Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2006

Sandra Margarida Barreto Oliveira

Dualidades Naturais (Teoria das Categorias)

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2006

Sandra Margarida Barreto Oliveira

Dualidades Naturais (Teoria das Categorias)

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática, realizada sob a orientação científica do Doutor Dirk Hofmann, Professor Auxiliar Convidado do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

Dedico este trabalho aos meus pais, Edmundo e Arménia, e ao meu irmão, David, por todo o Amor e apoio.

o júri

presidente

Doutora Paula Cristina Supardo Machado Marques Cerejeiras
Professora Associada da Universidade de Aveiro

Doutor Gonçalo Gutierres Conceição
Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Doutor Dirk Hofmann
Professor Auxiliar Convidado da Universidade de Aveiro (Orientador)

agradecimentos

Ao meu orientador, pelo incansável apoio.

palavras-chave

Teoria das Categorias, Dualidades

resumo

Foi em 1945 que as categorias foram introduzidas por Samuel Eilenberg e por Saunders Mac-Lane. Inicialmente foram aplicadas com o objectivo de simplificar certos aspectos da topologia. No entanto, estas noções revelaram-se extremamente úteis na unificação de diversos conceitos em muitos outros ramos da Matemática. De facto, muitas construções nas várias áreas da Matemática têm uma descrição semelhante e a teoria das categorias, e em particular a teoria das dualidades, fornecem uma descrição uniforme destas construções.

Em qualquer teoria matemática, objectos isomorfos são indistinguíveis em termos dessa teoria, e o seu objectivo é identificar e estudar construções e propriedades que são invariantes através dos isomorfismos da teoria (assim, por exemplo, a Álgebra estuda propriedades que não são alteradas, ou destruídas, quando um grupo é substituído por outro isomorfo a ele). Na teoria das categorias, um functor $F:A\to B$ diz-se um isomorfismo se existir um functor $G:B\to A$ tal que: $G\circ F=id$ e $F\circ G=id$. Neste caso as categorias A e B dizem-se isomorfas, $A\cong B$.

Ao longo da dissertação, apresentar-se-ão numerosos exemplos de entidades isomorfas, que podem ser consideradas como "semelhantes" e ver-se-á que na Teoria das Categorias "é isomorfo a" pode ser visto como um sinónimo de "é igual a", e que a maior parte das definições e construções que se podem elaborar numa categoria não especificam "entidades únicas" mas, apenas, a menos de isomorfismo. Esta noção de "semelhança" é no entanto mais estrita do que necessário. De facto, se F tem inverso G então, para cada A-objecto a e cada B-objecto b, tem-se: $a=G(F(a))$ e $b=F(G(b))$; quando é suficiente, sob o ponto de vista da Teoria das Categorias, considerar A e B como "semelhantes" se se tem apenas: $a\cong G(F(a))$ em A e $b\cong F(G(b))$ em B. É esta a noção de "igualdade" (equivalência) que é considerada neste trabalho. Duas categorias A e B são equivalentes, $A\simeq B$, se existir um functor $G:B\to A$ e isomorfismos naturais $\tau:id\cong G\circ F$ e $\sigma:id\cong F\circ G$.

Para o presente trabalho, são de especial interesse as equivalências entre categorias (conhecidas) e duais de categorias (conhecidas), e assim sendo, este trabalho propõe-se a estudar formas de obter equivalências de categorias e a estudar mais pormenorizadamente alguns casos concretos de categorias onde será aplicada a teoria das dualidades, nomeadamente, CompHaus é dualmente equivalente a C*-Alg (onde CompHaus é a categoria dos espaços compactos e separados e funções contínuas, e C*-Alg a categoria das C*-Álgebras e homomorfismos algébricos) e Bool é dualmente equivalente a Stone (onde Bool é a categoria das álgebras booleanas e homomorfismos booleanos, e Stone a categoria dos espaços compactos e separados totalmente desconexos e funções contínuas).

keywords Category Theory, Duality

abstract

The concept of a category was introduced by Eilenberg and Mac-Lane in 1945 with the aim to simplify certain aspects of the algebraic topology. However, the language of category theory proved to be useful in many other branches of mathematics as well and helps to understand better what is common to them. In fact, many constructions in mathematics have a similar description and category theory provides a uniform description of these constructions.

In any mathematical theory, isomorphic objects are indistinguishable in terms of the theory and the objective of the theory is to identify and study constructions and properties that are invariant under isomorphism (thus, for example, algebra studies properties that they are not modified, or destroyed, when a group is substituted by another one isomorphic to it). In fact, in category theory, "is isomorphic to" can be seen as a synonym of "is equal to" and the major part of definitions and constructions in category theory, do not specify "uniquely", but only, as it will be seen, up to isomorphism. In general, objects X and Y are called isomorphic if there exist arrows $F:X\to Y$ and $G:Y\to X$ such that $F.G=1$ e $G.F=1$. This concept can be extended to categories: given two categories C and D, C and D are called isomorphic, if there exist functors $F:C\to D$ and $G:D\to C$ such that $G.F=1$ and $F.G=1$.

However, this notion of "similarity" is stricter than necessary. Under the point of view of category theory, it is more natural to require instead "a" to be isomorphic to "G(F(a))" and "b" to be isomorphic to "F(G(b))"; and this is the notion of "equality" (equivalence) considered in this work. Of special interest to us are equivalences between (known) categories and duals of (known) categories. The knowledge of such and equivalence provides us with new information about involved categories, since in many "everyday" categories for instance products are easier to describe than coproducts.

In the first chapter of this thesis we introduce the definition of a category and present several examples. In the second chapter we study in detail special morphisms and objects in a category and their properties. Furthermore we study the concept of functor and (co)limit. In the third chapter we analyse the notions of natural transformation, equivalence and adjoint situation.

In the fourth chapter we focus on the study of dual equivalences. We analyse the structure of a dual adjunction and provide techniques for their construction. Finally, we give conditions which guarantee that we constructed adjunction is in fact an equivalence. We illustrate this procedure by examples, among them the dual equivalence between CompHauss and C*-Alg (where CompHauss is the category of compact and separated spaces and C*-Alg the category of C*-algebras).

ÍNDICE

Introdução

Foi em 1945 que os conceitos de categoria, de functor (entre categorias) e de transformação natural (entre functores) foram introduzidos por Samuel Eilenberg e por Saunders Mac-Lane. Inicialmente foram aplicados com o objectivo de simplificar certos aspectos da topologia (algébrica). No entanto, estas noções revelaram-se extremamente úteis na unificação de diversos conceitos em muitos outros ramos da matemática. De facto, muitas construções nas várias áreas da matemática têm uma descrição semelhante e a teoria das categorias, e em particular a teoria das dualidades, fornecem uma descrição uniforme destas construções.

Em qualquer teoria matemática, objectos isomorfos são indistinguíveis em termos dessa teoria, e o seu objectivo é identificar e estudar construções e propriedades que são invariantes através dos isomorfismos da teoria (assim, por exemplo, a álgebra estuda propriedades que não são alteradas, ou destruídas, quando um grupo é substituído por outro isomorfo a ele). A teoria das categorias providencia uma formulação abstracta da ideia matemática de isomorfismo e estuda noções que são invariantes sob todas as formas de isomorfismo. Um functor $F : A \to B$ diz-se um isomorfismo se existir um functor $G : B \to A$ tal que: $G \circ F = id_A$ e $F \circ G = id_B$. Neste caso as categorias A e B dizem-se isomorfas, $A \cong B$.

Ao longo da dissertação, apresentar-se-ão numerosos exemplos de entidades isomorfas, que podem ser consideradas como "semelhantes" e ver-se-á, oportunamente, que na teoria das categorias "é isomorfo a" pode ser visto efectivamente como um sinónimo de "é igual a", e que a maior parte das definições e construções que se podem elaborar numa categoria não especificam "entidades únicas" mas, apenas como se verá, a menos de isomorfismo. Esta noção de "semelhança" é no entanto mais estrita do que necessário. De facto, se F tem inverso G então, para cada A-objecto a e cada B-objecto b, tem-se: $a = G(F(a))$ e $b = F(G(b))$; quando é mais natural, sob o ponto de vista da teoria das categorias, considerar A e B como "semelhantes" se se tem apenas: $a \cong G(F(a))$ em A e $b \cong F(G(b))$ em B. É esta a noção de "igualdade" (equivalência) que é considerada neste trabalho. Por outras palavras, duas categorias A e B são equivalentes, $A \simeq B$, se existir um functor $G : B \to A$ e isomorfismos naturais $\tau : id_{\mathcal{A}} \cong G \circ F$ e $\sigma : id_B \cong F \circ G$.

Para o presente trabalho, são de especial interesse as equivalências entre categorias (conhecidas) e duais de categorias (conhecidas), e assim sendo este trabalho propõe-se a estudar formas de obter equivalências de categorias e a estudar mais pormenorizadamente alguns casos concretos de categorias onde será aplicada a teoria das dualidades, nomeadamente, $CompHaus^{op} \cong C^*\text{-}Alg$ (onde $CompHaus$ é a categoria dos espaços compactos e separados e funções contínuas, e $C^*\text{-}Alg$ a categoria das C^*-Álgebras e homomorfismos algébricos) e $Bool^{op} \cong Stone$ (onde $Bool$ é a categoria das álgebras booleanas e homomorfismos booleanos, e $Stone$ a categoria dos espaços compactos e separados totalmente desconexos e funções contínuas).

De forma a introduzir o tema das dualidades naturais, apresentam-se em 3 capítulos as definições, resultados e exemplos gerais da teoria das categorias.

Seguidamente faz-se uma descrição resumida desses três capítulos de base para o posterior desenvolvimento do assunto.

No primeiro capítulo desta tese introduzem-se os conceitos básicos sobre categorias e exemplos. No segundo estudam-se em detalhe morfismos e objectos especiais numa categoria e suas propriedades. Além disso estudam-se os conceitos de functor e (co)limite. No terceiro capítulo analisam-se as noções de transformação natural, de equivalência e de situação de adjunção.

No quarto capítulo focam-se as equivalências duais, e analisa-se a estrutura de uma adjunção dual com o intuito de providenciar técnicas para a sua construção. Finalmente, apresentam-se as condições que garantem que a adjunção dual construída é de facto uma equivalência. Este procedimento é ilustrado com os exemplos acima referidos.

Capítulo I - Categorias: definições e exemplos.

Este capítulo trata das categorias em geral. Estudam-se definições e exemplos e, além disso, são abordadas as noções fundamentais de categoria dual e de dualidade, que terão grande relevância, juntamente com o Princípio da dualidade, ao longo de todos os capítulos. Por fim, são apresentadas formas de construir novas categorias a partir de outras.

1- Definição de uma Categoria.

Definição 1 *: Uma* ***Categoria*** $\mathcal{C}$ *é constituída por:*

1. *uma classe,* $Obj\mathcal{C}$*, cujos elementos são chamados* $\mathcal{C}$*-objectos:* $a, b, c, ...$;

2. *para cada par* (a, b) *de* $\mathcal{C}$*-objectos, um conjunto* $Mor_{\mathcal{C}}(a, b)$ *de morfismos de* a *em* b*, que se denotam por* $f, g, h, ...$*; isto é,*

   uma classe, $Mor\mathcal{C}$*, de elementos designados por* $\mathcal{C}$*-morfismos:* $f, g, h, i, ...$;

   Nota: Quando $f \in Mor_{\mathcal{C}}(a, b)$*, escreve-se* $f : a \to b$ *(ou ainda,* $a \xrightarrow{f} b$*) para denotar que o domínio de* f*,* $domf$*, é* a *e que o codomínio de* f*,* $codf$*, é* b*.*

3. *para cada terno* (a, b, c) *de* $\mathcal{C}$*-objectos, uma operação de composição,* $\circ$*, definida da seguinte forma:*

$$\begin{array}{llll} \circ : & Mor_{\mathcal{C}}(a, b) \times Mor_{\mathcal{C}}(b, c) & \to & Mor_{\mathcal{C}}(a, c) \ ; \\ & (f, g) & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

4. *para cada* $a \in Obj\mathcal{C}$*, um morfismo* $id_a : a \to a$ *a que se chama identidade de* a*;*

tais que, são satisfeitos os seguintes axiomas:

- **(Ax. Id.)** a Lei de Identidade: para quaisquer $\mathcal{C}$-morfismos $a \xrightarrow{f} b$ e $c \xrightarrow{g} a$,

  $f \circ id_a = f \qquad$ e $\qquad id_a \circ g = g$;

- **(Ax. As.)** a Lei de Associatividade: para quaisquer $\mathcal{C}$-morfismos $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d$,

  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

2- Exemplos de Categorias.

Um dos clássicos exemplos de categorias é a categoria dos conjuntos, $\mathcal{C}onj$, cujos objectos são todos os conjuntos e os morfismos são todas as funções. A lei de composição dos morfismos é a lei de composição usual de funções.

Na lista que se segue vão ser apresentados mais alguns exemplos de categorias, em que os objectos são conjuntos com estruturas adicionais, os morfismos são funções que respeitam esta estrutura adicional e a composição de morfismos é simplesmente a composição usual de funções (esses objectos e morfismos apresentados na tabela já são conhecidos de vários ramos da Matemática).

Exemplos 2 *:*

Categoria:	Objectos:	Morfismos:
$\mathcal{C}onjNon$	conjuntos não vazios	funções entre conjuntos não vazios
$\mathcal{C}onjPO$	conjuntos parcialmente ordenados	homomorfismos de ordem
$\mathcal{M}on$	monóides	homomorfismos de monóides
$\mathcal{G}rp$ $(\mathcal{G}rpAb, ...)$	grupos (grupos abelianos,...)	homomorfismos de grupos (grp.ab.,...)
$\mathcal{V}ect_{\mathrm{IK}}$	espaços vectoriais sobre o corpo IK	aplicações lineares
$\mathcal{T}op$	espaços topológicos	funções contínuas

Esta lista de exemplos não é obviamente exaustiva e pode alargar-se facilmente com outras categorias do mesmo tipo.

Passa-se agora à apresentação de outros exemplos de aspecto um pouco diferente mas que são também exemplos usuais de categorias.

Exemplos 3 ***:***

1. **Categoria 1.** Esta categoria tem um único objecto, $*$, e um único morfismo, f. Posto isto, esta estrutura está completamente determinada como se expõe a seguir. Necessariamente, $* \xrightarrow{f} *$ (por $*$ ser o único objecto) e, portanto, $f \overset{(a)}{=} id_*$. Além disso, a única composição de morfismos possível é: $f \circ f \overset{(b)}{=} f$.

   Assim sendo, são satisfeitas:

   . a lei de identidade: $\quad id_* \circ f \overset{(a)}{=} f \circ id_* \overset{(a)}{=} f \circ f \overset{(b)}{=} f$

   e

- a lei de associatividade: $\qquad (f \circ f) \circ f \overset{(b)}{=} f \circ f \overset{(b)}{=} f \circ (f \circ f)\,.$

Portanto, tem-se uma categoria que se pode representar através do seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} \overset{*}{\bullet} \arrow[loop below, "f"] \end{tikzcd}$$

Em suma, o que quer que representem $*$ e f, produz-se uma estrutura que satisfaz os axiomas da definição de categoria se se proceder como acima indicado. A categoria assim obtida poderá ser vista como no diagrama anterior e, é neste sentido, que se pode dizer que existe então uma única categoria com um objecto e um morfismo.

2. **Categoria 2.** Esta categoria tem dois objectos e três morfismos (as duas identidades e um morfismo não trivial).

   - Podem designar-se os dois objectos pelos números 0 e 1.

   - Para os três morfismos tomem-se os pares $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,1)$, colocando:

     $0 \overset{(0,0)}{\to} 0$

     $0 \overset{(0,1)}{\to} 1$

     $1 \overset{(1,1)}{\to} 1$

   - Assim, existe apenas uma forma de definir a composição (visto que se tem, necessariamente, $(0,0) = id_0$ e $(1,1) = id_1$):

     $id_0 \circ id_0 = id_0$

     $(0,1) \circ id_0 = (0,1)$

     $id_1 \circ (0,1) = (0,1)$

     $id_1 \circ id_1 = id_1.$

   Portanto, esta categoria poderá representar-se da seguinte forma:

$$\begin{tikzcd} \overset{0}{\bullet} \arrow[loop below, "id_0"] \arrow[rr, "{(0,1)}"'] & & \overset{1}{\bullet} \arrow[loop below, "id_1"] \end{tikzcd}$$

3. **Categoria 3.** Esta categoria tem três objectos $(0,1,2)$ e seis morfismos (id_0, id_1, id_2, $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,2)$). Os morfismos (três identidade e três não-identidade) podem ser representados num diagrama tal como se segue:

$$\begin{tikzcd} \overset{0}{\bullet} \arrow[loop below, "(0,0)"] \arrow[rr, "(0,2)"] \arrow[dr, "(0,1)"'] & & \overset{2}{\bullet} \arrow[loop below, "(2,2)"] \\ & \overset{1}{\bullet} \arrow[loop below, "(1,1)"] \arrow[ur, "(1,2)"'] & \end{tikzcd}$$

Mais uma vez há apenas um modo para definir as composições.

Em cada um dos três exemplos de categorias apresentados anteriormente, existe apenas uma forma de definir as composições. De facto, uma vez o domínio e o codomínio conhecidos, já não há outra alternativa para definir os morfismos. Isto acontece porque este tipo de categorias são **categorias induzidas por uma relação de pré-ordem**, isto é, pode-se definir uma relação de pré-ordem no conjunto dos seus objectos (e portanto, não são nada mais do que conjuntos pré-ordenados). Vejam-se então mais alguns exemplos deste tipo de categorias.

4. **Categoria $\mathbf{1}+\mathbf{1}$**. Esta categoria tem dois objectos (p e q) e quatro morfismos, e pode ser visualizada como no diagrama seguinte:

$$\begin{tikzcd} \overset{p}{\bullet} \arrow[loop below] \arrow[r, shift left] & \overset{q}{\bullet} \arrow[loop below] \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$

Este é um exemplo simples onde está definida, implicitamente, uma relação R de pré-ordem, que não é de ordem parcial (contrariamente às categorias $1, 2$ e 3); de facto, tem-se pRq e qRp, mas $p \neq q$ (ou seja, R não satisfaz a propriedade de anti-simetria).

5. **Categorias $\mathcal{C}_{(X,R)}$**.

Qualquer conjunto pré-ordenado (X, R) pode ser considerado como uma categoria da seguinte forma:

- os objectos são os elementos de $X = \{p, q, r, s, ...\} = Obj\mathcal{C}_{(X,R)}$,
- os morfismos são os elementos de $R = \{(p, q), (q, s), (p, s), ...\} = Mor\mathcal{C}_{(X,R)}$,

ou seja, define-se:

$$Mor_{\mathcal{C}_{(X,R)}}(p,q) = \begin{cases} \left\{p \overset{(p,q)}{\longrightarrow} q\right\} & \text{, se } pRq \\ \varnothing & \text{, se } p\not{R}q \end{cases} , \qquad \forall p, q \in X.$$

Como existe, quando muito, um morfismo de um objecto para outro, forçosamente tem-se:

▪ a lei de composição: $(q,s)\circ(p,q)=(p,s)$ (com (p,q), (q,s) e (s,r) $\mathcal{C}_{(X,R)}$-morfismos; pela transitividade de R, como pRq e qRs então pRs e, daqui, (p,s) é um morfismo);

▪ para cada $p \in Obj\mathcal{C}_{(X,R)}$, uma identidade: $id_p = (p,p)$

(por reflexividade de R, (p,p) é sempre um morfismo).

De facto, são satisfeitos os axiomas da definição de categoria:

▪ (Ax. Id.): $id_p \circ (q,p) = (q,p)$ e $(p,q)\circ id_p = (p,q)$;

▪ (Ax. As): $[(s,r)\circ(q,s)]\circ(p,q) = (s,r)\circ[(q,s)\circ(p,q)]$

$$\Leftrightarrow (q,r)\circ(p,q) = (s,r)\circ(p,s)$$

$$\Leftrightarrow (p,r) = (p,r).$$

Inversamente, dada uma categoria $\mathcal{C}$, pode-se definir a relação binária R em $Obj\mathcal{C}$ por:

pRq quando existe em $\mathcal{C}$ um morfismo $p \to q$.

A relação R assim definida é de pré-ordem (a reflexividade é assegurada pela existência de identidade e a transitividade deriva da definição de composição de morfismos).

Assim, pRq se e só se $Mor_{\mathcal{C}}(p,q) \neq \varnothing$.

Observações 4 : ***Casos particulares das categorias*** $\mathcal{C}_{(X,R)}$**.**

(a) **Categorias** $\mathcal{C}^{op} = \mathcal{C}_{(X,R^{-1})}$, onde a relação dual, R^{-1}, de R define-se por:

$pR^{-1}q$ se e só se qRp.

Observação 5 : *Estas categorias são um exemplo da noção de categoria dual (oposta)* $\mathcal{C}^{op}$, *que são analisadas com mais pormenor a partir da definição (7).*

(b) **Categorias discretas** $\mathcal{C}_X$, onde X é um conjunto qualquer no qual se considera a relação R seguinte:

xRy se e só se $x = y$.

Este tipo de categorias são construídas tomando para:

▪ $Obj\mathcal{C}_X = X$;

▪ $Mor_{\mathcal{C}_{\mathbf{X}}}(x,y) = \begin{cases} \{id_x\} & , x = y \\ \varnothing & , x \neq y \end{cases}$, (com $x, y \in X$).

Assim, para cada $x \in X$, existe o morfismo identidade $x \overset{id_x}{\rightarrow} x$. Note-se que os morfismos identidade são os únicos morfismos da categoria e, por essa razão, a única lei de composição possível é:

. $id_z \circ id_z = id_z$, onde z é um elemento qualquer de X.

São assim satisfeitos (Ax.Id.) e (Ax.As.).

(c) **Categorias** $\mathcal{C}_{(X,\leq)}$, onde $(X, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado por uma relação "$\leq$".

Os exemplos vistos anteriormente, são exemplos de categorias que têm, no máximo, um morfismo entre dois objectos dados. Vão ser agora apresentados exemplos de categorias que têm mais do que um morfismo entre dois objectos dados.

6. **Categorias** $\mathcal{C}_M$, definidas por um monóide (grupo,...) M.

Pode-se pensar num monóide (grupo,...) M como numa categoria com um único objecto M.

(a) **Caso particular:** $\mathcal{C}_{\mathbb{N}_0}$ é uma categoria devido ao facto da estrutura $(\mathbb{N}_0, +, 0)$ ser a de um monóide. Definindo que:

. $\mathcal{C}_{\mathbb{N}_0}$ tem um único objecto: $\mathbb{N}_0$;

. $Mor\mathcal{C}_{\mathbb{N}_0} = Mor_{\mathcal{C}_{\mathbb{N}_0}}(\mathbb{N}_0, \mathbb{N}_0) = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}\ (= \mathbb{N}_0)$;

. a composição de m com n, para $m, n \in \mathbb{N}_0$, é da forma: $m \circ n = m + n$;

. o morfismo identidade é: $0 = id_{\mathbb{N}_0}$;

Note-se que todos os pares de morfismos são componíveis visto que qualquer $\mathcal{C}$-morfismo tem o mesmo domínio e codomínio, e que se tem, por definição da composição: $m \circ n = n \circ m$ (isto é, a operação "$\circ$" é comutativa).

então, são satisfeitas:

. a lei de associatividade, pois a adição de números naturais é uma operação associativa;

. a lei de identidade, visto que o diagrama seguinte comuta (pois $m + 0 = m$ e $0 + n = n$).

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{N}_0 & & \\ & m \swarrow & \downarrow 0 & \nwarrow n & \\ \mathbb{N}_0 & \underset{m}{\longleftarrow} & \mathbb{N}_0 & \underset{n}{\longleftarrow} & \mathbb{N}_0 \end{array}$$

(b) **De uma forma geral:** procedendo exactamente como no exemplo anterior, cada monóide $M = (M, \star, e)$, em que $\star$ é a operação do monóide e e é o elemento neutro de M, pode ser considerado como uma categoria $\mathcal{C}_M$. Com efeito, tomando para:

. único objecto de $\mathcal{C}_M$: M;

. morfismos de $\mathcal{C}_M$: os elementos de M $\quad (Mor\mathcal{C}_M = Mor_{\mathcal{C}_M}(M, M) = M)$;

. lei de composição: $\star$,

isto é,

$$\begin{array}{llll} \circ : & M \times M & \to & M \\ & (x, y) & \mapsto & x \circ y = x \star y \end{array}$$

. $id_M = e$;

então, são satisfeitas:

. a lei de associatividade: pelo facto, obviamente, de $\star$ ser uma operação associativa em M;

. a lei de identidade: visto que, por definição de e, $e \star x = x = x \star e$, para qualquer $x \in M$ $(= Mor\mathcal{C}_M)$.

(c) Inversamente, note-se que se $\mathcal{C}$ é uma categoria com um único objecto M, então pode-se munir M de uma estrutura de monóide. Basta tomar os morfismos de $\mathcal{C}$ para elementos do monóide, isto é, $Mor\mathcal{C} = M$ $(=Mor_{\mathcal{C}}(M, M))$. De facto:

. a operação de composição $\circ$ é uma operação binária em M (pois é uma função de $M \times M$ para M);

. $\circ$ é associativa (pela lei de associatividade de $\mathcal{C}$);

. id_M é o elemento neutro para o monóide (pela lei de identidade de $\mathcal{C}$).

Observação 6 *: Todo o grupo (grupo abeliano, etc), sendo um monóide, pode também ser considerado como uma categoria* **1**. *Para além disso, este tipo de categorias têm uma particularidade: todos os seus morfismos são isomorfismos.*

Esse facto caracteriza os grupos na classe das categorias com um só objecto.

7. **Matr(IK).** Se IK é um anel comutativo então, as matrizes sobre IK produzem a categoria Matr(IK), definindo que:

. os objectos são os elementos de $\mathbb{N}_0$;

- os morfismos $m \stackrel{M_{n\times m}}{\to} n$ são matrizes do tipo $n \times m$ com valores em IK;
- a lei de composição é a multiplicação de matrizes: $A \circ B = A.B$,

  onde $m \stackrel{B_{n\times m}}{\to} n \stackrel{A_{p\times n}}{\to} p$ e $m \stackrel{(AB)_{p\times m}}{\to} p$.
- os morfismos id_m são as matrizes I_m (matriz identidade de ordem m).

De facto, são satisfeitas:

- a lei de associatividade: pela associatividade da multiplicação de matrizes;
- a lei de identidade: por definição de matriz identidade.

3- Construções com categorias.

Nesta última secção são apresentados conceitos, nomeadamente, o de dualidade e o de categoria dual, que serão usados ao longo do texto. Para além disso, é de destacar o Princípio da Dualidade aqui exposto, visto que permite concluir, a partir de um resultado válido em qualquer categoria, a validade do seu "resultado dual", isto é, aquele que se obtém do primeiro invertendo o sentido dos morfismos. Finalmente, são estudadas algumas formas de obter novas categorias a partir de outras.

Qualquer categoria $\mathcal{C}$ dá origem a uma nova categoria $\mathcal{C}^{op}$ (dual de $\mathcal{C}$), que tem os mesmos objectos da categoria original ($\mathcal{C}$) mas na qual se inverte o sentido dos morfismos. De uma forma mais precisa, veja-se a sua definição a seguir.

Definição 7 *: Dada uma categoria $\mathcal{C}$, chama-se* **categoria dual** *(ou oposta) de $\mathcal{C}$ à categoria $\mathcal{C}^{op}$ (ou $\mathcal{C}^*$), cuja classe $Obj\mathcal{C}^{op}$ é exactamente $Obj\mathcal{C}$ e com $Mor_{\mathcal{C}^{op}}(b,a) := Mor_{\mathcal{C}}(a,b)$, sendo a lei de composição definida à custa da lei de composição de $\mathcal{C}$.*

Note-se que a composição $(g \circ f)^{op} = f^{op} \underset{op}{\circ} g^{op}$, com $a \underset{f^{op}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} b \underset{g^{op}}{\overset{g}{\rightleftarrows}} c$, está definida em $\mathcal{C}^{op}$ precisamente quando $g \circ f$ está definida em $\mathcal{C}$, e que $(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$, qualquer que seja a categoria $\mathcal{C}$.

Este é apenas um dos exemplos (mais se verão ao longo da dissertação) da noção de dualidade em teoria das categorias, a qual se descreve um pouco mais precisamente de seguida.

De uma forma geral: Se Σ é uma afirmação na linguagem de categorias, o **dual** de Σ, denotado por Σ^{op}, é a afirmação obtida substituindo:

- "*dom*" por "*cod*",
- "*cod*" por "*dom*"

e

- "$g \circ f$" por "$f \circ g$".

