

## ESTRATÉGIAS DE OPTIMIZAÇÃO NUMÉRICA PARA O CÁLCULO NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS RETICULADAS

F. Teixeira-Dias<sup>\*1</sup>, J. A. Oliveira<sup>\*2</sup> e H. Varum<sup>\*\*</sup>

\*Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Aveiro  
Campus Universitário de Santiago, 3810-193 Aveiro, Portugal  
<sup>1</sup>e-mail: ftd@mec.ua.pt, <sup>2</sup>e-mail: jalex@mec.ua.pt

\*\*Secção Autónoma de Engenharia Civil, Universidade Aveiro  
Campus Universitário de Santiago, 3810-193 Aveiro, Portugal  
e-mail: hvarum@civil.ua.pt

**Palavras-chave:** Estruturas Reticuladas, Modelo de Fibras, Optimização Numérica, Análise Não-Linear, Método dos Elementos Finitos.

**Resumo.** *A realização de análises pelo Método dos Elementos Finitos baseadas em modelos de comportamento elásticos e lineares resulta, em determinadas aplicações, em previsões limitadas do comportamento real das estruturas. No trabalho que aqui se apresenta descreve-se um modelo de optimização aplicável ao cálculo numérico do comportamento não-linear de estruturas reticuladas. O modelo descrito actua directamente sobre um incremento de força (carga) aplicado na estrutura. O algoritmo desenvolvido e implementado baseia-se numa análise da evolução de algumas das variáveis de estado do problema, criteriosamente seleccionadas. Com o algoritmo proposto é possível ajustar, de forma automática e contínua, o passo de cálculo de modo a que este se torne suficientemente pequeno em fases do processo em que ocorram variações mais rápidas da rigidez tangente do material, não se perdendo precisão no cálculo. Alternativamente, quando tal não acontecer, o tamanho do incremento pode ser progressivamente aumentado, por forma a acelerar a evolução do cálculo e, conseqüentemente, aumentar a relação qualidade/custo dos resultados obtidos. O modelo é descrito e testado, mostrando-se as vantagens da sua utilização na análise não-linear do comportamento de estruturas reticuladas.*

## 1. INTRODUÇÃO

A complexidade e dimensão das estruturas existentes, em particular as estruturas de edifícios, leva a que a utilização de métodos analíticos para o cálculo e estudo do seu comportamento se torne, na generalidade dos casos, incomportável ou mesmo impossível. Assim, importa desenvolver modelos e métodos que facilitem determinar e prever o comportamento destas estruturas. Nesta área, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é um método com potencialidades conhecidas, com o qual é possível determinar a resposta de uma estrutura de forma quase independente da sua complexidade e/ou dimensão.

Das análises estruturais que recorrem ao Método dos Elementos Finitos com base em modelos de comportamento elásticos lineares resultam, frequentemente, previsões limitadas, apesar de muitas vezes suficientes, do comportamento real das estruturas. Porém, recorre-se muitas vezes a este tipo de análises pela dificuldade inerente à caracterização da generalidade dos modelos de comportamento não-lineares. Contudo, em algumas situações, nomeadamente aquelas em que o aparecimento de rótulas plásticas é previsível, projectado ou mesmo desejável, torna-se conveniente recorrer a modelos de comportamento e de cálculo sejam capazes de prever a resposta das estruturas em regime não-linear. No entanto, a utilização de tais modelos, necessariamente mais complexos do que os elásticos lineares, torna o cálculo significativamente mais pesado e, conseqüentemente, aumenta o custo do processo. Este aumento prende-se, essencialmente, com a necessidade de recorrer a uma análise incremental com utilização de incrementos de cálculo muito pequenos e a processos iterativos.

Pelos motivos expostos nos parágrafos anteriores, é de grande utilidade utilizar algoritmos que permitam otimizar, preferencialmente de forma automática, o tamanho do incremento de cálculo. Esta otimização deve tomar em consideração a evolução, em cada instante, da resposta da estrutura. Neste trabalho apresenta-se um algoritmo de otimização aplicável à determinação numérica da resposta linear e/ou não-linear de estruturas reticuladas.

## 2. ANÁLISE NÃO-LINEAR

Em regime elástico linear, o comportamento de um material é caracterizado, genericamente, por uma matriz de elasticidade  $\mathbf{D}$  constante. Para a generalidade das análises esta matriz depende unicamente do módulo de elasticidade do material,  $E$ , e do seu coeficiente de Poisson,  $\nu$ . Por este facto, a matriz de rigidez global da estrutura,  $\mathbf{K}$ , desenvolvida após a aplicação do Método dos Elementos Finitos, resulta constante. O sistema de equações de equilíbrio da estrutura pode ser representado, de forma simples, como

$$\mathbf{f} = \mathbf{Kd}, \quad (1)$$

em que  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{d}$  são os vectores das forças e deslocamentos nodais, respectivamente. Porém, se se considerar que o material tem uma resposta constitutiva não-linear, as equações constitutivas do modelo linear deixam de ser válidas. Conseqüentemente, a matriz  $\mathbf{D}$  deixará de ser constante. Esta matriz estabelece as relações constitutivas correspondentes ao modelo de comportamento não-linear adoptado, baseadas em generalizações de resultados experimentais [1]. Numericamente, a implementação e utilização de modelos constitutivos

não-lineares obriga a que se recorra a algoritmos de cálculo específicos, baseados em métodos incrementais e iterativos.

