Pensamento natural-pensamento matemático na resolução de problemas de proporcionalidade[1]

Isabel Cabrita, Universidade de Aveiro

Introdução

Estudos realizados apontam para a possibilidade de os alunos, quando confrontados com uma situação problemática concreta, construírem "schèmes" ou "estratégias algorítmicas de resolução", fundamentados num mesmo aspecto operatório da inteligência que lhes permite *naturalmente*, de acordo com o seu desenvolvimento cognitivo, resolver os problemas. Tudo se passa como se os alunos utilizassem uma "lógica própria", diferente da "lógica matemática", repousando na elaboração de algoritmos.

Para que se possa contribuir para a definição do *modelo do aluno*, cujo conhecimento deverá sustentar a concepção e a implementação de qualquer módulo de ensino/aprendizagem, torna-se imperioso analisar os processos reais do *pensamento natural* por eles utilizados na resolução de problemas, e confrontá-los com os processos de *"pensamento matemático"* — aquele que advém do conhecimento construído na escola e sem a intervenção da qual essa apropriação seria muito difícil ou mesmo quase impossível.

Metodologia

Nesta perspectiva, implementamos uma investigação[2] na qual participaram cerca de 200 alunos do 7° ano de escolaridade, distribuídos por duas escolas da cidade e uma da periferia, de cinco professores com habilitações e experiências profissionais diversificadas, que aplicaram uma "bateria de problemas" (versões R ou S[3], anexo 1) aos respectivos alunos, em ambiente natural de sala-de-aula antes e após a abordagem da unidade didáctica "Proporcionalidade", na planificação e implementação da qual os investigadores não tiveram qualquer intervenção.

Apresentação e discussão dos principais resultados

O quadro 1. (anexo 2) respeita as principais estratégias utilizadas na resolução de problemas de proporcionalidade (distribuídas por 5 categorias[4]), antes e após a abordagem da unidade didáctica, na resolução de 9[5] das 11 questões que compõem a bateria de problemas.

1º Problema

No pré-teste, a maior percentagem de alunos, que diminuíu no pós-teste, resolveu este problema por processos que se enquadraram no grupo "outras estratégias"[6], e com muito pouco ou nenhum significado. Muitos deles atenderam somente a duas das variáveis em causa limitando-se a efectuar *"200x3, 280x3 e 480x3"* e decidindo-se indistintamente pela modalidade A ou C (2ª categoria). Na 4ª categoria (com mais peso no pré-teste versão R), operraram *"3x200=600; 3x280=840 2x480=1440 C-> 600+840$=1440*. As respostas "qualitativas" foram, na maioria, deprovidas de qualquer significado, a mais usual das quais foi, no pré-teste *"x meses y$00 é mais barato"*, e isto aplicado indistintamente a qualquer modalidade. No pós-teste, cuja percentagem diminuíu, a resposta mais frequente foi, na versão R *"x meses em 3 pagamentos de y$00 é mais barato""*, enquanto que na versão S responderam *"A, B ou C porque já se vê que é mais barato, nas outras paga-se mais"*. O estabelecimento de uma proporção pelo algoritmo do "produto-cruzado" foi uma estratégia muito mais utilizada no pós-teste, e com muito mais pertinência. Na 2ª categoria enquadraram-se as respostas *"3/200=x/960 x=14,4 14,4x5=72; 3/280=x/960 x=10,3 10,3x7=72,1; 3/280=x/960 x=6 6x12=72"* (versão S) e *"5/3=x/200; 7/3=x/280 e 12/480=x/480"* (ambas as versões). A resolução de igualdades do tipo *"5/200=3/x; 7/280=3/x; 12/480=3/x"* e *"5/600=7/x; 7/840=12/x"* (versão S pós-teste) considerou-se na 4ª categoria. Na 5ª categoria, enquanto que os alunos que resolveram a versão R do teste utilizaram aqueles mesmos termos, a versão S suscitou as proporções *"5/200=7/280 12/480=5/200"* e *"5/600=7/840=12/1440"*. A estratégia do "valor unitário"[7], quer determinado em cada uma das modalidades, quer comparando-se o preço da assinatura numa modalidade a partir do valor unitário da revista noutra modalidade, considerando-se ou não o número de pagamentos constantes, foi a responsável pelo maior número de respostas correctas quer no pré quer no pós-teste, sendo nesse momento a estratégia mais utilizada. Na versão S de notar que, no pós-teste, 1.8% dos alunos utilizou a estratégia da determinação e aplicação do "factor escalar"[8] considerando como "espaços-medida" o tempo em meses e a quantia em escudos, fazendo: *"7/5=1,4; 12/7=1,4; 200x1.4=280 e 280x1.4=480"*. A apresentação de respostas, nalguns casos pertinentes, sem qualquer justificação e explicitação do processo de resolução, decresceu na versão R e subiu na versão S do pré para o pós-teste. Finalmente, de referir que muitos alunos não deram, no pré-teste, qualquer resposta a este problema (principalmente na versão S), percentagem que diminuíu no pós-teste.

