Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2009

Isabel Maria Nicolau Ranito

Optimização de Rotas de Veículos: um caso de estudo

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2009

Isabel Maria Nicolau Ranito

Optimização de Rotas de Veículos: um caso de estudo

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações, realizada sob a orientação científica da Profª Doutora Cristina Requejo, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

o júri

presidente

Professor Doutor Domingos Cardoso
professor catedrático da Universidade de Aveiro

vogais

Professora Doutora Maria Adelaide da Cruz Cerveira
professora auxiliar na Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Professora Doutora Cristina Requejo Agra
professora auxiliar da Universidade de Aveiro

Ao meu marido, Hugo, pelo apoio incondicional.

Aos meus pais, por tudo.

agradecimentos

Começo por agradecer à Prof. Doutora Cristina Requejo pela orientação prestada ao longo deste percurso sinuoso que foi a minha tese, e tão ou mais importante que a sua orientação, foram a sua compreensão, a sua ajuda e a sua disponibilidade, respondendo a muitos mails aos fins-de-semana, férias e horários pouco académicas.

Ao Dr. Paulo Tavares, pela sua generosidade e humanismo no exercício das suas funções como meu superior hierárquico. Desde o início me apoiou e compreendeu sempre as minhas ausências na empresa, facilitando-me, assim, a vida na realização desta tese e sem qualquer prejuízo profissional.

A todos os meus colegas que, de alguma forma, me apoiaram.

Ao meu marido, por todo o incentivo e incansável apoio, bem como pela compreensão com que encarou a minha falta de disponibilidade.

Aos meus pais, pelo apoio incondicional e pela paciência que sempre tiveram comigo sem nada pedirem em troca. A eles devo tudo o que sou, pois foram eles que sempre me incentivaram a continuar, mesmo quando eu própria duvidava.

palavras-chave Problema de rotas de veículos, rotas, optimização.

resumo

Nesta tese estudamos o problema da determinação de rotas de veículos, vehicle routing problem (VRP). Apresentamos um breve estudo do problema e efectuamos uma descrição de alguns dos problemas que são extensão deste.

Depois apresentamos modelos em programação linear inteira mista para o problema da optimização de rotas. Apresentamos dois modelos que consideram a distribuição de apenas um produto e dois modelos que consideram a existência de vários produtos para distribuir.

Efectuamos um estudo computacional do problema.

Finalmente apresentamos como caso de estudo o exemplo da optimização das rotas actualmente efectuadas por uma empresa onde a distribuição dos seus produtos representa uma parte importante dos seus custos. Analisamos os custos das rotas actualmente praticados e, usando os modelos em programação linear inteira mista apresentados, optimizamos essas rotas para as quais obtemos significativas melhorias.

keywords Vehicle routing problem, routing, optimization

abstract In this thesis we study the vehicle routing problem (VRP). We present a brief study of the vehicle routing problem and describe some of the problem extensions.
Then we present mixed integer linear programming models to the vehicle routing problem. We present two models that consider the distribution of a single product and two models that consider the distribution of several products. A computational study of the problem is done.
Finally, we present a case study for the optimization of the routes currently undertaken by a company where the distribution of its products represents an important part of their costs. We analyze the costs of the routes currently practiced and using the models in mixed integer linear programming presented we optimize those routes for which significant improvements are obtained.

Índice

Lista de figuras

Lista de tabelas

1. Introdução

Nesta tese vamos estudar o problema da determinação de rotas de veículos, vehicle routing problem (VRP). O estudo deste problema como caso de estudo nesta tese ocorre por se tratar de uma necessidade premente numa empresa onde os custos de transporte são uma parcela importante no custo final dos produtos. Actualmente o departamento de logística da empresa não tem qualquer critério fundamentado nem recorre a nenhuma tecnologia (software). As rotas são determinadas a papel e lápis com base na experiência e bom senso do responsável. São, por isso, notáveis as lacunas neste sector, tornando-se assim num aliciante desafio para um caso de estudo, em que o principal objectivo será a minimização dos custos de transporte.

Os problemas de optimização de rotas são um dos muitos problemas de optimização e poder-se-á considerar que o primeiro destes problemas a ser estudado foi o famoso problema do caixeiro-viajante (TSP - Travelling Salesman Problem). Este problema consiste em encontrar uma rota (sequência de pontos) a ser utilizada pelo caixeiro-viajante de forma a este percorrer a mínima distância assegurando contudo, que todos os pontos sejam visitados uma única vez. Este problema envolve a existência de apenas um veículo que efectua uma só rota visitando todos os pontos.

A este problema, podem-se acrescentar mais condicionantes. E para cada uma que surge, coloca-se um novo desafio. Uma das abordagens mais complexas considerada pelo VRP pode ser vista como um problema de vários caixeiros-viajantes. Todos os problemas de optimização de rotas são NP-difíceis, isto porque, à medida que um problema cresce na sua complexidade (número de clientes a visitar, por exemplo) o esforço computacional aumenta exponencialmente. Na prática significa que não é expectável encontrar uma solução óptima para estes problemas com muitas instâncias em tempo razoável. Perante esta realidade a obtenção de uma solução usando métodos exactos nem sempre é possível, pelo que, muitas vezes se recorre a métodos heurísticos/metaheurísticos, apesar de estes não conduzirem a soluções óptimas.

No mundo global, onde a concorrência é cada vez mais acérrima, as empresas tentam a todo o custo ser mais competitivas. Neste sentido aumentaram as preocupações com a racionalização dos custos, deixando de ser apenas, com as matérias-primas, salários e custos de produção e passaram a ser muito mais abrangentes, atingido sectores que até então eram subestimados em relação aos citados.

Toma-se consciência da necessidade de optimizar as rotas, não demorando a perceber que este tipo de problemas não é estático, e com o ritmo a que se assiste actualmente, este problema tem uma dinâmica assustadora, pois quase todas as condicionantes do problema estão em permanente mutação. Não se pense que são apenas fruto de decisões internas das empresas, pois há factores sociais, externos a esta, que também influenciam fortemente as restrições de um problema deste tipo.

No que diz respeito aos factores internos, poder-se-á pensar, por exemplo, em novas políticas de horários dos condutores (aumentando ou diminuindo o número de horas extraordinárias a que estes normalmente estão sujeitos) e/ou na aquisição de camiões (aumentando a disponibilidade da frota). Aliada a estes, há ainda a incessante procura de novos clientes e novos mercados, alterando assim constantemente os pontos de visita dos veículos. Ainda, no que respeita a clientes, também eles influenciam este problema com a crescente exigência nos prazos de entrega, imprimindo assim uma nova dinâmica à logística das empresas.

No atinente aos factores sociais, também estes evoluem a um ritmo avassalador, desde a legislação que pune o excesso de cargas dos camiões, ou a limitação de horas consecutivas na condução dos mesmos, até, ao aumento de tráfego e/ou surgimento/supressão de vias de comunicação.

Estes parâmetros, dependendo da empresa, podem envolver problemas com inúmeras variáveis e com grande exigência, quer por parte dos optimizadores na resolução do problema, quer dos recursos informáticos na execução do mesmo.

Na óptica da investigação operacional, o problema proposto existente na empresa encaixa-se no problema da determinação de rotas de veículos (VRP - Vehicle Routing Problem), que podemos definir genericamente como sendo o processo de encontrar rotas para um determinado número de veículos de uma frota, com o intuito de visitar um conjunto de pontos geograficamente dispersos (clientes) a fim de satisfazer os seus pedidos.

Nesta tese começa-se por fazer uma breve abordagem a alguns dos mais conhecidos problemas de rotas de veículos e às técnicas para os resolver, métodos exactos e heurísticos/metaheurísticos. Apresentam-se modelos em programação linear inteira mista que caracterizam o problema da optimização de rotas. Considera-se o caso em que apenas existe um produto para distribuir e apresentam-se também modelos em que se considera a distribuição de vários produtos. Usam-se exemplos pequenos e simples para avaliar melhor a potencialidade e as características dos modelos apresentados. Numa segunda fase, analisa-se um caso de estudo. Consideram-se as rotas actualmente realizadas pelos veículos da empresa na satisfação dos pedidos dos clientes e comparam-se com os resultados obtidos quando se aplicam os modelos estudados anteriormente. O principal objectivo desta tese é perceber se, na empresa considerada, os custos de transporte estão optimizados ou não. Caso não estejam, este estudo será a base, para uma reorganização da logística no sentido de reduzir os custos no sector logístico da empresa em questão.

2. Problemas de rotas de veículos (Vehicle routing problem – VRP)

A importância da logística é evidente quando se analisa o impacto dos respectivos custos no valor do produto final. Como tal, é muitas vezes necessário tomar decisões operacionais sobre o percurso das rotas de forma que o seu custo seja o mais económico possível. Existe portanto um grande número de situações práticas que dão origem aos problemas de rotas de veículos.

Christofides (1985) apresenta o problema básico de rotas de veículos, descrevendo-o como a essência de todos os problemas de rotas de transportes. O problema básico de rotas de veículos ignora um grande número e variedade de restrições vulgarmente encontradas em situações reais. Define também este problema como um problema de distribuição, em que os veículos estão localizados num depósito central (ou origem) e devem ser orientados para visitar os clientes que se encontram em pontos geograficamente distintos.

Segundo Laporte et al. (2000) o problema de rotas de veículos consiste em definir rotas de veículos que minimizem o custo das mesmas, iniciando-se e terminando cada uma delas no depósito, assegurando que cada cliente seja visitado exactamente uma vez e que os pedidos de qualquer rota não excedam a capacidade do veículo envolvido.

Os problemas de rotas de veículos, podem ser classificados, consoante as suas características, em diversas categorias e tipos.

2.1. Classificação dos problemas de rotas de veículos

O problema de rotas de veículos, na sua forma mais elementar, ignora um grande número de restrições que frequentemente se verificam na prática e que dão origem a diversas variantes do problema, dependendo das características a considerar. Como exemplos tem-se: o tipo de carga, o tipo de frota a utilizar, as limitações nos horários de carga e descarga, etc. Obtém-se, deste modo, um vasto conjunto de restrições para o problema, e até diferentes funções objectivo, que a seguir enumeramos.

Função Objectivo

- Minimizar os custos de transporte, sendo este um dos mais utilizados;
- Minimizar a distância percorrida;
- Minimizar o número de veículos envolvido na rota de distribuição**.**

No que respeita às restrições, elas podem ser referentes aos veículos, aos clientes ou mesmo às rotas. Apresentam-se de seguida algumas possibilidades para cada uma delas.

Restrições para os tipos de veículos

- Limite na capacidade dos veículos;
- Limitação do tipo de carga dos veículos;
- Número limitado de veículos disponíveis;
- Tipo de operação de carga e descarga, manual, com grua ou porta-paletes, por exemplo, algumas cargas exigem determinado tipo de veículo de forma a ser possível efectuar a descarga.

Restrições para os clientes

- Limite no horário de visita dos clientes o que origina a existência de janelas temporais para os clientes;
- Satisfação total ou parcial do pedido;
- Limite no tempo máximo permitido para cargas e descargas;
- Disponibilidade de estacionamento para o veículo;
- Restrições em determinados dias da semana para determinados pedidos.

Restrições para as rotas

- Hora de início e fim da rota;
- Tempo máximo de viagem de um veículo;
- Distância máxima percorrida;
- Tempos de paragem obrigatórios (não é permitido por lei, conduzir mais de x horas consecutivas);
- Existência de locais de paragem fixos;
- Cada veículo pode visitar um cliente uma única vez durante a rota;
- Um cliente pertence a uma única rota, ou então poderá pertencer a várias;
- Todos os clientes devem ou não ser visitados na rota.

A par destas restrições, há ainda outras características que condicionam o tipo de problema a ser estudado, como sejam:

Tipo de operação

- Só entregas;
- Só recolhas;
- Entregas e recolhas durante a mesma rota: um veículo realiza entregas e carregamentos nos diversos clientes que constituem o percurso;
- Entregas múltiplas: um cliente pode ser visitado por mais do que veículo. Os clientes podem fazer pedidos que ultrapassem a capacidade de um veículo, e como tal é necessário que um segundo veículo visite o cliente para completar a entrega da quantidade pedida.

Tipo de carga

- Transporte de um único produto ou de vários produtos;
- Entrega total ou parcial do pedido.

Tipo de frota

- Homogénea (composta por um único tipo de veículo, isto é, todos os veículos têm as mesmas características);
- Heterogénea (composta por veículos de diferentes tipos, ou seja, há veículos com características diferentes, sejam estes, a capacidade, as dimensões, etc.);
- Frota fixa ou variável;
- Frota centralizada apenas numa base ou em várias;
- Restrição do tipo de veículo a usar mediante o(s) produto(s) a transportar.

Depósito e localização de veículos

- Um único depósito;
- Vários depósitos, aos quais se encontram afectos diversos veículos que satisfaçam os pedidos dos clientes;
- Quantidade de produtos disponíveis na origem ser igual ou não à quantidade dos pedidos;
- Número de clientes a visitar;
- Vários produtos: os pedidos dos clientes podem envolver vários produtos, possivelmente com características diferentes (por exemplo, dimensão, peso, etc.) influenciando directamente as restrições de determinado veículo.

Requisitos do pessoal

- Duração de um dia de trabalho normal, ou opção com horas extraordinárias;
- Número fixo ou variável de motoristas;
- Horário fixo ou flexível para o início e fim de uma rota;
- Horários pré-estabelecidos para almoço;
- Descanso de condução, não pode exceder o número de horas de condução estabelecido por lei, ou em alternativa podem ser dois motoristas para cada veículo.

Apresentadas algumas possibilidades para várias restrições, percebem-se as dificuldades que poderão surgir aquando da formulação dos problemas de optimização de rotas. Como tal pretende-se agrupá-las de acordo com as respectivas características. Encontra-se na literatura uma caracterização interessante, considerada ainda hoje uma das mais importantes, a de Bodin et al. (1983), em que os problemas de rotas são classificados em três grupos distintos, a saber: problemas de rotas, problemas de programação de veículos e problemas combinados de rotas e programação de veículos, que se apresentam, de forma breve, de seguida.

2.1.1. Problemas de rotas

São problemas onde não há restrições temporais por parte do cliente (ou seja não há nenhum horário pré-estabelecido) nem restrições de precedência entre os clientes (ou seja nenhum cliente deve ser atendido antes ou depois de um outro cliente). Neste tipo de problema, as preocupações recaem apenas sobre restrições espaciais, isto é, de localização dos pontos a serem visitados, com o objectivo de encontrar rotas que visitem todos os pontos com o menor custo possível. É sobre este tipo de problemas que este estudo se foca. São muitos e muito conhecidos os exemplos desta categoria de problema, como, o problema do caixeiro-viajante, o problema de múltiplos caixeiros-viajantes, o problema de rotas de veículos, etc.

2.1.2. Problemas de programação de veículos

Neste tipo de problema são tidos em conta além dos aspectos espaciais do problema, também os aspectos temporais, como por exemplo, os horários estabelecidos nas actividades, tais como, horários de visita, de chegada e de partida, hora de abertura e/ou de encerramento do estabelecimento. Neste tipo de problema pretende-se definir uma rota onde a cada cliente está associada uma tarefa com início e duração predeterminada e a cada arco (percurso que une dois pontos quaisquer) pode ser associado um peso que corresponde ao intervalo de tempo mínimo entre uma tarefa e outra. Os veículos devem partir e chegar ao depósito. Deve dividir-se a rota em subrotas, cada uma correspondendo à programação de um veículo, de acordo com a função objectivo. Como exemplo, temos: o problema de programação de veículos com múltiplos depósitos, que será a extensão do problema de programação de veículos onde cada veículo deve partir de um dos depósitos existentes e chegar ao mesmo.

2.1.3. Problemas combinados de rotas e programação de veículos

Problemas combinados de rotas e programação de veículos têm em conta as restrições de precedência (a recolha deve preceder a entrega, por exemplo) de operações e/ou restrições temporais do cliente, as restrições de tempo – janelas temporais – (intervalo de tempo em que é desejável o serviço ser executado no cliente). Podem existir outras janelas temporais como, por exemplo, o intervalo de tempo em que um veículo fica disponível para os depósitos.

