Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
Ano 2009

Ana Cristina Felizardo Henriques

LÓGICA PROPOSICIONAL MODAL

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
Ano 2009

Ana Cristina Felizardo Henriques

LÓGICA PROPOSICIONAL MODAL

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações, realizada sob a orientação científica dos Professores Enrique German Hernandez Manfredini e Manuel António Gonçalves Martins, Professores Auxiliares do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

À minha família, ao meu namorado e aos professores Enrique German Hernandez-Manfredini e Manuel António Gonçalves Martins.

o júri

Presidente

Prof. Doutor Helmuth Robert Malonek
professor catedrático do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Prof. Doutor Enrique German Hernandez Manfredini
professor auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Prof. Doutor Manuel António Gonçalves Martins
professor auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Prof. Doutor Ricardo João Rodrigues Gonçalves
Investigador da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Agradecimentos

Nem sempre foi fácil ter a coragem e força necessárias à superação do cansaço e à conciliação da vida de professora com a de estudante.
Por isso agradeço à minha família e ao meu namorado por todo o apoio que me prestaram ao longo deste ano de trabalho.

Para conseguir tornar este projecto realidade foi essencial a motivação e acompanhamento do professor Enrique Hernandez Manfredini, que sempre se manifestou disponível para me ajudar e encorajar.

Agradeço também ao professor Manuel António pelo apoio prestado.

Por tudo, obrigada a todos!

palavras-chave

Lógica, lógica modal, validade, prova, valor de uma fórmula, necessidade e possibilidade.

Resumo

O presente trabalho oferece uma alternativa para a semântica de Kripke dando ênfase ao valor de uma fórmula em lugar da original definição da semântica de Kripke. Desta forma o raciocínio desenvolve-se principalmente em torno de conceitos da teoria elementar de conjuntos, ao invés da lógica de 1ª ordem, o que nos parece ser uma abordagem mais natural e compacta do tema. São examinados os tópicos verdade e validade num modelo e numa estrutura, equivalência entre fórmulas de 1ª ordem e fórmulas proposicionais modais, aplicações da teoria de prova e lógicas normais, incluindo o modelo canónico para lógicas normais.

keywords

Logic, modal logic, vality, proof, value of formula, necessity and possibility

abstract

In this work we present some topics of modal logic, offering an alternative to the usual first order stile presentation of Kripke's semantics, by means of the concept of value of a formula. In this way the reasoning takes place mainly in the context of elementary set theory, instead of straight first order logic. This appears to be a more natural and compact approach to the subject. The topics dealt with here are truth and validity in a model and in a frame, equivalence between some first order properties of binary relations and modal schemata, proof theory, and normal logics, including canonical models for normal logics.

Índice:

Introdução: **1**

Lógica Proposicional Modal **3**

1. Sintaxe e Semântica da lógica proposicional modal 3
2. Verdade e validade 5
3. Equivalências entre propriedades de 1ª ordem de relações binárias e fórmulas modais 13
4. Lógicas 21
5. Teoremas 25
6. Conjuntos Maximais 33
7. Lógicas Normais 41
8. Modelo Canónico: 47

Apêndices: **57**

Bibliografia: **67**

Introdução:

Este trabalho surge no seguimento do Seminário *Lógica Proposicional Modal* que realizei o ano passado para a conclusão do curso Matemática Ensino.

A realização desta tese é o terminar do Mestrado em Matemática e Aplicações.

O currículo deste primeiro curso inclui uma disciplina de *Lógica e Fundamentos da Matemática* que fornece as bases para qualquer estudo de lógica e que despertou o meu interesse em desenvolver estes tópicos em maior detalhe.

Uma lógica modal é uma lógica que trata de *modalidades* tais como *possibilidade* e *necessidade*. Há outras como a *probabilidade*, a *eventualidade*, etc, que não serão objecto deste trabalho.

O trabalho inicialmente foi desenvolvido seguindo as definições de Goldblatt, partindo delas para demonstrar as proposições, lemas e teoremas que constam no trabalho. Posteriormente e seguindo uma ideia do orientador, incluiu-se a definição de *valor de uma fórmula*, o que forneceu uma técnica alternativa no tratamento da semântica e que simplifica os argumentos, tornando-os mais intuitivos e compactos. Esta definição é tratada ao longo do texto. Nos apêndices encontram-se algumas demonstrações alternativas às apresentadas no desenvolvimento do trabalho, utilizando as definições apresentadas no livro de Goldblatt.

Como é habitual, ao longo deste trabalho não será feita distinção entre uso e menção de um símbolo.

Este trabalho apoia-se no livro de Goldblatt, estudando os seus assuntos iniciais. A palavra *frame*, foi traduzida como *estrutura.* Neste trabalho presta-se especial cuidado em resolver a maior parte dos exercícios apresentados no livro de Goldblatt não apenas para ilustrar aplicações do método dos valores de fórmulas, mas também com a esperança de que sejam úteis a alguém que se venha a debruçar sobre este tema.

O tratamento do tema está longe de ser exaustivo, uma vez que uma grande parte dos tópicos da Lógica Modal não são abordados, tais como *Filtrações e Decisão, Completude, Multimodalidade, Lógica Temporal* e muitos outros que poderão ser alvo de estudo num trabalho futuro.

Fazendo agora uma breve referência aos Capítulos do trabalho, o primeiro Capítulo aborda os aspectos sintácticos e semânticos elementares da Lógica Proposicional Modal. Esta abordagem continua com maior detalhe no Capítulo II, tratando em particular os conceitos de verdade e validade, segundo a definição clássica de Kripke e segundo o valor de uma fórmula. Neste Capítulo também se pode constatar como o conceito de valor de uma fórmula está relacionado com os de validade e verdade. No Capítulo III relacionam-se algumas propriedades de 1ª ordem de relações binárias e fórmulas modais. Apresenta-se a definição de lógica e alguns exemplos de lógicas no Capítulo IV. No Capitulo V desenvolvem-se elementos da Teoria de Prova, enquanto que no Capítulo VI examina-se o conceito de conjuntos maximais assim como as suas propriedades elementares. Já no Capítulo VII estuda-se o conceito de Lógica Normal e algumas das suas propriedades elementares, o que conduz de forma natural ao exame de Modelos Canónicos Normais para Lógicas Normais no Capítulo VIII.

Lógica Proposicional Modal

CAPÍTULO I

1. Sintaxe e Semântica da lógica proposicional modal

Símbolos: $\perp$, $\Box$, $\to$, *p, q, r, …*

Definição:

var = {*p, q, r, …*}

$\perp$ pode ser lido como *falsum,* $\to$ é lida da maneira habitual e $\Box$A pode ser lido como "*é necessário A*".

Fórmulas Clássicas e Fórmulas Modais

Definição:

Fórmulas clássicas (FlasC):

F_0 = var $\cup$ $\perp$

…

F_n

$F_{n+1} = F_n \cup \{A \to B\text{: } A, B \in F_n\}$

$FlasC = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$

Fórmulas Modais (Flas):

F_0 = var $\cup$ $\perp$

…

F_n

$F_{n+1} = F_n \cup \{\Box A\text{: } A \in F_n\} \cup \{A \to B\text{: } A, B \in F_n\}$

$Flas = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$

Algumas abreviaturas:

	Linguagem simbólica	Abreviatura
Negação:	$A \to \perp$	$\neg A$
Verdadeiro:	$\neg \perp$	$\top$
Disjunção:	$\neg A \to B$	$A \vee B$
Conjunção:	$\neg (A \to \neg B)$	$A \wedge B$
Equivalência:	$(A \to B) \wedge (B \to A)$	$A \leftrightarrow B$
Diamante:	$\neg \Box \neg A$	$\Diamond A$

Da definição, $\Diamond$A lê-se "é possível A". Pode-se adoptar $\Diamond$ como símbolo primitivo e definir $\Box$ A como $\neg \Diamond \neg$ A.

Estruturas Modais e Modelos

Uma Estrutura Modal (ou simplesmente estrutura) é um par $\mathcal{F}$ = (S, *R*) onde S é um conjunto não vazio e *R* uma relação binária em S ($R \subseteq S \times S$).

Um modelo numa estrutura é um triplo $\mathcal{M}$ = (S, *R*, V) com V: var $\rightarrow$ 2^S. Alternativamente V: var $\rightarrow$ *P*(S) pois existe uma bijecção entre 2^S e $P(S)$, assim V é uma função que atribui a cada fórmula atómica $p \in$ var um subconjunto V(*p*) de S (ver Apêndice I).

CAPÍTULO II

2. Verdade e validade

Definição:

Sejam $\mathcal{M}$ um modelo, s$\in$ S, $p\in$ Var e A, B$\in$ Flas, definimos:

- $\mathcal{M}\vDash_s p$ se e só se s$\in$ V(p)
- $\mathcal{M}\nvDash_s \bot$
- $\mathcal{M}\vDash_s A\rightarrow B$ se e só se $\mathcal{M}\vDash_s A$ implica $\mathcal{M}\vDash_s B$
- $\mathcal{M}\vDash_s \Box A$ se e só se $\forall$ t$\in$ S, sRt $\Rightarrow \mathcal{M}\vDash_t A$

Observar que o anterior equivale a $\forall$ t$\in$R[s] $\Rightarrow \mathcal{M}\vDash_t A$.

"$\mathcal{M}\vDash_s$ A" é lido como A é verdadeiro no ponto s do modelo $\mathcal{M}$"

Proposição 1:

1.1 $\mathcal{M}\vDash_s \neg A$ se e só se $\mathcal{M}\nvDash_s A$

1.2 $\mathcal{M}\vDash_s A \vee B$ se e só se $\mathcal{M}\vDash_s A$ ou $\mathcal{M}\vDash_s B$

1.3 $\mathcal{M}\vDash_s A \wedge B$ se e só se $\mathcal{M}\vDash_s A$ & $\mathcal{M}\vDash_s B$

1.4 $\mathcal{M}\vDash_s A \leftrightarrow B$ se e só se $\mathcal{M}\vDash_s A \Leftrightarrow \mathcal{M}\vDash_s B$

1.5 $\mathcal{M}\vDash_s \Diamond A$ se e só se existe t$\in$ S com sRt e $\mathcal{M}\vDash_t A$

Demonstração:

1.1 $\mathcal{M}\vDash_s \neg A \Leftrightarrow \mathcal{M}\vDash_s A\rightarrow\bot \Leftrightarrow [\mathcal{M}\vDash_s A \Rightarrow \mathcal{M}\vDash_s \bot] \Leftrightarrow \mathcal{M}\nvDash_s A$, pois, por definição, $\mathcal{M}\nvDash_s \bot$.

1.2 $\mathcal{M}\vDash_s A \vee B \Leftrightarrow \mathcal{M}\vDash_s \neg A\rightarrow B \Leftrightarrow [\mathcal{M}\vDash_s \neg A \Rightarrow \mathcal{M}\vDash_s B] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [\neg\mathcal{M}\vDash_s A \Rightarrow \mathcal{M}\vDash_s B] \Leftrightarrow \mathcal{M}\vDash_s A$ ou $\mathcal{M}\vDash_s B$.

1.3 $\mathcal{M}\vDash_s A\wedge B \Leftrightarrow \mathcal{M}\vDash_s \neg(A\rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg\mathcal{M}\vDash_s A\rightarrow \neg B$
$\Leftrightarrow \neg[\mathcal{M}\vDash_s A \Rightarrow \mathcal{M}\vDash_s \neg B] \Leftrightarrow \neg [\mathcal{M}\vDash_s A \Rightarrow \neg\mathcal{M}\vDash_s B]$
$\Leftrightarrow \mathcal{M}\vDash_s A$ & $\mathcal{M}\vDash_s B$.

1.4 $\mathcal{M} \vDash_s A \leftrightarrow B \;\Leftrightarrow\; [\mathcal{M} \vDash_s A \rightarrow B \wedge B \rightarrow A]$

$\Leftrightarrow\; [\mathcal{M} \vDash_s A \rightarrow B \;\&\; \mathcal{M} \vDash_s B \rightarrow A]$

$\Leftrightarrow\; [(\mathcal{M} \vDash_s A \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_s B) \;\&\; (\mathcal{M} \vDash_s B \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_s A)]$

$\Leftrightarrow\; [\mathcal{M} \vDash_s A \Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash_s B]$

1.5 $\mathcal{M} \vDash_s \Diamond A \;\Leftrightarrow\; \mathcal{M} \vDash_s \neg \Box \neg A \;\Leftrightarrow\; \neg \mathcal{M} \vDash_s \Box \neg A$

$\Leftrightarrow\; \neg [\forall t \in S, sRt \Rightarrow (\mathcal{M} \vDash_t \neg A)]$

$\Leftrightarrow\; \neg [\forall t \in S, sRt \Rightarrow \neg(\mathcal{M} \vDash_t A)]$

$\Leftrightarrow\; \exists t \in S: sRt \;\&\; (\mathcal{M} \vDash_t A).$

Definição:

Uma fórmula A diz-se verdadeira num modelo $\mathcal{M}$ e denota-se por $\mathcal{M} \vDash A$ se é verdadeira em todos os pontos de $\mathcal{M}$, ou seja, $\forall s \in S$, $\mathcal{M} \vDash_s A$.

Uma fórmula A diz-se válida numa estrutura $\mathcal{F} = (S, R)$ e denota-se por $\mathcal{F} \vDash A$ se é verdadeira em todos os modelos $\mathcal{M}$ baseados em $\mathcal{F}$, ou seja, $\forall V, \forall \mathcal{M}$ ($\mathcal{M} = (S,R,V) \Rightarrow \mathcal{M} \vDash A$).

Definição: Valor de uma fórmula no modelo (S,R,V):

Seja $A \in Flas$, $R[s] = \{t \in S : sRt\}$ e $V: Var \cup \{\perp\} \rightarrow P(S)$.

- Se $A \in Var$ $\quad \overline{V}(A) = V(A)$
- Se $A = \perp$ $\quad \overline{V}(A) = \phi$
- Se $A = B \rightarrow C$ $\quad \overline{V}(A) = \overline{V}(B)^C \cup \overline{V}(C)$
- Se $A = \Box B$ $\quad \overline{V}(A) = \{s \in S: R[s] \subseteq \overline{V}(B)\}$

Daqui para a frente não será feita distinção entre $\overline{V}$ e V.

Proposição 2:

2.1 $V(\neg A) = V(A)^C$

2.2 $V(\top) = S$

2.3 $V(A \vee B) = V(A) \cup V(B)$

2.4 $V(A \wedge B) = V(A) \cap V(B)$

2.5 $V(A \leftrightarrow B) = [V(A)^C \cup V(B)] \cap [V(B)^C \cup V(A)]$

2.6 $V(\Diamond A) = \{s \in S: R[s] \cap V(A) \neq \phi\}$

2.7 $V(A \rightarrow B) = S \Leftrightarrow V(A) \subseteq V(B)$

B^c representa o complementar de B.

Demonstração:

2.1 $V(\neg A) = V(A \to \bot) = V(A)^C \cup V(\bot) = V(A)^C \cup \phi = V(A)^C$

2.2 $V(\top) = V(\neg\bot) = V(\bot)^C = \phi^C = S$

2.3 $V(A \vee B) = V(\neg A \to B) = V(\neg A)^C \cup V(B) = V(A)^{CC} \cup V(B) = V(A) \cup V(B)$

2.4 $V(A \wedge B) = V(\neg (A \to \neg B)) = V(A \to \neg B)^C = [V(A)^C \cup V(\neg B)]^C =$

$$V(A)^{CC} \cap V(\neg B)^C = V(A) \cap V(B)^{CC} = V(A) \cap V(B)$$

2.5 $V(A \leftrightarrow B) = V((A \to B) \wedge (B \to A)) = V(A \to B) \cap V(B \to A) = V(\neg A \vee B) \cap V(\neg B \vee A)$

$$= [V(\neg A) \cup V(B)] \cap [V(\neg B) \cup V(A)] = [V(A)^C \cup V(B)] \cap [V(B)^C \cup V(A)]$$

2.6 $V(\Diamond A) = V(\neg \Box \neg A) = V(\Box \neg A)^C = \{ s \in S: R[s] \subseteq V(\neg A)\}^C =$

$$= \{s \in S: R[s] \subseteq V(A)^C\}^C = \{ s \in S: R[s] \cap V(A) = \phi \}^C =$$

$$= \{s \in S: R[s] \cap V(A) \neq \phi \}$$

2.7 [$\Rightarrow$] Suponhamos que $V(A \to B) = S$. Mas $V(A \to B) = S \Leftrightarrow V(A)^C \cup V(B) = S$. Seja $x \in V(A)$. Assim, como $x \notin V(A)^C$, temos que $x \in V(B)$.

$$\therefore \quad V(A) \subseteq V(B)$$

[$\Leftarrow$] Suponhamos que $V(A) \subseteq V(B)$. Como $V(A \to B) \subseteq S$, basta provar que $S \subseteq V(A \to B)$, ou seja $S \subseteq V(A)^C \cup V(B)$. Seja $x \in S$. Se $x \in V(B)$, está provado. Se $x \notin V(B)$ então, por hipótese, $x \notin V(A)$. Assim $x \in V(A)^C$, logo $x \in V(A)^C \cup V(B)$.

$$\therefore \quad S = V(A \to B)$$

<u>Proposição 3:</u> $\mathcal{M} \vDash_s A \Leftrightarrow s \in V(A)$.

Demonstração: [Prova por indução na estrutura das fórmulas]

$\mathcal{M} \vDash_s p \quad \Leftrightarrow \quad s \in V(p)$ por definição de valor de uma variável;

$\mathcal{M} \vDash_s \bot \quad \Leftrightarrow \quad s \in \phi \Leftrightarrow s \in V(\bot)$;

$\mathcal{M} \vDash_s B \to C \quad \Leftrightarrow \quad [\mathcal{M} \vDash_s B \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_s C] \quad \Leftrightarrow \quad [s \in V(B) \Rightarrow s \in V(C)]$

$\quad \Leftrightarrow \quad s \in V(B)^C \cup V(C) \quad \Leftrightarrow \quad s \in V(B \to C)$;

$\mathcal{M} \vDash_s \Box B \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\, t \in R[s])\,(t \in V(B)) \quad \Leftrightarrow \quad R[s] \subseteq V(B)$

$\quad \Leftrightarrow \quad s \in \{s \in S: R[s] \subseteq V(B)\}$

$\quad \Leftrightarrow \quad s \in V(\Box B)$

A seguinte proposição fornece um critério de verdade.

Proposição 4: $\mathcal{M} \vDash A \Leftrightarrow S = V(A)$.

Demonstração: $\mathcal{M} \vDash A \Leftrightarrow \forall s \in S, \mathcal{M} \vDash_s A \Leftrightarrow \forall s \in S\ (s \in V(A)) \Leftrightarrow S = V(A)$.

Proposição 5:

As seguintes fórmulas modais são válidas em todos os modelos e por isso válidas em todas as estruturas:

5.1 $\Box \top$

5.2 $\Box (A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

5.3 $\Diamond (A \to B) \to (\Box A \to \Diamond B)$

5.4 $\Box (A \to B) \to (\Diamond A \to \Diamond B)$

5.5 $\Box (A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$

5.6 $\Diamond (A \vee B) \leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$

Demonstração: Sejam $\mathcal{M} = (S,R,V)$ um modelo e $s \in S$.

5.1 Pretende-se demonstrar que $V(\Box \top) = S$

$s \in V(\Box \top) \Leftrightarrow R[s] \subseteq V(\top) \Leftrightarrow R[s] \subseteq S \Leftrightarrow s \in S$

5.2 Sabemos que $V(\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)) = S \Leftrightarrow V(\Box(A \to B)) \subseteq V(\Box A \to \Box B))$

Seja $s \in V(\Box (A \to B))$.

$\therefore \quad R[s] \subseteq V(A \to B)$

$\therefore \quad R[s] \subseteq V(A)^C \cup V(B)$

Seja $x \in R[s]$.

$\therefore \quad x \notin V(A)$ ou $x \in V(B)$

$\therefore \quad x \in R[s] \wedge [x \notin V(A) \vee x \in V(B)]$

$\therefore \quad [x \in R[s] \wedge x \notin V(A)] \vee [x \in R[s] \wedge x \in V(B)]$

$\therefore \quad R[s] \nsubseteq V(A)$ ou $R[s] \subseteq V(B)$

$\therefore \quad s \in V(\Box A)^C \cup V(\Box B)$

$\therefore \quad s \in V(\Box A \to \Box B)$

$\therefore \quad V(\Box (A \to B)) \subseteq V(\Box A \to \Box B)$.

5.3 Temos que $V(\Diamond(A \to B) \to (\Box A \to \Diamond B)) = S \Leftrightarrow V(\Diamond(A \to B)) \subseteq V(\Box A \to \Diamond B)$

Seja $s \in V(\Diamond (A \to B))$.

$\therefore$ $R[s] \cap V(A \to B) \neq \phi$

$\therefore$ $\exists x$: $x \in R[s] \wedge [x \in V(A)^C \cup V(B)]$

$\therefore$ $\exists x$: $[x \in R[s] \wedge x \notin V(A)] \vee [x \in R[s] \wedge x \in V(B)]$

$\therefore$ $R[s] \nsubseteq V(A)$ ou $R[s] \cap V(B) \neq \phi$

$\therefore$ $s \in V(\Box A)^C \cup V(\Diamond B)$

$\therefore$ $V(\Diamond (A \to B)) \subseteq V(\Box A \to \Diamond B)$

5.4 Temos que $V(\Box(A \to B) \to (\Diamond A \to \Diamond B)) = S \Leftrightarrow V(\Box(A \to B)) \subseteq V(\Diamond A \to \Diamond B)$.

Seja $s \in V(\Box (A \to B))$

$\therefore$ $R[s] \subseteq V(A)^C \cup V(B)$

Seja $x \in R[s]$.

$\therefore$ $x \notin V(A)$ ou $x \in V(B)$

$\therefore$ $x \in R[s] \wedge [x \notin V(A) \vee x \in V(B)]$

$\therefore$ $[x \in R[s] \wedge x \notin V(A)] \vee [x \in R[s] \wedge x \in V(B)]$

$\therefore$ $R[s] \cap V(A) = \phi$ ou $R[s] \cap V(B) \neq \phi$

$\therefore$ $s \in V(\Diamond A)^C \cup V(\Diamond B)$

$\therefore$ $s \in V(\Diamond A \to \Diamond B)$

$\therefore$ $V(\Box (A \to B)) \subseteq V(\Diamond A \to \Diamond B)$.

5.5 Temos que $V(\Box (A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)) = S \Leftrightarrow V(\Box (A \wedge B)) = V(\Box A \wedge \Box B)$.

$s \in V(\Box (A \wedge B)) \Leftrightarrow R[s] \subseteq V(A) \cap V(B) \Leftrightarrow R[s] \subseteq V(A)$ e $R[s] \subseteq V(B)$

$\Leftrightarrow s \in V(\Box A)$ e $s \in V(\Box B) \Leftrightarrow s \in V(\Box A) \cap V(\Box B)$

$\Leftrightarrow s \in V(\Box A \wedge \Box B)$

$\therefore$ $V(\Box (A \wedge B)) = V(\Box A \wedge \Box B)$.

5.6 Sabemos que $V(\Diamond(A \vee B) \leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)) = S \Leftrightarrow V(\Diamond(A \vee B)) = V(\Diamond A \vee \Diamond B)$.