4º Problema

No pré-teste, a maior parte dos alunos que responde ao problema resolve-o utilizando relações aditivas[9] entre os dados do problema, percentagem que diminuíu no pós-teste. Na 2ª categoria (que sofreu um acréscimo de percentagem no pós-teste versão S) os alunos deduzem que, se a relação entre a largura (l1) e o comprimento (c1) da figura inicial é tal que c1=l1+6, então dever-se-à adicionar esse valor a l1 para obter a largura da figura final (l2). A maior percentagem de respostas na 3ª categoria deve-se à consideração de que se c2 (comprimento da figura final)=c1+4, então l2= l1+4. As

restantes respostas pressupõem a consideração de que se c1=l1+4 então c2=l2+4. A versão S suscitou, só no pré-teste e numa percentagem muito diminuta, a utilização da estratégia de "reconhecimento e replicação de um padrão"[10] – se l1=(c1:2)-1 então l2=(c2:2)-1 e só no pós-teste, a determinação e posterior aplicação do factor escalar – *"se 14=1,4x10 então 1,4x4=5,6"*. Numa percentagem muito reduzida (e nula no pós-teste R), este problema também suscitou a determinação do factor funcional[11] entre o comprimento e a largura da figura inicial *"10:4=2,5"*, só que essa constante foi subtraída a c2 (pré-teste S) ou adicionada a l1. O algoritmo do "produto-cruzado" foi bastante utilizado na resolução deste problema , principalmente no pós-teste, e com um peso significativo na versão S 5ª categoria, tendo os alunos optado essencialmente pela determinação da proporção *"10/4=14/5,6"*. O recurso a "outras estratégias" diminuiu na versão R do pré para o pós-teste, embora tenham no 2º momento utilizado processos um pouco mais significativos do que os anteriores. A percentagem de ausência de qualquer resposta e a percentagem de respostas sem justificação (embora com alguma pertinência) e sem explicitação do processo de resolução, diminuiu na versão S do pré para o pós-teste, embora se tenha, curiosamente, verificado o contrário na outra versão.