Em problemas combinados consideram-se tanto os aspectos espaciais como os temporais. Como exemplos temos: o problema do caixeiro-viajante com janelas temporais, que será a extensão do TSP onde cada cliente deve ser visitado na janela temporal especificada; o problema de rotas de veículos com janelas temporais, que será a extensão do VRP onde cada cliente deverá ser visitado no intervalo de tempo previamente determinado.

2.2. Problemas clássicos de rotas de veículos

Desde a década de 50 que os problemas de rotas de veículos são bastante estudados, em especial na área da Investigação Operacional. Devido à sua natureza, o uso de métodos exactos não é viável para instâncias com um número elevado de clientes.

Apresenta-se de seguida as principais características de alguns tipos de problemas de rotas de transportes e programação de veículos com base em alguma literatura sobre o assunto, como por exemplo: Laporte (2007), A. Moura (2004), A. Moura (2005), J. Tavares (2003) entre outros. De referir que, que há muito mais autores que escreveram sobre o assunto, no entanto, e apenas por falta de tempo, não foi possível estudar o trabalho que outros autores muito conhecidos desenvolveram neste domínio.

- **O Problema do caixeiro-viajante (Travelling Salesman Problem – TSP)**

Foi o primeiro problema de rotas a ser estudado, e é talvez o mais conhecido. P. Belfiore (2006) menciona que o problema consiste em encontrar uma única rota (sequência de pontos a visitar - clientes) para um caixeiro-viajante de forma que este visite todos os seus clientes uma única vez, ao menor custo possível. Como pressupostos tem-se apenas a existência de um único depósito e de um único veículo que deve sair e chegar à mesma base. Não se consideram restrições de capacidade. Apesar desta aparente simplicidade, o TSP é um problema NP-difícil, sendo por isso difícil, aplicar métodos exactos na procura de uma solução óptima. Como tal, o estudo de métodos heurísticos assume grande protagonismo na pesquisa de métodos que determinem soluções aproximadas, principalmente quando se trata de problemas que envolvem um grande número de clientes. Uma heurística muito conhecida para este problema é a do vizinho mais próximo, em que a rota se vai construindo sequencialmente a partir do depósito elegendo sempre o ponto (cliente) que se encontra mais próximo do actual para ponto (cliente) seguinte.

Novas restrições se têm incorporado ao simples problema do caixeiro-viajante, de forma a retratar realidades mais complexas e para as quais é necessário encontrar soluções. Assim, muitos dos problemas de rotas são definidos como problemas de múltiplos caixeiros-viajantes e incluem restrições adicionais de capacidade.

- **O Problema clássico de rotas de veículos (Vehicle Routing Problem - VRP)**

Segundo Laporte (2007) o VRP é NP-difícil porque contém o Problema do Caixeiro-Viajante (TSP), que é um caso especial deste com apenas um veículo. Como tal, um VRP é consideravelmente mais difícil de resolver que um TSP do mesmo tamanho. Laporte (2007) apresenta como exemplo, os TSPs envolvendo centenas e até milhares de vértices que podem ser resolvidos rotineiramente por algoritmos avançados de branch-and-cut-and-price, enquanto o algoritmo exacto mais sofisticado para o VRP apenas conseguem resolver instâncias até cerca de 100 clientes com uma taxa de sucesso variável.

A. Moura (2004) apresenta uma abordagem clássica à resolução do VRP que passa pela sua modelação como problema de caixeiro-viajante múltiplo (m-TSP), onde cada um dos veículos é um caixeiro-viajante que tem de visitar um determinado número de clientes com diferentes localizações geográficas e diferentes pedidos de entrega. A. Moura (2005) define o VRP da seguinte forma: considere-se um determinado número de clientes onde cada um coloca uma determinada encomenda a um armazém. As encomendas são entregues por uma frota de veículos homogéneos. Cada veículo inicia o seu percurso no armazém, entrega as encomendas a um subgrupo de clientes e retorna ao mesmo armazém descrevendo uma rota. Cada uma das rotas, deve satisfazer um determinado número de restrições, por exemplo, a quantidade de encomendas entregues não deve exceder a capacidade do veículo. A autora considera que a resolução do VRP se traduz fundamentalmente na decisão sobre quais os clientes que o veículo deve visitar e por que ordem, de forma que todos os pedidos sejam satisfeitos, sem violação de restrições, e optimizando os objectivos. Existem três objectivos que são frequentemente considerados: minimização do número de veículos, minimização da distância total percorrida por todos os veículos, e minimização do tempo total das rotas. Existem abordagens que usam uma destas funções e outras combinam duas delas ou mesmo as três.

- **Problema clássico de rotas de veículos com capacidade (Capacitated Vehicle Routing Problem - CVRP)**

J. Tavares et al. consideram a versão mais geral do VRP, o problema de rotas de veículos com capacidade (CVRP), que pode ser formalmente descrito do seguinte modo: há um depósito central, 0, que usa k veículos de entrega independentes com capacidade de entrega idêntica, C, para os pedidos d_i de n clientes, com $i = 1..n$. Os veículos têm de fazer a distribuição dos produtos percorrendo a mínima distância possível, onde o custo, C_{ij}, é a distância do cliente i ao cliente j, com $i, j \in \{1, .., n\}$. A distância entre os clientes é simétrica, isto é, $C_{ij} = C_{ij}$ e também $C_{ij} = 0$. A solução para o CVRP será uma partição $\{R_1, .., R_q\}$ de n pedidos em k rotas, cada rota R_q satisfazendo

$$\sum_{p \in R_q} d_q \leq C$$

Cada um dos veículos inicia e termina a rota no mesmo ponto de partida (depósito ou origem) garantindo que todos os clientes (ou entrepostos comerciais), situados em pontos geograficamente distintos, sejam visitados exactamente uma vez.

O CVRP é um problema NP-difícil, devido à sua complexidade computacional e, como tal, os métodos exactos são inviáveis para um número considerável de instâncias, o que nos remete à utilização de métodos heurísticos/metaheurísticos. Existem muitos algoritmos para resolver o CVRP. Nos último anos ganharam importância os algoritmos baseados em métodos metaheurísticos uma vez que estes apresentam resultados de melhor qualidade.

- **Problema de rotas de veículos com múltiplos depósitos (Multiple Depot Vehicle Routing Problem – MDVRP)**

J. Tavares (2003) define este problema como sendo uma generalização do problema clássico de rotas de veículos com a introdução de vários depósitos aos quais se encontram afectos os diversos veículos que satisfazem os pedidos dos clientes. Os veículos devem sair e chegar a um dos depósitos, de entre os envolvidos no problema. As soluções básicas do MDVRP procuram distribuir os veículos pelos depósitos, associando cada veículo ao depósito que se encontra mais próximo.

- **Problema de rotas de veículos com pedidos nos arcos (Capacitated Arc Routing Problem – CARP)**

O problema de rotas de veículos com pedidos nos arcos, conforme Vianna e Gomes (2006), consiste em visitar um subconjunto de arestas do grafo que descreve o problema atendendo aos seus pedidos. Este problema apresenta uma variação do problema, clássico de rotas de transporte, na qual os clientes estão localizados em arcos em vez de nodos. Ao contrário do VRP, em que os nodos possuem os pedidos a serem atendidos, o CARP segundo Viana e Gomes (2006), consiste na visita a um subconjunto de arestas. Como possível aplicação para este problema tem-se por exemplo, a recolha do lixo. Na literatura, o CARP básico utiliza redes não direccionadas. Cada aresta modela uma rua de dois sentidos em que ambos os lados são tratados em paralelo e em qualquer direcção. Uma frota de veículos idênticos de capacidade limitada tem como base um depósito. Algumas arestas possuem um pedido (por exemplo a quantidade de lixo a recolher) diferente de zero. O CARP consiste em determinar um conjunto de rotas dos veículos com o mínimo custo possível. Cada uma das viagens deve começar e terminar no depósito. Em cada aresta o veículo faz uma única viagem. O total do pedido por rota não pode ultrapassar a capacidade do veículo. O CARP é um problema NP-difícil, mesmo quando envolve apenas um veículo.

- **Problema de rotas de veículos com entregas fraccionadas (Vehicle Routing Problem with Split Deliveries – VRPSD)**

Este problema foi introduzido na Literatura por Dror e Trudeau (1989) e é uma variação do problema clássico de rotas de veículos, em que a entrega a cada cliente pode ser feita por mais do que um veículo, e o pedido de cada cliente pode ser maior que a capacidade do veículo. Todos os problemas de rotas com entregas fraccionadas encontrados na literatura têm como característica comum, o facto, da frota ser homogénea. Dror e Trudeau (1989) apresentaram uma formulação matemática do problema e analisaram o que se podia economizar se o cliente fosse visitado por mais do que um veículo. Segundo estes autores o VRPSD é uma relaxação do problema clássico de rotas de veículos, continuando a ser um problema NP-difícil.

- **Problema de dimensionamento de rotas de uma frota homogénea de veículos (Fleet Size and Vehicles Routing Problem - FSVRP)**

Segundo P. Belfiore (2006), neste tipo de problema deve determinar-se o número de veículos necessários (frota ilimitada), assim como a rota de cada um deles com o intuito de minimizar os custos fixos do veículo e os custos variáveis da rota (em função da distância), garantindo a satisfação de todos os pedidos dos clientes. Neste problema, a frota de veículos é homogénea, e como tal, a capacidade e os custos dos veículos são idênticos.

- **Problema de rotas de veículos com frota heterogénea fixa (Heterogeneous Fixed Fleet Vehicle Routing Problem- HFFVRP)**

P. Belfiore (2006) define o HFFVRP ou, simplesmente, problema de rotas de veículos com frota heterogénea como sendo uma variante do problema clássico de rotas, em que em vez de a rota ser homogénea é heterogénea. Neste problema o número de veículos de cada tipo é limitado (fixo). A heterogeneidade da frota aumenta consideravelmente a complexidade do problema, pois é necessário decidir quais os tipos de veículos a ser utilizados e a capacidade de cada um deles. Em alguns problemas pode haver limitações quanto ao número de veículos disponível de cada tipo. O objectivo é minimizar a soma dos custos fixos e variáveis que podem ou não depender das características de cada veículo.

- **Problema de dimensionamento de rotas de uma frota de veículos heterógenea (Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem- FSMVRP)**

Segundo P. Belfiore (2006) este problema é uma generalização do FSVRP, no entanto, difere no tipo de frota de veículos que, neste caso, é heterogénea. O FSMVRP é também uma variação do problema anterior, onde em vez de limitada, a frota de veículos é ilimitada. A autora refere que o problema consiste em determinar, além das rotas e da configuração ideal dos veículos em termos de tamanho, a composição da frota, com o objectivo de minimizar a soma dos custos fixos e variáveis que podem ser dependentes ou não do tipo de veículos.

- **Problema de rotas de veículos com tempo dependente (Time Dependent Vehicle Routing Problem – TDVRP)**

P. Belfiore (2006) define este problema como sendo uma variação do problema clássico de rotas de veículos, em que o tempo entre dois pontos (quer seja entre dois clientes ou entre um depósito e um cliente) depende não só da distância entre eles, como da hora do dia a que o percurso se realiza. Neste tipo de problema, o objectivo é minimizar o tempo para a realização do percurso.

- **Problema de rotas de veículos com janelas temporais (Vehicle Routing Problem with Time Windows – VRPTW)**

Segundo J. Tavares (2003), o problema de rotas para veículos com janelas temporais é uma das mais importantes extensões do VRP com a adição, à definição original, de restrições temporais. Segundo A. Moura (2005) em contextos reais de distribuição existe um conjunto adicional de restrições relacionado com a limitação temporal das visitas aos clientes, denominadas por janelas temporais. No VRPTW os clientes têm de ser visitados dentro de um determinado período de tempo, que se denomina por, janela temporal. Podem existir várias janelas temporais para cada cliente, denominando-se janelas temporais múltiplas, e indicando os períodos de tempo em que os clientes podem ser visitados pelos veículos.

A. Moura (2005) considera dois tipos diferentes de janelas temporais: “soft”, que permite que o veículo inicie o serviço no cliente antes ou depois do inicio ou fim da janela temporal respectivamente, sendo por isso atribuído um custo adicional pela violação da janela temporal, e “hard” em que o veículo pode chegar ao cliente antes do início da janela temporal, mas terá de esperar pelo seu início para prestar o serviço. Não é permitido que um veículo chegue ao cliente depois do fim da sua janela temporal.

Na tabela seguinte e, em jeito de resumo, apresentam-se as principais características dos problemas de rotas abordados, de forma a mais facilmente se perceber as principais diferenças entre eles. No entanto é de salientar que é possível existirem outras variantes dos problemas.

Na tabela apenas são apresentadas as siglas dos problemas, como tal apresenta-se de seguida o seu significado.

- **TSP** - Travelling Salesman Problem – Problema Caixeiro-Viajante
- **VRP** - Vehicle Routing Problem – Problema de Rotas de Veículos (PRV)
- **CVRP** - Capacitated Vehicle Routing Problem – Problema de Rotas de Veículos com Capacidade (PRVC)
- **MDVRP** - Multiple Depot VRP – PRV com Múltiplos Depósitos
- **CARP** - Capacitated Arc Routing Problem – PRV com Pedidos nos Arcos
- **VRPSD** - VRP with Split Deliveries – PRV com Entregas Fraccionadas
- **FSVRP** - Fleet Size and VRP – PRV de uma Frota Homogénea de Veículos
- **HFFVRP** - Heterogeneous Fixed Fleet VRP – PRV com frota heterogénea fixa
- **FSMVRP** - Fleet Size and Mix VRP – PRV de uma Frota de Veículos Heterogénea
- **TDVRP** - Time Dependent VRP – PRV com Tempo Dependente
- **VRPTW** – VRP with Time Windows – PRV com Janelas Temporais

	Nº de rotas	Localização dos clientes	Nº de depósitos	Restrições	Nº de entregas	Variáveis de decisão	Tipo de frota
TSP	1	**Nodos**	**1**	-	**1**	Rotas de entrega	1 veículo
VRP	várias	**Nodos**	1	Capacidade veículo	1	Rotas de entrega	homogénea
CVRP	várias	**Nodos**	1	Capacidade veículo	1	Rotas de entrega	homogénea
MDVRP	várias	**Nodos**	vários	Capacidade veículo	1	Rotas de entrega	homogénea
CARP	várias	arcos	1	Capacidade veículo	1	Rotas de entrega	homogénea
VRPSD	várias	**Nodos**	1	Capacidade veículo	1 ou mais	Rotas de entrega / quantidade entregue ao cliente	homogénea
FSVRP	várias	**Nodos**	1	Capacidade veículo	1	Rotas de entrega / dimensão frota	homogénea
HFFVRP	várias	**Nodos**	1	Capacidade veículo	1	Rotas de entrega	heterogénea
FSMVRP	várias	**Nodos**	1	Capacidade veículo	1	Rotas de entrega / dimensão e composição frota	heterogénea
TDVRP	várias	**Nodos**	1	Capacidade veículo / tempo dependente	1	Rotas de entrega	homogénea
VRPTW	várias	**Nodos**	1	Capacidade veículo / janela temporal	1	Rotas de entrega	homogénea

Tabela 1 – Quadro resumo das características dos principais problemas de rotas**.**

2.3. Métodos de Resolução para os Problemas de Rotas de Veículos

Nesta secção apresentam-se alguns dos métodos mais usados na resolução destes problemas.

Métodos Exactos

Como já se referiu todos os problemas de optimização de rotas de veículos são NP-difíceis. Apesar dos métodos exactos garantirem uma solução óptima para este tipo de problema, eles são aplicáveis apenas a um pequeno número de problemas de rotas, quer pelo tempo que demoram a executar, quer pelo esforço computacional que exigem.

Christofides et al. (1981) implementaram algoritmos exactos para o VRP com frota homogénea, baseando-se na relaxação Lagrangeana e programação dinâmica relaxada dos problemas de árvore de cobertura e do caminho mínimo. O objectivo do modelo era determinar rotas de entrega de forma a minimizar a distância total percorrida. Os autores concluíram que, algoritmo que construíram apenas conseguia encontrar uma solução óptima para problemas com até 25 instâncias (clientes).

