



**Universidade de Aveiro** Departamento de Matemática  
2008

**Narciso Resende  
Gomes**

**Amostragem uniforme e não-uniforme**





Universidade de Aveiro Departamento de Matemática  
2008

**Narciso Resende  
Gomes**      **Amostragem uniforme e não-uniforme**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em *Matemática e Aplicações perfil Empresarial e Tecnológica*, realizada sob a orientação científica do Prof. Dr. Uwe Kähler, Professor Auxiliar Convidado com Agregação do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro



*Dedico este trabalho aos meus pais e ao meu irmão Miguel que alimentam a minha força de vencer e nunca desistir.*



## **o júri**

presidente

**Prof. Dr. Helmuth Robert Malonek**  
Professor Catedrático do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

**Prof. Dr. Daniel Abreu**  
Professor Auxiliar do Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

**Prof. Dr. Uwe Kähler**  
Professor Auxiliar Convidado com Agregação do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro





## **agradecimentos**

Gostaria de mencionar todos aqueles que me ajudaram, de uma forma ou de outra, para materialização deste trabalho.

Gostaria de agradecer:

- Ao Professor Dr. Uwe Kähler, meu orientador, pelo incansável e total apoio, desde início até ao fim. Obrigado pela partilha do conhecimento. As sugestões foram exemplares e excelentes.
- Aos meus familiares que me apoiaram. Aos meus pais, Miguel e Constância, por todo carinho. Ao meu irmão Miguel, em especial. Sou uma parte da tua personalidade. Às minhas irmãs, principalmente à Lina. Que Deus vos abençoe.
- Em especial, tenho que agradecer à Hílina. Obrigado pelo amor e carinho e pela amizade e companhia ao longo desses tempos. Sou eternamente grato.
- Àqueles, mas não menos importante, que os nomes não constam nesta página, que contribuíram para que este trabalho seja uma realidade. A todos, os meus sinceros agradecimentos.



**palavras-chave**

Amostragem, interpolação de Lagrange, interpolação de Bessel, teorema de Nyquist, funções q-Bessel, q-cálculo.

**resumo**

Neste trabalho vamos apresentar alguns conceitos básicos da teoria da amostragem uniforme e da não-uniforme, e sua ligação à teoria de interpolação. Numa primeira parte focaremos essencialmente os conceitos de *amostragem clássica de Nyquist* e de *Bessel*, bem como a respectiva ligação à interpolação de Lagrange e de Bessel. Na segunda parte, estudaremos a implementação numérica do método de amostragem por intermédio de funções q-Bessel (introduzido por D. Abreu [2]). O ramo da análise que estuda este tipo de funções é conhecido como *q-cálculo*. Foram implementadas as termos básicos, como sejam, o q-factorial (equivalente ao factorial clássico), o cálculo das funções q-Bessel, suas derivadas e respectivo método de amostragem. No final deste trabalho será dedicado a exemplos numéricos deste método.



**keywords**

Sampling, Lagrange interpolation, Bessel interpolation, Nyquist theorem, q-Bessel functions, q-calculus.

**abstract**

In this thesis we present Basic concepts of uniform and non-uniform sampling theory and their connection with interpolation theory. In the first part we will study the connection between the classic Nyquist-sampling and Bessel-sampling and Lagrange- and Bessel-interpolation. In the second part we study the numerical implementation of the sampling method using q-Bessel function introduced by D. Abreu [2]. To this end we implement basic terms of the q-Calculus, such as the q-factorial (equivalent to the classic factorial), the computation of q-Bessel functions and their derivatives, as well as the sampling method itself. In the end we present numerical examples for this method.



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Teoria de Amostragem e Interpolação</b>	<b>7</b>
2.1	Teorema de amostragem generalizada de Kramer . . . . .	9
2.2	Interpolação de Bessel . . . . .	10
2.3	Migração de um número finito de pontos uniformes . . . . .	11
2.4	Amostragem com um buraco simples numa distribuição uniforme . . .	12
2.5	Amostragem periódica não-uniforme . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Implementação numérica no caso de amostragem com funções q-Bessel</b>	<b>15</b>
3.1	Descrição do método . . . . .	15
3.2	Experiência numérica . . . . .	18
3.2.1	Observações básicas sobre implementação do q-cálculo . . . . .	18
3.2.2	Implementação de funções q-Bessel . . . . .	22
3.2.3	Implementação da derivada $J_\nu^{(3)}(x; q)$ . . . . .	22
3.2.4	Implementação da transformada q-Hankel . . . . .	23
3.3	Resultados numéricos do cálculo de funções q-Bessel . . . . .	24
3.4	Resultados de amostragem . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Conclusão</b>	<b>33</b>
	Bibliografia . . . . .	42





# Lista de Figuras

2.1	Amostras uniformes de deslocamento positivo . . . . .	13
2.2	Amostragem periódica não-uniforme . . . . .	13
3.1	Erro $1 - q^{\epsilon_n}$ em função de $\epsilon_n$ , onde $q = 0.001$ e $q = 0.01$ . . . . .	19
3.2	Erro $1 - q^{\epsilon_n}$ em função de $\epsilon_n$ , onde $q = 0.1$ e $q = 0.5$ . . . . .	19
3.3	Erro $1 - q^{\epsilon_n}$ em função de $\epsilon_n$ , onde $q = 0.001$ , $q = 0.01$ , $q = 0.1$ , $q = 0.5$ e $q = 0.9$ . . . . .	20
3.4	$q = 0.3$ e $\nu = 0.7$ , $0 < x < 40$ . . . . .	24
3.5	$q = 0.3$ e $\nu = 0.7$ , $0 < x < 20$ . . . . .	25
3.6	$q = 0.3$ e $\nu = 0.7$ , $0 < x < 06$ . . . . .	25
3.7	$q = 0.5$ , $\nu = 0$ , $0 < x < 10$ , $j_{6\nu}(q^2) = 1$ e restantes iguais a 0 . . . . .	26
3.8	$q = 0.5$ , $\nu = 0$ , $0 < x < 20$ , $j_{6\nu}(q^2) = 1$ e restantes iguais a 0 . . . . .	27
3.9	$q = 0.7$ , $\nu = 0$ , $0 < x < 14$ , $j_{4\nu}(q^2) = 1$ e $j_{5\nu}(q^2) = 1$ e restantes iguais a 0 . . . . .	27
3.10	$q = 0.7$ , $\nu = 0$ , $0 < x < 20$ , $j_{4\nu}(q^2) = 1$ e $j_{5\nu}(q^2) = 1$ e restantes iguais a 0 . . . . .	27
3.11	$q = 0.7$ , $\nu = -0.2$ , $0 < x < 20$ , $j_{6\nu}(q^2) = 1$ e restantes iguais a 0 . . . . .	28
3.12	$q = 0.5$ , $\nu = 0.9$ , $0 < x < 20$ , $j_{6\nu}(q^2) = 1$ e restantes iguais a 0 . . . . .	28
3.13	$q = 0.99$ , $\nu = 0$ , $0 < x < 20$ , $j_{n\nu}(q^2) = 1$ , $n \in \{2, \dots, 6\}$ . . . . .	29
3.14	$q = 0.99$ , $\nu = 0$ , $0 < x < 20$ , $j_{6\nu}(q^2) = 1$ e restantes iguais a 0 . . . . .	29
3.15	$q = 0.99$ , $\nu = 0$ , $0 < x < 20$ , $j_{n\nu}(q^2) = 10^3$ , $n \in \{2, \dots, 6\}$ . . . . .	30
3.16	$q = 0.99$ , $\nu = 0$ , $0 < x < 20$ , $j_{n\nu}(q^2) = 1e28$ , $n \in \{2, \dots, 6\}$ . . . . .	30
3.17	$q = 0.7$ , $\nu = 0$ , $0 < x < 5$ , $j_{4\nu}(q^2) = 1$ e $j_{5\nu}(q^2) = 1$ e restantes iguais a 0 . . . . .	31
3.18	$q = 0.7$ , $\nu = 0$ , $0 < x < 5$ , $j_{4\nu}(q^2) = 1$ e $j_{5\nu}(q^2) = 9$ e restantes iguais a 0 . . . . .	31
3.19	$q = 0.7$ , $\nu = 0$ , $0 < x < 5$ , $j_{4\nu}(q^2) = 9$ e $j_{5\nu}(q^2) = 1$ e restantes iguais a 0 . . . . .	32



# Capítulo 1

## Introdução

A amostragem é um processo de conversão de um sinal (aqui, entendido como uma função em tempo, contínua) para uma sequência numérica (função em tempo, discreta).

Deste modo, é um tópico fundamental nas telecomunicações e no processamento de sinais, com muita relevância prática na conversão de um sinal analógico para sinal digital (A/D) e de um sinal digital para sinal analógico (D/A).

Em 1928, Henry Nyquist enunciou que a conversão de um sinal analógico para formato digital é garantida, se a frequência de amostragem representa, no mínimo, duas vezes a frequência máxima (frequência de Nyquist) presente na forma de onda analógica original. Este enunciado ficou conhecido como Teorema de Nyquist. Por outras palavras, isto significa que um sinal analógico pode ser reconstruído a partir de um sinal digital se os pontos de amostragem têm espaçamento  $\frac{1}{2W}$ , onde  $W$  é a frequência máxima ou frequência de Nyquist do sinal na forma original.

Desde então a teoria de amostragem revelou-se um campo de estudo muito activo por parte da Matemática e das suas aplicações à Engenharia. No primeiro capítulo introduziremos os conceitos básicos da amostragem uniforme e não-uniforme e sua ligação intrínseca à teoria de interpolação.

As teorias matemáticas carecem de ser implementadas. Por várias razões, algumas delas não tem viabilidade prática ou numérica. Em particular, é impossível concluir, a partir da viabilidade analítica, a sua aplicabilidade prática sem uma implementação e um estudo com exemplos numéricos. Neste trabalho queremos estudar a viabilidade da implementação numérica do teorema da amostragem da função q-Bessel descrito em D. Abreu ([2]).

O estudo numérico e a sua implementação em Matlab<sup>1</sup> será o objecto do segundo capítulo. Neste descreveremos o método, técnicas de implementação usadas aqui, e encerraremos com vários exemplos numéricos. De referir aqui também o problema que surgiu aquando da implementação numérica do cálculo dos zeros da função q-Bessel. Este cálculo revelou-se delicado, exigindo a implementação de alguns métodos de resolução de equações e/ou sistemas de equações não lineares, permitindo assim obter boas aproximações iniciais para estes zeros.

---

<sup>1</sup>versão 7.3 (R2006b)

## Capítulo 2

# Teoria de Amostragem e Interpolação

O problema principal de amostragem consiste na reconstrução de uma função a partir dos seus valores sobre um conjunto discretos de valores. Obviamente, a solução deste problema depende altamente das escolhas dos pontos (chamados pontos de amostragem) e das funções envolvidas.