5º Problema

No pré-teste versão S cerca de 45% dos alunos considera explicitamente que *"o dobro dos operários deve demorar metade dos dias"*, no entanto, na versão R só cerca de 7% usa tal raciocínio. Naquela versão também 3.6% dos alunos parte do pressuposto que o dobro dos operários deve demorar o dobro dos dias a realizar a obra, enquanto que na versão R tal percentagem desce para 1.1. Cerca de 25% dos alunos que resolveu esta versão opera directamente com os dados do problema com nenhum ou muito pouco significado, enquanto que na versão S só cerca de 7% o faz. Operações do género *"18-8=10 ou 18-7=11; 7-4=3 e 7x3=21; 18+3=21; 18+4=22 e 22-7=15"* foram as mais usadas. No pós-teste de assinalar o decréscimo de percentagem neste grupo, essencialmente a nível da versão R. O recurso ao estabelecimento de proporções pelo algoritmo do "produto-cruzado", como se o problema retratasse uma situação de proporcionalidade directa, sofreu um grande aumento do pré para o pós-teste. Só alguns alunos apresentaram e resolveram a igualdade *"x/4=18/7"*. Cerca de 3.6% dos alunos que resolveram a versão S do teste, determinaram e operaram correctamente com a constante de proporcionalidade inversa, efectuando *"18x4=72 e 72:8=9"*. Relativamente à versão R, 2.3% dos alunos no pré-teste chegaram ao mesmo factor, mas depois operaram erradamente com ele, ou abandonaram-no e efectuaram outras operações, tendo melhorado o seu desempenho no pós-teste. Curiosamente só a versão R suscita, em ambos os momentos de aplicação, a estratégia da determinação do "valor-unitário" –*"18:4=4,5 e 18+4,5+4,5+4,5+4,5, ou 4,5x7 ou 18-4,5 ou 4,5x3"*. As estratégias aditivas, menos ou não usadas no pós-teste (versão S), levaram os alunos a efectuar as operações *"4+4=8 e 18-4=14"*. No pré-teste só a versão R suscitou uma pequena A utilização de respostas "qualitativas" essencialmente do género *"x dias porque são mais operários e demoram menos tempo"* (com x=14 ou16) ou, embora numa percentagem muito reduzida, *"os* *mesmos dias porque os 7 operários são mais lentos"*, não se verificou no pré-teste versão S, embora no pós-teste esta versão tenha apresentado um aumento significativo. A grande percentagem de alunos que não respondeu a este problema, não obstante tenha diminuído do pré para o pós-teste na versão R, aumentou na versão S. Enquanto nesta versão foi nula a percentagem de alunos que apresentou resultados sem justificação e sem explicitação do processos de resolução utilizado no pós-teste, na versão R essa percentagem subiu para os 10.2, tendo a maior parte desses alunos apresentado como resposta o valor 31,5 dias embora questionando esse resultado. Uma percentagem mais diminuta refere que o problema não traduz uma situação de proporcionalidade directa pelo que não se pode resolver.

6º Problema

Não obstante esse valor tenha diminuído no pós-teste, uma grande percentagem de alunos não apresentou qualquer resposta a este problema, e um número significativo de alunos que aumentou no pós-teste, apresentou uma resposta sem justificação, sem explicitação do processo de resolução e sem qualquer ou pouco significado, do tipo respectivamente, *"1/2000, 1/500, 1/900, 2/2000, 1/5000, 1/400, raiz de 2000, escala gráfica""* e *"1/2500 ou 1/1000"* (esta última em maior percentagem na versão R). Neste problema os alunos utilizaram, em grande percentagem, processos não numéricos de resolução. As respostas mais frequentes foram: na 1ª categoria *"1/200 ou 1/20 porque B é metade de A"*; na 2ª categoria *"1/900 porque quanto menor a escala maior o desenho""*; na 3ª categoria *"se o desenho é menor a escala também deverá ser menor"* mas avançam ou com o valor 1/1000 ou com valores inferiores a 1/2000 mas errados e nas 4ª e 5ª categorias (que no pós-teste assinalaram um aumento considerável) *"1/4000 porque B é mais reduzido"* e *"1/4000 porque B é metade de A"*. Cerca de 10% dos alunos no pré-teste determina directamente a escala com base nos valores das réguas, dando como resposta *"1/4000 para o comprimento e 1/2000 para a largura porque está no 2 e no 4 da régua"*; *"1/5000 porque o B está no 5 da régua"*; *"1/2000 00 porque o A tem dois traços a mais na régua"*; *"1/2000 porque conta-se do 3 ao 5"* e *"1/1000 porque 2cm – 2000 e 1cm – 1000"*. No pós-teste versão R, de referir um ligeiro aumento de percentagem quer devido à resolução *"1:2/200:2=0,5/1000"* quer devido ao raciocínio *"B é 25% de A pelo que 2000x4=8000 sendo a escala 1/8000"*. Uma percentagem reduzida de alunos tenta resolver o problema por recurso ao algoritmo do "produto-cruzado" tentando estabelecer nas 2ª, 3ª e 5ª categorias, respectivamente, as proporções *"1/2000=1/x "*; *"1/4000 porque 1/2000=2/x e x=4000"* e *"2cm/1/2000=1cm/1/x"*. No pós-teste versão R houve um ligeiro aumento de percentagem devido à resolução *"1/2000=4/x como x=8000 a escala é 1/8000"*.