Achuthan et al. (2003) desenvolveram novos algoritmos de plano de corte, que foram implementados num algoritmo de branch-and-cut, para resolver um problema de rotas de veículos. O problema considerava a frota homogénea com número fixo e variável de veículos e restrições de capacidade dos veículos. O Objectivo do modelo era minimizar a distância total percorrida. O método foi aplicado na resolução de problemas envolvendo entre 15 e 100 clientes, e segundo os autores, obtiveram resultados significativos.

Assim nos últimos anos, os investigadores centraram os seus estudos nos métodos heurísticos e metaheurísticos.

Métodos heurísticos

Os métodos heurísticos não garantem a obtenção de uma solução óptima, mas determinam uma solução admissível de grande qualidade, quase óptima, com um menor esforço computacional.

Muitos autores consideram que existem dois tipos de heurísticas: as **construtivas**, onde se alcança uma solução admissível e as de **melhoramento**, onde se melhora uma solução inicial. Há quem considere ainda a possibilidade de uma heurística composta como sendo uma heurística que incorpore uma fase construtiva e uma fase de melhoramento. Uma heurística de construção de rotas, basicamente, selecciona clientes até que seja criada uma solução admissível. Os clientes são escolhidos com base num critério de minimização de custos de forma a serem respeitadas as restrições inerentes ao problema, que podem ser, por exemplo, restrições de capacidade do veículo e/ou janelas temporais, e/ou outras. As heurísticas de melhoramento, como o próprio nome indica, visam melhorar uma solução de um problema através da exploração de vizinhanças. Muitas das heurísticas publicadas usam uma abordagem composta, uma vez que começam por utilizar uma heurística construtiva para gerar soluções iniciais admissíveis, e de seguida é aplicada à solução inicial uma heurística de melhoramento iterativa.

Um dos algoritmos heurísticos clássicos para resolver o CVRP foi proposto por Clarke e Wright em 1964, que deram nome ao algoritmo Clarke and Wright, e que permite incorporar diversos tipos de restrições. Esta heurística tem sido muito utilizada e tem apresentado óptimos resultados nos problemas de rotas de transporte, pois com ele conseguem-se encontrar soluções muito próximas da óptima.

Métodos metaheurísticos

Estes métodos são procedimentos matemáticos e computacionais inspirados em outras ciências como a Física e a Biologia.

As metaheurísticas, em A. Moura (2005), são heurísticas de pesquisa num espaço de soluções que se dividem em duas classes distintas. Na primeira, os métodos analisam em cada iteração uma vizinhança, sendo esta alterada de acordo com determinados pressupostos. Assim se escolhe, apenas um elemento dessa vizinhança e se alcança um conjunto de soluções. Este caminho surge da transição de uma solução para a outra de acordo com os movimentos permitidos pela metaheurística. Como exemplos temos a Pesquisa Tabu e o Arrefecimento Simulado. Na segunda classe metaheurística é analisada a população de soluções em cada iteração e, como tal, esta pesquisa consegue explorar várias regiões do conjunto de soluções de cada vez. Neste caso não se constrói um caminho único de pesquisa, visto que as novas soluções são conseguidas através de combinações de soluções anteriores. Como exemplo temos os Algoritmos Genéticos.

3. O Problema de rotas de veículos com capacidade (Capacitated Vehicle Routing Problema - CVRP)

Este problema merece-nos especial atenção por ser o tipo de problema que se aplica ao nosso caso de estudo.

O problema de rotas de veículos com capacidade é o problema de conceber, para uma frota de m veículos idênticos (frota homogénea), com a mesma capacidade Q, localizados no depósito (também designado como a origem ou central), várias rotas possíveis a fim de abastecer um conjunto de n clientes. Como restrições básicas para este problema tem-se:

- Cada cliente é visitado uma única vez por um único veículo.
- O total dos pedidos a satisfazer por veículo não pode exceder a sua capacidade.
- Cada percurso tem início e fim no depósito.

O objectivo deste problema é encontrar o conjunto de rotas de distância mínima para a satisfação dos pedidos dos clientes. Parte-se do princípio que é conhecida a matriz simétrica das distâncias correspondente à menor distância entre cada par de clientes e o depósito. A distância da rota calcula-se como sendo a soma das distâncias dos arcos que a formam.

O CVRP é NP-difícil uma vez que tem o problema do caixeiro-viajante, que é NP-difícil, como subproblema. Naturalmente que o CVRP é muito mais difícil de ser resolvido que o TSP, pois envolve mais restrições.

Neste capítulo apresentam-se os modelos que construímos, em programação linear inteira mista, para este problema e usam-se para resolver exemplos pequenos e simples a fim de se perceber o seu desempenho, uma vez que eles serão a base para o caso que se pretende estudar. Considera-se primeiro a existência de apenas um produto e depois fazendo uma extensão, considera-se também a existência de vários produtos a transportar.

3.1. Modelos para um só produto

Considerando-se um grafo $G = (V, A)$, em que $V = \{0,1, .. , n\}$ é o conjunto de vértices, em que 0 representa o depósito, os restantes vértices representam os clientes, e $A = \{(i, j): i, j \in V , i \neq j\}$ representa o conjunto de arcos que une todos os clientes entre si e ao depósito. A cada arco $(i, j), com\ i \neq j$ está associado o valor não negativo, c_{ij} , que pode representar o custo e/ou distância ou o tempo de deslocação, ou mesmo outras medidas entre os vértices, dependendo naturalmente, dos objectivos do estudo. A cada cliente $0, 1, .. , n \in V$ está associado o pedido $q_i > 0$ com a condição $q_i \leq Q$ para todos $i \in \{1, .. , n\}$. Considera-se que o depósito tem determinada quantidade de produtos disponíveis para serem entregues aos clientes, que se designa simplesmente por disponibilidade. Dispõe-se também de um conjunto de m veículos idênticos, cada um com capacidade Q.

Pretende-se definir as rotas (circuitos simples) de, neste caso, distância mínima correspondentes a cada veículo de modo que:

- Cada cliente seja visitado por uma única rota;
- Cada veículo inicia e termina a sua rota no depósito;
- A quantidade transportada para cada um dos veículos em cada rota não pode exceder a capacidade Q do veículo.

Definição das variáveis:

n número de clientes

V={1..*n*} clientes

D={0} depósito

V_0={0..*n*} clientes + depósito

m número de veículos disponíveis

M={1..*m*} veículos

Q Capacidade dos veículos (pressupõe-se uma frota homogénea)

$C = [c_{ij}]_{i,j \in V_0}$ – Matriz de distâncias entre a localização i e a localização j.

$A = [a_i]_{i \in V_0}$ – Vector com a disponibilidade de todos os nodos (clientes e depósito).

$B = [b_j]_{j \in V_0}$ –Vector com os pedidos de todos os nodos (clientes e depósito, considerando-se que este não tem pedidos, ou seja, é zero). Apresenta-se uma primeira formulação do problema. Consideram-se as variáveis binárias x_{ij} para todo $(i, j) \in A$ que indicam se o arco (i, j) está ou não numa das rotas dos veículos.

Declaração das variáveis:

Variáveis binárias

- $x_{ij} \in \{0,1\}\ para\ todo\ (i, j) \in A$, indica se o arco (i, j) é utilizado por algum dos veículos.

Variáveis contínuas, não negativas

- $y_{ij} \geq 0\ para\ todo\ (i, j) \in A\ com\ i \neq j$ indica a quantidade transportada por um veículo entre o cliente i e o cliente j.

Apresenta-se de seguida a formulação do problema, e à frente de cada condição, o número de restrições que ela representa para o caso geral e, para a concretização deste modelo.

Modelo 1

$$\min \sum_{\substack{i,j\in V_0 \\ i\neq j}} c_{ij}x_{ij} \qquad \mathbf{(1)}$$

s.a.

$$\sum_{j\in V} x_{ij} \leq m \;\; , i \in D \qquad |D| \to 1 \qquad \mathbf{(2)}$$

$$\sum_{\substack{i\in V_0 \\ i\neq j}} x_{ij} = 1 \;\; , j \in V \qquad |V| \to n \qquad \mathbf{(3)}$$

$$\sum_{\substack{i\in V_0 \\ i\neq j}} x_{ji} = 1 \;\; , j \in V \qquad |V| \to n \qquad \mathbf{(4)}$$

$$y_{ij} \leq Qx_{ij} \;\; , i,j \in V_0, i \neq j \qquad |A| \to \frac{n(n+1)}{2} \qquad \mathbf{(5)}$$

$$a_j + \sum_{\substack{i\in V_0 \\ i\neq j}} y_{ij} = \sum_{\substack{i\in V_0 \\ i\neq j}} y_{ji} + b_j \;\; , j \in V \qquad |V| \to n \qquad \mathbf{(6)}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad , (i,j) \in A \qquad \mathbf{(7)}$$

$$y_{ij} \geq 0 \quad , (i,j) \in A \qquad \mathbf{(8)}$$

A expressão (1) representa a função objectivo e consiste na soma das distâncias entre o cliente i e o cliente j . A condição (2) limita o número máximo de rotas de veículos (com inicio no depósito) utilizadas, ao número de veículos disponíveis em cada depósito. O número de restrições desta condição é $|D|$, ou seja, neste caso corresponde a uma restrição. As expressões (3) e (4) indicam que cada cliente deve ser visitado apenas por um veículo, a (3) determina que a cada cliente chega um veículo e a (4) que de cada cliente sai um veículo. A cada uma destas condições correspondem $|V|$ restrições, que é igual a n . A condição (5) é uma restrição de capacidade que limita a quantidade transportada por cada veículo em cada percurso (entre o cliente i e o cliente j), e em que o número de restrições é dado por $|A|$, que neste caso corresponde a $\frac{n(n+1)}{2}$ restrições. Relativamente à condição (6) garante que todos os pedidos são satisfeitos, representando $|V|$ restrições, ou seja, n para este modelo em concreto. Finalmente as expressões (7) e (8) definem os valores das variáveis. O número de restrições do modelo será o somatório das restrições de cada uma das condições, ou seja, o modelo contém $1 + 3n + \frac{n(n+1)}{2}$ restrições e $n(n + 1)$ variáveis, em que n é o número de clientes.

Com este modelo, apenas se obtém informação acerca da quantidade transportada entre cada cliente não obtendo a informação do veículo que a transporta. Esta informação apesar de importante, pode ser insuficiente para uma fácil e rápida construção da solução. Quando se tem apenas um veículo a informação que este modelo nos fornece é suficiente, não obstante, quando se tem uma frota com vários veículos esta informação torna-se insuficiente, uma vez que, não se consegue saber que veículo vai a cada cliente, ou seja, é necessário traçar as rotas completas dos veículos, e assim saber que veículo visita que clientes.

Apresenta-se agora um segundo modelo que nos dá mais informação relativamente ao anterior. Além da quantidade transportada entre dois clientes, indica-nos qual o veículo que a transporta. Quando estão envolvidos vários veículos, será muito mais fácil neste caso identificar na solução o veículo que visita determinado cliente, sem ser necessário construir todas as rotas desde início.

Declaração das variáveis:

Variáveis binárias

- $x_{ij}^{k} \in \{0,1\}$, $para\ todo\ (i,j) \in A$ e $k \in M$, indica se o veículo *k*, passa ou não no arco (i,j).

Variáveis contínuas, não negativas

- $y_{ij}^{k} \geq 0 \quad para\ todo\ (i,j) \in A\ ,\ com\ i \neq j\ e\ \ k \in M$ indica a quantidade transportada pelo veículo k, entre o cliente i e o cliente j.

A formulação do problema tem a seguinte forma:

Modelo 2

$$\min \sum_{k\in M} \sum_{\substack{i,j\in V_0 \\ i\neq j}} c_{ij} x_{ij}^{k} \qquad (\mathbf{1})$$

s.a.

$$\sum_{j\in V} x_{ij}^{k} \leq m \ \ ,i \in D, k \in M \qquad |D| \times |M| \rightarrow m \qquad (\mathbf{2})$$

$$\sum_{\substack{i\in V_0 \\ i\neq j, k\in M}} x_{ij}^{k} = 1 \ \ ,j \in V \qquad |V| \rightarrow n \qquad (\mathbf{3})$$

$$\sum_{\substack{i\in V_0 \\ i\neq j}} x_{ij}^{k} = \sum_{\substack{i\in V_0 \\ i\neq j}} x_{ji}^{k} \quad ,j \in V_0 \ \ ,k \in M \qquad |V_0| \times |M| \rightarrow (n+1)m \qquad (\mathbf{4})$$

$$y_{ij}^{k} \leq Q x_{ij}^{k} \quad ,i,j \in V_0 \ ,i \neq j \ ,k \in M \qquad |A| \times |M| \rightarrow \frac{(n+1)n}{2} m \qquad (\mathbf{5})$$

$$a_j + \sum_{\substack{i\in V_0 \\ i\neq j, k\in M}} y_{ij}^{k} = \sum_{\substack{i\in V_0 \\ i\neq j, k\in M}} y_{ji}^{k} + b_j \ \ ,j \in V \qquad |V| \rightarrow n \qquad (\mathbf{6})$$

$$x_{ij}^{k} \in \{0,1\} \qquad ,(i,j) \in A \qquad (\mathbf{7})$$

$$y_{ij}^{k} \geq 0 \qquad ,(i,j) \in A \qquad (\mathbf{8})$$

A expressão (1) representa a função objectivo e consiste na soma das distâncias entre o cliente i e o cliente j. A condição (2) limita o número máximo de rotas de veículos utilizados, a iniciar num depósito, ao número de veículos em cada depósito. O número de restrições desta condição é $|D| \times |M|$, que nas condições deste modelo corresponde a m restrições. As expressões (3) e (4) indicam que cada cliente deve ser visitado apenas por um veículo, a (3) determina que cada cliente é visitado apenas por um veículo e representa $|V| = n$ restrições, e a (4) que a cada veículo que entra num cliente também sai, representando $|V_0| \times |M| = n(n+1)$ restrições. No que respeita à condição (5) limita a quantidade transportada por cada veículo e envolve $|A| \times |M|$ restrições. Relativamente à restrição (6) garante que todos os pedidos são satisfeitos, representando $|V| = n$ restrições. Finalmente as restrições (7) e (8) definem os valores das variáveis.

Este modelo apresenta-se com $(n+1)n.m$ variáveis, e com $2n + (n+2)m + \frac{(n+1)n}{2}m$ (somatório das restrições de cada uma das condições do modelo) restrições, em que m é o número de veículos e n o número de clientes.

Prossegue-se agora o estudo com a realização de testes a estes dois modelos. Nesta fase os dados, são exemplos meramente académicos, para comparar a prestação destes modelos resolvidos com a ajuda do software – XPRESS MP2008A.Student Edition

Os resultados são apresentados nas Tabelas 2, 3 e 4 . Na primeira linha destas tabelas encontramos a descrição dos valores colocados nas colunas correspondentes em cada linha para cada conjunto de dados. O primeiro destes valores corresponde ao número de clientes, o segundo ao número de veículos, o terceiro destes valores ao número de produtos o quarto ao valor da função objectivo, o quinto e sexto ao número de variáveis e restrições, respectivamente e o último ao tempo computacional, em segundos, usado na obtenção do valor óptimo do problema. Nas quatro linhas seguintes encontram-se os resultados obtidos com o Modelo 1 e nas últimas quatro linhas os resultados obtidos com o Modelo 2. Nestes grupos de quatro linhas, as duas primeiras referem-se a resultados em que a quantidade de pedidos do produto é igual à quantidade disponível e diferem no número de veículos usados; as duas últimas linhas referem-se aos resultados em que a quantidade de produto disponível é superior à quantidade de produto pedido diferindo o número de veículos disponíveis a utilizar.

Assume-se para todos os testes aqui considerados que, a capacidade dos veículos é de 15 000 kg.

Iniciam-se os testes com um exemplo simples (Exemplo 1), no qual se consideram apenas 6 clientes a visitar, sendo o número de veículos disponíveis variável, 2 e 3 veículos disponíveis, com intuito de perceber se há ou não grandes diferenças no desempenho dos Modelos. Segue-se o mesmo raciocínio para as disponibilidades, testando quando as disponibilidades são iguais aos pedidos e quando são superiores.

Neste primeiro exemplo pretende verificar-se o que acontece quando apenas são disponibilizados os veículos necessários à quantidade de produtos a distribuir e quando são disponibilizados mais veículos do que os absolutamente necessários para o efeito. Depois verifica-se o que acontece quando a disponibilidade do produto é exactamente igual à soma dos pedidos dos clientes, e o que acontece quando a disponibilidade é superior.

