Universidade de Aveiro
2023

Departamento de Educação e Psicologia

Ana Rita Arroja Rodrigues Teto

Uso de calculadora gráfica na resolução de tarefas interdisciplinares sobre funções com alunos do 10.º ano da área Socioeconómica

Universidade de Aveiro
2023

Departamento de Educação e Psicologia

Ana Rita Arroja Rodrigues Teto

Uso de calculadora gráfica na resolução de tarefas interdisciplinares sobre funções com alunos do 10.º ano da área Socioeconómica

Relatório de Estágio apresentado à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, realizado sob a orientação científica da Professora Doutora Maria Paula Lopes dos Reis Carvalho, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

o júri

Presidente	Prof.ª Doutora Isabel Maria Cabrita dos Reis Pires Pereira Professora Associada da Universidade de Aveiro
Vogal – arguente principal	Doutora Rosa Antónia de Oliveira Figueiredo Tomás Ferreira Professora Auxiliar da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Vogal – orientadora	Prof.ª Doutora Maria Paula Lopes dos Reis Carvalho Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

Agradecimentos

À Doutora Paula Carvalho, por toda a sua disponibilidade para me acompanhar neste processo. Obrigada pelos seus ensinamentos, pelo seu rigor e exigência.

À professora cooperante, pelo seu acolhimento e por ter estado sempre presente ao longo de todo o ano letivo. Obrigada pela partilha e ensinamentos, pela exigência, pelo companheirismo, pela amizade.

Aos alunos, por terem colaborado de forma empenhada, permitindo a recolha de dados, fundamental para a realização deste trabalho.

Um agradecimento à minha família, especialmente ao meu marido e à minha filha, pelo seu apoio e principalmente pela sua compreensão nas alturas mais complicadas, onde estive mais ausente da vida familiar.

palavras-chave

Calculadora gráfica, funções, função afim, função quadrática, interdisciplinaridade, matemática, economia, métodos analíticos, métodos gráficos.

Resumo

Pretendeu-se com este trabalho, perceber como é que alunos do 10.º ano da área científica de Ciências Socioeconómicas reagiam a tarefas sobre o tema Funções, com contextos retirados de Economia, nomeadamente estudar a sua preferência por resoluções envolvendo métodos exclusivamente analíticos ou privilegiando métodos gráficos, com recurso a calculadora gráfica. A investigação qualitativa foi realizada numa turma de uma escola da região de Aveiro, na qual foi desenvolvida a unidade curricular de *Prática de Ensino Supervisionada*. Os dados foram obtidos através de recolha documental das produções dos alunos, da observação participante e de um *focus group*. Com os dados recolhidos foi possível concluir que os alunos privilegiam a resolução de tarefas envolvendo métodos analíticos e que as suas principais dificuldades são a interpretação de enunciados e a escolha de uma janela de visualização adequada, quando utilizam as capacidades gráficas das suas calculadoras.

Keywords

Graphing calculator, functions, linear function, quadratic function, interdisciplinarity, mathematics, economics, analytical methods, graphical methods.

Abstract

The aim of this work was to understand how 10th grade students in the fild of Socio-Economic Sciences reacted to tasks on the subject of Functions, with contexts taken from Economics, namely White they gave preference to resolutions involving exclusively analytical methods, or if they favored graphical methods, using the graphing calculator. The qualitative investigation was carried out in a class of a school in the Aveiro region, in which the curricular unit of Supervised Teaching Practice was developed. Data were obtained through documental collection of student productions, participant observation and a focus group. With the data collected, it was possible to conclude that students favor solving tasks involving analytical methods and that their main difficulties are interpreting statements and choosing an appropriate viewing window when using the graphical capabilities of their calculators.

Índice

Índice de figuras

Introdução

Este trabalho, designado de Relatório de Estágio, está vinculado à unidade curricular “Prática de Ensino Supervisionada (PES)”, parte integrante do plano curricular do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, da Universidade de Aveiro.

Uma vez que, atualmente, o professor estagiário não tem turmas atribuídas, a PES é desenvolvida nas turmas do professor cooperante, que desempenha funções de Orientador Pedagógico. Na primeira fase da PES, o professor estagiário observa as aulas do seu orientador pedagógico. A observação de aulas é uma ferramenta pedagógica muito importante na formação inicial de professores, por isso, para professores em formação, a observação das práticas educativas de um professor experiente é uma mais-valia para o seu desenvolvimento pessoal e profissional. De acordo com Reis (2011),” Aprende-se muito através da observação e o ensino não constitui uma excepção.”(Reis, 2011, p.12).
É essencial perceber que observar não é julgar, mas antes uma forma de questionar e refletir sobre os fenómenos observados o que irá permitir “estabelecer as bases para uma tomada de decisão fundamentada sobre o processo de ensino aprendizagem.”(Reis, 2010, p.20) o que se espera que se traduza numa melhoria dos processos de ensino e aprendizagem. Deste modo, a observação de aulas ocorreu ao longo de toda a PES, quer das aulas lecionadas pela professora cooperante (a maioria), quer das aulas lecionadas pelo meu colega de díade. Estas observações levaram a reflexões individuais e conjuntas, onde houve oportunidade para dialogar com a professora cooperante, colocando as minhas dúvidas sobre as metodologias adotadas.
Estes diálogos e reflexões, o conhecimento da planificação anual da disciplina e o meu próprio percurso pessoal enquanto aluna, levaram-me a decidir que o tema que gostaria de abordar seria *Funções*. Este é um tema onde os alunos costumam revelar dificuldades, como identificado por Azevedo (2009) que refere, a título de exemplo

> (i)leitura e interpretação de gráficos que representam uma função; (II) no estabelecimento de relações entre as diferentes formas de representar uma função; (iii) na interpretação de dados fornecidos pela calculadora gráfica; (iv) na interpretação de problemas contextualizados; (v) no domínio de processos de resolução; e (vi) no estabelecimento de conexões com outros tópicos da Matemática ou de outras disciplinas, nomeadamente da Física ou da Economia. (Azevedo, 2009, p.4)

