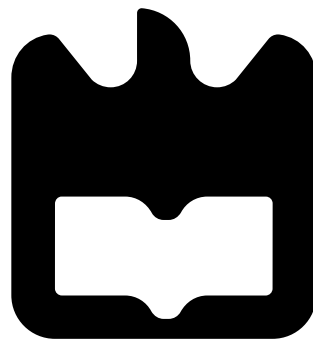




Adelson F.N.
Cambinda

Polinómios de Chebichev e Teoria Espetral





**Adelson F.N.
Cambinda**

Polinómios de Chebichev e Teoria Espetral

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações, realizada sob a orientação científica de Ana Foulquié, Professora Associada do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

Dedico este trabalho ao meu Pai, Ernesto Cambinda já em memória, a minha esposa Dina Isabel Cambinda e aos meus Filhos Mohat André Cambinda e Erineu Ernesto Cambinda.

o júri / the jury

presidente / president

Isabel Maria Simões Pereira

Professora Associada da Universidade de Aveiro (por delegação do Reitor da Universidade de Aveiro)

vogais / examiners committee

Ana Pilar Foulquié Moreno

Professora Associada da Universidade de Aveiro (orientadora)

Amílcar José Pinto Lopes Branquinho

Professor Associado da Universidade de Coimbra (arguente)

**agradecimentos /
acknowledgements**

Agradeço em primeira instância a Deus todo poderoso, o criador de todas as coisas possíveis e imagináveis, pela proteção diária e pelas bênçãos sucessivas que me tem dado. Agradeço profundamente a minha orientadora, Dra. Ana Pilar Foulquié Moreno, pela paciência que teve em cada sessão de consultas que tivemos, por estar sempre disponível e disposta a ajudar. Finalmente, agradeço aos meus colegas Ernesto Hombo, Domingos Graciano e o António Mendes pois motivaram-me de alguma forma a continuar e estavam presente em momentos menos bons da minha estadia em Portugal.

Palavras-chave

Polinómios ortogonais, polinómios de Chebichev, fração contínua, relação de recorrência, teorema espectral.

Resumo

Esta dissertação enquadra-se na teoria dos polinómios ortogonais e suas aplicações e tem como objetivo obter uma compreensão mais aprofundada destes polinómios. Começamos por fazer um estudo dos polinómios ortogonais suas definições, propriedades e teoremas nomeadamente a relação de recorrência a três termos, identidade de Christoffel-Darboux, zeros e a fórmula de quadratura de Gauss. Exploramos a conexão entre teoria dos polinómios ortogonais e as frações contínuas e com ajuda da teoria da Análise Complexa estudamos a função geradora para polinómios ortogonais clássicos. Fizemos um estudo dos polinómios de Chebychev do primeiro e segundo tipo e os do terceiro e quarto tipo, em seguida exploramos o teorema de Favard-Stone e o teorema de Markov com recurso a fórmula de inversão de Stieltjes para encontrar a medida para os polinómios de Chebichev do primeiro e segundo tipo e uma nova família de polinómios associado a matriz de Jacobi, constante e periódica de ordem dois na sua subdiagonal principal.

Keywords

Orthogonal polynomials, Chebichev polynomials, continued fraction, recurrence relation, spectral theorem.

Abstract

This dissertation fits into the theory of orthogonal polynomials and their applications and aims to obtain a more in-depth understanding of these polynomials. We begin by studying orthogonal polynomials, their definitions, properties and theorems, namely the three-term recurrence relation, Christoffel-Darboux identity, zeros and Gaussian quadrature formula. We explore the connection between the theory of orthogonal polynomials and continued fractions and with the help of the theory of Complex Analysis we study the generating function for classical orthogonal polynomials. We made a study of Chebichev polynomials of the first and second type and those of the third and fourth type, then we explored the Favard-Stone theorem and Markov's theorem using the Stieltjes inversion formula to find the measure for the polynomials of Chebichev of the first and second type and a new family of polynomials associated with the Jacobi matrix, constant and periodic of order two in its main subdiagonal.

Conteúdo

Conteúdo	i
Lista de Figuras	iii
1 Introdução	1
1.1 Objetivo geral e metodologia utilizada	2
1.1.1 Objetivo Geral	2
1.1.2 Metodologia	3
1.2 O integral de Riemann-Stieltjes	3
2 Teoria Geral dos Polinômios Ortogonais	7
2.1 Relação de Recorrência a Três Termos	9
2.1.1 Fórmula determinantal dos polinômios ortogonais	12
2.2 Identidade de Christoffel-Darboux	13
2.2.1 Zeros	14
2.2.2 Fórmula de quadratura de Gauss	17
3 Conexão Entre Polinômios Ortogonais e Frações Contínuas	19
3.1 Algoritmo de Euclides	19
3.1.1 Conexão entre frações contínuas e polinômios ortogonais	21
4 Função Geradora dos polinômios Ortogonais Clássicos	23
4.1 Fórmula de Lagrange	23
4.1.1 Fórmula dos resíduos	23
4.2 Funções Geradoras dos Polinômios Ortogonais Clássicos	25
4.2.1 Função Geradora para os Polinômios de Hermite	25
4.2.2 Função Geradora para os Polinômios de Legendre	26
4.2.3 Função Geradora para os Polinômios de Laguerre	27
4.2.4 Função Geradora para os Polinômios de Jacobi	27
5 Estudo das Diferentes Famílias de Polinômios de Chebichev	29
5.1 Polinômios de Chebichev do Primeiro Tipo	29
5.1.1 Relação de Recorrência	30
5.1.2 Zeros e Extremos	32
5.2 Polinômio de Chebichev do Segundo Tipo	34
5.2.1 Relação de recorrência	35
5.2.2 Zeros	37

5.3	Polinómios de Chebichev do Terceiro e Quarto Tipo	40
5.3.1	Relação de recorrência dos polinómios de Chebichev do terceiro tipo . .	43
5.3.2	Relação de recorrência dos polinómios de Chebichev do quarto tipo . .	44
5.3.3	Zeros	44
6	Teoria Espetral	51
6.1	Matriz truncada de Jacobi. Ortogonalidade discreta	52
6.1.1	Matriz truncada de Jacobi. Vetores próprios à esquerda e vetores próprios à direita	52
6.1.2	Relações de ortogonalidade discretas	54
6.1.3	Teorema de Favard-Stone	55
6.1.4	Momentos e matriz de Jacobi	56
6.1.5	Resolvente do operador de Jacobi e das suas matrizes truncadas . . .	58
6.1.6	Teorema de Markov	60
6.2	Aplicação do Teorema de Markov para a determinação da medida de probabi- lidade	61
6.2.1	Aplicação aos polinómios de Chebichev do primeiro e segundo tipo . .	61
6.2.2	Aplicação a uma matriz de Jacobi, periódica e constante de período 2	67
	Considerações Finais	72
	A Algumas identidades Trigonométricas	73
	B Resultados algébricos auxiliares	75
	B.1 Teorema do Valor Médio	77
	C Alguns resultados da Análise complexa	78
	C.1 Domínios Exteriores	84
	Bibliografia	85

Lista de Figuras

5.1	Gráfico representativo dos primeiros cinco polinómios de Chebichev.	30
5.2	Gráfico representativo dos primeiros 5 polinómios de Chebichev do segundo tipo.	35
5.3	Gráfico representativo dos primeiros polinómios de Chebichev do terceiro tipo.	42
5.4	Gráfico representativo dos primeiros polinómios de Chebichev do quarto tipo.	43
6.1	Curva γ , fechada	69
6.2	Gráfico dos cinco primeiros polinómios com a e b reais distintos	71
C.1	Fórmula de Green	80
C.2	Curva c fechada e orientada positivamente. Fonte: O autor.	83

Capítulo 1

Introdução

O trabalho que apresentamos enquadra-se na teoria de polinómios ortogonais e suas aplicações. A teoria de polinómios ortogonais tem grande importância em muitos problemas da Matemática Pura e Aplicada. Os mesmos chegam a ser instrumentos cruciais para dar respostas a muitos problemas. Alguns dos contextos mais importantes e aplicações da teoria de polinómios ortogonais incluem:

(1) **Análise de Fourier:**

Os polinómios ortogonais são frequentemente usados na expansão de funções em séries de Fourier, permitindo representar funções complexas como combinações lineares de funções mais simples. Isso é fundamental na análise de sinais e processamento de sinais.

(2) **Solução de Equações Diferenciais:**

A teoria de polinómios ortogonais é valiosa na resolução de equações diferenciais, especialmente na abordagem de Sturm-Liouville. Polinómios como os polinómios de Hermite, Laguerre e Chebichev surgem naturalmente em problemas diferenciais.

A título de exemplo, os polinómios de Hermite são soluções da equação diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2ny = 0,$$

que são representados na forma canónica como

$$\frac{1}{e^{-x^2}} \cdot \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} \cdot \frac{dy}{dx} \right) + 2ny = 0.$$

Os polinómios de Hermite são um exemplo de polinómios ortogonais cujo principal campo de aplicação encontra-se na mecânica quântica, especialmente no estudo do oscilador harmónico unidimensional. São denominados assim em homenagem a Charles Hermite.

(3) **Aproximação de Funções:**

Os polinómios ortogonais são usados em técnicas de aproximação de funções, como a expansão de funções em séries de polinómios ortogonais. A propriedade de ortogonalidade facilita a determinação eficiente dos coeficientes dessas séries, tornando-as úteis em métodos de aproximação numérica.

(4) **Integração Numérica:**

A ortogonalidade dos polinômios é explorada em métodos de integração numérica, como a quadratura gaussiana. Essa técnica utiliza zeros dos polinômios ortogonais para melhorar a precisão da integração numérica em comparação com métodos tradicionais.

(5) **Processos Estocásticos:**

Os polinômios ortogonais são aplicados na teoria de probabilidade e processos estocásticos. Aparecem ligados a processos aleatórios de Markov, onde a matriz de transição de probabilidade é a chamada matriz de Jacobi que representa a relação de recorrência que a sucessão de polinômios ortogonais verificam. Podemos ainda referir que os polinômios de Hermite estão associados aos processos estocásticos gaussianos.

(6) **Ótica e Teoria Eletromagnética:**

A teoria de polinômios ortogonais é utilizada na análise de campos eletromagnéticos em ótica, especialmente em sistemas com simetria cilíndrica ou esférica.

(7) **Teoria Espectral de Operadores:**

A teoria de polinômios ortogonais é fundamental na análise espectral de operadores lineares, especialmente em contextos de álgebra linear funcional e teoria espectral.

(8) **Resolução de Problemas Matriciais:**

Os polinômios ortogonais também são empregados em métodos numéricos para a resolução de problemas matriciais, incluindo decomposição espectral.

(9) **Matrizes Aleatórias:** A teoria de assintóticas de polinômios ortogonais pode ser usada na análise assintótica de estatísticas de matrizes aleatórias, o que nos leva a obter resultados de universalidade para os *ensembles* unitários.

Essas são apenas algumas das muitas áreas em que a teoria de polinômios ortogonais é aplicada. Sua importância reside na capacidade de fornecer soluções eficientes e poderosas para uma variedade de problemas matemáticos e científicos.

1.1 Objetivo geral e metodologia utilizada

É de grande relevância para qualquer trabalho estabelecer um objetivo e procurar caminhos para os alcançar, assim, o nosso trabalho não fica de fora desta ordem.

1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo geral consiste em obter uma compreensão aprofundada dos polinômios ortogonais e suas aplicações em diversas áreas, fornecendo assim uma base sólida para pesquisas mais avançadas e aplicações práticas. Especificamente,

- (1) Analisar as propriedades matemáticas dos polinômios ortogonais, como as relações de ortogonalidade, a existência de zeros reais e a relação de recorrência a três termos, identidade de *Christoffel-Darboux*, quadratura de *Gauss* e tantas outras, cf. capítulo 2;
- (2) Estudar a conexão entre os polinômios ortogonais e frações contínuas, cf. o capítulo 3;

- (3) Obter as funções geradoras dos polinômios ortogonais clássicos a partir da fórmula de *Lagrange* nomeadamente, os polinômios de *Hermite*, *Legendre*, *Laguerre* e *Jacobi*, cf. capítulo 4;
- (4) Estudar os diferentes tipos de polinômios de *Chebichev* e suas propriedades como, ortogonalidade, relação de recorrência e zeros, cf. capítulo 5;
- (5) Estabelecer a ligação da teoria dos polinômios ortogonais com a teoria de operadores através do Teorema de Favard-Stone. Obter o teorema de *Markov*, e assim desenvolver um método para determinar a medida de ortogonalidade. Ilustrar este método com os polinômios de *Chebichev* do primeiro e do segundo tipo (cf. Capítulo 6) e uma nova família associada a uma matriz de Jacobi, constante e periódica de ordem 2 na sua subdiagonal principal.

1.1.2 Metodologia

Para alcance destes objetivos foi feita uma revisão bibliográfica que nos proporcionaram bases sólidas para a construção de argumentos, a identificação de lacunas no conhecimento e a fundamentação teórica da pesquisa.

Para dar início a teoria de polinômios ortogonais é de tamanha importância fazermos uma abordagem em termos de definições envolvendo integral de *Riemann-Stieltjes*, como um dos pré-requisitos que poderá situar o nosso trabalho. Ao longo desse estudo consultamos [11] por formas a obter melhor esclarecimento sobre o assunto..

1.2 O integral de Riemann-Stieltjes

Definição 1.2.1. *Seja $[a, b]$ um intervalo dado. Consideremos uma partição P de $[a, b]$ e um conjunto finito de pontos x_0, x_1, \dots, x_n onde*

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b.$$

podemos escrever

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Supondo, agora, que f é uma função real limitada e definida em $[a, b]$. Assim, em correspondência a cada partição P de $[a, b]$, fazemos,

$$\begin{aligned} M_i &= \sup f(x) & x_{i-1} &\leq x \leq x_i \\ m_i &= \inf f(x) & x_{i-1} &\leq x \leq x_i \\ U(P, f) &= \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \\ L(P, f) &= \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\int_a^b f \, dx = \inf U(P, f) \tag{1.1}$$

$$\int_a^b f \, dx = \sup L(P, f) \quad (1.2)$$

sendo que, são considerados o supremo e o ínfimo sobre todas as partições P de $[a, b]$. Os integrais (1.1) e (1.2) são chamados integrais superiores e inferiores de *Riemann* de f sobre $[a, b]$, respectivamente.

Se os integrais superiores e inferiores são iguais, então dizemos que f é integrável segundo *Riemann* e representamos o valor comum por

$$\int_a^b f(x) \, dx.$$

Este é o integral de *Riemann* de f sobre $[a, b]$. Como f é limitada existem dois números m e M , tais que

$$m \leq f(x) \leq M, \quad a \leq x \leq b.$$

Assim, para todo P ,

$$m(b-a) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq M(b-a),$$

de modo que os números $L(P, f)$ e $U(P, f)$ formam um conjunto limitado. Isto demonstra que os integrais superiores e inferiores estão definidos para toda função limitada f .

Consideremos imediatamente um caso mais geral,

Definição 1.2.2. *Seja ψ uma função monótona crescente em $[a, b]$. Para cada partição $\{t_j\}_j^n$ de $[a, b]$ escreve-se $\Delta\psi_i = \Delta\psi(x_i) - \Delta\psi(x_{i-1})$, com $i = 1, \dots, n$.*

Definição 1.2.3. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada qualquer e P uma partição de $[a, b]$ qualquer. Define-se:*

- $m_i = \inf \{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$, como o ínfimo do conjunto imagem da função f restrita ao intervalo $[t_{i-1}, t_i]$.
- $M_i = \sup \{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$, como o supremo do conjunto imagem da função f restrita ao intervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

Assim, a soma inferior de f para P com relação a ψ é definida por $L(P, f, \psi) = \sum_{i=0}^n m_i \Delta\psi_i$

e a soma superior de f para P com relação a ψ é definida por $U(P, f, \psi) = \sum_{i=0}^n M_i \Delta\psi_i$.

Deve-se enfatizar que $\Delta\psi_i \geq 0$ sendo que a função ψ é monótona crescente e que m_i e M_i apenas existem por causa da hipótese de que a função f é limitada em \mathbb{R} , ou seja, o conjunto imagem $f([a, b]) \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado em \mathbb{R} .

Definição 1.2.4. *O integral inferior da função real limitada f em $[a, b]$ com relação a ψ é dada por:*

$$\int_a^b f \, d\psi = \sup \{L(P, f, \psi)\}, \quad (1.3)$$

onde P é qualquer partição de $[a, b]$ e o integral superior da função real limitada f em $[a, b]$ com relação a ψ é dada por

$$\int_a^b f \, d\psi = \inf \{U(P, f, \psi)\}. \quad (1.4)$$

No caso em que os integrais inferiores e superiores forem iguais, dizemos que a função f é Riemann-Stieltjes integrável com relação a ψ . Definição que observaremos a seguir.

Definição 1.2.5. *Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente. Diz-se que f é Riemann-Stieltjes integrável se os integrais inferior e superior forem iguais, o valor comum dos integrais é*

$$\int_a^b f \, d\psi$$

que se denomina integral de Riemann-Stieltjes de f com respeito a ψ em $[a, b]$.

Podemos considerar a existência do integral de Riemann-Stieltjes, quando:

(1) A função f é contínua em $[a, b]$. Neste caso, se $f(x) \geq 0$, então,

$$\int_a^b f(x) \, d\psi(x) \geq 0.$$

Ainda poderemos afirmar, caso a função ψ tenha um número infinito de pontos de crescimento, que o integral $\int_a^b f(x) \, d\psi(x) > 0$, é estritamente positivo, se $f(x) > 0$ pelo menos num x no intervalo $[a, b]$.

(2) A função f é monótona em $[a, b]$ e ψ é contínua e estritamente crescente em $[a, b]$.

Para $\psi(x) = x$ ou $\psi(x) = x + k$ para algum k constante, o integral de Riemann-Stieltjes coincide com o integral de Riemann:

$$\int_a^b f(x) \, d\psi(x) = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Se ψ é crescente, contínua e derivável em $[a, b]$ e $w(x) = \psi'(x)$, então, pelo teorema do valor médio (cf. Apêndice B.1),

$$\psi(x_k) - \psi(x_{k-1}) = w(x_k^*)(x_k - x_{k-1}),$$

onde, $x_k^* \in (x_{k-1}, x_k)$. A função w é denominada de função peso do integral e, pela definição de integral de Riemann, temos,

$$\int_a^b f(x) \, d\psi(x) = \int_a^b f(x)w(x) \, dx. \quad (1.5)$$

Um caso de extrema relevância para este trabalho é aquele em que ψ é uma função escada com saltos nos pontos $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ dada por:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } a \leq x < \xi_1 \\ \pi_1 & \text{se } \xi_1 \leq x < \xi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 & \text{se } \xi_2 \leq x < \xi_3 \\ \vdots & \\ \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n & \text{se } \xi_n \leq x < b \end{cases}$$

onde $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ são números positivos arbitrários. Assim,

$$\int_a^b f(x) d\psi(x) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \pi_k,$$

e denotaremos

$$d\psi(x) = \sum_{k=1}^n \pi_k d\delta_{\xi_k}(x),$$

onde, em geral,

$$d\delta_\xi = \begin{cases} 0 & \text{se } -\infty < x < \xi, \\ 1 & \text{se } \xi \leq x. \end{cases}$$

Definição 1.2.6. *Ao longo deste trabalho, iremos considerar ψ função crescente, com um número infinito de pontos de crescimento, e neste caso, definiremos o produto escalar definido em $L^2_\psi[a, b]$ por:*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) d\psi(x).$$

Iremos ainda supor que

$$\mu_n = \int_a^b x^n d\psi(x),$$

existem, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

É importante realçar que no decorrer do documento vamos assumir que o momento zero da função $d\psi(x)$ é unitário, isto é,

$$\mu_0 = \int_a^b x^0 d\psi(x) = 1. \tag{1.6}$$

Falaremos então de $d\psi(x)$ como medida de probabilidade.

Capítulo 2

Teoria Geral dos Polinómios Ortogonais

Neste capítulo apresentamos a teoria geral dos polinómios ortogonais, definições e propriedades fundamentais. Por forma a fundamentar este capítulo foram consultados os seguintes textos, [3], [5] e [13].

Definição 2.0.1. *Uma sequência $\{P_0(x), P_1(x), \dots, P_l(x)\}$ com l finito ou infinito, é chamada de Sequência de Polinómios Ortogonais com respeito a $d\psi(x)$, dada por (1.2.6) no intervalo (a, b) se:*

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_a^b P_n(x)P_m(x) d\psi(x) = K_n \delta_{nm}, \quad n, m = 1, 2, \dots, l,$$

onde $K_n > 0$ e δ_{nm} denota a delta de Kronecker.

Se cada P_n for um polinómio mónico, ou seja, polinómios cujo coeficiente do termo de maior grau (também chamado de coeficiente líder) é 1, a sequência $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ é designada por *sequência de polinómios ortogonais* (abreviadamente, SPO) *mónicos*.

Teorema 2.0.1. *Sejam $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinómios e $d\psi(x)$ uma medida de probabilidade em (a, b) . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de polinómios ortogonais relativamente a $d\psi(x)$;

(b) Para q_m um polinómio de grau m e $m \leq n$ verifica-se que,

$$\langle P_n, q_m \rangle = K'_n \delta_{nm} \quad \text{onde} \quad K'_n \neq 0.$$

(c) $\langle P_n, x^m \rangle = K''_n \delta_{nm}$, com $K''_n \neq 0$ e $m \leq n$.

Demonstração. (a) \Rightarrow (b). Seja $q_m(x)$ um polinómio de grau menor ou igual a n . Consideremos $\{P_n(x)\}_{n=0}^m$ como sendo uma base de \mathbb{P}_m , pois $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de polinómios ortogonais.

Assim, como $q_m(x) \in \mathbb{P}_m$, podemos dizer que existem β_k , com $k = 0, 1, \dots, m$ tais que,

$$q_m(x) = \sum_{k=0}^m \beta_k P_k(x) \quad \text{onde} \quad \beta_m \neq 0.$$

Portanto, temos que,

$$\langle q_m, P_n \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^m \beta_k P_k(x), P_n \right\rangle = \sum_{k=0}^m \beta_k \langle P_k(x), P_n \rangle = \beta_m \delta_{nm},$$

provando, assim, que (a) \Rightarrow (b).

(b) \Rightarrow (c). É verificado, tomando $q_m(x) = x^m$.

(c) \Rightarrow (a). Consideremos $P_m(x) = \sum_{k=0}^m \beta_{m,k} x^k$ com $n \geq m$. Então,

$$\langle P_m, P_n \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^m \beta_{m,k} x^k, P_n \right\rangle = \sum_{k=0}^m \beta_{m,k} \langle x^k, P_n \rangle = \delta_{m,m} \beta_{nn} \langle x^n, P_n \rangle = K_n \delta_{n,m},$$

onde $K_n = \beta_{nn} K_n'' \neq 0$. □

Definição 2.0.2 (Determinante de Hankel). *Dada uma seqüência de momentos μ_n , define-se por determinantes de Hankel de ordem $n + 1$, os determinantes Δ_n , com $n \geq 0$ definidos da seguinte forma*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}.$$

Teorema 2.0.2. *Seja $d\psi(x)$ uma medida de probabilidade, com seqüência de momentos $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$. Consideremos Δ_n os determinantes de Hankel. Podemos afirmar:*

- $\Delta_n > 0$, $n = 0, 1, \dots$
- *Existe uma única seqüência de polinômios ortogonais associados a $d\psi(x)$.*

Demonstração. Os determinantes de Hankel são estritamente positivos, é consequência de

$$\int_a^b (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)^2 d\psi(x) > 0.$$

De facto, este integral pode ser calculado como a forma quadrática

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

peço que podemos afirmar que esta forma quadrática é definida positiva, o que implica que $\Delta_n > 0$.