		Nº Clientes	**Nº de veículos**	**Nº de produtos**	**Valor**	**Nº Variáveis**	**Nº Restrições**	**Tempo de execução**
Modelo 1	$\sum a_i = \sum b_i$	0+6	2	1	113	42	40	0.3
	$\sum a_i = \sum b_i$	0+6	3	1	113	42	40	0.3
	$\sum a_i > \sum b_i$	0+6	2	1	113	42	40	0.281
	$\sum a_i > \sum b_i$	0+6	3	1	113	42	40	0.28
Modelo 2	$\sum a_i = \sum b_i$	0+6	2	1	113	84	70	0.741
	$\sum a_i = \sum b_i$	0+6	3	1	113	126	99	2.653
	$\sum a_i > \sum b_i$	0+6	2	1	113	84	70	0.671
	$\sum a_i > \sum b_i$	0+6	3	1	113	126	99	2.573

Tabela 2 – Rotas para satisfazer 6 clientes, sendo necessários, pelo menos, 2 veículos.

A primeira conclusão que se pode retirar dos resultados obtidos é a de que o valor da função objectivo é igual em todos os casos, e a solução é sempre a mesma. O Modelo 2 demora sempre mais tempo a ser executado, o que facilmente se explica pela quantidade de restrições e variáveis que envolve comparativamente com o Modelo 1, como se pode confirmar pela tabela 2. Note-se ainda que, sempre que as disponibilidades são superiores aos pedidos, o tempo de execução é menor relativamente à situação de igualdade entre as disponibilidades e os pedidos.

Relativamente ao número de veículos disponíveis, o Modelo 1 demora o mesmo tempo quer tenha dois veículos, os absolutamente necessários para a distribuição dos pedidos, quer tenha três, caso em que um pode continuar disponível. O mesmo não acontece no Modelo 2 que, ao aumentarmos o número de veículos disponíveis (de dois para três), o tempo de execução aumenta substancialmente, o que já era esperado, uma vez que o número de variáveis e restrições depende do número de veículos envolvidos. Note-se ainda que, ambos os modelos utilizam apenas dois veículos, ficando o terceiro disponível.

Este primeiro exemplo é bastante pequeno, envolve poucos clientes e poucos veículos. Interessa agora saber como se comportam estes modelos em situações um pouco mais complexas. Com o intuito de perceber, o que "embaraça" mais o desempenho dos modelos, vamos alterar um conjunto de dados, para que possamos perceber se é o número de clientes ou o número de veículos que mais compromete o seu desempenho.

Com o exemplo seguinte pretende-se perceber o que acontece se apenas aumentarmos as quantidades dos pedidos e, consequentemente, aumenta o número de veículos necessário à satisfação dos mesmos.

		Nº clientes	Nº de veículos	Nº de produtos	Valor	Nº variáveis	Nº restrições	Tempo de execução
Modelo 1	$\sum a_i = \sum b_i$	0+6	4	1	169	42	40	0.11
	$\sum a_i = \sum b_i$	0+6	5	1	169	42	40	0.17
	$\sum a_i > \sum b_i$	0+6	4	1	169	42	40	0.04
	$\sum a_i > \sum b_i$	0+6	5	1	169	42	40	1.51
Modelo 2	$\sum a_i = \sum b_i$	0+6	4	1	169	168	128	3.275
	$\sum a_i = \sum b_i$	0+6	5	1	169	210	157	6.59
	$\sum a_i > \sum b_i$	0+6	4	1	169	168	128	3.334
	$\sum a_i > \sum b_i$	0+6	5	1	169	210	157	6.46

Tabela 3 – Rota para satisfazer 6 clientes, sendo necessários, pelo menos, 4 veículos.

Neste exemplo, aumentaram-se: a quantidade de produtos disponíveis no depósito e os pedidos dos clientes de modo que houvesse necessidade de envolver mais veículos, quatro, na distribuição dos produtos. Obviamente o custo de distribuição aumentou, e o tempo de execução também é superior. Curiosamente o Modelo 1 tem, com excepção do caso em que as disponibilidades são superiores aos pedidos, tempos de execução inferiores ao exemplo anterior que envolvia menos veículos. No entanto, neste exemplo, quando se altera o número de veículos envolvidos, verificam-se diferenças no tempo de execução computacional, que aumenta conforme aumenta o número de veículos.

Em relação ao Modelo 2, os tempos de execução para este exemplo aumentaram significativamente, quando comparados com os do Modelo 1. Mais uma vez, o tempo computacional aumenta com o aumento do número de veículos envolvidos. Em ambos os modelos, e independentemente da quantidade do produto disponível ser igual ou superior aos pedidos e do número de veículos ser o estritamente necessário ou superior, apenas são utilizados os veículos absolutamente necessários para o transporte das quantidades pedidas.

Com estes pequenos exemplos percebemos, que o número de veículos envolvidos influencia consideravelmente o desempenho do Modelo 2, o que se justifica pelo número de restrições e variáveis que este envolve, como se pode ver na tabela 3. O Modelo 2 trabalha com um número, quer de variáveis quer de restrições, superior ao triplo do Modelo 1. Naturalmente que este facto se reflecte no tempo de processamento. Será interessante agora perceber o que acontece se mantivermos o número mínimo de veículos envolvidos constante mas aumentarmos o número de clientes a visitar. É com estes pressupostos que se apresenta o exemplo seguinte.

		Nº clientes	**Nº de veículos**	**Nº de produtos**	**Valor**	**Nº variáveis**	**Nº restrições**	**Tempo de execução**
Modelo 1	$\sum a_i = \sum b_i$	0+10	4	1	50	110	86	1.431
	$\sum a_i = \sum b_i$	0+10	6	1	50	110	86	2.628
	$\sum a_i > \sum b_i$	0+10	4	1	50	110	86	1.24
	$\sum a_i > \sum b_i$	0+10	6	1	50	110	86	2.578
Modelo 2	$\sum a_i = \sum b_i$	0+10	4	1	50	440	328	12.445
	$\sum a_i = \sum b_i$	0+10	6	1	50	660	482	6605.8
	$\sum a_i > \sum b_i$	0+10	4	1	50	440	328	15.595
	$\sum a_i > \sum b_i$	0+10	6	1	50	660	482	18871.4

Tabela 4 – Rotas para satisfazer 10 clientes, sendo necessários, pelo menos, quatro veículos.

Mais uma vez, independentemente do modelo e das variantes em cada um deles, o valor da função objectivo mantém-se constante. Relativamente ao tempo computacional de execução este aumenta bastante. No Modelo 1 continuamos a ter ocorrências com tempos bastante aceitáveis, contudo no Modelo 2 isso só acontece quando estão envolvidos apenas 4 veículos e quando os pedidos são iguais às disponibilidades. Ainda assim o tempo computacional aumentou consideravelmente em relação ao exemplo anterior, o que não admira se analisarmos, na tabela 4, o aumento do número de variáveis e restrições envolvidas neste exemplo. Quando se aumentam as disponibilidades do produto e o número de veículos se mantém nos quatro, ainda é possível obter-se a solução em 10 minutos (616.595s). Contudo, quando aumentamos o número de veículos para seis, o tempo computacional também aumenta para 5h quando as disponibilidades são iguais aos pedidos para 5.24h quando as disponibilidades são superiores. Observa-se que, para as dimensões em causa ou superiores, a escolha do modelo, já deve ser ponderada. Deve optar-se de acordo com as necessidades, se for necessário obter uma resposta rápida, não será com certeza uma boa decisão o uso do Modelo 2, uma vez que o Modelo 1 demora muito menos tempo. Terá depois a desvantagem de não fornecer de forma imediata uma solução com tanta informação.

Os exemplos apresentados apenas contemplam casos em que se transporta um único produto. Considerou-se, ser interessante construir modelos que considerassem a possibilidade de distribuir vários produtos. No entanto, para o nosso caso de estudo, apenas se considera o transporte de um único produto.

3.2. Modelos para vários produtos

Definição das variáveis

n número de armazéns

V={1..*n*} armazéns

D={0} Depósito

V_0={0..*n*} Armazéns+depósito

m número de veículos disponíveis

M={1..*m*} veículos

Q Capacidade dos veículos (pressupõe-se uma frota homogénea)

pp Número de produtos considerados

P={1,..,*pp*} Produtos

$C = [c_{ij}]_{i,j \in V_0}$ – Matriz de custos totais de transporte entre a localização i e j.

$A^p = [a_i^p]_{i \in V_0, p \in P}$ – Matriz de disponibilidade em cada armazém/depósito do produto p

$B^p = [b_j^p]_{j \in V_0, p \in P}$ – Matriz de pedido de cada armazém/depósito do produto p

Declaração das variáveis:

Variáveis Binárias

- $x_{ij} \in \{0,1\} \quad para\ todo\ (i,j) \in A$, indica se o arco (i,j) é utilizado por um dos veículos.

Variáveis contínuas, não negativas

- $y_{ij}^{p} \geq 0 \quad para\ todo\ (i,j) \in A\ com\ i \neq j$, indica a quantidade transportada do produto p entre o cliente i e o cliente j.

O problema pode ser formulado da seguinte forma:

Modelo 3

$$\min \sum_{\substack{i,j \in V_0 \\ i \neq j}} c_{ij} x_{ij} \qquad (1)$$

s.a.

$$\sum_{j \in V} x_{ij} \leq m \ , i \in D \qquad (2)$$

$$\sum_{\substack{i \in V_0 \\ i \neq j}} x_{ij} = 1 \ , j \in V \qquad (3)$$

$$\sum_{\substack{i \in V_0 \\ i \neq j}} x_{ji} = 1 \ , j \in V \qquad (4)$$

$$\sum_{p \in P} y_{ij}^{p} \leq Q x_{ij} \ , i,j \ \in V_0, i \neq j \qquad (5)$$

$$a_j^p + \sum_{\substack{i \in V_0 \\ i \neq j}} y_{ij}^p = \sum_{\substack{i \in V_0 \\ i \neq j}} y_{ji}^p + b_j^p \ \ , j \in V \ , p \in P \qquad (6)$$

$$x_{ij} \ \in \{0,1\} \qquad (i,j) \in A \qquad (7)$$

$$y_{ij}^{p} \geq 0 \qquad (i,j) \in A \qquad (8)$$

A expressão (1) representa a função objectivo e consiste na soma das distâncias entre o cliente i e o cliente j. A restrição (2) limita o número máximo de rotas de veículos utilizados, e a iniciar num depósito, ao número de veículos disponível em cada depósito. As restrições (3) e (4) indicam que cada cliente deve ser visitado apenas por um veículo, na restrição (3) cada cliente é visitado apenas por um veículo e a (4) cada veículo que entra num cliente também sai. A restrição (5) é uma restrição de capacidade que limita a quantidade transportada por cada veículo em cada percurso entre o cliente i e o cliente j. Relativamente à restrição (6) garante que todos os pedidos dos clientes são satisfeitos. Finalmente as restrições (7) e (8) definem os valores das variáveis.

Tal como foi feito para o caso de um único produto, consideram-se agora as variáveis que nos permitam obter mais informação, isto é, saber para a rota de cada veículo no percurso do cliente i para o cliente j, a quantidade transportada e o veículo afecto a esse transporte.

Assim sendo, o Modelo 4 tem a seguinte forma

Declaração das variáveis

Variáveis binárias

- $x_{ij}^{k} \in \{0,1\}\ \ para\ todo\ (i,j) \in A$, indica se o veículo k, passa ou não no arco (i,j).

Variáveis contínuas, não negativas

- $y_{ij}^{kp} \geq 0 \quad para\ todo\ (i,j) \in A, com\ i \neq j$ indica a quantidade transportada pelo veículo k, do produto p, entre o cliente i e o cliente j.

O problema pode ser formulado da seguinte forma:

Modelo 4

$$\min \sum_{k\in M} \sum_{\substack{i,j\in V_0 \\ i\neq j}} c_{ij} x_{ij}^k \qquad (1)$$

s.a.

$$\sum_{j\in V} x_{ij}^k \leq m \ \ , i \in D, k \in M \qquad (2)$$

$$\sum_{\substack{i\in V_0 \\ i\neq j, k\in M}} x_{ij}^k = 1 \ \ , j \in V \qquad (3)$$

$$\sum_{\substack{i\in V_0 \\ i\neq j}} x_{ij}^k = \sum_{\substack{i\in V_0 \\ i\neq j}} x_{ji}^k = \ \ , j \in V_0 \ \ , k \in M \qquad (4)$$

$$\sum_{p\in P} y_{ij}^{kp} \leq Q x_{ij}^k \ \ , i,j \in V_0 \ , i \neq j \ , k \in M \qquad (5)$$

$$a_j + \sum_{\substack{i\in V_0 \\ i\neq j, k\in M}} y_{ij}^{kp} = \sum_{\substack{i\in V_0 \\ i\neq j, k\in M}} y_{ji}^{kp} + b_j^k \ \ , j \in V \ , p \in P \qquad (6)$$

$$x_{ij}^k \in \{0,1\} \qquad (7)$$

$$y_{ij}^{kp} \geq 0 \qquad (8)$$

A expressão (1) representa a função objectivo e consiste na soma das distâncias entre o cliente i e o cliente j. A restrição (2) limita o número máximo de rotas de veículos utilizados, e a iniciar num depósito, ao número de veículos existente em cada depósito. As restrições (3) e (4) indicam que cada cliente deve ser visitado apenas por um veículo, na restrição (3) cada cliente é visitado apenas por um veículo e a (4) cada veículo que entra num cliente também sai. A restrição (5) é uma restrição de capacidade que limita a quantidade transportada por cada veículo em cada percurso entre o cliente i e o cliente j . Relativamente à restrição (6) garante que todos os pedidos dos clientes são satisfeitos. Finalmente as restrições (7) e (8) definem os valores das variáveis.

Vamos agora testar este segundo problema com a ajuda do software – Xpress. Os testes desenvolvidos para averiguar o desempenho dos modelos, são meramente académicos. A capacidade das viaturas continua a ser de 15 000 (Kg), uma vez que é um valor real.

Os resultados são apresentados nas Tabelas 5, 6, 7 e 8 . Na primeira linha destas tabelas encontramos a descrição dos valores colocados nas colunas correspondentes em cada linha para cada conjunto de dados. O primeiro destes valores corresponde ao número de clientes, o segundo ao número de veículos, o terceiro destes valores ao número de produtos e os dois últimos referem-se ao valor óptimo do problema e ao tempo computacional em segundos, usado na obtenção do valor óptimo do problema. Nas quatro linhas seguintes encontram-se os resultados obtidos com o Modelo 3 e nas últimas quatro linhas os resultados obtidos com o Modelo 4. Nestes grupos de quatro linhas, as duas primeiras referem-se a resultados em que a quantidade de pedidos do produto é igual à quantidade disponível e diferem no número de veículos usados; as duas últimas linhas referem-se aos resultados em que a quantidade de produto disponível é superior à quantidade de produto pedido diferindo o número de veículos disponíveis a utilizar.

O primeiro exemplo é bastante simples, considera apenas 4 clientes e 2 produtos diferentes e para os pedidos considerados são necessárias no mínimo 2 viaturas. No entanto pretende-se ainda aferir o desempenho, caso haja mais viaturas disponíveis. O mesmo acontece com as disponibilidades, testa-se quando as disponibilidades são iguais aos pedidos e quando a primeira é superior.

		Nº Clientes	Nº de veículos	Nº de produtos	Valor	Tempo de execução
Modelo 3	$\sum a_i = \sum b_i$	0+4	2	2	101	0.181
	$\sum a_i = \sum b_i$	0+4	3	2	101	0.25
	$\sum a_i > \sum b_i$	0+4	2	2	101	0.23
	$\sum a_i > \sum b_i$	0+4	3	2	101	0.251
Modelo 4	$\sum a_i = \sum b_i$	0+4	2	2	101	0.361
	$\sum a_i = \sum b_i$	0+4	3	2	101	0.762
	$\sum a_i > \sum b_i$	0+4	2	2	101	0.391
	$\sum a_i > \sum b_i$	0+4	3	2	101	0.701

Tabela 5 – Rotas para satisfazer 4 clientes, sendo necessários, pelo menos, 2 veículos.