$s \in V(\Diamond(A \vee B)) \Leftrightarrow R[s] \cap V(A \vee B) \neq \phi \Leftrightarrow R[s] \cap (V(A) \cup V(B)) \neq \phi$

$\Leftrightarrow (R[s] \cap V(A)) \cup (R[s] \cap V(B)) \neq \phi$

$\Leftrightarrow R[s] \cap V(A) \neq \phi$ ou $R[s] \cap V(B) \neq \phi$

$\Leftrightarrow s \in V(\Diamond A)$ ou $s \in V(\Diamond B) \Leftrightarrow s \in V(\Diamond A) \cup V(\Diamond B)$

$\Leftrightarrow s \in V(\Diamond A \vee \Diamond B)$

$\therefore$ $V(\Diamond(A \vee B)) = V(\Diamond A \vee \Diamond B)$.

Proposição 6:

As seguintes fórmulas modais não têm a propriedade de ser válidas em todas as estruturas:

6.1 $\Box\, A \to A$

6.2 $\Box\, A \to \Box\, \Box\, A$

6.3 $\Box\, (A \to B) \to (\Box\, A \to \Diamond\, B)$

6.4 $\Diamond\, T$

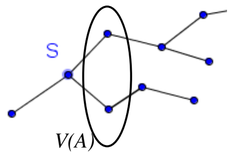
6.5 $\Diamond\, A \to \Box A$

6.6 $\Box\, (\Box\, A \to B) \vee \Box\, (\Box\, B \to A)$

6.7 $\Box\, (A \vee B) \to \Box\, A \vee \Box\, B$

6.8 $\Box\, (\Box\, A \to A) \to \Box\, A$

Demonstração (recurso a contra-exemplo):



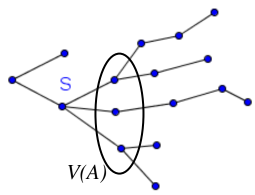
6.1 $\mathcal{M} \vDash_s \Box\, A \to A \;\Leftrightarrow\; s \in V(\Box\, A \to A)$

$\Leftrightarrow\; s \in V(\Box\, A)^C \cup V(A)$

$\Leftrightarrow\; R[s] \nsubseteq V(A)$ ou $s \in V(A)$.

Mas $s \notin V(A)$ e $R[s] \subseteq V(A)$

$\therefore \quad \mathcal{M} \nvDash_s \Box\, A \to A.$



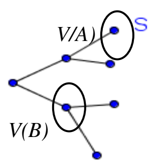
6.2 $\mathcal{M} \vDash_s \Box\, A \to \Box\, \Box\, A \Leftrightarrow s \in V(\Box\, A \to \Box\, \Box\, A)$

$\Leftrightarrow\; s \in V(\Box\, A)^C \cup V(\Box\, \Box\, A)$

$\Leftrightarrow\; R[s] \nsubseteq V(A)$ ou $R[s] \subseteq \{s : R[s] \subseteq V(A)\}$

Mas $R[s] \subseteq V(A)$ e $\exists x \in R[s]: R[x] \nsubseteq V(A)$

$\therefore \quad \mathcal{M} \nvDash_s \Box\, A \to \Box\, \Box\, A.$



6.3 $\mathcal{M} \vDash_s \Box\, (A \to B) \to (\Box\, A \to \Diamond\, B)$

$\Leftrightarrow s \in V(\Box\, (A \to B) \to (\Box\, A \to \Diamond\, B))$

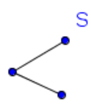
$\Leftrightarrow s \in V(\Box\, (A \to B))^C \cup V(\Box\, A \to \Diamond\, B)$

$\Leftrightarrow R[s] \nsubseteq V(A \to B)$ ou $s \in V(\Box\, A)^C \cup V(\Diamond\, B)$

$\Leftrightarrow R[s] \nsubseteq V(A)^C \cup V(B)$ ou $[R[s] \nsubseteq V(A)$ ou $R[s] \cap V(B) \neq \phi\,]$

Mas $R[s] = \phi$, logo $\phi \subseteq V(A)^C \cup V(B)$ e $\phi \subseteq V(A)$ e $\phi \cap V(B) = \phi$

$\therefore \quad \mathcal{M} \nvDash_s \Box\, (A \to B) \to (\Box\, A \to \Diamond\, B)$



6.4 $\mathcal{M} \vDash_s \Diamond\, T \Leftrightarrow s \in V(\Diamond T) \Leftrightarrow R[s] \cap V(T) \neq \phi$

$\Leftrightarrow R[s] \cap S \neq \phi$

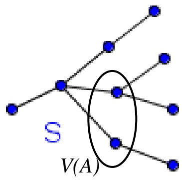
Mas $R[s] = \phi$, $\phi \cap S = \phi$

$\therefore \quad \mathcal{M} \nvDash_s \Diamond T$

6.5 $\mathcal{M}\vDash_s \Diamond A \rightarrow \Box A \Leftrightarrow s\in V(\Diamond A \rightarrow \Box A)$

$\Leftrightarrow s\in V(\Diamond A)^C \cup V(\Box A)$

$\Leftrightarrow R[s] \cap V(A) = \phi$ ou $R[s] \subseteq V(A)$



Mas $R[s] \cap V(A) \neq \phi$ e $R[s] \nsubseteq V(A)$

$\therefore \quad \mathcal{M}\nvDash_s \Diamond A \rightarrow \Box A$

6.6 $\mathcal{M}\vDash_s \Box(\Box A\rightarrow B)\vee \Box(\Box B\rightarrow A)$

$\Leftrightarrow s\in V(\Box(\Box A\rightarrow B)\vee \Box(\Box B\rightarrow A))$

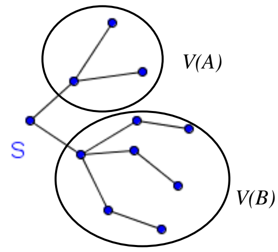
$\Leftrightarrow s\in V(\Box(\Box A\rightarrow B))$ ou $s\in V(\Box(\Box B\rightarrow A))$

$\Leftrightarrow R[s] \subseteq V(\Box A\rightarrow B)$ ou $R[s] \subseteq V(\Box B\rightarrow A)$

$\Leftrightarrow R[s] \subseteq V(\Box A)^C \cup V(B)$ ou $R[s] \subseteq V(\Box B)^C \cup V(A)$

$\Leftrightarrow R[s] \subseteq \{s:R[s] \nsubseteq V(A)\}$ou $R[s] \subseteq V(B)$

ou $R[s] \subseteq \{s:R[s] \nsubseteq V(B)\}$ou $R[s] \subseteq V(A)$



Mas $\exists x\in R[s]$: $R[x] \subseteq V(A)$ e $R[s] \nsubseteq V(B)$ e $\exists y\in R[s]$: $R[y] \subseteq V(B)$ e $R[s] \nsubseteq V(A)$.

$\therefore \quad \mathcal{M}\nvDash_s \Box(\Box A\rightarrow B)\vee \Box(\Box B\rightarrow A)$

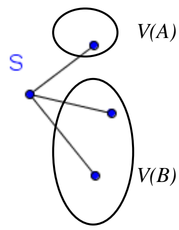
6.7 $\mathcal{M}\vDash_s \Box(A \vee B) \rightarrow \Box A \vee \Box B$

$\Leftrightarrow s\in V(\Box(A \vee B) \rightarrow \Box A \vee \Box B)$

$\Leftrightarrow s\in V(\Box(A \vee B))^C \cup V(\Box A \vee \Box B)$

$\Leftrightarrow R[s] \nsubseteq V(A\vee B)$ ou $s\in V(\Box A) \cup V(\Box B)$

$\Leftrightarrow R[s] \nsubseteq V(A) \cup V(B)$ ou $R[s] \subseteq V(A)$ ou $R[s] \subseteq V(B)$



Mas $R[s] \subseteq V(A) \cup V(B)$ e $R[s] \nsubseteq V(A)$ e $R[s] \nsubseteq V(B)$

$\therefore \quad \mathcal{M}\nvDash_s \Box(A \vee B) \rightarrow \Box A \vee \Box B$

6.8 $\mathcal{M}\vDash_s \Box(\Box A\rightarrow A)\rightarrow \Box A$

$\Leftrightarrow s\in V(\Box(\Box A\rightarrow A)\rightarrow \Box A)$

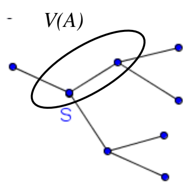
$\Leftrightarrow s\in V(\Box(\Box A\rightarrow A))^C \cup V(\Box A)$

$\Leftrightarrow R[s] \nsubseteq V(\Box A\rightarrow A)$ ou $R[s] \subseteq V(A)$

$\Leftrightarrow R[s] \nsubseteq V(\Box A\rightarrow A)$ ou $R[s] \subseteq V(A)$

$\Leftrightarrow R[s] \nsubseteq V(\Box A)^C \cup V(A)$ ou $R[s] \subseteq V(A)$

$\Leftrightarrow R[s] \nsubseteq \{s:R[s] \nsubseteq V(A)\}\cup V(A)$ ou $R[s] \subseteq V(A)$



Mas $\forall x\in R[s]$, $R[x] \nsubseteq V(A)$, logo $R[s] \subseteq \{s:R[s] \nsubseteq V(A)\}\cup V(A)$ e por outro lado $R[s] \nsubseteq V(A)$.

$\therefore \quad \mathcal{M}\nvDash_s \Box(\Box A\rightarrow A)\rightarrow \Box A$

<u>Proposição 7:</u>

7.1 $\Diamond\top$ e $\Box A \rightarrow \Diamond A$ são válidas exactamente nos mesmos modelos.
7.2 $\Box\bot$ é válida apenas em estruturas em que todos os seus pontos sejam finais.

<u>Demonstração:</u>

7.1 Seja $\mathcal{M}$ uma estrutura e $s \in S$. Suponhamos que $\mathcal{M} \vDash \Diamond\top$. Mas $\mathcal{M} \vDash \Diamond\top \Leftrightarrow V(\Diamond\top) = S \Leftrightarrow \{s \in S\text{: } R[s] \cap V(\top) \neq \phi\} = S \Leftrightarrow \{s \in S\text{: } R[s] \cap S \neq \phi\} = S \Leftrightarrow \{s \in S\text{: } R[s] \neq \phi\} = S \Leftrightarrow \forall s \in S, R[s] \neq \phi \Leftrightarrow \mathcal{M}$ não tem pontos finais. Por outro lado, suponhamos que $\mathcal{M} \vDash \Box A \rightarrow \Diamond A$. Mas $\mathcal{M} \vDash \Box A \rightarrow \Diamond A \Leftrightarrow V(\Box A) \subseteq V(\Diamond A) \Leftrightarrow \{s \in S\text{: } R[s] \subseteq V(A)\} \subseteq \{s \in S\text{: } R[s] \cap V(A) \neq \phi\} \Leftrightarrow \forall s \in S\ [R[s] \subseteq V(A) \Rightarrow R[s] \cap V(A) \neq \phi] \Leftrightarrow \forall s \in S, R[s] \neq \phi \Leftrightarrow \mathcal{M}$ não tem pontos finais.

$\therefore$ $\Diamond\top$ é válida $\Leftrightarrow$ $\Box A \rightarrow \Diamond A$ é válida.

7.2 Seja $\mathcal{F}$ uma estrutura e $s \in S$. Suponhamos que $\mathcal{F} \vDash \Box\bot$. Mas $\mathcal{F} \vDash \Box\bot \Leftrightarrow V(\Box\bot) = S \Leftrightarrow \{s\text{: } R[s] \subseteq V(\bot)\} = S \Leftrightarrow \{s\text{: } R[s] \subseteq \phi\} = S \Leftrightarrow \forall s \in S, R[s] = \phi \Leftrightarrow$ todos os pontos de S são finais.

$\therefore$ $\Box\bot$ é válida apenas em estruturas em que todos os seus pontos sejam finais.

CAPÍTULO III

3. Equivalências entre propriedades de 1ª ordem de relações binárias e fórmulas modais

O teorema seguinte mostra que há uma estreita ligação entre algumas propriedades das relações binárias e fórmulas modais.

Teorema 8:

Os seguintes pares de expressões são equivalentes, isto é, cada um dos esquemas seguintes é válido num modelo $\mathcal{M}$ = (S,*R*,V) se e só se *R* satisfaz a propriedade correspondente.

8.1	Reflexiva: $\forall s\ (sRs)$	**8.1**	$\Box A \to A$
8.2	Simétrica: $\forall s, \forall t\ (sRt \to tRs)$	**8.2**	$A \to \Box \Diamond A$
8.3	Serial: $\forall s\ \exists t\ (sRt)$	**8.3**	$\Box A \to \Diamond A$
8.4	Transitiva: $\forall s, \forall t, \forall u\ (sRt \wedge tRu \to sRu)$	**8.4**	$\Box A \to \Box \Box A$
8.5	Euclideana: $\forall s, \forall t, \forall u\ (sRt \wedge sRu \to tRu)$	**8.5**	$\Diamond A \to \Box \Diamond A$
8.6	Parcialmente Funcional: $\forall s, \forall t, \forall u\ (sRt \wedge sRu \to t = u)$	**8.6**	$\Diamond A \to \Box A$
8.7	Funcional: $\forall s\ \exists! t\ (sRt)$	**8.7**	$\Diamond A \leftrightarrow \Box A$
8.8	Fracamente Densa: $\forall s, \forall t\ (sRt \to \exists u\ (sRu \wedge uRt))$	**8.8**	$\Box \Box A \to \Box A$
8.9	Fracamente Conexa: $\forall s, \forall t, \forall u\ (sRt \wedge sRu \to tRu \vee t = u \vee uRt)$	**8.9**	$\Box (A \wedge \Box A \to B) \vee \Box (B \wedge \Box B \to A)$
8.10	Fracamente Dirigida: $\forall s, \forall t, \forall u\ (sRt \wedge sRu \to \exists v\ (tRv \wedge uRv))$	**8.10**	$\Diamond \Box A \to \Box \Diamond A$

Demonstração: Seja $\mathcal{M}$ um modelo em $\mathcal{F}$ e $s \in S$.

- Propriedades $\Rightarrow$ Fórmulas modais

8.1 Suponhamos que R é reflexiva e que $\mathcal{M} \vDash_s \Box$ A. Assim $s \in V(\Box A)$, ou seja, $R[s] \subseteqq V(A)$. Como sRs vem que $s \in R[s]$, logo, por hipótese, $s \in V(A)$. Desta forma $\mathcal{M} \vDash_s \Box$ A.

$\therefore$ R reflexiva $\Rightarrow$ $\Box A \rightarrow A$.

8.2 Suponhamos que R é simétrica e que $\mathcal{M} \vDash_s$ A, ou seja que $s \in V(A)$. Seja $t \in R[s]$. Por hipótese, $s \in R[t]$, logo $s \in R[t] \cap V(A)$ e assim $R[t] \cap V(A) \neq \phi$. Desta forma $t \in \{t\colon R[t] \cap V(A) \neq \phi\}$ e portanto $R[s] \subseteqq V(\Diamond A)$, o que significa que $s \in V(\Box\Diamond A)$, logo $\mathcal{M} \vDash_s \Box\Diamond$A.

$\therefore$ R simétrica $\Rightarrow$ $A \rightarrow \Box\Diamond A$.

8.3 Suponhamos que R é serial e que $\mathcal{M} \vDash_s \Box$A, ou seja que $s \in V(\Box A)$. Assim $R[s] \subseteqq V(A)$ e, por hipótese, $\exists t\colon t \in R[s]$, logo $t \in R[s] \cap V(A)$ e portanto $R[s] \cap V(A) \neq \phi$. Assim $s \in V(\Diamond A)$, ou seja $\mathcal{M} \vDash_s \Diamond$A.

$\therefore$ R serial $\Rightarrow$ $\Box A \rightarrow \Diamond A$.

8.4 Suponhamos que R é transitiva e que $\mathcal{M} \vDash_s \Box$A, ou seja que $s \in V(\Box A)$. Assim $R[s] \subseteqq V(A)$. Seja $t \in R[s]$ e $u \in R[t]$. Por hipótese, $u \in R[s]$, logo $u \in V(A)$. Desta forma $t \in \{t\colon R[t] \subseteqq V(A)\}$, logo $R[s] \subseteqq V(\Box A)$, ou seja, $s \in V(\Box\Box A)$, portanto $\mathcal{M} \vDash_s \Box\Box$A.

$\therefore$ R transitival $\Rightarrow$ $\Box A \rightarrow \Box\Box A$.

8.5 Suponhamos que R é euclidiana e que $\mathcal{M}\vDash_s \Diamond A$, ou seja, $s\in V(\Diamond A)$. Assim, $s\in \{ s\in S: R[s] \cap V(A)\neq \phi \}$, logo $\exists x : x \in R[s] \cap V(A)$. Pretende-se demonstrar que $s\in V(\Box \Diamond A)$, ou seja, $R[s] \subseteqq \{s\in S: R[s] \cap V(A)\neq \phi \}$. Suponhamos que $y\in R[s]$, ou seja, sRy e como sRx temos, por hipótese, que yRx e assim $x\in R[y]$ e como $x\in V(A)$ temos que $R[y] \cap V(A) \neq \phi$. Desta forma $R[s] \subseteqq V(\Diamond A)$, ou seja, $\mathcal{M}\vDash_s \Box\Diamond A$.

$\therefore \quad R$ euclideana $\Rightarrow \Diamond A\rightarrow \Box\Diamond A$.

8.6 Suponhamos que R é parcialmente funcional e que $\mathcal{M}\vDash_s \Diamond A$, ou seja, $s\in V(\Diamond A)$. Assim $R[s] \cap V(A)\neq \phi$, logo $\exists t$: $t\in R[s]$ e $t\in V(A)$. Seja $u\in R[s]$, por hipótese, $t = u$, logo $u\in V(A)$. Assim $R[s] \subseteqq V(A)$ e portanto $s\in V(\Box A)$, ou seja, $\mathcal{M}\vDash_s \Box A$.

$\therefore \quad R$ parcialmente funcional $\Rightarrow \Diamond A\rightarrow \Box A$.

8.7 Suponhamos que R é funcional.

$$\mathcal{M}\vDash_s \Diamond A \Leftrightarrow s\in V(\Diamond A) \Leftrightarrow R[s] \cap V(A)\neq \phi \Leftrightarrow R[s] \subseteqq V(A)$$

$$\Leftrightarrow s\in V(\Box A) \Leftrightarrow \mathcal{M}\vDash_s \Box A$$

$\therefore \quad R$ funcional $\Rightarrow \Diamond A \leftrightarrow \Box A$.

8.8 Suponhamos que R é fracamente densa e que $\mathcal{M}\vDash_s \Box\Box A$, ou seja, $s\in V(\Box\Box A)$. Então $R[s] \subseteqq V(\Box A)$. Seja $y\in R[s]$, ou seja, sRy, temos por hipótese que $\exists u\in S$ tal que sRu e uRy. Como $u\in R[s]$ temos que $u\in V(\Box A)$, ou seja, $R[u] \subseteqq V(A)$. Ora como $y\in R[u]$ temos que $y\in V(A)$. Assim fica provado que $R[s] \subseteqq V(A)$ e desta forma $s\in V(\Box A)$. Temos então que $\mathcal{M}\vDash_s \Box A$.

$\therefore \quad R$ fracamente densa $\Rightarrow \Box\Box A\rightarrow \Box A$.

8.9 Suponhamos que $\mathcal{M}\nvDash_s [\Box(A \wedge \Box A\rightarrow B) \vee \Box(B\wedge \Box B\rightarrow A)]$, ou seja, $\mathcal{M}\nvDash_s \Box(A \wedge \Box A\rightarrow B)$ & $\mathcal{M}\nvDash_s \Box(B\wedge \Box B\rightarrow A)$. Da 1ª condição resulta que $R[s] \nsubseteq V(A \wedge \Box A\rightarrow B)$ e da 2ª que $R[s] \nsubseteq V(B \wedge \Box B\rightarrow A)$, ou seja $\exists x$: $x\in R[s]$ e $x\notin V(\neg(A\wedge \Box A)\vee B)$ e $\exists y$: $y\in R[s]$ e $y\notin V(\neg(B\wedge \Box B)\vee A)$. Desta forma $\exists x$: $x\in R[s]$ e $x\in V(A)$ e $R[x] \subseteq V(A)$ e $x\notin V(B)$ e $\exists y$: $y\in R[s]$ e $y\in V(B)$ e $R[y] \subseteq V(B)$ e $y\notin V(B)$. Será que $y\in R[x]$? Se tal acontecesse, como $R[x] \subseteq V(A)$ teríamos $y\in V(A)$ o que não pode acontecer. Será que $x\in R[y]$? Se tal acontecesse, como $R[y] \subseteq V(B)$ teríamos $x\in V(B)$ o que não pode acontecer. Mas como $x\in V(A)$ e $y\in V(B)$ temos que $x\neq y$ e desta forma R não é fracamente conexa.

$\therefore$ R não é fracamente conexa $\Rightarrow [\Box(A\wedge\Box A\rightarrow B)\vee \Box(B\wedge \Box B\rightarrow A)]$

8.10 Suponhamos que R é fracamente dirigida. Pretendemos mostrar que $\mathcal{M}\vDash_s \Diamond\Box A\rightarrow \Box\Diamond A$, ou seja, $V(\Diamond\Box A\rightarrow \Box\Diamond A) = S$. Mas $V(\Diamond\Box A\rightarrow \Box\Diamond A) = S \Leftrightarrow [V(\Diamond\Box A) \Rightarrow V(\Box\Diamond A) = S] \Leftrightarrow V(\Diamond\Box A) \subseteq V(\Box\Diamond A)$. Suponhamos que $x\in V(\Diamond\Box A)$ e que $x\notin V(\Box\Diamond A)$, isto é $R[x] \cap V(\Box A)\neq \phi$ e $R[x] \nsubseteq V(\Diamond A)$. Assim $\exists y$: $y\in R[x]$ e $R[y] \subseteq V(A)$ e $\exists z$: $z\in R[x]$ e $R[z] \cap V(A) = \phi$. Por hipótese, como temos que xRy e xRz, $\exists v$: $zRv \wedge yRv$. Desta forma temos que $v\in R[z]$ e que $v\in R[y]$, logo $v\in R[z] \cap V(A)$ o que contradiz que $R[z] \cap V(A) = \phi$. Assim $\mathcal{M}\vDash_s \Diamond\Box A\rightarrow \Box\Diamond A$.

$\therefore$ R é fracamente dirigida $\Rightarrow \mathcal{M}\vDash_s \Diamond\Box A\rightarrow \Box\Diamond A$.

- Fórmulas modais $\Rightarrow$ Propriedades

8.1 Suponhamos que R não é reflexiva e que $s\in V(\Box A)$. Então $\exists s\in S$ tal que $s\notin R[s]$ e $s\in\{s: R[s] \subseteq V(A)\}$. Seja $\mathcal{M}$ um modelo tal que $V(A) = R[s]$. Temos que $s\notin V(A)$. Assim $\{s: R[s] \subseteq V(A)\} \nsubseteq V(A)$, logo $V(\Box A \rightarrow A) \neq S$ e portanto $\mathcal{M}\nvDash\Box A \rightarrow A$.

8.2 Suponhamos que R não é simétrica, ou seja, $\exists x \in S$, $\exists y \in S$ tal que $y \in R[x]$ e $x \notin R[y]$. Seja $\mathcal{M}$ um modelo tal que $V(A) = \{x\}$. Suponhamos que $x \in \{s: R[s] \subseteqq \{t: R[t] \cap \{x\} \neq \phi\}\}$, ou seja, $R[x] \subseteqq \{t: R[t] \cap \{x\} \neq \phi\}$. Se $y \in R[x]$ então $R[y] \cap \{x\} \neq \phi$, ou seja, $x \in R[y]$ o que entra em contradição com a hipótese, logo, $x \notin V(\Box \Diamond A)$. Assim $V(A \to \Box \Diamond A) \neq S$ e portanto $\mathcal{M} \not\models A \to \Box \Diamond A$.