Em geral a amostragem é apresentado na seguinte forma:  $f$  pertence a uma dada classe de funções,  $(g_m)_m$  é um conjunto de funções, e  $(x_n)$  são pontos tal que  $g_m(x_n) = \delta_{nm}$  então podemos representar  $f$  como

$$f(x) = \sum_m f(x_m)g_m(x).$$

Aqui suponhamos que o valor de  $f$  nos pontos  $x_m$  é conhecido.

Este problema também é nitidamente ligado ao problema de Interpolação, onde queremos construir uma função  $f(x)$  (com certas propriedades) tal que  $f(x_i) = y_i$ , para um conjunto de valores  $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$ .

Nesta secção apresentaremos a ligação entre o problema da amostragem e o problema de interpolação. Vamos ilustrar como a interpolação de Lagrange pode ser usado para a resolução do problema de amostragem.

Para encontrar uma função de interpolação correspondente a amostras não-uniforme, consideramos  $\{e^{i\omega t_n}\}$  como base no domínio da frequência. Se este sistema é completo então qualquer função  $f$  com banda limitada podemos representar na forma

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega t_n}, \quad \text{supp } F \in [-W, W], \quad (2.1)$$

onde  $W$  é a frequência de Nyquist.

Aplicando a inversa da Transformada de Fourier (ver [10]) de (2.1) obtemos

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \operatorname{sinc}[2W(t - t_n)], \quad (2.2)$$

onde  $c_n$  denota o produto interno

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Psi_n(t) dt \quad (2.3)$$

de  $f(t)$  com a função  $\Psi_n(t)$  que é bi-ortogonal em relação a função  $\operatorname{sinc}[2W(t - t_n)]$ , i.e.,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_k(t) \operatorname{sinc}[2W(t - t_n)] dt = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}.$$

O problema com a representação (2.2) é que este não está na forma de amostragem, i.e., os coeficientes  $c_n \neq f(t_n)$ , excepto quando  $t_n = nT$ . Obviamente, este caso corresponde ao caso clássico de amostragem de Nyquist.

Por outro lado a equação (2.2) pode ser escrita usando as funções  $\Psi_n$  e a mencionada bi-ortogonalidade. Neste caso obtemos uma representação de amostragem

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) \Psi_n(t). \quad (2.4)$$

Se denotamos  $T = \frac{1}{2W}$  a taxa de Nyquist e escolhemos os pontos  $t_n$  tal que

$$|t_n - nT| \leq D < T/4, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.5)$$

então  $\{e^{i\omega t_n}\}$  representa uma base para sinais de banda-limitada no domínio da frequência.

Ainda mais,  $\Psi_n(t)$  corresponde a uma função interpoladora de Lagrange (ver [14]), i.e.,

$$\Psi_n(t) = \frac{H(t)}{H'(t_n)(t - t_n)}, \quad (2.6)$$

com  $\Psi_n(t_n) = 1$  e  $\Psi_n(t_k) = 0$  para  $k \neq n$ . Aqui,

$$H(t) = (t - t_0) \prod_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{t_k}\right). \quad (2.7)$$

Salientamos que a condição (2.5) garante a convergência de (2.6).

Portanto, o problema de amostragem reduz-se via (2.4) e (2.6) para o problema geral de interpolação de Lagrange.

Se a condição (2.5) não for satisfeita, mas  $t_n$  é em média maior do que frequência de Nyquist e satisfaz

$$|t_n - nT| \leq L < \infty, \quad |t_n - t_m| > \delta > 0, \quad n \neq m, \quad (2.8)$$

então a nossa função de interpolação de Lagrange (2.6) continua a ser válida mas o produto infinito em (2.7) não converge.

Contudo, o seguinte produto ainda converge uniformemente:

$$H(t) = e^{at}(t - t_0) \prod_{k \neq 0} \left(1 - \frac{t}{t_k}\right) e^{t/t_k}, \quad (2.9)$$

com  $a = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{t_k}$ .

Aqui também é interessante notar que o famoso Teorema de amostragem de Nyquist pode ser obtido usando a interpolação de Lagrange tomando como um conjunto de pontos de amostragem  $\{t_n\}$  para um conjunto  $\{nT\}$ . Neste caso, o produto em (2.7) converge para  $\frac{T}{\pi} \sin(\frac{\pi t}{T})$ . A equação (2.6) fica

$$\Psi_n(t) = \frac{(-1)^n \sin(\frac{\pi t}{T})}{\frac{\pi}{T}(t - nT)} = \text{sinc}\left(\frac{t}{T} - n\right).$$

Vamos em seguida estudar alguns casos de amostragem a partir do nosso ponto de vista de interpolação de Lagrange.

Zayd, Hinsin e Batzer mostraram em [20] que a interpolação de Kramer pode ser representado a partir da interpolação de Lagrange onde o núcleo  $k(s, t)$  provém do problema do valor limite de Sturm-Liouville.

## 2.1 Teorema de amostragem generalizada de Kramer

Seja  $I = [a, b]$  um intervalo finito e fechado. Denotamos com  $L_2(I)$  a classe de funções de quadrado integrável sobre  $I$ .

Seja dado o operador integral

$$x(t) = \int_I k(s, t) g(s) ds, \quad (2.10)$$

onde  $g(s) \in L_2(I)$  e  $k(s, t) \in L_2(I \times I)$ .

Escolhemos o conjunto  $\{t_n\}$  de tal modo que  $k(s, t_n)$  representa um conjunto de funções ortogonais em  $L_2(I \times I)$ . Neste caso,

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t_n) S_n(t), \quad (2.11)$$

onde as funções  $S_n(t)$  são dadas por

$$S_n(t) = \frac{\int_I k(s, t) \overline{k(s, t_n)} ds}{\int_I |k(s, t_n)|^2 ds} \quad (2.12)$$

e  $\overline{k(s, t)}$  denota o conjugado complexo de  $k(s, t)$ . A prova da interpolação acima reside no facto de escrever  $g(s)$  em termos das funções ortogonais  $\overline{k(s, t_n)}$ , i.e.,

$$g(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \overline{k(s, t_n)}.$$

Aqui obtemos

$$c_n = \frac{\int_I g(s) k(s, t_n) ds}{\int_I |k(s, t_n)|^2 ds} = \frac{x(t_n)}{\int_I |k(s, t_n)|^2 ds}.$$

## 2.2 Interpolação de Bessel

Podemos usar qualquer núcleo reprodutivo  $k(s, t)$  como candidato para a construção das funções ortogonais na secção anterior. Por exemplo, se a função  $x(t)$  é dado pela “Transformada de Hankel” (i.e., por uma função de Bessel)

$$x(t) = \int_I J_m(st) X(s) ds,$$

onde o intervalo  $I = [0, W]$  é escolhido tal que  $x(t)$  é limitada na banda em relação a função de Bessel  $J_m$ , então a construção da secção anterior resulta em

$$x(t) = \sum_{n=-\infty, n \neq 0} x(t_n) \frac{J_m(t)}{(t_n - t) J_{m+1}(t_n)}. \quad (2.13)$$

Aqui  $J_m$  denota a função de Bessel de  $m$ -ésimo ordem do primeiro tipo e  $\{t_n\}$  são os zeros de  $J_m(t)$ .

Para obter a equação acima a partir da interpolação de Lagrange, verifica-se que os zeros de  $J_m(t)$  satisfazem a condição suficiente (2.5).

Assim, a função  $H(t)$  (c.f. (2.7)) tem agora a forma

$$H(t) = t^m \prod_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{t_k}\right).$$

Salientamos que o termo  $t^m$  é usado porque a *Função de Bessel*  $J_m$  tem um zero de multiplicidade  $m$  em  $t = 0$ .

Ainda, gostaríamos de acrescentar que a função  $H$  tem também a representação

$$H(t) = J_m(t) 2^m \Gamma(m + 1), \quad (2.14)$$



onde  $\Gamma$  é a *Função Gama* (c.f. [19]). Usando a relação  $J'_m(t_n) = -J_{m+1}(t_n)$  podemos obter (2.13) a partir de (2.6) e (2.14).

Isto também resulta na fórmula

$$x(t) = \sum_{n=-\infty, n \neq 0} x(t_n) \frac{J_m(t)}{(t-t_n)J'_m(t_n)}.$$

Podemos obter uma expansão semelhante a partir de (2.4) e (2.6) desde que  $|t_n - (n-1/4)| \leq 1/4$  e  $t_n = -t_{-n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  (ver [16]).

## 2.3 Migração de um número finito de pontos uniformes

Suponha-se um esquema de amostragem uniforme (com frequência de Nyquist  $T$ ) onde  $N$  amostras uniformes são deslocadas para novas posições  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ . Podemos obter a fórmula de reconstrução explícita a partir da *Interpolação de Lagrange* (ver [18]), i.e., a função  $H(t)$  de (2.7) transforma-se em

$$H(t) = \prod_{k=1}^N \left(1 - \frac{t}{t_k}\right) \prod_{k < 0, k \geq N} \left(1 - \frac{t}{kT}\right) = \frac{\prod_{k=1}^N \left(1 - \frac{t}{t_k}\right) \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}{t \prod_{k=1}^{N-1} \left(1 - \frac{t}{kT}\right)}.$$

Se substituirmos a equação anterior em (2.6) obtemos a seguinte fórmula de amostragem,

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t_m) \psi_m(t), \quad (2.15)$$

onde  $t_m$ ,  $1 \leq m \leq N$ , é igual as instâncias não-uniformes e  $t_m$  é igual a  $mT$  no caso contrário. A função  $\psi_m(t)$  é dado por

$$\psi_m(t) = \begin{cases} \frac{\prod_{q=1}^n (t-t_q) \prod_{i=1}^N (mT-iT)}{\prod_{i=1}^N (t-iT) \prod_{i=1}^N (mT-t_q)} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T} - m\right), & \begin{cases} m \leq 0 \\ m > N \end{cases} \\ \frac{\prod_{q \neq m} (t-t_q) \prod_{i=1}^N (mT-iT)}{\prod_{i=1}^N (t-iT) \prod_{q \neq m} (t_m-t_q)} \frac{\sin(2\pi \frac{t}{T})}{\sin(2\pi \frac{t_m}{T})}, & 1 \leq m \leq N. \end{cases} \quad (2.16)$$

Quando todas as amostras uniformes ( $x(t_m); m < 0, m > N$ ) forem zero, a função interpoladora (2.16) representa uma função interpolada de banda-limitada sobre  $N$  amostras não-uniformes havendo zeros uniformes fora do intervalo. A equação (2.15) torna-se

$$x(t) = \sum_{m=1}^N x(t_m) \psi_m(t). \quad (2.17)$$

Gostaríamos de salientar que a interpolação sobre  $N$  amostras não-uniformes não é única. Yen [18] usou critério de *energia mínima* para obter uma interpolação única.