## 2.1. Comportamento Elasto-Plástico

Devido à sua simplicidade, um dos modelos de comportamento mais utilizados na simulação do comportamento não-linear de estruturas articuladas e/ou reticuladas é o modelo elástico-perfeitamente plástico. Este modelo caracteriza-se pelo facto de toda a deformação após cedência do material ocorrer sem variação de tensão (ver figura 1a). Matematicamente, este modelo pode ser caracterizado, em deformação uniaxial, pelas relações

$$\begin{cases} \sigma = E\varepsilon & \Leftarrow \varepsilon \leq \frac{\sigma_0}{E} \\ \sigma = \sigma_0 & \Leftarrow \varepsilon > \frac{\sigma_0}{E} \end{cases} \quad (2)$$

em que  $\sigma_0$  representa a tensão limite de elasticidade, ou tensão de cedência, do material.

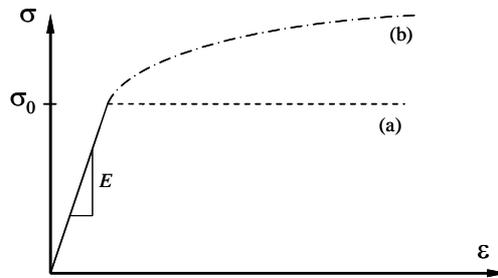


Figura 1. Curvas tensão-deformação: (a) de um material elástico-perfeitamente plástico e (b) de um material com comportamento elasto-plástico com endurecimento (encruamento).

Porém, no presente trabalho, os autores optaram por implementar uma lei de comportamento elasto-plástica com endurecimento (encruamento), como se pode ver na figura 1b. Deste modo alarga-se o âmbito de aplicação do modelo desenvolvido. A lei implementada baseia-se na formulação de Hollomon. Nesta formulação a tensão é proporcional a uma potência da deformação. A zona elástica é, mais uma vez, representada pela lei de Hooke. O comportamento do material é descrito pelas relações

$$\begin{cases} \sigma = E\varepsilon & \Leftarrow \varepsilon \leq \frac{\sigma_0}{E} \\ \sigma = H\varepsilon^n & \Leftarrow \varepsilon > \frac{\sigma_0}{E} \end{cases} \quad (3)$$

Na relação 3,  $H$  é o coeficiente de resistência e  $n$  o coeficiente de endurecimento do material. Note-se que a constante  $H$  corresponde ao valor de tensão  $\sigma$  para uma deformação unitária e que o valor da tensão limite de elasticidade do material pode ser obtido por

intersecção das equações respeitantes ao regime elástico e ao regime plástico [1].

## 2.2. Modelo de Fibras

Os modelos de fibras foram inicialmente propostos por Aktan *et al.* [2] em 1974. De acordo com estes modelos, muito aplicados no cálculo de pilares, cada elemento é discretizado ao nível da secção transversal. Esta discretização é feita em fatias, no caso de flexão uniaxial, ou em filamentos, para a flexão biaxial. Segundo estes métodos, aproxima-se o comportamento de cada fibra ao comportamento axial do material constituinte, sendo normalmente desprezada a influência do esforço transversal. Admite-se que as secções se mantêm planas após deformação, tal como assumido na análise dos elementos viga Euler-Bernoulli. Este facto leva a que se possa calcular o campo de deformações axiais na secção transversal em função da extensão axial média  $\varepsilon_x$  e das curvaturas segundo os eixos locais  $Oy$  e  $Oz$ , *i.e.*,  $1/\rho_y$  e  $1/\rho_z$ . Este cálculo pode ser efectuado com a relação

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon_x + \frac{z}{\rho_y} - \frac{y}{\rho_z}, \quad (4)$$

sendo  $(y, z)$  as coordenadas locais de cada fibra na secção transversal. O sistema de eixos local adoptado é o que se mostra na figura 2. Nesta figura,  $\phi_y$  e  $\phi_z$  são os ângulos de rotação correspondentes às curvaturas  $1/\rho_y$  e  $1/\rho_z$ , respectivamente.

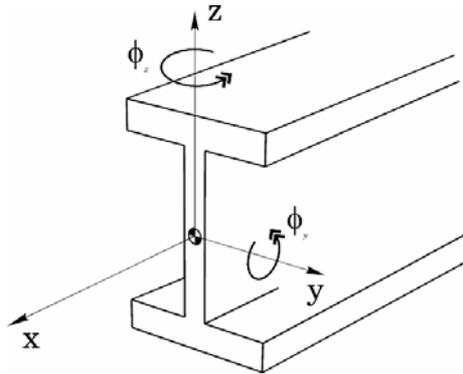


Figura 2. Referencial local ao nível da secção transversal de um elemento genérico.

Uma vez calculada a deformação de cada fibra e recorrendo à lei de comportamento do material, determina-se o campo de tensões na secção transversal e a rigidez global de toda a secção. Este processo é realizado em duas escalas distintas: (i) à escala global, aqui designada por macro-escala, correspondendo à escala do elemento viga-barra a estudar e (ii) à escala das secções transversais dos elementos, aqui designada por micro-escala. Assim, é possível homogeneizar as propriedades calculadas na micro-escala de modo a determinar as propriedades relevantes para o cálculo estrutural na macro-escala, ao nível dos elementos viga-barra.

Com o método descrito nos parágrafos anteriores é possível simular o comportamento de

elementos constituídos por diferentes materiais. Os modelos de fibras permitem utilizar diferentes distribuições de material nas secções transversais dos elementos, tornando possível simular, por exemplo, armaduras em pilares de betão armado. Na figura 3 mostra-se um exemplo de uma tal discretização.