Sendo que, neste tema, os alunos iniciam a utilização de calculadora gráfica nas aulas, e dada a inegável presença e importância da tecnologia na sociedade, decidi que a utilização desta tecnologia também faria parte do meu estudo (até pela necessidade de eu própria me familiarizar com os modelos atuais disponíveis no mercado)

O uso de calculadora gráfica tornou-se obrigatório no ensino secundário desde 1997, havendo perguntas na avaliação externa que obrigam à sua utilização. A evolução da sociedade em termos de utilização de tecnologia e o desenvolvimento muito rápido dessa mesma tecnologia nos últimos anos, bem como a modernização do ensino, fazem com que a calculadora gráfica seja um bem imprescindível no processo de aprendizagem dos alunos. As próprias calculadoras gráficas têm evoluído muito, permitindo, atualmente, a sua utilização para a criação de programas em *Python*, indo ao encontro da implementação *das Novas Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Secundário* (ME, 2023), no ano letivo 2024/2025.

Importa notar que os alunos que agora frequentam o 10.º ano, atravessaram o período de pandemia relativa à COVID-19 durante o Ensino Básico, tendo sido expostos, por via das circunstâncias, a um grande conjunto de tecnologias educativas, como plataformas online e várias ferramentas digitais. Seria, portanto, de esperar que estes se sentissem muito confortáveis com a sua utilização. Contudo, apesar do domínio aparente que os alunos têm da tecnologia, com o uso frequente e quase generalizado de *smartph*ones e *smartwatches*, cedo percebi que a utilização de certas ferramentas tecnológicas na aprendizagem, de uma forma ativa não é tão fácil para os alunos como seria de esperar.

Além disso, o saber científico, técnico e tecnológico é uma das áreas de competência do *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (PASEO). Para se considerar que esta competência foi adquirida, o aluno deve ser capaz de "executar operações técnicas, segundo uma metodologia de trabalho adequada, para atingir um objetivo ou chegar a uma decisão ou conclusão fundamentada, adequando os meios materiais e técnicos à ideia ou intenção expressa" (DGE, 2017, p.29).

Assim torna-se importante que as escolas e os professores invistam em capacitação para o uso da calculadora gráfica em sala de aula de modo que ela se torne uma ferramenta eficiente no processo de aprendizagem dos estudantes. Esta capacitação implica um esforço e investimento por parte dos professores para se manterem atualizados, pois precisam de ser proficientes com as funcionalidades de vários modelos de calculadora gráfica[1], para serem capazes de motivar e orientar os alunos sobre a forma de utilizar a tecnologia adequadamente. A coexistência de vários modelos de calculadora gráfica é um grande desafio para o desenrolar das aulas, principalmente no 10.º ano, quando os alunos iniciam a sua utilização, necessitando por isso de muita orientação por parte do docente. A utilização da calculadora implica também um investimento financeiro por parte das famílias, pois estes equipamentos podem custar algumas dezenas de euros. Além disso, implica um investimento individual de cada aluno por forma a conhecer o seu equipamento, para poder retirar o maior benefício possível da sua utilização.

Durante a observação das aulas, e consulta da parte 1 do manual adotado (Costa & Rodrigues, 2019), foi possível perceber que os alunos de Matemática A não trabalham, de forma sistemática, a resolução de tarefas- exercícios, problemas ou investigações - sobre funções, em cenários da vida real. Ora o contexto das tarefas é um elemento fundamental no estudo de funções. Segundo Ponte & Quaresma (2012), o contexto é o universo experimental associado a cada tarefa, que pode levar para uma situação da vida quotidiana, ou levar para o universo matemático. O contexto pode ser realístico, de semi-realidade ou matemático e é importante que os alunos trabalhem nos diversos contextos. Os mesmos autores afirmam também que "…a motivação não deixa de ser importante, uma vez que o aluno aprende essencialmente em função do seu interesse em aprender. E para isso, o contexto de trabalho desempenha um papel fundamental" (Ponte & Quaresma, 2012, p.19).

Além disso, o contexto das tarefas pode promover a interdisciplinaridade do ensino. Ao utilizar contextos e situações da realidade que envolvem a aplicação de funções, é possível integrar conteúdos de diferentes disciplinas. Desta forma, os alunos percebem a matemática também

[1] Todos os anos a Direção-Geral da Educação emite um ofício sobre a utilização de calculadoras nas avaliações externas.

como uma ferramenta transversal, capaz de auxiliar em diferentes áreas de conhecimento. Isto era uma preocupação patente nas práticas essenciais de aprendizagem sugeridas nas Aprendizagens Essenciais (ME,2018b), onde se refere que os alunos devem ter a oportunidade de "estabelecer conexões entre diversos temas matemáticos e de outras disciplinas" e de "Apreciar o papel da matemática no desenvolvimento das outras ciências" (ME, 2018, pp.5-6).

Sendo os alunos envolvidos neste estudo da área de Ciências Socioeconómicas, tornou-se claro para mim que teria de integrar tarefas com contextos da área da Economia e/ou da Geografia.

Para fazer uma escolha informada, consultei as docentes destas duas disciplinas e os manuais adotados na escola para as mesmas, para ficar a conhecer dos conteúdos lecionados em ambas, perceber o tipo de tarefas que são propostas aos alunos e quais os conceitos matemáticos nelas envolvidas. Escolhi realizar tarefas relacionadas com a área de Economia porque, pelo menos no 10.º ano de escolaridade, elas envolvem um maior número de conceitos matemáticos.

Assim, desenvolvi este trabalho, tendo como objetivo perceber como é que alunos de uma turma do 10.º ano da área de ciências socioeconómicas reagiam a tarefas sobre o tema *Funções*, com contextos retirados de Economia, nomeadamente, estudar a sua preferência por resoluções envolvendo métodos analíticos ou privilegiando métodos gráficos, com recurso a calculadora gráfica. Para tal, pretende-se responder às seguintes questões de investigação:

1. Quais as preferências dos alunos do 10.º ano quanto à abordagem em tarefas relacionadas ao tema de funções, com contextos de Economia: favorecem métodos puramente analíticos, ou recorrem à calculadora gráfica nos seus processos de resolução?

