



**Carla Sofia
de Assunção
Gomes Costa**

**Problema do Caixeiro Viajante – Resolução e
Depuração**



**Carla Sofia
de Assunção
Gomes Costa**

**Problema do Caixeiro Viajante – Resolução e
Depuração**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações - Especialização em Matemática Empresarial e Tecnológica, realizada sob a orientação científica do Doutor Sérgio Barreto, Professor Adjunto do Instituto Superior de Contabilidade e Administração da Universidade de Aveiro e co-orientação científica da Doutora Paula Rama, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

Dedicatória

Aos meus pais.
Ao Rui, meu marido.

O júri

Presidente:

Professora Doutora Tatiana Tchemisova Cordeiro

Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

Vogais:

Professor Doutor Tatiana Francisco José Ferreira Silva

Professor Auxiliar da Universidade dos Açores

Professor Doutor Sérgio dos Santos Barreto

Professora Adjunto do Instituto Superior de Contabilidade e Administração da
Universidade de Aveiro

Professora Doutora Paula Cristina Roque da Silva Rama

Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

Agradecimentos

Ao Professor Sérgio Barreto, que orientou de uma forma muito paciente este trabalho. Agradeço toda a sua disponibilidade e compreensão ao longo destes meses, assim como a forma com que me conduziu neste trabalho e os conhecimentos que me transmitiu. À Professora Paula Rama, pela sua co-orientação e apoio nesta investigação.

Aos meus pais, pelo constante incentivo, por todo o interesse e investimento que ao longo destes anos têm feito na minha formação, mas acima de tudo, por todo o amor e apoio que sempre me deram.

Ao Rui, meu marido, o grande amor da minha vida. Obrigado por tudo, desde a paciência e compreensão, ao incentivo e contribuição prática neste trabalho. Com toda a certeza que, sem o seu incansável apoio não estaria a escrever estas linhas. Obrigado.

Palavras-chave

PCV, formulações, sub-ciclos.

Resumo

O Problema do Caixeiro Viajante (PCV) pode ser entendido como o problema de um vendedor que deseja visitar um conjunto de cidades, passando exactamente uma vez por cada uma e voltando ao ponto de partida no final do seu percurso.

O PCV está classificado como NP- Completo, o que faz com que seja de muito difícil resolução. A grande dificuldade na obtenção da solução óptima deste tipo de problemas, deve-se ao elevado número de restrições que cresce exponencialmente com o número de clientes.

Neste trabalho, começamos por introduzir o problema com exemplos bastante simples, onde são exibidos métodos heurísticos para a sua resolução. De seguida, é feita uma abordagem mais formal, onde são apresentados vários resultados que permitem reduzir substancialmente o número de restrições. Posteriormente, é feito um estudo de várias instâncias do problema, de forma a averiguar o comportamento das restrições de eliminação de sub-ciclos e o modo como estas se influenciam mutuamente. A grande parte dos testes efectuados neste trabalho apontam para a existência de uma forte redundância, do ponto de vista prático, na maior parte das restrições de eliminação de sub-ciclos. Assim, os resultados obtidos indicam que apenas uma pequena percentagem das restrições de eliminação de sub-ciclos é necessária para a obtenção da solução óptima do problema.

Keywords

TSP, formulations, sub-cycle.

Abstract

The Travelling Salesman Problem (TSP) can be seen as a problem of a salesman that wants to visit a set of cities, passing by each city exactly one time and returning to the starting point at the end of his tour.

The TSP is classified as a NP-Complete problem, which makes it a very hard to solve. The major difficulty in obtaining the optimal solution of this kind of problems is in the large number of constraints, that grows exponentially with the number of clients.

In this work, we start by introducing the problem through simple examples, where heuristic methods to obtain a solution are presented. Next, we take a more formal approach, where several results that allow for a considerable reduction on the number of constraints are presented. An analysis of several instances of the problem is then performed, with the objective of analysing the behaviour of the sub-cycle elimination constraints and the way they mutually interfere. The majority of the tests presented in this work indicate that there exists high redundancy, from a practical point of view, in most of the sub-cycle elimination constraints. Therefore, the results indicate that only a small percentage of the sub-cycle elimination constraints is necessary to obtain the optimal solution for the problem.

ÍNDICE

1. Introdução	4
1.1. Objectivos do trabalho	4
1.2. Estrutura do trabalho	5
2. O Problema do Caixeiro Viajante (PCV)	6
2.1. PCV: Origem e contextualização	6
2.2. Evolução histórica da resolução do PCV.....	7
3. Métodos de resolução do PCV: heurísticos e exactos	12
3.1. Exemplo de um problema ilustrativo do PCV	13
3.1.1. Resolução usando o método do vizinho mais próximo	14
3.1.2. Resolução usando um método de inserção	15
4. Formalização do Problema do Caixeiro Viajante	17
4.1. Algumas noções básicas sobre grafos	17
4.2. Formulações matemáticas do PCV.....	21
Formulação 1 (Dantzig, Fulkerson e Johnson, 1954).....	21
Formulação 2 (Dantzig, Fulkerson e Johnson, 1954)	25
Formulação 3 (Miller, Tucker e Zemlin, 1960)	31
Formulação 4 (Barreto, 2004).....	35
5. Estudo e resolução iterativa de várias instâncias do PCV	37
6. Relação e condicionamento entre restrições de eliminação de sub-ciclos ..45	45
6.1. Análise da matriz de restrições do PCV.....	45
6.2. Interligação das restrições de eliminação de sub-ciclos.....	51
6.2.1. Influência das restrições de eliminação de sub-ciclos com 4 nós na eliminação de sub-ciclos com 3 nós.....	52
6.2.2. Influência das restrições de eliminação de sub-ciclos com 5 nós na eliminação de sub-ciclos com 3 e 4 nós.....	58
7. Conclusão	61
8. Bibliografia	62
9. Anexos	64

LISTA DE FIGURAS

2.1. Jogo Icosiano.....	7
2.2. Solução gráfica da instância do PCV constituído por 49 cidades.....	9
2.3. Evolução da resolução do PCV desde 1954 até 2004.....	9
2.4. Ilustração gráfica do <i>World TSP</i>	11
3.1. Localização geográfica das cidades.....	13
4.1. Exemplo de um grafo.....	17
4.2. Grafo simples.....	18
4.3. Grafo completo de seis vértices.....	19
4.4. Exemplo de um grafo.....	19
4.5. Exemplo de um grafo orientado e não simétrico.....	20
4.6. Exemplo de um grafo orientado e simétrico.....	20
4.7. Exemplo de um grafo não orientado (simétrico).....	21
4.8. Exemplo de dois sub-ciclos num grafo.....	32
4.9. Ilustração de eliminação de sub-ciclos num grafo.....	33
5.1. Solução óptima da instância do PCV.....	37
5.2. Solução da instância do PCV obtida apenas com as restrições de afectação.....	38
5.3. Solução da instância do PCV obtida apenas com as restrições de afectação.....	39
5.4. Solução da instância do PCV obtida com a adição da nova restrição.....	40
5.5. Solução da instância do PCV obtida com a adição das duas novas restrições.....	40
5.6. Solução óptima da instância do PCV.....	40
5.7. Solução da instância do PCV obtida apenas com as restrições de afectação.....	41
5.8. Solução óptima da instância do PCV.....	42
6.1. Matriz de restrições de um PCV com 6 clientes.....	47
6.2. Matriz de restrições do PCV com o acrescento das variáveis de folga.....	49
6.3. Esquema representativo do estudo da interligação de restrições.....	52
6.4. Grafo completo com 4 nós.....	52
6.5. Sub-ciclos possíveis com 3 nós.....	53
6.6. Sub-ciclos possíveis com 4 nós.....	53
6.7. Grafo completo com 5 nós.....	58
6.8. Esquema conclusivo do estudo efectuado	59

LISTA DE TABELAS

3.1. Distância entre cidades.....	13
3.2. Ciclos hamiltonianos possíveis entre as cidades.....	14
3.3. Ordenação crescente do peso das arestas.....	15
4.1. Ilustração de soluções impossíveis no PCV.....	23
4.2. Descrição dos subconjuntos de N.....	24
4.3. Sub-ciclos possíveis com 3 nós num grafo com 7 nós.....	26
4.4. Sub-ciclos possíveis com 4 nós num grafo com 7 nós.....	26
4.5. Restrições de eliminação de sub-ciclos com 3 nós.....	26
4.6. Restrições de eliminação de sub-ciclos com 4 nós.....	27
4.7. Restrições de conectividade para sub-ciclos com 3 nós.....	28
4.8. Número de restrições de eliminação de sub-ciclos.....	36
5.1. Número de restrições da instância do PCV.....	39
5.2. Resolução e análise de várias instâncias do PCV.....	44
6.1. Restrições de um PCV com 6 clientes.....	46
6.2. Restrições do PCV com o acréscimo das variáveis de folga.....	48
6.3. Característica da matriz de restrições de alguns PCV.....	50
6.4. Formas distintas de satisfazer, no máximo, a restrição (1).....	54
6.5. Restrições de eliminação de sub-ciclos com 4 nós num grafo com 5 nós.....	55
6.6. Formas distintas de satisfazer, no máximo, a restrição (2).....	56
6.7. Formas distintas de satisfazer, no máximo, a restrição (3).....	56
6.8. Formas distintas de satisfazer, no máximo, a restrição (4).....	57
6.9. Formas distintas de satisfazer, no máximo, a restrição (5).....	57
6.10. Análise das escolhas admissíveis da restrição (6).....	59

1. INTRODUÇÃO

O sector dos transportes é, sem dúvida, uma componente essencial da economia, e de toda a sociedade em geral. Este fornece suporte à produção, ao comércio e actividades de consumo, assegurando a movimentação rápida e eficaz, disponibilizando em tempo apropriado matéria-prima, produto acabado e passageiros. Deste modo, os transportes representam uma parcela significativa do custo de inúmeros produtos, bem como da despesa nacional de qualquer país. Isto leva a uma forte e crescente preocupação por parte das mais diversas empresas de diferentes sectores, na procura de soluções que lhes permitam efectuar os seus serviços com a qualidade desejada, no menor período de tempo e com o menor custo possível, de forma a rentabilizar os seus recursos e a maximizar os lucros.

É neste contexto que, nos dias que correm, podemos enquadrar o Problema do Caixeiro Viajante (PCV). Este é um problema que, desde há muitos anos, tem sido objecto de estudo de muitos investigadores das mais diversas áreas científicas, dada a sua grande e variada aplicação. Informalmente, o PCV consiste em encontrar o trajecto de menor custo que permita a visita a todos os clientes (ou cidades) de uma determinada rede, passando exactamente uma vez por cada um, de forma a economizar recursos e/ou tempo.

Hoje em dia, o PCV é já tratado em dimensões gigantescas, em instâncias que englobam milhões de clientes (cidades), sempre com o recurso a computadores de elevada capacidade de processamento. Neste trabalho, além de uma contextualização e descrição deste tipo de problema, serão resolvidas várias instâncias que, dada a complexidade matemática e computacional do problema, serão significativamente mais pequenas das que se adequam à realidade, de forma a clarificar a sua resolução, e consequentemente facilitar a sua compreensão.

1.1. OBJECTIVO DO TRABALHO

O objectivo deste trabalho é expor de forma simples e clara o PCV, assim como descrever de forma sequencial a resolução de vários exemplos e mostrar as dificuldades existentes na obtenção da solução óptima, nomeadamente para problemas de grande dimensão. São resolvidas várias instâncias do PCV e analisadas várias das suas características e particularidades, com o objectivo de se obterem algumas conclusões

acerca do seu comportamento e, posteriormente, é feita uma generalização para problemas de dimensão superior aos que são abordados neste trabalho.

Este texto pode ser dividido em fases, que se encontram estruturadas da seguinte forma:

- O que é, para que serve e como se resolve um PCV;
- Mostrar, através da resolução de vários exemplos, que é difícil obter a solução exacta usando todas as restrições, mas que, na verdade, é possível obter a solução óptima com apenas uma percentagem muito pequena de restrições relativamente ao conjunto inicial;
- Investigar o conjunto de restrições de eliminação de sub-ciclos e avaliar possíveis redundâncias neste conjunto.

1.2. ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho encontra-se organizado e distribuído em 7 capítulos, incluindo esta introdução. No capítulo 2, é feita uma breve referência à origem e contextualização histórica do PCV, assim como um retrato da evolução verificada ao longo das últimas décadas nos métodos de resolução do mesmo.

No capítulo 3, é apresentado um exemplo ilustrativo do PCV que, posteriormente, é resolvido por dois métodos heurísticos distintos, sem recurso a qualquer programa computacional.

No capítulo 4, encontram-se algumas noções básicas acerca de grafos, cujo conhecimento e interiorização são relevantes para a compreensão deste estudo. Posteriormente, são apresentadas e descritas diferentes formulações matemáticas para o PCV.

No capítulo 5, são resolvidas, de forma sequencial, várias instâncias do PCV, recorrendo às formalizações matemáticas apresentadas no capítulo anterior.

No capítulo 6, é feita uma análise a algumas características das restrições de eliminação de sub-ciclos com o objectivo de se retirar algumas conclusões para a simplificação da resolução deste tipo de problemas.

Finalmente, no capítulo 7 são apresentadas as conclusões e recomendações resultantes da pesquisa e do estudo efectuados.

2. O PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE (PCV)

2.1. PCV: ORIGEM E CONTEXTUALIZAÇÃO

O Problema do Caixeiro Viajante (PCV) é um dos problemas mais famosos de Optimização Combinatória. Como já referido, o PCV consiste em encontrar o trajecto de menor custo que permita a visita a todos os clientes de uma determinada rede, passando exactamente uma vez por cada um. Este trabalho será focado no PCV simétrico, isto é, dadas duas cidades A e B, o custo associado à ligação de A para B é exactamente o mesmo custo associado à ligação de B para A.

Apesar da sua formulação simples, este é um problema que continua a captar a atenção e o interesse de muitos investigadores das mais diversas áreas, entre as quais Matemática, Investigação Operacional, Física e Biologia. Este amplo interesse no PCV deve-se em grande parte, não só à simples formulação já referida, mas também às suas diversas aplicações. De facto, inúmeros problemas reais podem ser modelados e tratados como uma variante do PCV, como por exemplo problemas de produção, que consistem na criação da sequência de um dado número de tarefas numa máquina de forma a minimizar o tempo total de execução das mesmas. Um outro conjunto de exemplos típicos de aplicação do PCV são os problemas de construção de rotas de veículos¹, de forma a minimizar os custos de distribuição e/ou o tempo despendido.

A origem deste problema não está precisamente estabelecida, no entanto, segundo Goldbarg e Luna [9], a sua génese deve-se a William Rowan Hamilton², que desenvolveu um sistema de álgebra não comutativa – o Cálculo Icosiano – que pode ser interpretado em termos de caminhos sobre um grafo descrito por um dodecaedro regular. Hamilton, em 1859, construiu um puzzle a que chamou o Jogo Icosiano (Figura 2.1). Neste jogo, cada um dos vértices (ou nós) do dodecaedro tinha escrito o nome de uma importante cidade e o desafio que se colocava ao jogador era o de encontrar um caminho percorrendo as arestas do dodecaedro de modo a passar exactamente uma vez por cada uma das cidades e regressar ao ponto de partida.

¹ Informações mais detalhadas sobre rotas de veículos aplicadas ao transporte escolar podem ser consultadas em [15].

² **William Rowan Hamilton** (1805-1865): matemático, físico e astrónomo irlandês. Fez contribuições importantes no desenvolvimento da óptica, dinâmica e álgebra. A sua descoberta mais importante, na área da Matemática, foi a dos Quaterniões. Em Física, foi muito conhecido pelo seu trabalho em mecânica analítica, que veio a ser muito influente nas áreas da mecânica quântica e da teoria quântica de campos.



Figura 2.1: Jogo Icosiano.

O PCV é um problema classificado como NP-Completo. Segundo Cormen [5], esta classe é constituída pelos problemas para os quais ainda não foi descoberto qualquer algoritmo capaz de os resolver em tempo polinomial e, por outro lado, ainda ninguém foi capaz de provar a sua inexistência. Dito de outra forma, significa que o PCV possui ordem de complexidade exponencial, isto é, o esforço computacional para a sua resolução aumenta exponencialmente com o número de nós a serem visitados.

Deste modo, apesar dos imensos estudos efectuados com o objectivo de encontrar formas rápidas e eficazes de obter a solução para este tipo de problemas em tempo útil, até hoje, tal não foi possível. Este facto leva a que, na maior parte dos casos, os métodos de obtenção de solução aplicados a problemas reais sejam heurísticos, isto é, não garantem a obtenção da solução óptima do problema do ponto de vista matemático.

2.2. EVOLUÇÃO HISTÓRICA DA RESOLUÇÃO DO PCV

Apesar da origem deste problema ser atribuída a Hamilton, o PCV foi difundido pela primeira vez, em 1920, em Viena, pelo matemático Karl Menger³ que o divulgou pelos seus companheiros universitários. Em 1930, o problema reapareceu no seio da comunidade matemática em Princeton. Já na década de 40, foi estudado por vários

³ **Karl Menger** (1902-1985): matemático de sucesso da sua época. Filho do famoso economista Carl Menger, obteve o seu doutoramento na Universidade de Viena, trabalhando em várias áreas da matemática, nomeadamente em álgebra e geometria. Menger deu um grande contributo para o desenvolvimento da teoria de jogos.

estatísticos, nomeadamente Mahalanobis⁴ (1940) e Jessen⁵ (1942) com vista a aplicações no sector agrícola. Este problema foi ainda difundido na RAND Corporation⁶ pelo matemático Flood⁷, onde ganhou uma grande popularidade, passando mesmo a ser considerado o protótipo dos problemas difíceis da Optimização Combinatória. Nesta altura, a análise de todos os trajectos possíveis, um a um, começava a ser posta de parte, dado que à medida que o número de clientes/cidades aumenta, o número de trajectos possíveis também aumenta de forma muito significativa, tornando esta análise completamente impraticável em tempo útil.