8.3 Suponhamos que R não é serial, ou seja, $\exists s \in S$, $\forall t \in S$, $t \notin R[s]$ ($R[s] = \phi$). Suponhamos que $\mathcal{M} \models \Box A \to \Diamond A$, ou seja, $V(\Box A \to \Diamond A) = S$. Mas $V(\Box A \to \Diamond A) = S$ $\Leftrightarrow$ $\{s: R[s] \subseteqq V(A)\} \subseteqq \{s: R[s] \cap V(A) \neq \phi\}$. Como $s \in \{s: R[s] \subseteqq V(A)\}$ então $R[s] \cap V(A) \neq \phi$ o que contradiz a hipótese, pois $R[s] = \phi$. Assim $V(\Box A \to \Diamond A) \neq S$ e portanto $\mathcal{M} \not\models \Box A \to \Diamond A$.

8.4 Suponhamos que R não é transitiva, ou seja $\exists x \in S$, $\exists y \in S$, $\exists z \in S$: $y \in R[x] \wedge z \in R[y] \wedge z \notin R[x]$. Seja $\mathcal{M}$ um modelo tal que $V(A) = R[x]$. Suponhamos que $V(\Box A \to \Box \Box A) = S$, ou seja, $\{s: R[s] \subseteqq V(A)\} \subseteqq \{s: R[s] \subseteqq \{s: R[s] \subseteqq V(A)\}\}$. Como $R[x] \subseteqq V(A)$ então $R[x] \subseteqq \{s: R[s] \subseteqq V(A)\}$ logo $y \in \{s: R[s] \subseteqq V(A)\}$ e portanto $R[y] \subseteqq V(A)$. Como $V(A) = R[x]$ temos que $R[y] \subseteqq R[x]$, o que é absurdo pois, por hipótese $z \in R[y]$ mas $z \notin R[x]$. Assim $V(\Box A \to \Box \Box A) \neq S$ e portanto $\mathcal{M} \not\models \Box A \to \Box \Box A$.

8.5 Suponhamos que R não é euclideana, ou seja $\exists s \in S$, $\exists t \in S$, $\exists u \in S$: $sRt \wedge sRu \wedge \neg tRu$. Seja $\mathcal{M}$ um modelo tal que $V(A) = \{u\}$. Como $u \in R[s]$ e $u \in V(A)$ então $R[s] \cap V(A) \neq \phi$ e assim $s \in \{s: R[s] \cap V(A) \neq \phi\}$. Mas como $t \in R[s]$ e $R[t] \cap V(A) = \phi$, pois $u \notin R[t]$, $R[s] \nsubseteqq \{s: R[s] \cap V(A) \neq \phi\}$. Assim $s \notin \{s: R[s] \subseteqq \{s: R[s] \cap V(A) \neq \phi\}\}$ e podemos concluir que $\{s: R[s] \cap V(A) \neq \phi\} \nsubseteqq \{s: R[s] \subseteqq \{s: R[s] \cap V(A) \neq \phi\}\}$. Logo $\mathcal{M} \not\models \Diamond A \to \Box \Diamond A$

8.6 Suponhamos que R não é parcialmente funcional, ou seja, $\exists s \in S$, $\exists t \in S$, $\exists u \in S$ (sRt $\wedge$ sRu $\wedge$ $t \neq u$). Seja $\mathcal{M}$ um modelo tal que V(A) = {u}. Por hipótese temos que $R[s] \cap \{u\} \neq \phi$, pois $u \in R[s]$, mas $R[s] \nsubseteq \{u\}$, pois $t \in R[s]$ e $t \neq u$, logo $\{s: R[s] \cap \{u\} \neq \phi\} \nsubseteq \{s: R[s] \subseteq \{u\}\}$ e portanto $V(\Diamond A \rightarrow \Box A) \neq S$. Assim $\mathcal{M} \nvDash \Diamond A \rightarrow \Box A$.

8.7 Suponhamos que R não é funcional. Temos duas hipóteses:
- Suponhamos que $\exists s \in S$, $\exists t \in S$, $\exists u \in S$ (sRt $\wedge$ sRu $\wedge$ $u \neq t$). Seja $\mathcal{M}$ um modelo tal que V(A)={u}. Temos que $s \in \{s: R[s] \cap V(A) \neq \phi\}$, pois $u \in R[s]$ e $u \in V(A)$, mas $R[s] \nsubseteq V(A)$ pois $t \in R[s]$ e $t \notin V(A)$. Desta forma $\{s: R[s] \cap V(A) \neq \phi\} \neq \{s: R[s] \subseteq V(A)\}$ e portanto $\mathcal{M} \nvDash \Diamond A \leftrightarrow \Box A$.
- Suponhamos que $\exists s \in S$, $\forall t \in S$ ($\neg$ sRt), ou seja, $R[s] = \phi$. Assim $s \in \{s: R[s] \subseteq V(A)\}$ e $s \notin \{s: R[s] \cap V(A) \neq \phi\}$ pois $R[s] = \phi$. Desta forma $\{s: R[s] \cap V(A) \neq \phi\} \neq \{s: R[s] \subseteq V(A)\}$e portanto $\mathcal{M} \nvDash \Diamond A \leftrightarrow \Box A$.

Das duas provas anteriores vem que se R não é funcional então $\mathcal{M} \nvDash \Diamond A \leftrightarrow \Box A$.

8.8 Suponhamos que R não é fracamente densa, ou seja, $\exists s \in S$, $\exists t \in S$ (sRt $\wedge$ $\forall u \in S$ ($\neg$sRu $\vee$ $\neg$uRt)). Seja $\mathcal{M}$ um modelo tal que V(A) = {u}. Suponhamos que $\mathcal{M} \vDash \Box\Box A$, ou seja, $V(\Box\Box A) = S$. Desta forma $R[s] \subseteq \{s: R[s] \subseteq V(A)\}$. Como $t \in R[s]$ e $t \notin \{u\}$ (pois sRt mas $\neg$sRu) temos que $R[s] \nsubseteq V(A)$, logo $V(\Box\Box A \rightarrow \Box A) \neq S$. Assim $\mathcal{M} \nvDash \Box\Box A \rightarrow \Box A$.

8.9 Suponhamos que R não é fracamente conexa : $\exists s \in S$, $\exists t \in S$, $\exists u \in S$ (sRt $\wedge$ sRu $\wedge$ $\neg$tRu $\wedge$ $t \neq u$ $\wedge$ $\neg$uRt). Seja $\mathcal{M}$ um modelo tal que $V(A) = \{u\} \cup R[u]$ e $V(B) = \{t\} \cup R[t]$. Temos que $u \in R[s]$ e $u \in V(A)$ e $u \in \{s: R[s] \subseteq V(A)\}$ e $u \notin V(B)$, ou seja, $u \in R[s]$ e $u \in V(A \wedge \Box A)$ e $u \notin V(B)$. Assim $u \in R[s]$ mas $u \notin V(A \wedge \Box A)^* \cup V(B)$, logo

$R[s] \nsubseteq V(A \wedge \Box A \rightarrow B)$ e portanto $\mathcal{M} \nvDash \Box (A \wedge \Box A \rightarrow B)$. Por outro lado $t \in R[s]$ e $t \in V(B)$ e $t \in \{s: R[s] \subseteq V(B)\}$ e $t \notin V(A)$, ou seja, $t \in R[s]$ e $t \in V(B \wedge \Box B)$ e $t \notin V(A)$, logo $R[s] \nsubseteq V(B \wedge \Box B \rightarrow A)$ e portanto $\mathcal{M} \nvDash \Box (B \wedge \Box B \rightarrow A)$. Desta forma $\mathcal{M} \nvDash \Box (A \wedge \Box A \rightarrow B)$ e $\mathcal{M} \nvDash \Box (B \wedge \Box B \rightarrow A)$, logo $\neg[\mathcal{M} \vDash \Box (A \wedge \Box A \rightarrow B)$ ou $\mathcal{M} \vDash \Box (B \wedge \Box B \rightarrow A)]$ e portanto $\mathcal{M} \nvDash \Box (A \wedge \Box A \rightarrow B) \vee \Box (B \wedge \Box B \rightarrow A)$.

8.10 Suponhamos que R não é fracamente dirigida, ou seja $\exists s \in S, \exists t \in S, \exists u \in S$ $(sRt \wedge sRu \wedge \forall v \in S (\neg tRv \vee \neg uRv)$. Seja $\mathcal{M}$ um modelo tal que $V(A) = R[t]$. Como $t \in R[s]$ e $R[t] \subseteq V(A)$ então $s \in \{s: R[s] \cap \{s: R[s] \subseteq V(A)\} \neq \phi\}$. Mas como $u \in R[s]$ e $R[u] \cap V(A) = \phi$ (por hipótese nenhum elemento é sucessor simultaneamente de t e de u), vem que $R[s] \nsubseteq \{s: R[s] \cap V(A) \neq \phi\}$. Assim $s \notin \{s: R[s] \subseteq \{s: R[s] \cap V(A) \neq \phi\}\}$, logo $\{s: R[s] \subseteq \{s: R[s] \cap V(A) \neq \phi\}\} \nsubseteq \{s: R[s] \cap \{s: R[s] \subseteq V(A)\} \neq \phi\}$ e portanto $V(\Diamond \Box A) \nsubseteq V(\Box \Diamond A)$. Assim $\mathcal{M} \nvDash \Diamond \Box A \rightarrow \Box \Diamond A$.

Em apêndices (Apêndice II) constam demonstrações alternativas às apresentadas para as proposições 5, 6 e 7 e Teorema 8 utilizando as definições de Goldblatt.

CAPÍTULO IV

4. Lógicas

A definição de lógica apresentada mais adiante utilizará a noção de substituição. A definição que se segue fornece uma noção deste conceito.

Definição: Substituição, numa fórmula, de uma variável por uma fórmula.

Seja $a \in$ Var e $A, B \in$ Flas.

$S^{a}_{B}\,A$ lê-se "substituição na fórmula A de a por *B*".

Se $A \in$ Var :

- se $A = a$: $S^{a}_{B}\,A = B$.
- se $A \neq a$: $S^{a}_{B}\,A = A$.

Se $A = \neg C$: $S^{a}_{B}\,A = S^{a}_{B}\,(\neg C) = \neg\, S^{a}_{B}\,C$.

Se $A = C \rightarrow D$: $S^{a}_{B}\,A = S^{a}_{B}\,(C \rightarrow D) = S^{a}_{B}\,C \rightarrow S^{a}_{B}\,D$.

Se $A = \Box\, C$: $S^{a}_{B}\,A = S^{a}_{B}\,(\Box\, C) = \Box\, S^{a}_{B}\,C$.

Definição:

Dado V: Var $\rightarrow$ *P*(S), $a \in$ Var e $X \in$ *P*(S), defina-se V^{a}_{X} : Var $\rightarrow$ *P*(S) :

$V^{a}_{X} = (V \setminus \{(a, V(a))\}) \cup \{(a, X)\}$.

Observação: $V^{a}_{X}(a) = X$

$V^{a}_{X}(b) = V(b)$, com $b \neq a$.

A proposição seguinte estabelece uma relação entre os dois conceitos definidos anteriormente.

Proposição 9:

Seja A$\in$ Flas. $\quad V^{a}_{V(B)}(A) = V(S^{a}_{B}A)$.

Demonstração:

(i) Seja A$\in$ Var :

- se A = a : $V^{a}_{V(B)}(A) = V^{a}_{V(B)}(a) = V(B)$

  $V(S^{a}_{B}A) = V(S^{a}_{B}a) = V(B)$.

- se A $\neq$ a : $V^{a}_{V(B)}(A) = V(A)$

  $V(S^{a}_{B}A) = V(A)$.

(ii) Seja A = $\neg$ C: $\quad V^{a}_{V(B)}(A) = V^{a}_{V(B)}(\neg C) = [V^{a}_{V(B)}(C)]^*$

$$V(S^{a}_{B}A) = V(S^{a}_{B}(\neg C)) = V(\neg S^{a}_{B}(C))$$
$$= V(S^{a}_{B}(C))^* = [V^{a}_{V(B)}(C)]^*$$

(iii) Seja A = C $\rightarrow$ D: $\quad V^{a}_{V(B)}(A) = V^{a}_{V(B)}(C \rightarrow D) = V^{a}_{V(B)}(C) \rightarrow V^{a}_{V(B)}(D)$

$$V(S^{a}_{B}A) = V(S^{a}_{B}(C \rightarrow D))$$
$$= V(S^{a}_{B}(C) \rightarrow S^{a}_{B}(D))$$
$$= V(S^{a}_{B}(C) \cup V(S^{a}_{B}(D))^*$$
$$= [V^{a}_{V(B)}(C)] \cup [V^{a}_{V(B)}(D)]^*$$
$$= V^{a}_{V(B)}(C \rightarrow D)$$

(iv) Seja A = $\square$ C: $\quad V^{a}_{V(B)}(A) = V^{a}_{V(B)}(\square C)$

$$V(S^{a}_{B}A) = V(S^{a}_{B}(\square C)) = V(\square S^{a}_{B}C)$$
$$= \{s \in S: R[s] \subseteqq V(S^{a}_{B}C)\}$$
$$= \{s \in S: R[s] \subseteqq V^{a}_{V(B)}(C)\}$$
$$= V^{a}_{V(B)}(\square C).$$

Definição:

Uma lógica é conjunto $\Lambda \subseteq$ Flas tal que:

- Tautologias $\subseteq \Lambda$;
- Se A, A $\rightarrow$ B $\in \Lambda$ então B$\in \Lambda$; (MP)
- Se A$\in \Lambda$ então A'$\in \Lambda$, onde A' deriva de A por substituição.

Teorema 10: Seja $\mathcal{F}$ = (S, R) uma estrutura e Λ = {A: $\mathcal{F} \models$ A}, então Λ é uma lógica.

Demonstração:

- Seja A uma tautologia. Assim $\forall \mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models$ A, ou seja, $\mathcal{F} \models$ A, logo A $\in \Lambda$.

  $\therefore$ Tautologias $\subseteq \Lambda$;
- Seja A, A $\rightarrow$ B $\in \Lambda$, ou seja $\mathcal{F} \models$ A e $\mathcal{F} \models$ A $\rightarrow$ B. Desta forma $\mathcal{F} \models$ A e

  [$\mathcal{F} \models$ A $\Rightarrow$ $\mathcal{F} \models$ B] logo, por MP, $\mathcal{F} \models$ B.

  $\therefore$ B$\in \Lambda$;
- Seja A$\in \Lambda$, isto é, $\mathcal{F} \models$ A. Assim, $\forall$ V, V(A) = S, logo, em particular,

  $V^{a}_{V(B)}$ A = S. Pela proposição anterior V(S^{a}_{B} A) = S, logo $\mathcal{F} \models S^{a}_{B}$ A.

  $\therefore$ S^{a}_{B} A$\in \Lambda$.

Exercício 11: Se{Λ_i : i$\in$ I} é uma colecção de lógicas, então $\bigcap_{i\in I} \Lambda_i$ é uma lógica.

Demonstração:

- Cada Λ_i é uma lógica, logo Tautologias $\subseteq \bigcap_{i\in I} \Lambda_i$
- Sejam A, A $\rightarrow$ B$\in \bigcap_{i\in I} \Lambda_i$. Assim A$\in \Lambda_i$ e A $\rightarrow$ B$\in \Lambda_i$, $\forall$ i$\in$ I logo, por MP,

  B$\in \Lambda_i$, $\forall$ i$\in$ I. $\therefore$ B$\in \bigcap_{i\in I} \Lambda_i$.
- Seja A$\in \bigcap_{i\in I} \Lambda_i$, a$\in$ Var e A,B$\in$ Flas. Assim A$\in \Lambda_i$, $\forall$ i$\in$ I e como cada Λ_i é

  uma lógica, S^{a}_{B} A$\in \Lambda_i$, $\forall$ i$\in$ I. $\therefore$ S^{a}_{B} A $\in \bigcap_{i\in I} \Lambda_i$.

  $\therefore$ $\bigcap_{i\in I} \Lambda_i$ é uma lógica.

CAPÍTULO V

5. <u>Teoremas</u>

<u>Definições:</u>

Os elementos da lógica são chamados teoremas.

Escreve-se $\vdash_{\Lambda}$ A e lê-se A é um Λ_teorema.

$$\vdash_{\Lambda} A \quad \Leftrightarrow \quad A \in \Lambda.$$

Seja C uma classe de estruturas ou de modelos.

Uma lógica Λ diz-se *correcta* em relação a C se para toda a fórmula A:

$$\vdash_{\Lambda} A \quad \Rightarrow \quad \mathsf{C} \vDash A.$$

Uma lógica Λ diz-se *completa* em relação a C se para toda a fórmula A:

$$\mathsf{C} \vDash A \quad \Rightarrow \quad \vdash_{\Lambda} A.$$

Uma lógica Λ diz-se *determinada* em relação a C se para toda a fórmula A:

$$\mathsf{C} \vDash A \quad \Leftrightarrow \quad \vdash_{\Lambda} A\,.$$

Uma fórmula A diz-se Λ *dedutível* de Γ e escreve-se $\Gamma \vdash_{\Lambda}$ A, se e só se :

$$\vdash_{\Lambda} A \qquad \text{ou} \qquad \exists\ B_i \in \Gamma \text{ tais que } B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n \rightarrow \bot \in \Lambda.$$

Um subconjunto $\Gamma \subseteqq$ Flas diz-se Λ_*consistente* se $\Gamma \nvdash_{\Lambda} \bot$.

Observação: $\perp \notin \Lambda \Leftrightarrow \Lambda \neq$ Flas

Demonstração:

[$\Rightarrow$] Se $\perp \notin \Lambda$ é obvio que $\Lambda \neq$ Flas pois falta em Λ pelo menos uma fórmula.

[$\Leftarrow$] Se $\perp \in \Lambda$ e A$\in$ Flas, como $\perp \rightarrow A$ é uma tautologia então $\perp \rightarrow A \in \Lambda$ e por MP $A \in \Lambda$, logo Flas $\subseteq \Lambda$ e portanto Flas = Λ.

Exercício 12:

12.1 $\vdash_\Lambda A \Leftrightarrow \phi \vdash_\Lambda A$

Demonstração: $\phi \vdash_\Lambda A \Leftrightarrow (\vdash_\Lambda A$ ou $\exists B_i \in \phi : B_1 \wedge B_2 \wedge_{\dots} \wedge B_n \rightarrow \perp \in \Lambda)$

$\Leftrightarrow \vdash_\Lambda A$.

12.2 Se $\vdash_\Lambda A \Rightarrow \Gamma \vdash_\Lambda A$

Demonstração: Por definição de dedutível.

12.3 Se $\Lambda \subseteq \Lambda' \Rightarrow (\Gamma \vdash_\Lambda A \Rightarrow \Gamma \vdash_{\Lambda'} A)$

Demonstração: Suponhamos que $\Lambda \subseteq \Lambda'$ e que $\Gamma \vdash_\Lambda A$, ou seja, $\vdash_\Lambda A$ ou $\exists B_i \in \Gamma : B_1 \wedge_{\dots} \wedge B_n \rightarrow \perp \in \Lambda$. Mas $\vdash_\Lambda A \Leftrightarrow A \in \Lambda \Rightarrow A \in \Lambda'$ (pois $\Lambda \subseteq \Lambda'$) e $\exists B_i \in \Gamma : B_1 \wedge_{\dots} \wedge B_n \rightarrow \perp \in \Lambda \Rightarrow \exists B_i \in \Gamma : B_1 \wedge B_2 \wedge_{\dots} \wedge B_n \rightarrow \perp \in \Lambda'$. Assim $A \in \Lambda'$ ou $\exists B_i \in \Gamma : B_1 \wedge B_2 \wedge_{\dots} \wedge B_n \rightarrow \perp \in \Lambda'$, logo $\Gamma \vdash_{\Lambda'} A$.

12.4 Se $A \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash_\Lambda A$

Demonstração: Suponhamos que $A \in \Gamma$. Se $A \in \Lambda$ então $\Gamma \vdash_\Lambda A$. Se $A \notin \Lambda$, como $A \rightarrow A$ é tautologia, $\exists A \in \Gamma : A \rightarrow A \in \Lambda$, logo $\Gamma \vdash_\Lambda A$.

12.5 Se $\Gamma \subseteq \Delta$ & $\Gamma \vdash_\Lambda A \Rightarrow \Delta \vdash_\Lambda A$

Demonstração: Suponhamos que $\Gamma \subseteq \Delta$ & $\Gamma \vdash_\Lambda A$, ou seja, $\vdash_\Lambda A$ ou $\exists B_i \in \Gamma$: $B_1 \wedge_{\dots} \wedge B_n \rightarrow A \in \Lambda$. Como $\Gamma \subseteq \Delta$ temos que $\vdash_\Lambda A$ ou $\exists B_i \in \Delta : B_1 \wedge_{\dots} \wedge B_n \rightarrow A \in \Lambda$, logo $\Delta \vdash_\Lambda A$.

12.6 Se $\Gamma \vdash_{\Lambda} A$ & $\{A\} \vdash_{\Lambda} B \Rightarrow \Gamma \vdash_{\Lambda} B$

Demonstração: Suponhamos que $\Gamma \vdash_{\Lambda} A$ & $\{A\} \vdash_{\Lambda} B$:

($A \in \Lambda$ ou $\exists B_i \in \Gamma: B_1 \wedge ... \wedge B_n \rightarrow A \in \Lambda$) & ($B \in \Lambda$ ou $\exists C_i \in \{A\}: C_1 \wedge ... \wedge C_n \rightarrow B \in \Lambda$).

✓ Se $A \in \Lambda$ & $B \in \Lambda \Rightarrow B \in \Lambda \Rightarrow \Gamma \vdash_{\Lambda} B$.

✓ Se $\exists B_i \in \Gamma : B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_n \rightarrow A \in \Lambda$ & $B \in \Lambda \Rightarrow B \in \Lambda \Rightarrow \Gamma \vdash_{\Lambda} B$.

✓ Se $A \in \Lambda$ & $\exists C_i \in \{A\}: C_1 \wedge C_2 \wedge ... \wedge C_n \rightarrow B \in \Lambda \Rightarrow A \in \Lambda$ & $\exists A : A \rightarrow B \in \Lambda$

$\Rightarrow \Gamma \vdash_{\Lambda} B$ (por **12.7**).

✓ Se $\exists B_i \in \Gamma : B_1 \wedge ... \wedge B_n \rightarrow A \in \Lambda$ & $\exists A: A \rightarrow B \in \Lambda$.

Como $(B_1 \wedge ... \wedge B_n \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow (B_1 \wedge ... \wedge B_n \rightarrow B)$ é uma tautologia, então $(B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_n \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow (B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_n \rightarrow B) \in \Lambda$. Por MP vem que $\exists B_i \in \Gamma : B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_n \rightarrow B \in \Lambda$, logo $\Gamma \vdash_{\Lambda} B$.

