G}} \varphi}\,.$$

Esta regra possibilita a eliminação da dupla negação (intuicionisticamente não-derivável). A regra $\neg\mathbf{R}$, por outro lado, possibilita a introdução da dupla negação (intuicionisticamente derivável).

O par $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}, \vdash^i_{\mathrm{G}} \rangle$ ainda é uma lógica estrutural e finitária.

Definição 2.12. Uma *prova à Gentzen*, ou *certificado à Gentzen*, *de* $\delta \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$ *a partir de* $\Delta \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$, é uma sequência finita $c_1, \ldots, c_n$, tal que:

- $c_1 = \Delta \vdash^i_{\mathrm{G}} \delta$;
- para todo $i = 1, \ldots, n$:
  - ou existe $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ pertencente ao antecedente e ao consequente de c_i, caso que etiquetamos com **Ax**;
  - ou c_i é a conclusão de uma regra do Cálculo de Gentzen cuja(s) premissa(s) ocorre(m) em $c_{i+1}, \ldots, c_n$, caso que etiquetamos com o nome da regra.

Se existe uma prova de φ a partir de Γ, denotamos esse facto por $\Gamma \vdash^i_{\mathrm{G}} \varphi$.

Definição 2.13. O *conjunto das consequências à Gentzen de* $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$, ou *fecho à Gentzen de* Γ, que se denota por $\Gamma^{\vdash^i_{\mathrm{G}}}$, é o menor conjunto que contém Γ e é fechado para a relação $\vdash^i_{\mathrm{G}}$.

Teorema 2.14. *$\varphi \in \Gamma^{\vdash^i_{\mathrm{G}}}$ sse $\Gamma \vdash^i_{\mathrm{G}} \varphi$.*

Demonstração.

$$\Gamma^{\vdash^i_{\mathrm{G}}} = \{\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}} : \langle \Gamma, \varphi \rangle \in \vdash^i_{\mathrm{G}}\} = \{\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}} : \Gamma \vdash^i_{\mathrm{G}} \varphi\}$$

□

Ou seja, $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$ é uma consequência à Gentzen de um conjunto de fórmulas $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$ sse existe uma prova à Gentzen de φ a partir de Γ.

2.3 Metateorema da Dedução

Enunciamos novamente o Metateorema da Dedução, agora para o paradigma intuicionista. A demonstração coincide com o caso clássico, já que não envolve as regras para o conectivo negação em nenhum dos cálculos. Note-se também que no cálculo de Gentzen, o passo 3. do certificado que estabelece o MTMP exibe duas fórmulas no consequente, mas apelando à regra $\rightarrow$ **E** intuicionista tomaria a forma $\Gamma, \varphi \vdash^i_{\mathrm{G}} \varphi$.

Enunciamos o próximo teorema para uma relação de consequência intuicionista geral $\vdash^i$, sendo que deve ser entendido com qualquer dos índices $_{\mathrm{N}}$, $_{\mathrm{H}}$ e $_{\mathrm{G}}$.

Teorema 2.15 (Metateorma da Dedução - versão sintáctica intuicionista)**.**

$$\Gamma, \varphi \vdash^i \psi \text{ sse } \Gamma \vdash^i \varphi \rightarrow \psi$$

Demonstração.
Igual ao teorema 2.15, substituindo as relações $\vdash^c_{\mathrm{N}}$, $\vdash^c_{\mathrm{H}}$ e $\vdash^c_{\mathrm{G}}$, por $\vdash^i_{\mathrm{N}}$, $\vdash^i_{\mathrm{H}}$ e $\vdash^i_{\mathrm{G}}$, respectivamente.

□

Referências

[Dummett, 1977]

3 | Álgebras Booleanas

Afirmámos no início do capítulo 1 que uma lógica fica determinada à custa de uma linguagem e de um cálculo. Fica, de facto, formalmente definida. O interesse de uma lógica, porém, advirá das entidades onde a possamos interpretar, i.e., onde lhes possamos atribuir significado. Uma *semântica* para uma lógica dá-nos precisamente isso, uma estrutura algébrica cujas operações reflictam os conectivos lógicos. Na presença de uma semântica, passaremos a dizer que uma dada fórmula lógica é *verdadeira*, ou *falsa*, para essa mesma semântica. Uma introdução muito concisa e clara das diferenças entre sintaxe e semântica, bem como das duas tradições que iremos abordar, pode ser encontrada em [Girard et al., 1989, 1. Sense, Denotation and Semantics].

Podem co-existir várias semânticas para uma mesma Lógica, e portanto para diferentes lógicas. Neste capítulo vamos apresentar duas semânticas para a Lógica Proposicional Clássica: a Semântica Denotacional e a Semântica Algébrica. Como o título do presente capítulo sugere, as estruturas algébricas onde interpretaremos **LPC** serão as álgebras booleanas. Não precisaremos mais do que a definição e algumas propriedades elementares para dar início ao estudo semântico da Lógica Proposicional Clássica.

3.1 Definição

A noção de *álgebra booleana* corresponde à tradução algébrica da noção de reticulado booleano.

Definição 3.1. Uma *álgebra booleana* é uma álgebra

$$\mathcal{B} = \langle B, \neg^{\mathcal{B}}, \wedge^{\mathcal{B}}, \vee^{\mathcal{B}}, \top^{\mathcal{B}}, \perp^{\mathcal{B}} \rangle \quad ,$$

onde $\top^{\mathcal{B}}, \perp^{\mathcal{B}}$ são elementos distinguidos em B, $\neg^{\mathcal{B}}$ é uma operação unária em B, e $\wedge^{\mathcal{B}}, \vee^{\mathcal{B}}$ são operações binárias em B, que verificam as seguintes condições:

- Distributividade entre $\wedge^{\mathcal{B}}$ e $\vee^{\mathcal{B}}$ em B:

$$\forall x, y, z \in B \quad x \wedge^{\mathcal{B}} (y \vee^{\mathcal{B}} z) = (x \wedge^{\mathcal{B}} y) \vee^{\mathcal{B}} (x \wedge^{\mathcal{B}} z) \ ;$$

$$\forall x, y, z \in B \quad x \vee^{\mathcal{B}} (y \wedge^{\mathcal{B}} z) = (x \vee^{\mathcal{B}} y) \wedge^{\mathcal{B}} (x \vee^{\mathcal{B}} z) \ ;$$

- Existência de elementos topo e base em B:

$$\forall x \in B \quad x \wedge^{\mathcal{B}} \top^{\mathcal{B}} = x \ ;$$

$$\forall x \in B \quad x \vee^{\mathcal{B}} \perp^{\mathcal{B}} = x \ ;$$

- Existência de complementos em B:

$$\forall x \in B \quad x \wedge^{\mathcal{B}} (\neg^{\mathcal{B}} x) = \bot^{\mathcal{B}} \qquad , \qquad x \vee^{\mathcal{B}} (\neg^{\mathcal{B}} x) = \top^{\mathcal{B}} .$$

Denotamos por **BA** a classe de todas as álgebras booleanas. A entidade mais simples em **BA** é a álgebra booleana com um elemento, dita *álgebra booleana trivial.* A menor álgebra booleana não trivial (única, a menos de isomorfismo) contém dois elementos, e vamos denotá-la por **2**. Os únicos elementos em **2** são precisamente os elementos topo e base, tradicionalmente denotados por 1 e 0, e identificados com os valores de verdade, verdadeiro e falso. A próxima definição introduz **2** através dos valores que as suas operações assumem em $\{0, 1\}$.

Definição 3.2. A álgebra booleana de dois elementos é dada por

$$\mathbf{2} = \langle \{0,1\}, -^{\mathbf{2}}, \sqcap^{\mathbf{2}}, \sqcup^{\mathbf{2}}, 1^{\mathbf{2}}, 0^{\mathbf{2}} \rangle \ ,$$

onde as operações $-^{\mathbf{2}}$, $\sqcap^{\mathbf{2}}$ e $\sqcup^{\mathbf{2}}$ são dadas pelas seguintes tabelas de verdade:

	$-^{\mathbf{2}}$
0	1
1	0

$\sqcap^{\mathbf{2}}$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\sqcup^{\mathbf{2}}$	0	1
0	0	1
1	1	1

Exibimos três exemplos de álgebras booleanas.

Exemplo 3.3.

1. Seja X um conjunto. A álgebra

$$\mathcal{P} = \langle \mathscr{P}(X), \neg^{\mathcal{P}}, \wedge^{\mathcal{P}}, \vee^{\mathcal{P}}, \top^{\mathcal{P}}, \bot^{\mathcal{P}} \rangle \ ,$$

onde:

- $\neg^{\mathcal{P}} A = -A = X \backslash A$;
- $A \wedge^{\mathcal{P}} B = A \cap B$;
- $a \vee^{\mathcal{P}} b = A \cup B$;
- $\top^{\mathcal{P}} = X$;
- $\bot^{\mathcal{P}} = \varnothing$;

é uma álgebra booleana.

2. Seja X um conjunto. Considere-se o conjunto de todos os subconjuntos finitos ou co-finitos de X, dado por $F = \{Y \subseteq X : Y \text{ é finito ou } -Y \text{ é finito}\}$. A álgebra

$$\mathcal{F} = \langle F, \neg^{\mathcal{F}}, \wedge^{\mathcal{F}}, \vee^{\mathcal{F}}, \top^{\mathcal{F}}, \bot^{\mathcal{F}} \rangle \ ,$$

onde as operações são definidas como em 1., é uma álgebra booleana.

3. Seja $m \in \mathbb{N}$. Considere-se o conjunto de todos os divisores positivos de m, dado por $D = \{n \in \mathbb{N} : n | m\}$. A álgebra

$$\mathcal{D} = \langle D, \neg^{\mathcal{D}}, \wedge^{\mathcal{D}}, \vee^{\mathcal{D}}, \top^{\mathcal{D}}, \bot^{\mathcal{D}} \rangle \ ,$$

onde:

- $\neg^{\mathcal{D}} a = m/a$;
- $a \wedge^{\mathcal{D}} b = \mathrm{mdc}(a,b)$;
- $a \vee^{\mathcal{D}} b = \mathrm{mmc}(a,b)$;
- $\top^{\mathcal{D}} = m$;
- $\perp^{\mathcal{D}} = 1$;

é uma álgebra booleana.

Terminamos com algumas propriedades comuns a todas as álgebras boolenas. A demonstração refere-se apenas às desigualdades não estabelecidas no caso pseudo-booleano (*cf.* lema 4.3).

Lema 3.4. *Seja* $\mathcal{B} \in \mathbf{BA}$. *Então, verificam-se as seguintes condições:*

(i) Complementos de $\perp^{\mathcal{B}}$ *e* $\top^{\mathcal{B}}$*:*

$$\neg^{\mathcal{B}} \perp^{\mathcal{B}} = \top^{\mathcal{B}} \qquad , \qquad \neg^{\mathcal{B}} \top^{\mathcal{B}} = \perp^{\mathcal{B}} ;$$

(ii) Idempotência de $\neg^{\mathcal{B}}$*:*

$$\forall x \in B \quad \neg^{\mathcal{B}} \neg^{\mathcal{B}} x = x ;$$

(iii) Leis de Morgan para $\wedge^{\mathcal{B}}$ *e* $\vee^{\mathcal{B}}$*:*

$$\forall x, y \in L \quad \neg^{\mathcal{B}}(x \wedge^{\mathcal{B}} y) = \neg^{\mathcal{B}} x \vee^{\mathcal{B}} \neg^{\mathcal{B}} y ;$$

$$\forall x, y \in L \quad \neg^{\mathcal{B}}(x \vee^{\mathcal{B}} y) = \neg^{\mathcal{B}} x \wedge^{\mathcal{B}} \neg^{\mathcal{B}} y .$$

Demonstração.
[Rasiowa and Sikorski, 1963, II 1.3 (5) e (8), pp. 69]

□

3.2 Semânticas para LPC

Pretendemos nesta secção averiguar a veracidade de cada fórmula proposicional clássica. É claro que a veracidade de uma dada fórmula vai depender da entidade onde a interpretarmos. Queremos ainda averiguar quando é que a veracidade de um conjunto de fórmulas implica a veracidade de outras fórmulas. Por outras palavras, quando é que uma fórmula é *consequência semântica* de um conjunto de fórmulas.

Nesta secção apresentamos duas semânticas para a Lógica Proposicional Clássica. A semântica Denotacional reflecte a interpretação dicotómica de verdadeiro e falso. A Semântica Algébrica generaliza a primeira semântica de um modo óbvio. Provaremos ainda a equivalência entre ambas as semânticas.

3.2.1 Semântica Denotacional

A semântica denotacional para a Lógica Proposicional Clássica é a álgebra booleana de dois elementos **2**, cujo universo $\{0, 1\}$ é identificado com os valores de verdade.

A interpretação das fórmulas proposicionais na álgebra **2** é feita através da noção de valoração.

Definição 3.5. Uma *valoração em* $\mathbf{2}$ é uma aplicação $v : \Pi_{\mathbf{LPC}} \to \{0,1\}$. A extensão de uma valoração v a $\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$, que se denota por $[\![.]\!]^{\mathbf{2}}_v$, é definida recursivamente por:

$[\![\pi]\!]^{\mathbf{2}}_v = v(\pi)$, para $\pi \in \Pi_{\mathbf{LPC}}$;

$[\![\neg\varphi]\!]^{\mathbf{2}}_v = -^{\mathbf{2}}[\![\varphi]\!]^{\mathbf{2}}_v$;

$[\![\varphi \wedge \psi]\!]^{\mathbf{2}}_v = [\![\varphi]\!]^{\mathbf{2}}_v \sqcap^{\mathbf{2}} [\![\psi]\!]^{\mathbf{2}}_v$;

$[\![\varphi \vee \psi]\!]^{\mathbf{2}}_v = [\![\varphi]\!]^{\mathbf{2}}_v \sqcup^{\mathbf{2}} [\![\psi]\!]^{\mathbf{2}}_v$;

$[\![\varphi \to \psi]\!]^{\mathbf{2}}_v = -^{\mathbf{2}}[\![\varphi]\!]^{\mathbf{2}}_v \sqcup^{\mathbf{2}} [\![\psi]\!]^{\mathbf{2}}_v$.

Note-se que a extensão às fórmulas proposicionais de qualquer valoração está à partida garantida pela definição de álgebra livre.

Uma fórmula proposicional pode ser verdadeira e falsa segundo valorações diferentes. Distinguimos os seguintes casos.

Definição 3.6. Uma fórmula proposicional $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ diz-se:

- *válida*, se $[\![\varphi]\!]^{\mathbf{2}}_v = 1$ para toda a valoração v em $\mathbf{2}$;
- *possível*, se $[\![\varphi]\!]^{\mathbf{2}}_v = 1$ para alguma valoração v em $\mathbf{2}$;
- *contraditória*, se $[\![\varphi]\!]^{\mathbf{2}}_v = 0$ para toda a valoração v em $\mathbf{2}$;
- *refutável*, se $[\![\varphi]\!]^{\mathbf{2}}_v = 0$ para alguma valoração v em $\mathbf{2}$.

Um conjunto de fórmulas $\Gamma \subseteq \mathscr{P}(\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}})$ diz-se:

- *válido*, se $[\![\gamma]\!]^{\mathbf{2}}_v = 1$ para toda a valoração v em $\mathbf{2}$ e toda a fórmula $\gamma \in \Gamma$;
- *possível*, se $[\![\gamma]\!]^{\mathbf{2}}_v = 1$ para alguma valoração v em $\mathbf{2}$ e toda a fórmula $\gamma \in \Gamma$;
- *contraditório*, se $[\![\gamma]\!]^{\mathbf{2}}_v = 0$ para toda a valoração v em $\mathbf{2}$ e alguma fórmula $\gamma \in \Gamma$;
- *refutável*, se $[\![\varphi]\!]^{\mathbf{2}}_v = 0$ para alguma valoração v em $\mathbf{2}$ e alguma fórmula $\gamma \in \Gamma$.

É usual escrevermos $[\![\Gamma]\!]^{\mathbf{2}}_v = 1$ quando $[\![\gamma]\!]^{\mathbf{2}}_v = 1$, para todo $\gamma \in \Gamma$.

As valorações que satisfazem uma dada fórmula também são distinguidas.

Definição 3.7. Uma valoração v diz-se *modelo de* $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ *em* $\mathbf{2}$, se $[\![\varphi]\!]^{\mathbf{2}}_v = 1$; e diz-se *modelo de* $\Gamma \subseteq \mathscr{P}(\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}})$ *em* $\mathbf{2}$, se $[\![\Gamma]\!]^{\mathbf{2}}_v = 1$.

A próxima definição formaliza a noção de consequência semântica referida na introdução desta secção.

Definição 3.8. A *relação de consequência semântica em* $\mathbf{2}$, $\vDash_{\mathbf{2}} \subseteq \mathscr{P}(\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}) \times \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$, é definida por:

$$\Gamma \vDash \varphi \text{ sse todo o modelo de } \Gamma \text{ em } \mathbf{2} \text{ é modelo de } \varphi \text{ em } \mathbf{2}.$$

$\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \varphi$ representa a notação *infix* para $\langle \Gamma, \varphi \rangle \in \vDash_{\mathbf{2}}$.

São usuais os seguintes relaxamentos de notação: $\vDash_{\mathbf{2}} \varphi$ em vez de $\varnothing \vDash_{\mathbf{2}} \varphi$; e $\Gamma, \psi \vDash_{\mathbf{2}} \varphi$ em vez de $\Gamma \cup \{\psi\} \vDash_{\mathbf{2}} \varphi$.

Por fim, vamos introduzir o conjunto de todas as fórmulas que são consequência semântica em $\mathbf{2}$ de um dado conjunto Γ.

Definição 3.9. O *conjunto das consequências semânticas de* $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ *em* **2**, ou *fecho semântico de* Γ *em* **2**, que se denota por $\Gamma^{\models_{\mathbf{2}}}$, é o menor conjunto que contém Γ e é fechado para a relação $\models_{\mathbf{2}}$.

Verifica-se que a relação $\models_{\mathbf{2}}$ satisfaz as seguintes propriedades (*cf.* definição A.3):

(i) **Extensividade:** se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \models_{\mathbf{2}} \varphi$;

(ii) **Monotonia:** se $\Gamma_1 \models_{\mathbf{2}} \varphi$ e $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, então $\Gamma_2 \models_{\mathbf{2}} \varphi$;

(iii) **Corte:** se $\Delta \models_{\mathbf{2}} \varphi$ e $\forall \delta \in \Delta\ \ \Gamma \models_{\mathbf{2}} \delta$, então $\Gamma \models_{\mathbf{2}} \varphi$;

(iv) **Estruturalidade:** se $\Gamma \models_{\mathbf{2}} \varphi$ e $s : \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}} \to \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ é uma substituição, então $s(\Gamma) \models_{\mathbf{2}} s(\varphi)$;

(v) **Finitário:** se $\Gamma \models_{\mathbf{2}} \varphi$, então $\Gamma' \models_{\mathbf{2}} \varphi$, para algum subconjunto finito $\Gamma' \subseteq_f \Gamma$.

Por outras palavras, o par $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}, \models_{\mathbf{2}} \rangle$ é uma lógica estrutural e finitária.

3.2.2 Semântica Algébrica

A semântica algébrica para a Lógica Proposicional Clássica é a classe das álgebras booleanas **BA**.

Todos os conceitos introduzidos na secção anterior se generalizam trivialmente se considerarmos uma álgebra booleana arbitrária $\mathcal{B}$ em vez da álgebra booleana **2**. No resto desta secção, supomos fixa uma álgebra booleana,

$$\mathcal{B} = \langle B, -^{\mathcal{B}}, \sqcap^{\mathcal{B}}, \sqcup^{\mathcal{B}}, \top^{\mathcal{B}}, \top^{\mathcal{B}} \rangle \ ,$$

sobre a assinatura proposicional $\Sigma_{\mathbf{LPC}}$.

Enunciamos de seguida as principais definições vistas na secção anterior, agora para a álgebra booleana $\mathcal{B}$.

Definição 3.10. Uma *valoração em* $\mathcal{B}$ é uma aplicação $v : \Pi_{\mathbf{LPC}} \to \mathcal{B}$. A extensão de uma valoração v a $\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$, que se denota por $[\![.]\!]_v^{\mathcal{B}}$, é definida recursivamente por:

$$[\![\pi]\!]_v^{\mathcal{B}} = v(\pi) \text{ , para } \pi \in \Pi_{\mathbf{LPC}} \ ;$$

$$[\![\neg\varphi]\!]_v^{\mathcal{B}} = -^{\mathcal{B}}[\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{B}} \ ;$$

$$[\![\varphi \wedge \psi]\!]_v^{\mathcal{B}} = [\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{B}} \sqcap^{\mathcal{B}} [\![\psi]\!]_v^{\mathcal{B}} \ ;$$

$$[\![\varphi \vee \psi]\!]_v^{\mathcal{B}} = [\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{B}} \sqcup^{\mathcal{B}} [\![\psi]\!]_v^{\mathcal{B}} \ ;$$

$$[\![\varphi \to \psi]\!]_v^{\mathbf{BA}} = -^{\mathbf{BA}}[\![\varphi]\!]_v^{\mathbf{BA}} \sqcup^{\mathbf{BA}} [\![\psi]\!]_v^{\mathbf{BA}} \ .$$

Definição 3.11. Uma fórmula proposicional $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ diz-se:

- *válida*, se $[\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{B}} = \top^{\mathcal{B}}$ para toda a valoração v em $\mathcal{B}$;
- *possível*, se $[\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{B}} = \top^{\mathcal{B}}$ para alguma valoração v em $\mathcal{B}$;
- *contraditória*, se $[\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{B}} = \bot^{\mathcal{B}}$ para toda a valoração v em $\mathcal{B}$;
- *refutável*, se $[\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{B}} = \bot^{\mathcal{B}}$ para alguma valoração v em $\mathcal{B}$.

Um conjunto de fórmulas $\Gamma \subseteq \mathscr{P}(\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}})$ diz-se:

- *válido*, se $[\![\gamma]\!]_v^{\mathcal{B}} = \top^{\mathcal{B}}$ para toda a valoração v em $\mathcal{B}$ e toda a fórmula $\gamma \in \Gamma$;
- *possível*, se $[\![\gamma]\!]_v^{\mathcal{B}} = \top^{\mathcal{B}}$ para alguma valoração v em $\mathcal{B}$ e toda a fórmula $\gamma \in \Gamma$;
- *contraditório*, se $[\![\gamma]\!]_v^{\mathcal{B}} = \bot^{\mathcal{B}}$ para toda a valoração v em $\mathcal{B}$ e alguma fórmula $\gamma \in \Gamma$;
- *refutável*, se $[\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{B}} = \bot^{\mathcal{B}}$ para alguma valoração v em $\mathcal{B}$ e alguma fórmula $\gamma \in \Gamma$.

Definição 3.12. Uma valoração v diz-se *modelo de* $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ *em* $\mathcal{B}$, se $[\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{B}} = \top^{\mathcal{B}}$; e diz-se *modelo de* $\Gamma \subseteq \mathscr{P}(\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}})$ *em* $\mathcal{B}$, se $[\![\Gamma]\!]_v^{\mathcal{B}} = \top^{\mathcal{B}}$.

Definição 3.13. A *relação de consequência semântica em* $\mathcal{B}$, $\vDash_{\mathcal{B}} \subseteq \mathscr{P}(\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}) \times \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$, é definida por:

$$\Gamma \vDash_{\mathcal{B}} \varphi \text{ sse todo o modelo de } \Gamma \text{ em } \mathcal{B} \text{ é modelo de } \varphi \text{ em } \mathcal{B}.$$

$\Gamma \vDash_{\mathcal{B}} \varphi$ representa a notação *infix* para $\langle \Gamma, \varphi \rangle \in \vDash_{\mathcal{B}}$.

Introduzimos agora a noção de consequência semântica para a classe das álgebras booleanas **BA**.

Definição 3.14. A *relação de consequência semântica em* **BA**, $\vDash_{\mathbf{BA}} \subseteq \mathscr{P}(\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}) \times \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$, é definida por:

$$\Gamma \vDash_{\mathbf{BA}} \varphi \text{ sse } \Gamma \vDash_{\mathcal{B}} \varphi \text{ para toda a álgebra booleana } \mathcal{B} \in \mathbf{BA}.$$

$\Gamma \vDash_{\mathbf{BA}} \varphi$ representa a notação *infix* para $\langle \Gamma, \varphi \rangle \in \vDash_{\mathbf{BA}}$.

Por fim, vamos introduzir o conjunto de todas as fórmulas que são consequência semântica em **BA** de um dado conjunto Γ.

Definição 3.15. O *conjunto das consequências semânticas de* $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ *em* **BA**, ou *fecho semântico de* Γ *em* **BA**, que se denota por $\Gamma^{\vDash_{\mathbf{BA}}}$, é o menor conjunto que contém Γ e é fechado para a relação $\vDash_{\mathbf{BA}}$.

Verifica-se que a relação $\vDash_{\mathbf{BA}}$ satisfaz as seguintes propriedades (*cf.* definição A.3):

(i) **Extensividade:** se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vDash_{\mathbf{BA}} \varphi$;

(ii) **Monotonia:** se $\Gamma_1 \vDash_{\mathbf{BA}} \varphi$ e $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, então $\Gamma_2 \vDash_{\mathbf{BA}} \varphi$;

(iii) **Corte:** se $\Delta \vDash_{\mathbf{BA}} \varphi$ e $\forall \delta \in \Delta\ \ \Gamma \vDash_{\mathbf{BA}} \delta$, então $\Gamma \vDash_{\mathbf{BA}} \varphi$;

(iv) **Estruturalidade:** se $\Gamma \vDash_{\mathbf{BA}} \varphi$ e $s : \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}} \to \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ é uma substituição, então $s(\Gamma) \vDash_{\mathbf{BA}} s(\varphi)$;

(v) **Finitário:** se $\Gamma \vDash_{\mathbf{BA}} \varphi$, então $\Gamma' \vDash_{\mathbf{BA}} \varphi$, para algum subconjunto finito $\Gamma' \subseteq_f \Gamma$.

Por outras palavras, o par $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}, \vDash_{\mathbf{BA}} \rangle$ é uma lógica estrutural e finitária.

3.2.3 $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}, \vDash_{\mathbf{2}} \rangle = \langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}, \vDash_{\mathbf{BA}} \rangle$

Nesta secção provamos a equivalência entre as semânticas elementar e algébrica para a Lógica Proposicional Clássica. Vamos apelar a um lema auxiliar sobre álgebras booleanas.

Lema 3.16. *Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra booleana. Se $x, y \in \mathcal{B}$ tal que $x \neq y$, então existe um homomorfismo $h : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$ tal que $h(x) \neq h(y)$.*

Demonstração.
Sabemos que se $x \not\leq y$, então existe um um filtro primo $P \subseteq B$ tal que $x \in P$ e $y \notin P$ [Rasiowa and Sikorski, 1963, I 9.2, p. 49]. Sabemos ainda que numa álgebra booleana os ideias primos e os ideais maximais coincidem [Rasiowa and Sikorski, 1963, II 5.2, p. 79]. Considere-se então a função $h : B \to \{0, 1\}$ dada por:

$$h(x) = \begin{cases} 1 & , \text{se } x \in P \\ 0 & , \text{se } x \notin P \end{cases} .$$

É imediato que h preserva as operações $\cap^{\mathbf{2}}$ e $\cup^{\mathbf{2}}$. Além disso, como P é maximal, é fácil ver que h também preserva $-^{\mathbf{2}}$, e portanto h é de facto um homomorfismo. Logo, h é um homomorfismo tal que $h(x) \neq h(y)$.

□

Teorema 3.17.

$$\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vDash_{\mathbf{BA}} \varphi \tag{3.1}$$

Demonstração.
$\Leftarrow$:
Imediato.

$\Rightarrow$:
A prova segue por contra-recíproco. Suponhamos que $\Gamma \nvDash_{\mathbf{BA}} \varphi$. Sejam $\mathcal{B} \in \mathbf{BA}$ uma álgebra booleana e $v : \Pi_{\mathbf{LPC}} \to \mathcal{B}$ uma valoração em $\mathcal{B}$ que testemunham este facto, i.e., tal que $v(\gamma) = \top^{\mathcal{B}}$, para todo $\gamma \in \Gamma$, e $v(\varphi) \neq \top^{\mathcal{B}}$. Segue pelo lema 3.16 que existe um homomorfismo $h : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$ tal que:

$$(h \circ v)(x) = h(v(x)) = \begin{cases} \top^{\mathbf{2}} & , \text{se } v(x) = \top^{\mathcal{B}} \\ \bot^{\mathbf{2}} & , \text{se } v(x) \neq \top^{\mathcal{B}} \end{cases}$$

Donde, $(h \circ v)(\gamma) = \top^{\mathcal{B}}$, para todo $\gamma \in \Gamma$, e $(h \circ v)(\varphi) \neq \top^{\mathcal{B}}$. Logo, $h \circ v : \Pi_{\mathbf{LPC}} \to \mathbf{2}$ testemunha que $\Gamma \nvDash_{\mathbf{2}} \varphi$.

□

Concluímos que as lógicas $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}, \vDash_{\mathbf{2}} \rangle$ e $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}, \vDash_{\mathbf{BA}} \rangle$ apresentam a mesma Lógica. Como veremos, será demarcante da Lógica Proposicional Intuicionista que a classe das álgebras booleanas, **BA**, possua uma álgebra finita, **2**, capaz de garantir a completude de qualquer cálculo para **LPC**.

3.3 Metateorema da Dedução

Por fim, exibimos uma prova semântica e clássica do Metateorema da Dedução.

Teorema 3.18 (Metateorma da Dedução - versão semântica clássica)**.**

$$\Gamma, \varphi \vDash_{\mathbf{BA}} \psi \textit{ sse } \Gamma \vDash_{\mathbf{BA}} \varphi \to \psi$$

Demonstração.

Suponhamos que $\Gamma, \varphi \vDash_{\mathbf{BA}} \psi$. Seja $\mathcal{B} \in \mathbf{BA}$. Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPC}} \to B$ uma valoração em $\mathcal{B}$ modelo de Γ. Temos dois casos a considerar:

- v é modelo de φ, donde por hipótese v é modelo de ψ, e, como $[\![\varphi \to \psi]\!]_v^{\mathcal{B}} = -^{\mathcal{B}}[\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{B}} \sqcup^{\mathcal{B}} [\![\psi]\!]_v^{\mathcal{B}} = \top^{\mathcal{B}}$ sse $[\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{B}} = \bot^{\mathcal{B}}$ ou $[\![\psi]\!]_v^{\mathcal{B}} = \top^{\mathcal{B}}$, segue que v é modelo de $\varphi \to \psi$;

- v não é modelo de φ, donde, como $[\![\varphi \to \psi]\!]_v^{\mathcal{B}} = -^{\mathcal{B}}[\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{B}} \sqcup^{\mathcal{B}} [\![\psi]\!]_v^{\mathcal{B}} = 1$ sse $[\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{B}} = \bot^{\mathcal{B}}$ ou $[\![\psi]\!]_v^{\mathcal{B}} = \top^{\mathcal{B}}$, segue que v é modelo de $\varphi \to \psi$.

Em qualquer dos casos, temos $\Gamma \vDash_{\mathcal{B}} \varphi \to \psi$. Concluímos que $\Gamma \vDash_{\mathbf{BA}} \varphi \to \psi$.

Reciprocamente, suponhamos que $\Gamma \vDash_{\mathbf{BA}} \varphi \to \psi$. Seja $\mathcal{B} \in \mathbf{BA}$. Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPC}} \to B$ uma valoração em $\mathcal{B}$ modelo de Γ, φ. Segue por hipótese que v é modelo da fórmula $\varphi \to \psi$, i.e., $[\![\varphi \to \psi]\!]_v^{\mathcal{B}} = \top^{\mathcal{B}}$. Como $[\![\varphi \to \psi]\!]_v^{\mathcal{B}} = -^{\mathcal{B}}[\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{B}} \sqcup^{\mathcal{B}} [\![\psi]\!]_v^{\mathcal{B}} = \top^{\mathcal{B}}$ sse $[\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{B}} = \bot^{\mathcal{B}}$ ou $[\![\psi]\!]_v^{\mathcal{B}} = \top^{\mathcal{B}}$, e v é modelo de φ, i.e., $[\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{B}} = \top^{\mathcal{B}}$, segue que $[\![\psi]\!]_v^{\mathcal{B}} = \top^{\mathcal{B}}$, i.e., v é modelo de ψ. Logo, $\Gamma, \varphi \vDash_{\mathcal{B}} \psi$. Concluímos que $\Gamma, \varphi \vDash_{\mathbf{BA}} \psi$.

$\square$

Atente-se no princípio do terceiro excluído na demonstração do MTD.

Referências

[Rasiowa and Sikorski, 1963]
[Sernadas and Sernadas, 2003]

4 Álgebras de Heyting

Neste capítulo estudamos a contra-parte algébrica da Lógica Proposicional Intuicionista: as álgebras pseudo-booleanas, ou de Heyting. Como veremos, as diferenças entre os paradigmas clássico e intuicionista sobressaem mais ao nível semântico do que sintáctico.

Vamos novamente apresentar duas semânticas para a Lógica Proposicional Intuicionista: a Semântica Algébrica e a Semântica de Kripke. A primeira será dada pela classe das álgebras de Heyting. Mais uma vez, bastar-nos-á a definição e algumas propriedades destas estruturas algébricas. Já a segunda distinguir-se-á de todas as semânticas anteriormente consideradas. Pretendeu-se, porém, aproximar o seu tratamento o mais possível das demais semânticas.

4.1 Definição

A noção de *álgebra de Heyting*, ou *álgebra pseudo-booleana*, corresponde à tradução algébrica da noção de reticulado de Heyting.

Definição 4.1. Uma *álgebra Heyting*, ou *álgebra pseudo-booleana*, é uma álgebra

$$\mathcal{H} = \langle H, \to^{\mathcal{H}}, \wedge^{\mathcal{H}}, \vee^{\mathcal{H}}, \top^{\mathcal{H}}, \bot^{\mathcal{H}} \rangle \quad ,$$

onde $\top^{\mathcal{H}}, \bot^{\mathcal{H}}$ são elementos distinguidos em H e $\to^{\mathcal{H}}$, $\wedge^{\mathcal{H}}, \vee^{\mathcal{H}}$ são operações binárias em H, que verificam as seguintes condições:

- Distributividade entre $\wedge^{\mathcal{H}}$ e $\vee^{\mathcal{H}}$ em H:

$$\forall x, y, z \in H \quad x \wedge^{\mathcal{H}} (y \vee^{\mathcal{H}} z) = (x \wedge^{\mathcal{H}} y) \vee^{\mathcal{H}} (x \wedge^{\mathcal{H}} z) \; ;$$

$$\forall x, y, z \in H \quad x \vee^{\mathcal{H}} (y \wedge^{\mathcal{H}} z) = (x \vee^{\mathcal{H}} y) \wedge^{\mathcal{H}} (x \vee^{\mathcal{H}} z) \; ;$$

- Existência de elementos topo e base em H:

$$\forall x \in H \quad x \wedge^{\mathcal{H}} \top^{\mathcal{H}} = x \; ;$$

$$\forall x \in H \quad x \vee^{\mathcal{H}} \bot^{\mathcal{H}} = x \; ;$$

- Existência de pseudo-complementos relativos em H:

$$\forall x, y \in H \; \exists x \to y \in H \quad x \to y = \max\{z : x \wedge^{\mathcal{H}} z \leq_{\mathcal{H}} y\} \; ,$$

  onde $x \leq_{\mathcal{H}} y \Leftrightarrow x \wedge^{\mathcal{H}} y = x$.

Denotamos por **HA** a classe de todas as álgebras de Heyting.

Exibimos igualmente três exemplos de álgebras de Heyting.

Exemplo 4.2.

1. Qualquer álgebra booleana

$$\mathcal{B} = \langle B, \neg^{\mathcal{B}}, \wedge^{\mathcal{B}}, \vee^{\mathcal{B}}, \top^{\mathcal{B}}, \bot^{\mathcal{B}} \rangle$$

   (*cf.* definição 3.1), com os pseudo-complementos relativos dados por

$$a \to^{\mathcal{B}} b = \neg^{\mathcal{B}} a \vee^{\mathcal{B}} b \ ,$$

   é uma álgebra de Heyting.

2. Seja $X = \{0, 1/2, 1\}$ totalmente ordenado pela ordem usual. A álgebra

$$\mathcal{X} = \langle X, \to^{\mathcal{X}}, \wedge^{\mathcal{X}}, \vee^{\mathcal{X}}, \top^{\mathcal{X}}, \bot^{\mathcal{X}} \rangle \ ,$$

   onde as operações $\wedge^{\mathcal{X}}$ e $\vee^{\mathcal{X}}$ são induzidas da forma natural pela relação de ordem $\leq$, e:

   - $\top^{\mathcal{X}} = 1$;
   - $\bot^{\mathcal{X}} = 0$;

   e com os pseudo-complementos relativos dados por

$$a \to^{\mathcal{X}} b = \begin{cases} b & , \text{ se } a > b \\ 1 & , \text{ se } a \leq b \end{cases} \ ,$$

   é uma álgebra de Heyting.

3. Considere-se o conjunto de todos os subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$, dado por $O = \{]x, y[: x, y \in \mathbb{R}\}$. A álgebra

$$\mathcal{O} = \langle O, \to^{\mathcal{O}}, \wedge^{\mathcal{O}}, \vee^{\mathcal{O}}, \top^{\mathcal{O}}, \bot^{\mathcal{O}} \rangle \ ,$$

   onde:

   - $A \wedge^{\mathcal{O}} B = A \cap B$;
   - $A \vee^{\mathcal{O}} B = A \cup B$;
   - $\top^{\mathcal{O}} = \mathbb{R}$;
   - $\bot^{\mathcal{O}} = \varnothing$;

   e com os pseudo-complementos relativos dados por

$$A \to^{\mathcal{O}} B = \mathrm{Int}(-A \cup B) \ ,$$

   é uma álgebra de Heyting.

Terminamos com as propriedades vistas para as álgebras boolenas, agora enfraquecidas para as álgebras pseudo-booleanas.

Lema 4.3. *Seja $\mathcal{H}$ um álgebra de Heyting. Então, verificam-se as seguintes condições:*

(i) Complementos de $\bot^{\mathcal{H}}$ *e* $\top^{\mathcal{H}}$*:*

$$\neg^{\mathcal{H}}\bot^{\mathcal{H}} = \top^{\mathcal{H}} \qquad , \qquad \neg^{\mathcal{H}}\top^{\mathcal{H}} = \bot^{\mathcal{H}} \; ;$$

(ii)

$$\forall x \in H \quad \neg^{\mathcal{H}}\neg^{\mathcal{H}}x \geq_{\mathcal{H}} x \; ;$$

(iii) Lei de Morgan para $\vee^{\mathcal{H}}$*:*

$$\forall x, y \in L \quad \neg^{\mathcal{B}}(x \wedge^{\mathcal{B}} y) \geq_{\mathcal{H}} \neg^{\mathcal{B}}x \vee^{\mathcal{B}} \neg^{\mathcal{B}}y \; ;$$

$$\forall x, y \in L \quad \neg^{\mathcal{H}}(x \vee^{\mathcal{H}} y) = \neg^{\mathcal{H}}x \wedge^{\mathcal{H}} \neg^{\mathcal{H}}y \; .$$

Demonstração.
[Rasiowa and Sikorski, 1963, I 12.3 (26),(29),(31) e (32), pp. 61-62]

□

4.2 Semânticas para LPI

Pretendemos novamente averiguar a veracidade de cada fórmula proposicional, agora sob um ponto de vista intuicionista. Será a semântica a ditar as principais diferenças entre a Lógica Intuicionista e a Lógica Clássica.

Nesta secção introduzimos duas semânticas para a Lógica Proposicional Intuicionista.

4.2.1 Semântica Algébrica

A semântica algébrica para a Lógica Proposicional Intuicionista é a classe das álgebras de Heyting **HA**.

No resto desta secção, supomos fixa uma álgebra de Heyting,

$$\mathcal{H} = \langle H, \rightarrow^{\mathcal{H}}, \sqcap^{\mathcal{H}}, \sqcup^{\mathcal{H}}, \top^{\mathcal{H}}, \bot^{\mathcal{H}} \rangle \; ,$$

sobre a assinatura proposicional $\Sigma_{\mathbf{LPI}}$.

Enunciamos de seguida as definições vistas no caso clássico para uma álgebra booleana arbitrária $\mathcal{B}$, agora para a álgebra de Heyting $\mathcal{H}$.

Definição 4.4. Uma *valoração em* $\mathcal{H}$ é uma aplicação $v : \Pi_{\mathbf{LPI}} \rightarrow \mathcal{H}$. A extensão de uma valoração v a $\mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$, que se denota por $[\![.]\!]_v^{\mathcal{H}}$, é definida recursivamente por:

$[\![\pi]\!]_v^{\mathcal{H}} = v(\pi)$, para $\pi \in \Pi_{\mathbf{LPI}}$;

$[\![\neg\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}} = -^{\mathcal{H}}[\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}} = [\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}} \rightarrow^{\mathcal{H}} \bot^{\mathcal{H}}$;

$[\![\varphi \wedge \psi]\!]_v^{\mathcal{H}} = [\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}} \sqcap^{\mathcal{H}} [\![\psi]\!]_v^{\mathcal{H}}$;

$[\![\varphi \vee \psi]\!]_v^{\mathcal{H}} = [\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}} \sqcup^{\mathcal{H}} [\![\psi]\!]_v^{\mathcal{H}}$;

$[\![\varphi \rightarrow \psi]\!]_v^{\mathcal{H}} = [\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}} \rightarrow^{\mathcal{H}} [\![\psi]\!]_v^{\mathcal{H}}$.

Fica assim esclarecida a escolha, pouco inocente, do símbolo $\rightarrow$ para denotar o pseudo-complemento relativo. Note-se também, e mais uma vez, que a extensão às fórmulas proposicionais de qualquer valoração está à partida garantida pela definição de álgebra livre.

Definição 4.5. Uma fórmula proposicional $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$ diz-se:

- *válida*, se $[\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}} = \top^{\mathcal{H}}$ para toda a valoração v em $\mathcal{H}$;
- *possível*, se $[\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}} = \top^{\mathcal{H}}$ para alguma valoração v em $\mathcal{H}$;
- *contraditória*, se $[\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}} = \bot^{\mathcal{H}}$ para toda a valoração v em $\mathcal{H}$;
- *refutável*, se $[\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}} = \bot^{\mathcal{H}}$ para alguma valoração v em $\mathcal{H}$.

Um conjunto de fórmulas $\Gamma \subseteq \mathscr{P}(\mathcal{L}_{\mathbf{LPI}})$ diz-se:

- *válido*, se $[\![\gamma]\!]_v^{\mathcal{H}} = \top^{\mathcal{H}}$ para toda a valoração v em $\mathcal{H}$ e toda a fórmula $\gamma \in \Gamma$;
- *possível*, se $[\![\gamma]\!]_v^{\mathcal{H}} = \top^{\mathcal{H}}$ para alguma valoração v em $\mathcal{H}$ e toda a fórmula $\gamma \in \Gamma$;
- *contraditório*, se $[\![\gamma]\!]_v^{\mathcal{H}} = \bot^{\mathcal{H}}$ para toda a valoração v em $\mathcal{H}$ e alguma fórmula $\gamma \in \Gamma$;
- *refutável*, se $[\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}} = \bot^{\mathcal{H}}$ para alguma valoração v em $\mathcal{H}$ e alguma fórmula $\gamma \in \Gamma$.

Definição 4.6. Uma valoração v diz-se *modelo de* $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$ *em* $\mathcal{H}$, se $[\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}} = \top^{\mathcal{H}}$; e diz-se *modelo de* $\Gamma \subseteq \mathscr{P}(\mathcal{L}_{\mathbf{LPI}})$ *em* $\mathcal{H}$, se $[\![\Gamma]\!]_v^{\mathcal{H}} = \top^{\mathcal{H}}$.

Definição 4.7. A *relação de consequência semântica em* $\mathcal{H}$, $\vDash_{\mathcal{H}} \subseteq \mathscr{P}(\mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}) \times \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$, é definida por:

$$\Gamma \vDash_{\mathcal{H}} \varphi \text{ sse todo o modelo de } \Gamma \text{ em } \mathcal{H} \text{ é modelo de } \varphi \text{ em } \mathcal{H}.$$

$\Gamma \vDash_{\mathcal{H}} \varphi$ representa a notação *infix* para $\langle \Gamma, \varphi \rangle \in \vDash_{\mathcal{H}}$.

Introduzimos agora a noção de consequência semântica para a classe das álgebras de Heyting **HA**.

Definição 4.8. A *relação de consequência semântica em* **HA**, $\vDash_{\mathbf{HA}} \subseteq \mathscr{P}(\mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}) \times \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$, é definida por:

$$\Gamma \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi \text{ sse } \Gamma \vDash_{\mathcal{H}} \varphi \text{para toda a álgebra de Heyting } \mathcal{H} \in \mathbf{HA}.$$

$\Gamma \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi$ representa a notação *infix* para $\langle \Gamma, \varphi \rangle \in \vDash_{\mathbf{HA}}$.

Por fim, vamos introduzir o conjunto de todas as fórmulas que são consequência semântica em **HA** de um dado conjunto Γ.

Definição 4.9. O *conjunto das consequências semânticas de* $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$ *em* **HA**, ou *fecho semântico de* Γ *em* **HA**, que se denota por $\Gamma^{\vDash_{\mathbf{HA}}}$, é o menor conjunto que contém Γ e é fechado para a relação de consequência semântica em **HA**.

Verifica-se que a relação $\vDash_{\mathbf{HA}}$ satisfaz as seguintes propriedades (*cf.* definição A.3):

(i) **Extensividade:** se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi$;

(ii) **Monotonia:** se $\Gamma_1 \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi$ e $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, então $\Gamma_2 \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi$;

(iii) **Corte:** se $\Delta \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi$ e $\forall \delta \in \Delta \;\; \Gamma \vDash_{\mathbf{HA}} \delta$, então $\Gamma \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi$;

(iv) **Estruturalidade:** se $\Gamma \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi$ e $s : \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}} \to \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ é uma substituição, então $s(\Gamma) \vDash_{\mathbf{HA}} s(\varphi)$;

(v) **Finitário:** se $\Gamma \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi$, então $\Gamma' \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi$, para algum subconjunto finito $\Gamma' \subseteq_f \Gamma$.

Por outras palavras, o par $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}, \vDash_{\mathbf{HA}} \rangle$ é uma lógica estrutural e finitária.

4.2.2 Semântica de Kripke

A semântica de Kripke baseia-se na noção de modelo de Kripke.

Definição 4.10. Um *modelo de Kripke* é um triplo $\mathcal{K} = \langle W, \leq_{\mathcal{K}}, \Vdash_{\mathcal{K}} \rangle$, onde:

- W é um conjunto não vazio, dito *conjunto de estados*, ou *conjunto de mundos*;
- $\leq_{\mathcal{K}} \subseteq W^2$ é uma relação de ordem parcial em W. Denota-se $u \leq_{\mathcal{K}} w$ também por $w \geq_{\mathcal{K}} u$, e diz-se que *o mundo w é visível a partir do mundo u*, ou que *o mundo u vê o mundo w*;
- $\Vdash_{\mathcal{K}} \subseteq W \times \Pi_{\mathbf{LPI}}$ é uma relação tal que para quaisquer $u, w \in W$ e $\pi \in \Pi_{\mathbf{LPI}}$,

$$\text{se } u \leq_{\mathcal{K}} w \text{ e } u \Vdash_{\mathcal{K}} \pi, \text{ então } w \Vdash_{\mathcal{K}} \pi\ .$$

A extensão $\Vdash_{\mathcal{K}} \subseteq W \times \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$ é definida recursivamente como se segue:

- $u \Vdash_{\mathcal{K}} \neg\varphi$, se para todo $w \geq_{\mathcal{K}} u$, tem-se $w \nVdash_{\mathcal{K}} \varphi$;
- $u \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi \wedge \psi$, se $u \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi$ e $u \Vdash_{\mathcal{K}} \psi$;
- $u \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi \vee \psi$, se $u \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi$ ou $u \Vdash_{\mathcal{K}} \psi$;
- $u \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi \to \psi$, se para todo $w \geq_{\mathcal{K}} u$, se $w \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi$ então $w \Vdash_{\mathcal{K}} \psi$.

Denotamos por $\mathbf{K}$ a classe de todos os modelos de Kripke.

Escrevemos $U \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi$, quando $u \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi$ para todo $u \in U$; escrevemos $u \Vdash_{\mathcal{K}} \Gamma$, quando $u \Vdash_{\mathcal{K}} \gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$; e escrevemos $U \Vdash_{\mathcal{K}} \Gamma$ quando $u \Vdash_{\mathcal{K}} \gamma$ para todo $u \in U, \gamma \in \Gamma$.

A intuição por detrás de um modelo de Kripke é a seguinte: os mundos representam estados de conhecimento; a relação $u \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi$ indica que o mundo u conhece a fórmula φ; além disso, se um mundo w é visível a partir de um mundo u, i.e., $u \leq_{\mathcal{K}} w$, então o mundo w tem acesso a todo o conhecimento do mundo u.

Os modelos de Kripke cujos mundos satisfazem uma dada fórmula são distinguidos, à semelhança das valorações para a Lógica Proposicional Clássica.

Definição 4.11. Um modelo de Kripke $\mathcal{K} = \langle W, \leq_{\mathcal{K}}, \Vdash_{\mathcal{K}} \rangle$ diz-se *modelo de* $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$, se $W \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi$; e diz-se *modelo de* $\Gamma \subseteq \mathscr{P}(\mathcal{L}_{\mathbf{LPI}})$, se $W \Vdash_{\mathcal{K}} \Gamma$.

Definição 4.12. A *relação de consequência semântica em* $\mathcal{K}$, $\vDash_{\mathcal{K}} \subseteq \mathscr{P}(\mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}) \times \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$, é definida por:

$$\Gamma \vDash_{\mathcal{K}} \varphi \text{ sse todo o modelo de Kripke modelo de } \Gamma \text{ é modelo de } \varphi.$$

$\Gamma \vDash_{\mathcal{K}} \varphi$ representa a notação *infix* para $\langle \Gamma, \varphi \rangle \in \vDash_{\mathcal{K}}$.

Introduzimos agora a noção de consequência semântica para a classe dos modelos de Kripke $\mathbf{K}$.

Definição 4.13. A *relação de consequência semântica em* $\mathbf{K}$, $\vDash_{\mathbf{K}} \subseteq \mathscr{P}(\mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}) \times \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$, é definida por:

$$\Gamma \vDash_{\mathbf{K}} \varphi \text{ sse } \Gamma \vDash_{\mathcal{K}} \varphi \text{para todo modelo de Kripke } \mathcal{K} \in \mathbf{K}.$$

$\Gamma \vDash_{\mathbf{K}} \varphi$ representa a notação *infix* para $\langle \Gamma, \varphi \rangle \in \vDash_{\mathbf{K}}$.

Por fim, vamos introduzir o conjunto de todas as fórmulas que são consequência semântica em $\mathbf{K}$ de um dado conjunto Γ.

Definição 4.14. O *conjunto das consequências semânticas de* $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$ *em* $\mathbf{K}$, ou *fecho semântico de* Γ *em* $\mathbf{K}$, que se denota por $\Gamma^{\vDash_{\mathbf{K}}}$, é o menor conjunto que contém Γ e é fechado para a relação $\vDash_{\mathbf{K}}$.

Verifica-se que a relação $\vDash_{\mathbf{K}}$ satisfaz as seguintes propriedades (*cf.* definição A.3):

(i) **Extensividade:** se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vDash_{\mathbf{K}} \varphi$;

(ii) **Monotonia:** se $\Gamma_1 \vDash_{\mathbf{K}} \varphi$ e $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, então $\Gamma_2 \vDash_{\mathbf{K}} \varphi$;

(iii) **Corte:** se $\Delta \vDash_{\mathbf{K}} \varphi$ e $\forall \delta \in \Delta \;\; \Gamma \vDash_{\mathbf{K}} \delta$, então $\Gamma \vDash_{\mathbf{K}} \varphi$;

(iv) **Estruturalidade:** se $\Gamma \vDash_{\mathbf{K}} \varphi$ e $s : \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}} \to \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ é uma substituição, então $s(\Gamma) \vDash_{\mathbf{K}} s(\varphi)$;

(v) **Finitário:** se $\Gamma \vDash_{\mathbf{K}} \varphi$, então $\Gamma' \vDash_{\mathbf{K}} \varphi$, para algum subconjunto finito $\Gamma' \subseteq_f \Gamma$.

Por outras palavras, o par $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}, \vDash_{\mathbf{K}} \rangle$ é uma lógica estrutural e finitária.

4.2.3 $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}, \vDash_{\mathbf{HA}} \rangle = \langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}, \vDash_{\mathbf{K}} \rangle$

Nesta secção provamos a equivalência entre as semânticas de Kripke e algébrica para a Lógica Proposicional Intuicionista.

Proposição 4.15. *Seja $\mathcal{K}$ um modelo de Kripke. Então, existe uma álgebra de Heyting $\mathcal{H}$ e uma valoração $v : \Pi_{\mathbf{LPI}} \to H$ em $\mathcal{H}$ tal que v é modelo de $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$ sse $\mathcal{K}$ é modelo de φ.*

Demonstração.
Seja $\mathcal{K} = \langle W, \leq_{\mathcal{K}}, \Vdash_{\mathcal{K}} \rangle$. Considere-se $\mathcal{H} = \langle H, \leq_{\mathcal{H}} \rangle$ e $v : \Pi_{\mathbf{LPI}} \to H$ dadas por:

$$\begin{aligned} H &= \{U \subseteq W : U \text{ é } \leq_{\mathcal{K}} \text{-fechado}\} ; \\ \leq_{\mathcal{H}} &= \subseteq ; \\ v(\pi) &= \{u \in \mathcal{K} : u \Vdash_{\mathcal{K}} \pi\} . \end{aligned}$$

A relação $\subseteq$ é claramente uma ordem parcial em H. As operações de ínfimo e supremo em H são dadas pela intersecção e união de conjuntos, respectivamente. É imediato que estas operações são distributivas entre si. Os elementos topo e base são dados por H e $\varnothing$, respectivamente (note-se que ambos os conjuntos são trivialmente $\leq_{\mathcal{K}}$-fechados). Donde, $\mathcal{H}$ é um s.p.o. distributivo e limitado.

Resta provar a existência de pseudo-complementos relativos em H. Sejam $U, V \in H$. Tome-se $U \to V = \max\{Y \subseteq -U \cup V : Y \text{ é } \leq_{\mathcal{K}} \text{-fechado}\}$. Vamos provar que $U \to V$ é o pseudo-complemento de U relativo a V, recorrendo à caracterização (1). Seja $X \in H$. Tem-se,

$$\begin{aligned} & X \leq_{\mathcal{H}} U \to V \\ \Leftrightarrow \;& X \subseteq -U \cup V \\ \Rightarrow \;& U \cap X \subseteq U \cap (-U \cup V) \\ \Leftrightarrow \;& U \cap X \subseteq U \cap V \\ \Rightarrow \;& U \cap X \subseteq V \\ \Leftrightarrow \;& U \cap X \leq_{\mathcal{H}} V . \end{aligned}$$

Reciprocamente,

$$\begin{array}{ll} & U \cap X \leq_{\mathcal{H}} V \\ \Leftrightarrow & U \cap X \subseteq V \\ \Rightarrow & (U \cap X) \cup (X \backslash U) \subseteq V \cup (X \backslash U) \\ \Leftrightarrow & X \subseteq V \cup (X \backslash U) \\ \Rightarrow & X \subseteq V \cup (-U) \\ \Rightarrow & X \subseteq U \to V, \\ & \text{pois } X \in H \text{ é } \leq_{\mathcal{H}}\text{-fechado e } U \to V \text{ é por construção} \\ & \text{o maior subconjunto } \leq_{\mathcal{H}}\text{-fechado de } V \cup (-U) \\ \Leftrightarrow & X \leq_{\mathcal{H}} U \to V\ . \end{array}$$

□

Para o caso recíproco, vamos apelar a um lema auxiliar sobre álgebras de Heyting.

Lema 4.16. *Seja $\mathcal{H}$ uma álgebra de Heyting. Se $F \subseteq H$ é um filtro próprio e $a \notin F$, então existe um filtro primo G tal que $F \subseteq G$ e $a \notin G$.*

Demonstração.
[Fitting, 1969, Lemma 6.4]

□

Proposição 4.17. *Seja $\mathcal{H}$ uma álgebra de Heyting e $v : \Pi_{\mathbf{LPI}} \to H$ uma valoração em $\mathcal{H}$. Então, existe um modelo de Kripke $\mathcal{K}$ tal que v é modelo de $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$ sse $\mathcal{K}$ é modelo de φ.*

Demonstração.
Seja $\mathcal{H} = \{H, \leq_{\mathcal{H}}\}$. Considere-se $\mathcal{K} = \langle W, \leq_{\mathcal{K}}, \Vdash_{\mathcal{K}} \rangle$ dado por:

$$\begin{array}{rcl} W & = & \{G \subseteq H : G \textit{ é um ideal primo em } H\}\ ; \\ \leq_{\mathcal{K}} & = & \subseteq\ ; \\ u \Vdash_{\mathcal{K}} \pi & \Leftrightarrow & v(\pi) \in u\ . \end{array}$$

É imediato que $\mathcal{K}$ respeita a definição de modelo de Kripke.

Prova-se por indução na construção de $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$ que

$$u \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi \Leftrightarrow [\![\varphi]\!]^{\mathcal{H}}_v \in u\ ,$$

i.e., que a definição de $\Vdash_{\mathcal{K}}$ se estende a $\mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$ [Sørensen and Urzyczyn, 1998, Lemma 2.5.5, pp. 35-36] (esta indução está longe de ser trivial; o caso da disjunção apela à primalidade dos universos, e o caso da implicação apela ao lema 4.16).