A grande evolução na resolução do PCV deve-se a George Dantzig, Ray Fulkerson e Selmer Johnson que, em 1954, publicaram um artigo, intitulado *Solution of a large-scale Traveling-Salesman Problem* [8] (que é hoje considerado um clássico) onde descrevem um método de resolução do problema, ao mesmo tempo que demonstram graficamente o poder desse método com a resolução de uma instância do PCV constituída por 49 cidades, o que representava um grande número na altura.

Para construir essa instância, escolheram uma cidade de cada um dos 48 estados dos E.U.A. (o Alaska e o Hawaii apenas se tornaram estados em 1959) juntamente com Washington D.C..

⁴ **Prasanta Chandra Mahalanobis** (1893-1972): cientista e estatístico indiano, considerado por muitos, um renascentista. Obteve a sua graduação com distinção em Física, no *King's College*, em Cambridge. Publicou, em conjunto com outros professores, vários artigos relevantes na área de Estatística. Foi o fundador do Instituto Indiano de Estatística e contribuiu para estudos de amostras de grande escala.

⁵ **Raymond Jessen** (1910-2003): prestigiado estatístico que desde sempre teve um grande gosto e interesse pela actividade agrícola, obtendo, em 1937, uma licenciatura em Economia Agrícola. Foi encorajado por vários professores a prosseguir os seus estudos, conciliando as suas reconhecidas potencialidades estatísticas com o seu interesse pela agricultura. O resultado foi a sua Tese de Doutoramento, na qual criou a ideia de amostragem por áreas, desenvolvendo-a e utilizando-a para estimar factos acerca de explorações agrícolas. O doutoramento foi atribuído em 1943, conquistando de seguida um lugar de professor na Universidade do Estado de Iowa. Ao longo da sua carreira, direccionou sempre os seus trabalhos nas possíveis aplicações no sector agrícola.

⁶ **RAND Corporation** (Research ANd Development): instituição sem fins lucrativos, criada em 1948, cujo principal objectivo era o de, através de pesquisas e análises aprofundadas, ajudar a melhorar a política e a tomada de decisões dos responsáveis pelas Forças Armadas dos E.U.A.. Ao longo dos anos, esta instituição tem sofrido uma grande expansão, trabalhando quer com outros governos, quer com fundações privadas, organizações comerciais e internacionais. Tem sempre em vista uma análise objectiva e uma consequente obtenção de soluções eficazes para as questões com que se depara, de forma a auxiliar estas instituições a enfrentar os desafios políticos, sociais e económicos com que se deparam constantemente.

⁷ **Merrill Flood**: matemático americano, reconhecido pelo contributo dado para a base do Dilema do Prisioneiro (célebre problema da Teoria de Jogos), durante o período que colaborou com a RAND Corporation.

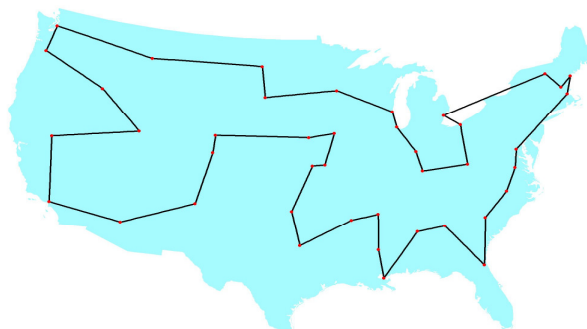


Figura 2.2⁸: Solução gráfica da instância do PCV constituída por 49 cidades.

A figura 2.2 ilustra a solução encontrada para este problema. Este artigo foi, sem dúvida, o grande impulsionador do desenvolvimento da resolução deste tipo de problemas.

Já na década de 70, mais especificamente em 1977, Grotschel⁹ encontrou um percurso óptimo para um problema constituído por 120 cidades da Alemanha Ocidental. Nos trinta anos seguintes verificou-se um enorme progresso na resolução deste tipo de problemas, como podemos ver no gráfico seguinte (Figura 2.3) que ilustra de forma clara tal avanço.

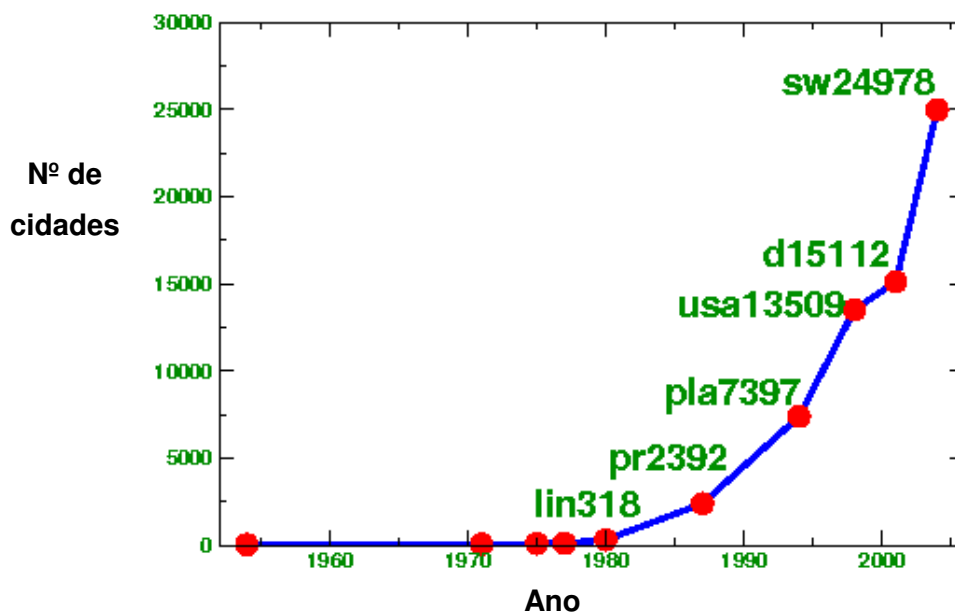


Figura 2.3¹⁰: Evolução da resolução do PCV desde 1954 até 2004.

⁸ Imagem retirada de <http://www.tsp.gatech.edu/history/pictorial/dfj.html> (confirmado em 20.09.08)

⁹ **Martin Grotschel**: Professor no Instituto de Matemática da Universidade Técnica de Berlim, Alemanha. As suas principais áreas de investigação são a Optimização, Matemáticas Discreta e Pesquisa Operacional. Há mais de três décadas que publica artigos de grande relevo nestas áreas. Informação mais detalhada pode ser consultada em <http://www.zib.de/groetschel/>.

¹⁰ Imagem retirada de <http://www.tsp.gatech.edu/methods/progress/progress.htm> (confirmado em 21.09.08).

Em 1973, Lin e Kernighan [12] propuseram um problema constituído por 318 nós (problema conhecido por lin318), que foi resolvido, pela primeira vez, em 1980, por Crowder e Padberg [6]. Em 1987, Padberg e Rinaldi [14] apresentaram um método de resolução para uma instância constituída por 532 cidades dos Estados Unidos da América (problema conhecido por att532). Ainda nesse mesmo ano, propuseram e resolveram uma nova instância do PCV composta por 2392 nós (problema conhecido por pr2392).

Applegate¹¹, Bixby¹², Chvátal¹³ e Cook¹⁴ deram um grande contributo na resolução de instâncias do PCV. Em 1994, resolveram uma instância composta por 7397 cidades (problema que ficou conhecido por pla7397). Em 1998, resolveram uma instância de elevada dimensão constituída por 13 509 cidades, todas elas com pelo menos 500 habitantes, dos E.U.A. (problema conhecido por usa13509¹⁵). Já em 2001, resolvem um problema de ainda maior dimensão, constituído por 15 112 cidades da Alemanha (problema conhecido por d15112).

Em 2004, a mesma equipa de investigadores juntamente com Helsgaun¹⁶ resolveu uma instância do PCV constituída por 24 978 cidades da Suécia (problema conhecido por sw24978).

De forma sucinta, é esta a evolução ilustrada no gráfico (Figura 2.3), que é, na verdade, surpreendente. No entanto, nos quatro anos seguintes, houve um avanço gigantesco neste estudo. Os últimos dados conhecidos, apontam para o estudo de uma instância do PCV constituída por **1 904 711** localidades (vilas e cidades povoadas) de todo o mundo, daí este ser denominado por *World TSP*¹⁷. O melhor trajecto conhecido para solucionar este problema foi encontrado por Helsgaun, em Julho de 2008, cujo comprimento é de **7 515 948 301**. No entanto, já em Setembro de 2003, havia

¹¹ **David Applegate**: Professor Associado no Departamento de Matemática Aplicada e Computacional da Universidade de Rice, E.U.A. e investigador no *AT&T Labs*. É considerado um dos cientistas líderes no campo da Optimização.

¹² **Robert Bixby**: Professor e Investigador na área de Gestão no Departamento de Matemática Aplicada e Computacional da Universidade de Rice, E.U.A.. É considerado um marco na área da Optimização.

¹³ **Vasek Chvátal**: Professor no Departamento de Ciências dos Computadores da Universidade de Rutgers, E.U.A..

¹⁴ **William Cook**: Professor no Departamento de Matemática Aplicada e Computacional da Universidade de Rice, E.U.A..

¹⁵ Informação detalhada sobre este problema em http://www.crpc.rice.edu/CRPC/newsletters/sum98/news_tsp.html (informação confirmada em 21.09.08)

¹⁶ **Keld Helsgaun**: Professor associado no Departamento de Ciências dos Computadores da Universidade de Roskilde, Dinamarca. As suas principais áreas de investigação são Inteligência Artificial e Optimização Combinatória.

¹⁷ Toda a informação de forma detalhada sobre este problema pode ser encontrada no site <http://www.tsp.gatech.edu/world/index.html> (informação confirmada em 10.09.08)

conseguido chegar a um dos melhores trajectos conhecidos, com um comprimento de **7 517 285 610**.

No momento presente, o melhor limite inferior para o comprimento de um percurso deste problema é o de **7 512 218 268**. Este limite mostra que o percurso obtido por Helsgaun tem, no máximo, um comprimento 0.04987% maior do que o comprimento do percurso correspondente à solução óptima do problema. Ou seja, o resultado obtido por Helsgaun é, assim, muito próximo do óptimo, o que é surpreendente tendo em conta a enorme dimensão do problema. A Figura 2.4 ilustra de forma clara a dimensão e densidade deste problema. São, assim, evidentes os investimentos e esforços que têm sido feitos, ao longo das últimas décadas, no sentido de melhorar os métodos de resolução para este tipo de problemas, estando a fasquia cada vez mais elevada.



Figura 2.4: Ilustração gráfica do *World TSP*.

3. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DO PCV: HEURÍSTICOS E EXACTOS

Segundo Laporte [11], os métodos utilizados para a obtenção de solução do PCV podem ser divididos em dois grupos: os métodos exactos e os métodos heurísticos.

Os métodos exactos são aqueles que possibilitam a obtenção da solução óptima do problema e baseiam-se, normalmente, em procedimentos de enumeração implícita em árvore, como é o caso do método Branch & Bound¹⁸, para o qual têm sido propostas diferentes funções limitadoras. No entanto, dadas as várias limitações destes métodos, nomeadamente a elevada capacidade computacional necessária para a resolução de instâncias com um elevado número de nós, a atenção é cada vez mais dirigida para os métodos heurísticos.

Estes métodos permitem a obtenção de soluções aproximadas, porém com maior rapidez e em problemas de grande dimensão. Heurísticas são procedimentos de obtenção de solução que, na maior parte das vezes, se baseiam numa abordagem intuitiva, na qual a estrutura particular do problema possa ser considerada e explorada de forma inteligente para a obtenção da solução adequada. Tal facto leva a que, na maioria dos casos, as heurísticas propostas sejam bastante específicas para o problema em causa, o que impossibilita a obtenção de boas soluções para problemas com características ou restrições um pouco distintas das dos problemas para as quais foram desenvolvidas.

De forma a facilitar a compreensão deste tipo de problemas, apresentamos um exemplo simples de um PCV, com um número reduzido de cidades que o Caixeiro Viajante tem de visitar. Para determinar o melhor trajecto a percorrer, vamos recorrer a dois métodos heurísticos distintos.

¹⁸ **Branch and bound** é um algoritmo geral para encontrar soluções óptimas de problemas de optimização em programação linear inteira. Este método consiste numa enumeração sistemática de todos os candidatos a solução do problema, onde grandes subconjuntos de candidatos sem sucesso são descartados em massa, através do uso de limites superior e inferior estimados da variável que está a ser optimizada. O método foi inicialmente proposto em 1960, por A. H. Land e A. G. Doig para problemas de programação linear.

3.1. Exemplo de um problema ilustrativo do PCV

Exemplo 3.1.1: Um vendedor de uma empresa do sector metalúrgico pretende visitar seis dos seus clientes, instalados na Península Ibérica. Para tal, pretende determinar o melhor percurso a efectuar, tendo em conta exclusivamente as distâncias entre as várias cidades em causa.

Na Tabela 3.1, temos as distâncias (em Km) entre as várias cidades a serem visitadas pelo vendedor. No mapa (Figura 3.1), podemos observar um esquema representativo das respectivas localizações.

	Évora	Elvas	Faro	Salamanca	Madrid
Lisboa	133	208	277	472	628
Évora	--	85	173	390	606
Elvas	--	--	363	306	422
Faro	--	--	--	709	723
Salamanca	--	--	--	--	208

Tabela 3.1: Distância entre cidades.



Figura 3.1¹⁹: Localização geográfica das cidades.

¹⁹ O mapa da Figura 3.1 e as distâncias apresentadas na Tabela 3.1 foram obtidos através do *software* Google Earth.

3.1.1. RESOLUÇÃO USANDO O MÉTODO DO VIZINHO MAIS PRÓXIMO

Este método consiste em, dado um conjunto de cidades que o Caixeiro Viajante tem de visitar, começar por escolher (aleatoriamente) uma cidade para iniciar o percurso. De seguida, seguir para a mais próxima e assim sucessivamente até voltar à cidade inicial. No entanto, nem sempre é possível escolher a cidade mais próxima, pois esta pode já ter sido visitada e a sua escolha iria possibilitar a formação de um sub-ciclo, isto é, iria terminar o percurso antes que todas as cidades tivessem sido visitadas.

Aplicando este algoritmo, para as seis cidades apresentadas, temos os seguintes resultados:

Percursos	Total (Km)
Lisboa → Évora → Elvas → Salamanca → Madrid → Faro → Lisboa	1732
Faro → Évora → Elvas → Lisboa → Salamanca → Madrid → Faro	1869
Évora → Elvas → Lisboa → Faro → Salamanca → Madrid → Évora	1993
Elvas → Évora → Lisboa → Faro → Salamanca → Madrid → Elvas	1834
Salamanca → Madrid → Elvas → Évora → Lisboa → Faro → Salamanca	1834
Madrid → Salamanca → Elvas → Évora → Lisboa → Faro → Madrid	1732

Tabela 3.2: Ciclos hamiltonianos possíveis entre as cidades.

Na Tabela 3.2, podemos encontrar os dois percursos que seriam os mais económicos (tendo apenas em conta a distância entre as cidades), um com início em Lisboa, outro com início em Madrid. É importante realçar que este método apenas nos fornece a melhor solução em cada etapa, o que pode não conduzir à solução óptima global. No entanto, este é um processo a que várias vezes se recorre neste tipo de problemas dado que reduz de forma significativa o número de percursos a analisar. Note-se que, com apenas 6 cidades, temos um total de $\frac{5!}{2} = 60$ percursos nas condições pretendidas. De uma forma geral, para o PCV simétrico, no caso de existirem n cidades para visitar, o número de trajectos nas condições desejadas, isto é, trajectos que permitem ao Caixeiro Viajante visitar todas as cidades da sua rota, sem repetir qualquer uma delas e regressar à cidade inicial, é dado por $\frac{(n-1)!}{2}$.

Deste modo, este algoritmo reduz o número de possibilidades para o número de cidades a visitar, não sendo no entanto um método sempre eficaz.

3.1.2. RESOLUÇÃO USANDO UM MÉTODO DE INSERÇÃO

Os métodos de inserção partem de um trajecto inicial composto por apenas 2 cidades, acrescentando-se, de seguida e de forma sequencial, todas as outras cidades que ainda não haviam sido incluídas no trajecto. Segundo Laporte [11], essa selecção sucessiva pode atender a diversos critérios, nomeadamente: a cidade mais próxima do trajecto, ou a mais distante; aquela cidade que forma o maior ângulo com duas cidades já incluídas no trajecto; a cidade que proporciona o menor acréscimo de distância total ao percurso parcial já construído.

Neste caso, vamos usar um algoritmo de inserção baseado na ordenação do peso (distância) das arestas. Começamos por ordenar as arestas por ordem crescente do respectivo peso. O objectivo é a construção de um percurso nas condições anteriormente descritas que inclua as arestas de menor peso, tendo em conta as seguintes restrições:

- não se inclui uma nova aresta incidente num vértice já visitado por duas arestas;
- não se fecha um ciclo enquanto existirem nós não visitados.

Por ordem crescente, a ordenação das arestas é dada por:

85	Évora → Elvas
133	Lisboa → Évora
173	Évora → Faro
208	Madrid → Salamanca
208	Lisboa → Elvas
277	Lisboa → Faro
306	Salamanca → Elvas
363	Faro → Elvas
390	Évora → Salamanca
422	Madrid → Elvas
472	Lisboa → Salamanca
506	Madrid → Évora
628	Madrid → Lisboa
709	Faro → Salamanca
723	Madrid → Faro

Tabela 3.3: Ordenação crescente do peso das arestas.

Tomemos, para iniciar o algoritmo, a aresta de menor peso, que liga Évora a Elvas. De seguida, inclua-se na solução a segunda aresta de menor peso, que liga Lisboa a Évora, dado que esta não corrompe qualquer uma das condições impostas. No entanto, já a terceira aresta não pode ser incluída, pois tal implicaria que se voltasse a uma cidade já visitada. Portanto, segue-se para a quarta aresta, que pode ser incluída no percurso. O mesmo não acontece com a quinta aresta, pois a sua inclusão formaria um circuito que não incluía algumas das cidades a serem visitadas. Procedendo com este raciocínio, chegamos à conclusão que o percurso obtido por este método (representado a *bold*) é igual ao primeiro percurso obtido pelo método do vizinho mais próximo, com um total de 1732 km de distância a percorrer.