12.7 Se $\Gamma \vdash_{\Lambda} A$ & $\Gamma \vdash_{\Lambda} A \rightarrow B \Rightarrow \Gamma \vdash_{\Lambda} B$

Demonstração:

Suponhamos que $\Gamma \vdash_{\Lambda} A$ & $\Gamma \vdash_{\Lambda} A \rightarrow B$, ou seja:

($A \in \Lambda$ ou $\exists B_i \in \Gamma: B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_n \rightarrow A \in \Lambda$)

&

($A \rightarrow B \in \Lambda$ ou $\exists C_i \in \Gamma : C_1 \wedge C_2 \wedge ... \wedge C_n \rightarrow (A \rightarrow B) \in \Lambda$).

✓ Se $A \in \Lambda$ & $A \rightarrow B \in \Lambda$:

Como Λ é uma lógica vem que $B \in \Lambda$, logo $\Gamma \vdash_{\Lambda} B$.

✓ Se $A \in \Lambda$ & $\exists C_i \in \Gamma : C_1 \wedge C_2 \wedge ... \wedge C_n \rightarrow (A \rightarrow B) \in \Lambda$:

Como $A \rightarrow (C_1 \wedge C_2 \wedge ... \wedge C_n \rightarrow A)$ é uma tautologia, $A \rightarrow (C_1 \wedge C_2 \wedge ... \wedge C_n \rightarrow A) \in \Lambda$ e por MP temos que $C_1 \wedge C_2 \wedge ... \wedge C_n \rightarrow A \in \Lambda$. Por outro lado $(\wedge C_i \rightarrow A) \wedge (\wedge C_i \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\wedge C_i \rightarrow B)$ é tautologia, logo $\wedge C_i \rightarrow B \in \Lambda$. Como cada $C_i \in \Gamma$ temos que $\Gamma \vdash_{\Lambda} B$.

✓ Se $\exists B_i \in \Gamma: B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_n \rightarrow A \in \Lambda$ & $A \rightarrow B \in \Lambda$:

Como $(\wedge B_i \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (\wedge B_i \rightarrow B))$ é tautologia, por MP, $\wedge B_i \rightarrow B \in \Lambda$. Como cada $B_i \in \Gamma$, $\Gamma \vdash_{\Lambda} B$.

✓ Se $\exists B_i \in \Gamma : B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_n \rightarrow A \in \Lambda$ & $\exists C_i \in \Gamma : C_1 \wedge C_2 \wedge ... \wedge C_n \rightarrow (A \rightarrow B) \in \Lambda$:

Como $(\wedge B_i \rightarrow A) \rightarrow ((\wedge C_i \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\wedge B_i \wedge \wedge C_i \rightarrow B))$ é uma tautologia, por MP vem que $\wedge B_i \wedge \wedge C_i \rightarrow B \in \Lambda$. Como cada $B_i \in \Gamma$ e cada $C_i \in \Gamma$, temos que $\Gamma \vdash_{\Lambda} B$.

12.8 $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\Lambda} B \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{\Lambda} A \rightarrow B$

Demonstração:

[⇒] Suponhamos que $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\Lambda} B$:

$$B \in \Lambda \text{ ou } \exists C_i \in \Gamma \cup \{A\}: C_1 \wedge C_2 \wedge ... \wedge C_n \rightarrow B \in \Lambda.$$

✓ Se $B \in \Lambda$, como $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ é uma tautologia, $B \rightarrow (A \rightarrow B) \in \Lambda$ e por MP $A \rightarrow B \in \Lambda$, logo $\Gamma \vdash_{\Lambda} A \rightarrow B$.

✓ Se $\exists C_i \in \Gamma \cup \{A\}: C_1 \wedge C_2 \wedge ... \wedge C_n \rightarrow B \in \Lambda$:

(a) Se cada $C_i \neq A$, temos que $\{C_i , 0 \leq i \leq n\} \subseteq \Gamma$, logo $\Gamma \vdash_{\Lambda} B$. Como $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ é tautologia, por **12.7**, temos que $\Gamma \vdash_{\Lambda} A \rightarrow B$.

(b) Suponhamos que $A = C_j$, para certo j.
Como $(\wedge C_i \rightarrow B) \rightarrow [\wedge_{(i \neq j)} C_i \rightarrow (A \rightarrow B)]$ é tautologia, por **12.7**, $\wedge_{(i \neq j)} C_i \rightarrow (A \rightarrow B) \in \Lambda$. Sendo que cada $C_i \in \Gamma$ então $\Gamma \vdash_{\Lambda} A \rightarrow B$.

[⇐] Suponhamos que $\Gamma \vdash_{\Lambda} A \rightarrow B$:

$$A \rightarrow B \in \Lambda \text{ ou } \exists C_i \in \Gamma: C_1 \wedge C_2 \wedge ... \wedge C_n \rightarrow (A \rightarrow B) \in \Lambda.$$

✓ Se $A \rightarrow B \in \Lambda$, então $\exists A \in \Gamma \cup \{A\}: A \rightarrow B \in \Lambda$, logo $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\Lambda} B$.

✓ Se $\exists C_i \in \Gamma: C_1 \wedge ... \wedge C_n \rightarrow (A \rightarrow B) \in \Lambda$, então $\exists C_i \in \Gamma \cup \{A\}: C_1 \wedge ... \wedge C_n \wedge A \rightarrow B \in \Lambda$. Assim, $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\Lambda} B$.

12.9 $\Gamma \vdash_{\Lambda} A$ se e só se existe uma sequência finita $A_0, A_1, \dots, A_m = A$ em que $\forall i \leq m$, cada $A_i \in \Gamma \cup \Lambda$ ou, caso contrário, $A_k = (A_j \rightarrow A_i)$, para algum j,k < i.

Demonstração:

[⇒] Suponhamos que $\Gamma \vdash_{\Lambda} A$. Então $\vdash_{\Lambda} A$ ou $\exists B_{i's} \in \Gamma: \vdash_{\Lambda} B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_n \rightarrow A$.

Prova para n = 3: $A \in \Lambda$ ou $\exists B_{i's} \in \Gamma: \vdash_{\Lambda} B_1 \rightarrow (B_2 \rightarrow (B_3 \rightarrow A))$.

Consideramos a seguinte sequencia:

A_1: $B_1 \in \Gamma$

A_2: $\vdash_{\Lambda} B_1 \rightarrow (B_2 \rightarrow (B_3 \rightarrow A))$

A_3: $\vdash_{\Lambda} B_2 \rightarrow (B_3 \rightarrow A)$

A_4: $B_2 \in \Gamma$

A_5: $\vdash_{\Lambda} B_3 \rightarrow A$

A_6: $B_3 \in \Gamma$

A_7: $\vdash_{\Lambda} A$

[⇐] Prova por indução para m:

Para m = 0 e m = 1 a prova sai directamente por **12.2** e **12.4**.

Suponhamos que $\Gamma \vdash_{\Lambda} A_i$ para todo i < k. Seja $A_0, A_1, \dots, A_k$ uma sequência.

Se $A_k \in \Gamma \cup \Lambda$, então $A_k \in \Gamma$ ou $A_k \in \Lambda$, logo $\Gamma \vdash_{\Lambda} A_k$, por **12.2** e **12.4**.

Se $A_j = (A_i \to A_k)$, com i, j < k, por HI: $\Gamma \vdash_{\Lambda} A_i$ e $\Gamma \vdash_{\Lambda} A_i \to A_k$, ou seja:

$$(\vdash_{\Lambda} A_i \text{ ou } \exists B_{i\text{'s}} \in \Gamma : \vdash_{\Lambda} B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_n \to A_i)$$

$$\&$$

$$(\vdash_{\Lambda} (A_i \to A_k) \text{ ou } \exists C_{i\text{'s}} \in \Gamma : \vdash_{\Lambda} C_1 \wedge C_2 \wedge ... \wedge C_n \to (A_i \to A_k))$$

- ✓ Se $A_i \in \Lambda$ & $A_i \to A_k \in \Lambda$:

  Como Λ é uma lógica, por MP temos que $\vdash_{\Lambda} A_k$, logo $\Gamma \vdash_{\Lambda} A_k$.

- ✓ Se $\vdash_{\Lambda} A_i$ & $\exists C_{i\text{'s}} \in \Gamma : \vdash_{\Lambda} C_1 \wedge C_2 \wedge ... \wedge C_n \to (A_i \to A_k)$:

  Como $A_i \to (\wedge C_i \to A_i)$ é tautologia, por MP obtemos $\vdash_{\Lambda} \wedge C_i \to A_i$. Temos também que $(\wedge C_i \to A_i) \to ((\wedge C_i \to (A_i \to A_k)) \to (\wedge C_i \to A_k))$ é uma tautologia e por MP obtemos $\vdash_{\Lambda} \wedge C_i \to A_k$. Como $C_{i\text{'s}} \in \Gamma$ temos que $\Gamma \vdash_{\Lambda} A_k$.

- ✓ Se $\exists B_{i\text{'s}} \in \Gamma : \vdash_{\Lambda} B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_n \to A_i$ & $\vdash_{\Lambda} A_i \to A_k$:

  Como $(\wedge B_i \to A_i) \to ((A_i \to A_k) \to (\wedge B_i \to A_k))$ é uma tautologia, por MP obtemos $\vdash_{\Lambda} \wedge B_i \to A_k$. Como $B_{i\text{'s}} \in \Gamma$ temos que $\Gamma \vdash_{\Lambda} A_k$.

- ✓ Se $\exists B_{i\text{'s}} \in \Gamma : \vdash_{\Lambda} B_1 \wedge ... \wedge B_n \to A_i$ & $\exists C_{i\text{'s}} \in \Gamma : \vdash_{\Lambda} C_1 \wedge ... \wedge C_n \to (A_i \to A_k)$.

  Como $(\wedge B_i \to A_i) \to ((\wedge C_i \to (A_i \to A_k)) \to (\wedge B_i \wedge \wedge C_i \to A_k))$ é uma tautologia, por MP obtemos $\vdash_{\Lambda} \wedge B_i \wedge \wedge C_i \to A_k$. Como $B_{i\text{'s}} \in \Gamma$ e $C_{i\text{'s}} \in \Gamma$ temos que $\Gamma \vdash_{\Lambda} A_k$.

12.10 Se Γ é fechado por substituições, então $\{A: \Gamma \vdash_{\Lambda} A\}$ é a menor lógica que contém $\Gamma \cup \Lambda$.

<u>Demonstração:</u>

- $\{A: \Gamma \vdash_{\Lambda} A\}$ é uma lógica:

- Seja B uma tautologia. Assim $B \in \Lambda$ e portanto $\Gamma \vdash_{\Lambda} B$, logo $PL \subseteq \{A: \Gamma \vdash_{\Lambda} A\}$.
- Suponhamos que $A, A \to B \in \{A: \Gamma \vdash_{\Lambda} A\}$:

  $\Gamma \vdash_{\Lambda} A$ e $\Gamma \vdash_{\Lambda} A \to B$

  Assim, por **12.7**, $\Gamma \vdash_{\Lambda} B$, logo $B \in \{A: \Gamma \vdash_{\Lambda} A\}$.
- Seja $A \in \{A: \Gamma \vdash_{\Lambda} A\}$, ou seja, $\vdash_{\Lambda} A$ ou $\exists B_{i\text{'s}} \in \Gamma : \vdash_{\Lambda} B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_n \to A$.

Se $\vdash_{\Lambda} A$ e B resulta de substituições em A, $\vdash_{\Lambda} B$ pois Λ é fechada por substituições.

Suponhamos agora que $\vdash_{\Lambda} B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_n \to A$, com cada $B_i \in \Gamma$. Considere-se uma substituição $\overset{n}{\underset{i=1}{S}}\, {}^{a_i}_{C_i} (B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_n \to A)$, com $Var(B_1 \wedge ... \wedge B_n \to A) \subseteq \{a_1, \ldots, a_n\}$.

$$\text{Tem-se que } \overset{n}{\underset{i=1}{S}}\, {}^{a_i}_{C_i} (B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_n \to A) = \overset{n}{\underset{i=1}{S}}\, {}^{a_i}_{C_i} (B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_n) \to \overset{n}{\underset{i=1}{S}}\, {}^{a_i}_{C_i} A$$

$$= (\bigwedge_{j=1}^{n} \overset{n}{\underset{i=1}{S}}\, {}^{a_i}_{C_i} B_j) \to \overset{n}{\underset{i=1}{S}}\, {}^{a_i}_{C_i} A.$$

Como Γ é fechado por substituições: $\bigwedge_{j=1}^{n} \overset{n}{\underset{i=1}{S}} {}^{a_i}_{C_i} B_j \in \Gamma$.

$\therefore \quad \Gamma \vdash_{\Lambda} \bigwedge_{j=1}^{n} \overset{n}{\underset{i=1}{S}} {}^{a_i}_{C_i} B_j$

Também temos que

$$\Gamma \vdash_{\Lambda} \left(\bigwedge_{j=1}^{n} \overset{n}{\underset{i=1}{S}} {}^{a_i}_{C_i} B_j\right) \rightarrow \overset{n}{\underset{i=1}{S}} {}^{a_i}_{C_i} A \quad \text{pois} \quad \left(\bigwedge_{j=1}^{n} \overset{n}{\underset{i=1}{S}} {}^{a_i}_{C_i} B_j\right) \rightarrow \overset{n}{\underset{i=1}{S}} {}^{a_i}_{C_i} A \in \Lambda.$$

Por MP $\Gamma \vdash_{\Lambda} \overset{n}{\underset{i=1}{S}} {}^{a_i}_{C_i} A$ e assim $\{A: \Gamma \vdash_{\Lambda} A\}$ é fechado por substituições.

$\therefore \quad \{A: \Gamma \vdash_{\Lambda} A\}$ é uma lógica

- $\Gamma \cup \Lambda \subseteqq \{A: \Gamma \vdash_{\Lambda} A\}$:

Seja $x \in \Gamma \cup \Lambda$. Se $x \in \Gamma$ então $\exists x \in \Gamma$: $\vdash_{\Lambda} x \rightarrow x$, logo $x \in \{A: \Gamma \vdash_{\Lambda} A\}$. Se $x \in \Lambda$ então $x \in \{A: \Gamma \vdash_{\Lambda} A\}$. Assim $\Gamma \cup \Lambda \subseteqq \{A: \Gamma \vdash_{\Lambda} A\}$.

- $\{A: \Gamma \vdash_{\Lambda} A\}$ é a menor:

Seja Δ uma lógica tal que $\Gamma \cup \Lambda \subseteqq \Delta$. Seja $B \in \{A: \Gamma \vdash_{\Lambda} A\}$:

$\vdash_{\Lambda} B$ ou $\exists C_{i's} \in \Gamma: \vdash_{\Lambda} C_1 \wedge ... \wedge C_n \rightarrow B$.

✓ Se $\vdash_{\Lambda} B$ então $B \in \Lambda$ e portanto $B \in \Delta$.

✓ Se $\exists C_{i's} \in \Gamma: \vdash_{\Lambda} C_1 \wedge ... \wedge C_n \rightarrow B$, como $\Gamma \subseteqq \Delta$, $\exists C_{i's} \in \Delta: \vdash_{\Delta} C_1 \wedge ... \wedge C_n \rightarrow B$ e portanto $C_1 \wedge ... \wedge C_n \rightarrow B \in \Delta$. Como Δ é uma lógica e cada $C_i \in \Delta$, $C_1 \wedge ... \wedge C_n \in \Delta$. Assim, por MP, $B \in \Delta$.

12.11 Se $\mathcal{M} \vDash_s \Gamma \cup \Lambda$ & $\Gamma \vdash_{\Lambda} A \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_s A$

[Nota: Se $\Delta \subseteqq$ Flas então $\mathcal{M} \vDash_s \Delta \Leftrightarrow \forall A \in \Delta (\mathcal{M} \vDash_s A)$]

Demonstração:

Suponhamos que $\mathcal{M} \vDash_s \Gamma \cup \Lambda$ & $\Gamma \vdash_{\Lambda} A$, ou seja, $s \in V(\delta), \forall \delta \in \Gamma \cup \Lambda$ & ($A \in \Lambda$ ou $\exists B_i \in \Gamma$: $B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_n \rightarrow A \in \Lambda$). Da 1ª hipótese temos que $s \in V(\alpha)$, $\forall \alpha \in \Gamma$ e $s \in V(\lambda), \forall \lambda \in \Lambda$. Por outro lado, se $A \in \Lambda$ então $s \in V(A)$ e se $B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_n \rightarrow A \in \Lambda$, temos que $s \in V(B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_n \rightarrow A)$, ou seja $s \in V(B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_n)^C \cup V(A)$. Com $s \in V(\alpha)$, $\forall \alpha \in \Gamma$, em particular $s \in V(B_i)$, $\forall i$, logo $s \in V(B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_n)$ e portanto $s \notin V(B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_n)^C$. Desta forma $s \in V(A)$.

12.12 PL é Λ_consistente, mas Flas não é Λ_consistente .

Demonstração:

- Suponhamos que PL = $\{A \in$ Flas: A é tautologia$\}$não é Λ_consistente, ou seja

$\perp \in \Lambda$ ou $\exists$ $B_i \in$ PL: $B_1 \wedge B_2 \wedge_{\ldots} \wedge B_n \rightarrow \perp \in \Lambda$. Como PL$\neq$Flas vem que $\perp \notin \Lambda$, logo $\exists B_i \in$ PL: $B_1 \wedge_{\ldots} \wedge B_n \rightarrow \perp \in \Lambda$. Como cada $B_i \in$ PL temos que $B_1 \wedge B_2 \wedge_{\ldots} \wedge B_n \in$ PL (pois é uma tautologia) e portanto $B_1 \wedge B_2 \wedge_{\ldots} \wedge B_n \in \Lambda$. Por MP vem que $\perp \in \Lambda$, o que é absurdo!

- $\perp \in$ Flas $\Rightarrow$ Flas $\vdash_\Lambda \perp$

12.13 Γ é Λ_consistente $\Leftrightarrow$ $\exists$ A : $\Gamma \nvdash_\Lambda$ A

Demonstração:

[$\Rightarrow$] Γ é Λ_consistente $\Rightarrow$ $\Gamma \nvdash_\Lambda \perp \Rightarrow \exists A = \perp : \Gamma \nvdash_\Lambda \perp$

[$\Leftarrow$] Suponhamos que Γ não é Λ_consistente: $\Gamma \vdash_\Lambda \perp$. Assim temos que $\vdash_\Lambda \perp$ ou $\exists$ $B_i \in \Gamma$ tais que $B_1 \wedge B_2 \wedge_{\ldots} \wedge B_n \rightarrow \perp \in \Lambda$.

Se $\vdash_\Lambda \perp$, como $\perp \rightarrow$ A é tautologia, temos que $\vdash_\Lambda \perp \rightarrow$ A e por **12.7** obtemos que $\vdash_\Lambda$ A.

Se $\exists$ $B_i \in \Gamma$ tais que $\vdash_\Lambda$ $B_1 \wedge B_2 \wedge_{\ldots} \wedge B_n \rightarrow \perp$:

Como $((B_1 \wedge B_2 \wedge_{\ldots} \wedge B_n) \rightarrow \perp) \rightarrow ((B_1 \wedge B_2 \wedge_{\ldots} \wedge B_n) \rightarrow A)$ é uma tautologia, temos que $\vdash_\Lambda((B_1 \wedge B_2 \wedge_{\ldots} \wedge B_n) \rightarrow \perp) \rightarrow ((B_1 \wedge B_2 \wedge_{\ldots} \wedge B_n) \rightarrow A)$ e portanto, por **12.7**, obtemos que $\vdash_\Lambda (B_1 \wedge B_2 \wedge_{\ldots} \wedge B_n) \rightarrow A$, com $B_i \in \Gamma$, logo $\Gamma \vdash_\Lambda$ A.

12.14 Γ é Λ_consistente $\Leftrightarrow \neg \exists A : (\Gamma \vdash_\Lambda A \ \& \ \Gamma \vdash_\Lambda \neg A)$.

Demonstração:

[$\Rightarrow$] Suponhamos $\exists A : (\Gamma \vdash_\Lambda A \ \& \ \Gamma \vdash_\Lambda \neg A)$. Como $A \rightarrow (\neg A \rightarrow \perp)$ é uma tautologia, vem que $\Gamma \vdash_\Lambda A \rightarrow (\neg A \rightarrow \perp)$. Por **12.7** obtemos $\Gamma \vdash_\Lambda \perp$, logo Γ não é Λ_consistente.

[$\Leftarrow$] Suponhamos que Γ não é Λ_consistente: $\Gamma \vdash_\Lambda \perp$. Temos que $\perp \rightarrow \neg A$ e $\perp \rightarrow A$ são tautologias, logo $\Gamma \vdash_\Lambda \perp \rightarrow \neg A$ e $\Gamma \vdash_\Lambda \perp \rightarrow A$. Por **12.7** vem que $\Gamma \vdash_\Lambda \neg A$ e $\Gamma \vdash_\Lambda A$. Assim $\exists A : (\Gamma \vdash_\Lambda A \ \& \ \Gamma \vdash_\Lambda \neg A)$.

12.15 $\Gamma \vdash_{\Lambda} A \;\Leftrightarrow\; \Gamma \cup \{\neg A\}$ não é Λ_consistente.

Demonstração:

[$\Rightarrow$] Suponhamos que $\Gamma \vdash_{\Lambda} A$. Por **12.5** temos que $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash_{\Lambda} A$ e por outro lado temos que $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash_{\Lambda} \neg A$. Como $A \rightarrow (\neg A \rightarrow \perp)$ é uma tautologia, vem que $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash_{\Lambda} A \rightarrow (\neg A \rightarrow \perp)$. Por **12.7** obtemos $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash_{\Lambda} \perp$, logo $\Gamma \cup \{\neg A\}$ não é Λ_consistente.

[$\Leftarrow$] Suponhamos que $\Gamma \cup \{\neg A\}$ não é Λ_consistente: $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash_{\Lambda} \perp$. Por **12.8** $\Gamma \vdash_{\Lambda} \neg A \rightarrow \perp$. Como $(\neg A \rightarrow \perp) \rightarrow A$ é uma tautologia, temos que $\Gamma \vdash_{\Lambda} (\neg A \rightarrow \perp) \rightarrow A$ e por **12.7** obtemos que $\Gamma \vdash_{\Lambda} A$

12.16 $\Gamma \cup \{A\}$ é Λ_consistente $\Leftrightarrow$ $\Gamma \nvdash_{\Lambda} \neg A$

Demonstração: Se colocarmos em **12.15** $\neg A$ em vez de A obtemos [$\Gamma \cup \{A\}$ não é Λ_consistente $\Leftrightarrow$ $\Gamma \vdash_{\Lambda} \neg A$] que equivale ao pretendido.

12.17 Se Γ é Λ_consistente $\Rightarrow$ $\Gamma \cup \{A\}$ ou $\Gamma \cup \{\neg A\}$são Λ_consistentes

Demonstração: Suponhamos que $\Gamma \cup \{A\}$ e $\Gamma \cup \{\neg A\}$não são Λ_consistentes:

$\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\Lambda} \perp$ e $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash_{\Lambda} \perp$. Por **12.8** temos que $\Gamma \vdash_{\Lambda} A \rightarrow \perp$ e $\Gamma \vdash_{\Lambda} \neg A \rightarrow \perp$. Como $(A \rightarrow \perp) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp)$ é tautologia $\Gamma \vdash_{\Lambda} (A \rightarrow \perp) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp)$. Por MP temos que $\Gamma \vdash_{\Lambda} \perp$ e assim Γ não é Λ_consistente.

CAPÍTULO VI

6. Conjuntos Maximais

Seja $\mathcal{M} = (S, R, V)$ um modelo.