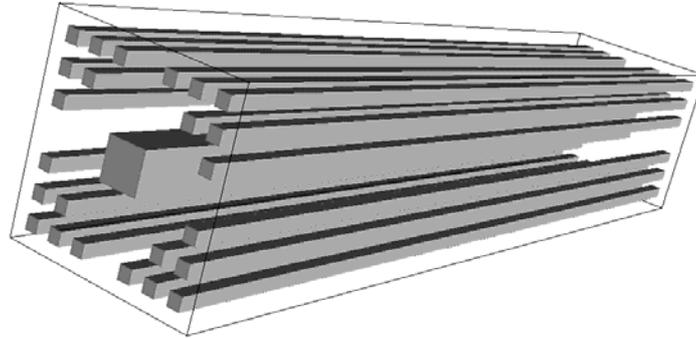


Figura 3. Representação esquemática da discretização de um elemento em fibras longitudinais de diferentes materiais.

Considerando um comportamento isotrópico, as únicas propriedades mecânicas necessárias para efectuar o cálculo com o tipo de elementos descritos são: (i) a rigidez do elemento, traduzida em domínio elástico pelo módulo de elasticidade  $E$ , e em domínio plástico, em cada incremento, pela sua rigidez tangente  $E^{\text{tan}}$ , e (ii) o coeficiente de Poisson,  $\nu$ .

Considerando a lei de comportamento implementada, o processo iterativo desenvolve-se com base na evolução da rigidez incremental do material. Uma vez obtida esta rigidez para cada elemento na micro-escala, pode determinar-se a rigidez tangente na macro-escala, ou seja ao nível dos elementos viga-barra. Este cálculo é realizado por integração dos valores elementares de rigidez tangente em toda a área da secção transversal.

### 2.3. Rótulas Plásticas

O processo de plastificação de uma secção de viga é um processo gradual que se inicia nas fibras mais afastadas do eixo neutro e progride no sentido deste eixo. Este processo, teoricamente, só está completo para uma curvatura infinita da secção [3], o que corresponde ao desaparecimento de qualquer zona elástica. Considerando um comportamento elástico-perfeitamente plástico, pode considerar-se, por convenção, que a secção plastificou totalmente para curvaturas finitas, a partir do momento em que a contribuição da zona elástica para a resistência à flexão se torna insignificante. A curvatura da viga pode então ser aumentada praticamente sem acréscimo de momento flector, isto é, a secção entra em cedência total. Nesta situação diz-se que se formou uma rótula de atrito ou rótula plástica (ver figura 4) [3].

Os elementos estruturais são subdivididos em sub-elementos com comportamento elástico e sub-elementos com comportamento elasto-plástico. Estes últimos designam-se também por rótulas plásticas e, de acordo com resultados experimentais, manifestam-se numa extensão limitada das peças lineares, nomeadamente na vizinhança dos nós viga/pilar e fundações. Para

caracterizar a deformabilidade dos elementos em regime plástico admite-se que, em cada rótula plástica, a curvatura é constante e igual à curvatura na secção média desse elemento [4]. Neste ponto é importante colocar duas questões pertinentes. A primeira diz respeito à razoabilidade de admitir que a curvatura é constante ao longo de todo o comprimento da rótula plástica. A segunda questão, consequência da primeira, consiste em saber qual o comprimento ideal a atribuir aos elementos correspondentes às rótulas plásticas. Note-se que, nos modelos de fibras, o comprimento das rótulas plásticas não necessita de ser conhecido uma vez que a distribuição de curvaturas pode ser determinada através dos seus valores em secções de controlo pré-definidas. O problema coloca-se quando, por razões de economia de cálculo, essas zonas são discretizadas num único elemento. Neste caso, uma vez que a curvatura é constante e igual ao valor calculado para a sua secção média, podem desenvolver-se erros grosseiros de avaliação, quer por defeito quer por excesso, conforme o comprimento considerado para esse elemento seja demasiado grande ou demasiado pequeno, respectivamente [4].



Figura 4. Representação esquemática do mecanismo de formação de uma rótula plástica.

No trabalho que aqui se apresenta assumem-se, como estimativas razoáveis, com base em resultados experimentais, para o comprimento da rótula plástica,  $L_p$ , nos casos de discretização com um só elemento, as relações

$$0,5D < L_p < D, \quad (5)$$

para secções transversais de geometria circular, em que  $D$  é o diâmetro da secção, e

$$0,5h < L_p < h, \quad (6)$$

para secções de geometria rectangular, sendo  $h$  a altura da secção [5].

### 3. OPTIMIZAÇÃO NUMÉRICA

Na generalidade dos processos que envolvem cálculo estrutural não-linear gera-se uma tendência natural para a solução divergir do comportamento característico do material. Estes desvios podem ser controlados, até certo ponto, recorrendo a incrementos de cálculo suficientemente pequenos. No entanto, esta solução acaba por ser uma solução de compromisso, tornando-se muito pouco eficiente em termos de tempo de cálculo elevando o custo final do processo. A alternativa é o desenvolvimento e implementação de algoritmos de optimização específicos que aceleram o cálculo e forçam a convergência numérica. Existem vários métodos de optimização possíveis e que vão desde o cálculo iterativo de cada incremento, por forma a actualizar o tamanho do passo, até algoritmos mais complexos com

modelos de amortecimento numérico [6] e abordagens numéricas implícitas.

### 3.1. Algoritmo de Optimização

O problema que se pretende tratar neste trabalho refere-se, essencialmente, a modelos de comportamento não-lineares. Consequentemente, a realização de cálculos recorrendo a processos incrementais com passo constante torna-se, inevitavelmente, muito dispendiosa. Na utilização de passo constante o passo deve ser suficientemente pequeno para garantir a estabilidade do cálculo em todas as fases do processo. Uma solução para este problema passa pelo recurso a processos incrementais com passo variável.