Suponhamos que v é modelo de φ em $\mathcal{H}$, i.e., $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{H}}_v = \top^{\mathcal{H}}$. Então, $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{H}}_v$ pertence a todos os filtros F em $\mathcal{H}$. Segue da indução acima que $F \vDash_{\mathcal{K}} \varphi$, para qualquer filtro F em $\mathcal{H}$. Logo, $W \vDash_{\mathcal{K}} \varphi$, i.e., $\mathcal{K}$ é modelo de φ.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathcal{K}$ é modelo de φ, i.e., $W \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi$. Suponhamos ainda, por absurdo, que v não é modelo de φ em $\mathcal{H}$, i.e., $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{H}}_v \neq \top^{\mathcal{H}}$. Então, existe um filtro próprio F tal que $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{H}}_v \notin F$ (considere-se o filtro principal gerado por $\neg^{\mathcal{H}}[\![\varphi]\!]^{\mathcal{H}}_v$). Segue pelo lema 4.16 que existe um ideal primo G que estende F tal que $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{H}}_v \notin G$. Segue da indução acima que $G \nVdash_{\mathcal{K}} \varphi$. Chegamos a um absurdo, pois por hipótese $W \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi$, e $G \in W$.

□

Teorema 4.18.

$$\Gamma \vDash_{\mathbf{K}} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi \tag{4.1}$$

Demonstração.

Suponhamos que $\Gamma \nvDash_{\mathbf{HA}} \varphi$. Sejam $\mathcal{H} \in \mathbf{HA}$ e $v : \Pi_{\mathbf{LPI}} \to H$ testemunhas deste facto. Segue pela proposição 4.17 que existe um modelo de Kripke $\mathcal{K}$ tal que $\mathcal{K}$ é modelo de Γ e não é modelo de φ, i.e., tal que $\Gamma \nVdash_{\mathcal{K}} \varphi$, donde $\Gamma \nvDash_{\mathcal{K}} \varphi$. Logo, $\Gamma \nvDash_{\mathbf{K}} \varphi$.

Reciprocamente, suponhamos que $\Gamma \nvDash_{\mathbf{K}} \varphi$. Seja $\mathcal{K} \in \mathbf{K}$ um modelo de Kripke que testemunha este facto. Segue pela proposição 4.15 que existem uma álgebra de Heyting $\mathcal{H}$ e uma valoração $v : \Pi_{\mathbf{LPI}} \to H$ tal que v é modelo de Γ e não é modelo de φ, i.e., tal que $\Gamma \nvDash_{\mathcal{H}} \varphi$. Logo, $\Gamma \nvDash_{\mathbf{HA}} \varphi$.

□

Concluímos que as lógicas $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}, \vDash_{\mathbf{HA}} \rangle$ e $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}, \vDash_{\mathbf{K}} \rangle$ apresentam a mesma Lógica.

Ao contrário da classe das álgebras booleanas **BA**, a classe das álgebras de Heyting **HA** não possui nenhuma álgebra finita capaz de garantir a completude dos cálculos para **LPI**.

De facto, seja $\Pi_{\mathbf{LPI}} = \{\pi_1, \pi_2, \ldots\}$ uma enumeração do alfabeto proposicional. Considere-se a fórmula

$$\bigvee \{\pi_i \leftrightarrow \pi_j : i, j = 1, \ldots, n+1 \text{ e } i \neq j\}\ .$$

Esta fórmula é válida em qualquer álgebra de Heyting $\mathcal{H} \in \mathbf{HA}$ finita cujo universo contenha no máximo n elementos. Isto porque a interpretação em $\mathcal{H}$ de pelo menos duas variáveis proposicionais em $\{\pi_1, \ldots, \pi_{n+1}\}$ vai coincidir (problema dos pombos de Dirichlet!).

Por outro lado, a fórmula em causa não é válida em nenhuma álgebra de Heyting $\mathcal{H}' \in \mathbf{HA}$ finita cujo universo contenha pelo menos $n+1$ elementos. Bastaria tomar-se uma valoração injectiva $v : \Pi_{\mathbf{LPI}} \to H'$ em $\mathcal{H}'$ para testemunhar este facto. Apelando à completude dos cálculos para **LPI**, segue que a fórmula também não derivável nos mesmos cálculos.

Logo, dada um álgebra de Heyting finita, encontramos sempre uma fórmula válida nessa álgebra que não é teorema de **LPI**. Existe, porém, uma álgebra de Heyting infinita capaz de garantir a completude de qualquer cálculo para **LPI** – a álgebra de Heyting de todos os subconjuntos de um espaço métrico $X \neq \varnothing$ denso em si próprio [Rasiowa and Sikorski, 1963, IX 3.2 (vii), p.386], p.e., a álgebra de Heyting de todos os subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^2$ [Sørensen and Urzyczyn, 1998, Theorem 2.4.8 (2), p. 33].

4.3 Metateorema da Dedução

Por fim, exibimos uma prova semântica e intuicionista do Metateorema da Dedução.

Teorema 4.19 (Metateorma da Dedução - versão semântica intuicionista)**.**

$$\Gamma, \varphi \vDash_{\mathbf{HA}} \psi \textit{ sse } \Gamma \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi \to \psi$$

Demonstração.

Suponhamos que $\Gamma, \varphi \vDash_{\mathbf{HA}} \psi$. Seja $\mathcal{H} \in \mathbf{HA}$. Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPI}} \to H$ uma valoração em $\mathcal{H}$ modelo de Γ. Fixe-se $a = [\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}}$, e considere-se a álgebra de Heyting dada por todos os elementos em $\mathcal{H}$ menores ou iguais que a, que denotaremos por $\mathcal{H}_a$ [Rasiowa and Sikorski, 1963, IV 8.1, p. 138]. Note-se que o elemento topo em $\mathcal{H}_a$ é precisamente $[\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}}$. Considere-se ainda o homomorfismo de álgebras $h : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_a$ dado por

$$h(x) = x \sqcap^{\mathcal{H}} [\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}}$$

[Rasiowa and Sikorski, 1963, IV 8.2, p. 138]. Então, a composição $h \circ v : \Pi_{\mathbf{LPI}} \to H_a$ é uma valoração em $\mathcal{H}_a$ modelo de Γ, φ. Segue por hipótese que $h \circ v$ é modelo de ψ, i.e., $h([\![\psi]\!]_v^{\mathcal{H}}) = \top^{\mathcal{H}_a}$. Ora,

$$\begin{array}{rcl}
\top^{\mathcal{H}_a} = h([\![\psi]\!]_v^{\mathcal{H}}) & \Leftrightarrow & [\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}} = [\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}} \sqcap^{\mathcal{H}} [\![\psi]\!]_v^{\mathcal{H}} \\
& & \text{pois } [\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}} \text{ é o elemento topo em } \mathcal{H}_a, \text{ e por definição de } h \\
& \Leftrightarrow & [\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}} \leq_{\mathcal{H}} [\![\psi]\!]_v^{\mathcal{H}} \\
& & \text{por definição de } \leq_{\mathcal{H}} \\
& \Leftrightarrow & [\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}} \sqcap^{\mathcal{H}} \top^{\mathcal{H}} \leq_{\mathcal{H}} [\![\psi]\!]_v^{\mathcal{H}} \\
& \Leftrightarrow & \top^{\mathcal{H}} \leq_{\mathcal{H}} [\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}} \to^{\mathcal{H}} [\![\psi]\!]_v^{\mathcal{H}} \\
& & \text{pela caracterização (1)}
\end{array}$$

Logo, $[\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}} \to^{\mathcal{H}} [\![\psi]\!]_v^{\mathcal{H}} = [\![\varphi \to \psi]\!]_v^{\mathcal{H}} = \top^{\mathcal{H}}$. Concluímos que $\Gamma \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi \to \psi$.

Reciprocamente, suponhamos que $\Gamma \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi \to \psi$. Seja $\mathcal{H} \in \mathbf{HA}$. Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPI}} \to H$ uma valoração em $\mathcal{H}$ modelo de Γ, φ. Em particular, v é modelo de Γ. Segue por hipótese que v é modelo de $\varphi \to \psi$, i.e., $[\![\varphi \to \psi]\!]_v^{\mathcal{H}} = \top^{\mathcal{H}}$. Mas,

$$\begin{array}{rcl}
\top^{\mathcal{H}} \leq_{\mathcal{H}} [\![\varphi \to \psi]\!]_v^{\mathcal{H}} & \Leftrightarrow & \top^{\mathcal{H}} \leq_{\mathcal{H}} [\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}} \to^{\mathcal{H}} [\![\psi]\!]_v^{\mathcal{H}} \\
& & \text{por definição de extensão da valoração } v \text{ a } \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}} \\
& \Leftrightarrow & \top^{\mathcal{H}} \sqcap^{\mathcal{H}} [\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}} \leq_{\mathcal{H}} [\![\psi]\!]_v^{\mathcal{H}}, \\
& & \text{pela caracterização (1)} \\
& \Leftrightarrow & \top^{\mathcal{H}} \sqcap^{\mathcal{H}} \top^{\mathcal{H}} \leq_{\mathcal{H}} [\![\psi]\!]_v^{\mathcal{H}}, \\
& & \text{pois } v \text{ é modelo de } \varphi \text{ por hipótese} \\
& \Leftrightarrow & \top^{\mathcal{H}} \leq_{\mathcal{H}} [\![\psi]\!]_v^{\mathcal{H}}
\end{array}$$

Logo, $[\![\psi]\!]_v^{\mathcal{H}} = \top^{\mathcal{H}}$. Concluímos que $\Gamma, \varphi \vDash_{\mathbf{HA}} \psi$.

□

Atente-se que na demonstração do MTD para a semântica **HA**, recorremos à hipótese (dita *forte*) para todas as álgebras de Heyting, enquanto que para a semântica **BA** apenas recorremos apenas à hipótese (dita *fraca*) para a álgebra booleana $\mathcal{B}$ em causa.

Referências

[Rasiowa and Sikorski, 1963]
[Fitting, 1969]
[Sørensen and Urzyczyn, 1998]

5 | Lindenbaum-Tarski para LPC

Neste capítulo enunciamos os teoremas que nos garantem que os cálculos introduzidos na secção 1.2 preservam a veracidade das fórmulas proposicionais segundo as semânticas da secção 3.2; e, que além disso, todas as fórmulas verdadeiras segundo as semânticas da secção 3.2 são alcançadas pelos cálculos estudados na secção 1.2. Formalmente, queremos demonstrar as seguintes condições:

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vDash \varphi$$

$$\Gamma \vDash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \varphi$$

Um cálculo que satisfaça a primeira condição diz-se *correcto*; e um cálculo que satisfaça a segunda condição diz-se *completo*. Por outras palavras, queremos demonstrar que as lógicas $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}, \vdash \rangle$ e $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}, \vDash \rangle$ apresentam a mesma Lógica.

A completude dos três cálculos introduzidos advirá, como o nome do capítulo indica, segunda a álgebra de Lindenbaum-Tarski. Exibiremos todos os certificados naturais, à Hilbert e à Gentzen através dos quais se constrói a famosa álgebra a partir da álgebra das fórmulas.

5.1 $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}, \vDash_{\mathbf{BA}} \rangle \leq \langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}, \vdash^c_{\mathrm{N}} \rangle \leq \langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}, \vDash_{\mathbf{2}} \rangle$

O próximo teorema enuncia a correcção e completude do Cálculo Natural Clássico para as semânticas Denotacional e Algébrica. Vamos provar a correcção deste cálculo para a álgebra booleana $\mathbf{2}$ e a completude para a classe das álgebras booleanas $\mathbf{BA}$. As restantes implicações seguirão da equivalência estabelecida no teorema 3.17.

Teorema 5.1 (Correcção e Completude do Cálculo Natural para **LPC**).

$$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vDash_{\mathbf{BA}} \varphi \tag{5.1}$$

A correcção do Cálculo Natural Clássico segue das propriedades das álgebras booleanas vistas no lema 3.4, nomeadamente a eliminação da dupla negação e as leis de Morgan.

Lema 5.2. *O axioma do Cálculo Natural é correcto.*

Demonstração.
Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPC}} \to \{0, 1\}$ uma valoração em $\mathbf{2}$ modelo de $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Então, em particular, é modelo da fórmula φ. Concluímos que $\Gamma, \varphi \vDash_{\mathbf{2}} \varphi$.

□

Lema 5.3.
As regras para conectivos do Cálculo Natural são correctas.

Demonstração.
$\neg$**I** : Suponhamos que $\Gamma, \varphi \vDash_{\mathbf{2}} \psi$ e $\Gamma, \varphi \vDash_{\mathbf{2}} \neg\psi$. Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPC}} \to \{0,1\}$ uma valoração em **2** modelo de Γ. Suponhamos, por absurdo, que v é modelo de φ. Segue por hipótese que v é modelo de ψ e de $\neg\psi$. Chegamos a um absurdo, donde v não é modelo de φ. Concluímos que $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \neg\varphi$.

$\neg$**E** : Suponhamos que $\Gamma, \neg\varphi \vDash_{\mathbf{2}} \psi$ e $\Gamma, \neg\varphi \vDash_{\mathbf{2}} \neg\psi$. Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPC}} \to \{0,1\}$ uma valoração em **2** modelo de Γ. Suponhamos, por absurdo, que v é modelo de $\neg\varphi$. Segue por hipótese que v é modelo de ψ e de $\neg\psi$. Chegamos a um absurdo, donde v é modelo de φ. Concluímos que $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \varphi$.

$\wedge$**I** : Suponhamos que $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \varphi$ e $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \psi$. Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPC}} \to \{0,1\}$ uma valoração em **2** modelo de Γ. Segue por hipótese que v é modelo de φ e de ψ, i.e., $[\![\varphi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 1$ e $[\![\psi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 1$. Como $[\![\varphi \wedge \psi]\!]_v^{\mathbf{2}} = [\![\varphi]\!]_v^{\mathbf{2}} \sqcap [\![\psi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 1$ sse $[\![\varphi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 1$ e $[\![\psi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 1$, segue que $[\![\varphi \wedge \psi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 1$, i.e., v é modelo de $\varphi \wedge \psi$. Concluímos que $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \varphi \wedge \psi$.

$\wedge$**E** : Suponhamos que $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \varphi \wedge \psi$. Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPC}} \to \{0,1\}$ uma valoração em **2** modelo de Γ. Segue por hipótese que v é modelo de $\varphi \wedge \psi$, i.e., $[\![\varphi \wedge \psi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 1$. Como $[\![\varphi \wedge \psi]\!]_v^{\mathbf{2}} = [\![\varphi]\!]_v^{\mathbf{2}} \sqcap [\![\psi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 1$ sse $[\![\varphi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 1$ e $[\![\psi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 1$, segue que $[\![\varphi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 1$, i.e., v é modelo de φ. Concluímos que $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \varphi$.
O caso $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \psi$ é análogo.

$\vee$**I** : Suponhamos que $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \varphi$. Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPC}} \to \{0,1\}$ uma valoração em **2** modelo de Γ. Segue por hipótese que v é modelo de φ, i.e., $[\![\varphi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 1$. Como $[\![\varphi \vee \psi]\!]_v^{\mathbf{2}} = [\![\varphi]\!]_v^{\mathbf{2}} \sqcup [\![\psi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 1$ sse $[\![\varphi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 1$ ou $[\![\psi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 1$, segue que $[\![\varphi \vee \psi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 1$, i.e., v é modelo de $\varphi \vee \psi$. Concluímos que $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \varphi \vee \psi$.
O caso $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \psi$ é análogo.

$\vee$**E** : Suponhamos que $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \varphi \vee \psi$, $\Gamma, \varphi \vDash_{\mathbf{2}} \rho$ e $\Gamma, \psi \vDash_{\mathbf{2}} \rho$. Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPC}} \to \{0,1\}$ uma valoração em **2** modelo de Γ. Segue por hipótese que v é modelo de $\varphi \vee \psi$, i.e., $[\![\varphi \vee \psi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 1$. Como $[\![\varphi \vee \psi]\!]_v^{\mathbf{2}} = [\![\varphi]\!]_v^{\mathbf{2}} \sqcup [\![\psi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 1$ sse $[\![\varphi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 1$ ou $[\![\psi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 1$, temos dois casos a considerar:

- v é modelo de φ, caso em que v é modelo de ρ por hipótese;
- v é modelo de ψ, caso em que v é modelo de ρ por hipótese.

Em qualquer dos casos, concluímos que $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \rho$.

$\to$ **I** : Igual à demonstração do MTD para a semântica **BA** (*cf.* teorema 3.18), substituindo a álgebra booleana arbitrária $\mathcal{B}$ por **2**.

$\to$ **E** : Igual à demonstração do MTMP para a semântica **BA** (*cf.* teorema 3.18), substituindo a álgebra booleana arbitrária $\mathcal{B}$ por **2**.

□

Teorema 5.4 (Correcção do Cálculo Natural para **LPC**).

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \varphi \Rightarrow \Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \varphi \tag{5.2}$$

Demonstração.
Suponhamos que $\Gamma \vdash^{c}_{\mathrm{N}} \varphi$. Seja $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ um certificado que testemunha esse facto. A prova segue por indução no comprimento do certificado, $n \in \mathbb{N}$.
Base:
Tem-se $\vartheta_1 \equiv \varphi$, e ϑ_1 segue pelo axioma **Ax** do Cálculo Natural. Segue pelo lema 5.2 que $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \varphi$.
Passo:
Tem-se $\vartheta_n \equiv \varphi$, e ϑ_n segue de $\vartheta_i \in \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}\}$ por uma regra para conectivos com uma premissa do Cálculo Natural, ou de $\vartheta_i, \vartheta_j \in \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}\}$ por uma regra para conectivos com duas premissas do Cálculo Natural, ou de $\vartheta_i, \vartheta_j, \vartheta_k \in \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}\}$ pela regra $\vee$**E** do Cálculo Natural (ou coincide novamente com o caso base, caso que omitimos). Segue por hipótese de indução que $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \vartheta_i$, $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \vartheta_j$ e $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \vartheta_k$. Segue pelo lema 5.3 que $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \varphi$.

□

Note-se que a correcção do Cálculo Natural para uma álgebra booleana arbitrária $\mathcal{B}$ podia ser feita exactamente do mesmo modo, substituindo as valorações em $\{0, 1\}$ por valorações em B, e os elementos distinguidos 0 e 1 por $\bot^{\mathcal{B}}$ e $\top^{\mathcal{B}}$, respectivamente. Daí seguiria igualmente a correcção do Cálculo Natural Clássico para **BA**.

Tratamos agora a completude do Cálculo Natural Clássico para a classe das álgebras booleanas **BA**.

Pretendemos construir uma álgebra booleana a partir da álgebra das fórmulas proposicionais. O primeiro passo consiste em definir uma relação de ordem parcial em $\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$. Definimos a relação $\leq_{\Gamma} \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}} \times \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ por

$$\varphi \leq_{\Gamma} \psi \text{ sse } \Gamma \vdash^{c}_{\mathrm{N}} \varphi \to \psi \; .$$

Lema 5.5. *A relação $\leq_{\Gamma}$ é reflexiva e transitiva.*

Demonstração.
Reflexividade: Seja $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$. Considere-se o seguinte certificado de $\varphi \to \varphi$ a partir de Γ:

1.	$\Gamma, \varphi \vdash^{c}_{\mathrm{N}} \varphi$	**Ax**
2.	$\Gamma \vdash^{c}_{\mathrm{N}} \varphi \to \varphi$	$\to$ **I** 1

Transitividade: Sejam $\varphi, \psi, \rho \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ tais que $\varphi \leq_{\Gamma} \psi$ e $\psi \leq_{\Gamma} \rho$. Considere-se o seguinte certificado de $\varphi \to \rho$ a partir de Γ:

1.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \to \psi$	hipótese
2.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \psi \to \rho$	hipótese
3.	$\Gamma, \varphi \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi$	**Ax**
4.	$\Gamma, \varphi \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \to \psi$	monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{N}}$ 1
5.	$\Gamma, \varphi \vdash^c_{\mathrm{N}} \psi \to \rho$	monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{N}}$ 2
6.	$\Gamma, \varphi \vdash^c_{\mathrm{N}} \psi$	$\to$ **E** 3,4
7.	$\Gamma, \varphi \vdash^c_{\mathrm{N}} \rho$	$\to$ **E** 6,5
8.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \to \rho$	$\to$ **I** 7

□

Para garantirmos a anti-simetria de $\leq_\Gamma$, precisamos de definir uma noção de igualdade entre fórmulas proposicionais que não a igualdade lexicográfica. A forma natural de definir essa igualdade será precisamente quando as premissas da anti-simetria se verificam, i.e., quando $\varphi \leq_\Gamma \psi$ e $\psi \leq_\Gamma \varphi$, i.e., quando $\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \leftrightarrow \psi$. Assim sendo, ao identificarmos as fórmulas proposicionais *interderiváveis* no Cálculo Natural, estamos a garantir a anti-simetria da relação $\leq_\Gamma$. Definimos então a *relação de interderivabilidade em* $\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$, que se denota por $\equiv_\Gamma$, por

$$\varphi \equiv_\Gamma \psi \text{ sse } \Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \leftrightarrow \psi \ .$$

Lema 5.6. *A relação $\equiv_\Gamma$ é uma relação de congruência em $\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$.*

Demonstração.
Provamos apenas que $\equiv_\Gamma$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$.

Reflexividade: Seja $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$. Considere-se o seguinte certificado de $\varphi \leftrightarrow \varphi$ a partir de Γ:

1.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \to \varphi$	lema 5.17
2.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} (\varphi \to \varphi) \wedge (\varphi \to \varphi)$	$\wedge$**I** 1,1
3.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \leftrightarrow \varphi$	igual a 3

Transitividade: Sejam $\varphi, \psi, \rho \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ tais que $\varphi \equiv_\Gamma \psi$ e $\psi \equiv_\Gamma \rho$. Considere-se o seguinte certificado de $\varphi \leftrightarrow \rho$ a partir de Γ:

1.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \varphi \leftrightarrow \psi$	hipótese
2.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{N}}^{c} (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$	igual a 1
3.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \psi \leftrightarrow \rho$	hipótese
4.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{N}}^{c} (\psi \rightarrow \rho) \wedge (\rho \rightarrow \psi)$	igual a 3
5.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \varphi \rightarrow \psi$	$\wedge$**E** 2
6.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \psi \rightarrow \varphi$	$\wedge$**E** 2
7.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \psi \rightarrow \rho$	$\wedge$**E** 4
8.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \rho \rightarrow \psi$	$\wedge$**E** 4
9.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \varphi \rightarrow \rho$	lema 5.17 5,7
10.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \rho \rightarrow \varphi$	lema 5.17 8,6
11.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{N}}^{c} (\varphi \rightarrow \rho) \wedge (\rho \rightarrow \varphi)$	$\wedge$**I** 9,10
12.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \varphi \leftrightarrow \rho$	igual a 10

Simetria: Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ tal que $\varphi \equiv_{\Gamma} \psi$. Considere-se o seguinte certificado de $\psi \leftrightarrow \varphi$ a partir de Γ:

1.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \varphi \leftrightarrow \psi$	hipótese
2.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{N}}^{c} (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$	igual a 1
3.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \varphi \rightarrow \psi$	$\wedge$**E** 2
4.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \psi \rightarrow \varphi$	$\wedge$**E** 2
5.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{N}}^{c} (\psi \rightarrow \varphi) \wedge (\varphi \rightarrow \psi)$	$\wedge$**I** 4,3
6.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \psi \leftrightarrow \varphi$	igual a 5

$\square$

A álgebra cujo universo é dado pelo quociente das fórmulas proposicionais sobre a relação de interderivabilidade para o Cálculo Natural é conhecida por *álgebra de Lindenbaum-Tarski.*

Definição 5.7. A *álgebra de Lindenbaum-Tarski para* **LPC** é definida por

$$\mathcal{L}_{\Gamma} = \langle {}^{\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}}/_{\equiv_{\Gamma}}, \sqcap^{\mathcal{L}_{\Gamma}}, \sqcup^{\mathcal{L}_{\Gamma}}, -^{\mathcal{L}_{\Gamma}}, \top^{\mathcal{L}_{\Gamma}}, \perp^{\mathcal{L}_{\Gamma}} \rangle \ ,$$

onde:

- $[\varphi]_{\equiv_{\Gamma}} \sqcap^{\mathcal{L}_{\Gamma}} [\psi]_{\equiv_{\Gamma}} = [\varphi \wedge \psi]_{\equiv_{\Gamma}}$
- $[\varphi]_{\equiv_{\Gamma}} \sqcup^{\mathcal{L}_{\Gamma}} [\psi]_{\equiv_{\Gamma}} = [\varphi \vee \psi]_{\equiv_{\Gamma}}$
- $-^{\mathcal{L}_{\Gamma}}[\varphi]_{\equiv_{\Gamma}} = [\neg\varphi]_{\equiv_{\Gamma}}$
- $\top^{\mathcal{L}_{\Gamma}} = [\varphi \vee \neg\varphi]_{\equiv_{\Gamma}}$
- $\perp^{\mathcal{L}_{\Gamma}} = [\varphi \wedge \neg\varphi]_{\equiv_{\Gamma}}$

A boa definição das operações $\sqcap^{\mathcal{L}_\Gamma}$, $\sqcup^{\mathcal{L}_\Gamma}$ e $-^{\mathcal{L}_\Gamma}$ segue de $\equiv_\Gamma$ ser uma relação de congruência em $\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$.

Note-se que a classe de equivalência $\top^{\mathcal{L}_\Gamma}$ corresponde às fórmulas deriváveis a partir de Γ. Ou seja,

$$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \text{ sse } \Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \leftrightarrow \psi \vee \neg\psi \ .$$

A próxima proposição resume o ponto de situação.

Proposição 5.8.
O par $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}/_{\equiv_\Gamma}, \leq_\Gamma \rangle$ *é um s.p.o..*

Demonstração.
A reflexividade e transitividade de $\leq_\Gamma$ em $\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ mantêm-se válidas em $\mathcal{L}_\Gamma$, segundo os mesmos certificados do lema 5.6. A anti-simetria de $\leq_\Gamma$ em $\mathcal{L}_\Gamma$ segue da definição de $\equiv_\Gamma$.

$\square$

O passo seguinte consiste em provar que o s.p.o. $\langle \mathcal{L}_\Gamma, \leq_\Gamma \rangle$ é de facto um reticulado. Os candidatos óbvios para ínfimo e supremo de $[\varphi]_{\equiv_\Gamma}, [\psi]_{\equiv_\Gamma} \in \mathcal{L}_\Gamma$ são $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \sqcap^{\mathcal{L}_\Gamma} [\psi]_{\equiv_\Gamma}$ e $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \sqcup^{\mathcal{L}_\Gamma} [\psi]_{\equiv_\Gamma}$, respectivamente.

Proposição 5.9.
O par $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}/_{\equiv_\Gamma}, \leq_\Gamma \rangle$ *é um reticulado.*

Demonstração.
Ínfimo: Sejam $[\varphi]_{\equiv_\Gamma}, [\psi]_{\equiv_\Gamma} \in \mathcal{L}_\Gamma$. Considerem-se os seguintes certificados:

1.	$\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \wedge \psi$	**Ax**
2.	$\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi$	$\wedge$**E** 1
3.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$	$\to$ **I** 1

1.	$\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \wedge \psi$	**Ax**
2.	$\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash^c_{\mathrm{N}} \psi$	$\wedge$**E** 1
3.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} (\varphi \wedge \psi) \to \psi$	$\to$ **I** 1

Logo, $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \sqcap^{\mathcal{L}_\Gamma} [\psi]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\varphi]_{\equiv_\Gamma}$ e $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \sqcap^{\mathcal{L}_\Gamma} [\psi]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\psi]_{\equiv_\Gamma}$.

Seja agora $[\rho]_{\equiv_\Gamma} \in \mathcal{L}_\Gamma$ tal que $[\rho]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\varphi]_{\equiv_\Gamma}$ e $[\rho]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\psi]_{\equiv_\Gamma}$. Considere-se o seguinte certificado:

1.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \rho \to \varphi$	hipótese
2.	$\Gamma, \rho \vdash^c_{\mathrm{N}} \rho \to \varphi$	monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{N}}$ 1
3.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \rho \to \psi$	hipótese
4.	$\Gamma, \rho \vdash^c_{\mathrm{N}} \rho \to \psi$	monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{N}}$ 2
5.	$\Gamma, \rho \vdash^c_{\mathrm{N}} \rho$	**Ax**
6.	$\Gamma, \rho \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi$	$\to$ **E** 2,5
7.	$\Gamma, \rho \vdash^c_{\mathrm{N}} \psi$	$\to$ **E** 4,5
8.	$\Gamma, \rho \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \wedge \psi$	$\wedge$**I** 6,7
9.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \rho \to (\varphi \wedge \psi)$	$\to$ **I** 8

Logo, $[\rho]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\varphi]_{\equiv_\Gamma} \sqcap^{\mathcal{L}_\Gamma} [\psi]_{\equiv_\Gamma}$.

Concluímos que $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \sqcap^{\mathcal{L}_\Gamma} [\psi]_{\equiv_\Gamma}$ é ínfimo de $[\varphi]_{\equiv_\Gamma}$ e $[\psi]_{\equiv_\Gamma}$ em $\mathcal{L}_\Gamma$.

Supremo: Sejam $[\varphi]_{\equiv_\Gamma}, [\psi]_{\equiv_\Gamma} \in \mathcal{L}_\Gamma$. Considerem-se os seguintes certificados:

1.	$\Gamma, \varphi \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi$	**Ax**
2.	$\Gamma, \varphi \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \vee \psi$	$\vee$**I** 1
3.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \to \varphi \vee \psi$	$\to$ **I** 2

1.	$\Gamma, \psi \vdash^c_{\mathrm{N}} \psi$	**Ax**
2.	$\Gamma, \psi \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \vee \psi$	$\vee$**I** 1
3.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \psi \to \varphi \vee \psi$	$\to$ **I** 2

Logo, $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\varphi]_{\equiv_\Gamma} \sqcup^{\mathcal{L}_\Gamma} [\psi]_{\equiv_\Gamma}$ e $[\psi]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\varphi]_{\equiv_\Gamma} \sqcup^{\mathcal{L}_\Gamma} [\psi]_{\equiv_\Gamma}$.

Seja agora $[\rho]_{\equiv_\Gamma} \in \mathcal{L}_\Gamma$ tal que $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\rho]_{\equiv_\Gamma}$ e $[\psi]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\rho]_{\equiv_\Gamma}$. Considere-se o seguinte certificado:

1.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \to \rho$	hipótese
2.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \psi \to \rho$	hipótese
3.	$\Gamma, \varphi \vee \psi, \varphi \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi$	**Ax**
4.	$\Gamma, \varphi \vee \psi, \psi \vdash^c_{\mathrm{N}} \psi$	**Ax**
5.	$\Gamma, \varphi \vee \psi, \varphi \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \to \rho$	monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{N}}$ 1
6.	$\Gamma, \varphi \vee \psi, \psi \vdash^c_{\mathrm{N}} \psi \to \rho$	monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{N}}$ 2
7.	$\Gamma, \varphi \vee \psi, \varphi \vdash^c_{\mathrm{N}} \rho$	**MP** 3,5
8.	$\Gamma, \varphi \vee \psi, \psi \vdash^c_{\mathrm{N}} \rho$	**MP** 4,6
9.	$\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \vee \psi$	**Ax**
10.	$\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash^c_{\mathrm{N}} \rho$	$\vee$**E** 7,8,9
11.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \vee \psi \to \rho$	$\to$ **I** 10

Logo, $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \sqcup^{\mathcal{L}_\Gamma} [\psi]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\rho]_{\equiv_\Gamma}$.

Concluímos que $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \sqcup^{\mathcal{L}_\Gamma} [\psi]_{\equiv_\Gamma}$ é supremo de $[\varphi]_{\equiv_\Gamma}$ e $[\psi]_{\equiv_\Gamma}$ em $\mathcal{L}_\Gamma$.

$\square$

O último passo consiste em provar que o reticulado $\langle \mathcal{L}_\Gamma, \leq_\Gamma \rangle$ é booleano. Os candidatos óbvios para elemento topo e elemento base são $\top^{\mathcal{L}_\Gamma}$ e $\bot^{\mathcal{L}_\Gamma}$, respectivamente; e o candidato óbvio para complemento de $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \in \mathcal{L}_\Gamma$ é $-^{\mathcal{L}_\Gamma}[\varphi]_{\equiv_\Gamma}$.

Considerem-se as seguintes regras auxiliares:

$$\frac{\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi}{\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \neg\neg\varphi}\ \neg\neg\mathbf{I} \qquad \frac{\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \neg\neg\varphi}{\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi}\ \neg\neg\mathbf{E}$$

$$\frac{\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \neg(\varphi \vee \psi)}{\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \neg\varphi \wedge \neg\psi}\ \mathbf{Morgan}\neg\vee \qquad \frac{\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \neg(\varphi \wedge \psi)}{\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \neg\varphi \vee \neg\psi}\ \mathbf{Morgan}\neg\wedge$$

justificadas pelos seguintes certificados:

1.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi$	hipótese
2.	$\Gamma, \neg\varphi \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi$	monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{N}}$ 1
3.	$\Gamma, \neg\varphi \vdash^c_{\mathrm{N}} \neg\varphi$	**Ax**
4.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \neg\neg\varphi$	$\neg$**I** 2,3

1.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \neg\neg\varphi$	hipótese
2.	$\Gamma, \neg\varphi \vdash^c_{\mathrm{N}} \neg\neg\varphi$	monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{N}}$ 1
3.	$\Gamma, \neg\varphi \vdash^c_{\mathrm{N}} \neg\varphi$	**Ax**
4.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi$	$\neg$**E** 2,3

1.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \neg(\varphi \vee \psi)$	hipótese
2.	$\Gamma, \varphi \vdash^c_{\mathrm{N}} \neg(\varphi \vee \psi)$	monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{N}}$ 1
3.	$\Gamma, \varphi \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi$	**Ax**
4.	$\Gamma, \varphi \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \vee \psi$	$\vee$**I** 3
5.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \neg\varphi$	$\neg$**I** 2,4
6.	$\Gamma, \psi \vdash^c_{\mathrm{N}} \neg(\varphi \vee \psi)$	monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{N}}$ 1
7.	$\Gamma, \psi \vdash^c_{\mathrm{N}} \psi$	**Ax**
8.	$\Gamma, \psi \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \vee \psi$	$\vee$**I** 7
9.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \neg\psi$	$\neg$**I** 6,8
10.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \neg\varphi \wedge \neg\psi$	$\wedge$**I** 5,9

1.	$\Gamma, \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi), \neg\varphi \vdash^c_{\mathrm{N}} \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	**Ax**
2.	$\Gamma, \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi), \neg\varphi \vdash^c_{\mathrm{N}} \neg\varphi$	**Ax**
3.	$\Gamma, \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi), \neg\varphi \vdash^c_{\mathrm{N}} \neg\varphi \vee \neg\psi$	$\vee$**I** 2
4.	$\Gamma, \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi$	$\neg$**E** 1,3
5.	$\Gamma, \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi), \neg\psi \vdash^c_{\mathrm{N}} \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	**Ax**
6.	$\Gamma, \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi), \neg\psi \vdash^c_{\mathrm{N}} \neg\psi$	**Ax**
7.	$\Gamma, \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi), \neg\psi \vdash^c_{\mathrm{N}} \neg\varphi \vee \neg\psi$	$\vee$**I** 6
8.	$\Gamma, \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vdash^c_{\mathrm{N}} \psi$	$\neg$**E** 5,7
9.	$\Gamma, \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \wedge \psi$	$\wedge$**I** 4,8
10.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \neg(\varphi \wedge \psi)$	hipótese
11.	$\Gamma, \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vdash^c_{\mathrm{N}} \neg(\varphi \wedge \psi)$	monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{N}}$ 10
12.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \neg\varphi \vee \neg\psi$	$\neg$**E** 9,11

Atente-se que para as regras $\neg\neg$**I** e **Morgan**$\neg\vee$ utilizámos a regra $\neg$**I**, enquanto que para as regras $\neg\neg$**E** e **Morgan**$\neg\wedge$ utilizámos a regra $\neg$**E**.

Proposição 5.10.
O par $\langle {}^{\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}}/_{\equiv_\Gamma}, \leq_\Gamma \rangle$ *é um reticulado booleano.*

Demonstração.
A distributividade de $\sqcap^{\mathcal{L}_\Gamma}$ e de $\sqcup^{\mathcal{L}_\Gamma}$ segue da distributividade de $\wedge$ e $\vee$.

Sejam $[\varphi]_{\equiv_\Gamma}, [\psi]_{\equiv_\Gamma} \in \mathcal{L}_\Gamma$. Considerem-se os seguintes certificados:

1.	$\Gamma, \psi \wedge \neg\psi \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \psi \wedge \neg\psi$	**Ax**
2.	$\Gamma, \psi \wedge \neg\psi \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \psi$	$\wedge$**E** 1
3.	$\Gamma, \psi \wedge \neg\psi \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \neg\psi$	$\wedge$**E** 1
4.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \neg(\psi \wedge \neg\psi)$	$\neg$**I** 2,3
5.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \neg\psi \vee \neg\neg\psi$	**Morgan**$\neg\wedge$ 4
6.	$\Gamma, \neg\psi \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \neg\psi$	**Ax**
7.	$\Gamma, \neg\psi \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \psi \vee \neg\psi$	$\vee$**I** 6
8.	$\Gamma, \neg\neg\psi \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \neg\neg\psi$	**Ax**
9.	$\Gamma, \neg\neg\psi \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \psi$	$\neg\neg$**E** 8
10.	$\Gamma, \neg\neg\psi \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \psi \vee \neg\psi$	$\vee$**I** 9
11.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \psi \vee \neg\psi$	$\vee$**E** 5,7,10
12.	$\Gamma, \varphi \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \psi \vee \neg\psi$	monotonia de $\vdash_{\mathrm{N}}^{c}$ 11
13.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \varphi \to (\psi \vee \neg\psi)$	$\to$ **I** 12

1.	$\Gamma, \psi \wedge \neg\psi, \neg\varphi \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \psi \wedge \neg\psi$	**Ax**
2.	$\Gamma, \psi \wedge \neg\psi, \neg\varphi \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \psi$	$\wedge$**E** 1
3.	$\Gamma, \psi \wedge \neg\psi, \neg\varphi \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \neg\psi$	$\wedge$**E** 1
4.	$\Gamma, \psi \wedge \neg\psi \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \varphi$	$\neg$**E** 2,3
5.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{N}}^{c} (\psi \wedge \neg\psi) \to \varphi$	$\to$ **I** 4

Logo, $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\psi \vee \neg\psi]_{\equiv_\Gamma} = \top^{\mathcal{L}_\Gamma}$ e $\bot^{\mathcal{L}_\Gamma} = [\psi \wedge \neg\psi]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\varphi]_{\equiv_\Gamma}$. Concluímos que $\top^{\mathcal{L}_\Gamma}$ e $\bot^{\mathcal{L}_\Gamma}$ são elemento topo e elemento base em $\langle \mathcal{L}_\Gamma, \leq_\Gamma \rangle$, respectivamente.

Seja $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \in \mathcal{L}_\Gamma$. Então,

$$\begin{aligned} [\varphi]_{\equiv_\Gamma} \sqcap^{\mathcal{L}_\Gamma} (-^{\mathcal{L}_\Gamma}[\varphi]_{\equiv_\Gamma}) &= [\varphi \wedge \neg\varphi]_{\equiv_\Gamma} \\ &= \bot^{\mathcal{L}_\Gamma}, \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} [\varphi]_{\equiv_\Gamma} \sqcup^{\mathcal{L}_\Gamma} (-^{\mathcal{L}_\Gamma}[\varphi]_{\equiv_\Gamma}) &= [\varphi \vee \neg\varphi]_{\equiv_\Gamma} \\ &= \top^{\mathcal{L}_\Gamma}. \end{aligned}$$

Concluímos que $-^{\mathcal{L}_\Gamma}[\varphi]_{\equiv_\Gamma}$ é complemento de $[\varphi]_{\equiv_\Gamma}$ em $\langle \mathcal{L}_\Gamma, \leq_\Gamma \rangle$.

□

Finalmente, chegamos ao resultado desejado.

Proposição 5.11.
A álgebra de Lindenbaum-Tarski para **LPC** *é uma álgebra booleana.*

Demonstração.
O tuplo $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}/\equiv_\Gamma, \sqcap^{\mathcal{L}_\Gamma}, \sqcup^{\mathcal{L}_\Gamma}, -^{\mathcal{L}_\Gamma}, \top^{\mathcal{L}_\Gamma}, \bot^{\mathcal{L}_\Gamma} \rangle$ e o par $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}/\equiv_\Gamma, \leq_\Gamma \rangle$ correspondem ao mesmo reticulado, segundo a definição algébrica e a definição de ordem, respectivamente. Segue pela proposição 5.10 que a álgebra de Lindenbaum-Tarski para **LPC** é uma álgebra booleana.

□

Estamos agora em condições de provar a completude do Cálculo Natural.

Teorema 5.12 (Completude do Cálculo Natural para **LPC**).

$$\Gamma \vDash_{\mathbf{BA}} \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi \tag{5.3}$$

Demonstração.
Suponhamos que $\Gamma \vDash_{\mathbf{BA}} \varphi$. Considere-se a álgebra booleana de Lindenbaum-Tarski, $\mathcal{L}_\Gamma$, pela proposição 5.11. Tome-se uma valoração $v : \Pi_{\mathbf{LPC}} \to \mathcal{L}_\Gamma$ em $\mathcal{L}_\Gamma$, dada por $v(\pi) = [\pi]_{\equiv_\Gamma}$, e extendida naturalmente às fórmulas proposicionais por $[\![\psi]\!]^{\mathcal{L}_\Gamma}_v = [\psi]_{\equiv_\Gamma}$. Note-se que para qualquer $\gamma \in \Gamma$, temos $[\![\gamma]\!]^{\mathcal{L}_\Gamma}_v = \top^{\mathcal{L}_\Gamma}$, pela extensividade de $\vdash^c_{\mathrm{N}}$. Segue por hipótese que $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{L}_\Gamma}_v = \top^{\mathcal{L}_\Gamma}$, i.e., $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} = \top^{\mathcal{L}_\Gamma}$. Logo, $\Gamma \vdash^c_{\mathrm{N}} \varphi$.

□

5.2 $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}, \vDash_{\mathbf{BA}} \rangle \leq \langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}, \vdash^c_{\mathrm{H}} \rangle \leq \langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}, \vDash_{\mathbf{2}} \rangle$

O próximo teorema enuncia a correcção e completude do Cálculo de Hilbert Clássico para as semânticas Denotacional e Algébrica. Vamos provar a correcção deste cálculo para a álgebra booleana **2** e a completude para a classe das álgebras booleanas **BA**. As restantes implicações seguirão da equivalência estabelecida no teorema 3.17.

Teorema 5.13 (Correcção e Completude do Cálculo de Hilbert para **LPC**).

$$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vDash_{\mathbf{BA}} \varphi \tag{5.4}$$

A correcção do Cálculo de Hilbert para **LPC** segue das propriedades das álgebras booleanas vistas no lema 3.4, nomeadamente a eliminação da dupla negação e as leis de Morgan.

Lema 5.14. *Os axiomas do Cálculo de Hilbert são correctos.*

Demonstração.
Provamos apenas os axiomas **Ax1** e **Ax10**.

Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPC}} \to \{0,1\}$ uma valoração em **2**. Deixamos cair o super-índice $^{\mathbf{2}}$ das operações da álgebra booleana **2** para aliviar a notação.

Ax1 :

$$\begin{aligned}
[\![\varphi \to (\psi \to \varphi)]\!]^{\mathbf{2}}_v &= -[\![\varphi]\!]^{\mathbf{2}}_v \sqcup (-[\![\psi]\!]^{\mathbf{2}}_v \sqcup [\![\varphi]\!]^{\mathbf{2}}_v) \\
&= (-[\![\varphi]\!]^{\mathbf{2}}_v \sqcup [\![\varphi]\!]^{\mathbf{2}}_v) \sqcup (-[\![\psi]\!]^{\mathbf{2}}_v) \\
&= 1 \sqcup (-[\![\psi]\!]^{\mathbf{2}}_v) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Concluímos que $\vDash_{\mathbf{2}} \varphi \to (\psi \to \varphi)$.

Ax10 :

$$
\begin{aligned}
& [\![(\neg\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \neg\psi) \to \varphi)]\!]^{\mathbf{2}}_v = \\
= \quad & -(-(-[\![\varphi]\!]^{\mathbf{2}}_v) \sqcup [\![\psi]\!]^{\mathbf{2}}_v) \sqcup (-(-(-[\![\varphi]\!]^{\mathbf{2}}_v) \sqcup (-[\![\psi]\!]^{\mathbf{2}}_v)) \sqcup [\![\varphi]\!]^{\mathbf{2}}_v) \\
= \quad & (-[\![\varphi]\!]^{\mathbf{2}}_v \sqcap (-[\![\psi]\!]^{\mathbf{2}}_v)) \sqcup ((-[\![\varphi]\!]^{\mathbf{2}}_v \sqcap [\![\psi]\!]^{\mathbf{2}}_v) \sqcup [\![\varphi]\!]^{\mathbf{2}}_v) \\
= \quad & (-[\![\varphi]\!]^{\mathbf{2}}_v \sqcap (-[\![\psi]\!]^{\mathbf{2}}_v)) \sqcup (-[\![\varphi]\!]^{\mathbf{2}}_v \sqcap [\![\psi]\!]^{\mathbf{2}}_v) \sqcup [\![\varphi]\!]^{\mathbf{2}}_v \\
= \quad & (-[\![\varphi]\!]^{\mathbf{2}}_v \sqcap ((-[\![\psi]\!]^{\mathbf{2}}_v) \sqcup [\![\psi]\!]^{\mathbf{2}}_v)) \sqcup [\![\varphi]\!]^{\mathbf{2}}_v \\
= \quad & (-[\![\varphi]\!]^{\mathbf{2}}_v \sqcap 1) \sqcup [\![\varphi]\!]^{\mathbf{2}}_v \\
= \quad & -[\![\varphi]\!]^{\mathbf{2}}_v \sqcup [\![\varphi]\!]^{\mathbf{2}}_v \\
= \quad & 1.
\end{aligned}
$$

Concluímos que $\vDash_{\mathbf{2}} (\neg\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \neg\psi) \to \varphi)$.

□

Lema 5.15. *A regra modus ponens do Cálculo de Hilbert é correcta.*

Demonstração.
Igual à demonstração do MTMP para a semântica **BA** (*cf.* teorema 3.18), substituindo a álgebra booleana arbitrária $\mathcal{B}$ por **2**.

□

Teorema 5.16 (Correcção do Cálculo de Hilbert para **LPC**)**.**

$$\Gamma \vdash^{c}_{\mathrm{H}} \varphi \Rightarrow \Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \varphi \tag{5.5}$$

Demonstração.
Suponhamos que $\Gamma \vdash^{c}_{\mathrm{H}} \varphi$. Seja $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ um certificado que testemunha esse facto. A prova segue por indução no comprimento do certificado, $n \in \mathbb{N}$.

Base:
Tem-se $\vartheta_1 = \varphi$, e verifica-se um de dois casos: ϑ_1 segue por um dos axiomas **Ax1** , ..., **Ax10** do Cálculo de Hilbert, caso em que $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \varphi$ pelo lema 5.14; $\vartheta_1 \in \Gamma$, caso em que $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \varphi$ por extensividade de $\vdash^{c}_{\mathrm{H}}$.

Passo:
Tem-se $\vartheta_n = \varphi$, e ϑ_n segue de $\vartheta_i, \vartheta_j \in \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}\}$ pela regra *modus ponens* do Cálculo de Hilbert (ou coincide novamente com o caso base, caso que omitimos). Segue por hipótese de indução que $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \vartheta_i$ e $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \vartheta_j$. Segue pelo lema 5.15 que $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \varphi$.

□

Note-se que a correcção do Cálculo de Hilbert para uma álgebra booleana $\mathcal{B}$ podia ser feita exactamente do mesmo modo, substituindo as valorações em $\{0, 1\}$ por valorações em B, e os elementos distinguidos 0 e 1 por $\perp^{\mathcal{B}}$ e $\top^{\mathcal{B}}$, respectivamente. Daí seguiria igualmente a correcção do Cálculo de Hilbert Clássico para **BA**.

Tratamos agora a completude do Cálculo de Hilbert Clássico para a classe das álgebras booleanas **BA**.

Vamos novamente construir a álgebra de Lindenbaum-Tarski, agora para o Cálculo de Hilbert, pelo que a exposição é mais célere. Definimos a relação $\leq_\Gamma$ em $\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ por

$$\varphi \leq_\Gamma \psi \text{ sse } \Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \to \psi \ .$$

Lema 5.17. *A relação $\leq_\Gamma$ é reflexiva e transitiva.*

Demonstração.
Reflexividade: Seja $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$. Considere-se o seguinte certificado à Hilbert de $\varphi \to \varphi$ a partir de Γ:

1.	$\Gamma, \varphi \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi$	**Hip**
2.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \to \varphi$	MTD para $\vdash^c_{\mathrm{H}}$ 1

Transitividade: Sejam $\varphi, \psi, \rho \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ tais que $\varphi \leq_\Gamma \psi$ e $\psi \leq_\Gamma \rho$. Considere-se o seguinte certificado à Hilbert de $\varphi \to \rho$ a partir de Γ:

1.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \to \psi$	hipótese
2.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \psi \to \rho$	hipótese
3.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} (\psi \to \rho) \to (\varphi \to (\psi \to \rho))$	**Ax1** e monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{H}}$
4.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \to (\psi \to \rho)$	**MP** 2,3
5.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} (\varphi \to (\psi \to \rho)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \rho))$	**Ax8** e monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{H}}$
6.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \rho)$	**MP** 4,5
7.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \to \rho$	**MP** 1,6

$\square$

Definimos a *relação de interderivabilidade em $\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$*, que se denota por $\equiv_\Gamma$, por

$$\varphi \equiv_\Gamma \psi \text{ sse } \Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \leftrightarrow \psi \ .$$

Lema 5.18. *A relação $\equiv_\Gamma$ é uma relação de congruência em $\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$.*

Demonstração.
Provamos apenas que $\equiv_\Gamma$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$.

Reflexividade: Seja $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$. Considere-se o seguinte certificado à Hilbert de $\varphi \leftrightarrow \varphi$ a partir de Γ:

1.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \to \varphi$	lema 5.17
2.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} (\varphi \to \varphi) \to ((\varphi \to \varphi) \to ((\varphi \to \varphi) \wedge (\varphi \to \varphi)))$	**Ax4** e monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{H}}$
3.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} (\varphi \to \varphi) \to ((\varphi \to \varphi) \wedge (\varphi \to \varphi))$	**MP** 1,2
4.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} (\varphi \to \varphi) \wedge (\varphi \to \varphi)$	**MP** 1,3
5.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \leftrightarrow \varphi$	igual a 4

Transitividade: Sejam $\varphi, \psi, \rho \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ tais que $\varphi \equiv_\Gamma \psi$ e $\psi \equiv_\Gamma \rho$. Considere-se o seguinte certificado à Hilbert de $\varphi \leftrightarrow \rho$ a partir de Γ:

1.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} \varphi \leftrightarrow \psi$	hipótese
2.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$	igual a 1
3.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} \psi \leftrightarrow \rho$	hipótese
4.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} (\psi \to \rho) \wedge (\rho \to \psi)$	igual a 3
5.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \to (\varphi \to \psi)$	**Ax2** e monotonia de $\vdash_{\mathrm{H}}^{c}$
6.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \to (\psi \to \varphi)$	**Ax3** e monotonia de $\vdash_{\mathrm{H}}^{c}$
7.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} (\psi \to \rho) \wedge (\rho \to \psi) \to (\psi \to \rho)$	**Ax2** e monotonia de $\vdash_{\mathrm{H}}^{c}$
8.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} (\psi \to \rho) \wedge (\rho \to \psi) \to (\rho \to \psi)$	**Ax3** e monotonia de $\vdash_{\mathrm{H}}^{c}$
9.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} \varphi \to \psi$	**MP** 2,5
10.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} \psi \to \varphi$	**MP** 2,6
11.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} \psi \to \rho$	**MP** 4,7
12.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} \rho \to \psi$	**MP** 4,8
13.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} \varphi \to \rho$	lema 5.17 9,11
14.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} \rho \to \varphi$	lema 5.17 12,10
15.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} (\varphi \to \rho) \to ((\rho \to \varphi) \to ((\varphi \to \rho) \wedge (\rho \to \varphi)))$	**Ax4** e monotonia de $\vdash_{\mathrm{H}}^{c}$
16.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} (\rho \to \varphi) \to ((\varphi \to \rho) \wedge (\rho \to \varphi))$	**MP** 13,15
17.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} (\varphi \to \rho) \wedge (\rho \to \varphi)$	**MP** 14,16
18.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} \varphi \leftrightarrow \rho$	igual a 17

Simetria: Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ tal que $\varphi \equiv_\Gamma \psi$. Considere-se o seguinte certificado à Hilbert de $\psi \leftrightarrow \varphi$ a partir de Γ:

1.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} \varphi \leftrightarrow \psi$	hipótese
2.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$	igual a 1
3.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \to (\varphi \to \psi)$	**Ax2** e monotonia de $\vdash_{\mathrm{H}}^{c}$
4.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \to (\psi \to \varphi)$	**Ax3** e monotonia de $\vdash_{\mathrm{H}}^{c}$
5.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} \varphi \to \psi$	**MP** 2,3
6.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} \psi \to \varphi$	**MP** 2,4
7.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} (\psi \to \varphi) \to ((\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \varphi) \wedge (\varphi \to \psi)))$	**Ax4** e monotonia de $\vdash_{\mathrm{H}}^{c}$
8.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \varphi) \wedge (\varphi \to \psi))$	**MP** 6,7
9.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} (\psi \to \varphi) \wedge (\varphi \to \psi)$	**MP** 5,8
10.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} \psi \leftrightarrow \varphi$	igual a 9

$\square$

Definição 5.19. A *álgebra de Lindenbaum-Tarski* para **LPC** é definida por

$$\mathcal{L}_\Gamma = \langle {\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}}/{\equiv_\Gamma}, \sqcap^{\mathcal{L}_\Gamma}, \sqcup^{\mathcal{L}_\Gamma}, -^{\mathcal{L}_\Gamma}, \top^{\mathcal{L}_\Gamma}, \bot^{\mathcal{L}_\Gamma} \rangle \ ,$$

onde:

- $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \sqcap^{\mathcal{L}_\Gamma} [\psi]_{\equiv_\Gamma} = [\varphi \wedge \psi]_{\equiv_\Gamma}$;
- $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \sqcup^{\mathcal{L}_\Gamma} [\psi]_{\equiv_\Gamma} = [\varphi \vee \psi]_{\equiv_\Gamma}$;
- $-^{\mathcal{L}_\Gamma}[\varphi]_{\equiv_\Gamma} = [\neg\varphi]_{\equiv_\Gamma}$;
- $\top^{\mathcal{L}_\Gamma} = [\varphi \vee \neg\varphi]_{\equiv_\Gamma}$;
- $\bot^{\mathcal{L}_\Gamma} = [\varphi \wedge \neg\varphi]_{\equiv_\Gamma}$.

Proposição 5.20.
O par $\langle \mathcal{L}_\Gamma, \leq_\Gamma \rangle$ é um s.p.o..

Demonstração.
A reflexividade e transitividade de $\leq_\Gamma$ em $\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ mantêm-se válidas em $\mathcal{L}_\Gamma$, segundo os mesmos certificados do lema 5.18. A anti-simetria de $\leq_\Gamma$ em $\mathcal{L}_\Gamma$ segue da definição de $\equiv_\Gamma$.
□

Proposição 5.21.
O par $\langle \mathcal{L}_\Gamma, \leq_\Gamma \rangle$ é um reticulado.

Demonstração.
Ínfimo: Sejam $[\varphi]_{\equiv_\Gamma}, [\psi]_{\equiv_\Gamma} \in \mathcal{L}_\Gamma$. Considerem-se os seguintes certificados à Hilbert:

1.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \wedge \psi \to \varphi$	**Ax2** e monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{H}}$

1.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \wedge \psi \to \psi$	**Ax3** e monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{H}}$

Logo, $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \sqcap^{\mathcal{L}_\Gamma} [\psi]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\varphi]_{\equiv_\Gamma}$ e $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \sqcap^{\mathcal{L}_\Gamma} [\psi]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\psi]_{\equiv_\Gamma}$.

Seja agora $[\rho]_{\equiv_\Gamma} \in \mathcal{L}_\Gamma$ tal que $[\rho]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\varphi]_{\equiv_\Gamma}$ e $[\rho]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\psi]_{\equiv_\Gamma}$. Considere-se o seguinte certificado à Hilbert:

1.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \rho \to \varphi$	hipótese
2.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \rho \to \psi$	hipótese
3.	$\Gamma, \rho \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi$	MTMP para $\vdash^c_{\mathrm{H}}$ 1
4.	$\Gamma, \rho \vdash^c_{\mathrm{H}} \psi$	MTMP para $\vdash^c_{\mathrm{H}}$ 2
5.	$\Gamma, \rho \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$	**Ax4** e monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{H}}$
6.	$\Gamma, \rho \vdash^c_{\mathrm{H}} \psi \to (\varphi \wedge \psi)$	**MP** 3,5
7.	$\Gamma, \rho \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \wedge \psi$	**MP** 4,6
8.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \rho \to \varphi \wedge \psi$	MTD para $\vdash^c_{\mathrm{H}}$ 7

Logo, $[\rho]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\varphi]_{\equiv_\Gamma} \sqcap^{\mathcal{L}_\Gamma} [\psi]_{\equiv_\Gamma}$.

Concluímos que $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \sqcap^{\mathcal{L}_\Gamma} [\psi]_{\equiv_\Gamma}$ é ínfimo de $[\varphi]_{\equiv_\Gamma}$ e $[\psi]_{\equiv_\Gamma}$ em $\mathcal{L}_\Gamma$.

Supremo: Sejam $[\varphi]_{\equiv_\Gamma}, [\psi]_{\equiv_\Gamma} \in \mathcal{L}_\Gamma$. Considerem-se os seguintes certificados à Hilbert:

1.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} \varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$	**Ax5** e monotonia de $\vdash_{\mathrm{H}}^{c}$

1.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} \psi \rightarrow \varphi \vee \psi$	**Ax6** e monotonia de $\vdash_{\mathrm{H}}^{c}$

Logo, $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\varphi]_{\equiv_\Gamma} \sqcup^{\mathcal{L}_\Gamma} [\psi]_{\equiv_\Gamma}$ e $[\psi]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\varphi]_{\equiv_\Gamma} \sqcup^{\mathcal{L}_\Gamma} [\psi]_{\equiv_\Gamma}$.