Neste caso a função interpoladora sobre  $N$  amostras não-uniformes com energia mínima ( $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$ ) tem a forma

$$\psi_m(t) = \sum_{q=1}^N \alpha_{qm} \operatorname{sinc}[2W(t - t_q)], \quad (2.18)$$

em que  $\alpha_{qm}$  representam os elementos da inversa da matriz cujos elementos são  $\operatorname{sinc}[2W(t_m - \tau_q)]$ ,  $m, q = 1, 2, \dots, N$ .

Yeh e Stark [17] tal como Calvagio e Munson [5] mostraram a optimalidade da interpolação de Yen [18] no sentido de erro em quadrado médio.

## 2.4 Amostragem com um buraco simples numa distribuição uniforme

Vamos considerar o caso especial apresentado na Figura 2.1, i.e.,

$$t_n = \begin{cases} +nT, & n \leq 0 \\ \Delta + nT, & n > 0 \end{cases}$$

Se  $\Delta < T$ , então  $x(t)$  está sempre entre  $nT$  e  $(n+1)T$ . A interpolação tem a forma

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t_n) \psi_n(t),$$

com

$$\psi_n(t) = \frac{(-1)^n \Gamma(2W\Delta + n)}{\Gamma(2Wt) \Gamma[2W(\Delta - t)]n!} \times \begin{cases} (n + 2Wt)^{-1}, & n \leq 0 \\ (n + 2W(\Delta - t))^{-1}, & n > 0 \end{cases}. \quad (2.19)$$

A prova encontra-se em [18].

## 2.5 Amostragem periódica não-uniforme

Seja dado um conjunto de  $N$  atrasos  $\tau_k$  (c.f. Figura 2.2), i.e., os pontos da amostragem são

$$t_{nk} = nNT + \tau_k, \quad \begin{cases} k = 1, 2, \dots, N, \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ T = \frac{1}{2W} \end{cases} \quad (2.20)$$

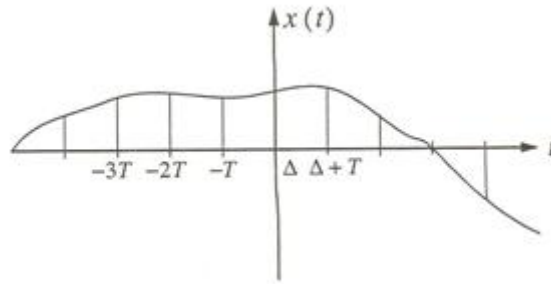


Figura 2.1: Amostras uniformes de deslocamento positivo

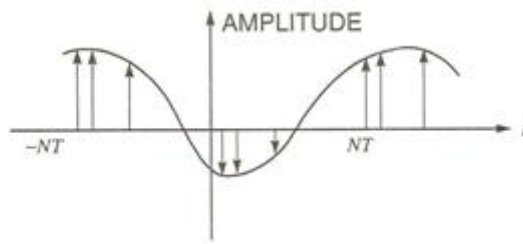


Figura 2.2: Amostragem periódica não-uniforme

Assim, a fórmula de interpolação toma a forma

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N f(t_{nk}) \psi_{nk}(t), \quad (2.21)$$

com

$$\psi_{nk}(t) = \frac{N \prod_{i=1}^N \sin \frac{2\pi W}{N} (t - t_{ni})}{2\pi W (t - t_{nk}) \prod_{i=1, i \neq k}^N \sin \frac{2\pi W}{N} (\tau_k - \tau_i)}. \quad (2.22)$$

Em diferença a função sinc,  $\psi_{nk}$  não toma o seu máximo num ponto de amostragem, mas atinge o seu máximo entre pontos de amostras não-uniformes. Podemos obter a representação (2.22) a partir da interpolação de Lagrange, i.e., podemos escrever  $H(t)$  (ver (2.7)) como (ver também Figura 2.2)

$$H(t) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{t_k}\right), \quad t_0 \neq 0, \quad (2.23)$$

ou

$$H(t) = \prod_{|k|=0, N, 2N, \dots} \left(1 - \frac{t}{t_k}\right) \prod_{|k|=1, 1+N, 1+2N, \dots} \left(1 - \frac{t}{t_k}\right) \prod \dots \quad (2.24)$$

Aqui, cada produto em (2.24) converge para

$$K_k \sin \frac{2\pi W}{N} (t - \tau_k), \quad (2.25)$$

onde  $K_k = -[\sin(\frac{2\pi W}{N}t_k)]^{-1}$  representa um factor escalar que podemos determinar a partir de  $H(0) = 1$ .

Agora, a equação (2.24) torna-se

$$H(t) = K \prod_{k=0}^{N-1} \sin \frac{2\pi W}{N}(t - \tau_k), \quad (2.26)$$

onde  $K = \prod_{k=0}^{N-1} K_k$ . Daqui, obtemos para  $H'(t_n)$ :

$$H'(t_n) = \frac{K 2\pi W}{N} \prod_{k \neq n} \sin 2\pi W(t_n - \tau_k). \quad (2.27)$$

Da equação (2.6), segue

$$\Psi_n(t) = \frac{N \prod_{k=0}^{N-1} \sin \frac{2\pi W}{N}(t - \tau_k)}{2\pi W(t - t_n) \prod_{k \neq n} \sin 2\pi W(t_n - \tau_k)}. \quad (2.28)$$

A comparação entre (2.28) e (2.22) mostra que estas duas funções interpoladoras são equivalentes.

# Capítulo 3

## Implementação numérica no caso de amostragem com funções q-Bessel

Um dos exemplos no capítulo anterior é a amostragem usando funções de Bessel.

Em D. Abreu [2], as propriedades da transformada de Hankel (ver [11]) e os conceitos do núcleo reprodutivo são usados para obter o teorema de amostragem, onde os pontos da amostragem são os zeros da função q-Bessel.

Neste capítulo estudaremos a implementação deste método de amostragem. A implementação final e os exemplos numéricos são feitos em Matlab.

Para o efeito daremos em primeiro lugar os teoremas e fórmulas necessárias. Em seguida discutiremos os problemas da sua implementação. No final daremos alguns exemplos numéricos.

### 3.1 Descrição do método

O teorema clássica de amostragem, exposto no capítulo anterior (c.f. (2.1)), afirma que toda função do mesmo espaço pode ser representado pela série de interpolação (2.2).

Contando com as propriedades do núcleo da transformada de Hankel, em [9] Higgins usou a teoria de núcleo reprodutivo para obter um teorema de amostragem onde os pontos de amostragem são os zeros da função de Bessel. No caso em estudo, a amostragem de q-Bessel é obtida a partir do núcleo de transformada de q-Hankel,  $H_q^\nu$ , introduzida por Koornwinder e Swarttouw [11]:

$$(H_q^\nu f)(x) = \int_0^\infty (xt)^{\frac{1}{2}} J_\nu^{(3)}(xt; q^2) f(t) d_q t, \quad (3.1)$$

onde  $J_\nu^{(3)}$  representa a função Jackson q-Bessel de terceiro grau definida por

$$J_\nu^{(3)}(x; q) = \frac{(q^{\nu+1}; q)_\infty}{(q; q)_\infty} x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(q^{\nu+1}; q)_n (q; q)_n} x^{2n}. \quad (3.2)$$

Aqui temos  $0 < q < 1$ .  $(a; q)_n = (1 - a)(1 - aq) \dots (1 - aq^{n-1})$  denota o q-equivalente da função factorial e  $(a; q)_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} (a; q)_n$ .

O q-integral no intervalo  $(0, 1)$  é definida por

$$\int_0^1 f(t) d_q t = (1 - q) \sum_{n=0}^{\infty} f(q^n) q^n \quad (3.3)$$

e no intervalo  $(0, \infty)$  como

$$\int_0^\infty f(t) d_q t = (1 - q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(q^n) q^n. \quad (3.4)$$

Como pontos da amostragem vamos usar os pontos  $q j_{n\nu}(q^2)$ , onde  $j_{n\nu}(q^2)$  é n-ésimo zero da função  $J_\nu^{(3)}(x; q^2)$ . Em [1] foi provado que

$$j_{n\nu}(q^2) = q^{-n+\epsilon_n}, 0 < \epsilon_n < 1. \quad (3.5)$$

Isto indica também a distância entre os pontos da amostragem.

Em seguida estabelecemos o teorema para a q-amostragem.

Para este efeito introduzimos a versão q-Bessel do espaço de Paley-Wiener  $PW_q^\nu$ :

$$PW_q^\nu = \left\{ f \in L_2^q(0, \infty) : f(x) = \int_0^1 (tx)^{\frac{1}{2}} J_\nu^{(3)}(xt; q^2) u(t) d_q t, u \in L_2^q(0, 1) \right\}. \quad (3.6)$$

A notação  $L_2^q(0, 1)$  representa o espaço de Hilbert associada à medida dado pelo q-integral sobre o intervalo  $(0, 1)$ . Em [11] está provado a seguinte fórmula de inversão da transformada q-Hankel:

$$f(t) = \int_0^\infty (xt)^{\frac{1}{2}} (H_q^\nu f)(x) J_\nu^{(3)}(xt; q^2) d_q x = (H_q^\nu (H_q^\nu f))(t). \quad (3.7)$$

Se  $f \in L_2^q(0, \infty)$  tal que  $H_q^\nu f(q^{-n}) = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$  então temos  $f \in PW_q^\nu$ .

Para verificar, usamos a fórmula (3.7) e comparamos (3.3) e (3.4) para escrever  $f$  como um elemento de  $PW_q^\nu$ .

O raciocínio aqui é muito semelhante ao raciocínio usado no teorema generalizada de amostragem de Kramer. Nota-se que o núcleo de transformada de Hankel é dado por

$$K(x, t) = (xt)^{\frac{1}{2}} J_\nu^{(3)}(xt; q^2). \quad (3.8)$$

O operador correspondente  $K$  é dado por

$$(Ku)(x) = \langle K(x, t), u(t) \rangle_{L_q^2(0,1)} = \int_0^1 (tx)^{\frac{1}{2}} J_\nu^{(3)}(xt; q^2) u(t) d_q t.$$

De (3.7) obtemos que  $H_q^\nu$  é um operador onde a inversa é o próprio operador e consequentemente, uma isometria. Assim,  $K$  também é uma isometria. A imagem de  $K$ ,  $N$ , é o conjunto das funções  $f \in L_q^2(0, \infty)$  na qual  $f = Ku$  para algum  $u \in L_q^2(0, 1)$ . Da definição em (3.6) obtemos  $N = PW_q^\nu$ . No próximo Lema, o núcleo reprodutivo do espaço  $PW_q^\nu$  é dado.