Consideremos a existência de SPO $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ em relação a $d\psi(x)$, com a seqüência de momentos $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$, para $m \geq n$ e considerando $P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_{n,i} x^i$ temos que,

$$\langle x^m, P_n \rangle = \left\langle x^m, \sum_{i=0}^n a_{n,i} x^i \right\rangle = \sum_{i=0}^n a_{n,i} \langle x^m, x^i \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^n a_{n,i} \int_a^b x^m x^i d\psi(x) \\
&= \sum_{i=0}^n a_{n,i} \int_a^b x^{m+i} d\psi(x) \\
&= \sum_{i=0}^n a_{n,i} \mu_{m+i}.
\end{aligned}$$

Deste modo pelo Teorema 2.0.1 teremos,

$$\sum_{i=0}^n a_{n,i} \mu_{m+i} = \langle x^m, P_n \rangle = K_n \delta_{nm}, \quad \text{sendo que} \quad K_n \neq 0.$$

Logo, fazendo $m = 0, 1, \dots, n$, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n,0} \\ a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ K_n \end{bmatrix}.$$

Uma vez que $\Delta_n > 0$ implica que podemos a existência e unicidade da solução deste sistema. Mais ainda, podemos obter para o coeficiente de maior ordem do polinómio

$$a_{n,n} = k_n \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}, \quad (2.1)$$

com $n = 0, 1, \dots$, pelo que podemos concluir que o polinómio P_n é de grau n . \square

2.1 Relação de Recorrência a Três Termos

Teorema 2.1.1 (Relação de Recorrência a Três Termos). *Seja $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinómios ortogonais num intervalo (a, b) em relação a $d\psi(x)$. Denotaremos*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} x^k.$$

Então,

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad \text{para} \quad n \geq 0, \quad (2.2)$$

com condições iniciais $P_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = 1$, γ_{n+1} , ψ_{n+1} , $\beta_{n+1} \in \mathbb{N}$ e ainda,

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0, \quad \beta_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1} \langle P_n, P_n \rangle}{\gamma_n \langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} \neq 0.$$

Demonstração. Como $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)\}$ pertencem a uma sequência de polinómios ortogonais, então $P_j(x)$, $j = 0, 1, \dots, n$ formam uma base para o espaço dos polinómios de grau menor ou igual a n . Seja $xP_n(x) = \sum_{i=0}^n a_{ni}x^i$. Sendo assim, como $xP_n(x)$ é um polinómio de grau $n+1$, podemos escrever,

$$xP_n(x) = \sum_{i=0}^n b_i P_i(x).$$

Igualando os coeficientes dos termos de maior grau em ambos os membros da igualdade acima, teremos,

$$a_{n,n} = b_{n+1}a_{n+1,n+1} \iff b_{n+1} = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}}. \quad (2.3)$$

Assim, das relações de ortogonalidade,

$$\langle xP_n, P_j \rangle = \int_a^b P_n(x)xP_j(x) d\psi(x) = 0 \quad \text{para} \quad j \leq n-2,$$

o que nos fornece,

$$\langle xP_n, P_j \rangle = \sum_{i=0}^{n+1} b_i \langle P_i, P_j \rangle = b_j \quad \text{para} \quad j \leq n-2.$$

Portanto, $b_j = 0$ se $j \leq n-2$, e

$$xP_n(x) = b_{n+1}P_{n+1}(x) + b_nP_n(x) + b_{n-1}P_{n-1}(x).$$

Dividindo agora, ambos os membros da expressão acima por b_{n+1} vem,

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{b_{n+1}}xP_n(x) - \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}P_{n-1}(x) - \frac{b_n}{b_{n+1}}P_n(x),$$

ou seja,

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x),$$

sendo que, $\gamma_{n+1} = \frac{1}{b_{n+1}}$, $\beta_{n+1} = \frac{b_n}{b_{n+1}}$ e $\alpha_{n+1} = \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}$.

Para calcular os valores de γ_{n+1} , β_{n+1} e α_{n+1} basta usar as relações de ortogonalidade e a relação (2.2). De (2.3) obtém-se imediatamente que,

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}}.$$

Multipliquemos a relação de recorrência (2.2) por $P_n(x)$ em ambos os membros e em seguida usamos a definição de ortogonalidade e teremos,

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x)P_n(x) &= (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x)P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x)P_n(x) \\ P_{n+1}(x)P_n(x) &= \gamma_{n+1}xP_n(x)P_n(x) - \beta_{n+1}P_n(x)P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x)P_n(x) \\ \underbrace{\langle P_{n+1}, P_n \rangle}_{=0} &= \gamma_{n+1}\langle xP_n, P_n \rangle - \beta_{n+1}\langle P_n, P_n \rangle - \alpha_{n+1}\underbrace{\langle P_{n-1}, P_n \rangle}_{=0} \end{aligned}$$

onde surge que

$$\beta_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}.$$

De forma análoga, multipliquemos a relação de recorrência (2.2) por $P_{n-1}(x)$ em ambos os membros e em seguida usamos a definição de ortogonalidade, e teremos,

$$P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x)P_{n-1}(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x)P_{n-1}(x)$$

$$P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) = \gamma_{n+1}xP_n(x)P_{n-1}(x) - \beta_{n+1}P_n(x)P_{n-1}(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x)P_{n-1}(x)$$

$$\underbrace{\langle P_{n+1}, P_{n-1} \rangle}_{=0} = \gamma_{n+1}\langle xP_n, P_{n-1} \rangle - \beta_{n+1}\underbrace{\langle P_n, P_{n-1} \rangle}_{=0} - \alpha_{n+1}\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle$$

de onde surge que,

$$\alpha_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_{n-1} \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}.$$

Ademais, o resultado acima ainda pode ser melhorado. Observemos que,

$$P_n(x) = (\gamma_n x - \beta_n)P_{n-1}(x) - \alpha_n P_{n-2}(x)$$

$$xP_{n-1}(x) = \frac{1}{\gamma_n}P_n(x) + \frac{\beta_n}{\gamma_n}P_{n-1}(x) + \frac{\alpha_n}{\gamma_n}P_{n-2}(x).$$

Multiplicando esta última expressão por $P_n(x)$ em ambos os membros e em seguida integrando, surge

$$\langle xP_{n-1}, P_n \rangle = \langle xP_n, P_{n-1} \rangle = \frac{1}{\gamma_n}\langle P_n, P_n \rangle + \frac{\beta_n}{\gamma_n}\underbrace{\langle P_{n-1}, P_n \rangle}_{=0} + \frac{\alpha_n}{\gamma_n}\underbrace{\langle P_{n-2}, P_n \rangle}_{=0}$$

$$\langle xP_n, P_{n-1} \rangle = \frac{1}{\gamma_n}\langle P_n, P_n \rangle$$

de onde se obtém, $\alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}\langle P_n, P_n \rangle}{\gamma_n\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}$. □

Podemos usar esta relação de recorrência obtida para deduzir a relação de recorrência para a sequência de polinômios ortogonais mônicos e os polinômios mônicos e os ortonormais. $\{\hat{P}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ em relação a $d\psi(x)$.

Para deduzir a recorrência para os polinômios mônicos, começamos por dividir cada $P_n(x)$ pelo correspondente coeficiente do termo de maior grau, isto é,

$$\hat{P}_n(x) = \frac{P_n(x)}{a_{n,n}}, \quad n \geq 1. \quad (2.4)$$

A seguir, dividimos a relação de recorrência (2.2) por $a_{n+1,n+1}$, o que nos oferece,

$$\frac{P_{n+1}(x)}{a_{n+1,n+1}} = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})\frac{P_n(x)}{a_{n+1,n+1}} - \alpha_{n+1}\frac{P_{n-1}(x)}{a_{n+1,n+1}}, \quad n \geq 0.$$

Usando a equação (2.4) teremos,

$$\hat{P}_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})\frac{a_{n,n}\hat{P}_n(x)}{a_{n+1,n+1}} - \alpha_{n+1}\frac{a_{n-1,n-1}\hat{P}_{n-1}(x)}{a_{n+1,n+1}}, \quad n \geq 0,$$

e, como $\frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}} = \frac{1}{\gamma_{n+1}}$ então,

$$\hat{P}_{n+1}(x) = \left(x - \frac{\beta_{n+1}}{\gamma_{n+1}}\right)\hat{P}_n(x) - \frac{\alpha_{n+1}}{\gamma_n\gamma_{n+1}}\hat{P}_{n-1}(x), \quad n \geq 0.$$

De forma geral, pelas identidades obtidas em geral para qualquer sucessão ortogonal de polinômios mônicos, teremos:

$$\hat{P}_{n+1}(x) = (x - \hat{\beta}_{n+1}) \hat{P}_n(x) - \hat{\alpha}_{n+1} \hat{P}_{n-1}(x), \quad n \geq 0 \quad (2.5)$$

com condições iniciais $\hat{P}_{-1}(x) = 0$, $\hat{P}_0(x) = 1$ e coeficientes

$$\hat{\beta}_{n+1} = \frac{\langle x \hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle}{\langle \hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle}, \quad \hat{\alpha}_{n+1} = \frac{\langle \hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle}{\langle \hat{P}_{n-1}, \hat{P}_{n-1} \rangle}.$$

Para obter uma sequência de polinômios ortonormais $\{p_n(x)\}$ através de uma sequência de polinômios ortogonais $\{P_n(x)\}$, dividimos cada polinômio P_n pela sua norma. Logo,

$$p_n(x) = \frac{P_n(x)}{\|P_n(x)\|}, \quad n \geq 1$$

com $\|P_n(x)\| = \sqrt{\langle P_n, P_n \rangle}$.

Sabemos que, todo polinômio ortonormal é um polinômio ortogonal, logo a partir da relação de recorrência (2.2) temos,

$$p_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})p_n(x) - \alpha_{n+1}p_{n-1}(x) \quad (2.6)$$

com

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_n}, \quad \beta_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xp_n, p_n \rangle}{\langle p_n, p_n \rangle} = \gamma_{n+1} \langle xp_n, p_n \rangle \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}.$$

2.1.1 Fórmula determinantal dos polinômios ortogonais

Teorema 2.1.2. *Os polinômios ortogonais têm uma fórmula determinantal dada por:*

$$P_{n+1}(x) = \begin{vmatrix} x - \beta_1 & -1 & & & & \\ -\alpha_2 & x - \beta_2 & -1 & & & \\ & -\alpha_3 & x - \beta_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & & -\alpha_{n+1} & x - \beta_{n+1} & \end{vmatrix}.$$

Demonstração. Para verificar esta afirmação é suficiente calcular o determinante, pela regra de Laplace, que denotamos por Q_{n+1} e usando a última coluna obtemos, sucessivamente,

$$Q_1(x) = (x - \beta_1), Q_2(x) = -\alpha_2 + (x - \beta_2)Q_1(x)$$

em geral,

$$Q_{n+1}(x) = -\alpha_{n+1}Q_{n-1}(x) + (x - \beta_{n+1})Q_n(x).$$

Podemos observar que estes determinantes verificam a mesma relação de recorrência e os primeiros termos coincidem com os polinômios ortogonais pelo que, por construção, $Q_n(x) = P_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$. \square

2.2 Identidade de Christoffel-Darboux

Teorema 2.2.1 (Identidade de Christoffel-Darboux). *Seja $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma SPO ortonormada. Então*

$$\sum_{k=0}^n p_k(u)p_k(x) = \frac{1}{\gamma_{n+1}} \frac{p_{n+1}(x)p_n(u) - p_{n+1}(u)p_n(x)}{x - u}, \quad (2.7)$$

$$\sum_{k=0}^n [p_k(x)]^2 = \frac{1}{\gamma_{n+1}} [p'_{n+1}(x)p_n(x) - p_{n+1}(x)p'_n(x)]. \quad (2.8)$$

onde, a primeira fórmula designa-se por fórmula de Christoffel¹-Darboux² e a segunda por fórmula confluyente de Christoffel-Darboux.

Demonstração. Atendendo à relação de recorrência a três termos (2.2) podemos escrever,

$$p_{k+1}(x)p_k(u) = (\gamma_{k+1}x - \beta_{k+1})p_k(x)p_k(u) - \alpha_{k+1}p_{k-1}(x)p_k(u) \quad (2.9)$$

e

$$p_{k+1}(u)p_k(x) = (\gamma_{k+1}u - \beta_{k+1})p_k(u)p_k(x) - \alpha_{k+1}p_{k-1}(u)p_k(x) \quad (2.10)$$

para todo $k = 0, 1, 2, \dots$. Subtraindo membro a membro (2.9) e (2.10) obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned} p_{k+1}(x)p_k(u) - p_{k+1}(u)p_k(x) &= \gamma_{k+1}(x - u)p_k(x)p_k(u) - \alpha_{k+1}(p_{k-1}(u)p_k(x) - p_{k-1}(x)p_k(u)) \\ \gamma_{k+1}(x - u)p_k(x)p_k(u) &= p_{k+1}(x)p_k(u) - p_{k+1}(u)p_k(x) - \alpha_{k+1}(p_{k-1}(u)p_k(x) - p_{k-1}(x)p_k(u)) \\ \gamma_{k+1}(x - u)p_k(x)p_k(u) &= p_{k+1}(x)p_k(u) - p_{k+1}(u)p_k(x) + \alpha_{k+1}(p_{k-1}(x)p_k(u) - p_{k-1}(u)p_k(x)) \\ p_k(x)p_k(u) &= \frac{1}{\gamma_{k+1}} \frac{p_{k+1}(x)p_k(u) - p_{k+1}(u)p_k(x)}{x - u} + \frac{\alpha_{k+1}}{\gamma_{k+1}} \frac{p_{k-1}(x)p_k(u) - p_{k-1}(u)p_k(x)}{x - u}. \end{aligned}$$

De (2.6) sabemos que $\alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}$, pelo que,

$$p_k(x)p_k(u) = \frac{1}{\gamma_{k+1}} \frac{p_{k+1}(x)p_k(u) - p_{k+1}(u)p_k(x)}{x - u} + \frac{1}{\gamma_k} \frac{p_{k-1}(x)p_k(u) - p_{k-1}(u)p_k(x)}{x - u}.$$

Somando para k desde 1 a n ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n p_k(x)p_k(u) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\gamma_{k+1}} \frac{p_{k+1}(x)p_k(u) - p_{k+1}(u)p_k(x)}{x - u} + \frac{1}{\gamma_k} \frac{p_{k-1}(x)p_k(u) - p_{k-1}(u)p_k(x)}{x - u} \right). \end{aligned}$$

Fazendo um estudo do desenvolvimento da expressão do lado direito da equação acima, concluimos que tal expressão são telescópicas sobrando apenas o último termo da primeira e o primeiro termo da segunda expressão, assim teremos,

$$\sum_{k=1}^n p_k(x)p_k(u) = \frac{1}{\gamma_{n+1}} \frac{p_{n+1}(x)p_n(u) - p_{n+1}(u)p_n(x)}{x - u} + \frac{1}{\gamma_1} \frac{p_0(x)p_1(u) - p_0(u)p_1(x)}{x - u}.$$

¹Elwin Bruno Christoffel (1829 – 1900) foi um matemático e físico alemão, professor universitário.

²Jean-Gaston Darboux (1842 – 1917) foi um matemático Francês, cujo nome está ligado às áreas de Análise e Mecânica Racional.

Mas, $p_0(x) = a_{0,0}$ e $p_1(x) = a_{1,1}x + a_{1,0}$, onde surge que,

$$\sum_{k=1}^n p_k(x)p_k(u) = \frac{1}{\gamma_{n+1}} \frac{p_{n+1}(x)p_n(u) - p_{n+1}(u)p_n(x)}{x-u} + \frac{1}{\gamma_1} a_{0,0}a_{1,1};$$

observa-se também que, $\gamma_1 = \frac{a_{1,1}}{a_{0,0}}$ e $p_0(x) = p_0(y) = a_{0,0}$, assim teremos que,

$$\sum_{k=1}^n p_k(x)p_k(u) = \frac{1}{\gamma_{n+1}} \frac{p_{n+1}(x)p_n(u) + p_{n+1}(u)p_n(x)}{x-u} + p_0(x)p_0(y)$$

e, portanto,

$$\sum_{k=0}^n p_k(x)p_k(u) = \frac{1}{\gamma_{n+1}} \frac{p_{n+1}(x)p_n(u) - p_{n+1}(u)p_n(x)}{x-u}.$$

Ficando assim provado (2.7). Por outro lado, para provar a sua forma confluyente basta tomar o limite quando $u \rightarrow x$ na fórmula (2.7). Assim sendo, podemos rescrever o numerador da expressão acima da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & p_{n+1}(x)p_n(u) - p_{n+1}(u)p_n(x) \\ &= p_{n+1}(x)p_n(x) + p_{n+1}(x)p_n(u) - p_{n+1}(u)p_n(x) - p_{n+1}(x)p_n(x) \\ &= [p_{n+1}(x) - p_{n+1}(u)]p_n(x) - [p_n(x) - p_n(u)]p_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Estudando o limite, surge,

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow x} \sum_{k=0}^n p_k(x)p_k(u) &= \lim_{u \rightarrow x} \frac{p_{n+1}(x) - p_{n+1}(u)}{x-u} p_n(x) - \frac{p_n(x) - p_n(u)}{x-u} p_{n+1}(x) \\ \iff \sum_{k=0}^n [p_k(x)]^2 &= \frac{1}{\gamma_{n+1}} [p'_{n+1}(x)p_n(x) - p_{n+1}(x)p'_n(x)]. \end{aligned}$$

Ficando assim provada a fórmula confluyente de Christoffel-Darboux. □

2.2.1 Zeros

Começamos por observar que a relação de recorrência dos polinómios ortogonais mónicos, pode ser escrita da seguinte forma matricial:

$$J_n \begin{bmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_{n-2}(x) \\ P_{n-1}(x) \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_{n-2}(x) \\ P_{n-1}(x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P_n \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.11)$$

Sendo que J_n é a matriz tridiagonal de ordem n dada por

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & 1 & & & \\ \alpha_2 & \beta_2 & 1 & & \\ & \alpha_3 & \beta_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \alpha_n & \beta_n \end{bmatrix}.$$

Assim, os zeros de $P_n(x)$ são valores próprios de J_n . A partir da relação de recorrência para os polinómios mónicos, podemos obter a relação de recorrência para os polinómios ortonormais, $\{p_n\}_{n=0}^\infty$, dada por

$$xp_n(x) = \sqrt{\alpha_{n+2}}p_{n+1}(x) + \beta_{n+1}p_n(x) + \sqrt{\alpha_{n+1}}p_{n-1}(x), \quad (2.12)$$

que reescrita na forma matricial é dada por:

$$\tilde{J}_n \begin{bmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ \vdots \\ p_{n-2}(x) \\ p_{n-1}(x) \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ \vdots \\ p_{n-2}(x) \\ p_{n-1}(x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sqrt{\alpha_{n+1}}p_n \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

para $n = 1, 2, \dots$. Sendo que J_n é a matriz tridiagonal de ordem n dada por

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & \sqrt{\alpha_2} & & & \\ \sqrt{\alpha_2} & \beta_2 & \sqrt{\alpha_3} & & \\ & \sqrt{\alpha_3} & \beta_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \sqrt{\alpha_n} \\ & & & \sqrt{\alpha_n} & \beta_n \end{bmatrix}.$$

Portanto, a partir da relação de recorrência, podemos deduzir que os zeros dos polinómios ortogonais são os valores próprios de uma matriz simétrica pelo que são reais. Como consequência da fórmula confluyente de Christoffel-Darboux podemos deduzir que são simples. Os zeros dos polinómios também verificam uma propriedade chamada de entrelaçamento, que veremos ser uma consequência do Teorema de Bolzano-Weierstrass e da fórmula confluyente de Christoffel-Darboux.

Quando a sequência de polinómios é ortogonal em relação a $d\psi(x)$ podemos obter diretamente da ortogonalidade o mesmo resultado relativo aos zeros dos polinómios ortogonais, que iremos demonstrar em alternativa.

Teorema 2.2.2. *Seja $P_n(x)$, $n \geq 0$, uma sequência de polinómios ortogonais no intervalo (a, b) em relação a $d\psi(x)$. Então, as raízes de $P_n(x)$ são reais, distintas e pertencem ao intervalo (a, b) .*

Demonstração. Começamos por supor que $P_n(x)$ não muda de sinal em (a, b) . Assim, ou $P_n(x) \geq 0$ (não identicamente nulo) no intervalo (a, b) o que implica que,

$$\int_a^b P_n(x) d\psi(x) > 0,$$

ou $P_n(x) \leq 0$ (não identicamente nulo) no intervalo (a, b) o que implica que,

$$\int_a^b P_n(x) d\psi(x) < 0.$$

Mas, usando a relação de ortogonalidade, temos que,

$$\int_a^b P_n(x) d\psi(x) = \int_a^b 1 \cdot P_n(x) d\psi(x) = 0,$$

o que é absurdo! Então $P_n(x)$ deve mudar de sinal em (a, b) pelo menos uma vez, deste modo existe pelo menos uma raiz real de $P_n(x)$ de multiplicidade ímpar em (a, b) .

Suponhamos agora, que $x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,r}$ com $r < n$ são raízes distintas de multiplicidade ímpar de $P_n(x)$ em (a, b) . Então,

$$\begin{aligned} P_n(x) &= (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \cdots (x - x_{n,r})Q(x) \\ &= R(x)Q(x), \end{aligned}$$

onde $R(x)$ é um polinómio de grau $r < n$ com raízes com raízes $x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,r}$ e $Q(x)$ é um polinómio de grau $(n - r)$ que tem somente raízes complexas ou raízes de multiplicidade par em (a, b) ou ainda raízes fora de (a, b) .

Desta forma, $Q(x)$ não muda de sinal em (a, b) . Porém, como $r < n$, pela relação de ortogonalidade,

$$\int_a^b R(x)P_n(x) d\psi(x) = 0.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \int_a^b R(x)P_n(x) d\psi(x) &= \int_a^b R(x)R(x)Q(x) d\psi(x) \\ &= \int_a^b R^2(x)Q(x)w(x) dx \neq 0, \end{aligned}$$

o que é absurdo! Então $P_n(x)$ tem $r \geq n$ raízes de multiplicidade ímpar em (a, b) . Agora como $P_n(x)$ é um polinómio de grau n , temos que $n = r$. Deste modo $P_n(x)$ tem n raízes de multiplicidade ímpar em (a, b) da seguinte forma,

$$P_n(x) = (x - x_{n,1})^{i_1}(x - x_{n,2})^{i_2} \cdots (x - x_{n,n})^{i_n}.$$

Como i_1, i_2, \dots, i_n são índices positivos e ímpares $i_1 + \cdots + i_n = n$ e $i_1 = \cdots = i_n = 1$. \square

Teorema 2.2.3 (Propriedade de entrelaçamento). *Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ uma SPO em relação a $d\psi(x)$. Então, entre dois zeros consecutivos de $P_{n+1}(x)$, existe somente um zero de $P_n(x)$.*

Demonstração. Sejam $x_{n+1,i}$ e $x_{n+1,i+1}$ dois zeros consecutivos de $P_n(x)$ no intervalo (a, b) , ou seja, $a < x_{n+1,i} < x_{n+1,i+1} < b$. Queremos provar que existe um zero de $P_n(x)$ no intervalo $(x_{n+1,i}, x_{n+1,i+1})$.

Como $x_{n+1,i}$ e $x_{n+1,i+1}$ são zeros consecutivos de $P_{n+1}(x)$, pelo teorema anterior temos que $P'_{n+1}(x_{n+1,i})$ e $P'_{n+1}(x_{n+1,i+1})$ têm sinais distintos, logo substituindo esses zeros na fórmula confluyente (2.8), obtendo,

$$P'_{n+1}(x_{n+1,i})P_n(x_{n+1,i}) > 0 \quad \text{e} \quad P'_{n+1}(x_{n+1,i+1})P_n(x_{n+1,i+1}) > 0.$$

Assim $P_n(x_{n+1,i})$ e $P_n(x_{n+1,i+1})$ têm sinais distintos. Agora, como $P_n(x)$ é uma função contínua, do teorema de Bolzano-Weierstrass, $P_n(x)$ tem um zero em $(x_{n+1,i}, x_{n+1,i+1})$. \square

2.2.2 Fórmula de quadratura de Gauss

Estudaremos as fórmulas de quadratura gaussiana com os zeros dos polinómios ortogonais. Começemos por considerar o integral da forma,

$$I = \int_a^b f(x) d\psi(x), \quad (2.14)$$

sendo $d\psi(x)$ uma função de distribuição em (a, b) . Suponhamos que a função $f(x)$ é aproximada por um polinómio interpolador de Lagrange, $Q_n(x)$, nos nós $y_{n,k}$, para $k = 1, \dots, n$, então:

$$f(x) = Q_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=1}^n f(y_{n,k})L_k(x) + R_n(x).$$

Assim em (2.14) obteremos:

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) d\psi(x) = \int_a^b \sum_{k=1}^n f(y_{n,k})L_k(x) d\psi(x) + \int_a^b R_n(x) d\psi(x) \\ &= \sum_{k=1}^n w_{n,k}f(y_{n,k}) + \epsilon_n, \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde

$$w_{n,k} = \int_a^b L_k(x) d\psi(x), k = 1, \dots, n \quad \text{e} \quad \epsilon_n = \int_a^b R_n(x) d\psi(x), k = 0, 1, \dots, n.$$

Queremos integrar um polinómio de grau $2n - 1$, se $f(x) = \tilde{Q}_{2n-1}(x)$ for um polinómio de grau $2n - 1$, então o erro seria $\epsilon_n = 0$. Sendo assim,

$$\tilde{Q}_{2n-1}(x) = Q_{2n-1}(x) = Q_n(x) + R_n(x).$$

Logo, como a função $\tilde{Q}_{2n-1}(x)$ é aproximada pela interpolação de Lagrange e temos n nós da fórmula de quadratura de Gauss, segue-se que $R_n(x)$ tem de ser de grau $2n - 1$. Portanto

$$R_n(x) = r_{n-1}(x)L(x) \quad \text{onde,} \quad L(x) = \prod_{j=1}^n (x - y_{n,j}),$$

e $r_{n-1}(x)$ é um polinómio de grau $n - 1$. Considerando agora, $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinómios ortogonais no intervalo (a, b) em relação a $d\psi(x)$, temos que,

$$L(x) = \sum_{j=0}^n a_j P_j(x) \quad \text{e} \quad r_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i P_i(x).$$

Entretanto, o erro de integração é dado por,

$$\epsilon_n = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-1} a_j b_i \int_a^b P_j(x) P_i(x) d\psi(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i b_i \langle P_i, P_i \rangle,$$

pois $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma família de polinómios ortogonais. Caso queiramos que $\epsilon_n = 0$, teremos duas possibilidades: considerando $b_i = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$ teríamos $r_n(x) = 0$ que é impossível, portanto $a_i = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Assim o polinómio de Lagrange pode ser expressado como,

$$L(x) = \sum_{j=0}^n b_j P_j(x) = a_n P_n(x).$$

Portanto, para que o erro seja nulo, os “nós” da fórmula de quadratura devem ser os zeros do polinómio P_n , sendo P_n o n -ésimo polinómio ortogonal. Por outro lado, escrevendo $Q_n(x)$ teremos,

$$Q_n(x) = \sum_{k=1}^n f(x_{n,k}) L_k(x) = \sum_{k=1}^n f(x_{n,k}) \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_{n,i}}{x_{n,k} - x_{n,i}} = \sum_{k=0}^n \frac{P_{n+1}(x)}{(x - x_{n,k}) P'_{n+1}(x_{n,k})}.$$

Logo, a fórmula de quadratura Gaussiana é dada por,

$$I = \int_a^b f(x) d\psi(x) = \sum_{i=1}^n w_{n,k} f(x_{n,k}).$$

onde,

$$w_{n,k} = \int_a^b \frac{P_{n+1}(x) d\psi(x)}{(x - x_{n,k}) P'_{n+1}(x_{n,k})} \quad \text{com} \quad k = 1, \dots, n.$$

Podemos afirmar que esta fórmula de quadratura é exata para polinómios de grau $m \leq 2n - 1$. Os coeficientes $w_{n,k}$ na fórmula de quadratura são chamados números ou símbolos de Christoffel.