Assim, todos os morfismos e composições referidos em Σ são invertidos em Σ^{op}, e Σ^{op} pode ser interpretada como a construção original aplicada a $\mathcal{C}^{op}$.

À medida que este estudo de categorias for avançando, ter-se-á ocasião de apreciar a conveniência dos conceitos de categoria dual e de afirmação "dual", e usar-se-á extensivamente o chamado princípio da dualidade. Introduz-se agora este princípio de um modo mais formal.

Princípio da Dualidade.

Teorema 8 *: Se Σ é um resultado válido em todas as categorias, então Σ^{op} também valerá em todas as categorias.*

Prova: Se Σ é válido em qualquer categoria ($\mathcal{C}$), em particular, Σ^{op} valerá em todas as categorias (da forma $\mathcal{C}^{op} = D$).

Mas qualquer categoria ($\mathcal{D}$) tem esta forma, tomando $\mathcal{C} = \mathcal{D}^{op}$ e, portanto, Σ^{op} valerá em todas as categorias ($\mathcal{C}$). ■

O princípio da dualidade reduz assim para metade o número de resultados a provar, daí a sua relevante utilidade.

Vejam-se agora mais algumas definições que serão úteis e frequentemente usadas, e mais algumas construções que definem categorias a partir de outras.

Definições 9 *: Seja $\mathcal{C}$ uma categoria.*

1. Uma **categoria** diz-se **discreta** se os únicos morfismos são os morfismos identidade.

   Observação 10 *: Se $\mathcal{C}$ é discreta, então $\mathcal{C}^{op} = \mathcal{C}$.*

   Um exemplo típico de categorias discretas são as categorias $\mathcal{C}_X$.

2. Uma **categoria** $\mathcal{C}$ diz-se **pequena** se a classe $Obj\mathcal{C}$ (e consequentemente $Mor\mathcal{C}$) é um conjunto.

   Como exemplos de categorias pequenas tem-se: as categorias $\mathcal{C}_{(X,R)}$ (as categorias discretas $\mathcal{C}_X, ...$) e as categorias $\mathcal{C}_M$ (todas vistas anteriormente).

3. Uma **categoria** $\mathcal{C}$ diz-se **finita** se $Mor\mathcal{C}$ for um conjunto finito.

   Por exemplo, as categorias **1**, **2** e $\mathbf{1}+\mathbf{1}$ são categorias finitas (logo pequenas também).

Dada uma categoria $\mathcal{D}$, uma categoria $\mathcal{C}$ diz-se uma **subcategoria** de $\mathcal{D}$, se $Obj\mathcal{C}$ é uma subclasse da classe $Obj\mathcal{D}$ (cada $\mathcal{C}$-objecto é um $\mathcal{D}$-objecto) e se $Mor_{\mathcal{C}}(X,Y) \subset Mor_{\mathcal{D}}(X,Y)$, onde X e Y são $\mathcal{C}$-objectos quaisquer.

Exemplos 11 *:*

1. A categoria $\mathcal{C}onjFin$ é uma subcategoria de $\mathcal{C}onj$.

2. A categoria $\mathcal{G}rpAb$ é uma subcategoria de $\mathcal{G}rp$ (por sua vez, a categoria $\mathcal{G}rp$ é uma subcategoria de $\mathcal{M}on$).

Uma subcategoria $\mathcal{C}$ de $\mathcal{D}$ diz-se uma **subcategoria plena** se, para quaisquer $\mathcal{C}$-objectos X e Y, $Mor_{\mathcal{C}}(X,Y) = Mor_{\mathcal{D}}(X,Y)$.

Um caso ilustrativo da definição anterior, é o da categria $\mathcal{G}rpAb$, por ser uma subcategoria plena de $\mathcal{G}rp$.

Observação 12 *: Dados uma categoria $\mathcal{D}$ e um conjunto $\mathcal{C}$ de $\mathcal{D}$-objectos, obtém-se uma subcategoria plena $\mathcal{C}$ de $\mathcal{D}$ tomando como $\mathcal{C}$-morfismos todos os $\mathcal{D}$-morfismos entre os membros de $\mathcal{C}$.*

Dadas duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, pode-se obter uma nova categoria, denomidada **categoria produto** de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, se se considerar:

- por objectos: os pares ordenados (c,d), com $c \in Obj\mathcal{C}$ e $d \in Obj\mathcal{D}$;
- por morfismos: os pares ordenados $(f,g) \in Mor_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((c_1,d_1),(c_2,d_2))$, onde
  $Mor_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((c_1,d_1),(c_2,d_2)) = Mor_{\mathcal{C}}(c_1,c_2) \times Mor_{\mathcal{D}}(d_1,d_2)$;
- por composição de (f,g) com (f',g') : $(f,g)\circ(f',g') = (f\circ f', g\circ g')$, onde
  $f\circ f'$ e $g\circ g'$ são as composições definidas, respectivamente, em $\mathcal{C}$ e em $\mathcal{D}$.

Assim definida, componente a componente, esta lei de composição respeita a composição em $\mathcal{C}$ e em $\mathcal{D}$, e são satisfeitas as leis de associatividade e de identidade (utilizando (id_c, id_d) para morfismo identidade de (c,d)).

Um exemplo deste tipo de categorias é a **categoria** $\mathbf{Conj}^2$ dos pares de conjuntos, que tem por:

. objectos: todos os pares (A, B) de conjuntos;

. morfismos: todos os pares (f, g) de funções,

isto é, $(A_1, B_1) \overset{(f,g)}{\to} (A_2, B_2)$, com $A_1 \overset{f}{\to} A_2$ e $B_1 \overset{g}{\to} B_2$;

. lei de composição: $(f, g) \circ (f', g') = (f \circ f', g \circ g')$, onde $f \circ f'$ e $g \circ g'$ são as composições usuais de funções;

. morfismos identidade: (id_A, id_B), para cada par de conjuntos (A, B).

Evidentemente são satisfeitas a lei de identidade e a lei de associatividade.

Para além das construções apresentadas acima existem inúmeras mais. Um outro exemplo clássico de uma categoria construída a partir de outra é a **categoria** $\mathcal{C}^{\to}$ (ou $\mathcal{C} \downarrow \mathcal{C}$, ou ainda $Mor\mathcal{C}$) **dos morfismos da categoria** $\mathcal{C}$. Pode-se munir $\mathcal{C}^{\to}$ de uma estrutura de categoria considerando que:

. os objectos são: todos os $\mathcal{C}$-morfismos $f, g, h, ...$;

. os morfismos são: todos os pares $(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha$ de $\mathcal{C}$-morfismos, para os quais o diagrama seguinte (onde $\alpha \in Mor_{\mathcal{C}^{\to}}(f, g)$)

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{\alpha_1}{\to} & C \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ B & \underset{\alpha_2}{\to} & D \end{array}$$

comuta, isto é, $g \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ f$;

. composição: $(\gamma_1, \gamma_2) \circ (\alpha_1, \alpha_2) = (\gamma_1 \circ \alpha_1, \gamma_2 \circ \alpha_2)$, onde $(\gamma_1, \gamma_2), (\alpha_1, \alpha_2) \in Mor\mathcal{C}^{\to}$;

. morfismos identidade: $id_f = (id_A, id_B)$, para cada $\mathcal{C}^{\to}$-objecto $A \overset{f}{\to} B$.

São satisfeitas:

. a lei de identidade: $(\alpha_1, \alpha_2) \circ (id_A, id_B) = (\alpha_1 \circ id_A, \alpha_2 \circ id_B) \underset{(Ax.Id.\ de\ \mathcal{C})}{=} (\alpha_1, \alpha_2)$;
(analogamente, prova-se a outra igualdade);

. a lei de associatividade: decorre da lei de associatividade em $\mathcal{C}$.

As **categorias fibradas do tipo** $\mathcal{C} \downarrow Y$ **e** $\mathcal{C} \uparrow Y$ podem ser pensadas como especializações das categorias $\mathcal{C}^{\to}$, onde se restringe a atenção a morfismos com domínio ou codomínio fixos, apesar deste tipo de categorias não serem subcategorias das categorias $\mathcal{C}^{\to}$. Vejam-se alguns exemplos ilustrativos.

Considerando $\mathcal{C} = \mathcal{C}onj$ e $Y = \mathbb{R}$, obtém-se a **categoria Conj** $\downarrow \mathbb{R}$ de funções reais, onde:

. os objectos são todas as funções $f : A \to \mathbb{R}$ (de codomínio $\mathbb{R}$);

Observação: É por vezes conveniente pensar nos objectos $f : A \to \mathbb{R}$ como em pares (A, f).

. um morfismo de $f : A \to \mathbb{R}$ para $g : B \to \mathbb{R}$ é uma função $k : A \to B$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{k} & B \\ f \searrow & & \swarrow g \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

comuta, isto é, tem-se $g \circ k = f$;

. a composição de k e l, onde $(A, f) \xrightarrow{k} (B, g) \xrightarrow{l} (C, h)$, é $l \circ k : (A, f) \to (C, h)$,

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{l \circ k}{\longrightarrow} & C \\ & {\scriptstyle k \searrow \nearrow l} & \\ & B & \\ f \searrow & \downarrow g & \swarrow h \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

. os morfismos identidade são $id_{(A,f)}\ (= id_A) : (A, f) \to (A, f)$.

Então, em $\mathcal{C}onj \downarrow \mathbb{R}$, verificam-se:

. a lei de identidade: pela lei de identidade de $\mathcal{C}onj$;

. a lei de associatividade: como consequência da mesma lei em $\mathcal{C}onj$.

Note-se que **Conj** $\downarrow \mathbb{R}$ não é uma subcategoria de $\mathbf{Conj}^{\to}$ (pois as duas têm diferentes tipos de morfismos). Todavia, considerando que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{k} & B \\ f \searrow & & \swarrow g \\ & \mathbb{R} & \end{array} \qquad \text{(com } k : (A, f) \to (B, g) \text{ em } Mor\mathcal{C}onj \downarrow \mathbb{R})$$

comuta se e só se comutar o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{k} & B \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ \mathbb{R} & \underset{id_{\mathbb{R}}}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \end{array} \qquad \text{(com } (k, id_{\mathbb{R}}) \text{ em } Mor\mathcal{C}onj^{\to}),$$

pode-se pensar em $k : (A, f) \to (B, g)$ como sendo $(k, id_{\mathbb{R}})$ e é neste sentido que **Conj** $\downarrow \mathbb{R}$ pode ser construída como uma subcategoria de $\mathbf{Conj}^{\to}$.

Similarmente, para qualquer conjunto X, obtém-se a **categoria** $Conj \downarrow X$, cujos objectos são funções com valores em X e, mais geralmente, considerando uma categoria $\mathcal{C}$ e um $\mathcal{C}$-objecto Y, podem construir-se as categorias $\mathcal{C} \downarrow Y$, de morfismos com valores em Y, que têm por:

. objectos: os $\mathcal{C}$-morfismos de codomínio Y;

Observação: Similarmente ao exemplo anterior, pensa-se nos objectos $f : A \to Y$ como sendo pares (A, f).

. morfismos de $A \xrightarrow{f} Y$ em $B \xrightarrow{g} Y$: os $\mathcal{C}$-morfismos $k : A \to B$ tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

comuta, isto é, $g \circ k = f$;

. composição: $l \circ k : (A, f) \to (C, h)$, com $(A, f) \xrightarrow{k} (B, g) \xrightarrow{l} (C, h)$;

. morfismos identidade: $id_{(A,f)} : (A, f) \to (A, f)$.

Analogamente aos casos anteriores, verificam-se as leis de associatividade e identidade.

Por dualidade (virando a atenção para domínios), definem-se as **categorias** $\mathcal{C} \uparrow Y$.

Estas categorias têm por:

. objectos: os $\mathcal{C}$-morfismos com domínio Y;

Observação: pensa-se nos objectos $f^{op} : Y \to A$ como em pares (A, f^{op}).

. morfismos de $f^{op} : Y \to A$ em $g^{op} : Y \to B$: os $\mathcal{C}^{op}$-morfismos $k^{op} : B \to A$ tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd} A & & B \arrow[ll, "k^{op}"'] \\ & Y \arrow[ul, "f^{op}"] \arrow[ur, "g^{op}"'] & \end{tikzcd}$$

comuta, isto é, $k^{op} \circ g^{op} = f^{op}$;

. composição: $k^{op} \circ l^{op} : (C, h^{op}) \to (A, f^{op})$, com $(A, f^{op}) \xleftarrow{k^{op}} (B, g^{op}) \xleftarrow{l^{op}} (C, h^{op})$;

. identidades: $id_{(A,f^{op})} : (A, f^{op}) \to (A, f^{op})$.

Claramente verificam-se as leis de associatividade (pela lei de associatividade de $\mathcal{C}^{op}$) e de identidade (por definição de morfismo identidade).

Capítulo II - Morfismos e Objectos em Categorias.

Neste capítulo, consagrado aos morfismos e aos objectos das categorias, são generalizados conceitos já conhecidos de outros ramos da Matemática. Apresentam-se assim as noções de monomorfismo, de epimorfismo e de isomorfismo, de produto e coproduto (soma), etc. São ainda apresentadas as noções de igualizador e de produto fibrado (e seus duais).

Em jeito de motivação para a introdução dos conceitos apresentados na primeira e segunda secções, relembram-se propriedades das funções injectivas, das funções sobrejectivas e das funções bijectivas (noções estas que têm uma definição geral em teoria das categorias que não coincide necessariamente com a precedente de monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo).

1- Monomorfismos e epimorfismos: definição e propriedades.

Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Tomem-se $f : A \to B$ uma função injectiva e $g, h : C \rightrightarrows A$ duas funções para as quais $f \circ g = f \circ h$.

Assim, para $x \in C$, tem-se

$$(f \circ g)(x) = (f \circ h)(x),$$

isto é,

$$f(g(x)) = f(h(x)).$$

Mas como f é injectiva, então significa que:

$$g(x) = h(x).$$

Por isso g e h (dando a mesma imagem para cada objecto), são a mesma função.

Mostrou-se assim a validade da seguinte proposição.

Proposição 13 *: Uma função f injectiva é cancelável à esquerda, isto é,*

sempre que $\quad f \circ g = f \circ h \quad$ *então* $\quad g = h.$

Usualmente, em vez de dizer "cancelável à esquerda" diz-se "monomorfismo".

Inversamente,

Proposição 14 *: se a função f é um monomorfismo, então f é injectiva.*

Prova: Seja $f : A \to B$ uma função. Suponha-se, por hipótese, que

$(hip.) \qquad f(x) = f(y), \quad \text{com } x, y \in A$

(pretende-se mostrar que $x = y$, necessariamente).

Definam-se as funções

$$(*) \qquad g, h : \{0\} \rightrightarrows A,$$

por

$$(**) \qquad g(0) = x \qquad \text{e} \qquad h(0) = y.$$

Então, tem-se:

$$(***) \qquad f \circ g = f \circ h.$$

De facto, $\forall z \in D_{f \circ g} \cap D_{f \circ h}$,

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(z) &\overset{(*)}{=} (f \circ g)(0) \\
&= f(g(0)) \\
&\overset{(**)}{=} f(x) \\
&\overset{(hip.)}{=} f(y) \\
&\overset{(**)}{=} f(h(0)) \\
&= (f \circ h)(0) \\
&\overset{(*)}{=} (f \circ h)(z).
\end{aligned}$$

Esquematicamente,

$$\{0\} \overset{g,h}{\rightrightarrows} A \overset{f}{\to} \qquad B$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & x & & \\
 & \overset{g}{\nearrow} & & \overset{f}{\searrow} & \\
0 & & & & f(x) = f(y) \\
 & \underset{h}{\searrow} & & \underset{f}{\nearrow} & \\
 & & y & &
\end{array}$$

Pela hipótese, f é cancelável à esquerda, logo, a partir de $(***)$, vem:

$$g = h,$$

portanto, por $(*)$,

$$g(0) = h(0),$$

isto é, por $(**)$,

$$x = y. \qquad \blacksquare$$

Pelas duas proposições anteriores (13 e 14), pode-se concluir que os morfismos injectivos em $\mathcal{C}onj$ são precisamente os que são canceláveis à esquerda.

Definições 15 *:*

1. *Numa categoria $\mathcal{C}$, um morfismo $f : a \to b$ diz-se um* ***monomorfismo*** *se, qualquer que seja o par $g, h : c \rightrightarrows a$ de $\mathcal{C}$-morfismos, sempre que $f \circ g = f \circ h$ (isto é, sempre que o diagrama seguinte*

$$\begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{g} & a \\ h\downarrow & & \downarrow f \\ a & \xrightarrow[f]{} & b \end{array}$$

   comuta), então $g = h$.

   Usualmente escreve-se $f : a \rightarrowtail b$ para indicar que f é monomorfismo.

2. ***(Dual da definição anterior)*** *Numa categoria $\mathcal{C}$, um morfismo $f : b \to a$ é um* ***epimorfismo*** *(ou cancelável à direita) se, qualquer que seja o par de $\mathcal{C}$-morfismos $g, h : a \rightrightarrows c$, sempre que o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{f} & a \\ f\downarrow & & \downarrow h \\ a & \xrightarrow[g]{} & c \end{array}$$

   comuta (isto é, sempre que $g \circ f = h \circ f$), então $g = h$.

   Simbolicamente, usa-se $f : a \twoheadrightarrow b$ para denotar epimorfismos.

A noção de epimorfismo diz-se dual da de monomorfismo no sentido em que: f é um epimorfismo em $\mathcal{C}$ se e só se f é um monomorfismo em $\mathcal{C}^{op}$.

Exemplos 16 *:*

1. *Na categoria $\mathbb{N}_0$,*

   (a) *cada morfismo m é monomorfismo. Nesta categoria a cancelação esquerda está presente da seguinte forma:*

   $$\text{se} \quad m+n = m+p \quad \text{então} \quad n = p \quad (\text{com } m, n, p \in \mathbb{N}_0 \text{ quaisquer})$$

   que é uma proposição verdadeira nos números naturais;

(b) *cada morfismo* m *é epimorfismo pela veracidade (em* $\mathbb{N}_0$*) de:*

$$n+m=p+m \qquad \textit{implica} \qquad n=p \qquad (\textit{com } m,n,p\in\mathbb{N}_0 \textit{ quaisquer}).$$

2. *Nas categorias* $\mathcal{C}onj$, $\mathcal{M}on$, $(\mathcal{G}rp, ...)$,

   (a) *os monomorfismos são precisamente os morfismos injectivos;*

   (b) *os epimorfismos são os morfismos sobrejectivos.*

   Observação 17 : *O recíproco não é verdadeiro em* $\mathcal{M}on$*. De facto, os epimorfismos não são necessariamente sobrejectivos, pois a inclusão* i *dos números naturais nos inteiros:*

   $$\begin{array}{rccc} i: & \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{Z} \\ & n & \mapsto & n \end{array}$$

   é um homomorfismo de monóides que não é, obviamente, sobrejectivo ($\nexists n\in\mathbb{N}_0$ *tal que* $i(n)=-1$*) mas que é, no entanto, epimorfismo.*

3. *Numa qualquer categoria* $\mathcal{C}_{(X,R)}$,

   (a) *cada morfismo* $f:a\to b$ *é monomorfismo; de facto, dado um par*

   $$g,h : c \rightrightarrows a,$$

   necessariamente, por definição* *de morfismo em* $\mathcal{C}_{(X,R)}$*, tem-se:*

   $$g=h \qquad (\textit{pois } {}^*\textit{existe no máximo um morfismo } c\to a);$$

   (b) *todos os morfismos* $f:b\to a$ *são epimorfismos (pois independentemente de* f*, dado um par* $g,h:a\rightrightarrows c$*, tem-se sempre* $g=h$ *por definição de morfismo em* $\mathcal{C}_{(X,R)}$*).*

4. *Numa categoria fibrada* $\mathcal{C}\downarrow a$,

$$\begin{tikzcd} b \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "f"'] & & c \arrow[dl, "g"] \\ & a & \end{tikzcd}$$

   (a) $k\in Mor_{\mathcal{C}\downarrow a}((b,f),(c,g))$ *é monomorfismo em* $\mathcal{C}\downarrow a$ *se e só se* $k\in Mor_{\mathcal{C}}(b,c)$ *é monomorfismo em* $\mathcal{C}$*;*

(b) $k \in Mor_{\mathcal{C}\downarrow a}((b,f),(c,g))$ *é epimorfismo em* $\mathcal{C} \downarrow a$ *se e só se* $k \in Mor_{\mathcal{C}}(b,c)$ *é epimorfismo em* $\mathcal{C}$.

Vejam-se agora alguns resultados sobre monomorfismos e epimorfismos.

Proposições 18 *: Sejam* $f : a \to b$ *e* $g : b \to d$ *morfismos de uma categoria* $\mathcal{C}$.

1. *Se* f *e* g *são monomorfismos então* $g \circ f$ *é um monomorfismo.*

2. *Se* $g \circ f$ *é um monomorfismo então* f *também é um monomorfismo.*

   Por dualidade, também se tem que:

3. *Se* f *e* g *são epimorfismos então* $g \circ f$ *é um epimorfismo;*

4. *Se* $g \circ f$ *é um epimorfismo então* g *é um epimorfismo.*

Prova: Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $f : a \to b$, $g : b \to d$, $j, h : c \rightrightarrows a \in Mor\mathcal{C}$.

1. Suponha-se, por hipótese, que f e g são monomorfismos. Suponha-se ainda que se tem:

   $$(g \circ f) \circ j = (g \circ f) \circ h \qquad \text{(pretende-se mostrar que } j = h\text{)}$$
   $$\overset{(Ax.As.)}{\Longleftrightarrow} g \circ (f \circ j) = g \circ (f \circ h).$$

   Mas por hipótese g é monomorfismo, logo,

   $$(f \circ j) = (f \circ h).$$

   Por fim, como f também é monomorfismo por hipótese, então:

   $$j = h. \qquad \blacksquare$$

2. Suponha-se, por hipótese, que $g \circ f$ é monomorfismo $(hip.)$. Suponha-se ainda que se tem:

   $$\begin{aligned} & f \circ j = f \circ h && \text{(pretende-se mostrar que } j = h\text{)} \\ \Longrightarrow\ & g \circ (f \circ j) = g \circ (f \circ h) \\ \overset{(Ax.As.)}{\Longleftrightarrow}\ & (g \circ f) \circ j = (g \circ f) \circ h \\ \overset{(hip.)}{\Longrightarrow}\ & j = h. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

   Para terminar esta secção, definem-se dois tipos de morfismos especiais que serão usados ulteriormente.

Definições 19 *: Seja $\mathcal{C}$ uma categoria.*

1. *Um $\mathcal{C}$-morfismo $s : a \to b$ diz-se um* ***monomorfismo cindido*** *(ou* ***secção****) se existir um $\mathcal{C}$-morfismo $g : b \to a$ tal que*

   $g \circ s = id_a$ *(s tem inverso à esquerda);*

2. *Um $\mathcal{C}$-morfismo $r : b \to a$ diz-se um* ***epimorfismo cindido*** *(ou* ***retracção****) se existir um $\mathcal{C}$-morfismo $g : a \to b$ tal que:*

   $r \circ g = id_a$ *(r tem inverso à direita).*

Por exemplo em $\mathcal{C}onj$, onde os morfismos são funções, os monomorfismos (respectivamente, epimorfismos) cindidos são as funções com inversa à esquerda (respectivamente, à direita).

2- Isomorfismos.

Quando A e B são conjuntos e $f : A \to B$ é uma função bijectiva (f é bijectiva se e só se para todo o $b \in B$ existe um e um só elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$), uma "passagem" de A para B sob f pode ser invertida, e pode-se pensar em f como sendo simplesmente uma "reetiquetagem" de A. Qualquer elemento b de B é a imagem, $b = f(a)$, de algum a de A (propriedade sobrejectiva) e, de facto, b é a imagem deste único $a \in A$ (propriedade injectiva).

Assim, a regra que atribui a b este único a estabelece uma função $B \xrightarrow{g} A$ (isto é, $g(b) = a$ se e só se $f(a) = b$) tal que

$g(f(a)) = a$, para todo o $a \in A$ e $f(g(b)) = b$, para todo o $b \in B$.

Daqui

$g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B$.

Uma função g que se relaciona com f neste sentido, diz-se a inversa de f.

Esta é uma ideia essencial que conduz à seguinte definição.

Definição 20 *: Seja $f : a \to b$ um morfismo de uma categoria $\mathcal{C}$. Em $\mathcal{C}$, f diz-se um* ***isomorfismo*** *(ou* ***morfismo invertível****) se existe um $\mathcal{C}$-morfismo $g : b \to a$ tal que*

$(Def.Isom.)$ $g \circ f = id_a$ e $f \circ g = id_b$.

A notação $f : a \cong b$ é usada para isomorfismos.

Note-se que em geral um morfismo que é simultâneamente epimorfismo e monomorfismo não é necessariamente um isomorfismo (apesar do recíproco (22) ser verdadeiro como se provará ainda nesta secção); exemplo disso é a Categoria **2**, em que o único morfismo não trivial é epimorfismo e monomorfismo e, no entanto, não é um isomorfismo.

Observe-se ainda que pode existir apenas um $\mathcal{C}$-morfismo g, inverso para f. A afirmação anterior é verdadeira porque se g e g' fossem dois morfismos inversos de f, ter-se-ia:

$$(hip.) \qquad g' \circ f = id_a \qquad \text{e} \qquad f \circ g' = id_b,$$

logo,

$$\begin{aligned} g' &\overset{(Ax.Id.)}{=} id_a \circ g' \\ &\overset{(Def.Isom.)}{=} (g \circ f) \circ g' \\ &\overset{(Ax.As.)}{=} g \circ (f \circ g') \\ &\overset{(hip.)}{=} g \circ id_b \\ &\overset{(Ax.Id.)}{=} g. \end{aligned}$$

Assim, quando existe, este g é chamado **o morfismo inverso** de f e é denotado por $f^{-1} : b \to a$.

Vejam-se agora alguns exemplos, em categorias conhecidas, do conceito de isomorfismo.

Exemplos 21 *:*

1. *Em $\mathcal{C}onj$, conforme se viu no início desta secção, os isomorfismos são precisamente as bijecções; com efeito, se $f \in Mor_{\mathcal{C}onj}(A, B)$ e $g \in Mor_{\mathcal{C}onj}(B, A)$ são tais que*

   $$g \circ f = id_A \qquad e \qquad f \circ g = id_B$$

   então,

   $$f \text{ e } g \text{ são funções bijectivas (onde } g = f^{-1}).$$

   Logo, todo o isomorfismo é uma bijecção.

   Inversamente, seja $f \in Mor_{\mathcal{C}onj}(A, B)$ uma bijecção; então, existem r e s em $Mor_{\mathcal{C}onj}(B, A)$ tais que

   $$r \circ f = id_A \qquad e \qquad f \circ s = id_B,$$

   de onde,

   $$(r \circ f) \circ s = id_A \circ s \qquad e \qquad r \circ (f \circ s) = r \circ id_B,$$

   o que implica que

   $$s = r = f^{-1}.$$

   Logo, uma função bijectiva tem sempre inversa.

Em suma, nesta categoria, "isomorfismo" é sinónimo de "monomorfismo e epimorfismo".

No entanto, como já foi visto no início da secção com a Categoria **2**, *o mesmo não é verdade em todas as categorias. Apresentam-se abaixo mais alguns casos que mostram que um morfismo pode ser simultâneamente um monomorfismo e um epimorfismo sem ser um isomorfismo.*

2. *Na categoria $\mathbb{N}_0$, já se sabe que todo o morfismo é simultâneamente epimorfismo e monomorfismo, mas o único isomorfismo é $id_{\mathbb{N}_0}$. De facto, para $m, n \in \mathbb{N}_0$, se m tem inverso n,*

   $$m \circ n = id_{\mathbb{N}_0},$$

   isto é,

   $$m + n = 0,$$

   que pode somente acontecer quando $m = n = 0$ (visto que $m, n \geq 0$).

3. *Na categoria $\mathcal{M}on$ (considerada como a categoria* **1***), os isomorfismos são os homomorfismos bijectivos (o mesmo também é válido em $\mathcal{G}rp$, $\mathcal{G}rpAb$ (etc), pois $\mathcal{G}rp$ é uma subcategoria de $\mathcal{M}on$,...).*

   A função inclusão $i : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$ (mencionada atrás em 17) é epimorfismo e monomorfismo, mas não é um isomorfismo (basta, por exemplo, notar que $\mathbb{Z}$ é um grupo e $\mathbb{N}_0$ não o é).

4. *Numa categoria $\mathcal{C}_{(X,R)}$, os isomorfismos são os morfismos (p, q) tais que pRq e qRp (obviamente, pelo menos todos os morfismos identidade, (p, p), são isomorfismos); de facto, se*

   $$f : p \to q$$

   tem um inverso, então

   $$f^{-1} : q \to p.$$

   (Naturalmente, $(f \circ f^{-1})(q) = q$ logo $f \circ f^{-1} = id_q$; e, analogamente, $f^{-1} \circ f = id_p$).