**Lema 3.1.1.** *O conjunto  $PW_q^\nu$  é um espaço de Hilbert com núcleo reprodutivo dado por*

$$g(s, x) = (1 - q)q^\nu \frac{(xs)^{\frac{1}{2}} \left[ x J_{\nu+1}^{(3)}(x; q^2) J_\nu^{(3)}(sq^{-1}; q^2) - s J_{\nu+1}^{(3)}(s; q^2) J_\nu^{(3)}(xq^{-1}; q^2) \right]}{x^2 - s^2} \quad (3.9)$$

A prova deste Lema encontra-se em D. Abreu ([2]).

Apresentemos, de seguida, o teorema de q-amostragem.

**Teorema 3.1.2.** *Se  $f \in PW_q^\nu$  então  $f$  tem uma representação única, dado por*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(qj_{n\nu}(q^2)) \frac{2(xqj_{n\nu}(q^2))^{\frac{1}{2}} J_\nu^{(3)}(x; q^2)}{\frac{d}{dx} \left[ J_\nu^{(3)}(x; q^2) \right]_{x=qj_{n\nu}(q^2)} (x^2 - q^2 j_{n\nu}^2(q^2))} \quad (3.10)$$

onde  $j_{n\nu}(q^2)$  denota a sucessão dos zeros positivos de  $J_\nu^{(3)}(x; q^2)$ . A série converge uniformemente em qualquer sub-conjunto compacto de  $(0, \infty)$ .

A demonstração deste teorema encontra-se em D. Abreu ([2]).

Consideremos a sequência  $\{f_n(x)\}$ , dado por

$$f_n(x) = (xqj_{n\nu}(q^2))^{\frac{1}{2}} J_\nu^{(3)}(xqj_{n\nu}(q^2); q^2) \quad (3.11)$$

que é ortogonal e completa em  $L_q^2(0, 1)$ . Levando em conta que  $K$  representa uma isometria, a sequência  $(Kf_n)(x)$  é ortogonal e completa em  $PW_q^\nu$ . Então a função

$$F_n(x) = \frac{(Kf_n)(x)}{(Kf_n)(j_{n\nu}(q^2))}$$

representa uma função interpoladora, i.e., a ortogonalidade de  $\{f_n(x)\}$  implica

$$F_n(j_{m\nu}(q^2)) = \delta_{nm}. \quad (3.12)$$

O raciocínio é basicamente equivalente ao raciocínio que usamos no teorema de amostragem de Kramer (c.f. [20]).

Deste modo, qualquer  $f \in PW_q^\nu$  tem uma única expansão em série na forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n F_n(x), \quad (3.13)$$

onde  $a_n$  representa coeficientes de Fourier de  $f$  em  $F_n(x)$ . A série (3.13) é convergente em norma de  $L_q^\nu(0,1)$  e também em norma de  $PW_q^\nu$ . Finalmente,  $x = qj_{n\nu}(q^2)$  em (3.13), (3.12) implica  $f(qj_{n\nu}(q^2)) = a_n$  e deste modo, (3.13) pode ser escrita na forma de (3.10).

## 3.2 Experiência numérica

Nesta secção estudaremos os problemas relacionados com a implementação numérica do método anteriormente exposto. Enquanto analiticamente não existe qualquer problema de convergência, vamos ver que o uso de uma aritmética finita, como existente no computador, muda radicalmente a situação.

Na realidade, analiticamente não há problemas em trabalhar com somas e produtos infinitos, mas quando se trata de cálculos numéricos no computador, isto não é possível pela natureza discreta do próprio computador. Por este motivo, nesta secção, embora possam aparecer explicitamente somas, ou produtos infinitos, na aritmética finita do computador, estes têm de ser limitados, consoante o caso, por um número finito de termos.

### 3.2.1 Observações básicas sobre implementação do q-cálculo

Para implementar o método precisamos em primeiro lugar dos pontos  $j_{n\nu}(q^2)$ , i.e., dos  $n$ -ésimos zeros de  $J_\nu^{(3)}(x; q^2)$ . Como estes não são explicitamente dados, tomando em conta (3.5), optamos por aproximar  $j_{n\nu}(q^2) \approx q^{-n}$ . De acordo com (3.5), introduzimos



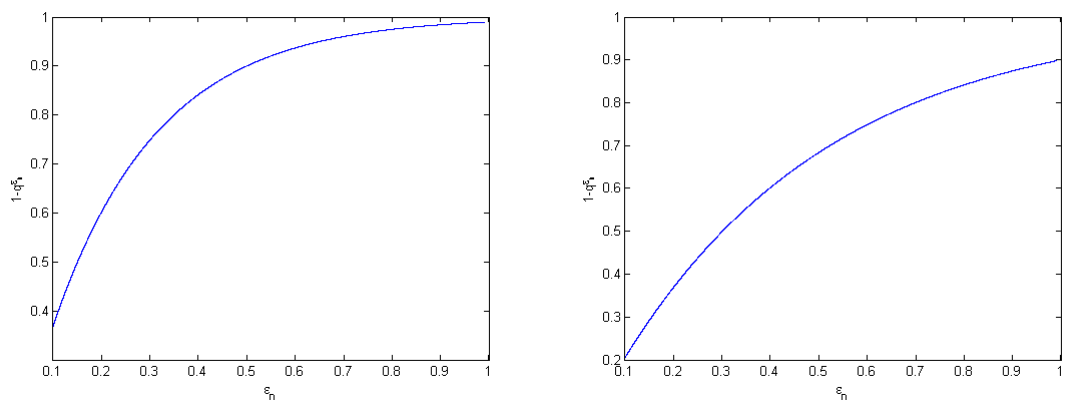


Figura 3.1: Erro  $1 - q^{\epsilon_n}$  em função de  $\epsilon_n$ , onde  $q = 0.001$  e  $q = 0.01$

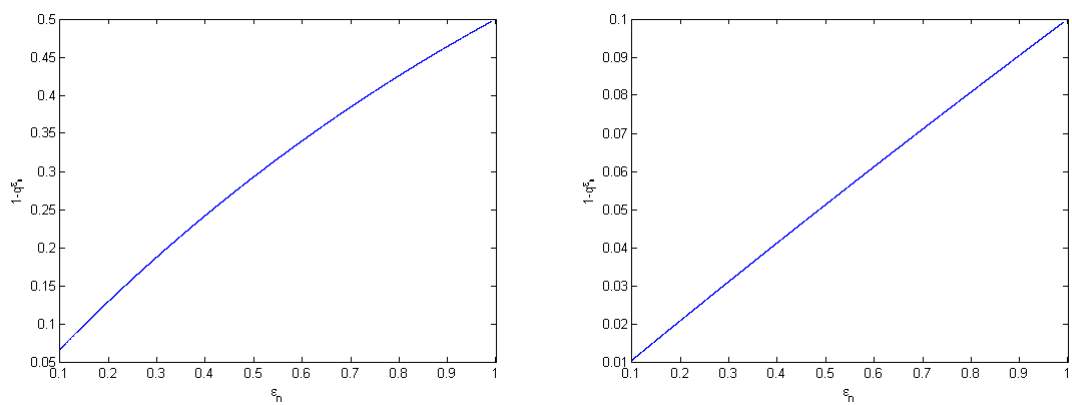


Figura 3.2: Erro  $1 - q^{\epsilon_n}$  em função de  $\epsilon_n$ , onde  $q = 0.1$  e  $q = 0.5$

um erro absoluto igual  $|(1 - q^{\epsilon_n})q^{-n}|$  e, portanto, um erro relativo igual a  $1 - q^{\epsilon_n}$ , com  $0 < \epsilon_n < 1$ . O erro relativo em relação a  $\epsilon_n$  está ilustrada nas figuras seguintes.

Na Figura 3.3, podemos entender melhor o comportamento da função  $1 - q^{\epsilon_n}$  em função de  $\epsilon_n$ , com  $q = 0.001$ ,  $q = 0.01$ ,  $q = 0.1$ ,  $q = 0.5$  e  $q = 0.9$  fixos.

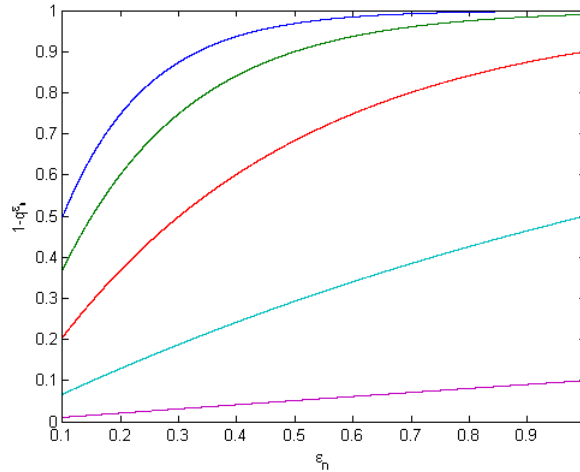


Figura 3.3: Erro  $1 - q^{\epsilon_n}$  em função de  $\epsilon_n$ , onde  $q = 0.001$ ,  $q = 0.01$ ,  $q = 0.1$ ,  $q = 0.5$  e  $q = 0.9$

Notamos que o erro fica pior quando  $q \rightarrow 0$ .

Gostaríamos de salientar que o cálculo dos zeros é um problema principal. Tentamos também aproximar os zeros usando a função *roots* em Matlab, que calcule os zeros através dos valores próprios da matriz acompanhante do polinómio

$$\sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(q^{\nu+1}; q)_n (q; q)_n} x^{2n}.$$

Aqui notamos que a aproximação inicial não é suficientemente bom e para valores grandes (calcular primeiros 50 zeros para ter 20 zeros com uma aproximação aceitável) a matriz já é suficientemente mau para impedir a convergência do método. Por exemplo, calculando os zeros para  $k = 30$  obtemos 8 zeros entre 0 e 2, onde deve existir apenas um zero.

Podemos também aplicar o método de Newton-Raphson onde vamos precisar de uma boa aproximação. Aqui o problema principal reside numa boa aproximação inicial dos zeros. Podemos usar como aproximação inicial  $q^{-n+0.5}$ , mas certamente não nos ajuda.

Para melhorar a aproximação inicial das raízes usamos a função *roots* de Matlab. Contudo a função *roots* não nos resolve o problema por completo porque o resultado

---

para os zeros maiores não é suficientemente bom. A razão principal reside no facto que a função q-Bessel é altamente oscilante com crescimento de tipo exponencial.

Para a implementação, ao utilizarmos a função *roots*, obtemos os zeros de um polinómio de ordem crescente por ordem decrescente exigindo deste modo uma reorganização dos resultados obtidos.

Finalmente, queremos dar ênfase ao facto da existência de resultado teóricos sobre a distribuição dos zeros que implica um bom método para a verificação dos zeros obtidos.