Capítulo 3

Conexão Entre Polinômios Ortogonais e Frações Contínuas

Neste capítulo apresentamos a definição de frações contínuas e algumas das suas propriedades, assim como, uma conexão entre frações contínuas e polinômios ortogonais. Para tal, usamos as referências bibliográficas [3] e [5]. Os polinômios ortogonais e as frações contínuas possuem vastas aplicações em muitos problemas da Matemática Pura e Ciências Aplicadas, sendo que, tais assuntos foram e ainda são objetos de estudo por muitos pesquisadores em todo mundo. Embora os polinômios ortogonais e as frações contínuas satisfaçam várias e importantes propriedades, neste trabalho, enfatizamos aqueles resultados que abrem caminho para conectar os dois temas. Não daremos demonstrações destes resultados.

3.1 Algoritmo de Euclides

Qualquer par $x_0 > x_1$ de inteiros positivos gera uma sucessão decrescente $x_0 > x_1 > \dots$ no conjunto \mathbb{N} (dos inteiros positivos) pelo algoritmo de Euclides:

$$\begin{aligned} x_0 &= b_0x_1 + x_2 \\ x_1 &= b_1x_2 + x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-2} &= b_{n-2}x_{n-1} + x_n \\ x_{n-1} &= b_{n-1}x_n, \end{aligned} \quad \text{com} \quad b_j \in \mathbb{N}, \quad j \in \{0, 1, \dots\}. \quad (3.1)$$

Como qualquer sequência decrescente em \mathbb{N} é finita, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para $x_{n-1} = b_{n-1}x_n$ o algoritmo para nesta linha.

Observando as equações (3.1) de cima para baixo até $x_{n-2} = b_{n-2}x_{n-1} + x_n$, nota-se que qualquer divisor comum de x_0 e x_1 divide x_n . Por outro lado, observando as mesmas equações de baixo para cima, nota-se que x_n é um divisor comum de x_0 e x_1 . Portanto, x_n é o máximo divisor comum entre x_0 e x_1 , ou seja, $\text{mdc}(x_0, x_1) = x_n$. Esta é a forma padrão do algoritmo de Euclides que fornece uma base para a teoria dos números.

Para explicar o papel desempenhado pelos coeficientes b_k em (3.1), consideremos (3.1) como um sistema de equações algébricas lineares com coeficientes inteiros b_0, b_1, b_2, \dots . Eli-

minando as incógnitas de x_k de (3.1) obtemos,

$$\frac{x_{k-1}}{x_k} = b_{k-1} + \frac{1}{\frac{x_k}{x_{k+1}}}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

o que obviamente produz o desenvolvimento de $\frac{x_0}{x_1}$ em uma fração contínua finita.

Definição 3.1.1. Sendo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ duas sucessões de números reais ou complexos, chamamos de frações contínuas a uma expressão escrita na seguinte forma:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \ddots}}}. \quad (3.2)$$

A expressão (3.2) é muitas vezes escrita como:

$$b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \dots + \frac{a_n}{|b_n|} + \dots$$

Os termos $\frac{a_i}{b_i}$, $i = 1, 2, \dots$, são chamados de quociente parcial, sendo, a_i e b_i , respetivamente, os numeradores e denominadores do quociente parcial $\frac{a_i}{b_i}$.

Definição 3.1.2. Consideremos $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ construída da seguinte forma

$$\begin{aligned} C_0 &= b_0 \\ C_1 &= b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} \\ C_2 &= b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \frac{a_2}{|b_2|} \\ &\vdots \\ C_n &= b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \frac{a_2}{|b_2|} + \dots + \frac{a_n}{|b_n|}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dizemos que C_n é o n -ésimo convergente da fração contínua (3.2).

Definição 3.1.3. Dizemos que a fração contínua (3.2) converge para um valor finito k , se apenas um número finito de convergentes são indefinidos e $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = k$.

Podemos escrever $C_n = \frac{f_n}{q_n}$ com $n = 0, 1, 2, \dots$. A partir de (3.3) podemos entender que

$$C_0 = b_0, \quad C_1 = b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} = b_0 + \frac{a_1}{b_1}, \quad C_2 = b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \frac{a_2}{|b_2|} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}}, \dots$$

Assim, o próximo resultado mostra que f_n e q_n satisfazem uma relação de recorrência de três termos.

Teorema 3.1.1. *Seja $C_n = \frac{f_n}{q_n}$, $n \geq 0$ então as sequências $\{f_n\}$ e $\{q_n\}$ satisfazem as relações de recorrência*

$$f_n = b_n f_{n-1} + a_n f_{n-2}, \quad q_n = b_n q_{n-1} + a_n q_{n-2} \quad \text{com} \quad n \geq 1 \quad (3.4)$$

e condições iniciais $f_{-1} = 1$, $f_0 = b_0$, $q_{-1} = 0$, $q_0 = 1$ e $a_n \neq 0$ para $n \geq 1$.

Observação. As fórmulas (3.4) foram estabelecidas pela primeira vez por John Wallis¹, por esta razão são conhecidas como fórmulas de Wallis onde f_n e q_n são, respetivamente, numerador e denominador do n -ésimo convergente.

Corolário 3.1.1.1. *Verifica-se que*

$$f_n q_{n-1} - f_{n-1} q_n = (-1)^{n-1} a_1 \cdots a_n \quad (3.5)$$

$$\frac{f_n}{q_n} + \frac{f_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1} a_1 \cdots a_n}{q_n q_{n-1}} \quad (3.6)$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

3.1.1 Conexão entre frações contínuas e polinómios ortogonais

A conexão entre polinómios ortogonais e frações contínuas aparece de forma muito natural, através dos conceitos introduzidos e discutidos acima. Nesta secção, vamos considerar sucessões de polinómios ortogonais mónicos que denotaremos por $\{P_n(x)\}$. Já foi mostrado mais acima que tal sucessão satisfaz uma relação de recorrência a três termos dada por:

$$P_{n+1}(x) = (x - \beta_{n+1}) P_n(x) - \alpha_{n+1} P_{n-1}(x), \quad n \geq 0,$$

com condições iniciais $P_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = 1$. Para mostrar a ligação entre polinómios ortogonais e fração contínuas, iremos considerar frações contínuas dadas por

$$\frac{1}{|x - \beta_1|} + \frac{-\alpha_2}{|x - \beta_2|} + \cdots + \frac{-\alpha_n}{|x - \beta_n|} + \cdots \quad (3.7)$$

Fazendo uma adaptação a forma da fração contínua (3.7) ao resultado do teorema 3.1.1, observa-se que os convergentes desta fração contínua satisfazem as relações de recorrência

$$f_n(x) = (x - \beta_n) f_{n-1}(x) - \alpha_n f_{n-2}(x), \quad q_n(x) = (x - \beta_n) q_{n-1}(x) - \alpha_n q_{n-2}(x), \quad (3.8)$$

para todo $n = 2, 3, \dots$, com condições iniciais $f_0(x) = 0$, $f_1(x) = 1$, $q_0(x) = 1$ e $q_1(x) = x - \beta_1$.

Tendo todas estas informações, podemos passar para um resultado que estabelece uma fórmula para os convergentes da fração contínua (3.7).

Teorema 3.1.2. *Os convergentes da fração contínua (3.7) são dados pelas fórmulas*

$$C_n(x) = \frac{f_n(x)}{q_n(x)} \quad \text{onde} \quad f_n(x) = \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x - t} d\psi(t) \quad \text{e} \quad q_n(x) = P_n(x), \quad (3.9)$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

¹John Wallis (1616 – 1703) foi um Matemático Britânico cujos trabalhos foram precursores aos de Isaac Newton, contribuiu substancialmente para a origem do cálculo e o foi o matemático inglês mais influente antes de Newton.

Apresentamos, em seguida, um resultado que relaciona as transformadas de Stieltjes com os polinômios ortogonais mónicos e com os convergentes da fração contínua que tem sido considerado até aqui. Tal resultado é particularmente importante, pois permite a demonstração do teorema de Markov que será visto e discutido mais à frente.

Teorema 3.1.3. *Considere-se a função, chamada a transformada de Stieltjes de $d\psi(t)$,*

$$\hat{\psi}(z) = \int_a^b \frac{1}{z-t} d\psi(t).$$

As seguintes igualdades são satisfeitas para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

- (i) $\hat{\psi}(z) - \frac{f_n(z)}{P_n(z)} = \frac{1}{P_n(z)} \int_a^b \frac{P_n(t)}{z-t} d\psi(t);$
- (ii) $\hat{\psi}(z) - \frac{f_n(z)}{P_n(z)} = \frac{\delta_n^1}{z^{2n+1}} + \frac{\delta_n^2}{z^{2n+2}} + \dots, |z| > R,$

onde R é um valor suficientemente grande que garante que a série $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{z^{j+1}}$ convirja uniformemente.

O resultado que se segue está relacionado com as decomposições em frações simples e símbolo de *Christoffel* (surgindo da fórmula de quadratura de *Gauss*).

Teorema 3.1.4. *Considere-se a decomposição em frações simples*

$$\frac{f_n(x)}{q_n(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{x - x_{n,k}} \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N},$$

onde $x_{n,k}$ são os zeros dos polinômios ortogonais (mónicos) $\hat{P}_n(x)$. Então os coeficientes λ_k coincidem com os símbolos de *Christoffel*, $w_{n,k}$, da fórmula de quadratura de *Gauss*.

Capítulo 4

Função Geradora dos polinómios Ortogonais Clássicos

Antes de começarmos a mostrar as funções geradoras dos polinómios ortogonais, é fundamental fazermos uma breve consideração sobre tais polinómios. De acordo com [3], os sistemas de polinómios ortogonais associados aos nomes de Hermite, Laguerre e Jacobi (incluindo os casos especiais nomeadamente os de Chebichev e Legendre) são inquestionavelmente os sistemas mais extensivamente estudados e amplamente aplicados. Estes três polinómios são chamados coletivamente de *Polinómios ortogonais clássicos*. O relato mais completo dos polinómios clássicos pode ser encontrado em [13], [3] e [5].

Devido à ampla disponibilidade de propriedades destes polinómios, limitaremos nossa discussão sobre eles principalmente a certas propriedades unificadoras que, embora sejam bastante conhecidas, geralmente não são encontradas fora das fontes originais. Sendo assim, nesta secção vamos apresentar uma fórmula, denominada Fórmula de Lagrange, que será a chave para a construção da função geradora das famílias de polinómios ortogonais clássicos.

Para a demonstração desta fórmula, precisamos de ter em atenção alguns teoremas importantes da Análise Complexa que foram consideradas no apêndice C e que podem ser consultados em [4].

Para um estudo aprofundado sobre a fórmula de Lagrange aplicada a sequências de polinómios ortogonais de uma e duas variáveis o leitor atento pode consultar a referência [1].

Definição 4.0.1. *Designa-se por função geradora de uma sequência de polinómios ortogonais, a série*

$$G(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n.$$

4.1 Fórmula de Lagrange

4.1.1 Fórmula dos resíduos

Teorema 4.1.1. *Seja D um domínio limitado no plano complexo com contorno suave por parte. Suponha-se que $f(z)$ é uma função analítica em $D \cup \partial D$, excepto para um número*

finito de singularidades isoladas z_1, \dots, z_n em D . Então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \text{Res}(f, z_i).$$

Teorema 4.1.2. Se $F(z)$ e $g(z)$ são funções analíticas em z_0 , e se $g(z)$ tem um zero simples em z_0 , então

$$\text{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}. \quad (4.1)$$

Teorema 4.1.3 (Fórmula Integral de Cauchy). Seja D um domínio limitado com contornos suaves por partes. Se $f(z)$ é uma função analítica em D , e $f(z)$ se estende suavemente até a fronteira de D , então $f(z)$ tem derivadas complexas de qualquer ordem em D , que são dadas por

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw. \quad (4.2)$$

Teorema 4.1.4 (Teorema de Rouché). Seja D um domínio limitado com contorno suave por partes ∂D . Seja $f(z)$ e $h(z)$ funções analíticas em $D \cup \partial D$, se $|h(z)| < |f(z)|$ para $z \in \partial D$, então $f(z)$ e $f(z) + h(z)$ têm o mesmo número de zeros em D , contando multiplicidades.

Teorema 4.1.5 (Fórmula de Lagrange). Sejam $f(z)$, uma função analítica definida num domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$, contendo o ponto a . Definimos $F(z) = z - a - uf(z)$, sendo u um parâmetro complexo, γ uma circunferência centrada em $z = a$, contida em Ω e tal que f não se anula no interior do círculo correspondente. $\pi(z)$ uma função analítica no interior do círculo delimitado por γ . Então existe um valor $m > 0$ tal que para $|u| < m$, a função $\frac{\pi(z)}{F(z)}$ tem um e um só pólo no interior do círculo delimitado por γ e

$$\frac{\pi(\xi)}{F'(\xi)} = \sum_{n=0}^{+\infty} D^n [\pi(z)f^n(z)]_{z=a} \frac{u^n}{n!}. \quad (4.3)$$

Vamos provar, em primeira instância, a seguinte proposição:

Proposição 1. Sejam $f(z)$, uma função analítica definida num domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$, contendo o ponto a . Definimos $F(z) = z - a - uf(z)$, sendo u um parâmetro complexo, γ uma circunferência centrada em $z = a$, contida em Ω e tal que f não se anula no interior do círculo correspondente. $\pi(z)$ uma função analítica no interior do círculo delimitado por γ . Então existe um valor $m > 0$ tal que para $|u| < m$, a função $\frac{\pi(z)}{F(z)}$ tem um e um só polo no interior do círculo delimitado por γ

Demonstração. Para provar que a função $\frac{\pi(z)}{F(z)}$ tem um e um só polo no interior do círculo delimitado por γ é equivalente provar que a função $F(z)$ tem um único zero no círculo delimitado por γ .

Consideremos $m = \min_{z \in \gamma} \left| \frac{z-a}{f(z)} \right|$. Para u tal que $|u| < m$ temos que

$$\left| \frac{F(z) - (z-a)}{z-a} \right| = \left| \frac{u}{\frac{z-a}{f(z)}} \right| < \frac{m}{\left| \frac{z-a}{f(z)} \right|} < 1.$$

ou seja

$$|F(z) - (z - a)| < |z - a|$$

pelo que o Teorema de Rouché nos permite concluir que $F(z)$ e $z - a$ têm o mesmo número de zeros, ou seja um zero, no interior do círculo delimitado por γ . \square

Aplicamos a fórmula dos resíduos (4.1) e obtemos

$$\frac{\pi(\xi)}{F'(\xi)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\pi(z)}{z - a - uf(z)} dz.$$

Usamos o facto de que $\left| \frac{uf(z)}{z - a} \right| < 1$, pelo que

$$\frac{1}{z - a - uf(z)} = \frac{1}{z - a} \frac{1}{1 - \frac{uf(z)}{z - a}} = \frac{1}{z - a} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(z)}{(z - a)^n} u^n,$$

pelo que obtemos a representação integral

$$\frac{\pi(\xi)}{F'(\xi)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\pi(z) f^n(z)}{(z - a)^{n+1}} u^n dz.$$

Aplicamos a fórmula (4.2) e obtemos a fórmula de Lagrange:

$$\frac{\pi(\xi)}{F'(\xi)} = \sum_{n=0}^{+\infty} D^n [\pi(z) f^n(z)]_{z=a} \frac{u^n}{n!}.$$

Quando os polinómios estão gerados por uma fórmula de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{w(x)} D^n [w(x) \sigma^n(x)], \quad (4.4)$$

o primeiro membro da fórmula de Lagrange, dividido por $w(x)$ será a função geradora, e $w(x)$ será a chamada medida de ortogonalidade.

4.2 Funções Geradoras dos Polinómios Ortogonais Clássicos

Nesta secção determinaremos as fórmulas geradoras dos polinómios acima mencionados a partir da fórmula de Lagrange já enunciada e demonstrada acima.

4.2.1 Função Geradora para os Polinómios de Hermite

Definição 4.2.1. *Os polinómios de Hermite verificam a fórmula de Rodrigues*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} D^n [e^{-x^2}]. \quad (4.5)$$

Pelo que considerando como função $f(z) = 1$, $\pi(z) = e^{-z^2}$, e $a = x$, definimos a função

$$F(z) = z - x - uf(z) = z - x - u.$$

Resolvendo a equação $F(z) = 0$, obtemos $z = x + u$, e pela notação da fórmula de Lagrange $\xi = x + u$. Substituindo agora na fórmula de Lagrange obtemos

$$\frac{e^{-(x+u)^2}}{1} = \sum_{n=0}^{+\infty} D^n [e^{-x^2}] \frac{u^n}{n!}.$$

Dividindo ambos membros por e^{-x^2} obtemos sucessivamente

$$e^{x^2} e^{-(x+u)^2} = e^{-2xu-u^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{x^2} D^n [e^{-x^2}] \frac{u^n}{n!}.$$

Fazendo a substituição $u = -w$, finalmente obtemos

$$e^{2xw+w^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x) \frac{w^n}{n!}. \quad (4.6)$$

4.2.2 Função Geradora para os Polinômios de Legendre

Definição 4.2.2. *Os polinômios de Legendre verificam a fórmula de Rodrigues*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n [(x^2 - 1)^n]. \quad (4.7)$$

Consideremos $f(z) = z^2 - 1$, $\pi(z) = 1$ e $a = x$. Definimos a função

$$F(z) = z - a - uf(z) = z - x - u(z^2 - 1)$$

e resolvemos a equação $F(z) = 0$ pelo que obtemos $z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4xu + 4u^2}}{-2u}$

A função $F(z)$ deve ter apenas um zero, e tendo em conta que para $u = 0$, obtemos $z = x$, iremos escolher,

$$z = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4xu + 4u^2}}{-2u}.$$

Substituímos na fórmula de Lagrange e obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 4xu + 4u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} D^n [(x^2 - 1)^n] \frac{u^n}{n!}.$$

Usamos uma substituição de variável $w = 2u$ e obtemos,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xw + w^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} D^n [(x^2 - 1)^n] \frac{1}{2^n n!} w^n.$$

Finalmente,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xw + w^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) w^n. \quad (4.8)$$

4.2.3 Função Geradora para os Polinómios de Laguerre

Definição 4.2.3. *Os polinómios de Laguerre são aqueles que verificam a fórmula de Rodrigues*

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x D^n [x^n e^{-x}]. \quad (4.9)$$

Consideremos $f(z) = z$, $\pi(z) = e^{-z}$ e $a = x$. Definimos a função

$$F(z) = z - a - uf(z) = z - x - uz \quad \text{onde} \quad F'(z) = 1 - u$$

e resolvemos a equação $F(z) = 0$, pelo que obtemos $z = \frac{x}{1-u}$. Substituímos na fórmula de Lagrange e obtemos,

$$\frac{1}{1-u} e^{\frac{-x}{1-u}} = \sum_{n=0}^{\infty} D^n [x^n e^{-x}] \frac{u^n}{n!}.$$

Dividindo ambos membros por e^{-x} teremos

$$\frac{1}{1-u} e^x e^{\frac{-x}{1-u}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^x D^n [x^n e^{-x}] \frac{u^n}{n!}.$$

Finalmente obtemos,

$$\frac{1}{1-u} e^{\frac{-ux}{1-u}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) u^n. \quad (4.10)$$

4.2.4 Função Geradora para os Polinómios de Jacobi

Definição 4.2.4. *Os polinómios de Jacobi são denotados por $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ e podem ser definidos pela fórmula de Rodrigues*

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \cdot (1-x)^{-\alpha} \cdot (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} \cdot (1+x)^{\beta+n}] \quad (4.11)$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ com $\alpha, \beta > -1$.

Consideremos $f(z) = 1 - z^2$, $\pi(z) = (1-z)^\alpha (1+z)^\beta$ e $a = x$. Definimos a função

$$F(z) = z - a - uf(z) = z - x - u(1 - z^2)$$

onde

$$F'(z) = 1 + 2uz,$$

e resolvemos a equação $F(z) = 0$, pelo que obtemos $z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4ux + 4u^2}}{2u}$, e tendo em conta que para $u = 0$, obtemos $z = x$, iremos escolher

$$z = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4ux + 4u^2}}{2u}.$$

Substituimos na fórmula de Lagrange, obtemos,

$$\frac{\left(\frac{2u+1-\sqrt{1+4ux+4u^2}}{2u}\right)^\alpha \left(\frac{2u-1+\sqrt{1+4ux+4u^2}}{2u}\right)^\beta}{\sqrt{1+4ux+4u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} D^n \left[(1-x)^\alpha (1+x)^\beta (1-x^2)^n \right] \frac{u^n}{n!}$$

multiplicando ambos membros por $(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}$ teremos

$$\begin{aligned} & (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} \frac{\left(\frac{2u+1-\sqrt{1+4ux+4u^2}}{2u}\right)^\alpha \left(\frac{2u-1+\sqrt{1+4ux+4u^2}}{2u}\right)^\beta}{\sqrt{1+4ux+4u^2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} D^n \left[(1-x)^\alpha (1+x)^\beta (1-x^2)^n \right] \frac{u^n}{n!}. \end{aligned}$$

Fazendo uma substituição de variável $w = -2u$ teremos

$$\begin{aligned} & (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} \frac{\left(\frac{w-1+\sqrt{1-2wx+w^2}}{w}\right)^\alpha \left(\frac{1-w-\sqrt{1-2wx+w^2}}{w}\right)^\beta}{\sqrt{1-2wx+w^2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} D^n \left[(1-x)^\alpha (1+x)^\beta (1-x^2)^n \right] \frac{w^n}{n!} \end{aligned}$$

$$(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} \frac{\left(\frac{w-1+\sqrt{1-2wx+w^2}}{w}\right)^\alpha \left(\frac{w+1-\sqrt{1-2wx+w^2}}{w}\right)^\beta}{\sqrt{1-2wx+w^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)^{(\alpha,\beta)} w^n.$$

Finalmente, considerando $R = \sqrt{1-2wx+w^2}$ teremos

$$(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} \frac{\left(\frac{w-1+R}{w}\right)^\alpha \left(\frac{w+1-R}{w}\right)^\beta}{R} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)^{(\alpha,\beta)} w^n. \quad (4.12)$$

Capítulo 5

Estudo das Diferentes Famílias de Polinómios de Chebichev

Neste capítulo vamos estudar as famílias de polinómios de Chebichev do primeiro e segundo tipos $T_n(x)$ e $U_n(x)$, assim como as famílias de polinómios $V_n(x)$ e $W_n(x)$ que são designados de polinómios de Chebichev do terceiro e quarto tipos, respetivamente. Para este capítulo foram utilizadas as bibliografias [9] e [3].

5.1 Polinómios de Chebichev do Primeiro Tipo

Definição 5.1.1. *O polinómio de Chebichev do primeiro tipo, representado por $T_n(x)$, é um polinómio em x de grau n definido pela relação*

$$T_n(x) = \cos(n\theta) \quad x = \cos(\theta). \quad (5.1)$$

A variável x está definida no intervalo $[-1, 1]$ e $[0, \pi]$ é o domínio de definição da variável θ . Usando identidades trigonométricas, podemos exprimir $\cos(n\theta)$ como soma de potências de $\cos(\theta)$ de expoentes entre 0 e n .

$$\begin{aligned} \cos(0\theta) &= 1 \\ \cos(1\theta) &= \cos(\theta) \\ \cos(2\theta) &= 2 \cos^2(\theta) - 1 \\ \cos(3\theta) &= 4 \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta) \\ \cos(4\theta) &= 8 \cos^4(\theta) - 8 \cos^2(\theta) + 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Partindo de (5.1), obtemos os primeiros polinómios de Chebichev do primeiro tipo e estão representados na Figura 5.1, são eles:

$$\begin{aligned} n = 0, & \quad T_0(x) = \cos(0) = 1 \\ n = 1, & \quad T_1(x) = \cos(\theta) = x \\ n = 2, & \quad T_2(x) = 2 \cos^2(\theta) - 1 = 2x^2 - 1 \\ n = 3, & \quad T_3(x) = 4 \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta) = 4x^3 - 3x \end{aligned}$$

$$n = 4, \quad T_4(x) = 8 \cos^4(\theta) - 8 \cos^2(\theta) + 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

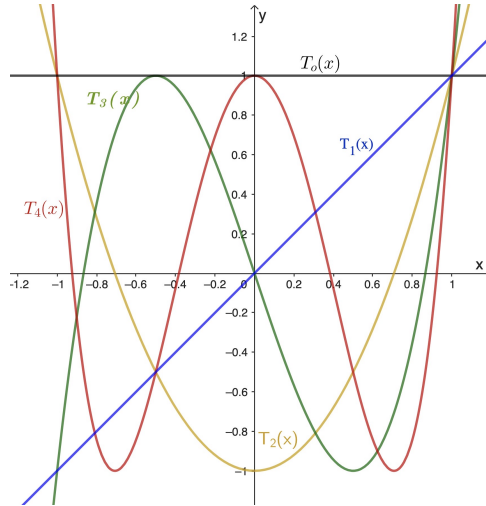


Figura 5.1: Gráfico representativo dos primeiros cinco polinômios de Chebichev.