2. Quais as dificuldades que são percebidas pelos alunos ao lidarem com tarefas desse tipo?

Este relatório está organizado em 4 capítulos, precedidos de uma Introdução ao tema e da qual consta o objetivo para este estudo, bem como as questões de investigação às quais se pretende dar resposta.
No Capítulo I apresenta-se um enquadramento teórico, onde são abordados os conceitos fundamentais sobre funções, sobre o seu estudo e sobre a utilização de calculadora gráfica em sala de aula.
No Capítulo II apresenta-se o enquadramento metodológico, onde se insere o método de investigação, o contexto educativo onde se desenvolveu o estudo, a sua planificação e a intervenção pedagógica.
No Capítulo III apresentam-se os resultados e no Capítulo IV faz-se uma reflexão sobre os resultados obtidos e apresenta-se uma breve reflexão pessoal.

Capítulo I – Enquadramento Teórico

1.1. Funções

Uma função é uma relação. De acordo com o texto que define a Operacionalização das aprendizagens essenciais (AE) o aluno deve "reconhecer uma função em diversas representações, e interpretá-la como relação entre variáveis e como correspondência unívoca entre dois conjuntos, e usar funções para representar e analisar situações, em contextos matemáticos e não matemáticos" (ME, 2018a). Mais tarde, no Ensino Secundário, onde se faz um estudo mais aprofundado das funções, é recomendado que os alunos devam "reconhecer, representar e interpretar graficamente funções reais de variável real e funções definidas por expressões analíticas, interpretar a paridade, as simetrias dos gráficos das funções pares e das funções ímpares, os intervalos de monotonia de uma função real de variável real, os extremos relativos e absolutos e usar todos este conceitos na resolução de problemas e em contextos de modelação (ME, 2018b).

A definição de função como uma relação é, pois, uma abordagem comum nos níveis iniciais de escolaridade pois ajuda a estabelecer uma compreensão clara do conceito de função. A ideia de função como uma relação é muitas vezes mais intuitiva para os estudantes e facilita a compreensão inicial do conceito. Isso porque a ideia de associar elementos de um conjunto a elementos de outro conjunto é mais natural e tangível. Por exemplo, situações de relações em que um elemento de um conjunto pode ser relacionado com mais do que um elemento de outro conjunto, são ocorrências comuns em situações reais que têm relevância em certos contextos matemáticos e em teorias mais avançadas.

Entre estas relações, assume particular importância no contexto do Ensino Secundário a noção de função. A definição de função como uma relação permite aos alunos a entender que as funções podem ser representadas graficamente, o que pode ajudá-los a visualizar melhor as relações entre conjuntos. Por exemplo, o gráfico de uma função real de uma variável real não é mais do que um subconjunto de um produto cartesiano de conjuntos, neste caso $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Por estas razões, neste trabalho optamos por expor os conceitos matemáticos que levam à definição e estudo de função neste nível de ensino, e a sua fundamentação teórica.

1.1.1. Conceitos e resultados fundamentais

Consideraremos, neste capítulo, que trabalhamos com conjuntos não vazios, pressupondo também o conhecimento do conceito de conjunto e a compreensão da linguagem de lógica matemática suficientes para a compreensão do texto.

O produto cartesiano de dois conjuntos A e B é o conjunto:

$$A \times B = \{(x, y): x \in A \ \wedge y \in B\}$$

Definição 1.1 *Dados dois conjuntos A e B, uma relação binária, R, de A para B, é qualquer subconjunto de* $A \times B$*, isto é,* $R \subseteq A \times B$.

Além disso, sendo x e y elementos de A e B, respetivamente, diz-se que x e y estão relacionados se $(x, y) \in R$. Uma relação é, portanto, um conjunto de pares ordenados. *Se B=A, diz-se que se trata de uma relação binária em A.*

Define-se o *domínio de* R como o conjunto de todos os elementos $x \in A$ para os quais existe pelo menos um $y \in B$ tal que $(x, y) \in R$, isto é

$$D_R = \{x \in A: (x, y) \in R \ para \ algum \ y \in B\}.$$

O contradomínio de R é o conjunto dos elementos $y \in B$ para os quais existe pelo menos um $x \in A$ tal que $(x, y) \in R$, isto é

$$D'_R = \{y \in B: (x, y) \in R \ para \ algum \ x \in A\}.$$

O referido elemento y no conjunto B chama-se a *imagem* de x; os elementos de A são os *objetos*.

Usando esta formalização, a definição de função é apresentada como um caso particular de uma relação entre dois conjuntos.

Definição 1.2 *Uma função de A em B, ou função definida no conjunto A e com valores no conjunto B, é qualquer relação binária* f *de A para B que verifica as condições: o domínio de* f *é o conjunto A; quaisquer que sejam* x, y *e* z *pertencentes a A, se* $(x, y) \in f$ *e* $(x, z) \in f$*, então* $y = z$.

Nesta definição afirma-se que todos os elementos de A têm imagem em B, e que, a imagem de cada elemento de A é única em B, indo ao encontro da linguagem usada no Ensino Secundário. Deste modo valem para as funções todas as propriedades válidas para as relações (Domingos et al., 2009).

Para indicar que f é uma função definida no conjunto A e com valores no conjunto B, escreve-se $f: A \longrightarrow B$. Escreve-se também $y = f(x)$ em vez de $(x, y) \in f$. O conjunto B denomina-se conjunto de chegada e o contradomínio da função f é um subconjunto do conjunto B que se nota por CD_f ou D'_f.

Uma função diz-se *sobrejetiva* se o seu contradomínio coincide como conjunto de chegada; diz-se *injetiva* se a objetos diferentes correspondem sempre imagens diferentes; *diz-se bijetiva* se é sobrejetiva e injetiva.