Precisamos também implementar as fórmulas  $(a; q)_n$  e  $(a; q)_\infty$  usado no cálculo de  $J_\nu^{(3)}(x; q)$ . Sabendo que

$$(a; q)_n = \prod_{k=1}^n (1 - aq^{k-1}), \quad (a; q)_0 = 1, \quad (3.14)$$

definida em [3], podemos calcular  $(a; q)_\infty$  através do limite

$$(a; q)_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} (a; q)_n.$$

Como  $0 < q < 1$ , podemos naturalmente substituir a fórmula  $(a; q)_\infty$  por  $(a; q)_m$  com um  $m$  suficientemente grande.

Por outro lado, encontramos em [1] uma outra fórmula para  $(a; q)_\infty$ . Ali encontramos a fórmula

$$(x; q)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(q; q)_n} x^n. \quad (3.15)$$

Obviamente as fórmulas anteriores são analiticamente equivalentes. Na prática (cálculos numéricos) podemos verificar que a soma infinita (3.15) converge mais rapidamente que o produto infinito, o que também parece natural.

A convergência é garantida se  $\left[ q^{\frac{n-1}{2}} x \right] < 1 \Rightarrow q^{\frac{n-1}{2}} < \frac{1}{x}$ . Analiticamente, isto é sempre garantido, mas numericamente para valores elevados de  $x$  isto constitui um problema. Por um lado para valores grandes de  $x$  e valores de  $q$  perto de um precisamos um grande  $n$ . Por outro lado para valores pequenos de  $q$  chegamos rapidamente ao limite dos números no computador, i.e., ao **realmax**. Ainda um problema em aberto é obter condições suficientes para uma escolha óptima de  $q$ .

Notamos finalmente, que a diminuição do erro nos zeros implica a escolha de um  $q$  perto de um enquanto o problema da convergência necessita um  $q$  pequeno (perto de zero).

### 3.2.2 Implementação de funções q-Bessel

Em relação a implementação das funções q-Bessel notamos que temos também duas fórmulas para função de Jackson q-Bessel de terceira ordem,  $J_\nu^{(3)}(x; q)$ :

$$J_\nu^{(3)}(x; q) = \frac{(q^{\nu+1}; q)_\infty}{(q; q)_\infty} x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(q^{\nu+1}; q)_n (q; q)_n} x^{2n}$$

referida anteriormente em (3.2) (c.f. [2]) e

$$J_\nu^{(3)}(x; q) = \frac{x^\nu}{(q; q)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(q^{k+1} x^2; q)_\infty}{(q; q)_k} q^{\frac{k(k+2\nu+1)}{2}} \quad (3.16)$$

definida em [1].

Analiticamente não podemos negar que essas duas fórmulas são semelhantes. Na execução prática, verificamos que a implementação da equação (3.16) converge mais rapidamente. Por esta razão, optou-se por esta última na implementação do método.

Para os valores altos de  $x$  em  $J_\nu^{(3)}(x; q^2)$  do Teorema 3.1.2, obtemos valores excessivamente elevados, i.e., chegamos rapidamente ao `realmax` e obtemos valores não propriamente definidos em Matlab com `NaN`. Para resolver este problema, tivemos que limitar a função  $J_\nu^{(3)}(x; q^2)$ .

Como era de esperar, para aplicação, tivemos que simplificar algumas fórmulas. A fórmula  $(q^{k+1} x^2; q)_\infty$  explícita em (3.16), pode ser simplificada para

$$(q^{k+1} x^2; q)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{n(\frac{n-1}{2}+k+1)}}{(q; q)_n} x^{2n}.$$

Desta forma, a fórmula (3.16) pode ficar como

$$J_\nu^{(3)}(x; q) = \frac{1}{(q; q)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{q^{\frac{k(k+2\nu+1)}{2}}}{(q; q)_k} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{n(\frac{n-1}{2}+k+1)}}{(q; q)_n} x^{2n+\nu},$$

onde introduzimos  $x^\nu$  para dentro do somatório para facilitar o cálculo.

### 3.2.3 Implementação da derivada $J_\nu^{(3)}(x; q)$

Temos também que implementar a derivada da função  $J_\nu^{(3)}(x; q)$ . Em vez de usar diferenciação numérica que é altamente instável, optamos aplicar a fórmula

$$\frac{d}{dx} [J_\nu^{(3)}(x; q)] = \frac{1}{(q; q)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{q^{\frac{k(k+2\nu+1)}{2}}}{(q; q)_k} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{n(\frac{n-1}{2}+k+1)}}{(q; q)_n} (2n + \nu) x^{2n+\nu-1}. \quad (3.17)$$

Esta fórmula da derivada de (3.16) é obtida via diferenciação da série. Aqui notamos que a série converge uniformemente em qualquer subconjunto fechado de  $\mathbb{R}$ .

Uma outra possibilidade reside na adaptação da fórmula (4.1) em [2] para o caso de funções  $q$ -Bessel. Mas, como aqui temos as diferenças entre  $x$  e os zeros da função no denominador, uma implementação directa não parece muito aconselhável.

Para finalizar gostaríamos de dar algumas observações para o cálculo das funções  $F_n(x)$ .

Podemos implementar a função  $F_n$  de acordo com (3.13) e o Teorema 3.1.2, podemos escrever

$$F_n(x) = \frac{2(xqj_{n\nu}(q^2))^{\frac{1}{2}} J_{\nu}^{(3)}(x; q^2)}{\frac{d}{dx} \left[ J_{\nu}^{(3)}(x; q^2) \right]_{x=qj_{n\nu}(q^2)} (x^2 - q^2 j_{n\nu}^2(q^2))}.$$

O resultado numérico da função  $F_n$  aproxima muito do valor pretendido para maioria dos valores de  $x$ . Mas para dois ou três valores isolados de  $x$ , obtemos resultados longe do desejado.

Para os valores de  $x$  muito alto, nota-se que ultrapassam todos os valores e uma das maneiras para resolução deste problema é limitar esses valores com `realmax=1.7977e+308`, em MatLab.

De (3.10), no denominador do quociente  $\frac{2(xqj_{n\nu}(q^2))^{\frac{1}{2}}}{(x^2 - q^2 j_{n\nu}^2(q^2))}$  é necessário garantir a desigualdade  $x^2 \neq q^2 j_{n\nu}^2(q^2)$ .

Seguidamente apresentaremos uma outra forma de implementar a função  $F_n$  a partir da transformada de  $q$ -Hankel  $Ku$ .

### 3.2.4 Implementação da transformada $q$ -Hankel

Uma outra forma de implementar a função  $F_n$  é através do quociente:

$$F_n(x) = \frac{(Kf_n)(x)}{(Kf_n)(j_{n\nu}(q^2))},$$

onde  $j_{n\nu}(q^2)$  representa os  $n$ -ésimos zeros de  $J_{\nu}^{(3)}(x; q^2)$ .

Como podemos ver, não é preciso o cálculo da derivada no cálculo  $F_n$  via  $Kf_n$ . Utilizaremos o  $q$ -integral (c.f. 3.3):

$$\int_0^1 f(t) d_q t = (1 - q) \sum_{n=0}^{\infty} f(q^n) q^n.$$

O operador  $K$  é dado por (c.f. 3.8)

$$(Ku)(x) = (1 - q) \int_0^1 (xt)^{\frac{1}{2}} J_{\nu}^{(3)}(xt; q^2) u(t) d_q t.$$

Aplicando o operador  $K$  a nossa função (c.f. 3.11)

$$f_n(x) = (xqj_{n\nu}(q^2))^{\frac{1}{2}} J_{\nu}^{(3)}(qxj_{n\nu}(q^2); q^2),$$

obtemos

$$(Kf_n)(x) = (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} (xq^k)^{\frac{1}{2}} J_{\nu}^{(3)}(xq^k; q^2) f_n(q^k) q^k.$$

Podemos ver que para a igualdade  $x = j_{n\nu}(q^2)$ , o resultado é sempre um. Portanto é automático, tanto analiticamente como numericamente. Quando a desigualdade  $x \neq j_{n\nu}(q^2)$  se verifica, os resultados deviam ser ou aproximar muito do zero.

Ainda desta forma, salientamos que  $(Kf_n)(j_{n\nu}(q^2)) \neq 0$ .

### 3.3 Resultados numéricos do cálculo de funções $q$ -Bessel

Para ilustrar o resultado do cálculo de  $J_{\nu}^{(3)}(x; q^2)$  apresentaremos alguns gráficos com variações de valores de  $q$  e  $\nu$ . Salientamos que foram obtidos à custa da fórmula (3.16).

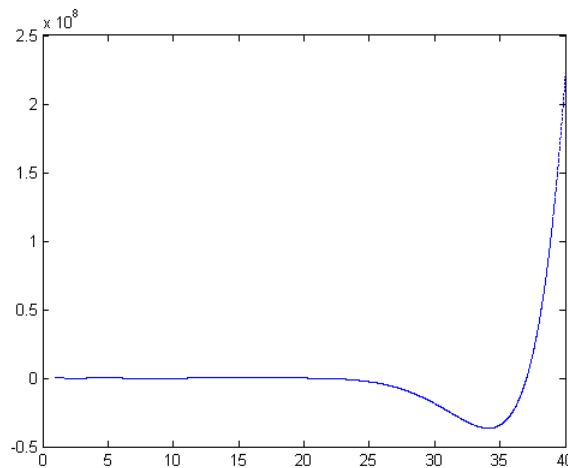


Figura 3.4:  $q = 0.3$  e  $\nu = 0.7$ ,  $0 < x < 40$

Podemos observar que o problema dos valores altos persiste no cálculo numérico de  $(x, q)_{\infty}$  para valores elevados de  $x$ , i.e., continuaremos com o problema de **overflow**.

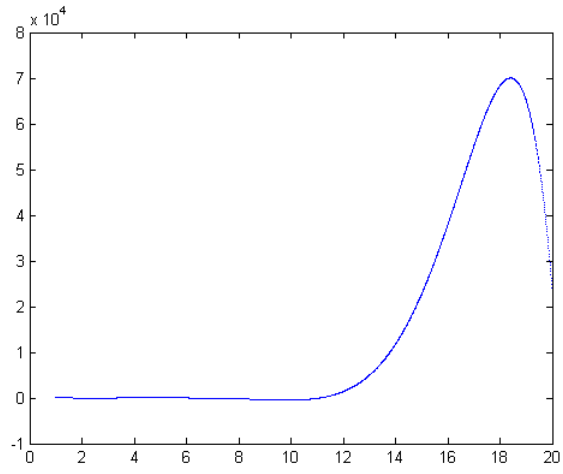


Figura 3.5:  $q = 0.3$  e  $\nu = 0.7$ ,  $0 < x < 20$

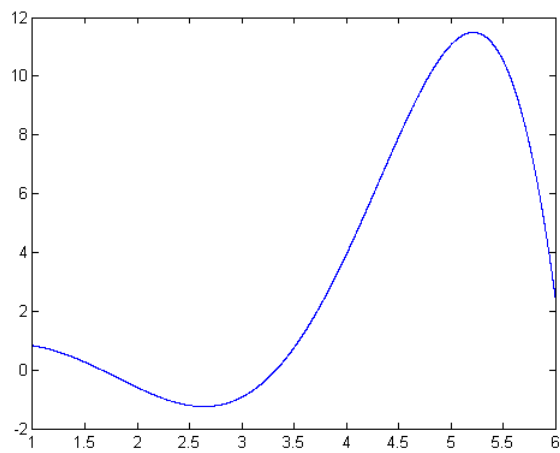


Figura 3.6:  $q = 0.3$  e  $\nu = 0.7$ ,  $0 < x < 06$

Podemos verificar claramente que a função é oscilante e intersecta os zeros. A amplitude cresce rapidamente, o que implica que nos gráficos só a última oscilação é visível onde é crescente de uma forma quase exponencial.