5.1.1 Relação de Recorrência

Teorema 5.1.1. *Os polinômios de Chebichev do primeiro tipo podem ser obtidos a partir da seguinte relação*

$$\begin{cases} T_n(x) = \cos(n\theta), & x = \cos(\theta) \\ T_0(x) = 1, \\ T_1(x) = x, \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), & n \geq 1 \end{cases} \quad (5.2)$$

Demonstração. Partindo de (5.1) e usando o desenvolvimento do cosseno e seno da soma, teremos,

$$\begin{aligned} \cos[(n+1)\theta] &= \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) \\ \cos[(n-1)\theta] &= \cos(n\theta)\cos(\theta) + \sin(n\theta)\sin(\theta). \end{aligned}$$

Somando membro a membro ambas equações teremos,

$$\begin{aligned} \cos[(n+1)\theta] + \cos[(n-1)\theta] &= 2\cos(n\theta)\cos(\theta) \\ T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) &= 2xT_n(x), \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

e ainda $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$, $n \geq 1$. \square

Proposição 2. *O coeficiente líder dos polinômios de Chebichev do primeiro tipo ($a_{n,n}$) é dado pela fórmula,*

$$a_{n,n} = 2^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.3)$$

Demonstração. Fazendo o recurso do método da indução finita, teremos o seguinte: Para $n = 1$, $T_1(x) = x$, onde o coeficiente líder de x é 1, isto é, $2^{1-1} = 2^0 = 1$. Suponhamos agora, que $n = k$, então,

$$T_n(x) = a_{n,n}x^n + \dots$$

será dado por

$$T_k(x) = a_{k,k}x^k + \dots$$

assim, podemos afirmar que,

$$a_{k,k} = 2^{k-1}.$$

Desta forma, provemos que para $n = k + 1$, o coeficiente principal do polinómio

$$T_{k+1}(x) = a_{k+1,k+1}x^{k+1} + \dots$$

é dado por

$$a_{k+1,k+1} = 2^{k+1-1} = 2^k.$$

Usando a relação de recorrência (5.2) teremos,

$$\begin{aligned} T_{k+1}(x) &= 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) \\ (a_{k+1,k+1})x^{k+1} &= 2x(a_{k,k})x^k \\ (a_{k+1,k+1})x^{k+1} &= 2x(2^{k-1})x^k \\ (a_{k+1,k+1})x^{k+1} &= 2 \cdot (2^{k-1})x^{k+1} \\ (a_{k+1,k+1})x^{k+1} &= 2^k x^{k+1} \\ a_{k+1,k+1} &= 2^k. \end{aligned}$$

Portanto, fica assim provado que (5.3) gera os coeficientes líderes dos polinómios de Chebichev do primeiro tipo. \square

Para mostrar a relação de recorrência no caso mónico, que já foi visto de forma geral em (2.5), basta dividir a relação de recorrência (5.2) pelo coeficiente líder (5.3), e,

$$\hat{T}_0(x) = 1, \quad \hat{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) \quad n \geq 1$$

que satisfazem a seguinte relação,

$$\hat{T}_2(x) = x\hat{T}_1(x) - \frac{1}{2}\hat{T}_0(x)$$

$$\hat{T}_{n+1}(x) = x\hat{T}_n(x) - \frac{1}{4}\hat{T}_{n-1}(x) \quad n \geq 2. \quad (5.4)$$

5.1.2 Zeros e Extremos

Proposição 3. Os zeros dos polinômios $T_n(x)$ em $[-1, 1]$, são reais e podem ser obtidos pela seguinte fórmula:

$$x_{n,k} = \cos(\theta_{n,k}), \quad \theta_{n,k} = \frac{(2k-1)\pi}{2n}, k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.5)$$

Demonstração. Os zeros de qualquer função representam os pontos do eixo x onde a função se anula, assim sendo, a partir da definição 5.1 teremos:

$$\begin{aligned} T_n(x) = \cos(n\theta) \rightarrow \cos(n\theta) = 0, \quad n\theta = \pi/2 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \theta = \frac{(2k+1)\pi/2}{n} = \frac{(2k+1)\pi}{2n}. \end{aligned}$$

Fazendo $k = 0, 1, \dots, n-1$ teremos,

$$x_0 = \cos \frac{\pi}{2n}, x_1 = \cos \frac{3\pi}{2n}, x_2 = \cos \frac{5\pi}{2n}, \dots, x_{n-1} = \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n}. \quad (5.6)$$

Portanto, podemos encontrar todos os zeros de $T_n(x)$ a partir de:

$$x_{n,k} = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

□

Proposição 4. $T_n(x)$ apresenta $n+1$ extremos locais no intervalo $[-1, 1]$ e estes extremos são dados por

$$x_{n,k} = \cos\left(\frac{n-k}{n}\pi\right), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Demonstração. Vamos usar a equação (5.1)

$$\begin{aligned} T_n(x) = \cos(n\theta), \quad x = \cos(\theta) \\ T'_n(x) = \frac{dT_n(x)}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{dT_n(x)}{d\theta} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{d\theta}} = -n \sin(n\theta) \cdot \frac{1}{-\sin(\theta)}. \end{aligned}$$

Agora, devemos igualar $T'_n(x)$ e resolver a equação trigonométrica obtida, assim teremos,

$$T'_n(x) = 0 \rightarrow \frac{n \sin(n\theta)}{\sin(\theta)} = 0,$$

$$\sin(n\theta) = 0 \rightarrow n\theta = 0 + k\pi \rightarrow \theta = \frac{k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, os extremantes serão dados por,

$$\cos(\theta) = \cos \frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

$$x_{n,k} = \cos \frac{k\pi}{n}, k = 0, 1, \dots, n. \quad (5.7)$$

De forma a usar os extremos na ordem crescente, teremos que, $x_{n,k} = \cos \frac{(n-k)\pi}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n$. □

Proposição 5. *Os polinômios de Chebichev do primeiro tipo no ponto $x = 1$ tomam o seguinte valor,*

$$T_n(1) = 1, \quad \forall n \geq 0.$$

Demonstração. No caso em que $n = 0$, $T_0(x) = 1 \Rightarrow T_0(1) = 1$; Se $n = 1$, $T_1(x) = x$ então $T_1(1) = 1$. Vamos supor que para $n \leq k - 1$, $T_n(1) = 1$ e vamos provar que para $n = k$ $T_n(1) = 1$. Usando a relação de recorrência (5.2) teremos:

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x);$$

logo, aplicando a hipótese

$$T_k(1) = 2 \cdot 1 \cdot T_{k-1}(1) - T_{k-2}(1) = 2 \cdot 1 - 1.$$

Tendo-se assim que $T_k(1) = 1$. □

Proposição 6. *Os polinômios de Chebichev do primeiro tipo no ponto $x = -1$ tomam os seguintes valores,*

$$T_n(-1) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ par} \\ -1 & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases} \quad (5.8)$$

Demonstração. Se $n = 0$, $T_0(x) = 1$ então $T_0(-1) = 1$. Se $n = 1$, $T_1(x) = x$ então $T_1(-1) = -1$. Vamos supor que para $n \leq k - 1$, ou seja, para os valores $\{0, 1, 2, \dots, 2k - 2, 2k - 1\}$ as igualdades,

$$T_{2n}(-1) = 1, \quad n \geq 0, \quad T_{2n+1}(-1) = -1, \quad n \geq 0$$

são verdadeiras. Vamos mostrar que para $n = k$, ou seja, para os valores $\{2k, 2k + 1\}$, a igualdade é válida. Usando a relação de recorrência (5.2) teremos:

$$\begin{aligned} T_{2k}(-1) &= 2(-1)T_{2k-1}(-1) - T_{2k-2}(-1) \\ &= -2(-1) - 1 \\ &= 2 - 1 \\ &= 1; \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T_{2k+1}(-1) &= 2(-1)T_{2k}(-1) - T_{2k-1}(-1) \\ &= -2(1) - (-1) \\ &= -2 + 1 \\ &= -1. \end{aligned}$$

□

Teorema 5.1.2. *Os polinômios de Chebichev do primeiro tipo são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ em relação à função peso $w(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, isto é,*

$$\langle T_n, T_m \rangle = \int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)w(x) dx = 0, \quad n \neq m. \quad (5.9)$$

Demonstração. Partindo da Definição 5.1 teremos que $x = \cos \theta \Rightarrow dx = -\sin \theta$; para $x = -1$, $\theta = \pi$ e para $x = 1$, $\theta = 0$, assim,

$$\begin{aligned}
\langle T_n, T_m \rangle &= \int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx \\
&= \int_{\pi}^0 \frac{\cos(n\theta) \cos(m\theta)(-\sin(\theta))d\theta}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)}} \\
&= \int_0^{\pi} \frac{\cos(n\theta) \cos(m\theta)(\sin(\theta))d\theta}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)}} \\
&= \int_0^{\pi} \frac{\cos(n\theta) \cos(m\theta)(\sin(\theta))d\theta}{\sin(\theta)} \\
&= \int_0^{\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta] d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(n+m)\theta d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(n-m)\theta d\theta \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n+m)\theta}{n+m} + \frac{\sin(n-m)\theta}{n-m} \right]_0^{\pi} = 0, \quad n \neq m.
\end{aligned}$$

No caso em que $n = m$, teremos,

$$\begin{aligned}
\langle T_n, T_n \rangle &= \int_{-1}^1 T_n(x)T_n(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx \\
&= \int_{-1}^1 (T_n(x))^2 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx \\
&= \int_0^{\pi} \frac{\cos^2(n\theta) \sin(\theta)}{\sqrt{1-\cos^2 \theta}} d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \cos^2(n\theta)d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos(2n\theta))d\theta \\
&= \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{\sin(2n\theta)}{2n} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}, \quad n > 0
\end{aligned}$$

e para $n = 0$ teremos: $\langle T_0, T_0 \rangle = \int_0^{\pi} d\theta = \pi$. □

5.2 Polinómio de Chebichev do Segundo Tipo

Definição 5.2.1. O polinómio de Chebichev do segundo tipo, representado por $U_n(x)$, é um polinómio em x de grau n definido pela relação,

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin(\theta)}, \quad x = \cos(\theta), \quad (5.10)$$

onde $x = [-1, 1]$ e $\theta = [0, \pi]$.

Atribuindo valores a n podemos, a partir de (5.10) encontrar todos os polinômios de Chebichev do segundo tipo,

$$\frac{\sin(0+1)\theta}{\sin(\theta)} = \frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta)} = 1, n = 0;$$

$$\frac{\sin(1+1)\theta}{\sin(\theta)} = \frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{2\cos(\theta)\sin(\theta)}{\sin(\theta)} = 2\cos(\theta) = 2x, n = 1;$$

$$\frac{\sin(2+1)\theta}{\sin(\theta)} = \frac{\sin(3\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta)}{\sin(\theta)} = 4\cos^2(\theta) - 1 = 4x^2 - 1, n = 2;$$

$$\frac{\sin(3+1)\theta}{\sin(\theta)} = \frac{\sin(4\theta)}{\sin(\theta)} = \sin(\theta) \frac{3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta)}{\sin(\theta)} = 4\cos^2(\theta) - 1 = 4x^2 - 1, n = 2;$$

assim por diante, os primeiros polinômios de Chebichev estão representados na Figura 5.2.

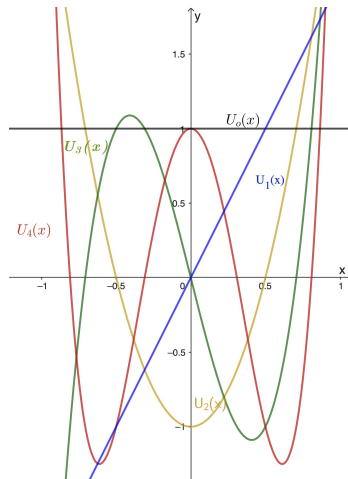


Figura 5.2: Gráfico representativo dos primeiros 5 polinômios de Chebichev do segundo tipo.

5.2.1 Relação de recorrência

Teorema 5.2.1. *Os polinômios de Chebichev do segundo tipo podem ser obtidos a partir da seguinte relação de recorrência*

$$\begin{cases} U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}, & x = \cos(\theta) \\ U_0(x) = 1, \\ U_1(x) = 2x, \\ U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), & n \geq 2. \end{cases} \quad (5.11)$$

Demonstração. Usando a relação trigonométrica bem conhecida, nomeadamente o seno da soma, teremos:

$$\sin(n+1)\theta = \sin(n)\theta \cos \theta + \sin \theta \cos(n)\theta \quad (5.12)$$

$$\sin(n-1)\theta = \sin(n)\theta \cos \theta - \sin \theta \cos(n)\theta. \quad (5.13)$$

Adicionando as equações (5.12) e (5.13) teremos;

$$\sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta = 2 \sin(n)\theta \cos \theta. \quad (5.14)$$

Multiplicando ambos membros da equação (5.14) por $\frac{1}{\sin(\theta)}$ teremos

$$\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin(\theta)} + \frac{\sin(n-1)\theta}{\sin(\theta)} = 2 \cdot \frac{\sin(n)\theta \cos \theta}{\sin(\theta)}.$$

Assim, tendo em conta a equação (5.10) teremos

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x) \quad \text{com} \quad n \geq 2.$$

□

Proposição 7. *O grau do n -ésimo polinómio de Chebichev do segundo tipo é igual a n , ou seja,*

$$\text{gr}(U_n(x)) = n.$$

Demonstração. A partir da equação (5.10) sabemos que,

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1 \Rightarrow \text{gr}(U_0(x)) = 0, \\ U_1(x) &= 2x \Rightarrow \text{gr}(U_1(x)) = 1, \\ U_2(x) &= 4x^2 - 1 \Rightarrow \text{gr}(U_2(x)) = 2, \\ U_3(x) &= 8x^3 - 4x \Rightarrow \text{gr}(U_3(x)) = 3, \end{aligned}$$

assim por diante, e isto nos sugere que $\text{gr}(U_n(x)) = n$.

Vamos-nos apoiar ao processo de indução para provar tal facto. Para $n = 0$ temos que $\text{gr}(U_0(x)) = 0$. Suponhamos que $\text{gr}(U_k(x)) = k$ com $k = 0, 1, 2, \dots, n$ (hipótese da indução). Por outro lado sabemos de (5.11) que,

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x),$$

assim teremos,

$$\begin{aligned} \text{gr}(U_n(x)) &= \text{gr}(2x) + \text{gr}(U_{n-1}(x)) \\ \text{gr}(U_n(x)) &= 1 + n - 1, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Proposição 8. *O coeficiente líder dos polinómios de Chebichev do segundo tipo ($b_{n,n}$) é dado por*

$$b_{n,n} = 2^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.15)$$

Demonstração. À semelhança da prova anterior usaremos o processo de indução. Se $n = 1$, $U_1(x) = 2x$, o coeficiente líder é 2, isto é, $2^n = 2^1 = 2$. Se $n = 2$, $U_2(x) = 4x^2 - 1$, o coeficiente líder é 4, isto é, $2^n = 2^2 = 4$. Suponhamos agora, que $n = k$, então,

$$U_n(x) = b_{n,n}x^n + \dots$$

será dado por

$$U_k(x) = b_{k,k}x^k + \dots;$$

assim, podemos afirmar, por hipótese, que,

$$b_{k,k} = 2^k.$$

Desta forma, provemos que para $n = k + 1$, o coeficiente líder do polinómio

$$U_{k+1}(x) = b_{k+1,k+1}x^{k+1} + \dots$$

é dado por

$$b_{k+1,k+1} = 2^{k+1}.$$

Usando a relação de recorrência (5.11) teremos,

$$\begin{aligned} U_{k+1}(x) &= 2xU_k(x) - U_{k-1}(x) \\ (b_{k+1,k+1})x^{k+1} &= 2x(b_{k,k})x^k \\ (b_{k+1,k+1})x^{k+1} &= 2x(2^k)x^k \\ (b_{k+1,k+1})x^{k+1} &= (2^{k+1})x^{k+1}. \end{aligned}$$

Assim, $b_{k+1,k+1} = 2^{k+1}$. Portanto, fica provado que (5.15) gera os coeficientes líderes dos polinómios de Chebichev do segundo tipo. \square

A relação de recorrência para os mónicos do segundo tipo pode ser encontrada utilizando procedimentos análogos aos já usados em (5.4) e obtém-se:

$$\hat{U}_{n+1}(x) = x\hat{U}_n(x) - \frac{1}{4}\hat{U}_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (5.16)$$

com condições iniciais $\hat{U}_0(x) = 1$ e $\hat{U}_1(x) = x$.

5.2.2 Zeros

Proposição 9. *Os zeros dos polinómios $U_n(x)$ em $[-1, 1]$, são reais e podem ser obtidos pela seguinte fórmula:*

$$x_{n,k} = \cos(\theta_{n,k}), \quad \theta_{n,k} = \frac{(n-k+1)\pi}{n+1}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (5.17)$$

Demonstração. Os zeros da função $U_n(x)$, para $x \in [-1, 1]$ correspondem aos zeros da função $\sin(n+1)\theta$, assim, a partir da definição 5.1 teremos:

$$\begin{aligned}\sin(n+1)\theta &= 0 \\ (n+1)\theta &= 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \theta &= \frac{k\pi}{n+1}.\end{aligned}$$

Desta forma, os zeros dos polinômios de Chebichev do segundo tipo são explicitamente determinado por,

$$x_{n,k} = \cos \frac{k}{n+1}\pi. \quad (5.18)$$

Como as variáveis x e θ são percorridas em sentidos contrários então a sucessão apresentada em (5.18) vai gerar uma sucessão decrescente. Para reordenar esta sucessão vamos usar a seguinte expressão:

$$x_{n,k} = \frac{(n-k+1)\pi}{n+1}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (5.19)$$

□

Proposição 10. *No ponto $x = 1$ os polinômios de Chebichev do segundo tipo de grau n tomam valor $n+1$.*

Demonstração. Para $n = 0$, $U_0(x) = 1$ então $U_0(1) = 1$; para $n = 1$, $U_1(x) = 2x$ então $U_1(1) = 2$. Vamos supor que para $n \leq k-1$ $U_n(x) = n+1$ é verdadeira. Temos que provar, que para $n = k$, $U_k(1) = k+1$ continua sendo verdadeira.

Recorrendo à relação de recorrência (5.11) teremos,

$$\begin{aligned}U_k(x) &= 2xU_{k-1}(x) - U_{k-2}(x), \\ U_k(1) &= 2 \cdot 1 \cdot U_{k-1}(1) - U_{k-2}(1), \\ U_k(1) &= 2 \cdot ((k-1)+1) - ((k-2)+1), \\ U_k(1) &= 2k - k + 1,\end{aligned}$$

logo $U_k(1) = k+1$. □

Proposição 11. *Os polinômios de Chebichev do segundo tipo de grau n , no ponto $x = -1$ tomam os seguintes valores,*

$$U_n(-1) = \begin{cases} n+1 & \text{se } n \text{ par} \\ -(n+1) & \text{se } n \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Demonstração. Para $n = 0$, $U_0(x) = 1$ então $U_0(-1) = 1$; para $n = 1$, $U_1(x) = 2x$ então $U_1(-1) = -2$. Suponhamos que para $n \leq k-1$ as igualdades

$$\begin{aligned}U_n(-1) &= n+1, & n \text{ par} \\ U_n(-1) &= -(n+1) & n \text{ ímpar}\end{aligned}$$

são verdadeiras. Sendo $n = 2k$ e $x = -1$, usando a relação de recorrência (5.11) teremos:

$$\begin{aligned} U_{2k}(-1) &= 2(-1)U_{2k-1}(-1) - U_{2k-2}(-1) \\ &= -2[-(2k-1) - 1] - [(2k-2) + 1] \\ &= 4k - 2k + 1 \\ &= 2k + 1; \end{aligned}$$

e, considerando agora, $n = 2k + 1$ e $x = -1$ teremos,

$$\begin{aligned} U_{2k+1}(-1) &= 2(-1)U_{2k}(-1) - U_{2k-1}(-1) \\ &= -2(2k+1) - [-(2k-1) - 1] \\ &= -4k - 2 + 2k \\ &= -2k - 2 \\ &= -[(2k+1) + 1]. \end{aligned}$$

□

Teorema 5.2.2. *Os polinômios de Chebichev do segundo tipo são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ em relação à função peso $w(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, isto é,*

$$\langle U_n, U_m \rangle = \int_{-1}^1 U_n(x)U_m(x)w(x) dx = 0, \quad n \neq m.$$

Demonstração. Partindo de (5.10) teremos que $x = \cos \theta \Rightarrow dx = -\sin \theta d\theta$; para $x = -1$, $\theta = \pi$ e para $x = 1$, $\theta = 0$, assim,

$$\begin{aligned} \langle U_n, U_m \rangle &= \int_{\pi}^0 \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\sin(m+1)\theta}{\sin \theta} (1 - \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} (-\sin \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+1)\theta \sin(m+1)\theta}{\sin^2 \theta} \sin^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \sin(n+1)\theta \sin(m+1)\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos(n-m)\theta - \cos(n+m+2)\theta] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n-m)\theta}{n-m} - \frac{\sin(n+m+2)\theta}{n+m+2} \right]_0^{\pi} = 0, \quad n \neq m. \end{aligned}$$

Se considerarmos que $n = m$, teremos:

$$\begin{aligned} \langle U_n, U_n \rangle &= \int_{-1}^1 (U_n(x))^2 w(x) dx \\ &= \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} \right)^2 (1 - \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin^2(n+1)\theta}{\sin^2 \theta} \sin^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \sin^2(n+1)\theta d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2(n+1)\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{\sin 2(n+1)\theta}{2(n+1)} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

□

5.3 Polinômios de Chebichev do Terceiro e Quarto Tipo

Há duas famílias de polinômios de Chebichev que podem ser construídas, denotaremos por $V_n(x)$ e $W_n(x)$ que estão relacionadas com os polinômios $T_n(x)$ e $U_n(x)$. Para construção destas famílias são usados os ângulos metades, isto é, $\frac{\theta}{2}$, são também conhecidos como polinômios de perfil aerodinâmico; porém foi W. Gautschī quem os denominou de Polinômios de Chebichev do Terceiro e Quarto Tipo, sendo que, estes polinômios têm características semelhantes dos polinômios do primeiro e segundo tipos.

Definição 5.3.1. *Os polinômios de Chebichev do terceiro e quarto tipos, representados por $V_n(x)$ e $W_n(x)$, são polinômios em x de grau n definidos pela relação,*

$$V_n(x) = \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\theta}{\cos \frac{\theta}{2}}, \quad x = \cos \theta, \quad (5.20)$$

e

$$W_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}, \quad x = \cos \theta, \quad (5.21)$$

sendo que, $\theta \in [0, \pi]$ e $x \in [-1, 1]$.

A justificação desta definição baseia-se numa substituição de variável, como se pode observar a seguir: $\cos(n + \frac{1}{2})\theta = \cos(2n+1)\frac{\theta}{2}$, fazendo $t = \frac{\theta}{2}$, teremos $\cos(n + \frac{1}{2})\theta = \cos(2n+1)t$, que é um polinômio ímpar de grau $2n+1$ contendo somente potências de grau ímpar de $\cos t$; assim se pode colocar em evidência $\cos t$ para simplificar com o denominador. Portanto, o membro direito é um polinômio par de grau $2n$ em $\cos t$, o que equivale a um polinômio de grau n em $\cos^2 t$. Mas,

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} \Leftrightarrow \cos^2 t = \frac{1 + \cos \theta}{2} = \frac{1 + x}{2}.$$

Assim, $V_n(x)$ é um polinômio de grau n em x . De forma análoga, $\sin(n + \frac{1}{2})\theta = \sin(2n+1)\frac{\theta}{2} = \sin(2n+1)t$ pode ser escrito como produto de $\sin(t)$ com um polinômio de grau par em $\cos(t)$, logo é possível a simplificação de $\sin(t)$ com seu denominador. Assim, o lado direito será um polinômio de grau n em $\cos^2 t$ e $W_n(x)$ será um polinômio de grau n em x .