1.1.2. Formas de representar uma função

As funções podem ser representadas de várias formas. Entre outras, são conhecidas e frequentemente usadas, as representações através de diagramas sagitais, tabelas, lei de formação, a qual podemos descrever por palavras, em linguagem natural, ou através de linguagem simbólica, obtendo a expressão analítica.
Na Figura 1 mostram-se algumas destas formas de representação, para uma função cujo domínio é $A = \{-2,0,1,2\}$ e o contradomínio é $B = \{0,2,3,4\}$, estando em todos os casos visível de forma evidente o conceito de relação entre elementos.

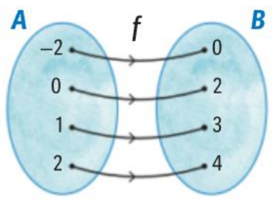
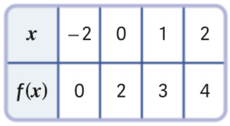
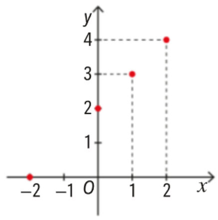
Diagrama Sagital	Tabela	Gráfico Cartesiano	Expressão analítica
			$f(x) = x + 2$

Figura 1: Formas de representar uma função
Fonte: Adaptado de Neves *et al.*

A representação mais interessante e útil de uma função real de variável real (secção 1.1.3), é, contudo, através do seu gráfico cartesiano. Num contexto mais geral, definimos gráfico de uma função como o conjunto dos pares ordenados de pontos (x, y) tais que x está relacionado com y por meio da relação f, do seguinte modo:

Definição 1.3 *Sejam A e B dois subconjuntos não vazios do conjunto dos números reais e a função $f: A \longrightarrow B$. O gráfico da função f é o conjunto*

$$G_f = \{(x, y) \in A \times B : x \in A \ \wedge \ y = f(x)\}.$$

1.1.3. Funções reais de variável real

O conjunto dos números reais denota-se por $\mathbb{R}$.

Definição 1.4 *Uma função diz-se real de variável real se o seu conjunto de chegada é $\mathbb{R}$ e o seu domínio D_f é um subconjunto de $\mathbb{R}$; escreve-se $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Neste caso, o gráfico é um subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, que se representa num sistema cartesiano, marcando os pontos (pares ordenados que representam a função) num sistema de eixos, geralmente ortonormado.

Para fazer o esboço do gráfico de uma função é necessário determinar e marcar no referencial alguns dos seus pontos. Este método pode levar a representações imprecisas, pois normalmente usam-se poucos pontos o que pode levar a que não sejam observáveis algumas caraterísticas da função. Atualmente usa-se tecnologia gráfica que se encontram amplamente difundida, como por exemplo, *software* de geometria dinâmica como o *Geogebra* (https://www.geogebra.org) que pode ser usado computador ou no telemóvel, emuladores de calculadoras gráficas e calculadoras gráficas, cuja utilização é objeto de estudo neste trabalho.

Definição 1.5 *Seja* $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* A *um subconjunto de* D_f*. Se, para todo o* $x_1, x_2 \in A$, *tais que* $x_1 < x_2$, *se tem*

(i) $f(x_1) \leq f(x_2)$, f *é crescente em sentido lato (não decrescente) em A;*

(ii) $f(x_1) < f(x_2)$, f *é crescente em A;*

(iii) $(x_1) \geq f(x_2)$, f *é decrescente em sentido lato (não crescente) em A;*

(iv) $f(x_1) > f(x_2)$, f *é decrescente em A;*

Se f *satisfaz (i)-(iii) diz-se que a função é monótona; se* f *satisfaz (ii)-(iv) diz-se que a função é estritamente monótona.*

É claro que se uma função é estritamente monótona num conjunto de números reais então é injetiva nesse conjunto e, consequentemente é invertível, quer dizer, *existe uma função,* f^{-1}, *que a cada* $y \in D'_f$ *faz corresponder o elemento* $x \in D_f$, *tal que* $y = f(x)$.

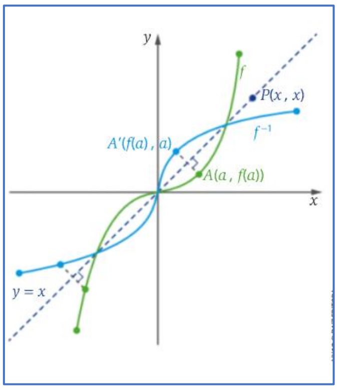


Figura 2: Gráfico cartesiano de uma função e da sua inversa.
Fonte: Andrade et al, 2019, p.70

Os gráficos cartesianos das funções f e f^{-1} são imagens um do outro por simetria em relação à reta de equação $y = x$, como se ilustra na Figura 2.
Uma função f diz-se *par* se para todo o $x \in D_f$ se tem $f(x) = f(-x)$ e diz-se *ímpar* se para todo o $x \in D_f$ se tem $f(x) = -f(-x)$.

Reconhecer e interpretar a paridade, as simetrias dos gráficos das funções pares e das funções ímpares, os intervalos de monotonia de uma função real de variável real, são competências a observar nos estudantes do 10.º Ano de escolaridade (ME, 2018b). Fazem parte da AE, ainda, reconhecer e interpretar os extremos, sentido das concavidades, raízes e a representação gráfica de funções quadráticas e usá-los na resolução de problemas e em contextos de modelação (ME, 2018b);

Entre as muitas aplicações das funções, a resolução de problemas de otimização é bastante importante em contexto pedagógico. Em áreas como a Física, a Química e a Economia, por exemplo, fazem-se ligações com a matemática modelando problemas que levam à determinação de máximos e mínimos de funções; estes são, de modo intuitivo, os valores maiores e menores, respetivamente, que uma função assume.

Definição 1.6 *Seja f uma função real de variável real de domínio D_f e $x_0 \in D_f$. Diz-se que*

(i) *f tem um máximo relativo em x_0, $f(x) \leq f(x_0)$, para todo x num intervalo aberto contendo x_0. O ponto x_0 é um maximizante relativo e f(x_0) é um máximo relativo.*

(ii) *f tem um mínimo relativo em x_0, para todo x num intervalo aberto contendo x_0. O ponto x_0 é um minimizante relativo e f(x_0) é um mínimo relativo.*

(iii) *f tem máximo absoluto se a condição (i) for válida para todos os valores de D_f.*

(iv) *f tem mínimo absoluto se a condição (ii) for válida para todos os valores de D_f.*

Os máximos e mínimos, relativos e absolutos constituem, quando existem, os *extremos* de uma função.