7º Problema

Não obstante a percentagem tenha diminuido consideravelmente no pós-teste, muitos alunos (cerca de 60% na versão R) no pré-teste não dão qualquer resposta ao problema. A estratégia que envolve a aplicação do algoritmo do "produto-cruzado", e numa percentagem considerável de acerto (4ª e 5ª categorias), foi bastante utilizada principal-

mente a nível do pós-teste versão R, tendo estes alunos estabelecido proporções a partir dos dados constantes na tabela *"50/31,08=x/80"* e os que resolveram a versão S, a partir de igualdades do tipo *"1/1,609=x/50"* e *"1/1,609=80/x"*. No pré-teste cerca de 25% dos alunos (em cada uma das versões) opera directamente com os dados do problema com nenhum ou muito pouco significado, não tendo sido possível detectar qualquer padrão – socorreram-se essencialmente de adições e/ou multiplicações aplicadas indistintamente aos valores dados. Na versão S, porém, e principalmente no pós-teste, os alunos resolvem o problema com pertinência, servindo-se directamente do valor dado (1,609) multiplicando-o e dividindo-o (por vezes indistintamente) pelos valores dados na tabela. Na versão R uma diminuta percentagem de alunos resolve o problema, no pré-teste, determinando a relação entre uma milha e os kilómetros efectuando a divisão *"50: 31,08"* mas tendo depois dividido todos os restantes valores da tabela por esse valor, e no pós-teste determinaram o factor constante que permite passar da 1ª linha da tabela para a 2ª (*"31,08:50=0,6216"*) tendo operado com esse valor, recorrendo a multiplicações e divisões, para determinar os valores em falta da tabela. De assinalar finalmente que a percentagem de alunos que se limita a apresentar a solução do problema aumenta, em ambas as versões, do pré para o pós-teste.

8º Problema

Este problema provocou uma grande percentagem de não respostas que diminuiu um pouco no pós-teste versão S, tendo suscitado, principalmente no pré-teste, o uso de "outras estratégias", mas com nenhum ou pouco significado. Assim, surgiram como resposta, por exemplo, *"420:6=70 420-70=350, 350:12=29, 350-29=321 e 321:10=32"* (1ª categoria versão R) e *"420:3=140, 140:12=11.666, 11.666+10=116.666"* (1ª categoria versão S). A resposta mais frequente que se considerou na 2ª categoria foi – *"420:6, 420:10, 420:12"*. Finalmente na 3ª categoria, de destacar a operação *"420:3=140"* dando alguns alunos como resposta esse valor. Alguns alunos respeitam o pressuposto de que "menos dias de trabalho ou menos idade...menos deve receber", mas poucos são os que atribuem montantes que satisfazem todas as condições do problema. Na versão R alguns alunos determinam o total de dias de trabalho, mas abandonam esse valor ou operam erradamente com ele *"6+10+12=28 e 420:28=15, 15+10=25 ou 15x3=45"*. No pré-teste o algoritmo do "produto-cruzado" só foi utilizado, e numa percentagem ínfima, por alunos que resolveram a versão S, mas sem quase nenhum êxito —*"2/480=1/x, atribuindo a x o valor 240"*. No pós-teste, foi mais utilizado em ambas as versões e numa percentagem considerável de pleno êxito — *"10/x=28/420, 6/x=28/420, 12/x=28/420"*. No entanto, de referir que quase 5% dos alunos que resolveu a versão R passou agora a utilizar esta estratégia com graus de sucesso diminutos, apresentando a proporção *"3/420=6/10"* ou tentando determinar os valores que satisfazem as igualdades *"3/6, 10 ou 12=x/420"*; *"3/420=6, 10 ou 12/x"* ou *"3, 6 ou 10/420=x/100"*. A estratégia da determinação e aplicação do "valor-unitário", que no pré-teste versão S não teve muita expressão, foi eleita, no pós-teste, por um maior número de alunos em ambas as versões e quase sempre aplicada correctamente –*"6+12+10=28, 420:28=15, 15x6=90,* *15x10=150 e 15x12=180"*. Somente a versão R suscitou, no pré-teste, respostas não numéricas ao problema, (tendo no pós-teste a afirmação tipo *"a primeira deve receber menos, a segunda mais e a terceira mais que a primeira"* sido extensiva às duas versões) e no pós-teste o uso, ainda que muito modesto, de fracções, com as quais se operam directamente para obter a solução procurada *"6/28x420=90, 10/28x420=150, 12/28x420=180"*. Finalmente, uma percentagem restrita de alunos apresenta valores sem indicação de qualquer processo de resolução, mais plausíveis na versão R.