Definição:

Para cada $s \in S$, $\Gamma_s = \{A \in \text{Flas}: \mathcal{M} \vDash_s A\}$.

Proposição 13:

Γ_s é Λ_consistente.

Demonstração: Suponhamos que Γ_s não é Λ_consistente:

$$\Gamma_s \vdash_\Lambda \bot \Leftrightarrow \bot \in \Gamma_s \text{ ou } \exists\, B_i \in \Gamma_s \text{ tais que } \vdash_\Lambda B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n \to \bot$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash_s \bot \text{ ou } \exists\, B_i \text{ com } \mathcal{M} \vDash_s B_i \text{ tais que } \vdash_\Lambda B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to \bot$$

$$\Leftrightarrow s \in V(\bot) \text{ ou } \exists\, B_i, \text{ com } s \in V(B_i), \text{ tais que } \vdash_\Lambda B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to \bot$$

$$\Leftrightarrow s \in \phi \text{ ou } \exists\, B_i, \text{ com } s \in V(B_i), \text{ tais que } \vdash_\Lambda B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to \bot$$

$$\Leftrightarrow \exists\, B_i, \text{ com } s \in V(B_i), \text{ tais que } \vdash_\Lambda B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to \bot$$

$$\Leftrightarrow \exists\, B_i, \text{ com } s \in V(B_i), \text{ tais que } B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to \bot \in \Lambda$$

Como para cada $A \in \Lambda$ se tem que $V(A) = S$, $V(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to \bot) = S$.

Mas $V(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to \bot) = S \Leftrightarrow V(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n)^C \cup V(\bot) = S$

$$\Leftrightarrow V(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n)^C = S$$

$$\Leftrightarrow V(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) = \phi$$

Por outro lado $s \in V(B_i)$, $0 \leq i \leq n$, logo $s \in \cap V(B_i)$, logo $V(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \neq \phi$ o que contradiz o anterior.

$\therefore\ \Gamma_s$ é Λ_consistente.

Definição:

Um conjunto $\Gamma \subseteq$ Flas é Λ_maximal se Γ é Λ_consistente e para todo $A \in$ Flas, $A \in \Gamma$ ou $\neg A \in \Gamma$.

$S^{\Lambda} = \{ \Gamma \subseteq \text{Flas: } \Gamma \text{ é } \Lambda\text{\_ maximal} \}$

Exercício 14:

Suponhamos que Γ é Λ_ maximal.

14.1 $\Gamma \vdash_{\Lambda} A \Rightarrow A \in \Gamma$

Demonstração: Suponhamos que $A \notin \Gamma$.

$A \notin \Gamma \Rightarrow \neg A \in \Gamma$ (Γ é Λ_ maximal) $\Rightarrow \Gamma \vdash_{\Lambda} \neg A$

Se $\Gamma \vdash_{\Lambda} A$, como $A \rightarrow (\neg A \rightarrow \bot)$ é uma tautologia, $\Gamma \vdash_{\Lambda} A \rightarrow (\neg A \rightarrow \bot)$ e por MP vinha que $\Gamma \vdash_{\Lambda} \neg A \rightarrow \bot$. Novamente por MP teríamos $\Gamma \vdash_{\Lambda} \bot$ o que é absurdo.

$\therefore \Gamma \nvdash_{\Lambda} A$

14.2 $A \notin \Gamma \Rightarrow \Gamma \cup \{A\}$ não é Λ_consistente.

Demonstração:

Suponhamos que $A \notin \Gamma$. Assim $\neg A \in \Gamma$ e portanto $A \in \Gamma \cup \{A\}$ e $\neg A \in \Gamma \cup \{A\}$.

Por **11.4**, $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\Lambda} A$ e $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\Lambda} \neg A$. Como $\neg A \rightarrow (A \rightarrow \bot)$ é uma tautologia, $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\Lambda} \neg A \rightarrow (A \rightarrow \bot)$. Por MP vem que $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\Lambda} \bot$, logo $\Gamma \cup \{A\}$ não é Λ_consistente.

14.3 $\forall A, \quad A \notin \Gamma \Leftrightarrow \neg A \in \Gamma$

Demonstração: Vem da definição de maximal!

14.4 $\Lambda \subseteq \Gamma$

Demonstração: Seja $A \in \Lambda$ e suponhamos que $A \notin \Gamma$. Então $\neg A \in \Gamma$ e assim $\Gamma \vdash_{\Lambda} \neg A$. Temos que $\Gamma \vdash_{\Lambda} A$ (pois $A \in \Lambda$). Como $\neg A \rightarrow (A \rightarrow \bot)$ é uma tautologia $\Gamma \vdash_{\Lambda} \neg A \rightarrow (A \rightarrow \bot)$, logo por MP $\Gamma \vdash_{\Lambda} \bot$ o que é absurdo.

14.5 $\perp \notin \Gamma$

Demonstração: Se $\perp \in \Gamma$ então $\Gamma \vdash_{\Lambda} \perp$ e assim Γ seria inconsistente o que contradiz o facto de Γ ser maximal.

14.6 $(A \to B) \in \Gamma \Leftrightarrow (A \in \Gamma \Rightarrow B \in \Gamma)$

Demonstração:

[$\Rightarrow$] Suponhamos que $(A \to B) \in \Gamma$ e $A \in \Gamma$. Assim $\Gamma \vdash_{\Lambda} A \to B$ e $\Gamma \vdash_{\Lambda} A$, logo, por **12.7** $\Gamma \vdash_{\Lambda} B$ e por **14.1** $B \in \Gamma$.

[$\Leftarrow$] Suponhamos que $A \in \Gamma \Rightarrow B \in \Gamma$, ou seja, $\neg(A \in \Gamma)$ ou $B \in \Gamma$. Por **14.3** $\neg A \in \Gamma$ ou $B \in \Gamma$ e por **12.4** $\Gamma \vdash_{\Lambda} \neg A$ ou $\Gamma \vdash_{\Lambda} B$. Como $\neg A \to \neg A \vee B$ e $B \to \neg A \vee B$ são tautologias, temos que $\Gamma \vdash_{\Lambda} \neg A \to \neg A \vee B$ e $\Gamma \vdash_{\Lambda} B \to \neg A \vee B$. Por MP temos que $\Gamma \vdash_{\Lambda} \neg A \vee B$, ou seja, $\Gamma \vdash_{\Lambda} A \to B$. Por **14.1** $(A \to B) \in \Gamma$.

14.7 $(A \wedge B) \in \Gamma \Leftrightarrow A, B \in \Gamma$

Demonstração:

[$\Rightarrow$] Suponhamos que $(A \wedge B) \in \Gamma$. Como $A \wedge B \to A$ é uma tautologia vem que $A \wedge B \to A \in \Lambda$ e por **14.4** $A \wedge B \to A \in \Gamma$, logo, por MP, $A \in \Gamma$.

Por outro lado, como $A \wedge B \to B$ é uma tautologia vem que $A \wedge B \to B \in \Lambda$ e por **14.4** $A \wedge B \to B \in \Gamma$, logo, por MP, $B \in \Gamma$.

[$\Leftarrow$] Suponhamos que $A, B \in \Gamma$. Como $A \to (B \to A \wedge B)$ é uma tautologia, vem que $\Gamma \vdash_{\Lambda} A \to (B \to A \wedge B)$. Por MP temos que $\Gamma \vdash_{\Lambda} A \wedge B$.

14.8 $(A \vee B) \in \Gamma \Leftrightarrow A \in \Gamma$ ou $B \in \Gamma$

Demonstração: Suponhamos que $A \notin \Gamma$ & $B \notin \Gamma$.

$A \notin \Gamma$ & $B \notin \Gamma$ $\Leftrightarrow$ $\neg A \in \Gamma$ & $\neg B \in \Gamma$ (Γ é Λ_ maximal)

$\Leftrightarrow$ $\neg A \wedge \neg B \in \Gamma$ (por **14.7**)

$\Leftrightarrow$ $\neg(A \vee B) \in \Gamma$

14.9 $(A\leftrightarrow B) \in \Gamma \Leftrightarrow (A\in \Gamma \Leftrightarrow B \in \Gamma)$

<u>Demonstração:</u> $(A\leftrightarrow B) \in \Gamma \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \in \Gamma$

$\Leftrightarrow (A \rightarrow B) \in \Gamma \ \& \ (B \rightarrow A) \in \Gamma$ (por **14.7**)

$\Leftrightarrow (A\in \Gamma \Rightarrow B\in \Gamma) \ \& \ (B\in \Gamma \Rightarrow A\in \Gamma)$

$\Leftrightarrow A\in \Gamma \Leftrightarrow B \in \Gamma$

Existência de um conjunto Λ_maximal que extende um conjunto Γ, Λ_consistente

Seja $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ uma enumeração de fórmulas. Então, se Γ é Λ_consistente, define-se

$\Delta_0 = \Gamma$

$$\Delta_{n+1} = \begin{cases} \Delta_n \cup \{A_n\}, \text{ se } \Delta_n \vdash_\Lambda A_n. \\ \\ \Delta_n \cup \{\neg A_n\}, \text{ outros casos} \end{cases}$$

$\Delta = \bigcup_{n \geq 0} \Delta_n$.

<u>Exercício 15:</u>

15.1 Δ_n é Λ_consistente, $\forall$ n.

<u>Demonstração por indução:</u>

n = 0: $\Delta_n = \Delta_0 = \Gamma$ que é Λ_consistente.

Suponhamos que Δ_n é Λ_consistente.

Se $\Delta_n \vdash_\Lambda A_n$ então $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{A_n\}$. Suponhamos que Δ_{n+1} não é Λ_consistente, ou seja $\Delta_{n+1} \vdash_\Lambda \bot$. Assim $\Delta_n \cup \{A_n\} \vdash_\Lambda \bot$ que equivale, por **12.8,** a $\Delta_n \vdash_\Lambda A_n \to \bot$. Como $\Delta_n \vdash_\Lambda A_n$, por **12.7** $\Delta_n \vdash_\Lambda \bot$ o que é absurdo.

Se $\Delta_n \nvdash_\Lambda A_n$ então $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{\neg A_n\}$. Suponhamos que Δ_{n+1} não é Λ_consistente, ou seja $\Delta_{n+1} \vdash_\Lambda \bot$. Assim $\Delta_n \cup \{\neg A_n\} \vdash_\Lambda \bot$ que, por **12.8**, equivale a $\Delta_n \vdash_\Lambda \neg A_n \to \bot$. Como $(\neg A_n \to \bot) \to A_n$ é uma tautologia, $\Delta_n \vdash_\Lambda (\neg A_n \to \bot) \to A_n$, por MP, $\Delta_n \vdash A_n$, o que contradiz a hipótese!

15.2 Exactamente uma das fórmulas A ou $\neg$ A está em Δ, $\forall$ A.

Demonstração:

Seja A$\in$ Flas. Então A = A_k, para certo k.

Se $\Delta_k \vdash_\Lambda A_k$, então $A_k \in \Delta_{k+1} \subseteqq \Delta$, logo $A_k \in \Delta$.

Se $\Delta_k \nvdash_\Lambda A_k$, então $\Delta_{k+1} = \Delta_k \cup \{\neg A_k\}$ e portanto $\neg A_k \in \Delta_{k+1} \subseteqq \Delta$, logo $\neg A_k \in \Delta$.

Veremos em seguida que $\neg$(A$\in \Delta$ e $\neg$A$\in \Delta$).

Suponhamos que existe A$\in$ Flas tal que A$\in \Delta$ e $\neg$A$\in \Delta$. Seja k o primeiro inteiro tal que A$\in \Delta_k$ e *l* o primeiro inteiro tal que $\neg$A$\in \Delta_l$. Se n = max(k ,l), temos que A, $\neg$A$\in \Delta_n$. Assim $\Delta_n \vdash_\Lambda$ A e $\Delta_n \vdash_\Lambda \neg$ A e como A $\to$ ($\neg$ A $\to$ $\perp$) é tautologia $\Delta_n \vdash_\Lambda$ A $\to$ ($\neg$ A $\to$ $\perp$). Por MP vem que $\Delta_n \vdash_\Lambda \perp$ o que é absurdo, pois Δ_n é Λ_consistente.

15.3 Seja $\left(\sum_i\right)_{i\in N}$ uma família crescente de conjuntos de fórmulas, ou seja, $(i<j) \Rightarrow \left(\sum_i \subseteq \sum_j\right)$. Então $\sum_i$ Λ_consistente, $\forall\ i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \sum_i$ é Λ_consistente.

Demonstração:

Suponhamos que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \sum_i$ não é Λ_consistente, ou seja $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \sum_i \vdash_\Lambda \perp$. Assim $\exists\ B_j \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \sum_i$ tais que $B_1 \wedge B_2 \wedge_{\dots} \wedge B_n \to \perp \in \Lambda$. Seja k o menor natural tal que B_1, B_2, ..., $B_n \in \sum_k$. Então $\exists\ B_j \in \sum_k$ tais que $B_1 \wedge B_2 \wedge_{\dots} \wedge B_n \to \perp \in \Lambda$. Como cada $\sum_i$ é Λ_consistente, ou seja $\neg(\exists\ C_r \in \sum_k : C_1 \wedge_{\dots} \wedge C_n \to \perp \in \Lambda.)$ temos que $\forall\ C_r \in \sum_k$, $C_1 \wedge C_2 \wedge_{\dots} \wedge C_n \to \perp \notin \Lambda$. Assim chegamos a um absurdo pois anteriormente tínhamos que $\exists\ B_j \in \sum_k$ tais que $B_1 \wedge B_2 \wedge_{\dots} \wedge B_n \to \perp \in \Lambda$.

Fica provado que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \sum_i$ é Λ_consistente.

Note-se que do exercício anterior obtemos que Δ é Λ_consistente e por **15.1** vem que Δ é Λ_maximal.

Proposição 16: Se $\Delta \vdash_{\Lambda}$ B então B$\in \Delta$.

Demonstração:

Como foi visto anteriormente Δ é Λ_maximal. Por **14.1** vem directamente que $\Delta \vdash_{\Lambda}$ B então B$\in \Delta$.

Lema de Lindenbaum's 17:

Todo o conjunto Λ_consistente de fórmulas está contido num conjunto Λ_maximal.

Demonstração:

Seja $\Gamma \subseteqq$ Flas um conjunto Λ_consistente. Então existe Δ Λ_maximal tal que $\Gamma \subseteqq \Delta$, basta construir Δ da forma como foi definido anteriormente.

Corolário 18:

- $\{A: \Gamma \vdash_{\Lambda} A\} = \cap\{\Delta \in S^{\Lambda} : \Gamma \subseteqq \Delta\}$

Demonstração:

Seja A tal que $\Gamma \vdash_{\Lambda}$ A. Seja $\Delta \in S^{\Lambda}$ tal que $\Gamma \subseteqq \Delta$. Por **12.5** vem que $\Delta \vdash_{\Lambda}$ A, logo, pela proposição **16**, A$\in \Delta$.

$$\therefore \quad \{A: \Gamma \vdash_{\Lambda} A\} \subseteqq \cap\{\Delta \in S^{\Lambda} : \Gamma \subseteqq \Delta\}$$

Seja A tal que $\Gamma \nvdash_{\Lambda}$ A. Por **12.15** vem que $\Gamma \cup \{\neg A\}$ é Λ_consistente, logo, pelo lema anterior, para algum $\Delta \in S^{\Lambda}$, $\Gamma \cup \{\neg A\} \subseteqq \Delta$. Assim $\Gamma \subseteqq \Delta$ mas A$\notin \Delta$, uma vez que $\neg$A$\in \Delta$ e Δ é Λ_maximal, logo A$\notin \cap\{\Delta \in S^{\Lambda} : \Gamma \subseteqq \Delta\}$.

$$\therefore \quad A \notin \{A: \Gamma \vdash_{\Lambda} A\} \Rightarrow A \notin \cap\{\Delta \in S^{\Lambda} : \Gamma \subseteqq \Delta\}$$

$$\therefore \quad \{A: \Gamma \vdash_{\Lambda} A\} \supseteqq \cap\{\Delta \in S^{\Lambda} : \Gamma \subseteqq \Delta\}.$$

- $\Lambda = \cap\{\Delta : \Delta \in S^{\Lambda}\}$

Demonstração:

A demonstração deste corolário reduz-se ao anterior fazendo $\Gamma = \phi$.

$\{A: \phi \vdash_{\Lambda} A\} = \cap\{\Delta \in S^{\Lambda} : \phi \subseteqq \Delta\}$

$\{A: A \in \Lambda\} = \cap\{\Delta \in S^{\Lambda}\}$

$\Lambda = \cap\{\Delta \in S^{\Lambda}\}$

CAPÍTULO VII

7. Lógicas Normais

Uma lógica Λ diz-se normal se contém o esquema K: $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ e é fechada pela regra da Necessitação: $\vdash_\Lambda A \Rightarrow \vdash_\Lambda \Box A$.

Proposição 19:

Seja $\{\Lambda_i : i \in I\}$ uma colecção de lógicas normais. Então $\mathbf{K} = \cap\{\Lambda_i : i \in I\}$ é uma lógica normal.

Demonstração:

Pelo exercício **11** $\{\Lambda_i : i \in I\}$ é uma lógica. Falta apenas demonstrar que é normal.

Se cada Λ_i é normal, cada uma contém o esquema K: $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$, logo K também vai estar em $\cap\{\Lambda_i : i \in I\}$.

Suponhamos agora que $\vdash_{\cap\{\Lambda i : i \in I\}} A$:

$$\vdash_{\cap\{\Lambda_i : i \in I\}} A \Leftrightarrow A \in \cap\{\Lambda_i : i \in I\} \Leftrightarrow A \in \Lambda_i, \forall i \in I \Leftrightarrow \vdash_{\Lambda_i} A, \forall i \in I$$

$$\Rightarrow \vdash_{\Lambda_i} \Box A, \forall i \in I \Leftrightarrow \Box A \in \Lambda_i, \forall i \in I$$

$$\Leftrightarrow \Box A \in \cap\{\Lambda_i : i \in I\} \Leftrightarrow \vdash_{\cap\{\Lambda_i : i \in I\}} \Box A.$$

$$\therefore \vdash_{\cap\{\Lambda_i : i \in I\}} A \Rightarrow \vdash_{\cap\{\Lambda_i : i \in I\}} \Box A$$

$\therefore$ $\mathbf{K} = \cap\{\Lambda_i : i \in I\}$ é uma lógica normal.

Exercício 20:

20.1 Se Λ é uma lógica normal, então:

a) $\vdash_\Lambda \Box\neg\neg A \leftrightarrow \Box A$ & $\vdash_\Lambda \Diamond\neg\neg A \leftrightarrow \Diamond A$

Demonstração:

Sabemos que $\vdash_\Lambda \neg\neg A \leftrightarrow A$:

$$\vdash_\Lambda \neg\neg A \leftrightarrow A \Leftrightarrow \vdash_\Lambda \neg\neg A \to A \ \& \ \vdash_\Lambda A \to \neg\neg A$$
$$\Rightarrow \vdash_\Lambda \Box(\neg\neg A \to A) \ \& \ \vdash_\Lambda \Box(A \to \neg\neg A)$$
$$\Rightarrow \vdash_\Lambda \Box\neg\neg A \to \Box A \ \& \ \vdash_\Lambda \Box A \to \Box\neg\neg A$$
$$\Leftrightarrow \vdash_\Lambda \Box\neg\neg A \leftrightarrow \Box A$$

$\therefore$ $\vdash_\Lambda \Box\neg\neg A \leftrightarrow \Box A$

Por outro lado sabemos que $\vdash_\Lambda \neg\neg\neg A \leftrightarrow \neg A$.

Ora $\vdash_{\Lambda} \neg\neg\neg A \leftrightarrow \neg A \quad \Leftrightarrow \quad \vdash_{\Lambda} \neg\neg\neg A \rightarrow \neg A \;\;\&\;\; \vdash_{\Lambda} \neg A \rightarrow \neg\neg\neg A$

$$\Rightarrow \;\; \vdash_{\Lambda} \Box(\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A) \;\;\&\;\; \vdash_{\Lambda} \Box(\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A)$$

$$\Rightarrow \;\; \vdash_{\Lambda} \Box\neg\neg\neg A \rightarrow \Box\neg A \;\;\&\;\; \vdash_{\Lambda} \Box\neg A \rightarrow \Box\neg\neg\neg A$$

$$\Leftrightarrow \;\; \vdash_{\Lambda} \neg\Box\neg A \rightarrow \neg\Box\neg\neg\neg A \;\;\&\;\; \vdash_{\Lambda} \neg\Box\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\Box\neg A$$

$$\Leftrightarrow \;\; \vdash_{\Lambda} \Diamond A \rightarrow \Diamond\neg\neg A \;\;\&\;\; \vdash_{\Lambda} \Diamond\neg\neg A \rightarrow \Diamond A$$

$$\Leftrightarrow \;\; \vdash_{\Lambda} \Diamond\neg\neg A \leftrightarrow \Diamond A$$

$$\therefore \;\; \vdash_{\Lambda} \Diamond\neg\neg A \leftrightarrow \Diamond A$$

b) $\vdash_{\Lambda} A \rightarrow B \quad \Rightarrow \quad \vdash_{\Lambda} \Box A \rightarrow \Box B \;\;\&\;\; \vdash_{\Lambda} \Diamond A \rightarrow \Diamond B$

<u>Demonstração:</u>

$\vdash_{\Lambda} A \rightarrow B \;\Rightarrow\; \vdash_{\Lambda} \Box(A \rightarrow B)$ (necessidade) $\Rightarrow \vdash_{\Lambda} \Box A \rightarrow \Box B$ (K)

$\vdash_{\Lambda} A \rightarrow B \;\Rightarrow\; \vdash_{\Lambda} \neg B \rightarrow \neg A \;\Rightarrow\; \vdash_{\Lambda} \Box(\neg B \rightarrow \neg A) \;\Rightarrow\; \vdash_{\Lambda} \Box\neg B \rightarrow \Box\neg A$

$$\Rightarrow \vdash_{\Lambda} \neg\Diamond B \rightarrow \neg\Diamond A \;\Rightarrow\; \vdash_{\Lambda} \Diamond A \rightarrow \Diamond B.$$

$$\therefore \;\; \vdash_{\Lambda} A \rightarrow B \quad \Rightarrow \quad \vdash_{\Lambda} \Box A \rightarrow \Box B \;\;\&\;\; \vdash_{\Lambda} \Diamond A \rightarrow \Diamond B$$

c) $\vdash_{\Lambda} A \leftrightarrow B \;\Rightarrow\; \vdash_{\Lambda} \Box A \leftrightarrow \Box B \;\;\&\;\; \vdash_{\Lambda} \Diamond A \leftrightarrow \Diamond B$

<u>Demonstração:</u>

$\vdash_{\Lambda} A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \vdash_{\Lambda} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \Leftrightarrow \vdash_{\Lambda} A \rightarrow B \;\&\; \vdash_{\Lambda} B \rightarrow A$