Os zeros (ou raízes) de uma função são os elementos do domínio de f cuja imagem é zero, isto é, são as soluções da equação $f(x) = 0$. Graficamente, são os pontos de interseção do gráfico cartesiano da função com o eixo Ox (Figura 3).

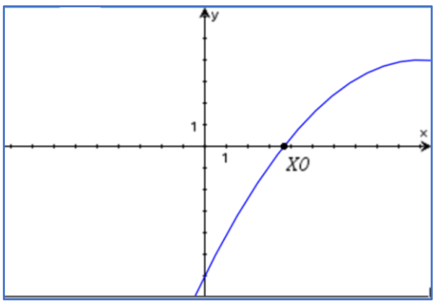


Figura 3: Identificação gráfica do zero de uma função

Estudar o sinal de uma função é determinar para que valores de x, pertencentes ao domínio da função, esta assume valores positivos, negativos ou zero.

1.1.4. Transformações Geométricas de Gráficos de Funções Elementares

As funções elementares são as funções potência, exponencial, logarítmica, trigonométrica, trigonométricas inversas e as funções que se obtêm através de operações sobre estas (adições, subtrações, multiplicações, divisões e composições).

Quando observamos a expressão analítica de uma função, ou a sua representação gráfica, podemos perceber, quando se tratam de funções elementares, que estas se relacionam com outras funções mais simples. Assim podemos relacionar as propriedades de uma com as propriedades da outra, de forma rápida e sem recurso a grandes manipulações algébricas. Nesta secção listamos algumas transformações geométricas que permitem relacionar o gráfico e propriedades de funções mais complexas com outras mais simples, podendo estes temas serem aprofundados consultando Veloso (2012) e Breda et al (2011).

Seja f uma função real de variável real de domínio D_f e a, b, c e d números reais.

A representação gráfica de uma função g, definida por $g(x) = f(x) + c$, obtém-se da de f por meio de uma translação associada ao vetor $\vec{\mathrm{u}}(0, \mathrm{c})$ (Figura 4).

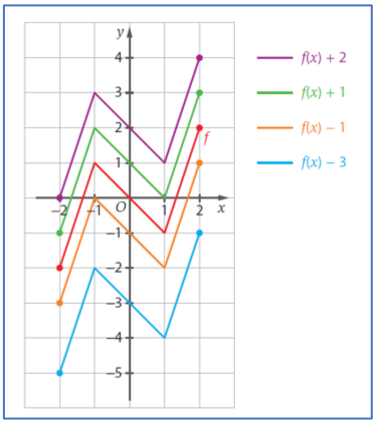


Figura 4: Translação associada ao vetor $\vec{u}(0, c)$.
Fonte: Andrade et al, 2019, p.56

De modo semelhante, a representação gráfica de uma função g, definida por $\mathrm{g}(x) = f(x - c)$ em $\mathrm{D}_g = \{x: x - c \in D_f\}$ obtém-se da de f através da translação associada ao vetor $\vec{\mathrm{u}}(\mathrm{c}, 0)$ (Figura 5).

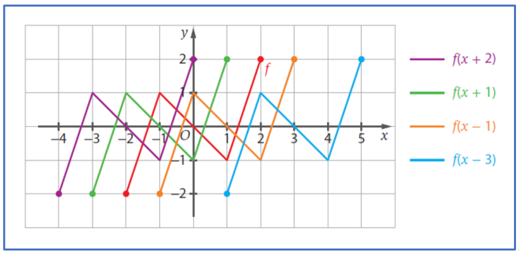


Figura 5: Translação associada ao vetor $\vec{u}(c, 0)$
Fonte: Andrade et al, 2019, p.57

A representação gráfica da função g, definida por $g(x) = af(x)$ obtém-se de f através de uma *contração vertical* ou uma *dilatação vertical de coeficiente* a, se $0 < \text{a} < 1$, ou $a > 1$, respetivamente (Figura 6).

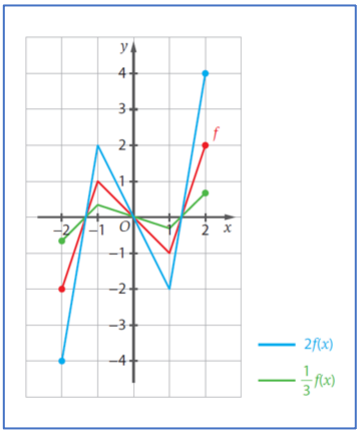


Figura 6: Contração/Dilatação vertical de coeficiente $a > 0$
Fonte: Andrade et al, 2019, p.61

A representação gráfica da função g, definida por $g(x) = -f(x)$ obtém-se da de f através da *reflexão* de eixo Ox, como se ilustra na Figura 7.

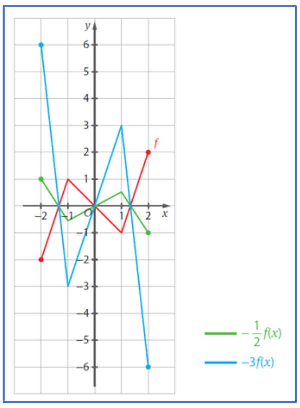


Figura 7: Reflexão de eixo Ox
Fonte: Andrade et al, 2019, p.61

A representação gráfica de g, definida em $D_g = \{x: ax \in D_f\}$ por $g(x) = f(ax)$ obtém-se da de f através de uma *dilatação horizontal* de coeficiente $\frac{1}{a}$ (Figura 8)

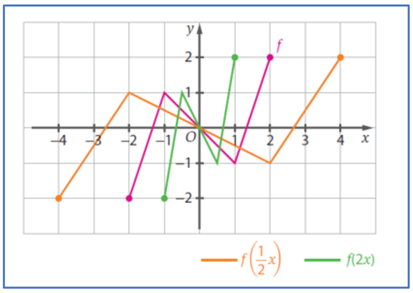


Figura 8: Contração/Dilatação horizontal de coeficiente $\frac{1}{a} > 0$
Fonte: Andrade et al, 2019, p.62

E, finalmente, a representação gráfica de uma função g, definida em $D_g = \{x: -x \in D_f\}$ por $g(x) = f(-x)$ obtém-se da representação gráfica de f através de reflexão de eixo Oy (Figura 9).