Assumindo que o controlo do método incremental se faz pelo carregamento aplicado na estrutura, interessa permitir que o incremento de força possa ser maior em fases do processo em que a evolução constitutiva seja aproximadamente linear e menor sempre que a evolução constitutiva tome um carácter não-linear [7].

O algoritmo desenvolvido para o controlo automático do tamanho do passo de carga baseia-se na maximização de dois parâmetros de controlo dando origem a dois critérios de optimização distintos mas complementares. Ambos os critérios avaliam o grau de proximidade entre o comportamento do material ao longo do processo de cálculo e o definido pela lei constitutiva. No primeiro critério, define-se um coeficiente de controlo do nível de tensão, que se designa por  $r_\sigma$ . Este coeficiente representa a diferença entre o valor numérico da tensão –  $\sigma_i$  – e o correspondente valor teórico –  $\sigma_t$  – previsto no modelo constitutivo, isto é,

$$r_\sigma = \frac{\sigma_i - \sigma_t}{T_\sigma}, \quad (7)$$

normalizado por um valor de tolerância –  $T_\sigma$  – definido pelo utilizador.

O segundo critério controla o gradiente da curva de comportamento obtida numericamente. Com este critério pretende-se impedir que se desenvolvam diferenças demasiado elevadas entre a rigidez tangente no início do incremento,  $E_i^{\tan}$ , e a que traduz o valor correcto no final do incremento,  $E_{i+1}^{\tan}$ . Desta relação resulta o coeficiente de controlo  $r_E$ , definido como

$$r_E = \frac{E_i^{\tan} - E_{i+1}^{\tan}}{T_E}, \quad (8)$$

em que  $T_E$  é, mais uma vez, um valor de tolerância definido *a priori*.

Com base nos dois critérios apresentados e escolhendo, incremento a incremento, o critério dominante da forma

$$r_{\max} = \max\{r_\sigma, r_E\} \quad (9)$$

é possível determinar se a solução no incremento corrente é ou não aceitável, corrigindo, se e sempre que necessário, o tamanho do passo [7]. Para realizar esta optimização desenvolveu-se um algoritmo de actualização automática do tamanho do passo de cálculo. A definição e implementação deste algoritmo são descritas na secção seguinte.

### 3.2. Cálculo do Incremento de Força

Para realizar o processo de controlo automático do incremento de carga desenvolveu-se o algoritmo esquematizado na tabela 1, designado por algoritmo em escada. Durante o cálculo de cada incremento determina-se o valor corrigido e otimizado para o incremento de força  $\Delta f^*$  a utilizar no passo seguinte. Os parâmetros que determinam a magnitude do incremento  $\Delta f^*$  são o conjunto de escalares

$$w_0 < 1, \quad w_i > 1 \quad \text{e} \quad q_j < 1, \quad \text{com} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Como se pode constatar da análise do algoritmo da tabela 1 (ver também figura 5) os escalares  $q_j$  definem um conjunto finito de intervalos nos quais são aplicados os factores de correcção  $w_i$ , com  $i, j = 1, \dots, n$ . Analisando a representação gráfica da figura 5 fica claro que este algoritmo impõe um esquema de optimização automática em escada. Através de uma escolha cuidada e numericamente fundamentada destes valores, optimiza-se o cálculo por forma a chegar a um compromisso entre o tempo total despendido e a precisão dos resultados obtidos [7].

O algoritmo proposto para o controlo automático do incremento de força permite ajustar o passo de modo a que este se torne suficientemente pequeno em fases do processo em que a rigidez tangente do material varia rapidamente. Alternativamente, quando tal não acontecer, o tamanho do incremento é novamente aumentado.

1. Cálculo de $r_{\max}$	
2. SE $r_{\max} > 1$	ENTÃO $\Delta f^* = \frac{w_0}{r_{\max}} \Delta f$
3. SE $r_{\max} \leq 1$	
• SE $r_{\max} \leq q_1$	ENTÃO $\Delta f^* = w_1 \Delta f$
• SE $q_1 < r_{\max} \leq q_2$	ENTÃO $\Delta f^* = w_2 \Delta f$
• SE $q_2 < r_{\max} \leq q_3$	ENTÃO $\Delta f^* = w_3 \Delta f$
$\vdots$	$\vdots$
• SE $q_{n-1} < r_{\max} \leq q_n$	ENTÃO $\Delta f^* = w_n \Delta f$
• SE $r_{\max} > q_n$	ENTÃO $\Delta f^* = \Delta f$
FIM SE	

Tabela 1. Algoritmo do esquema discreto (em escada) de optimização automática do incremento de força.

Numa tentativa de melhorar a eficiência numérica do algoritmo de optimização descrito, desenvolveu-se um esquema alternativo contínuo para correcção do passo de cálculo. Neste esquema realiza-se um ajuste numérico aos pontos  $(q_j, w_i)$  com  $i, j = 1, \dots, n$ . Por analogia com os esquemas de integração sugeridos por Patankar [8], a equação genérica

$$w = w_i + (w_n - w_i) \left[ \exp \left( F_c \frac{r_{\max} - q_1}{q_n - q_1} \right) - 1 \right] / [\exp(F_c) - 1], \quad (10)$$

permite fazer o ajuste referido e gerar vários perfis de optimização, controlando apenas um parâmetro numérico escalar, designado por  $F_c$ . Na figura 5 estão representados alguns desses perfis, nomeadamente para valores de  $F_c$  positivos e negativos [7].