9º Problema

Uma grande percentagem de alunos, curiosamente menor no pós-teste, apresenta respostas a este problema, embora uma percentagem significativa que resolveu a versão S não tenha explicitado o processo de resolução utilizado. O recurso a estratégias "qualitativas", com nenhum ou muito pouco significado, e não obstante tenha diminuído no pós-teste, assumiu um lugar de destaque no pré-teste, principalmente a nível da versão R. As respostas *"A máquina B porque produz mais ou porque tem mais peças sem defeito"*, e *"A máquina A porque tem menos peças com defeito"*, são os exemplos mais frequentes da 1ª categoria. Na 2ª categoria englobaram-se as respostas *"A máquina B porque produz mais peças com defeito ou porque produz mais peças com defeito e mais sem defeito"*, *"A máquina A porque produz menos peças sem defeito ou porque produz menos peças com defeito e menos sem defeito"*. Com um pouco mais de significado surgem as respostas *"A máquina B porque produz mais peças com defeito mas também produz mais sem defeito ou porque produz mais peças sem defeito, mas as duas estragam o mesmo número de peças só que a B faz mais peças"*. A estratégia das "fracções", que no pré-teste só foi, e muito modestamente, utilizada pelos alunos que resolveram a versão R foi, no pós-teste, preferida por um maior número de alunos e com um êxito considerável. Na 3ª categoria determinaram a relação entre o número de peças com e sem defeito em cada máquina. Nos outros patamares situam-se as respostas *"474/126=3,762 e 485/137=3,540"*, *"126/600=0,21 e 137/622=0,22"* (ou as razões inversas) com justificação correcta (5ª categoria) ou contraditória (4ª categoria). Os alunos que resolveram a versão R do teste já utilizaram, no pós-teste, a estratégia "produto-cruzado" embora, em alguns casos, com muito pouco sentido, ao determinarem o valor que satisfaz a igualdade *"126/1222=x/474"*. Nas categorias seguintes, os alunos tentaram confirmar ou determinar as igualdades: *"474/126=485/137"*, mas concluiram errado ou abandonaram esse processo; *"126/474=137/x"* mas concluiram pela paragem da máquina A porque *"B devia ter produzido mais peças sem defeito ou mais no total"*; *"126/600=x/1 e 137/622=x/1"* e *"126/474=1/x e 137/474=1/x"*. No grupo "outras estratégias", que sofreu uma diminuição de percentagem no pós-teste (excepção para a 2ª categoria versão R), as 2ª e 3ª categorias englobaram respostas que se basearam no número total de peças de cada uma das máquinas, nas diferenças entre o número de peças sem e com defeito em cada máquina ou ainda nas diferenças entre o número de peças com e sem defeito em ambas as máquinas. Na 4ª categoria englobaram-se respostas que envolveram o cálculo correcto das percentagens de peças com defeito em cada máquina, mas em que se concluíu errado.