### 3.4 Resultados de amostragem

Não é trivial a escolha dos parâmetros  $q$  e  $\nu$  para o Teorema 3.1.2. Por exemplo, quando os valores de  $q$  são muito pequeno, a amostragem deixa de ter sentido.

A seguir apresentaremos alguns exemplos com variação destes parâmetros. Gostaríamos de salientar que devido ao problema do cálculo dos zeros, só consideramos para a amostragem funções com valores diferentes de zero unicamente nos pontos onde temos uma boa aproximação do zero.

Como referimos anteriormente só obtemos alguns zeros válidos para aplicação do teorema, isto implica (para os nossos exemplos)  $j_{n\nu}(q^2) = 0$ , excepto quando  $n \in \{2, \dots, 6\}$ . De igual modo, na secção anterior, verificamos que a função é oscilante e de tipo de crescimento exponencial. Assim, a amplitude cresce rapidamente, o que implica que nos gráficos em geral só a última oscilação da função seja visível. Por este motivo, também a necessidade de variação dos valores de  $x$ .

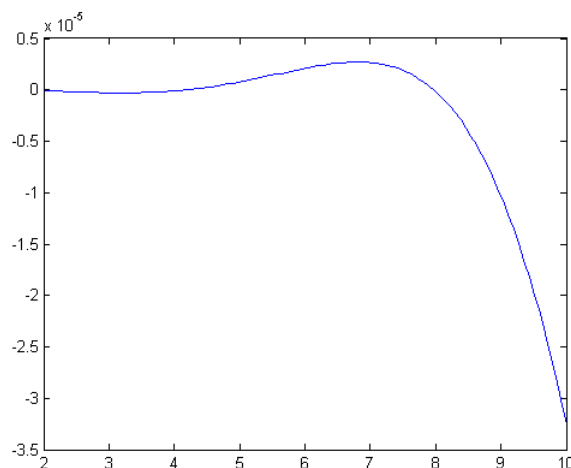


Figura 3.7:  $q = 0.5$ ,  $\nu = 0$ ,  $0 < x < 10$ ,  $j_{6\nu}(q^2) = 1$  e restantes iguais a 0

De acordo com os gráficos da Figura 3.11 e da Figura 3.12 verificamos que as variações de  $\nu$  não têm grandes alterações na função da amostragem.



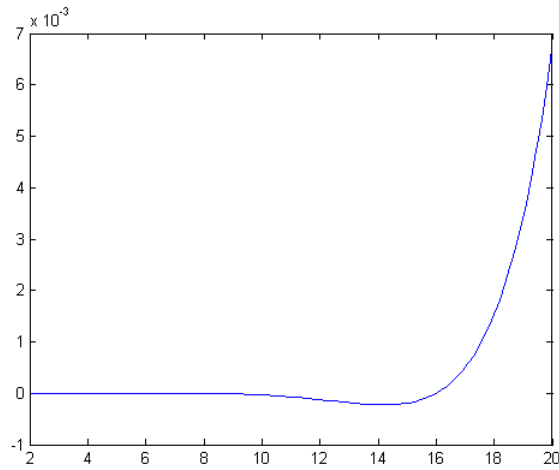


Figura 3.8:  $q = 0.5$ ,  $\nu = 0$ ,  $0 < x < 20$ ,  $j_{6\nu}(q^2) = 1$  e restantes iguais a 0

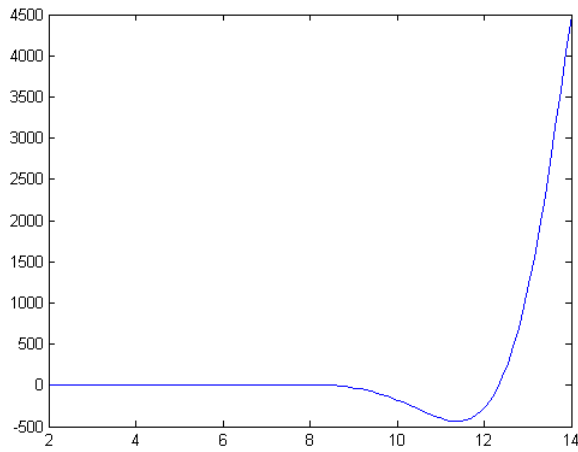


Figura 3.9:  $q = 0.7$ ,  $\nu = 0$ ,  $0 < x < 14$ ,  $j_{4\nu}(q^2) = 1$  e  $j_{5\nu}(q^2) = 1$  e restantes iguais a 0

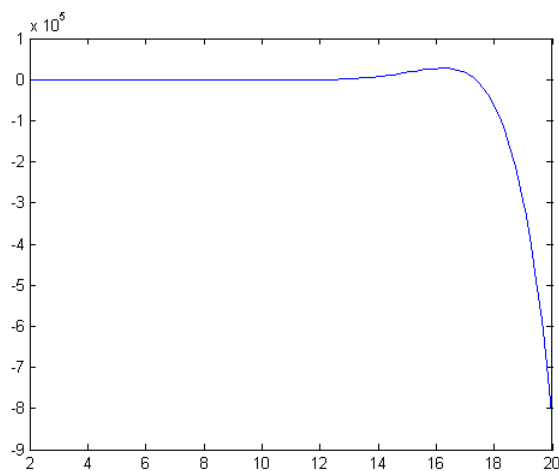


Figura 3.10:  $q = 0.7$ ,  $\nu = 0$ ,  $0 < x < 20$ ,  $j_{4\nu}(q^2) = 1$  e  $j_{5\nu}(q^2) = 1$  e restantes iguais a 0

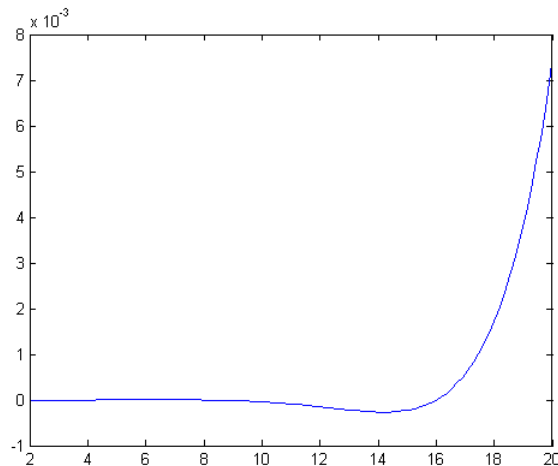


Figura 3.11:  $q = 0.7$ ,  $\nu = -0.2$ ,  $0 < x < 20$ ,  $j_{6\nu}(q^2) = 1$  e restantes iguais a 0

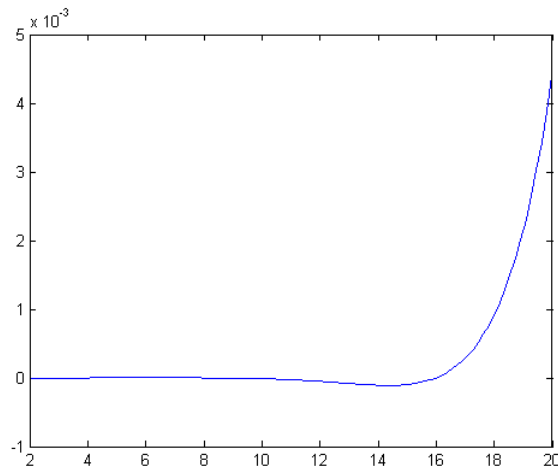


Figura 3.12:  $q = 0.5$ ,  $\nu = 0.9$ ,  $0 < x < 20$ ,  $j_{6\nu}(q^2) = 1$  e restantes iguais a 0

Se os valores de  $q$  ( $0 < q < 1$ ) forem muitíssimo próximo de 1 (por exemplo 0.99), os valores de  $j_{n\nu}(q^2)$  ( $n = 2, \dots, 6$ ) parecem não ter real influência no resultado da amostragem (ver a Figura 3.13 e a Figura 3.14). Na Figura 3.15, podemos ver que se  $j_{n\nu}(q^2)$  forem suficientemente grande (neste caso  $10^3$ ), o resultado sofre alguma alteração visível. Na Figura 3.16, podemos ver uma real alteração do resultado, por exemplo, quando  $j_{n\nu}(q^2) = 1e30$ . Podemos concluir que, neste caso, a alteração do resultado da amostragem é verificada quando os valores  $j_{n\nu}(q^2)$  forem muitíssimo alto.

De acordo com os parâmetros de  $q$  e  $j_{n\nu}(q^2)$ , como nos mostra a Figura 3.17, há alguns casos em que podemos obter oscilações ou reconstruções violentas com crescimento exponencial, com zeros da função de amostragem muito perto.