Os dois métodos apresentados levam-nos à conclusão de que a distância mínima que o Caixeiro Viajante tem de percorrer é a de 1732 km, seguindo o caminho apresentado. No entanto, apesar destes dois métodos heurísticos nos induzirem que esta é a solução óptima do problema, ainda não podemos garantir efectivamente que assim seja.

Ao longo deste trabalho, iremos recorrer à análise de vários exemplos semelhantes ao anterior, tendo como objectivo estudar qual a melhor forma para obter a solução óptima do problema de um modo o mais eficaz possível. Iremos começar por formalizar matematicamente o PCV de forma a prosseguir com o seu estudo e depuração.

4. FORMALIZAÇÃO DO PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE (PCV)

4.1. ALGUMAS NOÇÕES BÁSICAS SOBRE GRAFOS

Para dar seguimento ao estudo do PCV, é necessário definir formalmente alguns conceitos e noções que vão ser frequentemente utilizados ao longo deste trabalho.

Definição 4.1.1: Um **grafo** consiste em dois conjuntos finitos e disjuntos, V (de vértices ou nós) e A (de arestas ou ligações) e uma função ψ dita de incidência definida em A tais que:

- i. $V \neq \emptyset$
- ii. para cada $a \in A$, $\psi(a)$ é um par de elementos de V (não necessariamente distintos).

Definição 4.1.2: Dois **vértices** dizem-se **adjacentes**, se existe $a \in A$, tal que $\psi(a)=uv$.

Definição 4.1.3: Uma aresta que liga um vértice com ele próprio chama-se **lacete** ou **laço**.

Definição 4.1.4: Se dois vértices estão ligados por mais do que uma aresta, então as arestas que os ligam chamam-se **arestas múltiplas**.

Exemplo 4.1.1: Consideremos o seguinte grafo G , onde $V = \{1,2,3,4,5\}$ e $A = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$.

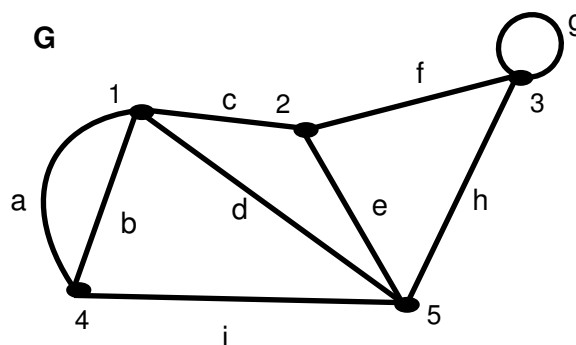


Figura 4.1: Exemplo de um grafo.

Neste caso, temos que, por exemplo:

- os vértices 1 e 2 são adjacentes dado que existe uma aresta, c, que os une;
- as arestas a e b dizem-se arestas múltiplas dado que têm os mesmos vértices como extremidades;
- a aresta g diz-se um lacete dado que liga o vértice 3 a ele próprio.

Definição 4.1.5: Um **grafo simples** é um grafo sem lacetes e sem arestas múltiplas.

Exemplo 4.1.2: Se ao grafo G, do exemplo anterior, retirarmos uma das arestas que liga os vértices 1 e 4, e o lacete incidente no vértice 3, obtemos o grafo simples, H.

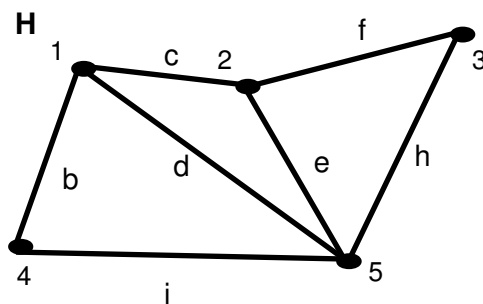


Figura 4.2: Grafo simples.

Nota: De forma a simplificar a notação, nos exemplos seguintes não serão utilizadas letras para identificar as arestas, usando apenas os números para os vértices (ou nós).

Definição 4.1.6: Um **grafo completo** com n vértices é um grafo simples em que quaisquer dois vértices são adjacentes e representa-se por K_n .

Definição 4.1.7: O **grau do vértice** v é o número de arestas que incidem em v e designa-se por $g(v)$.

Definição 4.1.8: Um **grafo** diz-se **regular** (de grau k) se todos os vértices tiverem o mesmo grau (igual a k).

Exemplo 4.1.3: Considere-se, por exemplo, K_6 , grafo completo de seis vértices. Todos os vértices têm grau 5, logo K_6 é um exemplo de um grafo regular de grau 5.

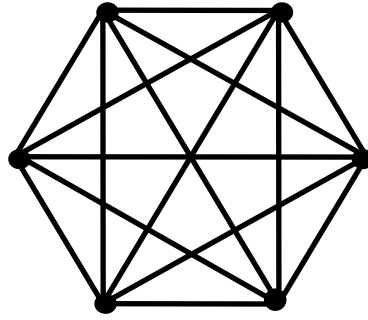


Figura 4.3: Grafo completo de seis vértices (ou nós).

Definição 4.1.9: Dado um grafo G , um **passeio** em G é uma sucessão finita, não vazia, de vértices (ou nós) adjacentes. Diz-se um passeio fechado se começa e termina no mesmo vértices, e aberto, caso contrário.

Definição 4.1.10: Um **caminho** é um passeio sem repetição de vértices.

Definição 4.1.11: Um **ciclo** é um passeio fechado, sem repetição de vértices, com a excepção do primeiro e do último.

Definição 4.1.12: O **comprimento do caminho** $v_0 \dots v_k$ é k , igual ao número de arestas.

Exemplo 4.1.4: Consideremos o grafo G da Figura 4.4:

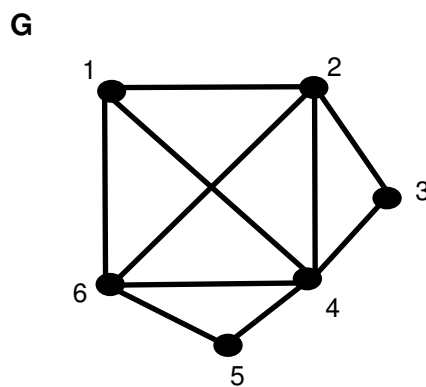


Figura 4.4: Exemplo de um grafo.

Vejam os alguns exemplos, em G , de:

- um passeio aberto: 1 2 3 4 2;
- um passeio fechado: 1 2 3 4 2 1;
- um caminho: 1 6 5 4;
- um ciclo: 1 6 5 4 2 1.

Definição 4.1.13: Seja G um grafo. Um **caminho hamiltoniano** em G é um caminho (passeio sem repetição de vértices) que contém todos os vértices de G . No caso de ser fechado, tal caminho diz-se um **ciclo hamiltoniano**.

Nota: Se a um ciclo hamiltoniano retirarmos uma aresta obtemos um caminho hamiltoniano.

Definição 4.1.14: Um grafo G é um **grafo hamiltoniano** se admitir um ciclo hamiltoniano.

Note-se que o grafo G do exemplo 4.1.4, é um grafo hamiltoniano, pois este contém um ciclo hamiltoniano (1 2 3 4 5 6 1).

Definição 4.1.15: Um **grafo** diz-se **dirigido ou orientado** quando o sentido das ligações entre os vértices é considerado, isto é, as arestas possuem uma direcção. Neste caso, as arestas passam a denominar-se por arcos.

Definição 4.1.16: Um **grafo simétrico** é um grafo onde existem arestas dirigidas de um vértice para o outro em ambos os sentidos. Um grafo não orientado é sempre simétrico.

Exemplo 4.1.5: Vejam as seguintes figuras de modo a esclarecer os conceitos das definições 4.1.15 e 4.1.16.

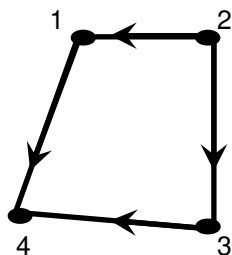


Figura 4.5: Exemplo de um grafo orientado e não simétrico.

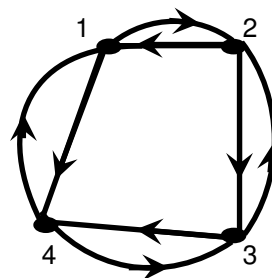


Figura 4.6: Exemplo de um grafo orientado e simétrico.

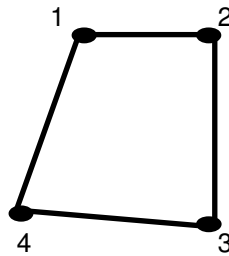


Figura 4.7: Exemplo de um grafo não orientado (simétrico).

4.2. FORMULAÇÕES MATEMÁTICAS DO PCV

A formalização matemática do PCV requer a definição formal de alguns conjuntos e parâmetros fundamentais: $N = \{1, 2, \dots, n\}$ representa o conjunto com n clientes do plano; c_{ij} , representa o custo associado à ligação entre os clientes $i, j \in N$ e, por último, x_{ij} , representa o número de vezes que é usada a ligação entre o cliente i e o cliente j (são designadas por variáveis de decisão).

Dantzig, Fulkerson e Johnson [8] foram os pioneiros na formalização do PCV, quando em 1954, publicaram um artigo onde fazem uma análise detalhada deste problema e o formalizam matematicamente, em programação linear binária, da seguinte forma:

Formulação 1:

$$\text{Min} \quad Z = \sum_{i,j \in N, i < j} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{i \in N, i < g} x_{ig} + \sum_{j \in N, g < j} x_{gj} = 2, \quad g \in N \quad (1.1)$$

$$\sum_{i,j \in S, i < j} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad S \subset N, 3 \leq |S| \leq n - 3 \quad (1.2)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j \in N, i < j \quad (1.3)$$

A função objectivo (z) representa o custo total do percurso do Caixeiro Viajante. Note-se que se o custo for de uma unidade monetária por cada unidade de comprimento, a função objectivo irá traduzir o valor da distância percorrida pelo Caixeiro Viajante. As restrições (1.1), designadas por restrições de afectação, estabelecem que cada cliente é visitado exactamente uma vez, tendo em conta as restrições (1.3), que atribuem o valor 0 para arestas que não sejam incluídas na solução e o valor 1 caso contrário. As restrições (1.2) têm como objectivo o impedimento de sub-ciclos que não contenham todos os clientes.

As restrições de integralidade juntamente com as restrições de afectação não permitem a formação de sub-ciclos com menos de 3 nós. Pois, como estamos a estudar PCV simétrico e todos os nós têm grau 2, não é permitida a existência de nós isolados nem de arestas múltiplas. Isto justifica a indicação $S \subset N, 3 \leq |S| \leq n-3$, nas restrições (1.2).

Deste modo, no caso de termos menos de 6 clientes, as restrições necessárias são apenas as restrições de afectação, pois estas impõem imediatamente a inexistência de sub-ciclos. Já vimos que para $n \leq 3$, não há possibilidade de formação de sub-ciclos. Portanto, basta-nos analisar a possibilidade de existência de sub-ciclos com 3 nós, no caso de termos 4 ou 5 clientes. Em ambos os casos, tal não é possível, pois, para $n=4$, a existência de um sub-ciclo com 3 nós, implicaria a existência de 1 nó isolado; por outro lado, no caso de $n=5$, implicaria a existência de um sub-ciclo com 2 nós ou de nós isolados.

Na Tabela 4.1, podemos ver algumas ilustrações dos casos referidos.

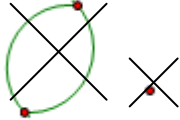
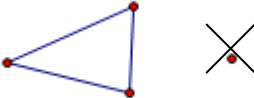
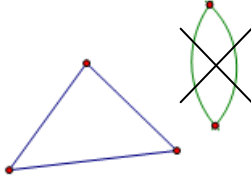
Número de nós	Situações que não podem acontecer
n=3	
n=4	
n=5	

Tabela 4.1: Ilustração de soluções impossíveis no PCV.

Assim, concluímos que para PCVs com menos de seis clientes, não é necessário incluir restrições de eliminação de sub-ciclos. Portanto, as restrições de eliminação de sub-ciclos têm relevância em PCVs constituídos por pelo menos seis clientes.

Segundo Barreto [2], dado um PCV com n clientes, o número de restrições de eliminação de sub-ciclos, que cresce exponencialmente com o número de clientes, é dado por $2^n - n^2 - n - 2$.

De forma a ganharmos alguma intuição sobre esta expressão, concretizemos um exemplo de um PCV com 7 clientes, que pode então ser representado por um grafo com 7 nós. Neste caso, $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Sem ter em conta a fórmula apresentada, vejamos qual o número de restrições de eliminação de sub-ciclos necessário para a resolução do problema segundo a Formulação 1.

Começemos por construir o conjunto das partes de N , $P(N)$, isto é, o conjunto constituído por todos os subconjuntos de N , cujo cardinal é 2^n . Como $n = 7$, temos um total de 128 subconjuntos de N , que se encontram descritos na Tabela 4.2.

Nº de nós	Descrição dos subconjuntos de N	Nº total
0	\emptyset	1
1	$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}$	7
2	$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{1,7\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{2,7\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{3,7\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{4,7\}, \{5,6\}, \{5,7\}, \{6,7\}$	21
3	$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,2,6\}, \{1,2,7\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,3,6\}, \{1,3,7\}, \{1,4,5\}, \{1,4,6\}, \{1,4,7\}, \{1,5,6\}, \{1,5,7\}, \{1,6,7\}, \{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,3,6\}, \{2,3,7\}, \{2,4,5\}, \{2,4,6\}, \{2,4,7\}, \{2,5,6\}, \{2,5,7\}, \{2,6,7\}, \{3,4,5\}, \{3,4,6\}, \{3,4,7\}, \{3,5,6\}, \{3,5,7\}, \{3,6,7\}, \{4,5,6\}, \{4,5,7\}, \{4,6,7\}, \{5,6,7\}$	35
4	$\{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,3,6\}, \{1,2,3,7\}, \{1,2,4,5\}, \{1,2,4,6\}, \{1,2,4,7\}, \{1,2,5,6\}, \{1,2,5,7\}, \{1,2,6,7\}, \{1,3,4,5\}, \{1,3,4,6\}, \{1,3,4,7\}, \{1,3,5,6\}, \{1,3,5,7\}, \{1,3,6,7\}, \{1,4,5,6\}, \{1,4,5,7\}, \{1,4,6,7\}, \{1,5,6,7\}, \{2,3,4,5\}, \{2,3,4,6\}, \{2,3,4,7\}, \{2,3,5,6\}, \{2,3,5,7\}, \{2,3,6,7\}, \{2,4,5,6\}, \{2,4,5,7\}, \{2,4,6,7\}, \{2,5,6,7\}, \{3,4,5,6\}, \{3,4,5,7\}, \{3,4,6,7\}, \{3,5,6,7\}, \{4,5,6,7\}$	35
5	$\{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,6\}, \{1,2,3,4,7\}, \{1,2,3,5,6\}, \{1,2,3,5,7\}, \{1,2,3,6,7\}, \{1,2,4,5,6\}, \{1,2,4,5,7\}, \{1,2,4,6,7\}, \{1,2,5,6,7\}, \{1,3,4,5,6\}, \{1,3,4,5,7\}, \{1,3,4,6,7\}, \{1,3,5,6,7\}, \{1,4,5,6,7\}, \{2,3,4,5,6\}, \{2,3,4,5,7\}, \{2,3,4,6,7\}, \{2,3,5,6,7\}, \{2,4,5,6,7\}, \{3,4,5,6,7\}$	21
6	$\{1,2,3,4,5,6\}, \{1,2,3,4,5,7\}, \{1,2,3,4,6,7\}, \{1,2,3,5,6,7\}, \{1,2,4,5,6,7\}, \{1,3,4,5,6,7\}, \{2,3,4,5,6,7\}$	7
7	$\{1,2,3,4,5,6,7\}$	1
Total		128

Tabela 4.2: Descrição dos subconjuntos de N.

Como temos um grafo com 7 nós, temos de considerar os subconjuntos $S \subseteq N$ tal que $3 \leq |S| \leq 7$, obtendo um total de 70 subconjuntos (consultar Tabela 4.2). Os subconjuntos com 1, 2, 5 e 6 elementos são no total 56, que pode ser escrito como $7^2 + 7$. Temos, ainda, mais 2 subconjuntos que se referem ao conjunto vazio e ao próprio conjunto N. Então, desta forma, para obtermos o número de restrições teríamos de retirar ao número total de subconjuntos de N, que é de 128, um total de $7^2 + 7 + 2 = 58$, o que equivale a efectuar o cálculo $2^7 - 7^2 - 7 - 2 = 70$, o que vai de encontro ao pretendido.

Uma outra possível formulação para o PCV, também proposta por *Dantzig et al.* [8], pode ser obtida pela substituição das restrições (1.2) por restrições do tipo:

$$\sum_{i \in S, j \in \bar{S}} x_{ij} \geq 1 \quad , \quad S \subset N, 3 \leq |S| \leq n-3.$$

A formalização do PCV usando as restrições de conectividade, é a seguinte:

Formulação 2:

$$\text{Min} \quad Z = \sum_{i,j \in N, i < j} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{i \in N, i < g} x_{ig} + \sum_{j \in N, g < j} x_{gj} = 2 \quad , \quad g \in N \quad (2.1)$$

$$\sum_{i \in S, j \in \bar{S}} x_{ij} \geq 1 \quad , \quad S \subset N, 3 \leq |S| \leq n-3 \quad (2.2)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad , \quad i,j \in N, i < j \quad (2.3)$$

Note-se que, nesta formulação, existem restrições de conectividade que se repetem. Vejamos um exemplo simples de forma a consolidarmos este facto.

Exemplo 4.1: Consideremos uma instância do PCV constituída por 7 clientes, a qual pode ser representada por um grafo com 7 nós. Como nos vamos centrar apenas nas restrições do problema, não é necessário especificar um problema em concreto.

A existência de 7 nós implica a existência de 21 variáveis de decisão (x_{ij}) (note-se que para um problema com n clientes, o número de variáveis de decisão é dado por ${}^n C_2$, dado que se tratam de PCV simétricos). Dada a existência de 7 nós, temos 7 restrições de afectação (1.1 e 2.1, respectivamente, Formulação 1 e 2) e, como já vimos, temos apenas de nos preocupar com a existência de sub-ciclos com 3 e 4 nós. Temos um total de 35 sub-ciclos possíveis com 3 nós e também 35 sub-ciclos possíveis com 4 nós (note-se que dado um problema com n nós, o número de sub-ciclos com k nós é dado por ${}^n C_k$), que podemos ver especificados na Tabela 4.3. e na Tabela 4.4, respectivamente.