$10_{a)}$º Problema

No pré-teste, mais de 25% dos alunos não dá qualquer resposta a este problema (em qualquer das versões do teste), e uma grande quantidade de alunos (curiosamente mais elevada na versão S) apresenta uma resposta sem indicação do processo de resolução e sem qualquer ou muito pouco significado (principalmente a nível da versão S), do tipo *"100%, 98%, 36%, 5.1%, 20%, 3x5%, 225 e 100 alunos"* (1ª categoria) e *"45%, 40.5%, 46%, 45.3%, 52%"* (2ª categoria). A estratégia "produto-cruzado", foi modestamente utilizada e com muito pouca ou mesmo nenhuma pertinência, tendo surgido respostas do tipo *"3/1200=2/x sendo x=800"*, *"5%/x=7cm/5,5"* e *"7,5/100=1200/n"*. "Outras estratégias" foram utilizadas por muitos alunos (cerca de 50% na versão R) uma grande percentagem das quais com bastante êxito. É de destacar a adição (correcta ou incorrecta) dos valores correctos subtraindo-se ou não esse valor a 100%. Uma percentagem, ainda que diminuta, de alunos que resolveu a versão R do teste respondeu *"a percentagem total do círculo é100 e como o nível 3 ocupa metade 100%/2=50%"*. Alguns alunos que resolveram a outra versão graduaram o eixo dos yy e indicaram um valor aproximado para o nível 3. No pós-teste a percentagem anteriormente registada em cada uma das estratégias utilizadas diminui um pouco em favor das "outras estratégias", já mencionadas anteriormente. De notar no entanto que alguns alunos, embora em número bastante reduzido, que resolveram a versão S do teste, passam agora a determinar proporções com muito menos significado do que aconteceu no pré-teste, a partir da expressão *"25/2=x/3"*.

$10_{b)}$º Problema

De notar a elevada percentagem de alunos que não dá qualquer tipo de resposta a este problema, e a pouca percentagem que, dando no geral respostas correctas (só um número reduzido de alunos avança com alguns valores com muito pouco significado — *"900, 250, 225, 125, 100"*), não explicita o processo de resolução, percentagens estas que diminuiram um pouco no pós-teste. A estratégia "valor-unitário" foi utilizada com sucesso, por um número muito restrito de alunos (exceptuando a versão R no pré-teste) que efectuou *"1200/100=12 e 12x25=300"*. O recurso à "constante de proporcionalidade", que no pré-teste versão R não foi utilizado, foi notório no pós-teste, principalmente na versão S. Nas categorias inferiores resolveram *"1200x5%=60"* (versão R), *"1200x25%=28%"* (versão S) e *"1200x25%=300 1200-300=900"*, tendo na 5ª categoria efectuado *"1200x25% ou 1200x0,25 ou 1200x25/100=300"*. O uso de "fracções", que diminuiu no pós-teste versão R, tendo na outra versão sofrido um aumento razoável, conduziu às operações *"25%=1/4 pelo que 1200/4=300"*. A versão R suscitou raciocínio idêntico, mas consideraram a percentagem do nível ao qual se referia o problema anterior. A versão S suscitou mais, no pré-teste, a utilização do "produto-cruzado", tendo tido as respectivas respostas um maior grau de acerto do que as anteriores e sendo do tipo *"100/1200=25/x e x=300"*. Curioso notar ainda que a versão S suscitou uma maior variedade de expressões –desde a consideração de que *"1200/2=x/3"* (como na versão R), "*75%/1200=2/x*", "*2/25=a/100*", "*25/100=1200/x*", "*25%/1200=100%x*" até "*1200/100=x/25*" mas que foram incorrectamente resolvidas. A versão R registou uma percentagem superior de respostas no grupo "outras estratégias", que diminuiu significativamente no pós-teste. Além dos processos "*1200x25*", "*(50%+25%)+25%=100% 900+300=1200*" situam-se as formas mais díspares de trabalhar com os dados do problema, como por exemplo: "*1200:25=48(ou 480)*", "*1200:25=600*", "*1200:25%=48%*", "*1200-25%=900*" e "*1200:25=48 1200:5=24 24+48=72*".