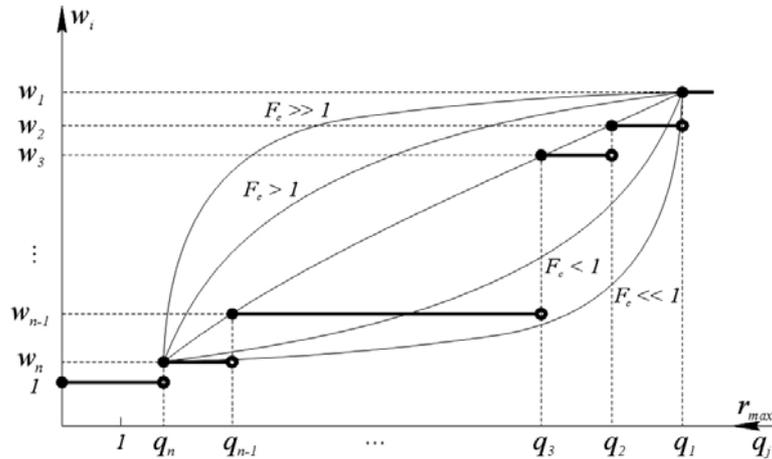


Figura 5. Representação gráfica dos perfis em escada e contínuos do algoritmo de optimização para o controlo automático do incremento de força.

Os dois incrementos iniciais do cálculo são, em todos os casos, avaliados separadamente por forma a controlar a fase de arranque do algoritmo de optimização. Com este controlo pretende-se evitar a realização de cálculos redundantes e, eventualmente, repetitivos, no domínio elástico. Nesta fase de controlo inicial, parte-se de um incremento de força suficientemente pequeno para que fique garantido que o incremento termina em domínio elástico. Só depois se determina o segundo incremento. A magnitude do segundo incremento é determinada por forma a que este termine precisamente no ponto de transição entre os regimes elástico e plástico do material. Com este algoritmo garante-se que não é despendido tempo de cálculo desnecessariamente em regime linear evitando-se, também, que os incrementos realizados em regime elástico ultrapassem o ponto de transição elasto-plástica. Tal facto levaria, forçosamente, à divergência das simulações.

#### 4. EXEMPLOS DE CÁLCULO

Numa fase inicial, no programa desenvolvido no âmbito deste trabalho, implementou-se e testou-se a componente de cálculo linear elástico. Naturalmente, os resultados obtidos foram coincidentes com as soluções analíticas tal se devendo ao facto de a formulação dos elementos viga Euler-Bernoulli coincidir com a formulação analítica da resistência dos materiais. No entanto, é essencial estudar cuidadosamente os resultados obtidos em termos de cálculo não-linear elasto-plástico.

Os testes de validação dos modelos de optimização foram realizados sobre um problema simples: uma viga encastrada numa extremidade com carga transversal concentrada na extremidade livre. Nestes testes pretende-se, também, avaliar questões relacionadas com: (i) o comprimento e discretização das rótulas plásticas e (ii) com as prestações do modelo de fibras.

Para a definição do comprimento das rótulas plásticas admite-se a solução referida na secção 2.3 (ver equações 5 e 6). Verificou-se que, aumentando o comprimento dos elementos elasto-plásticos para além dos intervalos estipulados facilita a divergência da solução. Este facto deve-se a que, para comprimentos demasiado grandes, deixa de fazer sentido assumir que a curvatura pode ser avaliada com base em valores médios no elemento. A variação da curvatura ao longo do elemento é demasiado elevada para que se possam assumir valores médios na simulação do comportamento não-linear do elemento. No entanto, para comprimentos de rótula plástica inferiores aos definidos pelas relações 5 e 6 o problema da curvatura deixa de existir. Porém, se estes elementos forem demasiado pequenos, limita-se a zona de cedência do material e a solução obtida é diferente da esperada resultando, necessariamente, em deslocamentos menores. Adicionalmente, o prejuízo em termos de tempos de processamento, inerente ao refinamento das zonas elasto-plásticas da malha, não justifica a sua utilização. Este facto torna-se mais evidente em problemas de maior dimensão. Porém, o recurso a malhas de elementos finitos mais refinadas nas zonas correspondentes às rótulas plásticas permite uma análise mais minuciosa dos resultados obtidos, por existir um maior número de secções de controlo. Na figura 6 pode ver-se a relação entre o número de elementos utilizados na discretização de uma rótula plástica e o número de incrementos de cálculo.

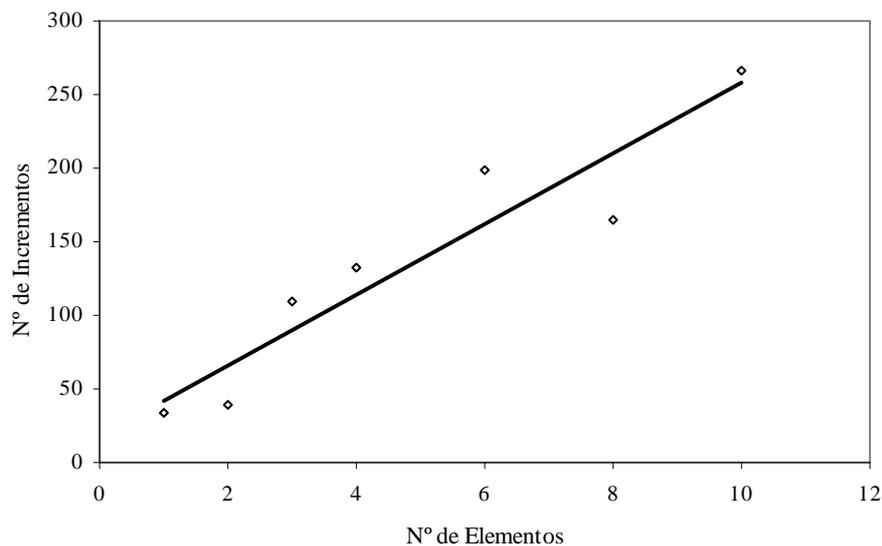


Figura 6. Relação entre o número de elementos na discretização da rótula plástica e o número total de incrementos de cálculo (comprimento constante da rótula plástica).