Seja agora $[\rho]_{\equiv_\Gamma} \in \mathcal{L}_\Gamma$ tal que $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\rho]_{\equiv_\Gamma}$ e $[\psi]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\rho]_{\equiv_\Gamma}$. Considere-se o seguinte certificado à Hilbert:

1.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} \varphi \rightarrow \rho$	hipótese
2.	$\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash_{\mathrm{H}}^{c} \varphi \rightarrow \rho$	monotonia de $\vdash_{\mathrm{H}}^{c}$ 1
3.	$\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash_{\mathrm{H}}^{c} \psi \rightarrow \rho$	hipótese
4.	$\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash_{\mathrm{H}}^{c} \psi \rightarrow \rho$	monotonia de $\vdash_{\mathrm{H}}^{c}$ 3
5.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} \varphi \vee \psi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \rho) \rightarrow (\psi \rightarrow \rho) \rightarrow \rho)$	**Ax7** e monotonia de $\vdash_{\mathrm{H}}^{c}$
6.	$\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash_{\mathrm{H}}^{c} (\varphi \rightarrow \rho) \rightarrow (\psi \rightarrow \rho) \rightarrow \rho$	MTMP para $\vdash_{\mathrm{H}}^{c}$ 5
7.	$\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash_{\mathrm{H}}^{c} (\psi \rightarrow \rho) \rightarrow \rho$	**MP** 2,6
8.	$\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash_{\mathrm{H}}^{c} \rho$	**MP** 4,7
9.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} \varphi \vee \psi \rightarrow \rho$	MTD para $\vdash_{\mathrm{H}}^{c}$ 8

Logo, $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \sqcup^{\mathcal{L}_\Gamma} [\psi]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\rho]_{\equiv_\Gamma}$.

Concluímos que $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \sqcup^{\mathcal{L}_\Gamma} [\psi]_{\equiv_\Gamma}$ é supremo de $[\varphi]_{\equiv_\Gamma}$ e $[\psi]_{\equiv_\Gamma}$ em $\mathcal{L}_\Gamma$.

□

Considerem-se os seguintes axiomas auxiliares:

$$\frac{}{\vdash_{\mathrm{H}}^{c} \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi}\ \neg\neg\mathbf{I} \qquad \frac{}{\vdash_{\mathrm{H}}^{c} \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi}\ \neg\neg\mathbf{E}$$

$$\frac{}{\vdash_{\mathrm{H}}^{c} \neg(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)}\ \mathbf{Morgan}\neg\vee \qquad \frac{}{\vdash_{\mathrm{H}}^{c} \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)}\ \mathbf{Morgan}\neg\wedge$$

justificados pelos seguintes certificados:

1.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \to (\neg\varphi \to \varphi)$	**Ax1**
2.	$\varphi \vdash^c_{\mathrm{H}} \neg\varphi \to \varphi$	MTMP para $\vdash^c_{\mathrm{H}}$ 1
3.	$\varphi \vdash^c_{\mathrm{H}} \neg\varphi \to \neg\varphi$	lema 5.17 e monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{H}}$
4.	$\varphi \vdash^c_{\mathrm{H}} (\neg\varphi \to \varphi) \to ((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\neg\varphi)$	**Ax9** e monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{H}}$
5.	$\varphi \vdash^c_{\mathrm{H}} (\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\neg\varphi$	**MP** 2,4
6.	$\varphi \vdash^c_{\mathrm{H}} \neg\neg\varphi$	**MP** 3,5
7.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \to \neg\neg\varphi$	MTD para $\vdash^c_{\mathrm{H}}$ 6

1.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} \neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \neg\neg\varphi)$	**Ax1**
2.	$\neg\neg\varphi \vdash^c_{\mathrm{H}} \neg\varphi \to \neg\neg\varphi$	MTMP para $\vdash^c_{\mathrm{H}}$ 1
3.	$\neg\neg\varphi \vdash^c_{\mathrm{H}} \neg\varphi \to \neg\varphi$	lema 5.17 e monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{H}}$
4.	$\neg\neg\varphi \vdash^c_{\mathrm{H}} (\neg\varphi \to \neg\varphi) \to ((\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \varphi)$	**Ax10** e monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{H}}$
5.	$\neg\neg\varphi \vdash^c_{\mathrm{H}} (\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \varphi$	**MP** 3,4
6.	$\neg\neg\varphi \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi$	**MP** 2,5
7.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} \neg\neg\varphi \to \varphi$	MTD para $\vdash^c_{\mathrm{H}}$ 6

1.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} \neg(\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \neg(\varphi \vee \psi))$	**Ax1**
2.	$\neg(\varphi \vee \psi) \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \to \neg(\varphi \vee \psi)$	MTMP para $\vdash^c_{\mathrm{H}}$ 1
3.	$\neg(\varphi \vee \psi) \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \to \varphi \vee \psi$	**Ax5** e monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{H}}$
4.	$\neg(\varphi \vee \psi) \vdash^c_{\mathrm{H}} (\varphi \to \varphi \vee \psi) \to ((\varphi \to \neg(\varphi \vee \psi)) \to \neg\varphi)$	**Ax9** e monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{H}}$
5.	$\neg(\varphi \vee \psi) \vdash^c_{\mathrm{H}} (\varphi \to \neg(\varphi \vee \psi)) \to \neg\varphi$	**MP** 3,4
6.	$\neg(\varphi \vee \psi) \vdash^c_{\mathrm{H}} \neg\varphi$	**MP** 2,5
7.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} \neg(\varphi \vee \psi) \to (\psi \to \neg(\varphi \vee \psi))$	**Ax1**
8.	$\neg(\varphi \vee \psi) \vdash^c_{\mathrm{H}} \psi \to \neg(\varphi \vee \psi)$	MTMP para $\vdash^c_{\mathrm{H}}$ 7
9.	$\neg(\varphi \vee \psi) \vdash^c_{\mathrm{H}} \psi \to \varphi \vee \psi$	**Ax6** e monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{H}}$
10.	$\neg(\varphi \vee \psi) \vdash^c_{\mathrm{H}} (\psi \to \varphi \vee \psi) \to ((\psi \to \neg(\varphi \vee \psi)) \to \neg\psi)$	**Ax9** e monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{H}}$
11.	$\neg(\varphi \vee \psi) \vdash^c_{\mathrm{H}} (\psi \to \neg(\varphi \vee \psi)) \to \neg\psi$	**MP** 9,10
12.	$\neg(\varphi \vee \psi) \vdash^c_{\mathrm{H}} \neg\psi$	**MP** 8,11
13.	$\neg(\varphi \vee \psi) \vdash^c_{\mathrm{H}} \neg\varphi \wedge \neg\psi$	$\wedge$**I** 6,12
14.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} \neg(\varphi \vee \psi) \to (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	MTD para $\vdash^c_{\mathrm{H}}$ 13

1.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to (\neg\varphi \to \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi))$	**Ax1**
2.	$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vdash^c_{\mathrm{H}} \neg\varphi \to \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	MTMP para $\vdash^c_{\mathrm{H}}$ 1
3.	$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vdash^c_{\mathrm{H}} \neg\varphi \to \neg\varphi \vee \neg\psi$	**Ax5** e monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{H}}$
4.	$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vdash^c_{\mathrm{H}} (\neg\varphi \to \neg\varphi \vee \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)) \to \varphi)$	
.		**Ax10** e monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{H}}$
5.	$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vdash^c_{\mathrm{H}} (\neg\varphi \to \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)) \to \varphi$	**MP** 3,4
6.	$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi$	**MP** 2,5
7.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to (\neg\psi \to \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi))$	**Ax1**
8.	$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vdash^c_{\mathrm{H}} \neg\psi \to \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	MTMP para $\vdash^c_{\mathrm{H}}$ 7
9.	$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vdash^c_{\mathrm{H}} \neg\psi \to \neg\varphi \vee \neg\psi$	**Ax6** e monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{H}}$
10.	$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vdash^c_{\mathrm{H}} (\neg\psi \to \neg\varphi \vee \neg\psi) \to ((\neg\psi \to \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)) \to \psi)$	
.		**Ax10** e monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{H}}$
11.	$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vdash^c_{\mathrm{H}} (\neg\psi \to \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)) \to \psi$	**MP** 9,10
12.	$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vdash^c_{\mathrm{H}} \psi$	**MP** 8,11
13.	$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \wedge \psi$	**MP** 6,12
14.	$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi), \neg(\varphi \wedge \psi) \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \wedge \psi$	monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{H}}$ 13
15.	$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi), \neg(\varphi \wedge \psi) \vdash^c_{\mathrm{H}} \neg(\varphi \wedge \psi)$	extensividade de $\vdash^c_{\mathrm{H}}$
16.	$\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash^c_{\mathrm{H}} \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to (\varphi \wedge \psi)$	MTD para $\vdash^c_{\mathrm{H}}$ 14
17.	$\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash^c_{\mathrm{H}} \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi)$	MTD para $\vdash^c_{\mathrm{H}}$ 15
18.	$\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash^c_{\mathrm{H}} (\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to (\varphi \wedge \psi)) \to ((\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi)) \to (\neg\varphi \vee \neg\psi))$	
.		**Ax10** e monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{H}}$
19.	$\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash^c_{\mathrm{H}} (\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi)) \to (\neg\varphi \vee \neg\psi)$	**MP** 16,18
20.	$\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash^c_{\mathrm{H}} \neg\varphi \vee \neg\psi$	**MP** 17,19
21.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} \neg(\varphi \wedge \psi) \to (\neg\varphi \vee \neg\psi)$	MTD para $\vdash^c_{\mathrm{H}}$ 20

Atente-se que para os axiomas $\neg\neg$**I** e **Morgan**$\neg\vee$ utilizámos o axioma **Ax9**, enquanto que para os axiomas $\neg\neg$**E** e **Morgan**$\neg\wedge$ utilizámos o axioma **Ax10**.

Proposição 5.22.
O par $\langle \mathcal{L}_\Gamma, \leq_\Gamma \rangle$ é um reticulado booleano.

Demonstração.
A distributividade de $\sqcap^{\mathcal{L}_\Gamma}$ e de $\sqcup^{\mathcal{L}_\Gamma}$ segue da distributividade de $\wedge$ e $\vee$.

Sejam $[\varphi]_{\equiv_\Gamma}, [\psi]_{\equiv_\Gamma} \in \mathcal{L}_\Gamma$. Considerem-se os seguintes certificados à Hilbert:

1.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} \psi \wedge \neg\psi \to \psi$	**Ax2**
2.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} \psi \wedge \neg\psi \to \neg\psi$	**Ax3**
3.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} (\psi \wedge \neg\psi \to \psi) \to ((\psi \wedge \neg\psi \to \neg\psi) \to \neg(\psi \wedge \neg\psi))$	**Ax9**
4.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} (\psi \wedge \neg\psi \to \neg\psi) \to \neg(\psi \wedge \neg\psi)$	**MP** 1,3
5.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} \neg(\psi \wedge \neg\psi)$	**MP** 2,4
6.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} \neg(\psi \wedge \neg\psi) \to (\neg\psi \vee \neg\neg\psi)$	**Morgan**$\neg\wedge$
7.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} \neg\psi \vee \neg\neg\psi$	**MP** 5,6
8.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} \neg\psi \to \psi \vee \neg\psi$	**Ax6**
9.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} \neg\neg\psi \to \psi$	**Morgan**$\neg\neg$**E**
10.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} \psi \to \psi \vee \neg\psi$	**Ax5**
11.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} \neg\neg\psi \to \psi \vee \neg\psi$	lema 5.17 9,10
12.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} \neg\psi \vee \neg\neg\psi \to ((\neg\psi \to (\psi \vee \neg\psi)) \to ((\neg\neg\psi \to (\psi \vee \neg\psi)) \to (\psi \vee \neg\psi)))$	
.		**Ax7**
13.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} (\neg\psi \to (\psi \vee \neg\psi)) \to ((\neg\neg\psi \to (\psi \vee \neg\psi)) \to (\psi \vee \neg\psi))$	**MP** 7,12
14.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} (\neg\neg\psi \to (\psi \vee \neg\psi)) \to (\psi \vee \neg\psi)$	**MP** 8,13
15.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} \psi \vee \neg\psi$	**MP** 11,14
16.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} (\psi \vee \neg\psi) \to (\varphi \to (\psi \vee \neg\psi))$	**Ax1**
17.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \to (\psi \vee \neg\psi)$	**MP** 15,16
18.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi \to (\psi \vee \neg\psi)$	monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{H}}$ 17

1.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} \psi \wedge \neg\psi \to \psi$	**Ax2**
2.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} \psi \wedge \neg\psi \to \neg\psi$	**Ax3**
3.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} \psi \to (\neg\varphi \to \psi)$	**Ax1**
4.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} \neg\psi \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$	**Ax1**
5.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} \psi \wedge \neg\psi \to (\neg\varphi \to \psi)$	lema 5.17 1,3
6.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} \psi \wedge \neg\psi \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$	lema 5.17 2,4
7.	$\psi \wedge \neg\psi \vdash^c_{\mathrm{H}} \neg\varphi \to \psi$	MTMP para $\vdash^c_{\mathrm{H}}$ 5
8.	$\psi \wedge \neg\psi \vdash^c_{\mathrm{H}} \neg\varphi \to \neg\psi$	MTMP para $\vdash^c_{\mathrm{H}}$ 6
9.	$\psi \wedge \neg\psi \vdash^c_{\mathrm{H}} (\neg\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \neg\psi) \to \varphi)$	**Ax10** e monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{H}}$
10.	$\psi \wedge \neg\psi \vdash^c_{\mathrm{H}} (\neg\varphi \to \neg\psi) \to \varphi$	**MP** 7,9
11.	$\psi \wedge \neg\psi \vdash^c_{\mathrm{H}} \varphi$	**MP** 8,10
12.	$\vdash^c_{\mathrm{H}} \psi \wedge \neg\psi \to \varphi$	MTD para $\vdash^c_{\mathrm{H}}$ 11
13.	$\Gamma \vdash^c_{\mathrm{H}} \psi \wedge \neg\psi \to \varphi$	monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{H}}$ 12

Logo, $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\psi \vee \neg\psi]_{\equiv_\Gamma} = \top^{\mathcal{L}_\Gamma}$ e $\bot^{\mathcal{L}_\Gamma} = [\psi \wedge \neg\psi]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\varphi]_{\equiv_\Gamma}$. Concluímos que $\top^{\mathcal{L}_\Gamma}$ e $\bot^{\mathcal{L}_\Gamma}$ são elemento topo e elemento base em $\langle \mathcal{L}_\Gamma, \leq_\Gamma \rangle$, respectivamente.

Seja $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \in \mathcal{L}_\Gamma$. Então,

$$\begin{aligned} [\varphi]_{\equiv_\Gamma} \sqcap^{\mathcal{L}_\Gamma} (-^{\mathcal{L}_\Gamma}[\varphi]_{\equiv_\Gamma}) &= [\varphi \wedge \neg\varphi]_{\equiv_\Gamma} \\ &= \bot^{\mathcal{L}_\Gamma}, \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} [\varphi]_{\equiv_\Gamma} \sqcup^{\mathcal{L}_\Gamma} (-^{\mathcal{L}_\Gamma}[\varphi]_{\equiv_\Gamma}) &= [\varphi \vee \neg\varphi]_{\equiv_\Gamma} \\ &= \top^{\mathcal{L}_\Gamma}. \end{aligned}$$

Concluímos que $-^{\mathcal{L}_\Gamma}[\varphi]_{\equiv_\Gamma}$ é complemento de $[\varphi]_{\equiv_\Gamma}$ em $\langle \mathcal{L}_\Gamma, \leq_\Gamma \rangle$.

$\square$

Proposição 5.23.
A álgebra de Lindenbaum-Tarski é uma álgebra booleana.

Demonstração.
O tuplo $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}/_{\equiv_\Gamma}, \sqcap^{\mathcal{L}_\Gamma}, \sqcup^{\mathcal{L}_\Gamma}, -^{\mathcal{L}_\Gamma}, \top^{\mathcal{L}_\Gamma}, \bot^{\mathcal{L}_\Gamma} \rangle$ corresponde ao reticulado $\langle \mathcal{L}_\Gamma, \leq_\Gamma \rangle$ segundo a definição algébrica de reticulado. Segue pela proposição 5.22 que a álgebra de Lindenbaum--Tarski é booleana.

$\square$

Teorema 5.24 (Completude do Cálculo de Hilbert para **LPC**).

$$\Gamma \vDash_{\mathbf{BA}} \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} \varphi \tag{5.6}$$

Demonstração.
Suponhamos que $\Gamma \vDash_{\mathbf{BA}} \varphi$. Considere-se a álgebra booleana de Lindenbaum-Tarski, $\mathcal{L}_\Gamma$, pela proposição 5.23. Tome-se uma valoração $v : \Pi_{\mathbf{LPC}} \to \mathcal{L}_\Gamma$ em $\mathcal{L}_\Gamma$, dada por $v(\pi) = [\pi]_{\equiv_\Gamma}$, e extendida naturalmente às fórmulas proposicionais por $[\![\psi]\!]_v^{\mathcal{L}_\Gamma} = [\psi]_{\equiv_\Gamma}$. Note-se que para qualquer $\gamma \in \Gamma$, temos $[\![\gamma]\!]_v^{\mathcal{L}_\Gamma} = \top^{\mathcal{L}_\Gamma}$, pela extensividade de $\vdash_{\mathrm{H}}^{c}$. Segue por hipótese que $[\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{L}_\Gamma} = \top^{\mathcal{L}_\Gamma}$, i.e., $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} = \top^{\mathcal{L}_\Gamma}$. Logo, $\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} \varphi$.

$\square$

5.3 $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}, \vDash_{\mathbf{BA}} \rangle \leq \langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}, \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \rangle \leq \langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}, \vDash_{\mathbf{2}} \rangle$

O próximo teorema enuncia a correcção e completude do Cálculo de Gentzen Clássico para as semânticas Denotacional e Algébrica. Vamos provar a correcção deste cálculo para a álgebra booleana **2** e a completude para a classe das álgebras booleanas **BA**. As restantes implicações seguirão da equivalência estabelecida no teorema 3.17.

Teorema 5.25 (Correcção e Completude do Cálculo de Gentzen para **LPC**).

$$\Delta_1 \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \Delta_2 \Leftrightarrow \Delta_1 \vDash_{\mathbf{2}} \Delta_2 \Leftrightarrow \Delta_1 \vDash_{\mathbf{BA}} \Delta_2 \tag{5.7}$$

Para provarmos a correcção do Cálculo de Gentzen para **LPC**, precisamos de definir a noção de satisfação de um sequente por uma valoração. A noção de satisfação de uma valoração num multi-conjunto coincide obviamente com a de conjunto, i.e., v é modelo de Δ se é modelo de δ, para todo $\delta \in \Delta$. A relação de consequência semântica para sequentes é no entanto ligeiramente diferente. Dizemos que um consequente Δ_2 é consequência semântica de um antecedente Δ_1, o que denotamos por $\Delta_1 \vDash_{\mathbf{2}} \Delta_2$, se todas as valorações que são modelo de Δ_1 são modelo de alguma fórmula em Δ_2.

Lema 5.26. *O axioma do Cálculo de Gentzen é correcto.*

Demonstração.
Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPC}} \to \{0,1\}$ uma valoração em **2** modelo de Δ_1, φ, i.e., modelo de todas as fórmulas em $\Delta_1 \cup \{\varphi\}$. É imediato que v é modelo de alguma fórmula em $\{\varphi\} \cup \Delta_2$, nomeadamente φ. Concluímos que $\Delta_1, \varphi \vDash_{\mathbf{2}} \varphi, \Delta_2$.

□

Lema 5.27. *A regra estrutural* **Cut** *do Cálculo de Gentzen é correcta.*

Demonstração.
Suponhamos que $\Delta_1 \vDash_{\mathbf{2}} \varphi, \Delta_2$ e $\Delta_1, \varphi \vDash_{\mathbf{2}} \Delta_2'$. Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPC}} \to \{0,1\}$ uma valoração em **2** modelo de Δ_1. Segue por hipótese que v é modelo de alguma fórmula em φ, Δ_2. Temos dois casos a considerar:

- se v é modelo de φ, então por hipótese v é modelo de algum $\delta_2' \in \Delta_2'$, donde v é modelo de alguma fórmula em $\Delta_2 \cup \Delta_2'$, nomeadamente δ_2';

- se v é modelo de algum $\delta_2 \in \Delta_2$, então v é modelo alguma fórmula em $\Delta_2 \cup \Delta_2'$, nomeadamente δ_2.

Em qualquer dos casos, concluímos que $\Delta_1 \vDash_{\mathbf{2}} \Delta_2 \cup \Delta_2'$.

□

Lema 5.28. *As regras para conectivos do Cálculo de Gentzen são correctas.*

Demonstração.
$\neg\mathbf{L}$: Suponhamos que $\Delta_1 \vDash_{\mathbf{2}} \varphi, \Delta_2$. Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPC}} \to \{0,1\}$ uma valoração em **2** modelo de $\Delta_1, \neg\varphi$. Em particular, v é modelo de Δ_1. Segue por hipótese que v é modelo de φ ou de algum $\delta_2 \in \Delta_2$. Como por hipótese v é modelo de $\neg\varphi$, segue que v é modelo de algum $\delta_2 \in \Delta_2$. Concluímos que $\Delta_1, \neg\varphi \vDash_{\mathbf{2}} \Delta_2$.

$\neg\mathbf{R}$: Suponhamos que $\Delta_1, \varphi \vDash_{\mathbf{2}} \Delta_2$. Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPC}} \to \{0,1\}$ uma valoração em **2** modelo de Δ_1. Temos dois casos a considerar:

- v é modelo de φ, donde por hipótese v é modelo de algum $\delta_2 \in \Delta_2$, e portanto v é modelo de alguma fórmula em $\{\neg\varphi\} \cup \Delta_2$, nomeadamente δ_2;

- v é modelo de $\neg\varphi$, e portanto v é modelo de alguma fórmula em $\{\neg\varphi\} \cup \Delta_2$, nomeadamente $\neg\varphi$.

Em qualquer dos casos, concluímos que $\Delta_1 \vDash_{\mathbf{2}} \neg\varphi, \Delta_2$.

$\wedge\mathbf{L}$: Suponhamos que $\Delta_1, \varphi \vDash_{\mathbf{2}} \Delta_2$. Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPC}} \to \{0,1\}$ uma valoração em **2** modelo de $\Delta_1, \varphi \wedge \psi$. Como $[\![\varphi \wedge \psi]\!]_v^{\mathbf{2}} = [\![\varphi]\!]_v^{\mathbf{2}} \sqcap [\![\psi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 1$ sse $[\![\varphi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 1$ e $[\![\psi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 1$, segue, em particular, que v é modelo de φ. Logo, v é modelo de Δ, φ. Segue por hipótese que v é modelo de algum $\delta_2 \in \Delta_2$. Concluímos que $\Delta, \varphi \wedge \psi \vDash_{\mathbf{2}} \Delta_2$.
O caso $\Delta_1, \psi \vDash_{\mathbf{2}} \Delta_2$ é análogo.

$\wedge\mathbf{R}$: Suponhamos que $\Delta_1 \vDash_{\mathbf{2}} \varphi, \Delta_2$ e $\Delta_1 \vDash_{\mathbf{2}} \psi, \Delta_2$. Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPC}} \to \{0,1\}$ uma valoração em **2** modelo de Δ_1. Segue por hipótese que v é modelo de φ ou de algum $\delta_2 \in \Delta_2$, e que v é modelo de ψ ou de algum $\delta_2' \in \Delta_2$ (podem ocorrer ambos os caso claro está, mas estamos sempre interessados no pior cenário). Temos quatro casos a considerar:

- v é modelo de φ e de ψ, donde v é modelo de $\varphi \wedge \psi$, e portanto é modelo de alguma fórmula em $\{\varphi \wedge \psi\} \cup \Delta_2$, nomeadamente $\{\varphi \wedge \psi\}$;
- v é modelo de φ e de δ_2', e portanto é modelo de alguma fórmula em $\{\varphi \wedge \psi\} \cup \Delta_2$, nomeadamente δ_2';
- v é modelo de δ_2 e de ψ, e portanto é modelo de alguma fórmula em $\{\varphi \wedge \psi\} \cup \Delta_2$, nomeadamente δ_2;
- v é modelo de δ_2 e de δ_2', e portanto é modelo de alguma fórmula em $\{\varphi \wedge \psi\} \cup \Delta_2$, nomeadamente δ_2 e δ_2'.

Em qualquer dos casos, concluímos que $\Delta_1 \vDash_{\mathbf{2}} \varphi \wedge \psi, \Delta_2$.

$\vee\mathbf{L}$: Suponhamos que $\Delta_1, \varphi \vDash_{\mathbf{2}} \Delta_2$ e $\Delta_1, \psi \vDash_{\mathbf{2}} \Delta_2$. Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPC}} \to \{0,1\}$ uma valoração em $\mathbf{2}$ modelo de $\Delta_1, \varphi \vee \psi$. Como $[\![\varphi \vee \psi]\!]_v^{\mathbf{2}} = [\![\varphi]\!]_v^{\mathbf{2}} \sqcup [\![\psi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 1$ sse $[\![\varphi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 1$ ou $[\![\psi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 1$, temos dois casos a considerar:

- v é modelo de φ, donde v é modelo de Δ_1, φ, e por hipótese v é modelo de algum $\delta_2 \in \Delta_2$;
- v é modelo de ψ, donde v é modelo de Δ_1, ψ, e por hipótese v é modelo de algum $\delta_2 \in \Delta_2$.

Em qualquer dos casos, concluímos que $\Delta_1, \varphi \vee \psi \vDash_{\mathbf{2}} \Delta_2$.

$\vee\mathbf{R}$: Suponhamos que $\Delta_1 \vDash_{\mathbf{2}} \varphi, \Delta_2$. Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPC}} \to \{0,1\}$ uma valoração em $\mathbf{2}$ modelo de Δ_1. Segue por hipótese que v é modelo de φ ou de algum $\delta_2 \in \Delta_2$. Temos dois casos a considerar:

- v é modelo de φ, donde v é modelo de $\varphi \vee \psi$, e portanto é modelo de alguma fórmula em $\{\varphi \vee \psi\} \cup \Delta_2$, nomeadamente $\{\varphi \vee \psi\}$;
- v é modelo de δ_2, e portanto é modelo de alguma fórmula em $\{\varphi \vee \psi\} \cup \Delta_2$, nomeadamente δ_2.

Em qualquer dos casos, concluímos que $\Delta_1 \vDash_{\mathbf{2}} \varphi \vee \psi, \Delta_2$.
O caso $\Delta_1 \vDash_{\mathbf{2}} \psi, \Delta_2$ é análogo.

$\to \mathbf{L}$: Suponhamos que $\Delta_1 \vDash_{\mathbf{2}} \varphi, \Delta_2$ e $\Delta_1, \psi \vDash_{\mathbf{2}} \Delta_2'$. Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPC}} \to \{0,1\}$ uma valoração em $\mathbf{2}$ modelo de $\Delta_1, \varphi \to \psi$. Em particular, v é modelo de Δ_1, donde por hipótese segue que v é modelo de φ ou de algum $\delta_2 \in \Delta_2$. Temos dois casos a considerar:

- v é modelo de φ, donde, como $[\![\varphi \to \psi]\!]_v^{\mathbf{2}} = -[\![\varphi]\!]_v^{\mathbf{2}} \sqcup [\![\psi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 1$ sse $[\![\varphi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 0$ ou $[\![\psi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 1$, segue que v é modelo de ψ. Logo, v é modelo de Δ_1, ψ. Segue por hipótese que v é modelo de algum $\delta_2' \in \Delta_2'$, e portanto v é modelo de alguma fórmula em $\Delta_2 \cup \Delta_2'$, nomeadamente δ_2';
- v é modelo de δ_2, e portanto v é modelo de alguma fórmula em $\Delta_2 \cup \Delta_2'$, nomeadamente δ_2.

Em qualquer dos casos, concluímos que $\Delta_1, \varphi \to \psi \vDash_{\mathbf{2}} \Delta_2$.

$\to \mathbf{R}$: Suponhamos que $\Delta_1, \varphi \vDash_{\mathbf{2}} \psi, \Delta_2$. Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPC}} \to \{0,1\}$ uma valoração em $\mathbf{2}$ modelo de Δ_1. Temos dois casos a considerar:

- v é modelo de φ, donde v é modelo de Δ_1, φ, e por hipótese v é modelo de ψ ou de algum $\delta_2 \in \Delta_2$. Temos dois casos a considerar:

  - v é modelo de ψ, donde, como $[\![\varphi \to \psi]\!]_v^{\mathbf{2}} = -[\![\varphi]\!]_v^{\mathbf{2}} \sqcup [\![\psi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 1$ sse $[\![\varphi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 0$ ou $[\![\psi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 1$, segue que v é modelo de $\varphi \to \psi$. Logo, v é modelo de alguma fórmula em $\{\varphi \to \psi\} \cup \Delta_2$, nomeadamente $\varphi \to \psi$;

  - v é modelo de δ_2, e portanto v é modelo de alguma fórmula em $\{\varphi \to \psi\} \cup \Delta_2$, nomeadamente δ_2.

- v não é modelo de φ, i.e., $[\![\varphi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 0$, donde, como $[\![\varphi \to \psi]\!]_v^{\mathbf{2}} = -[\![\varphi]\!]_v^{\mathbf{2}} \sqcup [\![\psi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 1$ sse $[\![\varphi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 0$ ou $[\![\psi]\!]_v^{\mathbf{2}} = 1$, segue que v é modelo de $\varphi \to \psi$. Logo, v é modelo de alguma fórmula em $\{\varphi \to \psi\} \cup \Delta_2$, nomeadamente $\varphi \to \psi$.

Em qualquer dos casos, concluímos que $\Delta_1 \vDash_{\mathbf{2}} \varphi \to \psi, \Delta_2$.

□

Teorema 5.29 (Correcção do Cálculo de Gentzen para **LPC**).

$$\Delta_1 \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \Delta_2 \Rightarrow \Delta_1 \vDash_{\mathbf{2}} \Delta_2 \tag{5.8}$$

Demonstração.
Suponhamos que $\Delta_1 \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \Delta_2$. Seja $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ uma prova que testemunha esse facto. A prova segue por indução no comprimento da prova, $n \in \mathbb{N}$.
Base:
Tem-se $\vartheta_1 = \Delta_1 \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \Delta_2$, e o sequente ϑ_1 segue pelo axioma **Ax** do Cálculo de Gentzen. Segue pelo lema 5.26 que $\Delta_1 \vDash_{\mathbf{2}} \Delta_2$.
Passo:
Tem-se $\vartheta_1 = \Delta_1 \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \Delta_2$, e o sequente ϑ_1 segue do sequente $\vartheta_i \in \{\vartheta_2, \ldots, \vartheta_n\}$ por uma regra para conectivos com uma premissa do Cálculo de Gentzen, ou segue de $\vartheta_i, \vartheta_j \in \{\vartheta_2, \ldots, \vartheta_n\}$ por uma regra binária para conectivos com duas premissas do Cálculo de Gentzen. Mas, $\vartheta_i, \ldots \vartheta_n$ e $\vartheta_j, \ldots \vartheta_n$ são certificados à Gentzen para os sequentes ϑ_i e ϑ_j, respectivamente. Segue por hipótese de indução que $\mathrm{Ant}(\vartheta_i) \vDash_{\mathbf{2}} \mathrm{Cons}(\vartheta_i)$ e $\mathrm{Ant}(\vartheta_j) \vDash_{\mathbf{2}} \mathrm{Cons}(\vartheta_j)$. Segue pelos lemas 5.27 e 5.28 que $\Delta_1 \vDash_{\mathbf{2}} \Delta_2$.

□

Note-se que a correcção do Cálculo de Gentzen para uma álgebra booleana $\mathcal{B}$ podia ser feita exactamente do mesmo modo, substituindo as valorações em $\{0, 1\}$ por valorações em B, e os elementos distinguidos 0 e 1 por $\perp^{\mathcal{B}}$ e $\top^{\mathcal{B}}$, respectivamente. Daí seguiria igualmente a correcção do Cálculo de Gentzen Clássico para **BA**.

Tratamos agora a completude do Cálculo de Gentzen Clássico para a classe das álgebras booleanas **BA**.

Vamos mais uma vez construir a álgebra de Lindenbaum-Tarski, agora para o Cálculo de Gentzen. Definimos a relação $\leq_\Delta$ em $\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ por

$$\varphi \leq_\Delta \psi \text{ sse } \Delta \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \varphi \to \psi\ .$$

Lema 5.30. *A relação $\leq_\Delta$ é reflexiva e transitiva.*

Demonstração.
Reflexividade: Seja $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$. Considere-se o seguinte certificado à Gentzen de $\varphi \to \varphi$ a partir de Δ:

1.	$\Delta \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \varphi \to \varphi$	$\to$ **R** 2
2.	$\Delta, \varphi \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \varphi$	**Ax**

Transitividade: Sejam $\varphi, \psi, \rho \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ tal que $\varphi \leq_{\Delta} \psi$ e $\psi \leq_{\Delta} \rho$. Considere-se o seguinte certificado à Gentzen de $\varphi \to \rho$ a partir de Δ:

1.	$\Delta \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \varphi \to \rho$	$\to$ **R** 2
2.	$\Delta, \varphi \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \rho$	**Cut** 3,4
3.	$\Delta, \varphi, \psi \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \rho$	$\to$ **R** 5
4.	$\Delta, \varphi \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \psi$	$\to$ **R** 6
5.	$\Delta, \varphi \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \psi \to \rho$	monotonia de $\vdash_{\mathrm{G}}^{c}$ 7
6.	$\Delta \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \varphi \to \psi$	hipótese
7.	$\Delta \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \psi \to \rho$	hipótese

□

Definimos a *relação de interderivabilidade em* $\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$, que se denota por $\equiv_{\Delta}$, por

$$\varphi \equiv_{\Delta} \psi \text{ sse } \Delta \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \varphi \leftrightarrow \psi \ .$$

Lema 5.31. *A relação* $\equiv_{\Delta}$ *é uma relação de congruência em* $\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$.

Demonstração.
Provamos apenas que $\equiv_{\Delta}$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$.

Reflexividade: Seja $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$. Considere-se o seguinte certificado à Gentzen de $\varphi \leftrightarrow \varphi$ a partir de Δ:

1.	$\Delta \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \varphi \leftrightarrow \varphi$	igual a 2
2.	$\Delta \vdash_{\mathrm{G}}^{c} (\varphi \to \varphi) \wedge (\varphi \to \varphi)$	$\wedge$**R** 3,4
3.	$\Delta \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \varphi \to \varphi$	lema 5.30
4.	$\Delta \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \varphi \to \varphi$	lema 5.30

Transitividade: Sejam $\varphi, \psi, \rho \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ tal que $\varphi \equiv_{\Delta} \psi$ e $\psi \equiv_{\Delta} \rho$. Considere-se o seguinte certificado à Gentzen de $\varphi \leftrightarrow \rho$ a partir de Δ:

1.	$\Delta \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi \leftrightarrow \rho$	igual a 2
2.	$\Delta \vdash^c_{\mathrm{G}} (\varphi \to \rho) \wedge (\rho \to \varphi)$	$\wedge$**R** 3,4
3.	$\Delta \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi \to \rho$	**Cut** 5,6
4.	$\Delta \vdash^c_{\mathrm{G}} \rho \to \varphi$	**Cut** 13,14
5.	$\Delta, (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi \to \rho$	$\wedge$**L** 8
6.	$\Delta \vdash^c_{\mathrm{G}} (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$	igual a 7
7.	$\Delta \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi \leftrightarrow \psi$	hipótese
8.	$\Delta, \varphi \to \psi \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi \to \rho$	**Cut** 9,10
9.	$\Delta, \varphi \to \psi, (\psi \to \rho) \wedge (\rho \to \psi) \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi \to \rho$	$\wedge$**L** 21
10.	$\Delta, \varphi \to \psi \vdash^c_{\mathrm{G}} (\psi \to \rho) \wedge (\rho \to \psi)$	monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{G}}$ 11
11.	$\Delta \vdash^c_{\mathrm{G}} (\psi \to \rho) \wedge (\rho \to \psi)$	igual a 12
12.	$\Delta \vdash^c_{\mathrm{G}} \psi \leftrightarrow \rho$	hipótese
13.	$\Delta, (\psi \to \rho) \wedge (\rho \to \psi) \vdash^c_{\mathrm{G}} \rho \to \varphi$	$\wedge$**L** 16
14.	$\Delta \vdash^c_{\mathrm{G}} (\psi \to \rho) \wedge (\rho \to \psi)$	igual a 15
15.	$\Delta \vdash^c_{\mathrm{G}} \psi \leftrightarrow \rho$	hipótese
16.	$\Delta, \rho \to \psi \vdash^c_{\mathrm{G}} \rho \to \varphi$	**Cut** 17,18
17.	$\Delta, \rho \to \psi, (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \vdash^c_{\mathrm{G}} \rho \to \varphi$	$\wedge$**L** 22
18.	$\Delta, \rho \to \psi \vdash^c_{\mathrm{G}} (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$	monotonia de $\vdash^c_{\mathrm{G}}$ 19
19.	$\Delta \vdash^c_{\mathrm{G}} (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$	igual a 20
20.	$\Delta \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi \leftrightarrow \psi$	hipótese
21.	$\Delta, \varphi \to \psi, \psi \to \rho \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi \to \rho$	lema 5.30
22.	$\Delta, \rho \to \psi, \psi \to \varphi \vdash^c_{\mathrm{G}} \rho \to \varphi$	lema 5.30

Simetria: Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ tal que $\varphi \equiv_\Delta \psi$. Considere-se o seguinte certificado à Gentzen de $\psi \leftrightarrow \varphi$ a partir de Δ:

1.	$\Delta \vdash^c_{\mathrm{G}} \psi \leftrightarrow \varphi$	igual a 2
2.	$\Delta \vdash^c_{\mathrm{G}} (\psi \to \varphi) \wedge (\varphi \to \psi)$	$\wedge$**R** 3,4
3.	$\Delta \vdash^c_{\mathrm{G}} \psi \to \varphi$	**Cut** 5,6
4.	$\Delta \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi \to \psi$	**Cut** 9,10
5.	$\Delta, (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \vdash^c_{\mathrm{G}} \psi \to \varphi$	$\wedge$**L** 8
6.	$\Delta \vdash^c_{\mathrm{G}} (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$	igual a 7
7.	$\Delta \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi \leftrightarrow \psi$	hipótese
8.	$\Delta, \psi \to \varphi \vdash^c_{\mathrm{G}} \psi \to \varphi$	**Ax**
9.	$\Delta, (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi \to \psi$	$\wedge$**L** 12
10.	$\Delta \vdash^c_{\mathrm{G}} (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$	igual a 11
11.	$\Delta \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi \leftrightarrow \psi$	hipótese
12.	$\Delta, \varphi \to \psi \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi \to \psi$	**Ax**

□

Definição 5.32. A *álgebra de Lindenbaum-Tarski* para **LPC** é definida por

$$\mathcal{L}_\Delta = \langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}} / \equiv_\Delta, \sqcap^{\mathcal{L}_\Delta}, \sqcup^{\mathcal{L}_\Delta}, -^{\mathcal{L}_\Delta}, \top^{\mathcal{L}_\Delta}, \bot^{\mathcal{L}_\Delta} \rangle \ ,$$

onde:

- $[\varphi]_{\equiv_\Delta} \sqcap^{\mathcal{L}_\Delta} [\psi]_{\equiv_\Delta} = [\varphi \wedge \psi]_{\equiv_\Delta}$;
- $[\varphi]_{\equiv_\Delta} \sqcup^{\mathcal{L}_\Delta} [\psi]_{\equiv_\Delta} = [\varphi \vee \psi]_{\equiv_\Delta}$;
- $-^{\mathcal{L}_\Delta}[\varphi]_{\equiv_\Delta} = [\neg\varphi]_{\equiv_\Delta}$;
- $\top^{\mathcal{L}_\Delta} = [\varphi \vee \neg\varphi]_{\equiv_\Delta}$;
- $\bot^{\mathcal{L}_\Delta} = [\varphi \wedge \neg\varphi]_{\equiv_\Delta}$.

Proposição 5.33.
O par $\langle \mathcal{L}_\Delta, \leq_\Delta \rangle$ é um s.p.o..

Demonstração.
A reflexividade e transitividade de $\leq_\Delta$ em $\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ mantêm-se válidas em $\mathcal{L}_\Delta$, segundo os mesmos certificados do lema 5.30. A anti-simetria de $\leq_\Delta$ em $\mathcal{L}_\Delta$ segue da definição de $\equiv_\Delta$.
□

Proposição 5.34.
O par $\langle \mathcal{L}_\Delta, \leq_\Delta \rangle$ é um reticulado.

Demonstração.
Ínfimo: Sejam $[\varphi]_{\equiv_\Delta}, [\psi]_{\equiv_\Delta} \in \mathcal{L}_\Delta$. Considerem-se os seguintes certificados à Gentzen:

1.	$\Delta \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \varphi \wedge \psi \to \varphi$	$\to$ **R** 2
2.	$\Delta, \varphi \wedge \psi \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \varphi$	$\wedge$**L** 3
3.	$\Delta, \varphi \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \varphi$	**Ax**

1.	$\Delta \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \varphi \wedge \psi \to \psi$	$\to$ **R** 2
2.	$\Delta, \varphi \wedge \psi \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \psi$	$\wedge$**L** 3
3.	$\Delta, \psi \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \psi$	**Ax**

Logo, $[\varphi]_{\equiv_\Delta} \sqcap^{\mathcal{L}_\Delta} [\psi]_{\equiv_\Delta} \leq_\Delta [\varphi]_{\equiv_\Delta}$ e $[\varphi]_{\equiv_\Delta} \sqcap^{\mathcal{L}_\Delta} [\psi]_{\equiv_\Delta} \leq_\Delta [\psi]_{\equiv_\Delta}$.

Seja agora $[\rho]_{\equiv_\Delta} \in \mathcal{L}_\Delta$ tal que $[\rho]_{\equiv_\Delta} \leq_\Delta [\varphi]_{\equiv_\Delta}$ e $[\rho]_{\equiv_\Delta} \leq_\Delta [\psi]_{\equiv_\Delta}$. Considere-se o seguinte certificado à Gentzen:

1.	$\Delta \vdash^c_{\mathrm{G}} \rho \to \varphi \wedge \psi$	$\to$ **R** 2
2.	$\Delta, \rho \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi \wedge \psi$	$\wedge$**R** 3,4
3.	$\Delta, \rho \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi$	MTD para $\vdash^c_{\mathrm{G}}$ 5
4.	$\Delta, \rho \vdash^c_{\mathrm{G}} \psi$	MTD para $\vdash^c_{\mathrm{G}}$ 6
5.	$\Delta \vdash^c_{\mathrm{G}} \rho \to \varphi$	hipótese
6.	$\Delta \vdash^c_{\mathrm{G}} \rho \to \psi$	hipótese

Logo, $[\rho]_{\equiv_\Delta} \leq_\Delta [\varphi]_{\equiv_\Delta} \sqcap^{\mathcal{L}_\Delta} [\psi]_{\equiv_\Delta}$.

Concluímos que $[\varphi]_{\equiv_\Delta} \sqcap^{\mathcal{L}_\Delta} [\psi]_{\equiv_\Delta}$ é ínfimo de $[\varphi]_{\equiv_\Delta}$ e $[\psi]_{\equiv_\Delta}$ em $\mathcal{L}_\Delta$.

Supremo: Sejam $[\varphi]_{\equiv_\Delta}, [\psi]_{\equiv_\Delta} \in \mathcal{L}_\Delta$. Considerem-se os seguintes certificados à Gentzen:

1.	$\Delta \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi \to \varphi \vee \psi$	$\to$ **R** 2
2.	$\Delta, \varphi \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi \vee \psi$	$\vee$**R** 3
3.	$\Delta, \varphi \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi$	**Ax**

1.	$\Delta \vdash^c_{\mathrm{G}} \psi \to \varphi \vee \psi$	$\to$ **R** 2
2.	$\Delta, \psi \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi \vee \psi$	$\vee$**R** 3
3.	$\Delta, \psi \vdash^c_{\mathrm{G}} \psi$	**Ax**

Logo, $[\varphi]_{\equiv_\Delta} \leq_\Delta [\varphi]_{\equiv_\Delta} \sqcup^{\mathcal{L}_\Delta} [\psi]_{\equiv_\Delta}$ e $[\psi]_{\equiv_\Delta} \leq_\Delta [\varphi]_{\equiv_\Delta} \sqcup^{\mathcal{L}_\Delta} [\psi]_{\equiv_\Delta}$.

Seja agora $[\rho]_{\equiv_\Delta} \in \mathcal{L}_\Delta$ tal que $[\varphi]_{\equiv_\Delta} \leq_\Delta [\rho]_{\equiv_\Delta}$ e $[\psi]_{\equiv_\Delta} \leq_\Delta [\rho]_{\equiv_\Delta}$. Considere-se o seguinte certificado à Gentzen:

1.	$\Delta \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi \vee \psi \to \rho$	$\to$ **R** 2
2.	$\Delta, \varphi \vee \psi \vdash^c_{\mathrm{G}} \rho$	$\vee$**L** 3,4
3.	$\Delta, \varphi \vdash^c_{\mathrm{G}} \rho$	MTD para $\vdash^c_{\mathrm{G}}$ 5
4.	$\Delta, \psi \vdash^c_{\mathrm{G}} \rho$	MTD para $\vdash^c_{\mathrm{G}}$ 6
5.	$\Delta \vdash^c_{\mathrm{G}} \varphi \to \rho$	hipótese
6.	$\Delta \vdash^c_{\mathrm{G}} \psi \to \rho$	hipótese

Logo, $[\varphi]_{\equiv_\Delta} \sqcup^{\mathcal{L}_\Delta} [\psi]_{\equiv_\Delta} \leq_\Delta [\rho]_{\equiv_\Delta}$.

Concluímos que $[\varphi]_{\equiv_\Delta} \sqcup^{\mathcal{L}_\Delta} [\psi]_{\equiv_\Delta}$ é supremo de $[\varphi]_{\equiv_\Delta}$ e $[\psi]_{\equiv_\Delta}$ em $\mathcal{L}_\Delta$.

$\square$

Proposição 5.35.
O par $\langle \mathcal{L}_\Delta, \leq_\Delta \rangle$ é um reticulado booleano.

Demonstração.

A distributividade de $\sqcap^{\mathcal{L}_\Delta}$ e de $\sqcup^{\mathcal{L}_\Delta}$ segue da distributividade de $\wedge$ e $\vee$.

Sejam $[\varphi]_{\equiv_\Delta}, [\psi]_{\equiv_\Delta} \in \mathcal{L}_\Delta$. Considerem-se os seguintes certificados à Gentzen:

1.	$\Delta \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \varphi \to (\psi \vee \neg\psi)$	$\to$**R** 2
2.	$\Delta, \varphi \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \psi \vee \neg\psi$	**Cut** 3,4
3.	$\Delta, \varphi, \neg(\neg\psi \wedge \neg\neg\psi) \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \psi \vee \neg\psi$	$\neg$**L** 11
4.	$\Delta, \varphi \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \neg(\neg\psi \wedge \neg\neg\psi)$	$\neg$**R** 5
5.	$\Delta, \varphi, \neg\psi \wedge \neg\neg\psi \vdash_{\mathrm{G}}^{c}$	**Cut** 6,7
6.	$\Delta, \varphi, \neg\psi \wedge \neg\neg\psi, \neg\psi \vdash_{\mathrm{G}}^{c}$	$\wedge$**L** 8
7.	$\Delta, \varphi, \neg\psi \wedge \neg\neg\psi \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \neg\psi$	$\wedge$**L** 10
8.	$\Delta, \varphi, \neg\neg\psi, \neg\psi \vdash_{\mathrm{G}}^{c}$	$\neg$**L** 9
9.	$\Delta, \varphi, \neg\psi \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \neg\psi$	**Ax**
10.	$\Delta, \varphi, \neg\psi \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \neg\psi$	**Ax**
11.	$\Delta, \varphi \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \psi \vee \neg\psi, \neg\psi \wedge \neg\neg\psi$	$\wedge$**R** 12,13
12.	$\Delta, \varphi \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \psi \vee \neg\psi, \neg\psi$	$\neg$**R** 14
13.	$\Delta, \varphi \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \psi \vee \neg\psi, \neg\neg\psi$	$\neg$**R** 16
14.	$\Delta, \varphi, \psi \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \psi \vee \neg\psi$	$\vee$**R** 15
15.	$\Delta, \varphi, \psi \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \psi$	**Ax**
16.	$\Delta, \varphi, \neg\psi \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \psi \vee \neg\psi$	$\vee$**R** 17
17.	$\Delta, \varphi, \neg\psi \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \neg\psi$	**Ax**

1.	$\Delta \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \psi \wedge \neg\psi \to \varphi$	$\to$**R** 2
2.	$\Delta, \psi \wedge \neg\psi \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \varphi$	**Cut** 3,4
3.	$\Delta, \psi \wedge \neg\psi, \psi \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \varphi$	$\wedge$**L** 5
4.	$\Delta, \psi \wedge \neg\psi \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \psi$	$\wedge$**L** 6
5.	$\Delta, \neg\psi, \psi \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \varphi$	$\neg$**L** 7
6.	$\Delta, \psi \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \psi$	**Ax**
7.	$\Delta, \psi \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \psi, \varphi$	**Ax**

Logo, $[\varphi]_{\equiv_\Delta} \leq_\Delta [\psi \vee \neg\psi]_{\equiv_\Delta} = \top^{\mathcal{L}_\Delta}$ e $\bot^{\mathcal{L}_\Delta} = [\psi \wedge \neg\psi]_{\equiv_\Delta} \leq_\Delta [\varphi]_{\equiv_\Delta}$. Concluímos que $\top^{\mathcal{L}_\Delta}$ e $\bot^{\mathcal{L}_\Delta}$ são elemento topo e elemento base em $\langle \mathcal{L}_\Delta, \leq_\Delta \rangle$, respectivamente.

Seja $[\varphi]_{\equiv_\Delta} \in \mathcal{L}_\Delta$. Então,

$$\begin{aligned} [\varphi]_{\equiv_\Delta} \sqcap^{\mathcal{L}_\Delta} (-^{\mathcal{L}_\Delta}[\varphi]_{\equiv_\Delta}) &= [\varphi \wedge \neg\varphi]_{\equiv_\Delta} \\ &= \bot^{\mathcal{L}_\Delta}, \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}[\varphi]_{\equiv_\Delta} \sqcup^{\mathcal{L}_\Delta} (-^{\mathcal{L}_\Delta}[\varphi]_{\equiv_\Delta}) &= [\varphi \vee \neg\varphi]_{\equiv_\Delta} \\ &= \top^{\mathcal{L}_\Delta}.\end{aligned}$$

Concluímos que $-^{\mathcal{L}_\Delta}[\varphi]_{\equiv_\Delta}$ é complemento de $[\varphi]_{\equiv_\Delta}$ em $\langle \mathcal{L}_\Delta, \leq_\Delta \rangle$.

□

Proposição 5.36.
A álgebra de Lindenbaum-Tarski é uma álgebra booleana.

Demonstração.
O tuplo $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}/\equiv_\Delta, \sqcap^{\mathcal{L}_\Delta}, \sqcup^{\mathcal{L}_\Delta}, -^{\mathcal{L}_\Delta}, \top^{\mathcal{L}_\Delta}, \perp^{\mathcal{L}_\Delta} \rangle$ corresponde ao reticulado $\langle \mathcal{L}_\Delta, \leq_\Delta \rangle$ segundo a definição algébrica de reticulado. Segue pela proposição 5.35 que a álgebra de Lindenbaum-Tarski é booleana.

□

Teorema 5.37 (Completude do Cálculo de Gentzen para **LPC**).

$$\Delta_1 \models_{\mathbf{BA}} \Delta_2 \Rightarrow \Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2 \tag{5.9}$$

Demonstração.
Suponhamos que $\Delta_1 \models_{\mathbf{BA}} \Delta_2$. Considere-se a álgebra booleana de Lindenbaum-Tarski, $\mathcal{L}_{\Delta_1}$, pela proposição 5.36. Tome-se uma valoração $v : \Pi_{\mathbf{LPC}} \to \mathcal{L}_{\Delta_1}$ em $\mathcal{L}_{\Delta_1}$, dada por $v(\pi) = [\pi]_{\equiv_{\Delta_1}}$, e estendida naturalmente às fórmulas proposicionais por $[\![\psi]\!]_v^{\mathcal{L}_{\Delta_1}} = [\psi]_{\equiv_{\Delta_1}}$. Note-se que para qualquer $\delta_1 \in \Delta_1$, temos $[\![\delta_1]\!]_v^{\mathcal{L}_{\Delta_1}} = \top^{\mathcal{L}_{\Delta_1}}$, pela extensividade de $\vdash^c_{\mathrm{G}}$. Segue por hipótese que $[\![\delta_2]\!]_v^{\mathcal{L}_{\Delta_1}} = \top^{\mathcal{L}_{\Delta_1}}$, i.e., $[\delta_2]_{\equiv_{\Delta_1}} = \top^{\mathcal{L}_{\Delta_1}}$, para algum $\delta_2 \in \Delta_2$. Logo, $\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2$.
□

Exibimos ainda outra prova para a completude do Cálculo de Gentzen Clássico para **2**, agora por indução no número de conectivos do sequente $\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2$.

Teorema 5.38 (Completude do Cálculo de Gentzen para **LPC**).

$$\Delta_1 \models_{\mathbf{2}} \Delta_2 \Rightarrow \Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2 \tag{5.10}$$

Demonstração.
Suponhamos que $\Delta_1 \models_{\mathbf{2}} \Delta_2$. A prova segue por indução no número de conectivos do sequente $\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2$, $n \in \mathbb{N}$.
Base:
Então não existem conectivos lógicos nas fórmulas em $\Delta_1 \cup \Delta_2$, i.e., $\Delta_1, \Delta_2 \subseteq \Pi_{\mathbf{LPC}}$. Como por hipótese $\Delta_1 \models_{\mathbf{2}} \Delta_2$, segue que $\Delta_1 \cap \Delta_2 \neq \varnothing$, caso contrário bastaria consideramos uma valoração v tal que

$$v(\pi) = \begin{cases} 1 & \text{, se } \pi \in \Delta_1 \\ 0 & \text{, se } \pi \in \Delta_2 \end{cases} \tag{5.11}$$

para refutar o sequente $\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2$. Logo, o sequente $\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2$ segue pelo axioma **Ax** do cálculo de Gentzen.
Passo:
Então existem n conectivos lógicos nas fórmulas em $\Delta_1 \cup \Delta_2$. Seja $\delta \in \Delta_1 \cup \Delta_2$ uma fórmula proposicional onde ocorre um conectivo lógico. Temos dois casos a considerar:

- $\delta \in \Delta_1$
  Seja $\Delta_1' = \Delta_1 \backslash \{\delta\}$. A prova segue por indução na estrutura de $\delta \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$.

  - $\delta \equiv \neg\psi$
    Note-se que $\Delta_1', \neg\psi \vDash_{\mathbf{2}} \Delta_2$ sse $\Delta_1' \vDash_{\mathbf{2}} \psi, \Delta_2$. Segue por hipótese de indução que $\Delta_1' \vdash^c_{\mathrm{G}} \psi, \Delta_2$. Logo, o sequente $\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2$ segue deste certificado pela regra $\neg\mathbf{L}$;
  - $\delta \equiv \psi \wedge \rho$
    Note-se que $\Delta_1', \psi \wedge \rho \vDash_{\mathbf{2}} \Delta_2$ sse $\Delta_1', \psi \vDash_{\mathbf{2}} \Delta_2$ e $\Delta_1', \rho \vDash_{\mathbf{2}} \Delta_2$. Segue por hipótese de indução que $\Delta_1', \psi \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2$ e $\Delta_1', \rho \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2$. Logo, o sequente $\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2$ segue de ambos os certificados pela regra $\vee\mathbf{L}$;
  - $\delta \equiv \psi \vee \rho$
    Note-se que $\Delta_1', \psi \vee \rho \vDash_{\mathbf{2}} \Delta_2$ sse $\Delta_1', \psi \vDash_{\mathbf{2}} \Delta_2$ ou $\Delta_1', \rho \vDash_{\mathbf{2}} \Delta_2$. Segue por hipótese de indução que $\Delta_1', \psi \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2$ ou $\Delta_1', \rho \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2$. Logo, o sequente $\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2$ segue de algum destes certificados pela regra $\vee\mathbf{L}$;
  - $\delta \equiv \psi \to \rho$
    Note-se que $\Delta_1', \psi \to \rho \vDash_{\mathbf{2}} \Delta_2$ sse $\Delta_1' \vDash_{\mathbf{2}} \psi, \Delta_2$ ou $\Delta_1', \rho \vDash_{\mathbf{2}} \Delta_2$. Segue por hipótese de indução que $\Delta_1' \vdash^c_{\mathrm{G}} \psi, \Delta_2$ ou $\Delta_1', \rho \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2$. Logo, o sequente $\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2$ segue de ambos os certificados pela regra $\to \mathbf{L}$.

- $\delta \in \Delta_2$
  Seja $\Delta_2' = \Delta_2 \backslash \{\delta\}$. A prova segue por indução na estrutura de $\delta \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$.