5. *Em $\mathcal{C}_{(X,\leq)}$ (caso particular do anterior, onde $\leq$ é uma relação de ordem), todo o morfismo é monomorfismo e epimorfismo (ver 16.3), mas os únicos isomorfismos são as identidades; de facto, se*

pRq e qRp (em que R agora é $\leq$)

então vem, por anti-simetria de $\leq$,

$p = q$ $(f, f^{-1} : p \to p)$.

Mas então, por definição de morfismo em $\mathcal{C}_{(X,\leq)}$,*

*f tem que ser o morfismo id_p (*existe no máximo um morfismo de p para p).*

Encerra-se esta secção com algumas propriedades dos isomorfismos.

Proposições 22 *: Sejam $f : a \to b$, $g : b \to a$ morfismos numa categoria $\mathcal{C}$.*

1. *Se f é um isomorfismo então f^{-1} também é um isomorfismo.*
2. *Se f é um isomorfismo então f^{op} também o é (isto é, o conceito de isomorfismo é auto dual).*
3. *Se f é um isomorfismo então f também é um monomorfismo.*
4. *Todo o isomorfismo f é sempre um epimorfismo.*
5. *Qualquer que seja $a \in Obj\mathcal{C}$, id_a é um isomorfismo.*
6. *Se f e g são isomorfismos então $f \circ g$ é um isomorfismo com $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.*

Prova: Sejam $f : a \to b$ e $g, g' : b \to a$ morfismos numa categoria $\mathcal{C}$.

1. Por hipótese, f é isomorfismo, ou seja, existe $f^{-1} : b \to a$ tal que

   $f^{-1} \circ f = id_a$ e $f \circ f^{-1} = id_b$.

   Logo, para provar o pretendido, basta tomar

   $(f^{-1})^{-1} = f$. ■

2. Por hipótese, f é isomorfismo, ou seja, existe $f^{-1} : b \to a$ tal que

   $f^{-1} \circ f = id_a$ e $f \circ f^{-1} = id_b$,

   daqui,

   $(f^{-1} \circ f)^{op} = id_a$ e $(f \circ f^{-1})^{op} = id_b$,

   isto é,

   $f^{op} \circ (f^{-1})^{op} = id_a$ e $(f^{-1})^{op} \circ f^{op} = id_b$.

   Assim, f^{op} é isomorfismo com $(f^{op})^{-1} = (f^{-1})^{op}$. ■

3. Suponha-se, por hipótese, que f^{-1} existe $(hip.)$. Suponha-se ainda que

   $$(hip.1) \qquad f \circ g = f \circ h$$

   (pretende-se mostrar que f é monomorfismo, ou seja, que $g = h$).

   Então,

   $$\begin{aligned} g &\overset{(Ax.Id.)}{=} id_a \circ g \\ &\overset{(hip.)}{=} (f^{-1} \circ f) \circ g \\ &\overset{(Ax.As.)}{=} f^{-1} \circ (f \circ g) \\ &\overset{(hip.1)}{=} f^{-1} \circ (f \circ h) \\ &\overset{(Ax.As.)}{=} (f^{-1} \circ f) \circ h \\ &\overset{(hip.)}{=} id_a \circ h \\ &\overset{(Ax.Id.)}{=} h. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

4. Pelo princípio da dualidade, fica provado o pretendido usando o resultado da alínea anterior. $\blacksquare$

5. $\forall a \in Obj\mathcal{C}, \qquad id_a \circ id_a \overset{(Ax.Id.)}{=} id_a. \qquad \blacksquare$

6. Suponha-se, por hipótese, que $f : a \cong b$ e $g : b \cong c$. Então, existem $\mathcal{C}$-morfismos $f^{-1} : b \to a$ e $g^{-1} : c \to b$, tais que

   $$(*) \qquad f^{-1} \circ f = id_a \qquad \text{e} \qquad f \circ f^{-1} = id_b,$$

   $$(**) \qquad g^{-1} \circ g = id_b \qquad \text{e} \qquad g \circ g^{-1} = id_c.$$

   Logo,

   $$h = g \circ f : a \cong c$$

   pois

   $$\begin{aligned} (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f && (Ax.As.) \\ &= f^{-1} \circ id_b \circ f && (**) \\ &= f^{-1} \circ f && (Ax.As.; Ax.Id.) \\ &= id_a && (*) \end{aligned}$$

   e, analogamente, $\qquad (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = id_c. \qquad \blacksquare$

3- Objectos isomorfos.

O conceito de isomorfismo, como é sabido, é um dos conceitos mais importante em qualquer teoria matemática, visto que objectos isomorfos podem ser considerados "semelhantes" na teoria em questão, como habitualmente, visto terem as mesmas propriedades.

Em $\mathcal{C}onj$, os conjuntos A e B dizem-se isomorfos, $A \cong B$, quando existe uma bijecção entre A e B. Neste caso, cada conjunto pode ser considerado enquanto uma "reetiquetagem" do outro. Veja-se um exemplo específico.

Considere-se um conjunto A e tome-se:

$$B = A \times \{0\} = \{(x, 0) : x \in A\}.$$

Com efeito neste caso, os elementos de B são os elementos de A apenas com a "etiqueta 0" ligada a cada um dos seus elementos.

A regra

$$f(x) = (x, 0)$$

dá origem à bijecção

$$f : A \to B$$

fazendo assim com que $A \cong B$.

Em geral, tem-se a definição seguinte.

Definição 23 *: Numa categoria $\mathcal{C}$, dois* ***objectos*** *a e b são* ***isomorfos*** *se existe um isomorfismo $f : a \to b$ em $\mathcal{C}$ (isto é, $f : a \cong b$).*

Notação 24 *: $a \cong b$.*

Por exemplo em $\mathcal{G}rp$, $G_1 \cong G_2$ se entre os grupos G_1, G_2 existir um isomorfismo de grupos, isto é, um homomorfismo de grupos (função que preserva a estrutura de grupo) para o qual existe inverso (com a função inversa que é um homomorfismo de grupo).

Apresentam-se agora propriedades de que goza a relação $\cong$.

Proposições 25 *: Para quaisquer $\mathcal{C}$-objectos a e b tem-se que:*

1. *$a \cong a$;*

2. *se $a \cong b$ então $b \cong a$;*

3. *se $a \cong b$ e $b \cong c$ então $a \cong c$.*

Prova:

1. Basta tomar $f = id_a : a \cong a$. ■

2. Suponha-se, por hipótese, que $a \cong b$, isto é, existe um isomorfismo $f : a \cong b$. Então, por definição de isomorfismo, existe um $\mathcal{C}$-morfismo $f^{-1} : b \to a$ tal que:

   $f^{-1} \circ f = id_a \qquad \text{e} \qquad f \circ f^{-1} = id_b.$

   Mas então f^{-1} é também um isomorfismo e, portanto,

   $f^{-1} : b \cong a$. ■

3. Veja-se a prova da proposição (22.6). ■

4- Objecto inicial. Objecto terminal.

Considerando a definição de uma função f como um triplo $(A, B; R)$, com R uma relação de A em B ($R \subseteq A \times B$), conclui-se que $f = (\varnothing, A; \varnothing)$ é uma função de $\varnothing$ para A. O gráfico de f (que é R) é vazio, e f é conhecida pelo nome de função vazia para A. Como $\varnothing \times A$ é o conjunto vazio, então $\varnothing$ é o único subconjunto de $\varnothing \times A$ e, portanto, f é a única função de $\varnothing$ para A. Esta observação conduz às definições seguintes.

Definições 26 *: Seja $\mathcal{C}$ uma categoria.*

1. *Em $\mathcal{C}$, um* ***objecto****, 0, diz-se* ***inicial*** *se, para cada $\mathcal{C}$-objecto a, $Mor_{\mathcal{C}}(0, a)$ tem um e um só elemento.*

   Invertendo a direcção dos morfismos na definição de objecto inicial, obtém-se a definição do conceito dual.

2. *Um objecto, 1, diz-se um* ***objecto terminal*** *de $\mathcal{C}$ se, para todo o $\mathcal{C}$-objecto a, $Mor_{\mathcal{C}}(a, 1)$ é um conjunto singular.*

Para além do exemplo de $\mathcal{C}onj$ visto acima na motivação, existem inúmeros exemplos clássicos destes dois conceitos em Teoria das Categorias. Vejam-se mais alguns.

Exemplos 27 *:*

1. *Em $\mathcal{M}on$ ($\mathcal{G}rp(Ab)$, ...), sendo $M = (M, \star, e)$ e $M' = (M', \star', e')$ dois monóides (grupos (abelianos),...),*

(a) *um objecto inicial é do tipo* $0 = \{e\} = M$*; de facto, tem-se*

$$Mor(M, M') = \{f\}\,,\ \text{com} \qquad \begin{array}{rrcl} f: & \{e\} = M & \to & M' \\ & e & \mapsto & e' \end{array}$$

(b) *um objecto terminal é também da forma* $1 = \{e\} = M$*; efectivamente,*

$$Mor(M', M) = \{g\}\,,\ \text{com} \qquad \begin{array}{rrcl} g: & M' & \to & M = \{e\} \\ & x' & \mapsto & e \end{array}\ .$$

2. *Em* $\mathcal{C}onj$*,*

   (a) $\varnothing$ *é o único objecto inicial como se viu;*

   (b) *os objectos terminais são (todos) os conjuntos singulares, isto é, os conjuntos com um só elemento* $\{*\}$*. De facto, dado um qualquer conjunto* A*, a regra* $f(x) = *$ *dá origem à função* $f : A \to \{*\}$ *(única possível, visto que* $*$ *é a única imagem possível).*

3. *Em* $\mathcal{C}onj^2$ *(a categoria dos pares de conjuntos),*

   (a) *o objecto inicial é* $(\varnothing, \varnothing)$*, pois*

   $$(\varnothing, \varnothing) \xrightarrow{(!_{\varnothing A}, !_{\varnothing B})} (A, B), \qquad \text{com } \varnothing \xrightarrow{!_{\varnothing A}} A \text{ e } \varnothing \xrightarrow{!_{\varnothing B}} B;$$

   (b) *os objectos terminais são do tipo* $(\{*_1\}, \{*_2\})$*, pois*

   $$(A, B) \xrightarrow{(!_{A\{*_1\}}, !_{B\{*_2\}})} (\{*_1\}, \{*_2\}), \qquad \text{com } A \xrightarrow{!_{A\{*_1\}}} \{*_1\} \text{ e } B \xrightarrow{!_{B\{*_2\}}} \{*_2\}.$$

4. *Em* $\mathcal{C}onj^{\to}$*, a categoria das funções (entre conjuntos),*

   (a) *o objecto inicial é a função vazia* $!_{\varnothing\varnothing}$ *(de* $\varnothing$ *para* $\varnothing$*); de facto, dada qualquer função* $f : A \to B$*, esta é a única forma de fazer com que o seguinte diagrama comute*

   $$\begin{array}{rcl} \varnothing & \xrightarrow{!_{\varnothing A}} & A \\ !_{\varnothing\varnothing} \downarrow & & \downarrow f \\ \varnothing & \xrightarrow[!_{\varnothing B}]{} & B \end{array} \qquad (Mor(!_{\varnothing\varnothing}, f) = \{(!_{\varnothing A}, !_{\varnothing B})\});$$

   (b) *os objectos terminais são as funções do tipo* $\{*_1\} \xrightarrow{!_{\{*_1\}\{*_2\}}} \{*_2\}$*; de facto, dada qualquer função* $f : A \to B$*, esta é a única forma de fazer com que o seguinte diagrama comute.*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{!_{A\{*_1\}}} & \{*_1\} \\ f\downarrow & & \downarrow !_{\{*_1\}\{*_2\}} \\ B & \xrightarrow[!_{B\{*_2\}}]{} & \{*_2\} \end{array}$$

Observação 28 : *Analogamente, em $\mathcal{C}^{\rightarrow}$, id_0 é um objecto inicial e id_1 é um objecto terminal (sendo 0 e 1 os objectos inicial e terminal, respectivamente, de $\mathcal{C}$).*

5. *Em $\mathcal{C}onj \downarrow \mathbb{R}$, a categoria das funções reais,*

   (a) *o objecto inicial é a função vazia $!_{\varnothing\mathbb{R}}$ (de $\varnothing$ para $\mathbb{R}$); de facto, dada qualquer função $g : A \rightarrow \mathbb{R}$, a única forma para obrigar o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \varnothing & \xrightarrow{k} & A \\ & !_{\varnothing\mathbb{R}} \searrow \quad \swarrow g & \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

   a comutar é definir a função $k =!_{\varnothing A}$ (de $\varnothing$ em A);

   (b) *a função $id_{\mathbb{R}}$ é um objecto terminal. Com efeito, qualquer que seja a função $g : A \rightarrow \mathbb{R}$, tem-se $Mor(g, id_{\mathbb{R}}) = \{g\}$*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ & g \searrow \quad \swarrow id_{\mathbb{R}} & \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

Observação 29 : *Analogamente, em $\mathcal{C} \downarrow A$, $!_{0A}$ é um objecto inicial e id_A é um objecto terminal (sendo 0 e 1 os objectos inicial e terminal, respectivamente, de $\mathcal{C}$).*

Observação 30 : *O símbolo "!" é usado para denotar um morfismo de existência única. Pode-se escrever $!_{a1} : a \rightarrow 1$ (ou ainda, $!_{0a} : 0 \rightarrow a$, respectivamente) para o morfismo único de a (0, respectivamente) em 1 (a, respectivamente).*

Proposições 31 *: Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e a um seu objecto. Então, em $\mathcal{C}$:*

1. *quaisquer dois objectos iniciais são isomorfos;*

2. *qualquer morfismo $f : 1 \to a$, onde 1 é um objecto terminal, é um monomorfismo (cindido);*

3. *quaisquer dois objectos terminais são isomorfos;*

4. *qualquer morfismo $f : a \to 0$, onde 0 é um objecto inicial, é um epimorfismo (cindido).*

Observação 32 *: Diz-se então que o objecto inicial (terminal) é único, apenas, a menos de isomorfismo.*

Prova: Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $a \in Obj\mathcal{C}$.

1. Suponha-se, por hipótese, que $0, 0'$ são dois objectos iniciais (pretende-se mostrar que existe um isomorfismo $f : 0' \to 0$ em $\mathcal{C}$).

   Por definição de objecto inicial, existem os morfismos únicos $f : 0' \to 0$ ($0'$ é inicial) e $g : 0 \to 0'$ (0 é inicial). Então, como $f \circ g$ é o único morfismo de $Mor(0,0)$ e $g \circ f$ é o único elemento de $Mor(0', 0')$, tem-se:

   $$f \circ g = id_0 : 0 \to 0 \qquad \text{e} \qquad g \circ f = id_{0'} : 0' \to 0'.$$

   Logo, f tem um inverso que é g e, portanto,

   $f : 0' \cong 0$ (ou seja, $0'$ e 0 são isomorfos em $\mathcal{C}$). ■

2. Suponha-se, por hipótese, que $f : 1 \to a$ é um $\mathcal{C}$-morfismo qualquer, em que 1 é um objecto terminal.

   (a) (f é um monomorfismo) Suponha-se ainda que se tem

   $$f \circ g = f \circ h, \qquad \text{com } g, h : b \to 1, \ \mathcal{C}\text{-morfismos quaisquer}$$

   (pretende-se provar que $g = h$).

   Mas, por definição de objecto terminal, $Mor_{\mathcal{C}}(b, 1)$ tem exactamente um elemento, então:

   $$!_{b1} = g = h.$$

   Portanto, f é um monomorfismo.

   (b) (f é um monomorfismo cindido) Por definição de objecto terminal, existe o morfismo $!_{a1}$ tal que

$$!_{a1} \circ f : 1 \to 1 \qquad \text{e} \qquad id_1 : 1 \to 1, \qquad \text{onde} \qquad 1 \xrightarrow{f} a \xrightarrow{!_{a1}} 1, \quad 1 \xrightarrow{id_1} 1.$$

Mas, novamente por definição de objecto terminal, $Mor_{\mathcal{C}}(1,1) = \{!_{11}\}$, ou seja,

$$!_{a1} \circ f = id_1 = !_{11}.$$

Portanto provou-se que f é um monomorfismo cindido (ver 19). ■

3. O conceito de isomorfismo sendo auto-dual (ver 22.2), tendo provado que

   quaisquer dois $\mathcal{C}$-objectos iniciais são isomorfos,

   pode-se concluir, pelo princípio da dualidade, o facto dual:

   quaisquer dois $\mathcal{C}$-objectos terminais são isomorfos. ■

4. Aplicando o princípio da dualidade à proposição da alínea (2), fica provado o pretendido. ■

Um objecto pode, simultâneamente, ser inicial e terminal numa categoria $\mathcal{C}$ e, neste caso, a este objecto chama-se **objecto zero**.

Assim, por exemplo, $\mathcal{C}onj$ não tem objectos zero mas $\mathcal{M}on$ $(\mathcal{G}rp(Ab), ...)$ tem objectos zero.

5- Produtos. Coprodutos.

Dados dois conjuntos A e B, vai-se agora abordar o problema de dar uma caracterização do produto cartesiano $A \times B$ usando morfismos. Esta caracterização obtida é única a menos de isomorfismo e o caminho percorrido levar-nos-á a uma descrição geral do que é uma construção numa categoria. Passar-se-á assim da noção de produto em $\mathcal{C}onj$ à noção de produto na teoria das categorias.

As duas projecções que estão associadas a $A \times B$ são:

$$\begin{array}{rccl} p_A : & A \times B & \to & A \\ & (x,y) & \mapsto & p_A((x,y)) = x \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rccl} p_B : & A \times B & \to & B \\ & (x,y) & \mapsto & p_B((x,y)) = y \end{array}$$

Sejam C um conjunto qualquer e

$$f : C \to A \qquad \text{e} \qquad g : C \to B,$$

um par de funções. Então define-se uma função

$$(*) \qquad \begin{array}{rccl} p : & C & \to & A \times B \\ & x & \mapsto & p(x) = (f(x), g(x)) \end{array}$$

Obviamente tem-se, para todo o $x \in C$,

$$p_A(p(x)) = f(x) \qquad \text{e} \qquad p_B(p(x)) = g(x),$$

isto é,

$$(**) \qquad p_A \circ p = f \qquad \text{e} \qquad p_B \circ p = g,$$

e, além disso, o único morfismo (de $\mathcal{C}onj$) que faz o diagrama seguinte comutar (isto é, $(**)$)

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dotted, "p"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B \end{tikzcd}$$

é p definido como acima ($(*)$); de facto, suponha-se que

$$\begin{array}{rccll} q: & C & \rightarrow & A \times B & \\ & x & \mapsto & q(x) = (y, z) & (***) \end{array}$$

também faz o diagrama comutar (isto é, $p_A \circ q = f$ e $p_B \circ q = g$).

Então,

$$p_A(p(x)) \overset{(*)}{=} f(x) = p_A(q(x)) \overset{(***)}{=} y,$$

e, portanto,

$$y = f(x).$$

Similarmente tem de se ter $z = g(x)$.

Note-se que a função p, associada a f e a g, é usualmente chamada de **função induzida** por f e g, e denotada por $\langle f, g \rangle$.

Assim em $\mathcal{C}onj$, a sua definição é $p(x) = \langle f, g \rangle (x) = \langle f(x), g(x) \rangle$.

O que se acaba de observar em $\mathcal{C}onj$, motiva a definição seguinte.

Definição 33 : *Numa categoria $\mathcal{C}$, **um produto de dois objectos** a e b, é um par $(a \times b, (pr_a, pr_b))$, onde $a \times b$ é um $\mathcal{C}$-objecto e $pr_a : a \times b \rightarrow a$, $pr_b : a \times b \rightarrow b$ são $\mathcal{C}$-morfismos, tais que: para cada par $(c, (f_a, g_b))$, onde $c \in Obj\mathcal{C}$ e $f_a : c \rightarrow a$, $g_b : c \rightarrow b$ são $\mathcal{C}$-morfismos, existe um único morfismo $\langle f_a, g_b \rangle : c \rightarrow a \times b$ satisfazendo as igualdades $pr_a \circ \langle f_a, g_b \rangle = f_a$ e $pr_b \circ \langle f_a, g_b \rangle = g_b$, isto é, fazendo o diagrama*

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "f_a"'] \arrow[d, dotted, "\langle f_a, g_b \rangle"] \arrow[dr, "g_b"] & \\ a & a \times b \arrow[l, "pr_a"] \arrow[r, "pr_b"'] & b \end{tikzcd}$$

comutar.

O morfismo $\langle f_a, g_b \rangle$ é o morfismo induzido por f_a e g_b, associado às projecções pr_a e pr_b.

Observação 34 *: O símbolo de morfismo $\dashrightarrow$ indica , quando presente num diagrama, que existe um e um só morfismo que pode ocupar essa posição e que permite que o diagrama comute.*

Note ainda que se disse um produto de a e b, e não o produto. A proposição que se segue explica esse facto, visto que, analogamente a outros conceitos definidos anteriormente, o produto de dois objectos é único, apenas, a menos de isomorfismo.

Proposição 35 *: Numa categoria $\mathcal{C}$, o produto de dois objectos a e b, quando existe, é único a menos de isomorfismo, isto é, $a \times b$ é definido, somente, a menos de isomorfismo.*

Prova: Sejam a e b dois $\mathcal{C}$-objectos.

1. Suponha-se que existem dois produtos de a e b, $(a \times b, (pr_a, pr_b))$ e $(d, (p, q))$, onde $(p, q) \in Mor(d, a) \times Mor(d, b)$, que satisfazem portanto a definição de "um produto de a e b". Considere ainda o seguinte diagrama comutativo

$$(diag.1) \qquad \begin{array}{ccccc} & & d & & \\ & \overset{p}{\swarrow} & \vdots \, {\scriptstyle \langle p,q \rangle} & \overset{q}{\searrow} & \\ & & \vee & & \\ a & \xleftarrow{pr_a} & a \times b & \xrightarrow{pr_b} & b \\ & & \vdots \, {\scriptstyle \langle pr_a, pr_b \rangle} & & \\ & \underset{p}{\nwarrow} & \vee & \underset{q}{\nearrow} & \\ & & d & & \end{array} \qquad \begin{array}{l} ((a \times b, (pr_a, pr_b)) \text{ é um produto}) \\ \\ \\ ((d, (p, q)) \text{ é um produto}) \end{array}$$

Assim, pela definição de um produto de a e b, existem os morfismos únicos:

$\langle p, q \rangle$ (com respeito ao produto $(a \times b, (pr_a, pr_b)))$, tal que

$$p = pr_a \circ \langle p, q \rangle \qquad \text{e} \qquad q = pr_b \circ \langle p, q \rangle \, ,$$

e

$\langle pr_a, pr_b \rangle$ (com respeito ao produto $(d, (p, q))$, tal que

$$pr_a = p \circ \langle pr_a, pr_b \rangle \qquad \text{e} \qquad pr_b = q \circ \langle pr_a, pr_b \rangle .$$

Uma vez que $(d, (p, q))$ é um produto de a e b, só pode existir um morfismo $s : d \to d$ tal que o diagrama

$$
(diag.2) \qquad \begin{tikzcd} & d \arrow[dl, "p"'] \arrow[d, dotted, "s"] \arrow[dr, "q"] & \\ a & d \arrow[l, "p"] \arrow[r, "q"'] & b \end{tikzcd} \qquad ((d,(p,q)) \text{ é um produto})
$$

comuta. Porém por um lado, este diagrama $(diag.2)$ comuta considerando

$(*) \qquad s = id_d,$

e, por outro lado, a comutatividade de $(diag.1)$ implica também a comutatividade de $(diag.2)$, tomando

$(*) \qquad s = \langle pr_a, pr_b \rangle \circ \langle p, q \rangle$.

Pela unicidade de s, conclui-se que

$\langle pr_a, pr_b \rangle \circ \langle p, q \rangle = id_d.$

2. Analogamente, trocando os papéis de d e $a \times b$ neste argumento, conclui-se que

   $\langle p, q \rangle \circ \langle pr_a, pr_b \rangle = id_{a \times b}.$

3. Assim, por (1) e (2), tem-se o isomorfismo $\langle p, q \rangle : d \cong a \times b.$ $\blacksquare$

A noção dual de produto é a noção de coproduto (ou soma), que em $\mathcal{C}onj$ se pode caracterizar como se segue.

Dados dois conjuntos A e B, o coproduto de A e B é $(A + B, (i_A, i_B))$, onde $A + B$ é a reunião disjunta de A e B, e i_A, i_B são as inclusões. Tendo em atenção o exemplo apresentado na motivação da secção 3,

$A \cong A \times \{0\} \qquad \text{e} \qquad B \cong B \times \{1\}$.

Como estes conjuntos não têm elementos comuns, pode definir-se:

$A + B = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$

e podem considerar-se as inclusões, i_A e i_B, dadas pelas regras

$$
\begin{array}{rccc} i_A : & A & \to & A + B \\ & a & \mapsto & (a, 0) \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rccc} i_B : & B & \to & A + B \\ & b & \mapsto & (b, 1) \end{array}
$$

Assim, o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A & \overset{i_A}{\hookrightarrow} & A+B & \overset{i_B}{\hookleftarrow} & B \\ & f_A \searrow & \vdots {\scriptstyle [f_A,g_B]} & \swarrow g_B & \\ & & S & & \end{array}$$

comuta, com

$$\begin{array}{rccl} [f_A, g_B]: & A+B & \to & S \\ & (x,i) & \mapsto & \begin{cases} f_A(x) & \text{se } i=0 \\ g_B(x) & \text{se } i=1 \end{cases} \end{array}$$

De uma forma geral tem-se a definição seguinte.

Definição 36 *: Numa categoria $\mathcal{C}$,* ***um coproduto de dois objectos*** *a e b é um par $(a+b,(i_a,i_b))$, onde i_a e i_b são $\mathcal{C}$-morfismos da forma $i_a : a \to a+b$, $i_b : b \to a+b$ ($a+b$ é um $\mathcal{C}$-objecto), tal que: para cada par $(s,(f_a,g_b))$ onde $f_a : a \to s$, $g_b : b \to s \in Mor\mathcal{C}$ (s é um $\mathcal{C}$-objecto), existe um único morfismo $[f_a, g_b] : a+b \to s$ fazendo o diagrama*

$$\begin{array}{ccccc} a & \overset{i_a}{\longrightarrow} & a+b & \overset{i_b}{\longleftarrow} & b \\ & f_a \searrow & \vdots {\scriptstyle [f_a,g_b]} & \swarrow g_b & \\ & & s & & \end{array}$$

comutar, isto é, tal que $[f_a, g_b] \circ i_a = f_a$ e $[f_a, g_b] \circ i_b = g_b$.

O morfismo $[f_a, g_b]$ designa-se por ***morfismo induzido*** *por f_a e g_b com respeito às* ***injecções*** *(coprojeccções) i_a e i_b.*

Pelo princípio da dualidade, conclui-se que o coproduto de a e b, quando existe, é também definido somente a menos de isomorfismo.

Proposições 37 *: Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria, $a, b \in Obj\mathcal{C}$ e $f, g, h, k \in Mor\mathcal{C}$. Então:*

1. *$\langle pr_a, pr_b \rangle = id_{a \times b}$.*

2. *Se $\langle f, g \rangle = \langle h, k \rangle$, então $f = h$ e $g = k$.*

3. *$\langle f \circ h, g \circ h \rangle = \langle f, g \rangle \circ h$.*

4. *Se 1 é um objecto terminal de $\mathcal{C}$, então $\langle id_a, !_{a1} \rangle : a \cong a \times 1$.*

   Dualmente tem-se:

5. $[i_a, i_b] = id_{a+b}$.

6. Se $[f, g] = [h, k]$ *, então* $f = h$ *e* $g = k$.

7. $[h \circ f, h \circ g] = h \circ [f, g]$.

8. Se $\mathcal{C}$ *tem um objecto inicial* 0*, então* $[id_a, !_{0a}] : a \cong a + 0$.

Prova: Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria, $a, b \in Obj\mathcal{C}$ e $f, g, h, k \in Mor\mathcal{C}$.