$\Rightarrow$ (por b) $\vdash_{\Lambda} \Box A \rightarrow \Box B \;\;\&\;\; \vdash_{\Lambda} \Diamond A \rightarrow \Diamond B$

$$\&\;\; \vdash_{\Lambda} \Box B \rightarrow \Box A \;\;\&\;\; \vdash_{\Lambda} \Diamond B \rightarrow \Diamond A$$

$$\Leftrightarrow \vdash_{\Lambda} (\Box A \rightarrow \Box B) \wedge (\Box B \rightarrow \Box A) \;\;\&\;\; \vdash_{\Lambda} (\Diamond A \rightarrow \Diamond B) \wedge (\Diamond B \rightarrow \Diamond A)$$

$$\Leftrightarrow \vdash_{\Lambda} (\Box A \leftrightarrow \Box B) \;\;\&\;\; \vdash_{\Lambda} (\Diamond A \leftrightarrow \Diamond B)$$

$$\therefore \;\; \vdash_{\Lambda} A \leftrightarrow B \;\Rightarrow\; \vdash_{\Lambda} \Box A \leftrightarrow \Box B \;\;\&\;\; \vdash_{\Lambda} \Diamond A \leftrightarrow \Diamond B$$

d) $\vdash_{\mathcal{A}} \Diamond\neg A \leftrightarrow \neg\Box A$

Demonstração:

$$\vdash_{\mathcal{A}} \Diamond\neg A \leftrightarrow \neg\Box A \;\Leftrightarrow\; \vdash_{\mathcal{A}} \neg\Box\neg\neg A \leftrightarrow \neg\Box A$$

$$\Leftrightarrow \vdash_{\mathcal{A}} \neg\Box\neg\neg A \rightarrow \neg\Box A \;\;\&\;\; \vdash_{\mathcal{A}} \neg\Box A \rightarrow \neg\Box\neg\neg A$$

$$\Leftrightarrow \vdash_{\mathcal{A}} \neg\neg\Box A \rightarrow \neg\neg\Box\neg\neg A \;\;\&\;\; \vdash_{\mathcal{A}} \neg\neg\Box\neg\neg A \rightarrow \neg\neg\Box A$$

$$\Leftrightarrow \vdash_{\mathcal{A}} \Box A \rightarrow \Box A \;\;\&\;\; \vdash_{\mathcal{A}} \Box A \rightarrow \Box A$$

$$\Leftrightarrow \vdash_{\mathcal{A}} \Box A \leftrightarrow \Box A$$

$$\therefore \;\; \vdash_{\mathcal{A}} \Diamond\neg A \leftrightarrow \neg\Box A$$

e) $\vdash_{\mathcal{A}} \Box A \wedge \Box B \leftrightarrow \Box(A \wedge B)$

Demonstração:

$$A \wedge B \rightarrow A \text{ e } A \wedge B \rightarrow B \text{ (tautologias)} \Rightarrow \vdash_{\mathcal{A}} A \wedge B \rightarrow A \text{ e } \vdash_{\mathcal{A}} A \wedge B \rightarrow B$$

$$\Rightarrow \vdash_{\mathcal{A}} \Box(A \wedge B \rightarrow A) \text{ e } \vdash_{\mathcal{A}} \Box(A \wedge B \rightarrow B) \text{ (por K)}$$

$$\Rightarrow \vdash_{\mathcal{A}} \Box(A \wedge B) \rightarrow \Box A \text{ e } \vdash_{\mathcal{A}} \Box(A \wedge B) \rightarrow \Box B \text{ (necessidade)}$$

$$\Rightarrow \vdash_{\mathcal{A}} \Box(A \wedge B) \rightarrow (\Box A \wedge \Box B).$$

Por outro lado:

$$A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B) \text{ (tautologia)} \Rightarrow \vdash_{\mathcal{A}} A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$$

$$\Rightarrow \vdash_{\mathcal{A}} \Box A \rightarrow \Box(B \rightarrow A \wedge B) \text{ (por K e necessidade)}$$

$$\Rightarrow \vdash_{\mathcal{A}} \Box A \rightarrow (\Box B \rightarrow \Box(A \wedge B))$$

$$\Rightarrow \vdash_{\mathcal{A}} \Box A \wedge \Box B \rightarrow \Box(A \wedge B))$$

$$\therefore \;\; \vdash_{\mathcal{A}} \Box A \wedge \Box B \leftrightarrow \Box(A \wedge B).$$

f) $\vdash_{\mathcal{A}} \Diamond A \vee \Diamond B \leftrightarrow \Diamond(A \vee B)$

Demonstração:

$\neg A \wedge \neg B \leftrightarrow \neg(A \vee B)$ (tautologia)

$$\vdash_{\mathcal{A}} \neg A \wedge \neg B \leftrightarrow \neg(A \vee B) \Rightarrow \vdash_{\mathcal{A}} \Box(\neg A \wedge \neg B) \leftrightarrow \Box\neg(A \vee B)$$

$$\Rightarrow \vdash_{\mathcal{A}} \Box\neg(A \vee B) \leftrightarrow \Box\neg A \wedge \Box\neg B \quad \text{(por e)}$$

$$\Leftrightarrow \vdash_{\mathcal{A}} \neg\Box\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg(\Box\neg A \wedge \Box\neg B)$$

$\Leftrightarrow \vdash_{\Lambda} \neg \Box \neg (A \vee B) \leftrightarrow \neg \Box \neg A \vee \neg \Box \neg B$

$\Leftrightarrow \vdash_{\Lambda} \Diamond (A \vee B) \leftrightarrow \Diamond A \vee \Diamond B$

$\therefore \vdash_{\Lambda} \Diamond A \vee \Diamond B \leftrightarrow \Diamond (A \vee B)$

g) $\vdash_{\Lambda} \Box A \vee \Box B \rightarrow \Box (A \vee B)$

Demonstração:

$A \rightarrow A \vee B$ & $B \rightarrow A \vee B$ (tautologias) $\Rightarrow \vdash_{\Lambda} A \rightarrow A \vee B$ & $\vdash_{\Lambda} B \rightarrow A \vee B$

$\Rightarrow \vdash_{\Lambda} \Box (A \rightarrow A \vee B)$ & $\vdash_{\Lambda} \Box (B \rightarrow A \vee B)$

$\Rightarrow \vdash_{\Lambda} \Box A \rightarrow \Box (A \vee B)$ & $\vdash_{\Lambda} \Box B \rightarrow \Box (A \vee B)$

$\Rightarrow \vdash_{\Lambda} (\Box A \vee \Box B) \rightarrow \Box (A \vee B)$

$\therefore \vdash_{\Lambda} \Box A \vee \Box B \rightarrow \Box (A \vee B)$

h) $\vdash_{\Lambda} \Diamond A \wedge \Diamond B \rightarrow \Diamond (A \wedge B)$

Demonstração:

Substituindo em **f**, A por $\neg A$ e B por $\neg B$ temos $\vdash_{\Lambda} \Box \neg A \vee \Box \neg B \rightarrow \Box (\neg A \vee \neg B)$

Mas $\vdash_{\Lambda} \Box \neg A \vee \Box \neg B \rightarrow \Box (\neg A \vee \neg B)$

$\Leftrightarrow \vdash_{\Lambda} \neg \Box (\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg (\Box \neg A \vee \Box \neg B)$

$\Leftrightarrow \vdash_{\Lambda} \neg \Box \neg (A \wedge B) \rightarrow \neg \Box \neg A \wedge \neg \Box \neg B$

$\Leftrightarrow \vdash_{\Lambda} \Diamond (A \wedge B) \rightarrow \Diamond A \wedge \Diamond B$

$\therefore \vdash_{\Lambda} \Diamond A \wedge \Diamond B \rightarrow \Diamond (A \wedge B)$

20.2 Λ é uma lógica normal $\Leftrightarrow \forall n \geq 0$

$\vdash_{\Lambda} A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow A \;\Rightarrow\; \vdash_{\Lambda} \Box A_1 \wedge \ldots \wedge \Box A_n \rightarrow \Box A$

Prova por indução:

- ✓ n = 1: $\vdash_{\Lambda} A_1 \rightarrow A \Rightarrow \vdash_{\Lambda} \Box (A_1 \rightarrow A) \Rightarrow \vdash_{\Lambda} \Box A_1 \rightarrow \Box A$
- ✓ Suponhamos que $\vdash_{\Lambda} A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow A \Rightarrow \vdash_{\Lambda} \Box A_1 \wedge \ldots \wedge \Box A_n \rightarrow \Box A$ e que

$\vdash_{\Lambda} A_1 \wedge \ldots \wedge A_{n+1} \rightarrow A$.

Mas $\vdash_{\Lambda} A_1 \wedge \ldots \wedge A_{n+1} \rightarrow A \Leftrightarrow \vdash_{\Lambda} A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow (A_{n+1} \rightarrow A)$

$\Rightarrow \vdash_{\Lambda} \Box A_1 \wedge \ldots \wedge \Box A_n \rightarrow \Box (A_{n+1} \rightarrow A)$ (por hipótese de indução).

Como $\vdash_{\Lambda} \Box (A_{n+1} \rightarrow A) \Rightarrow \vdash_{\Lambda} \Box A_{n+1} \rightarrow \Box A$, vem que

$\vdash_{\Lambda} \Box A_1 \wedge \ldots \wedge \Box A_n \rightarrow (\Box A_{n+1} \rightarrow \Box A)$ que é equivalente a

$\vdash_{\Lambda} \Box A_1 \wedge \ldots \wedge \Box A_n \wedge \Box A_{n+1} \rightarrow \Box A$

.

20.3 Λ é uma lógica normal $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{(i)} & \vdash_{\Lambda} \Box \top \\ \text{(ii)} & \vdash_{\Lambda} \Box A \wedge \Box B \rightarrow \Box (A \wedge B) \\ \text{(iii)} & \vdash_{\Lambda} A \rightarrow B \Rightarrow \vdash_{\Lambda} \Box A \rightarrow \Box B \end{cases}$

Demonstração:

[$\Rightarrow$] Por **20.1e)** e **20.1b)** ficam provadas as duas últimas condições.

Por outro lado $\bot \rightarrow \bot$ (tautologia) $\Rightarrow \vdash_{\Lambda} \bot \rightarrow \bot \Rightarrow \vdash_{\Lambda} \Box (\bot \rightarrow \bot) \Rightarrow \vdash_{\Lambda} \Box \top$

[$\Leftarrow$] Suponhamos agora que são válidas as três condições anteriores.

✓ Provar que $\vdash_{\Lambda} \Box (A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$ (K)

$(A\rightarrow B) \rightarrow (A\rightarrow B)$ tautologia $\Rightarrow \vdash_{\Lambda} (A\rightarrow B) \rightarrow (A\rightarrow B) \Leftrightarrow \vdash_{\Lambda} (A\rightarrow B) \wedge A \rightarrow B$

$\Rightarrow \vdash_{\Lambda} \Box ((A\rightarrow B) \wedge A) \rightarrow \Box B$ (por (iii)).

Como por (ii) $\vdash_{\Lambda} \Box (A\rightarrow B) \wedge \Box A \rightarrow \Box ((A\rightarrow B) \wedge A)$, vem que

$\vdash_{\Lambda} \Box (A\rightarrow B) \wedge \Box A \rightarrow \Box B$

$\therefore \vdash_{\Lambda} \Box (A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

✓ Provar que $\vdash_{\Lambda} A \Rightarrow \vdash_{\Lambda} \Box A$. (Necessidade)

Suponhamos que $\vdash_{\Lambda} A$.

$A \rightarrow (\top \rightarrow A)$ tautologia $\Rightarrow \vdash_{\Lambda} A \rightarrow (\top \rightarrow A) \Rightarrow \vdash_{\Lambda} \top \rightarrow A$ (por hipótese e MP)

$\Rightarrow \vdash_{\Lambda} \Box \top \rightarrow \Box A$ (por (ii)) $\Rightarrow \vdash_{\Lambda} \Box A$ (por (i) e MP).

20.4 Se Λ é uma lógica normal então $\vdash_\Lambda A \Rightarrow \{\Box B : B \in \Gamma\} \vdash_\Lambda \Box A$.

Demonstração:

Suponhamos que $\vdash_\Lambda A$.

Se Γ é finito: $\Gamma = \{\gamma_1,\ldots,\gamma_n\}$ e portanto $\{\gamma_1,\ldots,\gamma_n\} \vdash_\Lambda A$. Por **12.8** $\{\gamma_1,\ldots,\gamma_{n-1}\} \vdash_\Lambda \gamma_n \to A$. Aplicando **12.8** recursivamente temos que $\vdash_\Lambda \wedge \gamma_i \to A$. Por **20.2** $\vdash_\Lambda \wedge \Box\gamma_i \to \Box A$ e por **12.8** $\{\Box\gamma_1,\ldots, \Box\gamma_n\} \vdash_\Lambda \Box A$.

Se Γ é infinito: $\exists B_i \in \Gamma : \vdash_\Lambda \wedge B_i \to A$.

$\exists B_i \in \Gamma : \vdash_\Lambda \wedge B_i \to A \Rightarrow \exists B_i \in \Gamma : \vdash_\Lambda \wedge \Box B_i \to \Box A$ (por **20.2**)

$\Leftrightarrow \vdash_\Lambda \Box B_1 \to (\Box B_2 \ldots \to (\Box B_n \to \Box A)\ldots) \Leftrightarrow \{\Box B_1,\ldots, \Box B_n\} \vdash_\Lambda \Box A$ (por **12.8**)

$\Rightarrow \{\Gamma \setminus \{\Box B_1,\ldots, \Box B_n\}\} \cup \{\Box B_1,\ldots, \Box B_n\} \vdash_\Lambda \Box A$

$\Rightarrow \{\Box\gamma' : \gamma' \in \{\Gamma \setminus \{\Box B_1,\ldots, \Box B_n\}\}\} \cup \{\Box B_1,\ldots, \Box B_n\} \vdash_\Lambda \Box A$

CAPÍTULO VIII

8. Modelo Canónico:

O Modelo Canónico de uma lógica normal consistente Λ é uma estrutura $\mathcal{M}^{\Lambda} = (S^{\Lambda}, R^{\Lambda}, V^{\Lambda})$ onde:

$S^{\Lambda} = \{s \subseteq$ Flas: s é Λ_maximal$\}$;

s R^{Λ} t $\Leftrightarrow$ $\{A \in$ Flas: $\Box A \in s\} \subseteq t$;

$V^{\Lambda}(p) = \{s \in S^{\Lambda} : p \in s\}$.

Uma estrutura canónica de Λ é $\mathcal{F}^{\Lambda} = (S^{\Lambda}, R^{\Lambda})$.

Exercício 21: Se s, t$\in S^{\Lambda}$ então s R^{Λ} t $\Leftrightarrow$ $\{\Diamond A : A \in t\} \subseteq s$.

Demonstração:
[$\Rightarrow$] Seja A$\in$ t.

$A \in t \quad \Leftrightarrow \quad \neg A \notin t \quad \Rightarrow \quad \neg A \notin \{A: \Box A \in s\}$ (pois s R^{Λ} t) $\Rightarrow \quad \Box \neg A \notin s$

$\Leftrightarrow \quad \neg \Box \neg A \in s \quad \Leftrightarrow \quad \Diamond A \in s$

$\therefore$ s R^{Λ} t $\Rightarrow$ $\{\Diamond A : A \in t\} \subseteq s$.

[$\Leftarrow$] Suponhamos agora que $\neg$ (s R^{Λ} t), ou seja, $\{A: \Box A \in s\} \nsubseteq t$.

Assim $\exists$ A: $\Box A \in s$ & $A \notin t$

$\therefore \quad \exists$ A: $\neg \Diamond \neg A \in s$ & $\neg A \in t$

$\therefore \quad \exists$ A: $\Diamond \neg A \notin s$ & $\neg A \in t$

$\therefore \quad \{\Diamond A : A \in t\} \nsubseteq s$.

<u>Proposição 22:</u> Se s$\in S^{\Lambda}$ **:** s$\in V^{\Lambda}$(A) $\Leftrightarrow$ A$\in$ s

<u>Demonstração:</u> Prova por indução: (i) A = a $\in$ Var;

(ii) A = $\perp$;

(iii) A = B $\rightarrow$ C;

(iv) A = $\Box$ B.

(i) Com a $\in$ Var vem, por definição, que s$\in V^{\Lambda}$(a) $\Leftrightarrow$ a$\in$ s.

(ii) s$\in V^{\Lambda}(\perp)$ $\Leftrightarrow$ s$\in\phi$ $\Leftrightarrow$ $\perp\in$ s

(iii) s$\in V^{\Lambda}$(B $\rightarrow$ C) $\Leftrightarrow$ s$\in V^{\Lambda}(B)^{C} \cup V^{\Lambda}(C)$ $\Leftrightarrow$ s$\in V^{\Lambda}(B)^{C} \cup V^{\Lambda}(C)$

$\Leftrightarrow$ s$\in V^{\Lambda}(B)^{C}$ ou s$\in V^{\Lambda}$(C) $\Leftrightarrow$ s$\notin V^{\Lambda}$(B) ou s$\in V^{\Lambda}$(C)

$\Leftrightarrow$ B$\notin$ s ou C$\in$ s (hipótese indução)

$\Leftrightarrow$ $\neg$B$\in$ s ou C$\in$ s (s$\in S^{\Lambda}$) $\Leftrightarrow$ $\neg$B$\vee$C$\in$ s $\Leftrightarrow$ (B $\rightarrow$C)$\in$ s

(iv) s$\in V^{\Lambda}(\Box$ B) $\Leftrightarrow$ $\Box$ B$\in$ s

[$\Rightarrow$] $V^{\Lambda}(\Box$ B) = $\{s\in S^{\Lambda}: R^{\Lambda}[s] \subseteq V^{\Lambda}(B)\}$

= $\{s\in S^{\Lambda}: \forall t\in S^{\Lambda}(s R^{\Lambda} t \Rightarrow t\in V^{\Lambda}(B)\}$

= $\{s\in S^{\Lambda}: \forall t\in S^{\Lambda}(s R^{\Lambda} t \Rightarrow B\in t)\}$ (hipótese indução)

= $\{s\in S^{\Lambda}: \forall t\in S^{\Lambda}(\{B: \Box B\in s\} \subseteq t \Rightarrow B\in t\}$.

s$\in V^{\Lambda}(\Box$ B) $\Leftrightarrow$ $\forall t\in S^{\Lambda}(\{B: \Box B\in s\} \subseteq t \Rightarrow B\in t)$

$\Leftrightarrow$ $B\in \bigcap\{t\in S^{\Lambda}: \{B: \Box B\in s\} \subseteq t\}$

$\Leftrightarrow$ $\{B: \Box B\in s\} \vdash_{\Lambda} B$ (pelo corolário **18.1**)

$\Rightarrow$ $\{\Box B: \Box B\in s\} \vdash_{\Lambda} \Box B$ (por **20.4**)

$\Rightarrow$ $s \vdash_{\Lambda} \Box B \Leftrightarrow \Box B\in s$ (por **14.1**)

[$\Leftarrow$] Suponhamos que $\Box$ B$\in$ s.

$\Box$ B$\in$ s $\Rightarrow$ B$\in$ t, $\forall$ t$\in R^{\Lambda}$[s] $\Rightarrow$ t $\in$ V(B), $\forall$ t$\in R^{\Lambda}$[s]

$\Rightarrow R^{\Lambda}[s] \subseteq V^{\Lambda}(B)$ $\Rightarrow$ s$\in V^{\Lambda}(\Box$ B).

Teorema 23: Para todo $s \in S^{\Lambda}$ e $B \in$ Flas, $\Box B \in s \Leftrightarrow [\forall\, t \in S^{\Lambda},\, s\, R^{\Lambda}\, t \Rightarrow B \in t]$.

Demonstração:

$$\Box B \in s \;\Leftrightarrow\; s \in V^{\Lambda}(\Box\, B) \;\Leftrightarrow\; s \in \{x: R^{\Lambda}[x] \subseteq V^{\Lambda}(B)\}$$

$$\Leftrightarrow\; R^{\Lambda}[s] \subseteq V^{\Lambda}(B)\} \;\Leftrightarrow\; [\forall\, t \in R^{\Lambda}\,[s]\, (t \in V^{\Lambda}\,(B))]$$

$$\Leftrightarrow\; [\forall\, t\, (s\, R^{\Lambda}\, t \Rightarrow t \in V^{\Lambda}\,(B))] \;\Leftrightarrow\; [\forall\, t\, (s\, R^{\Lambda}\, t \Rightarrow B \in t)]$$

Definição:

Seja $\mathcal{M}$ um modelo, $\mathcal{F}$ uma estrutura e C uma classe de modelos ou estruturas.

$\mathcal{M}$ determina $\Lambda \Leftrightarrow \forall\, A\, (\mathcal{M} \vDash A \Leftrightarrow\, \vdash_{\Lambda} A)$

$\mathcal{F}$ determina $\Lambda \Leftrightarrow \forall\, A\, (\mathcal{F} \vDash A \Leftrightarrow\, \vdash_{\Lambda} A)$

C determina $\Lambda \Leftrightarrow \forall\, A\, (\mathsf{C} \vDash A \Leftrightarrow\, \vdash_{\Lambda} A)$

Corolário 24: $\mathcal{M}^{\Lambda}$ determina Λ

Demonstração:

$\mathcal{M}^{\Lambda} \vDash A \;\Leftrightarrow\; V^{\Lambda}(A) = S^{\Lambda}$ (pela proposição **4**) $\;\Leftrightarrow\; s \in V^{\Lambda}(A), \forall\, s \in S^{\Lambda}$

$\Leftrightarrow\; A \in s, \forall\, s \in S^{\Lambda}$ (pela proposição **22**) $\;\Leftrightarrow\; A \in \Lambda$ (por **18.2**) $\;\Leftrightarrow\; \vdash_{\Lambda} A$.

Teorema 25: Caracterização de **K**: $\vdash_{\mathbf{K}} A \Leftrightarrow$ A é valida em todas as estruturas.

Demonstração:

[⇒] Seja $\mathcal{F}$ uma estrutura. Suponhamos que $\vdash_{\mathbf{K}} A$, ou seja, $A \in \mathbf{K}$. Assim $A \in \cap\{\Lambda : \Lambda$ é lógica normal$\}$.Seja $\Lambda_{\mathcal{F}} = \{B: \mathcal{F} \vDash B\}$.

- $\Lambda_{\mathcal{F}}$ é uma lógica, como foi visto no teorema **10**;
- $\Lambda_{\mathcal{F}}$ contém o esquema $\Box\, (A \to B) \to (\Box\, A \to \Box\, B)$ (Proposição **5.2**)
- Para a necessitação, suponhamos que $A \in \Lambda_{\mathcal{F}}$. Isto é, $\mathcal{F} \vDash A$ e portanto $V(A) = S$, para todo V.

  Agora $V(\Box A) = \{s: R[s] \subseteq V(A)\} = \{s: R[s] \subseteq S\} = S$, logo $\mathcal{F} \vDash \Box A$ e assim $\Box A \in \Lambda_{\mathcal{F}}$. $\therefore\; \mathcal{F} \vDash A \Rightarrow \mathcal{F} \vDash \Box\, A$.

Como $A \in \cap\{\Lambda: \Lambda$ é lógica normal$\}$ e $\cap\{\Lambda: \Lambda$ é lógica normal$\} \subseteq \Lambda_{\mathcal{F}}$, vem que $A \in \Lambda_{\mathcal{F}}$, logo $\mathcal{F} \models A$.

[$\Leftarrow$] Suponhamos que $\nvdash_K A$. Pelo corolário **24**, A é falso em $\mathcal{M}^K$: $\mathcal{M}^K \nvDash A$.

$\therefore \quad \nvdash_K A \;\Rightarrow\; \mathcal{F}^K \nvDash A$

Teorema 26:

Se uma lógica normal satisfaz algum dos esquemas 1- 9 então R^Λ satisfaz a propriedade correspondente.