Neste exemplo, percebe-se desde logo que o tempo de execução é muito superior ao alcançado nos exemplos correspondentes para os Modelos 1 e 2, apesar de este envolver apenas 4 clientes, enquanto o primeiro exemplo da secção anterior contemplava 6 clientes. Este facto não foi casual, mas sim uma opção dado que nesta versão estamos a trabalhar com 2 produtos e como tal esperava-se um aumento do tempo de execução. Tal como aconteceu na secção anterior também para este exemplo se obtém o mesmo valor da função objectivo, para ambos os modelos. Continua a ser nítida a diferença entre o Modelo 3 e o Modelo 4 em termos de tempo de execução, demorando o Modelo 4 mais tempo na obtenção da solução.

Com o aumento do número de veículos envolvidos o tempo computacional também aumenta. A diferença é ligeira para o Modelo 3 e bastante considerável (o dobro) para o Modelo 4.

De salientar que, mesmo quando o número de veículos disponível é superior ao número de veículos necessário, as soluções, em todos os casos, só utilizam os absolutamente necessários. Em relação ao facto de as disponibilidades serem iguais aos pedidos ou as primeiras superiores aos segundos não influencia consideravelmente o desempenho do modelo.

De seguida apresenta-se um exemplo que envolve mais clientes, seis, mantendo-se o mesmo número de veículos envolvidos e de produtos a transportar.

		Nº Clientes	**Nº de veículos**	**Nº de produtos**	**Valor Função Objectivo**	**Tempo de execução**
Modelo 3	$\sum a_i = \sum b_i$	0+6	2	2	113	0.621
	$\sum a_i = \sum b_i$	0+6	3	2	113	0.261
	$\sum a_i > \sum b_i$	0+6	2	2	113	0.47
	$\sum a_i > \sum b_i$	0+6	3	2	113	0.33
Modelo 4	$\sum a_i = \sum b_i$	0+6	2	2	113	0.991
	$\sum a_i = \sum b_i$	0+6	3	2	113	2.203
	$\sum a_i > \sum b_i$	0+6	2	2	113	0.932
	$\sum a_i > \sum b_i$	0+6	3	2	113	2.173

Tabela 6 – Rotas para satisfazer 6 clientes, sendo necessários, pelo menos, 2 veículos.

Neste exemplo os tempos de execução aumentaram um pouco, mantendo-se ainda em tempos bastante aceitáveis. Curiosamente, o menor tempo para o Modelo 3 e para o Modelo 4 não acontece nas mesmas condições. Enquanto para o primeiro acontece quando as disponibilidades são iguais aos pedidos e para uma frota de 3 veículos, no segundo verifica-se quando as disponibilidades são superiores aos pedidos e para uma frota de 2 veículos. O valor da função objectivo continua a ter o mesmo valor para todas as hipóteses em estudo.

Com o exemplo seguinte pretende-se averiguar o comportamento dos modelos em estudo, quando se aumenta em simultâneo o número de veículos e o número de produtos, mantendo o número de clientes do exemplo anterior.

		Nº Clientes	**Nº de veículos**	**Nº de produtos**	**Valor Função Objectivo**	**Tempo de execução**
Modelo 3	$\sum a_i = \sum b_i$	0+6	4	4	163	0.911
	$\sum a_i = \sum b_i$	0+6	8	4	163	0.751
	$\sum a_i > \sum b_i$	0+6	4	4	163	0.982
	$\sum a_i > \sum b_i$	0+6	8	4	163	0.621
Modelo 4	$\sum a_i = \sum b_i$	0+6	4	4	163	27.159
	$\sum a_i = \sum b_i$	0+6	8	4	163	512.627
	$\sum a_i > \sum b_i$	0+6	4	4	163	27.069
	$\sum a_i > \sum b_i$	0+6	8	4	163	542.811

Tabela 7 – Rotas para satisfazer 6 clientes, sendo necessários, pelo menos, 4 veículos.

O valor da função objectivo é o mesmo para todas as situações contempladas neste exemplo. Relativamente ao tempo de execução acentuam-se as diferenças entre o Modelo 3 e o Modelo 4. Curiosamente apresentam características antagónicas, enquanto no Modelo 3 os tempos são menores quando a frota é maior, no Modelo 4 os tempos são muito superiores. O facto de as disponibilidades serem maiores ou iguais aos pedidos pouco influencia o tempo de execução.

Vamos agora ver o que acontece se aumentarmos o número de clientes.

		Nº Clientes	**Nº de veículos**	**Nº de produtos**	**Valor Função Objectivo**	**Tempo de execução**
Modelo 3	$\sum a_i = \sum b_i$	0+10	4	4	199	27.75
	$\sum a_i = \sum b_i$	0+10	8	4	199	24.996
	$\sum a_i > \sum b_i$	0+10	4	4	199	28.11
	$\sum a_i > \sum b_i$	0+10	8	4	199	25.406
Modelo 4	$\sum a_i = \sum b_i$	0+10	4	4	199	12725.6
	$\sum a_i = \sum b_i$	0+10	8	8	Não foi possível obter resultados por limitações de memória computacional	
	$\sum a_i > \sum b_i$	0+10	4	4	199	12373
	$\sum a_i > \sum b_i$	0+10	8	4	Não foi possível obter resultados por limitações de memória computacional	

Tabela 8 – Rotas para satisfazer 10 clientes, sendo necessários, pelo menos, 4 veículos.

Para este exemplo o Modelo 3 continua a ser exequível e em pouco tempo, menos de 30 segundos. O mesmo não se pode dizer do Modelo 4, que quando envolve 8 veículos nem conseguimos obter solução, e quando envolve apenas 4 veículos a solução é bastante demorada, mais de 12 000 segundos, ou seja, mais de 3 horas. Assim, podemos concluir que para estas dimensões de problema o Modelo 4 não é um meio para se resolver o problema. Sempre que chegámos a uma solução esta é igual para ambos os Modelos em todas as circunstâncias. Relativamente ao Modelo 3, o tempo computacional de execução não varia significativamente com a duplicação de veículos disponíveis, o que nos induz a pensar, que o aumento do número de veículos disponíveis não se torna um problema para um bom desempenho deste Modelo.

3.3. Análise e discussão de resultados

Os modelos apresentados e testados vieram corroborar o que tínhamos estudado no âmbito do Capítulo2.

No que respeita aos modelos para um único produto, e por isso já limitados na sua aplicabilidade, eles indiciaram fragilidades aquando do aumento de variáveis envolvidas. Em particular, o Modelo 2 revela debilidade, no desempenho, em problemas de alguma dimensão (10 clientes e 6 veículos), pois é necessário muito tempo para apresentar a solução. Perante as mesmas condições, o Modelo 1, revela um desempenho bastante melhor, uma vez que demora menos tempo na apresentação da solução. No entanto, a informação dada na solução é bastante pobre, exigindo depois, um grande esforço humano na interpretação dos resultados (nomeadamente, em perceber qual o veículo que visita determinado cliente).

Relativamente aos modelos para vários produtos, e sendo estes uma extensão dos anteriores, eles revelam um comportamento proporcional aos anteriores, mas com pior desempenho. O que facilmente se justifica, pelo enorme aumento de variáveis que produz o "alargamento" dos modelos a vários produtos. Como tal, mesmo para exemplos pequenos e simples é moroso obter a solução, e pode mesmo acontecer, não se conseguir obter, como foi o caso do último exemplo apresentado. O Modelo 4 não conseguiu apresentar solução para um exemplo que envolvia apenas 10 clientes, 8 veículos e 4 produtos.

Compreende-se agora melhor o recurso a métodos heurísticos e metaheurísticos, para a resolução deste tipo de problemas. No entanto, eles não se encontram no âmbito desta tese, e como tal, continuamos o nosso estudo recorrendo aos modelos construídos para o efeito.

4. Caso de estudo

O nosso caso de estudo centra-se numa empresa de extrusão de alumínio que produz perfis de alumínio. Estes perfis podem ser considerados como produtos acabados (perfis de alumínio em bruto) e como tal prontos a entregar aos clientes ou semi-acabados e, neste caso, eles terão de ser encaminhados para empresas que lhe dão um acabamento final (cor), ou seja, que os "transformem" em produtos acabados (perfis de alumínio com a cor que o cliente pretende). Estes últimos, depois do acabamento final, ou regressam à empresa de extrusão ou são directamente entregues ao cliente sem que retornem à empresa de extrusão. Estes produtos têm uma enorme variedade de referências, cores e tamanhos. Assim em termos de códigos de produtos, temos quase uma infinidade deles. No entanto, para a logística, não é relevante distinguir os produtos mediante as suas características (referência, cor ou tamanho). Apenas importa saber o peso dos produtos, como tal, o estudo centra-se na aplicação dos Modelos 1 e 2 a este caso.

Actualmente, a determinação das rotas é feita com base no bom senso e na experiência do responsável logístico. Neste caso de estudo começamos por verificar as rotas já existentes, e depois usando os Modelos 1 e 2 pretende-se determinar a solução óptima que satisfaça os pedidos dos clientes a visitar.

Consideram-se os pedidos de vários clientes, cada um numa localização geográfica diferente, que têm de ser visitados uma única vez por um único veículo. Terá de se garantir que cada veículo não excede a sua capacidade (15 000 Kg). Deverá ainda assegurar-se a visita a todos os clientes e o retorno ao ponto de partida (origem), que é considerada a empresa de extrusão. O objectivo é o de fazer o percurso com a mínima distância possível.

4.1. Estudo de 3 rotas da empresa

Recolheram-se aleatoriamente, na empresa, alguns mapas de distribuição diários onde se encontra registada a ordem pela qual os clientes vão ser visitados a fim de satisfazer os respectivos pedidos. Apresentam-se de seguida as rotas actualmente efectuadas e as soluções obtidas usando os Modelos 1 e 2.

Rota 1

Nesta rota estão envolvidos 7 clientes que aqui se denominam por A, B, C, D, E e F e o depósito (empresa produtora). Representa-se no esquema da Figura 1 esta rota indicando num quadrado a verde (por ser a rota da empresa) os pontos (clientes e depósito) de passagem dos veículos e onde se menciona, no caso de depósito, a disponibilidade e, no caso dos clientes, os pedidos. Nos símbolos elipsoidais consta a carga com que o veículo segue entre dois pontos. No quadrado a azul estão as distâncias entre dois pontos (clientes).

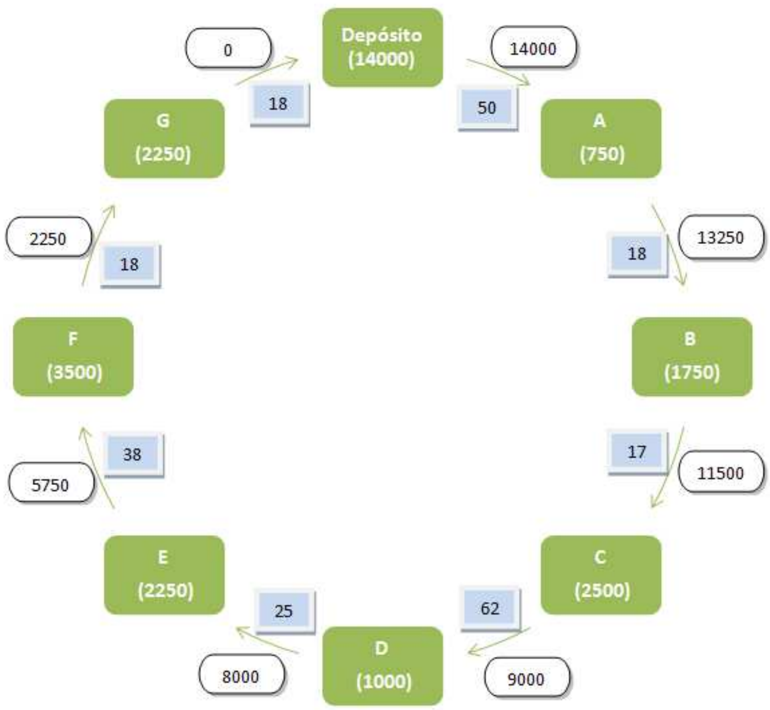

Figura 1 – Rota 1 actualmente utilizada pela empresa.

A rota 1 perfaz um total de 246 km percorridos para satisfazer as necessidades dos 7 clientes a visitar. As disponibilidades na origem satisfaziam exactamente os pedidos dos clientes (isto é as disponibilidades são iguais aos pedidos), pretende-se analisar se a ordem pela qual os clientes foram visitados é a melhor, ou seja, a menos dispendiosa.

Como estamos perante entregas de um único produto, aplicam-se os Modelos 1 e 2. Tanto no primeiro como no segundo, o valor da função objectivo é de 228 (Km) que representa a distância total percorrida. O que resulta num benefício correspondente à redução de 18 km numa rota que apenas contempla a visita a 7 clientes. De salientar ainda que estes resultados foram obtidos em 0.26 segundos para o Modelo 2, que é sempre o mais demorado. Na Figura 2 encontramos a descrição da rota optimizada obtida usando os Modelos referidos. A simbologia usada é a mesma, apenas difere a cor dos quadrados que identificam o cliente e respectivo pedido, que passa a ser azul, indicando assim tratar-se de uma rota optimizada.

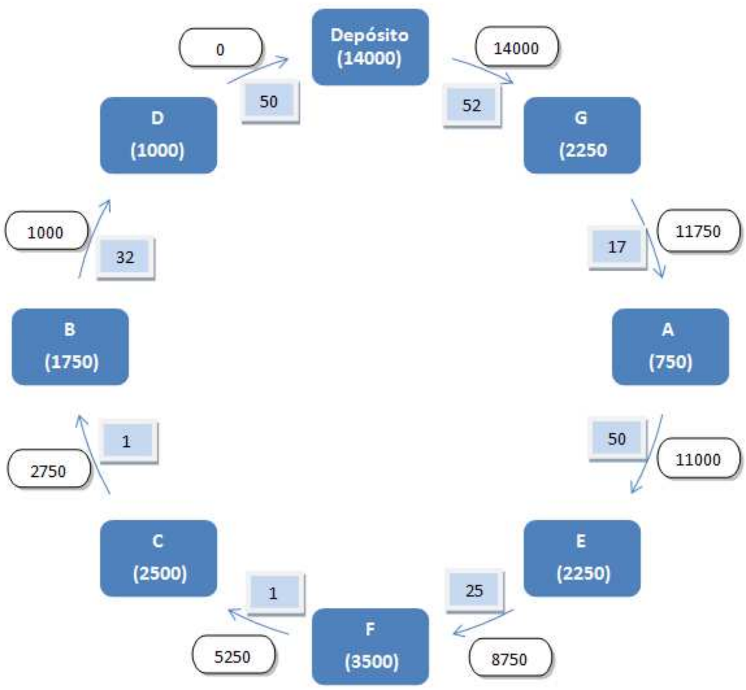

Figura 2 – Rota 1 optimizada.

Rota 2

Nesta rota considerámos o depósito e 6 clientes (cliente H, I, J, K, L, M)

Apresenta-se de seguida a rota actualmente efectuada pela empresa, onde já se colocaram, os pedidos dos clientes, a disponibilidade do depósito, as distâncias percorridas entre cada um dos pontos e as quantidades transportadas entre cada um deles.

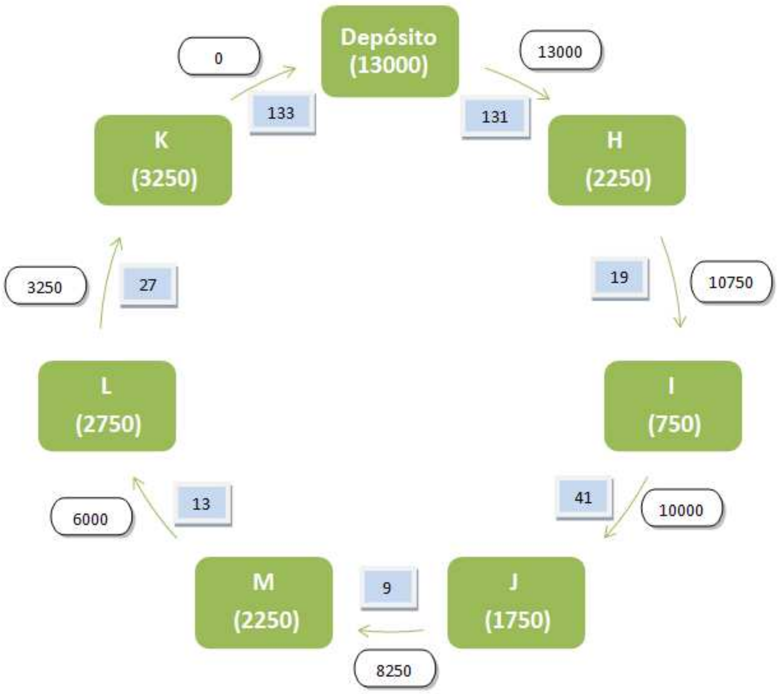

Figura 3 – Rota 2 actualmente utilizada pela empresa.