123	134	146	234	246	345	367
124	135	147	235	247	346	456
125	136	156	236	256	347	457
126	137	157	237	257	356	467
127	145	167	245	267	357	567

Tabela 4.3: Sub-ciclos possíveis com 3 nós num grafo com 7 nós.

1234	1246	1345	1367	2345	2367	3456
1235	1247	1346	1456	2346	2456	3457
1236	1256	1347	1457	2347	2457	3467
1237	1257	1356	1467	2356	2467	3567
1245	1267	1357	1567	2357	2567	4567

Tabela 4.4: Sub-ciclos possíveis com 4 nós num grafo com 7 nós.

Portanto, segundo a Formulação 1, temos um total de 70 restrições de eliminação de sub-ciclos necessárias para a obtenção da solução óptima do problema. Seguindo a ordem (por coluna) apresentada na Tabela 4.3, vejamos na Tabela 4.5, as 35 restrições de eliminação de sub-ciclos com 3 nós.

$x_{12} + x_{13} + x_{23} \leq 2$	$x_{15} + x_{16} + x_{56} \leq 2$	$x_{26} + x_{27} + x_{67} \leq 2$
$x_{12} + x_{14} + x_{24} \leq 2$	$x_{15} + x_{17} + x_{57} \leq 2$	$x_{34} + x_{35} + x_{45} \leq 2$
$x_{12} + x_{15} + x_{25} \leq 2$	$x_{16} + x_{17} + x_{67} \leq 2$	$x_{34} + x_{36} + x_{46} \leq 2$
$x_{12} + x_{16} + x_{26} \leq 2$	$x_{23} + x_{24} + x_{34} \leq 2$	$x_{34} + x_{37} + x_{47} \leq 2$
$x_{12} + x_{17} + x_{27} \leq 2$	$x_{23} + x_{25} + x_{35} \leq 2$	$x_{35} + x_{36} + x_{56} \leq 2$
$x_{13} + x_{14} + x_{34} \leq 2$	$x_{23} + x_{26} + x_{36} \leq 2$	$x_{35} + x_{37} + x_{57} \leq 2$
$x_{13} + x_{15} + x_{35} \leq 2$	$x_{23} + x_{27} + x_{37} \leq 2$	$x_{36} + x_{37} + x_{67} \leq 2$
$x_{13} + x_{16} + x_{36} \leq 2$	$x_{24} + x_{25} + x_{45} \leq 2$	$x_{45} + x_{46} + x_{56} \leq 2$
$x_{13} + x_{17} + x_{37} \leq 2$	$x_{24} + x_{26} + x_{46} \leq 2$	$x_{45} + x_{47} + x_{57} \leq 2$
$x_{14} + x_{15} + x_{45} \leq 2$	$x_{24} + x_{27} + x_{47} \leq 2$	$x_{46} + x_{47} + x_{67} \leq 2$
$x_{14} + x_{16} + x_{46} \leq 2$	$x_{25} + x_{26} + x_{56} \leq 2$	$x_{56} + x_{57} + x_{67} \leq 2$
$x_{14} + x_{17} + x_{47} \leq 2$	$x_{25} + x_{27} + x_{57} \leq 2$	

Tabela 4.5: Restrições de eliminação de sub-ciclos com 3 nós.

Vejamos, agora, na Tabela 4.6 as 35 restrições que permitem eliminar todos os sub-ciclos com 4 nós possíveis num grafo com 7 nós (descritos na Tabela 4.4).

$X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{23} + X_{24} + X_{34} \leq 3$	$X_{14} + X_{16} + X_{17} + X_{46} + X_{47} + X_{67} \leq 3$
$X_{12} + X_{13} + X_{15} + X_{23} + X_{25} + X_{35} \leq 3$	$X_{15} + X_{16} + X_{17} + X_{56} + X_{57} + X_{67} \leq 3$
$X_{12} + X_{13} + X_{16} + X_{23} + X_{26} + X_{36} \leq 3$	$X_{23} + X_{24} + X_{25} + X_{34} + X_{35} + X_{45} \leq 3$
$X_{12} + X_{13} + X_{17} + X_{23} + X_{27} + X_{37} \leq 3$	$X_{23} + X_{24} + X_{26} + X_{34} + X_{36} + X_{46} \leq 3$
$X_{12} + X_{14} + X_{15} + X_{24} + X_{25} + X_{45} \leq 3$	$X_{23} + X_{24} + X_{27} + X_{34} + X_{37} + X_{47} \leq 3$
$X_{12} + X_{14} + X_{16} + X_{24} + X_{26} + X_{46} \leq 3$	$X_{23} + X_{25} + X_{26} + X_{35} + X_{36} + X_{56} \leq 3$
$X_{12} + X_{14} + X_{17} + X_{24} + X_{27} + X_{47} \leq 3$	$X_{23} + X_{25} + X_{27} + X_{35} + X_{37} + X_{57} \leq 3$
$X_{12} + X_{15} + X_{16} + X_{25} + X_{26} + X_{56} \leq 3$	$X_{23} + X_{26} + X_{27} + X_{36} + X_{37} + X_{67} \leq 3$
$X_{12} + X_{15} + X_{17} + X_{25} + X_{27} + X_{57} \leq 3$	$X_{24} + X_{25} + X_{26} + X_{45} + X_{46} + X_{56} \leq 3$
$X_{12} + X_{16} + X_{17} + X_{26} + X_{27} + X_{67} \leq 3$	$X_{24} + X_{25} + X_{27} + X_{45} + X_{47} + X_{57} \leq 3$
$X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{34} + X_{35} + X_{45} \leq 3$	$X_{24} + X_{26} + X_{27} + X_{46} + X_{47} + X_{67} \leq 3$
$X_{13} + X_{14} + X_{16} + X_{34} + X_{36} + X_{46} \leq 3$	$X_{25} + X_{26} + X_{27} + X_{56} + X_{57} + X_{67} \leq 3$
$X_{13} + X_{14} + X_{17} + X_{34} + X_{37} + X_{47} \leq 3$	$X_{34} + X_{35} + X_{36} + X_{45} + X_{46} + X_{56} \leq 3$
$X_{13} + X_{15} + X_{16} + X_{35} + X_{36} + X_{56} \leq 3$	$X_{34} + X_{35} + X_{37} + X_{45} + X_{47} + X_{57} \leq 3$
$X_{13} + X_{15} + X_{17} + X_{35} + X_{37} + X_{57} \leq 3$	$X_{34} + X_{36} + X_{37} + X_{46} + X_{47} + X_{67} \leq 3$
$X_{13} + X_{16} + X_{17} + X_{36} + X_{37} + X_{67} \leq 3$	$X_{35} + X_{36} + X_{37} + X_{56} + X_{57} + X_{67} \leq 3$
$X_{14} + X_{15} + X_{16} + X_{45} + X_{46} + X_{56} \leq 3$	$X_{45} + X_{46} + X_{47} + X_{56} + X_{57} + X_{67} \leq 3$
$X_{14} + X_{15} + X_{17} + X_{45} + X_{47} + X_{57} \leq 3$	

Tabela 4.6: Restrições de eliminação de sub-ciclos com 4 nós.

Vejamos, agora, o caso da Formulação 2.

Atentemos no primeiro sub-ciclo com 3 nós considerado na Tabela 4.3, sendo este o sub-ciclo 123. Neste caso, temos $S = \{1,2,3\}$ e $\bar{S} = \{4,5,6,7\}$. Para eliminarmos o conjunto S, segundo a Formulação 2, temos de considerar a seguinte restrição:

$$X_{14} + X_{15} + X_{16} + X_{17} + X_{24} + X_{25} + X_{26} + X_{27} + X_{34} + X_{35} + X_{36} + X_{37} \geq 1.$$

Note-se que a restrição de conectividade que obriga à eliminação de S é a mesma restrição de conectividade que provoca a eliminação de \bar{S} . Portanto, já não iremos considerar o caso contrário, dada a sua repetição.

Vejamos, então, de forma detalhada na Tabela 4.7 todas as restrições de conectividade necessárias segundo a Formulação 2.

$S = \{1,2,3\}; \bar{S} = \{4,5,6,7\}$ $X_{14} + X_{15} + X_{16} + X_{17} + X_{24} + X_{25} + X_{26} + X_{27} + X_{34} + X_{35} + X_{36} + X_{37} \geq 1$
$S = \{1,2,4\}; \bar{S} = \{3,5,6,7\}$ $X_{13} + X_{15} + X_{16} + X_{17} + X_{23} + X_{25} + X_{26} + X_{27} + X_{34} + X_{45} + X_{46} + X_{47} \geq 1$
$S = \{1,2,5\}; \bar{S} = \{3,4,6,7\}$ $X_{13} + X_{14} + X_{16} + X_{17} + X_{23} + X_{24} + X_{26} + X_{27} + X_{35} + X_{45} + X_{56} + X_{57} \geq 1$
$S = \{1,2,6\}; \bar{S} = \{3,4,5,7\}$ $X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{17} + X_{23} + X_{24} + X_{25} + X_{27} + X_{36} + X_{46} + X_{56} + X_{67} \geq 1$
$S = \{1,2,7\}; \bar{S} = \{3,4,5,6\}$ $X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{16} + X_{23} + X_{24} + X_{25} + X_{26} + X_{37} + X_{47} + X_{57} + X_{67} \geq 1$
$S = \{1,3,4\}; \bar{S} = \{2,5,6,7\}$ $X_{12} + X_{15} + X_{16} + X_{17} + X_{23} + X_{35} + X_{36} + X_{37} + X_{24} + X_{45} + X_{46} + X_{47} \geq 1$
$S = \{1,3,5\}; \bar{S} = \{2,4,6,7\}$ $X_{12} + X_{14} + X_{16} + X_{17} + X_{23} + X_{34} + X_{36} + X_{37} + X_{25} + X_{45} + X_{56} + X_{57} \geq 1$
$S = \{1,3,6\}; \bar{S} = \{2,4,5,7\}$ $X_{12} + X_{14} + X_{15} + X_{17} + X_{23} + X_{34} + X_{35} + X_{37} + X_{26} + X_{46} + X_{56} + X_{67} \geq 1$
$S = \{1,3,7\}; \bar{S} = \{2,4,5,6\}$ $X_{12} + X_{14} + X_{15} + X_{16} + X_{23} + X_{34} + X_{35} + X_{36} + X_{27} + X_{47} + X_{57} + X_{67} \geq 1$
$S = \{1,4,5\}; \bar{S} = \{2,3,6,7\}$ $X_{12} + X_{13} + X_{16} + X_{17} + X_{24} + X_{34} + X_{46} + X_{47} + X_{25} + X_{35} + X_{56} + X_{57} \geq 1$
$S = \{1,4,6\}; \bar{S} = \{2,3,5,7\}$ $X_{12} + X_{13} + X_{15} + X_{17} + X_{24} + X_{34} + X_{45} + X_{47} + X_{26} + X_{36} + X_{56} + X_{67} \geq 1$

$S = \{1,4,7\}; \bar{S} = \{2,3,5,6\}$ $X_{12} + X_{13} + X_{15} + X_{16} + X_{24} + X_{34} + X_{45} + X_{46} + X_{27} + X_{37} + X_{57} + X_{67} \geq 1$
$S = \{1,5,6\}; \bar{S} = \{2,3,4,7\}$ $X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{17} + X_{25} + X_{35} + X_{45} + X_{57} + X_{26} + X_{36} + X_{46} + X_{67} \geq 1$
$S = \{1,5,7\}; \bar{S} = \{2,3,4,6\}$ $X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{16} + X_{25} + X_{35} + X_{45} + X_{56} + X_{27} + X_{37} + X_{47} + X_{67} \geq 1$
$S = \{1,6,7\}; \bar{S} = \{2,3,4,5\}$ $X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{26} + X_{36} + X_{46} + X_{56} + X_{27} + X_{37} + X_{47} + X_{57} \geq 1$
$S = \{2,3,4\}; \bar{S} = \{1,5,6,7\}$ $X_{14} + X_{25} + X_{26} + X_{27} + X_{13} + X_{35} + X_{36} + X_{37} + X_{14} + X_{45} + X_{46} + X_{47} \geq 1$
$S = \{2,3,5\}; \bar{S} = \{1,4,6,7\}$ $X_{12} + X_{24} + X_{26} + X_{27} + X_{13} + X_{34} + X_{36} + X_{37} + X_{15} + X_{45} + X_{56} + X_{57} \geq 1$
$S = \{2,3,6\}; \bar{S} = \{1,4,5,7\}$ $X_{12} + X_{24} + X_{25} + X_{27} + X_{13} + X_{34} + X_{35} + X_{37} + X_{16} + X_{46} + X_{56} + X_{67} \geq 1$
$S = \{2,3,7\}; \bar{S} = \{1,4,5,6\}$ $X_{12} + X_{24} + X_{25} + X_{26} + X_{13} + X_{34} + X_{35} + X_{36} + X_{17} + X_{47} + X_{57} + X_{67} \geq 1$
$S = \{2,4,5\}; \bar{S} = \{1,3,6,7\}$ $X_{12} + X_{23} + X_{26} + X_{27} + X_{14} + X_{34} + X_{46} + X_{47} + X_{15} + X_{35} + X_{56} + X_{57} \geq 1$
$S = \{2,4,6\}; \bar{S} = \{1,3,5,7\}$ $X_{12} + X_{23} + X_{25} + X_{27} + X_{14} + X_{34} + X_{45} + X_{47} + X_{16} + X_{36} + X_{56} + X_{67} \geq 1$
$S = \{2,4,7\}; \bar{S} = \{1,3,5,6\}$ $X_{12} + X_{23} + X_{25} + X_{26} + X_{14} + X_{34} + X_{45} + X_{46} + X_{17} + X_{37} + X_{57} + X_{67} \geq 1$
$S = \{2,5,6\}; \bar{S} = \{1,3,4,7\}$ $X_{12} + X_{23} + X_{24} + X_{27} + X_{15} + X_{35} + X_{45} + X_{57} + X_{16} + X_{36} + X_{46} + X_{67} \geq 1$
$S = \{2,5,7\}; \bar{S} = \{1,3,4,6\}$ $X_{12} + X_{23} + X_{24} + X_{26} + X_{15} + X_{35} + X_{45} + X_{56} + X_{17} + X_{37} + X_{47} + X_{67} \geq 1$
$S = \{2,6,7\}; \bar{S} = \{1,3,4,5\}$ $X_{12} + X_{23} + X_{24} + X_{25} + X_{16} + X_{36} + X_{46} + X_{56} + X_{17} + X_{37} + X_{47} + X_{57} \geq 1$

$S = \{3, 4, 5\}; \bar{S} = \{1, 2, 6, 7\}$ $X_{13} + X_{23} + X_{36} + X_{37} + X_{14} + X_{24} + X_{46} + X_{47} + X_{15} + X_{25} + X_{56} + X_{57} \geq 1$
$S = \{3, 4, 6\}; \bar{S} = \{1, 2, 5, 7\}$ $X_{13} + X_{23} + X_{35} + X_{37} + X_{14} + X_{24} + X_{45} + X_{47} + X_{16} + X_{26} + X_{56} + X_{67} \geq 1$
$S = \{3, 4, 7\}; \bar{S} = \{1, 2, 5, 6\}$ $X_{13} + X_{23} + X_{35} + X_{36} + X_{14} + X_{24} + X_{45} + X_{46} + X_{17} + X_{27} + X_{57} + X_{67} \geq 1$
$S = \{3, 5, 6\}; \bar{S} = \{1, 2, 4, 7\}$ $X_{13} + X_{23} + X_{34} + X_{37} + X_{15} + X_{25} + X_{45} + X_{57} + X_{16} + X_{26} + X_{46} + X_{67} \geq 1$
$S = \{3, 5, 7\}; \bar{S} = \{1, 2, 4, 6\}$ $X_{13} + X_{23} + X_{34} + X_{36} + X_{15} + X_{25} + X_{45} + X_{56} + X_{17} + X_{27} + X_{47} + X_{67} \geq 1$
$S = \{3, 6, 7\}; \bar{S} = \{1, 2, 4, 5\}$ $X_{13} + X_{23} + X_{34} + X_{35} + X_{16} + X_{26} + X_{46} + X_{56} + X_{17} + X_{27} + X_{47} + X_{57} \geq 1$
$S = \{4, 5, 6\}; \bar{S} = \{1, 2, 3, 7\}$ $X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{47} + X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{57} + X_{16} + X_{26} + X_{36} + X_{67} \geq 1$
$S = \{4, 5, 7\}; \bar{S} = \{1, 2, 3, 6\}$ $X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{46} + X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{56} + X_{17} + X_{27} + X_{37} + X_{67} \geq 1$
$S = \{4, 6, 7\}; \bar{S} = \{1, 2, 3, 5\}$ $X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{45} + X_{16} + X_{26} + X_{36} + X_{56} + X_{17} + X_{27} + X_{37} + X_{57} \geq 1$
$S = \{5, 6, 7\}; \bar{S} = \{1, 2, 3, 4\}$ $X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{45} + X_{16} + X_{26} + X_{36} + X_{46} + X_{17} + X_{27} + X_{37} + X_{47} \geq 1$

Tabela 4.7: Restrições de conectividade para sub-ciclos com 3 nós.

Dada a existência de repetição dentro do conjunto das restrições de conectividade, podemos afirmar que, comparativamente às restrições de eliminação de sub-ciclos, estas são em menor número, em particular metade. Por outro lado, apesar do menor número de restrições, verificamos que cada restrição de conectividade implica um número significativamente maior de ocorrências, aumentando a complexidade em cada restrição.

Já foram efectuados vários estudos no sentido de provar a existência de diferenças entre estes dois tipos de restrições, não se chegando, no entanto, à conclusão sobre qual

seria o mais eficiente. Em Barreto *et al* [3] podemos encontrar um estudo prático, onde são resolvidos vários problemas recorrendo aos dois tipos de restrições e, posteriormente, é feita uma comparação. Na maior parte dos casos, a solução obtida é exactamente a mesma, sendo, contudo verificadas diferenças notórias ao nível do tempo de resolução e do número de iterações para a obtenção da solução óptima. No entanto, essas diferenças vão-se alternando consoante os problemas, não levando à predominância de um tipo de restrição sobre o outro.