Observemos alguns exemplos: Partindo de (5.20) teremos que, para $n = 0$, $V_0(x) = \frac{\cos(0 + \frac{1}{2})\theta}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos(\frac{1}{2})\theta}{\cos \frac{\theta}{2}} = 1$; para $n = 1$, $V_1(x) = \frac{\cos(1 + \frac{1}{2})\theta}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos(\frac{3}{2})\theta}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos(3)\frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}}$ fazendo $t = \frac{\theta}{2}$ teremos,

$$V_1(x) = \frac{\cos(3t)}{\cos t} = \frac{4 \cos^3(t) - 3 \cos(t)}{\cos t} = 4 \cos^2(t) - 3$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3 \\
&= 4 \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) - 3 \\
&= 2 \cos(\theta) - 1 \\
&= 2x - 1.
\end{aligned}$$

para $n = 2$, $V_2(x) = \frac{\cos(2 + \frac{1}{2})\theta}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos(\frac{5}{2})\theta}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos(5)\frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}}$ fazendo $t = \frac{\theta}{2}$ teremos,

$$\begin{aligned}
V_2(x) &= \frac{\cos(5t)}{\cos t} = \frac{16 \cos^5(t) - 20 \cos^3(t) + 5 \cos(t)}{\cos t} \\
&= 16 \cos^4(t) - 20 \cos^2(t) + 5 \\
&= 16 \left(\cos^2 \frac{\theta}{2}\right)^2 - 20 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) + 5 \\
&= 16 \cdot \frac{1}{4}(1 + \cos \theta)^2 - 20 \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) + 5 \\
&= 4(1 + x)^2 - 10(1 + x) + 5 \\
&= 4x^2 - 2x - 1.
\end{aligned}$$

para $n = 3$, $V_3(x) = \frac{\cos(3 + \frac{1}{2})\theta}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos(\frac{7}{2})\theta}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos(7)\frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}}$ fazendo $t = \frac{\theta}{2}$ teremos,

$$\begin{aligned}
V_3(x) &= \frac{\cos(7t)}{\cos t} = \frac{64 \cos^7(t) - 112 \cos^5(t) + 56 \cos^3(t) - 7 \cos(t)}{\cos t} \\
&= 64 \cos^6(t) - 112 \cos^4(t) + 56 \cos^2(t) - 7 \\
&= 64 \left(\cos^2 \frac{\theta}{2}\right)^3 - 112 \left(\cos^2 \frac{\theta}{2}\right)^2 + 56 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) - 7 \\
&= 64 \cdot \frac{1}{8}(1 + \cos \theta)^3 - 112 \cdot \frac{1}{4}(1 + \cos \theta)^2 + 56 \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) - 7 \\
&= 8(1 + x)^3 - 28(1 + x)^2 + 28(1 - x) - 7 \\
&= 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1,
\end{aligned}$$

e assim por diante. Desta forma, os primeiros polinômios de Chebichev do terceiro tipo são:

$$V_0(x) = 1, \quad V_1(x) = 2x - 1, \quad V_2(x) = 4x^2 - 2x - 1, \quad V_3(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1, \quad \dots$$

A Figura 5.3 é uma representação geométrica destes polinômios.

De forma análoga podemos achar os primeiros polinômios de Chebichev do quarto tipo, partindo de (5.21). Assim, teremos: Para $n = 0$, $W_0(x) = \frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} = 1$; Para $n = 1$,

$$W_1(x) = \frac{\sin(1 + \frac{1}{2})\theta}{\sin(\frac{\theta}{2})} = \frac{\sin(3)\frac{\theta}{2}}{\sin(\frac{\theta}{2})} \text{ fazendo } t = \frac{\theta}{2} \text{ teremos:}$$

$$W_1(x) = \frac{\sin(3)t}{\sin(t)} = \frac{3 \sin(t) - 4 \sin^3(t)}{\sin(t)}$$

$$\begin{aligned}
&= 3 - 4 \sin^2(t) = 3 - 4(1 - \cos^2(t)) = 4 \cos^2(t) - 1 \\
&= 4 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 = 4 \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) - 1 = 2 \cos \theta + 1 \\
&= 2x + 1.
\end{aligned}$$

Para $n = 2$, $W_2(x) = \frac{\sin(2 + \frac{1}{2})\theta}{\sin(\frac{\theta}{2})} = \frac{\sin(5)\frac{\theta}{2}}{\sin(\frac{\theta}{2})}$ fazendo $t = \frac{\theta}{2}$ teremos:

$$\begin{aligned}
W_2(x) &= \frac{\sin(5)t}{\sin(t)} = \frac{16 \sin^5(t) - 20 \sin^3(t) + 5 \sin(t)}{\sin(t)} \\
&= 16 \sin^4(t) - 20 \sin^2(t) + 5 = 16(\sin^2(t))^2 - 20 \sin^2(t) + 5 \\
&= 16(1 - \cos^2(t))^2 - 20(1 - \cos^2(t)) + 5 = 16 \cos^4(t) - 12 \cos^2(t) + 1 \\
&= 16 \cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) - 12 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 1 = 4(1 + \cos \theta)^2 - 6(1 + \cos \theta) + 1 \\
&= 4(1 + x)^2 - 6(1 + x) + 1 \\
&= 4x^2 + 2x - 1;
\end{aligned}$$

assim por diante. Desta forma, os primeiros polinômios de Chebichev do quarto tipo são:

$$W_0(x) = 1, \quad W_1(x) = 2x + 1, \quad W_2(x) = 4x^2 + 2x - 1, \quad W_3(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x + 1, \quad \dots$$

A Figura 5.4 é uma representação geométrica destes polinômios.

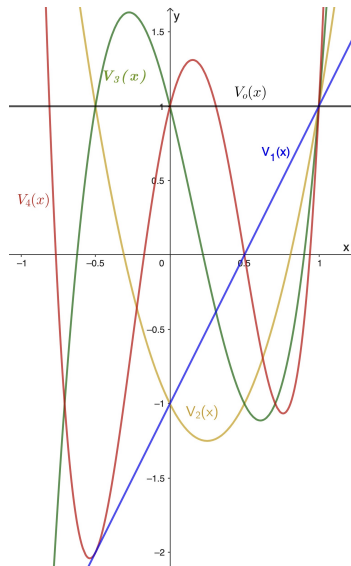


Figura 5.3: Gráfico representativo dos primeiros polinômios de Chebichev do terceiro tipo.

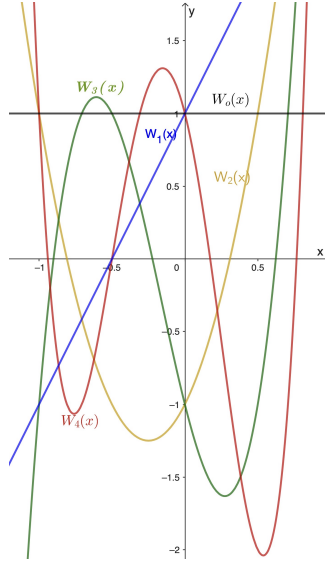


Figura 5.4: Gráfico representativo dos primeiros polinômios de Chebichev do quarto tipo.

5.3.1 Relação de recorrência dos polinômios de Chebichev do terceiro tipo

Teorema 5.3.1. *Os polinômios de Chebichev do terceiro tipo podem ser obtidos a partir da seguinte relação de recorrência*

$$\begin{cases} V_n(x) = \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}, & x = \cos(\theta), \\ V_0(x) = 1, & n = 0, \\ V_1(x) = 2x - 1, & n = 1, \\ V_n(x) = 2xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x), & n \geq 2. \end{cases} \quad (5.22)$$

Demonstração. Consideremos que $n \geq 2$ e que $\cos\frac{\theta}{2} \neq 0$. Partindo de (5.20) teremos:

$$\begin{aligned} V_n(x) &= \frac{\cos(n-1+\frac{1}{2}+1)\theta}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos(n-1+\frac{1}{2})\theta \cos\theta - \sin(n-1+\frac{1}{2})\theta \sin\theta}{\cos\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\cos(n-1+\frac{1}{2})\theta \cos\theta - \frac{\cos((n-1)+\frac{1}{2}-1)\theta - \cos((n-1)+\frac{1}{2}+1)\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{2\cos(n-1+\frac{1}{2})\theta \cos\theta - [\cos((n-1)+\frac{1}{2}-1)\theta - \cos((n-1)+\frac{1}{2}+1)\theta]}{2\cos\frac{\theta}{2}} \\ 2V_n(x) &= \frac{2\cos((n-1)+\frac{1}{2})\theta \cos\theta}{\cos\frac{\theta}{2}} - \frac{\cos((n-2)+\frac{1}{2})\theta}{\cos\frac{\theta}{2}} + \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{\cos\frac{\theta}{2}} \\ 2V_n(x) &= 2xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x) + V_n(x) \\ V_n(x) &= 2xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x). \end{aligned}$$

□

5.3.2 Relação de recorrência dos polinômios de Chebichev do quarto tipo

Teorema 5.3.2. *Os polinômios de Chebichev do quarto tipo podem ser obtidos a partir da seguinte relação de recorrência*

$$\begin{cases} W_n(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}, & x = \cos(\theta), \\ W_0(x) = 1, & n = 0, \\ W_1(x) = 2x + 1, & n = 1, \\ W_n(x) = 2xW_{n-1}(x) - W_{n-2}(x), & n \geq 2. \end{cases} \quad (5.23)$$

Demonstração. Consideremos que $n \geq 2$ e que $\sin\frac{\theta}{2} \neq 0$. Partindo de (5.21) teremos:

$$\begin{aligned} W_n(x) &= \frac{\sin(n-1+\frac{1}{2}+1)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin(n-1+\frac{1}{2})\theta \cos\theta + \sin\theta \cos(n-1+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\sin(n-1+\frac{1}{2})\theta \cos\theta + \frac{\sin((n-1)+\frac{1}{2}+1)\theta + \sin(1-(n-1)-\frac{1}{2})\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{2\sin(n-1+\frac{1}{2})\theta \cos\theta + [\sin(n+\frac{1}{2})\theta - \sin((n-2)+\frac{1}{2})\theta]}{2\sin\frac{\theta}{2}} \\ 2W_n(x) &= \frac{2\sin((n-1)+\frac{1}{2})\theta \cos\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} - \frac{\sin((n-2)+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \\ 2W_n(x) &= 2xW_{n-1}(x) + W_n(x) - W_{n-2}(x) \\ W_n(x) &= 2xW_{n-1}(x) - W_{n-2}(x). \end{aligned}$$

□

5.3.3 Zeros

Proposição 12. *Os zeros dos polinômios de Chebichev de terceira e quarta espécie são dados respectivamente, pelas seguintes fórmulas,*

$$x_{n,k} = \cos\theta_{n,k}, \quad \theta_{n,k} = \frac{(k-\frac{1}{2})\pi}{n+\frac{1}{2}} \quad (5.24)$$

e

$$x_{n,k} = \cos\theta_{n,k}, \quad \theta_{n,k} = \frac{k\pi}{n+\frac{1}{2}}, \quad (5.25)$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Os zeros da função $V_n(x)$, para $x \in [-1, 1]$, que correspondem aos zeros da função $\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta$, para $\theta \in [0, \pi], \theta \neq \pi$, podem ser calculados da seguinte maneira:

$$V_n(x) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\iff \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{\theta}{2}} = 0 \\
&\iff \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta = 0 \\
&\iff \left(n + \frac{1}{2}\right)\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z} \\
&\iff \theta_{n,k} = \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}{n + \frac{1}{2}}, \qquad k = 0, 1, \dots, n-1 \\
&\iff \theta_{n,k} = \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi}{n + \frac{1}{2}}, \qquad k = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\cos\theta_{n,k} = \cos\frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi}{n + \frac{1}{2}}, k = 1, \dots, n \qquad \text{e} \qquad x_{n,k} = \cos\frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi}{n + \frac{1}{2}}.$$

No caso da função $W_n(x)$, teremos:

$$\begin{aligned}
&W_n(x) = 0 \\
&\iff \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} = 0 \\
&\iff \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta = 0 \\
&\iff \left(n + \frac{1}{2}\right)\theta = 0 + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}, \\
&\iff \theta_{n,k} = \frac{k\pi}{n + \frac{1}{2}}, \qquad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\cos\theta_{n,k} = \cos\frac{k\pi}{n + \frac{1}{2}}, k = 1, \dots, n \qquad \text{e} \qquad x_{n,k} = \cos\frac{k\pi}{n + \frac{1}{2}}.$$

□

Proposição 13. *Os polinômios de Chebichev do terceiro tipo de grau n , no ponto $x = 0$ tomam os seguintes valores,*

$$V_n(0) = \begin{cases} (-1)^n & \text{se } n \text{ par,} \\ (-1)^{n+1} & \text{se } n \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Demonstração. Usando o processo de indução teremos:

$$V_0(x) = 1 \Rightarrow V_0(0) = 1, \qquad V_1(x) = 2x - 1 \Rightarrow V_1(0) = -1,$$

e por hipótese,

$$V_{2n}(0) = (-1)^n, \qquad V_{2n+1}(0) = (-1)^{n+1}.$$

Fazendo $n = 2k$ e usando a relação de recorrência (5.22) teremos,

$$\begin{aligned} V_{2k} &= 2 \cdot 0 \cdot V_{2k-1} - V_{2k-2} \\ V_{2k} &= 2 \cdot 0 \cdot (-1)^{k+1} - (-1)^{k-1} \\ V_{2k} &= -(-1)^k \cdot (-1)^{(-1)} \\ V_{2k} &= (-1)^k. \end{aligned}$$

Por outro lado, fazendo $n = 2k + 1$ teremos,

$$\begin{aligned} V_{2k+1} &= 2 \cdot 0 \cdot V_{2k} - V_{2k-1} \\ V_{2k+1} &= 2 \cdot 0 \cdot (-1)^k - (-1)^{k+1} \\ V_{2k+1} &= -(-1)^{k+1} \\ V_{2k+1} &= (-1) \cdot (-1)^{k+1} \\ V_{2k+1} &= (-1)^{k+2} \\ V_{2k+1} &= (-1)^{(k+1)+1}. \end{aligned}$$

□

Proposição 14. *Os polinômios de Chebichev do terceiro tipo de grau n , no ponto $x = 1$ tomam os seguintes valores, $V_n(1) = 1$.*

Demonstração. Usando o processo de indução, teremos:

$$V_0(x) = 1 \Rightarrow V_0(1) = 1$$

$$V_1(x) = 2x - 1 \Rightarrow V_1(1) = 1$$

Supondo que, para $n \leq k - 1$, $V_n(1) = 1$ continua sendo verdadeira. Assim, para $n = k$ e usando a relação de recorrência (5.22) teremos:

$$V_k(1) = 2 \cdot 1 \cdot V_{k-1} - V_{k-2}$$

$$V_k(1) = 2 \cdot 1 - 1$$

$$V_k(1) = 1.$$

□

Proposição 15. *Os polinômios de Chebichev do terceiro tipo de grau n , no ponto $x = -1$ tomam os seguintes valores,*

$$V_n(-1) = \begin{cases} 2n + 1 & \text{se } n \text{ par} \\ -(2n + 1) & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases} \quad (5.26)$$

Demonstração. Usando o processo de indução, teremos:

$$V_0(x) = 1 \Rightarrow V_0(-1) = 1$$

$$V_1(x) = 2x - 1 \Rightarrow V_1(-1) = -3.$$

Supondo que, para $n \leq k - 1$, a equação (5.26) continua sendo verdadeira, se $n = 2k$, usando a relação de recorrência (5.22) teremos:

$$\begin{aligned} V_{2k}(-1) &= 2 \cdot (-1) \cdot V_{2k-1}(-1) - V_{2k-2}(-1) \\ V_{2k}(-1) &= 2[2(2k-1) + 1] - [2(2k-2) + 1] \\ V_{2k}(-1) &= 2(4k-1) - (4k-3) \\ V_{2k}(-1) &= 4k + 1 \\ V_{2k}(-1) &= 2(2k) + 1. \end{aligned}$$

No caso em que $n = 2k + 1$ teremos:

$$\begin{aligned} V_{2k+1}(-1) &= 2 \cdot (-1) \cdot V_{2k}(-1) - V_{2k-1}(-1) \\ V_{2k+1}(-1) &= -2[2(2k) + 1] - \{-2[(2k-1) + 1]\} \\ V_{2k+1}(-1) &= -8k - 2 + 4k - 1 = -4k - 3 \\ V_{2k+1}(-1) &= -[2(2k+1) + 1]. \end{aligned}$$

□

Usando o raciocínio análogo aos das proposições anteriores, pode-se provar com facilidade as proposições que se seguem relativamente a $W_n(0)$, $W_n(1)$ e $W_n(-1)$.

Proposição 16. *Os polinômios de Chebichev do quarto tipo de grau n , no ponto $x = 0$ tomam os seguintes valores,*

$$W_{2n}(0) = (-1)^n, \quad W_{2n+1}(0) = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Proposição 17. *Os polinômios de Chebichev do quarto tipo de grau n , no ponto $x = 1$ tomam os seguinte valor,*

$$W_n(1) = 2n + 1, \quad \forall n \geq 0.$$

Proposição 18. *Os polinômios de Chebichev do quarto tipo de grau n , no ponto $x = -1$ tomam o seguinte valor,*

$$W_n(-1) = (-1)^n, \quad \forall n \geq 0.$$

Teorema 5.3.3. *Os polinômios de Chebichev do terceiro tipo são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ em relação a função peso $w(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{-\frac{1}{2}}$, isto é,*

$$\langle V_n, V_m \rangle = \int_{-1}^1 V_n(x)V_m(x)w(x) dx = 0, \quad n \neq m. \quad (5.27)$$

Demonstração. Partindo de (5.20) teremos que $x = \cos \theta \Rightarrow dx = -\sin \theta d\theta$, $x = 1 \Rightarrow \theta = 0$ e $x = -1 \Rightarrow \theta = \pi$, assim, em (5.27) obtém-se:

$$\begin{aligned} \langle V_n, V_m \rangle &= \int_{-1}^1 V_n(x)V_m(x)(1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}} dx \\ \langle V_n, V_m \rangle &= \int_{-1}^1 \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}V_n(x)V_m(x)(1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}} dx}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle V_n, V_m \rangle &= \int_{-1}^1 \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}} V_n(x) V_m(x) (1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} dx \\
\langle V_n, V_m \rangle &= \int_{-1}^1 (1+x)^{\frac{1}{2}} V_n(x) V_m(x) (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Considerando que $x = \cos \theta$, então,

$$\begin{aligned}
(1+x)^{\frac{1}{2}} &= (1+\cos \theta)^{\frac{1}{2}} = \left(1 + \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(1 + \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 + \cos^2 \frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2 \cos^2 \frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{2} \cos \frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

e

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sin \theta}$$

Assim, a equação (5.28) fica,

$$\begin{aligned}
\langle V_n, V_m \rangle &= \int_{\pi}^0 \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\theta}{\cos \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{\cos(m + \frac{1}{2})\theta}{\cos \frac{\theta}{2}} \cdot \left(\sqrt{2} \cos \frac{\theta}{2}\right)^2 (-\sin \theta) d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\theta \cos(m + \frac{1}{2})\theta}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \cdot \left(2 \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) (\sin \theta) d\theta \\
&= 2 \int_0^{\pi} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta \cos\left(m + \frac{1}{2}\right)\theta d\theta \\
&= 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [\cos(n+m+1)\theta + \cos(n-m)\theta] d\theta \\
&= \left[\frac{\sin(n+m+1)\theta}{n+m+1} + \frac{\sin(n-m)\theta}{n-m} \right]_0^{\pi} = 0, \quad n \neq m.
\end{aligned}$$

Para $n = m$, teremos:

$$\begin{aligned}
\langle V_n, V_n \rangle &= 2 \int_0^{\pi} \cos^2\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta d\theta = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left[1 + \cos 2\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right] d\theta \\
&= \int_0^{\pi} d\theta + \int_0^{\pi} \cos 2\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta d\theta \\
&= \left[\theta + \frac{\cos 2\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2\left(n + \frac{1}{2}\right)} \right]_0^{\pi} = \pi.
\end{aligned}$$

□

Teorema 5.3.4. *Os polinômios de Chebichev do quarto tipo são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ em relação à função peso $w(x) = (1+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}}$, isto é,*

$$\langle W_n, W_m \rangle = \int_{-1}^1 W_n(x) W_m(x) w(x) dx = 0, \quad n \neq m. \tag{5.29}$$

Demonstração. Partindo de (5.21) teremos que $x = \cos \theta \Rightarrow dx = -\sin \theta d\theta$, $x = 1 \Rightarrow \theta = 0$ e $x = -1 \Rightarrow \theta = \pi$, assim, em (5.29) obtém-se:

$$\begin{aligned}\langle W_n, W_m \rangle &= \int_{-1}^1 W_n(x)W_m(x)(1+x)^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} dx \\ \langle W_n, W_m \rangle &= \int_{-1}^1 \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}W_n(x)W_m(x)(1-x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{-\frac{1}{2}} dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} \\ \langle W_n, W_m \rangle &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}W_n(x)W_m(x)(1-x) dx.\end{aligned}\tag{5.30}$$

Considerando que $x = \cos \theta$, então,

$$\begin{aligned}(1-x) &= (1-\cos \theta) = \left(1 - \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \\ &= \left(1 - 1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \\ &= \left(2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right).\end{aligned}\tag{5.31}$$

Assim, a equação (5.30) fica,

$$\begin{aligned}\langle W_n, W_m \rangle &= \int_{\pi}^0 \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{\sin(m + \frac{1}{2})\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \cdot \left(2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) (\sin \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta \sin(m + \frac{1}{2})\theta}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \cdot \left(2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) (\sin \theta) d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta \cdot \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)\theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [\cos(n-m)\theta + \cos(n+m+1)\theta] d\theta \\ &= \left[\frac{\sin(n-m)}{n-m} + \frac{\sin(n+m+1)}{n+m+1}\right]_0^{\pi} = 0, \quad n \neq m.\end{aligned}$$

Para $n = m$, teremos:

$$\begin{aligned}\langle W_n, W_n \rangle &= 2 \int_0^{\pi} \sin^2\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta d\theta = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left[1 - \cos 2\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right] d\theta \\ &= \int_0^{\pi} d\theta - \int_0^{\pi} \cos 2\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta d\theta \\ &= \left[\theta - \frac{\cos 2\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2\left(n + \frac{1}{2}\right)}\right]_0^{\pi} = \pi.\end{aligned}$$

□

Capítulo 6

Teoria Espetral

Neste capítulo apresentaremos a conexão da teoria dos polinômios com a teoria de operadores, através da chamada matriz de Jacobi que representa a relação de recorrência que os polinômios ortogonais verificam. Daremos uma demonstração do chamado teorema de Favard-Stone e do teorema de Markov. A seguir faremos uma aplicação deste teorema de Markov, o que permitirá obter a medida de probabilidade associada a uma sucessão de polinômios que verificam uma dada relação de recorrência. Para este capítulo utilizamos essencialmente as seguintes bibliografias [2], [3], [4], [5] e [12].

Tomaremos como ponto de partida uma sucessão de polinômios $\{P_n(x)\}$, $n = 0, 1, \dots$, $P_n(x)$ polinômio mônico de grau n , tais que verificam a relação de recorrência

$$P_{n+1}(x) = (x - \beta_{n+1}) P_n(x) - \alpha_{n+1} P_{n-1}(x), \quad n \geq 0$$

onde $\alpha_n \in \mathbb{R}$ e $\beta_n > 0$, e ainda consideramos estas sucessões limitadas, ou seja, existe $M > 0$, tal que $\sup\{|\alpha_n|, |\beta_n|, n \in \mathbb{N}\} < M$.

A relação de recorrência pode ser reescrita matricialmente como

$$J \begin{bmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_n(x) \\ \vdots \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_n(x) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

onde J é a chamada matriz de Jacobi, dada por

$$J = \begin{bmatrix} \beta_1 & 1 & 0 & \cdots \\ \alpha_2 & \beta_2 & 1 & \cdots \\ 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

6.1 Matriz truncada de Jacobi. Ortogonalidade discreta

6.1.1 Matriz truncada de Jacobi. Vetores próprios à esquerda e vetores próprios à direita

Consideramos a matriz J_n , truncada de Jacobi, de ordem n ,

$$J_n = \begin{bmatrix} \beta_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n & \beta_n \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

A relação de recorrência pode ser reescrita como

$$J_n \begin{bmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_{n-2}(x) \\ P_{n-1}(x) \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_{n-2}(x) \\ P_{n-1}(x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P_n(x) \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.3)$$

Observa-se que a matriz J_n não é simétrica, neste caso, se olharmos a matriz J_n pela direita temos que normalizar, isto é,

$$\begin{bmatrix} \frac{P_0(x)}{h_0} \\ \frac{P_1(x)}{h_1} \\ \vdots \\ \frac{P_{n-2}(x)}{h_{n-2}} \\ \frac{P_{n-1}(x)}{h_{n-1}} \end{bmatrix}^\top J_n = x \begin{bmatrix} \frac{P_0(x)}{h_0} \\ \frac{P_1(x)}{h_1} \\ \vdots \\ \frac{P_{n-2}(x)}{h_{n-2}} \\ \frac{P_{n-1}(x)}{h_{n-1}} \end{bmatrix}^\top - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_{n+1} \frac{P_n(x)}{h_n} \end{bmatrix}^\top. \quad (6.4)$$

Buscando alguns polinômios da equação (6.4) e comparando com os polinômios de (6.3) um por um, teremos que,

$$\frac{\beta_1}{h_0} P_0(x) + \frac{\alpha_2}{h_1} P_1(x) = x \frac{P_0(x)}{h_0} \implies h_0 = 1, \quad h_1 = \alpha_2;$$

$$\frac{1}{h_0} P_0(x) + \frac{\beta_2}{h_1} P_1(x) + \frac{\alpha_3}{h_2} P_2(x) = x \frac{P_1(x)}{h_1};$$

como $h_1 = \alpha_2$ e $h_0 = 1$ fica,

$$\alpha_2 P_0(x) + \beta_2 P_1(x) + \frac{\alpha_2 \alpha_3}{h_2} P_2(x) = x P_1(x) \implies \frac{\alpha_2 \alpha_3}{h_2} = 1 \Leftrightarrow h_2 = \alpha_2 \alpha_3;$$

$$\frac{1}{h_1} P_1(x) + \frac{\beta_3}{h_2} P_2(x) + \frac{\alpha_4}{h_3} P_3(x) = x \frac{P_2(x)}{h_2}$$

como $h_1 = \alpha_2$ e $h_2 = \alpha_2 \alpha_3$ temos,

$$\alpha_3 P_1(x) + \beta_3 P_2(x) + \frac{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}{h_3} P_3(x) = x P_2(x) \implies \frac{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}{h_3} = 1 \Leftrightarrow h_3 = \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4;$$

assim por diante até que, $h_n = \alpha_2\alpha_3\alpha_4 \cdots \alpha_{n+1}$.