Na figura 7 mostra-se um exemplo de resultados, ao nível da micro- e da macro-escala, obtidos com o modelo de fibras. A análise do comportamento do material ao longo das secções de controlo permite verificar a eficácia do modelo utilizado. Apesar de algumas limitações no que diz respeito à influência dos esforços cortantes e momentos torsores, o modelo implementado permite avaliar correctamente o comportamento à flexão composta desviada dos elementos.

Da análise das curvas de comportamento dos materiais utilizados, comparativamente com as curvas que resultam do cálculo numérico, verifica-se que o processo segue, com relativa precisão, o comportamento definido no modelo. Contudo, torna-se complicado validar resultados em termos globais, pela dificuldade em encontrar *benchmarks* ou soluções analíticas adequadas na bibliografia consultada. Na figura 8 pode comparar-se a evolução do comportamento de três materiais com módulo de elasticidade idêntico: (i) um material elástico linear; (ii) um material com comportamento elástico-perfeitamente plástico e (iii) um material com comportamento elasto-plástico genérico. Note-se que  $M_y$  representa o momento limite elástico, correspondente ao início do processo de plastificação da secção.

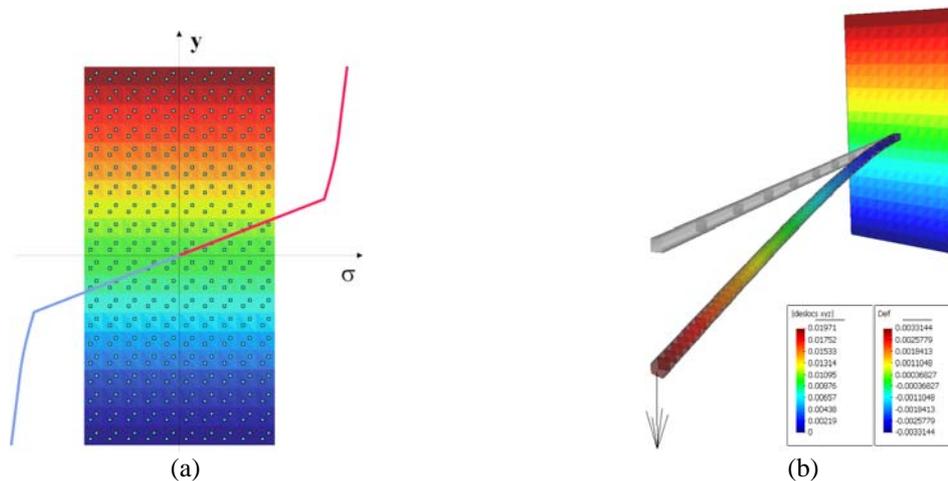


Figura 7. Modelo de fibras: (a) representação da distribuição de tensões na secção transversal de uma viga (análise bidimensional) e (b) representação conjunta de resultados na micro- e na macro-escala.

Comparando as duas curvas não-lineares da figura 8, onde se ilustra a evolução do processo de plastificação, pode verificar-se que, para o material com comportamento elástico-perfeitamente plástico, a rótula plástica se forma mais rapidamente do que para o material com comportamento elasto-plástico genérico.

No que diz respeito à verificação do comportamento do modelo de optimização do método incremental efectuaram-se vários estudos. Um dos primeiros consistiu em relacionar o erro relativo entre as curvas de comportamento obtidas pelo cálculo e as curvas teóricas com o número de incrementos de um cálculo efectuado com passo constante (ver figura 9). Como se pode verificar, a curva resultante desta análise tem a forma, tipicamente exponencial, de uma curva de convergência numérica ideal. Com o segundo estudo pretendeu-se avaliar a resposta

do algoritmo de controlo automático do tamanho do passo. Analisando os resultados apresentados na figura 10, pode concluir-se que o algoritmo de controlo se revelou muito eficiente. Note-se que, com o cálculo otimizado, foi possível em apenas 42 incrementos, obter uma melhor aproximação à conseguida com 1000 incrementos de passo constante.

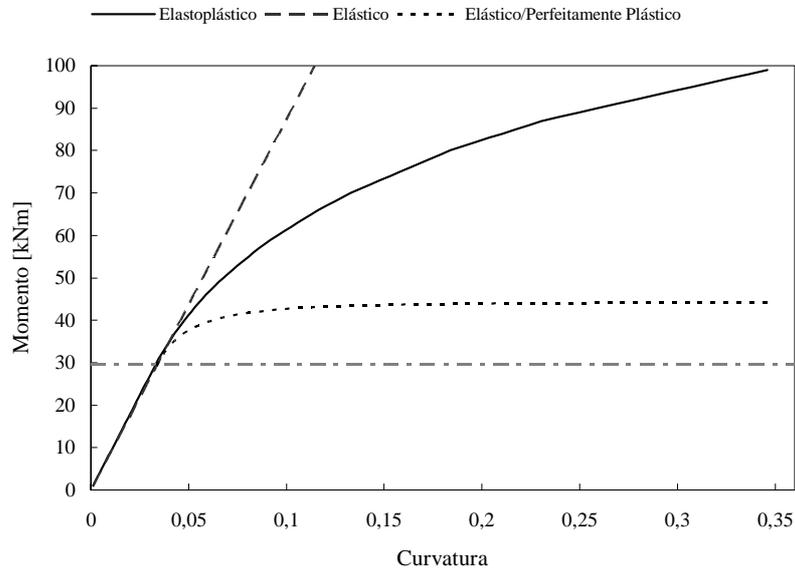


Figura 8. Curvas momento-curvatura: comparação de resultados analíticos e numéricos.