Assim sendo, a nível prático e experimental, existem diferenças entre as restrições de eliminação de sub-ciclos e as restrições de conectividade, não estando, no entanto, provado qual dos dois tipos de restrições é o mais eficiente.

Apesar de, neste trabalho, nos centrarmos no PCV simétrico, é importante referir a formulação criada por Miller, Tucker e Zemlin [13], que deram um grande contributo nesta área, desenvolvendo uma formulação para o PCV orientado. Os autores partiram de um problema mais geral (tendo como uma possível instância o PCV usual). Na sua generalização, existem n cidades a serem visitadas, indexadas de $1, \dots, n$, sendo a cidade de partida indexada por 0. Durante o seu percurso, o caixeiro viajante deve regressar exactamente t vezes à cidade inicial, incluindo o seu último regresso. O viajante deve visitar no máximo p cidades no seu percurso.

Notemos, assim, que para $t = 1$ e $p \geq n$, estamos perante o PCV usual, mas para grafos orientados. A formulação pode ser formalizada da seguinte forma:

Formulação 3 (para PCV não simétricos):

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z = \sum_{0 \leq i \neq j \leq n} c_{ij} x_{ij} \\ \text{sujeito a: } & \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n x_{ij} = 1, & j \in N & (3.1) \\ & \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n x_{ij} = 1, & i \in N & (3.2) \\ & u_i - u_j + p x_{ij} \leq p - 1, & 1 \leq i \neq j \leq n & (3.3) \\ & x_{ij} \geq 0 \text{ int eiras} & & (3.4) \end{aligned}$$

onde c_{ij} representa a distância entre as cidades i e j ; p representa o número mínimo de cidades que o caixeiro-viajante tem de visitar no seu percurso ($p \geq n$); u_i ($i \in N$) representam números reais arbitrários. Note-se que as restrições (3.1) e (3.2) obrigam a que as variáveis x_{ij} tomem o valor 0 ou 1.

Até aqui, apresentámos três diferentes tipos de formalização do PCV, sendo a última do PCV não simétrico, sobre o qual, como já referimos, não vamos dirigir o nosso estudo. Um dos objectivos deste trabalho é o de avaliar e analisar as restrições do PCV, de forma a estudar a interacção entre estas, como actuam na resolução do problema e qual a sua importância na obtenção da solução óptima. Como tal, a partir deste momento, vamos focar o nosso estudo na Formulação 1, na qual surgem as restrições de eliminação de sub-ciclos, pois parece-nos ser a formulação mais simples, dado que cada restrição de eliminação de sub-ciclos envolve um número menor de variáveis do que as restrições de conectividade. Analisemos então com mais detalhe o funcionamento da Formulação 1.

Assim sendo, suponha-se que a aplicação da Formulação 1 ao grafo G , relaxando as restrições de afectação, conduziu ao resultado demonstrado na Figura 4.8, onde podemos observar dois possíveis sub-ciclos em G

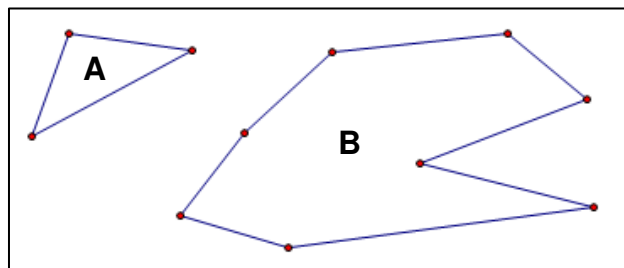


Figura 4.8: Exemplo de dois sub-ciclos num grafo.

Notemos que a eliminação do sub-ciclo A, constituído por 3 nós, vai provocar a eliminação do sub-ciclo B, constituído por 8 nós, dado que A terá de absorver, no mínimo, mais 1 nó, pois não pode perder algum dos que já possui dado que não é permitida a formação de sub-ciclos com 2 nós.

Deste modo, a eliminação de sub-ciclos com 3 nós gera automaticamente a eliminação de sub-ciclos com 8 nós (Figura 4.9).

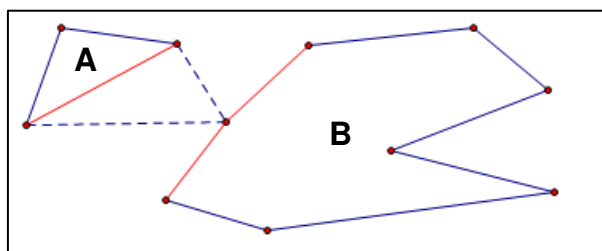


Figura 4.9: Ilustração da eliminação de sub-ciclos num grafo.

Consideremos então o caso de A apenas ter absorvido um nó. Vamos obter um novo sub-ciclo agora com 4 nós. Procedendo deste modo, ao eliminarmos qualquer sub-ciclo com 4 nós, eliminamos automaticamente a possibilidade de existência de sub-ciclos com 7 nós, dado que estes terão de absorver pelo menos mais 1 dos nós do grafo (não pode perder algum dos nós que já possuía dado que a existência de sub-ciclos com 3 nós já foi restringida).

Esquematisando este procedimento, temos:

Eliminação de sub-ciclos	→	Eliminação de sub-ciclos
Com 3 nós	→	Com 8 (=11-3) nós
Com 4 nós	→	Com 7 (=11-4) nós
Com 5 nós	→	Com 6 (=11-5) nós
Com 6 nós	→	Com 5 (=11-6) nós
Com 7 nós	→	Com 4 (=11-7) nós
Com 8 nós	→	Com 3 (=11-8) nós
Com k nós	→	Com n-k nós

Neste caso, em que temos um grafo com 11 nós, verificamos que, para garantir a inexistência de sub-ciclos, necessitamos apenas de adicionar as restrições de eliminação de sub-ciclos com 3, 4 e 5 nós, pois todos os outros casos já estão automaticamente eliminados com a inclusão destas restrições. Tal facto, reduz drasticamente o número de restrições a considerar no problema.

Este estudo leva-nos assim ao seguinte resultado:

Teorema (Barreto, 2004):

Considere-se o Problema do Caixeiro Viajante como foi descrito na Formulação 1. A não existência de sub-ciclos em qualquer sub-conjunto $S: S \subset N, 3 \leq |S| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ garante a não existência de sub-ciclos em N .

Prova (Barreto [1]):

Como já referido, as restrições de integralidade e as restrições de afectação (que obrigam a que todos os vértices tenham grau 2), não permitem a formação de sub-ciclos com menos de 3 nós, o que justifica o facto de se considerar $S: S \subset N, 3 \leq |S|$.

Pretendemos agora provar que :

$$\nexists \text{ sub-ciclos em } S : S \subset N, |S| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \Rightarrow \nexists \text{ sub-ciclos em } N$$

Ou, de forma equivalente,

$$\nexists \text{ sub-ciclos em } S : S \subset N, |S| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \Rightarrow \nexists \text{ sub-ciclos em } T : T \subset N, |T| > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Usando a lei da conversão, é ainda equivalente a,

$$\exists \text{ sub-ciclos em } T : T \subset N, |T| > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \Rightarrow \exists \text{ sub-ciclos em } S : S \subset N, |S| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

A prova desta última implicação é equivalente à prova da primeira.

Consideremos, então, a existência de um sub-ciclo em $T: T \subset N, |T| > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Devido às restrições de afectação e integralidade, os nós de $S = N - T$ têm obrigatoriamente de se agrupar em sub-ciclos (um ou mais). Assim, como $S \subset N \wedge |S| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, resulta que a implicação é verdadeira.

Como consequência, podemos reescrever formalmente o PCV simétrico da seguinte forma:

Formulação 4:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z = \sum_{i,j \in N, i < j} c_{ij} x_{ij} \\ \text{sujeito a:} \quad & \sum_{i \in N, i < g} x_{ig} + \sum_{j \in N, g < j} x_{gj} = 2, \quad g \in N \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\sum_{i,j \in S, i < j} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad S \subset N, 3 \leq |S| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad (4.2)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j \in N, i < j \quad (4.3)$$

Este teorema proporciona assim uma redução efectiva do número de restrições do PCV relativamente à Formulação 1. Vejamos um exemplo para o constatarmos de forma mais explícita.

Consideremos, por exemplo, um PCV com 15 clientes. Assim, segundo a Formulação 1 do PCV, as restrições de eliminação de sub-ciclos serão da forma:

$$\sum_{i,j \in S, i < j} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad S \subset N, 3 \leq |S| \leq 12$$

O número total deste tipo de restrições encontra-se detalhado na Tabela 4.8.

Número de nós	Número de restrições de eliminação de sub-ciclos
3	${}^{15}C_3 = 455$
4	${}^{15}C_4 = 1365$
5	${}^{15}C_5 = 3003$
6	${}^{15}C_6 = 5005$
7	${}^{15}C_7 = 6435$
8	${}^{15}C_8 = 6435$
9	${}^{15}C_9 = 5005$
10	${}^{15}C_{10} = 3003$
11	${}^{15}C_{11} = 1365$
12	${}^{15}C_{12} = 455$
Total	32526

Tabela 4.8: Número de restrições de eliminação de sub-ciclos.

Observamos que, apesar de não termos um número muito elevado de nós, apenas 15, teríamos de considerar, pela Formulação 1, um total de 32 526 restrições de eliminação de sub-ciclos. Este é já um número bastante elevado, o que torna a resolução do problema bastante pesada computacionalmente.

Por outro lado, considerando a Formulação 4, resultante do teorema anterior, as restrições de eliminação de sub-ciclos são da forma

$$\sum_{i,j \in S, i < j} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad S \subset N, 3 \leq |S| \leq 7$$

Segundo esta formulação, temos apenas de considerar as restrições de eliminação de sub-ciclos constituídos desde 3 a 7 nós, o que equivale a exactamente metade do número de restrições a considerar na Formulação 1, ou seja, 16 263.

Este resultado, reduz, de forma bastante significativa o número necessário de restrições de eliminação de sub-ciclos no PCV simples.

5. ESTUDO E RESOLUÇÃO ITERATIVA DE VÁRIAS INSTÂNCIAS DO PCV

Vejamos, agora, a resolução detalhada de alguns exemplos do PCV, recorrendo à Formulação 4, dado que se trata da formalização apresentada que exige, à partida, uma menor complexidade. Nos exemplos seguintes, o peso de cada aresta corresponde à distância euclidiana entre os seus extremos.

Na resolução de todas as instâncias do PCV apresentadas no decorrer deste trabalho foi utilizado um computador do tipo PC²⁰ e recorreu-se ao software Xpress-IVE, versão 1.18.01, que utiliza o Xpress-Mosel 2.0.0 e o Xpress-Optimizer versão 18.00.01.

Exemplo 5.1: Consideremos a instância 1 do PCV, que se encontra no Anexo 1, constituída por 6 clientes.

Como já vimos, a existência de 6 clientes implica a existência de 15 variáveis de decisão (x_{ij}), de 6 restrições de afectação (4.1) e a necessidade de inclusão das restrições de eliminação de sub-ciclos com 3 nós, o que corresponde a um total de 20 restrições do tipo (4.2). Então, no total, para garantir a obtenção da solução óptima do problema necessitamos de 26 restrições (excluindo as restrições de binariedade das variáveis de decisão).

A solução do problema com as 26 restrições referidas é a seguinte (Figura 5.1):

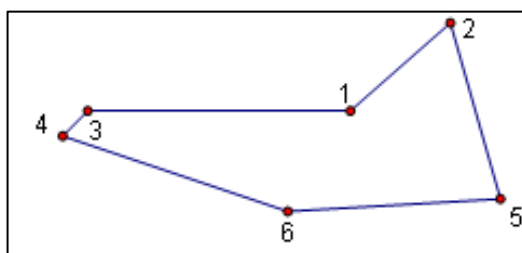


Figura 5.1: Solução óptima da instância do PCV.

²⁰ Modelo SONY VAIO VGN-C1Z/B. Processador: INTEL[®] Core™ 2 Duo T5500, 1.66 GHz. Memória RAM: 1 GB.

Vejamos agora uma resolução sequencial do mesmo problema. Começemos por resolver o problema incluindo apenas as restrições de afectação. A solução obtida é composta por dois sub-ciclos, ambos com 3 nós (Figura 5.2).

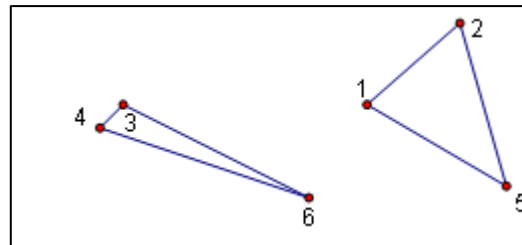


Figura 5.2: Solução da instância do PCV obtida apenas com as restrições de afectação.

Para impedir a formação dos dois sub-ciclos apresentados, basta-nos uma restrição que imponha que o número de ligações permitidas entre os clientes 3, 4 e 6 seja no máximo duas, pois tal implicará que uma das três ligações usadas entre eles seja quebrada, tendo de se ligar a um dos clientes do outro sub-ciclo, o que automaticamente também o desfaz. Note-se que poderíamos ter feito o mesmo raciocínio partindo do sub-ciclo formado pelos clientes 1, 2 e 5. Com apenas esta restrição, além das restrições de afectação obtemos a solução óptima do problema.

É importante salientar que não estava garantido à partida que o acrescento desta restrição resultaria imediatamente na solução óptima, pois apesar de eliminar os dois sub-ciclos representados (Figura 5.2), poderia originar a criação de novos sub-ciclos.

De uma forma geral, a ideia de resolução sequencial deste tipo de problemas, pode resumir-se em três passos:

- Numa primeira iteração, resolve-se um sub-problema obtido do problema inicial, mas apenas com as restrições de afectação;
- Numa segunda fase, as restrições omitidas na fase anterior, são acrescentadas à medida que forem sendo corrompidas e o problema é novamente optimizado;
- O processo continua até que não existam mais restrições corrompidas.

Vejamos agora um exemplo de um PCV com 8 clientes.

Exemplo 5.2: Consideremos a instância 7 do PCV, que se encontra no Anexo 1, constituída por 8 clientes.

Como temos 8 clientes, temos um total de 28 variáveis de decisão. Na Tabela 5.1, temos o número de restrições necessário para obter a solução óptima logo na primeira iteração.

Restrições	Quantidade
Afectação	8
Eliminação de sub-ciclos com 3 nós	56
Eliminação de sub-ciclos com 4 nós	70
Total	134

Tabela 5.1: Número de restrições da instância do PCV.

De facto, com apenas 8 clientes, já temos um número considerável de restrições a ter em conta para a obtenção da solução óptima do problema.

Vejamos, de forma análoga ao exemplo anterior, se é possível resolver o problema recorrendo a um número menor de restrições. Ou seja, se é possível obter a solução óptima do problema original partindo de um problema análogo, considerando apenas um subconjunto de restrições.

Incluindo apenas as oito restrições de afectação, a solução do problema é constituída por dois sub-ciclos de 4 nós (Figura 5.3).

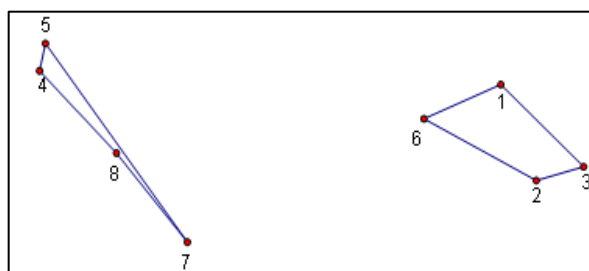


Figura 5.3: Solução da instância do PCV obtida apenas com as restrições de afectação.

Seguindo o raciocínio do exemplo anterior para a eliminação de sub-ciclos, basta-nos acrescentar uma restrição que imponha que o número máximo de ligações existentes entre os clientes 1, 2, 3 e 6 (ou 4, 5, 7 e 8) seja três.

No entanto, com o acrescento desta nova restrição e resolvendo o problema resultante, obtemos novamente dois sub-ciclos, um de 3 nós e um de 5 nós (Figura 5.4).

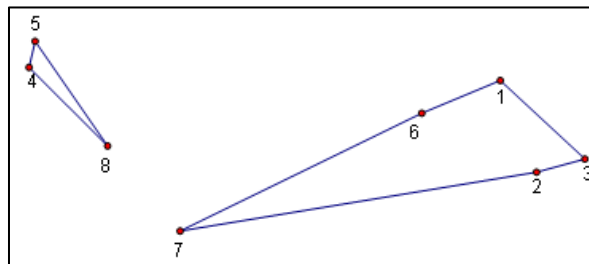


Figura 5.4: Solução da instância do PCV obtida com a adição da nova restrição.

Acrescentemos, então, a restrição que obriga a que pelo menos uma das arestas do sub-ciclo de 3 nós seja quebrada, ligando-se ao sub-ciclo de 5 nós.

Após nova restrição, voltamos a obter um sub-ciclo com 3 nós e um sub-ciclo com 5 nós (Figura 5.5).

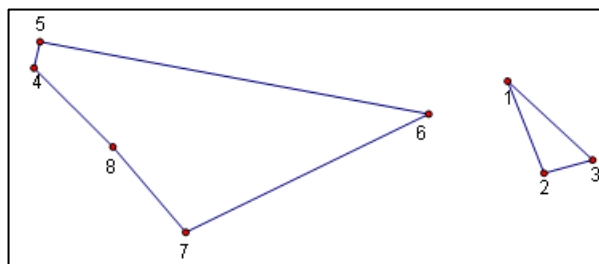


Figura 5.5: Solução da instância do PCV obtida com a adição das 2 novas restrições.

Procedendo do mesmo modo que no passo anterior, isto é, acrescentando a restrição que obriga à eliminação do sub-ciclo com 3 nós, obtemos a solução ótima do problema (Figura 5.6).