  - $\delta \equiv \neg\psi$
    Note-se que $\Delta_1 \vDash_{\mathbf{2}} \neg\psi, \Delta_2'$ sse $\Delta_1, \psi \vDash_{\mathbf{2}} \Delta_2'$. Segue por hipótese de indução que $\Delta_1, \psi \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2'$. Logo, o sequente $\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2$ segue deste certificado pela regra $\neg\mathbf{R}$;
  - $\delta \equiv \psi \wedge \rho$
    Note-se que $\Delta_1 \vDash_{\mathbf{2}} \psi \wedge \rho, \Delta_2'$ sse $\Delta_1 \vDash_{\mathbf{2}} \psi, \Delta_2'$ e $\Delta_1 \vDash_{\mathbf{2}} \rho, \Delta_2'$. Segue por hipótese de indução que $\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \psi, \Delta_2'$ e $\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \rho, \Delta_2'$. Logo, o sequente $\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2$ segue de ambos os certificados pela regra $\vee\mathbf{R}$;
  - $\delta \equiv \psi \vee \rho$
    Note-se que $\Delta_1 \vDash_{\mathbf{2}} \psi \vee \rho, \Delta_2'$ sse $\Delta_1 \vDash_{\mathbf{2}} \psi, \Delta_2'$ ou $\Delta_1 \vDash_{\mathbf{2}} \rho, \Delta_2'$. Segue por hipótese de indução que $\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \psi, \Delta_2'$ ou $\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \rho, \Delta_2'$. Logo, o sequente $\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2$ segue de algum destes certificados pela regra $\vee\mathbf{R}$;
  - $\delta \equiv \psi \to \rho$
    Note-se que $\Delta_1 \vDash_{\mathbf{2}} \psi \to \rho, \Delta_2'$ sse $\Delta_1, \psi \vDash_{\mathbf{2}} \rho, \Delta_2'$. Segue por hipótese de indução que $\Delta_1, \psi \vdash^c_{\mathrm{G}} \rho, \Delta_2'$. Logo, o sequente $\Delta_1 \vdash^c_{\mathrm{G}} \Delta_2$ segue deste certificado pela regra $\to \mathbf{R}$.

□

5.4 Observações

Nesta última secção tecemos alguns comentários sobre as demonstrações dos resultados que dão nome ao presente capítulo.

Comecemos pelo Cálculo Natural. É interessante reparar que as regras $\neg\mathbf{I}$ e $\neg\mathbf{E}$ são as únicas cuja correcção (entenda-se, na meta-linguagem) recorre a um raciocínio por absurdo. Ainda assim, apenas a demonstração da regra $\neg\mathbf{E}$ é uma verdadeira demonstração por absurdo, como já fizemos notar; quanto à completude, observamos que as regras da negação apenas são utilizadas nos certificados da existência de elementos topo e base na álgebra de

Lindenbaum.

No Cálculo de Hilbert, constatamos que recorremos a propriedades das álgebras booleanas (como a idempotência de $-^{\mathcal{B}}$ e ambas as leis de Morgan) para a correcção dos axiomas; quanto à completude, os axiomas **Ax9** e **Ax10** apenas são utilizados nos certificados da existência de elementos topo e base na álgebra de Lindenbaum.

No Cálculo de Gentzen, verificamos que a correcção (entenda-se novamente, na metalinguagem) das regras $\neg$**R** e $\rightarrow$ **R** envolve o princípio do terceiro excluído; quanto à completude, as regras $\neg$**R** e $\neg$**L** são utilizadas somente nos certificados da existência de elementos topo e base na álgebra de Lindenbaum. Uma última observação respeitante a este cálculo. Não foi necessário recorrer às regras auxiliares de Morgan e da dupla negação para estabelecer a completude do Cálculo de Gentzen Clássico (mais precisamente, para o certificado da existência de elemento topo).

A tabela 5.1 discrimina as regras da negação que foram utilizadas nos certificados da existência de elementos topo e base na álgebra de Lindenbaum clássica, para os três cálculos estudados.

	Topo	Base
$\vdash^c_{\mathrm{N}}$	$\neg$**I** e $\neg$**E**	$\neg$**E**
$\vdash^c_{\mathrm{H}}$	**Ax9** e **Ax10**	**Ax10**
$\vdash^c_{\mathrm{G}}$	$\neg$**R** e $\neg$**L**	$\neg$**L**

Tabela 5.1: Regras da negação nos certificados da álgebra de Lindenbaum-Tarski clássica.

6 | Lindenbaum-Tarski para LPI

Neste capítulo enunciamos os teoremas que nos garantem que os cálculos introduzidos na secção 2.2 preservam a veracidade das fórmulas proposicionais segundo as semânticas da secção 4.2; e, que além disso, todas as fórmulas verdadeiras segundo as semânticas da secção 4.2 são alcançadas pelos cálculos estudados na secção 2.2. Por outras palavras, queremos demonstrar que as lógicas $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}, \vdash \rangle$ e $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}, \vDash \rangle$ apresentam a mesma Lógica.
A exposição é em tudo semelhante à do capítulo 5.

Exibiremos novamente a construção detalhada da álgebra de Lindenbaum-Tarski para os três cálculos intuicionistas introduzidos. Assinalaremos todos os certificados que permanecem inalterados na mudança de paradigma para uma melhor comparação entre os casos clássicos e intuicionistas.

6.1 $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}, \vDash_{\mathbf{HA}} \rangle = \langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}, \vdash_{\mathrm{N}}^{i} \rangle$

O próximo teorema enuncia a correcção e completude do Cálculo Natural Intuicionista para as semânticas Algébrica e de Kripke. Vamos provar a correcção e completude deste cálculo para a classe das álgebras de Heyting. As restantes implicações seguirão da equivalência estabelecida no teorema 4.18.

Teorema 6.1 (Correcção e Completude do Cálculo Natural para **LPI**).

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{N}}^{i} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vDash_{\mathbf{K}} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi \tag{6.1}$$

A correcção do Cálculo Natural para **LPI** segue da caracterização (1):

$$\forall z \in \mathcal{H} \quad z \leq_{\mathcal{H}} [\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}} \rightarrow^{\mathcal{H}} [\![\psi]\!]_v^{\mathcal{H}} \Leftrightarrow [\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}} \sqcap^{\mathcal{H}} z \leq_{\mathcal{H}} [\![\psi]\!]_v^{\mathcal{H}} .$$

Lema 6.2. *O axioma do cálculo natural é correcto.*

Demonstração. Igual à demonstração do lema 5.2, substituindo a álgebra booleana **2** por uma álgebra de Heyting arbitrária $\mathcal{H}$. □

Lema 6.3.
As regras para conectivos do cálculo natural são correctas.

Demonstração.
As regras $\neg$**I**, $\wedge$**I**, $\wedge$**E**, $\vee$**I** e $\vee$**E** têm demonstração igual à do lema 5.3, substituindo a álgebra booleana **2** por uma álgebra de Heyting arbitrária $\mathcal{H}$.

$\neg$**E** : Suponhamos que $\Gamma \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi$ e $\Gamma \vDash_{\mathbf{HA}} \neg\varphi$. Seja $\mathcal{H} \in \mathbf{HA}$. Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPI}} \to H$ uma valoração em $\mathcal{H}$ modelo de Γ. Segue por hipótese que v é modelo de φ e de $\neg\varphi$, o que é absurdo.

Donde, nenhuma valoração é modelo de Γ. Concluímos (vacuosamente) que $\Gamma \vDash_{\mathbf{HA}} \psi$.

$\rightarrow$ **I** : Igual à demonstração do MTD para a semântica **HA** (*cf.* teorema 4.19).

$\rightarrow$ **E** : Igual à demonstração do MTMP para a semântica **HA** (*cf.* teorema 4.19).

$\square$

Teorema 6.4 (Correcção do Cálculo Natural para **LPI**).

$$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi \Rightarrow \Gamma \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi \tag{6.2}$$

Demonstração.
Suponhamos que $\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi$. Seja $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ um certificado que testemunha esse facto. A prova segue por indução no comprimento do certificado, $n \in \mathbb{N}$.
Base:
Tem-se $\vartheta_1 = \varphi$, e ϑ_1 segue pelo axioma **Ax** do cálculo natural. Segue pelo lema 5.2 que $\Gamma \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi$.
Passo:
Tem-se $\vartheta_n = \varphi$, e ϑ_n segue de $\vartheta_i \in \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}\}$ por uma regra para conectivos com uma premissa do cálculo natural, ou de $\vartheta_i, \vartheta_j \in \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}\}$ por uma regra para conectivos com duas premissas do cálculo natural, ou de $\vartheta_i, \vartheta_j, \vartheta_k \in \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}\}$ pela regra $\vee$**E** do cálculo natural. Por hipótese de indução $\Gamma \vDash_{\mathbf{HA}} \vartheta_i$, $\Gamma \vDash_{\mathbf{HA}} \vartheta_j$ e $\Gamma \vDash_{\mathbf{HA}} \vartheta_k$. Segue pelo lema 5.3 que $\Gamma \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi$.

$\square$

Tratamos agora a completude do Cálculo Natural Intuicionista para a classe das álgebras de Heyting **HA**.

A estratégia é análoga à da Lógica Clássica, mas agora pretendemos construir uma álgebra de Heyting a partir da álgebra das fórmulas proposicionais. Note-se que à excepção dos certificados que utilizam a regra $\neg$**E** clássica, todos os restantes certificados clássicos se manterão inalterados no caso intuicionista. Definimos novamente a relação $\leq_\Gamma$ em $\mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$ por

$$\varphi \leq_\Gamma \psi \text{ sse } \Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi \rightarrow \psi \ .$$

Lema 6.5. *A relação $\leq_\Gamma$ é reflexiva e transitiva.*

Demonstração.
Igual à demonstração do lema 5.5, substituindo a relação $\vdash^c_{\mathrm{N}}$ pela relação $\vdash^i_{\mathrm{N}}$. $\square$

Lema 6.6. *A relação $\equiv_\Gamma$ é uma relação de congruência em $\mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$.*

Demonstração.
Igual à demonstração do lema 5.6, substituindo a relação $\vdash^c_{\mathrm{N}}$ pela relação $\vdash^i_{\mathrm{N}}$. $\square$

Ao definirmos a álgebra de Lindenbaum-Tarski para **LPI** importa reparar que não podemos tomar como elemento topo a classe de equivalência da tautologia clássica $\varphi \vee \neg\varphi$, porque, como vimos, esta fórmula não é intuicionisticamente verdadeira. A maneira óbvia de contornar esta situação é definir o elemento topo como o pseudo-complemento do elemento base. Vamos continuar a denotar o pseudo-complemento por $-^{\mathcal{L}_\Gamma}$.

Definição 6.7. A *álgebra de Lindenbaum-Tarski para* **LPI** é definida por

$$\mathcal{L}_\Gamma = \langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}/\!\equiv_\Gamma, \sqcap^{\mathcal{L}_\Gamma}, \sqcup^{\mathcal{L}_\Gamma}, -^{\mathcal{L}_\Gamma}, \top^{\mathcal{L}_\Gamma}, \bot^{\mathcal{L}_\Gamma} \rangle$$

onde:

- $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \sqcap^{\mathcal{L}_\Gamma} [\psi]_{\equiv_\Gamma} = [\varphi \wedge \psi]_{\equiv_\Gamma}$;
- $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \sqcup^{\mathcal{L}_\Gamma} [\psi]_{\equiv_\Gamma} = [\varphi \vee \psi]_{\equiv_\Gamma}$;
- $-^{\mathcal{L}_\Gamma}[\varphi]_{\equiv_\Gamma} = [\neg\varphi]_{\equiv_\Gamma}$;
- $\bot^{\mathcal{L}_\Gamma} = [\varphi \wedge \neg\varphi]_{\equiv_\Gamma}$;
- $\top^{\mathcal{L}_\Gamma} = -^{\mathcal{L}_\Gamma}\bot^{\mathcal{L}_\Gamma}$.

A boa definição das operações $\sqcap^{\mathcal{L}_\Gamma}$, $\sqcup^{\mathcal{L}_\Gamma}$ e $-^{\mathcal{L}_\Gamma}$ segue novamente de $\equiv_\Gamma$ ser uma relação de congruência em $\mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$.

Note-se mais uma vez que a classe de equivalência $\top^{\mathcal{L}_\Gamma}$ corresponde às fórmulas deriváveis a partir de Γ. Ou seja,

$$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi \text{ sse } \Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi \leftrightarrow \neg(\psi \wedge \neg\psi) .$$

Proposição 6.8.
O par $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}/\!\equiv_\Gamma, \leq_\Gamma \rangle$ *é um s.p.o..*

Demonstração.
Igual à demonstração da proposição 5.8, substituindo a relação $\vdash^c_{\mathrm{N}}$ pela relação $\vdash^i_{\mathrm{N}}$. □

Proposição 6.9.
O par $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}/\!\equiv_\Gamma, \leq_\Gamma \rangle$ *é um reticulado.*

Demonstração.
Igual à demonstração da proposição 5.9, substituindo a relação $\vdash^c_{\mathrm{N}}$ pela relação $\vdash^i_{\mathrm{N}}$. □

Proposição 6.10.
O par $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}/\!\equiv_\Gamma, \leq_\Gamma \rangle$ *é um reticulado de Heyting.*

Demonstração.
A distributividade de $\sqcap^{\mathcal{L}_\Gamma}$ e de $\sqcup^{\mathcal{L}_\Gamma}$ segue da distributividade de $\wedge$ e $\vee$.

Sejam $[\varphi]_{\equiv_\Gamma}, [\psi]_{\equiv_\Gamma} \in \mathcal{L}_\Gamma$. Considerem-se os seguintes certificados:

1.	$\Gamma, \psi \wedge \neg\psi \vdash^i_{\mathrm{N}} \psi \wedge \neg\psi$	**Ax**
2.	$\Gamma, \psi \wedge \neg\psi \vdash^i_{\mathrm{N}} \psi$	$\wedge$**E** 1
3.	$\Gamma, \psi \wedge \neg\psi \vdash^i_{\mathrm{N}} \neg\psi$	$\wedge$**E** 1
4.	$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \neg(\psi \wedge \neg\psi)$	$\neg$**I** 3
5.	$\Gamma, \varphi \vdash^i_{\mathrm{N}} \neg(\psi \wedge \neg\psi)$	monotonia de $\vdash^i_{\mathrm{N}}$ 4
6.	$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi \to \neg(\psi \wedge \neg\psi)$	$\to$ **I** 5

1.	$\Gamma, \psi \wedge \neg\psi \vdash^i_{\mathrm{N}} \psi \wedge \neg\psi$	**Ax**
2.	$\Gamma, \psi \wedge \neg\psi \vdash^i_{\mathrm{N}} \psi$	$\wedge$**E** 1
3.	$\Gamma, \psi \wedge \neg\psi \vdash^i_{\mathrm{N}} \neg\psi$	$\wedge$**E** 1
4.	$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \neg(\psi \wedge \neg\psi)$	$\neg$**I** 2,3
5.	$\Gamma, (\psi \wedge \neg\psi), \neg\varphi \vdash^i_{\mathrm{N}} \neg(\psi \wedge \neg\psi)$	monotonia de $\vdash^i_{\mathrm{N}}$ 4
6.	$\Gamma, \psi \wedge \neg\psi, \neg\varphi \vdash^i_{\mathrm{N}} \psi \wedge \neg\psi$	monotonia de $\vdash^i_{\mathrm{N}}$ 1
7.	$\Gamma, (\psi \wedge \neg\psi) \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi$	$\neg$**E** 5,6
8.	$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} (\psi \wedge \neg\psi) \to \varphi$	$\to$ **I** 7

Logo, $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\neg(\psi \wedge \neg\psi)]_{\equiv_\Gamma} = \top^{\mathcal{L}_\Gamma}$ e $\perp^{\mathcal{L}_\Gamma} = [\psi \wedge \neg\psi]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\varphi]_{\equiv_\Gamma}$. Concluímos que $\top^{\mathcal{L}_\Gamma}$ e $\perp^{\mathcal{L}_\Gamma}$ são elemento topo e elemento base em $\langle \mathcal{L}_\Gamma, \leq_\Gamma \rangle$, respectivamente.

Vamos agora provar que $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \to^{\mathcal{L}_\Gamma} [\psi]_{\equiv_\Gamma} = [\varphi \to \psi]_{\equiv_\Gamma} \in \mathcal{L}_\Gamma$ é o pseudo-complemento de $[\varphi]_{\equiv_\Gamma}$ relativo a $[\psi]_{\equiv_\Gamma} \in \mathcal{L}_\Gamma$, recorrendo à caracterização (1).

Seja $[\rho]_{\equiv_\Gamma} \in \mathcal{L}_\Gamma$ tal que $[\rho]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\varphi \to \psi]_{\equiv_\Gamma}$. Considere-se o seguinte certificado:

1.	$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \rho \to (\varphi \to \psi)$	hipótese
2.	$\Gamma, \varphi \wedge \rho \vdash^i_{\mathrm{N}} \rho \to (\varphi \to \psi)$	monotonia de $\vdash^i_{\mathrm{N}}$ 1
3.	$\Gamma, \varphi \wedge \rho \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi \wedge \rho$	**Ax**
4.	$\Gamma, \varphi \wedge \rho \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi$	$\wedge$**E** 3
5.	$\Gamma, \varphi \wedge \rho \vdash^i_{\mathrm{N}} \rho$	$\wedge$**E** 3
6.	$\Gamma, \varphi \wedge \rho \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi \to \psi$	$\to$ **E** 5,2
7.	$\Gamma, \varphi \wedge \rho \vdash^i_{\mathrm{N}} \psi$	$\to$ **E** 4,6
8.	$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi \wedge \rho \to \psi$	$\to$ **I** 7

Reciprocamente, seja $[\rho]_{\equiv_\Gamma} \in \mathcal{L}_\Gamma$ tal que $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \sqcap^{\mathcal{L}_\Gamma} [\rho]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\psi]_{\equiv_\Gamma}$. Considere-se o seguinte certificado:

1.	$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi \wedge \rho \to \psi$	hipótese
2.	$\Gamma, \varphi, \rho \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi \wedge \rho \to \psi$	monotonia de $\vdash^i_{\mathrm{N}}$
3.	$\Gamma, \varphi, \rho \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi$	**Ax**
4.	$\Gamma, \varphi, \rho \vdash^i_{\mathrm{N}} \rho$	**Ax**
5.	$\Gamma, \varphi, \rho \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi \wedge \rho$	$\wedge$**I** 3,4
6.	$\Gamma, \varphi, \rho \vdash^i_{\mathrm{N}} \psi$	$\to$ **E** 5,2
7.	$\Gamma, \rho \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi \to \psi$	$\to$ **I** 6
8.	$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \rho \to (\varphi \to \psi)$	$\to$ **I** 7

$\square$

Proposição 6.11.
A álgebra de Lindenbaum-Tarski para **LPI** *é uma álgebra de Heyting.*

Demonstração.
O tuplo $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}/\equiv_\Gamma, \sqcap^{\mathcal{L}_\Gamma}, \sqcup^{\mathcal{L}_\Gamma}, -^{\mathcal{L}_\Gamma}, \top^{\mathcal{L}_\Gamma}, \bot^{\mathcal{L}_\Gamma} \rangle$ e o par $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}/\equiv_\Gamma, \leq_\Gamma \rangle$ correspondem ao mesmo reticulado, segundo a definição algébrica e a definição de ordem, respectivamente. Segue pela proposição 6.10 que a álgebra de Lindenbaum-Tarski para **LPI** é uma álgebra de Heyting. □

Teorema 6.12 (Completude do Cálculo Natural para **LPI**).

$$\Gamma \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi \tag{6.3}$$

Demonstração.
Suponhamos que $\Gamma \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi$. Considere-se a álgebra de Heyting de Lindenbaum-Tarski, $\mathcal{L}_\Gamma$, pela proposição 6.11. Tome-se uma valoração $v : \Pi_{\mathbf{LPI}} \to \mathcal{L}_\Gamma$ em $\mathcal{L}_\Gamma$, dada por $v(\pi) = [\pi]_{\equiv_\Gamma}$, e extendida naturalmente às fórmulas proposicionais por $[\![\psi]\!]^{\mathcal{L}_\Gamma}_v = [\psi]_{\equiv_\Gamma}$. Note-se que para qualquer $\gamma \in \Gamma$, temos $[\![\gamma]\!]^{\mathcal{L}_\Gamma}_v = \top^{\mathcal{L}_\Gamma}$, pela extensividade de $\vdash^i_{\mathrm{N}}$. Segue por hipótese que $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{L}_\Gamma}_v = \top^{\mathcal{L}_\Gamma}$, i.e., $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} = \top^{\mathcal{L}_\Gamma}$. Logo, $\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi$. □

6.2 $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}, \vDash_{\mathbf{HA}} \rangle = \langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}, \vdash^i_{\mathrm{H}} \rangle$

O próximo teorema enuncia a correcção e completude do Cálculo de Hilbert Intuicionista para as semânticas Algébrica e de Kripke. Vamos provar a correcção e completude deste cálculo para a classe das álgebras de Heyting. As restantes implicações seguirão da equivalência estabelecida no teorema 4.18.

Teorema 6.13 (Correcção e Completude do Cálculo de Hilbert para **LPI**).

$$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vDash_{\mathbf{K}} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi \tag{6.4}$$

A correcção do Cálculo de Hilbert para **LPI** segue da caracterização (1):

$$\forall z \in \mathcal{H} \quad z \leq_{\mathcal{H}} [\![\varphi]\!]^{\mathcal{H}}_v \to^{\mathcal{H}} [\![\psi]\!]^{\mathcal{H}}_v \Leftrightarrow [\![\varphi]\!]^{\mathcal{H}}_v \sqcap^{\mathcal{H}} z \leq_{\mathcal{H}} [\![\psi]\!]^{\mathcal{H}}_v \, .$$

Lema 6.14. *Os axiomas do cálculo de Hilbert são correctos.*

Demonstração.
Provamos apenas os axiomas **Ax1** e **Ax10**.
Seja $\mathcal{H} \in \mathbf{HA}$. Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPI}} \to H$ uma valoração em $\mathcal{H}$. Deixamos cair o super-índice $^{\mathcal{H}}$ das operações da álgebra de Heyting $\mathcal{H}$ para aliviar a notação.

Ax1 :

$$\begin{aligned} \top^{\mathcal{H}} \leq_{\mathcal{H}} [\![\varphi \to (\psi \to \varphi)]\!]^{\mathcal{H}}_v \quad &\Leftrightarrow \quad \top^{\mathcal{H}} \sqcap [\![\varphi]\!]^{\mathcal{H}}_v \leq_{\mathcal{H}} [\![\psi \to \varphi]\!]^{\mathcal{H}}_v \\ &\Leftrightarrow \quad [\![\varphi]\!]^{\mathcal{H}}_v \sqcap [\![\psi]\!]^{\mathcal{H}}_v \leq_{\mathcal{H}} [\![\varphi]\!]^{\mathcal{H}}_v , \end{aligned}$$

o que é verdadeiro por definição de ínfimo. Logo, $[\![\varphi \to (\psi \to \varphi)]\!]^{\mathcal{H}}_v = \top^{\mathcal{H}}$. Concluímos que $\vDash_{\mathbf{HA}} \varphi \to (\psi \to \varphi)$.

Ax10 :

$$\begin{aligned}\top^{\mathcal{H}} \leq_{\mathcal{H}} [\![\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)]\!]_v^{\mathcal{H}} \quad &\Leftrightarrow \quad \top^{\mathcal{H}} \sqcap [\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}} \leq_{\mathcal{H}} [\![\neg\varphi \to \psi]\!]_v^{\mathcal{H}} \\ &\Leftrightarrow \quad [\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}} \sqcap [\![\neg\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}} \leq_{\mathcal{H}} [\![\psi]\!]_v^{\mathcal{H}} \\ &\Leftrightarrow \quad \perp^{\mathcal{H}} \leq_{\mathcal{H}} [\![\psi]\!]_v^{\mathcal{H}}\end{aligned}$$

o que é verdadeiro por definição de elemento base. Logo, $[\![\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)]\!]_v^{\mathcal{H}} = \top^{\mathcal{H}}$. Concluímos que $\models_{\mathbf{HA}} \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$.

□

Lema 6.15. *A regra modus ponens do cálculo de Hilbert é correcta.*

Demonstração.
Igual à demonstração do MTMP para a semântica **HA** (*cf.* teorema 4.19).

□

Teorema 6.16 (Correcção do Cálculo de Hilbert para **LPI**)**.**

$$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} \varphi \Rightarrow \Gamma \models_{\mathcal{H}} \varphi \tag{6.5}$$

Demonstração.
Suponhamos que $\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} \varphi$. Seja $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ um certificado que testemunha esse facto. A prova segue por indução no comprimento do certificado, $n \in \mathbb{N}$.
Base:
Tem-se $\vartheta_1 = \varphi$, e verifica-se um de dois casos: ϑ_1 segue por um dos axiomas **Ax1** , ..., **Ax10** do cálculo de Hilbert, caso em que $\Gamma \models_{\mathcal{H}} \varphi$ pelo lema 6.14; $\vartheta_1 \in \Gamma$, caso em que $\Gamma \models_{\mathcal{H}} \varphi$ por extensividade de $\vdash^i_{\mathrm{H}}$.
Passo:
Tem-se $\vartheta_n = \varphi$, e ϑ_n segue de $\vartheta_i, \vartheta_j \in \{\vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}\}$ pela regra *modus ponens* do cálculo de Hilbert. Segue por hipótese de indução que $\Gamma \models_{\mathcal{H}} \vartheta_i$ e $\Gamma \models_{\mathcal{H}} \vartheta_j$. Segue pelo lema 6.15 que $\Gamma \models_{\mathcal{H}} \varphi$.

□

Tratamos agora a completude do Cálculo de Hilbert para **LPI** na classe das álgebras de Heyting **HA**.

A estratégia é análoga à da Lógica Clássica, mas agora pretendemos construir uma álgebra de Heyting a partir da álgebra das fórmulas proposicionais. Note-se que à excepção dos certificados que utilizam o axioma **Ax10** clássico, todos os restantes certificados clássicos se manterão inalterados no caso intuicionista. Definimos novamente a relação $\leq_\Gamma$ em $\mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$ por

$$\varphi \leq_\Gamma \psi \text{ sse } \Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} \varphi \to \psi \ .$$

Lema 6.17. *A relação $\leq_\Gamma$ é reflexiva e transitiva.*

Demonstração.
Igual à demonstração do lema 5.17, substituindo a relação $\vdash^c_{\mathrm{H}}$ pela relação $\vdash^i_{\mathrm{H}}$.

□

Definimos a *relação de interderivabilidade em $\mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$*, que se denota por $\equiv_\Gamma$, por

$$\varphi \equiv_\Gamma \psi \text{ sse } \Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} \varphi \leftrightarrow \psi \ .$$

Lema 6.18. *A relação $\equiv_\Gamma$ é uma relação de congruência em $\mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$.*

Demonstração.
Igual à demonstração do lema 5.18, substituindo a relação $\vdash^c_{\mathrm{H}}$ pela relação $\vdash^i_{\mathrm{H}}$.
□

À semelhança do Cálculo Natural Intuicionista, ao definirmos a álgebra de Lindenbaum-Tarski para **LPI**, não podemos tomar como elemento topo a classe de equivalência da tautologia clássica $\varphi \vee \neg\varphi$. Definimo-la novamente como o pseudo-complemento do elemento base.

Definição 6.19. A *álgebra de Lindenbaum-Tarski* para **LPI** é definida por

$$\mathcal{L}_\Gamma = \langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}/\equiv_\Gamma, \sqcap^{\mathcal{L}_\Gamma}, \sqcup^{\mathcal{L}_\Gamma}, -^{\mathcal{L}_\Gamma}, \top^{\mathcal{L}_\Gamma}, \bot^{\mathcal{L}_\Gamma} \rangle \ ,$$

onde:

- $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \sqcap^{\mathcal{L}_\Gamma} [\psi]_{\equiv_\Gamma} = [\varphi \wedge \psi]_{\equiv_\Gamma}$;
- $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \sqcup^{\mathcal{L}_\Gamma} [\psi]_{\equiv_\Gamma} = [\varphi \vee \psi]_{\equiv_\Gamma}$;
- $-^{\mathcal{L}_\Gamma}[\varphi]_{\equiv_\Gamma} = [\neg\varphi]_{\equiv_\Gamma}$;
- $\bot^{\mathcal{L}_\Gamma} = [\varphi \wedge \neg\varphi]_{\equiv_\Gamma}$;
- $\top^{\mathcal{L}_\Gamma} = -^{\mathcal{L}_\Gamma}\bot^{\mathcal{L}_\Gamma}$.

Proposição 6.20.
O par $\langle \mathcal{L}_\Gamma, \leq_\Gamma \rangle$ é um s.p.o..

Demonstração.
Igual à demonstração da proposição 5.20, substituindo a relação $\vdash^c_{\mathrm{H}}$ pela relação $\vdash^i_{\mathrm{H}}$.
□

Proposição 6.21.
O par $\langle \mathcal{L}_\Gamma, \leq_\Gamma \rangle$ é um reticulado.

Demonstração.
Igual à demonstração da proposição 5.21, substituindo a relação $\vdash^c_{\mathrm{H}}$ pela relação $\vdash^i_{\mathrm{H}}$.
□

Proposição 6.22.
O par $\langle \mathcal{L}_\Gamma, \leq_\Gamma \rangle$ é um reticulado de Heyting.

Demonstração.
A distributividade de $\sqcap^{\mathcal{L}_\Gamma}$ e de $\sqcup^{\mathcal{L}_\Gamma}$ segue da distributividade de $\wedge$ e $\vee$.

Sejam $[\varphi]_{\equiv_\Gamma}, [\psi]_{\equiv_\Gamma} \in \mathcal{L}_\Gamma$. Considerem-se os seguintes certificados à Hilbert:

1.	$\vdash^i_{\mathrm{H}} \psi \wedge \neg\psi \to \psi$	**Ax2**
2.	$\vdash^i_{\mathrm{H}} \psi \wedge \neg\psi \to \neg\psi$	**Ax3**
3.	$\vdash^i_{\mathrm{H}} (\psi \wedge \neg\psi \to \psi) \to ((\psi \wedge \neg\psi \to \neg\psi) \to \neg(\psi \wedge \neg\psi))$	**Ax9**
4.	$\vdash^i_{\mathrm{H}} (\psi \wedge \neg\psi \to \neg\psi) \to \neg(\psi \wedge \neg\psi)$	**MP** 1,3
5.	$\vdash^i_{\mathrm{H}} \neg(\psi \wedge \neg\psi)$	**MP** 2,4
6.	$\vdash^i_{\mathrm{H}} \neg(\psi \wedge \neg\psi) \to (\varphi \to (\neg(\psi \wedge \neg\psi)))$	**Ax1**
7.	$\vdash^i_{\mathrm{H}} \varphi \to \neg(\psi \wedge \neg\psi)$	**MP** 5,6
8.	$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} \varphi \to \neg(\psi \wedge \neg\psi)$	monotonia de $\vdash^i_{\mathrm{H}}$ 7

1.	$\vdash^i_{\mathrm{H}} \psi \wedge \neg\psi \to \psi$	**Ax2**
2.	$\vdash^i_{\mathrm{H}} \psi \wedge \neg\psi \to \neg\psi$	**Ax3**
3.	$\vdash^i_{\mathrm{H}} (\psi \wedge \neg\psi \to \psi) \to ((\psi \wedge \neg\psi \to \neg\psi) \to \neg(\psi \wedge \neg\psi))$	**Ax9**
4.	$\vdash^i_{\mathrm{H}} (\psi \wedge \neg\psi \to \neg\psi) \to \neg(\psi \wedge \neg\psi)$	**MP** 1,3
5.	$\vdash^i_{\mathrm{H}} \neg(\psi \wedge \neg\psi)$	**MP** 2,4
6.	$\vdash^i_{\mathrm{H}} \neg(\psi \wedge \neg\psi) \to ((\psi \wedge \neg\psi) \to \neg(\psi \wedge \neg\psi))$	**Ax1**
7.	$\vdash^i_{\mathrm{H}} (\psi \wedge \neg\psi) \to \neg(\psi \wedge \neg\psi)$	**MP** 5,6
8.	$\vdash^i_{\mathrm{H}} (\psi \wedge \neg\psi) \to (\neg(\psi \wedge \neg\psi) \to \varphi)$	**Ax10**
9.	$\vdash^i_{\mathrm{H}} ((\psi \wedge \neg\psi) \to (\neg(\psi \wedge \neg\psi) \to \varphi)) \to (((\psi \wedge \neg\psi) \to \neg(\psi \wedge \neg\psi)) \to ((\psi \wedge \neg\psi) \to \varphi))$	
.		**Ax8**
10.	$\vdash^i_{\mathrm{H}} ((\psi \wedge \neg\psi) \to \neg(\psi \wedge \neg\psi)) \to ((\psi \wedge \neg\psi) \to \varphi)$	**MP** 8,9
11.	$\vdash^i_{\mathrm{H}} \psi \wedge \neg\psi \to \varphi$	**MP** 7,10
12.	$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} \psi \wedge \neg\psi \to \varphi$	monotonia de $\vdash^i_{\mathrm{H}}$ 11

Logo, $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\neg(\psi \wedge \neg\psi)]_{\equiv_\Gamma} = \top^{\mathcal{L}_\Gamma}$ e $\bot^{\mathcal{L}_\Gamma} = [\psi \wedge \neg\psi]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\varphi]_{\equiv_\Gamma}$. Concluímos que $\top^{\mathcal{L}_\Gamma}$ e $\bot^{\mathcal{L}_\Gamma}$ são elemento topo e elemento base em $\langle \mathcal{L}_\Gamma, \leq_\Gamma \rangle$, respectivamente.

Vamos agora provar que $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \to^{\mathcal{L}_\Gamma} [\psi]_{\equiv_\Gamma} = [\varphi \to \psi]_{\equiv_\Gamma} \in \mathcal{L}_\Gamma$ é o pseudo-complemento de $[\varphi]_{\equiv_\Gamma}$ relativo a $[\psi]_{\equiv_\Gamma} \in \mathcal{L}_\Gamma$, recorrendo à caracterização (1).

Seja $[\rho]_{\equiv_\Gamma} \in \mathcal{L}_\Gamma$ tal que $[\rho]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\varphi \to \psi]_{\equiv_\Gamma}$. Considere-se o seguinte certificado à Hilbert:

1.	$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} \rho \to (\varphi \to \psi)$	hipótese e monotonia de $\vdash^i_{\mathrm{H}}$
2.	$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} (\rho \to (\varphi \to \psi)) \to \varphi \wedge \rho \to (\rho \to (\varphi \to \psi))$	**Ax1** e monotonia de $\vdash^i_{\mathrm{H}}$
3.	$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} \varphi \wedge \rho \to (\rho \to (\varphi \to \psi))$	**MP** 1,2
4.	$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} (\varphi \wedge \rho \to (\rho \to (\varphi \to \psi))) \to ((\varphi \wedge \rho \to \rho) \to (\varphi \wedge \rho \to (\varphi \to \psi)))$	
.		**Ax8** e monotonia de $\vdash^i_{\mathrm{H}}$
5.	$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} (\varphi \wedge \rho \to \rho) \to (\varphi \wedge \rho \to (\varphi \to \psi))$	**MP** 3,4
6.	$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} \varphi \wedge \rho \to \rho$	**Ax3** e monotonia de $\vdash^i_{\mathrm{H}}$

7.	$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} \varphi \wedge \rho \to (\varphi \to \psi)$	**MP** 6,5
8.	$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} (\varphi \wedge \rho \to (\varphi \to \psi)) \to ((\varphi \wedge \rho \to \varphi) \to (\varphi \wedge \rho \to \psi))$	
.		**Ax8** e monotonia de $\vdash^i_{\mathrm{H}}$
9.	$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} (\varphi \wedge \rho \to \varphi) \to (\varphi \wedge \rho \to \psi)$	**MP** 8,7
10.	$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} \varphi \wedge \rho \to \varphi$	**Ax2** e monotonia de $\vdash^i_{\mathrm{H}}$
11.	$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} \varphi \wedge \rho \to \psi$	**MP** 10,9

Reciprocamente, seja $[\rho]_{\equiv_\Gamma} \in \mathcal{L}_\Gamma$ tal que $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \sqcap^{\mathcal{L}_\Gamma} [\rho]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\psi]_{\equiv_\Gamma}$. Considere-se o seguinte certificado à Hilbert:

1.	$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} \varphi \wedge \rho \to \psi$	hipótese e monotonia de $\vdash^i_{\mathrm{H}}$
2.	$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} (\varphi \wedge \rho \to \psi) \to (\varphi \to (\varphi \wedge \rho \to \psi)$	**Ax1** e monotonia de $\vdash^i_{\mathrm{H}}$
3.	$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} \varphi \to (\varphi \wedge \rho \to \psi)$	**MP** 1,2
4.	$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} (\varphi \to (\varphi \wedge \rho \to \psi)) \to ((\varphi \to \varphi \wedge \rho) \to (\varphi \to \psi))$	
.		**Ax8** e monotonia de $\vdash^i_{\mathrm{H}}$
5.	$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} (\varphi \to \varphi \wedge \rho) \to (\varphi \to \psi)$	**MP** 3,4
6.	$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} ((\varphi \to \varphi \wedge \rho) \to (\varphi \to \psi)) \to \rho \to ((\varphi \to \varphi \wedge \rho) \to (\varphi \to \psi))$	
.		**Ax1** e monotonia de $\vdash^i_{\mathrm{H}}$
7.	$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} \rho \to ((\varphi \to \varphi \wedge \rho) \to (\varphi \to \psi))$	**MP** 5,6
8.	$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} (\rho \to ((\varphi \to \varphi \wedge \rho) \to (\varphi \to \psi))) \to ((\rho \to (\varphi \to \varphi \wedge \rho)) \to (\rho \to (\varphi \to \psi)))$	
.		**Ax8** e monotonia de $\vdash^i_{\mathrm{H}}$
9.	$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} (\rho \to (\varphi \to \varphi \wedge \rho)) \to (\rho \to (\varphi \to \psi))$	**MP** 7,8
10.	$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} \rho \to (\varphi \to \varphi \wedge \rho)$	**Ax4** ($\wedge$ é comutativa)
11.	$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} \rho \to (\varphi \to \psi)$	**MP** 9,10

□

Proposição 6.23.
A álgebra de Lindenbaum-Tarski para **LPI** *é uma álgebra de Heyting.*

Demonstração.
O tuplo $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}/\equiv_\Gamma, \sqcap^{\mathcal{L}_\Gamma}, \sqcup^{\mathcal{L}_\Gamma}, -^{\mathcal{L}_\Gamma}, \top^{\mathcal{L}_\Gamma}, \bot^{\mathcal{L}_\Gamma} \rangle$ e o par $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}/\equiv_\Gamma, \leq_\Gamma \rangle$ correspondem ao mesmo reticulado, segundo a definição algébrica e a definição de ordem, respectivamente. Segue pela proposição 6.22 que a álgebra de Lindenbaum-Tarski para **LPI** é uma álgebra de Heyting.
□

Teorema 6.24 (Completude do Cálculo de Hilbert para **LPI**).

$$\Gamma \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}} \varphi \tag{6.6}$$

Demonstração.
Suponhamos que $\Gamma \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi$. Considere-se a álgebra de Heyting de Lindenbaum-Tarski, $\mathcal{L}_\Gamma$,

pela proposição 6.23. Tome-se uma valoração $v : \Pi_{\mathbf{LPI}} \to \mathcal{L}_\Gamma$ em $\mathcal{L}_\Gamma$, dada por $v(\pi) = [\pi]_{\equiv_\Gamma}$, e extendida naturalmente às fórmulas proposicionais por $[\![\psi]\!]_v^{\mathcal{L}_\Gamma} = [\psi]_{\equiv_\Gamma}$. Note-se que para qualquer $\gamma \in \Gamma$, temos $[\![\gamma]\!]_v^{\mathcal{L}_\Gamma} = \top^{\mathcal{L}_\Gamma}$, pela extensividade de $\vdash_{\mathrm{H}}^{i}$. Segue por hipótese que $[\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{L}_\Gamma} = \top^{\mathcal{L}_\Gamma}$, i.e., $[\varphi]_{\equiv_\Gamma} = \top^{\mathcal{L}_\Gamma}$. Logo, $\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{i} \varphi$.

□

6.3 $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}, \vDash_{\mathbf{HA}} \rangle = \langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}, \vdash_{\mathrm{G}}^{i} \rangle$

O próximo teorema enuncia a correcção e completude do Cálculo de Gentzen Intuicionista para as semânticas Algébrica e de Kripke. Vamos provar a correcção e completude deste cálculo para a classe das álgebras de Heyting. As restantes implicações seguirão da equivalência estabelecida no teorema 4.18.

Teorema 6.25 (Correcção e Completude do Cálculo de Gentzen para **LPI**).

$$\Delta \vdash_{\mathrm{G}}^{i} \varphi \Leftrightarrow \Delta \vDash_{\mathbf{K}} \varphi \Leftrightarrow \Delta \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi \tag{6.7}$$

Vamos provar a correcção do Cálculo de Gentzen para **LPI** na classe das álgebras de Heyting **HA**.

Lema 6.26. *O axioma do cálculo de Gentzen é correcto.*

Demonstração.
Seja $\mathcal{H} \in \mathbf{HA}$. Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPI}} \to H$ uma valoração em $\mathcal{H}$ modelo de Δ, φ, i.e., modelo de todas as fórmulas em $\Delta \cup \{\varphi\}$. É imediato que v é modelo de φ. Logo, $\Delta, \varphi \vDash_{\mathcal{H}} \varphi$. Concluímos que $\Delta, \varphi \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi$.

□

Lema 6.27. *A regra estrutural* **Cut** *do cálculo de Gentzen é correcta.*

Demonstração.
Suponhamos que $\Delta \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi$ e $\Delta, \varphi \vDash_{\mathbf{HA}} \delta$. Seja $\mathcal{H} \in \mathbf{HA}$. Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPI}} \to H$ uma valoração em $\mathcal{H}$ modelo de Δ. Segue por hipótese que v é modelo de φ. Segue novamente por hipótese que v é modelo δ. Logo, $\Delta \vDash_{\mathcal{H}} \delta$. Concluímos que $\Delta \vDash_{\mathbf{HA}} \delta$.

□

Lema 6.28. *As regras para conectivos do cálculo de Gentzen são correctas.*

Demonstração.
$\neg$**L** : Suponhamos que $\Delta \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi$. Seja $\mathcal{H} \in \mathbf{HA}$. Por hipótese, qualquer valoração em $\mathcal{H}$ modelo de Δ é modelo de φ. Logo, nenhuma valoração é modelo de $\Delta, \neg\varphi$, e portanto $\Delta, \neg\varphi \vDash_{\mathcal{H}}$ é vacuosamente satisfeita. Concluímos que $\Delta, \neg\varphi \vDash_{\mathbf{HA}}$.

$\neg$**R** : Suponhamos que $\Delta, \varphi \vDash_{\mathbf{HA}}$. Seja $\mathcal{H} \in \mathbf{HA}$. Por hipótese, nenhuma valoração em $\mathcal{H}$ é modelo de Δ, φ. Donde, qualquer valoração modelo de Δ é modelo de $\neg\varphi$. Logo, $\Delta \vDash_{\mathcal{H}} \neg\varphi$. Concluímos que $\Delta \vDash_{\mathbf{HA}} \neg\varphi$.

$\wedge$**L** : Suponhamos que $\Delta, \varphi \vDash_{\mathbf{HA}} \delta$. Seja $\mathcal{H} \in \mathbf{HA}$. Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPI}} \to H$ uma valoração em $\mathcal{H}$ modelo de $\Delta, \varphi \wedge \psi$. Como $[\![\varphi \wedge \psi]\!]_v^{\mathcal{H}} = [\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}} \sqcap [\![\psi]\!]_v^{\mathcal{H}} = \top^{\mathcal{H}}$ sse $[\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}} = \top^{\mathcal{H}}$ e $[\![\psi]\!]_v^{\mathcal{H}} = \top^{\mathcal{H}}$, segue, em particular, que v é modelo de φ. Logo, v é modelo de Δ, φ. Segue por hipótese que v é modelo de δ. Logo, $\Delta, \varphi \wedge \psi \vDash_{\mathcal{H}} \delta$. Concluímos que $\Delta, \varphi \wedge \psi \vDash_{\mathbf{HA}} \delta$.

O caso $\Delta, \psi \vDash_{\mathbf{HA}} \delta$ é análogo.

$\wedge\mathbf{R}$: Suponhamos que $\Delta \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi$ e $\Delta \vDash_{\mathbf{HA}} \psi$. Seja $\mathcal{H} \in \mathbf{HA}$. Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPI}} \to H$ uma valoração em $\mathcal{H}$ modelo de Δ. Segue por hipótese que v é modelo de φ e de ψ. Como $[\![\varphi \wedge \psi]\!]^{\mathcal{H}}_v = [\![\varphi]\!]^{\mathcal{H}}_v \sqcap [\![\psi]\!]^{\mathcal{H}}_v = \top^{\mathcal{H}}$ sse $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{H}}_v = \top^{\mathcal{H}}$ e $[\![\psi]\!]^{\mathcal{H}}_v = \top^{\mathcal{H}}$, segue que v é modelo de $\varphi \wedge \psi$. Logo, $\Delta \vDash_{\mathcal{H}} \varphi \wedge \psi$. Concluímos que $\Delta \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi \wedge \psi$.

$\vee\mathbf{L}$: Suponhamos que $\Delta, \varphi \vDash_{\mathbf{HA}} \delta$ e $\Delta, \psi \vDash_{\mathbf{HA}} \delta$. Seja $\mathcal{H} \in \mathbf{HA}$. Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPI}} \to H$ uma valoração em $\mathcal{H}$ modelo de $\Delta, \varphi \vee \psi$. Como $[\![\varphi \vee \psi]\!]^{\mathcal{H}}_v = [\![\varphi]\!]^{\mathcal{H}}_v \sqcup [\![\psi]\!]^{\mathcal{H}}_v = \top^{\mathcal{H}}$ sse $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{H}}_v = \top^{\mathcal{H}}$ ou $[\![\psi]\!]^{\mathcal{H}}_v = \top^{\mathcal{H}}$, temos dois casos a considerar:

- se v é modelo de φ, segue por hipótese que v é modelo de δ;

- se v é modelo de ψ, segue por hipótese v é modelo de δ.

Em qualquer dos casos, temos $\Delta, \varphi \vee \psi \vDash_{\mathcal{H}} \delta$. Concluímos que $\Delta, \varphi \vee \psi \vDash_{\mathbf{HA}} \delta$.

$\vee\mathbf{R}$: Suponhamos que $\Delta \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi$. Seja $\mathcal{H} \in \mathbf{HA}$. Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPI}} \to H$ uma valoração em $\mathcal{H}$ modelo de Δ. Segue por hipótese que v é modelo de φ. Como $[\![\varphi \vee \psi]\!]^{\mathcal{H}}_v = [\![\varphi]\!]^{\mathcal{H}}_v \sqcup [\![\psi]\!]^{\mathcal{H}}_v = \top^{\mathcal{H}}$ sse $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{H}}_v = \top^{\mathcal{H}}$ ou $[\![\psi]\!]^{\mathcal{H}}_v = \top^{\mathcal{H}}$, segue que v é modelo de $[\![\varphi \vee \psi]\!]^{\mathcal{H}}_v$. Logo, $\Delta \vDash_{\mathcal{H}} \varphi \vee \psi$. Concluímos que $\Delta \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi \vee \psi$.

O caso $\Delta \vDash_{\mathbf{HA}} \psi$ é análogo.

$\to\mathbf{L}$: Suponhamos que $\Delta \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi$ e $\Delta, \psi \vDash_{\mathbf{HA}} \delta$. Seja $\mathcal{H} \in \mathbf{HA}$. Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPI}} \to H$ uma valoração em $\mathcal{H}$ modelo de $\Delta, \varphi \to \psi$. Em particular, v é modelo de Δ, donde por hipótese segue que v é modelo de φ. Mas,

$$\begin{aligned}
\top^{\mathcal{H}} \leq_{\mathcal{H}} [\![\varphi \to \psi]\!]^{\mathcal{H}}_v \quad &\Leftrightarrow \quad \top^{\mathcal{H}} \leq_{\mathcal{H}} [\![\varphi]\!]^{\mathcal{H}}_v \to^{\mathcal{H}} [\![\psi]\!]^{\mathcal{H}}_v, \\
&\qquad \text{por definição de extensão da valoração } v \text{ a } \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}} \\
&\Leftrightarrow \quad \top^{\mathcal{H}} \sqcap^{\mathcal{H}} [\![\varphi]\!]^{\mathcal{H}}_v \leq_{\mathcal{H}} [\![\psi]\!]^{\mathcal{H}}_v, \\
&\qquad \text{pela caracterização (1)} \\
&\Leftrightarrow \quad \top^{\mathcal{H}} \sqcap^{\mathcal{H}} \top^{\mathcal{H}} \leq_{\mathcal{H}} [\![\psi]\!]^{\mathcal{H}}_v, \\
&\qquad \text{pois } v \text{ é modelo de } \varphi \text{ por hipótese} \\
&\Leftrightarrow \quad \top^{\mathcal{H}} \leq_{\mathcal{H}} [\![\psi]\!]^{\mathcal{H}}_v
\end{aligned}$$

Logo, $[\![\psi]\!]^{\mathcal{H}}_v = \top^{\mathcal{H}}$. Segue por hipótese que v é modelo de δ, i.e., $[\![\delta]\!]^{\mathcal{H}}_v = \top^{\mathcal{H}}$. Concluímos que $\Gamma, \varphi \to \psi \vDash_{\mathbf{HA}} \delta$.

$\to\mathbf{R}$: Igual à demonstração do MTMP para a semântica **HA** (*cf.* teorema 4.19), substituindo o conjunto Γ pelo conjunto Δ.

$\square$

Teorema 6.29 (Correcção do Cálculo de Gentzen para **LPI**).

$$\Delta \vdash^{i}_{\mathrm{G}} \varphi \Rightarrow \Delta \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi \tag{6.8}$$

Demonstração.

Suponhamos que $\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{G}} \varphi$. Seja $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ um certificado que testemunha esse facto. A prova segue por indução no comprimento do certificado, $n \in \mathbb{N}$.

Base:

Tem-se $\vartheta_1 = \Delta \vdash^{i}_{\mathrm{G}} \varphi$, e o sequente ϑ_1 segue pelo axioma **Ax** do cálculo de Gentzen.

Segue pelo lema 6.26 que $\Gamma \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi$.
Passo:
Tem-se $\vartheta_1 = \Gamma \vdash^i_{\mathrm{G}} \varphi$, e o sequente ϑ_1 segue do sequente $\vartheta_i \in \{\vartheta_2, \ldots, \vartheta_n\}$ por uma regra para conectivos com uma premissa do cálculo de Gentzen, ou segue de $\vartheta_i, \vartheta_j \in \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n\}$ por uma regra binária para conectivos com duas premissas do cálculo de Gentzen. Mas, $\vartheta_i, \ldots \vartheta_n$ e $\vartheta_j, \ldots \vartheta_n$ são certificados à Gentzen para os sequentes ϑ_i e ϑ_j, respectivamente. Segue por hipótese de indução que $\mathrm{Ant}(\vartheta_i) \vDash_{\mathbf{HA}} \mathrm{Cons}(\vartheta_i)$ e $\mathrm{Ant}(\vartheta_j) \vDash_{\mathbf{HA}} \mathrm{Cons}(\vartheta_j)$. Segue pelos lemas 6.27 e 6.28 que $\Gamma \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi$.

□

Tratamos agora a completude do cálculo de Gentzen Intuicionista para a classe das álgebra de Heyting **HA**.

A estratégia é análoga à da Lógica Clássica, mas agora pretendemos construir uma álgebra de Heyting a partir da álgebra das fórmulas proposicionais. Note-se que à excepção dos certificados que utilizam sequentes com mais do que uma fórmula no consequente, todos os restantes certificados clássicos se manterão inalterados no caso intuicionista. Definimos novamente a relação $\leq_\Delta$ em $\mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$ por

$$\varphi \leq_\Delta \psi \text{ sse } \Delta \vdash^i_{\mathrm{G}} \varphi \to \psi \ .$$

Lema 6.30. *A relação $\leq_\Delta$ é reflexiva e transitiva.*

Demonstração.
Igual à demonstração do lema 5.30, substituindo a relação $\vdash^c_{\mathrm{G}}$ pela relação $\vdash^i_{\mathrm{G}}$.

□

Definimos a *relação de interderivabilidade em $\mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$*, que se denota por $\equiv_\Delta$, por

$$\varphi \equiv_\Delta \psi \text{ sse } \Delta \vdash^i_{\mathrm{G}} \varphi \leftrightarrow \psi \ .$$

Lema 6.31. *A relação $\equiv_\Delta$ é uma relação de congruência em $\mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$.*

Demonstração.
Igual à demonstração do lema 5.31, substituindo a relação $\vdash^c_{\mathrm{G}}$ pela relação $\vdash^i_{\mathrm{G}}$.

□

À semelhança do Cálculo Natural Intuicionista, ao definirmos a álgebra de Lindenbaum-Tarski para **LPI**, não podemos tomar como elemento topo a classe de equivalência da tautologia clássica $\varphi \vee \neg\varphi$. Definimo-la novamente como o pseudo-complemento do elemento base.

Definição 6.32. A *álgebra de Lindenbaum-Tarski* para **LPI** é definida por

$$\mathcal{L}_\Delta = \langle {}^{\mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}}/_{\equiv_\Delta}, \sqcap^{\mathcal{L}_\Delta}, \sqcup^{\mathcal{L}_\Delta}, -^{\mathcal{L}_\Delta}, \top^{\mathcal{L}_\Delta}, \bot^{\mathcal{L}_\Delta} \rangle \ ,$$

onde:

- $[\varphi]_{\equiv_\Delta} \sqcap^{\mathcal{L}_\Delta} [\psi]_{\equiv_\Delta} = [\varphi \wedge \psi]_{\equiv_\Delta}$;
- $[\varphi]_{\equiv_\Delta} \sqcup^{\mathcal{L}_\Delta} [\psi]_{\equiv_\Delta} = [\varphi \vee \psi]_{\equiv_\Delta}$;
- $-^{\mathcal{L}_\Delta}[\varphi]_{\equiv_\Delta} = [\neg\varphi]_{\equiv_\Delta}$;
- $\bot^{\mathcal{L}_\Delta} = [\varphi \wedge \neg\varphi]_{\equiv_\Delta}$;

- $\top^{\mathcal{L}_\Delta} = -^{\mathcal{L}_\Delta} \bot^{\mathcal{L}_\Delta}$.

Proposição 6.33.
O par $\langle \mathcal{L}_\Delta, \leq_\Delta \rangle$ é um s.p.o..

Demonstração.
Igual à demonstração da proposição 5.33, substituindo a relação $\vdash^{c}_{\mathrm{G}}$ pela relação $\vdash^{i}_{\mathrm{G}}$.
□

Proposição 6.34.
O par $\langle \mathcal{L}_\Delta, \leq_\Delta \rangle$ é um reticulado.

Demonstração.
Igual à demonstração da proposição 5.34, substituindo a relação $\vdash^{c}_{\mathrm{G}}$ pela relação $\vdash^{i}_{\mathrm{G}}$.
□

Proposição 6.35.
O par $\langle \mathcal{L}_\Delta, \leq_\Delta \rangle$ é um reticulado de Heyting.

Demonstração.
A distributividade de $\sqcap^{\mathcal{L}_\Delta}$ e de $\sqcup^{\mathcal{L}_\Delta}$ segue da distributividade de $\wedge$ e $\vee$.

Sejam $[\varphi]_{\equiv_\Delta}, [\psi]_{\equiv_\Delta} \in \mathcal{L}_\Delta$. Considerem-se os seguintes certificados à Gentzen:

1.	$\Delta \vdash^{i}_{\mathrm{G}} \varphi \to \neg(\psi \wedge \neg\psi)$	$\to$ **R** 2
2.	$\Delta, \varphi \vdash^{i}_{\mathrm{G}} \neg(\psi \wedge \neg\psi)$	$\neg$**R** 3
3.	$\Delta, \varphi, \psi \wedge \neg\psi \vdash^{i}_{\mathrm{G}}$	**Cut** 3,4
4.	$\Delta, \varphi, \psi \wedge \neg\psi, \neg\psi \vdash^{i}_{\mathrm{G}}$	$\wedge$**L** 6
5.	$\Delta, \varphi, \psi \wedge \neg\psi \vdash^{i}_{\mathrm{G}} \neg\psi$	$\wedge$**L** 8
6.	$\Delta, \varphi, \psi, \neg\psi \vdash^{i}_{\mathrm{G}}$	$\neg$**L** 7
7.	$\Delta, \varphi, \psi, \vdash^{i}_{\mathrm{G}} \psi$	**Ax**
8.	$\Delta, \varphi, \neg\psi, \vdash^{i}_{\mathrm{G}} \neg\psi$	**Ax**

1.	$\Delta \vdash^{i}_{\mathrm{G}} \psi \wedge \neg\psi \to \varphi$	$\to$ **R** 2
2.	$\Delta, \psi \wedge \neg\psi \vdash^{i}_{\mathrm{G}} \varphi$	**Cut** 3,4
3.	$\Delta, \psi \wedge \neg\psi, \psi \vdash^{i}_{\mathrm{G}} \varphi$	$\wedge$**L** 5
4.	$\Delta, \psi \wedge \neg\psi \vdash^{i}_{\mathrm{G}} \psi$	$\wedge$**L** 6
5.	$\Delta, \neg\psi, \psi \vdash^{i}_{\mathrm{G}} \varphi$	**Make Empty** 7
6.	$\Delta, \psi \vdash^{i}_{\mathrm{G}} \psi$	**Ax**
7.	$\Delta, \neg\psi, \psi \vdash^{i}_{\mathrm{G}}$	$\neg$**L** 8
8.	$\Delta, \psi \vdash^{i}_{\mathrm{G}} \psi$	**Ax**

Logo, $[\varphi]_{\equiv_\Delta} \leq_\Delta [\neg(\psi \wedge \neg\psi)]_{\equiv_\Delta} = \top^{\mathcal{L}_\Delta}$ e $\bot^{\mathcal{L}_\Delta} = [\psi \wedge \neg\psi]_{\equiv_\Delta} \leq_\Delta [\varphi]_{\equiv_\Delta}$. Concluímos que $\top^{\mathcal{L}_\Delta}$ e $\bot^{\mathcal{L}_\Delta}$ são elemento topo e elemento base em $\langle \mathcal{L}_\Delta, \leq_\Delta \rangle$, respectivamente.

Vamos agora provar que $[\varphi]_{\equiv_\Delta} \to^{\mathcal{L}_\Delta} [\psi]_{\equiv_\Delta} = [\varphi \to \psi]_{\equiv_\Delta} \in \mathcal{L}_\Delta$ é o pseudo-complemento de $[\varphi]_{\equiv_\Delta}$ relativo a $[\psi]_{\equiv_\Delta} \in \mathcal{L}_\Delta$, recorrendo à caracterização (1).