1. Seja $(a \times b, (pr_a, pr_b))$ um produto de a e b. Então, considerando $d = a \times b$, $p = pr_a$ e $q = pr_b$ nos diagramas $(diag.1)$ e $(diag.2)$ de (35), obtém-se o diagrama

$$\begin{tikzcd} & a \times b \arrow[dl, "pr_a"'] \arrow[d, dotted, "s"] \arrow[dr, "pr_b"] & \\ a & a \times b \arrow[l, "pr_a"] \arrow[r, "pr_b"'] & b \end{tikzcd} \qquad (a \times b, (pr_a, pr_b))$$

comutativo. Pelos mesmos argumentos dessa prova (33; 35), pode-se concluir que s é o único morfismo que faz este diagrama comutar e, portanto,

$$s = id_{a \times b} = \langle pr_a, pr_b \rangle \, . \qquad \blacksquare$$

2. Por definição de um produto de a e b, existe um único morfismo $\langle f, g \rangle$ para cada par f e g; logo, como o diagrama

$$(diag.1) \qquad \begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dotted, "\langle f,g \rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\ a & a \times b \arrow[l, "pr_a"'] \arrow[r, "pr_b"] & b \\ & c \arrow[ul, "h"] \arrow[u, dotted, "\langle h,k \rangle"'] \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{c} (a \times b, (pr_a, pr_b)) \\ \\ (a \times b, (pr_a, pr_b)) \end{array}$$

é comutativo, pode-se concluir que:

(a) $(*)\ pr_a \circ \langle f, g \rangle = f$ e $(**)\ pr_b \circ \langle f, g \rangle = g$ (dos triângulos de cima de $(diag.1)$)

(b) $(*)\ pr_a \circ \langle h, k \rangle = h$ e $(**)\ pr_b \circ \langle h, k \rangle = k$ (dos triângulos de baixo de $(diag.1)$).

Mas como por hipótese $\langle f, g \rangle = \langle h, k \rangle$, então tem-se

$$f \overset{(*)}{=} h \text{ e } g \overset{(**)}{=} k. \qquad \blacksquare$$

3. Analogamente às provas anteriores, considerando os diagramas comutativos

$$
\begin{tikzcd}
 & d \arrow[d, "h"] & \\
 & c \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dotted, "\langle f,g \rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\
a & a \times b \arrow[l, "pr_a"] \arrow[r, "pr_b"'] & b
\end{tikzcd}
\quad \textbf{e} \quad
\begin{tikzcd}
 & d \arrow[dl, "f \circ h"'] \arrow[d, dotted, "\langle f \circ h, g \circ h \rangle"] \arrow[dr, "g \circ h"] & \\
a & a \times b \arrow[l, "pr_a"] \arrow[r, "pr_b"'] & b
\end{tikzcd}
$$

vem que $\quad \langle f \circ h, g \circ h \rangle = \langle f, g \rangle \circ h.$ ■

4. Seja 1 um objecto terminal de $\mathcal{C}$ (pretende-se mostrar que $\langle id_a, !_{a1} \rangle : a \cong a \times 1$). Com as devidas adaptações, similarmente à prova da proposição (35), pode-se concluir que os diagramas

$$
(diag.1) \qquad
\begin{tikzcd}
 & a \arrow[dl, "id_a"'] \arrow[d, dotted, "\langle id_a, !_{a1} \rangle"] \arrow[dr, "!_{a1}"] & \\
a & a \times 1 \arrow[l, "pr_a"'] \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, dotted, "\langle pr_a, pr_1 \rangle"] & 1 \\
 & a \arrow[ul, "id_a"] \arrow[ur, "!_{a1}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{c}
((a \times 1, (pr_a, pr_1)) \\
\text{(produtos de } a \text{ por 1)} \\
((a, (id_a, !_{a1}))
\end{array}
$$

e

$$
(diag.2) \qquad
\begin{tikzcd}
 & a \arrow[dl, "id_a"'] \arrow[d, dotted, "s"] \arrow[dr, "!_{a1}"] & \\
a & a \arrow[l, "id_a"] \arrow[r, "!_{a1}"'] & 1
\end{tikzcd}
$$

são comutativos e, portanto,

$$\langle pr_a, pr_1 \rangle \circ \langle id_a, !_{a1} \rangle = id_a$$

(respectivamente, $\langle id_a, !_{a1} \rangle \circ \langle pr_a, pr_1 \rangle = id_{a \times 1}$, trocando os papéis de a e $a \times 1$, nos diagramas anteriores).

Assim, a menos de isomorfismo, a é o único produto de a por 1. ■

Morfismos $f \times g$ **e** $f + g$.

Em $\mathcal{C}onj$, dadas as funções $f : A \to B$ e $g : C \to D$, obtém-se uma função denotada por

$$\begin{array}{rccl} f\times g: & A\times C & \to & B\times D\\ & (x,y) & \mapsto & f\times g\ ((x,y)) = (f(x),g(y)) \end{array}$$

que faz o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{pr_A} & A\times C & \xrightarrow{pr_C} & C\\ & & {\scriptstyle\langle f\circ pr_A,\, g\circ pr_C\rangle} & & \\ f\downarrow & & \vdots & & \downarrow g\\ & & \vee & & \\ B & \xleftarrow[pr_B]{} & B\times D & \xrightarrow[pr_D]{} & D \end{array}$$

comutar, onde

$$f\times g = \langle f\circ pr_A, g\circ pr_C\rangle\,,$$

ou seja, é apenas a função induzida pelas composições

$$f\circ pr_A : A\times C \to A\to B \qquad \text{e} \qquad g\circ pr_C : A\times C\to C\to D,$$

e, de uma forma geral, pode-se considerar a definição seguinte.

Definições 38 *: Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Em $\mathcal{C}$,*

1. *o morfismo $f\times g = \langle f\circ pr_a, g\circ pr_c\rangle : a\times c\to b\times d$, induzido pelos morfismos $f : a\to b$ e $g : c\to d$, é o único que faz o diagrama*

$$(diag.3) \qquad \begin{array}{ccccc} a & \xleftarrow{pr_a} & a\times c & \xrightarrow{pr_c} & c\\ & & {\scriptstyle\langle f\circ pr_a,\, g\circ pr_c\rangle} & & \\ f\downarrow & & \vdots & & \downarrow g\\ & & \vee & & \\ b & \xleftarrow[pr_b]{} & b\times d & \xrightarrow[pr_d]{} & d \end{array}$$

   comutar (evidentemente, $f\times g$ está definido somente quando $a\times c$ e $b\times d$ existem em $\mathcal{C}$);

2. *o morfismo $f+g = [i_a\circ f, i_c\circ g] : a+c \leftarrow b+d$, induzido pelos morfismos $f : a\leftarrow b$ e $g : c\leftarrow d$, é o único morfismo que torna o diagrama*

$$\begin{array}{ccccc} a & \xrightarrow{i_a} & a+c & \xleftarrow{i_c} & c\\ & & \wedge & & \\ f\uparrow & & \vdots\,{\scriptstyle [i_a\circ f,\, i_c\circ g]} & & \uparrow g\\ b & \xrightarrow[i_b]{} & b+d & \xleftarrow[i_d]{} & d \end{array}$$

   comutativo (obviamente, $f+g$ só está definido no caso de $a+c$ e $b+d$ existirem).

Para finalizar esta secção são apresentadas algumas propriedades dos produtos e coprodutos.

Proposições 39 *: Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria, $a, b, c \in Obj\mathcal{C}$ e $f, g, h, k \in Mor\mathcal{C}$. Então:*

1. $id_a \times id_b = id_{a\times b}$;

2. $a \times b \cong b \times a$;

3. $(f \times h) \circ \langle g, k\rangle = \langle f \circ g, h \circ k\rangle$ *e* $(f \times h) \circ (g \times k) = (f \circ g) \times (h \circ k)$.

   Dualmente, tem-se:

4. $id_a + id_b = id_{a+b}$;

5. $a + b \cong b + a$;

6. $[g, k] \circ (f + h) = [g \circ f, k \circ h]$ *e* $(g + k) \circ (f + h) = (g \circ f) + (k \circ h)$.

Prova: Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria, $a, b, c \in Obj\mathcal{C}$ e $f, g, h, k \in Mor\mathcal{C}$.

1. Por definição de $id_a \times id_b = \langle id_a \circ pr_a, id_b \circ pr_b\rangle : a \times b \to a \times b$, o diagrama

$$(diag.3) \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[d, "id_a"'] & a \times b \arrow[l, "pr_a"'] \arrow[r, "pr_b"] \arrow[d, dotted, "\langle id_a \circ pr_a, id_b \circ pr_b\rangle"] & b \arrow[d, "id_b"] \\ a & a \times b \arrow[l, "pra"] \arrow[r, "pr_b"'] & b \end{tikzcd}$$

é comutativo. Por outro lado, por definição de um produto de a e b, $(a\times b, (pr_a, pr_b))$, e da prova da proposição (35), conclui-se que existe um e um só morfismo s (isomorfismo) tal que o diagrama

$$(diag.2) \qquad \begin{tikzcd} & a \times b \arrow[dl, "pr_a"'] \arrow[d, dotted, "s"] \arrow[dr, "pr_b"] & \\ a & a \times b \arrow[l, "pr_a"] \arrow[r, "pr_b"'] & b \end{tikzcd}$$

comuta, com

$$s = id_{a\times b}.$$

Assim, pela unicidade de s (ver $(diag.2)$ e $(diag.3)$), tem-se

$$s = id_{a\times b} = id_a \times id_b. \qquad \blacksquare$$

2. Fazendo as respectivas adaptações à prova apresentada na proposição (35), os diagramas

$$(diag.1) \qquad \begin{tikzcd} & b \times a \arrow[dl, "pr_a"'] \arrow[d, dotted, "\langle pr_a, pr_b \rangle"] \arrow[dr, "pr_b"] & \\ a & a \times b \arrow[l, "pr_a"'] \arrow[r, "pr_b"] \arrow[d, dotted, "\langle pr_a, pr_b \rangle"] & b \\ & b \times a \arrow[ul, "pr_a"] \arrow[ur, "pr_b"'] & \end{tikzcd}$$

$(a \times b, (pr_a, pr_b))$

(produtos de a por b)

$(b \times a, (pr_a, pr_b))$

e

$$(diag.2) \qquad \begin{tikzcd} & b \times a \arrow[dl, "pr_a"'] \arrow[d, dotted, "s"] \arrow[dr, "pr_b"] & \\ a & b \times a \arrow[l, "pr_a"] \arrow[r, "pr_b"'] & b \end{tikzcd}$$

são comutativos. Logo,

$$\langle pr_a, pr_b \rangle \circ \langle pr_a, pr_b \rangle = id_{b \times a}$$

(respectivamente, obtém-se de forma análoga: $\langle pr_a, pr_b \rangle \circ \langle pr_a, pr_b \rangle = id_{a \times b}$, trocando os papéis de $b \times a$ e $a \times b$ nos diagramas anteriores) e, portanto,

$$\langle pr_a, pr_b \rangle : b \times a \cong a \times b. \qquad \blacksquare$$

3. Similarmente às provas anteriores, os seguintes diagramas

$$\begin{tikzcd} & e \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, dotted, "\langle g,k \rangle"] \arrow[dr, "k"] & \\ a \arrow[d, "f"'] & a \times c \arrow[l, "pr_a"'] \arrow[r, "pr_c"] \arrow[d, dotted, "f \times h"] & c \arrow[d, "h"] \\ b & b \times d \arrow[l, "pr_b"] \arrow[r, "pr_d"'] & d \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} e \arrow[d, "g"'] & e \times e' \arrow[l, "pr_e"'] \arrow[r, "pr_{e'}"] \arrow[d, dotted, "g \times k"] & e' \arrow[d, "k"] \\ a \arrow[d, "f"'] & a \times c \arrow[l, "pr_a"'] \arrow[r, "pr_c"] \arrow[d, dotted, "f \times h"] & c \arrow[d, "h"] \\ b & b \times d \arrow[l, "pr_b"] \arrow[r, "pr_d"'] & d \end{tikzcd}$$

comutam. Portanto tem-se:

$$(f \times h) \circ \langle g, k \rangle = \langle f \circ g, h \circ k \rangle \qquad \text{e} \qquad (f \times h) \circ (g \times k) = (f \circ g) \times (h \circ k). \qquad \blacksquare$$

6- Igualizadores e co-igualizadores.

Em $\mathcal{C}onj$, dado um par $f, g : A \rightrightarrows B$ de funções, considere-se que E é o subconjunto de A no qual f e g coincidem, isto é,

$$E = \{x \in A : f(x) = g(x)\}.$$

Então a função inclusão $i : E \hookrightarrow A$ é chamada igualizador de f e g.

A razão para o nome é que, sob composição com i, se tem:

$f \circ i = g \circ i$ (isto é, as duas funções f e g são "igualadas" por i).

Além disso, se $h : C \to A$ é algum outro igualizador de f e g (isto é, $f \circ h = g \circ h$), então existe apenas um morfismo $k : C \to E$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, hook, "i"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ C \arrow[u, dashed, "k"] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é, $i \circ k = h$. Com efeito, para $c \in C$,

$$\begin{array}{rlcl} & (i \circ k)(c) & = & (h)(c) \\ \Longleftrightarrow & i(k(c)) & = & h(c) \\ \Longleftrightarrow & k(c) & = & h(c) \end{array}$$

e, assim, $h(c) \in E$.

A situação exposta acima é agora abstraída e aplicada às categorias em geral.

Definições 40 *: Sejam $f, g : a \rightrightarrows b$ dois morfismos numa categoria $\mathcal{C}$.*

1. ***Um igualizador** de f e g é um par (e, i), com $e \in Obj\mathcal{C}$ e $i \in Mor_{\mathcal{C}}(e, a)$, tal que:*

   (a) $f \circ i = g \circ i$

   e

   (b) se (e', i'), com $e' \in Obj\mathcal{C}$ e $i' \in Mor_{\mathcal{C}}(e', a)$, verifica $f \circ i' = g \circ i'$, então existe um único $k \in Mor_{\mathcal{C}}(e', e)$ tal que: $i \circ k = i'$;

   isto é, o diagrama seguinte comuta

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r, "i"] & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \\ e' \arrow[u, dotted, "k"] \arrow[ur, "i'"'] & & \end{tikzcd} \qquad (diag.igualiz.)$$

2. ***Um co-igualizador*** *de* f *e* g *é um igualizador de* f *e* g *em* $\mathcal{C}^{op}$*; isto é, um par* (e, i)*, com* $i \in Mor_{\mathcal{C}}(a, e)$*, tal que:*

   (a) $i \circ f = i \circ g$

   e

   (b) se $i' \in Mor_{\mathcal{C}}(a, e')$ *verifica* $i' \circ f = i' \circ g$*, então existe um, e um só, morfismo* $k \in Mor_{\mathcal{C}}(e, e')$ *tal que* $k \circ i = i'$*;*

   ou seja, o diagrama

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & a \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "i'"'] & e \arrow[d, dotted, "k"] \\ & & e' \end{tikzcd}$$

   comuta.

Vejam-se agora algumas propriedades dos igualizadores e dos co-igualizadores.

Proposições 41 *: Seja* $\mathcal{C}$ *uma categoria. Em* $\mathcal{C}$*,*

1. *todo o igualizador é um monomorfismo;*

2. *dois igualizadores de* f *e* g *são isomorfos;*

3. *todo o co-igualizador é um epimorfismo;*

4. *dois co-igualizadores de* f *e* g *são isomorfos.*

Observação 42 *: um igualizador (respectivamente, co-igualizador) é definido, apenas, a menos de isomorfismo.*

Prova: Sejam $f, g : a \to b$, $i : e \to a$, $i' : e' \to a$ morfismos de uma categoria $\mathcal{C}$.

1. Suponha-se, por hipótese, que

   $(hip.) \qquad i$ igualiza f e g.

   Admita-se ainda que

   $(hip.1) \qquad i \circ j = i \circ l, \;$ onde $j, l : e' \rightrightarrows e$

   (pretende-se mostrar que i é um monomorfismo).

   Assim, no diagrama $(diag.igualiz.)$, tome-se:

   $(hip.2) \qquad i \circ j = i' : e' \to a.$

   Tem-se então

   $$f \circ i' \overset{(hip.2)}{=} f \circ (i \circ j) \overset{(Ax.As.)}{=} (f \circ i) \circ j \overset{(hip.)}{=} (g \circ i) \circ j \overset{(Ax.As.)}{=} g \circ (i \circ j) \overset{(hip.2)}{=} g \circ i',$$

   e, por (b) da definição de igualizador, existe portanto um único k (de e' em e) tal que: $\quad i \circ k = i'$.

   Mas,

   $$i \circ k = i' \overset{(hip.2)}{=} i \circ j \overset{(hip.1)}{=} i \circ l,$$

   logo tem-se, necessariamente (pela unicidade de k),

   $k = j = l. \qquad \blacksquare$

2. Suponha-se, por hipótese, que (e, i) e (e', i') são dois igualizadores de f e g. Então, existem (exactamente) um morfismo $k' \in Mor_{\mathcal{C}}(e, e')$ tal que:

   $i' \circ k' = i$

   e um morfismo $k \in Mor_{\mathcal{C}}(e', e)$ tal que:

   $i \circ k = i'$.

   Assim,

   $(i \circ k) \circ k' = i' \circ k' = i \circ id_e,$

   e portanto, pela unicidade de k e de k',

   $k \circ k' = id_e.$

   Analogamente prova-se que $k' \circ k = id_{e'}$.

   Logo, k é um isomorfismo, e k' seu inverso. $\qquad \blacksquare$

3. Por dualidade, da proposição (1) conclui-se (3). $\qquad \blacksquare$

4. Por dualidade, da proposição (2) tem-se (4). ■

O recíproco do teorema anterior não é válido em todas as categorias, conforme os seguintes exemplos ilustram.

Na categoria $\mathbb{N}_0$, 1 é monomorfismo (todos os morfismos o são), mas 1 não igualiza qualquer par (m, n) de morfismos. Com efeito, se 1 pudesse ser o igualizador de algum par (m, n), ter-se-ia

$$m \circ 1 = n \circ 1, \qquad \text{isto é,} \qquad m + 1 = n + 1.$$

Daqui, ter-se-ia

$$m = n,$$

e, portanto,

$$m + 0 = n + 0.$$

Logo, por definição de igualizador, teria de existir um (único) morfismo k tal que:

$$1 + k = 0.$$

Mas, evidentemente, não existe tal número em $\mathbb{N}_0$.

Dualmente (em $\mathbb{N}_0$), o epimorfismo 1 não igualiza qualquer par (m, n) de morfismos. De facto, se igualizasse algum, ter-se-ia $1 \circ m = 1 \circ n$, e, portanto, $0 + m = 0 + n$. Além disso, por definição de igualizador, teria de existir um morfismo k tal que: $k + 1 = 0$; mas não existe tal número em $\mathbb{N}_0$.

Em $\mathcal{C}_{(X,\leq)}$ (sendo X um conjunto parcialmente ordenado por $\leq$), cada morfismo é monomorfismo (ver 16) mas os únicos igualizadores são os morfismos identidade; de facto, por definição de morfismo em $\mathcal{C}_{(X,\leq)}$ (existe, quando muito, um morfismo $x \to y$), dado um par $f, g : a \rightrightarrows b$, tem-se, necessariamente,

$$f = g.$$

Assim $f \circ id_a = g \circ id_a$, e, daqui, um igualizador para (f, g) é id_a.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "id_a"] & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \\ e' \arrow[u, dotted, "k"] \arrow[ur, "i'"'] & & \end{tikzcd}$$

(O diagrama acima é comutativo; efectivamente, se $i' : e' \to a$ é tal que $f \circ i' = g \circ i'$, então existe exactamente um morfismo $k(= i') : e' \to a$ tal que: $id_a \circ k = i'$).

Recordando que em $\mathbb{N}_0$ todos os morfismos são epimorfismos, enquanto $id_{\mathbb{N}_0} = 0$ é o único isomorfismo, o próximo teorema esclarece melhor a situação descrita.

Proposições 43 *: Seja $\mathcal{C}$ uma categoria qualquer. Em $\mathcal{C}$,*

1. *um epimorfismo igualizador é um isomorfismo;*

2. *um monomorfismo co-igualizador é um isomorfismo.*

Prova: Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $i, f, g \in Mor\mathcal{C}$.

1. Suponha-se, por hipótese, que i é um epimorfismo $(hip.epim.)$ igualizador $(hip.igualiz.)$ de f e g. De $(hip.igaliz.)$,

   $$f \circ i = g \circ i,$$

   portanto, por $(hip.epim.)$, tem-se:

   $$(hip.) \qquad f = g \qquad \left(\overset{(Ax.Id.)}{=} g \circ id_a \overset{(hip.)}{=} f \circ id_a \right).$$

   Então, no diagrama da definição de igualizador, considere-se $e' = a$ e $i' = id_a$. Obtém-se assim o seguinte diagrama

   $$(diag.igualiz) \qquad \begin{array}{ccccc} e & \xrightarrow{i} & a & \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} & b \\ \wedge & & & & \\ k \vdots & \nearrow id_a & & & \\ a & & & & \end{array}$$

   comutativo e, portanto, por (b) da definição de igualizador, existe um único morfismo k tal que:

   $$(*) \qquad i \circ k = id_a.$$

   Logo,

   $$(i \circ k) \circ i \overset{(*)}{=} id_a \circ i \overset{(Ax.Id.)}{=} i \overset{(Ax.Id.)}{=} i \circ id_e.$$

   Mas i é um igualizador, por conseguinte (ver proposição 41) i é monomorfismo, e, portanto,

   $$(**) \qquad k \circ i = id_e.$$

   De $(*)$ e $(**)$ conclui-se que i é isomorfismo. ■

2. Por dualidade, da proposição anterior (1) conclui-se o pretendido. ■

7- Produtos fibrados. Somas almalgamadas.

Nesta última secção do capítulo II vão ser estudados os produtos fibrados e seus duais - as somas amalgamadas. Estas duas noções são também casos particulares do importante conceito de limite, conceito esse que será estudado no próximo capítulo.

Em $\mathcal{C}onj$, o produto fibrado de duas funções, f e g, é definido tomando

$$(def.\ D) \qquad D = P = \{(x, y) \in A \times B : f(x) = g(y)\}$$

(onde A, B são conjuntos e D é um subconjunto do conjunto $A \times B$), juntamente com as projecções

$$f\,' = pr_B : \begin{array}{ccc} D & \to & B \\ (x, y) & \mapsto & y \end{array} \qquad \text{e} \qquad g' = pr_A : \begin{array}{ccc} D & \to & A \\ (x, y) & \mapsto & x \end{array}$$

Desta forma, o diagrama seguinte

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f\,'} & B \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow[f]{} & C \end{array}$$

comuta; de facto, para cada $(x, y) \in D$, tem-se:

$$\begin{array}{rcl} (f \circ pr_A)((x, y)) & = & f(pr_A((x, y))) \\ & = & f(x) \\ & \stackrel{(def.\ D)}{=} & g(y) \\ & = & g(pr_B((x, y))) \\ & = & (g \circ pr_B)((x, y)) \end{array}$$

Generalizando o anterior, obtém-se a definição seguinte.

Definição 44 *: Numa categoria $\mathcal{C}$, **um produto fibrado** do par de morfismos $(f, g) \in Mor_{\mathcal{C}}(a, c) \times Mor_{\mathcal{C}}(b, c)$ é um par $(d, (g', f\,'))$, onde $d \in Obj\mathcal{C}$ e $(g', f') \in Mor_{\mathcal{C}}(d, a) \times Mor_{\mathcal{C}}(d, b)$, tal que:*

1. $f \circ g' = g \circ f\,'$

   e

2. *se um par* $(e,(h,j))$, *com* $(h,j) \in Mor_{\mathcal{C}}(e,a) \times Mor_{\mathcal{C}}(e,b)$, *é tal que* $f \circ h = g \circ j$, *então existe um único morfismo* $k : e \dashrightarrow d$ *tal que o seguinte diagrama*

$$\begin{tikzcd} & e \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, dashed, "k"] \arrow[dr, "j"] & \\ a \arrow[dr, "f"'] & d \arrow[l, "g'"'] \arrow[r, "f\,'"] & b \arrow[dl, "g"] \\ & c & \end{tikzcd} \qquad \xrightarrow{\textit{com sub-diagrama}^*} \qquad \begin{tikzcd} d \arrow[r, "f\,'"] \arrow[d, "g'"'] & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é, tal que $h = g' \circ k$ *e* $j = f\,' \circ k$.

*O quadrado** (f,g,f',g') *do diagrama é chamado quadrado de um produto fibrado.*

A $f\,'$ *(respectivamente* g'*), chama-se produto fibrado de* f *(respectivamente* g*) ao longo de* g *(respectivamente* f*).*

Analogamente às noções de produto, de igualizador (etc), um produto fibrado também só é único a menos de isomorfismo. Com efeito, se $(e,(h : e \to a, j : e \to b))$ é um outro produto fibrado de f e g, então existe (exactamente) um morfismo $k' : d \dashrightarrow e$ tal que

$$(*) \qquad h \circ k' = g' \qquad \text{e} \qquad j \circ k' = f\,'.$$

Assim,

$$(g' \circ k) \circ k' \overset{(44)}{=} h \circ k' \overset{(*)}{=} g' = g' \circ id_d \qquad \text{e} \qquad (j \circ k') \circ k \overset{(*)}{=} f\,' \circ k \overset{(44)}{=} j = j \circ id_e,$$

e portanto, pela unicidade de k e de k',

$$k \circ k' = id_d \qquad \text{e} \qquad k' \circ k = id_e.$$

A noção dual de produto fibrado é chamada soma amalgamada.

Definição 45 *: Numa categoria* $\mathcal{C}$, ***uma soma amalgamada*** *do par* $(f,g) \in Mor_{\mathcal{C}}(c,a) \times Mor_{\mathcal{C}}(c,b)$ *é um par* $(d,(g',f\,'))$, *com* $(g',f\,') \in Mor_{\mathcal{C}}(a,d) \times Mor_{\mathcal{C}}(b,d)$, *tal que:*

1. $g' \circ f = f\,' \circ g$

   e

2. *para cada par* $(e,(h,j))$, *com* $h,j \in Mor_{\mathcal{C}}(a,e) \times Mor_{\mathcal{C}}(b,e)$, *tal que* $h \circ f = j \circ g$, *existe um* $\mathcal{C}$*-morfismo único* $k : d \dashrightarrow e$ *que torna o seguinte diagrama*

$$\begin{tikzcd}
 & & e & & \\
a \arrow[urr, "h"] \arrow[rr, "g'"] & & d \arrow[u, dashed, "k"] & & b \arrow[ull, "j"'] \arrow[ll, "f'"'] \\
 & & c \arrow[ull, "f"] \arrow[urr, "g"'] & &
\end{tikzcd}
\quad \xrightarrow{\textit{com sub-diagrama}^*} \quad
\begin{tikzcd}
d & b \arrow[l, "f'"'] \\
a \arrow[u, "g'"] & c \arrow[l, "f"] \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

comutativo, isto é, tal que $h = k \circ g'$ *e* $j = k \circ f\,'$.

Vejam-se agora alguns exemplos.

Imagens inversas. Em $\mathcal{C}onj$, se $f : A \to B$ é uma função e $C \subseteq B$, então o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(C) \arrow[r, hook, "i_{f^{-1}(C)}"] \arrow[d, "f|_{f^{-1}(C)}"'] & A \arrow[d, "f"] \\
C \arrow[r, hook, "i_C"'] & B
\end{tikzcd}$$

é o quadrado de um produto fibrado onde, como usualmente, os morfismos i denotam inclusões e $f|_{f^{-1}(C)}(x) = f(x)$, para $x \in f^{-1}(C) = \{x \in A : f(x) \in C\}$ (a imagem inversa de C por f).

De facto, para todo o $x \in f^{-1}(C)$,

$$\begin{aligned}
\left(i_C \circ f|_{f^{-1}(C)}\right)(x) &= i_C\left(f|_{f^{-1}(C)}(x)\right) \\
&= i_C\left(f(x)\right) \\
&= f(x) \\
&= f\left(i_{f^{-1}(C)}(x)\right) \\
&= \left(f \circ i_{f^{-1}(C)}\right)(x).
\end{aligned}$$

Produto fibrado de f por f. Sejam $f : A \to B$ uma função e R_f uma relação de equivalência em A, associada a f, tal que:

$$R_f = \{(x, y) \in A \times A : f(x) = f(y)\}$$

ou

$$xR_f y \qquad \text{se e só se} \qquad f(x) = f(y) \qquad (\text{com } x, y \in A).$$

À luz do exemplo apresentado na motivação do início desta secção, conclui-se que o diagrama (comutativo)

$$\begin{array}{ccc} R_f & \overset{pr_2}{\rightarrow} & A \\ pr_1 \downarrow & & \downarrow f \\ A & \underset{f}{\rightarrow} & B \end{array}$$

é o quadrado de um produto fibrado, onde $pr_1 = pr_A = pr_2$.