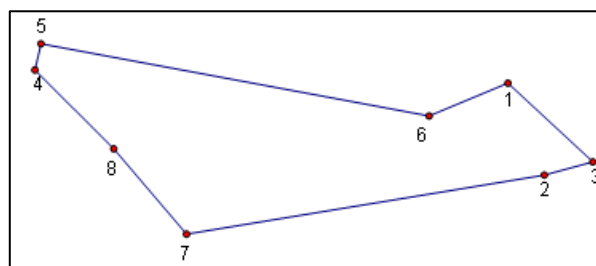


Figura 5.6: Solução ótima da instância do PCV.

Foram, então, necessárias quatro iterações para a obtenção da solução óptima do problema, requerendo um total de onze restrições, isto é, três novas restrições além das restrições de afectação. Assim, tal como no caso anterior, verificámos que é possível obter a solução óptima com um número consideravelmente menor de restrições do que aquelas que seriam necessárias à partida.

Note-se que, por exemplo, no caso de termos um PCV com 10 clientes, teríamos um total de 582 restrições de eliminação de sub-ciclos de forma a garantir a obtenção da solução óptima. De facto, verificamos que um pequeno aumento no número de clientes gera um crescimento exponencial do número das restrições a considerar inicialmente.

Antes de partirmos para um estudo mais intensivo de vários problemas deste tipo, vamos resolver o problema que serviu de introdução a este trabalho, onde o Caixeiro Viajante tinha de visitar as seis cidades mencionadas da Península Ibérica (Capítulo 3, página 13).

Assim tal como no exemplo 5.1, este é um problema com 6 nós, que correspondem às seis cidades em causa e 15 variáveis de decisão que correspondem às ligações existentes entre as mesmas. Resolvendo o problema apenas com as restrições de afectação, a solução obtida é constituída por dois sub-ciclos com 3 nós (Figura 5.7).

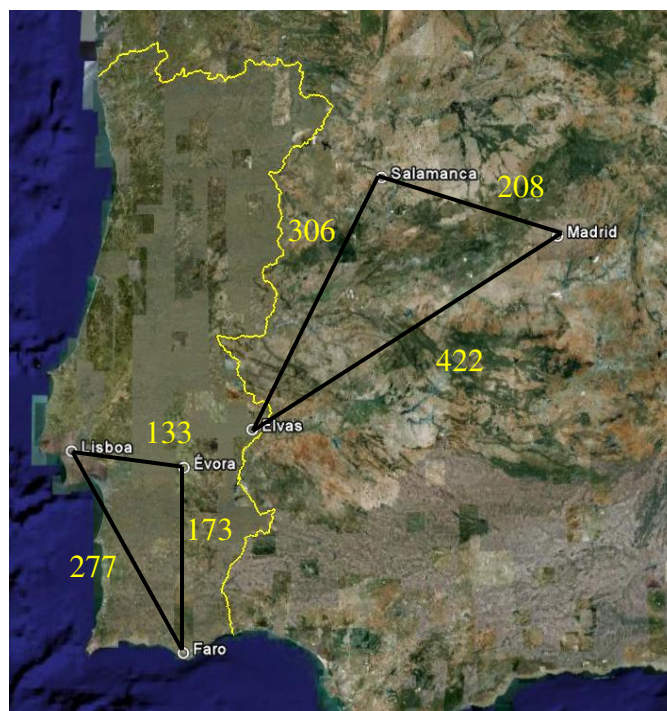


Figura 5.7: Solução da instância do PCV obtida apenas com as restrições de afectação.

Acrescentando a restrição que impossibilita a formação do sub-ciclo constituído pelas cidades de Lisboa, Évora e Faro, obtemos a solução óptima:

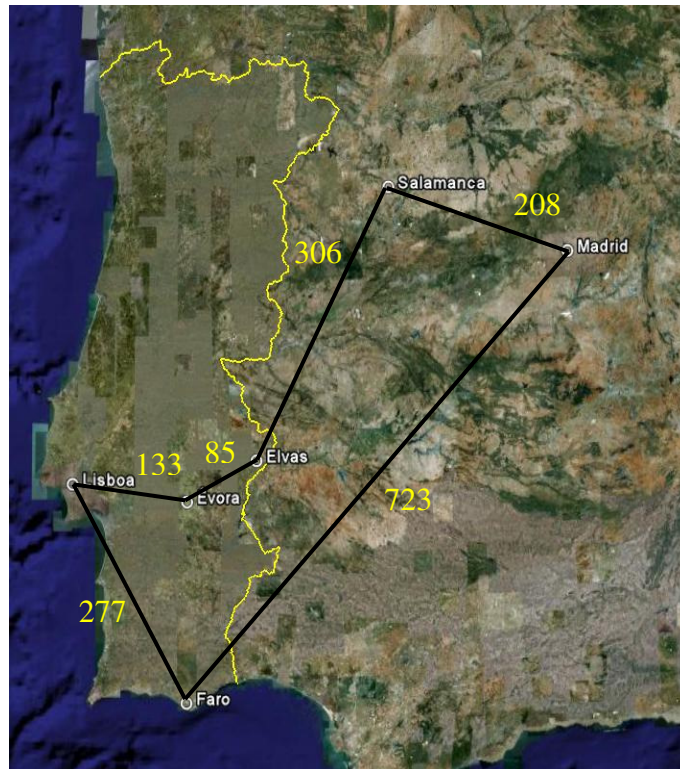


Figura 5.8: Solução óptima da instância do PCV

Verificamos, assim, que a solução obtida pelos dois métodos heurísticos corresponde à solução óptima do problema, onde o Caixeiro Viajante deve seguir o percurso ilustrado, percorrendo um total de 1732 Km.

Seguidamente, serão apresentados e analisados os resultados do estudo e resolução, de forma iterativa, de vários exemplos de PCVs, constituídos por um número variável de clientes. Para cada exemplo é apresentado o número de variáveis de decisão, assim como o número de restrições consideradas segundo a Formulação 4 do PCV. Seguindo um procedimento análogo aos exemplos apresentados, começou-se por resolver o problema apenas com as restrições de afectação e anotar o número de sub-ciclos iniciais da respectiva solução.

Posteriormente, e de forma sequencial, foram-se acrescentando restrições com o objectivo de eliminar os sub-ciclos que se iam formando ao longo da resolução.

Podemos, assim, observar e comparar o número de restrições necessário, para a obtenção da solução ótima do respectivo problema, segundo a resolução feita neste estudo e a Formulação 4 do PCV. Essa comparação pode ser observada na última coluna da Tabela 5.2, onde constatamos que, mesmo para problemas constituídos por apenas seis clientes, apenas aproximadamente 26% das restrições são usadas e, à medida que o número de clientes vai aumentando, a percentagem de restrições usadas na obtenção da solução ótima vai diminuindo drasticamente. Note-se que, em problemas constituídos por 13 clientes (o que transportando para a realidade e associando a rotas de transportes, não é um número muito elevado), temos um total de 4017 restrições, sendo este já um número bastante considerável. Para este número de clientes, nos exemplos estudados, apenas aproximadamente 0,5% das restrições foram necessárias para a obtenção da solução ótima do problema.

Após esta análise, dado que foi possível obter a solução ótima dos problemas originais resolvendo problemas análogos em que um elevado número de restrições foi retirado, é natural criar a seguinte conjectura:

CONJECTURA: *No PCV, grande parte das restrições de eliminação de sub-ciclos da Formulação 4 são, do ponto de vista prático, desnecessárias.*

O grande problema que se coloca é como determinar, *à priori*, perante um PCV, qual o número de restrições suficientes para resolver um problema de optimização deste tipo, e posteriormente, quais as restrições indispensáveis de entre o grande conjunto de restrições considerado inicialmente no estudo do PCV.

A resposta a esta questão seria um grande avanço neste estudo, dado que permitiria tornar muito mais rápida e eficiente a resolução deste tipo de problemas computacionalmente. No entanto, esta é uma questão que ainda se encontra em aberto.

Inst.	Nº clientes	Nº variáveis	Nº restrições afectação	Nº de restrições de eliminação de sub-ciclos segundo a formalização						Nº Total	Nº sub-ciclos iniciais	Nº de restrições de eliminação de sub-ciclos usados na resolução						Nº restrições usadas	% restrições usadas
				3 nós	4 nós	5 nós	6 nós	3 nós	4 nós			5 nós	6 nós	3 nós	4 nós	5 nós	6 nós		
1	6	15	6	20					26	2	1						2	7	26
2	6	15	6	20					26	2	1						2	7	26
3	7	21	7	35					42	0						1	7	16	16
4	7	21	7	35					42	2	1					2	8	19	19
5	7	21	7	35					42	0						1	7	16	16
6	7	21	7	35					42	0						1	7	16	16
8	8	28	8	56	70				134	2		1				2	9	7	7
9	8	28	8	56	70				134	2	1					2	9	7	7
10	8	28	8	56	70				134	0						1	8	6	6
11	8	28	8	56	70				134	0						1	8	6	6
12	8	28	8	56	70				134	2	2					3	10	7	7
13	8	28	8	56	70				134	0						1	8	6	6
14	10	45	10	120	210	252			592	3	2					3	12	2	2
15	10	45	10	120	210	252			592	2		1				2	11	2	2
16	10	45	10	120	210	252			592	0						1	10	2	2
17	10	45	10	120	210	252			592	2		1	1			3	12	2	2
18	10	45	10	120	210	252			592	3	1					2	11	2	2
19	10	45	10	120	210	252			592	3	2	2				5	14	2	2
20	11	55	11	165	330	462			968	2	1					2	12	1	1
21	11	55	11	165	330	462			968	3	1					2	12	1	1
22	11	55	11	165	330	462			968	0						1	11	1	1
23	11	55	11	165	330	462			968	2		1				2	12	1	1
24	13	78	13	286	715	1287	1716		4017	2		1				2	14	0,3	0,3
25	13	78	13	286	715	1287	1716		4017	0						1	13	0,3	0,3
26	13	78	13	286	715	1287	1716		4017	4	2	2	1	1		7	19	0,5	0,5
27	13	78	13	286	715	1287	1716		4017	4	2	2				3	15	0,4	0,4

Tabela 5.2: Resolução e análise de várias instâncias do PCV.

6. RELAÇÃO E CONDICIONAMENTO ENTRE RESTRIÇÕES DE ELIMINAÇÃO DE SUB-CICLOS

Dado todo o estudo efectuado até esta fase do trabalho, torna-se claro, que muitas das restrições de eliminação de sub-ciclos são, do ponto de vista prático, provavelmente redundantes, isto é, não são efectivamente necessárias para obter a solução óptima do problema. Uma das particularidades que nos poderá dar alguma indicação sobre quais as restrições realmente necessárias para a obtenção da solução óptima será, por exemplo, a característica da matriz de restrições.

6.1. ANÁLISE DA MATRIZ DE RESTRIÇÕES DO PCV

A matriz de restrições do PCV é inicialmente constituída por m linhas, que correspondem às restrições de afectação e às restrições de eliminação de sub-ciclos, e por p colunas, que correspondem às variáveis de decisão. Note-se que esta é uma matriz que contém apenas entradas com valor um, no caso de haver ligação entre os dois clientes em questão, e valor zero, caso contrário.

É importante realçar que a constituição desta matriz não depende das coordenadas dos clientes em causa nas várias instâncias do PCV. Isto é, a matriz de restrições do PCV não depende dos custos associados a cada uma das ligações.

Exemplo 6.1: Consideremos, novamente, uma instância do PCV constituída por 6 clientes. De forma a tornar clara e simples a construção da matriz de restrições do problema, observemos na Tabela 6.1, as restrições de afectação e as restrições de eliminação de sub-ciclos necessárias para a obtenção da solução óptima, segundo a Formulação 4.

Assim, para uma instância com 6 clientes, temos as seguintes restrições:

$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 2$	$x_{14} + x_{15} + x_{45} \leq 2$
$x_{12} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} = 2$	$x_{14} + x_{16} + x_{46} \leq 2$
$x_{13} + x_{23} + x_{34} + x_{35} + x_{36} = 2$	$x_{15} + x_{16} + x_{56} \leq 2$
$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{45} + x_{56} = 2$	$x_{23} + x_{24} + x_{34} \leq 2$
$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{56} = 2$	$x_{23} + x_{25} + x_{35} \leq 2$
$x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} = 2$	$x_{23} + x_{26} + x_{36} \leq 2$
$x_{12} + x_{13} + x_{23} \leq 2$	$x_{24} + x_{25} + x_{45} \leq 2$
$x_{12} + x_{14} + x_{24} \leq 2$	$x_{24} + x_{26} + x_{46} \leq 2$
$x_{12} + x_{15} + x_{25} \leq 2$	$x_{25} + x_{26} + x_{56} \leq 2$
$x_{12} + x_{16} + x_{26} \leq 2$	$x_{34} + x_{35} + x_{45} \leq 2$
$x_{13} + x_{14} + x_{34} \leq 2$	$x_{34} + x_{36} + x_{46} \leq 2$
$x_{13} + x_{15} + x_{35} \leq 2$	$x_{35} + x_{36} + x_{56} \leq 2$
$x_{13} + x_{16} + x_{36} \leq 2$	$x_{45} + x_{46} + x_{56} \leq 2$

Tabela 6.1: Restrições de um PCV com 6 clientes.

Então, com base na Tabela 6.1, vamos construir a matriz de restrições, A , para o problema. A matriz²¹ A é composta por 26 linhas (número total de restrições) e por 15 colunas (número de variáveis de decisão). Tendo em conta a Tabela 6.1 e a definição acima referida, a matriz de restrições de um PCV com 6 clientes é a seguinte:

²¹ Considera-se um problema possível com soluções admissíveis e, conseqüentemente, com um sistema de restrições compatível. Assim sendo, a característica da matriz completa é igual à característica da matriz do sistema e podemos assim desprezar os termos independentes.

Exemplo 6.2: Considerando a matriz de restrições apresentada no exemplo 6.1., vamos proceder ao cálculo da sua característica. No entanto, note-se que das 26 restrições apresentadas, apenas 6 são equações, logo temos que transformar as 20 restrições de eliminação de sub-ciclos em equações através do acrescento de variáveis de folga.

Procedendo desta forma, passamos a ter a restrições:

$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 2$	$x_{14} + x_{15} + x_{45} + y_8 = 2$
$x_{12} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} = 2$	$x_{14} + x_{16} + x_{46} + y_9 = 2$
$x_{13} + x_{23} + x_{34} + x_{35} + x_{36} = 2$	$x_{15} + x_{16} + x_{56} + y_{10} = 2$
$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{45} + x_{56} = 2$	$x_{23} + x_{24} + x_{34} + y_{11} = 2$
$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{56} = 2$	$x_{23} + x_{25} + x_{35} + y_{12} = 2$
$x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} = 2$	$x_{23} + x_{26} + x_{36} + y_{13} = 2$
$x_{12} + x_{13} + x_{23} + y_1 = 2$	$x_{24} + x_{25} + x_{45} + y_{14} = 2$
$x_{12} + x_{14} + x_{24} + y_2 = 2$	$x_{24} + x_{26} + x_{46} + y_{15} = 2$
$x_{12} + x_{15} + x_{25} + y_3 = 2$	$x_{25} + x_{26} + x_{56} + y_{16} = 2$
$x_{12} + x_{16} + x_{26} + y_4 = 2$	$x_{34} + x_{35} + x_{45} + y_{17} = 2$
$x_{13} + x_{14} + x_{34} + y_5 = 2$	$x_{34} + x_{36} + x_{46} + y_{18} = 2$
$x_{13} + x_{15} + x_{35} + y_6 = 2$	$x_{35} + x_{36} + x_{56} + y_{19} = 2$
$x_{13} + x_{16} + x_{36} + y_7 = 2$	$x_{45} + x_{46} + x_{56} + y_{20} = 2$

Tabela 6.2: Restrições do PCV com o acrescento das variáveis de folga.

Assim, vamos ter uma matriz com 26 linhas mas com $15+20=35$ colunas (uma nova coluna por cada variável de folga acrescentada a cada inequação).

Vejamos, então, o que acontece com a característica da matriz de restrições para PCVs com um número variável de clientes. Na Tabela 6.3, podemos observar as características da matriz de restrições de alguns PCVs constituídos desde 4 até 10 clientes.

Nº de clientes	Nº de restrições (linhas)	Nº de variáveis (colunas)	Característica da matriz
4	4	6	4
5	5	10	5
6	26	35 (15+20)	26
7	42	56 (21+35)	42
8	134	154 (28+126)	134
9	219	246 (36+210)	219
10	592	627 (45+582)	592

Tabela 6.3: Característica da matriz de restrições de alguns PCVs.

Nota: Nas somas colocadas entre parênteses na terceira coluna, a primeira parcela representa o número de colunas inicial (variáveis de decisão), e a segunda parcela representa o número de variáveis de folga acrescentadas.

Observando a Tabela 6.3, é natural conjecturar que o número de restrições linearmente independentes num PCV com n clientes é igual ao número de restrições, que correspondem às linhas da matriz. Assim, como a característica da matriz é igual ao número de restrições, concluímos que a característica da matriz de restrições não nos trará informação adicional sobre a existência de restrições redundantes, pelo contrário, confirma a total independência linear entre as restrições.

Esta conclusão, conjugada com a conjectura apresentada no capítulo 5, gera um paradoxo. Por um lado, teoricamente, todas as restrições são indispensáveis, por outro, na prática, apenas uma pequena parte é necessária para a resolução. Esta aparente contradição indicia que podem existir relações e propriedades ainda desconhecidas neste tipo de sistemas.

6.2. INTERLIGAÇÃO DAS RESTRIÇÕES DE ELIMINAÇÃO DE SUB-CICLOS

Focando novamente a atenção na conjectura apresentada no capítulo 5, será legítimo supor que a eliminação de sub-ciclos com um determinado número de nós poderá desencadear a eliminação de outros sub-ciclos. Como tal, vamos fazer um estudo nesse sentido, novamente com o intuito de comprovar a existência de interligação entre as várias restrições de eliminação de sub-ciclos.

É importante realçar que nesta análise, apenas nos basearemos em grafos com 4 e 5 nós, tendo sempre em conta, como já foi referido, que não seria necessária a inclusão deste tipo de restrições para a obtenção da solução ótima. No entanto, o uso de grafos com um número reduzido de nós permite uma melhor visualização e consequente compreensão do problema.