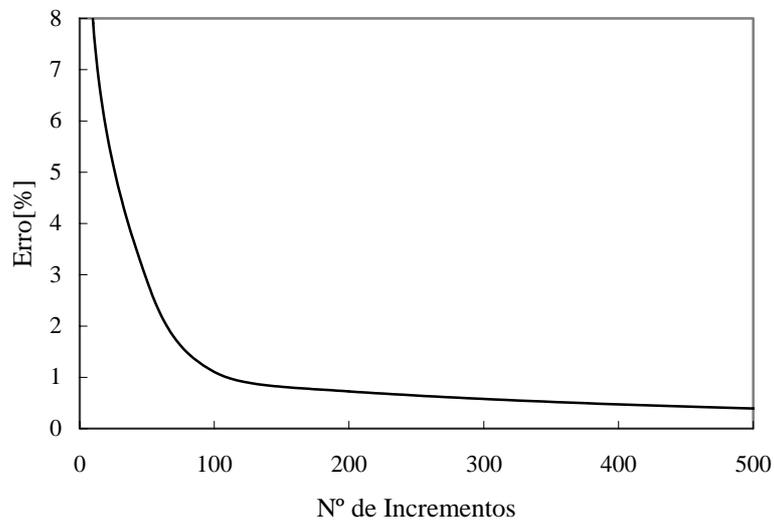


Figura 9. Evolução do erro relativo em função do número de incrementos (cálculo com passo constante).

No que diz respeito à actualização do tamanho do passo pode observar-se na figura 11 a resposta do algoritmo de optimização automática. Nesta figura são perceptíveis as zonas de

aceleração e desaceleração do método.

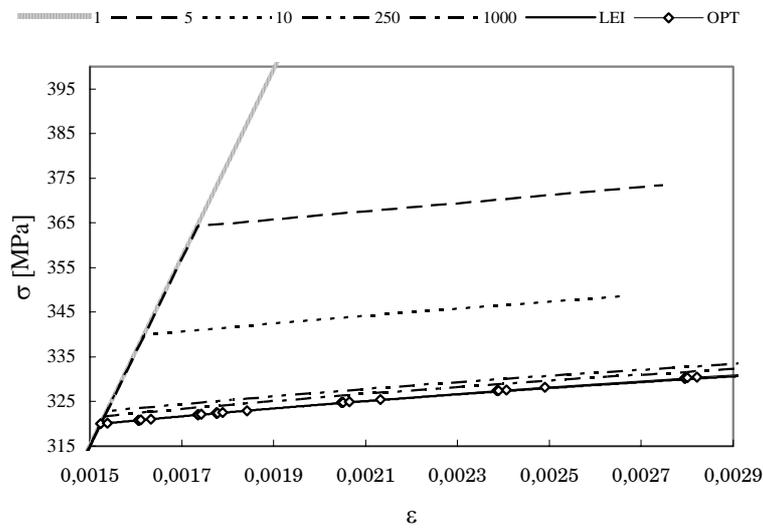


Figura 10. Representação da zona inicial da curva tensão-deformação para diversas situações de cálculo (passo constante e passo variável com cálculo otimizado).

Efectuaram-se testes para avaliar a influência dos parâmetros relevantes para o seu controlo. Numa primeira fase determinou-se a influência do tamanho do primeiro incremento, tendo-se verificado ser um parâmetro com pouca influência na evolução do processo de optimização. Esta conclusão é facilmente explicada porque a influência do tamanho do passo inicial é diluída pelo facto de o processo de actualização do tamanho do passo equilibrar a evolução do cálculo rapidamente. Por outro lado, o parâmetro  $F_c$ , do qual depende a evolução do algoritmo contínuo de actualização do tamanho do passo (ver figura 5), influencia fortemente as prestações do algoritmo de optimização.

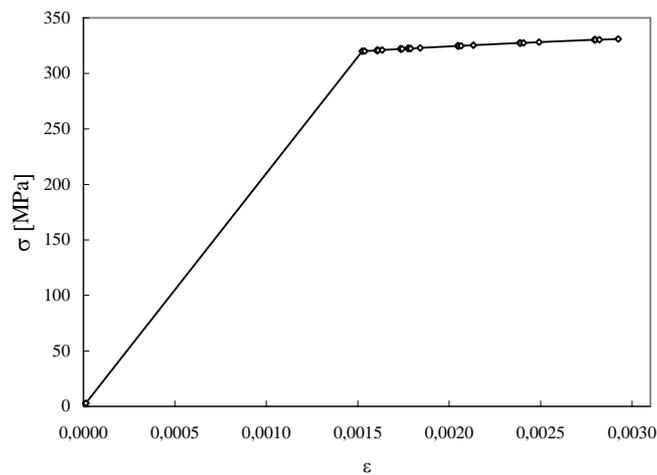


Figura 11. Exemplo da evolução de um cálculo com controlo automático do incremento de força.

A partir da definição do algoritmo mostra-se que, para valores mais elevados de  $F_c$ , o algoritmo aumenta o tamanho dos incrementos e, conseqüentemente, acelera o cálculo. Com este efeito obtêm-se melhores resultados utilizando valores mais baixos de  $F_c$ , mesmo com um maior número de incrementos.