Núcleos. Em $\mathcal{M}on$, considerem-se um homomorfismo (de monóides) $f : M \to N$ e o seu núcleo

$$K = \{x \in M : f(x) = 1_N\}.$$

Então o diagrama (comutativo)

$$\begin{array}{ccc} K & \overset{i}{\hookrightarrow} & M \\ !_{K\mathbf{1}} \downarrow & & \downarrow f \\ \mathbf{1} & \underset{!_{\mathbf{1}N}}{\rightarrow} & N \end{array}$$

é o quadrado de um produto fibrado, onde $\mathbf{1}$ é um monóide com um único elemento 1 (assim, $\mathbf{1}$ é um objecto inicial e terminal).

Com efeito, $\forall x \in K$,

$$(f \circ i)(x) = f(i(x)) = f(x) = 1_N = !_{\mathbf{1}N}(1) = !_{\mathbf{1}N}(!_{K\mathbf{1}}(x)) = (!_{\mathbf{1}N} \circ !_{K\mathbf{1}})(x).$$

Numa categoria $\mathcal{C}_{(X,R)}$ (com (X, R) um conjunto pré-ordenado), considerem-se os seguintes diagramas

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} s & \overset{f'}{\rightarrow} & q \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ p & \underset{f}{\rightarrow} & r \end{array} \qquad (**) \quad \begin{tikzcd} & & c \arrow[dll, "f_p"'] \arrow[d, dotted, "\langle f_p, g_q \rangle"] \arrow[drr, "g_q"] & & \\ p \arrow[drr, "f"'] & & s \arrow[ll, "g'=pr_p"'] \arrow[rr, "f'=pr_q"] & & q \arrow[dll, "g"] \\ & & r & & \end{tikzcd}$$

O diagrama $(*)$ é o quadrado de um produto fibrado $\iff$ s é um produto de p e q.

De facto:

$(\Rightarrow)$ se $(*)$ é o quadrado de um produto fibrado, então $(s, (g', f'))$ é um produto de p e q (porque, por definição de produto fibrado, para cada par $(c, (f_p, g_q))$, com $f_p : c \to p$ e $g_q : c \to q$ morfismos, existe um único morfismo $\langle f_p, g_q \rangle : c \to s$ fazendo o diagrama $(**)$ comutar).

$(\Leftarrow)$ analogamente, se s é um produto de p e q, então, por definição de produto de p e q (e, por definição de $\mathcal{C}_{(X,R)}$, existe, no máximo, um morfismo $s \to r$), $(*)$ é o quadrado de um produto fibrado de f e g.

Em qualquer categoria com um objecto terminal, se o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & e \arrow[dll, "h"'] \arrow[d, dashed, "k"] \arrow[drr, "j"] & & \\
a \arrow[drr, "!"'] & & d \arrow[ll, "f"'] \arrow[rr, "g"] & & b \arrow[dll, "!"] \\
 & & 1 & &
\end{tikzcd}$$

é o diagrama (comutativo) de um produto fibrado, então $(d,(f,g))$ é um produto de a e b (ver 44 e 33).

Em qualquer categoria $\mathcal{C}$, se $(*)$ é o diagrama de um produto fibrado, então i é um igualizador de f e g (ver os seguintes diagramas comutativos)

$$(*) \quad \begin{tikzcd}
 & & e' \arrow[dll, "h"'] \arrow[d, dashed, "k"] \arrow[drr, "j"] & & \\
a \arrow[drr, "f"'] & & e \arrow[ll, "i"'] \arrow[rr, "i"] & & a \arrow[dll, "g"] \\
 & & b & &
\end{tikzcd}
\qquad (**) \quad \begin{tikzcd}
e \arrow[r, "i"] & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \\
e' \arrow[u, dashed, "k"] \arrow[ur, "h=j"'] & &
\end{tikzcd}$$

e, por dualidade, se $(*')$ é o diagrama de uma soma amalgamada, então i é um co-igualizador de f e g (ver os seguintes diagramas comutativos).

$$(*') \quad \begin{tikzcd}
 & & e' & & \\
a \arrow[urr, "h"] \arrow[rr, "i"] & & e \arrow[u, dashed, "k"] & & a \arrow[ull, "j"'] \arrow[ll, "i"'] \\
 & & b \arrow[ull, "f"] \arrow[urr, "g"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad (**') \quad \begin{tikzcd}
b \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & a \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "h=j"'] & e \arrow[d, dashed, "k"] \\
 & & e'
\end{tikzcd}$$

Proposições 46 : *Em qualquer categoria* $\mathcal{C}$,

1. *o diagrama comutativo* $(*_1)$ *é o quadrado de um produto fibrado se e só se* $f : a \to b$ *é um monomorfismo;*

$$(*_1) \quad \begin{tikzcd}
a \arrow[r, "id_a"] \arrow[d, "id_a"'] & a \arrow[d, "f"] \\
a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}$$

2. se o diagrama comutativo $(*_2)$ *é o quadrado de um produto fibrado e* $f : c \to d$ *é um monomorfismo, então* $f\,' : a \to b$ *também é um monomorfismo;*

$$(*_2) \qquad \begin{array}{ccc} a & \overset{f\,'}{\to} & b \\ \downarrow & & \downarrow \\ c & \underset{f}{\to} & d \end{array}$$

Por dualidade tem-se que:

3. o diagrama comutativo $(*'_1)$ *é o quadrado de uma soma amalgamada se e só se* f *é um epimorfismo;*

$$(*'_1) \qquad \begin{array}{ccc} a & \overset{id_a}{\leftarrow} & a \\ id_a \uparrow & & \uparrow f \\ a & \underset{f}{\leftarrow} & b \end{array}$$

4. se o diagrama comutativo $(*'_2)$ *é o quadrado de uma soma amalgamada e* f *é um epimorfismo, então* $f\,'$ *também é um epimorfismo.*

$$(*'_2) \qquad \begin{array}{ccc} a & \overset{f\,'}{\leftarrow} & b \\ \uparrow & & \uparrow \\ c & \underset{f}{\leftarrow} & d \end{array}$$

Prova:

1. Sejam $f : a \to b$, $h, j : e \rightrightarrows a$ $\mathcal{C}$-morfismos.

$$(diag.) \qquad \begin{array}{ccccc} & & e & & \\ & h \swarrow & \vdots k & \searrow j & \\ a & \overset{id_a}{\leftarrow} & a & \overset{id_a}{\rightarrow} & a \\ & f \searrow & & \swarrow f & \\ & & b & & \end{array}$$

$(\Longleftarrow)$ Suponha-se, por hipótese, que f é um monomorfismo (*hip.*). Suponha-se ainda que $(e, (h, j))$ é tal que:

$(hip.1) \qquad f \circ h = f \circ j$

(pretende-se mostrar que existe um único $k : e \dashrightarrow a$ tal que:

$(T.) \qquad h = id_a \circ k \quad \text{e} \quad j = id_a \circ k).$

De $(hip.)$ e de $(hip.1)$, vem:

$h = j,$

logo, o diagrama $(diag.)$ comuta (ou seja, verifica-se $(T.)$) tomando

$(hip.2) \qquad k = h = j.$

Agora suponha-se que k' também é tal que:

$(hip.3) \qquad h = id_a \circ k' \qquad \text{e} \qquad id_a \circ k' = j$

(ou seja, $h = id_a \circ k' = j$, ou ainda, $h = k' = j$). Assim, de $(hip.2)$ e de $(hip.3)$,

$k' = k.$

$(\Longrightarrow)$ Suponha-se, por hipótese, que o diagrama comutativo $(*_1)$ é o quadrado de um produto fibrado. Portanto, sempre que $f \circ h = f \circ j$, existe um único $\mathcal{C}$-morfismo $k : e \dashrightarrow a$ que torna o diagrama $(diag.)$ comutativo, isto é, tal que

$h = id_a \circ k \qquad \text{e} \qquad j = id_a \circ k,$

logo,

$h = k = j.$

Daqui conclui-se que f é monomorfismo. $\blacksquare$

2. Suponha-se, por hipótese, que o diagrama comutativo $(*_2)$ é o quadrado de um produto fibrado $(hip.1)$, com f um monomorfismo $(hip.2)$. Suponha-se ainda que $f\,' \circ p = f\,' \circ q$, com $p, q : e \to a$ $\mathcal{C}$-morfismos $(hip.3)$

(pretende-se mostrar que $p = q$).

$$(**) \qquad \begin{array}{ccccc}
 & & e & & \\
 & h \swarrow & (p, q \downarrow) \ \vdots k & \searrow j & \\
c & \overset{g'}{\leftarrow} & a & \overset{f\,'}{\rightarrow} & b \\
 & f \searrow & & \swarrow g & \\
 & & d & &
\end{array}$$

De $(hip.1)$,

$(hip.4) \qquad f \circ g' = g \circ f\,'$

e, sempre que $f \circ h = g \circ j$, então existe um (único) $\mathcal{C}$-morfismo $k : e \dashrightarrow a$ tal que:

$(hip.5) \qquad h = g' \circ k \qquad \text{e} \qquad j = f\,' \circ k;$

(isto é, o diagrama $(**)$ é comutativo). Finalmente, de $(hip.3)$, tem-se:

$$\begin{array}{rcll}
f\,' \circ p = f\,' \circ q & \Longrightarrow & g \circ (f\,' \circ p) = g \circ (f\,' \circ q) & \\
& \Longrightarrow & (g \circ f\,') \circ p = (g \circ f\,') \circ q & (Ax.As.) \\
& \Longrightarrow & (f \circ g') \circ p = (f \circ g') \circ q & (hip.4) \\
& \Longrightarrow & g' \circ p = g' \circ q \qquad (= h) & (Ax.As.) \text{ e } (hip.2) \\
& \Longrightarrow & p = q \qquad (= k) & (hip.5)
\end{array}$$

e portanto $f\,'$ também é um monomorfismo. $\blacksquare$

Capítulo III - Functores, limites e transformações naturais.

Neste terceiro capítulo são apresentados os conceitos de functor, de composição de functores, e define-se a categoria de functores e, finalmente, o importante conceito de limite de um functor, tendo já sido introduzido seu estudo através de casos particulares como o de produto, igualizador e produto fibrado.

1- O conceito de functor (covariante).

Um functor (entre categorias) tem um papel idêntico ao de uma função (entre conjuntos): é uma correspondência entre categorias que preserva estruturas.

Definição 47 *: Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Um* ***functor (covariante)*** *F de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, associa:*

1. *a cada $\mathcal{C}$-objecto a, um $\mathcal{D}$-objecto $F(a)$ (ou Fa), chamado imagem de a por F:*

$$\begin{array}{llll} F: & Obj\mathcal{C} & \to & Obj\mathcal{D} \\ & a & \mapsto & F(a) \end{array}$$

2. *a cada $\mathcal{C}$-morfismo $f : a \to a'$, um $\mathcal{D}$-morfismo $F(f) : F(a) \to F(a')$:*

$$\begin{array}{llll} F_{a,a'}: & Mor_{\mathcal{C}}(a,a') & \to & Mor_{\mathcal{D}}(F(a),F(a')) \\ & f & \mapsto & F_{a,a'}(f) \qquad \textit{(ou ainda, } F(f)\textit{; ou simplesmente, } Ff\textit{)} \end{array}$$

de tal modo que se verificam as seguintes condições:

(F1): *$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$, para todo o par (g, f) de $\mathcal{C}$-morfismos componíveis (ou seja, sempre que a composição $g \circ f$ está definida);*

(F2): *$F(id_a) = id_{F(a)}$, para todo o $\mathcal{C}$-objecto a.*

Observação 48 *: A condição (F1) afirma que a F-imagem de uma composição de dois morfismos é a composição das suas F-imagens, isto é, sempre que o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & a' \\ & {}_h\searrow & \downarrow_g \\ & & a'' \end{array}$$

comuta em $\mathcal{C}$ $(h = g \circ f)$, então o diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(a) & \overset{F(f)}{\rightarrow} & F(a') \\ & {\scriptstyle F(h)} \searrow & \downarrow {\scriptstyle F(g)} \\ & & F(a'') \end{array}$$

comuta em $\mathcal{D}$ $\quad (F(h) = F(g) \circ F(f))$.

Resumidamente, um functor (covariante) é uma transformação que "preserva" domínios, codomínios, identidades e composições.

Vejam-se agora algumas definições e uma propriedade acerca de functores.

Definições 49 *: Um **functor*** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *diz-se:*

1. ***fiel*** *se a função* $F_{a,a'}$ *for injectiva, para todo o par de objectos* a, a' *de* $\mathcal{C}$*;*
2. ***pleno*** *se a função* $F_{a,a'}$ *for sobrejectiva, para todo o par de objectos* a, a' *de* $\mathcal{C}$*;*
3. ***injectivo em objectos*** *se a respectiva função* $Obj\mathcal{C} \to Obj\mathcal{D}$ *for injectiva;*
4. ***uma imersão*** *se for fiel, pleno e injectivo em objectos.*

Teorema 50 *: Qualquer functor* $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *preserva isomorfismos; isto é, sempre que* $A \overset{k}{\to} A'$ *é um isomorfismo de* $\mathcal{A}$*, então* $F(k)$ *é um isomorfismo de* $\mathcal{B}$*.*

Prova: $F(k) \circ F(k^{-1}) = F(k \circ k^{-1}) = F(id_{A'}) = id_{FA'}$.

Similarmente, $F(k^{-1}) \circ F(k) = id_{FA}$. ■

Seguidamente são apresentados vários exemplos de functores que terão, alguns deles, grande relevância neste trabalho.

Exemplos 51 *: Sejam* $\mathcal{C}$*,* $\mathcal{D}$ *e* $\mathcal{A}$ *três categorias.*

1. • ***Functor identidade*** $id_{\mathcal{C}}$: *define-se da seguinte forma*

$$\begin{array}{cccc} id_{\mathcal{C}} : & \mathcal{C} & \hookrightarrow & \mathcal{C} \\ & a & \mapsto & id_{\mathcal{C}}(a) = a \\ & f & \mapsto & id_{\mathcal{C}}(f) = f \end{array}$$

   • *Quando* $\mathcal{C}$ *é uma subcategoria de* $\mathcal{D}$*, a mesma regra providencia um **functor inclusão*** $\mathbf{I}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$*.*

   Obviamente, quaisquer que sejam $a \overset{f}{\to} a' \overset{g}{\to} a'' \in Mor\mathcal{C}$ *e* $a \in Obj\mathcal{C}$*, são satisfeitos:*

   (F1): $id_{\mathcal{C}}(g \circ f) = g \circ f = id_{\mathcal{C}}(g) \circ id_{\mathcal{C}}(f)$;

   (F2): $id_{\mathcal{C}}(id_a) = id_a = id_{id_{\mathcal{C}}(a)}$.

2. ***Functor constante*** $\mathbf{C}_a$***:*** *para cada* $\mathcal{A}$*-objecto* a,

$$(Def.\mathbf{C}_a) \qquad \begin{array}{rlcl} \mathbf{C}_a: & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & c & \longmapsto & a \\ & (f: c \to c') & \longmapsto & (id_a: a \to a) \end{array}$$

Sejam $c \xrightarrow{f} c' \xrightarrow{g} c''$ $\mathcal{C}$*-morfismos e* c *um* $\mathcal{C}$*-objecto, quaisquer. Então, são satisfeitos:*

(F1): $\mathbf{C}_a(g \circ f) \overset{(Def.\mathbf{C}_a)}{=} id_a \overset{(Ax.Id.)}{=} id_a \circ id_a \overset{(Def.\mathbf{C}_a)}{=} \mathbf{C}_a(g) \circ \mathbf{C}_a(f)$;

(F2): $\mathbf{C}_a(id_c) = id_a = id_{\mathbf{C}_a(c)}$.

3. ***Functores de esquecimento:***

(a) *Admita-se que* $\mathcal{C}$ *é uma das categorias da lista original (2, página 4; por exemplo* $\mathcal{C} = \mathcal{G}rp$*). Então, um* $\mathcal{C}$*-objecto é um conjunto envolvendo alguma estrutura adicional.*

Functores de esquecimento $U: \mathcal{C} \to \mathcal{C}onj$*, com*

$$\begin{array}{rlcll} U: & \mathcal{C} & \to & \mathcal{C}onj & \\ & X & \overset{(*)}{\mapsto} & X & (\textit{associa cada } \mathcal{C}\textit{-objecto } X \textit{ ao seu conjunto subjacente}) \\ & f & \overset{(**)}{\mapsto} & f & (\textit{associa cada } \mathcal{C}\textit{-morfismo } f \textit{ à função suporte}) \end{array}$$

Sejam $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ $\mathcal{C}$*-morfismos e* X *um* $\mathcal{C}$*-objecto, quaisquer. São satisfeitos:*

(F1): $U(g \circ f) \overset{(**)}{=} g \circ f \overset{(**)}{=} U(g) \circ U(f)$;

(F2): $U(id_X) \overset{(**)}{=} id_X \overset{(*)}{=} id_{U(X)}$.

Assim U *"esquece" a estrutura definida sobre os* $\mathcal{C}$*-objectos e "lembra" somente que os* $\mathcal{C}$*-morfismos são funções (entre os conjuntos).*

(b) ***Functores de esquecimento*** U_Y : *(*$\mathcal{C} \downarrow Y$ *é a categoria dos* $\mathcal{C}$*-morfismos de codomínio* $Y \in Obj\mathcal{C}$*)*

$$\begin{array}{rlcl} U_Y: & \mathcal{C} \downarrow Y & \to & \mathcal{C} \\ & (C, f) & \overset{(*)}{\mapsto} & C \\ & ((C, f) \xrightarrow{k} (C', f')) & \overset{(**)}{\mapsto} & k \end{array}$$

onde (C, f) *simboliza* $(f : C \to Y)$*. Sejam* $(C, f) \xrightarrow{k} (C', f') \xrightarrow{l} (C'', f'')$ $(\mathcal{C} \downarrow Y)$*-morfismos e* f *um* $(\mathcal{C} \downarrow Y)$*-objecto, quaisquer; então, são satisfeitos:*

(F1): $U_Y(l \circ k) \overset{(**)}{=} l \circ k \overset{(**)}{=} U_Y(l) \circ U_Y(k)$;

(F2): $U_Y(id_{(C,f)}) \overset{(**)\ e\ (diag.)}{=} id_C \overset{(*)}{=} id_{U_Y(C,f)}$.

$$(diag.) \qquad \begin{array}{ccc} C & \overset{id_{(C,f)}}{\rightarrow} & C \\ f \searrow & & \swarrow f \\ & Y & \end{array}$$

4. ***Functor potência (conjunto das partes):***

$$\begin{array}{llll} \mathcal{P}: & \mathcal{C}onj & \rightarrow & \mathcal{C}onj \\ & A & \mapsto & \mathcal{P}(A) \quad (\text{conjunto das partes de } A) \\ & (f: A \rightarrow B) & \mapsto & \left(\begin{array}{llll} \mathcal{P}(f) = f[-]: & \mathcal{P}(A) & \longrightarrow & \mathcal{P}(B) \\ & S(\subseteq A) & \longmapsto & \mathcal{P}f(S) = f[S]\,(\subseteq B) \end{array} \right) \end{array}$$

Sejam $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *funções* ($\mathcal{C}onj$*-morfismos) e* A *um conjunto* ($\mathcal{C}onj$*-objecto), quaisquer. Então, para qualquer* $S \in \mathcal{P}(A)$*, tem-se:*

$$\begin{aligned} \textbf{(F1):} \quad \mathcal{P}(g \circ f)(S) &= (g \circ f)[S] \\ &= g(f[S]) \\ &= g[\mathcal{P}f(S)] \\ &= \mathcal{P}g(\mathcal{P}f(S)) \\ &= (\mathcal{P}(g) \circ \mathcal{P}(f))(S); \end{aligned}$$

(F2): $\mathcal{P}(id_A)(S) = id_A[S] = S = id_{\mathcal{P}(A)}(S)$.

5. **Functor** $F: \mathcal{C}_{(P,\leq)} \rightarrow \mathcal{C}_{(P',\leq')}$: *é simplesmente uma função* $F: P \longrightarrow P'$ *que é monótona (isto é, sempre que* $x_1 \leq x_2$ *(em* P*) então* $F(x_1) \leq' F(x_2)$ *(em* P'*)), ou seja,*

$$\begin{array}{llll} F: & P & \longrightarrow & P' \\ & x & \longmapsto & F(x) \\ & (x_1 \leq_f x_2) & \longmapsto & \left(F(x_1) \leq'_{F(f)} F(x_2)\right) \end{array}$$

Sejam $x_1 \leq_f x_2 \leq_{f\,'} x_3$ $\mathcal{C}_{(P,\leq)}$*-morfismos (com* $F(x_1) \leq'_{F(f)} F(x_2) \leq'_{F(f\,')} F(x_3)$*) e* x *um elemento de* P*, quaisquer. Então são satisfeitos:*

$$\begin{aligned} \textbf{(F1):} \quad F(\leq_{(f\,')\circ f}) &= \leq'_{F((f\,')\circ f)} \\ &\overset{(p.trans.\leq')}{=} \leq'_{F(f\,')} \circ \leq'_{F(f)} \\ &= F(\leq_{f\,'}) \circ F(\leq_f); \end{aligned}$$

(F2): $F(\leq_{id_x}) = \leq'_{F(id_x)} = id_{F(x)}$ *(pela reflexividade de* $\leq$ *(e de* $\leq'$*), tem-se* $x \leq_{id_x} x$ *(e* $F(x) \leq'_{F(id_x)} F(x)$*), para qualquer* x *em* P*).*

- ***Caso especial:*** *$\mathcal{P}(A)$ - o conjunto das partes de A (parcialmente ordenado por $\subseteq$); de facto, dada a função $f : A \to B$ e dados os conjuntos $X, Y \subseteq A$, tem-se:*

$$X \subseteq Y \qquad \textit{somente se} \qquad f(X) \subseteq f(Y);$$

logo, $F = \mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ é um functor.

6. ***Functor - homomorfismo de monóides.*** *Um functor entre monóides $(M, *, e)$ e $(M', *', e')$ (aqui considerados como categorias com um objecto), é essencialmente um homomorfismo de monóides, isto é, uma função*

$$\begin{array}{rccl} F: & M & \to & M' \\ & e & \mapsto & e\prime \\ & x & \mapsto & x' \end{array} \qquad \textit{tal que} \qquad F(x * y) = F(x) *' F(y), \ \textit{com } x, y \in M.$$

Por definição de F, tem-se:

(F1): $F(x * y) = F(x) *' F(y)$, *com x, y elementos de M quaisquer;*

(F2): $F(e) = e'$.

7. ***Functor "produto direito":*** *Se em $\mathcal{C}$ está definido o produto de quaisquer dois objectos, então, para cada $\mathcal{C}$-objecto a,*

$$\begin{array}{rlcl} - \times a : & \mathcal{C} & \to & \mathcal{C} \\ & b & \mapsto & b \times a \\ & (f : b \to c) & \mapsto & (f \times id_a : b \times a \to c \times a) \end{array}$$

determina um functor.

$$\begin{tikzcd} b \arrow[d, "f"'] & b \times a \arrow[l, "pr_b"'] \arrow[r, "pr_a"] \arrow[d, dotted, "f \times id_a = \langle f \circ pr_b, id_a \circ pr_a \rangle"] & a \arrow[d, "id_a"] \\ c \arrow[d, "g"'] & c \times a \arrow[l, "pr_c"'] \arrow[r, "pr_a"] \arrow[d, dotted, "g \times id_a = \langle g \circ pr_c, id_a \circ pr_a \rangle"] & a \arrow[d, "id_a"] \\ d & d \times a \arrow[l, "pr_d"] \arrow[r, "pr_a"'] & a \end{tikzcd}$$

Sejam $b \xrightarrow{f} c \xrightarrow{g} d$ $\mathcal{C}$-morfismos e b um $\mathcal{C}$-objecto, quaisquer. Então, verificam-se:

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{\textit{(F1):}} & (- \times a)(g \circ f) & = & (g \circ f) \times (id_a \circ id_a) \\ & & \overset{(def.38)}{=} & \langle (g \circ f) \circ pr_b, id_a \circ pr_a \rangle \\ & & = & (g \times id_a) \circ (f \times id_a) \\ & & = & (- \times a)(g) \circ (- \times a)(f); \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \textbf{\textit{(F2):}} & (-\times a)(id_b) & = & id_b \times id_a \\ & & \overset{(prop.39)}{=} & id_{b\times a} \\ & & = & id_{(-\times a)(b)}. \end{array}$$

8. ***Functores*** $Mor_{\mathcal{C}}(a,-)$***:*** *para todo o* $\mathcal{C}$*-objecto* a *fixo, tem-se:*

$$\begin{array}{llll} Mor_{\mathcal{C}}(a,-): & \mathcal{C} & \to & \mathcal{C}onj \\ & b & \mapsto & Mor_{\mathcal{C}}(a,b) \\ & (f:b\to c) & \mapsto & \left(\begin{array}{lll} Mor_{\mathcal{C}}(a,f): & Mor_{\mathcal{C}}(a,b) & \to & Mor_{\mathcal{C}}(a,c) \\ & g & \mapsto & f\circ g \end{array}\right) \end{array}$$

Sejam $b \xrightarrow{f} c \xrightarrow{f'} d, g: a \to b$ $\mathcal{C}$*-morfismos e* b *um* $\mathcal{C}$*-objecto, quaisquer. Então tem-se:*

$$\begin{array}{lll} \textbf{\textit{(F1):}} \quad Mor_{\mathcal{C}}(a,(f'\circ f))(g) & = & (f'\circ f)\circ g \\ & = & f'\circ(f\circ g) \\ & = & f'\circ(Mor_{\mathcal{C}}(a,f)(g)) \\ & = & Mor_{\mathcal{C}}(a,f')(Mor_{\mathcal{C}}(a,f)(g)) \\ & = & (Mor_{\mathcal{C}}(a,f')\circ Mor_{\mathcal{C}}(a,f))(g) \end{array}$$

assim, $Mor_{\mathcal{C}}(a,(f'\circ f)) = Mor_{\mathcal{C}}(a,f')\circ Mor_{\mathcal{C}}(a,f)$;

$$\begin{array}{lll} \textbf{\textit{(F2):}} \quad Mor_{\mathcal{C}}(a,id_b)(g) & = & id_b\circ g \\ & = & g \\ & = & id_{Mor_{\mathcal{C}}(a,b)}(g) \end{array}$$

logo, $Mor_{\mathcal{C}}(a,-)(id_b) = id_{Mor_{\mathcal{C}}(a,-)(b)}$.

2- Functores contravariantes.

Todos os functores considerados até agora são functores designados por functores covariantes: eles preservam a "direcção" dos morfismos (ou seja, ao domínio de um morfismo é atribuído o domínio do morfismo imagem e, similarmente, para codomínios). A palavra functor, usada só, irá significar "functor covariante". Vai-se agora definir a noção de functor contravariante.

Um functor contravariante $\bar{F}$ de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$ é um functor que inverte direcções, transformando domínios em codomínios e vice-versa. Mais especificamente, $\bar{F}$ é um functor contravariante se sempre que $f: x \to y$ é um $\mathcal{C}$-morfismo, então tem-se $\bar{F}(f): \bar{F}(y) \to \bar{F}(x)$. Portanto, um functor contravariante de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$ é como um functor covariante da categoria dual $\mathcal{C}^{op}$ em $\mathcal{D}$, e daqui a definição seguinte.

Definição 52 *: Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Chama-se* ***functor contravariante*** *$\bar{F}:\mathcal{C}\to D$ a um functor (covariante) $F:\mathcal{C}^{op}\to\mathcal{D}$.*

Observação 53 *: Por outras palavras, tem-se*

$$\begin{array}{llll} \bar{F}: & \mathcal{C} & \to & \mathcal{D} \\ & a & \mapsto & \bar{F}(a) \qquad (=F(a)) \\ & (f:a\to b) & \mapsto & \left(\bar{F}(f):\bar{F}(b)\to\bar{F}(a)\right) \quad \textit{(onde } \bar{F}(f){=}F(f^{op})\textit{)} \end{array}$$

tal que:

(F1'): $\bar{F}(g\circ f)=\bar{F}(f)\circ\bar{F}(g)$ *(isto é, se $h=g\circ f$ então $\bar{F}(h)=\bar{F}(f)\circ\bar{F}(g)$);*

(F2'): $\bar{F}(id_a)=id_{\bar{F}(a)}$ $\left(=F(id_a)=id_{F(a)}\right)$.

Vejam-se agora casos concretos de functores contravariantes, nomeadamente, $Mor_{\mathcal{C}}(-,a)$, que terá um papel relevante nesta tese.

Exemplos 54 *: Seja $\mathcal{C}$ uma categoria.*

1. ***Functor contravariante*** *$\bar{F}:\mathcal{C}_{(P,\leq)}\to\mathcal{C}_{(P',\leq')}$. $\bar{F}$ é uma função tal que:*

   se $\quad p\leq q$ (em P) $\quad$ então $\quad \bar{F}(q)\leq'\bar{F}(p)$ (em P').