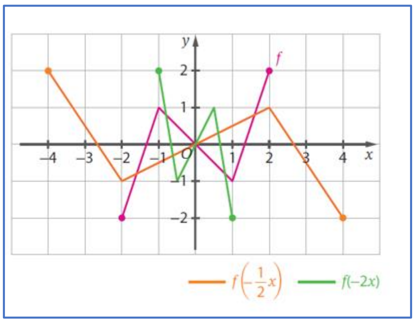


Figura 9: Reflexão de eixo Oy.
Fonte: Andrade et al, p.62

Estas relações entre os gráficos das funções e das transformadas referidas têm importância e são usadas na resolução de problemas que envolvem funções quadráticas em contextos de modelação (ME, 2018b).

1.1.5. Funções polinomiais de grau 1 e 2

Uma função diz-se função polinomial de grau n, se é uma função real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, que pode ser definida analiticamente por um polinómio de grau n $(n \in \mathbb{N})$, com uma só variável, isto é, uma função definida por uma expressão da forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

com $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$.

Uma função polinomial de grau 1, chama-se função afim, e de grau 2, chama-se função quadrática, e estas serão abordadas com mais pormenor neste trabalho.

Definição 1.7 *Uma função real de variável real $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se uma função afim se é definida analiticamente por $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$.*

O gráfico de f é dado por

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = ax + b\}$$

sendo a sua representação gráfica uma reta de declive a e que passa no ponto de coordenadas $(0, b)$. A função é crescente se $a > 0$, é decrescente se $a < 0$ e se $a = 0$ a função é constante (Figura 10).

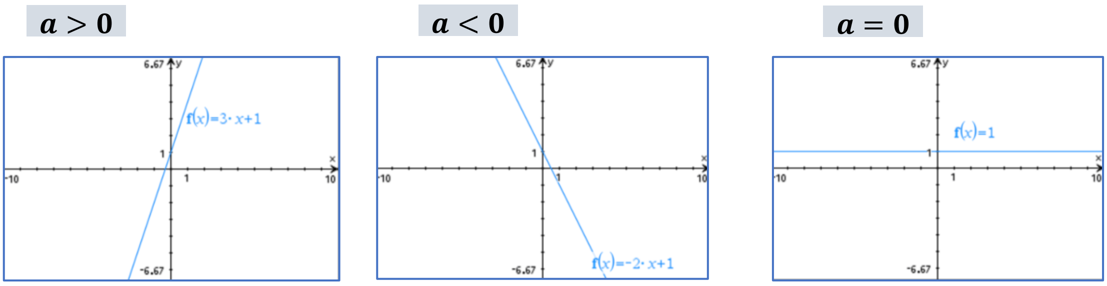


Figura 10: Ilustração de representação gráfica de algumas funções afim

Definição 1.8 *Uma função linear é uma função definida por* $f(x) = ax, a \neq 0$*.*

A função linear é, portanto, um caso particular da função afim. A representação gráfica de uma função linear é uma reta que passa na origem do referencial.

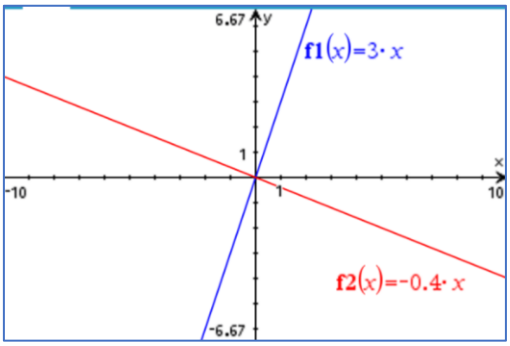


Figura 11: Ilustração de representação gráfica de algumas funções lineares

Observação: *A função linear é utilizada para modelar problemas onde as grandezas são diretamente proporcionais.*

Definição 1.9 Uma função real de variável real $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se uma função quadrática se é uma função polinomial de grau 2,

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

O gráfico de f é dado por

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = ax^2 + bx + c\},$$

cuja representação gráfica é uma parábola (uma curva da família das cónicas (Breda & Costa, 1996). Na figura 12, está representado o gráfico da função $\mathrm{g(x)} = \mathrm{x}^2$, o caso particular que pode ser usado para estudar funções quadráticas na sua forma geral.

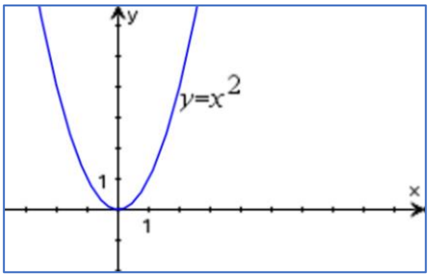


Figura 12: Representação gráfica da função definida por $g(x) = x^2$: a=1, b=c=0.

De facto, sendo $a \neq 0$, colocando-o em evidência,

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a}\right) = \ a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}\,x + \frac{c}{a}\right).$$

Completando o quadrado, manipulação familiar aos estudantes deste nível de ensino, obtém-se:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a},$$

ou, fazendo $h = -\frac{b}{2a}$ e $k = \frac{4ac-b^2}{4a}$, pode escrever-se

$$f(x) = a(x-h)^2 + k.$$

A representação gráfica desta função pode comparar-se com a da função g representada na Figura 12, por meio de transformações geométricas já referidas: uma translação associada ao vetor $(\,h, 0)$, uma translação associada ao vetor $(0, k)$ e uma dilatação horizontal de coeficiente $\frac{1}{a}$. A parábola é simétrica relativamente ao seu eixo, a reta de equação $x = -\frac{b}{2a}$.