Perfazendo assim um total de 373 km percorridos para satisfazer as necessidades destes 6 clientes.

Supondo que as disponibilidades na origem satisfaziam exactamente a quantidade de pedidos dos clientes, pretende-se analisar, utilizando para isso os modelos estudados no Capítulo 3, se a ordem pela qual os clientes foram visitados é a melhor, ou seja, a que minimiza as distâncias (e consequentemente os custos).

Como se considera que estamos perante entregas de um único produto, aplicam-se os Modelos 1 e 2.

Tanto no primeiro como no segundo modelo o valor da função objectivo é 322 (Km), que representa a distância total percorrida. Eis então o benefício da optimização: redução de 51 km numa rota que apenas contempla a visita a 6 clientes.

A rota optimizada obtida a partir do Modelos 1 e 2 é apresentada na Figura 4 que se segue.

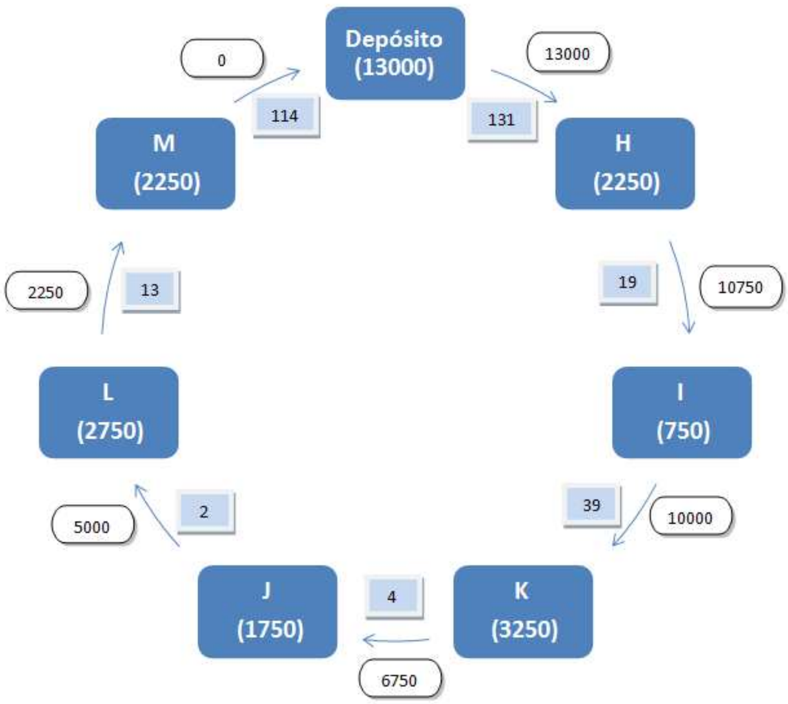

Figura 4 – Rota 2 optimizada.

De salientar ainda que estes resultados foram obtidos em 0.1 segundos para Modelo 2 (o mais moroso).

Rota 3

A terceira rota a estudar estabelece relações comerciais entre o depósito e 6 clientes, a saber, os clientes N, O, P, Q, E e F (estes dois últimos, E e F, são clientes que já fizeram parte da primeira rota).

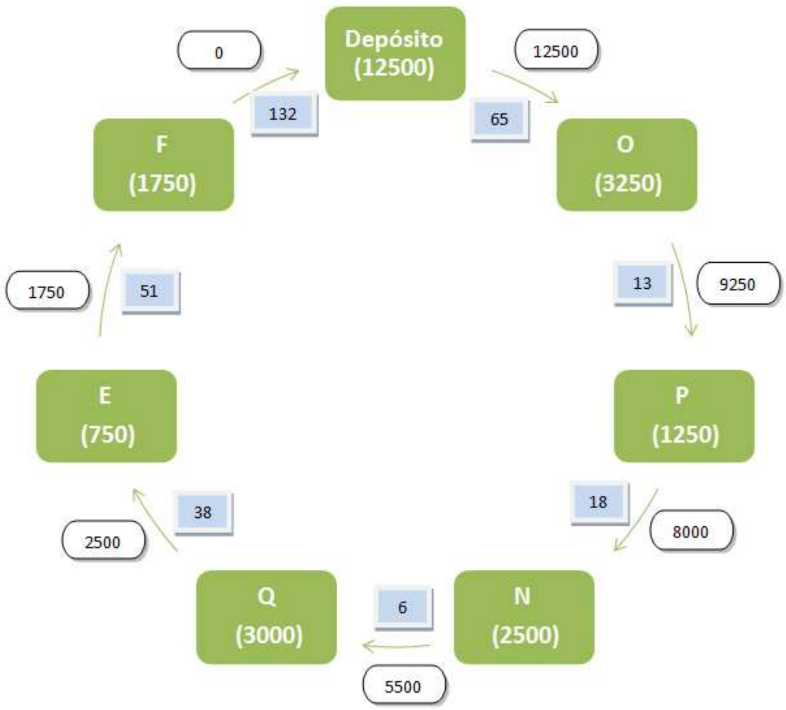

Figura 5 – Rota 3 actualmente utilizada pela empresa.

Perfazendo assim um total de 323 km percorridos para satisfazer os pedidos destes 6 clientes.

Supondo que as disponibilidades na origem satisfaziam exactamente as necessidades dos clientes, pretende-se estudar, utilizando para isso os Modelos 1 e 2, se a ordem pela qual os clientes foram visitados é a optimizada, ou seja, a que minimiza as distâncias.

Tanto no primeiro como no segundo modelo o valor da função objectivo é de 274 (Km), que representa a distância total percorrida. Assim o benefício da optimização, é uma redução de 49 km numa rota que apenas satisfaz os pedidos de 6 clientes.

Apresenta-se de seguida, na Figura 6, a rota optimizada obtida através dos Modelos 1 e 2.

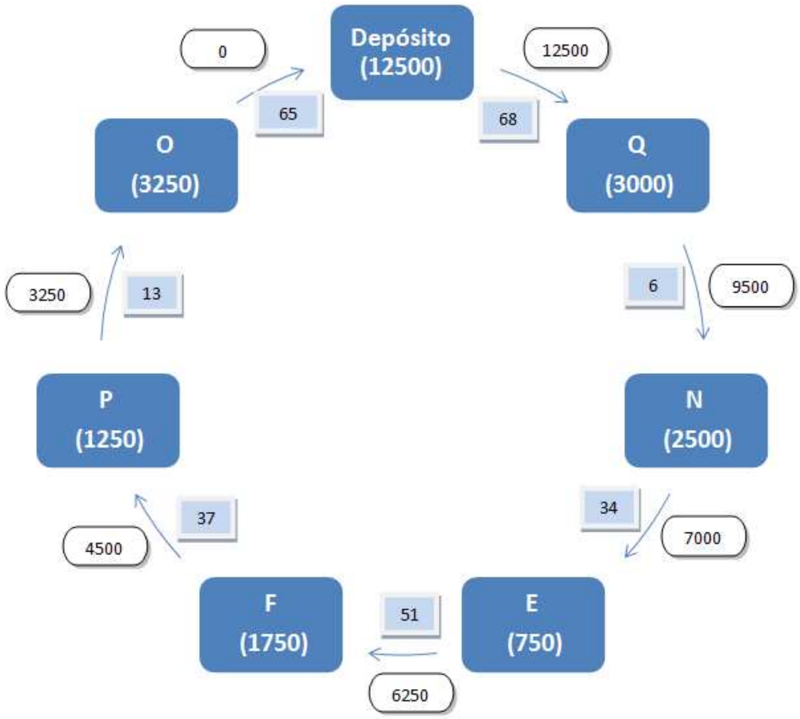

Figura 6 – Rota 2 optimizada.

De referir ainda que, estes resultados foram obtidos em 0.231 segundos para o segundo modelo.

4.2. Análise e discussão dos resultados obtidos no estudo das 3 rotas da empresa

Aquando da recolha dos impressos que documentavam as rotas actualmente efectuadas pela empresa, a primeira coisa que salta à vista é o reduzido número de clientes que são visitados em cada rota. Como tal, ocorreu-nos de imediato que, estas rotas pela sua reduzida dimensão, estariam optimizadas mesmo sem o recurso a técnicas e/ou meios de optimização. No entanto ao longo deste estudo, percebeu-se que não, pois conseguiu-se para todas elas, encontrar rotas com distâncias inferiores, como se pode observar na tabela 9, alcançando assim, no conjunto das rotas uma redução de 118 Km.

Rotas	Distância (Km) actualmente percorrida (1)	Distância (Km) optimizada (2)	(1)-(2) (Km)
Rota 1	246	228	18
Rota 2	373	322	51
Rota 3	323	274	49
Totais	**942**	**824**	**118**

Tabela 9 – Distâncias das rotas actualmente praticadas na empresa e optimizadas.

Uma vez que, cada uma delas, individualmente, não está optimizada, é legítimo pensar que a escolha dos clientes a visitar, para cada uma das rotas, também não tenha sido alvo dessa preocupação. Se a soma de distâncias das rotas optimizadas já é inferior às existentes, a redução agora só pode passar pela reformulação dessas mesmas rotas. Assim surge a ideia de juntar as 3 rotas num único problema de optimização, com o intuito de perceber se existem rotas alternativas que minimizem as distâncias. Ou seja, pretende-se encontrar rotas que satisfazendo as necessidades dos clientes da rota 1, 2 e 3, que designaremos por frota 4, tenham um custo inferior às actuais, ou seja, percorram uma distância menor.

4.3. Reformulação das rotas existentes

Pretende-se encontrar a solução óptima para a satisfação dos pedidos de 17 clientes (A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, e Q) através dos Modelos 1 e 2, uma vez que se considera haver um único produto. A disponibilidade agora considerada será a soma das disponibilidades das 3 rotas anteriores, que correspondem aos pedidos dos 17 clientes, sendo que, dois deles (E e F) têm dois pedidos e portanto considera-se a quantidade pedida para cada um deles, como a soma dos dois pedidos que constavam nas rotas anteriores.

Analisámos estes dados aplicando os dois modelos anteriormente estudados para o transporte de um produto, com duas variantes, na primeira considerou-se que as viaturas disponíveis eram as estritamente necessárias para a satisfação dos pedidos e as quantidades disponíveis eram iguais às dos pedidos, na segunda, a frota de veículos é composta por mais veículos do que os estritamente necessários à realização deste transporte e as disponibilidades do produto são superiores aos pedidos.

Em todas as simulações se obteve o mesmo valor na função objectivo, 698 (Km), ou seja encontrámos quatro soluções alternativas operacionalmente distintas, mas todas com a mesma distância, e muito inferior às rotas actualmente percorridas pela empresa (em que as 3 rotas perfazem 942 Km), e também inferior às rotas individualmente optimizadas neste estudo (em que as 3 rotas percorrem 824 Km). O benefício é assim de 244 Km em relação às primeiras, e de 126 Km em relação às segundas.

Começa-se por apresentar a solução do Modelo 1 para a frota 4, considerando três veículos, os estritamente necessários para a satisfação dos pedidos e a quantidade disponível igual à dos pedidos. Como resultado obtêm-se três rotas, que se apresentam no esquema seguinte, na Figura 7 a rota 1, na Figura 8 a rota 2 e na Figura 9 a rota 3.

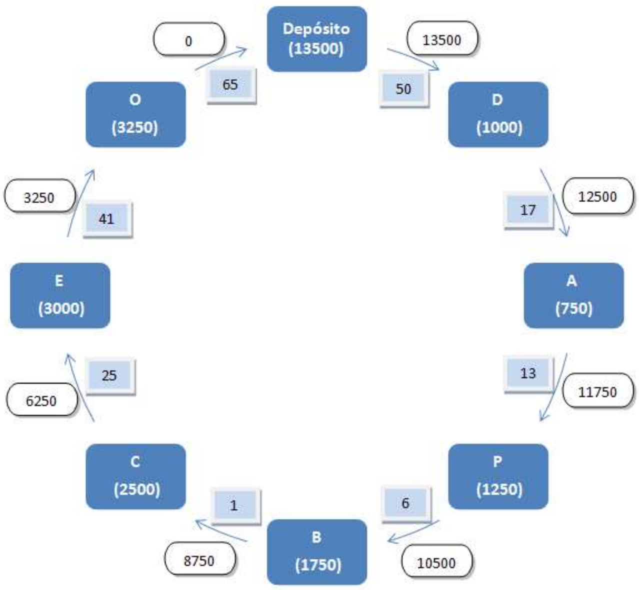

Figura 7 - Rota 1 da frota 4 simulada no Modelo 1, considerando 3 veículos e o total das disponibilidades igual ao total dos pedidos.

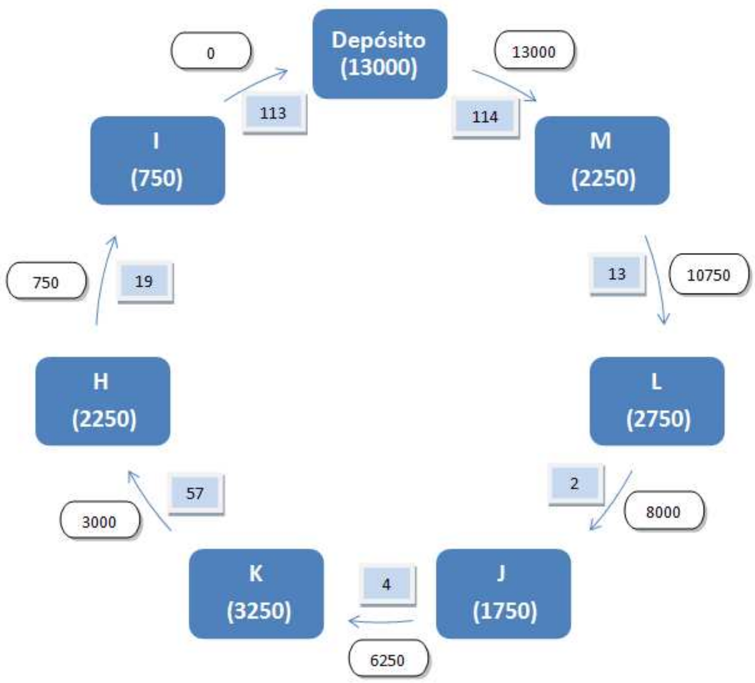

Figura 8 - Rota 2 da frota 4 simulada no Modelo 1, considerando 3 veículos disponíveis e o total das disponibilidades igual ao total dos pedidos.

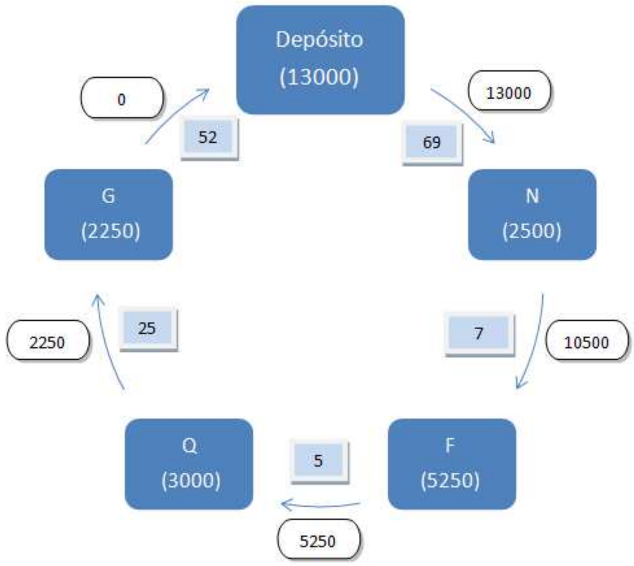

Figura 9 - Rota 3 da frota 4 simulada no Modelo 1, considerando 3 veículos disponíveis e o total das disponibilidades igual ao total dos pedidos.