2. ***Functor contravariante potência (conjunto das partes):***

$$\begin{array}{llll} \bar{\mathcal{P}}: & \mathcal{C}onj & \to & \mathcal{C}onj \\ & A & \mapsto & \bar{\mathcal{P}}(A) \\ & (f:A\to B) & \mapsto & \left(\begin{array}{llll} \bar{\mathcal{P}}(f)=f^{-1}[-]: & \bar{\mathcal{P}}(B) & \to & \bar{\mathcal{P}}(A) \\ & X(\subseteq B) & \mapsto & f^{-1}[X]\,(\subseteq A) \end{array}\right) \end{array}$$

   Sejam $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$ funções ($\mathcal{C}onj$-morfismos) e A um conjunto ($\mathcal{C}onj$-objecto), quaisquer. Então, para cada $X\in\bar{\mathcal{P}}(C)$ e cada $Y\in\bar{\mathcal{P}}(A)$, tem-se:

   (F1'):
$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{P}}(g\circ f)(X) &= (g\circ f)^{-1}[X] \\ &= (f^{-1}\circ g^{-1})[X] \\ &= f^{-1}(g^{-1}[X]) \\ &= f^{-1}\left(\bar{\mathcal{P}}g(X)\right) \\ &= \bar{\mathcal{P}}f\left(\bar{\mathcal{P}}g(X)\right) \\ &= \left(\bar{\mathcal{P}}(f)\circ\bar{\mathcal{P}}(g)\right)(X) \end{aligned}$$

   logo, $\bar{\mathcal{P}}(g\circ f)=\bar{\mathcal{P}}(f)\circ\bar{\mathcal{P}}(g)$;

(F2'): $\bar{\mathcal{P}}(id_A)(Y) = id_A^{-1}[Y] = Y = id_{\bar{\mathcal{P}}(A)}(Y)$.

3. ***Functor contravariante*** $Mor_{\mathcal{C}}(-,a)$, *onde* a *é um objecto fixo de* $\mathcal{C}$*. Este functor define-se da maneira seguinte*

$$\begin{array}{llcl} Mor_{\mathcal{C}}(-,a): & \mathcal{C} & \to & \mathcal{C}onj \\ & b & \mapsto & Mor_{\mathcal{C}}(b,a) \\ & (f: b \to c) & \mapsto & \left(\begin{array}{llcl} Mor_{\mathcal{C}}(f,a): & Mor_{\mathcal{C}}(c,a) & \to & Mor_{\mathcal{C}}(b,a) \\ & g & \mapsto & (g \circ f) \end{array} \right) \end{array}$$

Sejam $b \xrightarrow{f} c \xrightarrow{g} d \xrightarrow{h} a$ $\mathcal{C}$*-morfismos e* d *um* $\mathcal{C}$*-objecto, quaisquer. Então, verificam-se:*

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{\textit{(F1')}}: & Mor_{\mathcal{C}}(g \circ f, a)(h) & = & h \circ (g \circ f) \\ & & = & (h \circ g) \circ f \\ & & = & Mor_{\mathcal{C}}(f,a)(h \circ g) \\ & & = & Mor_{\mathcal{C}}(f,a)(Mor_{\mathcal{C}}(g,a)(h)) \\ & & = & \left(Mor_{\mathcal{C}}(f,a) \circ Mor_{\mathcal{C}}(g,a)\right)(h), \end{array}$$

logo, $Mor_{\mathcal{C}}(-,a)(g \circ f) = Mor_{\mathcal{C}}(-,a)(f) \circ Mor_{\mathcal{C}}(-,a)(g)$;

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{\textit{(F2')}}: & (Mor_{\mathcal{C}}(id_d, a))(h) & = & h \circ id_d \\ & & = & h \\ & & = & id_{Mor_{\mathcal{C}}(d,a)}(h), \end{array}$$

ou seja, $Mor_{\mathcal{C}}(-,a)(id_d) = id_{Mor_{\mathcal{C}}(-,a)(d)}$.

Categoria $\mathcal{C}at$.

Intuitivamente pode-se agora formar uma categoria $\mathcal{C}at$, cujos objectos são as categorias pequenas e cujos morfismos são os functores respectivos. Obviamente, os morfismos identidade de $\mathcal{C}at$ são os functores identidade $id_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ (onde $\mathcal{C}$ é uma categoria pequena). A lei de composição é definida de forma natural também: dados dois functores $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $G: \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, a composição de G e F, é o functor

$$\begin{array}{llcl} G \circ F: & \mathcal{A} & \to & \mathcal{C} \\ & a & \mapsto & GF(a) \\ & (f: a \to b) & \mapsto & (GF(f): GF(a) \to GF(b)) \end{array}$$

Sejam $\mathcal{D} \stackrel{H}{\to} \mathcal{A} \stackrel{F}{\to} \mathcal{B} \stackrel{G}{\to} \mathcal{C}$ functores, quaisquer. Então, tem-se:

- (Ax.As.): $G \circ (F \circ H) = (G \circ F) \circ H$;
- (Ax.Id.): $id_{\mathcal{B}} \circ F = F$ e $G \circ id_{\mathcal{B}} = G$.

3- Limites e colimites.

As definições de produto de dois objectos, de igualizador de dois morfismos (etc) têm a mesma forma básica. Em cada caso, a entidade em questão tem uma certa propriedade canónica. No caso dum igualizador a propriedade é de igualizar os dois morfismos originais. No caso dum produto de a e b, a propriedade é de ser o domínio do par de morfismos dos quais os codomínios são a e b (etc).

Definições 55 *: Seja $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ um functor.*

1. *Um* ***cone*** *para F (ou F-cone) é um par $(c, (f_d : c \to F(d)))$, onde c é um $\mathcal{C}$-objecto e $f_d \in Mor\mathcal{C}$ para todo o $\mathcal{D}$-objecto d, tal que, para cada $\mathcal{D}$-morfismo $g : d \to d'$, o seguinte diagrama*

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "f_d"'] \arrow[d, "f_{d'}"] \\ F(d) \arrow[r, "Fg"'] & F(d') \end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é, $Fg \circ f_d = f_{d'}$.

2. *Um F-cone $(l, (f_d : l \to F(d)))$ diz-se um* ***cone limite*** *(ou simplesmente* ***limite****) de F se, para cada F-cone $(l', (f'_d : l' \to F(d)))$, existir um único morfismo $h : l' \to l$, tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} l' \arrow[rr, dashed, "h"] \arrow[dr, "f'_d"'] & & l \arrow[dl, "f_d"] \\ & F(d) & \end{tikzcd}$$

comuta para todo o $\mathcal{D}$-objecto d, isto é, $f'_d = f_d \circ h$ para todo o $d \in Obj\mathcal{D}$.

Por dualidade, definem-se também:

3. *Um* ***co-cone*** *para* F *($F-$co-cone) é um par* $(c, (f_d : F(d) \to c))$*, onde* $f_d \in Mor\mathcal{C}$ *para todo o* $\mathcal{D}$*-objecto* d*, tal que, para cada* $\mathcal{D}$*-morfismo* $g : d \leftarrow d'$*, o seguinte diagrama*

$$\begin{tikzcd} & c \\ F(d) \arrow[ur, "f_d"] & F(d') \arrow[l, "Fg"'] \arrow[u, "f_{d'}"'] \end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é, $f_d \circ Fg = f_{d'}$.

4. *Um co-cone* $(l, (f_d : F(d) \to l))$ *de* F *diz-se um* ***co-cone colimite*** *(ou simplesmente* ***colimite****) de* F *se, para cada* $F-$*co-cone* $(l', (f'_d : F(d) \to l'))$*, existir exactamente um morfismo* $h : l \to l'$*, tal que*

$$\begin{tikzcd} l' & & l \arrow[ll, dashed, "h"'] \\ & F(d) \arrow[ul, "f'_d"] \arrow[ur, "f_d"'] & \end{tikzcd}$$

comuta para todo o $\mathcal{D}$*-objecto* d*, isto é,* $f'_d = h \circ f_d$ *para todo o* $d \in Obj\mathcal{D}$.

Assim como por exemplo um produto de dois objectos, quando existe, só é único a menos de isomorfismo, um limite para um functor F, quando existe, também é único apenas a menos de isomorfismo (isto é, se $(l, (f_d : l \to F(d)))$ e $(l', (f'_d : l' \to F(d)))$ são cones limite de F, então existe um isomorfismo $h : l' \to l$ tal que $f_d \circ h = f'_d$ para todo o $\mathcal{D}$-objecto d).

Exemplos 56 *: Seja* $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *um functor.*

1. *Se* $\mathcal{D} = \mathcal{C}_X$*, com* $Obj\mathcal{C}_X = \{a, b\}$ *e* $Mor\mathcal{C}_X = \{id_a, id_b\}$*, então* F *consiste exactamente no par* (Fa, Fb) *de objectos de* $\mathcal{C}$ *e o seu*

   (a) *limite, quando existe, é o produto de* Fa *e* Fb *em* $\mathcal{C}$*; de facto,* F *pode ser interpretado como no seguinte diagrama (sem morfismos para além das identidades)*

   $$F(a) \qquad F(b).$$

   Então, um F*-cone é um par* $(c, (f : c \to F(a), g : c \to F(b)))$*, onde* c *é um* $\mathcal{C}$*-objecto e* f*,* g *são* $\mathcal{C}$*-morfismos, da forma*

$$\begin{array}{ccc} & c & \\ f \swarrow & & \searrow g \\ F(a) & & F(b) \end{array}$$

Um F-cone limite, quando existe, não é nada mais do que um produto de $F(a)$ e $F(b)$ em $\mathcal{C}$, isto é, o diagrama seguinte comuta

$$\begin{array}{ccccc} & & c & & \\ & f \swarrow & \vdots & \searrow g & \\ & & \vee & & \\ F(a) & \leftarrow & F(a) \times F(b) & \rightarrow & F(b) \end{array}$$

(b) colimite para o functor F, quando existe, é um co-produto de $F(a)$ e $F(b)$.

2. *Seja $\mathcal{D}$ a categoria com dois objectos, a e b, e dois morfismos não triviais distintos, $f, g : a \to b$. Um F-cone para*

$$F(a) \underset{Fg}{\overset{Ff}{\rightrightarrows}} F(b)$$

é um par $(c, (h : c \to F(a), j : c \to F(b)))$, tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & c & & \\ & h \swarrow & & \searrow j & \\ F(a) & & \underset{Fg}{\overset{Ff}{\rightrightarrows}} & & F(b) \end{array}$$

comuta; mas, este facto requer que

$$j = Ff \circ h = Fg \circ h.$$

Neste caso pode-se dizer simplesmente que um F-cone é um par $(c, h : c \to F(a))$ tal que o diagrama

$$c \xrightarrow{h} F(a) \underset{Fg}{\overset{Ff}{\rightrightarrows}} F(b)$$

comuta, isto é, $Ff \circ h = Fg \circ h$.

Um F-limite é um igualizador (e, i) de Ff e Fg. O diagrama que se segue é então comutativo.

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[dr, "i"] & & \\
c \arrow[u, dashed, "k"] \arrow[r, "h"'] & F(a) \arrow[r, shift left, "Ff"] \arrow[r, shift right, "Fg"'] & F(b)
\end{tikzcd}$$

3. *Seja F o functor vazio ($\mathcal{D} = \varnothing$; sem objectos, logo, sem morfismos também).*

   (a) *Um F-cone é então simplesmente um $\mathcal{C}$-objecto c (não há morfismos f_d porque $\mathcal{D}$ não tem objectos d).*

   Um F-cone limite é então um objecto c tal que, para qualquer outro $\mathcal{C}$-objecto c' (F-cone), existe exactamente um morfismo $c' \dashrightarrow c$.

   Por outras palavras, um limite para o functor vazio é um objecto terminal c em $\mathcal{C}$.

   (b) *Um colimite para o functor vazio F é um objecto inicial em $\mathcal{C}$.*

4. *Seja $\mathcal{D}$ a categoria que tem três objectos a, b, c e dois morfismos não triviais $f : a \to c$, $g : b \to c$. Então, o limite de F em $\mathcal{C}$, quando existe, é o produto fibrado do par $F(a) \xrightarrow{Ff} F(c) \xleftarrow{Fg} F(b)$ de $\mathcal{C}$-morfismos. De facto, um cone para o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
F(a) \arrow[dr, "Ff"'] & & F(b) \arrow[dl, "Fg"] \\
& F(c) &
\end{tikzcd}$$

consiste de três morfismos Ff', Fh, Fg', tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(a) \arrow[dr, "Ff"'] & F(d) \arrow[l, "Fg'"'] \arrow[r, "Ff'"] \arrow[d, "Fh"] & F(b) \arrow[dl, "Fg"] \\
& F(c) &
\end{tikzcd}$$

comuta; mas, este facto requer que $Fh = Fg \circ Ff' = Ff \circ Fg'$.

Assim, pode-se dizer simplesmente que um cone é um par $F(a) \xleftarrow{Fg'} F(d) \xrightarrow{Ff'} F(b)$ de $\mathcal{C}$-morfismos tais que $Fg \circ Ff' = Ff \circ Fg'$.

4- Transformações naturais.

Tendo originalmente definido categorias enquanto colecções de objectos com morfismos entre eles, introduzindo functores subiu-se um degrau na escada da abstracção, podendo considerar categorias como objectos, functores como morfismos entre eles, como exposto anteriormente.

Nesta secção vai dar-se mais um passo em frente pois, dadas duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, vai-se construir uma categoria, a categoria de functores, denotada por $\mathcal{F}unct(\mathcal{C},\mathcal{D})$, ou $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$, na qual os objectos são os functores de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$.

Assim precisa-se de definir o que é um morfismo entre dois functores, e é aqui que entram as transformações naturais, uma das noções mais importantes em Teoria das Categorias. Uma transformação natural é uma relação entre dois functores. Por vezes duas construções completamente diferentes providenciam "o mesmo" resultado e isso é expressado por um isomorfismo natural entre os dois functores.

Vejam-se então formalmente cada um destes conceitos.

Definições 57 : *Sejam $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ functores e $a \in Obj\mathcal{C}$.*

1. *Uma **transformação natural** $\tau : F \to G$ (de F em G) é uma classe de morfismos $(\tau_a : F(a) \to G(a))_{a \in Obj\mathcal{C}}$ em $\mathcal{D}$, indexada por $Obj\mathcal{C}$, tal que, para cada $\mathcal{C}$-morfismo $f : a \to b$, o diagrama*

$$\begin{array}{ccccc} a & & F(a) & \xrightarrow{\tau_a} & G(a) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ b & & F(b) & \xrightarrow[\tau_b]{} & G(b) \end{array}$$

   comuta em $\mathcal{D}$, isto é, $\tau_b \circ F(f) = G(f) \circ \tau_a$.

   *Os morfismos τ_a são chamados **componentes** de τ e, habitualmente, usa-se a simbologia $\tau : F \underset{\bullet}{\to} G$, ou $F \underset{\bullet}{\overset{\tau}{\to}} G$, para denotar que τ é uma transformação natural de F em G.*

2. *Uma transformação natural $\tau : F \underset{\bullet}{\to} G$ diz-se um **isomorfismo natural** se qualquer componente τ_a de τ é um isomorfismo de $\mathcal{D}$.*

   *Nestas condições diz-se que F e G são **functores isomorfos** e denota-se um isomorfismo natural por $\tau : F \cong G$.*

No caso de τ ser um isomorfismo natural, a F-imagem e a G-imagem de $\mathcal{C}$ podem ser interpretadas como semelhantes em $\mathcal{D}$ e cada $\tau_a : F(a) \to G(a)$ tem um inverso $\tau_a^{-1} : G(a) \to F(a)$ (por sua vez, estes morfismos τ_a^{-1} formam as componentes de um isomorfismo natural $\tau^{-1} : G \underset{\bullet}{\to} F$).

Composição de transformações naturais.

Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ quatro categorias, $F, G, H, J : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $K, L : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ e $M : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ functores. Então, define-se da seguinte forma uma lei de composição das transformações naturais $F \overset{\alpha}{\to} G \overset{\beta}{\to} H \overset{\gamma}{\to} J$:

1. $\beta \circ \alpha : F \to H$ é uma transformação natural definida por $(\beta \circ \alpha)_a = \beta_a \circ \alpha_a$,
2. $(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = \gamma \circ (\beta \circ \alpha) = \gamma \circ \beta \circ \alpha : F \to J$, com $(\gamma_a \circ \beta_a) \circ \alpha_a = \gamma_a \circ (\beta_a \circ \alpha_a)$, para todo o $a \in Obj\mathcal{A}$.

Por outro lado, para todo o functor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ define-se em $\mathcal{A}$ uma **transformação natural identidade** $\tau = id_F : F \to F$ (que é isomorfismo) definida por $(id_{Fa} : Fa \to Fa)_{a \in Obj\mathcal{A}}$.

Por fim, para todo o morfismo $f : a \to a'$ em $\mathcal{A}$, o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} Fa & \overset{\alpha_a}{\longrightarrow} & Ga \\ Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ Fa' & \underset{\alpha_{a'}}{\longrightarrow} & Ga' \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} a \\ f \downarrow \\ a' \end{array}$$

origina o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} KFa & \overset{K\alpha_a}{\longrightarrow} & KGa \\ KFf \downarrow & & \downarrow KGf \\ KFa' & \underset{K\alpha_{a'}}{\longrightarrow} & KGa' \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} a \\ f \downarrow \\ a' \end{array}$$

logo, $K\alpha$ é uma transformação natural de KF para KG. (Similarmente, se $\delta : K \to L$ é uma transformação natural, então $\delta F_a = \delta_{Fa} : KFa \to LFa$ também é uma transformação natural).

Categoria de functores $\mathcal{F}unct(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas categorias quaisquer. Designe-se por $Funct(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ a classe de todos os functores de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$.

Para F e G objectos de $Funct(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, seja $Mor(F, G)$ a classe de todas as transformações naturais de F em G.

A lei de composição das transformações naturais, definida acima, permite munir $Funct(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ de uma estrutura de categoria no caso da classe $Mor(F, G)$ ser um conjunto para todo o par (F, G).

Suponha-se que $\mathcal{A}$ é uma categoria pequena (isto é, um conjunto). Então, da definição de uma transformaçao natural $\alpha : F \to G$ pode-se escrever:

$$\alpha = (\alpha_a)_{a \in Obj\mathcal{A}},$$

logo, em virtude da definição de produto de uma família de conjuntos, tem-se:

$$\alpha \in \underset{a \in Obj\mathcal{A}}{\times} Mor(Fa, Ga), \qquad \forall \alpha \in Mor(F, G),$$

portanto,

$$Mor(F, G) \subset \underset{a \in Obj\mathcal{A}}{\times} Mor(Fa, Ga).$$

(por conseguinte $Mor(F, G)$ é um conjunto).

Daqui por diante, quando se falar de uma categoria $\mathcal{F}unct(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ (categoria de functores de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$ e das transformações naturais entre eles), supor-se-á sempre que $\mathcal{A}$ é uma categoria pequena.

Exemplos 58 :

1. *Em $\mathcal{C}onj$, para cada conjunto A, tem-se $A \cong A \times 1$ (ver 37.4). Este isomorfismo origina um isomorfismo natural, conforme se mostra abaixo usando o functor*

   $$- \times 1 : \mathcal{C}onj \to \mathcal{C}onj \qquad \textit{(descrito no exemplo 51.7).}$$

   Para $f : A \to B$, o seguinte diagrama $(*)$

$$(*)\quad \begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \\ B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "f"'] & A \times 1 \arrow[d, "f \times id_1"] \\ B \arrow[r, "\tau_B"'] & B \times 1 \end{tikzcd} \qquad (**)\quad \begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "id_A"'] \arrow[d, dotted, "\langle id_A, !_{A1} \rangle"] \arrow[dr, "!_{A1}"] & \\ A & A \times 1 \arrow[l, "pr_A"] \arrow[r, "pr_1"'] & 1 \end{tikzcd}$$

   comuta, onde $\tau_A(x) = (x, 1)$, e similarmente para τ_B $(\tau_A = \langle id_A, !_{A1} \rangle)$. O lado esquerdo do quadrado acima é a imagem de f pelo functor identidade, $id_{\mathcal{C}onj}$.

Assim, as bijecções τ_A são as componentes de um isomorfismo natural

$$\begin{array}{llll} \tau: & id_{\mathcal{C}onj} & \rightarrow & - \times 1 \\ & A & \mapsto & A \times 1 \\ & f & \mapsto & f \times id_1 \end{array}$$

2. *Em $\mathcal{C}onj$, tem-se também $A \times B \cong B \times A$ pela função "torção"*

$$\begin{array}{llll} tw_B: & A \times B & \rightarrow & B \times A \\ & (x, y) & \mapsto & (y, x) \end{array}$$

Para dado conjunto A, tem-se um functor "produto esquerdo" (analogamente ao exemplo 51.7)

$$\begin{array}{llll} A \times -: & \mathcal{C}onj & \rightarrow & \mathcal{C}onj \\ & B & \mapsto & A \times B \\ & (f : B \rightarrow C) & \mapsto & (id_A \times f : A \times B \rightarrow A \times C) \end{array}$$

Para qualquer função $f : B \rightarrow C$, o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} B & \quad & A \times B & \overset{\tau w_B}{\rightarrow} & B \times A \\ f \downarrow & & id_A \times f \downarrow & & \downarrow f \times id_A \\ C & & A \times C & \underset{\tau w_C}{\rightarrow} & C \times A \end{array}$$

comuta, mostrando que as bijecções τw_B são as componentes de um isomorfismo natural

$$\begin{array}{llll} \tau: & A \times - & \rightarrow & - \times A \\ & A \times B & \mapsto & B \times A \\ & id_A \times f & \mapsto & f \times id_A \end{array}$$

Para finalizar esta secção apresenta-se uma definição que terá grande relevância em secções posteriores.

Definição 59 *: Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria e $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}onj$ um functor. Então, diz-se que F é um* ***functor representável*** *se existir um isomorfismo natural $\alpha : F \rightarrow Mor_{\mathcal{A}}(a, -)$, para algum $a \in Obj\mathcal{A}$.*

Neste caso, diz-se que o $\mathcal{A}$-Objecto a representa o functor F.

Um exemplo de functor representável é o functor identidade $id_{\mathcal{C}onj} : \mathcal{C}onj \rightarrow \mathcal{C}onj$, sendo representado por qualquer conjunto singular.

5- Equivalência de categorias.

É uma questão natural perguntar sob que condições duas categorias podem ser consideradas como sendo "essencialmente o mesmo", no sentido em que os teoremas numa categoria podem ser prontamente transformados em teoremas numa outra categoria. A equivalência de categorias é a ferramenta principal empregue para descrever essa situação e é dada por functores apropriados entre duas categorias.

Definição 60 : *Um **functor** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ diz-se um **isomorfismo** se F tem um inverso, isto é, se existir um functor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que:*

$$G \circ F = id_{\mathcal{C}} \qquad e \qquad F \circ G = id_{\mathcal{D}}.$$

*Diz-se que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são **categorias isomorfas**, $\mathcal{C} \cong D$, no caso em que existe um functor isomorfismo F.*

Observação 61 : *De uma forma equivalente diz-se que F é um isomorfismo se for pleno, fiel e bijectivo em objectos.*

Esta noção de "semelhança" é mais estrita do que necessário. De facto, se F tem inverso G então, para dados $\mathcal{C}$-objecto a e $\mathcal{D}$-objecto b, tem-se:

$$a = G(F(a)) \ \text{ e } \ b = F(G(b))$$

e, sob o ponto de vista da teoria das categorias, podem-se ainda considerar $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ como "semelhantes" se se tem apenas

$$a \cong G(F(a)) \ \text{ em } \mathcal{C} \qquad \text{e} \qquad b \cong F(G(b)) \ \text{ em } \mathcal{D}.$$

Por outras palavras, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são equivalentes se os isomorfismos $a \to G(F(a))$ e $b \to F(G(b))$ são naturais. Formalmente:

Definições 62 ***:*** *Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um functor.*

1. *F diz-se **uma equivalência de categorias** se existirem um functor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e isomorfismos naturais*

   $$\tau : id_{\mathcal{C}} \cong G \circ F \qquad e \qquad \sigma : id_{\mathcal{D}} \cong F \circ G.$$

   *Neste caso, as **categorias** $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são **equivalentes**, $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$.*

2. *As **categorias** $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ dizem-se **dualmente equivalentes** se $\mathcal{C}^{op}$ e $\mathcal{D}$ são equivalentes.*

Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria com um único objecto c e um único morfismo id_c, e $\mathcal{D}$ uma categoria com dois objectos, d_1 e d_2, e com dois morfismos não triviais, $f : d_1 \to d_2$ e $g : d_2 \to d_1$, tais que $g \circ f = id_{d_1}$ e $f \circ g = id_{d_2}$. Então, as categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são um exemplo de categorias equivalentes.

6- Adjunções.

Um outro conceito fundamental em teoria das categorias é o conceito de adjunção. Antes de descrever uma situação de adjunção, relembram-se as definições dos functores $Mor(a, -)$ e $Mor(-, a)$ que serão imprescindíveis nesta secção.

Dada uma categoria $\mathcal{A}$, existem dois functores de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{C}onj$ que podem naturalmente ser associados a um objecto de $\mathcal{A}$.

O functor (covariante) $Mor_{\mathcal{A}}(a, -)$, associado a um objecto a de $\mathcal{A}$, é o functor

$$\begin{array}{llll} Mor_{\mathcal{A}}(a,-): & \mathcal{A} & \to & \mathcal{C}onj \\ & b & \mapsto & Mor_{\mathcal{A}}(a,b) \\ & g : b \to b' & \mapsto & \left(\begin{array}{llll} g_* = Mor_{\mathcal{A}}(a,g): & Mor_{\mathcal{A}}(a,b) & \to & Mor_{\mathcal{A}}(a,b') \\ & h & \mapsto & g_*(h) = gh \end{array} \right) \end{array}$$

O functor contravariante $Mor_{\mathcal{A}}(-, b)$, associado a um objecto b de $\mathcal{A}$, é o functor

$$\begin{array}{llll} Mor_{\mathcal{A}}(-,b): & \mathcal{A} & \to & \mathcal{C}onj \\ & a & \mapsto & Mor_{\mathcal{A}}(a,b) \\ & f : a' \to a & \mapsto & \left(\begin{array}{llll} f^* = Mor_{\mathcal{A}}(f,b): & Mor_{\mathcal{A}}(a,b) & \to & Mor_{\mathcal{A}}(a',b) \\ & h & \mapsto & f^*(h) = hf \end{array} \right) \end{array}$$

Sejam $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ functores entre as categorias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Dados um $\mathcal{A}$-objecto a e um $\mathcal{B}$-objecto b, obtêm-se $F(b)$ em $\mathcal{A}$ e $G(a)$ em $\mathcal{B}$.

$$\mathcal{A} \underset{F}{\overset{G}{\rightleftarrows}} \mathcal{B} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{G} & G(a) \\ f \,\vdots & & \vdots\, g \\ \vee & & \vee \\ F(b) & \xleftarrow[F]{} & b \end{array}$$

Uma situação de adjunção ocorre quando existe uma correspondência exacta de morfismos entre estes objectos, nas direcções indicadas na representação acima pelos morfismos quebrados, de modo que qualquer passagem de a para $F(b)$ em $\mathcal{A}$ é feita unicamente pela passagem de $G(a)$ para b em $\mathcal{B}$. Por outras palavras, o par (G, F) diz-se formar uma

adjunção (ou ser um par adjunto) se, para cada $a \in Obj\mathcal{A}$ e $b \in Obj\mathcal{B}$, existe uma bijecção

$$\textbf{(1)} \qquad \phi = \phi_{a,b} : Mor_{\mathcal{B}}(Ga, b) \cong Mor_{\mathcal{A}}(a, Fb),$$

que é natural em a e em b, isto é, para quaisquer $\mathcal{A}$-morfismo $f : a \to a'$ e $\mathcal{B}$-morfismo $g : b \to b'$, os seguintes diagramas

$$\begin{array}{ccc} Mor_{\mathcal{B}}(Ga,b) & \xrightarrow{\phi_{a,b}} & Mor_{\mathcal{A}}(a,Fb) \\ (Gf)^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ Mor_{\mathcal{B}}(Ga',b) & \xrightarrow[\phi_{a',b}]{} & Mor_{\mathcal{A}}(a',Fb) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Mor_{\mathcal{B}}(Ga,b) & \xrightarrow{\phi_{a,b}} & Mor_{\mathcal{A}}(a,Fb) \\ g_* \downarrow & & \downarrow (Fg)_* \\ Mor_{\mathcal{B}}(Ga,b') & \xrightarrow[\phi_{a,b'}]{} & Mor_{\mathcal{A}}(a,Fb') \end{array}$$

comutam ou, equivalentemente, para todo o $\mathcal{B}$-morfismo $h : Ga \to b$,

$$(\phi \circ (Gf)^*)(h) = (f^* \circ \phi)(h) \qquad \text{e} \qquad (\phi \circ g_*)(h) = ((Fg)_* \circ \phi)(h)$$

isto é,

$$(\mathbf{n}.\mathbf{1}) \qquad \phi(h(Gf)) = \phi(h)f \qquad \text{e} \qquad \phi(gh) = (Fg)\phi(h)$$

(omitindo os índices de ϕ).