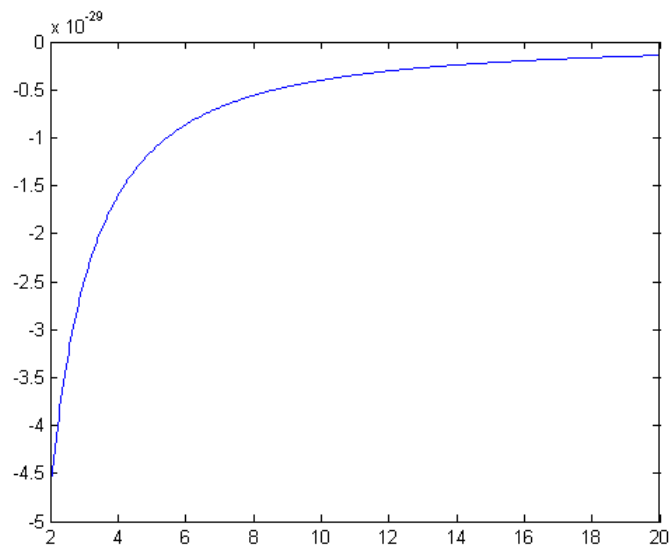


Figura 3.13:  $q = 0.99$ ,  $\nu = 0$ ,  $0 < x < 20$ ,  $j_{n\nu}(q^2) = 1$ ,  $n \in \{2, \dots, 6\}$

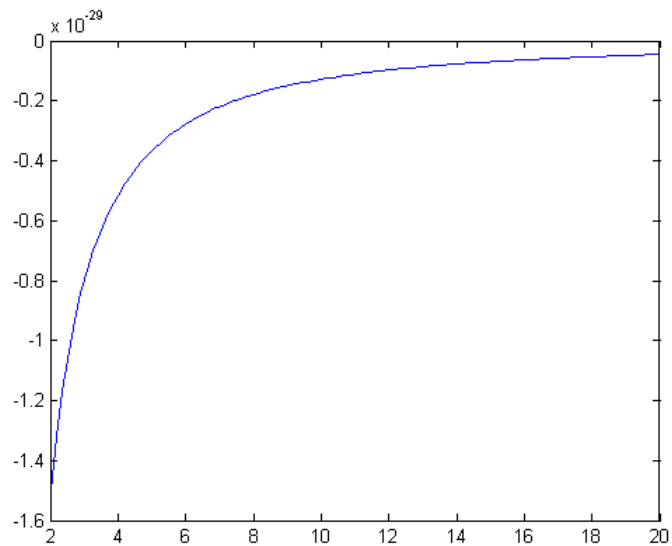


Figura 3.14:  $q = 0.99$ ,  $\nu = 0$ ,  $0 < x < 20$ ,  $j_{6\nu}(q^2) = 1$  e restantes iguais a 0

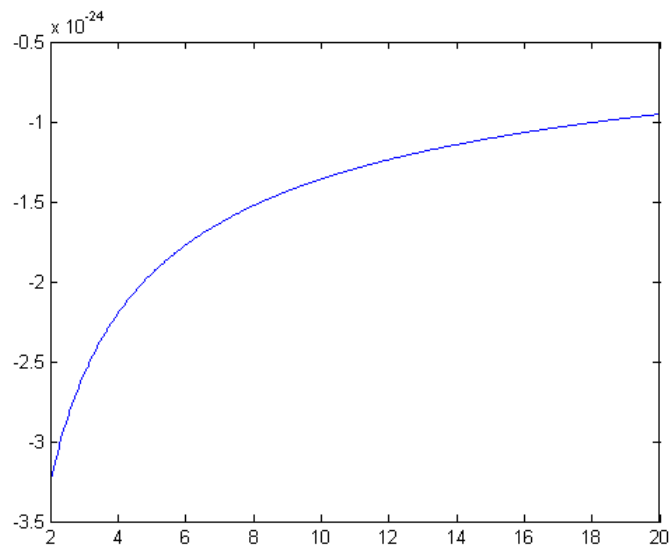


Figura 3.15:  $q = 0.99$ ,  $\nu = 0$ ,  $0 < x < 20$ ,  $j_{n\nu}(q^2) = 10^3$ ,  $n \in \{2, \dots, 6\}$

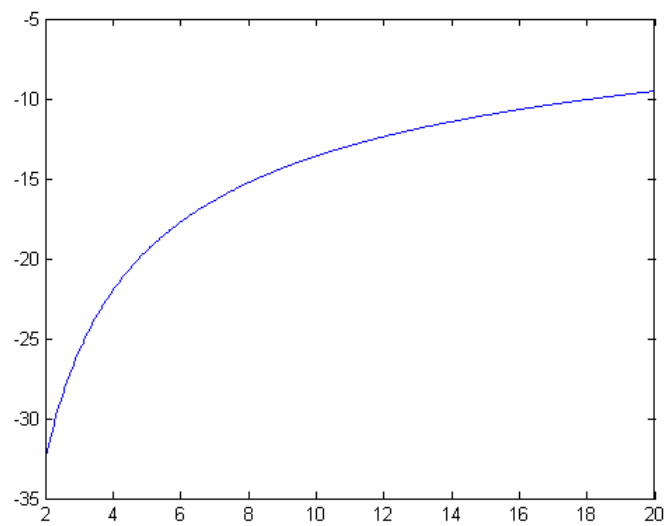


Figura 3.16:  $q = 0.99$ ,  $\nu = 0$ ,  $0 < x < 20$ ,  $j_{n\nu}(q^2) = 1e28$ ,  $n \in \{2, \dots, 6\}$

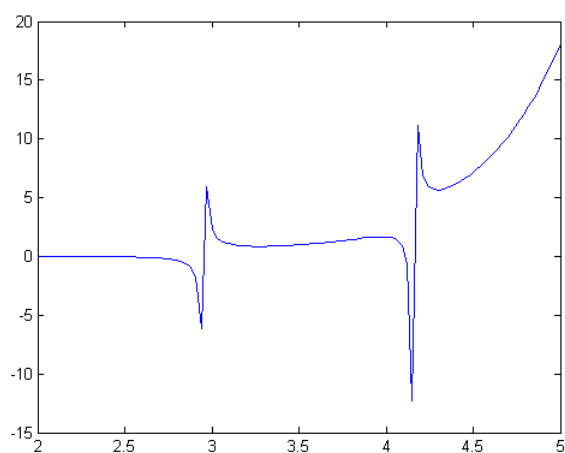


Figura 3.17:  $q = 0.7$ ,  $\nu = 0$ ,  $0 < x < 5$ ,  $j_{4\nu}(q^2) = 1$  e  $j_{5\nu}(q^2) = 1$  e restantes iguais a 0

Podemos verificar que essas variações são menos ou mais violentas, em determinado ponto de  $x$ , de acordo com os valores de  $j_{m\nu}(q^2)$  (ver a Figura 3.18) e a Figura 3.19).

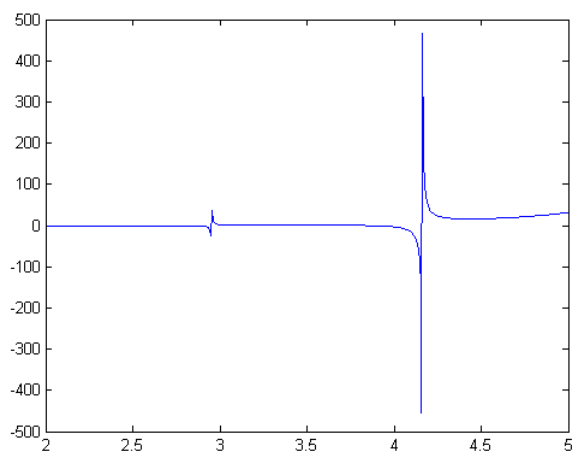


Figura 3.18:  $q = 0.7$ ,  $\nu = 0$ ,  $0 < x < 5$ ,  $j_{4\nu}(q^2) = 1$  e  $j_{5\nu}(q^2) = 9$  e restantes iguais a 0

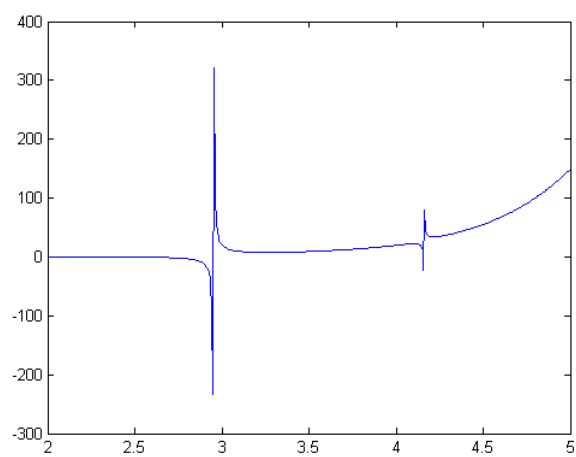


Figura 3.19:  $q = 0.7$ ,  $\nu = 0$ ,  $0 < x < 5$ ,  $j_{4\nu}(q^2) = 9$  e  $j_{5\nu}(q^2) = 1$  e restantes iguais a 0

# Capítulo 4

## Conclusão

O presente trabalho foi realizado no âmbito do estudo da aplicabilidade numérica do teorema de  $q$ -amostragem. Consideramos, deste modo, um trabalho de carácter prático e experimental, de extrema importância actual. Por este motivo, acreditamos que vem contribuir para o início do estudo prático de alguns pontos importantes da teoria de amostragem usando funções do  $q$ -cálculo, as quais até ao momento não se encontravam implementadas.

A realização deste trabalho teve duas vertentes: o estudo dos conceitos da teoria de amostragem uniforme e não-uniforme e a aplicabilidade prática do teorema de  $q$ -amostragem. A escolha dos parâmetros  $q$  e  $\nu$  é outra questão que tivemos que resolver. Na escolha dos valores ideais para estes parâmetros, concluimos que os erros são menores se optarmos por um  $q$  próximo de 1 e um  $\nu$  relativamente perto de 0 (zero). As maiores dificuldades são, sem dúvida, a implementação numérica do teorema, em particular, o cálculo dos zeros da função  $q$ -Bessel. Com a ajuda da função *roots* em Matlab, tentámos obter os zeros da função mas a tentativa não teve grande sucesso. Por esta razão, tivemos que persistir até ao final, na tentativa de encontrar os zeros para resolução do problema, o que levou a termos de implementar alguns métodos de resolução de equações ou sistema de equações não lineares como o método de Newton e o subsequente problema de encontrar boas aproximações iniciais para os zeros.

Podemos concluir que a aplicação prática directa do teorema de amostragem, usando funções  $q$ -Bessel sem melhorar significativamente o cálculo dos zeros, que não parece uma tarefa fácil, não é aconselhável. Certamente uma mudança para o uso

directo dos pontos  $q^{-n}$ , como pontos de amostragem, seria uma melhor solução. Já existem alguns resultados teóricos neste sentido, obtidos por D. Abreu [4], que não foram abordados neste trabalho mas certamente devem ser estudados pela sua aplicabilidade numérica no futuro.