Ao observarmos as rotas, e como os clientes são designados por ordem alfabética, facilmente se percebe, que o resultado obtido é uma mistura das rotas iniciais, por exemplo na rota 1 aparece-nos o cliente A da primeira rota inicial e o cliente P da terceira rota inicial. Ou seja, poder-se-á afirmar que as rotas actuais da empresa estão longe de ser optimizadas. Pois, para além de cada uma delas poder ser optimizada, como vimos anteriormente, conjuntamente consegue-se ainda melhores resultados. De salientar ainda que esta solução foi obtida em apenas 53 segundos.

Para o mesmo problema, aumentaram-se agora as quantidades disponíveis para os pedidos em causa, ou seja, tem-se agora as disponibilidades superiores aos pedidos. Aumentou-se também o número de veículos disponíveis para a satisfação dos pedidos dos clientes, e assim o número de veículos é superior ao estritamente necessário. Tal como já foi referido obteve-se uma alternativa à anterior. A distância é igual a 698 Km e usa também, apenas, 3 veículos. Apresenta-se de seguida uma rota alternativa à anterior, na Figura 10 a rota 1, na Figura 11 a rota 2 e na Figura 12 a rota 3, cuja distância percorrido é 698 Km, usando para isso apenas 3 veículos disponíveis.

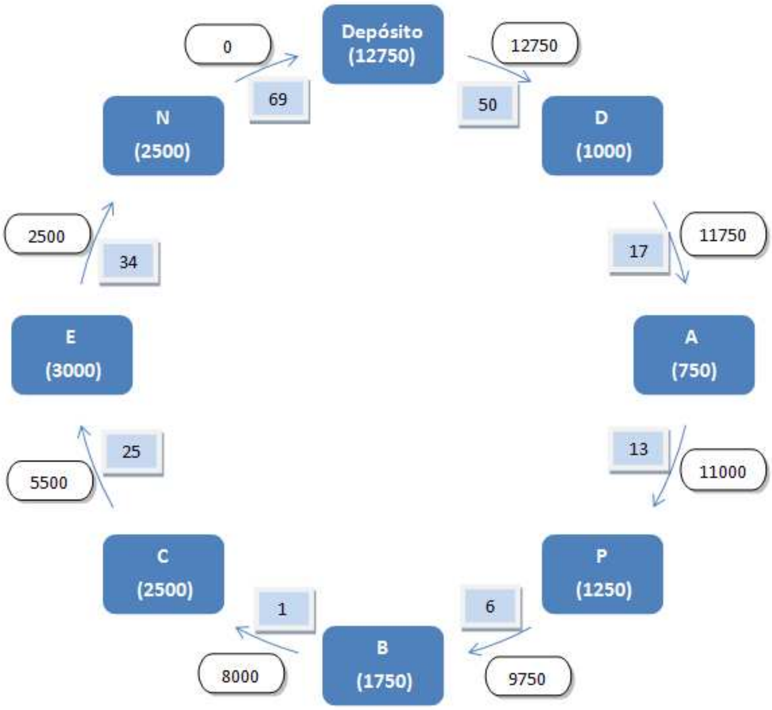

Figura 10 - Rota 1 da frota 4 simulada no Modelo 1, considerando 4 veículos disponíveis e o total das disponibilidades superior ao total dos pedidos.

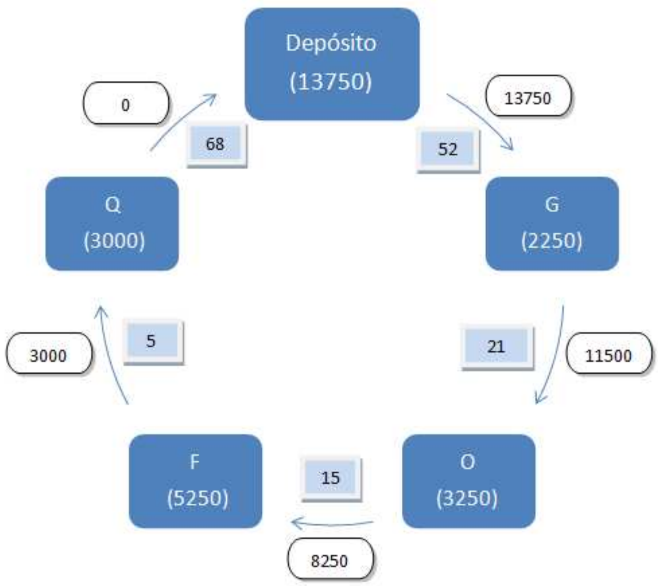

Figura 11 - Rota 2 da frota 4 simulada no Modelo 1, considerando 4 veículos disponíveis e o total das disponibilidades superior ao total dos pedidos.

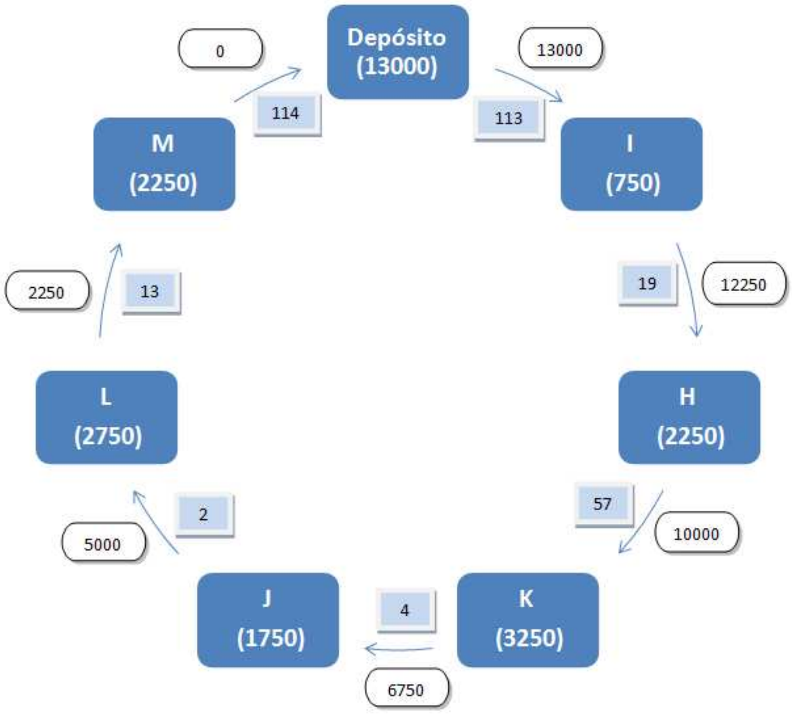

Figura 12 - Rota 3 da frota 4 simulado no Modelo 1, considerando 4 veículos e o total das disponibilidades superior ao total dos pedidos.

A consequência da alteração dos pressupostos já referido origina rotas diferentes da solução anterior, no entanto mantém-se o valor da função objectivo (distância) e numa mesma rota continua a haver clientes que pertenciam a diferentes rotas da frota actualmente praticada na empresa. Este resultado foi obtido em 171 segundos (menos de 3 minutos). Ao aumentar os recursos, veículos e disponibilidades, e ao contrário do expectável, o tempo computacional para a resolução do problema aumenta para mais do triplo. O que nos sugere, em cenário real, que se deve trabalhar com a quantidade pedida pelo cliente e não, por exemplo, com as quantidades que estão em stock (superiores aos pedidos).

Para o mesmo problema, usamos agora o Modelo 2 seguindo as mesmas premissas do estudo do Modelo 1. Assim inicia-se o estudo considerando 3 veículos e a igualdade entre o pedido e o disponível. A melhoria do Modelo 2 em relação ao Modelo 1, é a indicação no output, do veículo considerado em cada arco (do cliente i para o cliente j), ou seja, facilita a leitura dos resultados e como tal foi mais rápido transformar os outputs nos esquemas que a seguir se apresentam. Seria também mais rápida a resposta a uma pergunta do tipo: “qual o veículo que faz a entrega no cliente β ? ”, que na empresa se fará muitas vezes pelos mais diversos motivos. As rotas obtidas são as apresentadas nas Figuras 13, 14 e 15 que se seguem.

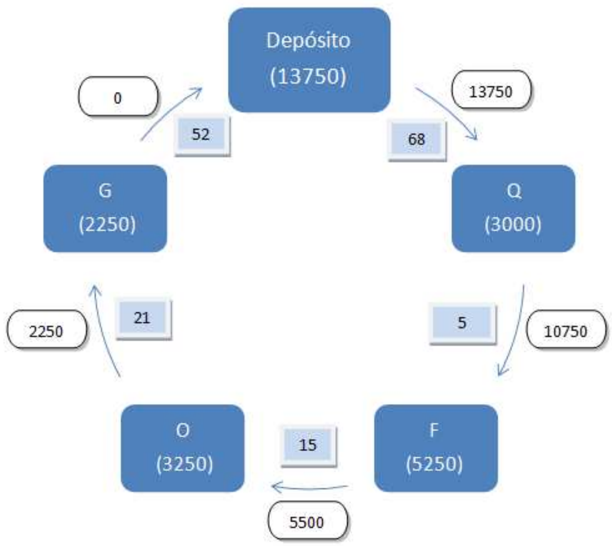

Figura 13 - Rota 1 da frota 4 simulada no Modelo 2, considerando 3 veículos disponíveis e o total das disponibilidades igual ao total dos pedidos.

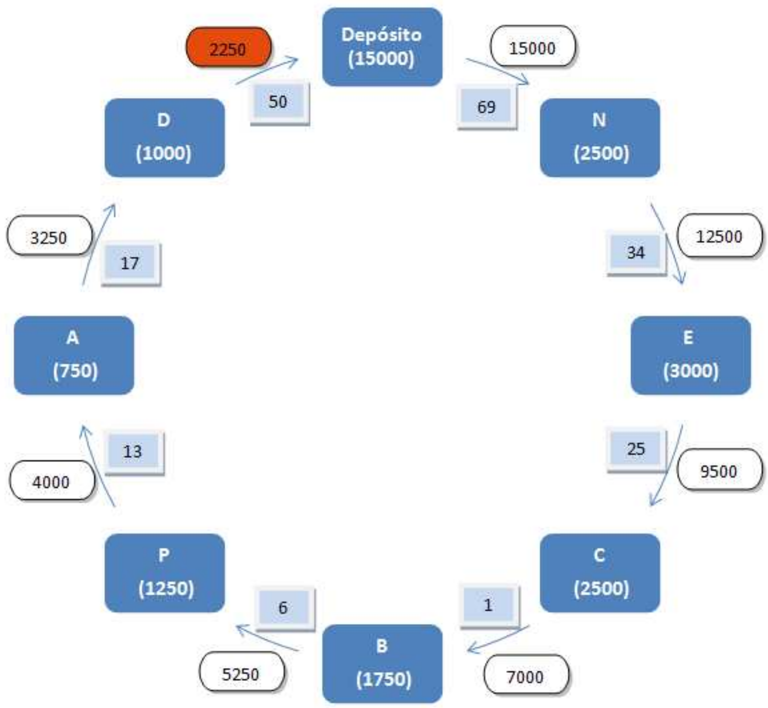

Figura 14 - Rota 2 da frota 4 simulado no Modelo 2, considerando 3 veículos e total das disponibilidades igual ao total dos pedidos.

Esta rota suscita-nos a um comentário específico, isto porque o veículo 2 retorna à origem com 2250 unidades do produto transportado, o que, teoricamente, não deveria acontecer. Neste caso, e ao contrário do que é habitual, em cenário real, facilmente se resolvia o problema, bastava apenas colocar menos a quantidade que retorna no veículo aquando da carga da viatura. No entanto, este caso deve ser objecto de estudo com desígnio de melhorar o Modelo 2.

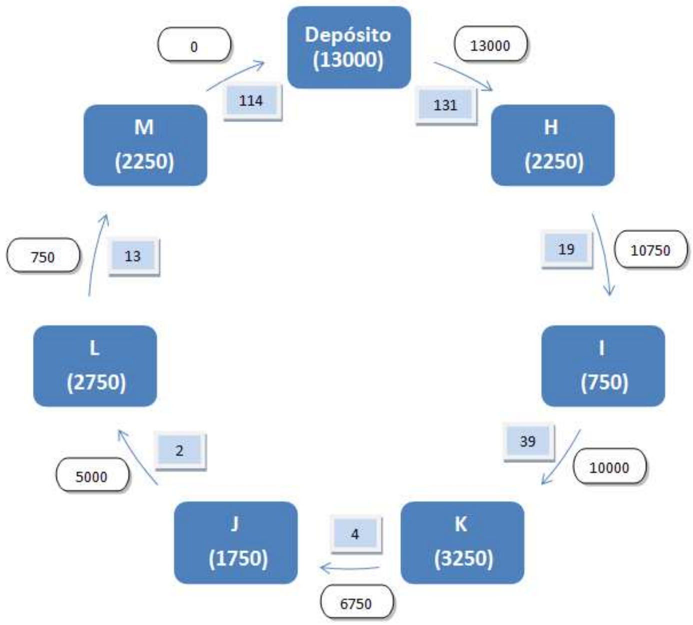

Figura 15 - Rota 3 da frota 4 simulado no Modelo 2, considerando 3 veículos e total das disponibilidades igual ao total dos pedidos.

Da aplicação do Modelo 2 retiram-se conclusões idênticas às já mencionadas para o Modelo 1. Os clientes de uma rota são provenientes de várias rotas iniciais. A função objectivo continua a ter o mesmo valor, 698 (Km). No que diz respeito ao tempo de execução deste modelo, este é consideravelmente superior, demorou 2455 segundos (cerca de 41 minutos), o que já é motivo para por em causa a sua aplicabilidade na empresa, pois caso seja necessário uma correcção e voltar a correr o Modelo torna-se pouco simpático estar à espera tanto tempo. Se, adicionalmente, estiver um veículo à espera para sair, então este Modelo deixará de ser utilizado, e em detrimento dele recorre-se ao senso comum fazendo assim os ajustes considerados necessários.

Seguindo os mesmos pressupostos do Modelo 1, simula-se agora o Modelo 2, com as disponibilidades superiores aos pedidos e com número de veículos disponíveis superior aos necessários. Apresentam-se de seguida os resultados nas Figuras 16, 17 e 18.

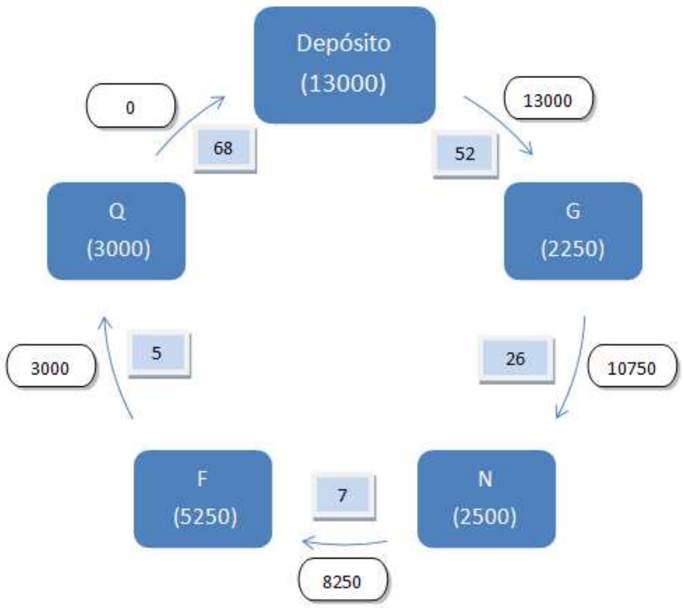

Figura 16 - Rota 1 da frota 4 simulada no Modelo 2, considerando 4 veículos disponíveis e o total das disponibilidades superior ao total dos pedidos.