Neste caso (quando ϕ existe), G é um adjunto esquerdo de F, e F é um adjunto direito de G, e o triplo $(G, F; \phi)$ é **uma adjunção de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$**.

Usando as condições de naturalidade de ϕ, pode-se ver que seu inverso ψ satisfaz, para todo o $\mathcal{A}$-morfismo $h : a \to Fb$,

$$(\mathbf{n}.\mathbf{2}) \qquad \psi(h)(Gf) = \psi(hf) \qquad \text{e} \qquad g\psi(h) = \psi((Fg)h).$$

Uma situação de adjunção é exprimível em termos de morfismos especiais associados a cada objecto de $\mathcal{A}$ e de $\mathcal{B}$. De facto, se (G, F) é uma adjunção, então a cada $\mathcal{B}$-identidade $id_{Ga} : Ga \to Ga$ pode ser associada a um $\mathcal{A}$-morfismo $\phi(id_{Ga}) = \eta_a : a \to FGa$ (tomando $b = Ga$ em **(1)** e aplicando a componente apropriada de ϕ a id_{Ga}). Além disso, se $h : a \to a'$ é um $\mathcal{A}$-morfismo, então a naturalidade de ϕ implica que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\eta_a} & F(G(a)) \\ h \downarrow & & \downarrow F(G(h)) \\ a' & \xrightarrow[\eta_{a'}]{} & F(G(a')) \end{array} \qquad \begin{array}{c} a \\ h \downarrow \\ a' \end{array}$$

comuta para todos os $\mathcal{A}$-morfismos h, isto é,

$$
\begin{array}{rcl}
(FGh)\,\eta_a & = & (FGh)\,\phi\,(id_{Ga}) \\
 & \overset{(n.1)}{=} & \phi\,((Gh)\,id_{Ga}) \\
 & = & \phi(Gh) \\
 & = & \phi(id_{Ga'}\,(Gh)) \\
 & \overset{(n.1)}{=} & \phi(id_{Ga'})h \\
 & = & \eta_{a'}h
\end{array}
$$

Deste modo os morfismos η_a formam as componentes de uma transformação natural

$\eta : id_{\mathcal{A}} \underset{\bullet}{\to} F \circ G,$

chamada a **unidade da adjunção.**

Similarmente, considerando o inverso ψ de ϕ e tomando $a = Fb$ em **(1)**, é obtido um $\mathcal{B}$-morfismo $\psi\,(id_{Fb}) = \epsilon_b : GFb \to b$ para todo o $\mathcal{B}$-objecto b, tal que o diagrama

$$
\begin{array}{rccccc}
 & G(F(b)) & \xrightarrow{\epsilon_b} & b & & b \\
G(F(h)) \downarrow & & & \downarrow h & & h \downarrow \\
 & G(F(b')) & \underset{\epsilon_{b'}}{\to} & b' & & b'
\end{array}
$$

comuta para cada $b \xrightarrow{h} b'$, isto é, $\epsilon_{b'}\,(GFh) = h\epsilon_b$.

A transformação natural $\epsilon : G \circ F \underset{\bullet}{\to} id_{\mathcal{B}}$ é chamada a **co-unidade da adjunção.**

Sabe-se que cada $\mathcal{A}$-morfismo $f : a \to F(b)$ corresponde a um único $\mathcal{B}$-morfismo $g : G(a) \to b$ por ϕ_{ab}; usando a naturalidade de ϕ em a e b, para cada $\mathcal{A}$-morfismo f existe exactamente um $\mathcal{B}$-morfismo g tal que

$$
\text{(diag.2)} \qquad
\begin{array}{ccccc}
a & \xrightarrow{\eta_a} & F(G(a)) & & G(a) \\
 & f \searrow & \vdots F(g) & & \vdots g \\
 & & F(b) & & b
\end{array}
$$

comuta. De facto, tomando $f = \phi_{ab}(g)$, tem-se:

(def.ϕ3) $\qquad \phi_{ab}(g) = F(g) \circ \eta_a.$

Para cada $\mathcal{B}$-morfismo $g : G(a) \to b$ existe exactamente um $\mathcal{A}$-morfismo $f : a \to F(b)$ tal que

$$
\text{(diag.4)} \qquad
\begin{array}{ccccc}
G(F(b)) & \xrightarrow{\epsilon_b} & b & & F(b) \\
G(f) \vdots & & \nearrow g & & \vdots f \\
G(a) & & & & a
\end{array}
$$

comuta. Visto que com $g = \psi_{ab}(f)$ se tem:

(def.ψ5) $\qquad \psi_{ab}(f) = \epsilon_b \circ G(f).$

Inversamente, dadas as transformações naturais η e ϵ desta forma, podem-se definir transformações naturais ϕ e ψ, especificando suas componentes pelas equações (def.ϕ3) e (def.ψ5), respectivamente. Se as propriedades dos diagramas (diag.2) e (diag.4) são válidas, então ϕ_{ab} e ψ_{ab} são inversas uma da outra, por isso cada uma bijecção. Assim ϕ origina uma adjunção de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$.

Os diagramas (diag.2) e (diag.4) são exemplos de um fenómeno mais geral.

De facto, sejam $F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ um functor e a um $\mathcal{A}$-objecto. Então, um par (η_a, b'_a), constituído por um $\mathcal{B}$-objecto b'_a e um $\mathcal{A}$-morfismo $\eta_a : a \to F(b'_a)$, é chamado de **morfismo universal de a para F** se, para cada $\mathcal{A}$-morfismo da forma $f : a \to F(b)$, existe exactamente um $\mathcal{B}$-morfismo $g : b'_a \to b$ tal que o diagrama

(diag.6)
$$\begin{array}{ccccc} a & \xrightarrow{\eta_a} & F(b'_a) & \qquad & b'_a \\ & f \searrow & \vdots F(g) & & \vdots g \\ & & F(b) & & b \end{array}$$

é comutativo.

Assim, sempre que (G, F) é uma adjunção, o par $(\eta_a, G(a))$ é um morfismo universal de a para F.

Dualmente, dados um functor $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e um $\mathcal{B}$-objecto b, um par (ϵ_b, a'_b), onde a'_b é um $\mathcal{A}$-objecto e $\epsilon_b : G(a'_b) \to b$ é um $\mathcal{B}$-morfismo, é chamado de **morfismo universal de G para b** se, para cada par (a, g), com a um $\mathcal{A}$-objecto e $g : G(a) \to b$ um $\mathcal{B}$-morfismo, existe um único $\mathcal{A}$-morfismo $f : a \to a'_b$ tal que

(diag.7)
$$\begin{array}{ccccc} G(a'_b) & \xrightarrow{\epsilon_b} & b & \qquad & a'_b \\ G(f) \vdots & \nearrow g & & & \vdots f \\ G(a) & & & & a \end{array}$$

comuta. Resumindo o anterior tem-se:

Definição 63 *:Sejam $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ functores. Diz-se que G é adjunto à esquerda de F se existir uma transformação natural $\eta : id_{\mathcal{A}} \to F \circ G$ tal que, para cada $\mathcal{A}$-objecto a, η_a é um morfismo universal de a para F.*

Neste caso, F diz-se um adjunto à direita de G, e denota-se por $G \dashv F$.

A $(G, F; \eta)$ chama-se ***adjunção****.*

Proposição 64 : *Sejam $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ dois functores. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *(G, F) é um par adjunto;*
2. *Existe uma transformação natural $\eta : id_{\mathcal{A}} \to FG$ tal que, para cada objecto a de $\mathcal{A}$, para cada $\mathcal{B}$-objecto b e cada $\mathcal{A}$-morfismo $f : a \to Fb$, existe um único $\mathcal{B}$-morfismo $g : Ga \to b$ satisfazendo $(Fg)\eta_a = f$;*
3. *Existe uma transformação natural $\epsilon : GF \to id_{\mathcal{B}}$ tal que, para cada $b \in Obj\mathcal{B}$, para cada $a \in Obj\mathcal{A}$ e $g \in Mor_{\mathcal{B}}(Ga, b)$, existe um único $\mathcal{A}$-morfismo $f : a \to Fb$ tal que $\epsilon_b(Gf) = g$;*
4. *Existem transformações naturais $\eta : id_{\mathcal{A}} \to FG$ e $\epsilon : GF \to id_{\mathcal{B}}$ tais que, para quaisquer $a \in Obj\mathcal{A}$ e $b \in Obj\mathcal{B}$,*

$$(c.1) \qquad \epsilon_{Ga}(G\eta_a) = id_{Ga} \qquad \text{e} \qquad (c.2) \qquad (F\epsilon_b)\eta_{Fb} = id_{Fb}.$$

Prova: Se (1) se verifica, então as transformações naturais de (2), (3) ou (4) existem pelo argumento usado na definição de unidade e de co-unidade de uma adjunção.

(1) $\Rightarrow$ **(2)** (e **(1)** $\Rightarrow$ **(3)**) Se $f : a \to Fb$ é um $\mathcal{A}$-morfismo, então, tomando $g = \psi(f)$ *(onde $\psi = \psi_{a,b}$ denota o inverso de $\phi_{a,b}$),

$$(Fg)\eta_a = (Fg)\phi(id_{Ga}) \overset{(\mathbf{n.1})}{=} \phi(g) = \phi(\psi(f)) = f;$$

de modo que (2) é satisfeita (g é único por $*$). De modo similar segue (3) de (1).

(1) $\Rightarrow$ **(4)** As duas igualdades de (4) podem ser obtidas considerando $\eta_a = \phi\left(id_{Ga}\right)$, $\epsilon_b = \psi\left(id_{Fb}\right)$, e usando as fórmulas de naturalidade de ϕ e ψ apropriadas (($\mathbf{n.1}$) e ($\mathbf{n.2}$)). De facto,

$$\epsilon_{Ga}(G\eta_a) = \psi\left(id_{FGa}\right)(G\eta_a) \overset{(\mathbf{n.2})}{=} \psi\left(id_{FGa}\eta_a\right) = \psi\left(\eta_a\right) = \psi\left(\phi\left(id_{Ga}\right)\right) = id_{Ga}$$

e

$$(F\epsilon_b)\eta_{Fb} = (F\epsilon_b)\phi\left(id_{GFb}\right) \overset{(\mathbf{n.1})}{=} \phi\left(\epsilon_b id_{GFb}\right) = \phi\left(\epsilon_b\right) = \phi\left(\psi\left(id_{Fb}\right)\right) = id_{Fb}.$$

(4) $\Rightarrow$ **(2)** (e **(4)** $\Rightarrow$ **(3)**) Suponha-se, por hipótese, que a condição (4) é satisfeita.

Seja $f : a \to Fb$ um morfismo de $\mathcal{A}$, com b um objecto de $\mathcal{B}$ (pretende-se mostrar que existe um único $\mathcal{B}$-morfismo $g : Ga \to b$ tal que $(Fg)\eta_a = f$).

Tome-se $g = \epsilon_b(Gf)$. Então:

$$
\begin{aligned}
(Fg)\eta_a &= (F\left[\epsilon_b(Gf)\right])\eta_a \\
&= (F\left(\epsilon_b\right)F(Gf))\,\eta_a && \text{(por } G \text{ ser um functor)} \\
&= F\left(\epsilon_b\right)\left[(FGf)\eta_a\right] \\
&= F\left(\epsilon_b\right)\left[\eta_{Fb}f\right] && \text{(pela naturalidade de } \eta\text{)} \\
&= \left[F\left(\epsilon_b\right)\eta_{Fb}\right]f \\
&= id_{Fb}f && \text{(pela } 2^a \text{ igualdade (c.2) da hipótese)} \\
&= f.
\end{aligned}
$$

Falta verificar que $g = \epsilon_b(Gf)$ é o único morfismo que satisfaz esta condição. Suponha-se que existe um $\mathcal{B}$-morfismo $g' : Ga \to b$ tal que $(Fg')\eta_a = f$. Então, $(Fg')\eta_a = (Fg)\eta_a$. Assim, tem-se:

$$
\begin{aligned}
(Fg')\eta_a = (Fg)\eta_a &\implies G\left[(Fg')\eta_a\right] = G\left[(Fg)\eta_a\right] \\
&\implies G(Fg')G\eta_a = G(Fg)G\eta_a && \text{(por definição de functor)} \\
&\implies \epsilon_b\left[G(Fg')G\eta_a\right] = \epsilon_b\left[G(Fg)G\eta_a\right] \\
&\implies \left[\epsilon_b\left(GFg'\right)\right]G\eta_a = \left[\epsilon_b\left(GFg\right)\right]G\eta_a \\
&\implies \left[g'\epsilon_{Ga}\right]G\eta_a = \left[g\epsilon_{Ga}\right]G\eta_a && \text{(pela naturalidade de } \epsilon\text{)} \\
&\implies g'\left[\epsilon_{Ga}G\eta_a\right] = g\left[\epsilon_{Ga}G\eta_a\right] \\
&\implies g' \circ id_{Ga} = g \circ id_{Ga} && \text{(por (c.1))} \\
&\implies g' = g.
\end{aligned}
$$

Portanto, g é único. Analogamente verifica-se (3) a partir de (4).

(4) $\Rightarrow$ **(1)** Definam-se, como visto atrás, as transformações naturais ϕ e ψ, ou seja, especificando suas componentes por:

$$\phi_{ab}(g) = F(g) \circ \eta_a \qquad \text{e} \qquad \psi_{ab}(f) = \epsilon_b \circ G(f),$$

isto é, definindo ϕ e ψ por:

$$
\begin{array}{llll}
\phi : & Mor_{\mathcal{B}}(Ga, b) & \to & Mor_{\mathcal{A}}(a, Fb) \\
& g & \mapsto & \phi(g) = (Fg)\eta_a
\end{array}
\qquad \text{e} \qquad
\begin{array}{llll}
\psi : & Mor_{\mathcal{A}}(a, Fb) & \to & Mor_{\mathcal{B}}(Ga, b) \\
& f & \mapsto & \psi(f) = \epsilon_b(Gf)
\end{array}
$$

A naturalidade de η e ϵ implicam que ϕ e ψ são inversas uma da outra; de facto, como existem um único g e um único f tais que $g = \epsilon_b G(f)$ e $f = F(g)\eta_a$ ((**4**) implica (**3**) e (**2**)), então ϕ_{ab} e ψ_{ab} são inversas uma da outra, e por isso cada uma bijecção. Assim, ϕ origina uma adjunção de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$.

Capítulo IV- Equivalências duais.

1- A Estrutura de adjunções duais.

Seja $(G, F; \eta, \epsilon)$ uma adjunção dual, isto é, $G : \mathcal{A}^{op} \to \mathcal{B}$ e $F : \mathcal{B}^{op} \to \mathcal{A}$ são functores ($\bar{F}$ e $\bar{G}$ são functores contravariantes) $\quad \mathcal{B} \underset{\bar{G}}{\overset{\bar{F}}{\rightleftarrows}} \mathcal{A}$,

$\eta : id_{\mathcal{A}} \to F \circ G$, com $(\eta_a : a \to FGa)_{a \in Obj\mathcal{A}}$

e

$\epsilon : id_{\mathcal{B}} \to G \circ F$, com $(\epsilon_b : b \to GFb)_{b \in Obj\mathcal{B}}$

são transformações naturais tais que

(1) $\qquad G(\eta_a) \circ \epsilon_{Ga} = id_{Ga} \qquad$ e $\qquad F(\epsilon_b) \circ \eta_{Fb} = id_{Fb}$.

Então, existe um isomorfismo, natural em $a \in Obj\mathcal{A}$ e em $b \in Obj\mathcal{B}$,

(2) $\qquad \phi_{ab} : Mor_{\mathcal{B}}(b, Ga) \cong Mor_{\mathcal{A}}(a, Fb)$

$$\begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{F} & Fb \\ \vdots & & \wedge \\ \vee & & \vdots \\ Ga & \underset{G}{\leftarrow} & a \end{array}$$

Sejam $U : \mathcal{A} \to \mathcal{C}onj$ e $V : \mathcal{B} \to \mathcal{C}onj$ functores de esquecimento representáveis, isto é, existem $a_0 \in Obj\mathcal{A}$ e $b_0 \in Obj\mathcal{B}$ tais que

(3) $\qquad U \cong Mor_{\mathcal{A}}(a_0, -) \qquad$ e $\qquad V \cong Mor_{\mathcal{B}}(b_0, -)$.

Definam-se ainda os objectos:

(4) $\qquad \tilde{a} = F(b_0) \in Obj\mathcal{A} \qquad$ e $\qquad \tilde{b} = G(a_0) \in Obj\mathcal{B}$.

Referir-se-á a situação exposta acima como sendo a **situação básica**.

Observação 65 *: $(\mathcal{A}, U)$ e $(\mathcal{B}, V)$ são categorias concretas.*

*(**(a)** Uma **categoria concreta** sobre $\mathcal{C}onj$ é um par $(\mathcal{A}, U)$, onde $\mathcal{A}$ é uma categoria e $U : \mathcal{A} \to \mathcal{C}onj$ é um functor fiel e $\mathcal{C}onj$ é chamada a categoria base para $(\mathcal{A}, U)$;*

***(b)** chama-se **construção** a uma categoria concreta sobre $\mathcal{C}onj$).*

Considerem-se as **subcategorias fixas**

$Fix(\eta) = \{a \in \mathcal{A} : \eta_a$ é isomorfismo$\}$ e $Fix(\epsilon) = \{b \in \mathcal{B} : \epsilon_b$ é isomorfismo$\}$

de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente. Assim, tem-se que $Fix(\eta)^{op} \cong Fix(\epsilon)$.

O objectivo deste capítulo é descrever métodos para construir uma adjunção dual e para identificar as subcategorias $Fix(\eta)$ e $Fix(\epsilon)$.

Começa-se por analisar a estrutura de uma adjunção dual.

Proposição 66 *: Dada a situação básica, verifica-se o seguinte:*

1. *Os functores contravariantes* $V \circ G : \mathcal{A} \to \mathcal{C}onj$ *e* $U \circ F : \mathcal{B} \to \mathcal{C}onj$ *são functores representáveis por* $\tilde{a}$ *e* $\tilde{b}$ *respectivamente, isto é, existem isomorfismos naturais tais que:*

   $$V \circ G \cong Mor_{\mathcal{A}}(-, \tilde{a}) \qquad e \qquad U \circ F \cong Mor_{\mathcal{B}}(-, \tilde{b});$$

2. $\tilde{a}$ *e* $\tilde{b}$ *têm o mesmo conjunto subjacente, a menos de isomorfismo, isto é, existe uma função bijectiva tal que*

   $$U\tilde{a} \cong V\tilde{b}.$$

Prova:

1. Pela representabilidade de V (3) e por (2), para cada $a \in \mathcal{A}$, tem-se:

   $$VGa \overset{(3)}{\cong} Mor_{\mathcal{B}}(b_0, Ga) \overset{(2)}{\cong} Mor_{\mathcal{A}}(a, Fb_0) \overset{(4)}{=} Mor_{\mathcal{A}}(a, \tilde{a})$$

   logo, $V \circ G \cong Mor_{\mathcal{A}}(-, \tilde{a})$;

   similarmente, para cada $b \in \mathcal{B}$,

   $$UFb \cong Mor_{\mathcal{B}}(b, \tilde{b}),$$

   e por conseguinte $U \circ F \cong Mor_{\mathcal{B}}(-, \tilde{b})$. ■

2. Em particular, considerando na alínea anterior $a = a_0$ e $b = b_0$, obtém-se

   $$V\tilde{b} \overset{(4)}{=} VGa_0 \overset{(3)}{\cong} Mor_{\mathcal{B}}(b_0, Ga_0) \overset{(4)\text{ e al.1}}{\cong} UFb_0 \overset{(4)}{=} U\tilde{a}. \quad ■$$

Observações 67 *:*

1. *Se, na situação da proposição anterior, se tem:*

   $$VG = Mor_{\mathcal{A}}(-, \tilde{a}) \qquad e \qquad UF = Mor_{\mathcal{B}}(-, \tilde{b})$$

   diz-se que a ***adjunção*** *de* F *e* G *é* ***estritamente representada*** *por* $(\tilde{a}, \tilde{b})$.

2. *Para imagens sob* U *ou* V*, usar-se-á, até ao final desta exposição, a notação simplificada seguinte: para um dado* $\mathcal{A}$*-morfismo* f $(a \xrightarrow{f} a')$*, em vez de "*Uf*"* $(Ua \xrightarrow{Uf} Ua')$ *escrever-se-á "*f*" (similarmente, para* Vg *escrever-se-á* g*, com* g *um* $\mathcal{B}$*-morfismo).*

   O anterior pode ser sempre assumido, sem perda de generalidade, visto que os functores U *e* V *são injectivos em morfismos (podendo considerar-se portanto* $Mor_{\mathcal{A}}(a, a')$

como um subconjunto de $Mor_{Conj}(Ua, Ua')$; analogamente para V). Consequentemente: este facto permite que se use a mesma notação para um $\mathcal{A}$-morfismo f e seu $Conj$-morfismo subjacente Uf.

Dada a situação básica, onde a adjunção dual é estritamente representada por um par de objectos $(\tilde{a}, \tilde{b})$, pretende-se agora mostrar que a **unidade** e a **co-unidade da adjunção** são necessariamente dadas "por avaliação", a menos da bijecção $U\tilde{a} \cong V\tilde{b}$. De uma forma mais precisa: para cada $a \in Obj\mathcal{A}$ e cada $x \in Ua$, e para cada $b \in Obj\mathcal{B}$ e cada $y \in Vb$, existem funções "**avaliação**":

$$\begin{array}{llll} av_{a,x}: & Mor_{\mathcal{A}}(a,\tilde{a}) & \rightarrow & U\tilde{a} \\ & s & \mapsto & s(x) \end{array} \qquad \text{e, simetricamente,} \qquad \begin{array}{llll} av_{b,y}: & Mor_{\mathcal{B}}(b,\tilde{b}) & \rightarrow & V\tilde{b} \\ & t & \mapsto & t(y) \end{array}$$

Além disso, existem as funções

$$\begin{array}{llll} \tau: & U\tilde{a} & \rightarrow & V\tilde{b} \\ & \tilde{x} & \mapsto & (\eta_{\tilde{a}}(\tilde{x}))\,(id_{\tilde{a}}) \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{llll} \sigma: & V\tilde{b} & \rightarrow & U\tilde{a} \\ & \tilde{y} & \mapsto & (\epsilon_{\tilde{b}}(\tilde{y}))\,(id_{\tilde{b}}) \end{array}$$

Lema 68 : *Considerem-se a situação básica e $U\tilde{a} \cong V\tilde{b}$. Então:*

1. $\eta_a(x) = \tau \circ av_{a,x}$ *e* $\epsilon_b(y) = \sigma \circ av_{b,y}$;

2. τ *é o inverso de* σ.

Prova:

$$\begin{array}{lllll} & \mathcal{A} & id_{\mathcal{A}} & \xrightarrow{\eta} & F \circ G \\ & & & & \\ (diag.1) & a & a & \xrightarrow{\eta_a} & FGa \\ & s\downarrow & s\downarrow & & \downarrow FGs \\ & \tilde{a} & \tilde{a} & \xrightarrow[\eta_{\tilde{a}}]{} & FG\tilde{a} \end{array} \qquad \begin{array}{lllll} & \mathcal{B} & id_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{\epsilon} & G \circ F \\ & & & & \\ (diag.2) & b & b & \xrightarrow{\epsilon_b} & GFb \\ & t\downarrow & t\downarrow & & \downarrow GFt \\ & \tilde{b} & \tilde{b} & \xrightarrow[\epsilon_{\tilde{b}}]{} & GF\tilde{b} \end{array}$$

1. Seja $s \in Mor_{\mathcal{A}}(a, \tilde{a})$, então:

$$
\begin{aligned}
(\tau \circ av_{a,x})(s) &= \tau(s(x)) && \text{(por definição de } av_{a,x}\text{)}\\
&= [\eta_{\tilde{a}}(s(x))]\,(id_{\tilde{a}}) && \text{(por definição de } \tau\text{)}\\
&= [FGs(\eta_a(x))]\,(id_{\tilde{a}}) && \text{(pela naturalidade de } \eta \quad (diag.1))\\
&= \left[Mor_{\mathcal{B}}(Gs,\tilde{b})(\eta_a(x)\right]\,(id_{\tilde{a}}) &&\\
&= [\eta_a(x)Gs]\,(id_{\tilde{a}}) && \text{(por definição do functor contravariante)}\\
&= [\eta_a(x)Mor_A(s,\tilde{a})]\,(id_{\tilde{a}}) &&\\
&= \eta_a(x)\,[Mor_{\mathcal{A}}(s,\tilde{a})\,(id_{\tilde{a}})] &&\\
&= \eta_a(x)(id_{\tilde{a}}(s)) && \text{(por definição do functor contravariante)}\\
&= (\eta_a(x))(s) &&
\end{aligned}
$$

Simetricamente, segue a segunda identidade. ■

2. Da alínea anterior, tomando $a = F\tilde{b}$ e $x{=}id_{\tilde{b}}$, obtém-se o seguinte caso particular da primeira identidade:

$$(\tau \circ av_{F\tilde{b},id_{\tilde{b}}})(s) = (\eta_{F\tilde{b}}(id_{\tilde{b}}))(s) \qquad \text{para todo } s \in Mor_{\mathcal{A}}(F\tilde{b},\tilde{a}).$$

Então tem-se, para $s = (\epsilon_{\tilde{b}})(\tilde{y})$ (com $\tilde{y} \in V\tilde{b}$),

$$
\begin{aligned}
\tau\sigma(\tilde{y}) &= \tau\,(\sigma(\tilde{y})) &&\\
&= \tau([(\epsilon_{\tilde{b}}(\tilde{y}))\,(id_{\tilde{b}})] && \text{(por definição de } \sigma\text{)}\\
&= \tau(s(id_{\tilde{b}})) && \text{(por definição de } s\text{)}\\
&= \tau(av_{F\tilde{b},id_{\tilde{b}}}(s)) && \left(\text{por definição de } av_{F\tilde{b},id_{\tilde{b}}}\right)\\
&= (\eta_{F\tilde{b}}(id_{\tilde{b}}))(s) && \text{(por (1))}\\
&= (\eta_{F\tilde{b}}(id_{\tilde{b}}))((\epsilon_{\tilde{b}})(\tilde{y})) && \text{(por definição de } s\text{)}\\
&= [(\eta_{F\tilde{b}}(id_{\tilde{b}}))\,\epsilon_{\tilde{b}}]\,(\tilde{y}) &&\\
&= \left[Mor_{\mathcal{B}}(\epsilon_{\tilde{b}},\tilde{b})\,(\eta_{F\tilde{b}}(id_{\tilde{b}}))\right]\,(\tilde{y}) &&\\
&= [F\epsilon_{\tilde{b}}\,(\eta_{F\tilde{b}}\,(id_{\tilde{b}}))]\,(\tilde{y}) &&\\
&= [(F\epsilon_{\tilde{b}}\eta_{F\tilde{b}})\,(id_{\tilde{b}})]\,(\tilde{y}) &&\\
&= [id_{F\tilde{b}}\,(id_{\tilde{b}})]\,(\tilde{y}) && \text{(por (1) da situação básica)}\\
&= \tilde{y} &&
\end{aligned}
$$

Portanto $\tau\sigma = id_{V\tilde{b}}$, e simetricamente tem-se $\sigma\tau = id_{U\tilde{a}}$. ■

2- A construção de equivalências duais.

Nesta secção estudam-se de que forma e sob que condições se pode estabelecer uma adjunção dual entre duas categorias concretas $U : \mathcal{A} \to \mathcal{C}onj$ e $V : \mathcal{B} \to \mathcal{C}onj$ estritamente representadas por um dado par de objectos $(\tilde{a}, \tilde{b})$ de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente. Certamente, tem de se assumir que existe uma bijecção $\tau : U\tilde{a} \to V\tilde{b}$ (e, portanto, pode-se assumir que $V\tilde{b} = U\tilde{a}$ até ao final do capítulo). Mas esse facto dificilmente será suficiente para definir uma $\mathcal{A}$-estrutura conveniente no conjunto $Mor_{\mathcal{B}}(b, \tilde{b})$ em ordem a definir $Fb \in \mathcal{A}$ e uma $\mathcal{B}$-estrutura apropriada no conjunto $Mor_{\mathcal{A}}(a, \tilde{a})$ em ordem a definir $Ga \in \mathcal{B}$.