Considerando $x = \lambda_i^n$ as raízes de $P_n(x)$, então λ_i^n com $i = 1, \dots, n$ são valores próprios da matriz J_n e de acordo com que já foi estudado em (2.2) e com fórmula de Christoffel-Darboux eles são simples. Então de (6.3) teremos que

$$J_n \begin{bmatrix} P_0(\lambda_i^n) \\ P_1(\lambda_i^n) \\ \vdots \\ P_{n-2}(\lambda_i^n) \\ P_{n-1}(\lambda_i^n) \end{bmatrix} = \lambda_i^n \begin{bmatrix} P_0(\lambda_i^n) \\ P_1(\lambda_i^n) \\ \vdots \\ P_{n-2}(\lambda_i^n) \\ P_{n-1}(\lambda_i^n) \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

Seja U uma matriz dada, pela relação (6.5) teremos,

$$J_n \underbrace{\begin{bmatrix} P_0(\lambda_1^n) & P_0(\lambda_2^n) & \cdots & P_0(\lambda_n^n) \\ P_1(\lambda_1^n) & P_1(\lambda_2^n) & \cdots & P_1(\lambda_n^n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_n(\lambda_1^n) & P_n(\lambda_2^n) & \cdots & P_n(\lambda_n^n) \end{bmatrix}}_U = \begin{bmatrix} P_0(\lambda_1^n) & P_0(\lambda_2^n) & \cdots & P_0(\lambda_n^n) \\ P_1(\lambda_1^n) & P_1(\lambda_2^n) & \cdots & P_1(\lambda_n^n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_n(\lambda_1^n) & P_n(\lambda_2^n) & \cdots & P_n(\lambda_n^n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^n & & & \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^n \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$J_n U = U D \quad (6.6)$$

e

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{P_0(\lambda_1^n)}{h_0} & \frac{P_1(\lambda_1^n)}{h_1} & \cdots & \frac{P_n(\lambda_1^n)}{h_n} \\ \frac{P_0(\lambda_2^n)}{h_0} & \frac{P_1(\lambda_2^n)}{h_1} & \cdots & \frac{P_n(\lambda_2^n)}{h_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{P_0(\lambda_n^n)}{h_0} & \frac{P_1(\lambda_n^n)}{h_1} & \cdots & \frac{P_n(\lambda_n^n)}{h_n} \end{bmatrix}}_{\tilde{W}} J_n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & & & \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{P_0(\lambda_1^n)}{h_0} & \frac{P_1(\lambda_1^n)}{h_1} & \cdots & \frac{P_n(\lambda_1^n)}{h_n} \\ \frac{P_0(\lambda_2^n)}{h_0} & \frac{P_1(\lambda_2^n)}{h_1} & \cdots & \frac{P_n(\lambda_2^n)}{h_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{P_0(\lambda_n^n)}{h_0} & \frac{P_1(\lambda_n^n)}{h_1} & \cdots & \frac{P_n(\lambda_n^n)}{h_n} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\tilde{W} J_n = D \tilde{W}.$$

É importante referir, que a matriz de Jacobi é limitada, o que implica a existência de um intervalo $[a, b]$ tal que todos os valores próprios das matrizes de Jacobi truncadas estão contidos neste intervalo.

6.1.2 Relações de ortogonalidade discretas

Iremos, obter relações de ortogonalidade discretas, obtidas das matrizes U , de vetores próprios à direita e de \tilde{W} de vetores próprios à esquerda.

A primeira observação que faremos será:

$$D\tilde{W}U = \tilde{W}J_nU = \tilde{W}UD,$$

e conclui-se que $\tilde{W}U$ é uma matriz diagonal. Dito de outra forma,

$$\tilde{W}U = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_n \end{bmatrix} = M \quad (6.7)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{P_0(\lambda_1^n)}{h_0} & \frac{P_1(\lambda_1^n)}{h_1} & \cdots & \frac{P_n(\lambda_1^n)}{h_n} \\ \frac{P_0(\lambda_2^n)}{h_0} & \frac{P_1(\lambda_2^n)}{h_1} & \cdots & \frac{P_n(\lambda_2^n)}{h_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{P_0(\lambda_n^n)}{h_0} & \frac{P_1(\lambda_n^n)}{h_1} & \cdots & \frac{P_n(\lambda_n^n)}{h_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0(\lambda_1^n) & P_0(\lambda_2^n) & \cdots & P_0(\lambda_n^n) \\ P_1(\lambda_1^n) & P_1(\lambda_2^n) & \cdots & P_1(\lambda_n^n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_n(\lambda_1^{n+1}) & P_n(\lambda_2^n) & \cdots & P_n(\lambda_n^n) \end{bmatrix} = M,$$

de onde vem que,

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{h_0} P_0^2(\lambda_1^n) + \frac{1}{h_1} P_1^2(\lambda_1^n) + \cdots + \frac{1}{h_n} P_n^2(\lambda_1^{n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{h_k} P_k^2(\lambda_1^{n+1}) \\ m_2 &= \frac{1}{h_0} P_0^2(\lambda_2^n) + \frac{1}{h_1} P_1^2(\lambda_2^n) + \cdots + \frac{1}{h_n} P_n^2(\lambda_2^n) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{h_k} P_k^2(\lambda_2^n) \\ &\vdots \\ m_n &= \frac{1}{h_0} P_0^2(\lambda_n^n) + \frac{1}{h_1} P_1^2(\lambda_n^n) + \cdots + \frac{1}{h_n} P_n^2(\lambda_n^n) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{h_k} P_k^2(\lambda_n^n). \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros da equação (6.7) por M^{-1} , teremos:

$$M^{-1}\tilde{W}U = U \underbrace{M^{-1}\tilde{W}}_{\mathcal{W}} = M^{-1}M = I; \quad (6.8)$$

sendo assim, \mathcal{W} é a inversa da matriz U , de onde vem,

$$U\mathcal{W} = I$$

$$\begin{bmatrix} P_0(\lambda_1^n) & P_0(\lambda_2^n) & \cdots & P_0(\lambda_n^n) \\ P_1(\lambda_1^n) & P_1(\lambda_2^n) & \cdots & P_1(\lambda_n^n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_n(\lambda_1^n) & P_n(\lambda_2^n) & \cdots & P_n(\lambda_n^n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{P_0(\lambda_1^n)}{m_1 h_0} & \frac{P_1(\lambda_1^n)}{m_1 h_1} & \cdots & \frac{P_n(\lambda_1^n)}{m_1 h_n} \\ \frac{P_0(\lambda_2^n)}{m_2 h_0} & \frac{P_1(\lambda_2^n)}{m_2 h_1} & \cdots & \frac{P_n(\lambda_2^n)}{m_2 h_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{P_0(\lambda_n^n)}{m_n h_0} & \frac{P_1(\lambda_n^n)}{m_n h_1} & \cdots & \frac{P_n(\lambda_n^n)}{m_n h_n} \end{bmatrix} = I.$$

Usando a teoria de multiplicação de matrizes teremos que,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{m_k h_j} P_i(\lambda_k^n) P_j(\lambda_k^n) = \delta_{i,j}, \quad \text{com} \quad i, j \in \{0, \dots, n+1\}. \quad (6.9)$$

É de observação trivial que, a partir da equação matricial acima, e sabendo que $P_0(x) = 1$, obtém-se,

$$\begin{aligned}
& P_0(\lambda_1^n) \frac{P_0(\lambda_1^n)}{m_1 h_0} + P_0(\lambda_2^n) \frac{P_0(\lambda_2^n)}{m_2 h_0} + \cdots + P_0(\lambda_n^n) \frac{P_0(\lambda_n^n)}{m_n h_0} = 1 \\
& \iff \frac{1}{m_1 h_0} + \frac{1}{m_2 h_0} + \cdots + \frac{1}{m_n h_0} = 1 \\
& \iff \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \cdots + \frac{1}{m_n} = h_0.
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $\psi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ através de

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \lambda_1^n \\ \frac{1}{m_1} & \text{se } \lambda_1^n \leq x < \lambda_2^n \\ \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} & \text{se } \lambda_2^n \leq x < \lambda_3^n \\ \vdots & \\ \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \cdots + \frac{1}{m_{n-1}} & \text{se } \lambda_{n-1}^n \leq x < \lambda_n^n \\ \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \cdots + \frac{1}{m_{n-1}} + \frac{1}{m_n} = h_0 & \text{se } x \geq \lambda_n^n, \end{cases}$$

onde ψ_n é uma função limitada uniformemente, contínua a direita, não decrescente com $\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi_n(x) = 0$, ou seja, ψ_n é uma função de distribuição. Ademais, ψ_n é uma função em escadas cujo suporte é o conjunto finito $\{\lambda_1^n, \dots, \lambda_n^n\}$ e cujo salto é $\frac{1}{m_k} > 0$. Então, e tendo em conta a existência de um intervalo $[a, b]$ tal que todos os valores próprios das matrizes de Jacobi truncadas estão contidos neste intervalo, podemos reescrever (6.9) e obtemos

$$\int_a^b P_i(x) P_j(x) d\psi_n(x) = h_j \delta_{i,j}, \quad i, j \in \{0, \dots, n\}. \tag{6.11}$$

Ainda podemos explicitar os momentos destas medidas de probabilidade discreta:

$$\int_a^b x^m d\psi_n(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} (\lambda_i^n)^m. \tag{6.12}$$

6.1.3 Teorema de Favard-Stone

Iremos, por passagem ao limite, obter a medida de probabilidade para a sequência $\{P_n(x)\}$. Para que possamos continuar, é importante fazer referência aos teoremas seguintes:

Teorema 6.1.1. *Seja $\{f_n\}$ com $n \in \mathbb{N}$ uma sucessão de funções reais definidas num conjunto numerável E . Se para cada $x \in E$ podemos afirmar que o conjunto $\{f_n(x)\}$ é limitado, então existe uma sub-sucessão da sucessão $\{f_n\}$ que converge em todo ponto de E .*

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser consultada em [3, pag 52]. □

Teorema 6.1.2. *Seja $\{\psi_n\}$ uma sequência uniformemente limitada de funções não decrescentes definidas em $(-\infty, \infty)$. Então $\{\psi_n\}$ contém uma subsequência que converge em $(-\infty, \infty)$ para uma função limitada e não decrescente.*

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser consultada em [3, pag 53]. \square

Teorema 6.1.3. *Seja $\{\psi_n\}$ $n \in \mathbb{N}$ uma sucessão de funções reais uniformemente limitadas e não decrescente, definidas no intervalo $[a, b]$, e consideremos esta sucessão convergente no intervalo $[a, b]$ a uma função limite ϕ . Então podemos afirmar que para qualquer função real f , contínua em $[a, b]$ verifica-se que:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f d\psi_n = \int_a^b f d\psi.$$

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser consultada em [3, pag 54]. \square

Como consequência do Teorema 6.1.2 e 6.1.3, podemos concluir a partir de (6.11) que existe uma subsucessão ψ_{n_k} tal que converge pontualmente para uma função $\psi(x)$, monótona crescente, e verifica-se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int P_i(x)P_j(x)d\psi_{n_k}(x) = \int P_i(x)P_j(x) d\psi(x) = h_j\delta_{i,j}. \quad (6.13)$$

Acabamos de provar o chamado teorema de Favard-Stone, a partir da recorrência a três termos que verifica uma sequência de polinómios mónicos de grau n .

Teorema 6.1.4 (Teorema de Favard-Stone). *Seja $\{P_n(x)\}$, $n = 0, 1, \dots$, uma sucessão de polinómios, $P_n(x)$ polinómio mónico de grau n , tais que verificam a relação de recorrência*

$$P_{n+1}(x) = (x - \beta_{n+1}) P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0.$$

onde $\alpha_n \in \mathbb{R}$ e $\beta_n > 0$, e ainda consideramos estas sucessões limitadas, ou seja, existe $M > 0$, tal que $\sup\{|\alpha_n|, |\beta_n|, n \in \mathbb{N}\} < M$. Então, existe uma medida de probabilidade $d\psi(x)$ tal que

$$\int_a^b P_i(x)P_j(x) d\psi(x) = h_j\delta_{i,j}. \quad (6.14)$$

6.1.4 Momentos e matriz de Jacobi

Partindo da equação (6.6) e multiplicando ambos membros da mesma equação por J_n teremos,

$$J_n J_n U = J_n U D \implies J_n^2 U = U D D = U D^2;$$

fazendo este procedimento m -vezes teremos que,

$$J_n^m U = U D^m.$$

Multiplicando ambos membros pela inversa de U vem,

$$J_n^m = U D^m \mathcal{W} \quad (6.15)$$

sendo que, \mathcal{W} é a matriz inversa de U como foi visto em (6.8).

$$[1 \ 0 \ \dots \ 0] J_n^m \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = [1 \ 0 \ \dots \ 0] U D^m \mathcal{W} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Operando com o membro esquerdo obtemos,

$$[1 \ 0 \ \dots \ 0] J^m \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = J_{(1,1)}^m,$$

onde $J_{(1,1)}^m$ é o elemento na posição (1, 1) da matriz J_n^m .

Operando com membro direito da igualdade acima obtemos,

$$\begin{aligned} & [1 \ 0 \ \dots \ 0] U D^m \mathcal{W} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= [P_0(\lambda_1^n) \ P_0(\lambda_2^n) \ \dots \ P_0(\lambda_n^n)] D^m \begin{bmatrix} \frac{P_0(\lambda_1^n)}{m_1 h_0} \\ \frac{P_0(\lambda_2^n)}{m_2 h_0} \\ \vdots \\ \frac{P_0(\lambda_n^n)}{m_n h_0} \end{bmatrix} \\ &= [(\lambda_1^n)^m P_0(\lambda_1^n) \ (\lambda_2^n)^m P_0(\lambda_2^n) \ \dots \ (\lambda_n^n)^m P_0(\lambda_n^n)] \begin{bmatrix} \frac{P_0(\lambda_1^n)}{m_1 h_0} \\ \frac{P_0(\lambda_2^n)}{m_2 h_0} \\ \vdots \\ \frac{P_0(\lambda_n^n)}{m_n h_0} \end{bmatrix} \\ &= (\lambda_1^n)^m \frac{P_0^2(\lambda_1^n)}{m_1 h_0} + (\lambda_2^n)^m \frac{P_0^2(\lambda_2^n)}{m_2 h_0} + \dots + (\lambda_n^n)^m \frac{P_0^2(\lambda_n^n)}{m_n h_0} \\ & J_{(1,1)}^m = \sum_{k=1}^n (\lambda_k^n)^m \frac{P_0^2(\lambda_k^n)}{m_k h_0} = \sum_{k=1}^n (\lambda_k^n)^m \frac{1}{m_k} \end{aligned}$$

e concluimos a partir de (6.12) que

$$J_{(1,1)}^m = \int_a^b x^m d\psi_n(x). \quad (6.16)$$

De acordo com o Teorema 6.1.2 ψ_n , contém uma subsequência que converge em $[a, b]$ para uma função limitada não decrescente ψ . Então o Teorema 6.1.3 poderia ser invocado e por passagem ao limite obtemos

$$J_{(1,1)}^m = \int_a^b x^m d\psi(x).$$

6.1.5 Resolvente do operador de Jacobi e das suas matrizes truncadas

Seja, J a matriz de Jacobi infinita e $\|J\| < +\infty$ a norma de um operador limitado.

$$(zI - J)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J^n}{z^{n+1}} = \frac{I}{z} + \frac{J}{z^2} + \frac{J^2}{z^3} + \dots$$

isto significa que

$$(zI - J)\left(\frac{I}{z} + \frac{J}{z^2} + \frac{J^2}{z^3} + \dots\right) = I$$

e seja

$$e_0^\top = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0].$$

Então,

$$e_0^\top (zI - J)^{-1} e_0 = \sum_{n=0}^{\infty} e_0^\top \frac{J^n}{z^{n+1}} e_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_{(1,1)}^n}{z^{n+1}}.$$

Considerando a função de Stieltjes, com a expansão assintótica

$$\hat{\psi}(z) = \int_a^b \frac{1}{z-x} d\psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \int_a^b x^n d\psi(x),$$

podemos identificar

$$e_0^\top (zI - J)^{-1} e_0 = \int_a^b \frac{1}{z-x} d\psi(x), \quad |z| > \|J\|.$$

Consideremos a matriz de Jacobi truncada J_n , e utilizando as equações (6.7) e (6.15) teremos,

$$zI - J_n = zI - UDW = zUW - UDW = U(zI - D)W$$

logo,

$$\begin{aligned} (zI - J_n)^{-1} &= [U(zI - D)W]^{-1} \\ &= W^{-1}[U(zI - D)]^{-1} \\ &= W^{-1}(zI - D)^{-1}U^{-1} \\ &= U(zI - D)^{-1}W \end{aligned}$$

e

$$e_0^\top (zI - J_n)^{-1} e_0 = e_0^\top U(zI - D)^{-1} W e_0$$

$$[1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] (zI - J_n)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] U(zI - D)^{-1} W \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Quando operamos o membro esquerdo podemos observar que tal operação será igual ao elemento da posição (1, 1) da matriz $(zI - J_n)^{-1}$; utilizando conhecimentos de Álgebra Linear, tal elemento pode ser obtido pela seguinte relação,

$$[A^{-1}]_{k,i} = (-1)^{i+k} \frac{\det A_{i,k}}{\det A},$$

onde i e k são, respectivamente, as linhas e colunas da matriz A e, k e i as linhas e colunas da matriz A^{-1} . O $\det A_{i,k}$ é aquele que se obtém eliminando a linha i e a coluna k da matriz A , ao passo que o $\det A$ é o determinante da matriz A .

Sendo assim,

$$e_0^\top (zI - J_n)^{-1} e_0 = \frac{\det(zI - J_n)_{1,1}}{\det(zI - J_n)} = \frac{P_n^{(1)}(z)}{P_n(z)}, \quad (6.17)$$

onde $P_n^{(1)}(z)$ são os polinómios associados que são gerados a partir da matriz de Jacobi removendo a primeira linha e a primeira coluna e $P_n(z)$ representa o polinómio característico de $(zI - J_n)$,

$$\det(zI - J_n) = \begin{vmatrix} z - \beta_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\alpha_2 & z - \beta_2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_3 & z - \beta_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z - \beta_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha_n & z - \beta_n \end{vmatrix}$$

e

$$\det(zI - J_n)_{1,1} = \begin{vmatrix} z - \beta_2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\alpha_3 & z - \beta_3 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_4 & z - \beta_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z - \beta_{n-2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha_{n-1} & z - \beta_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Operando com o membro direito teremos,

$$\begin{aligned} &= [P_0(\lambda_1^n) \quad P_0(\lambda_2^n) \quad \cdots \quad P_0(\lambda_n^n)] \begin{bmatrix} \frac{1}{z - \lambda_1^n} & & & & \\ & \frac{1}{z - \lambda_2^n} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{z - \lambda_n^n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{P_0(\lambda_1^n)}{m_1 h_0} \\ \frac{P_0(\lambda_2^n)}{m_2 h_0} \\ \vdots \\ \frac{P_0(\lambda_n^n)}{m_n h_0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{P_0(\lambda_1^n)}{z - \lambda_1^n} & \frac{P_0(\lambda_2^n)}{z - \lambda_2^n} & \cdots & \frac{P_0(\lambda_n^n)}{z - \lambda_n^n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{P_0(\lambda_1^n)}{m_1 h_0} \\ \frac{P_0(\lambda_2^n)}{m_2 h_0} \\ \vdots \\ \frac{P_0(\lambda_n^n)}{m_n h_0} \end{bmatrix} \\ &= \frac{P_0(\lambda_1^n)}{z - \lambda_1^n} \cdot \frac{1}{m_1 h_0} + \frac{P_0(\lambda_2^n)}{z - \lambda_2^n} \cdot \frac{1}{m_2 h_0} + \cdots + \frac{P_0(\lambda_n^n)}{z - \lambda_n^n} \cdot \frac{1}{m_n h_0} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{h_0} \sum_{k=1}^n \frac{P_0^2(\lambda_k^n)}{z - \lambda_k^n} \cdot \frac{1}{m_k} = \sum_{k=1}^n \frac{\frac{1}{m_k}}{z - \lambda_k^n}$$

ou seja,

$$\frac{P_n^{(1)}(z)}{P_n(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{\frac{1}{m_k}}{z - \lambda_k^n} = \int_a^b \frac{1}{z - x} d\psi_n(x). \quad (6.18)$$

Estamos agora em condições de enunciar e provar o teorema de *Markov*,

6.1.6 Teorema de Markov

Teorema 6.1.5. *Seja $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de polinómios ortogonais mónicos, relativamente a uma medida de probabilidade $d\psi$. Então,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{(1)}(z)}{P_n(z)} = \int_a^b \frac{d\psi(x)}{z - x}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [a, b],$$

uniformemente em K um compacto em $\mathbb{C} \setminus [a, b]$.

Demonstração. De acordo com o Teorema 6.1.3, qualquer sub-sucessão convergente de $\frac{P_{n_k}^{(1)}(z)}{P_{n_k}(z)}$ terá de ter como limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_{n_k}^{(1)}(z)}{P_{n_k}(z)} = \int_a^b \frac{d\psi(x)}{z - x} = \hat{\psi}(z).$$

Ainda acontece que $\left\{ \frac{P_{n_k}^{(1)}(z)}{P_{n_k}(z)} \right\}$ é uma sucessão uniformemente limitada para $z \in K \subset \mathbb{C} \setminus [a, b]$

Para mostrar esta afirmação temos de considerar que $\lambda_k^n \in [a, b]$, e ainda que

$$d(K, [a, b]) = \delta > 0, \quad \text{sendo que} \quad \delta = \inf \{ |z - \lambda_k^n|, x \in [a, b] \text{ e } z \in K \}.$$

Nestas condições, obtemos

$$|z - \lambda_k^n| > \delta \iff \frac{1}{|z - \lambda_k^n|} < \frac{1}{\delta}$$

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{\frac{1}{m_k}}{z - \lambda_k^n} \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{\left| \frac{1}{m_k} \right|}{|z - \lambda_k^n|} < \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^n \frac{1}{m_k},$$

sendo que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{m_k} = 1$, tal como foi visto em (6.10). Concluimos então que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_{n_k}^{(1)}(z)}{P_{n_k}(z)} = \int_a^b \frac{d\psi(x)}{z - x} = \hat{\psi}(z),$$

uniformemente em conjuntos compactos $K \subset \mathbb{C} \setminus [a, b]$. □

Ademais, podemos interpretar equação (6.17) em termos de fração contínua da seguinte forma:

$$\int_a^b \frac{d\psi(x)}{z-x} = \frac{1}{z - \beta_1 - \alpha_2 \frac{1}{z - \beta_2 - \alpha_3 \frac{1}{z - \beta_3 - \alpha_4 \frac{1}{z - \beta_4 - \alpha_5 \frac{1}{\ddots}}}}}}.$$

Esta fórmula pode ser considerada como uma forma alternativa de calcular a transformada de *Stieltjes* de uma medida de probabilidade $d\psi$ e, eventualmente, calcular a medida pela fórmula de inversão de *Stieltjes*.

$$\frac{P_n^{(1)}(z)}{P_n(z)} = \frac{\begin{vmatrix} z - \beta_2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\alpha_3 & z - \beta_3 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_4 & z - \beta_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z - \beta_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha_n & z - \beta_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z - \beta_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\alpha_2 & z - \beta_2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_3 & z - \beta_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z - \beta_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha_n & z - \beta_n \end{vmatrix}}, \quad (6.19)$$

por forma a compactar o espaço, chamaremos de $J^{[n,k]}$ ao determinante de forma geral. Ao determinante do numerador chamaremos de $J^{[n,1]}$ o que significa que foi extraído uma linha e uma coluna e ao determinante do denominador $J^{[n,0]}$ o que significa que não se extraíram linhas nem colunas. Efetuando o desenvolvimento do denominador $J^{[n,0]}$, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{P_n^{(1)}(z)}{P_n(z)} &= \frac{J^{[n,1]}}{(z - \alpha_0)J^{[n,1]} + \beta_1 J^{[n,2]}} \\ &= \frac{1}{(z - \alpha_0) + \beta_1 \frac{J^{[n,2]}}{J^{[n,1]}}}. \end{aligned}$$

6.2 Aplicação do Teorema de Markov para a determinação da medida de probabilidade

6.2.1 Aplicação aos polinómios de Chebichev do primeiro e segundo tipo

De seguida vamos continuar a estudar os polinómios de Chebichev, desta vez apenas para os do primeiro e do segundo tipos que serão importante ao longo do texto, tendo como ponto de partida a relação de recorrência dos polinómios de Chebichev mónicos (5.4) e (5.16). Também será útil a fórmula de inversão de *Stieltjes* que pode ser consultada em [5].