Vamos começar por analisar num grafo com 4 nós, de que forma as restrições de eliminação de sub-ciclos com 4 nós condicionam a existência de sub-ciclos com 3 nós, isto é, pretendemos determinar em que medida a existência de sub-ciclos com 3 nós na solução do problema, é influenciada quando eliminamos todos os sub-ciclos com 4 nós. Seguidamente, será feito um raciocínio análogo num grafo com 5 nós.

Por fim, iremos estudar também, num grafo de 5 nós, qual o grau de impedimento da formação de sub-ciclos com 3 e 4 nós, quando acrescentamos a restrição de eliminação de sub-ciclos com 5 nós.

Esquematisando este raciocínio, de forma a torná-lo mais claro, pretendemos completar o esquema da Figura 6.3 com a correspondente avaliação quantificada.

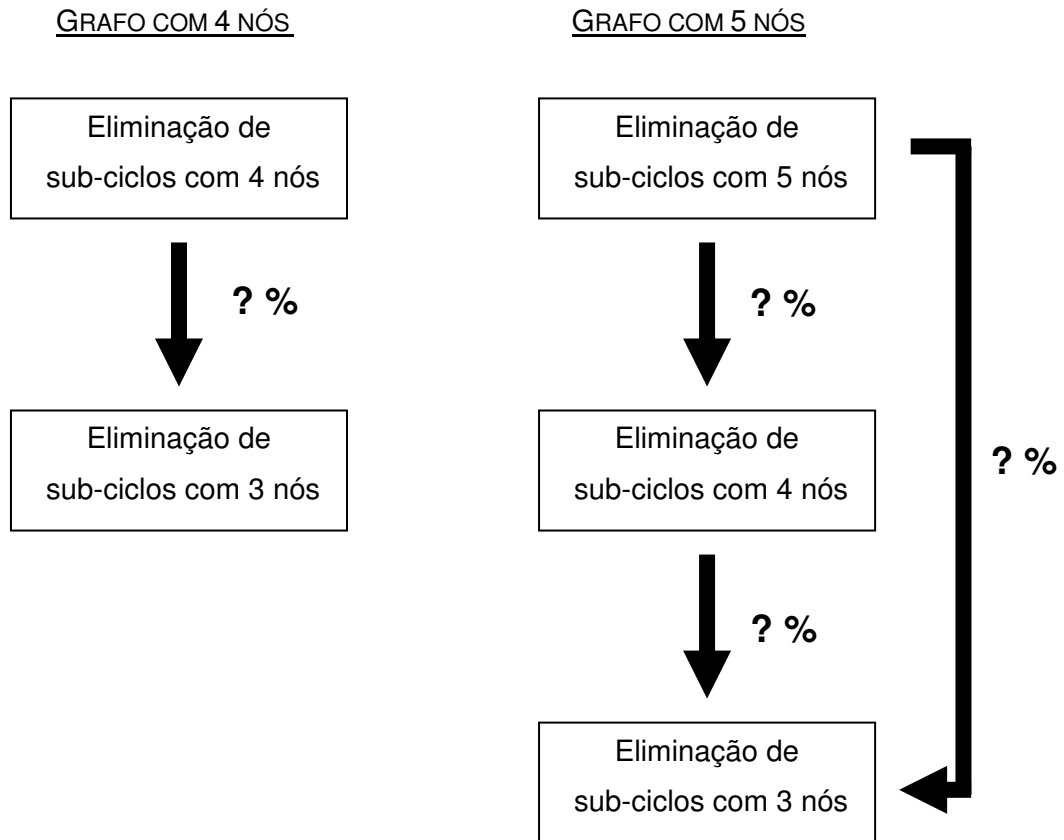


Figura 6.3: Esquema representativo do estudo da interligação de restrições.

6.2.1. INFLUÊNCIA DAS RESTRIÇÕES DE ELIMINAÇÃO DE SUB-CICLOS COM 4 NÓS NA ELIMINAÇÃO DE SUB-CICLOS COM 3 NÓS

Consideremos um grafo completo com 4 nós, ou seja, um grafo simples em que todos os nós estão ligados. Deste modo, temos 4 nós e 6 arestas, como podemos ver na Figura 6.4 .

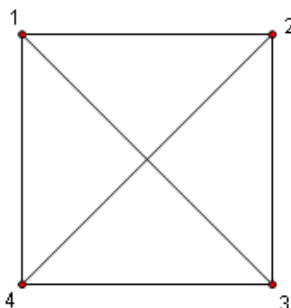


Figura 6.4: Grafo completo com 4 nós.

Neste grafo, é possível formar quatro sub-ciclos com 3 nós (4C_3): (1,2,3), (1,2,4); (1,3,4) e (2,3,4) (Figura 6.5);

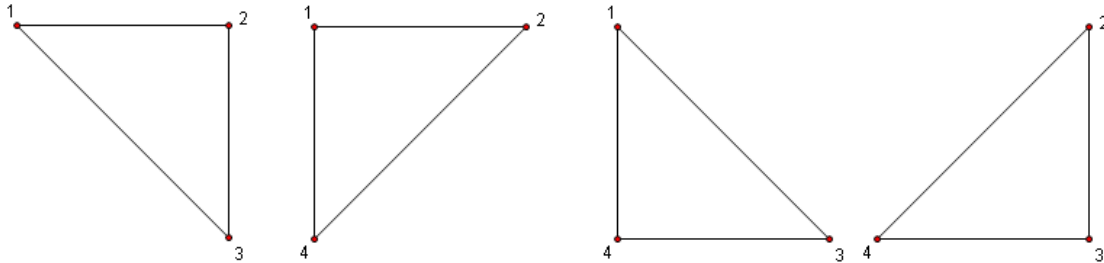


Figura 6.5: Sub-ciclos possíveis com 3 nós.

e três sub-ciclos com 4 nós: (1,2,3,4), (1,3,2,4) e (1,2,4,3) (Figura 6.6).

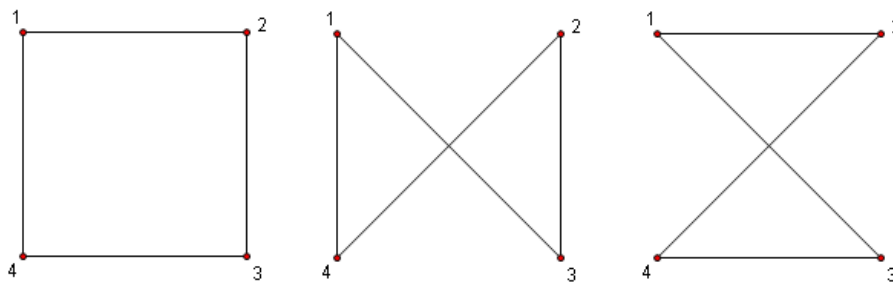


Figura 6.6: Sub-ciclos possíveis com 4 nós.

Para impedir a formação dos 3 sub-ciclos com 4 nós, basta acrescentar uma restrição, dado que todos os sub-ciclos são formados pelos mesmos nós. A restrição é a seguinte:

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{23} + x_{24} + x_{34} \leq 3. \quad (1)$$

Analise-se com mais detalhe como actua esta restrição. Temos 6 arestas intervenientes, das quais podem ser escolhidas, no máximo, 3. Logo, existem ${}^6C_3 = 20$ formas distintas de actuar nessa escolha, considerando a permanência de 3 arestas.

Iremos sempre considerar o caso em que permanecem o número máximo de arestas possíveis em cada restrição, dado que, para os casos em que tal não acontece, menor é a probabilidade de formação de sub-ciclos, ou seja, nos casos em que duas, uma, ou mesmo zero arestas integram a solução, menor é a probabilidade de se formarem sub-ciclos no grafo. Vamos, assim, centrar o nosso estudo na análise do pior caso.

Na Tabela 6.4, podemos observar todas essas possibilidades.

x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{23}	x_{24}	x_{34}	Resultado
1	1	1				XX
1	1		1			(1,2,3)
1	1			1		X
1	1				1	X
1		1	1			X
1		1		1		(1,2,4)
1		1			1	X
1			1	1		XX
1			1		1	X
1				1	1	X
	1	1	1			X
	1	1		1		X
	1	1			1	(1,3,4)
	1		1	1		X
	1		1		1	XX
	1			1	1	X
		1	1	1		X
		1	1		1	X
		1		1	1	XX
			1	1	1	(2,3,4)

Tabela 6.4: Formas distintas de satisfazer, ao máximo, a restrição (1).

Notação: XX - existe um vértice com grau superior a 2;

X - o caminho não fecha, não formando assim um ciclo.

É fundamental ter em conta que toda esta análise se enquadra no estudo do PCV, logo é condição imposta pelas restrições de afectação que todos os nós do grafo tenham grau 2. Como tal, das 20 escolhas possíveis, 4 implicam a existência de nós com grau superior a 2 (escolhas assinaladas com XX na Tabela 6.4). Assim, passamos a ter apenas um espaço de resultados composto por 16 escolhas distintas. No entanto, note-se que existem outros casos (nomeadamente, os que não formam sub-ciclos com 3 nós) em que existem nós com grau 1, isto é, não satisfazem as restrições de afectação. Contudo, como este é um estudo teórico, não vamos excluir estas opções. Deste modo, vamos considerar como escolhas admissíveis, todas aquelas que não implicam a existência de nós com grau superior a 2.

Portanto, das 16 escolhas admissíveis neste caso, existem 4 que geram a formação de sub-ciclos com 3 nós, como podemos ver assinalado na Tabela 6.4. Assim, temos 12 possibilidades distintas que não geram a formação de sub-ciclos com 3 nós e que satisfazem as condições impostas na formulação do PCV.

Deste modo, considerando as ocorrências com igual probabilidade, temos que, ao eliminarmos a existência de sub-ciclos com 4 nós, existem 75% (12/16) de probabilidade de serem também eliminados os sub-ciclos com 3 nós.

Façamos agora um raciocínio análogo para um grafo completo com 5 nós. Neste caso, temos 5 possibilidades distintas de formação de subconjuntos com 4 nós (5C_4). Como vimos no exemplo anterior, cada subconjunto com 4 nós, pode originar 3 sub-ciclos distintos, no entanto, basta uma restrição para impedir a sua formação. As respectivas restrições podem ser observadas na Tabela 6.5.

Subconjuntos com 4 nós	Restrição de eliminação dos sub-ciclos possíveis
1234	$X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{23} + X_{24} + X_{34} \leq 3$ (1)
1235	$X_{12} + X_{13} + X_{15} + X_{23} + X_{25} + X_{35} \leq 3$ (2)
1245	$X_{12} + X_{14} + X_{15} + X_{24} + X_{25} + X_{45} \leq 3$ (3)
1345	$X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{34} + X_{35} + X_{45} \leq 3$ (4)
2345	$X_{23} + X_{24} + X_{25} + X_{34} + X_{35} + X_{45} \leq 3$ (5)

Tabela 6.5: Restrições de eliminação de sub-ciclos com 4 nós num grafo com 5 nós.

Como vimos, para cada restrição apresentada na Tabela 6.5, existem 6 arestas intervenientes, das quais podemos seleccionar 3, no máximo, o que origina as 20 possibilidades diferentes de escolha, já referidas. Note-se que a primeira restrição é igual à apresentada e já analisada no caso anterior (Tabela 6.4).

Vamos, então, analisar as possibilidades em cada uma das restantes restrições apresentadas.

x_{12}	x_{13}	x_{15}	x_{23}	x_{25}	x_{35}	Resultado
1	1	1				XX
1	1		1			(1,2,3)
1	1			1		X
1	1				1	X
1		1	1			X
1		1		1		(1,2,5)
1		1			1	X
1			1	1		XX
1			1		1	X
1				1	1	X
	1	1	1			X
	1	1		1		X
	1	1			1	(1,3,5)
	1		1	1		X
	1		1		1	XX
	1			1	1	X
		1	1	1		X
		1	1		1	X
		1		1	1	XX
			1	1	1	(2,3,5)

Tabela 6.6: Formas distintas de satisfazer, ao máximo, a restrição (2).

x_{12}	x_{14}	x_{15}	x_{24}	x_{25}	x_{45}	Resultado
1	1	1				XX
1	1		1			(1,2,4)
1	1			1		X
1	1				1	X
1		1	1			X
1		1		1		(1,2,5)
1		1			1	X
1			1	1		XX
1			1		1	X
1				1	1	X
	1	1	1			X
	1	1		1		X
	1	1			1	(1,4,5)
	1		1	1		X
	1		1		1	XX
	1			1	1	X
		1	1	1		X
		1	1		1	X
		1		1	1	XX
			1	1	1	(2,4,5)

Tabela 6.7: Formas distintas de satisfazer, ao máximo, a restrição (3).

X₁₃	X₁₄	X₁₅	X₃₄	X₃₅	X₄₅	Resultado
1	1	1				XX
1	1		1			(1,3,4)
1	1			1		X
1	1				1	X
1		1	1			X
1		1		1		(1,3,5)
1		1			1	X
1			1	1		XX
1			1		1	X
1				1	1	X
	1	1	1			X
	1	1		1		X
	1	1			1	(1,4,5)
	1		1	1		X
	1		1		1	XX
	1			1	1	X
		1	1	1		X
		1	1		1	X
		1		1	1	XX
			1	1	1	(3,4,5)

Tabela 6.8: Formas distintas de satisfazer, ao máximo, a restrição (4).

X₂₃	X₂₄	X₂₅	X₃₄	X₃₅	X₄₅	Resultado
1	1	1				XX
1	1		1			(2,3,4)
1	1			1		X
1	1				1	X
1		1	1			X
1		1		1		(2,3,5)
1		1			1	X
1			1	1		XX
1			1		1	X
1				1	1	X
	1	1	1			X
	1	1		1		X
	1	1			1	(2,4,5)
	1		1	1		X
	1		1		1	XX
	1			1	1	X
		1	1	1		X
		1	1		1	X
		1		1	1	XX
			1	1	1	(3,4,5)

Tabela 6.9: Formas distintas de satisfazer, ao máximo, a restrição (5).

Verificamos, através da análise pormenorizada das Tabelas 6.4, 6.6, 6.7, 6.8 e 6.9 que, das 16 escolhas admissíveis em cada uma das respectivas restrições, 12 não possibilitam a formação de sub-ciclos com 3 nós e satisfazem as condições impostas, como já havia sido concluído no caso anterior. Deste modo, considerando o sistema composto pelas 5 restrições apresentadas, vamos ter 60 escolhas admissíveis que não geram sub-ciclos com 3 nós. Assim, num grafo com 5 nós, ao eliminarmos os sub-ciclos com 4 nós, temos novamente 75% (60/80) de probabilidade de eliminar os sub-ciclos com 3 nós, tal como acontecia no caso de um grafo com 4 nós.

6.2.2. INFLUÊNCIA DAS RESTRIÇÕES DE ELIMINAÇÃO DE SUB-CICLOS COM 5 NÓS NA ELIMINAÇÃO DE SUB-CICLOS COM 3 E 4 NÓS

Analogamente ao estudo anterior, façamos agora uma análise para a eliminação de sub-ciclos com 5 nós, de forma a termos alguma informação acerca do seu impacto na eliminação de sub-ciclos com 3 e 4 nós.

Consideremos, então, um grafo completo com 5 nós.

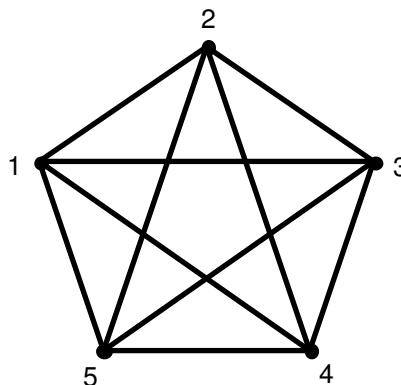


Figura 6.7: Grafo completo com 5 nós.

Para eliminarmos todos os sub-ciclos possíveis com 5 nós neste grafo (Figura 6.7), basta-nos considerar a seguinte restrição

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{34} + x_{35} + x_{45} \leq 4. \quad (6)$$

Temos um total de 10 arestas intervenientes na restrição, das quais podemos escolher, no máximo 4, logo teremos ${}^{10}C_4 = 210$ formas distintas de fazer essa escolha.

Com base na Tabela A.2.1 do Anexo 2, chegamos à conclusão que existem 126 escolhas que implicam a existência de nós com grau superior a 2, impossibilitadas à partida pelas restrições de afectação, logo passamos a ter um total de 84 escolhas admissíveis. Dessas, temos o seguinte:

Possibilidades	Número
Não permitem a formação de sub-ciclos	59
Permitem a formação de sub-ciclos com 3 nós	10
Permitem a formação de sub-ciclos com 4 nós	15
Total	84

Tabela 6.10: Análise das escolhas admissíveis da restrição (6).

Atendendo à Tabela 6.10, observamos que, ao eliminarmos os sub-ciclos com 5 nós no grafo, temos aproximadamente 88% (74/84) de probabilidade de eliminar sub-ciclos com 3 nós e aproximadamente 82% (69/84) de probabilidade de eliminar sub-ciclos com 4 nós.

Em forma de resumo, com base na análise efectuada, estamos em condições de completar o esquema (Figura 6.8), de forma a consolidarmos toda a informação obtida.