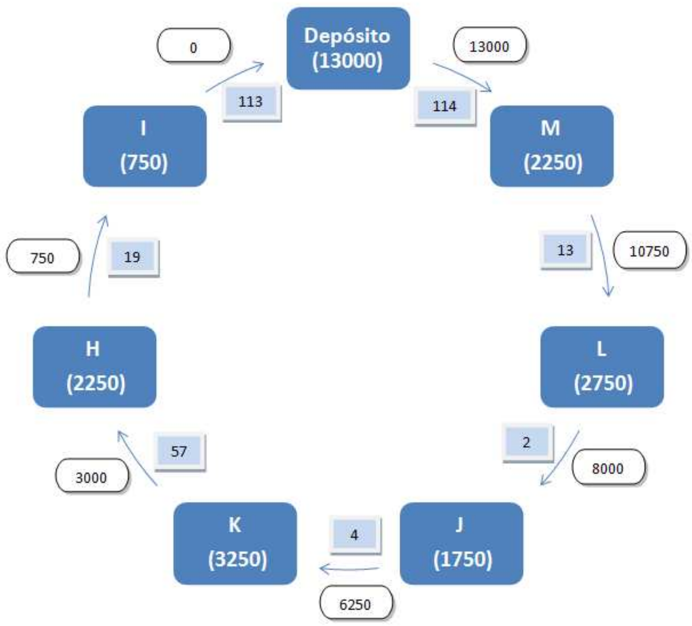

Figura 17 - Rota 2 da frota 4 simulada no Modelo 2, considerando 4 veículos disponíveis e o total das disponibilidades superior ao total dos pedidos.

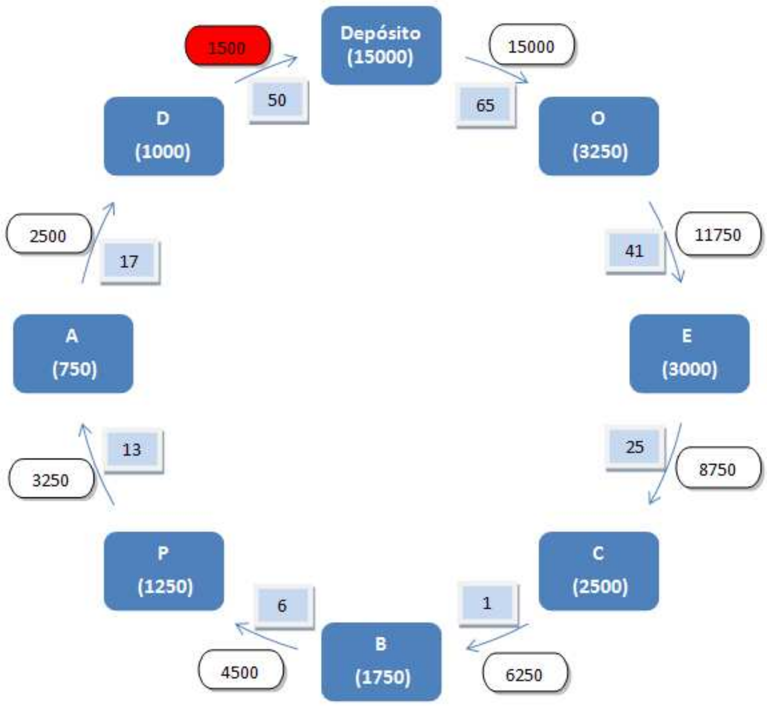

Figura 17 - Rota 3 da frota 4 simulada no Modelo 2, considerando 4 veículos disponíveis e o total das disponibilidades superior ao total dos pedidos.

A solução apresentada demorou 14 929 segundos (cerca de 249 minutos ou 4 horas e 15 minutos), pelo que é de todo impensável implementar uma solução destas numa empresa. Repetiu-se o mesmo "fenómeno" que na simulação anterior, há uma rota que retorna com 1500 unidades do produto. Apesar de ter a mesma distância das outras não é solução pelo tempo computacional que demora.

Curiosamente, não há nenhuma rota que se repita exactamente igual de uma simulação para outra. Em suma, encontraram-se quatro soluções distintas, que visitam todos os clientes das 3 rotas em estudo, com uma distância muito inferior, e no que respeita ao Modelo 1, com muito pouco tempo de resolução. Recorde-se que o somatório das distâncias das rotas actualmente utilizadas na empresa é de 942 Km. Depois de optimizadas individualmente passou a ser 824 Km e agora reformulando as rotas de raiz conseguimos um redução bastante considerável, para 698 Km. A diferença entre o ponto de partida e a solução a que chegámos é animadora. Se, se concretizar que estas rotas são de apenas 3 dias, então neste período de tempo economizaram-se 244 Km. Extrapolando, de uma forma muito simplista para um ano de trabalho, tem-se uma redução de 19 682 Km por viatura, pois se houver mais do que uma viatura por dia a circular então este valor será apenas uma parte do que se pode reduzir nas distâncias, e consequentemente nos custos de transporte.

Foi uma agradável surpresa, para o caso de estudo, verificar que conforme se íam seleccionando rotas a estudar, o resultado era sempre uma rota com menor distância do que a praticada. Foi portanto possível optimizar todas as rotas existentes. Depois ainda se optimizaram em simultâneo as 3 rotas em estudo, transformando as existentes noutras completamente diferentes, mas que satisfaziam todos os pedidos dos clientes. Perante este facto, o desafio que se coloca é encontrar rotas ainda mais económicas. E assim pensou-se ir um pouco mais longe, e ignorar as rotas existentes e tentar construir novas.

4.4. Determinação de novas rotas optimizadas

Pretende-se agora construir novas rotas optimizadas, ignorando tudo o que já existe na empresa. Para tal, consideraram-se os 20 clientes com maior facturação, com o intuito de abranger os clientes que mais vezes são visitados para a satisfação dos seus pedidos. Construiu-se a matriz de distâncias para estes clientes de modo a satisfazer os seus pedidos. Certamente não se poderá analisar um problema de optimização de rotas, como um problema estático, até porque há outras restrições e condicionantes a ter em conta, como por exemplo, a satisfação dos prazos de entrega aos clientes. Não obstante, há determinados clientes que, dado o seu consumo regular, são visitados periodicamente pelo que faz sentido este tipo de análise. Com base neste pressuposto, construíram-se as matrizes dos pedidos e das disponibilidades para este problema. Utilizando o Modelo 1, e considerando a quantidade disponível igual à quantidade pedida e o número de veículos disponíveis necessários à satisfação dos pedidos, obtiveram-se 3 rotas.

Apresenta-se de seguida, para cada uma das rotas obtidas, o respectivo esquema com a indicação dos pedidos dos clientes, da disponibilidade do depósito, da quantidade transportada entre dois pontos e da respectiva distância entre os mesmos. Assim, na Figura 18 apresenta-se a rota 1, na Figura 19 a rota 2 e, por fim, na Figura 20 a rota 3.

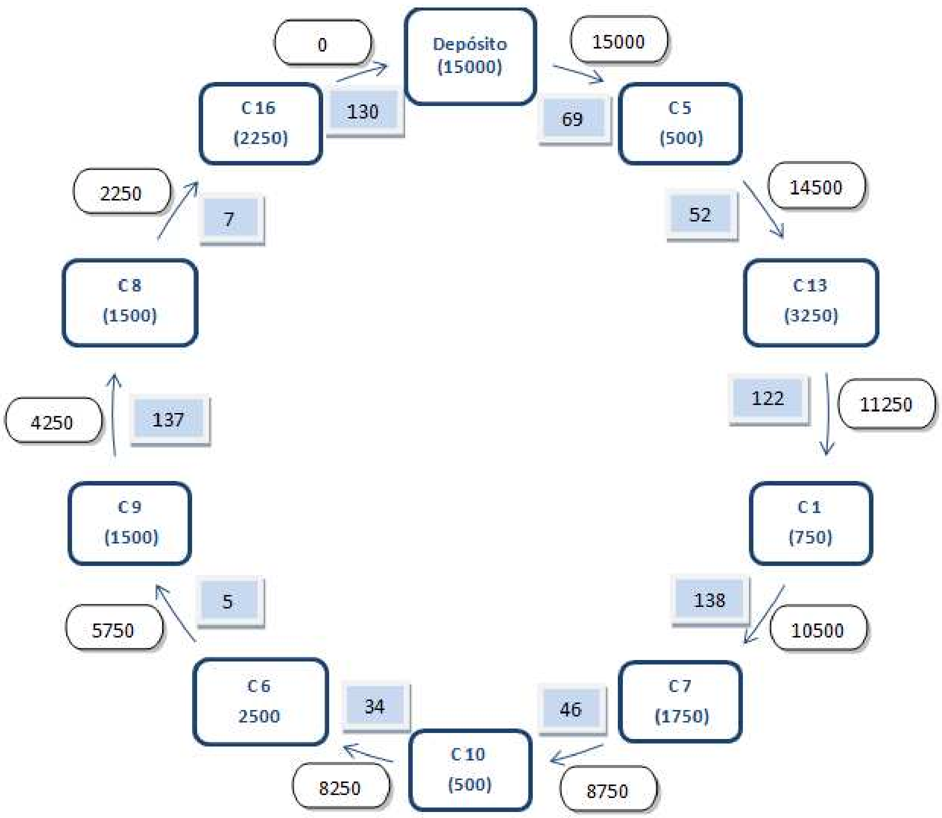

Figura 18 - Rota 1 para os 20 melhores clientes simulada no Modelo 1.

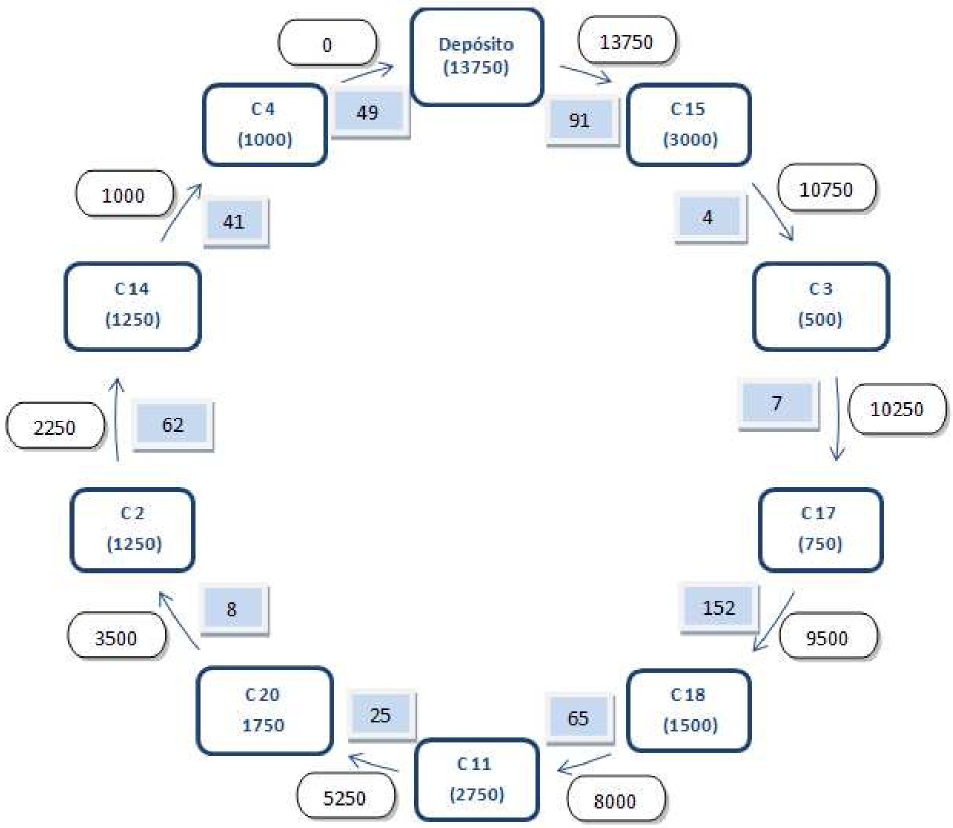

Figura 19 - Rota 2 para os 20 melhores clientes simulada no Modelo 1.

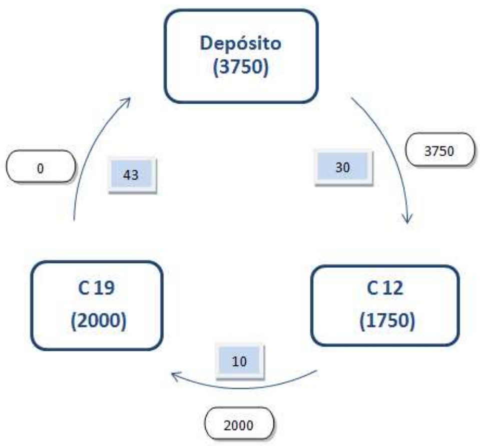

Figura 20 - Rota 3 para os 20 melhores clientes simulada no Modelo 1.

Infere-se assim que, para a satisfação dos pedidos apresentados para estes 20 clientes precisamos apenas de 3 veículos, sendo que um deles apenas visita 3 clientes. Naturalmente esta solução é para os pedidos em causa, e dependendo destes, o número de veículos pode aumentar ou diminuir. Neste caso a solução foi obtida em 1714 segundos (29 minutos) com o valor de 1327 (Km) para a função objectivo que representa a menor distância possível (segundo o nosso modelo) para a satisfação dos pedidos dos clientes.

Lamentavelmente, utilizando o 2º Modelo, não se conseguiu obter a solução óptima para este problema, uma vez que exige maior esforço computacional (que o primeiro), e passadas horas de execução o output é uma mensagem a alertar para a falta de memória para a árvore de pesquisa que o software tem de percorrer para se obter a solução.

5. Conclusão

Infere-se deste estudo, que as rotas de distribuição actuais da empresa estão muito longe de ser rotas optimizadas. Deve, por isso, encetar-se um trabalho rigoroso no domínio da logística nesta empresa. Os Modelos aqui apresentados e testados poderão servir de base para uma melhoria do sector logístico, no entanto, seria interessante aprofundar um pouco mais a abordagem do problema de rotas de veículos. Assim seria interessante acrescentar aos Modelos aqui apresentados as restrições temporais, uma vez que elas são, hoje em dia, uma constante na vida quotidiana de um departamento de logística.

Bibliografia

1. T.K.Ralphs, L. Kopman, W.R. Pulleyblnk, L.E. Trotter, “On the Capacitated Vehicle Routing Problem”.

2. G. Laporte, “The Vehicle Routing Problem: An overview of exact and approximate algorithms”, Centre de Recherche sur les transports, Université de Montréal, (1991)

3. G. Laporte, “What you should about the Vehicle Routing Problem”, Canada Research Chair in Distribution Management, (2007)

4. P. P. Belfiore, L. P. Fávero,“Problema de roteirização de veículos com entregas fraccionadas: revisão da literatura”, SIMPEP-Baurau, SP, (2006)

5. A. Moura, J.F. Oliveira, “Uma heurística Composta para a Determinação de Rotas de Veículos em Problemas com Janelas Temporais e Entregas e Recolhas”, In: *Investigação Operacional* (2004), pp. 45-62.

6. A. X. Martins, M.J. Souza, O.M.Castro, “ Um método híbrido para a resolução do problema de veículos”,ENEGEP, (2004)

7. N. Christofides, A. Mingozzi, P. Toth; “Exact algorithms for Solving the Vehicle Routing Problem Based on Spanning Trees and Shortest path Relaxations”. Matematical Programming 20, (1981).

8. J.A. Tavares, “Uma Abordagem Evolucionária ao Problema do Encaminhamento de veículos”, UC, (2003)

9. A. Moura, “Abordagens Heurísticas para o Planeamento de Rotas e Carregamento de Veículos” , FEUP, (2005).

10. D.S. Vainna, R.C. Gomes, “ Um Algoritmo Evolutivo para o problema de Roteamento em Arcos Capacitados”, NPDI, (2006).

11. G. Laporte, Y. Nobert; “ Exact algorithms for the vehicle routing problem”; Surveys in Combinatorial Optimization, Amsterdam (1987).

12. C. B. Cunha, “Aspectos práticos da aplicação de modelos de roteirização de veículos e problemas reais”, EPUSP, São Paulo.

13. P. B. Belfiore, “ Scatter Search para problemas de roteirização de veículos com frota homogénea, Janelas de tempo e entregas fraccionadas”,USP, (2006).

14. G. Laporte, " The Vehicle Routing Problem: Na overview of exact and approximate algorithms", C.R. T. – université Montréal, (1991)

15. T. K. Ralphs, L. Kopman, W. R. Pulleyblank, L. E. Trotter; " On the Capacitated vehicle Routing Problem", Mathematical Programming manuscript (1991).