O parâmetro numérico de otimização com maior influência na evolução do cálculo é o parâmetro  $w_I$  que determina o valor máximo do factor de ampliação do tamanho do passo e, conseqüentemente, afecta o cálculo dos factores  $w_i$ . Valores de  $w_I$  mais elevados levam a que se consiga um cálculo mais rápido, com menor número de incrementos. Porém, esta melhoria no tempo de cálculo poderá levar a uma maior acumulação de erros. Na figura 12 mostra-se a influência do parâmetro  $w_I$  no número de incrementos de cálculo.

Na figura 13 comparam-se os tempos de processamento para simulações com otimização e com passo constante. Estes resultados estão normalizados com os resultados do cálculo que representa o melhor equilíbrio entre tempo de processamento e resultados ( $w_I = 5$ ).

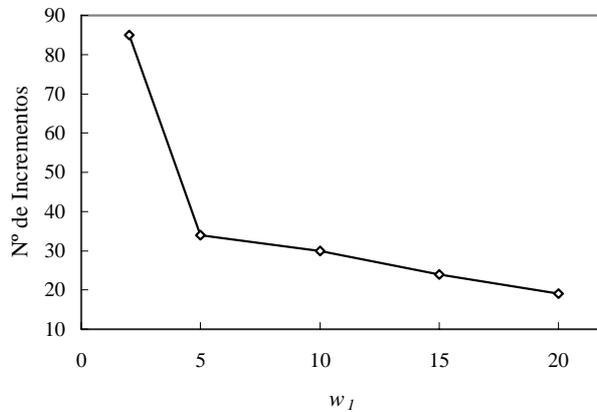


Figura 12. Influência do factor  $w_I$  no número total de incrementos de uma simulação com otimização.

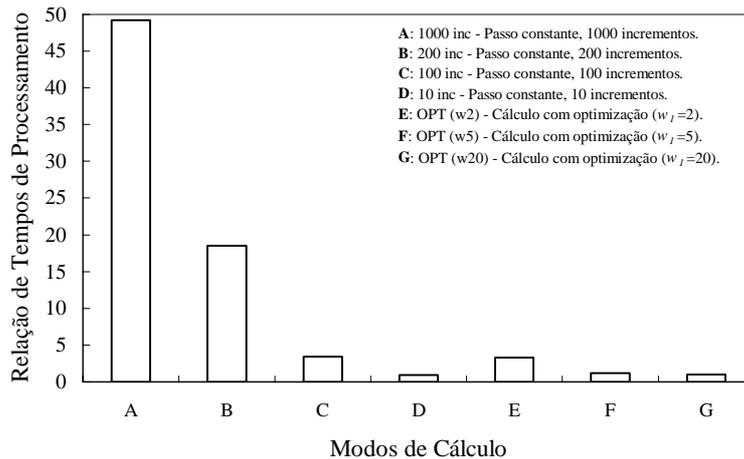


Figura 13. Tempo de processamento (normalizado com os resultados do cálculo otimizado com  $w_I = 5$ ).

## 5. CONCLUSÕES

No presente trabalho os autores descrevem e implementam um método numérico adequado à análise por elementos finitos do comportamento não-linear de estruturas articuladas e/ou reticuladas. O modelo descrito baseia-se numa lei de comportamento do material elasto-plástica e no modelo de fibras, para discretização das secções de potencial desenvolvimento de não-linearidades em elementos estruturais. Com o método desenvolvido determina-se a evolução de deformações e tensões nas rótulas plásticas em locais predeterminados da estrutura.

O algoritmo implementado permite otimizar, em cada instante, o tamanho do passo de cálculo. Para tal avalia-se em cada incremento a evolução da rigidez tangente de cada ponto material e comparam-se os níveis de tensão obtidos numericamente com os previstos pelo modelo constitutivo teórico. Com base nestes dois critérios aplicam-se factores de correcção, para aumentar ou para reduzir o tamanho do passo de cálculo no incremento seguinte.

Os modelos referidos foram testados intensivamente e os resultados obtidos foram comparados com a resposta teórica prevista em estruturas simples. Pode concluir-se que, controlando criteriosamente todos os parâmetros de gestão do algoritmo automático de optimização conseguem-se reduções importantes no tempo de cálculo. Estas reduções podem alcançar valores da ordem de 90% e atingem-se sem perda de qualidade nos resultados.

## REFERÊNCIAS

- [1] E. Hinton, *Non-Linear Finite Element Analysis*, NAFEMS (1992).
- [2] A.E. Aktan, D.A. Pecknold e M.A. Sozen, R/C columns earthquake response in two dimensions, *Journal of the Structural Division ASCE*, **100** (ST10), 1999-2015 (1974).
- [3] V.D. Silva, *Mecânica e Resistência dos Materiais*, 2<sup>a</sup> Ed., ZUARI, Coimbra (1999).
- [4] H. Varum, *Modelo Numérico para a Análise Sísmica de Pórticos Planos de Betão Armado*, Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto – FEUP (1996).
- [5] C.T. Vaz, *Comportamento Sísmico de Pontes com Pilares de Betão Armado – Verificação da Segurança*, Laboratório Nacional de Engenharia Civil – LNEC (1993).
- [6] J. Pinho-da-Cruz e F. Teixeira-Dias, *A numerical damper optimization algorithm for non-linear behaviour in finite element simulations*, Actas da VII International Conference on Computational Plasticity – COMPLAS'2003, **1**, 253 (CD-ROM artº 152), Barcelona, Espanha (2003).
- [7] F. Teixeira-Dias e L.F. Menezes, Numerical aspects of finite element simulations of residual stresses in metal matrix composites, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **50**, 629–644 (2001).
- [8] S.V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere/McGraw-Hill, Washington DC (1980).