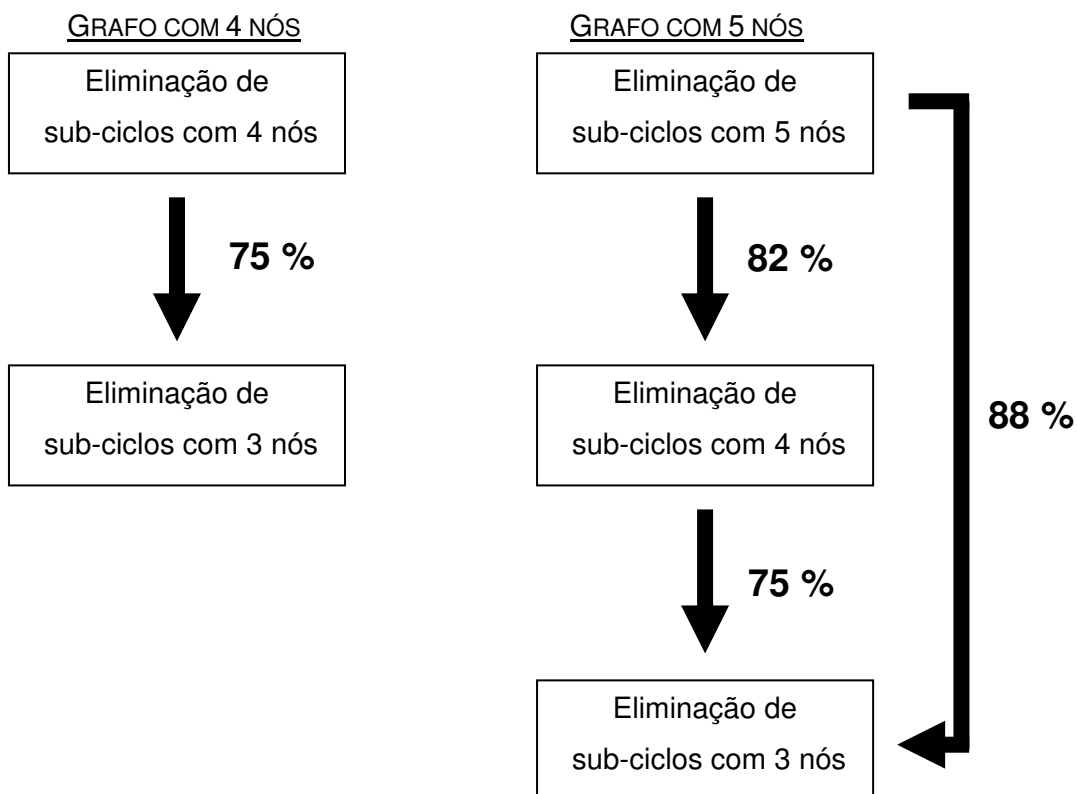


Figura 6.8: Esquema representativo do estudo efectuada.

Os elevados valores percentuais obtidos neste estudo (Figura 6.8) vêm confirmar o que toda a experiência prática realizada ao longo deste trabalho nos demonstrou. Ou seja, estes resultados vão de encontro à conjectura enunciada no capítulo 5, que pressupõe a existência de uma forte interligação entre as restrições de eliminação de sub-ciclos. De facto, ao longo de toda a análise efectuada e de todos os exemplos práticos resolvidos, sempre foi possível obter a solução óptima do problema com um número de restrições muito inferior ao considerado inicialmente pela respectiva formulação do PCV. Tudo isto aponta para que as restrições de eliminação de sub-ciclos com um determinado número de nós influenciem a eliminação de sub-ciclos com um cardinal diferente. No entanto, a grande questão que continua a prevalecer é a de qual o conjunto de restrições de eliminação de sub-ciclos que é, de facto, necessário para a obtenção da solução óptima do problema. Apesar de todos os esforços nesse sentido, esta é uma questão que ainda se encontra sem resposta.

No entanto, é necessário frisar que este é um estudo teórico, onde são assumidas determinadas características, que em termos práticos não se verificam, nomeadamente, o facto de as ocorrências terem a mesma probabilidade em todas as possibilidades.

7. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi feito um estudo, de forma gradual, do Problema do Caixeiro Viajante. O problema foi introduzido de um modo simples e informal e, posteriormente, foram apresentadas várias formulações matemáticas para o mesmo, propostas por diversos autores. Focando a atenção numa das formulações apresentadas, foram apresentados resultados que permitiram o seu melhoramento, facilitando a resolução do problema, provando-se assim a existência de uma formulação com a mesma eficácia mas que apenas necessita de metade das restrições de eliminação de sub-ciclos. Toda a análise posterior foi centrada nessa formulação, sendo resolvidas várias instâncias do PCV de forma a se poder analisar o comportamento das restrições de eliminação de sub-ciclos e a sua importância na obtenção da solução óptima do problema.

O estudo efectuado levou-nos a conjecturar que muitas das restrições de eliminação de sub-ciclos são provavelmente desnecessárias, pois todas as instâncias foram resolvidas com um número de restrições bastante inferior ao número exigido por qualquer uma das formulações apresentadas.

De forma a averiguar a existência da provável interligação entre estas restrições, analisámos de que forma as restrições de eliminação de sub-ciclos com 5 nós influenciam a eliminação de sub-ciclos com 3 e 4 nós, assim como as restrições de eliminação de sub-ciclos de 4 nós influenciam a eliminação de sub-ciclos com 3 nós. Em todos os casos, obtivemos resultados que, sob certas condições de equiprobabilidade, apontam para a existência de uma forte interligação, isto é, ao eliminarmos, por exemplo, os sub-ciclos com 5 nós num grafo, temos uma grande probabilidade de impedir a formação de sub-ciclos com 3 e 4 nós. Estes resultados vão de encontro a toda a experiência prática realizada ao longo deste trabalho, onde é notória a existência de redundância entre estas restrições. Por exemplo, é possível obter a solução óptima de um PCV com 13 clientes usando apenas aproximadamente 0.5% das restrições de eliminação de sub-ciclos.

Através da obtenção de valores numéricos que vêm confirmar a existência de uma forte redundância entre as restrições de eliminação de sub-ciclos, este trabalho fomenta estudos futuros com o objectivo de eliminar esta redundância, reduzindo drasticamente o número de restrições deste tipo o que, conseqüentemente, levará a uma redução do custo computacional da resolução do PCV.

8. BIBLIOGRAFIA

- [1] Barreto, S. *Análise e Modelização de Problemas de Localização-Distribuição*. Tese de Doutoramento, Departamento de Economia, Gestão e Engenharia Industrial, Universidade de Aveiro, 2004.
- [2] Barreto, S. *Uma contribuição para a simplificação do Problema do Caixeiro Viajante* Universidade de Aveiro, 2003 (Documento não publicado).
- [3] Barreto, S., Ferreira, C., Paixão, J. *Formulações de compromisso para um Problema de Localização-Distribuição com capacidade*. Apresentação integrada no Seminário de Investigação Operacional da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Abril de 2004 (Documento não publicado).
- [4] Bondy, J., Murty, U. *Graph theory with applications*. North Holland, New York, 1976.
- [5] Cormen, Thomas H. et al. *Algoritmos: teoria e prática*. 2ª Edição, Rio de Janeiro: Elsevier, 2002.
- [6] Crowder, H., Padberg, M. *Solving large-scale symmetric travelling salesman problems to optimality*. Management Science 26 (1980) S. 495-509
- [7] Cunha, Bonasser, Abrahão *Experimentos Computacionais com Heurísticas de Melhorias para o Problema do Caixeiro Viajante*. Trabalho apresentado no XVI Congresso da Associação Nacional de Pesquisa e Ensino em Transportes e publicado nos anais do evento. Departamento de Engenharia e Transportes, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2002.
- [8] Dantzig, G., Fulkerson, R., Johnson, S. *Solution of a large-scale Traveling-Salesman Problem*. Operations Research, volume 2, número 1, 1954.
- [9] Goldberg, Luna *Optimização Combinatória e Programação Linear: Modelos e Algoritmos*. Editora Campus, 1999.

[10] Land, A. H., Doig, A. G. *An Automatic method of solving discrete programming problems*. *Econometrica*, volume 28, número 3. Julho, 1960.

[11] Laporte, G. *The Traveling Salesman Problem: An overview of exact and approximate algorithms*. *European Journal of Operational Research* nº 59,1992.

[12] Lin, S., Kernighan, B. W. *An Effective Heuristic Algorithm for the Traveling-Salesman Problem*. *Operations Research*, Vol. 21, pp. 498-516, Março-Abril 1973.

[13] Miller, C. E., Tucker, A. W., Zemlin, R. A. *Integer Programming Formulation of Traveling Salesman Problems*. 1960.

[14] Padberg, M., Rinaldi, G. *Optimization of a 532-city Symmetric Traveling Salesman Problem by Branch and cut*. *Operations Research Letters*, Vol. 6, pp 1-7, 1987

[15] Souza, L. V. *Técnicas de roteirização de veículos aplicadas ao transporte escolar*. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, Brasil, 1997.

Endereços consultados:

<http://www.portalcomputacao.com.br/conhecimento/pcv.html#desc24>

<http://www.tsp.gatech.edu/>

http://en.wikipedia.org/wiki/Branch_and_bound

9. ANEXOS

ANEXO 1

DESCRIÇÃO DOS FICHEIROS DE DADOS

Neste anexo são apresentados os ficheiros de dados sobre quais os testes computacionais foram efectuados. Todos os ficheiros, uns directamente outros com algumas adaptações, foram recolhidos de [1].

Cada instância do PCV encontra-se numerada de acordo com a ordem de surgimento no trabalho. Em cada instância, é identificado o número dos clientes que a constitui e as respectivas coordenadas (abscissa e ordenada).

FICHEIROS DE DADOS

A1.1. Instâncias constituídas por seis clientes

INSTÂNCIA 1		
Cliente	Abcissa	Ordenada
1	151	254
2	159	261
3	130	254
4	128	252
5	163	247
6	146	246

INSTÂNCIA 2		
Cliente	Abcissa	Ordenada
1	295	272
2	301	258
3	309	260
4	217	274
5	218	278
6	282	267

A1. 2. Instâncias constituídas por sete clientes

INSTÂNCIA 3		
Cliente	Abcissa	Ordenada
1	218	382
2	218	358
3	201	370
4	214	371
5	224	370
6	210	382
7	104	354

INSTÂNCIA 4		
Cliente	Abcissa	Ordenada
1	283	406
2	279	399
3	271	401
4	264	414
5	277	439
6	290	434
7	319	433

INSTÂNCIA 5		
Cliente	Abcissa	Ordenada
1	45	35
2	59	15
3	5	6
4	10	17
5	21	10
6	5	64
7	30	15

INSTÂNCIA 6		
Cliente	Abcissa	Ordenada
1	547064	268520
2	543480	259490
3	543480	529420
4	532728	276990
5	550032	260610
6	565824	278670
7	541520	263760

A1.3. Instâncias constituídas por oito clientes

INSTÂNCIA 7		
Cliente	Abcissa	Ordenada
1	295	272
2	301	258
3	309	260
4	217	274
5	218	278
6	282	267
7	242	249
8	230	262

INSTÂNCIA 8		
Cliente	Abcissa	Ordenada
1	188	357
2	152	349
3	215	389
4	212	394
5	188	393
6	207	406
7	184	410
8	207	392

INSTÂNCIA 9		
Cliente	Abcissa	Ordenada
1	20	20
2	20	50
3	30	30
4	30	70
5	40	50
6	50	30
7	50	70
8	60	50

INSTÂNCIA 10		
Cliente	Abcissa	Ordenada
1	37	52
2	49	49
3	52	64
4	20	26
5	40	30
6	21	47
7	17	63
8	31	62

INSTÂNCIA 11		
Cliente	Abcissa	Ordenada
1	44	13
2	26	13
3	11	28
4	7	43
5	17	64
6	41	46
7	55	34
8	35	16

INSTÂNCIA 12		
Cliente	Abcissa	Ordenada
1	329	252
2	318	252
3	329	224
4	267	213
5	275	192
6	303	201
7	208	217
8	326	181

INSTÂNCIA 13		
Cliente	Abcissa	Ordenada
1	146	208
2	164	208
3	141	206
4	147	193
5	164	193
6	129	189
7	155	185
8	139	182

A.1.4. Instâncias constituídas por dez clientes

INSTÂNCIA 14		
Cliente	Abcissa	Ordenada
1	119	340
2	129	349
3	126	347
4	125	346
5	116	355
6	126	335
7	125	355
8	119	357
9	115	341
10	153	351

INSTÂNCIA 15		
Cliente	Abcissa	Ordenada
1	51	21
2	42	41
3	31	32
4	5	25
5	12	42
6	36	16
7	52	41
8	27	23
9	17	33
10	13	13

INSTÂNCIA 16		
Cliente	Abcissa	Ordenada
1	22	22
2	36	26
3	21	45
4	45	35
5	55	20
6	33	34
7	50	50
8	55	45
9	26	59
10	40	66

INSTÂNCIA 17		
Cliente	Abcissa	Ordenada
1	40	25
2	42	7
3	24	12
4	23	3
5	11	14
6	6	38
7	2	48
8	8	56
9	13	52
10	6	68

INSTÂNCIA 18		
Cliente	Abcissa	Ordenada
1	3915	1225
2	4145	1176
3	4170	1206
4	3926	1275
5	3965	1169
6	4266	1261
7	4242	1226
8	4234	1120
9	4376	1358
10	4364	1276

INSTÂNCIA 19		
Cliente	Abcissa	Ordenada
1	74	41
2	118	34
3	88	42
4	95	30
5	75	40
6	117	33
7	83	42
8	97	33
9	112	34
10	99	29

A.1.5. Instâncias constituídas por 11 clientes

INSTÂNCIA 20		
Cliente	Abcissa	Ordenada
1	298	427
2	309	445
3	307	464
4	336	475
5	320	439
6	321	437
7	322	437
8	323	433
9	324	433
10	323	429
11	314	435

INSTÂNCIA 21		
Cliente	Abcissa	Ordenada
1	293	421
2	296	418
3	261	384
4	297	410
5	315	407
6	314	406
7	321	391
8	321	398
9	314	394
10	313	378
11	304	382

INSTÂNCIA 22		
Cliente	Abcissa	Ordenada
1	43	26
2	31	76
3	22	53
4	26	29
5	50	40
6	55	50
7	54	10
8	60	15
9	47	66
10	30	60
11	30	50

INSTÂNCIA 23		
Cliente	Abcissa	Ordenada
1	30	61
2	22	54
3	45	54
4	39	47
5	28	39
6	36	36
7	32	35
8	33	32
9	27	28
10	32	28
11	11	27

A.1.6. Instâncias constituídas por 13 clientes

INSTÂNCIA 24		
Cliente	Abcissa	Ordenada
1	62	42
2	42	57
3	16	57
4	8	52
5	7	38
6	27	68
7	30	48
8	43	67
9	58	48
10	58	27
11	37	69
12	38	46
13	46	10

INSTÂNCIA 25		
Cliente	Abcissa	Ordenada
1	15	56
2	29	39
3	54	38
4	55	57
5	67	41
6	10	70
7	6	25
8	65	27
9	40	60
10	70	64
11	64	4
12	36	6
13	30	20

INSTÂNCIA 26		
Cliente	Abcissa	Ordenada
1	123	46
2	95	39
3	118	34
4	111	32
5	90	39
6	81	35
7	84	34
8	76	37
9	107	35
10	122	38
11	80	40
12	121	39
13	93	45

INSTÂNCIA 27		
Cliente	Abcissa	Ordenada
1	1300	770
2	1182	956
3	895	920
4	1265	1020
5	1171	960
6	1087	735
7	1118	1036
8	883	1058
9	1003	1004
10	1296	758
11	90	993
12	692	1930
13	67	661

ANEXO 2

Neste anexo, encontra-se a tabela com as 210 possibilidades de satisfazer, no máximo, a restrição (6) que surge no capítulo 6, secção 6.3.

X ₁₂	X ₁₃	X ₁₄	X ₁₅	X ₂₃	X ₂₄	X ₂₅	X ₃₄	X ₃₅	X ₄₅	Res.
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	XX
1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	XX
1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	XX
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	XX
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	XX
1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	XX
1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	XX
1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	XX
1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	XX
1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	XX
1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	XX
1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	XX
1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	XX
1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	XX
1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	XX
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	XX
1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	XX
1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	123
1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	XX
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1342
1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	X
1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	X
1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	X
1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1352
1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	X
1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	XX
1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	X
1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	X
1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	XX
1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	XX
1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	XX
1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	XX
1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	XX
1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	XX

PCV – Resolução e Depuração

1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	XX
1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	XX
1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1432
1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	X
1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	X
1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	XX
1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	XX
1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	124
1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	XX
1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	X
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	X
1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1452
1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	X
1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	XX
1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	X
1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	XX
1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	XX
1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	X
1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1532
1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	X
1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	XX
1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	X
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	X
1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1542
1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	125
1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	XX
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	XX
1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	X
1	0	0	1	0	0	0	01	0	1	X
1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	XX
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	XX
1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	XX
1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	XX
1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	XX
1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	XX
1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	XX
1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	XX
1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	XX
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	XX
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	X

PCV – Resolução e Depuração

1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	X
1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	XX
1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	XX
1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	XX
1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	X
1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	XX
1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	X
1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	X
1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	X
1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	XX
1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	345
0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	XX
0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	XX
0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	XX
0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	XX
0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	XX
0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	XX
0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1423
0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	X
0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	XX
0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	XX
0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	XX
0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	X
0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	XX
0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	X
0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	XX
0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	143
0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	X
0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	X
0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	XX
0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	XX
0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1453
0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	X
0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1523
0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	XX
0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	XX
0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	X
0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	X
0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	X

PCV – Resolução e Depuração

0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	153
0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	X
0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	X
0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	XX
0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	XX
0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	XX
0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1543
0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	XX
0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	XX
0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	XX
0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	XX
0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	X
0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	XX
0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	XX
0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	X
0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	XX
0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	XX
0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	XX
0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	X
0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	X
0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	254
0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	XX
0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	XX
0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	X
0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	XX
0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	X
0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	XX
0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	XX
0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	X
0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	X
0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	X
0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	X
0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	145
0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1524
0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	XX
0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	X
0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	XX
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	X
0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	XX

PCV – Resolução e Depuração

0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	XX
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1534
0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	XX
0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	XX
0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	XX
0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	XX
0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	X
0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	XX
0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	X
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	235
0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	X
0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	XX
0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	XX
0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	X
0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	XX
0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	X
0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	XX
0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	XX
0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	XX
0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	XX
0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	X
0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	XX
0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	XX
0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	XX
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	XX
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	234
0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	X
0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	X
0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	X
0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	XX
0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	XX
0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	XX
0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	X
0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	XX
0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	X
0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	XX
0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	XX
0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	X
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	XX

0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	XX
0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	XX
0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	XX
0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	XX
0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	XX
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	XX
0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	XX
0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	XX
0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	XX
0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	XX
0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	2354
0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	XX
0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	2345
0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	XX
0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	XX
0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	2435
0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	XX
0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	XX
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	XX
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	XX

Tabela A.2.1: Possibilidades para satisfazer, no máximo, a restrição (6).

Notação: XX - existe um vértice com grau superior a 2;

X - o caminho não fecha, não formando assim um ciclo;