Seja $[\rho]_{\equiv_\Delta} \in \mathcal{L}_\Delta$ tal que $[\rho]_{\equiv_\Delta} \leq_\Delta [\varphi \to \psi]_{\equiv_\Delta}$. Considere-se o seguinte certificado à Gentzen:

1.	$\Delta \vdash^i_{\mathrm{G}} (\varphi \wedge \rho) \to \psi$	$\to$ **R** 2
2.	$\Delta, \varphi \wedge \rho \vdash^i_{\mathrm{G}} \psi$	**Cut** 3,4
3.	$\Delta, \varphi \wedge \rho, \varphi \vdash^i_{\mathrm{G}} \psi$	MTD para $\vdash^i_{\mathrm{G}}$ 5
4.	$\Delta, \varphi \wedge \rho \vdash^i_{\mathrm{G}} \varphi$	$\wedge$**L** 8
5.	$\Delta, \varphi \wedge \rho \vdash^i_{\mathrm{G}} \varphi \to \psi$	$\wedge$**L** 6
6.	$\Delta, \rho \vdash^i_{\mathrm{G}} \varphi \to \psi$	MTD para $\vdash^i_{\mathrm{G}}$ 7
7.	$\Delta \vdash^i_{\mathrm{G}} \rho \to (\varphi \to \psi)$	hipótese
8.	$\Delta, \varphi \vdash^i_{\mathrm{G}} \varphi$	**Ax**

Reciprocamente, seja $[\rho]_{\equiv_\Delta} \in \mathcal{L}_\Delta$ tal que $[\varphi]_{\equiv_\Delta} \sqcap^{\mathcal{L}_\Delta} [\rho]_{\equiv_\Delta} \leq_\Delta [\psi]_{\equiv_\Delta}$. Considere-se o seguinte certificado à Gentzen:

1.	$\Delta \vdash^i_{\mathrm{G}} \rho \to (\varphi \to \psi)$	$\to$ **R** 2
2.	$\Delta, \rho \vdash^i_{\mathrm{G}} \varphi \to \psi$	$\to$ **R** 3
3.	$\Delta, \rho, \varphi \vdash^i_{\mathrm{G}} \psi$	$\wedge$**L** 4
4.	$\Delta, \varphi \wedge \rho \vdash^i_{\mathrm{G}} \psi$	MTD para $\vdash^i_{\mathrm{G}}$ 5
5.	$\Delta \vdash^i_{\mathrm{G}} (\varphi \wedge \rho) \to \psi$	hipótese

$\square$

Proposição 6.36.
A álgebra de Lindenbaum-Tarski é uma álgebra de Heyting.

Demonstração.
O tuplo $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}/{\equiv_\Delta}, \sqcap^{\mathcal{L}_\Delta}, \sqcup^{\mathcal{L}_\Delta}, -^{\mathcal{L}_\Delta}, \top^{\mathcal{L}_\Delta}, \perp^{\mathcal{L}_\Delta} \rangle$ e o par $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}/{\equiv_\Delta}, \leq_\Delta \rangle$ correspondem ao mesmo reticulado, segundo a definição algébrica e a definição de ordem, respectivamente. Segue pela proposição 6.35 que a álgebra de Lindenbaum-Tarski para **LPI** é uma álgebra de Heyting.

$\square$

Teorema 6.37 (Completude do Cálculo de Gentzen para **LPI**).

$$\Delta \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi \Rightarrow \Delta \vdash^i_{\mathrm{G}} \varphi \tag{6.9}$$

Demonstração.
Suponhamos que $\Delta \vDash_{\mathbf{HA}} \varphi$. Considere-se a álgebra de Heyting de Lindenbaum-Tarski, $\mathcal{L}_\Delta$, pela proposição 6.36. Tome-se uma valoração $v : \Pi_{\mathbf{LPI}} \to \mathcal{L}_\Delta$ em $\mathcal{L}_\Delta$, dada por $v(\pi) = [\pi]_{\equiv_\Delta}$, e extendida naturalmente às fórmulas proposicionais por $[\![\psi]\!]^{\mathcal{L}_\Delta}_v = [\psi]_{\equiv_\Delta}$. Note-se que para qualquer $\delta_1 \in \Delta_1$, temos $[\![\delta_1]\!]^{\mathcal{L}_\Delta}_v = \top^{\mathcal{L}_\Delta}$, pela extensividade de $\vdash^i_{\mathrm{G}}$. Segue por hipótese que $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{L}_\Delta}_v = \top^{\mathcal{L}_\Delta}$, i.e., $[\varphi]_{\equiv_\Delta} = \top^{\mathcal{L}_\Delta}$. Logo, $\Delta \vdash^i_{\mathrm{G}} \varphi$.

$\square$

A prova alternativa por indução apresentada no caso clássico não se generaliza no caso intuicionista, já que envolve consequentes com mais do que uma fórmula. De facto, os casos referentes às regras $\neg$**L** e $\rightarrow$ **L** no passo de indução violam esta restrição intuicionista.

6.4 Observações

À semelhança do caso clássico, tecemos alguns comentários sobre as demonstrações dos resultados que dão nome ao presente capítulo.

A correcção do Cálculo Natural intuicionista difere do caso clássico nas regras $\neg$**E**, $\rightarrow$ **I** e $\rightarrow$ **E**. A eliminação da negação porque, obviamente, a regra é diferente da respectiva regra clássica; e as regras da implicação, porque a tradução do conectivo implicação na álgebra de Lindenbaum intuicionista é diferente da tradução clássica. A este respeito, é interessante observar que a correcção (entenda-se, na meta-linguagem) da regra $\neg$**E** deixou de ser uma verdadeira demonstração por absurdo (já que termina com uma introdução da negação, ao concluir que não existe nenhuma valoração modelo de Γ). Quanto à completude, e à semelhança do paradigma clássico, as regras $\neg$**I** e $\neg$**E** são apenas utilizadas nos certificados da existência de elementos topo e base na álgebra de Lindenbaum. Aqui, importa sublinhar que o certificado do elemento base, embora diferente do respectivo certificado clássico, testemunha a mesma derivação, i.e., $\Gamma \vdash_{\mathrm{N}} (\psi \wedge \neg\psi) \rightarrow \varphi$; ou seja, a regra $\neg$**E** intuicionista (mais fraca que a regra clássica) ainda consegue provar que $[\psi \wedge \neg\psi]_{\equiv_\Gamma}$ é elemento base em $\mathcal{L}_\Gamma$. O mesmo não se sucede com o elemento $[\psi \vee \neg\psi]_{\equiv_\Gamma}$, que é agora substituído por $[\neg(\psi \wedge \neg\psi)]_{\equiv_\Gamma}$ enquanto elemento topo em $\mathcal{L}_\Gamma$ (ou pelo elemento $[\psi \rightarrow \psi]_{\equiv_\Gamma}$). Mais, basta a regra $\neg$**I** intuicionista para garantir este facto.

No Cálculo de Hilbert, observações semelhantes reiteram-se. A correcção deste cálculo teve de ser refeita, já que todos os axiomas envolvem o conectivo implicação, e assentou principalmente na caracterização (1) dos pseudo-complementos relativos. Na completude, tal como no paradigma clássico, os axiomas **Ax9** e **Ax10** apenas são utilizados nos certificados da existência de elementos topo e base na álgebra de Lindenbaum. Também aqui, o axioma intuicionista **Ax10** ainda consegue provar que $[\psi \wedge \neg\psi]_{\equiv_\Gamma}$ é elemento base em $\mathcal{L}_\Gamma$, mas falha em provar que $[\psi \vee \neg\psi]_{\equiv_\Gamma}$ é elemento topo em $\mathcal{L}_\Gamma$. Além disso, basta novamente a regra $\neg$**I** para garantir que $[\neg(\psi \wedge \neg\psi)]_{\equiv_\Gamma}$ é elemento topo em $\mathcal{L}_\Gamma$.

Finalmente, a correcção do Cálculo de Gentzen também teve de ser refeita para sequentes com apenas uma fórmula no seu consequente (que, diga-se, é mais simples). Ao contrário do caso clássico, nenhuma destas demonstrações recorre ao princípio do terceiro excluído (sob pena de estarmos a provar resultados intuicionistas através de meta-resultados clássicos!). Já na completude, tal como no caso clássico, as regras $\neg$**R** e $\neg$**L** são utilizadas somente nos certificados da existência de elementos topo e base na álgebra de Lindenbaum. Acontece que neste cálculo a regra $\neg$**L** intuicionista basta para provar que $[\psi \wedge \neg\psi]_{\equiv_\Gamma}$ é elemento base em $\mathcal{L}_\Gamma$; e por outro lado, são precisas ambas as regras da negação para garantir que $[\neg(\psi \wedge \neg\psi)]_{\equiv_\Gamma}$ é elemento topo em $\mathcal{L}_\Gamma$.

A tabela 6.1 discrimina as regras da negação que foram utilizadas nos certificados da existência de elementos topo e base na álgebra de Lindenbaum intuicionista, para os três cálculos estudados.

	Topo	Base
$\vdash^i_{\mathrm{N}}$	$\neg$**I**	$\neg$**I** e $\neg$**E**
$\vdash^i_{\mathrm{H}}$	**Ax10**	**Ax9** e **Ax10**
$\vdash^i_{\mathrm{G}}$	$\neg$**R** e $\neg$**L**	$\neg$**L**

Tabela 6.1: Regras da negação nos certificados da álgebra de Lindenbaum-Tarski intuicionista.

7 Uma consequência para LPC e LPI

O teorema de Glivenko é talvez o resultado que melhor delimita a fronteira entre os paradigmas clássicos e intuicionistas. A Lógica Proposicional Intuicionista foi, por construção, concebida enquanto parte da Lógica Proposicional Clássica. É pois natural que a primeira encontre uma tradução trivial na segunda. Acontece que, à luz do teorema de Glivenko, a Lógica Proposicional Clássica também pode ser traduzida na Lógica Proposicional Intuicionista. O seu enunciado é tão simples quanto:

$$\Gamma \vdash^{c} \varphi \text{ sse } \neg\neg\Gamma \vdash^{i} \neg\neg\varphi \ .$$

O objectivo neste capítulo passa por demonstrar uma versão semântica deste resultado, e, à luz da completude das semânticas clássicas e intuicionistas, estabelecer o teorema de Glivenko para os três cálculos estudados nesta primeira parte do nosso trabalho.

A vantagem deste procedimento provém não só do facto de um teorema semântico dar origem a três teoremas sintácticos, mas principalmente do facto da demonstração semântica ser notoriamente mais simples e elegante que as demonstrações sintácticas. A este respeito, importa referir que a demonstração semântica foi inspirada por [Block and Rebagliato, 2003, Lemma 2.5, p. 162].

Vamos aqui denotar por $\neg\neg\Gamma$ o conjunto $\{\neg\neg\gamma : \gamma \in \Gamma\}$.

Teorema 7.1 (Teorema de Glivenko - versão semântica)**.**

$$\Gamma \vDash_{\mathbf{BA}} \varphi \ \textit{sse} \ \neg\neg\Gamma \vDash_{\mathbf{HA}} \neg\neg\varphi$$

Demonstração.

Note-se que $\Pi_{\mathbf{LPC}} = \Pi_{\mathbf{LPI}}$.

$\Rightarrow$:

Suponhamos que $\Gamma \vDash_{\mathbf{BA}} \varphi$. Seja $\mathcal{H} \in \mathbf{HA}$. Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPI}} \to H$ uma valoração em $\mathcal{H}$ modelo de $\neg\neg\Gamma$. Prova-se que o conjunto $B = \{\neg a : a \in \mathcal{H}\}$ é o universo de uma álgebra booleana $\mathcal{B}$ [Rasiowa and Sikorski, 1963, 6.1. e 6.5, pp. 133, 134], e que a função $h : \mathcal{H} \to \mathcal{B}$ dada por $h(a) = \neg\neg a$ é um homomorfismo de álgebras [Rasiowa and Sikorski, 1963, p. 134]. Então, a composição $h \circ v : \Pi_{\mathbf{LPI}} \to B$ é uma valoração em $\mathcal{B}$ modelo de Γ (pois $(h \circ v)(\gamma) = h(v(\gamma)) = \neg\neg v(\gamma) = v(\neg\neg\gamma) = \top^{\mathcal{H}} = \top^{\mathcal{B}}$, por definição de extensão de uma valoração às fórmulas, porque v é modelo de $\neg\neg\Gamma$ e tendo em conta que $\top^{\mathcal{B}} = \neg\bot^{\mathcal{H}} = \top^{\mathcal{H}}$, pelo lema 3.4 (i)). Segue por hipótese que $h \circ v$ é modelo de φ, i.e., $(h \circ v)(\varphi) = h(v(\varphi)) = \neg\neg v(\varphi) = \top^{\mathcal{B}}$. Mas então, $v(\neg\neg\varphi) = \top^{\mathcal{H}}$ (novamente por definição de extensão de uma valoração às fórmulas). Logo, $\neg\neg\Gamma \vDash_{\mathcal{H}} \neg\neg\varphi$. Concluímos que $\neg\neg\Gamma \vdash_{\mathbf{HA}} \neg\neg\varphi$.

$\Leftarrow$:

Suponhamos que $\neg\neg\Gamma \vDash_{\mathbf{HA}} \neg\neg\varphi$. Seja $\mathcal{B} \in \mathbf{BA}$. Seja $v : \Pi_{\mathbf{LPC}} \to B$ uma valoração em $\mathcal{B}$ modelo de Γ. Segue que v é modelo de $\neg\neg\Gamma$, pelo lema 3.4 (ii). Como $\mathbf{BA} \subseteq \mathbf{HA}$, segue por hipótese que v é modelo de $\neg\neg\varphi$, e portanto v é modelo de φ, pelo mesmo lema. Concluímos que $\Gamma \vdash_{\mathbf{HA}} \varphi$.

□

À luz da completude dos seis cálculos estudados (três clássicos e três intuicionistas) nesta primeira parte do nosso trabalho, enunciamos de seguida o Teorema de Glivenko para todos eles.

Teorema 7.2 (Teorema de Glivenko)**.**

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \varphi \quad \textit{sse} \quad \neg\neg\Gamma \vdash_{\mathrm{N}}^{i} \neg\neg\varphi$$

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{c} \varphi \quad \textit{sse} \quad \neg\neg\Gamma \vdash_{\mathrm{H}}^{i} \neg\neg\varphi$$

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{G}}^{c} \varphi \quad \textit{sse} \quad \neg\neg\Gamma \vdash_{\mathrm{G}}^{i} \neg\neg\varphi$$

A título de exemplo, esboçamos a ideia da prova do teorema de Glivenko para o Cálculo Natural [van Dalen, 2004]. Esta faz uso da *tradução negativa de Gödel*, que passamos a introduzir.

Definição 7.3. A *tradução negativa de Gödel* é uma função $^G : \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}} \to \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}$, dada por:

- $\pi^G = \neg\neg\pi$, para $\pi \in \Pi_{\mathbf{LPI}}$;
- $(\neg\varphi)^G = \neg\varphi^G$;
- $(\varphi \wedge \psi)^G = \varphi^G \wedge \psi^G$;
- $(\varphi \vee \psi)^G = \neg(\neg\varphi^G \wedge \neg\psi^G)$;
- $(\varphi \to \psi)^G = \varphi^G \to \psi^G$.

Como é usual, escrevemos $\Gamma^G = \{\gamma^G : \gamma \in \Gamma\}$.

O próximo lema diz-nos que uma fórmula proposicional é classicamente derivável sse a sua tradução negativa de Gödel é intuicionisticamente derivável. O lema que se lhe segue diz-nos, por sua vez, que uma tradução negativa de Gödel é derivável sse as mesmas fórmulas duplamente negadas o são.

Lema 7.4.

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{N}}^{c} \varphi \ \textit{sse}\ \Gamma^G \vdash_{\mathrm{N}}^{i} \varphi^G$$

Demonstração.

$\Rightarrow$:

Prova por indução no comprimento da derivação de φ^G a partir de Γ^G.

$\Leftarrow$:

É imediato que $\Gamma^G \vdash^c \varphi^G$. A prova segue por indução no comprimento da derivação de φ a partir de Γ.

□

Lema 7.5.

$$\Gamma^G \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi^G \ \textit{sse}\ \neg\neg\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \neg\neg\varphi$$

Demonstração.

$\Rightarrow$:

Prova por indução no comprimento da derivação de $\neg\neg\varphi$ a partir de $\neg\neg\Gamma$.

$\Leftarrow$:

Prova por indução no comprimento da derivação de φ^G a partir de Γ^G.

□

O teorema de Glivenko para o Cálculo Natural segue agora imediatamente dos lemas 7.4 e 7.5.

Referências

[Block and Rebagliato, 2003]
[van Dalen, 2004]

Parte II

Lógica *vs.* Lambda

"Note the similarity of the postulates for F and those for P. If in any of the former postulates we change F to P and drop the combinator we have the corresponding postulate for P."

[Curry, 1942, nota de rodapé 28, p. 60]

8 Fragmento Implicacional Intuicionista

De todos os conectivos lógicos presentes nas assinaturas lógicas consideradas, aquele que desempenhou o papel de maior relevo na correspondência lógico-algébrica foi a implicação. De facto, foi à custa da implicação que definimos a relação de ordem parcial na álgebra de Lindenbaum-Tarski, a partir da qual construímos as álgebras booleana e de Heyting sobre a álgebra das fórmulas proposicionais.

Nesta segunda parte do nosso estudo pretendemos estabelecer outra correspondência, agora entre a Lógica Proposicional Intuicionista e o Cálculo Lambda com tipos. Mais uma vez, será o conectivo implicação a base desta nova correspondência.

É pois razoável consideramos o *fragmento implicacional* das Lógicas estudadas, i.e., a restrição de cada cálculo às respectivas regras da implicação e axiomas base. Neste capítulo consideramos o fragmento implicacional da Lógica Proposicional Intuicionista. Veremos não só que este fragmento ainda é completo, como também que cada cálculo é *conservativo* sobre o respectivo fragmento implicacional. Ou seja, qualquer derivação intuicionista que envolva apenas fórmulas implicacionais pode ser derivada dentro do próprio fragmento.

Não tratamos o caso do fragmento implicacional da Lógica Proposicional Clássica, pois uma vez aqui chegados, apenas o caso intuicionista é relevante para o Isomorfismo de Curry-Howard. A Lógica Clássica, enquanto motivação para a Lógica Intuicionista, não constituirá objecto do nosso estudo nesta segunda parte do presente trabalho.

O estudo do fragmento implicacional do Cálculo Natural realizado neste capítulo segue de perto [Sørensen and Urzyczyn, 1998, 2.6. The Implicational Fragment]. O fragmento implicacional dos restantes cálculos teve por base o caso natural.

8.1 Linguagem para LPI $\rightarrow$

O fragmento implicacional da Lógica Proposicional Intuicionista opera apenas sobre as fórmulas proposicionais implicativas. Formalmente,

$$\Pi_{\mathbf{LPI}\rightarrow} = \Pi_{\mathbf{LPI}} \ ,$$

$$\Sigma_{\mathbf{LPI}\rightarrow} = \langle \rightarrow \rangle \ ,$$

e

$$\mathcal{L}_{\mathbf{LPI}\rightarrow} = \langle \Pi_{\mathbf{LPI}\rightarrow}, \rightarrow^{\mathcal{L}_{\mathbf{LPI}\rightarrow}} \rangle \ .$$

8.2 Cálculos para LPI $\rightarrow$

Nesta secção restringimos as regras dos cálculos para a Lógica Proposicional Intuicionista aos respectivos esquemas de axiomas base e regras da implicação.

8.2.1 Cálculo Natural

As regras do Cálculo Natural para o fragmento implicacional da Lógica Proposicional Intuicionista são introduzidas na próxima definição.

Definição 8.1. A relação $\vdash^i_{\mathrm{N}\rightarrow} \subseteq \mathscr{P}(\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}) \times \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ é definida recursivamente pelas seguintes regras:

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash^i_{\mathrm{N}\rightarrow} \varphi}\ \mathbf{Ax}$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash^i_{\mathrm{N}\rightarrow} \psi}{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}\rightarrow} \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow \mathbf{I} \qquad \frac{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}\rightarrow} \varphi \rightarrow \psi \qquad \Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}\rightarrow} \varphi}{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}\rightarrow} \psi} \rightarrow \mathbf{E}$$

$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}\rightarrow} \varphi$ representa a notação *infix* para $\langle \Gamma, \varphi \rangle \in \vdash^i_{\mathrm{N}\rightarrow}$.

As noções de certificado e fecho sintáctico em **LPI** $\rightarrow$ coincidem com as definições vistas em **LPI**.

8.2.2 Cálculo de Hilbert

As regras do fragmento implicacional do Cálculo de Hilbert para a Lógica Proposicional Intuicionista são introduzidas na próxima definição.

Definição 8.2. A relação $\vdash^i_{\mathrm{H}\rightarrow} \subseteq \mathscr{P}(\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}) \times \mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ é definida recursivamente pelas seguintes regras:

$$\frac{}{\vdash^i_{\mathrm{H}\rightarrow} \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)}\ \mathbf{Ax1}$$

$$\frac{}{\vdash^i_{\mathrm{H}\rightarrow} (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \rho)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \rho))}\ \mathbf{Ax8}$$

$$\frac{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}\rightarrow} \varphi \qquad \Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}\rightarrow} \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}\rightarrow} \psi}\ \mathbf{MP}$$

$\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}\rightarrow} \varphi$ representa a notação *infix* para $\langle \Gamma, \varphi \rangle \in \vdash^i_{\mathrm{H}\rightarrow}$.

As noções de certificado à Hilbert e fecho à Hilbert em **LPI** $\rightarrow$ coincidem com as definições vistas em **LPI**.

8.2.3 Cálculo de Gentzen

As regras do fragmento implicacional do Cálculo de Gentzen para a Lógica Proposicional Intuicionista são introduzidas na próxima definição.

Definição 8.3. A relação $\vdash^i_{G\rightarrow}$ entre multi-conjuntos finitos em $\mathcal{L}_{\mathbf{LPC}}$ é definida recursivamente pelas seguintes regras:

$$\frac{}{\Delta, \varphi \vdash^i_{G\rightarrow} \varphi}\ \mathbf{Ax}$$

$$\frac{\Delta \vdash^i_{G\rightarrow} \varphi \qquad \Delta, \varphi \vdash^i_{G\rightarrow} \delta}{\Delta \vdash^i_{G\rightarrow} \delta}\ \mathbf{Cut}$$

$$\frac{\Delta \vdash^i_{G\rightarrow} \varphi \qquad \Delta, \psi \vdash^i_{G\rightarrow} \delta}{\Delta, \varphi \rightarrow \psi \vdash^i_{G\rightarrow} \delta} \rightarrow \mathbf{L} \qquad \frac{\Delta, \varphi \vdash^i_{G\rightarrow} \psi}{\Delta \vdash^i_{G\rightarrow} \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow \mathbf{R}$$

$\Gamma \vdash^i_{G\rightarrow} \varphi$ representa a notação *infix* para $\langle \Gamma, \varphi \rangle \in \vdash^i_{G\rightarrow}$.

As noções de certificado à Gentzen e fecho à Gentzen em **LPI** $\rightarrow$ coincidem com as definições vistas em **LPI**.

8.3 Semânticas para LPI $\rightarrow$

As semânticas aqui consideradas serão novamente a classe dos modelos de Kripke e a classe das álgebras de Heyting.

8.3.1 $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}\rightarrow}, \vdash^i_{N\rightarrow} \rangle = \langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}\rightarrow}, \vDash_{\mathbf{K}} \rangle$

O próximo teorema estabelece a correcção e a completude do Cálculo Natural para o fragmento implicacional da Lógica Proposicional Intuicionista, segundo a semântica da classe dos modelos de Kripke.

Teorema 8.4 (Correcção e Completude do Cálculo Natural para **LPI** $\rightarrow$)**.**

$$\Gamma \vdash^i_{N\rightarrow} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vDash_{\mathbf{K}} \varphi \tag{8.1}$$

Demonstração.
A correcção segue imediatamente da correcção do Cálculo Natural para **LPI**.

A completude segue por contra-recíproco. Suponhamos que $\Gamma \nvdash^i_{N\rightarrow} \varphi$. Considere-se o modelo de Kripke $\mathcal{K} = \{W, \leq_{\mathcal{K}}, \Vdash_{\mathcal{K}}\}$ tal que:

$$\begin{array}{rcl} W & = & \{\Delta \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}\rightarrow} : \Gamma \subseteq \Delta \text{ e } \Delta^{\vdash^i_{N\rightarrow}} = \Delta\}\ ; \\ \leq_{\mathcal{K}} & = & \subseteq\ ; \\ \Vdash_{\mathcal{K}} & = & \in\ . \end{array}$$

É imediato que $\mathcal{K}$ é um modelo de Kripke.
Para $\Delta \in W$, tem-se $\Delta \vdash^i_{N\rightarrow} \delta \Leftrightarrow \delta \in \Delta$. Vamos mostrar que $\Delta \Vdash_{\mathcal{K}} \delta \Leftrightarrow \delta \in \Delta$. A prova

segue por indução na construção de $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}\to}$.

Base: $\delta \equiv x \in \Pi_{\mathbf{LPI}\to}$

É imediato por definição de $\Vdash_{\mathcal{K}}$ que $\Delta \Vdash_{\mathcal{K}} x \Leftrightarrow x \in \Delta$.

Passo: $\delta \equiv \psi \to \rho$

$\Rightarrow$:

Suponhamos que $\Delta \Vdash_{\mathcal{K}} \psi \to \rho$. Tome-se o mundo $\Delta' = \{\vartheta \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}\to} : \Delta, \psi \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \vartheta\} \in W$. Segue por extensividade de $\vdash^{i}_{\mathrm{N}\to}$ que $\Delta, \psi \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \psi$, i.e., $\psi \in \Delta'$, e por hipótese de indução que $\Delta' \Vdash_{\mathcal{K}} \psi$. Segue agora por hipótese que $\Delta' \Vdash_{\mathcal{K}} \rho$ (pois $\Delta' \geq_{\mathcal{K}} \Delta$, i.e., $\Delta \subseteq \Delta'$), e novamente por hipótese de indução que $\rho \in \Delta'$, i.e., $\Delta, \psi \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \rho$. Segue finalmente pela regra $\to$ **I** que $\Delta \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \psi \to \rho$, i.e., $\psi \to \rho \in \Delta$.

$\Leftarrow$:

Suponhamos que $\psi \to \rho \in \Delta$, i.e., $\Delta \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \psi \to \rho$. Seja $\Delta' \geq_{\mathcal{K}} \Delta$ um mundo visível por Δ tal que $\Delta' \Vdash_{\mathcal{K}} \psi$. Segue por hipótese de indução que $\psi \in \Delta'$, i.e., $\Delta' \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \psi$. Por monotonia sobre a hipótese (pois já provámos que $\leq_{\mathcal{K}} = \subseteq$ se estende às fórmulas proposicionais) temos ainda que $\Delta' \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \psi \to \rho$. Segue então pela regra $\to$ **E** que $\Delta' \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \rho$, i.e., $\rho \in \Delta'$. Segue finalmente por hipótese de indução que $\Delta' \Vdash_{\mathcal{K}} \rho$. Logo, $\Delta \Vdash_{\mathcal{K}} \psi \to \rho$.

Concluímos que

$$\Delta \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \delta \Leftrightarrow \delta \in \Delta \Leftrightarrow \Delta \Vdash_{\mathcal{K}} \delta \ .$$

Considere-se agora o conjunto $\Gamma^{\vdash^{i}_{\mathrm{N}\to}}$. É imediato que $\Gamma^{\vdash^{i}_{\mathrm{N}\to}} \in W$. Então,

$$\Gamma^{\vdash^{i}_{\mathrm{N}\to}} \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \delta \Leftrightarrow \delta \in \Gamma^{\vdash^{i}_{\mathrm{N}\to}} \Leftrightarrow \Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \delta \ .$$

Como por hipótese $\Gamma \nvdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \varphi$, segue que $\Gamma^{\vdash^{i}_{\mathrm{N}\to}} \nvdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \varphi$, e portanto $\Gamma^{\vdash^{i}_{\mathrm{N}\to}} \nVdash_{\mathcal{K}} \varphi$. Ora, é imediato que $\Gamma^{\vdash^{i}_{\mathrm{N}\to}} \Vdash_{\mathcal{K}} \gamma$, para todo $\gamma \in \Gamma$ (pois $\Vdash_{\mathcal{K}} = \in$). Logo, $\Gamma \nvDash_{\mathcal{K}} \varphi$. Concluímos que $\Gamma \nvDash_{\mathbf{K}} \varphi$.

□

Concluímos que o Cálculo Natural é conservativo para o seu fragmento implicacional.

Teorema 8.5. *Sejam* $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}\to}$ *e* $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}\to}$. *Tem-se:*

$$\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \varphi \tag{8.2}$$

Demonstração.

$\Leftarrow$:

Imediato.

$\Rightarrow$:

$$\begin{array}{rcl} \Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \varphi & \Rightarrow & \Gamma \vDash_{\mathbf{K}} \varphi \ , \\ & & \text{pelo teorema 6.1} \\ & \Rightarrow & \Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \varphi \ , \\ & & \text{pelo teorema 8.4} \end{array}$$

□

8.3.2 $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}\to}, \vdash^{i}_{\mathrm{H}\to} \rangle = \langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}\to}, \vDash_{\mathbf{K}} \rangle$

O próximo teorema estabelece a correcção e a completude do Cálculo de Hilbert para o fragmento implicacional da Lógica Proposicional Intuicionista, segundo a semântica da classe dos modelos de Kripke **K**.

Teorema 8.6 (Correcção e Completude do Cálculo de Hilbert para **LPI** $\rightarrow$)**.**

$$\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{H}\rightarrow} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vDash_{\mathbf{K}} \varphi \tag{8.3}$$

Demonstração.
A correcção segue imediatamente da correcção do Cálculo de Hilbert para **LPI**.

A completude é igual à demonstração para o Cálculo Natural, com excepção do passo de indução, onde apelamos ao MTD para o Cálculo de Hilbert e à regra **MP**, em vez das regras $\rightarrow$ **I** e $\rightarrow$ **E**, respectivamente. Note-se que o MTD foi demonstrado para o Cálculo de Hilbert recorrendo somente aos axiomas **Ax1** e **Ax8**.

□

Concluímos que o Cálculo de Hilbert é conservativo para o seu fragmento implicacional.

Teorema 8.7. *Sejam* $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}\rightarrow}$ *e* $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}\rightarrow}$*. Tem-se:*

$$\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{H}} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{H}\rightarrow} \varphi \tag{8.4}$$

Demonstração.
$\Leftarrow$:
Imediato.

$\Rightarrow$:

$$\begin{aligned} \Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{H}} \varphi \quad & \Rightarrow \quad \Gamma \vDash_{\mathbf{K}} \varphi\ , \\ & \qquad \text{pelo teorema 6.13} \\ & \Rightarrow \quad \Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{H}\rightarrow} \varphi\ , \\ & \qquad \text{pelo teorema 8.6} \end{aligned}$$

□

8.3.3 $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}\rightarrow}, \vdash^{i}_{\mathrm{G}\rightarrow} \rangle = \langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}\rightarrow}, \vDash_{\mathbf{K}} \rangle$

O próximo teorema estabelece a correcção e a completude do Cálculo de Gentzen para o fragmento implicacional da Lógica Proposicional Intuicionista, segundo a semântica da classe dos modelos de Kripke **K**.

Teorema 8.8 (Correcção e Completude do Cálculo de Gentzen para **LPI** $\rightarrow$)**.**

$$\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{G}\rightarrow} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vDash_{\mathbf{K}} \varphi \tag{8.5}$$

Demonstração.
A correcção segue imediatamente da correcção do Cálculo de Gentzen para **LPI**.

A completude é igual à demonstração para o Cálculo Natural, com excepção do passo de indução, onde, a implicação da esquerda para a direita apela à regra $\rightarrow$ **R** em vez da regra $\rightarrow$ **I**, e a implicação recíproca é estabelecida como se segue (também seguiria imediatamente apelando ao MTMP para o cálculo de Gentzen em vez da regra $\rightarrow$ **E**):

$\Leftarrow$:
Suponhamos que $\psi \rightarrow \rho \in \Delta$, i.e., $\Delta \vdash^{i}_{\mathrm{G}\rightarrow} \psi \rightarrow \rho$. Seja $\Delta' \geq_{\mathcal{K}} \Delta$ um mundo visível

por Δ tal que $\Delta' \Vdash_{\mathcal{K}} \psi$. Segue por hipótese de indução que $\psi \in \Delta'$, i.e., $\Delta' \vdash^i_{G\rightarrow} \psi$. Por extensividade temos ainda que $\Delta', \rho \vdash^i_{G\rightarrow} \rho$. Segue então pela regra $\rightarrow$ **L** que $\Delta', \psi \rightarrow \rho \vdash^i_{G\rightarrow} \rho$. Por monotonia sobre a hipótese (pois $\leq_{\mathcal{K}} = \subseteq$), segue que $\Delta' \vdash^i_{G\rightarrow} \psi \rightarrow \rho$. Segue então pela regra **Cut** que $\Delta' \vdash^i_{G\rightarrow} \rho$, i.e., $\rho \in \Delta'$. Segue finalmente por hipótese de indução que $\Delta' \Vdash_{\mathcal{K}} \rho$. Logo, $\Delta \Vdash_{\mathcal{K}} \psi \rightarrow \rho$.

□

Concluímos que o Cálculo de Gentzen é conservativo para o seu fragmento implicacional.

Teorema 8.9. *Sejam* $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}\rightarrow}$ *e* $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}\rightarrow}$. *Tem-se:*

$$\Gamma \vdash^i_{G} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash^i_{G\rightarrow} \varphi \tag{8.6}$$

Demonstração.

$\Leftarrow$:

Imediato.

$\Rightarrow$:

$$\begin{aligned} \Gamma \vdash^i_{G} \varphi \quad &\Rightarrow \quad \Gamma \vDash_{\mathbf{K}} \varphi \,, \\ &\qquad \text{pelo teorema 6.25} \\ &\Rightarrow \quad \Gamma \vdash^i_{G\rightarrow} \varphi \,, \\ &\qquad \text{pelo teorema 8.8} \end{aligned}$$

□

Referências

[Sørensen and Urzyczyn, 1998]

9 | Cálculo Lambda sem tipos

O Cálculo Lambda é uma teoria que trata as funções segundo o paradigma “funções enquanto regras”, ao invés do usual paradigma “funções enquanto grafos”. As funções vistas como grafos, i.e., como conjuntos de pares ordenados, têm origem na teoria de conjuntos. As funções vistas como regras, i.e., como expressões que fazem corresponder um argumento ao valor da função avaliada nesse argumento, têm origem na análise. Note-se que a primeira abordagem é mais geral que a segunda, já que um grafo pode definir uma função que não é dada por nenhuma regra. Em computação, porém, estamos mais interessados em *como* a função é calculada, do que no valor que esta assume [Selinger, 2007, 1.1. Extensional vs. intensional view of functions].

A referência clássica para o cálculo lambda sem tipos é [Barendregt, 1984]. As referências principais para este capítulo foram [Sørensen and Urzyczyn, 1998], [Caleiro, 2002] e [Selinger, 2007].

9.1 Linguagem para $\lambda\to$

Será o Cálculo Lambda, como o nome sugere, um cálculo para alguma lógica? O objectivo da segunda parte do presente trabalho é mostrar que essa lógica é precisamente **LPI**. Por enquanto, e à semelhança dos cálculos estudados na primeira parte deste trabalho, vamos definir a linguagem lambda $\mathcal{L}_{\lambda\to}$ sobre o alfabeto lambda $\Pi_{\lambda\to}$ e a assinatura lambda $\Sigma_{\lambda\to}$.

Definição 9.1. O *alfabeto lambda* é um conjunto numerável

$$\Pi_{\lambda\to} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\} ,$$

cujos elementos se designam por *variáveis lambda.*

Definição 9.2. A *assinatura lambda* é uma assinatura

$$\Sigma_{\lambda\to} = \langle \mathrm{app}, \langle \mathrm{abs}_x \rangle_{x\in\Pi_{\lambda\to}} \rangle ,$$

cujos elementos se designam por *operações lambda*, e onde:

- app é uma operação binária, dita *aplicação lambda*;
- abs_x é um operação unária, dita *abstracção lambda.*

Definição 9.3. A *linguagem lambda* é a $\Sigma_{\lambda\to}$-álgebra livre em $\mathrm{Alg}(\Sigma_{\lambda\to})$ sobre $\Pi_{\lambda\to}$,

$$\mathcal{L}_{\lambda\to} = \langle \Pi_{\lambda\to}, \mathrm{app}^{\mathcal{L}_{\lambda\to}}, \langle \mathrm{abs}_x^{\mathcal{L}_{\lambda\to}} \rangle_{x\in\Pi_{\lambda\to}} \rangle ,$$

cujos elementos se designam por *termos lambda.*

Mais uma vez, é usual identificar a álgebra $\mathcal{L}_{\lambda\to}$ com a linguagem gerada pela gramática

$$M := x \mid MM \mid \lambda x.M \ ,$$

onde para qualquer $x \in \Pi_\lambda$ e quaisquer $M, N \in \mathcal{L}_\lambda$:

- MN denota $\mathrm{app}(M, N)$;
- $\lambda x.N$ denota $\mathrm{abs}_x(M)$.

A intuição por detrás de um termo lambda é a seguinte: uma variável de tipo x tem o significado que o nome indica; uma aplicação MN representa a aplicação da "função" M ao argumento N; e uma abstracção $\lambda x.M$ representa uma "função" na variável x dada pelo termo M.

Note-se que qualquer termo lambda pode ser visto simultaneamente como "função" e "argumento". Esta é a característica original do cálculo lambda. Não se distinguem elementos activos de elementos passivos. Qualquer termo pode ser aplicado a outro termo [Caleiro, 2002].

São usuais algumas convenções na manipulação de termos lambda. Nomeadamente, omitimos parêntesis exteriores, consideramos a aplicação de termos lambda associativa à esquerda, e a abstracção estende-se o mais possível à direita. Assim, por exemplo, o termo lambda MNL deve entender-se como $((MN)L)$ e o termo lambda $\lambda x.MN$ deve entender-se como $(\lambda x.(MN))$. Denotamos ainda a abstracção sobre múltiplas variáveis $\lambda x.\lambda y.M$ simplesmente por $\lambda xy.M$.

9.2 Congruência-α, redução-β e redução-η

A linguagem dos termos lambda definidos na secção anterior é algo redundante. Isto porque se a intuição de uma abstracção lambda $\lambda x.M$ é uma função que recebe um argumento x e retorna M (supondo aqui $M \not\equiv x$), o termo lambda $\lambda y.M$, com $y \neq x$, representará a mesma função. Ou seja, dois termos lambda que diferem apenas na ocorrência de variáveis *mudas*, representam a mesma função. É pois natural identificar tais termos. A relação de congruência que os identifica receberá o nome de *congruência-α*. Começamos por introduzir alguns conceitos necessários à sua definição formal.

Chamamos *âmbito* de uma abstracção $\lambda x.M$ ao termo lambda M. Uma variável diz-se *muda* num termo lambda, se ocorre no âmbito de alguma abstracção sobre essa mesma variável; caso contrário, diz-se *livre*. Formalmente, definimos o conjunto das variáveis livres de um termo lambda M recursivamente como se segue:

- $\mathrm{FV}(x) = \{x\}$, com $x \in \Pi_{\lambda\to}$;
- $\mathrm{FV}(LN) = \mathrm{FV}(L) \cup \mathrm{FV}(N)$, com $L, N \in \mathcal{L}_{\lambda\to}$;
- $\mathrm{FV}(\lambda x.N) = \mathrm{FV}(N)\backslash\{x\}$, com $N \in \mathcal{L}_{\lambda\to}$.

Um termo lambda M diz-se *fechado*, ou um *combinador*, se não possui variáveis livres, i.e., se $\mathrm{FV(M)} = \varnothing$.

Sejam $x, y \in \Pi_{\lambda\to}$ e $M \in \mathcal{L}_{\lambda\to}$. Definimos a *substituição da variável muda x em M pela variável y*, que denotamos por $M\{y/x\}$, recursivamente como se segue:

- $z\{y/x\} = z$, com $z \in \Pi_{\lambda\to}$;
- $(LN)\{y/x\} = L\{y/x\}N\{y/x\}$, com $L, N \in \mathcal{L}_{\lambda\to}$;
- $(\lambda z.N)\{y/x\} = \begin{cases} \lambda y.N\{y/x\} & \text{, se } z = x \\ \lambda z.N & \text{, se } z \neq x \end{cases}$, com $N \in \mathcal{L}_{\lambda\to}$.

Estamos agora em condições de definir a relação de congruência que identifica os termos lambda a menos de substituições de variáveis mudas.

Definição 9.4. A *relação de congruência-α*, que denotamos por $=_\alpha$, é a menor relação de congruência em $\mathcal{L}_{\lambda\to}$ fechada para a regra:

$$\frac{}{\lambda x.N =_\alpha \lambda y.N\{y/x\}}\ (\alpha)$$

Explicitamente, $=_\alpha$ é a menor relação em $\mathcal{L}_{\lambda\to}$ fechada para as regras:

$$\frac{}{N =_\alpha N} \qquad \frac{M =_\alpha N \quad N =_\alpha L}{M =_\alpha L} \qquad \frac{M =_\alpha N}{N =_\alpha M}$$

$$\frac{M =_\alpha N}{ML =_\alpha NL} \qquad \frac{M =_\alpha N}{LM =_\alpha LN} \qquad \frac{M =_\alpha M'}{\lambda x.M =_\alpha \lambda x.M'}$$

$$\frac{}{\lambda x.N =_\alpha \lambda y.N\{y/x\}}\ (\alpha)$$

As três primeiras regras dizem-nos que $=_\alpha$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{L}_{\lambda\to}$, e as três seguintes dizem-nos que $=_\alpha$ é compatível com as operações da assinatura lambda, e portanto $=_\alpha$ é uma relação de congruência em $\mathcal{L}_{\lambda\to}$.

No seguimento, cada termo lambda deve ser entendido como um representante da sua classe de equivalência módulo $=_\alpha$. Continuaremos, porém, a denotar por $\mathcal{L}_{\lambda\to}$ o que em rigor entendemos por $\mathcal{L}_{\lambda\to}/{=_\alpha}$.

Continuando com a intuição dos termos lambda enquanto funções, dada uma função $\lambda x.M$ na variável x e um argumento N, desejamos obviamente que a aplicação $(\lambda x.M)N$ seja avaliada no termo lambda M, com as ocorrências da variável x substituídas pelo termo lambda N. Esta avaliação receberá o nome de *redução-β*. Para a definirmos formalmente, precisamos agora de introduzir a substituição de uma variável (agora, livre) num termo lambda (agora, por um termo lambda qualquer). Temos no entanto que ter algum cuidado, já que uma variável que ocorra livre no termo lambda N não pode ser capturada no âmbito da abstracção $\lambda x.M$. A solução natural será substituir x por outra variável y que não ocorra em nenhum dos termos lambda, antes de efectuar a substituição. Chamamos a y uma variável *fresca*. É precisamente a necessidade de recorrer a variáveis frescas na redução-β que nos leva a exigir a numerabilidade de $\Pi_{\lambda\to}$.

Sejam $x \in \Pi_{\lambda\to}$ e $M, N \in \mathcal{L}_{\lambda\to}$. Definimos a *substituição da variável livre x em M pelo termo lambda N*, que denotamos por $M[N/x]$, recursivamente como se segue:

- $z[N/x] = \begin{cases} N & \text{, se } z = x \\ z & \text{, se } z \neq x \end{cases}$, com $z \in \Pi_{\lambda\to}$;
- $(KL)[N/x] = K[N/x]L[N/x]$, com $K, L \in \mathcal{L}_{\lambda\to}$;

- $(\lambda z.L)[N/x] = \begin{cases} \lambda z.L & \text{, se } z = x \\ \lambda z.L[N/x] & \text{, se } z \neq x \text{ e } z \notin \mathrm{FV}(N)\text{, com } L \in \mathcal{L}_{\lambda\to} \text{ e } y \text{ fresca.} \\ \lambda y.L\{y/z\}[N/x] & \text{, se } z \neq x \text{ e } z \in \mathrm{FV}(N) \end{cases}$

Em rigor, deveríamos explicitar como escolher a variável fresca y no último caso. Dada uma enumeração de $\Pi_{\lambda\to}$, bastava escolher a primeira variável que ainda não tivesse sido utilizada. A robustez desta definição também seguiria da boa definição da substituição de termos lambda módulo $=_\alpha$.

O próximo teorema garante-nos não só que a substituição de termos lambda está bem definida módulo $=_\alpha$ (tomando $N_1 \equiv N_2 \equiv N$), como também que a congruência-α é preservada pela substituição de termos lambda (tomando $M_1 \equiv M_2 \equiv M$).

Teorema 9.5. *Se $M_1 =_\alpha M_2$ e $N_1 =_\alpha N_2$, então $M_1[N_1/x] =_\alpha M_2[N_2/x]$.*

Demonstração.
$M[N_1/x] =_\alpha M[N_2/x]$:
Prova por indução em $M \in \mathcal{L}_{\lambda\to}$.

$M_1[N/x] =_\alpha M_2[N/x]$:
Prova por indução no comprimento da sequência de mudanças de variáveis mudas que leva de M_1 a M_2.

□

Vamos finalmente definir a já referida relação β, assim como as relações η e $\beta\eta$ em $\mathcal{L}_{\lambda\to}$. Intuitivamente, já vimos, a relação β identifica os termos lambda que representam a mesma função, antes e depois de ser avaliada sobre um argumento. A relação η identifica os termos lambda que retornem o mesmo resultado quando aplicados a qualquer argumento. A relação $\beta\eta$ é a união destas duas relações.

Definição 9.6. A relação β em $\mathcal{L}_{\lambda\to}$ é dada por

$$\beta = \{\langle(\lambda x.M)N, M[N/x]\rangle : M, N \in \mathcal{L}_{\lambda\to}, x \in \Pi_{\lambda\to}\} \in \mathcal{L}^2_{\lambda\to} \ .$$

Definição 9.7. A relação η em $\mathcal{L}_{\lambda\to}$ é dada por

$$\eta = \{\langle\lambda x.Mx, M\rangle : M \in \mathcal{L}_{\lambda\to}, x \in \Pi_{\lambda\to}\} \in \mathcal{L}^2_{\lambda\to} \ .$$

Definição 9.8. A relação $\beta\eta$ em $\mathcal{L}_{\lambda\to}$ é dada por

$$\beta\eta = \beta \cup \eta \ .$$

Distinguem-se três casos especiais para uma relação em $\mathcal{L}_{\lambda\to}$.

Definição 9.9. Seja R uma relação em $\mathcal{L}_{\lambda\to}$.

- A *relação de redução-R num passo*, que denotaremos por $\to_R$, é o fecho de R para as regras de compatibilidade.

- A *relação de redução-R*, que denotaremos por $\twoheadrightarrow_R$, é o fecho reflexivo e transitivo de R para as regras de compatibilidade.

- A *relação de conversão-R*, que denotaremos por $=_R$, é o fecho reflexivo, transitivo e simétrico de R para as regras de compatibilidade.

Explicitamente, dada uma relação R em $\mathcal{L}_{\lambda\to}$, as relações $\to_R$, $\twoheadrightarrow_R$ e $=_R$ são fechadas para as regras:

$$\frac{M \to_R N}{ML \to_R NL} \qquad \frac{M \to_R N}{LM \to_R LN} \qquad \frac{M \to_R M'}{\lambda x.M \to_R \lambda x.M'}$$

$$\frac{}{N \twoheadrightarrow_R N} \qquad \frac{M \twoheadrightarrow_R N \quad N \twoheadrightarrow_R L}{M \twoheadrightarrow_R L}$$

$$\frac{M =_R N}{N =_R M}$$

A relação de conversão-β é ainda fechada para a regra:

$$\frac{}{(\lambda x.M)N =_\beta M[N/x]}\ (\beta)\ ;$$

e a relação de conversão-η é fechada para a regra:

$$\frac{}{\lambda x.Mx =_\eta M}\ (\eta)\ .$$

Note-se que a relação $=_\alpha$ é precisamente a relação de conversão-α, para a relação

$$\alpha = \{\langle \lambda x.M, \lambda y.M\{y/x\}\rangle\} \in \mathcal{L}^2_{\lambda\to}\ .$$

Os termos lambda que se *reduzem* segundo uma relação de redução também são distinguidos.

Definição 9.10. Seja R uma relação em $\mathcal{L}_{\lambda\to}$ e $M \in \mathcal{L}_{\lambda\to}$.

- M diz-se um *R-redex*, se $M \to_R N$ para algum $N \in \mathcal{L}_{\lambda\to}$. Neste caso, N diz-se um *β-contractum* de M;
- M diz-se estar na *forma normal-R*, se não existe $N \in \mathcal{L}_{\lambda\to}$ tal que $M \to_R N$;
- $N \in \mathcal{L}_{\lambda\to}$ diz-se uma *forma normal-R de M*, se $M \twoheadrightarrow_R N$ e N está na forma normal-R.

Duas questões surgem naturalmente. Dado um termo lambda $M \in \mathcal{L}_{\lambda\to}$ e uma relação em R em $\mathcal{L}_{\lambda\to}$, existirá sempre uma forma normal-R de M? Caso exista, essa forma normal é única? Um contra-exemplo para a existência é dado por $\Omega = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$. Tem-se

$$\Omega \to_\beta (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \to_\beta (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \to_\beta \dots\ .$$

Logo, existem termos lambda que não possuem qualquer forma normal-β. Quanto à unicidade da forma normal, um seu estudo passa inevitavelmente pela noção de *confluência*.

9.3 Confluência

Nesta secção debruça-mo-nos sobre a propriedade das relações de redução que nos garantirá a unicidade da forma normal-β.

Definição 9.11. Uma relação de redução $\twoheadrightarrow_R$ diz-se *confluente*, se para quaisquer $M, M', M'' \in \mathcal{L}_{\lambda\to}$ tais que

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & M \arrow[dl, two heads, "R"] \arrow[dr, two heads, "R"'] & \\ M' & & M'' \end{tikzcd},$$

existe $N \in \mathcal{L}_{\lambda\to}$ tal que

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] M' \arrow[dr, two heads, "R"'] & & M'' \arrow[dl, two heads, "R"] \\ & N & \end{tikzcd}.$$

Também se diz que uma relação confluente satisfaz a *propriedade do diamante*, ou a *propriedade de Church-Rosser*. A primeira designação vem do diagrama da demonstração do próximo lema, e a segunda vem do teorema que estabelece a confluência da relação de redução-β, conhecido por teorema de Church-Rosser. Enunciamos de seguida quatro lemas auxiliares dos quais seguirá este teorema.

Lema 9.12 (Lema do diamante)**.** *Seja R uma relação em $\mathcal{L}_{\lambda\to}$. Se $\to_\beta$ é confluente, então $\twoheadrightarrow_\beta$ é confluente.*

Demonstração.
Esboço da demonstração:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & & M \arrow[dl, "R"] \arrow[dr, "R"'] & & & \\ & & \bullet \arrow[dl, "R"] \arrow[dr, "R"'] & & \bullet \arrow[dl, "R"] \arrow[dr, "R"'] & & \\ & \bullet \arrow[dl, dashed] \arrow[dr, dashed] & & \bullet \arrow[dl, dashed] \arrow[dr, dashed] & & \bullet \arrow[dl, dashed] \arrow[dr, dashed] & \\ M' \arrow[dr, "R"'] & & \bullet \arrow[dl, dashed] \arrow[dr, dashed] & & \bullet \arrow[dl, dashed] \arrow[dr, dashed] & & M'' \arrow[dl, "R"] \\ & \bullet \arrow[dr, "R"'] & & \bullet \arrow[dl, dashed] \arrow[dr, dashed] & & \bullet \arrow[dl, "R"] & \\ & & \bullet \arrow[dr, dashed] & & \bullet \arrow[dl, dashed] & & \\ & & & N & & & \end{tikzcd}$$

□

Ora, se conseguirmos provar que $\to_\beta$ é confluente, resolvemos o nosso problema. Acontece que $\to_\beta$ não é confluente. Considere-se, por exemplo, o termo lambda $(\lambda x.xx)(II)$. Tem-se:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (\lambda x.xx)(II) \arrow[dl, "\beta"] \arrow[dr, "\beta"'] & \\ (II)(II) \arrow[dr, "\beta"', "|" marking] & & (\lambda x.xx)I \arrow[dl, "\beta"] \\ & II & \end{tikzcd}$$

O problema aqui surge porque a relação $\to_\beta$ não é capaz de relacionar termos lambda que resultem por substituição simultânea do respectivo β-*contractum* de M e de N na regra (β). Seja então $\rightarrowtail_\beta$ a menor relação em $\mathcal{L}_{\lambda\to}$ que contém $\to_\beta$ e fechada para a regra adicional:

$$\frac{M_1 \rightarrowtail_\beta M_2 \quad N_1 \rightarrowtail_\beta N_2}{(\lambda x.M_1)N_1 \rightarrowtail_\beta M_2[N_2/x]}$$

Tomando $M_1 = N_1 = xx$, $M_2 = II$ e $N_2 = I$, o exemplo acima já verifica:

$$\begin{tikzcd} & (\lambda x.xx)(II) \arrow[dl, tail, "\beta"] \arrow[dr, tail, "\beta"'] & \\ (II)(II) \arrow[dr, tail, "\beta"'] & & (\lambda x.xx)I \arrow[dl, tail, "\beta"] \\ & II & \end{tikzcd}$$

Um resumo muito elucidativo da situação onde nos encontramos, e da estratégia que vamos adoptar, pode ser encontrado em [Selinger, 2007, Section 4.3].

Os próximos lemas auxiliares seguem de perto a exposição de [Sørensen and Urzyczyn, 1998, Lemmas 1.4.3, 1.4.5, 1.4.6, p. 10]. Os detalhes das provas por indução podem ser encontrados, mais uma vez, em [Selinger, 2007, Section 4.4] (aqui provam o caso geral da relação $\twoheadrightarrow_{\beta\eta}$).

Lema 9.13. *Se* $M_1 \rightarrowtail_\beta M_2$ *e* $N_1 \rightarrowtail_\beta N_2$*, então* $M_1[N_1/x] \rightarrowtail_\beta M_2[N_2/x]$.

Demonstração.
$M_1 \equiv M_2 \equiv M$:
Prova por indução em $M \in \mathcal{L}_{\lambda\to}$.

$M_1 \not\equiv M_2$:
Prova por indução no comprimento da redução $M_1 \rightarrowtail M_2$.

□

Lema 9.14. *A relação de redução* $\rightarrowtail_\beta$ *é confluente.*

Demonstração.
Prova por indução no comprimento da redução $M_1 \rightarrowtail M_2$, usando o lema 9.13.

□

Lema 9.15. *A relação de redução* $\twoheadrightarrow_\beta$ *é o fecho transitivo de* $\rightarrowtail_\beta$.

Demonstração.
É imediato que

$$\to_\beta \subseteq \rightarrowtail_\beta \subseteq \twoheadrightarrow_\beta \ .$$

Denote-se por R^* o fecho transitivo de uma relação R em $\mathcal{L}_{\lambda\to}$. Tem-se

$$\to_\beta^* \subseteq \rightarrowtail_\beta^* \subseteq \twoheadrightarrow_\beta^* ,$$

i.e.,

$$\twoheadrightarrow_\beta \subseteq \rightarrowtail_\beta^* \subseteq \twoheadrightarrow_\beta \ .$$

Concluímos que $\rightarrowtail_\beta^* = \twoheadrightarrow_\beta$.

□

Teorema 9.16 (Teorema de Church-Rosser para o cálculo lambda sem tipos)**.** *A relação de redução* $\twoheadrightarrow_\beta$ *é confluente.*

Demonstração.
Segue imediatamente dos lemas 9.12, 9.14 e 9.15.

□

A título de referência, as relações η e $\beta\eta$ também são confluentes.

Exibimos por fim três corolários imediatos do teorema de Church-Rosser. O primeiro diz-nos que quaisquer dois termos lambda congruentes-α se reduzem-β a algum termo lambda em comum; o segundo dá-nos a desejada unicidade da forma normal-β; e o último garante-nos que a relação η não segue da relação β.

Corolário 9.17. *Se $M =_\beta N$, então existe $L \in \mathcal{L}_{\lambda\to}$ tal que $M, N \twoheadrightarrow_\beta L$.*

Demonstração.
Tem-se $M \twoheadrightarrow_\beta M$ ($\twoheadrightarrow_\beta$ é reflexiva) e $M \twoheadrightarrow_\beta N$ ($\twoheadrightarrow_\beta \subseteq =_\beta$). Segue do teorema 9.16 que existe $L \in \mathcal{L}_{\lambda\to}$ tal que $M, N \twoheadrightarrow_\beta L$.

□

Corolário 9.18 (Unicidade da forma normal-β)**.** *Se $M \twoheadrightarrow_\beta N_1, N_2$ e N_1, N_2 são formas normais-β, então $N_1 =_\alpha N_2$.*

Demonstração.
Segue do teorema 9.16 que existe $L \in \mathcal{L}_{\lambda\to}$ tal que $N_1, N_2 \twoheadrightarrow_\beta L$. Como N_1 e N_2 estão na forma normal-β, segue que $N_1 =_\alpha L$ e $N_2 =_\alpha L$. Logo, $N_1 =_\alpha N_2$, por transitividade de $=_\alpha$.
□

Por contra-recíproco, se dois termos lambda admitem formas normais-β diferentes, então esses termos não se reduzem-β um ao outro.

Corolário 9.19. *$\lambda y.xy \neq_\beta x$.*

Demonstração.
Note-se que ambos os termos lambda $\lambda y.xy$ e x estão na forma normal-β e $\lambda y.xy \neq_\alpha x$. Segue do corolário 9.18 que $\lambda y.xy \neq_\beta x$.

□

9.4 Normalização

Vimos na secção anterior que nem todo o termo lambda possui forma normal-β, mas que, quando possui é única. Podemos ainda perguntar-nos se, dado um termo lambda que possui forma normal-β, todas as reduções-β possíveis terminam nesse termo? A próxima definição formaliza este conceito para uma relação R em geral.