Além disso, fica visível de forma explícita o vértice da parábola: o ponto de coordenadas $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right) = (m, k)$; fica também explícito que o (único) extremo da função é k, que é o mínimo da função se $a > 0$ ou o seu máximo se $a < 0$.

Partindo desta forma de escrever a expressão analítica da função, a determinação dos zeros leva facilmente à obtenção da fórmula resolvente para equações do segundo grau:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a},$$

donde,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

são os dois zeros da equação. De acordo com o Teorema Fundamental da Álgebra[2], a função quadrática tem exatamente dois zeros que podem ser reais ou complexos, simples ou múltiplos.

[2] O Teorema Fundamental da Álgebra diz-nos que todo o polinómio de grau n , admite no conjunto dos números complexos, $\mathbb{C}$, exatamente n raízes. Notar que estas raízes podem ser reais ou complexas, simples ou múltiplas.

Se considerarmos apenas os zeros reais, uma função quadrática pode não ter zeros, ter um zero de multiplicidade 2 ou ter dois zeros simples e distintos.
Na fórmula anterior, o termo dentro do radicando chama-se *binómio discriminante* e denota se por Δ: $\Delta = b^2 - 4ac$. A existência de raízes reais de uma equação do segundo grau pode ser discutida em função do sinal deste número.

Proposição 1.1 *Seja* f *uma função quadrática definida por* $f(x) = ax^2 + bx + c$, *com* $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ *e* $\Delta = b^2 - 4ac$.

(i) Se $\Delta < 0$, *a função não tem zeros reais;*
(ii) Se $\Delta = 0$, *a função tem um zero, de multiplicidade dois;*
(iii) Se $\Delta > 0$, *a função tem dois zeros reais simples.*

A manipulação algébrica aqui exibida é por vezes substituída pela utilização de calculadoras para resolver equações do segundo grau. De facto, basta introduzir os valores dos coeficientes na calculadora para se obter os zeros da equação. Porém, esta informação transposta para um gráfico de uma função quadrática pode permitir saber e interpretar, sem necessidade de efetuar grandes cálculos, a paridade de uma função, a existência de zeros, a determinação do máximo (ou mínimo) da função, de forma mais compreensível, além de permitir a discussão e promover o espírito críticos dos alunos.

Para finalizar este capítulo, apresentam-se algumas aplicações destas funções para modelar fenómenos ou problemas de outras áreas científicas.
As funções quadráticas são muito utilizadas para modelar alguns fenómenos da realidade, sendo muito conhecidos e usados como exemplos nas aulas de matemática os que provem da Física e da Química. O lançamento de projéteis (Figura 13) é disso um exemplo.

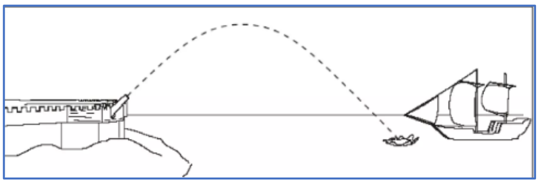


Figura 13: Representação de lançamento de projéteis
Fonte: [Parábola | PPT (slideshare.net)]

Outro exemplo, em dimensão três, são as superfícies parabólicas, que pertencem à família das quádricas (Breda & Costa, 1996), e são geradas pela rotação de uma parábola em torno do seu eixo; estes são muito utilizadas devido às suas propriedades físicas. Podemos encontrá-las, por exemplo, nas antenas parabólicas, em lanternas e faróis (Figura 14). .

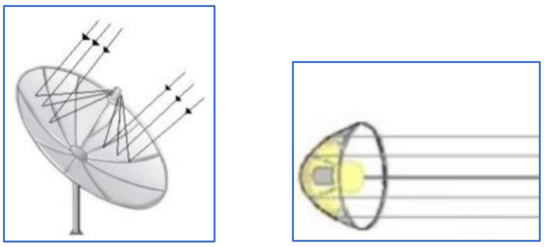


Figura 14: Esquema de antena parabólicas e de farol
Fonte: [Parábolas: As curvas misteriosas | GPET Física (unicentro.br)]

Na engenharia encontram-se, frequentemente, parábolas, por exemplo, nas pontes suspensas. Estas são sustentadas por cabos em forma de parábola que distribuem o peso igualmente por toda a ponte.

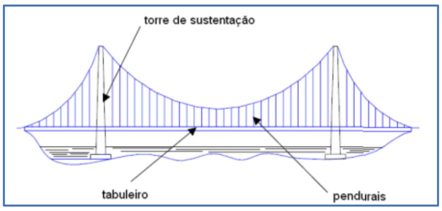


Figura 15: Esquema de ponte suspensa
Fonte: [Parábolas: As curvas misteriosas | GPET Física (unicentro.br)]

1.2. As funções no processo de aprendizagem

O estudo de funções é um dos temas fundamentais na educação matemática, presente desde o ensino básico até ao ensino superior, uma vez que as funções são uma das principais ferramentas usadas na modelação de fenómenos naturais, sociais e tecnológicos.
Como já foi referido, as funções matemáticas estão presentes em muitas áreas do conhecimento. A Física, a Engenharia, a Economia e a Informática são apenas alguns exemplos de áreas em que o conhecimento de funções matemáticas é fundamental. Numa sociedade cada vez mais orientada para a tecnologia e inovação, o seu estudo prepara os alunos para cursos superiores nas áreas STEM - ciências, tecnologia, engenharia e matemática, proporcionando-lhes uma base sólida para enfrentar desafios mais avançados nessas áreas.

O conceito de função começa a ser trabalhado, ainda que não explicitamente, no ensino pré-escolar. Nas *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar* (DGE, 2016), vem referida a importância das aprendizagens matemáticas feitas neste ciclo de ensino e que estas influenciam positivamente as aprendizagens futuras (Silva et al., 2016). Quando se propõe às crianças a realização de jogos e atividades lúdicas em que devem procurar relações entre números e objetos, estamos a trabalhar a noção de função. Quando as crianças identificam relações de dependência entre valores, estão a trabalhar a noção de função. Já no 1.º ciclo do Ensino Básico podemos dar como exemplo a resolução de tarefas onde "máquinas" transformam números (Figura 16), como tarefas onde estão também a trabalhar o conceito de função.