# Índice

- amostragem, 5, 7, 9, 15, 26
  - buraco simples, 12
  - frequência, 5
  - Kramer, 18
    - generalizada, 17
  - periódica
    - não-uniforme, 12
  - pontos, 9, 12, 13, 16
  - teorema, 9, 15
    - clássico, 8
    - generalizada de Kramer, 9
  - teoria, 5
- amostras
  - não-uniforme, 7, 13
  - não-uniformes, 11
  - pontos, 13
  - uniformes, 11
- amplitude, 24
- aritmética
  - finita, 18
- banda limitada, 8, 10, 11
- Bessel
  - função, 15
- bi-ortogonalidade, 8
- conjugado complexo, 10
- conjunto
  - discretos, 7
  - funções, 7, 17
    - ortogonais, 9
  - pontos, 7
- convergência, 8
  - uniforme, 17
- convergir
  - uniformemente, 23
- derivada, 22
- deslocamento positivo, 13
- diferenciação
  - numérica, 22
  - série, 22
- distribuição uniforme, 12
- domínio frequência, 8
- energia mínima, 12
- erro, 20, 21
  - absoluto, 18
  - relativo, 18
- escolha óptima, 21
- espaço
  - $PW_q^\nu$ , 17
  - Hilbert, 16, 17
  - Paley-Wiener  $PW_q^\nu$ , 16
- fórmula
  - reconstrução, 11
- factor escalar, 14
- Fourier

- 
- coeficientes, 18
  - transformada
    - inversa, 8
  - frequência, 8
    - domínio, 8
    - Nyquist, 8, 9
  - função
    - $F_n$ , 23
    - sinc, 13
    - Bessel, 15
    - factorial, 16
    - Gama, 11
    - interpolada, 11, 12
    - interpoladora, 11, 18
      - Lagrange, 8
    - Jackson q-Bessel
      - terceira ordem, 22
      - terceiro grau, 16
    - Lagrange, 8
    - oscilante, 24
    - roots, 20
  - função q-Bessel, 5
  - funções
    - $\Psi_n$ , 8
    - Bessel, 15
    - classe, 9
    - interpoladoras, 14
    - ortogonais, 9, 10
    - q-Bessel, 15, 22, 23
  - Henry Nyquist, 5
  - imagem, 17
  - implementação
    - q, 18
  - instâncias
    - não-uniformes, 11
  - interpolação, 5, 7
    - única, 12
    - Bessel, 10
    - função, 8
    - Kramer, 9
    - Lagrange, 7, 9–11, 13
      - problema geral, 8
    - Yen, 12
  - isometria, 18
    - inversa, 17
  - Koornwinder e Swarttouw, 15
  - método, 15
    - implementação, 22
    - Newton, 21
    - Raphson, 21
  - núcleo, 15
    - $k(s, t)$ , 9
    - reprodutivo, 10, 15, 17
    - transformada
      - Hankel, 17
    - Newton, 21
  - norma, 18
  - Nyquist
    - frequência, 5, 8, 9
    - taxa, 5
    - teorema, 5
  - onda
    - analógica, 5
  - operador, 17
    - integral, 9

---

overflow, 24  
 polinómio, 20  
 pontos, 18  
     amostragem, 12, 16  
     uniformes, 11  
 produto  
     infinito, 21  
 produto interno, 8  
 produtos infinitos, 18  
 q-integral, 16, 23  
 realmax, 21  
 roots, 20  
 série  
     convergente, 18  
     interpolação, 15  
 sequência  
     completa, 18  
     ortogonal, 18  
 sinais  
     banda limitada, 8  
 sinal  
     analógico, 5  
     digital, 5  
 soma  
     infinita, 21  
 somas infinitas, 18  
 Sturm-Liouville  
     valor limite, 9  
 subconjunto  
     fechado, 23  
 teorema  
     amostragem  
         Kramer, 18  
         clássica, 15  
         Nyquist, 5, 8  
         q-amostragem, 16, 17, 23, 26  
     transformada  
         Hankel, 10, 15, 17  
         q-Hankel, 15, 16  
     valores próprios, 20  
 Zayd, Hinsen e Batzer, 9  
 zero  
     função, 16  
 zeros, 18, 20, 21  
     função  
         q-Bessel, 15  
     positivos, 17

# Índice

- amostragem, 5, 7, 9, 15, 26
  - buraco simples, 12
  - frequência, 5
  - Kramer, 18
    - generalizada, 17
  - periódica
    - não-uniforme, 12
  - pontos, 9, 12, 13, 16
  - teorema, 9, 15
    - clássico, 8
    - generalizada de Kramer, 9
  - teoria, 5
- amostras
  - não-uniforme, 7, 13
  - não-uniformes, 11
  - pontos, 13
  - uniformes, 11
- amplitude, 24
- aritmética
  - finita, 18
- banda limitada, 8, 10, 11
- Bessel
  - função, 15
- bi-ortogonalidade, 8
- conjugado complexo, 10
- conjunto
  - discretos, 7
- funções, 7, 17
  - ortogonais, 9
  - pontos, 7
- convergência, 8
  - uniforme, 17
- convergir
  - uniformemente, 23
- derivada, 22
- deslocamento positivo, 13
- diferenciação
  - numérica, 22
  - série, 22
- distribuição uniforme, 12
- domínio frequência, 8
- energia mínima, 12
- erro, 20, 21
  - absoluto, 18
  - relativo, 18
- escolha óptima, 21
- espaço
  - $PW_q^\nu$ , 17
  - Hilbert, 16, 17
  - Paley-Wiener  $PW_q^\nu$ , 16
- fórmula
  - reconstrução, 11
- factor escalar, 14
- Fourier

---

coeficientes, 18  
 transformada  
     inversa, 8  
 frequência, 8  
     domínio, 8  
     Nyquist, 8, 9  
 função  
      $F_n$ , 23  
     sinc, 13  
     Bessel, 15  
     factorial, 16  
     Gama, 11  
     interpolada, 11, 12  
     interpoladora, 11, 18  
         Lagrange, 8  
     Jackson q-Bessel  
         terceira ordem, 22  
         terceiro grau, 16  
     Lagrange, 8  
     oscilante, 24  
     roots, 20  
 função q-Bessel, 5  
 funções  
      $\Psi_n$ , 8  
     Bessel, 15  
     classe, 9  
     interpoladoras, 14  
     ortogonais, 9, 10  
     q-Bessel, 15, 22, 23  
  
 Henry Nyquist, 5  
  
 imagem, 17  
 implementação  
     q, 18  
  
 instâncias  
     não-uniformes, 11  
 interpolação, 5, 7  
     única, 12  
     Bessel, 10  
     função, 8  
     Kramer, 9  
     Lagrange, 7, 9–11, 13  
         problema geral, 8  
     Yen, 12  
 isometria, 18  
     inversa, 17  
  
 Koornwinder e Swarttouw, 15  
  
 método, 15  
     implementação, 22  
     Newton, 21  
     Raphson, 21  
  
 núcleo, 15  
      $k(s, t)$ , 9  
     reprodutivo, 10, 15, 17  
     transformada  
         Hankel, 17  
 Newton, 21  
 norma, 18  
 Nyquist  
     frequência, 5, 8, 9  
     taxa, 5  
     teorema, 5  
  
 onda  
     analógica, 5  
 operador, 17  
     integral, 9

- overflow, 24
- polinómio, 20
- pontos, 18
  - amostragem, 12, 16
  - uniformes, 11
- produto
  - infinito, 21
- produto interno, 8
- produtos infinitos, 18
- q-integral, 16, 23
- realmax, 21
- roots, 20
- série
  - convergente, 18
  - interpolação, 15
- sequência
  - completa, 18
  - ortogonal, 18
- sinais
  - banda limitada, 8
- sinal
  - analógico, 5
  - digital, 5
- soma
  - infinita, 21
- somas infinitas, 18
- Sturm-Liouville
  - valor limite, 9
- subconjunto
  - fechado, 23
- teorema
  - amostragem
- Kramer, 18
  - clássica, 15
- Nyquist, 5, 8
  - q-amostragem, 16, 17, 23, 26
- transformada
  - Hankel, 10, 15, 17
  - q-Hankel, 15, 16
- valores próprios, 20
- Zayd, Hinsen e Batzer, 9
- zero
  - função, 16
- zeros, 18, 20, 21
  - função
    - q-Bessel, 15
  - positivos, 17

# Bibliografia

- [1] L. D. Abreu, J. Bustoz, J. L. Cardoso *The roots of the third Jackson  $q$ -Bessel function*, Int. J. Math. Sci. 67, p. 4241-4248, 2003.
- [2] L. D. Abreu *A  $q$ -Sampling theorem related to the  $q$ -Hankel Transform*, Proc. Amer. Math. Soc. 133, p. 1197-1203, 2005.
- [3] L. D. Abreu *Real Paley-Wiener theorems for the Koorwinder-Swarttouw  $q$ -Hankel Transform*, J. Math. Anal. Appl., 334, no. 1, p. 223-231, 2007.
- [4] L. D. Abreu *Completeness, special functions, and uncertainty principles over  $q$ -linear grids*, J. Phys. A: Math. and Gen., 39, p. 14567-14580, 2006.
- [5] G. Calvagio and D. Munson, Jr. *New Results on Yen's Approach to Interpolation from Nonuniformly Spaced Samples*, Proc. IASSP, pages 1553-1538, 1990.
- [6] D. S. Chen and J.P. Allebach *Analysis of Error in Reconstruction of Two-dimensional Signals from Irregularly Spaced Samples*, IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP35, pages 173-179, 1987.
- [7] K. F. Cheung and R. J. Marks II *Image Sampling below the Nyquist Density Without Aliasing*, J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 7, pages 92-105, 1990.
- [8] P. J. S. Ferreira, *Nonuniform Sampling of Nonbandlimited Signals*, IEEE Proc. Letters, Vol. 2, No. 5, 1995.
- [9] G. H. Higgins *An interpolation series associated with the Bessel-Hankel transform*, J. Lond. Math. Soc. 5, pages 707-714, 1972.
- [10] K. B. Howell *Principles of Fourier Analysis*, Chapman & Hall/CRC, Florida, Alabama, 2001.

- 
- [11] T. H. Koornwinder, R. F. Swarttouw *On  $q$ -Analogues of Fourier and Hankel Transforms*, Trans. Amer. Math. Soc. 333, 1992, no.1, 455-461.
- [12] R. J. Marks II, *Introduction to Shannon Sampling and Interpolation Theory*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [13] R. J. Marks II, *Advanced Topics in Shannon Sampling and Interpolation Theory*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [14] R. E. A. Paley and N. Wiener *Fourier Transform in Complex Domain*, Colloq. Publications, Vol. 19, American Math. Soc., New York, 1934.
- [15] A. Papoulis. *Signal Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1977.
- [16] M. D. Rawn *On non-uniform Sampling Expansions using entire interpolating functions and on the stability of Bessel-type sampling expansions*, IEEE Trans. Information Theory, Vol. 35, No. 3, 1989.
- [17] S. Yeh and H. Stark *Iterative and One-step reconstruction from Nonuniform Samples by Convex Projections*, J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 7, No. 3, pages 491-499, 1990.
- [18] J. L. Yen *On the Nonuniform Sampling of Bandwidth Limited Signals*, IRE, Trans. Circuit Theory, Vol. CT-3, pages 251-257, 1956.
- [19] G. Watson *Treatise on the Theory of Bessel Function*, 2nd ed. Cambridge University Press, Cambridge, 1962.
- [20] A. Zayed, G. Hinsen, and P. Butzer *On Lagrange Interpolation and Kramer-type Sampling Theorems Associated with Sturm-Liouville Problems*, SIAM J. Appl. Math, Vol.50, No. 3, pages 893-909, 1990.