Definição 9.20. Seja R uma relação em $\mathcal{L}_{\lambda\to}$. Um termo lambda $M \in \mathcal{L}_{\lambda\to}$ diz-se *fracamente R-normalizável*, se existe uma sequência finita de R-reduções $M \twoheadrightarrow_R M_1 \twoheadrightarrow_R \ldots \twoheadrightarrow_R M_n$ tal que M_n é uma forma normal-R. Um termo lambda $M \in \mathcal{L}_{\lambda\to}$ diz-se *fortemente R-normalizável*, se não existe nenhuma sequência infinita de R-reduções a partir de M.

Note-se que a normalização forte implica a normalização fraca, enquanto que o recíproco é falso. Note-se ainda que qualquer termo lamba na forma normal-β é fortemente normalizável.

O próximo exemplo contempla as várias possibilidades para a redução-β [Selinger, 2007].

Exemplo 9.21.

- O termo lambda $\Omega = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ não é nem fracamente normalizável nem fortemente normalizável. De facto, todas as sequências possíveis de β-reduções a partir de Ω são infinitas.

- O termo lambda $(\lambda x.y)\Omega$ é fracamente normalizável, mas não é fortemente normalizável. De facto, embora possua a forma normal y, também admite sequências de β-reduções infinitas.
- O termo lambda $(\lambda x.y)(II)$ é fortemente normalizável. De facto, possui a forma normal-β y, e todas sequências de β-reduções possíveis terminam nessa forma normal-β.

Em resumo, nem todos os termos lambda do cálculo lambda sem tipos admitem uma forma normal-β, e portanto nem todos os termos lambda do cálculo lambda sem tipos são fracamente normalizáveis (muito menos, fortemente normalizáveis). Além disso, mesmo considerando apenas os termos que admitem uma forma normal-β, nem todos são fortemente normalizáveis.

Referências

[Sørensen and Urzyczyn, 1998]
[Caleiro, 2002]
[Selinger, 2007]

10 | Cálculo Lambda com tipos

O Cálculo Lambda sem tipos, como vimos, permite que qualquer termo lambda seja tratado quer como função, quer como argumento. Isto diz-nos que os termos lambda, enquanto representantes de funções, não têm domínios nem contra-domínios definidos. É usual, porém, considerar associada a uma função o seu domínio e contra-domínio. O domínio de um termo lambda enquanto argumento, e os domínio e contra-domínio de um termo lambda enquanto função, chamam-se *tipos*.

Existem duas escolas de tipos para o cálculo lambda. A escola de Curry considera *tipos implícitos*, e a escola de Church considera *tipos explícitos*. A primeira abordagem é mais flexível, e permite-nos inferir o tipo de um termo lambda; a segunda abordagem exige-nos que os termos lambda sejam definidos desde logo com os respectivos tipos. Neste capítulo introduzimos o Cálculo Lambda com tipos de Curry.

A referência clássica para o Cálculo Lambda com tipos é [Barendregt, 1992], cobrindo ambos os tipos de Curry e de Church. As referências principais para este capítulo foram novamente [Sørensen and Urzyczyn, 1998], [Caleiro, 2002] e [Selinger, 2007].

10.1 Linguagem para Types

Começamos por definir o conjunto de tipos que admitimos como legítimos de se atribuir a termos lambda. Mais uma vez, consideramos este conjunto dado por uma linguagem livremente gerada sobre um alfabeto próprio.

Definição 10.1. O *alfabeto de tipos* é um conjunto numerável

$$\Pi_{\text{Types}} = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\} ,$$

cujos elementos se designam por *variáveis de tipo*.

Definição 10.2. A *assinatura de tipos* é uma assinatura

$$\Sigma_{\text{Types}} = \langle \rightarrow \rangle ,$$

cujo elemento se designa por *operação funcional*, e onde:

- $\rightarrow$ é uma operação binária.

Definição 10.3. A *linguagem de tipos* é a Σ_{Types}-álgebra livre em $\text{Alg}(\Sigma_{\text{Types}})$ sobre Π_{Types},

$$\mathcal{L}_{\text{Types}} = \langle \Pi_{\text{Types}}, \rightarrow^{\mathcal{L}_{\text{Types}}} \rangle ,$$

cujos elementos se designam por *tipos (simples)*.

Mais uma vez, é usual identificar a álgebra $\mathcal{L}_{\text{Types}}$ com a linguagem gerada pela gramática

$$\sigma := \alpha \mid \sigma \to \sigma \ .$$

A intuição por detrás de um tipo simples é a seguinte: uma variável de tipo α tem o significado que o nome indica; e um tipo $\sigma \to \tau$ representa uma função que, quando aplicada a um termo lambda de tipo σ, resulta num termo lambda de tipo τ.

São usuais algumas convenções de notação. Nomeadamente, omitimos parêntesis exteriores, e convencionamos que o símbolo funcional $\to$ é associativo à direita. Assim, por exemplo, o tipo $\sigma \to \tau \to \rho$ deve entender-se como $(\sigma \to (\tau \to \rho))$.

Temos então definidas uma linguagem para os termos lambda e uma linguagem para os tipos destes. Resta-nos indicar como se conjugam ambas.

Uma *atribuição de tipo* σ é uma expressão $M : \sigma$, onde $M \in \mathcal{L}_{\lambda\to}$ e $\sigma \in \mathcal{L}_{\text{Types}}$. Chamamos a M o *sujeito* da atribuição e a σ o *predicado* da atribuição. Uma *declaração de tipo* σ é uma atribuição de tipo σ a uma variável, i.e., é uma expressão $x : \sigma$, onde $x \in \Pi_{\lambda\to}$ e $\sigma \in \mathcal{L}_{\text{Types}}$. Um *contexto* é um conjunto finito Γ de declarações de tipo a variáveis distintas.

Dado um contexto $\Gamma = \{x_1 : \tau_1, x_2 : \tau_2, \ldots, x_n : \tau_n\}$, chamamos *domínio de* Γ ao conjunto de variáveis

$$\text{Dom}(\Gamma) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \ ,$$

e chamamos *imagem de* Γ ao conjunto de tipos

$$\text{Im}(\Gamma) = \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\} \ .$$

10.2 Cálculo para $\lambda\to$

A regras do Cálculo Lambda com tipos são introduzidas na próxima definição.

Definição 10.4. A *relação de inferência de tipos* entre contextos e atribuições, que denotaremos por $\vdash_\lambda$, é definida recursivamente pelas seguintes regras:

$$\frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash_{\lambda\to} x : \sigma}\ \textbf{Ax} \qquad \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash_{\lambda\to} M : \tau}{\Gamma \vdash_{\lambda\to} \lambda x.M : \sigma \to \tau}\ \textbf{Abs} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\lambda\to} M : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash_{\lambda\to} N : \sigma}{\Gamma \vdash_{\lambda\to} MN : \tau}\ \textbf{App}$$

Mais uma vez, denotamos $\varnothing \vdash_{\lambda\to} M : \sigma$ simplesmente por $\vdash_{\lambda\to} M : \sigma$.

É fácil verificar que a relação $\vdash_{\lambda\to}$ satisfaz as seguintes propriedades:

(i) **Extensividade:** se $M : \sigma \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash_{\lambda\to} M : \sigma$;

(ii) **Monotonia:** se $\Gamma_1 \vdash_{\lambda\to} M : \sigma$ e $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, então $\Gamma_2 \vdash_{\lambda\to} M : \sigma$;

(iii) **Corte:** se $\Delta \vdash_{\lambda\to} M : \sigma$ e $\forall N : \tau \in \Delta \ \ \Gamma \vdash_{\lambda\to} N : \tau$, então $\Gamma \vdash_{\lambda\to} M : \sigma$;

(iv) **Estruturalidade 1:** se $\Gamma \vdash_{\lambda\to} M : \sigma$ e $s : \mathcal{L}_{\text{Types}} \to \mathcal{L}_{\text{Types}}$ é uma substituição, então $s(\Gamma) \vdash_{\lambda\to} M : s(\sigma)$;
Estruturalidade 2: se $\Gamma, x : \tau \vdash_{\lambda\to} M : \sigma$ e $\Gamma \vdash_{\lambda\to} N : \tau$, então $\Gamma \vdash_{\lambda\to} M[N/x] : \sigma$;

(v) **Finitário:** se $\Gamma \vdash_{\lambda\to} M : \sigma$, então $\Gamma' \vdash_{\lambda\to} M : \sigma$ para algum subconjunto finito $\Gamma' \subseteq_f \Gamma$.

Note-se que a estruturalidade pode agora ser formulada tanto ao nível dos termos lambda como ao nível dos tipos (em rigor, a condição (iv 1) ainda não se encontra bem definida). Estas condições correspondem ao lema 10.8. Quanto às restantes, por exemplo, (i) segue da regra **Ax**, e (v) segue da definição de contexto (finito).

O par $\langle \mathcal{L}_{\lambda\to} : \mathcal{L}_{\text{Types}}, \vdash_{\lambda\to}\rangle$, dos termos lambda em $\mathcal{L}_{\lambda\to}$, munidos dos respectivos tipos em $\mathcal{L}_{\text{Types}}$, segundo a relação de inferência de tipos $\vdash_{\lambda\to}$, é portanto uma lógica estrutural e finitária.

Podíamos definir uma noção de *prova* para o Cálculo Lambda com tipos análoga à dos cálculos lógicos estudados. Tradicionalmente esta não é formalizada, embora se exibam árvores de tipificação que mais não são do que uma outra apresentação para um tal certificado.

Vejamos um exemplo sugestivo.

Exemplo 10.5. Sejam $\varphi, \psi, \rho \in \mathcal{L}_{\text{Types}}$, e fixe-se o contexto $\Gamma = \{x : \varphi \to \psi, y : \psi \to \rho, z : \varphi\}$. O termo lambda $\lambda z.y(xz)$ admite a seguinte tipificação:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash_{\lambda\to} y : \psi \to \rho}\,\mathbf{Ax} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash_{\lambda\to} x : \varphi \to \psi}\,\mathbf{Ax} \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash_{\lambda\to} z : \varphi}\,\mathbf{Ax}}{\Gamma \vdash_{\lambda\to} xz : \psi}\,\mathbf{Apl}}{\Gamma \vdash_{\lambda\to} y(xz) : \rho}\,\mathbf{Apl}}{\{x : \varphi \to \psi, y : \psi \to \rho\} \vdash_{\lambda\to} \lambda z.y(xz) : \varphi \to \rho}\,\mathbf{Abs}$$

Terminamos esta secção com dois lemas que lançam alguma luz sobre a tipificação de termos lambda. O primeiro resultado diz-nos que apenas as variáveis livres que ocorrem num termo lambda interessam na sua tipificação. O segundo indica-nos de que forma a estrutura de um termo influencia o seu tipo. Utilizamos aqui a notação $\Gamma\restriction_{\text{FV}(M)}$ para denotar a restrição do contexto Γ às variáveis livres de M.

Lema 10.6 (Lema das variáveis livres)**.** *Suponhamos que* $\Gamma \vdash_\lambda M : \sigma$.

(i) $\text{FV}(M) \subseteq \text{Dom}(\Gamma)$*;*

(ii) $\Gamma\restriction_{\text{FV}(M)} \vdash_\lambda M : \sigma$.

Demonstração.

(i), (ii):

Prova por indução no comprimento da derivação de $\Gamma \vdash_\lambda M : \sigma$.

□

Lema 10.7 (Lema da geração de tipos)**.**

(i) se $\Gamma \vdash_\lambda x : \sigma$*, então* $x : \sigma \in \Gamma$*;*

(ii) se $\Gamma \vdash_\lambda MN : \sigma$*, então existe* $\tau \in \mathcal{L}_{\text{types}}$ *tal que* $\Gamma \vdash_\lambda M : \tau \to \sigma$ *e* $\Gamma \vdash_\lambda N : \tau$*;*

(iii) se $\Gamma \vdash_\lambda \lambda x.M : \sigma$*, então existem* $\tau, \rho \in \mathcal{L}_{\text{types}}$ *tais que* $\sigma = \tau \to \rho$ *e* $\Gamma, x : \tau \vdash_\lambda M : \rho$.

Demonstração.

(i), (ii), (iii):

Prova por indução no comprimento da derivação em causa.

□

10.3 Confluência

Pretendemos agora generalizar a confluência da relação β para o Cálculo Lambda com tipos. Note-se antes de mais que não precisamos de generalizar as relações de redução vistas para o Cálculo Lambda com tipos, porque estamos a trabalhar com tipos implícitos! Inferimos o tipo de um termo lambda paralelamente à manipulação sintáctica dos termos lambda. Numa abordagem aos tipos explícita já teríamos que redefinir as relações de redução para termos lambda com tipos, bem como as noções de conjunto de variáveis livres, ou de substituição de variáveis livres num termo lambda. Assim, a confluência dos termos lambda está desde logo garantida. O problema aqui coloca-se ao nível da preservação dos tipos envolvidos. Este importante resultado é conhecido como teorema da *redução do sujeito*, e prová-lo-emos nesta secção.

Vamos começar por definir a noção de substituição de variáveis de tipo em tipos. Sejam $\alpha \in \Pi_{\text{Types}}$ e $\sigma, \tau \in \mathcal{L}_{\text{Types}}$. A *substituição da variável de tipo α pelo tipo τ no tipo σ*, que denotamos por $\sigma[\tau/\alpha]$, é definida recursivamente como se segue:

- $\beta[\tau/\alpha] = \begin{cases} \tau & \text{, se } \beta = \alpha \\ \beta & \text{, se } \beta \neq \alpha \end{cases}$, com $\beta \in \Pi_{\text{Types}}$;
- $(\sigma \to \rho)[\tau/\alpha] = \sigma[\tau/\alpha] \to \rho[\tau/\alpha]$, com $\sigma, \rho \in \mathcal{L}_{\text{Types}}$.

Escrevemos ainda $\Gamma[\tau/\alpha]$ para denotar o contexto $\{(x : \sigma[\tau/\alpha]) \ : \ (x : \sigma) \in \Gamma\}$.

O próxima lema diz-nos que a relação de inferência de tipos preserva a substituição de tipos. Além disso, o tipo de um termo lambda é invariante para a substituição de variáveis livres em termos lambda.

Lema 10.8 (Lema da substituição)**.**

(i) se $\Gamma \vdash_{\lambda\to} M : \sigma$, então $\Gamma[\tau/\alpha] \vdash_{\lambda\to} M : \sigma[\tau/\alpha]$;

(ii) se $\Gamma, x : \tau \vdash_{\lambda\to} M : \sigma$ e $\Gamma \vdash_{\lambda\to} N : \tau$, então $\Gamma \vdash_{\lambda\to} M[N/x] : \sigma$.

Demonstração.
(i):
Prova por indução no comprimento da derivação de $\Gamma \vdash_{\lambda\to} M : \sigma$.
(ii):
Prova por indução no comprimento da derivação de $\Gamma, x : \tau \vdash_{\lambda\to} M : \sigma$.

□

O lema da substituição permite-nos ainda provar o teorema da redução do sujeito.

Teorema 10.9 (Teorema da redução do sujeito)**.** *Se $\Gamma \vdash_{\lambda\to} M : \sigma$ e $M \twoheadrightarrow_\beta N$, então $\Gamma \vdash_{\lambda\to} N : \sigma$.*

Demonstração.
Prova por indução no comprimento da derivação de $\Gamma \vdash_{\lambda\to} M : \sigma$, usando o lema 10.8.

□

Finalmente, enunciamos o teorema de Church-Rosser para o Cálculo Lambda com tipos. A confluência seguirá do resultado análogo para a versão sem tipos, e a invariância dos tipos seguirá do teorema da redução do sujeito.

Teorema 10.10 (Teorema de Church-Rosser para o cálculo lambda com tipos)**.** *Se*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & M \arrow[dl, twoheadrightarrow, "\beta"'] \arrow[dr, twoheadrightarrow, "\beta"] & \\ M' & & M'' \end{tikzcd},$$

e, além disso $\Gamma \vdash_{\lambda\rightarrow} M : \sigma$*, então existe* $N \in \mathcal{L}_{\lambda\rightarrow}$ *tal que*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] M' \arrow[dr, twoheadrightarrow, "\beta"'] & & M'' \arrow[dl, twoheadrightarrow, "\beta"] \\ & N & \end{tikzcd},$$

e, além disso $\Gamma \vdash_{\lambda\rightarrow} N : \sigma$*.*

Demonstração.

A confluência da relação de redução-β segue do teorema 9.16, e a preservação do tipo σ segue do teorema 10.9.

□

As observações da secção homónima do capítulo anterior face à existência e unicidade de forma normal-β mantém-se portanto válidas. Ou seja, existem termos lambda com tipos que não admitem qualquer forma normal-β, mas quando admitem, esta é única.

10.4 Semântica para $\lambda \rightarrow$

À semelhança das semânticas estudadas na primeira parte, vamos também definir noções em $\mathcal{L}_{\lambda\rightarrow}$ de valoração e consequência semântica. Esta semântica difere no entanto das anteriormente consideradas, na medida em que vamos interpretar termos lambda em subconjuntos de termos lambda, em vez de entidades algébricas próprias.

Seguiremos de muito perto a exposição de [Sørensen and Urzyczyn, 1998, pp. 68-70], que por sua vez segue a de [Barendregt, 1992, pp. 61-65]. Convém referir, porém, que alterámos algumas definições por forma a torná-las, julgamos, mais intuitivas, e alterámos ainda a notação por forma a aliviar as demonstrações.

Definição 10.11. Definimos a aplicação $[\![.]\!] : \mathcal{L}_{\text{Types}} \rightarrow \mathscr{P}(\mathcal{L}_{\lambda\rightarrow})$ recursivamente por:

$[\![\alpha]\!] = \text{SN}_\beta = \{M \in \mathcal{L}_{\lambda\rightarrow} : M$ é fortemente β-normalizável $\}$, com $\alpha \in \Pi_{\lambda\rightarrow}$;

$[\![\sigma \rightarrow \tau]\!] = [\![\sigma]\!] \rightarrow [\![\tau]\!] = \{L \in \mathcal{L}_{\lambda\rightarrow} : \forall M \in [\![\sigma]\!] \quad LM \in [\![\tau]\!]\}$, com $\sigma, \tau \in \mathcal{L}_{\lambda\rightarrow}$.

Definição 10.12. Sejam $x \in \Pi_{\lambda\rightarrow}$, $M \in \mathcal{L}_{\lambda\rightarrow}$ e $N, M_1, \ldots, M_n \in \text{SN}_\beta$. Um conjunto de termos lambda fortemente normalizáveis $\mathcal{S} \subseteq \text{SN}_\beta$ diz-se *saturado*, se

1. $\forall n \geq 0 \; xM_1 \ldots M_n \in \mathcal{S}$;
2. $\forall n \geq 0 \; M[N/x]M_1 \ldots M_n \in \mathcal{S} \Rightarrow (\lambda x.M)NM_1 \ldots M_n \in \mathcal{S}$.

Denotamos o conjunto de todos os conjuntos de termos lambda saturados por $\mathbb{S}$. Note-se que qualquer termo saturado é fortemente normalizável.

O próximo lema diz-nos que $[\![\sigma]\!]$ é um conjunto saturado, para qualquer tipo $\sigma \in \mathcal{L}_{\text{Types}}$.

Lema 10.13. *Se* $\sigma \in \mathcal{L}_{\text{Types}}$*, então* $[\![\sigma]\!] \in \mathbb{S}$*.*

Demonstração.
A prova segue por indução na estrutura de $\sigma \in \mathcal{L}_{\text{Types}}$.

Base: $\sigma \equiv \alpha \in \Pi_{\lambda\to}$
Segue por definição de $[\![.]\!]$ que $[\![\alpha]\!] = \text{SN}_\beta$. Vamos mostrar que $\text{SN}_\beta \in \mathbb{S}$.
É claro que $\text{SN}_\beta \subseteq \text{SN}_\beta$.

1. Sejam $x \in \Pi_{\lambda\to}$ e $M_1 \ldots M_n \in \text{SN}_\beta$. É imediato que $x \in \text{SN}_\beta$. Como $M_1 \ldots M_n \in \text{SN}_\beta$, segue que $xM_1 \ldots M_n \in \text{SN}_\beta$ (atente-se na associatividade à esquerda da aplicação, caso contrário não se verificaria: basta considerar-se x e $M_1 \equiv M_2 \equiv \lambda y.yy$).

2. Sejam $M \in \mathcal{L}_{\lambda\to}$ e $N, M_1 \ldots M_n \in \text{SN}_\beta$. Suponhamos que $M[N/x]M_1 \ldots M_n \in \text{SN}_\beta$. Então, ter-se-á também $M[N/x] \in \text{SN}_\beta$, visto tratar-se de um subtermo de um termo fortemente normalizável (em rigor, por indução na construção de $M \in \mathcal{L}_{\lambda\to}$). Logo, $M \in \text{SN}_\beta$, pois tanto $M[N/x] \in \text{SN}_\beta$ como $N \in \text{SN}_\beta$ (em rigor, por indução na construção de $M \in \mathcal{L}_{\lambda\to}$). Assim, o termo lambda $(\lambda x.M)NM_1 \ldots M_n$ β-reduz-se, após um número finito de β-reduções (pois $M, N, M_1, \ldots, M_n \in \text{SN}_\beta$), a um termo lambda da forma $(\lambda x.M')N'M'_1 \ldots M'_n$, onde $M \twoheadrightarrow_\beta M'$, $N \twoheadrightarrow_\beta N'$ e $M_i \twoheadrightarrow_\beta M'_i$, com M', N', M'_i na forma normal-β, para $i = 1, \ldots, n$. Aqui chegados, o termo lambda $(\lambda x.M')N'M'_1 \ldots M'_n$ apenas admite uma redução-β possível, que resulta em $M'[N'/x]M'_1 \ldots M'_n$. Ora, $M'[N'/x]M'_1 \ldots M'_n$ é um β-*contractum* de $M[N/x]M_1 \ldots M_n$, que por hipótese é fortemente β-normalizável. Logo, $M'[N'/x]M'_1 \ldots M'_n \in \text{SN}_\beta$. Concluímos que $(\lambda x.M)NM_1 \ldots M_n \in \text{SN}_\beta$.

Passo: $\sigma \equiv \tau \to \rho$
Segue por definição de $[\![.]\!]$ que $[\![\tau \to \rho]\!] = [\![\tau]\!] \to [\![\rho]\!] = \{L \in \mathcal{L}_{\lambda\to} : \forall M \in [\![\tau]\!]\ LM \in [\![\rho]\!]\}$. Segue por hipótese de indução que $[\![\tau]\!], [\![\rho]\!] \in \mathbb{S}$. Vamos mostrar que $[\![\tau \to \rho]\!] \in \mathbb{S}$.

Seja $S \in [\![\tau \to \rho]\!]$ e $T \in [\![\tau]\!]$. Sabemos que $ST \in [\![\rho]\!]$. Mas $[\![\rho]\!] \in \mathbb{S}$, por hipótese de indução, donde $[\![\rho]\!] \subseteq \text{SN}_\beta$. Logo, $ST \in \text{SN}_\beta$, e portanto $S \in \text{SN}_\beta$. Concluímos que $[\![\tau \to \rho]\!] \subseteq \text{SN}_\beta$.

1. Sejam $x \in \Pi_{\lambda\to}$, $M_1 \ldots M_n \in \text{SN}_\beta$ e $T \in [\![\tau]\!]$. Como $[\![\rho]\!] \in \mathbb{S}$ por hipótese de indução, segue que $x \in [\![\rho]\!]$ (pela condição 1. da definição de conjunto saturado, tomando $n = 0$), e portanto $xM_1 \ldots M_nT \in [\![\rho]\!]$ (pela condição 1. da definição de conjunto saturado, notando que $T \in \text{SN}_\beta$ devido a $[\![\tau]\!] \in \mathbb{S}$). Logo, $xM_1 \ldots M_n \in [\![\tau \to \rho]\!]$.

2. Sejam $M \in \mathcal{L}_{\lambda\to}$, $N, M_1 \ldots M_n \in \text{SN}_\beta$ e $T \in [\![\tau]\!]$. Suponhamos que $M[N/x]M_1 \ldots M_n \in [\![\tau \to \rho]\!]$. Então, $((\lambda x.M)NM_1 \ldots M_n)T \twoheadrightarrow_\beta ((M[N/x])M_1 \ldots M_n)T \in [\![\rho]\!]$. Logo, $(\lambda x.M)NM_1 \ldots M_n \in [\![\tau \to \rho]\!]$.

□

Utilizamos agora a notação f_a^b para denotar a função que coincide com a função f em todos os pontos, excepto no ponto a onde assume o valor b.

Definição 10.14. Uma *valoração em* $\mathcal{L}_{\lambda\to}$ é uma aplicação $v : \Pi_{\lambda\to} \to \mathcal{L}_{\lambda\to}$. A extensão de uma valoração v a $\mathcal{L}_{\lambda\to}$, que se denota por $[\![.]\!]_v$, é definida recursivamente por:

$[\![x]\!]_v = v(x)$, para $x \in \Pi_{\lambda\to}$;

$[\![MN]\!]_v = [\![M]\!]_v [\![N]\!]_v$;

$[\![\lambda x.M]\!]_v = \lambda x.[\![M]\!]_{v_x^x}$.

Definição 10.15. Uma valoração v em $\mathcal{L}_{\lambda\to}$ diz-se *modelo da atribuição* $M:\sigma$, se $[\![M]\!]_v \in [\![\sigma]\!]$; e diz-se *modelo do contexto* Γ, se v é modelo de todas as declarações em Γ.

Definição 10.16. Uma atribuição $M:\sigma$ diz-se *consequência semântica em* $\mathcal{L}_{\lambda\to}$ do contexto Γ, o que denotamos por $\Gamma \vDash_{\lambda\to} M:\sigma$, se todo o modelo de Γ é modelo da atribuição $M:\sigma$.

Fazemos notar, como já havíamos referido, que estas definições seguem [Barendregt, 1992, Definition 4.3.4] e [Sørensen and Urzyczyn, 1998, Definition 4.4.2]. Pareceu-nos mais intuitivo definir uma valoração em $\mathcal{L}_{\lambda\to}$ recursivamente, e introduzir mais uma vez as noções de modelo e consequência semântica. A notação f_a^b permitirá ainda simplificar a demonstração do teorema 10.17.

10.4.1 $\langle \mathcal{L}_{\lambda\to} : \mathcal{L}_{\mathrm{Types}}, \vdash_{\lambda\to}\rangle \leq \langle \mathcal{L}_{\lambda\to} : \mathcal{L}_{\mathrm{Types}}, \vDash_{\lambda\to}\rangle$

O próximo teorema diz-nos que o Cálculo Lambda com tipos de Curry é correcto face à semântica definida.

Teorema 10.17 (Correcção de $\lambda\to$)**.**

$$\Gamma \vdash_{\lambda\to} M:\sigma \Rightarrow \Gamma \vDash_{\lambda\to} M:\sigma$$

Demonstração.
A prova segue por indução na estrutura de $M \in \mathcal{L}_{\lambda\to}$.

Base:

- $M \equiv x \in \Pi_{\lambda\to}$
  Suponhamos que $\Gamma \vdash_{\lambda\to} x:\sigma$. Segue do lema 10.7 que $x:\sigma \in \Gamma$. Seja v uma valoração em $\mathcal{L}_{\lambda\to}$ modelo do contexto Γ. Em particular, v é modelo da atribuição $x:\sigma$. Logo, $\Gamma \vDash_{\lambda\to} x:\sigma$.

Passo:

- $M \equiv LN$
  Suponhamos que $\Gamma \vdash_{\lambda\to} LN:\sigma$. Segue do lema 10.7 que existe $\tau \in \mathcal{L}_{\mathrm{Types}}$ tal que $\Gamma \vdash_{\lambda\to} L:\tau\to\sigma$ e $\Gamma \vdash_{\lambda\to} N:\tau$. Segue por hipótese de indução que $\Gamma \vDash_{\lambda\to} L:\tau\to\sigma$ e $\Gamma \vDash_{\lambda\to} N:\tau$. Seja v uma valoração em $\mathcal{L}_{\lambda\to}$ modelo do contexto Γ. Segue por definição de consequência semântica em $\mathcal{L}_{\lambda\to}$ que v é modelo das atribuições $L:\tau\to\sigma$ e $N:\tau$, i.e., $[\![L]\!]_v \in [\![\tau\to\sigma]\!] = [\![\tau]\!] \to [\![\sigma]\!]$ e $[\![N]\!]_v \in [\![\tau]\!]$. Mas então, $[\![LN]\!]_v = [\![L]\!]_v[\![N]\!]_v \in [\![\sigma]\!]$. Logo, $\Gamma \vDash_{\lambda\to} LN:\sigma$.

- $M \equiv \lambda x.N$
  Suponhamos que $\Gamma \vdash_{\lambda\to} \lambda x.N:\sigma$. Segue do lema 10.7 que existem $\tau,\rho \in \mathcal{L}_{\mathrm{Types}}$ tais que $\sigma \equiv \tau\to\rho$ e $\Gamma, x:\tau \vdash_{\lambda\to} N:\rho$. Segue por hipótese de indução que $\Gamma, x:\tau \vDash_{\lambda\to} N:\rho$. Seja v uma valoração em $\mathcal{L}_{\lambda\to}$ modelo do contexto $\Gamma, x:\tau$. Segue por definição de consequência semântica em $\mathcal{L}_{\lambda\to}$ que v é modelo da atribuição $N:\rho$, i.e., $[\![N]\!]_v \in [\![\rho]\!]$. Seja $T \in [\![\tau]\!]$. Tem-se $([\![\lambda x.N]\!]_v)T = (\lambda x.[\![N]\!]_{v_x^x})T \twoheadrightarrow_\beta [\![N]\!]_{v_x^x}[T/x] = [\![N]\!]_{v_x^T}$. Como $v_x^T(x) = T \in [\![\tau]\!]$, e $[\![x]\!]_v = v(x) \in [\![\tau]\!]$ (pois v é modelo do contexto $\Gamma, x:\tau$), segue que $[\![N]\!]_{v_x^T} \in [\![\rho]\!]$ (pois $[\![N]\!]_v \in [\![\rho]\!]$). Segue pela condição 2. de conjunto saturado, tomando $n=0$, que $([\![\lambda x.N]\!]_v)T \in [\![\rho]\!]$. Logo, $[\![\lambda x.N]\!]_v \in [\![\tau\to\rho]\!]$. Concluímos que $\Gamma \vDash_{\lambda\to} \lambda x.N:\sigma$.

□

10.5 Normalização

Nesta última secção provamos o resultado principal do capítulo, e aquele que melhor caracteriza e distingue o Cálculo Lambda com tipos face ao Cálculo Lambda sem tipos. Como veremos, qualquer termo lambda tipificável é fortemente normalizável. Este resultado é conhecido como o teorema da *normalização forte*.

Teorema 10.18 (Teorema da normalização forte para $\mathcal{L}_{\lambda\rightarrow}$). *Se um termo lambda é tipificável, então é fortemente normalizável.*

Demonstração.
Suponhamos que $\Gamma \vdash_{\lambda\rightarrow} M : \sigma$, i.e., M é um termo lambda tipificável por σ. Segue pelo teorema 10.17 que $\Gamma \vDash_{\lambda\rightarrow} M : \sigma$. Tome-se uma valoração v em $\mathcal{L}_{\lambda\rightarrow}$ tal que $v(x) = x$, para cada $x : \tau \in \Gamma$. Ou seja, $[\![x]\!]_v = v(x) = x$. Como $[\![\tau]\!] \in \mathbb{S}$, pelo lema 10.13, segue que $[\![x]\!]_v \in [\![\tau]\!]$ (pela condição 1. da definição de conjunto de termos lambda saturado, tomando $n = 0$), para cada $x : \tau \in \Gamma$. Logo, v é modelo do contexto Γ. Segue por definição de consequência semântica em $\mathcal{L}_{\lambda\rightarrow}$ que v é modelo da atribuição $M : \sigma$, i.e., $[\![M]\!]_v \in [\![\sigma]\!]$. Mas, $[\![M]\!]_v = M$ (por construção de v) e $[\![\sigma]\!] \subseteq \mathrm{SN}_\beta$ (pela definição de $[\![.]\!]$). Logo, $M \in \mathrm{SN}_\beta$, i.e., M é um termo lambda fortemente normalizável. □

À luz dos teoremas da redução do sujeito e de Church-Rosser para o Cálculo Lambda com tipos, concluímos que qualquer termo lambda tipificável possui uma forma normal-β única, e que essa forma normal admite o mesmo tipo que o termo lambda original.

Interpretando a redução-R de um termo como um passo computacional, a existência e unicidade de forma normal-R formula-se nas seguintes questões: Toda a "R-computação" pára? Se pára, o resultado é sempre o mesmo?

À primeira vista parece desejável que ambas as respostas sejam positivas. E tal é o caso para o Cálculo Lambda com tipos, como concluímos nesta secção. Acontece que uma resposta positiva à primeira questão, acaba por ser, paradoxalmente, uma fraqueza computacional. Pelo menos se pretendemos simular a computação como a conhecemos, onde a semi-decidibilidade é crucial. Dito de outra forma, a linguagem dos termos lambda com tipos corresponde à classe das funções recursivas; e a linguagem dos termos lambda sem tipos, onde a resposta à primeira questão é negativa, corresponde à classe das funções parciais recursivas.[1]

Referências

[Sørensen and Urzyczyn, 1998]
[Caleiro, 2002]
[Selinger, 2007]

[1] A equivalência entre a classe de funções λ-definíveis e a classe das funções parciais recursivas é estabelecida no famoso *Teorema de Kleene*.

11 | Curry-Howard para LPI $\rightarrow$

O isomorfismo de Curry-Howard estabelece uma correspondência estrita entre o Cálculo Lambda com tipos simples e o fragmento implicacional da Lógica Proposicional Intuicionista. Ao invés da correspondência lógico-algébrica estabelecida na primeira parte deste trabalho, o isomorfismo de Curry-Howard recaí agora sobre uma abordagem operacional à Lógica Proposicional.

Neste capítulo demonstramos o isomorfismo de Curry-Howard isoladamente para os cálculos Natural, de Hilbert e de Gentzen.

11.0.1 $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}\rightarrow}, \vdash^i_{\mathrm{N}\rightarrow} \rangle = \langle \mathcal{L}_{\lambda\rightarrow} : \mathcal{L}_{\mathrm{Types}}, \vdash_{\lambda\rightarrow} \rangle$

Nesta secção provamos o isomorfismo de Curry-Howard para o Cálculo Natural. Como veremos, as regras do fragmento implicacional do Cálculo Natural Intuicionista correspondem uma a uma às regras do Cálculo Lambda com tipos. A demonstração do isomorfismo é portanto imediata para este cálculo.

Teorema 11.1 (Isomorfismo de Curry-Howard para o fragmento implicacional do Cálculo Natural)**.**

(i) Se $\Gamma \vdash_{\lambda\rightarrow} M : \sigma$*, então* $\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^i_{\mathrm{N}\rightarrow} \sigma$*;*

(ii) Se $\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}\rightarrow} \varphi$*, então existe* $M \in \mathcal{L}_{\lambda\rightarrow}$ *tal que* $\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_{\lambda\rightarrow} M : \varphi$*.*

Demonstração.

(i) Prova por indução no comprimento da tipificação $\Gamma \vdash_{\lambda\rightarrow} M : \sigma$.

Base:

O último passo da tipificação é dado por:

$$\frac{}{\Gamma \vdash_{\lambda\rightarrow} x : \sigma}\,\mathbf{Ax}\ ,$$

com $x : \sigma \in \Gamma$.

Como $\sigma \in \mathrm{Im}(\Gamma)$, segue que:

$$\frac{}{\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^i_{\mathrm{N}\rightarrow} \sigma}\,\mathbf{Ax}\ .$$

Passo:

- O último passo da tipificação é dado por:

$$\frac{\Gamma, x : \rho \vdash_{\lambda\rightarrow} N : \tau}{\Gamma \vdash_{\lambda\rightarrow} \lambda x.N : \rho \rightarrow \tau}\,\mathbf{Abs}\ ,$$

com $\sigma \equiv \rho \rightarrow \tau$.

Segue por hipótese de indução que $\mathrm{Im}(\Gamma), \rho \vdash^i_{\mathrm{N}\rightarrow} \tau$. Logo,

$$\frac{\mathrm{Im}(\Gamma), \rho \vdash^{i}_{\mathrm{N}\rightarrow} \tau}{\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{N}\rightarrow} \rho \rightarrow \tau} \rightarrow \mathbf{I}\ .$$

- O último passo da tipificação é dado por:

$$\frac{\Gamma \vdash_{\lambda\rightarrow} N : \rho \rightarrow \tau \qquad \Gamma \vdash_{\lambda\rightarrow} L : \rho}{\Gamma \vdash_{\lambda\rightarrow} NL : \tau} \mathbf{App}\ ,$$

com $\sigma \equiv \tau$.

Segue por hipótese de indução que $\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{N}\rightarrow} \rho \rightarrow \tau$ e $\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{N}\rightarrow} \rho$. Logo,

$$\frac{\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{N}\rightarrow} \rho \rightarrow \tau \qquad \mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{N}\rightarrow} \rho}{\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{N}\rightarrow} \tau} \rightarrow \mathbf{E}\ .$$

(ii) Prova por indução no comprimento da derivação $\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}\rightarrow} \varphi$.

Base:

O último passo da derivação é dado por:

$$\frac{}{\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}\rightarrow} \varphi} \mathbf{Ax}\ ,$$

com $\varphi \in \Gamma$.

Como $\varphi \in \Gamma$, segue que:

$$\frac{}{\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_{\lambda\rightarrow} x_\varphi : \varphi} \mathbf{Ax}\ .$$

Passo:

- O último passo da derivação é dado por:

$$\frac{\Gamma, \rho \vdash^{i}_{\mathrm{N}\rightarrow} \psi}{\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}\rightarrow} \rho \rightarrow \psi} \rightarrow \mathbf{I}\ ,$$

com $\varphi \equiv \rho \rightarrow \psi$.

Segue por hipótese de indução que existe um termo lambda $N \in \mathcal{L}_{\lambda\rightarrow}$ tal que $\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\}, x_\rho : \rho \vdash_{\lambda\rightarrow} N : \psi$. Logo,

$$\frac{\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\}, x_\rho : \rho \vdash_{\lambda\rightarrow} N : \psi}{\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_{\lambda\rightarrow} \lambda x_\rho . N : \rho \rightarrow \psi} \mathbf{Abs}\ .$$

- O último passo da derivação é dado por:

$$\frac{\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}\rightarrow} \rho \rightarrow \psi \qquad \Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}\rightarrow} \rho}{\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}\rightarrow} \psi} \rightarrow \mathbf{E}\ ,$$

com $\varphi \equiv \psi$.

Segue por hipótese de indução que existem termos lambda $N, L \in \mathcal{L}_{\lambda\rightarrow}$ tais que $\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_{\lambda\rightarrow} N : \rho \rightarrow \psi$ e $\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_{\lambda\rightarrow} L : \rho$. Logo,

$$\frac{\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_{\lambda\rightarrow} N : \rho \rightarrow \psi \qquad \{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_{\lambda\rightarrow} L : \rho}{\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_{\lambda\rightarrow} NL : \psi} \mathbf{App}\ .$$

$\square$

11.0.2 $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}\to}, \vdash^{i}_{\mathrm{H}\to} \rangle = \langle \mathcal{L}_{\lambda\to} : \mathcal{L}_{\mathrm{Types}}, \vdash_{\lambda\to} \rangle$

Nesta secção provamos o isomorfismo de Curry-Howard para o Cálculo de Hilbert. Importa referir que na bibliografia consultada são construídas novas regras de tipificação *à la Hilbert* para o cálculo lambda com tipos [Sørensen and Urzyczyn, 1998, Section 5.2], de modo a que o isomorfismo faça corresponder na parte lambda a lógica combinatória dos termos $\mathbf{K} \equiv \lambda xy.x$ e $\mathbf{S} \equiv \lambda xyz.xz(yz)$. Optámos aqui por manter as regras de tipificação dos termos lambda fixas, e construir os termos referidos dentro da demonstração do isomorfismo.

Teorema 11.2 (Isomorfismo de Curry-Howard para o fragmento implicacional do Cálculo de Hilbert)**.**

(i) Se $\Gamma \vdash_{\lambda\to} M : \sigma$*, então* $\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{H}\to} \sigma$*;*

(ii) Se $\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{H}\to} \varphi$*, então existe* $M \in \mathcal{L}_{\lambda\to}$ *tal que* $\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_{\lambda\to} M : \varphi$*.*

Demonstração.
(i) Prova por indução no comprimento da tipificação $\Gamma \vdash_{\lambda\to} M : \sigma$.

Base:
O último passo da tipificação é dado por:

$$\frac{}{\Gamma \vdash_{\lambda\to} x : \sigma}\ \mathbf{Ax}\ ,$$

com $x : \sigma \in \Gamma$.
Como $\sigma \in \mathrm{Im}(\Gamma)$, segue que:

$$\frac{}{\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{H}\to} \sigma}\ \mathbf{Hip}\ .$$

Passo:

- O último passo da tipificação é dado por:

$$\frac{\Gamma, x : \rho \vdash_{\lambda\to} N : \tau}{\Gamma \vdash_{\lambda\to} \lambda x.N : \rho \to \tau}\ \mathbf{Abs}\ ,$$

com $\sigma \equiv \rho \to \tau$.
Segue por hipótese de indução que $\mathrm{Im}(\Gamma), \rho \vdash^{i}_{\mathrm{H}\to} \tau$. Logo,

$$\frac{\mathrm{Im}(\Gamma), \rho \vdash^{i}_{\mathrm{H}\to} \tau}{\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{H}\to} \rho \to \tau}\ \mathrm{MTD}\ .$$

Note-se que a demonstração do MTD para o Cálculo de Hilbert apenas utiliza os axiomas **Ax1**, **Ax8** e a regra **MP**.

- O último passo da tipificação é dado por:

$$\frac{\Gamma \vdash_{\lambda\to} N : \rho \to \tau \qquad \Gamma \vdash_{\lambda\to} L : \rho}{\Gamma \vdash_{\lambda\to} NL : \tau}\ \mathbf{App}\ ,$$

com $\sigma \equiv \tau$.
Segue por hipótese de indução que $\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{H}\to} \rho \to \tau$ e $\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{H}\to} \rho$. Logo,

$$\frac{\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{H}\to} \rho \to \tau \qquad \mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{H}\to} \rho}{\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{H}\to} \tau}\ \mathbf{MP}\ .$$

(ii) Prova por indução no comprimento da derivação $\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}\rightarrow} \varphi$.

Base:

- O último passo da derivação é dado por:

$$\dfrac{}{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}\rightarrow} \varphi}\ \textbf{Hip}\ ,$$

com $\varphi \in \Gamma$.

Como $\varphi \in \Gamma$, segue que:

$$\dfrac{}{\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_{\lambda\rightarrow} x_\varphi : \varphi}\ \textbf{Ax}\ .$$

- O último passo da derivação é dado por:

$$\dfrac{}{\vdash^i_{\mathrm{H}\rightarrow} \psi \rightarrow (\rho \rightarrow \psi)}\ \textbf{Ax1}\ ,$$

com $\varphi \equiv \psi \rightarrow (\rho \rightarrow \psi)$.

Considere-se a seguinte tipificação do termo $\mathbf{K} \equiv \lambda xy.x$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\{x : \psi, y : \rho\} \vdash_{\lambda\rightarrow} x : \psi}\ \textbf{Ax}}{\{x : \psi\} \vdash_{\lambda\rightarrow} \lambda y.x : \rho \rightarrow \psi}\ \textbf{Abs}}{\vdash_{\lambda\rightarrow} \lambda xy.x : \psi \rightarrow (\rho \rightarrow \psi)}\ \textbf{Abs}\ .$$

Logo, $\vdash_{\lambda\rightarrow} \mathbf{K} : \psi \rightarrow (\rho \rightarrow \psi)$.

- O último passo da derivação é dado por:

$$\dfrac{}{\vdash^i_{\mathrm{H}\rightarrow} (\psi \rightarrow (\rho \rightarrow \delta)) \rightarrow ((\psi \rightarrow \rho) \rightarrow (\psi \rightarrow \delta))}\ \textbf{Ax8}\ ,$$

com $\varphi \equiv (\psi \rightarrow (\rho \rightarrow \delta)) \rightarrow ((\psi \rightarrow \rho) \rightarrow (\psi \rightarrow \delta))$.

Considere-se a seguinte tipificação do termo $\mathbf{S} \equiv \lambda xyz.xz(yz)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma' \vdash_{\lambda\rightarrow} x : \psi \rightarrow (\rho \rightarrow \delta)}\ \textbf{Ax} \quad \dfrac{}{\Gamma' \vdash_{\lambda\rightarrow} z : \psi}\ \textbf{Ax}}{\Gamma' \vdash_{\lambda\rightarrow} xz : \rho \rightarrow \delta}\ \textbf{App} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma' \vdash_{\lambda\rightarrow} y : \psi \rightarrow \rho}\ \textbf{Ax} \quad \dfrac{}{\Gamma' \vdash_{\lambda\rightarrow} z : \psi}\ \textbf{Ax}}{\Gamma' \vdash_{\lambda\rightarrow} yz : \rho}\ \textbf{App}}{\Gamma' \vdash_{\lambda\rightarrow} xz(yz) : \delta}\ \textbf{App}\ ,}{\{x : \psi \rightarrow (\rho \rightarrow \delta), y : \psi \rightarrow \rho\} \vdash_{\lambda\rightarrow} \lambda z.xz(yz) : \psi \rightarrow \delta}\ \textbf{Abs}}{\{x : \psi \rightarrow (\rho \rightarrow \delta)\} \vdash_{\lambda\rightarrow} \lambda yz.xz(yz) : (\psi \rightarrow \rho) \rightarrow (\psi \rightarrow \delta)}\ \textbf{Abs}}{\vdash_{\lambda\rightarrow} \lambda xyz.xz(yz) : (\psi \rightarrow (\rho \rightarrow \delta)) \rightarrow ((\psi \rightarrow \rho) \rightarrow (\psi \rightarrow \delta))}\ \textbf{Abs}$$

onde $\Gamma' = \{x : \psi \rightarrow (\rho \rightarrow \delta), y : \psi \rightarrow \rho, z : \psi\}$. Logo, $\vdash_{\lambda\rightarrow} \mathbf{S} : (\psi \rightarrow (\rho \rightarrow \delta)) \rightarrow ((\psi \rightarrow \rho) \rightarrow (\psi \rightarrow \delta))$.

Passo:

O último passo da derivação é dado por:

$$\dfrac{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}\rightarrow} \rho \rightarrow \psi \qquad \Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}\rightarrow} \rho}{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{H}\rightarrow} \psi}\ \textbf{MP}\ ,$$

com $\varphi \equiv \psi$.

Segue por hipótese de indução que existem termos lambda $N, L \in \mathcal{L}_{\lambda\rightarrow}$ tais que $\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_{\lambda\rightarrow} N : \rho \rightarrow \psi$ e $\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_{\lambda\rightarrow} L : \rho$. Logo,

$$\frac{\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_{\lambda\to} N : \rho \to \psi \qquad \{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_{\lambda\to} L : \rho}{\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_{\lambda\to} NL : \psi}\,\mathbf{App}\ .$$

□

11.0.3 $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}\to}, \vdash^i_{\mathrm{G}\to} \rangle = \langle \mathcal{L}_{\lambda\to} : \mathcal{L}_{\mathrm{Types}}, \vdash_{\lambda\to} \rangle$

Nesta secção provamos o isomorfismo de Curry-Howard para o Cálculo de Gentzen. Importa referir novamente que na bibliografia consultada são construídas novas regras de tipificação *à la Gentzen* para o cálculo lambda com tipos [Sørensen and Urzyczyn, 1998, Section 7.4], de modo a que demonstração do isomorfismo seja imediata em ambos os sentidos. Optámos mais uma vez por manter as regras de tipificação dos termos lambda fixas, o que permite comparar melhor o isomorfismo entre os vários cálculos.

Teorema 11.3 (Isomorfismo de Curry-Howard para o fragmento implicacional do Cálculo de Gentzen)**.**

(i) Se $\Gamma \vdash_{\lambda\to} M : \sigma$*, então* $\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^i_{\mathrm{G}\to} \sigma$*;*

(ii) Se $\Delta \vdash^i_{\mathrm{G}\to} \varphi$*, então existe* $M \in \mathcal{L}_{\lambda\to}$ *tal que* $\{(x_\delta : \delta) : \delta \in \Delta\} \vdash_{\lambda\to} M : \varphi$*.*

Demonstração.

(i) Prova por indução no comprimento da tipificação $\Gamma \vdash_{\lambda\to} M : \sigma$.

Base:

O último passo da tipificação é dado por:

$$\frac{}{\Gamma \vdash_{\lambda\to} x : \sigma}\,\mathbf{Ax}\ ,$$

com $x : \sigma \in \Gamma$.

Como $\sigma \in \mathrm{Im}(\Gamma)$, segue que:

$$\frac{}{\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^i_{\mathrm{G}\to} \sigma}\,\mathbf{Ax}\ .$$

Passo:

- O último passo da tipificação é dado por:

$$\frac{\Gamma, x : \rho \vdash_{\lambda\to} N : \tau}{\Gamma \vdash_{\lambda\to} \lambda x.N : \rho \to \tau}\,\mathbf{Abs}\ ,$$

com $\sigma \equiv \rho \to \tau$.

Segue por hipótese de indução que $\mathrm{Im}(\Gamma), \rho \vdash^i_{\mathrm{G}\to} \tau$. Logo,

$$\frac{\mathrm{Im}(\Gamma), \rho \vdash^i_{\mathrm{G}\to} \tau}{\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^i_{\mathrm{G}\to} \rho \to \tau} \to \mathbf{R}\ .$$

- O último passo da tipificação é dado por:

$$\frac{\Gamma \vdash_{\lambda\to} N : \rho \to \tau \qquad \Gamma \vdash_{\lambda\to} L : \rho}{\Gamma \vdash_{\lambda\to} NL : \tau}\,\mathbf{App}\ ,$$

com $\sigma \equiv \tau$.

Segue por hipótese de indução que $\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^i_{\mathrm{G}\to} \rho \to \tau$ e $\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^i_{\mathrm{G}\to} \rho$. Logo,

$$\frac{\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^i_{\mathrm{G}\to} \rho \to \tau \qquad \mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^i_{\mathrm{G}\to} \rho}{\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^i_{\mathrm{G}\to} \tau}\,\mathrm{MTMP}\ .$$

Note-se que a demonstração do MTMP para o Cálculo de Gentzen apenas utiliza as regras **Cut** e $\to$ **L**.

(ii) Prova por indução no comprimento da derivação $\Delta \vdash^i_{\mathrm{G}\to} \varphi$.

Base:
O último passo da derivação é dado por:

$$\frac{}{\Delta \vdash^i_{\mathrm{G}\to} \varphi}\,\mathbf{Ax}\ ,$$

com $\varphi \in \Delta$.
Como $\varphi \in \Delta$, segue que:

$$\frac{}{\{(x_\delta : \delta) : \delta \in \Delta\} \vdash_{\lambda\to} x_\varphi : \varphi}\,\mathbf{Ax}\ .$$

Passo:

- O último passo da derivação é dado por:

$$\frac{\Delta, \rho \vdash^i_{\mathrm{G}\to} \psi}{\Delta \vdash^i_{\mathrm{G}\to} \rho \to \psi} \to \mathbf{R}\ ,$$

com $\varphi \equiv \rho \to \psi$.
Segue por hipótese de indução que existe um termo lambda $N \in \mathcal{L}_{\lambda\to}$ tal que $\{(x_\delta : \delta) : \delta \in \Delta\}, x_\rho : \rho \vdash_{\lambda\to} N : \psi$. Logo,

$$\frac{\{(x_\delta : \delta) : \delta \in \Delta\}, x_\rho : \rho \vdash_{\lambda\to} N : \psi}{\{(x_\delta : \delta) : \delta \in \Delta\} \vdash_{\lambda\to} \lambda x_\rho.N : \rho \to \psi}\,\mathbf{Abs}\ .$$

- O último passo da derivação é dado por:

$$\frac{\Delta \vdash^i_{\mathrm{G}\to} \psi \qquad \Delta, \psi \vdash^i_{\mathrm{G}\to} \rho}{\Delta \vdash^i_{\mathrm{G}\to} \rho}\,\mathbf{Cut}\ ,$$

com $\varphi \equiv \rho$.
Segue por hipótese de indução que existem termos lambda $N, L \in \mathcal{L}_{\lambda\to}$ tais que $\{(x_\delta : \delta) : \delta \in \Delta\} \vdash_{\lambda\to} L : \psi$ e $\{(x_\delta : \delta) : \delta \in \Delta\}, x_\psi : \psi \vdash_{\lambda\to} N : \rho$. Logo,

$$\frac{\dfrac{\{(x_\delta : \delta) : \delta \in \Delta\}, x_\psi : \psi \vdash_{\lambda\to} N : \rho}{\{(x_\delta : \delta) : \delta \in \Delta\} \vdash_{\lambda\to} \lambda x_\psi.N : \psi \to \rho}\,\mathbf{Abs} \qquad \{(x_\delta : \delta) : \delta \in \Delta\} \vdash_{\lambda\to} L : \psi}{\{(x_\delta : \delta) : \delta \in \Delta\} \vdash_{\lambda\to} (\lambda x_\psi.N)L : \rho}\,\mathbf{App}\ .$$

- O último passo da derivação é dado por:

$$\frac{\Delta' \vdash^i_{\mathrm{G}\to} \rho \qquad \Delta', \psi \vdash^i_{\mathrm{G}\to} \vartheta}{\Delta \vdash^i_{\mathrm{G}\to} \vartheta} \to \mathbf{L}\ ,$$

com $\varphi \equiv \vartheta$ e $\Delta = \Delta' \cup \{\rho \to \psi\}$.
Segue por hipótese de indução que existem termos lambda $N, L \in \mathcal{L}_{\lambda\to}$ tais que $\{(x'_\delta : \delta') : \delta' \in \Delta'\} \vdash_{\lambda\to} L : \rho$ e $\{(x'_\delta : \delta') : \delta' \in \Delta'\}, x_\psi : \psi \vdash_{\lambda\to} N : \vartheta$. Tome-se uma variável lambda y de tipo $\rho \to \psi$ fresca para $\{(x'_\delta : \delta') : \delta' \in \Delta'\}$. Segue por monotonia de $\vdash_{\lambda\to}$ que $\{(x'_\delta : \delta') : \delta' \in \Delta'\}, y : \rho \to \psi \vdash_{\lambda\to} L : \rho$ e $\{(x'_\delta : \delta') : \delta' \in \Delta'\}, x_\psi : \psi, y : \rho \to \psi \vdash_{\lambda\to} N : \vartheta$. Logo,

$$\dfrac{\dfrac{x_{\Delta'}, x_\psi : \psi, y : \rho \to \psi \vdash_{\lambda\to} N : \vartheta}{x_{\Delta'}, y : \rho \to \psi \vdash_{\lambda\to} \lambda x_\psi.N : \psi \to \vartheta}\,\mathbf{Abs} \qquad \dfrac{\dfrac{}{x_{\Delta'}, y : \rho \to \psi \vdash_{\lambda\to} y : \rho \to \psi}\,\mathbf{Ax} \qquad x_{\Delta'}, y : \rho \to \psi \vdash_{\lambda\to} L : \rho}{x_{\Delta'}, y : \rho \to \psi \vdash_{\lambda\to} yL : \psi}\,\mathbf{App}}{x_{\Delta'}, y : \rho \to \psi \vdash_{\lambda\to} (\lambda x_\psi.N)yL : \vartheta}\,\mathbf{App}\ ,$$

onde $x_{\Delta'} = \{(x'_\delta : \delta') : \delta' \in \Delta'\}$.

□

11.1 Observações

Uma vez provado o isomorfismo entre a parte lógica e lambda, podemos perguntar-nos quão bem comportada é esta correspondência.

Por exemplo, ao nível de fórmulas proposicionais *vs.* tipos estamos perante uma bijecção (trivial na verdade, dada pela função identidade). Já ao nível de provas *vs.* termos lambda a correspondência falha na injectividade. Para tal, considere-se o seguinte exemplo:

$$\begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : \varphi, y : \varphi \vdash_{\lambda\to} x : \varphi}\,\mathbf{Ax}}{x : \varphi \vdash_{\lambda\to} \lambda y.x : \varphi \to \varphi}\,\mathbf{Abs}}{\vdash_{\lambda\to} \lambda xy.x : \varphi \to \varphi \to \varphi}\,\mathbf{Abs} \\[2ex] \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : \varphi, y : \varphi \vdash_{\lambda\to} x : \varphi}\,\mathbf{Ax}}{y : \varphi \vdash_{\lambda\to} \lambda x.x : \varphi \to \varphi}\,\mathbf{Abs}}{\vdash_{\lambda\to} \lambda yx.x : \varphi \to \varphi \to \varphi}\,\mathbf{Abs} \end{array} \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi, \varphi \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \varphi}\,\mathbf{Ax}}{\varphi \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \varphi \to \varphi}\to\mathbf{I}}{\vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \varphi \to \varphi \to \varphi}\to\mathbf{I}$$

Observamos que enquanto a ordem das variáveis lambda é relevante em abstracções lambda consecutivas, o mesmo não se sucede na introdução de implicações. De facto, podemos pensar no Cálculo Lambda como uma versão melhorada dos cálculos lógicos estudados neste trabalho, na medida em que permite guardar registo da ordem que as hipóteses são utilizadas numa prova. Além da ordem, permite-nos também saber quantas vezes a mesma hipótese foi utilizada. Este factor é crucial, por exemplo, em *Lógica Linear*. No exemplo acima duplicámos a fórmula φ para contornar esta questão, mas em rigor tratar-se-ia de um conjunto singular $\{\varphi\}$.