Assim, consideremos as funções complexas

$$(z \pm 1)^{1/2} = \sqrt{|z \pm 1|} e^{\frac{i}{2} \arg(z \pm 1)} \quad -\pi < \arg(z \pm 1) \leq \pi.$$

Por meio destas funções, podemos definir,

$$(z^2 - 1)^{1/2} = (z - 1)^{1/2} \cdot (z + 1)^{1/2}.$$

A função $(z^2 - 1)^{1/2}$ é analítica para $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$ e pode estender-se analiticamente a $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Ademais temos que,

$$(z^2 - 1)^{1/2} = \begin{cases} \sqrt{z^2 - 1} & \text{se } z \in (-\infty, -1] \\ i\sqrt{1 - z^2} & \text{se } z \in [-1, 1] \\ \sqrt{z^2 - 1} & \text{se } z \in [1, +\infty] \end{cases}$$

e

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} ((x \pm i\epsilon)^2 - 1)^{1/2} = \pm i\sqrt{1 - x^2}, \quad -1 < x < 1. \quad (6.20)$$

Teorema 6.2.1 (Fórmula de inversão de Stieltjes). *Seja $d\psi(x)$ uma medida de probabilidade com momentos de todas as ordens finitos, e seja*

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\psi(x)}{z - x}, \quad d\psi(x) = w(x) dx + \sum_{k=0}^m A_k d\delta_{\xi_k}(x). \quad (6.21)$$

Então,

$$w(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{F(x - i\epsilon) - F(x + i\epsilon)}{2\pi i}. \quad (6.22)$$

A matriz J relacionada aos polinômios de Chebichev do segundo tipo que passaremos a chamar de J_U será dada por,

$$J_U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.23)$$

Assim, de (6.19) teremos:

$$\frac{\hat{U}_n^{(1)}(z)}{\hat{U}_n(z)} = \frac{\begin{vmatrix} z & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{4} & z & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & z & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{4} & z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{4} & z & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & z & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & z & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{4} & z \end{vmatrix}}. \quad (6.24)$$

Para poupar espaço, vamos designar o numerador da equação (6.24) por Δ_{n-1}^1 e o denominador por Δ_n^1 . Assim, podemos escrever:

$$\begin{aligned}\frac{\hat{U}_n^{(1)}(z)}{\hat{U}_n(z)} &= \frac{\Delta_{n-1}^1}{\Delta_n^1} \\ &= \frac{\Delta_{n-1}^1}{z\Delta_{n-1}^1 - \frac{1}{4}\Delta_{n-2}^1} \\ &= \frac{1}{z - \frac{1}{4}\frac{\Delta_{n-2}^1}{\Delta_{n-1}^1}}.\end{aligned}$$

Quando $n \rightarrow \infty$, $\frac{\hat{U}_n^{(1)}(z)}{\hat{U}_n(z)} \rightarrow F_U(z)$ e do mesmo modo $\frac{\Delta_{n-2}^1}{\Delta_{n-1}^1} \rightarrow F_U(z)$ já que os determinantes diferem apenas no tamanho (dimensão), então,

$$F_U(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{4}F_U(z)} \iff F_U^2(z) - 4zF_U(z) + 4 = 0$$

$$F_U(z) = \frac{4z - \sqrt{16z^2 - 16}}{2} = 2z + 2\sqrt{z^2 - 1}. \quad (6.25)$$

Usando o Teorema 6.22 teremos:

$$\begin{aligned}w_U(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{2x - 2\sqrt{(x - i\epsilon)^2 - 1} - 2x + 2\sqrt{(x + i\epsilon)^2 - 1}}{2\pi i} \\ w_U(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{-2\sqrt{(x - i\epsilon)^2 - 1} + 2\sqrt{(x + i\epsilon)^2 - 1}}{2\pi i}\end{aligned}$$

de acordo com (6.20) teremos:

$$\begin{aligned}w_U(x) &= \frac{-2(-i)\sqrt{1-x^2} + 2i\sqrt{1-x^2}}{2\pi i} \\ w_U(x) &= \frac{4i\sqrt{1-x^2}}{2\pi i} = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned} \quad (6.26)$$

A matriz J relacionada aos polinómios de Chebichev do primeiro tipo que passaremos a chamar de J_T é dada por,

$$J_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.27)$$

Assim, de (6.19) teremos:

$$\frac{\hat{T}_n^{(1)}(z)}{\hat{T}_n(z)} = \frac{\begin{vmatrix} z & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{4} & z & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & z & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{4} & z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & z & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & z & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & z & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{4} & z \end{vmatrix}}. \quad (6.28)$$

Desenvolvendo o determinante Δ_n^2 (denominador de (6.28)) e operando, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{T}_n^{(1)}(z)}{\hat{T}_n(z)} &= \frac{\Delta_{n-1}^1}{\Delta_n^2} \\ &= \frac{\Delta_{n-1}^1}{z\Delta_{n-1}^1 - \frac{1}{2}\Delta_{n-2}^1} \\ &= \frac{1}{z - \frac{1}{2}\frac{\Delta_{n-2}^1}{\Delta_{n-1}^1}}. \end{aligned}$$

Quando $n \rightarrow \infty$, $\frac{\hat{T}_n^{(1)}(z)}{\hat{T}_n(z)} \rightarrow G(z)$ e como já vimos acima $\frac{\Delta_{n-2}^1}{\Delta_{n-1}^1} \rightarrow F_U(z)$, então,

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{z - \frac{1}{2}F_U(z)} = \frac{1}{z - \frac{1}{2}(2z - 2\sqrt{z^2 - 1})} \\ G(z) &= \frac{1}{z - \frac{1}{2}(2z - 2\sqrt{z^2 - 1})} = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Usando a fórmula de inversão de Stieltjes (6.22) teremos:

$$w_T(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{(x - i\epsilon)^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{(x + i\epsilon)^2 - 1}} \right],$$

de acordo com (6.20) teremos:

$$\begin{aligned} w_T(x) &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \left[\frac{1}{-i\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{i\sqrt{1-x^2}} \right] = \frac{1}{2\pi i} \cdot \left[-\frac{2}{i\sqrt{1-x^2}} \right] \\ w_T(x) &= \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Observa-se que, de acordo com as equações (5.1), (5.10) e as relações trigonométricas,

$$2 \cos(m\theta) \cos(n\theta) = \cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta$$

$$2 \sin(m+1)\theta \sin(n+1)\theta = \cos(m-n)\theta - \cos(m+n+2)\theta$$

deduzimos com facilidade que,

$$\int T_n(x)T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \pi & \text{se } n=m \\ \frac{\pi}{2} \delta_{mn} & \text{se } m, n \neq 0, \quad m, n = \{0, 1, 2, \dots\} \end{cases}$$

e

$$\int U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2} \delta_{mn}, \quad m, n = \{0, 1, 2, \dots\},$$

concluindo assim que, $T_n(x)$ e $U_n(x)$ são ortogonais relativamente às medidas $w_T(x)$ e $w_U(x)$, tal como já foi visto no capítulo 3.

Por outro lado, seja $w_T(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$. Então,

$$\int_{-1}^1 \frac{w_T(x)}{z-x} dx = \int_{-1}^1 \frac{\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}}{z-x} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}(z-x)} dx.$$

Consideremos uma curva γ orientada no sentido horário e um W exterior a γ tal que $W = x$ e $x \in [-1, 1]$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} \frac{dW}{\sqrt{W^2-1}(z-W)} &= \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_1} \frac{dW}{\sqrt{W^2-1}(z-W)} + \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_2} \frac{dW}{\sqrt{W^2-1}(z-W)} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dx}{i\sqrt{1-x^2}(z-x)} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dx}{i\sqrt{1-x^2}(z-x)} \\ &= \frac{2}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(z-x)}, \end{aligned}$$

pelo que podemos escrever,

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\pi\sqrt{1-x^2}(z-x)} = \frac{i}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{dW}{\sqrt{W^2-1}(z-W)}. \quad (6.30)$$

Usando o teorema dos resíduos em domínios exteriores (cf. [4]), teremos:

$$\begin{aligned} \frac{i}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{dW}{\sqrt{W^2-1}(z-W)} &= \frac{i}{2\pi} [2\pi i \operatorname{Res}(f, z) + 2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty)] \\ &= i^2 [\operatorname{Res}(f, z) + \operatorname{Res}(f, \infty)] \\ &= - [\operatorname{Res}(f, z) + \operatorname{Res}(f, \infty)]. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Calculemos os resíduos $\operatorname{Res}(f, z)$ e $\operatorname{Res}(f, \infty)$ (ver [4]),

$$\operatorname{Res}(f, z) = \lim_{W \rightarrow z} (W-z) \frac{1}{\sqrt{W^2-1}(z-W)} = \frac{-1}{\sqrt{z^2-1}},$$

sendo que z representa um polo de f .

Dado que $\lim_{W \rightarrow \infty} f(W) = 0$, então $f(W)$ é analítica em $W = \infty$. Assim,

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \lim_{W \rightarrow \infty} W [f(W)] = \lim_{W \rightarrow \infty} \frac{W}{\sqrt{W^2 - 1}(z - W)} \quad (6.32)$$

$$= \lim_{W \rightarrow \infty} \frac{1}{W \sqrt{1 - 1/W^2}(z/W - 1)} = 0. \quad (6.33)$$

Portanto, a equação (6.31) fica,

$$\frac{i}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{dW}{\sqrt{W^2 - 1}(z - W)} = - \left[\frac{-1}{\sqrt{z^2 - 1}} + 0 \right] = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}}.$$

o que justifica claramente que (6.29).

Da mesma forma, podemos proceder com $w_U(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - x^2}$ com $x \in \mathbb{R}$, pelo que

$$\int_{-1}^1 \frac{w_U(x)}{z - x} dx = \int_{-1}^1 \frac{\frac{2}{\pi} \sqrt{1 - x^2}}{z - x} dx = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - x^2}}{z - x} dx. \quad (6.34)$$

Consideremos uma curva γ orientada no sentido horário e um W exterior a γ tal que $W = x$ e $x \in [-1, 1]$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_{\gamma} \frac{\sqrt{W^2 - 1}}{z - W} dW &= \frac{2}{\pi} \int_{\gamma_1} \frac{\sqrt{W^2 - 1}}{z - W} dW + \frac{2}{\pi} \int_{\gamma_2} \frac{\sqrt{W^2 - 1}}{z - W} dW \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{i\sqrt{1 - x^2}}{z - x} dx + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{i\sqrt{1 - x^2}}{z - x} dx \\ &= \frac{4i}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - x^2}}{z - x} dx \end{aligned}$$

pelo que podemos escrever,

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - x^2}}{z - x} dx &= \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sqrt{W^2 - 1}}{z - W} dW = \frac{1}{\pi i} \cdot 2\pi i [\operatorname{Res}(f, z) + \operatorname{Res}(f, \infty)] \\ &= 2 [\operatorname{Res}(f, z) + \operatorname{Res}(f, \infty)] \end{aligned}$$

onde,

$$\operatorname{Res}(f, z) = \lim_{z \rightarrow W} (W - z) \frac{\sqrt{W^2 - 1}}{z - W} = -\sqrt{z^2 - 1},$$

sendo que $W = z$ é uma singularidade isolada e um polo de f ,

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \operatorname{Res} \left(\frac{-1}{W^2} f(1/W), 0 \right) = \operatorname{Res} \left(\frac{-1}{W^2} \frac{\sqrt{1 - W^2}}{zW - 1}, 0 \right).$$

Assim sendo, como $W = 0$ é um polo de ordem 2, então

$$\operatorname{Res} \left(\frac{-1}{W^2} \frac{\sqrt{1 - W^2}}{zW - 1}, 0 \right) = \frac{1}{(2 - 1)!} \lim_{W \rightarrow 0} \frac{d}{dW} (W - 0)^2 \left(\frac{-1}{W^2} \frac{\sqrt{1 - W^2}}{zW - 1} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{W \rightarrow 0} \frac{d}{dW} \left(-\frac{\sqrt{1-W^2}}{zW-1} \right) \\
&= \lim_{W \rightarrow 0} \frac{\frac{2W}{\sqrt{1-W^2}} \cdot (zW-1) + z\sqrt{1-W^2}}{(zW-1)^2} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{z-W}{\sqrt{1-W^2}(zW-1)^2} = z.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{z-x} dx &= 2 [\text{Res}(f, z) + \text{Res}(f, \infty)] = 2(-\sqrt{z^2-1} + z) \\
&= (2z - 2\sqrt{z^2-1}).
\end{aligned}$$

Justificando assim a equação (6.25).

6.2.2 Aplicação a uma matriz de Jacobi, periódica e constante de período 2

Consideremos agora o caso em que a sub-diagonal principal da matriz de Jacobi, associada à recorrência toma os valores a, b, a, b, \dots teremos,

$$F_n(z) = \frac{\Delta_{b,n-1}}{\Delta_{a,n}} = \frac{\begin{vmatrix} z & -1 & & & \\ -b & z & -1 & & \\ & -a & z & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & \boxed{-a'} & z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z & -1 & & & \\ -a & z & -1 & & \\ & -b & z & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & \boxed{-a'} & z \end{vmatrix}}, \quad a' \in \{a, b\}.$$

Observa-se que $\Delta_{b,n-1}$ significa que a diagonal do determinante de ordem $n-1$ começa em b e $\Delta_{a,n}$ significa que a diagonal do determinante de ordem n começa em a e assim por diante. Prosseguimos com,

$$\begin{aligned}
F_n(z) &= \frac{\Delta_{b,n-1}}{z\Delta_{b,n-1} + (-a)\Delta_{a,n-2}} = \frac{1}{z - a \frac{\Delta_{a,n-2}}{\Delta_{b,n-1}}} = \frac{1}{z - a \frac{1}{z - b \frac{\Delta_{b,n-3}}{\Delta_{a,n-2}}}} \\
F_n(z) &= \frac{1}{z - a \frac{1}{z - b F_{n-2}(z)}} = \frac{z - b F_{n-2}(z)}{z^2 - z b F_{n-2}(z) - a}
\end{aligned}$$

Assim, tomando limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(z) = F(z)$, teremos a seguinte equação quadrática,

$$0 = -z b F^2(z) + F(z)(z^2 - a + b) - z \quad (6.35)$$

cuja solução em ordem a $F(z)$ é,

$$F(z) = \frac{-(z^2 - a + b) + \sqrt{(z^2 - a + b)^2 + 4bz^2}}{-2bz} \quad (6.36)$$

onde temos tido em conta que o comportamento da função de Stieltjes em $z = \infty$ é 0. Consideramos o radicando,

$$(z^2 - a + b)^2 + 4bz^2 = z^4 - 2(a + b)z^2 + (a - b)^2$$

calculando suas raízes, obtemos:

$$z^2 = \frac{-2(a + b) \pm \sqrt{4(a + b)^2 - 4(a - b)^2}}{2} = \frac{-2(a + b) \pm 2\sqrt{(a + b)^2 - (a - b)^2}}{2}$$

$$z^2 = (a + b) \pm \sqrt{(a + b)^2 - (a - b)^2} = (a + b) \pm 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2$$

Assim,

$$z = \{\pm z_0, \pm z_1\},$$

onde

$$z_0 = \left| \sqrt{a} - \sqrt{b} \right|, \quad z_1 = \sqrt{a} + \sqrt{b},$$

ou seja, a equação (6.36) pode ser escrita da seguinte forma:

$$F(z) = \frac{-(z^2 - a + b) + \sqrt{(z^2 - z_0^2)(z^2 - z_1^2)}}{-2bz}$$

Usando a fórmula de inversão de Stieltjes (6.22) vem,

$$\begin{aligned} w(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - z_0^2} \left(\sqrt{(x - i\epsilon)^2 - z_1^2} - \sqrt{(x + i\epsilon)^2 - z_1^2} \right)}{-2bx} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - z_0^2} \left(-i\sqrt{z_1^2 - x^2} - i\sqrt{z_1^2 - x^2} \right)}{-2bx} \\ &= \frac{-2i}{2\pi i} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - z_0^2} \sqrt{z_1^2 - x^2}}{-2bx} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 - z_0^2} \sqrt{z_1^2 - x^2}}{2\pi bx}, \quad x \in \Delta = [-z_1, -z_0] \cup [z_0, z_1]. \end{aligned}$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \frac{\frac{\sqrt{x^2 - z_0^2} \sqrt{z_1^2 - x^2}}{2\pi bx}}{z - x} dx \\ = \frac{1}{2\pi b} \left[\int_{-z_1}^{-z_0} \frac{\sqrt{x^2 - z_0^2} \sqrt{z_1^2 - x^2}}{x(z - x)} dx + \int_{z_0}^{z_1} \frac{\sqrt{x^2 - z_0^2} \sqrt{z_1^2 - x^2}}{x(z - x)} dx \right] \end{aligned}$$

Considere-se uma curva γ fechada e orientada no sentido horário, sendo que W é exterior a γ e $W = x$ para $x \in [-z_1, -z_0] \cup [z_0, z_1]$, como mostra a Figura 6.1.

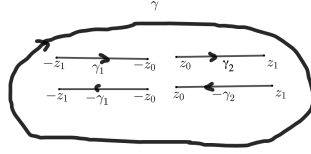


Figura 6.1: Curva γ , fechada

Então, considerando o Teorema de Cauchy, calculado no interior da curva γ , para a função

$$f(W) = \frac{\sqrt{W^2 - z_0^2} \sqrt{W^2 - z_1^2}}{W(z - W)}$$

obtemos quando deformamos a curva até ao bordo, por cima e por baixo do intervalo Δ , e considerando ainda que a função que estamos a integrar tem uma singularidade isolada em $W = 0$, e tendo em conta que

$$\sqrt{W^2 - z_1^2} = i \sqrt{z_1^2 - x^2}$$

obtemos

$$\int_{\gamma} \frac{\sqrt{W^2 - z_0^2} \sqrt{W^2 - z_1^2}}{W(z - W)} dW = 2i \int_{-z_1}^{-z_0} \frac{\sqrt{x^2 - z_0^2} \sqrt{z_1^2 - x^2}}{x(z - x)} dx + 2i \int_{z_0}^{z_1} \frac{\sqrt{x^2 - z_0^2} \sqrt{z_1^2 - x^2}}{x(z - x)} dx - 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0)$$

Calculamos

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, 0) &= \lim_{W \rightarrow z} W \frac{\sqrt{W^2 - z_0^2} \sqrt{W^2 - z_1^2}}{W(z - W)} = \lim_{W \rightarrow z} \frac{\sqrt{W^2 - z_0^2} \sqrt{W^2 - z_1^2}}{(z - W)} \\ &= \frac{\sqrt{-z_0^2} \sqrt{-z_1^2}}{z} = -\frac{z_0 z_1}{z} = -\frac{|a - b|}{z} \end{aligned}$$

onde temos usado que $z_0 = |\sqrt{a} - \sqrt{b}|$ e $z_1 = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, pelo que obtemos

$$\int_{\gamma} \frac{\sqrt{W^2 - z_0^2} \sqrt{W^2 - z_1^2}}{W(z - W)} dW = 2i \int_{\Delta} \frac{\sqrt{x^2 - z_0^2} \sqrt{z_1^2 - x^2}}{x(z - x)} dx + 2\pi i \frac{|a - b|}{z}. \quad (6.37)$$

Pelo teorema dos resíduos em domínios exteriores,

$$\int_{\gamma} \frac{\sqrt{W^2 - z_0^2} \sqrt{W^2 - z_1^2}}{W(z - W)} dW = 2\pi i [\operatorname{Res}(f, z) + \operatorname{Res}(f, \infty)]. \quad (6.38)$$

Usando (6.37) e (6.38) Podemos, neste caso, escrever

$$\int_{\Delta} \frac{\sqrt{x^2 - z_0^2} \sqrt{z_1^2 - x^2}}{x(z - x)} dx + \pi \frac{|a - b|}{z} = \pi [\operatorname{Res}(f, z) + \operatorname{Res}(f, \infty)].$$

ou ainda,

$$\frac{1}{2\pi b} \int_{\Delta} \frac{\sqrt{x^2 - z_0^2} \sqrt{z_1^2 - x^2}}{x(z - x)} dx = \frac{1}{2b} \left[-\frac{|a - b|}{z} + \operatorname{Res}(f, z) + \operatorname{Res}(f, \infty) \right].$$

Calculemos os resíduos,

$$\operatorname{Res}(f, z) = \lim_{W \rightarrow z} (W - z) \frac{\sqrt{W^2 - z_0^2} \sqrt{W^2 - z_1^2}}{W(z - W)} = -\frac{\sqrt{z^2 - z_0^2} \sqrt{z^2 - z_1^2}}{z}.$$

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{W^2} f(1/W), 0\right) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{W^2} \frac{\sqrt{1 - z_0^2 W^2} \sqrt{1 - z_1^2 W^2}}{zW - 1}, 0\right)$$

tendo em conta que $W = 0$ é um polo de ordem 2, então o resíduo pode ser calculado da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{W^2} f(1/W), 0\right) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{W \rightarrow 0} \frac{d^{2-1}}{dW^{2-1}} (W-0)^2 \left(-\frac{1}{W^2} \frac{\sqrt{1 - z_0^2 W^2} \sqrt{1 - z_1^2 W^2}}{zW - 1}\right) \\ &= \lim_{W \rightarrow 0} \frac{d}{dW} \left(-\frac{\sqrt{1 - z_0^2 W^2} \sqrt{1 - z_1^2 W^2}}{zW - 1}\right) = z \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int \frac{w(x) dx}{z-x} = \frac{1}{2b} \left[\frac{z^2 - \sqrt{z^2 - z_0^2} \sqrt{z^2 - z_1^2} - |a-b|}{z} \right]. \quad (6.39)$$

Sendo que a equação (6.36) é da forma

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{-(z^2 - a + b) + \sqrt{(z^2 - z_0^2)(z^2 - z_1^2)}}{-2bz} = \frac{z^2 - a + b - \sqrt{(z^2 - z_0^2)(z^2 - z_1^2)}}{2bz} \\ &= \frac{z^2 - \sqrt{(z^2 - z_0^2)(z^2 - z_1^2)} - |a-b|}{2bz} + \frac{-a + b + |a-b|}{2bz} \end{aligned}$$

Então:

$$F(z) = \int \frac{w(x) dx}{z-x} + \frac{-a + b + |a-b|}{2bz}, \quad a \neq b,$$

peço que concluimos que a medida de probabilidade é dada neste caso por

$$d\psi(x) = \frac{\sqrt{x^2 - z_0^2} \sqrt{z_1^2 - x^2}}{2\pi bx} dx + \frac{-a + b + |a-b|}{2b} d\delta_0(x),$$

definida em $\Delta = [-z_1, -z_0] \cup [z_0, z_1]$, quando $b < a$ e em $[-z_1, -z_0] \cup \{0\} \cup [z_0, z_1]$, quando $b > a$.

Vamos gerar os primeiros polinómios ortogonais relativamente a esta medida, onde iremos observar a localização dos zeros destes polinómios. Consideremos a matriz J dada por,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ a & 0 & 1 & & \\ & b & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \end{bmatrix},$$

a partir da equação (6.3) podemos concluir que,

$$\begin{aligned} xP_{2n}(x) &= bP_{2n-1}(x) + P_{2n+1}(x), & n \geq 0 \\ xP_{2n+1}(x) &= aP_{2n}(x) + P_{2n+2}(x), & n \geq 0 \end{aligned}$$

com as condições iniciais, $P_{-1}(x) = 0$ e $P_0(x) = 1$. Facilmente consegue-se encontrar os primeiros 5 polinómios e atribuindo valores para a e b podemos representá-los graficamente tal como foi feito com os polinómios de *Chebichev* (cf. Figura 6.2):

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= x^2 - a \\ P_3(x) &= x^3 - (a + b)x \\ P_4(x) &= x^4 - (2a + b)x^2 + a^2 \\ P_5(x) &= x^5 - 2(a + b)x^3 + (a^2 + b^2 + ab)x. \end{aligned}$$

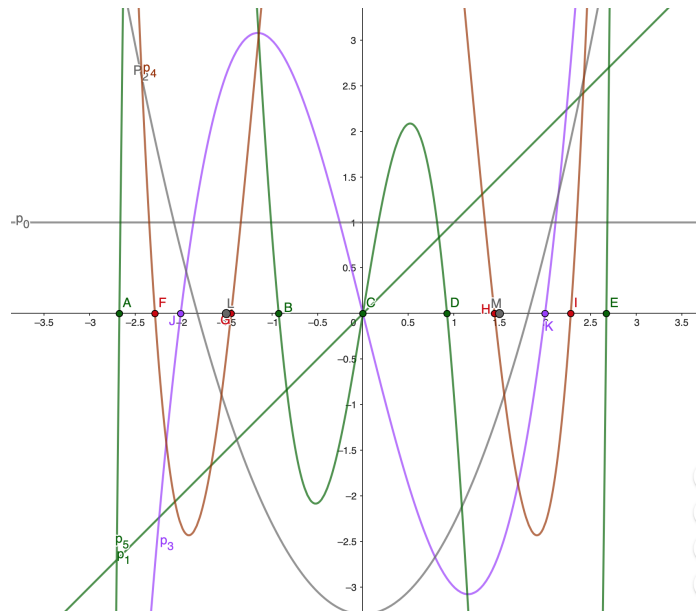


Figura 6.2: Gráfico dos cinco primeiros polinómios com a e b reais distintos

Considerações Finais

Neste trabalho destacamos as principais propriedades dos polinômios ortogonais. Mostramos o teorema da relação de recorrência de três termos que é uma propriedade de tamanha relevância, porque dá-nos a possibilidade de gerar uma família de polinômios ortogonais a partir das condições iniciais. Estudamos os zeros dos polinômios ortogonais e vimos que eles têm um comportamento muito interessante, pois são reais, distintos e localizam-se no intervalo de ortogonalidade, além de possuírem a propriedade do entrelaçamento.