26.1 $\Box A \rightarrow A$	**26.1** Reflexiva: $\forall s\ (sR^\Lambda s)$
26.2 $A \rightarrow \Box\Diamond A$	**26.2** Simétrica: $\forall s, \forall t\ (sR^\Lambda t \rightarrow tR^\Lambda s)$
26.3 $\Box A \rightarrow \Diamond A$	**26.3** Serial: $\forall s\ \exists t\ (sR^\Lambda t)$
26.4 $\Box A \rightarrow \Box\Box A$	**26.4** Transitiva: $\forall s, \forall t, \forall u\ (sR^\Lambda t \wedge tR^\Lambda u \rightarrow sR^\Lambda u)$
26.5 $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$	**26.5** Euclideana: $\forall s, \forall t, \forall u\ (sR^\Lambda t \wedge sR^\Lambda u \rightarrow tR^\Lambda u)$
26.6 $\Diamond A \rightarrow \Box A$	**26.6** Parcialmente Funcional: $\forall s, \forall t, \forall u\ (sR^\Lambda t \wedge sR^\Lambda u \rightarrow t = u)$
26.7 $\Diamond A \leftrightarrow \Box A$	**26.7** Funcional: $\forall s\ \exists! t\ (sR^\Lambda t)$
26.8 $\Box\Box A \rightarrow \Box A$	**26.8** Debilmente Densa: $\forall s, \forall t\ (sR^\Lambda t \rightarrow \exists u\ (sR^\Lambda u \wedge uR^\Lambda t))$
26.9 $\Diamond\Box A \rightarrow \Box\Diamond A$	**26.9** Debilmente Dirigida: $\forall s, \forall t, \forall u\ (sR^\Lambda t \wedge sR^\Lambda u \rightarrow \exists v\ (tR^\Lambda v \wedge uR^\Lambda v))$

Demonstração:

26.1 Suponhamos que Λ contém o esquema $\Box A \to A$ e que $\Box A \in s$.

$\Box A \to A \in \Lambda \quad \Rightarrow \quad \Box A \to A \in s$ (por **14.4**) $\Rightarrow A \in s$ (por **14.6**)

$\therefore \quad \{A: \Box A \in s\} \subseteq s$, isto é, $sR^{\Lambda}s$.

26.2 Suponhamos que $A \to \Box\Diamond A \in \Lambda$, $sR^{\Lambda}t$ e $\Box A \in t$.

$\Box A \in t \quad \Rightarrow \quad \neg\Box A \notin t \quad \Rightarrow \quad \Box\neg\Box A \notin s$ (pois $sR^{\Lambda}t$) $\Leftrightarrow \quad \Box\Diamond\neg A \notin s$

$\Rightarrow \quad \neg A \notin s \quad \Rightarrow \quad A \in s$

$\therefore \quad \{A: \Box A \in t\} \subseteq s$, isto é, $tR^{\Lambda}s$.

26.3 Suponhamos que Λ contém o esquema $\Box A \to \Diamond A$ e que $\Box A \in s$. Pelo esquema temos que $\Diamond A \in s$.

Seja $X = \{A : \Box A \in s\}$. X é consistente, pois caso contrário: $X \vdash_{\Lambda} \bot$.

$X \vdash_{\Lambda} \bot \quad \Leftrightarrow \quad \bot \in \Lambda$ ou $\exists B_i \in X : \wedge B_i \to \bot \in \Lambda$

$\Leftrightarrow \exists B_i \in X : \wedge B_i \to \bot \in \Lambda$ (por **14.4** e **14.5**)

$\Leftrightarrow \exists B_i \in X : \wedge B_i \to \bot \in s$ (por **20.2**)

$\Leftrightarrow \exists B_i \in X : \wedge \Box B_i \to \Box\bot \in s$ (por **20.2**)

Mas cada $B_i \in X$, logo $\Box B_i \in s$ e, por **14.7,** $\wedge\Box B_i \in s$. Assim, por MP, $\Box\bot \in s$ e, pelo esquema, $\Diamond\bot \in s$.

Mas $\Diamond\bot \in s \quad \Leftrightarrow \quad s \in V(\Diamond\bot) \quad \Leftrightarrow \quad s \in \{s \in S: R^{\Lambda}[s] \cap V(\bot) \neq \phi\}$

$\Leftrightarrow \quad s \in \{s \in S: R^{\Lambda}[s] \cap \phi \neq \phi\} \quad \Leftrightarrow \quad s \in \{s \in S: \phi \neq \phi\} \quad \Leftrightarrow \quad s \in \phi$ Absurdo!

Logo X é consistente e pelo Lema **17** existe t maximal tal que $X \subseteq t$.

$\therefore \{A : \Box A \in s\} \subseteq t$, isto é, $\exists t\,(sR^{\Lambda}t)$.

26.4 Suponhamos que Λ contém o esquema $\Box A \rightarrow \Box\Box A$, que $sR^{\Lambda}t$ e $tR^{\Lambda}u$.
Seja $\Box A\in s$.

$$\Box A\in s \quad\Rightarrow\quad \Box\Box A\in s \quad \text{(pelo esquema)} \quad\Rightarrow\quad \Box A\in t \quad (\text{pois } sR^{\Lambda}t)$$

$$\Rightarrow\quad A\in u \quad (\text{ pois } tR^{\Lambda}u).$$

$$\therefore\quad sR^{\Lambda}u$$

26.5 Suponhamos que Λ contém o esquema $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$, que $sR^{\Lambda}t$ e $sR^{\Lambda}u$.
Seja $\Box A\in t$.

$$\Box A\in t \;\Leftrightarrow\; \neg\Box A\notin t \;\Leftrightarrow\; \Diamond\neg A\notin t \;\Rightarrow\; \Box\Diamond\neg A\notin s \quad (\text{pois } sR^{\Lambda}t)$$

$$\Rightarrow\quad \Diamond\neg A\notin s \quad \text{(pelo esquema)} \quad\Leftrightarrow\quad \neg\Box A\notin s$$

$$\Leftrightarrow\quad \Box A\in s \quad (\text{pois } s\in S^{\Lambda}) \quad\Rightarrow\quad A\in u \quad (\text{ pois } sR^{\Lambda}u).$$

$$\therefore\quad tR^{\Lambda}u$$

26.6 Suponhamos que Λ contém o esquema $\Diamond A \rightarrow \Box A$, que $sR^{\Lambda}t$ e $sR^{\Lambda}u$.

$$A\in t \;\Leftrightarrow\; \neg A\notin t \;\; (\text{pois } t\in S^{\Lambda}) \;\Rightarrow\; \Box\neg A\notin s \;\; (\text{pois } sR^{\Lambda}t)$$

$$\Rightarrow\; \Diamond\neg A\notin s \;\; \text{(pelo esquema)} \;\Leftrightarrow\; \neg\Diamond\neg A\in s \;\Leftrightarrow\; \Box A\in s$$

$$\Rightarrow\; A\in u \quad (\text{pois } sR^{\Lambda}u). \qquad \therefore\; t \subseteq u.$$

$$A\in u \;\Leftrightarrow\; \neg A\notin u \;\Rightarrow\; \Box\neg A\notin s \;\; (\text{pois } sR^{\Lambda}u) \;\Rightarrow\; \Diamond\neg A\notin s \;\; \text{(pelo esquema)}$$

$$\Leftrightarrow\; \neg\Diamond\neg A\in s \;\Leftrightarrow\; \Box A\in s \;\Rightarrow\; A\in t \;\; (\text{pois } sR^{\Lambda}t). \qquad \therefore\; u \subseteq t.$$

$$\therefore\quad u = t.$$

26.7 Suponhamos que $\Diamond A \leftrightarrow \Box A\in \Lambda$. Por **26.3** temos que $\forall s\, \exists t\, (sR^{\Lambda}t)$. Falta apenas provar a unicidade. Suponhamos que $\exists t_1 : (sR^{\Lambda}t_1)$ e $\exists t_2 : (sR^{\Lambda}t_2)$, com $t_1 \neq t_2$.

Assim $\exists B : B\in t_1$ mas $B\notin t_2$.

$$B\notin t_2 \;\Rightarrow\; B\notin \{A: \Box A\in s\} \;\Rightarrow\; \Box B\notin s \;\Rightarrow\; \Diamond B\notin s \;\; \text{(pelo esquema)}$$

$$\Rightarrow\; \neg\Diamond B\in s \;\Rightarrow\; \Box\neg B\in s$$

$\therefore\ \ \neg B\in t_1\ \ \&\ \ \neg B\in t_2$ o que é absurdo pois, por hipótese $B\in t_1$.

Assim $\exists!t\,(sR^{\Lambda}t)$.

26.8 Suponhamos que Λ contém o esquema $\Box\Box A \rightarrow \Box A$ e que $sR^{\Lambda}t$. Queremos encontrar $u\in S^{\Lambda}$ tal que $sR^{\Lambda}u$ e $uR^{\Lambda}t$.

Mas $sR^{\Lambda}u \Leftrightarrow \{A: \Box A\in s\}\subseteq u$ e $uR^{\Lambda}t \Leftrightarrow \{A: \Box A\in u\}\subseteq t \Leftrightarrow \{\Diamond A: A\in t\}\subseteq u$ (por **6.1**).

Seja $Y = \{A: \Box A\in s\}\cup\{\Diamond B: B\in t\}$. Ao provar que Y é Λ_consistente fica provada a existência de u pelo Lema **17**.

Suponhamos que Y não é Λ_consistente:

$A_1\wedge\ldots\wedge A_m\wedge\Diamond B_1\wedge\ldots\wedge\Diamond B_n\rightarrow\bot\in\Lambda$ para certos n, $m\geq 0$, com cada $\Box A_i\in s$ e $B_j\in t$, com $i\in\{0,\ldots,m\}$ e $j\in\{0,\ldots,n\}$.

Sabemos que:

$\vdash_{\Lambda}\ \ A_1\wedge\ldots\wedge A_m\wedge\Diamond B_1\wedge\ldots\wedge\Diamond B_n\rightarrow\bot$

$\Leftrightarrow\ \vdash_{\Lambda}\ \ \top\rightarrow\neg(A_1\wedge\ldots\wedge A_m\wedge\Diamond B_1\wedge\ldots\wedge\Diamond B_n)$

$\Leftrightarrow\ \vdash_{\Lambda}\ \ \neg(A_1\wedge\ldots\wedge A_m\wedge\Diamond B_1\wedge\ldots\wedge\Diamond B_n)$

$\Leftrightarrow\ \vdash_{\Lambda}\ \ \neg(A_1\wedge\ldots\wedge A_m)\vee\neg(\Diamond B_1\wedge\ldots\wedge\Diamond B_n)$

$\Leftrightarrow\ \vdash_{\Lambda}\ \ A_1\wedge\ldots\wedge A_m\rightarrow\ \neg(\Diamond B_1\wedge\ldots\wedge\Diamond B_n)$

$\Leftrightarrow\ \vdash_{\Lambda}\ \ \Diamond B_1\wedge\ldots\wedge\Diamond B_n\rightarrow\ \neg(A_1\wedge\ldots\wedge A_m)$

Por **20.1** $\vdash_{\Lambda}\ \ \Diamond(B_1\wedge\ldots\wedge B_n)\rightarrow\ \Diamond B_1\wedge\ldots\wedge\Diamond B_n$

$\Rightarrow\ \vdash_{\Lambda}\ \Diamond(B_1\wedge\ldots\wedge B_n)\rightarrow\ \neg(A_1\wedge\ldots\wedge A_m)$

$\Leftrightarrow\vdash_{\Lambda}\ (A_1\wedge\ldots\wedge A_m)\rightarrow\neg\Diamond(B_1\wedge\ldots\wedge B_n)$.

$\Rightarrow\vdash_{\Lambda}\ \Box A_1\wedge\ldots\wedge\Box A_m\rightarrow\Box\neg\Diamond(B_1\wedge\ldots\wedge B_n)$ (por **20.2**)

Como cada $\Box A_i\in s$ vem que $\Box\neg\Diamond(B_1\wedge\ldots\wedge B_n)\in s$, logo

$\Box\ \Box\ \neg\ (B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \in$ s. Pelo esquema vem que $\Box\ \neg\ (B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \in$ s. Como sR^{Λ}t vem que $\neg\ (B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \in$ t, logo $B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \notin$ t. Mas cada $B_j \in$ t, logo por **14.7** $B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \in$ t o que entra em contradição com o anterior. Assim fica provada a existência de u.

26.9 Suponhamos que Λ contém o esquema $\Diamond\ \Box\ A \rightarrow \Box\ \Diamond A$, s$R^{\Lambda}$t e s$R^{\Lambda}$u.
Note-se que:

sR^{Λ}t $\Leftrightarrow$ $\{A: \Box A \in s\} \subseteqq t$ $\Leftrightarrow$ $\{\Diamond A: A \in t\} \subseteqq s$ (por **21**)

sR^{Λ}u $\Leftrightarrow$ $\{A: \Box A \in s\} \subseteqq u$ $\Leftrightarrow$ $\{\Diamond A: A \in u\} \subseteqq s$ (por **21**)

Queremos encontrar v$\in S^{\Lambda}$ tal que tR^{Λ}v e uR^{Λ}v.

Mas tR^{Λ}v $\Leftrightarrow$ $\{A: \Box A \in t\} \subseteqq v$ e uR^{Λ}v $\Leftrightarrow$ $\{A: \Box A \in u\} \subseteqq v$.

Seja $Y = \{A: \Box A \in t\} \cup \{B: \Box B \in u\}$. Ao provar que Y é Λ_consistente fica provada a existência de u pelo Lema **17**.

Suponhamos que Y não é Λ_consistente:

$A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \rightarrow \perp \in \Lambda$ para certos n, m$\geq$0, com cada $\Box A_i \in$ t e $\Box B_j \in$ u, com i$\in$ {0,…,m} e j$\in$ {0,…,n}.

Assim:

$\vdash_{\Lambda}$ $A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \rightarrow \perp$

$\Leftrightarrow \vdash_{\Lambda}$ $\top \rightarrow \neg (A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge B_n)$

$\Leftrightarrow \vdash_{\Lambda}$ $\neg (A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge B_n)$

$\Leftrightarrow \vdash_{\Lambda}$ $\neg (A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \vee \neg (B_1 \wedge \ldots \wedge B_n)$

$\Leftrightarrow \vdash_{\Lambda}$ $A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \rightarrow \neg (B_1 \wedge \ldots \wedge B_n)$

$\Rightarrow \vdash_{\Lambda}$ $\Box (A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \rightarrow \Box \neg (B_1 \wedge \ldots \wedge B_n)$

$\Rightarrow \vdash_{\Lambda}$ $(\Box A_1 \wedge \ldots \wedge \Box A_m) \rightarrow \Box \neg (B_1 \wedge \ldots \wedge B_n)$

Assim $(\Box A_1 \wedge \ldots \wedge \Box A_m) \rightarrow \Box \neg (B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \in$ t e como cada $\Box A_i \in$ t, temos que $\Box A_1 \wedge \ldots \wedge \Box A_m \in$ t. Por **14.6** $\Box \neg (B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \in$ t.

$\therefore$ $\Diamond\ \Box \neg (B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \in$ s (sR^{Λ}t)

$\therefore$ $\Box\ \Diamond \neg (B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \in$ s (pelo esquema)

$\therefore \quad \Diamond \neg (B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \in u \qquad (sR^{\Lambda}u)$

$\therefore \quad \neg \Box \neg \neg (B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \in u$

$\therefore \quad \neg \Box (B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \in u$

$\therefore \quad \Box (B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \notin u$

$\therefore \quad \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \notin u$ o que é absurdo pois cada $\Box B_j \in u$, com $j \in \{0,\ldots,n\}$.

Apêndices:

Em apêndices encontram-se demonstrações que não constam no corpo do texto principal ou demonstrações alternativas às que foram apresentadas.

Apêndice I

<u>Proposição 27:</u> Existe uma bijecção entre 2^S e $\mathrm{P}(S)$.

<u>Demonstração:</u>
Seja F: $2^S \to \mathrm{P}(S)$, com $2^S = \{f : S \to \{0,1\}\}$.
Seja $A \in P(\mathrm{S})$, ou seja, $A \subseteq \mathrm{S}$.

Se $x : S \to \{0,1\}$ tal que $x(s) = \begin{cases} 1, & se\ s \in A \\ 0, & se\ s \notin A \end{cases}$ e $F(x) = \{s \in S : x(s) = 1\}$, temos que $F(x) = \{s \in S : s \in A\} = S \cap A = A$ e portanto F é sobrejectiva.

Consideremos agora $y, z \in 2^S$ com $z \neq y$, ou seja, $y : S \to \{0,1\}$ e $z : S \to \{0,1\}$. Como $z \neq y$ existe $s_1 \in \mathrm{S}$ tal que $z(s_1) \neq y(s_1)$. Se $z(s_1) = 1$, então $y(s_1) = 0$, logo $s_1 \in F(z)$ *mas* $s_1 \notin F(y)$ e portanto $F(z) \neq F(y)$. Por outro lado, se $z(s_1) = 0$, então $y(s_1) = 1$, logo $s_1 \in F(y)$ *mas* $s_1 \notin F(z)$ e assim $F(z) \neq F(y)$, portanto F é injectiva. Fica assim provado que existe uma bijecção entre 2^S e $\mathrm{P}(S)$.

Apêndice II

Serão apresentadas algumas demonstrações alternativas às apresentadas ao longo do texto principal. Todas elas têm como base as definições do livro de Goldblatt e não recorrem à definição de valor de uma fórmula (a numeração apresentada corresponde à que foi utilizada no texto principal).

<u>Proposição 5:</u>

5.1 Por definição $\forall s \in \mathrm{S}\ (\mathcal{M} \nvDash_s \bot)$.

$$\begin{aligned}
\forall s \in \mathrm{S}\ (\mathcal{M} \nvDash_s \bot) &\Leftrightarrow \forall s \in \mathrm{S}\ (\mathcal{M} \vDash_s \neg\bot) \text{ (proposição 1.1)} \\
&\Leftrightarrow \forall s \in \mathrm{S}\ (\mathcal{M} \vDash_s \top) \\
&\Rightarrow \forall t \in \mathrm{S}: sRt \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_t \top \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash_s \Box\, \top
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \mathcal{M} \vDash_s \Box\, \top.$$

5.2 Suponhamos que $\mathcal{M}\vDash_s \Box\,(A\to B)$ & $\mathcal{M}\vDash_s \Box\,A$.

$\mathcal{M}\vDash_s \Box\,(A\to B)$ & $\mathcal{M}\vDash_s \Box\,A \;\Leftrightarrow\;$ $(\forall t\in S$: sRt $\Rightarrow \mathcal{M}\vDash_t A\to B)$ & $\mathcal{M}\vDash_s \Box\,A$

$\Leftrightarrow$ [($\forall t\in S$: sRt $\Rightarrow (\mathcal{M}\vDash_t A \Rightarrow \mathcal{M}\vDash_t B)$) & ($\forall t\in S$: sRt $\Rightarrow \mathcal{M}\vDash_t A$)]

$\Rightarrow \forall t\in S$: sRt $\Rightarrow \mathcal{M}\vDash_t B$

$\Rightarrow \mathcal{M}\vDash_s \Box\,B$

$\therefore\;\; \mathcal{M}\vDash_s \Box\,(A\to B)\to(\Box\,A\to\Box\,B)$.

5.3 Suponhamos que $\mathcal{M}\vDash_s \Diamond\,(A\to B)$ & $\mathcal{M}\vDash_s \Box\,A$.

$\mathcal{M}\vDash_s \Diamond\,(A\to B)$ & $\mathcal{M}\vDash_s \Box\,A$

$\Leftrightarrow$ [($\exists t\in S$: sRt $\Rightarrow \mathcal{M}\vDash_t A\to B$) & ($\forall t\in S$: sRt $\Rightarrow \mathcal{M}\vDash_t A$)]

$\Leftrightarrow$ [($\exists t\in S$: sRt $\Rightarrow (\mathcal{M}\vDash_t A \Rightarrow \mathcal{M}\vDash_t B)$) & $\forall t\in S$:sRt $\Rightarrow \mathcal{M}\vDash_t A$]

$\Rightarrow \exists t\in S$: sRt & $\mathcal{M}\vDash_t B$

$\Leftrightarrow\;\; \mathcal{M}\vDash_s \Diamond\,B$

$\therefore\;\; \mathcal{M}\vDash_s \Diamond\,(A\to B)\to(\Box\,A\to\Diamond\,B)$.

5.4 Suponhamos que $\mathcal{M}\vDash_s \Box\,(A\to B)$ & $\mathcal{M}\vDash_s \Diamond\,A$.

$\mathcal{M}\vDash_s \Box(A\to B)$ & $\mathcal{M}\vDash_s \Diamond A$

$\Leftrightarrow$ [($\forall t\in S$: sRt $\Rightarrow (\mathcal{M}\vDash_t A \Rightarrow \mathcal{M}\vDash_t B)$) & ($\exists t\in S$: sRt & $\mathcal{M}\vDash_t A$)]

$\Rightarrow\;\; \exists t\in S$: sRt & $\mathcal{M}\vDash_t B$

$\Leftrightarrow\;\; \mathcal{M}\vDash_s \Diamond\,B$

$\therefore\;\; \mathcal{M}\vDash_s \Box\,(A\to B)\to(\Diamond\,A\to\Diamond\,B)$.

5.5 Suponhamos que $\mathcal{M}\vDash_s \Box\,(A\wedge B)$.

$\mathcal{M}\vDash_s \Box\,(A\wedge B) \;\Leftrightarrow\;$ [$\forall t\in S$: sRt $\Rightarrow \mathcal{M}\vDash_t A\wedge B$]

$\Leftrightarrow$ [$\forall t\in S$: sRt $\Rightarrow (\mathcal{M}\vDash_t A$ & $\mathcal{M}\vDash_t B)$]

$\Leftrightarrow$ [$\forall t\in S$: sRt $\Rightarrow \mathcal{M}\vDash_t A$] & [$\forall t\in S$: sRt $\Rightarrow \mathcal{M}\vDash_t B$]

$\Leftrightarrow\;\; \mathcal{M}\vDash_s \Box\,A$ & $\mathcal{M}\vDash_s \Box\,B$

$\Leftrightarrow\;\; \mathcal{M}\vDash_s \Box\,A\wedge\Box\,B$,

$\therefore\;\; \mathcal{M}\vDash_s \Box\,(A\wedge B) \Leftrightarrow \mathcal{M}\vDash_s \Box\,A\wedge\Box\,B$

$\therefore\;\; \mathcal{M}\vDash_s \Box\,(A\wedge B)\leftrightarrow(\Box\,A\wedge\Box\,B)$.

5.6 Suponhamos que $\mathcal{M}\vDash_s \Diamond\,(A\vee B)$.

$\mathcal{M}\vDash_s \Diamond\,(A\vee B) \;\Leftrightarrow\;$ [$\exists t\in S$: sRt & $\mathcal{M}\vDash_t A\vee B$]

$\Leftrightarrow$ [$\exists t\in S$: sRt & ($\mathcal{M}\vDash_t A$ ou $\mathcal{M}\vDash_t B$)]

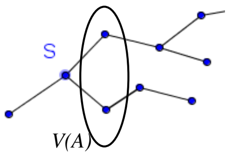
$\Leftrightarrow$ [$\exists t\in S$: sRt & $\mathcal{M}\vDash_t A$] ou [$\exists t\in S$: sRt & $\mathcal{M}\vDash_t B$]

$\Leftrightarrow\;\; \mathcal{M}\vDash_s \Diamond\,A\vee\Diamond\,B$

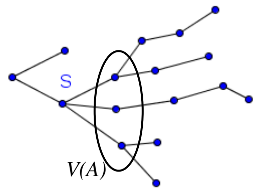
$\therefore\;\; \mathcal{M}\vDash_s \Diamond\,(A\vee B)\leftrightarrow(\Diamond\,A\vee\Diamond\,B)$.