Claro que se etiquetarmos as nossas hipóteses nos cálculos lógicos estamos perante uma bijecção entre provas e termos lambda. Considere-se o mesmo exemplo, agora com etiquetas na representação das provas:

$$\begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : \varphi, y : \varphi \vdash_{\lambda\to} x : \varphi}\,\mathbf{Ax}}{x : \varphi \vdash_{\lambda\to} \lambda y.x : \varphi \to \varphi}\,\mathbf{Abs}}{\vdash_{\lambda\to} \lambda xy.x : \varphi \to \varphi \to \varphi}\,\mathbf{Abs} \\[2ex] \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : \varphi, y : \varphi \vdash_{\lambda\to} x : \varphi}\,\mathbf{Ax}}{y : \varphi \vdash_{\lambda\to} \lambda x.x : \varphi \to \varphi}\,\mathbf{Abs}}{\vdash_{\lambda\to} \lambda yx.x : \varphi \to \varphi \to \varphi}\,\mathbf{Abs} \end{array} \quad \mapsto \quad \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)} \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \varphi}\,\mathbf{Ax}}{\varphi^{(1)} \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \varphi \to \varphi}\to\mathbf{I}^{(2)}}{\vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \varphi \to \varphi \to \varphi}\to\mathbf{I}^{(1)} \\[2ex] \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)} \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \varphi}\,\mathbf{Ax}}{\varphi^{(2)} \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \varphi \to \varphi}\to\mathbf{I}^{(1)}}{\vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \varphi \to \varphi \to \varphi}\to\mathbf{I}^{(2)} \end{array}$$

O abuso de terminologia cometido ao empregarmos a palavra "isomorfismo" fica aqui bem patente, e os argumentos a favor da palavra "correspondência" acrescem.

Explicitamos agora as diversas correspondências entre conceitos das teorias lógica e lambda que tomam forma, ainda que por vezes passem despercebidas, na demonstração do isomorfismo de Curry-Howard.

A correspondência nuclear ao isomorfismo é claro aquela que se estabelece entre os tipos dos termos lambda e as fórmulas proposicionais. Esta correspondência dá-se a vários níveis: variáveis de tipo correspondem a variáveis proposicionais; e tipos "compostos" correspondem a fórmulas proposicionais implicacionais. Por outras palavras, os casos base e passo do princípio de indução na estrutura de um tipo e do princípio de indução na estrutura de uma fórmula proposicional correspondem-se.

A estrutura de um tipo, ou de uma fórmula proposicional, prende-se ainda com o operador a partir do qual construímos novos tipos a partir de tipos já existentes, ou novas fórmulas a partir de fórmulas já existentes. O símbolo funcional de tipos corresponde, claro está, ao símbolo de implicação. Esta correspondência dá-se também na respectiva introdução e eliminação do operador. No caso do Cálculo Natural é flagrante a similaridade das regras **Abs** com $\rightarrow$ **I** e **App** com $\rightarrow$ **E**. No cálculo de Hilbert apenas se correspondem (directamente) as regras **App** com **MP**; e no Cálculo de Gentzen as regras **Abs** com $\rightarrow$ **R**. No próximo capítulo teremos mais a acrescentar a este respeito.

Caracterizámos até agora o isomorfismo de Curry-Howard ao nível dos tipos, ou do lado direito de uma tipificação. Tratamos agora a correspondência ao nível dos termos lambda, ou do lado esquerdo de uma tipificação. Aqui o isomorfismo assume um papel sintáctico ainda mais forte. Acontece que um termo lambda guarda o registo das regras com as quais foi construído o seu tipo, ou seja, encerra em si uma prova da fórmula proposicional dada pelo seu tipo. Uma variável lambda corresponde assim a uma hipótese; e um termo lambda corresponde a uma prova. Por outras palavras, a habitação de tipos na parte lambda corresponde à provabilidade na parte lógica.

A tabela 11.1 resume os principais pontos que acabámos de esclarecer.

$\langle \mathcal{L}_{\lambda\rightarrow} : \mathcal{L}_{\text{Types}}, \vdash_{\lambda\rightarrow} \rangle$	$\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}\rightarrow}, \vdash^i \rangle$
variável de tipo	variável proposicional
tipo "composto"	fórmula proposicional implicacional
operador funcional de tipos	conectivo implicação
regra **Abs**	regra $\rightarrow$ **I** para $\vdash^i_{\text{N}\rightarrow}$ e regra $\rightarrow$ **R** para $\vdash^i_{\text{G}\rightarrow}$
regra **App**	regra $\rightarrow$ **E** para $\vdash^i_{\text{N}\rightarrow}$ e regra **MP** para $\vdash^i_{\text{H}\rightarrow}$
variável lambda	hipótese
termo lambda	prova
habitação de tipos	provabilidade de fórmulas

Tabela 11.1: Resumo do isomorfismo de Curry-Howard.

Referências

[Sørensen and Urzyczyn, 1998]

12 Reduções -β e -η nos Cálculos Lógicos

Como vimos, o isomorfismo de Curry-Howard faz corresponder tipos a fórmulas proposicionais, termos lambda a provas, e regras de tipificação a regras dos conectivos lógicos. É pois natural procurar estender esta correspondência a outros conceitos estruturais das teorias lógica e lambda. Um exemplo paradigmático será a redução entre termos lambda, segundo as relações de redução introduzidas no capítulo 9.

Neste capítulo estabelecemos a "tradução" das reduções -β e -η via Curry-Howard para cada um dos cálculos lógicos da Lógica Proposicional Intuicionista.

12.1 Redução-β

Redução-β no Cálculo Natural

Relembremo-nos, a redução-β relaciona pares de termos lambda da forma $(\lambda x.M)N$ e $M[N/x]$. Considerando termos lambda tipificados, e tendo presente o teorema da redução do sujeito, a redução-β relaciona pares de termos lambda da forma $(\lambda x.M)N : \tau$ e $M[N/x] : \tau$. Analisemos a construção do tipo do primeiro termo. Sabemos pelo lema da geração de tipos que os tipos de $\lambda x.M$ e N devem concordar, i.e., $\lambda x.M : \sigma \to \tau$ e $N : \sigma$. Sabemos ainda pelo mesmo lema que $x : \sigma$ e $M : \tau$.

À luz do isomorfismo de Curry-Howard, estamos à primeira vista a identificar trivialmente a fórmula τ consigo mesma. Mas a análise que fizemos relativamente à tipificação do termo lambda $(\lambda x.M)N : \tau$ diz-nos que a fórmula proposicional τ foi obtida através da regra $\to$ **E**, tendo uma prova da fórmula $\sigma \to \tau$ (o termo lambda $\lambda x.M$) e uma prova da fórmula σ (o termo lambda N) como premissas. Diz-nos ainda que a fórmula $\sigma \to \tau$ foi obtida através da regra $\to$ **I**, tendo uma prova de τ (o termo lambda M) e uma hipótese σ (a variável lambda x) como premissa. Ou seja, a tradução da redução-β no Cálculo Natural consiste em identificar as derivações da seguinte forma:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \sigma \vdash_{\mathrm{N}} \tau}{\Gamma \vdash_{\mathrm{N}} \sigma \to \tau}\to \mathbf{I} \qquad \Gamma \vdash_{\mathrm{N}} \sigma}{\Gamma \vdash_{\mathrm{N}} \tau}\to \mathbf{E} \qquad \Rrightarrow \qquad \Gamma \vdash_{\mathrm{N}} \tau$$

Uma prova no Cálculo Natural que não contenha qualquer introdução de uma regra imediatamente seguida da eliminação da mesma regra diz-se uma *prova normal.* Uma prova "não-normal" corresponde assim na parte lambda a um β-*redex*, e o respectivo β-*contractum* corresponde na parte lógica à mesma prova "normalizada".

Concluímos que a β-redução no Cálculo Lambda com tipos corresponde via Curry-Howard à *normalização de provas* no Cálculo Natural.

Redução-β no Cálculo de Hilbert

A análise feita para a construção da tipificação $(\lambda x.M)N : \tau$ no Cálculo Natural não é tão imediata para o Cálculo de Hilbert. Isto porque embora a aplicação de termos lambda corresponda à regra **MP**, a abstracção lambda não corresponde directamente a nenhum dos axiomas **Ax1** e **Ax8**, conforme se pode constatar na demonstração do isomorfismo para este cálculo. De facto, a abstracção lambda corresponde ao Metateorema da Dedução para o Cálculo de Hilbert. Ou seja, a tradução da redução-β no Cálculo de Hilbert consiste em identificar as derivações da seguinte forma:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \sigma \vdash_{\mathrm{H}} \tau}{\Gamma \vdash_{\mathrm{H}} \sigma \to \tau}\,\mathrm{MTD} \qquad \Gamma \vdash_{\mathrm{H}} \sigma}{\Gamma \vdash_{\mathrm{H}} \tau}\,\mathbf{MP} \qquad \Rrightarrow \qquad \Gamma \vdash_{\mathrm{H}} \tau$$

Redução-β no Cálculo de Gentzen

A análise feita para a construção da tipificação $(\lambda x.M)N : \tau$ no Cálculo Natural não é mais uma vez imediata para o Cálculo de Gentzen. Isto porque embora a abstracção lambda corresponda à regra $\to$ **I**, a aplicação de termos lambda não corresponde directamente à regra $\to$ **E**, conforme se pode constatar na demonstração do isomorfismo para este cálculo. De facto, a aplicação de termos lambda corresponde ao Metateorema do Modus Ponens para o Cálculo de Gentzen. Ou seja, a tradução da redução-β no Cálculo de Gentzen consiste em identificar as derivações da seguinte forma:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \sigma \vdash_{\mathrm{G}} \tau}{\Gamma \vdash_{\mathrm{G}} \sigma \to \tau}\to\mathbf{R} \qquad \Gamma \vdash_{\mathrm{G}} \sigma}{\Gamma \vdash_{\mathrm{G}} \tau}\,\mathrm{MTMP} \qquad \Rrightarrow \qquad \Gamma \vdash_{\mathrm{G}} \tau$$

Note-se que as duas premissas e conclusão desta derivação correspondem precisamente à regra do corte:

$$\dfrac{\Gamma, \sigma \vdash_{\mathrm{G}} \tau \qquad \Gamma \vdash_{\mathrm{G}} \sigma}{\Gamma \vdash_{\mathrm{G}} \tau}\,\mathbf{Cut} \qquad \Rrightarrow \qquad \Gamma \vdash_{\mathrm{G}} \tau$$

Uma prova no Cálculo de Gentzen que não contenha qualquer regra do corte diz-se, mais uma vez, uma *prova normal*. Uma prova "não-normal" à Gentzen corresponde assim na parte lambda a um *β-redex*, e o respectivo *β-contractum* corresponde na parte lógica à mesma prova "normalizada".

Concluímos que a β-redução no Cálculo Lambda com tipos corresponde via Curry-Howard à *eliminação do corte* das provas no Cálculo de Gentzen.[1]

[1] Foi Gentzen quem provou que qualquer derivação no cálculo de sequentes que recorra à regra do corte pode ser transformada numa derivação que não utilize essa regra, i.e., que a regra do corte é consequência das restantes regras do cálculo de sequentes. Este famoso resultado é conhecido por *Hauptsatz*.

12.2 Redução-η

Redução-η no Cálculo Natural

Relembremo-nos, a redução-η relaciona pares de termos lambda da forma $\lambda x.Mx$ e M. Considerando termos lambda tipificados, e tendo presente que um teorema análogo para a redução-η do sujeito é válido, a redução-η relaciona pares de termos lambda da forma $\lambda x.Mx : \rho$ e $M : \rho$. Analisemos novamente a construção do tipo do primeiro termo. Sabemos pelo lema da geração de tipos que $\rho \equiv \sigma \to \tau$, $x : \sigma$ e $Mx : \tau$.

A análise que fizemos relativamente à tipificação do termo lambda $\lambda x.Mx : \rho$ diz-nos que a fórmula proposicional $\rho \equiv \sigma \to \tau$ foi obtida através da regra $\to$ **I**, tendo uma prova de τ (o termo lambda Mx) e uma hipótese σ (a variável lambda x) como premissa. Diz-nos ainda que a fórmula τ foi obtida através da regra $\to$ **E**, tendo uma prova da fórmula $\sigma \to \tau$ (o termo lambda M) e uma prova da fórmula σ como premissas. Note-se que a hipótese σ tem que continuar presente nestas premissas, pois as regras da implicação não alteram o lado esquerdo de uma derivação. Ou seja, a tradução da redução-η no Cálculo Natural consiste em identificar as derivações da seguinte forma:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \sigma \vdash_{\mathrm{N}} \sigma \to \tau \qquad \Gamma, \sigma \vdash_{\mathrm{N}} \sigma}{\Gamma, \sigma \vdash_{\mathrm{N}} \tau} \to \mathbf{E}}{\Gamma \vdash_{\mathrm{N}} \sigma \to \tau} \to \mathbf{I} \qquad \Mapsto \qquad \Gamma \vdash_{\mathrm{N}} \sigma \to \tau$$

Concluímos que a redução-η corresponde na parte lógica ao inverso da redução-β, i.e., a normalizar provas onde ocorra a eliminação da implicação imediatamente seguida da introdução da implicação.

Redução-η no Cálculo de Hilbert

A análise feita para a construção da tipificação $\lambda x.Mx : \rho$ no Cálculo Natural segue agora as correspondências já vistas para o Cálculo de Hilbert. Assim, vamos novamente traduzir a aplicação de termos lambda pela regra $\to$ **MP** e a abstracção lambda pelo MTD para o Cálculo de Hilbert. A tradução da redução-η no Cálculo de Hilbert consiste então em identificar as derivações da seguinte forma:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \sigma \vdash_{\mathrm{H}} \sigma \to \tau \qquad \Gamma, \sigma \vdash_{\mathrm{H}} \sigma}{\Gamma, \sigma \vdash_{\mathrm{H}} \tau} \mathbf{MP}}{\Gamma \vdash_{\mathrm{H}} \sigma \to \tau} \mathrm{MTD} \qquad \Mapsto \qquad \Gamma \vdash_{\mathrm{H}} \sigma \to \tau$$

Redução-η no Cálculo de Gentzen

A análise feita para a construção da tipificação $\lambda x.Mx : \rho$ no Cálculo Natural segue agora as correspondências já vistas para o Cálculo de Gentzen. Assim, vamos novamente traduzir a abstracção lambda pela regra $\to$ **R** e a aplicação de termos lambda pelo MTMP para o Cálculo de Gentzen. A tradução da redução-η no Cálculo de Gentzen consiste então em identificar as derivações da seguinte forma:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \sigma \vdash_{\mathrm{G}} \sigma \to \tau \qquad \Gamma, \sigma \vdash_{\mathrm{G}} \sigma}{\Gamma, \sigma \vdash_{\mathrm{G}} \tau} \mathrm{MTMP}}{\Gamma \vdash_{\mathrm{G}} \sigma \to \tau} \to \mathbf{R} \qquad \Mapsto \qquad \Gamma \vdash_{\mathrm{G}} \sigma \to \tau$$

12.3 Ou, MTD e MTMP no Cálculo Lambda

Detalhámos nas secções anteriores a "tradução" das reduções -β e -η via Curry-Howard para os cálculos Natural, de Hilbert e de Gentzen. Cada cálculo manifestou as reduções de maneira própria. Expomos nesta secção algumas considerações sobre as diferenças entre cada correspondência.

Comecemos pelo Cálculo Natural. Neste cálculo a regra $\rightarrow$ **I** traduz-se directamente na regra **Abs** e a regra $\rightarrow$ **E** traduz-se directamente na regra **App**. Assim, a redução-β corresponde à normalização de uma introdução da implicação seguida da respectiva eliminação, e a redução-η corresponde à normalização de uma eliminação da implicação seguida da respectiva introdução.

Quanto aos cálculos de Hilbert e de Gentzen, a correspondência não é directa. Podemos dizer que se trata de uma correspondência semi-directa. Isto porque no Cálculo de Hilbert a regra **App** traduz-se directamente na regra **MP**, e no Cálculo de Gentzen a regra **Abs** traduz-se directamente na regra $\rightarrow$ **R**. Note-se porém, e aqui reside o ponto que pretendemos salientar, que as regras "não-correspondidas" são simuladas pelas versões do MTD e MTMP destes cálculos. Mais, as regras "correspondidas" também correspondem às respectivas versões do MTD e MTMP.

Uma explicação geral da correspondência entre as reduções -β e -η no fragmento implicacional da Lógica Proposicional (Clássica ou Intuicionista, dado coincidirem) será *a normalização de provas onde ocorram o MTD imediatamente seguido do MTMP, e vice-versa.* Ora, acontece que no Cálculo Natural estes metateoremas estão incorporados enquanto regras do próprio cálculo, por $\rightarrow$ **I** e $\rightarrow$ **E**. Já nos cálculos de Hilbert e de Gentzen apenas um dos metateoremas é simulado por regras do cálculo, nomeadamente o MTMP pela regra **MP** e o MTD pela regra $\rightarrow$ **R** (precisamente as regras que simulam **App** e **Abs** no respectivo cálculo!). Daí as diferenças de cálculo para cálculo na correspondência das reduções. No cálculo de Gentzen, dá-se ainda o caso da normalização do MTD imediatamente seguido do MTMP coincidir com a regra **Cut**, e portanto a redução-β corresponder à eliminação desta regra.

Na literatura consultada, designa-se por *prova normal* uma prova que não contenha o primeiro tipo de redundância aqui visto (entenda-se, o MTD seguido do MTMP), como aliás referimos nos cálculos Natural e de Gentzen. Adoptaremos agora a expressão *prova normal* para denominar uma prova que não contenha os dois tipos de redundância vistos. Por outras palavras, uma prova normal será um termo lambda na forma $\beta\eta$-normal.

A tabela 12.1 resume os principais pontos que acabámos de esclarecer.

$\langle \mathcal{L}_{\lambda\rightarrow} : \mathcal{L}_{\text{Types}}, \vdash_{\lambda\rightarrow} \rangle$	$\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}\rightarrow}, \vdash^{i} \rangle$
β-*redex*	prova não-normal
β-*contractum*	prova normalizada
η-*redex*	prova não-normal
η-*contractum*	prova normalizada
forma $\beta\eta$-normal	prova normal
redução-β	eliminação do MTD seguido do MTMP
redução-η	eliminação do MTMP seguido do MTD

Tabela 12.1: Reduções -β e -η *vs* MTD e MTMP.

13 | Curry-Howard para LPI

Provámos no capítulo 11 o isomorfismo de Curry-Howard entre o Cálculo Lambda com tipos e o fragmento implicacional da Lógica Proposicional Intuicionista. Neste capítulo estendemos o isomorfismo a toda a Lógica Proposicional Intuicionista.

Para isso, precisaremos de introduzir novos termos lambda, novos tipos, e, consequentemente, novas regras de tipificação. Estes novos tipos e respectivas regras de tipificação traduzirão, claro está, as fórmulas proposicionais intuicionistas construídas através dos conectivos negação, conjunção e disjunção. Uma vez que já provámos, digamos, o núcleo da correspondência de Curry-Howard, esta extensão surgirá sem surpresas, e a generalização do isomorfismo seguirá facilmente.

13.1 Linguagem para λ

Começamos por redefinir o conjunto de tipos que admitimos como legítimos para um termo lambda. As próximas definições seguem de perto a exposição do capítulo 10.

Definição 13.1. O *alfabeto de tipos* é um conjunto numerável

$$\Pi_{\mathrm{Types}} = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\} \ ,$$

cujos elementos se designam por *variáveis de tipo.*

Definição 13.2. A *assinatura de tipos* é uma assinatura

$$\Sigma_{\mathrm{Types}} = \langle \neg, \wedge, \vee, \to \rangle \ ,$$

cujos elementos se designam por *operações de tipo*, e onde:

- $\neg$ é uma operação unária;
- $\wedge$ é uma operação binária;
- $\vee$ é uma operação binária;
- $\to$ é uma operação binária.

Definição 13.3. A *linguagem de tipos* é a Σ_{Types}-álgebra livre em $\mathrm{Alg}(\Sigma_{\mathrm{Types}})$ sobre Π_{Types},

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Types}} = \langle \Pi_{\mathrm{Types}}, \neg, \wedge, \vee, \to \rangle \ ,$$

cujos elementos se designam por *tipos (simples).*

Identificamos mais uma vez a álgebra $\mathcal{L}_{\text{Types}}$ com a linguagem gerada pela gramática

$$\sigma := \alpha \mid \neg\sigma \mid \sigma \wedge \sigma \mid \sigma \vee \sigma \mid \sigma \to \sigma \ .$$

A intuição por detrás dos novos tipos é fácil de adivinhar: um tipo $\neg\sigma$ representa de algum modo a negação do tipo σ; um tipo $\sigma \wedge \tau$ representa de algum modo a intersecção dos tipos σ e τ; e um tipo $\sigma \vee \tau$ representa de algum modo a união dos tipos σ e τ.

Redefinimos agora os novos termos lambda que habitarão os novos tipos.

Definição 13.4. O *alfabeto lambda* é um conjunto numerável

$$\Pi_\lambda = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\} \ ,$$

cujos elementos se designam por *variáveis lambda*.

Definição 13.5. A *assinatura lambda* é uma assinatura

$$\Sigma_\lambda = \langle \text{neg}, \text{pair}, \text{proj}_1, \text{proj}_2, \langle \text{case}_{x,y} \rangle_{x,y \in \Pi_\lambda}, \text{inj}_1, \text{inj}_2, \text{app}, \langle \text{abs}_x \rangle_{x \in \Pi_\lambda} \rangle \ ,$$

cujos elementos se designam por *operações lambda*, e onde:

- neg é uma operação unária;
- pair é uma operação binária;
- proj_1 é uma operação unária;
- proj_2 é uma operação unária;
- $\text{case}_{\text{x,y}}$ é uma operação ternária;
- inj_1 é uma operação unária;
- inj_2 é uma operação unária;
- app é uma operação binária;
- abs_x é um operação unária.

Definição 13.6. A *linguagem lambda* é a Σ_λ-álgebra livre em $\text{Alg}(\Sigma_\lambda)$ sobre Π_λ,

$$\mathcal{L}_\lambda = \langle \Pi_\lambda, \text{neg}, \text{pair}, \text{proj}_1, \text{proj}_2, \text{case}_{x,y}, \text{inj}_1, \text{inj}_2, \text{app}, \langle \text{abs}_x \rangle_{x \in \Pi_\lambda} \rangle \ ,$$

cujos elementos se designam por *termos lambda*.

Identificamos igualmente a álgebra $\mathcal{L}_\lambda$ com a linguagem gerada pela gramática

$$M := x \mid \overline{M} \mid \langle M, M \rangle \mid \text{p}_1 M \mid \text{p}_2 M \mid \langle M, \delta x.M, \delta x.M \rangle \mid \text{i}_1 M \mid \text{i}_2 M \mid MM \mid \lambda x.M \ ,$$

onde para quaisquer $x, y \in \Pi_\lambda$ e quaisquer $K, L, M, N \in \mathcal{L}_\lambda$:

- $\overline{M}$ denota $\text{neg}(M)$;
- $\langle M, N \rangle$ denota $\text{pair}(M, N)$;
- $\text{p}_1 M$ denota $\text{proj}_1(M)$;

- $\mathrm{p}_2 M$ denota $\mathrm{proj}_2(M)$;
- $\langle M, \delta x.K, \delta y.L\rangle$ denota $\mathrm{case}_{x,y}(M, K, L)$;
- $\mathrm{i}_1 M$ denota $\mathrm{inj}_1(M)$;
- $\mathrm{i}_2 M$ denota $\mathrm{inj}_2(M)$;
- MN denota $\mathrm{app}(M, N)$;
- $\lambda x.N$ denota $\mathrm{abs}_x(M)$.

A intuição por detrás dos novos termo lambda é a seguinte: um termo lambda $\overline{M}$ representa o complementar, ou a negação, do termo M; um termo lambda $\langle M, N\rangle$ representa a função par ordenado cuja primeira coordenada é o termo M e a segunda coordenada é o termo N; um termo lambda $\mathrm{p}_1 M$ representa a função primeira projecção do termo M; analogamente para $\mathrm{p}_2 M$; um termo lambda $\langle M, \delta x.K, \delta y.L\rangle$ representa a função que testa se o termo M é a injecção na primeira coordenada de algum termo N, caso em retorna o termo K com a variável x substituída pelo termo N, ou se o termo M é a injecção na segunda coordenada de algum termo N, caso em retorna o termo L com a variável y substituída pelo termo N; um termo lambda $\mathrm{i}_1 M$ representa a função injecção na primeira coordenada; e analogamente para $\mathrm{i}_2 M$. Compare-se esta intuição com a interpretação BHK das fórmulas proposicionais intuicionistas!

Convém referir que tanto os nomes como a notação destas operações não se encontram fixos na literatura, e as escolhas aqui adoptadas foram baseadas em fontes diferentes. Os nomes tiveram claro em vista a futura correspondência via Curry-Howard.

13.2 Cálculo para λ

Resta redefinir as novas regras de tipificação, que serão as que estamos a espera.

Definição 13.7. A *relação de inferência de tipos* entre contextos e atribuições, que denotaremos por $\vdash_\lambda$, é definida recursivamente pelas seguintes regras:

$$\dfrac{}{\Gamma, x:\sigma \vdash_\lambda x:\sigma}\ \mathbf{Ax}$$

$$\dfrac{\Gamma, M:\sigma \vdash_\lambda N:\tau \qquad \Gamma, M:\sigma \vdash_\lambda L:\neg\tau}{\Gamma \vdash_\lambda \overline{M}:\neg\sigma}\ \mathbf{NegI} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash_\lambda M:\tau \qquad \Gamma \vdash_\lambda N:\neg\tau}{\Gamma \vdash_\lambda L:\sigma}\ \mathbf{NegE}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash_\lambda M:\sigma \qquad \Gamma \vdash_\lambda N:\tau}{\Gamma \vdash_\lambda \langle M, N\rangle:\sigma\wedge\tau}\ \mathbf{Pair} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash_\lambda M:\sigma\wedge\tau}{\Gamma \vdash_\lambda \mathrm{p}_1 M:\sigma}\ \mathbf{Proj1} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash_\lambda M:\sigma\wedge\tau}{\Gamma \vdash_\lambda \mathrm{p}_2 M:\tau}\ \mathbf{Proj2}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash_\lambda M:\sigma\vee\tau \qquad \Gamma, x:\sigma \vdash_\lambda K:\rho \qquad \Gamma, y:\tau \vdash_\lambda L:\rho}{\Gamma \vdash_\lambda \langle M, \delta x.K, \delta y.L\rangle:\rho}\ \mathbf{Case} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash_\lambda M:\sigma}{\Gamma \vdash_\lambda \mathrm{i}_1 M:\sigma\vee\tau}\ \mathbf{Inj1} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash_\lambda M:\tau}{\Gamma \vdash_\lambda \mathrm{i}_2 M:\sigma\vee\tau}\ \mathbf{Inj2}$$

$$\dfrac{\Gamma, x:\sigma \vdash_\lambda M:\tau}{\Gamma \vdash_\lambda \lambda x.M:\sigma\to\tau}\ \mathbf{Abs} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash_\lambda M:\sigma\to\tau \quad \Gamma \vdash_\lambda N:\sigma}{\Gamma \vdash_\lambda MN:\tau}\ \mathbf{App}$$

Mais uma vez, denotamos $\varnothing \vdash_\lambda M:\sigma$ simplesmente por $\vdash_\lambda M:\sigma$.

Finalmente, estendemos as reduções -β e -η em $\mathcal{L}_\lambda$ ao casos que corresponderão à introdução das regras da conjunção e disjunção seguidas da eliminação das respectivas regras de eliminação, e vice-versa, respectivamente.

Definição 13.8. A relação β em $\mathcal{L}_\lambda$ é dada por:

$$\begin{aligned}
\beta &= \{\langle\ (\lambda x.M)N\ ,\ M[N/x]\ \rangle : M, N \in \mathcal{L}_\lambda, x \in \Pi_\lambda\} \\
&\cup \{\langle\ \mathrm{p}_1\langle M, N\rangle\ ,\ M\ \rangle : M, N \in \mathcal{L}_\lambda\} \\
&\cup \{\langle\ \mathrm{p}_2\langle M, N\rangle\ ,\ N\ \rangle : M, N \in \mathcal{L}_\lambda\} \\
&\cup \{\langle\ \langle \mathrm{i}_1 N, \delta x.K, \delta y.L\rangle\ ,\ K[N/x]\ \rangle : K, L, N \in \mathcal{L}_\lambda, x, y \in \Pi_\lambda\} \\
&\cup \{\langle\ \langle \mathrm{i}_2 N, \delta x.K, \delta y.L\rangle\ ,\ L[N/y]\ \rangle : K, L, N \in \mathcal{L}_\lambda, x, y \in \Pi_\lambda\} \in \mathcal{L}_\lambda^2\ .
\end{aligned}$$

Definição 13.9. A relação η em $\mathcal{L}_\lambda$ é dada por:

$$\begin{aligned}
\eta &= \{\langle\ \lambda x.Mx\ ,\ M\ \rangle : M \in \mathcal{L}_\lambda, x \in \Pi_\lambda\} \\
&\cup \{\langle\ \langle \mathrm{p}_1 M, \mathrm{p}_2 M\rangle\ ,\ M\ \rangle : M \in \mathcal{L}_\lambda\} \\
&\cup \{\langle\ \langle M, \delta x.\mathrm{i}_1 x, \delta y.\mathrm{i}_2 y\rangle\ ,\ M\ \rangle : M \in \mathcal{L}_\lambda, x, y \in \Pi_\lambda\} \in \mathcal{L}_\lambda^2\ .
\end{aligned}$$

As relações $\rightarrow_\beta$, $\twoheadrightarrow_\beta$ e $\rightarrow_\eta$, $\twoheadrightarrow_\eta$ definem-se da maneira óbvia.

13.3 $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{LPI}}, \vdash^i_{\mathrm{N}}\rangle = \langle \mathcal{L}_\lambda : \mathcal{L}_{\mathrm{Types}}, \vdash_\lambda\rangle$

Munidos dos novos tipos e das novas regras de tipificação, estamos em condições de demonstrar a extensão do isomorfismo de Curry-Howard para **LPI**. Detalhamos apenas a demonstração para o caso do Cálculo Natural.

É de bom gosto prevenir o leitor que a demonstração do próximo teorema é um mero, mas longo, exercício de paciência, e podia ser omitida uma vez provado o isomorfismo para o fragmento implicacional intuicionista. A sua cobertura exaustiva prende-se simplesmente com o facto do teorema 13.10 representar, enfim, o culminar do presente trabalho, e a sua não inclusão pecaria por incoerência, ainda que certamente desculpada pelo bom-senso.

Teorema 13.10 (Isomorfismo de Curry-Howard para o Cálculo Natural)**.**

(i) Se $\Gamma \vdash_\lambda M : \sigma$*, então* $\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^i_{\mathrm{N}\rightarrow} \sigma$*;*

(ii) Se $\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi$*, então existe* $M \in \mathcal{L}_\lambda$ *tal que* $\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_\lambda M : \varphi$*.*

Demonstração.

(i) Prova por indução no comprimento da tipificação $\Gamma \vdash_\lambda M : \sigma$.

Base:

Igual ao isomorfismo para **LPI** $\rightarrow$.

Passo:

- O último passo da tipificação é dado por:

$$\frac{\Gamma, M : \rho \vdash_\lambda N : \tau \qquad \Gamma, M : \rho \vdash_\lambda L : \neg\tau}{\Gamma \vdash_\lambda \overline{M} : \neg\rho}\ \mathbf{NegI}\ ,$$

com $\sigma \equiv \neg\rho$.

Segue por hipótese de indução que $\mathrm{Im}(\Gamma), \rho \vdash^i_{\mathrm{N}} \tau$ e $\mathrm{Im}(\Gamma), \rho \vdash^i_{\mathrm{N}} \neg\tau$. Logo,

$$\frac{\mathrm{Im}(\Gamma), \rho \vdash^i_{\mathrm{N}} \tau \qquad \mathrm{Im}(\Gamma), \rho \vdash^i_{\mathrm{N}} \neg\tau}{\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^i_{\mathrm{N}} \neg\rho}\ \neg\mathbf{I}\ .$$

- O último passo da tipificação é dado por:

$$\frac{\Gamma \vdash_{\lambda} M : \tau \qquad \Gamma \vdash_{\lambda} N : \neg\tau}{\Gamma \vdash_{\lambda} L : \rho}\,\mathbf{NegE}\ ,$$

com $\sigma \equiv \rho$.

Segue por hipótese de indução que $\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \tau$ e $\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \neg\tau$. Logo,

$$\frac{\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \tau \qquad \mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \neg\tau}{\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \rho}\,\neg\mathbf{E}\ .$$

- O último passo da tipificação é dado por:

$$\frac{\Gamma \vdash_{\lambda} N : \rho \qquad \Gamma \vdash_{\lambda} L : \tau}{\Gamma \vdash_{\lambda} \langle N, L \rangle : \rho \wedge \tau}\,\mathbf{Pair}\ ,$$

com $M \equiv \langle N, L \rangle$ e $\sigma \equiv \rho \wedge \tau$.

Segue por hipótese de indução que $\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \rho$ e $\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \tau$. Logo,

$$\frac{\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash_{\mathrm{N}} \rho \qquad \mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \tau}{\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \rho \wedge \tau}\,\wedge\mathbf{I}\ .$$

- O último passo da tipificação é dado por:

$$\frac{\Gamma \vdash_{\lambda} N : \rho \wedge \tau}{\Gamma \vdash_{\lambda} \mathrm{p}_1 N : \rho}\,\mathbf{Proj1}\ ,$$

com $M \equiv \mathrm{p}_1 N$ e $\sigma \equiv \rho$.

Segue por hipótese de indução que $\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \rho \wedge \tau$. Logo,

$$\frac{\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \rho \wedge \tau}{\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \rho}\,\wedge\mathbf{E}\ .$$

- O último passo da tipificação é dado por:

$$\frac{\Gamma \vdash_{\lambda} N : \rho \wedge \tau}{\Gamma \vdash_{\lambda} \mathrm{p}_2 N : \tau}\,\mathbf{Proj2}\ ,$$

com $M \equiv \mathrm{p}_2 N$ e $\sigma \equiv \tau$.

Segue por hipótese de indução que $\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \rho \wedge \tau$. Logo,

$$\frac{\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \rho \wedge \tau}{\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \tau}\,\wedge\mathbf{E}\ .$$

- O último passo da tipificação é dado por:

$$\frac{\Gamma \vdash_{\lambda} N : \theta \vee \tau \qquad \Gamma, x : \theta \vdash_{\lambda} K : \rho \qquad \Gamma, y : \tau \vdash_{\lambda} L : \rho}{\Gamma \vdash_{\lambda} \langle N, \delta x.K, \delta y.L \rangle : \rho}\,\mathbf{Case}$$

com $M \equiv \langle N, \delta x.K, \delta y.L \rangle$ e $\sigma \equiv \rho$.

Segue por hipótese de indução que $\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \theta \vee \tau$, $\mathrm{Im}(\Gamma), \theta \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \rho$ e $\mathrm{Im}(\Gamma), \tau \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \rho$. Logo,

$$\frac{\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \theta \vee \tau \qquad \mathrm{Im}(\Gamma), \theta \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \rho \qquad \mathrm{Im}(\Gamma), \tau \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \rho}{\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \rho}\,\vee\mathbf{E}\ .$$

- O último passo da tipificação é dado por:

$$\frac{\Gamma \vdash_{\lambda} N : \rho}{\Gamma \vdash_{\lambda} \mathrm{i}_1 N : \rho \vee \tau}\,\mathbf{Inj1}$$

com $M \equiv \mathrm{i}_1 N$ e $\sigma \equiv \rho \vee \tau$.

Segue por hipótese de indução que $\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \rho$. Logo,

$$\dfrac{\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^i_{\mathrm{N}} \rho}{\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^i_{\mathrm{N}} \rho \vee \tau} \vee\mathbf{I}\ .$$

- O último passo da tipificação é dado por:

$$\dfrac{\Gamma \vdash_\lambda N : \tau}{\Gamma \vdash_\lambda \mathrm{i}_2 N : \rho \vee \tau} \mathbf{Inj2}$$

com $M \equiv \mathrm{i}_2 N$ e $\sigma \equiv \rho \vee \tau$.

Segue por hipótese de indução que $\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^i_{\mathrm{N}} \tau$. Logo,

$$\dfrac{\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^i_{\mathrm{N}} \tau}{\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^i_{\mathrm{N}} \rho \vee \tau} \vee\mathbf{I}\ .$$

- Os casos **Abs** e **App** são iguais ao isomorfismo para **LPI** $\to$.

(ii) Prova por indução no comprimento da derivação $\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}\to} \varphi$.

Base:

Igual ao isomorfismo para **LPI** $\to$.

Passo:

- O último passo da derivação é dado por:

$$\dfrac{\Gamma, \rho \vdash^i_{\mathrm{N}} \psi \qquad \Gamma, \rho \vdash^i_{\mathrm{N}} \neg\psi}{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \neg\rho} \neg\mathbf{I}\ ,$$

com $\varphi \equiv \neg\rho$.

Segue por hipótese de indução que existem termos lambda $N, L \in \mathcal{L}_\lambda$ tais que $\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\}, x_\rho : \rho \vdash_\lambda N : \psi$ e $\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\}, x_\rho : \rho \vdash_\lambda L : \neg\psi$. Logo,

$$\dfrac{\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\}, x_\rho : \rho \vdash_\lambda N : \psi \qquad \{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\}, x_\rho : \rho \vdash_\lambda L : \neg\psi}{\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_\lambda \overline{x_\rho} : \neg\rho} \mathbf{NegI}\ .$$

- O último passo da derivação é dado por:

$$\dfrac{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \psi \qquad \Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \neg\psi}{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \rho} \neg\mathbf{E}\ ,$$

com $\varphi \equiv \rho$.

Segue por hipótese de indução que existem termos lambda $N, L \in \mathcal{L}_\lambda$ tais que $\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_\lambda N : \psi$ e $\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_\lambda L : \neg\psi$. Logo,

$$\dfrac{\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_\lambda N : \psi \qquad \{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_\lambda L : \neg\psi}{\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_\lambda K : \rho} \mathbf{NegE}\ .$$

- O último passo da derivação é dado por:

$$\dfrac{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \rho \qquad \Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \psi}{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \rho \wedge \psi} \wedge\mathbf{I}\ ,$$

com $\varphi \equiv \rho \wedge \psi$.

Segue por hipótese de indução que existem termos lambda $N, L \in \mathcal{L}_\lambda$ tais que $\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_\lambda N : \rho$ e $\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_\lambda L : \psi$. Logo,

$$\dfrac{\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_\lambda N : \rho \qquad \{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_\lambda L : \psi}{\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_\lambda \langle N, L\rangle : \rho \wedge \psi} \mathbf{Pair}\ .$$

- O último passo da derivação é dado por:

$$\frac{\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \rho \wedge \psi}{\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \rho} \wedge\mathbf{E}\ ,$$

com $\varphi \equiv \rho$.

Segue por hipótese de indução que existe um termo lambda $N \in \mathcal{L}_\lambda$ tal que $\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_\lambda N : \rho \wedge \psi$. Logo,

$$\frac{\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_\lambda N : \rho \wedge \psi}{\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_\lambda \mathrm{p}_1 N : \rho} \ \mathbf{Proj1}\ .$$

- O último passo da derivação é dado por:

$$\frac{\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \rho \wedge \psi}{\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \psi} \wedge\mathbf{E}\ ,$$

com $\varphi \equiv \psi$.

Segue por hipótese de indução que existe um termo lambda $N \in \mathcal{L}_\lambda$ tal que $\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_\lambda N : \rho \wedge \psi$. Logo,

$$\frac{\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_\lambda N : \rho \wedge \psi}{\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_\lambda \mathrm{p}_2 N : \psi} \ \mathbf{Proj2}\ .$$

- O último passo da derivação é dado por:

$$\frac{\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \rho}{\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \rho \vee \psi} \vee\mathbf{I}\ ,$$

com $\varphi \equiv \rho \vee \psi$.

Segue por hipótese de indução que existe um termo lambda $N \in \mathcal{L}_\lambda$ tal que $\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_\lambda N : \rho$. Logo,

$$\frac{\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_\lambda N : \rho}{\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_\lambda \mathrm{i}_1 N : \rho \vee \psi} \ \mathbf{Inj1}\ .$$

- O último passo da derivação é dado por:

$$\frac{\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \psi}{\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \rho \vee \psi} \vee\mathbf{I}\ ,$$

com $\varphi \equiv \rho \vee \psi$.

Segue por hipótese de indução que existe um termo lambda $N \in \mathcal{L}_\lambda$ tal que $\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_\lambda N : \psi$. Logo,

$$\frac{\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_\lambda N : \psi}{\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_\lambda \mathrm{i}_2 N : \rho \vee \psi} \ \mathbf{Inj2}\ .$$

- O último passo da derivação é dado por:

$$\frac{\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \theta \vee \psi \qquad \Gamma, \theta \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \rho \qquad \Gamma, \psi \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \rho}{\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}} \rho} \vee\mathbf{E}$$

com $\varphi \equiv \rho$.

Segue por hipótese de indução que existem termos lambda $N, K, L \in \mathcal{L}_\lambda$ tais que $\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_\lambda N : \theta \vee \psi$, $\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\}, x_\theta : \theta \vdash_\lambda K : \rho$ e $\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\}, x_\psi : \psi \vdash_\lambda L : \rho$. Logo,

$$\dfrac{\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_\lambda N : \theta \vee \psi \qquad \{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\}, x_\theta : \theta \vdash_\lambda K : \rho \qquad \{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\}, x_\psi : \psi \vdash_\lambda L : \rho}{\{(x_\gamma : \gamma) : \gamma \in \Gamma\} \vdash_\lambda \langle N, \delta x_\theta.K, \delta x_\psi.L\rangle : \rho}\ \mathbf{Case}\ .$$

- Os casos $\rightarrow$ **I** e $\rightarrow$ **E** são iguais ao isomorfismo para **LPI** $\rightarrow$.

$\square$

Referências

[Girard et al., 1989]
[Sørensen and Urzyczyn, 1998]
[Selinger, 2007]

14 Uma consequência para LPI e LPC

À semelhança da primeira parte do nosso estudo, também a segunda parte termina com uma consequência para **LPI** e **LPC**. Neste caso, a *consistência* de ambas as Lógicas. Mais uma vez, o objectivo passa por concluir este facto via a contra-parte da correspondência estabelecida, ou seja, via Curry-Howard.

Começamos por introduzir a noção de *consistência* de uma lógica. Uma lógica diz-se *consistente*, se existe uma fórmula (na assinatura da lógica) que não é teorema da lógica. Ou seja, dada uma relação de consequência $\vdash$ para uma lógica, ter-se-á $\nvdash \varphi$, para algum φ. Numa lógica *inconsistente* conseguimos portanto derivar qualquer fórmula. A consistência também pode ser enunciada na forma $\nvdash \perp$, onde $\perp$ é um elemento que corresponde a *absurdo*, ou *contradição*.

Assim, vamos trabalhar num fragmento intuicionista que estende o fragmento implicacional, utilizando um conectivo 0-ário $\perp$. Ou seja, consideramos a assinatura

$$\Sigma_{\mathbf{LPI}(\perp,\to)} = \langle \perp, \to \rangle \ ,$$

e a linguagem

$$\mathcal{L}_{\mathbf{LPI}(\perp,\to)} = \langle \Pi_{\mathbf{LPI}}, \perp^{\mathcal{L}_{\mathbf{LPI}(\perp,\to)}} \to^{\mathcal{L}_{\mathbf{LPI}(\perp,\to)}} \rangle \ .$$

As regras do nosso cálculo serão as vistas para o conectivo implicação acrescidas de uma regra para $\perp$:

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathrm{N}} \perp}{\Gamma \vdash_{\mathrm{N}} \varphi}\perp\mathbf{E}$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash^i_{\mathrm{N}} \psi}{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi \to \psi} \to \mathbf{I} \qquad \frac{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi}{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \psi} \to \mathbf{E}$$

É fácil verificar que a regra $\perp\mathbf{E}$ equivale (i.e., deriva e é derivável) à regra da negação $\neg\mathbf{E}$, se consideramos $\neg\varphi \equiv \varphi \to \perp$.

$$\perp\mathbf{E} \Rightarrow \neg\mathbf{E} : \qquad \cfrac{\cfrac{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi \qquad \Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \varphi \to \perp}{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \perp} \to \mathbf{E}}{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \psi} \perp\mathbf{E}$$

$$\neg\mathbf{E} \Rightarrow \bot\mathbf{E}: \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\Gamma, \bot \vdash^i_{\mathrm{N}} \bot}\,\mathbf{Ax}}{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \bot \to \bot}\to\mathbf{I} \qquad \Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \bot}{\Gamma \vdash^i_{\mathrm{N}} \psi}\,\neg\mathbf{E}$$

A título de completude, exibimos também a regra para $\bot$ nos cálculos de Hilbert e de Gentzen:

$$\cfrac{}{\vdash^i_{\mathrm{H}} \bot \to \varphi}\,\mathbf{Ax11}$$

$$\cfrac{}{\Delta, \bot \vdash^i_{\mathrm{G}} \varphi}\,\bot\mathbf{L}$$

Já na parte lambda, precisamos de definir um novo tipo $\bot$, e uma nova regra de tipificação. É o que passamos a fazer. Consideramos as assinaturas

$$\Sigma_{\mathrm{Types}} = \langle \bot, \to \rangle \ ,$$

$$\Sigma_\lambda = \langle \epsilon, \mathrm{app}, \langle \mathrm{abs}_x \rangle_{x \in \Pi_\lambda} \rangle \ ,$$

as linguagens

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Types}} = \langle \Pi_{\mathrm{Types}}, \bot^{\mathcal{L}_{\mathrm{Types}}}, \to^{\mathcal{L}_{\mathrm{Types}}} \rangle \ ,$$

$$\mathcal{L}_\lambda = \langle \Pi_\lambda, \epsilon^{\mathcal{L}_\lambda}, \mathrm{app}^{\mathcal{L}_\lambda}, \langle \mathrm{abs}_x^{\mathcal{L}_\lambda} \rangle_{x \in \Pi_\lambda} \rangle \ ,$$

e as regras de tipificação:

$$\cfrac{\Gamma \vdash_\lambda M : \bot}{\Gamma \vdash_\lambda \epsilon M : \sigma}\,\mathbf{Empty} \qquad \cfrac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash_\lambda x : \sigma}\,\mathbf{Ax}$$

$$\cfrac{\Gamma, x : \sigma \vdash_\lambda M : \tau}{\Gamma \vdash_\lambda \lambda x.M : \sigma \to \tau}\,\mathbf{Abs} \qquad \cfrac{\Gamma \vdash_\lambda M : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash_\lambda N : \sigma}{\Gamma \vdash_\lambda MN : \tau}\,\mathbf{App}$$

onde

- ϵM denota $\epsilon(M)$;
- MN denota $\mathrm{app}(M, N)$;
- $\lambda x.N$ denota $\mathrm{abs}_x(M)$;

Após a fatigante demonstração do teorema 13.10, o leitor acreditará de bom grado que o isomorfismo de Curry-Howard permanece válido para este fragmento de **LPI**.

É ainda importante ressalvar que a igualdade entre tipos, embora nunca definida, é a igualdade lexicográfica. Em particular, $\bot \neq \sigma$ para qualquer tipo σ que não o absurdo. Posto isto, enunciamos de seguida a consistência deste fragmento intuicionista. A demonstração segue [Sørensen and Urzyczyn, 1998, Proposition 4.3.1], ainda que nesta fonte o fragmento puramente implicacional seja inadvertidamente usado.

Teorema 14.1. **LPI**$(\bot, \to)$ *é consistente.*

Demonstração.

Suponhamos, por absurdo, que $\vdash_{\mathrm{N}} \perp$. Segue do isomorfismo de Curry-Howard que existe um termo lambda $M \in \mathcal{L}_\lambda$ tal que $\vdash_\lambda M : \perp$. Segue ainda do teorema da normalização 10.18 (basta a versão fraca deste teorema) e do teorema da redução do sujeito 10.9 que existe um termo $N \in \mathrm{SN}_\beta$ tal que $\vdash_\lambda N : \perp$.

Prova-se por indução na estrutura de um termo lambda que qualquer forma normal assume uma das duas formas seguintes (no fragmento onde nos encontramos, claro está):

- $xN_1 \ldots N_m$, com $N_1 \ldots N_m \in \mathrm{SN}_\beta$;
- $\lambda x.N'$, com $N' \in \mathrm{SN}_\beta$.

Ora, se $N \equiv xN_1 \ldots N_m$, então $x \in \mathrm{FV}(N)$; chegamos a um absurdo, pois por hipótese $\vdash_\lambda N : \perp$, donde pelo lema das variáveis livres (lema 10.6 (i)) temos que $\mathrm{FV}(N) = \varnothing$. Já se $N \equiv \lambda x.N'$, segue do lema da geração de tipos (lema 10.7 (iii)) que $\perp \equiv \sigma \to \tau$, onde $x : \sigma$; chegamos novamente a um absurdo.

$\square$

Mas vimos no teorema 8.5 que o Cálculo Natural Intuicionista é conservativo para o seu fragmento implicacional (o fragmento onde nos encontramos não acrescenta complexidade às demonstrações em causa, já que $\perp$ pertence ao caso base do princípio de indução sobre a estrutura das fórmulas). Chegamos então à generalização desejada.

Teorema 14.2. **LPI** *é consistente.*

Demonstração.

Suponhamos, por absurdo, que $\vdash_{\mathbf{LPI}} \perp$. Segue do teorema 8.5 (tendo em conta as observações que precedem o enunciado deste teorema) que $\vdash_{\mathbf{LPI}(\perp,\to)} \perp$. Chegamos a um absurdo, pelo teorema 14.1. Concluímos que **LPI** é consistente.

$\square$

Finalmente, o teorema de Glivenko oferece-nos o caso clássico.

Teorema 14.3. **LPC** *é consistente.*

Demonstração.

Suponhamos, por absurdo, que $\vdash_{\mathbf{LPC}} \perp$. Segue do teorema 7.2 que $\vdash_{\mathbf{LPI}} \neg\neg\perp$. Mas $\vdash_{\mathbf{LPI}} \neg\neg\perp \leftrightarrow \perp$ (veja-se, por exemplo, o lema 4.3 (i)). Logo, $\vdash_{\mathbf{LPI}} \perp$. Chegamos a um absurdo, pelo teorema 14.2. Concluímos que **LPC** é consistente.

$\square$

Referências

[Sørensen and Urzyczyn, 1998]

Conclusões

Propusemo-nos no presente trabalho a estudar a Lógica Proposicional via álgebra de Lindenbaum-Tarski e isomorfismo de Curry-Howard. Procurámos fazê-lo segundo um objectivo secundário, e transversal a todo este processo lógico-algébrico-operacional: uniformizar o tratamento dado às definições centrais de cada teoria estudada – *lógica*, *álgebra* e *cálculo lambda*.

Na primeira parte do nosso estudo debruçá-mo-nos sobre a correspondência lógico-algébrica da Lógica Proposicional Clássica e Intuicionista. Apontamos aqui dois aspectos que procurámos seguir: definir separadamente as noções de *regras*, *prova*, e *fecho sintáctico* em cada cálculo lógico, para depois unificá-las segundo a notação $\Gamma \vdash \varphi$; e definir as linguagens lógicas e algébricas recorrendo à noção de *assinatura* (homogénea) de Álgebra Universal. Ambos os aspectos visaram a uniformização do tratamento, o primeiro entre os vários cálculos, e o segundo entre a sintaxe e a semântica. Esperamos assim acentuar as semelhanças entre todas estas entidades, mas ao mesmo tempo enfatizar as diferenças onde elas realmente se distinguem.

As conclusões resultantes da construção da álgebra de Lindenbaum-Tarski foram descritas nas secções 5.4 e 6.4. Em resumo, observámos que as regras da negação (as mesmas que ditam a mudança de paradigma lógico) apenas são utilizadas nos certificados que dizem respeito à existência de elementos topo e base da álgebra de Lindenbaum; e que, portanto, estes certificados são os únicos que diferem na construção das álgebras de Lindenbaum clássica e intuicionista, segundo qualquer um dos cálculos considerados. Estes factos concordam com a teoria algébrica das álgebras booleanas e pseudo-booleanas, onde as diferenças surgem precisamente na complementação de elementos, e das quais resulta a despromoção de $\varphi \vee \neg\varphi$ de elemento topo, enquanto representante da respectiva classe de equivalência na álgebra de Lindenbaum. Este elemento, enquanto proposição, representa o famoso *Princípio do Terceiro Excluído.*

Importa por fim referir a consequência alcançada via Lindenbaum-Tarski – o teorema de Glivenko. Parece-nos que a demonstração semântica deste resultado (inspirada por [Block and Rebagliato, 2003, Lemma 2.5, p. 162]) é por demais simples e elegante do que a tradução negativa sintáctica de Gödel. Claro está, no entanto, que dela só resulta o teorema de Glivenko na presença de ambas as completudes das Lógicas Proposicionais Clássica e Intuicionista.

Dedicámos a segunda parte do nosso estudo à correspondência lógico-operacional de Curry-Howard. Mais uma vez, definimos a linguagem lambda recorrendo à noção de *assinatura* de Álgebra Universal. Este ponto justifica alongar-nos na sua escolha. De facto, embora a abstracção lambda não seja uma operação binária (já que não recebe dois termos lambda como argumentos), também não é uma simples operação unária. Isto porque, na verdade, a abstracção lambda recebe dois argumentos, uma variável lambda e um termo lambda.

Depará-mo-nos com duas escolhas para contornar esta problemática.

A primeira passava por recorrer à noção de *assinatura heterogénea* de Álgebra Universal (veja-se, por exemplo, [Martins, 2009]). Consideraríamos então dois géneros, digamos Var_λ e Form_λ, e definiríamos a assinatura lambda por

$$\Sigma_\lambda = \langle \{\mathrm{Var}_\lambda, \mathrm{Form}_\lambda\}, \mathrm{app}, \mathrm{abs}\rangle \ ,$$

onde $\mathrm{app} \in \Omega_{\mathrm{Form}_\lambda;\mathrm{Form}_\lambda}$ e $\mathrm{abs} \in \Omega_{\mathrm{Var}_\lambda,\mathrm{Form}_\lambda;\mathrm{Form}_\lambda}$. O problema aqui surge na definição da linguagem lambda enquanto álgebra dos termos, uma vez que a linguagem que pretendemos definir coincidiria com o universo do género Form_λ.

A segunda abordagem, pela qual enveredámos, atribui uma abstracção lambda a cada variável lambda (ideia inspirada na algebrização da Lógica Clássica de 1ª ordem em [Caleiro and Gonçalves, 2007], nomeadamente do quantificador universal). Isto obriga claro a que a nossa assinatura lambda tenha infinitas operações, em vez de duas apenas! Este é o preço a pagar pela uniformidade do tratamento que estipulámos como objectivo.

Passamos agora às conclusões referentes ao isomorfismo de Curry-Howard, descritas nas secções 11.1 e 12.3. Em resumo, do lado esquerdo de uma tipificação temos a correspondência *types-as-formulas*: variáveis de tipo correspondem a variáveis proposicionais, tipos "compostos" a fórmulas com conectivos, e o operador funcional de tipos ao conectivo implicação; e do lado direito de uma tipificação temos a correspondência *terms-as-proofs*: variáveis lambda correspondem a hipóteses, termos lambda "compostos" a provas, regras de tipificação a regras de conectivos lógicos (em particular, a abstracção lambda corresponde à regra da introdução da implicação, e a aplicação lambda à regra da eliminação da implicação), e a habitação de tipos à provabilidade de fórmulas.

Como referimos no capítulo 11, optámos por manter fixa a tipificação dos termos lambda segundo os três cálculos estudados. Este facto possibilitou-nos uma melhor comparação entre as várias demonstrações do isomorfismo de Curry-Howard para os diferentes cálculos lógicos. Deste modo, no capítulo 12, propusemos uma explicação geral, e independente do cálculo em causa, para a "tradução" lógica das reduções -β e -η. Esta tradução, como se sabe, corresponde à normalização de provas onde ocorram introduções de regras imediatamente seguidas das respectivas eliminações para o Cálculo Natural, e ao famoso *Hauptsatz* para o Cálculo de Gentzen. Segundo a explicação proposta, estes resultados não são mais do que casos particulares da normalização de provas onde ocorram o *Metateorema da Dedução imediatamente seguido do Metateorema do Modeus Ponens* para a redução -β, e vice-versa para a redução -η. Uma prova normal (segundo qualquer cálculo), será então dada por um termo lambda $\beta\eta$-normal.

Finalmente, concluímos a segunda parte do presente trabalho com mais uma consequência lógica, agora proveniente via Curry-Howard. Deduzimos assim a consistência da fragmento $(\bot, \to)$ intuicionista, como consequência da normalização dos termos lambda com tipos estabelecida previamente. Esta prova foi retirada de [Sørensen and Urzyczyn, 1998]. As generalizações seguintes como que se sugeriram a si próprias, face aos resultados que foram sendo estabelecidos ao longo deste estudo. Assim, apelando à conservatividade da Lógica Proposicional Intuicionista para o fragmento em causa, concluímos a consistência de **LPI**. Apelando por fim ao teorema de Glivenko, concluímos a consistência de **LPC**. Tal como na primeira parte, também aqui deduzimos um resultado cuja prova sintáctica é bastante pesada, de um modo simples e elegante.

Desenvolvimentos Futuros

Enquanto estudo da Lógica Proposicional via álgebra de Lindenbaum-Tarski e isomorfismo de Curry-Howard, i.e., enquanto estudo de assuntos relativamente acessíveis e bem estabelecidos, este trabalho nunca almejou desenvolver nenhum tópico original, senão, quanto muito, uniformizar o tratamento destes tópicos clássicos. Não se desenvolveu portanto com vista a desenvolvimentos futuros, mas antes como um estudo auto-contido, conclusão de um breve percurso de 5 anos em Matemática.

O desenvolvimento futuro óbvio, seguindo o caminho traçado por este estudo, seria generalizar este tratamento à primeira ordem, e, quiçá, encontrar novamente algumas consequências lógicas que advenham facilmente das suas contra-partes algébricas ou operacionais. Nada disto, porém, almejaria mais uma vez o original.