Trouxemos algumas propriedades das frações contínuas e relacionamos-a com os polinômios ortogonais, em seguida fizemos um estudo dos polinômios de Chebichev e suas propriedades e finalmente, no último capítulo conseguimos obter o chamado Teorema de Favard-Stone, ou teorema espectral, que fala da existência da medida de ortogonalidade associada a esta sequência de polinômios que satisfazem uma relação de recorrência a três termos.

Ainda conseguimos obter, a través do teorema de Markov, a construção de aproximantes racionais para obter a determinação da transformada de Stieltjes desta medida, o que se revela um instrumento fundamental para aplicações em casos concretos. Fizemos uma ilustração da aplicação deste teorema de Markov nos polinômios de Chebichev do primeiro e segundo tipo e dos polinômios associados a uma recorrência que resulta de perturbar a recorrência constante.

No decorrer da escrita desta tese nos deparamos com múltiplas técnicas, de álgebra linear, de teoria da variável complexa e de teoria de funções, que foram cruciais para a construção da teoria que foi apresentada.

Não foi possível, devido à extensão do trabalho realizado, dedicar algum estudo à aplicações concreta da teoria dos polinômios ortogonais. Contudo esperamos ter esclarecido neste trabalho aspectos fundamentais que estas famílias de polinômios partilham e da estreita ligação entre a existência da medida de ortogonalidade e a relação de recorrência que os polinômios ortogonais verificam.

Outros estudos ainda por fazer, e muito pertinentes, poderiam estar dedicados a falar das propriedades assintóticas dos polinômios ortogonais e técnicas atuais para os obter como o chamado problema de Riemann-Hilbert.

Apêndice A

Algumas identidades Trigonométricas

Passaremos a enumerar algumas das identidades:

- (Identidade fundamental da trigonometria).

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

- (Seno em função de cosseno).

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

- (Cosseno em função de seno).

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

- (Seno da soma).

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$$

- (Seno da diferença de ângulos).

$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x$$

- (Cosseno da soma de ângulos).

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

- (Cosseno da diferença de ângulos).

$$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

- (Seno do ângulo duplo).

$$\sin 2x = \sin(x + x) = \sin x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos x = 2 \sin x \cdot \cos x.$$

Assim,

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

•

$$\sin x = \sin(x/2 + x/2) = \sin(x/2) \cdot \cos(x/2) + \sin(x/2) \cdot \cos(x/2)$$

Assim,

$$\sin x = 2 \sin(x/2) \cdot \cos(x/2)$$

• (Cosseno do ângulo duplo)

$$\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x$$

Assim,

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

e

$$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^2 x - 1$$

ou ainda.

$$\cos 2x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$$

• (Quadrado do cosseno do ângulo).

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \iff 2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x \iff \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Assim,

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

• (Quadrado do seno do ângulo).

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x \iff 2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x \iff \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Assim,

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

• (produto de seno e cosseno de ângulos diferentes)

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{\sin(x + y) + \sin(x - y)}{2}$$

• (produto de cosseno de ângulos diferentes)

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x + y) + \cos(x - y)}{2}$$

• (produto de senos de ângulos diferentes)

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2}$$

Apêndice B

Resultados algébricos auxiliares

Teorema B.0.1 (Teorema fundamental da Álgebra). *Seja $P(x)$ um polinómio não nulo com coeficientes complexos de grau $n \geq 0$. Então, $P(x)$ tem exatamente n raízes complexas, contadas com as multiplicidades. Equivalentemente, $P(x)$ tem, no máximo, n raízes complexas distintas.*

Este é um resultado clássico, e por ser assim, sua prova é facilmente encontrada em qualquer literatura básica.

Corolário B.0.1.1. *Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ dois polinómios com grau não superior a $n > 0$ e que coincidem em $n + 1$ pontos distintos. Então, $P(x)$ e $Q(x)$ trata-se do mesmo polinómio.*

Demonstração. Chamaremos de x_i com $i = 1, 2, \dots, n + 1$ aos pontos distintos em que $P(x)$ e $Q(x)$ coincidem, ou seja, $P(x_i) = Q(x_i)$ para todo $i = 1, 2, \dots, n + 1$. Então o polinómio $(P - Q)(x)$ anula-se em $n + 1$ pontos distintos, já que,

$$(P - Q)(x_i) = P(x_i) - Q(x_i) = 0 \quad \text{para todo} \quad i = 1, 2, \dots, n + 1.$$

Ademais, pode-se observar que $\text{gr}(P - Q) \leq n$, levando em consideração que ambos os polinómios $P(x)$ e $Q(x)$ têm grau não superior a n .

Contudo, $(P - Q)(x)$ é um polinómio de grau não superior a n que tem $n + 1$ raízes distintas. De acordo com o teorema anterior esta situação é impossível, isto é, a sua hipótese é violada. Logo, a única hipótese é que $(P - Q)(x)$ seja o polinómio nulo, ou seja, que os polinómios $P(x)$ e $Q(x)$ sejam iguais, o que prova o que se pretende. \square

Teorema B.0.2. *Seja $Q(x)$ um polinómio de grau n com n raízes distintas, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, sendo que, não é necessário que todas sejam reais, e $P(x)$ um polinómio tal que $\text{gr}(P) < n$. Então verifica-se que*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)(x - \alpha_k)}$$

Demonstração. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $Q(x)$ é um polinómio mónico. Então podemos fatorizar

$$Q(x) = \prod_{k=1}^n (x - \alpha_k)$$

e, ainda podemos ter diretamente,

$$Q'(x) = \sum_{k=1}^n \prod_{j=1, j \neq k}^n (x - \alpha_j)$$

sendo que $j \neq k$. Em particular, tomando $x = \alpha_i$ para qualquer $i = 1, \dots, n$ na equação acima obtemos que

$$Q'(\alpha_i) = \sum_{k=1}^n \prod_{j=1, j \neq k}^n (\alpha_i - \alpha_j) = \prod_{j=1, j \neq i}^n (\alpha_i - \alpha_j),$$

para $j \neq k$ e $j \neq i$. Multiplicando a equação do enunciado do teorema por $Q(x)$ em ambos os membros, teremos que

$$\frac{P(x)Q(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{Q(x)P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)(x - \alpha_k)} \iff P(x) = \sum_{k=1}^n \frac{Q(x)P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)(x - \alpha_k)}. \quad (\text{B.1})$$

Analisando o lado direito desta equação tem-se,

$$\sum_{k=1}^n \frac{Q(x)P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)(x - \alpha_k)} = \sum_{k=1}^n \frac{P(\alpha_k) \prod_{j=1, j \neq k}^n (x - \alpha_j)}{\prod_{j=1, j \neq k}^n (\alpha_k - \alpha_j)(x - \alpha_k)} = \sum_{k=1}^n \frac{P(\alpha_k) \prod_{j=1, j \neq k}^n (x - \alpha_j)}{\prod_{j=1, j \neq k}^n (\alpha_k - \alpha_j)}$$

Assim, de (B.1) queremos mostrar que

$$P(x) = \sum_{k=1}^n \frac{P(\alpha_k) \prod_{j=1, j \neq k}^n (x - \alpha_j)}{\prod_{j=1, j \neq k}^n (\alpha_k - \alpha_j)}$$

. Basicamente, queremos mostrar a igualdade de dois polinômios de grau menor ou igual a $n - 1$. Para tanto, reparemos que para todo α_i , com $i = 1, \dots, n$ temos

$$\sum_{k=1}^n \frac{P(\alpha_k) \prod_{j=1, j \neq k}^n (\alpha_i - \alpha_j)}{\prod_{j=1, j \neq k}^n (\alpha_k - \alpha_j)} = \frac{P(\alpha_i) \prod_{j=1, j \neq k}^n (\alpha_i - \alpha_j)}{\prod_{j=1, j \neq k}^n (\alpha_i - \alpha_j)} = P(\alpha_i).$$

Temos dois polinômios de grau menor ou igual a $n - 1$ que coincidem em n pontos distintos. Isto implica diretamente que estes dois polinômios sejam iguais (em concordância com o corolário anterior), ficando assim provado o teorema. \square

Em verdade, podemos ainda garantir o resultado interessante. Nas condições do teorema anterior, consideremos qualquer decomposição em frações simples na forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{x - \alpha_k}.$$

Então, do resultado provado acima, surge de imediato que

$$\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{x - \alpha_k} = \sum_{k=1}^n \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)(x - \alpha_k)}.$$

Agora podemos fixar um j arbitrário em $\{1, \dots, n\}$, multiplicando a equação acima por $x - \alpha_j$ em ambos os lados teremos

$$\lambda_j + \sum_{k=1, k \neq j}^n \frac{\lambda_k}{(x - \alpha_k)}(x - \alpha_j) = \frac{P(\alpha_j)}{Q'(\alpha_j)} + \sum_{k=1, k \neq j}^n \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)(x - \alpha_k)}(x - \alpha_j).$$

Tomando $x = \alpha_j$ conclui-se que $\lambda_j = \frac{P(\alpha_j)}{Q'(\alpha_j)}$ para $j = 1, \dots, n$.

Acabamos de mostrar a unicidade da decomposição em frações simples do teorema anterior quando os denominadores assumem a forma apresentada acima.

B.1 Teorema do Valor Médio

Definição B.1.1. Dizemos que uma função f assume um valor mínimo relativo em x_0 , ou equivalente, que $f(x_0)$ é um mínimo local se existe $\epsilon > 0$ tal que

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon).$$

Analogamente, dizemos que f assume um valor máximo relativo em x_1 , ou equivalente, que $f(x_1)$ é um máximo local se existe $\epsilon > 0$ tal que

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon).$$

Um valor de mínimo local ou máximo local de uma função f também é denominado de extremo local ou de extremo relativo da função.

A seguir, enunciaremos dois teoremas que são de extrema importância para a demonstração do teorema do valor médio.

Teorema B.1.1 (Teorema de Fermat). Se c é um ponto onde uma função f assume um extremo relativo e $f'(c)$ existe então $f'(c) = 0$.

Teorema B.1.2 (Teorema do valor extremo). Seja $f(x)$ uma função contínua em um intervalo $[a, b]$. Então existem $c, d \in [a, b]$ tais que $m = f(c) \leq f(x) \leq f(d) = M$ para todo $x \in [a, b]$.

Definição B.1.2. Denominamos m e M do teorema B.1.2, respectivamente, como mínimo absoluto e máximo absoluto de f em $[a, b]$.

Teorema B.1.3 (Teorema de Rolle). Seja f uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, e diferenciável no intervalo aberto (a, b) tal que $f(a) = f(b)$. Então existe um $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = 0.$$

Teorema B.1.4 (Teorema do valor médio). Seja f uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, e diferenciável no intervalo aberto (a, b) . Então existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Apêndice C

Alguns resultados da Análise complexa

Definição C.0.1. *Sejam f uma função definida sobre \mathbb{C} e R uma região aberta em \mathbb{C} . Dizemos que f é uma função holomorfa (ou analítica) em R , se existe a derivada f' em todos os pontos de R .*

Teorema C.0.1 (Equações de Cauchy-Riemann). *Seja $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa escrita na forma $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Se f é diferenciável no ponto z_0 , então as derivadas parciais u_x, u_y, v_x e v_y existem em (x_0, y_0) e satisfazem as relações*

$$(i) \quad u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0);$$

$$(ii) \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0).$$

Demonstração. Supondo que f seja diferenciável em $z = x_0 + y_0i$, então

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Usando uma aproximação horizontal (eixo x), observa-se que $z = x + y_0i$ se aproxima de $z_0 = x_0 + y_0i$, assim teremos

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{(x, y_0) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x + y_0i) - f(x_0 + y_0i)}{x + y_0i - x_0 - y_0i} \\ &= \lim_{(x, y_0) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x + y_0i) - f(x_0 + y_0i)}{x - x_0} \\ &= \lim_{(x, y_0) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{u(x, y_0) + iv(x, y_0) - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{x - x_0} \\ &= \lim_{(x, y_0) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \cdot \lim_{(x, y_0) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

de onde surge que

$$f'(z_0) = u_x + iv_x \tag{C.1}$$

por outro lado, fazendo uma aproximação vertical (eixo y), observa-se que $z = x_0 + yi$ se aproxima de $z_0 = x_0 + y_0i$, assim teremos

$$\begin{aligned}
 f'(z_0) &= \lim_{(x_0, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x_0 + yi) - f(x_0 + y_0i)}{x_0 + yi - x_0 - y_0i} \\
 &= \lim_{(x_0, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x_0 + yi) - f(x_0 + y_0i)}{i(y - y_0)} \\
 &= \lim_{(x_0, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{u(x_0, y) + iv(x_0, y) - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{i(y - y_0)} \\
 &= \lim_{(x_0, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} + i \cdot \lim_{(x_0, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} \\
 &= \frac{1}{i}u_y + v_y = \frac{1 \cdot i}{i \cdot i}u_y + v_y = \frac{i}{i^2}u_y + v_y = -iu_y + v_y
 \end{aligned}$$

onde surge que

$$f'(z_0) = v_y - iu_y \quad (\text{C.2})$$

Portanto, de (C.1) e (C.2) obtemos que

$$u_x = v_y \quad e \quad v_x = -u_y \quad (\text{C.3})$$

□

Teorema C.0.2 (Teorema de Green). *Seja $K \subset \mathbb{R}^2$ um fechado e limitado com interior não vazio cuja fronteira é imagem de uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ fechada, simples, de classe C^1 por partes e orientada no sentido anti-horário. Sejam P e Q de classe C^1 num aberto contendo K . Nestas condições*

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA. \quad (\text{C.4})$$

Demonstração. Analisando a figura C.1 diremos que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$

Então, podemos fazer duas afirmações e de seguida prová-las,

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad & \int_C P(x, y) dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dA; \\
 \text{(ii)} \quad & \int_C Q(x, y) dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dA
 \end{aligned}$$

Vamos mostrar a primeira afirmação.

$$- \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dA = - \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy \right] dx$$

Usando o teorema fundamental do cálculo, teremos,

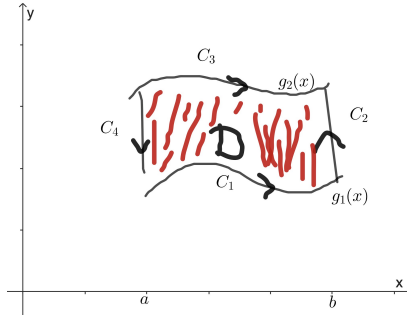


Figura C.1: F3rmula de Green

$$\begin{aligned}
 &= - \int_a^b P(x, y) \Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx \\
 \int_C P(x, y) dx &= - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dA = - \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))] dx
 \end{aligned}$$

Por outro lado, se calcularmos o integral $\int_C P(x, y) dx$ teremos que levar em considera33o a parametriza33o de C_1, C_2 e C_3, C_4 . Assim teremos,

$$\begin{aligned}
 C_1 : r_1(t) &= \langle t, g_1(t) \rangle & a \leq t \leq b \\
 C_3 : r_3(t) &= \langle t, g_2(t) \rangle & b \leq t \leq a
 \end{aligned}$$

sendo que C_1 e C_3 s3o curvas e

$$\begin{aligned}
 C_2 : r_2(t) &= \langle b, g_1(b) \rangle + [\langle b, g_2(b) \rangle - \langle b, g_1(b) \rangle] t \\
 r_2(t) &= \langle b, g_1(b) \rangle + [g_2(b) - g_1(b)] t & 0 \leq t \leq 1 \\
 C_4 : r_4(t) &= \langle b, g_2(b) \rangle + [\langle g_1(b) - g_2(b) \rangle] t & 0 \leq t \leq 1
 \end{aligned}$$

feito isso teremos,

$$\begin{aligned}
 \int_C P(x, y) dx &= \int_{C_1} P(x, y) dx + \int_{C_2} P(x, y) dx + \int_{C_3} P(x, y) dx + \int_{C_4} P(x, y) dx \\
 &= \int_a^b P(t, g_1(t)) x'(t) dt + \int_b^a P(t, g_2(t)) x'(t) dt + \int_0^1 [(b, g_1(b)) + t(g_2(b) - g_1(b))] x'(t) dt \\
 &+ \int_0^1 [(b, g_1(b)) + t(g_2(b) - g_1(b))] x'(t) dt
 \end{aligned}$$

Nos dois 3ltimos integrais, $x'(t) = 0$ j3a que $x(t) = a$ e $x(t) = b$. Ent3o teremos,

$$\begin{aligned}
 \int_C P(x, y) dx &= \int_a^b P(t, g_1(t)) dt + \int_b^a P(t, g_2(t)) dt \\
 &= \int_a^b P(t, g_1(t)) dt - \int_a^b P(t, g_2(t)) dt \\
 &= \int_a^b [P(t, g_1(t)) - P(t, g_2(t))] dt,
 \end{aligned}$$

provando assim, o item (i). De forma análoga prova-se também o item (ii). Portanto, somando as duas afirmações obtemos:

$$\begin{aligned} \int_C P(x, y) dx + \int_C Q(x, y) dy &= - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA + \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA \\ &= \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA \end{aligned}$$

provando o pretendido. □

Em forma de observação, o teorema de *Green* só pode ser usado nas seguintes condições:

- (i) A curva tem que ser fechada;
- (i) A curva tem que estar orientada positivamente;
- (i) Campo sem singularidade.

Teorema C.0.3 (Teorema de Cauchy-Goursat). *Seja f uma função analítica em domínio simplesmente conexo D . Se C é um contorno fechado simples contido em D , então*

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

Demonstração. Suponhamos que a função f seja de classe c^1 (a primeira derivada é contínua). Então,

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx + v dy + i \int_C v dx + u dy.$$

A ideia é calcular estes integrais de linha, substituindo pelo Teorema de Green.

$$\int_\gamma P dx + Q dy = \iint_k \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Fazendo $P = u$ e $Q = -v$, teremos,

$$\int_\gamma u dx - v dy = \iint_k \left(\frac{-\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy.$$

De forma análoga, fazendo $P = v$ e $Q = u$ teremos

$$\int_\gamma v dx + u dy = \iint_k \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy.$$

Pelas equações de Cauchy-Riemann dadas por $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$ teremos,

$$\int_\gamma v dx + u dy = \iint_k \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$$

e

$$\int_\gamma v dx + u dy = \iint_k \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy.$$

Substituindo no integral de contorno teremos,

$$\begin{aligned}\int_C f(z) dz &= \int_C u dx + v dy + i \int_C v dx + u dy \\ &= \iint_k \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy + \iint_k \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0.\end{aligned}$$

□

Teorema C.0.4 (Fórmula integral de Cauchy). *Seja C um caminho simples, fechado e orientado positivamente, e f uma função analítica ao longo de C e na região interior a C . Então,*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad \text{com} \quad z_0 \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Consideremos uma circunferência centrada em z_0 que esteja contida inteiramente em C .

$$C_\rho : \{|z - z_0| = \rho\} \subset \mathbb{R}.$$

$\frac{f(z)}{z - z_0}$ é analítica na região entre C e C_ρ . Então, pelo princípio da deformação de caminhos,

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Sendo assim teremos:

$$\begin{aligned}\int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \int_{C_\rho} \frac{f(z_0) + f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \\ &= f(z_0) \underbrace{\int_{C_\rho} \frac{dz}{z - z_0}}_A + \underbrace{\int_{C_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz}_B.\end{aligned}$$

Começemos por resolver o integral A . Para tal teremos que, $C : r(t) = x(t) + iy(t)$ com $t \in [a, b]$, daí que $\int_C f(z) dz = \int_a^b f(r(t))r'(t) dt$. Contudo, $|z - z_0| = \rho \implies z - z_0 = \rho e^{i\theta} \implies z = r(\theta) = z_0 + \rho e^{i\theta} \implies r'(\theta) = i\rho e^{i\theta} d\theta$ com $\theta \in [0, 2\pi]$. Assim,

$$A = \int_{C_\rho} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho e^{i\theta}} \cdot i\rho e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi i$$

Para terminar a demonstração do teorema basta mostrar que o integral $B \rightarrow 0$. Por hipótese f é uma função analítica, o que significa que é contínua, ou seja, seja $\epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Então,

$$\left| \int_{C_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \int_{C_\rho} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} |dz| \leq \frac{\epsilon}{\rho} \int_{C_\rho} |dz| = \frac{\epsilon}{\rho} \int_0^{2\pi} \rho d\theta = 2\pi\epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário, obtém-se que $\left| \int_{C_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \rightarrow 0$.

Portanto, $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$. □

Definição C.0.2. Seja z_0 uma singularidade isolada de $f(z)$, sendo que $f(z)$ tem uma expansão em série de Laurent,

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < \rho.$$

Definimos o resíduo de $f(z)$ em z_0 como sendo o coeficiente a_{-1} na expansão de Laurent, isto é,

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(z) dz, \quad (\text{C.5})$$

onde r é um raio fixo em $0 < r < \rho$.

Teorema C.0.5. Seja D um domínio limitado no plano complexo com contorno suave por parte. Suponha-se que $f(z)$ é uma função analítica em $D \cup \partial D$, exceto para um número finito de singularidades isoladas z_1, \dots, z_n em D . Então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \text{Res}(f, z_i). \quad (\text{C.6})$$

Demonstração. De acordo com a figura abaixo, pelo princípio da deformação de caminhos e usando a Definição C.0.2 teremos

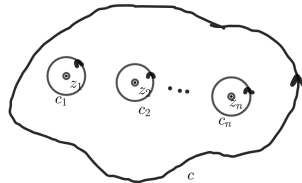


Figura C.2: Curva c fechada e orientada positivamente. Fonte: O autor.

$$\begin{aligned} \int_c f(z) dz &= \int_{c_1} f(z) dz + \int_{c_2} f(z) dz + \dots + \int_{c_n} f(z) dz \\ &= 2\pi i \text{Res}(f, z_1) + 2\pi i \text{Res}(f, z_2) + \dots + 2\pi i \text{Res}(f, z_n) \\ &= 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j). \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. □

Corolário C.0.5.1. Se $f(z)$ tem um polo simples em z_0 , então

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z).$$

Corolário C.0.5.2. Se $f(z)$ tem um polo duplo em z_0 , então

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} (z - z_0)^2 f(z). \quad (\text{C.7})$$

Neste caso a expansão em série de Laurent é:

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + \dots$$

Entretanto,

$$(z - z_0)^2 f(z) = a_{-2} + a_{-1}(z - z_0) + a_0(z - z_0)^2 + \dots$$

derivando ambos os lados e fazendo z tender a z_0 teremos:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} (z - z_0)^2 f(z) = a_{-1}.$$

Corolário C.0.5.3. Se $F(z)$ e $g(z)$ são funções analíticas em z_0 , e se $g(z)$ tem um zero simples em z_0 . Então

$$\text{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)} \quad (\text{C.8})$$

Neste caso $f(z)/g(z)$ tem no máximo um polo simples em z_0 . Se usarmos (C.0.5.1) e a definição de derivadas em um ponto, teremos:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)} \quad (\text{C.9})$$

Corolário C.0.5.4. Se $g(z)$ é analítica e tem um zero simples em z_0 , então

$$\text{Res}(1/g(z), z_0) = 1/g'(z_0).$$

C.1 Domínios Exteriores

Suponha-se que $f(z)$ seja analítica em $|z| \geq R$, com a expansão de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| \geq R.$$

Definimos o resíduo de $f(z)$ no infinito (∞) como sendo

$$\text{Res}(f(z), \infty) = -a_{-1}. \quad (\text{C.10})$$

Se D_R é o domínio exterior $\{|z| > R\}$, esta definição é equivalente a

$$\int_{D_R} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f(z), \infty).$$

A orientação do círculo $\{|z| = R\}$ com respeito a D_R é no sentido horário o que justifica o sinal negativo em (C.10). Assim,

$$\int_D f(z) dz = 2\pi i \left[\text{Res}(f(z), \infty) + \sum_{j=1}^m \text{Res}(f(z), z_j) \right].$$

Bibliografia

- [1] Mário António Grande Abrantes. *Polinómios Ortogonais de Uma e Duas Variáveis*. University of Coimbra, July 2001. Tese de Mestrado, Universidade de Coimbra, <https://estudogeral.uc.pt/bitstream/10316/13622/1/PolinmiosOrtogonaisdeUmaeDuasVariveis.pdf>.
- [2] Jairo Antonio Charris-Castañeda, Victoria Silva, and Gustavo Salas. Polinomios ortogonales relacionados con problemas espectrales. *Revista Colombiana de Matemáticas*, 25(1-4):35–80, 1991.
- [3] Theodore S. Chihara. *An introduction to orthogonal polynomials*. Courier Corporation, 2011.
- [4] Theodore Gamelin. *Complex analysis*, 2003.
- [5] Mourad Ismail. *Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable*, volume 98. Cambridge university press, 2005.
- [6] Sergey Khrushchev. *Orthogonal polynomials and continued fractions*. Cambridge University Press, 2008.
- [7] Peter D. Lax. *Linear algebra and its applications*, volume 78. John Wiley & Sons, 2007.
- [8] Thais Leite. A integral de Riemann-Stieltjes. 2017.
- [9] John C Mason and David C Handscomb. *Chebyshev polynomials*. CRC press, 2002.
- [10] Evgeniĭ Mikhaĭlovich Nikishin and Vladimir Nikolaevich Sorokin. *Rational approximations and orthogonality*, volume 92. American Mathematical Society Providence, RI, 1991.
- [11] Walter Rudin. *Principios del análisis matemático*. McGraw-Hill, 1980.
- [12] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill, 1987.
- [13] Gabor Szegő. *Orthogonal polynomials*. American Mathematical Society, Rhode Island, 1962.
- [14] Walter Van Assche. Orthogonal polynomials, associated polynomials and functions of the second kind. *Journal of computational and applied mathematics*, 37(1-3):237–249, 1991.