<u>Proposição 6:</u>

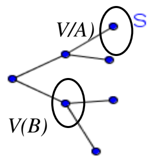
<u>Demonstração</u> (recurso a contra-exemplo):



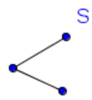
6.1 No modelo ao lado, considerando que R não é transitiva nem reflexiva, não se verifica $\Box A \rightarrow A$, pois $\forall t \in S$: $sRt \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_t A$ mas $\mathcal{M} \nvDash_s A$.



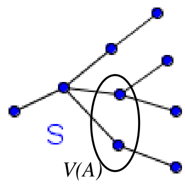
6.2 No modelo ao lado, considerando que R não é transitiva nem reflexiva, não se verifica $\Box A \rightarrow \Box \Box A$, pois $\forall t \in S$: $sRt \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_t A$ mas não se verifica que $\forall t \in S$: $sRt \Rightarrow [\forall r \in S: tRr \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_r A]$.



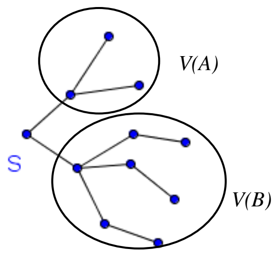
6.3 No modelo ao lado, considerando que R não é simétrica nem reflexiva, não se verifica $\Box (A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Diamond B)$, pois ($\forall t \in S$: $sRt \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_t A \rightarrow B$) e ($\forall t \in S$: $sRt \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_t A$), mas não se verifica $\exists t \in S$: sRt & $\mathcal{M} \vDash_t B$ (Nota: *V(*A*)* e *V(*B*)* são irrelevantes, basta que s não tenha sucessores).



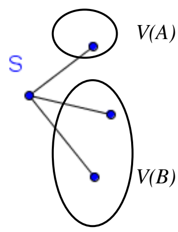
6.4 No modelo ao lado, considerando que R não é simétrica nem reflexiva, não se verifica $\Diamond \top$, pois $\mathcal{M} \vDash_s \Diamond \top \Leftrightarrow \exists t \in S$: sRt & $\mathcal{M} \vDash_t \neg \bot$ e *s* não tem sucessores (Nota: Basta que s não tenha sucessores).



6.5 No modelo ao lado, não se verifica $\Diamond A \rightarrow \Box A$, pois $\exists t \in S$, sRt & $\mathcal{M} \vDash_t A$ mas não é verdade que $\forall t \in S$: $sRt \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_t A$.

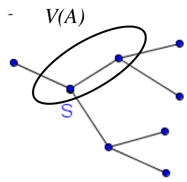


6.6 No modelo ao lado, não se verifica $\Box (\Box A \rightarrow B) \vee \Box (\Box B \rightarrow A)$, pois não é verdade que $\forall t \in S$: $sRt \Rightarrow [\forall r \in S: tRr \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_r A \rightarrow B]$ e também não é verdade que $\forall t \in S$: $sRt \Rightarrow [\forall r \in S: tRr \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_r B \rightarrow A]$.



6.7 No modelo ao lado, considerando que R não é reflexiva, não se verifica $\Box (A \vee B) \rightarrow \Box A \vee \Box B$, pois $\forall t \in S$, $sRt \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_t A \vee B$, mas não é verdade que $\forall t \in S$: $sRt \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_t A$ nem que $\forall t \in S$: $sRt \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_t B$.

6.8 No modelo ao lado, não se verifica $\Box\ (\Box\ A \rightarrow A) \rightarrow \Box\ A$ pois $\forall t \in S$: $sRt \Rightarrow [(\forall r \in S,\ tRr \Rightarrow (\mathcal{M} \vDash_r A)) \Rightarrow (\mathcal{M} \vDash_t A)]$ (uma vez que é falso $\forall r \in S$: $tRr \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_r A$), mas não é verdade que $\forall t \in S$: $sRt \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_t A$.



Proposição 7:

7.1 Seja $\mathcal{F}$ uma estrutura e $s \in S$. Suponhamos $\mathcal{F} \vDash \Diamond \top$.

Mas $\mathcal{F} \vDash \Diamond \top \Leftrightarrow \forall s \in S\ (\mathcal{F} \vDash_s \Diamond \top) \Leftrightarrow \forall s \in S\ (\mathcal{F} \vDash_s \Diamond \bot \rightarrow \bot)$

$\Leftrightarrow \forall s \in S, \exists t \in R[s]\ (\mathcal{F} \vDash_t \bot \rightarrow \bot)$

$\Leftrightarrow \forall s \in S, \exists t \in R[s]\ (\mathcal{F} \vDash_t \bot \Rightarrow \mathcal{F} \vDash_t \bot)$

$\Leftrightarrow \forall s \in S, R[s] \neq \emptyset$ (assim $\exists t \in R[s]$ e $\forall t \in S\ (\mathcal{F} \vDash_t \bot \Rightarrow \mathcal{F} \vDash_t \bot)$)

$\Leftrightarrow \mathcal{F}$ não tem pontos finais.

Por outro lado, suponhamos que $\mathcal{F} \vDash \Box\ A \rightarrow \Diamond A$.

Mas $\mathcal{F} \vDash \Box\ A \rightarrow \Diamond A \Leftrightarrow \forall s \in S\ (\mathcal{F} \vDash_s \Box\ A \rightarrow \Diamond A)$

$\Leftrightarrow \forall s \in S\ (\mathcal{F} \vDash_s \Box\ A \Rightarrow \mathcal{F} \vDash_s \Diamond A)$

$\Leftrightarrow \forall s \in S, [(t \in S: sRt \Rightarrow \mathcal{F} \vDash_t A) \Rightarrow (\exists t \in S: sRt \Rightarrow \mathcal{F} \vDash_t A]$

$\Leftrightarrow \forall s \in S, R[s] \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow \mathcal{F}$ não tem pontos finais.

$\therefore \quad \Diamond \top$ é válida $\Leftrightarrow \Box\ A \rightarrow \Diamond A$ é válida.

7.2 Seja $\mathcal{F}$ uma estrutura e $s \in S$. Suponhamos que $\mathcal{F} \vDash \Box\bot$.

Mas $\mathcal{F} \vDash \Box\bot \Leftrightarrow \forall s \in S\ (\mathcal{F} \vDash_s \Box\ \bot)$

$\Leftrightarrow \forall s \in S, \forall t \in S, (sRt \Rightarrow \mathcal{F} \vDash_t \bot)$

$\Leftrightarrow \forall s \in S, R[s] = \emptyset$

$\Leftrightarrow$ todos os pontos de S são finais.

Assim $\Box\bot$ é válida apenas em estruturas onde todos os seus pontos sejam finais.

Teorema 8:

- Propriedades $\Rightarrow$ Fórmulas modais:

8.1 Suponhamos que R é reflexiva e que $\mathcal{M} \vDash_s \Box\ A$, ou seja, $\forall t \in S$, $sRt \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_t A$.

Como $s \in S$ e $\forall s \in S\ (sRs)$ temos que $\mathcal{M} \vDash_s A$.

$\therefore \quad R$ reflexiva $\Rightarrow \Box\ A \rightarrow A$.

8.2 Suponhamos que R é simétrica e que $\neg\ \mathcal{M} \vDash_s \Box\Diamond A$, ou seja, $\neg[\ \forall t \in S{:}\ sRt \Rightarrow (\exists\ r \in S{:}\ tRr \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_r A)]$. Assim, com r = s e como $\forall s, \forall t\ (sRt \rightarrow tRs)$ temos que $\neg\ \mathcal{M} \vDash_s A$.

$\therefore \quad R$ simétrica $\Rightarrow A \rightarrow \Box\Diamond\ A$.

8.3 Suponhamos que R é Serial e que $\mathcal{M} \vDash_s \Box\ A$, ou seja, $\forall t \in S{:}\ sRt \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_t A$. Por hipótese $\exists t\ (sRt)$, logo $\exists t{:}\ sRt\ \&\ \mathcal{M} \vDash_t A$.

$\therefore \quad R$ serial $\Rightarrow \Box\ A \rightarrow \Diamond A$.

8.4 Suponhamos que R é transitiva e que $\mathcal{M} \vDash_s \Box A$. Assim, $\forall t \in S{:}\ sRt \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_t A$. Se considerarmos que tRu temos, por hipótese sRu, logo $\mathcal{M} \vDash_u A$ e assim $\mathcal{M} \vDash_s \Box\ \Box\ A$.

$\therefore \quad R$ transitiva $\Rightarrow \Box\ A \rightarrow \Box\ \Box\ A$.

8.5 Suponhamos que R é euclidiana e que $\mathcal{M} \vDash_s \Diamond A$, ou seja, que $\exists t \in S{:}\ sRt\ \&\ \mathcal{M} \vDash_t A$. Seja $x \in S$ tal que sRx. Como sRt, vem, por hipótese, xRt, logo $\exists t \in S{:}\ xRt\ \&\ \mathcal{M} \vDash_t A$. Desta forma, $\forall x \in S{:}\ sRx \Rightarrow (\ \exists t \in S{:}\ xRt\ \&\ \mathcal{M} \vDash_t A)$, ou seja, $\mathcal{M} \vDash_s \Box\Diamond A$.

$\therefore \quad R$ euclidiana $\Rightarrow \Diamond A \rightarrow\ \Box\Diamond A$.

8.6 Suponhamos que R é parcialmente funcional e que $\mathcal{M} \vDash_s \Diamond\ A$, ou seja, $\exists t \in S{:}\ sRt\ \&\ \mathcal{M} \vDash_t A$. Seja $u \in S$ tal que sRu. Por hipótese vem que t = u e obtemos que $\forall u \in S{:}\ sRu \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_u A$, ou seja, $\mathcal{M} \vDash_s \Box A$.

$\therefore \quad R$ parcialmente funcional $\Rightarrow \Diamond A \rightarrow \Box A$.

8.7 Suponhamos que R é funcional e que $\mathcal{M} \vDash_s \Box\ A$. Mas $\mathcal{M} \vDash_s \Box\ A \Leftrightarrow (\forall t \in S{:}\ sRt \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_t A) \Leftrightarrow (\exists t \in S{:}\ sRt \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_t A)$ (pois t é o único elemento que se relaciona com s) $\Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash_s \Diamond\ A$.

$\therefore \quad R$ funcional $\Rightarrow \Diamond A \leftrightarrow \Box A$.

8.8 Suponhamos que R é fracamente densa e que $\mathcal{M}\vDash_s \Box\ \Box\ A$, ou seja, $\forall x\in S: sRx \Rightarrow (\forall y\in S: xRy \Rightarrow \mathcal{M}\vDash_y A)$. Seja $z\in S$ tal que sRz. Pela hipótese $\exists u\in S$: sRu e uRz e assim $\mathcal{M}\vDash_z A$. Desta forma $\forall z\in S: sRz \Rightarrow \mathcal{M}\vDash_z A$, ou seja $\mathcal{M}\vDash_s \Box A$.

$\therefore$ R fracamente densa $\Rightarrow \Box\Box A\rightarrow \Box A$.

8.9 Suponhamos que $\mathcal{M}\nvDash_s [\Box (A \wedge \Box A\rightarrow B) \vee \Box (B\wedge \Box B\rightarrow A)]$, ou seja, $\mathcal{M}\nvDash_s \Box (A\wedge \Box A \rightarrow B)$ & $\mathcal{M}\nvDash_s \Box (B \wedge \Box B \rightarrow A)$. Desta forma temos que $\exists x\in S: sRx$ & $\mathcal{M}\vDash_x (A\wedge\Box A)\wedge\neg B)$ e $\exists y\in S: sRy$ & $\mathcal{M}\vDash_y (B \wedge \Box B) \wedge \neg A)$, o que significa que, $\exists x\in S: sRx$ & $[\mathcal{M}\vDash_x A$ e $\forall t\in S: xRt\ (\mathcal{M}\vDash_t A)$ e $\mathcal{M}\nvDash_x B)]$ e $\exists y\in S: sRy\ [\mathcal{M}\vDash_y B$ e $(\forall r\in S: yRr \Rightarrow \mathcal{M}\vDash_r B)$ e $\mathcal{M}\nvDash_y A)]$. Daqui $x \neq y$ pois $\mathcal{M}\nvDash_x B$ e $\mathcal{M}\vDash_y B$. Por outro lado, se xRy, então $\mathcal{M}\vDash_y A$, o que é absurdo, e se yRx, então $\mathcal{M}\vDash_x B$, o que também é absurdo. Assim $\exists s\in S, \exists x\in S, \exists y\in S: (sRx$ e $sRy)$, mas $x \neq y$ e $\neg xRy$ e $\neg yRx$, logo R não é fracamente conexa.

$\therefore$ R fracamente conexa $\Rightarrow \Box(A\wedge \Box A\rightarrow B) \vee \Box (B\wedge \Box B\rightarrow A)$.

8.10 Suponhamos que R é fracamente dirigida e que $\mathcal{M}\vDash_s \Diamond\Box A$, ou seja, que $\exists t\in S: sRt$ & $(\forall r\in S: tRr \Rightarrow \mathcal{M}\vDash_r A)$. Seja $x\in S$ tal que sRx. Como sRx e sRt então, por hipótese, $\exists v\in S: (xRv$ e $tRv)$. Como tRv temos $\mathcal{M}\vDash_v A$, isto é, $\forall x\in S: sRx \Rightarrow (\exists v\in S: xRv$ & $\mathcal{M}\vDash_v A)$. Desta forma obtemos $\mathcal{M}\vDash_s \Diamond\Box A \rightarrow \Box\Diamond A$.

$\therefore$ R fracamente dirigida $\Rightarrow \Diamond\Box A \rightarrow \Box\Diamond A$.

- Fórmulas modais $\Rightarrow$ Propriedades

8.1 Suponhamos que R não é reflexiva. Então $\exists s\in S$ tal que $\neg sRs$. Seja $\mathcal{M}$ um modelo tal que $\{t: \mathcal{M}\vDash_t A\}=\{t: sRt\}$. Assim, $(\forall t\in S: sRt \Rightarrow \mathcal{M}\vDash_t A)$ e $\mathcal{M}\nvDash_s A$ pois $\neg sRs$, logo $\mathcal{M}\vDash_s \Box A$ e $\mathcal{M}\nvDash_s A$.

$\therefore$ $\mathcal{M}\nvDash \Box A\rightarrow A$.

8.2 Suponhamos que R não é simétrica, ou seja, $\exists x \in S, \exists y \in S$ tal que xRy e $\neg yRx$. Seja $\mathcal{M}$ um modelo tal que $\{t: \mathcal{M} \vDash_t A\} = \{x\}$. Temos que $\mathcal{M} \vDash_x A$, mas como $\neg yRx$ vem que $\forall r \in S: yRr \Rightarrow \mathcal{M} \nvDash_r A$ e portanto $\neg[\forall t \in S: xRt \Rightarrow (\exists r \in S: tRr \;\&\; \mathcal{M} \vDash_r A)]$.

$$\therefore \quad \mathcal{M} \nvDash A \rightarrow \Box \Diamond A .$$

8.3 Suponhamos que R não é serial, ou seja, $\exists s \in S, \forall t \in S, \neg sRt$. Desta forma, $(\forall t \in S: sRt \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_t A)$ e $\mathcal{M} \nvDash_s \Diamond A$ pois não existe t: sRt.

$$\therefore \quad \mathcal{M} \nvDash \Box A \rightarrow \Diamond A.$$

8.4 Suponhamos que R não é transitiva:
$\exists x \in S, \exists y \in S, \exists z \in S: xRy \wedge yRz \wedge \neg xRz.$

Seja $\mathcal{M}$ um modelo tal que $\{t: \mathcal{M} \vDash_t A\} = \{t: xRt\}$. Assim $\forall t \in S: xRt \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_t A$, logo $\mathcal{M} \vDash_x \Box A$. Por outro lado temos que $\exists y \in S, \exists z \in S: xRy \wedge yRz \wedge \mathcal{M} \nvDash_z A$ pois $z \notin \{t: xRt\}$. Daqui $\neg[\forall t \in S: xRt \Rightarrow (\forall r \in S: tRr \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_r A)]$, ou seja, $\mathcal{M} \nvDash_x \Box \Box A$.

$$\therefore \quad \mathcal{M} \nvDash \Box A \rightarrow \Box \Box A.$$

8.5 Suponhamos que R não é euclideana:
$\exists s \in S, \exists t \in S, \exists u \in S: sRt \wedge sRu \wedge \neg tRu.$

Seja $\mathcal{M}$ um modelo tal que $\{t: \mathcal{M} \vDash_t A\} = \{u\}$. Assim $\exists u \in S: sRu \;\&\; \mathcal{M} \vDash_u A$, logo $\mathcal{M} \vDash_s \Diamond A$. Por outro lado $\exists t \in S: sRt \;\&\; (\forall y \in S: tRy \Rightarrow \mathcal{M} \nvDash_y A)$, pois $\neg tRu$. Desta forma $\mathcal{M} \vDash_s \Diamond A$ mas $\mathcal{M} \nvDash_s \Box \Diamond A$.

$$\therefore \quad \mathcal{M} \nvDash \Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A.$$

8.6 Suponhamos que R não é parcialmente funcional:
$\exists x \in S, \exists y \in S, \exists z \in S\ (xRy \wedge xRz \wedge y \neq z).$

Seja $\mathcal{M}$ um modelo onde $\{t: \mathcal{M} \vDash_t A\} = \{z\}$. Desta forma $\exists z \in S: xRz \;\&\; \mathcal{M} \vDash_z A$, logo $\mathcal{M} \vDash_x \Diamond A$. Mas $\exists y \in S: xRy \;\&\; \mathcal{M} \nvDash_y A$, pois $y \neq z$, logo $\neg[\forall t \in S: xRt \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_t A)]$, ou seja, $\mathcal{M} \nvDash_x \Box A$. $\quad \therefore \ \mathcal{M} \nvDash \Diamond A \rightarrow \Box A.$

8.7 Suponhamos que R não é funcional. Temos dois casos:

- Suponhamos que $\exists s \in S, \exists t \in S, \exists u \in S$ ($sRt \wedge sRu \wedge u \neq t$). Seja $\mathcal{M}$ um modelo tal que $\{t: \mathcal{M} \vDash_t A\} = \{u\}$.Sabemos que sRu e $\mathcal{M} \vDash_u A$, logo $\exists u \in S$: sRu & $\mathcal{M} \vDash_u A$ e assim $\mathcal{M} \vDash_s \Diamond A$. Por outro lado sRt e $\mathcal{M} \nvDash_t A$ pois $u \neq t$, logo $\neg[\forall x \in S: sRx \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_x A]$, portanto $\mathcal{M} \nvDash_s \Box A$. Desta forma $\mathcal{M} \nvDash \Diamond A \leftrightarrow \Box A$.

- Suponhamos que $\exists s \in S, \forall t \in S$ ($\neg sRt$). Assim $\neg$ ($\exists x \in S$: sRx & $\mathcal{M} \vDash_x A$), logo $\mathcal{M} \nvDash_s \Diamond A$. Mas $\forall x \in S$: $sRx \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_x A$ e assim $\mathcal{M} \vDash_s \Box A$. Daqui vem que $\mathcal{M} \nvDash \Diamond A \leftrightarrow \Box A$.

Das duas provas anteriores vem que se *R* não é funcional então $\mathcal{M} \nvDash \Diamond A \leftrightarrow \Box A$.

8.8 Suponhamos que *R* não é fracamente densa:
$\exists s \in S, \exists t \in S$ ($sRt \wedge \forall u \in S$ ($\neg sRu \vee \neg uRt$)).

Seja $\mathcal{M}$ um modelo tal que $\{t: \mathcal{M} \vDash_t A\} = \{u\}$. Suponhamos que $\mathcal{M} \vDash_s \Box \Box A$, ou seja, $\forall x \in S$: $sRx \Rightarrow$ ($\forall y \in S$: $xRy \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_y A$). Como sRt e $\mathcal{M} \nvDash_t A$ (pois sRt e $\neg sRu$), então $\mathcal{M} \nvDash_s \Box A$.

$$\therefore \quad \mathcal{M} \nvDash \Box\Box A \rightarrow \Box A.$$

8.9 Suponhamos que *R* não é fracamente conexa:
$\exists s \in S, \exists t \in S, \exists u \in S$ ($sRt \wedge sRu \wedge \neg tRu \wedge t \neq u \wedge \neg uRt$).

Seja $\mathcal{M}$ um modelo tal que $\{x: \mathcal{M} \vDash_x A\} = \{u\} \cup \{y: uRy\}$ e $\{x: \mathcal{M} \vDash_x B\} = \{t\} \cup \{y: tRy\}$. Como sRu e $\mathcal{M} \vDash_u A$ e ($\forall z \in S$: $uRz \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_z A$) e $\mathcal{M} \nvDash_u B$ temos que $\exists u \in S$: sRu & [$\mathcal{M} \vDash_u A$ e $\mathcal{M} \vDash_u \Box A$ e $\mathcal{M} \nvDash_u B$], ou seja, $\mathcal{M} \nvDash_s \Box (A \wedge \Box A \rightarrow B)$. Por outro lado $\exists t \in S$: sRt & [$\mathcal{M} \vDash_t B$ e ($\forall w \in S$: $tRw \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_w B$) e $\mathcal{M} \nvDash_t A$], ou seja, $\exists t \in S$: sRt & [$\mathcal{M} \vDash_t B \wedge \Box B$ e $\mathcal{M} \nvDash_t A$]. Assim $\mathcal{M} \nvDash_s \Box (B \wedge \Box B \rightarrow A)$ e portanto $\neg$ [$\mathcal{M} \vDash_s \Box (A \wedge \Box A \rightarrow B) \vee \mathcal{M} \vDash_s \Box (B \wedge \Box B \rightarrow A)$].

$$\therefore \quad \mathcal{M} \nvDash \Box (A \wedge \Box A \rightarrow B) \vee \Box (B \wedge \Box B \rightarrow A).$$

8.10 Suponhamos que R não é fracamente dirigida:

$\exists s \in S, \exists t \in S, \exists u \in S\ (sRt \wedge sRu \wedge \forall v \in S\ (\neg tRv \vee \neg uRv)$.

Seja $\mathcal{M}$ um modelo tal que $\{x: \mathcal{M} \vDash_x A\} = \{x: tRx\}$. Sabemos que sRt e $\forall y \in S: tRy \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_y A$, portanto $\mathcal{M} \vDash_s \Diamond\Box A$. Por outro lado sRu e $\forall x \in S: uRx \Rightarrow \mathcal{M} \nvDash_x A$, pois como $uRx \rightarrow \neg tRx$ e assim $\mathcal{M} \nvDash_x A$. Desta forma $\mathcal{M} \vDash_s \Diamond \Box A$ e $\mathcal{M} \nvDash_s \Box \Diamond A$.

$$\therefore \quad \mathcal{M} \nvDash \Diamond \Box A \rightarrow \Box \Diamond A.$$

Bibliografia:

- Goldblatt, Robert (1987): *Logics of time and computation*, Center for the Study of Language and Information, Leland Stanford Junior University;

- Hernandez-Manfredini, Enrique German (2006): *Apontamentos de Lógica e Fundamentos da Matemática*;

- Henriques, Ana Cristina Felizardo (2008): *Lógica Proposicional Modal*. (Monografia)