Principais conclusões e implicações didácticas

A estratégia "produto-cruzado", dificilmente seria apreendida pelos alunos sem a intervenção da escola, pelo que a sua utilização pressupõe um tipo de *pensamento* essencialmente *matemático*. Neste contexto e pelo que foi dito anteriormente poderemos então concluir que no geral os alunos utilizaram essencialmente um tipo de *pensamento natural* (não conduzindo necessariamente a uma solução correcta) para resolver os problemas propostos. Só nos 4°, 5°, 7° (versão R) e $10_{b)}$° problemas, a percentagem de recurso ao algoritmo do "produto-cruzado" ultrapassou, no pré-teste, os 20% (excepção para o 4° problema versão R), e no pós-teste os 35%. Se atendermos às características desses problemas, poderemos concluir que, provavelmente, o uso do *pensamento matemático* está directamente relacionado com o maior ou menor grau de "comodismo" na utilização daquela ferramenta, aspecto que muitas das vezes prevalece sobre um tipo de pensamento reflexivo e crítico que conduziriam a um maior grau de sucesso na resolução do problema. Realmente todos aqueles problemas são declarada e directamente de determinação "do quarto-proporcional", tipo privilegiado pela escola para introdução, exemplificação e treino daquele algoritmo. Quando os problemas são, quanto à finalidade, de "comparação numérica", como é o caso das questões 1ª e 9ª, ou de "determinação numérica" mas não induzindo o uso directo do algoritmo do "produto-cruzado" (6°, 7° versão S, 8°, $10_{a)}$° problemas) os alunos parecem reflectir mais sobre o seu processo de resolução.

Perante tal panorama, que fazer? Deixar de fornecer tal ferramente aos alunos, já que parecem usá-la de forma pouco crítica e reflectida? Não nos parece ser esta a melhor solução dado que, o algoritmo do "produto-cruzado" permite resolver rápida, cómoda, elegante e acertadamente, uma série de problemas. O que preconizamos é que se variem, depois de exploradas convenientemente, o mais cedo possível, e por um longo período de tempo, outras estratégias mais significativas de resolução de problemas (muitas das quais já fazem inclusivamente parte do repertório de processos que o aluno interiorizou), as situações em que tal algoritmo pode ser ou não utilizado, e que se promovam espaços de efectiva resolução, de verdadeiros problemas, por parte dos alunos, seguida duma profunda e reflectida discussão sobre o processo e o resultado obtidos tentando-se, sempre que possível, atender às próprias representações que o aluno criou a propósito.

Notas

1 Neste documento, excepto qualquer indicação em contrário, só nos referiremos a "Proporcionalidade Directa".

2 Tal investigação insere-se no âmbito da tese de doutoramento que estamos a desenvolver.

3 A finalidade destas duas versões era verificar qual a influência de variações no enunciado do problema ao nível da sintaxe, do contexto e do conteúdo, no processo de resolução.

4 Tais categorias foram pontuadas de 0 a 4, nos extremos das quais se situam, respectivamente, as respostas que indiciam ausência total ou utilização correcta de raciocínio proporcional.

5 Por limitações de espaço não nos é possível apresentar agora os resultados relativos às 2ª e 3ª questões.

6 Englobam essencialmente operações elementares com os dados do problema, que não se pudesse integrar noutra categoria.

7 A estratégia de determinação do "valor-unitário" e sua posterior aplicação, pressupõe a utilização de processos com os quais os alunos já estão familiarizados desde os anos iniciais de escolaridade.

8 Factor não constante que relaciona dois elementos do mesmo "espaço-medida" aplicado aos respectivos elementos do outro "espaço-medida".

9 As estratégias "aditivas" implicam o estabelecimento duma relação aditiva constante entre os "espaços-medida", aplicada aos respectivos pares de elementos, ou uma relação aditiva não constante entre elementos do mesmo "espaço-medida", aplicada aos respectivos elementos do outro "espaço-medida".

10 No original "building-up strategy"

11 A estratégia "constante de proporcionalidade" pressupõe a determinação e/ou aplicação do factor funcional que relaciona pares de elementos dos diferentes "espaços-medida".