Apresentam-se agora mais algumas definições que serão usadas frequentemente nesta e na última secção do capítulo.

Definições 69 : *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ categorias concretas sobre $\mathcal{C}onj$, e J uma classe. ($U : \mathcal{A} \to \mathcal{C}onj, V : \mathcal{B} \to \mathcal{C}onj$ functores de esquecimento).*

1. *Uma família de $\mathcal{B}$-morfismos $(b \xrightarrow{fi} b_i)_{i \in J}$ (indexada por J) é chamada V-**inicial** se um $\mathcal{C}onj$-morfismo $Vb' \xrightarrow{f} Vb$ é um $\mathcal{B}$-morfismo sempre que cada composição $Vb' \xrightarrow{f_i \circ f} Vb_i$ é um $\mathcal{B}$-morfismo.*

2. *Sejam $b_i \in Obj\mathcal{B}$ para todo o $i \in J$, e $(\mathcal{C}onj \xrightarrow{f_i} Vb_i)_{i \in J}$ uma família de funções. Uma família $(b \xrightarrow{g_i} b_i)_{i \in J}$ diz-se um V-**levantamento inicial** de $(\mathcal{C}onj \xrightarrow{f_i} Vb_i)_{i \in J}$ se*

   (a) $\forall i \in J, \ Vb = \mathcal{C}onj$ e $Vg_i = f_i$;

   (b) $f_i \circ g : Vb' \to Vb_i$ é um $\mathcal{B}$-morfismo, com $Vb' \xrightarrow{g} \mathcal{C}onj$, implica que $g : b' \to b$ é um $\mathcal{B}$-morfismo.

3. *Um **objecto esquizofrénico** para $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ é um par $(\tilde{a}, \tilde{b})$, onde $\tilde{a} \in Obj\mathcal{A}$, $\tilde{b} \in Obj\mathcal{B}$, tal que as duas condições seguintes são satisfeitas:*

   $(Init.\mathcal{A})$ *Para cada $a \in \mathcal{A}$, a família $(av_{a,x} : Mor_{\mathcal{A}}(a, \tilde{a}) \to V\tilde{b})_{x \in Ua}$ admite um V-**levantamento inicial** $(av_{a,x} : Ga \to \tilde{b})_{x \in Ua}$;*

   $(Init.\mathcal{B})$ *Para cada $b \in \mathcal{B}$, a família $(av_{b,y} : Mor_{\mathcal{B}}(b, \tilde{b}) \to U\tilde{a})_{y \in Vb}$ admite um U-**levantamento inicial** $(av_{b,y} : Fb \to \tilde{a})_{y \in Vb}$.*

4. *Uma adjunção dual $(G, F; \eta, \epsilon)$ estritamente representada por um par $(\tilde{a}, \tilde{b})$ de objectos de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente, é chamada **adjunção dual natural** se as famílias*

$(\eta_a(x) : Ga \to \tilde{b})_{x\in Ua}$ e $(\epsilon_b(y) : Fb \to \tilde{a})_{y\in Vb}$ são iniciais com respeito a U e V, respectivamente, para cada $a \in \mathcal{A}$ e cada $b \in \mathcal{B}$.

Pode-se agora provar que objectos esquizofrénicos induzem adjunções duais naturais.

Teorema 70 *: Para cada objecto esquizofrénico $(\tilde{a}, \tilde{b})$, existe uma adjunção dual natural $(G, F; \eta, \epsilon)$ estritamente representada por $(\tilde{a}, \tilde{b})$.*

Prova: G e F já estão definidos sobre os objectos pelas condições $(Init.\mathcal{A})$ e $(Init.\mathcal{B})$, respectivamente. Dado algum $\mathcal{A}$-morfismo $f : a \to a'$, deve-se encontrar um $\mathcal{B}$-morfismo $Gf : Ga' \to Ga$ com

$$VGf = Mor_{\mathcal{A}}(f, \tilde{a}) : \begin{array}{ccc} Mor_{\mathcal{A}}(a', \tilde{a}) & \to & Mor_{\mathcal{A}}(a, \tilde{a}) \\ s & \mapsto & sf \end{array} .$$

Para mostrar que $Mor_{\mathcal{A}}(f, \tilde{a})$ é efectivamente a função subjacente de um $\mathcal{B}$-morfismo é suficiente mostrar, por $(Init.\mathcal{A})$, que todas as composições $av_{a,x} \circ Mor_{\mathcal{A}}(f, \tilde{a})$, $x \in Ua$, são funções subjacentes de $\mathcal{B}$-morfismos. Este facto segue de:

$$\begin{aligned} (av_{a,x} \circ Mor_{\mathcal{A}}(f, \tilde{a}))(s) &= av_{a,x}(sf) \\ &= (sf(x)) \\ &= (s(f(x))) \\ &= av_{a',f(x)}(s) \end{aligned}$$

Obviamente G é um functor. (F define-se simetricamente).

Resta provar que G e F são adjuntos. Para mostrar este facto, definem-se as unidades η_a e ϵ_b como se segue.

Em ordem a estabelecer a existência de $\epsilon_b : b \to GFb$, é apenas necessário definir a função $\epsilon_b : Vb \to VG(Fb) = Mor_{\mathcal{A}}(Fb, \tilde{a})$ e então mostrar que cada composição $av_{Fb,t} \circ \epsilon_b$, $t \in UFb = Mor_{\mathcal{B}}(b, \tilde{b})$, pode ser levantada ao longo de V. O lema (68) em conexão com $(Init.\mathcal{B})$ obrigam a definir

$$\epsilon_b : \begin{array}{ccc} Vb & \to & VG(Fb) \quad (= Mor_{\mathcal{A}}(Fb, \tilde{a})) \\ y & \mapsto & av_{b,y} \end{array} .$$

Simetricamente obtém-se:

$$\eta_a : \begin{array}{ccc} Ua & \to & UF(Ga) \quad (= Mor_{\mathcal{B}}(Ga, \tilde{b})) \\ x & \mapsto & av_{a,x} \end{array} .$$

Para além da existência de ϵ_b, vai-se provar a naturalidade de ϵ. De facto, para todo o $t \in UFb = Mor_{\mathcal{B}}(b, \tilde{b})$ (e $y \in Vb$),

$$\begin{aligned}
\left[(F\epsilon_b)\left((\eta_{Fb})(t)\right)\right](y) &= \left[Mor_{\mathcal{B}}(\epsilon_b, \tilde{b})\,(av_{Fb,t})\right](y) && \text{(por definição de } \eta_{Fb}) \\
&= (av_{Fb,t} \circ \epsilon_b)(y) \\
&= av_{Fb,t}(\epsilon_b(y)) \\
&= av_{Fb,t}(av_{b,y}) && \text{(por definição de } \epsilon_b) \\
&= (av_{b,y}(t)) && \text{(por definição de } av_{Fb,t}) \\
&= t(y) && \text{(por definição de } av_{b,y})
\end{aligned}$$

a primeira das igualdades de (1) da situação básica, $F\epsilon_b \circ \eta_{Fb} = id_{Fb}$, é válida, visto que U é fiel (a outra identidade segue simetricamente de $av_{Ga,s} \circ \eta_a = s$, para todo o $s \in Ga$).

Consequentemente, tem-se uma adjunção.

Para finalizar esta secção, pretende-se identificar as subcategorias fixas. Antes disso introduzem-se alguns conceitos necessários para a abordagem deste assunto.

Definições 71 : *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria. Então:*

1. *um $\mathcal{A}$-morfismo $a \xrightarrow{h} a'$ diz-se uma* ***imersão*** *quando $h : Va \to Va'$ é uma função injectiva com o levantamento inicial h;*

2. *uma família $(X \xrightarrow{f_i} Y_i)_{f_i \in Mor_{\mathcal{A}}(X,Y_i)}$ diz-se* ***juntamente injectiva*** *se sempre que $x \neq x'$, com $x, x' \in X$, então existe f_i tal que $f_i(x) \neq f_i(x')$.*

Note-se que o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
a & \xrightarrow{\eta_a} & FGa \\
 & f \searrow & \downarrow av_f \\
 & & \tilde{a}
\end{array}$$

é comutativo. Consequentemente, para uma adjunção dual natural induzida por $(\tilde{a}, \tilde{b})$ tem-se que, para cada $a \in Obj\mathcal{A}$, η_a é uma imersão se e só se a família $\left(a \xrightarrow{f} \tilde{a}\right)_{f \in Mor\mathcal{A}}$ é U-inicial e juntamente injectiva. Este facto sugere a definição seguinte.

Definição 72 : *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria concreta. Um objecto $\tilde{a} \in Obj\mathcal{A}$ diz-se **coseparador inicial** de $\mathcal{A}$ se, para cada $a \in Obj\mathcal{A}$, a família $\left(a \xrightarrow{f} \tilde{a}\right)_{f \in Mor\mathcal{A}}$ é U-inicial e juntamente injectiva.*

Uma forma de verificar que η_a é sobrejectiva é dada pelo seguinte critério.

Definição 73 :*Seja G um functor. G satisfaz a condição de **Stone-Weierstrass** quando*

(**S.W.**) *para cada imersão $b \xrightarrow{m} Ga$, onde $(m(y) : a \to \tilde{a})_{y \in b}$ é inicial e juntamente injectiva, m é isomorfismo.*

Assim, resumindo o que foi visto anteriormente nesta secção, tem-se:

Teorema 74 : *Seja $(\tilde{a}, \tilde{b})$ um objecto esquizofrénico. Se são satisfeitas as condições:*

1. *$\tilde{a}$ é um coseparador inicial em $\mathcal{A}$ e $\tilde{b}$ é um coseparador inicial em $\mathcal{B}$,*

2. *G e F satisfazem (S.W.),*

   então $\mathcal{A}^{op} \cong \mathcal{B}$.

3- Exemplos de dualidades. (ver [9])

Nesta última secção são apresentados dois exemplos de dualidades, nomeadamente, a dualidade de Gelfand-Naimark e a dualidade de Stone.

Na dualidade de Gelfand-Naimark, a categoria $\mathcal{C}ompHaus$ dos espaços compactos de Hausdorff (e das funções contínuas) é dualmente equivalente à categoria das C-álgebras comutativas (e homomorfismos algébricos). Uma equivalência pode ser obtida associando a cada espaço compacto de Hausdorff A à C^*-álgebra das funções complexas f contínuas $\left\{A \xrightarrow{f} \mathbb{C}\right\}$.

Na dualidade de Stone, $Bool$, a categoria das álgebras booleanas (e dos homomorfismos booleanos), é dualmente equivalente à categoria $Stone$ dos espaços compactos e separados totalmente desconexos (e das funções contínuas). Uma equivalência pode ser obtida associando cada espaço compacto e separado totalmente desconexo à álgebra booleana dos seus subconjuntos abertos e fechados.

Dualidade de Gelfand-Naimark.

Sejam $\mathcal{A} = \mathcal{C}ompHaus$, a categoria dos espaços compactos de Hausdorff (espaços compactos e separados) e das funções contínuas, e $U : \mathcal{C}ompHaus \to \mathcal{C}onj$ o functor de esquecimento usual. Sejam ainda $\mathcal{B} = C^*\text{-}Alg$, a categoria das C^*-álgebras comutativas, e o functor de esquecimento da bola unitária, definido da seguinte forma:

$$\begin{array}{rlcl} V: & C^*\text{-}Alg & \longrightarrow & \mathcal{C}onj \\ & B & \longmapsto & V(B) = \{x \in B : \ \ ||x|| \ \leq 1\} \\ & f : B \to B' & \longmapsto & V(f) : V(B) \to V(B') \end{array}$$

Sejam $\tilde{a}$ =ID:= $\{x \in \mathbb{C} : |x| \ \leq 1\}$, o disco unitário, e $\tilde{b} = \mathbb{C}$, a C^*-álgebra dos números complexos. Obviamente, tem-se $U\tilde{a} = V\tilde{b}$.

Para cada espaço compacto e separado A, o conjunto:

$$G(A) = \left\{A \xrightarrow{f} \mathbb{C}, \text{ funções contínuas}\right\}$$

munido das operações algébricas definidas componente a componente e da norma $||f||_0 = \underset{x \in UA}{sup} |f(x)|$, é uma C^*-álgebra, sendo a família $(av_{A,a} : GA \to \mathbb{C})_{a \in UA}$ um V-levantamento inicial de $(av_{A,a} : Mor_{\mathcal{A}}(A,\text{ID})\,[= VG(A)] \ \to \text{ID}[= V\mathbb{C}])_{a \in UA}$. Assim, verifica-se a condição $(Init.\mathcal{A})$.

Para cada $B \in ObjC^*\text{-}Alg$, pode-se definir a topologia inicial (T.I.) em FB,

$(av_{B,b} : FB \to \text{ID})_{b \in VB}$, com respeito à família de todas as funções de avaliação $(av_{B,b} : Mor_{\mathcal{B}}(B, \mathbb{C}) \to U\text{ID})_{b \in VB}$, e assim se verifica $(Init.\mathcal{B})$.

Portanto, pelo teorema (70), existe uma adjunção dual natural entre as categorias $\mathcal{C}ompHaus$ e $C^*\text{-}Alg$, induzida por ID e $\mathbb{C}$.

Falta verificar que $Fix(\eta)$ é equivalente a $\mathcal{C}ompHaus$ e que $Fix(\epsilon)$ é equivalente a $C^*\text{-}Alg$.

Do lemma de Urysohn (ver [10]) sabe-se que $\tilde{a}$ =ID é um coseparador de $\mathcal{A} = \mathcal{C}ompHaus$. O resultado correspondente sobre $\tilde{b} = \mathbb{C}$ é uma consequência do seguinte facto conhecido (ver [5]).

Proposição 75 *: Para cada $B \in ObjC^*\text{-}Alg$ e cada elemento $x \in B$,*

$$||x|| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in Mor(B, \mathbb{C})\}.$$

Daqui cada morfismo de $C^*\text{-}Alg$ tem norma inferior ou igual a 1 e $\tilde{b} = \mathbb{C}$ é um coseparador de $C^*\text{-}Alg$. Conclui-se que as unidades η e ϵ são monomorfismos componente a componente.

O teorema clássico de Stone-Weierstrass (ver $[6,7,8]$) implica que ϵ seja efectivamente um isomorfismo natural. De facto, para cada $B \in ObjC^*\text{-}Alg$, verificam-se as condições da hipótese deste teorema considerando $A = F(B)$ e $M = \epsilon_B(B)$. Portanto ϵ_B é sobrejectiva e daqui é um isomorfismo.

Teorema 76 *: (Stone-Weierstrass). Sejam A um espaço compacto e separado, e $M \subset GA$ uma C^*-subálgebra de GA tal que a família $(f : A \to ID)_{f \in VM}$ separa os pontos de A. Então $M = GA$.*

Para provar que η é um isomorfismo natural pode-se proceder de forma semelhante. Basta considerar na proposição (79) que se segue, para cada $A \in Obj\mathcal{C}ompHaus$, $B = GA$ e $M = \eta_A[A]$. O lema que se segue e antecede essa proposição (79), será usado na sua prova.

Lema 77 *: Seja $(G, F; \eta, \epsilon)$ a adjunção dual natural induzida por um objecto esquizofrénico $(\tilde{A}, \tilde{B})$. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

1. *$\eta_{\tilde{A}}$ é um isomorfismo;*
2. *Para cada $A \in Obj\mathcal{A}$, $h, f \in Mor\mathcal{A}$, com $h : \tilde{A} \to \tilde{A}$, $f : A \to \tilde{A}$, e cada $\varphi \in Mor_{\mathcal{B}}(GA, \tilde{B})$, tem-se: $\quad \varphi(h \circ f) = h(\varphi(f))$.*

Prova:

$(\mathbf{1}) \Rightarrow (\mathbf{2})$ Considere-se o $\mathcal{B}$-morfismo $G\tilde{A} \overset{G(f)}{\to} GA \overset{\varphi}{\to} \tilde{B}$.

Como por hipótese $\eta_{\tilde{A}}$ é um isomorfismo, então existe um elemento $a \in U\tilde{A}$ tal que

$$\varphi \circ G(f) = av_{\tilde{A},a}.$$

Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} a &= id_{\tilde{A}}(a) \\ &= av_{\tilde{A},a}(id_{\tilde{A}}) \\ &= (\varphi \circ G(f))\,(id_{\tilde{A}}) \\ &= \left(\varphi \circ Mor(f, \tilde{A})\right)(id_{\tilde{A}}) \\ &= \varphi(id_{\tilde{A}} f) \\ &= \varphi(f) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\varphi(h \circ f) = \varphi(Mor(f, \tilde{A}) \circ h) = (\varphi \circ G(f))(h) = av_{\tilde{A},a}(h) = h(a) = h(\varphi(f)). \qquad \blacksquare$$

$(\mathbf{2}) \Rightarrow (\mathbf{1})$ Considerem-se o $\mathcal{B}$-morfismo $G\tilde{A} \xrightarrow{\varphi} \tilde{B}$ e $a = \varphi(id_{\tilde{A}})$. Então, para cada $f \in Mor(\tilde{A}, \tilde{A})$, tem-se:

$$\varphi(f) = \varphi(f \circ id_{\tilde{A}}) = f(\varphi(id_{\tilde{A}})) = f(a).$$

Daqui $\varphi = av_{\tilde{A},a}$ e portanto $\eta_{\tilde{A}}$ é um isomorfismo. ■

Corolário 78 : *Seja $\eta_{\tilde{A}}$ um isomorfismo. Se $A, A' \in Obj\mathcal{A}$, $h, f \in Mor\mathcal{A}$ e $\psi \in Mor_{\mathcal{B}}(GA, GA')$, com $h : \tilde{A} \to \tilde{A}$, $f : A \to \tilde{A}$, então tem-se:* $\psi(h \circ f) = h(\psi(f))$.

Prova: Se se considerar no lema anterior $\varphi = \psi$ (com $\tilde{B} = GA'$), tem-se

$$\psi(h \circ f) = h(\psi(f)).$$ ■

Proposição 79 : *Seja $B \in ObjC^*\text{-}Alg$ e $M \subset FB$ um subespaço fechado de FB tal que $(f : B \to \mathbb{C})_{f \in UM}$ separa os pontos de B. Então $M = FB$.*

Prova: Como $(G, F; \eta, \epsilon)$ é uma adjunção dual e como, pelo teorema (Stone-Weierstrass), ϵ_B é um isomorfismo para cada $B \in ObjC^*\text{-}Alg$, então η_{FB} também é um isomorfismo (pela igualdade (1) da situação básica). Segue-se que η_{ID} (ID$= FB$ para algum $B \in Obj\mathcal{B}$) é um isomorfismo (e assim poder-se-á aplicar o lema anterior).

Seja $B \in ObjC^*\text{-}Alg$ e defina-se, em $Mor_{\mathcal{B}}(B, \mathbb{C})$, a topologia de Zariski (T.Z.) por:

$$\psi \in \overline{M} :\Leftrightarrow \forall x \in VB \quad ((\forall \varphi \in M \quad \varphi(x) = 0) \Longrightarrow \psi(x) = 0),$$

para todo o $\psi \in Mor_{\mathcal{B}}(B, \mathbb{C})$ e $M \subset Mor_{\mathcal{B}}(B, \mathbb{C})$.

Nesta topologia os subconjuntos que separam os pontos são precisamente os subconjuntos densos. Vai-se mostrar que esta topologia coincide precisamente com a topologia inicial. Pretende-se assim mostrar que se tem, para cada $\psi \in Mor_{\mathcal{B}}(B, \mathbb{C})$ e cada $M \subset Mor_{\mathcal{B}}(B, \mathbb{C})$,

$$\text{(T.Z.)} \quad \forall x \in VB \quad ((\forall \varphi \in M \quad \varphi(x) = 0) \Longrightarrow \psi(x) = 0)$$

se, e só se, se tem

$$\text{(T.I.)} \quad \forall x \in VB \quad \psi(x) \in \overline{\{\varphi(x) : \varphi \in M\}}.$$

Sejam $\psi \in Mor_{\mathcal{B}}(B, \mathbb{C})$ e $M \subset Mor_{\mathcal{B}}(B, \mathbb{C})$. Se $M = \varnothing$ então (T.Z.) e (T.I.) são falsas. Então, pode-se assumir que $M \neq \varnothing$ e ainda, sem perda de generalidade, que $B = GA$ para um espaço compacto de Hausdorff A.

Suponha-se que (T.I.) é válida e seja $x \in VB$ tal que, para todo o $\varphi \in M$, $\varphi(x) = 0$, então tem-se $\psi(x) \in \overline{\{0\}} = \{0\}$ ((T.Z.) também é válida).

Suponha-se agora que (T.I.) é falsa, então existe um elemento $x : A \to$ID de VB, tal que $\psi(x) \notin \overline{\{\varphi(x) : \varphi \in M\}}$. Visto que ID é totalmente regular, existe uma função contínua h :ID$\to$ID tal que:

$$h(\psi(x)) \neq 0 \qquad \text{e} \qquad h\left[\{\varphi(x) : \varphi \in M\}\right] = \{h\varphi(x) : \varphi \in M\} = \{0\}.$$

Como η_{ID} é isomorfismo, pelo lema anterior (e seu corolário, tomando $\tilde{A}$ =ID, $\tilde{B} = \mathbb{C}\,(= GA')$ e $B = GA$, vem $f = x$), tem-se:

$$\psi(h \circ x) \neq 0 \qquad \text{e} \qquad \varphi(h \circ x) = 0 \text{ (com } \varphi \in M\text{)}.$$

Daqui, (T.Z.) também é falsa. ■

Assim, pelo teorema (74), pode-se concluir que $\mathcal{C}ompHaus^{op} \cong C^{*}\text{-}Alg$.

Dualidade de Stone. (ver [10])

Sejam $\mathcal{A} = Stone$, a categoria dos espaços compactos e separados totalmente desconexos e das funções contínuas, e $\mathcal{B} = Bool$, a categoria das álgebras booleanas e dos homomorfismos booleanos.

Denota-se o espaço discreto de dois-elementos $(\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}))$ por $\tilde{a} \in Obj\mathcal{A}$ e $\tilde{b} \in Obj\mathcal{B}$ denota a cadeia **2**. Note-se que em ambas as categorias a classe de todas as imersões coincide com a classe de todos os monomorfismos. Pela definição, $\tilde{a}$ é um coseparador de $Stone$. O Teorema do Ideal Primo implica que $\tilde{b}$ é um coseparador de $Bool$. Assim, $(\tilde{a}, \tilde{b})$ induz uma adjunção dual natural entre as categorias $Stone$ e $Bool$.

Vai-se agora mostrar que o functor contravariante $G : Stone \to Bool$ satisfaz $(S.W.)$. Seja $A \in Obj\mathcal{A}$ e $M \subset GA$ uma subálgebra de $G(A)$ $(M \hookrightarrow G(A))$ tal que a família $(h : A \to \tilde{a})_{h \in M}$ separa os pontos de A. Seja $f : A \to \tilde{a}$ uma função contínua de GA. Tem que se mostrar que $f \in M$.

Pode-se assumir que $A_0 = f^{-1}[\{0\}]$ e $A_1 = f^{-1}[\{1\}]$ são não vazios, visto que GA contém as funções constantes.

Para cada $x \in A_0$ e cada $y \in A_1$, existe $h_{x,y} \in M$ tal que $h_{x,y}(x) = 0$ e $h_{x,y}(y) = 1$ (usa-se o facto de M separar os pontos de A e de com cada $h (\in M)$ também estar contido o seu complementar $\bar{h}\,(\in M)$).

Visto que A é compacto, para cada $y \in A_1$, existem elementos $x_1(y), ..., x_{n_y}(y) \in A_0$ tais que para cada $x' \in A_0$, existe um índice $i \in \{1, ..., n_y\}$ tal que $h_{x_i(y),y}(x') = 0$. Põe-se

$$h_y = \bigwedge_{i=1}^{n_y} h_{x_i(y),y} \qquad \in M.$$

Assim, para cada $y \in A_1$ tem-se $h_y(y) = 1$ e $h_y(x) = 0$ para cada $x \in A_0$. Visto que A é compacto, existem $y_1, ..., y_n \in A_1$ tais que para cada $y \in A_1$ existe um índice $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $h_{y_i}(y) = 1$. Toma-se

$$h = \bigvee_{i=1}^{n} h_{y_i} \qquad \in M.$$

Portanto, por definição de h, tem-se $h = f$, e daqui $f \in M$.

O functor contravariante $F : Bool \to Stone$ é pleno e fiel. Prova-se similarmente à proposição (79) que F satisfaz (**S**.**W**.). Portanto tem-se uma equivalência dual entre $Stone$ e $Bool$.

Anexo

Caracterização das C^*-álgebras dada no paper de 1943 por Gelfand e por Naimark.

Definições 80 : *Sejam A, B $\mathbb{C}$-álgebras.*

1. *A diz-se uma **álgebra de Banach** se é uma álgebra normada tal que, para todo $x, y \in A$ e todo o $\alpha \in \mathbb{C}$,*

   $(|| - || : A \to IR)$

   (a) $||x|| \geq 0$ *e* $(||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$;

   (b) $||\alpha.x|| = |\alpha|.||x||$;

   (c) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$;

   (d) $||x.y|| \leq ||x||.||y||$;

   (e) $||e|| = 1$.

2. *Uma função $(-)^* : A \to A$ diz-se uma **involução** numa álgebra de Banach A se são satisfeitas as seguintes condições:*

   $\forall x, y \in A, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

   (a) $(\alpha x + \beta y)^* = \bar{\alpha} x^* + \bar{\beta} y^*$;

   (b) $(x^*)^* = x$;

   (c) $(x.y)^* = y^*.x^*$;

   (d) $||x||^* = ||x||$.

3. *Uma C^***-álgebra** A é uma álgebra de Banach (sobre o corpo dos números complexos) com involução que satisfaz a condição:*

   $$||x.x^*|| = ||x||^2, \text{ para } x \in A.$$

4. *$f : A \to B$ diz-se um ***-homomorfismo de C^*-álgebras** quando é um homomorfismo de C-álgebras que preserva involuções.*

A noção de álgebra de Boole foi criada como o resultado das investigações de Georges Boole (1815-1864) sobre a estrutura algébrica (formalização do cálculo de proposições) das "leis do pensamento".

Definição 81 : *Uma **álgebra booleana** (ou álgebra de Boole) é uma estrutura* $(R, \leq, ', 0, 1)$ *tal que:*
$\forall x, y, z \in R,$

1. $x \leq x$
2. *se* $x \leq y$ *e* $y \leq x$, *então* $x = y$
3. *se* $x \leq y$ *e* $y \leq z$, *então* $x \leq z$
4. *existe* $sup(\{x, y\}) = x \vee y$
5. *existe* $inf(\{x, y\}) = x \wedge y$
6. *existe* $x' \in R$, *tal que* $x \vee x' = 1$ *e* $x \wedge x' = 0$
7. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
8. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

   Equivalentemente pode-se definir uma álgebra de Boole como sendo uma estrutura $(R, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ *tal que:*

9. $x \vee x = x$ *e* $x \wedge x = x$
10. $x \vee y = y \vee x$ *e* $x \wedge y = y \wedge x$
11. $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ *e* $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
12. $(x \vee y) \wedge x = x$ *e* $(x \wedge y) \vee x = x$
13. *existe* $x' \in R$, *tal que* $x \vee x' = 1$ *e* $x \wedge x' = 0$
14. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
15. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Bibliografia e Referências:

[1] Robert Goldblatt, Topoi - the categorial analysis of logic, North-Holland Publishing Company (1979).

[2] J. Adámek, H. Herrlich, & G. E. Strecker; Abstract and Concrete Categories. Originally publ. John Wiley & Sons. CATS (1990). (now free on-line edition:

http://www.math.uni-bremen.de/~dmb/acc.pdf)

[3] W. Lawvere & S. Schanuel. Conceptual Mathematics: A First Introduction to Categories. Cambridge University Press (1997).

[4] Serge Lang, Algebra (third edition), Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1927).

[5] I. M. Gelfand, D. A. RajKov & G. E. Shilov, Commutative normed rings, Uspekhi Mat. Nauk 1(2) (1946), 48-146.

[6] M. H. Stone, Applications of the theory of Boolean rings to general topology, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), 375-481.

[7] M. H. Stone, The generalized Weierstrass aproximation theorem, Math. Mag. 21 (1948), 167-184.

[8] K. Weirestrass, Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen reeler Argumente, Sitzungsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss., Berlin (1885).

[9] Dirk Hofmann, On a generalization of the Stone-Weierstrass Theorem. Applied Categorical Structures 10 (2002), 569-592.

[10] L. Gillman and M. Jerison, Rings of Continuous functions, Princeton, Springer-Verlag (1960).

[11] Serge Lang, Algebra (Third Edition), 1993 by Yale University, New Haven, Connecticut.