Surgiu no entanto, no decorrer deste estudo, uma linha de trabalho que poderá dar azo a desenvolvimentos futuros. O objectivo é generalizar o Cálculo Lambda com tipos à 1ª ordem de uma forma muito próxima do Cálculo Lambda tradicional. A ideia consiste em acrescentar um novo tipo base, que corresponderá ao tipo das variáveis em 1ª ordem, e generalizar as operações lambda com algumas restrições. Note-se que agora distinguimos as designações de *átomos* e *variáveis*, já que correspondem a dois casos base distintos.

Começamos por exibir, muito sucintamente, as gramáticas em causa:

$$\sigma := a \mid \alpha \mid a \to \sigma \mid \alpha \to \sigma \ ,$$

onde $a \in \mathrm{Atom}_{\mathrm{Types}}$, $\alpha \in \mathrm{Var}_{\mathrm{Types}}$ e $\sigma \in \mathrm{Form}_{\mathrm{Types}}$.

$$\varphi := \pi \mid x \mid \pi \to \varphi \mid x \to \varphi \ ,$$

onde $\pi \in \mathrm{Atom}_{\mathbf{LPrI}}$, $x \in \mathrm{Var}_{\mathbf{LPrI}}$ e $\varphi \in \mathrm{Form}_{\mathbf{LPrI}}$.

$$M := x \mid Mx \mid \lambda x.M \ ,$$

onde $x \in \mathrm{Var}_\lambda$ e $M \in \mathrm{Form}_\lambda$.

As notações utilizadas são as esperadas em Lógica. Denotaremos ainda por $\mathrm{Prop}_{\mathbf{LPrI}} \subseteq \mathrm{Form}_{\mathbf{LPrI}}$ o subconjunto das fórmulas que não contêm variáveis, i.e., as *proposições*; e por $\mathrm{Pred}_{\mathbf{LPrI}} \subseteq \mathrm{Form}_{\mathbf{LPrI}}$ o subconjunto das fórmulas que contêm variáveis, i.e., os *predicados*. Denotaremos uma proposição por φ e um predicado na variável y por $\varphi(y)$.

A primeira diferença que salta à vista é a restrição do lado esquerdo do operador funcional de tipos, ou da implicação de fórmulas. Exigimos que o seu antecedente seja dado por um átomo, ou por uma variável. Outra diferença é a aplicação de termos lambda, que só é permitida entre termos lambda e átomos ou variáveis lambda. A intuição das fórmulas proposicionais, que passamos a descrever, ajudará a explicar o porquê desta restrição.

$\pi \to \varphi$	, deve entender-se como *Implicação*
$\pi \to \varphi(y)$	, deve entender-se como *Instanciação*
$x \to \varphi$ e $x \to \varphi(y)$	, devem entender-se como *Generalização*

As regras de tipificação dos termos lambda são as seguintes:

$$\frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash_{\lambda\to} x : \sigma}\ \mathbf{Ax},\ \text{para } \sigma \in \mathrm{Atom}_{\mathrm{Types}} \cup \mathrm{Var}_{\mathrm{Types}}$$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash_{\lambda\to} M : \tau}{\Gamma \vdash_{\lambda\to} \lambda x.M : \sigma \to \tau}\ \mathbf{Abs},\ \text{para } \sigma \in \mathrm{Atom}_{\mathrm{Types}} \cup \mathrm{Var}_{\mathrm{Types}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\lambda\to} M : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash_{\lambda\to} x : \sigma}{\Gamma \vdash_{\lambda\to} Mx : \tau}\ \mathbf{App},\ \text{para } \sigma \in \mathrm{Atom}_{\mathrm{Types}} \cup \mathrm{Var}_{\mathrm{Types}}$$

Atente-se na regra da aplicação, que concorda com a gramática dos termos lambda. A restrição sobre a aplicação de termos lambda deve-se ao facto de, quando trabalhamos apenas com proposições, podermos aplicar sucessivamente átomos sobre uma fórmula, e, por indução, chegarmos à regra *Modus Ponens*. Quando trabalhamos com variáveis, porém, não podemos aplicar o mesmo argumento por indução. Apenas nos é permitido generalizar uma variável, ou instanciar um átomo, de cada vez! Percebemos assim de que modo o Cálculo Lambda tradicional é um caso particular deste novo Cálculo.

Vamos agora traduzir estas regras para o Cálculo Natural via Curry-Howard.

$$\frac{}{\mathrm{Im}(\Gamma), \sigma \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \sigma}\ \mathbf{Ax},\ \text{para } \sigma \in \mathrm{Atom}_{\mathbf{LPrI}} \cup \mathrm{Var}_{\mathbf{LPrI}}$$

$$\frac{\mathrm{Im}(\Gamma), \sigma \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \tau}{\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \sigma \to \tau}\ \to\mathbf{I},\ \text{para } \sigma \in \mathrm{Atom}_{\mathbf{LPrI}} \cup \mathrm{Var}_{\mathbf{LPrI}}$$

$$\frac{\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \sigma \to \tau \quad \mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \sigma}{\mathrm{Im}(\Gamma) \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \tau}\ \to\mathbf{E},\ \text{para } \sigma \in \mathrm{Atom}_{\mathbf{LPrI}} \cup \mathrm{Var}_{\mathbf{LPrI}}$$

Note-se que as hipóteses estão restringidas a átomos e variáveis! Ou seja,

$$\vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \subseteq \mathscr{P}(\mathrm{Atom}_{\mathbf{LPrI}} \cup \mathrm{Var}_{\mathbf{LPrI}}) \times \mathrm{Form}_{\mathbf{LPrI}}\ .$$

A demonstração do isomorfismo de Curry-Howard para este novo Cálculo é feita exactamente como no cálculo tradicional.

Uma última observação no que respeita à parte lógica do isomorfismo. Note-se que estas regras escondem na verdade 2 esquemas de axiomas e 8 regras de inferência. Isto porque a interpretação destas regras varia consoante estamos na presença de átomos ou de variáveis, por um lado, e na presença de proposições ou predicados, por outro. Assim, explicitamos de seguida as combinações relevantes, com notações mais próximas da Lógica de 1ª ordem.

$$\frac{}{\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \pi}\ \mathbf{Ax},\ \text{para } \pi \in \mathrm{Atom}_{\mathbf{LPrI}}(\Gamma) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} x}\ \mathbf{Ax},\ \text{para } x \in \mathrm{Var}_{\mathbf{LPrI}}(\Gamma)$$

$$\frac{\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \varphi}{\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \pi \to \varphi}\ \to\mathbf{I},\ \text{para } \pi \notin \mathrm{Atom}_{\mathbf{LPrI}}(\Gamma) \qquad \frac{\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \pi \to \varphi}{\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \varphi}\ \to\mathbf{E},\ \text{para } \pi \in \mathrm{Atom}_{\mathbf{LPrI}}(\Gamma)$$

$$\frac{\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \varphi(x)}{\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \varphi[\pi/x]}\ \exists\mathbf{I},\ \text{para } \pi \notin \mathrm{Atom}_{\mathbf{LPrI}}(\Gamma) \qquad \frac{\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \varphi[\pi/x]}{\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \varphi(x)}\ \exists\mathbf{E},\ \text{para } \pi \in \mathrm{Atom}_{\mathbf{LPrI}}(\Gamma)$$

$$\frac{\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \varphi(y)}{\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \forall x\ \varphi(y)}\ \forall\mathbf{I},\ \text{para } x \notin \mathrm{Var}_{\mathbf{LPrI}}(\Gamma) \qquad \frac{\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \forall x\ \varphi(y)}{\Gamma \vdash^{i}_{\mathrm{N}\to} \varphi(y)}\ \forall\mathbf{E},\ \text{para } x \in \mathrm{Var}_{\mathbf{LPrI}}(\Gamma)$$

onde $\varphi[{}^{\pi}/_{x}] \equiv \pi \rightarrow \varphi(x)$ e $\forall x\ \varphi(y) \equiv x \rightarrow \varphi(y)$.

Este "Cálculo Natural de 1ª ordem" não corresponde, obviamente, à 1ª ordem intuicionista usual. Nem sequer corresponde à 1ª ordem intuicionista sem igualdade. Estas novas regras governam a quantificação de proposições (ordem 0) no sentido mais lato possível, i.e., um predicado não é mais do que uma proposição quantificada. Um predicado quantificado será um predicado de 2ª ordem, e assim sucessivamente. Aliás, refira-se que a "ordem n" advém da "ordem $n-1$" simplesmente acrescentando um novo tipo para as variáveis de ordem n.

Por outro lado, podemos dizer que este cálculo é mais-que-intuicionista, na medida em que leva a interpretação BHK ao extremo, apenas permitindo a construção de provas, literalmente, passo a passo. É, claramente, um Cálculo Natural mais operacional, i.e., exibe características muito próprias de um programa. Não surpreende, claro, na medida em que aqui chegámos via Curry-Howard.

Note-se ainda que se quisermos exibir uma assinatura para esta Lógica, agora sim, precisamos de recorrer a uma assinatura heterogénea (1ª ordem, dois géneros; 2ª ordem, três géneros; *etc.*), dada por:

$$\Sigma_{\mathbf{LPrI}} = \langle \{\mathrm{Atom}_{\mathbf{LPrI}}, \mathrm{Var}_{\mathbf{LPrI}}\}, \rightarrow \rangle \ ,$$

onde $\rightarrow$ é uma operação binária. Note-se que não especificamos os géneros de partida e de chegada de $\rightarrow$, pois esta assinatura heterogénea já permite que definamos a linguagem

$$\mathcal{L}_{\mathbf{LPrI}} = \langle \{\mathrm{Atom}_{\mathbf{LPrI}}, \mathrm{Var}_{\mathbf{LPrI}}\}, \rightarrow^{\mathcal{L}_{\mathbf{LPrI}}} \rangle \ ,$$

enquanto álgebra dos termos.

Vista a correspondência lógico-operacional, resta perguntar: *a que classe de Álgebras corresponde esta lógica via Lindenbaum-Tarski?* Este ponto não foi devidamente investigado.

É de esperar que a estrutura algébrica em causa possua uma operação correspondente a $\rightarrow$ e a $\forall$ (bem entendido, correspondente a $\rightarrow$ precedido de um átomo ou precedido de uma variável, respectivamente). Generalizando as álgebras de Heyting, e dado que podemos sempre aplicar a operação $\rightarrow$ ao mesmo elemento, é também de esperar que a estrutura algébrica possua igualmente um elemento topo. Digamos, $\mathcal{A} = \langle A, \top, \rightarrow \rangle$. Um estudo destas estruturas deverá andar perto de [Rasiowa, 1974], que trata as chamadas *álgebras implicativas*.

Uma semântica que nos pareceu plausível para esta lógica, surge considerando $\mathcal{A}$ com um universo dado por 2^A em vez de simplesmente um conjunto numerável A. Interpretamos assim A como os valores possíveis que um átomo pode assumir e uma variável como uma função de A para $\{0,1\}$, i.e., $[\![\pi]\!] \in A \cong 2^a$ e $[\![x]\!] \in 2^A$. Denotando por $+$ a "adição" de funções (dá valor 1 sse uma das parcelas dá valor 1), por $\times$ a "multiplicação" de funções (dá valor 1 sse ambas as parcelas dão valor 1), e por $^{-1}$ a função complementar (dá valor 1 sse a função original dá valor 0), podemos interpretar as fórmulas em 2^A do seguinte modo:

$$[\![\pi \rightarrow \varphi]\!] \ = \ [\![\varphi]\!] + [\![\pi]\!]^{-1} \ ,$$

$$[\![x \rightarrow \varphi]\!] \ = \ [\![\varphi]\!] \times [\![x]\!] + [\![x]\!]^{-1} \ .$$

Esta interpretação origina uma semântica correcta. Resta investigar que classe de álgebras possui uma operação algébrica $\rightarrow^{\mathcal{A}}$ sensível ao antecedente, ou duas operações algébricas distintas, capazes de generalizar esta semântica encontrada.

Uma caracterização da interpretação da "implicação" (à falta de melhor nome) na álgebra de Lindenbaum-Tarski, análoga à caracterização (1), talvez seja:

$$\top^{\mathcal{L}_\Gamma} \leq_\Gamma [\pi \to \varphi]_{\equiv_\Gamma} \quad = \quad [\pi]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\varphi]_{\equiv_\Gamma} \ ,$$

$$\top^{\mathcal{L}_\Gamma} \leq_\Gamma [x \to \varphi]_{\equiv_\Gamma} \quad = \quad \forall\pi \in \mathrm{Atom}_{\mathbf{LPrI}} \quad [\pi]_{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma [\varphi]_{\equiv_\Gamma} \ .$$

A relação de ordem parcial na álgebra das fórmulas, por sua vez, talvez seja dada por:

$$\varphi \leq_\Gamma \psi \text{ sse } \forall\pi \in \mathrm{Atom}_{\mathbf{LPrI}}(\varphi) \quad \Gamma \vdash_{\mathrm{N}} \pi \to \psi \ .$$

Intuitivamente, diríamos que φ é menor ψ quando todos os átomos que ocorrem em φ instanciam ψ. Esta relação facilmente se prova ser de ordem parcial. Se acrescentássemos também a condição de todos as variáveis que ocorrem em φ generalizarem ψ, estaríamos a identificar, em particular, todas as variáveis, o que não parece desejável.

Anexo

A | Definição de lógica

A.1 Lógica segundo uma relação de consequência

A.1.1 Relação de consequência

Definição A.1. Seja A um conjunto não vazio. Uma relação $\vdash \subseteq \mathscr{P}(A) \times A$ diz-se uma *relação de consequência* em A, se satisfaz, para todo $X, Y \cup \{x, y\} \subseteq A$, as seguintes condições:

Reflexividade: se $x \in X$, então $X \vdash x$;

Corte: se $Y \vdash x$ para todo $x \in X$ e $X \vdash y$, então $Y \vdash y$;

Enfraquecimento: se $X \vdash x$ e $X \subseteq Y$, então $Y \vdash x$.

Uma relação de consequência diz-se *finitária* se, para todo $X \subseteq A$ e $x \in A$, satisfaz adicionalmente a condição:

Finitário: se $X \vdash x$, então $X' \vdash x$ para algum $X' \subseteq_f X$ finito.

Note-se que o enfraquecimento segue da reflexividade e do corte.

Lema A.2. *As condições da reflexividade e do corte implicam a condição do enfraquecimento.*

Demonstração.
Seja $X \subseteq Y \subseteq A$, e $y \in A$. Suponhamos que $X \vdash y$. Como $X \subseteq Y$, temos $x \in Y$, para todo $x \in X$. Segue por reflexividade que $Y \vdash x$, para todo $x \in X$. Segue por corte sobre a hipótese que $Y \vdash y$.

□

A.1.2 Definição de Lógica

Definição A.3. Uma *lógica* sobre uma linguagem $\mathcal{L}$ é um par $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$, onde $\vdash_{\mathcal{S}} \subseteq \mathscr{P}(\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}) \times \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$ é uma relação de consequência.

Explicitamente, para todo $\Gamma, \Delta \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$, a relação de consequência $\vdash_{\mathcal{S}}$ satisfaz as seguintes condições:

Reflexividade: se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$;

Corte: se $\Delta \vdash_{\mathcal{S}} \gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$ e $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, então $\Delta \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$;

Enfraquecimento: se $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$.

Uma lógica $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ diz-se *estrutural*, se satisfaz adicionalmente a condição:

Estruturalidade: se $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, então $s(\Gamma) \vdash_{\mathcal{S}} s(\varphi)$ para toda a substituição $s : \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}} \to \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$.

Uma lógica $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ diz-se *finitária*, se a relação de consequência $\vdash_{\mathcal{S}}$ é finitária, i.e., se satisfaz adicionalmente a condição:

Finitário: se $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, então $\Gamma' \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ para algum $\Gamma' \subseteq_f \Gamma$ finito.

Uma fórmula $\varphi \in \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$ diz-se um *$\mathcal{S}$-teorema*, ou um *teorema de $\mathcal{S}$*, se $\varnothing \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, ou simplesmente $\vdash_{\mathcal{S}} \varphi$. Denotamos o conjunto de todos os $\mathcal{S}$-teoremas por $\mathrm{Thm}_{\mathcal{S}}$. Um conjunto de fórmulas $T \subseteq \mathscr{P}(\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}})$ diz-se uma *teoria de $\mathcal{S}$*, ou uma *$\mathcal{S}$-teoria*, se para todo $\varphi \in \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$ se tem $T \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \Rightarrow \varphi \in T$. Segue por reflexividade de $\vdash_{\mathcal{S}}$ que T é uma $\mathcal{S}$-teoria sse $T \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \Leftrightarrow \varphi \in T$. Denotamos o conjunto de todas as $\mathcal{S}$-teorias por $\mathrm{Th}_{\mathcal{S}}$.

Note-se que qualquer $\mathcal{S}$-teoria contém todos os $\mathcal{S}$-teoremas ($\vdash_{\mathcal{S}} \varphi \Rightarrow T \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \Rightarrow \varphi \in T$, por enfraquecimento e por definição de teoria). A menor $\mathcal{S}$-teoria é portanto $\mathrm{Thm}_{\mathcal{S}}$. Por outro lado, a maior $\mathcal{S}$-teoria é o conjunto das fórmulas $\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$. Uma $\mathcal{S}$-teoria diz-se *inconsistente*, se é igual ao conjunto de todas as fórmulas; caso contrário, diz-se *consistente*. Finalmente, dado um conjunto de fórmulas $\Gamma \subseteq \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$, a *menor $\mathcal{S}$-teoria que contém* Γ, que denotamos por $\mathrm{Cn}_{\mathcal{S}}(\Gamma)$, é dada por $\mathrm{Cn}_{\mathcal{S}}(\Gamma) := \bigcap\{\varphi \in \Gamma : \Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi\}$. Uma $\mathcal{S}$-teoria diz-se *finitamente gerada*, se existe um conjunto de fórmulas finito $\Gamma \subseteq \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$ tal que $T = \mathrm{Cn}_{\mathcal{S}}(\Gamma)$.

A.2 Lógica segundo um operador de fecho

A.2.1 Operador de fecho

Definição A.4. Seja A um conjunto não vazio. Uma função $C : \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$ diz-se um *operador de fecho*, se para todo $X, Y \subseteq A$, satisfaz as seguintes condições:

Extensividade: $X \subseteq C(X)$;

Monotonia: se $X \subseteq Y$, então $C(X) \subseteq C(Y)$;

Idempotência: $C(C(X)) \subseteq C(X)$.

Note-se que $C(C(X)) = C(X)$, por extensividade e idempotência.

Um operador de fecho diz-se *finitário* se, para todo $X \subseteq A$ e $x \in A$, satisfaz adicionalmente a condição:

Finitário: se $x \in C(X)$, então $x \in C(X')$ para algum $X' \subseteq_f X$ finito.

A.2.2 Definição de Lógica

Definição A.5. Uma *lógica* sobre uma linguagem $\mathcal{L}$ é um par $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, {}^{\vdash_{\mathcal{S}}} \rangle$, onde ${}^{\vdash_{\mathcal{S}}} : \mathscr{P}(\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}) \to \mathscr{P}(\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}})$ é um operador de fecho em $\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$, dito *operador de consequência*.

Explicitamente, para todo $\Gamma, \Delta \in \mathscr{P}(\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}})$, o operador de consequência ${}^{\vdash_{\mathcal{S}}}$ satisfaz as seguintes condições:

Extensividade: $\Gamma \subseteq \Gamma^{\vdash_{\mathcal{S}}}$;

Monotonia: se $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Gamma^{\vdash_{\mathcal{S}}} \subseteq \Delta^{\vdash_{\mathcal{S}}}$;

Idempotência: $(\Gamma^{\vdash_\mathcal{S}})^{\vdash_\mathcal{S}} \subseteq \Gamma^{\vdash_\mathcal{S}}$.

Uma lógica $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, {}^{\vdash_\mathcal{S}} \rangle$ diz-se *estrutural*, se satisfaz adicionalmente a condição:

Estruturalidade: $s(\Gamma^{\vdash_\mathcal{S}}) \subseteq s(\Gamma)^{\vdash_\mathcal{S}}$ para toda a substituição $s : \mathbf{Fm}_\mathcal{L} \to \mathbf{Fm}_\mathcal{L}$.

Uma lógica $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, {}^{\vdash_\mathcal{S}} \rangle$ diz-se *finitária*, se o operador de consequência é finitário, i.e., se satisfaz adicionalmente a condição:

Finitário: se $\varphi \in \Gamma^{\vdash_\mathcal{S}}$, então $\varphi \in \Gamma'^{\vdash_\mathcal{S}}$ para algum $\Gamma' \subseteq_f \Gamma$ finito.

Definimos agora os conceitos de $\mathcal{S}$-teorema e $\mathcal{S}$-teoria segundo esta abordagem. Uma fórmula $\varphi \in \mathbf{Fm}_\mathcal{L}$ diz-se um *$\mathcal{S}$-teorema*, ou um *teorema de $\mathcal{S}$*, se $\varphi \in \varnothing^{\vdash_\mathcal{S}}$. Denotamos o conjunto de todos os $\mathcal{S}$-teoremas por $\mathrm{Thm}_\mathcal{S}$. Um conjunto de fórmulas $T \subseteq \mathscr{P}(\mathbf{Fm}_\mathcal{L})$ diz-se uma *teoria de $\mathcal{S}$*, ou uma *$\mathcal{S}$-teoria*, se $T^{\vdash_\mathcal{S}} = T$, i.e, se é um conjunto de fórmulas fechado por ${}^{\vdash_\mathcal{S}}$. Denotamos o conjunto de todas as $\mathcal{S}$-teorias por $\mathrm{Th}_\mathcal{S}$.

Terminamos esta secção estabelecendo a "equivalência" entre as definições A.3 e A.5, no sentido em que uma lógica segundo a definição A.3 induz uma lógica segunda a definição A.5, e vice-versa; e, além disso, a lógica obtida por indução após indução é a lógica da qual partimos.

Teorema A.6. *As definições A.3 (respectivamente, com as condições de estruturalidade e finitude) e A.5 (respectivamente, com as condições de estruturalidade e finitude) são equivalentes.*

Demonstração.
Seja $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_\mathcal{S} \rangle$ uma lógica segundo a definição (A.3). Definimos o operador ${}^{\vdash_\mathcal{S}} : \mathscr{P}(\mathbf{Fm}_\mathcal{L}) \to \mathscr{P}(\mathbf{Fm}_\mathcal{L})$ como se segue:

$$\Gamma^{\vdash_\mathcal{S}} := \{\varphi \in \mathbf{Fm}_\mathcal{L} : \Gamma \vdash_\mathcal{S} \varphi\}$$

Extensividade: Seja $\varphi \in \Gamma$. Segue por reflexividade de $\vdash_\mathcal{S}$ que $\Gamma \vdash_\mathcal{S} \varphi$. Segue por definição de $\Gamma^{\vdash_\mathcal{S}}$ que $\varphi \in \Gamma^{\vdash_\mathcal{S}}$.
Monotonia: Seja $\Gamma \subseteq \Delta$ e $\varphi \in \Gamma^{\vdash_\mathcal{S}}$, i.e., $\Gamma \vdash_\mathcal{S} \varphi$. Segue por enfraquecimento de $\vdash_\mathcal{S}$ que $\Delta \vdash_\mathcal{S} \varphi$, i.e., $\varphi \in \Delta^{\vdash_\mathcal{S}}$.
Idempotência: Seja $\varphi \in (\Gamma^{\vdash_\mathcal{S}})^{\vdash_\mathcal{S}}$, i.e., $\Gamma^{\vdash_\mathcal{S}} \vdash_\mathcal{S} \varphi$. Sege por construção de $\Gamma^{\vdash_\mathcal{S}}$ que $\Gamma \vdash_\mathcal{S} \gamma$, para todo $\gamma \in \Gamma^{\vdash_\mathcal{S}}$. Segue por corte de $\vdash_\mathcal{S}$ que $\Gamma \vdash_\mathcal{S} \varphi$, i.e., $\varphi \in \Gamma^{\vdash_\mathcal{S}}$.
Adicionalmente, suponhamos que $\mathcal{S}$ é estrutural.
Estruturalidade: Tem-se $s(\Gamma^{\vdash_\mathcal{S}}) = s(\{\varphi \in \mathbf{Fm}_\mathcal{L} : \Gamma \vdash_\mathcal{S} \varphi\}) = \{s(\varphi) \in \mathbf{Fm}_\mathcal{L} : \Gamma \vdash_\mathcal{S} \varphi\} \subseteq \{s(\varphi) \in \mathbf{Fm}_\mathcal{L} : s(\Gamma) \vdash_\mathcal{S} s(\varphi)\} = s(\Gamma)^{\vdash_\mathcal{S}}$, onde a inclusão segue da estruturalidade de $\vdash_\mathcal{S}$.
Adicionalmente, suponhamos que $\mathcal{S}$ é finitária.
Finitário: Seja $\varphi \in \Gamma^{\vdash_\mathcal{S}}$, i.e., $\Gamma \vdash_\mathcal{S} \varphi$. Segue por finitude de $\vdash_\mathcal{S}$ que $\Gamma' \vdash_\mathcal{S} \varphi$, i.e., $\varphi \in \Gamma'^{\vdash_\mathcal{S}}$, para algum $\Gamma' \subseteq_f \Gamma$.

Reciprocamente, seja $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, {}^{\vdash_\mathcal{S}} \rangle$ uma lógica segundo a definição (A.5). Definimos a relação $\vdash_\mathcal{S} \subseteq \mathscr{P}(\mathbf{Fm}_\mathcal{L}) \times \mathbf{Fm}_\mathcal{L}$ como se segue:

$$\Gamma \vdash_\mathcal{S} \varphi \text{ sse } \varphi \in \Gamma^{\vdash_\mathcal{S}}$$

Reflexividade: Seja $\varphi \in \Gamma$. Segue por extensividade de ${}^{\vdash_\mathcal{S}}$ que $\varphi \in \Gamma^{\vdash_\mathcal{S}}$, i.e., $\Gamma \vdash_\mathcal{S} \varphi$.
Corte: Suponhamos que $\Delta \vdash_\mathcal{S} \gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$, i.e., $\Gamma \subseteq \Delta^{\vdash_\mathcal{S}}$, e $\Gamma \vdash_\mathcal{S} \varphi$, i.e, $\varphi \in \Gamma^{\vdash_\mathcal{S}}$. Segue por idempotência de ${}^{\vdash_\mathcal{S}}$ sobre a primeira hipótese que $\Gamma^{\vdash_\mathcal{S}} \subseteq \Delta^{\vdash_\mathcal{S}}$. Segue por monotonia

de $\vdash_{\mathcal{S}}$ sobre a segunda hipótese que $\varphi \in \Delta^{\vdash_{\mathcal{S}}}$, i.e., $\Delta \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$.
Enfraquecimento: Suponhamos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, i.e., $\varphi \in \Gamma^{\vdash_{\mathcal{S}}}$, e $\Gamma \subseteq \Delta$. Então, $\Gamma^{\vdash_{\mathcal{S}}} \subseteq \Delta^{\vdash_{\mathcal{S}}}$. Segue por monotonia sobre a primeira hipótese que $\varphi \in \Delta^{\vdash_{\mathcal{S}}}$, i.e., $\Delta \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$.

Adicionalmente, suponhamos que $\mathcal{S}$ é estrutural.
Estruturalidade: Suponhamos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, i.e., $\varphi \in \Gamma^{\vdash_{\mathcal{S}}}$. Segue por estruturalidade de $\vdash_{\mathcal{S}}$ que $s(\varphi) \in s(\Gamma)^{\vdash_{\mathcal{S}}}$, i.e., $s(\Gamma) \vdash_{\mathcal{S}} s(\varphi)$.

Adicionalmente, suponhamos que $\mathcal{S}$ é finitária.
Finitário: Suponhamos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, i.e., $\varphi \in \Gamma^{\vdash_{\mathcal{S}}}$. Segue por finitude de $\vdash_{\mathcal{S}}$ que $\varphi \in \Gamma'^{\vdash_{\mathcal{S}}}$ para algum $\Gamma' \subseteq_f \Gamma$ finito, i.e, $\Gamma' \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$.

Finalmente, dada uma lógica $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ segundo a definição A.3, a construção $\Gamma^{\vdash_{\mathcal{S}}} := \{\varphi \in \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}} : \Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi\}$ (que provámos ser uma lógica segundo a definição A.5) é tal que $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ sse $\varphi \in \Gamma^{\vdash_{\mathcal{S}}}$. Logo, as lógicas induzidas acima são “inversas” uma da outra.

$\square$

Podemos ver nesta demonstração que o operador de fecho de um conjunto Γ, $\Gamma^{\vdash_{\mathcal{S}}}$ (definido nesta secção), é precisamente a menor $\mathcal{S}$-teoria que contém Γ, $\mathrm{Cn}_{\mathcal{S}}(\Gamma)$ (definida na secção anterior). Ou seja, $\Gamma^{\vdash_{\mathcal{S}}} = \mathrm{Cn}_{\mathcal{S}}(\Gamma)$.

A.3 Lógica segundo um sistema de fecho

A.3.1 Sistema de fecho

Definição A.7. Seja A uma conjunto não vazio. Um conjunto $\mathcal{C} \subseteq \mathscr{P}(A)$ de subconjuntos de A diz-se um *sistema de fecho em A*, se $\mathcal{C}$ é fechado por intersecções arbitrárias.

Consideramos aqui $\bigcap \varnothing \subseteq \mathscr{P}(A)$ dada pelo próprio A.

Neste caso, não existem definições próprias de sistema de fecho estrutural ou finitário.

O próximo teorema diz-nos que existe uma bijecção entre operadores de fecho e sistemas de fecho. Será pois natural considerar também uma lógica definida segundo um sistema de fecho à semelhança de um operador de fecho.

Teorema A.8 ([Czelakowski, 2001, Theorem 2])**.** *Seja A um conjunto não vazio.*

(i) Todo o operador de fecho C em A induz um sistema de fecho $\mathcal{C}$ em A, dado por $\mathcal{C} = \{X \subseteq A : C(X) = X\}$;

(ii) Todo o sistema de fecho $\mathcal{C}$ em A induz um operador de fecho C em A, dado por $C(X) = \bigcap\{Z \in \mathcal{C} : X \subseteq Z\}$;

(iii) As correspondências estabelecidas em (i) e (ii) são inversas uma da outra.

Demonstração.
(i) Seja C um operador de fecho. Considere-se $\mathcal{C} \subseteq \mathscr{P}(A)$, dado por

$$\mathcal{C} = \{X \subseteq A : C(X) = X\} .$$

Fecho por intersecções arbitrárias: Seja $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$. Queremos mostrar que $\bigcap \mathcal{F} \in \mathcal{C}$, i.e., $C(\bigcap \mathcal{F}) = \bigcap \mathcal{F}$. Sabemos que $\bigcap \mathcal{F} \subseteq C(\bigcap \mathcal{F})$, por extensividade de C. Por outro lado,

$$C(\bigcap \mathcal{F}) \subseteq \bigcap_{F \in \mathcal{F}} C(F) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \bigcap \mathcal{F},$$

onde a inclusão segue por monotonia do operador C sobre a inclusão $\bigcap \mathcal{F} \subseteq F, \forall F \in \mathcal{F}$; e a igualdade $C(F) = F, \forall F \in \mathcal{F}$, segue de $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$.

Concluímos que $\mathcal{C}$ é um sistema de fecho em A.

(ii) Seja $\mathcal{C}$ um sistema de fecho. Considere-se $C : \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$, dado por

$$C(X) = \bigcap \{Z \in \mathcal{C} : X \subseteq Z\} .$$

Extensividade: É imediato que $X \subseteq C(X)$.
Monotonia: Se $X \subseteq Y$, então $C(X) = \bigcap\{Z \in \mathcal{C} : X \subseteq Z\} \subseteq \bigcap\{Z \in \mathcal{C} : Y \subseteq Z\} = C(Y)$.
Idempotência: Note-se que $C(X) = \bigcap\{Z \in \mathcal{C} : X \subseteq Z\} \in \mathcal{C}$, pois $\mathcal{C}$ é fechado por intersecções arbitrárias. Logo, $C(X)$ entra na construção de $C(C(X)) = \bigcap\{Z \in \mathcal{C} : C(X) \subseteq Z\}$, pois $C(X) \subseteq C(X)$, e portanto $C(C(X)) \subseteq C(X)$.

Concluímos que C é um operador de fecho em A.

(iii) Considere-se a aplicação f que faz corresponder a cada operador de fecho C o sistema de fecho $\mathcal{C} = \{X \subseteq A : C(X) = X\}$, como provámos em (i).
Injectividade: Suponhamos que existem dois operadores de fecho C e C' tais que $C \neq C'$. Então, existe $X \subseteq A$ tal que $C(X) \neq C'(X)$. Note-se que $C(X)$ e $C'(X)$ são C-fechado e C'-fechado, respectivamente, pois $C(C(X)) = C(X)$ e $C'(C'(X)) = C'(X)$ por idempotência de C e C', respectivamente. Logo, $\mathcal{C} \neq \mathcal{C}'$.
Sobrejectividade: Dado um sistema de fecho $\mathcal{C}$, considere-se o operador de fecho $C(X) = \bigcap\{Z \in \mathcal{C} : X \subseteq Z\}$, como provámos em (ii). Como $\mathcal{C}$ é fechado por intersecções, segue que $C(X) \in \mathcal{C}$, para todo $X \subseteq A$. Então, $f(C) = \{X \subseteq A : C(X) = X\} \subseteq \mathcal{C}$. Por outro lado, para qualquer conjunto $Y \in \mathcal{C}$ verifica-se $Y = \bigcap\{Z \in \mathcal{C} : Y \subseteq Z\}$, pois $\mathcal{C}$ é fechado por intersecções. Ou seja, $Y = C(Y)$, donde $Y \in f(C)$. Logo, $f(C) = \mathcal{C}$.

□

Note-se que à luz desta correspondência biunívoca, podemos agora definir um sistema de fecho estrutural ou finitário à custa do correspondente operador de fecho. Dizemos então que um sistema de fecho $\mathcal{C}$ é *estrutural*, se o correspondente operador de fecho $C(X) = \bigcap\{Z \in \mathcal{C} : X \subseteq Z\}$ é estrutural; e dizemos que um sistema de fecho $\mathcal{C}$ é *finitário*, se o correspondente operador de fecho $C(X) = \bigcap\{Z \in \mathcal{C} : X \subseteq Z\}$ é finitário.

A.3.2 Definição de Lógica

Definição A.9. Uma *lógica* sobre uma linguagem $\mathcal{L}$ é um par $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \mathcal{C} \rangle$, onde $\mathcal{C} \subseteq \mathscr{P}(\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}})$ é um sistema de fecho em $\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$.

Explicitamente, o sistema de fecho $\mathcal{C}$ satisfaz a seguinte condição:

Fecho por intersecções arbitrárias: se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$, então $\bigcap \mathcal{F} \in \mathcal{C}$.

Como já referimos, não existe uma definição explícita de lógica estrutural ou finitária segundo um sistema de fecho, apenas caracterizações destas propriedades.

Note-se que o sistema de fecho $\mathcal{C}$ induzido pelo operador de fecho C no teorema A.8 (i) é dado precisamente pelos subconjuntos C-fechados de A. Partindo deste princípio, vamos construir o "sistema de consequência" correspondente ao operador de consequência $\vdash_{\mathcal{S}}$. Este sistema de consequência, chamemos-lhe $\mathcal{C}_{\vdash_{\mathcal{S}}}$, será então dado pelos subconjuntos $\vdash_{\mathcal{S}}$-fechados em $\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$, ou seja, precisamente pelas $\mathcal{S}$-teorias (segundo a sua definição através do operador consequência).

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\vdash_{\mathcal{S}}} &= \{X \in \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}} : X^{\vdash_{\mathcal{S}}} = X\} \\ &= \mathrm{Th}_{\mathcal{S}} \end{aligned}$$

Concluímos que a definição de lógica $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \mathcal{C} \rangle$ apresentada nesta secção não é mais do que o par $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \mathrm{Th}_{\mathcal{S}} \rangle$. Portanto, uma lógica fica univocamente determinada pelo conjunto das suas teorias.

Os conceitos de $\mathcal{S}$-teorema e $\mathcal{S}$-teoria segundo esta abordagem coincidem portanto com aqueles definidos na secção A.2.

Terminamos esta secção com a "equivalência" entre as definições A.5 e A.9, no sentido em que uma lógica segundo a definição A.5 induz uma lógica segunda a definição A.9, e vice-versa; e, além disso, a lógica obtida por indução após indução é a lógica da qual partimos.

Teorema A.10. *As definições A.3 (respectivamente, com as condições de estruturalidade e finitude) e A.9 (respectivamente, com as condições de estruturalidade e finitude) são equivalentes.*

Demonstração.
Segue imediatamente do teorema A.8. A estruturalidade e finitude seguem directamente por definição.

□

A.4 Lógica enquanto um sistema dedutivo

A.4.1 Regras de Inferência

Seja $R = \{\langle \Gamma_i, \varphi_i \rangle : i \in I\}$, com $\Gamma_i \subseteq_f \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$ finito e $\varphi_i \in \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$, para todo $i \in I$. A cada elemento $r = \langle \Gamma, \varphi \rangle \in R$ chamamos uma *regra de inferência*. Chamamos *conjunto de premissas* da regra r a Γ e *conclusão* da regra r a φ. Um *axioma* é uma regra de inferência com um conjunto de premissas vazio, i.e., da forma $\langle \varnothing, \varphi \rangle$, também denotada simplesmente por φ.

Sejam AX e IR conjuntos (possivelmente infinitos) de axiomas e regras de inferência, respectivamente. Dizemos que uma fórmula δ é *directamente derivável* de um conjunto Δ de fórmulas por uma regra $\langle \Psi, \psi \rangle$, se existe uma substituição $s : \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}} \to \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$ tal que $s(\psi) = \delta$ e $s(\Psi) \subseteq \Delta$. Uma $(\mathrm{AX}, \mathrm{IR})$-*derivação*, ou $(\mathrm{AX}, \mathrm{IR})$-*prova*, *de* φ *a partir de* Γ, é uma sequência finita $\vartheta_0, \ldots, \vartheta_{n-1}$ de fórmulas tal que $\vartheta_{n-1} = \varphi$, e para cada $i < n$ verifica-se um dos seguintes casos: $\vartheta_i \in \Gamma$, ou ϑ_i é uma instância de um axioma em AX, ou ϑ_i é directamente derivável de $\{\vartheta_0, \ldots, \vartheta_{i-1}\}$ por uma regra em IR. Se existe uma $(\mathrm{AX}, \mathrm{IR})$-derivação de φ a partir de Γ, denotamos esse facto por $\Gamma \vdash_{\mathrm{AX,IR}} \varphi$. Se existe uma $(\mathrm{AX}, \mathrm{IR})$-derivação de φ a partir de $\varnothing$, denotamos esse facto por $\vdash_{\mathrm{AX,IR}} \varphi$.

Seja $\Gamma_{\mathrm{AX,IR}}$ o menor conjunto de fórmulas que contém Γ, todas as instâncias dos axiomas em AX e é fechado pela derivação directa usando as regras em IR. Temos a seguinte caracterização de $\Gamma_{\mathrm{AX,IR}}$.

Lema A.11. $\varphi \in \Gamma_{\mathrm{AX,IR}}$ *sse* $\Gamma \vdash_{\mathrm{AX,IR}} \varphi$.

Demonstração.

Suponhamos que existe uma (AX, IR)-derivação de φ a partir de Γ, digamos $\vartheta_0, \ldots, \vartheta_{n-1}$. A prova segue por indução na construção de φ. **Base:**

▪ Se $\varphi = \vartheta_{n-1} \in \Gamma$, então é imediato por definição de $\Gamma_{\mathrm{AX,IR}}$ que $\varphi \in \Gamma_{\mathrm{AX,IR}}$. ▪ Se $\varphi = \vartheta_{n-1}$ é uma instância de uma axioma em AX, então é imediato por definição de $\Gamma_{\mathrm{AX,IR}}$ que $\varphi \in \Gamma_{\mathrm{AX,IR}}$. **Passo:**

Se $\varphi = \vartheta_{n-1}$ é directamente derivável de $\{\vartheta_0, \ldots, \vartheta_{n-2}\}$ por uma regra em IR, então segue por hipótese de indução que $\{\vartheta_0, \ldots, \vartheta_{n-2}\} \subseteq \Gamma_{\mathrm{AX,IR}}$, donde por definição de $\Gamma_{\mathrm{AX,IR}}$ segue que $\varphi \in \Gamma_{\mathrm{AX,IR}}$.

Reciprocamente, suponhamos que $\varphi \in \Gamma_{\mathrm{AX,IR}}$. A prova segue por indução na construção de φ. **Base:**

▪ Se $\varphi \in \Gamma$, então tome-se $\vartheta_0 = \varphi$ como (AX, IR)-derivação de φ a partir de Γ. ▪ Se φ é uma instância de uma axioma em AX, então tome-se $\vartheta_0 = \varphi$ como (AX, IR)-derivação de φ a partir de Γ. **Passo:**

Se φ é directamente derivável de Δ por uma regra em IR, então por hipótese de indução existem (AX, IR)-derivações $\vartheta_0^\delta, \ldots, \vartheta_{n-1}^\delta$ de δ a partir de Γ, para todo $\delta \in \Delta$. Tome-se a sequência $(\vartheta_0^\delta, \ldots, \vartheta_{n-1}^\delta)_{\delta \in \Delta}, \varphi$ como uma (AX, IR)-derivação de φ a partir de Γ. □

A.4.2 Definição de Lógica

Definição A.12. Um *sistema dedutivo* sobre uma linguagem $\mathcal{L}$ é um par $\mathcal{D} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathrm{AX,IR}} \rangle$, onde $\vdash_{\mathrm{AX,IR}} \subseteq \mathscr{P}(\mathbf{Fm}_\mathcal{L}) \times \mathbf{Fm}_\mathcal{L}$ é a relação induzida pela noção de AX, IR-prova.

Note-se que por definição, um sistema dedutivo já é estrutural e finitário.

Os conceitos de $\mathcal{D}$-teorema e $\mathcal{D}$-teoria segundo esta abordagem são definidos de modo inteiramente análogo aos da secção A.1. Uma fórmula $\varphi \in \mathbf{Fm}_\mathcal{L}$ diz-se um *teorema de* $\mathcal{D}$, ou um $\mathcal{D}$*-teorema*, se $\varnothing \vdash_{\mathrm{AX,IR}} \varphi$, ou simplesmente $\vdash_{\mathrm{AX,IR}} \varphi$. Denotamos o conjunto de todos os $\mathcal{D}$-teoremas por $\mathrm{Thm}_\mathcal{D}$. Um conjunto de fórmulas $T \subseteq \mathscr{P}(\mathbf{Fm}_\mathcal{L})$ diz-se uma *teoria de* $\mathcal{D}$, ou uma $\mathcal{D}$*-teoria*, se para todo $\varphi \in \mathbf{Fm}_\mathcal{L}$ se tem $\Gamma \vdash_{\mathrm{AX,IR}} \varphi \Rightarrow \varphi \in \Gamma$. À luz do lema A.11, T é uma $\mathcal{D}$-teoria sse contém os axiomas de AX e é fechado pelas regras de IR. Denotamos o conjunto de todas as $\mathcal{D}$-teorias por $\mathrm{Th}_\mathcal{D}$.

Terminamos esta secção com a "equivalência" entre as definições A.3 e A.12, no sentido em que uma lógica segundo a definição A.3 induz uma lógica segunda a definição A.12, e vice-versa; e, além disso, a lógica obtida por indução após indução é a lógica da qual partimos. Neste caso, porém, esta correspondência apenas é válida para lógicas estruturais e finitárias.

Teorema A.13. *As definições A.3, adicionalmente com as condições de estruturalidade e de finitude, e A.12 são equivalentes.*

Demonstração.

Seja $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_\mathcal{S} \rangle$ uma lógica segundo a definição A.3, estrutural e finitária. Definimos os conjuntos AX e IR como se segue:

$$\begin{aligned} \mathrm{AX} &:= \{\langle \varnothing, \varphi \rangle \in \mathscr{P}(\mathbf{Fm}_\mathcal{L}) \times \mathbf{Fm}_\mathcal{L} : \varnothing \vdash_\mathcal{S} \varphi\} \,; \\ \mathrm{IR} &:= \{\langle \Gamma, \varphi \rangle \in \mathscr{P}(\mathbf{Fm}_\mathcal{L}) \times \mathbf{Fm}_\mathcal{L} : \Gamma \vdash_\mathcal{S} \varphi \text{ e } \Gamma \text{ é finito}\} \,. \end{aligned}$$

É imediato que $\mathrm{AX} \cup \mathrm{IR}$ é um conjunto de regras de inferência, donde $\mathcal{D}_\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathrm{AX,IR}} \rangle$ é um sistema dedutivo segundo a definição A.12, onde $\vdash_{\mathrm{AX,IR}}$ é a relação induzida pela noção de AX, IR-prova.

Reciprocamente, seja $\mathcal{D} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathrm{AX,IR}} \rangle$ um sistema dedutivo segundo a definição A.12.
Reflexividade: Se $\varphi \in \Gamma$, então $\vartheta_0 = \varphi$ é uma $(\mathrm{AX}, \mathrm{IR})$-derivação de φ a partir de Γ.
Corte: Se $\Delta \vdash_{\mathrm{AX,IR}} \gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$, segundo as $(\mathrm{AX}, \mathrm{IR})$-derivações $\vartheta_0^\gamma, \ldots, \vartheta_{n-1}^\gamma$, e $\Gamma \vdash_{\mathrm{AX,IR}} \varphi$, segundo a $(\mathrm{AX}, \mathrm{IR})$-derivação $\pi_0, \ldots, \pi_{m-1}$, então $\vartheta_0^\varphi, \ldots, \vartheta_{l-1}^\varphi$, onde:

$$\vartheta_i^\varphi = \begin{cases} \vartheta_0^{\pi_i}, \ldots, \vartheta_{n-1}^{\pi_i} & \text{, se } \pi_i \in \Gamma \\ \pi_i & \text{, caso contrário} \end{cases}$$

é uma $(\mathrm{AX}, \mathrm{IR})$-derivação de φ a partir de Δ.
Enfraquecimento: Se $\Gamma \vdash_{\mathrm{AX,IR}} \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então a $(\mathrm{AX}, \mathrm{IR})$-derivação de φ a partir de Γ também é uma $(\mathrm{AX}, \mathrm{IR})$-derivação de φ a partir de Δ.
Estruturalidade: Se $\Gamma \vdash_{\mathrm{AX,IR}} \varphi$, segundo a $(\mathrm{AX}, \mathrm{IR})$-derivação $\vartheta_0, \ldots, \vartheta_{n-1}$, então tem-se $s(\Gamma) \vdash_{AX,IR} s(\varphi)$, segundo a (AX, IR)-derivação $s(\vartheta_0), \ldots, s(\vartheta_{n-1})$, para qualquer substituição s. Note-se que a substituição de uma instância de um axioma continua a ser uma instância do mesmo axioma. Falta provar que a derivação directa é fechada por substituições. Seja $s : \mathbf{Fm}_\mathcal{L} \to \mathbf{Fm}_\mathcal{L}$ uma substituição. Suponhamos que δ é directamente derivável de Δ pela regra $\langle \Psi, \psi \rangle$ (segundo uma substituição σ tal que $\sigma(\psi) = \delta$ e $\sigma(\Psi) \subseteq \Delta$). Então, $s(\delta)$ é directamente derivável de $s(\Delta)$ pela mesma regra $\langle \Gamma, \varphi \rangle$ (mas agora segundo a substituição $s \cdot \sigma$, pois $s \cdot \sigma(\varphi)) = s(\sigma(\varphi)) = s(\delta)$ e $s \cdot \sigma(\Psi) \subseteq s(\Delta)$, uma vez que $\sigma(\psi) = \delta$ e $\sigma(\Psi) \subseteq \Delta$).
Finitário: Se $\Gamma \vdash_{\mathrm{AX,IR}} \varphi$, segundo a $(\mathrm{AX}, \mathrm{IR})$-derivação $\vartheta_0, \ldots, \vartheta_{n-1}$, então tome-se $\Gamma' = \{\vartheta_i : \vartheta_i \in \Gamma\} \subseteq_f \Gamma$. É imediato que $\Gamma' \vdash_{\mathrm{AX,IR}} \varphi$, segundo a mesma $(\mathrm{AX}, \mathrm{IR})$-derivação $\vartheta_0, \ldots, \vartheta_{n-1}$.
Logo, $\mathcal{S}_\mathcal{D} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathrm{AX,IR}} \rangle$ é uma lógica segundo a definição A.3, estrutural e finitária.

Finalmente, seja $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_\mathcal{S} \rangle$ uma lógica segundo a definição A.3, estrutural e finitária. Já vimos que esta lógica induz uma lógica $\mathcal{D}_\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathrm{AX,IR}} \rangle$ segundo a definição A.12, onde os conjuntos AX e IR são dados por:

$$\begin{aligned} \mathrm{AX} &:= \{\langle \varnothing, \varphi \rangle \in \mathscr{P}(\mathbf{Fm}_\mathcal{L}) \times \mathbf{Fm}_\mathcal{L} : \varnothing \vdash_\mathcal{S} \varphi\} \; ; \\ \mathrm{IR} &:= \{\langle \Gamma, \varphi \rangle \in \mathscr{P}(\mathbf{Fm}_\mathcal{L}) \times \mathbf{Fm}_\mathcal{L} : \Gamma \vdash_\mathcal{S} \varphi \text{ e } \Gamma \text{ é finito}\} \; . \end{aligned}$$

Vamos provar que $\vdash_{\mathrm{AX,IR}} = \vdash_\mathcal{S}$.

Suponhamos que $\Gamma \vdash_{\mathrm{AX,IR}} \varphi$, segundo a $(\mathrm{AX}, \mathrm{IR})$-derivação $\vartheta_0, \ldots, \vartheta_{n-1}$. A prova segue por indução no comprimento da derivação. **Base:**

Para $n = 0$, temos dois casos: ou $\vartheta_0 = \varphi \in \Gamma$, caso em que $\Gamma \vdash_\mathcal{S} \varphi$ por extensividade de $\vdash_\mathcal{S}$; ou $\vartheta_0 = \varphi$ é uma instância de uma axioma em AX, caso em que $\vdash_\mathcal{S} \varphi$ por construção de AX. **Passo:**

Suponhamos que $\vartheta_n = \varphi$ é directamente derivável de $\{\vartheta_0, \ldots, \vartheta_{n-1}\}$ por uma regra $\langle \Psi, \psi \rangle$ em IR segundo a substituição $s : \mathbf{Fm}_\mathcal{L} \to \mathbf{Fm}_\mathcal{L}$. Por construção de IR, temos $\Psi \vdash_\mathcal{S} \psi$. Como $\vdash_\mathcal{S}$ é estrutural, segue que $s(\Psi) \vdash_\mathcal{S} s(\psi)$. Mas, $s(\psi) = \varphi$ e $s(\Psi) \subseteq \{\vartheta_0, \ldots, \vartheta_{n-1}\}$, donde $\{\vartheta_0, \ldots, \vartheta_{n-1}\} \vdash_\mathcal{S} \varphi$ por enfraquecimento de $\vdash_\mathcal{S}$. Mas por hipótese de indução, temos $\Gamma \vdash_\mathcal{S} \vartheta_i$, para $i = 1, \ldots, n-1$. Logo, por corte de $\vdash_\mathcal{S}$, segue que $\Gamma \vdash_\mathcal{S} \varphi$.

Reciprocamente, suponhamos que $\Gamma \vdash_\mathcal{S} \varphi$. Como $\vdash_\mathcal{S}$ é finitária, podemos tomar $\Gamma' = \{\gamma_0, \ldots, \gamma_m\}$ finito tal que $\Gamma' \vdash_\mathcal{S} \varphi$. Então $\langle \Gamma', \varphi \rangle \in \mathrm{IR}$, e portanto $\vartheta_0 = \gamma_0, \ldots, \vartheta_m = \gamma_m, \vartheta_{m+1} = \varphi$ é uma $(\mathrm{AX}, \mathrm{IR})$-derivação de φ a partir de Γ, onde os primeiros m passos são justificados por $\vartheta_i = \gamma_i \in \Gamma'$, para $i = 1, \ldots, m$; e o m-ésimo passo é justificado por $\langle \Gamma', \varphi \rangle \in \mathrm{IR}$. Logo, $\Gamma' \vdash_{\mathrm{AX,IR}} \varphi$. Como $\Gamma' \subseteq \Gamma$, concluímos que $\Gamma \vdash_{\mathrm{AX,IR}} \varphi$.

Referências □

[Czelakowski, 2001]

Bibliografia

[Barendregt, 1997] Barendregt, H. (1997). The impact of the lambda calculus in logic and computer science. *The Bulletin of Symbolic Logic*, 3(2):181–215.

[Barendregt, 1984] Barendregt, H. P. (1984). *The Lambda Calculus – Its Syntax and Semantics*, volume 103 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland, revised edition.

[Barendregt, 1992] Barendregt, H. P. (1992). Lambda calculi with types. In Abramski, S., Gabbay, D. M., and Maibaum, T., editors, *Handbook of Logic in Computer Science*, volume 2, pages 117–309. Oxford University Press.

[Bibel and Eder, 1993] Bibel, W. and Eder, E. (1993). Methods and calculi for deduction. In Gabbay, D. M., Hogger, C. J., and Robinson, J. A., editors, *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, volume 1 of *Oxford Science Publications*, pages 67–182. Oxford University Press.

[Block and Rebagliato, 2003] Block, W. J. and Rebagliato, J. (2003). Algebraic semantics for deductive systems. *Studia Logica*, 74(1-2):153–180.

[Caleiro, 2002] Caleiro, C. (2002). Fundamentos de Programação Funcional: Uma Introdução ao Cálculo Lambda. Apontamentos de Programação Funcional em 2004/05, Instituto Superior Técnico.

[Caleiro and Gonçalves, 2007] Caleiro, C. and Gonçalves, R. (2007). On the algebraization of many-sorted logics. In *Recent Trends in Algebraic Development Techniques - Selected Papers*, pages 21–36. Springer-Verlag.

[Cardone and Hindley, 2009] Cardone, F. and Hindley, J. R. (2009). Lambda-calculus and combinators in the 20th century. In Gabbay, D. M. and Woods, J., editors, *Handbook of the History of Logic - Logic from Russell to Church*, volume 5, pages 723–817. North-Holland.

[Curry, 1942] Curry, H. B. (1942). The combinatory foundations of mathematical logic. *The Journal of Symbolic Logic*, 7:49–64.

[Czelakowski, 2001] Czelakowski, J. (2001). *Protoalgebric Logics*, volume 10 of *Trends in Logic – Studia Logic Library*. Kluwer Academic Publishers.

[D'Agostino, 1999] D'Agostino, M. (1999). Tableau methods for classical propositional logic. In D'Agostino, M., Gabbay, D. M., Hähnle, R., and Posegga, J., editors, *Handbook of Tableau Methods*, pages 45–123. Kluwer Academic Publishers.

[Davey and Priestley, 2002] Davey, B. A. and Priestley, H. A. (2002). *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge University Press, 2nd edition.

[Dummett, 1977] Dummett, M. (1977). *Elements of intuitionism*, volume 39 of *Oxford Logic Guides*. Oxford University Press.

[Fitting, 1969] Fitting, M. C. (1969). *Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland Publishing Company.

[Girard et al., 1989] Girard, J.-Y., Taylor, P., and Lafont, Y. (1989). *Proofs and Types*, volume 7 of *Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science*. Cambridge University Press, Cambridge. Avaiable at http://www.paultaylor.eu/stable/prot.pdf.

[Martins, 2009] Martins, M. A. (2009). Especificação Algébrica de tipos abstractos de dados. Apontamentos de Especificação Algébrica em 2009/10, Universidade de Aveiro.

[Meinke and Tucker, 1993] Meinke, K. and Tucker, J. V. (1993). Universal algebra. In Abramsky, S., Gabbay, D. M., and Maibaum, T. S. E., editors, *Handbook of Logic in Computer Science*, volume 1, pages 189–368. Oxford University Press.

[Monk, 1986] Monk, J. D. (1986). The contributions of Alfred Tarski to algebraic logic. *The Journal of Symbolic Logic*, 51(4):899–906.

[Moschovakis, 2009] Moschovakis, J. R. (2009). The logic of brouwer and heyting. In Gabbay, D. M. and Woods, J., editors, *Handbook of the History of Logic - Logic from Russell to Church*, volume 5, pages 77–125. North-Holland.

[Prawitz, 1965] Prawitz, D. (1965). *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study*, volume 3 of *Acta Universitatis Stockholmiensis. Stockholm Studies in Philosophy*. Almquist & Wiksell.

[Rasiowa, 1974] Rasiowa, H. (1974). *An algebraic approach to non-classical logics*, volume 78 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland Publishing Co.

[Rasiowa and Sikorski, 1963] Rasiowa, H. and Sikorski, R. (1963). *The Mathematics of Metamathematics*, volume 41 of *Polska Akademia Nauk Monografie Matematyczne*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

[Selinger, 2007] Selinger, P. (2001-2007). Lecture Notes on the Lambda Calculus. Avaiable at http://www.mscs.dal.ca/~selinger/papers/lambdanotes.pdf.

[Sernadas and Sernadas, 2003] Sernadas, A. and Sernadas, C. (2003). Elementos de Lógica e Computação. Apontamentos de Lógica e Teoria da Computação em 2003/04, Instituto Superior Técnico.

[Sørensen and Urzyczyn, 1998] Sørensen, M. H. B. and Urzyczyn, P. (1998). Lectures on the Curry-Howard Isomorphism. Avaiable at http://folli.loria.fr/cds/1999/library/pdf/curry-howard.pdf.

[Sørensen and Urzyczyn, 2006] Sørensen, M. H. B. and Urzyczyn, P. (2006). *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism*, volume 149 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. Elsevier.

[Tarski, 1956] Tarski, A. (1956). *Logic, Semantics, Metamathematics: Papers from 1923 to 1938 by Alfred Tarski*. Oxford at the Clarendon Press. Translated by J. H. Woodger.

[van Dalen, 2002] van Dalen, D. (2002). Intuitionistic logic. In Gabbay, D. and Guenthner, F., editors, *Handbook of Philosophical Logic*, volume 5, pages 1–114. Kluwer Academic Publishers, 2nd edition.

[van Dalen, 2004] van Dalen, D. (2004). *Logic and Structure*. Universitext. Springer-Verlag, 4th edition.