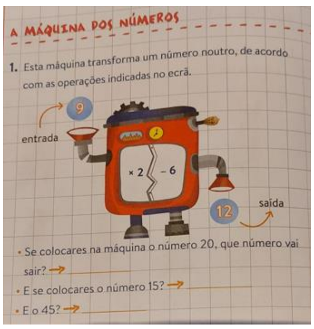


Figura 16: Exemplo de exercício 1º ciclo
Fonte: Mestre. & Gonçalves, 2022, p.4

No 2.º ciclo, com o estudo de sequências, da sua expressão geradora e termo geral os alunos trabalham, já num nível mais aprofundado, o conceito de função, estando, nestes casos a falar de funções reais de variável natural (Figura 17).

5 **Qual das seguintes expressões algébricas é o termo geral da sequência dos números múltiplos de 5, diferentes de zero, adicionados de uma unidade?**

(A) $4n+1$ **(B)** $n+1$ **(C)** $6n$ **(D)** $5n+1$

Figura 17: Exemplo de exercício do 2º ciclo
Fonte: Neves et al, 2022, p.19

No 3.º ciclo, o estudo das funções é introduzido formalmente no 7.º ano de escolaridade, onde os alunos aprendem a identificar funções, a representá-las graficamente e a interpretar as suas propriedades . No 8.º ano, os alunos estudam funções afim e no 9.º iniciam o estudo de funções quadráticas. No ensino secundário, o estudo das funções é aprofundado no 10.º ano, onde os alunos aprendem a identificar funções, a representá-las graficamente e a interpretar as suas propriedades, bem como a resolver equações e inequações do 1.º e 2.º graus . No 11.º ano, os alunos estudam funções trigonométricas, aprendendo a resolver equações e inequações trigonométricas e a interpretar as suas soluções e no 12.º ano, os alunos estudam funções exponenciais e logarítmicas, aprendendo a resolver equações e inequações exponenciais e logarítmicas e a interpretar as suas soluções.

Como já foi referido, o estudo das funções é um tema basilar na educação matemática, sendo notório o seu peso no currículo. Desde o ensino básico até o ensino secundário, os alunos são expostos às noções mais básicas de função e gráfico, passando por funções polinomiais, racionais, irracionais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas. Além disso, as funções são aplicadas à resolução de problemas em diferentes áreas do conhecimento, permitindo aos alunos uma visão mais ampla da importância das funções na modelação de fenómenos de várias áreas do saber.

O estudo de funções é por isso um ótimo tema para explorar a interdisciplinaridade, sendo que esta ocorre quando se relacionam conteúdos de diferentes disciplinas, para estudar um tema, com o objetivo de dotar os alunos de conhecimentos específicos de cada disciplina envolvida. A resolução de tarefas de outras áreas científicas é fundamental no estudo de funções na disciplina de matemática. “A interdisciplinaridade pode proporcionar um trabalho dinâmico e facilitador da aprendizagem, pois trabalha com componentes curriculares interligados entre si, além de possibilitar uma maior motivação dos alunos envolvidos” (Rosa et al, 2012, pg. 2). É essencial que os alunos resolvam tarefas matemáticas que abordem outras áreas científicas, a fim de desenvolver habilidades e competências que possam ser aplicadas em diferentes esferas do conhecimento. Barros (2015) identificou que, ao abordar a matemática de forma interdisciplinar, os alunos têm uma aprendizagem mais efetiva e duradoura. Tarefas com contextos da área da Economia, por exemplo, podem trabalhar com modelos matemáticos para descrever a relação entre variáveis, tais como, oferta e procura ou lucro e custo. Os alunos podem utilizar estes mesmos modelos para compreender o comportamento das funções, assim como para criar e interpretar gráficos. Neste sentido, a resolução de tarefas com contextos de Economia pode ser um excelente recurso para motivar e contextualizar o estudo das funções na disciplina de matemática.

1.3. A calculadora gráfica em sala de aula

A utilização de tecnologia no ensino e aprendizagem da matemática é defendida pelo National Council of Teachers of Mathmatics -NCTM (2015), argumentando que os recursos tecnológicos são úteis para melhorar a forma como alunos e professores experimentam, aprendem e ensinam matemática. A tecnologia deve ser usada para apoiar suportar a aprendizagem dos alunos sobre conceitos e procedimentos matemáticos, "incluindo aqueles que os alunos eventualmente empregam sem o auxílio da tecnologia" (NCTM, 2015, p.1)

A mesma ideia foi defendida por Consciência (2013) que escreve que a utilização da calculadora gráfica nas aulas de matemática tem vindo a revelar-se uma ferramenta importante no estudo de funções, permitindo aos alunos uma maior exploração das suas propriedades e uma compreensão mais sólida dos conceitos matemáticos envolvidos-

Um dos grandes benefícios da utilização desta tecnologia é a capacidade de visualização de gráficos de funções de forma dinâmica. Os alunos podem observar a relação entre a expressão analítica de uma função e a sua representação gráfica, tornando desta forma estes conceitos mais concretos e acessíveis.

Em Portugal, a sua utilização é obrigatória desde 1997, sendo que os alunos iniciam o contacto com esta tecnologia no 10º ano de escolaridade.

As calculadoras gráficas proporcionam aos alunos a exploração visual dos conceitos matemáticos e, por meio de experimentação, descobrir padrões e relações. Além disso, estas calculadoras auxiliam os alunos na resolução de problemas matemáticos, especialmente aqueles que envolvem gráficos e tabelas de dados. A utilização de calculadoras gráficas tem sido cada vez mais frequente na sala de aula de matemática, usada tanto por professores como por alunos. Com essa ferramenta, é possível visualizar funções de forma mais clara e rápida, resolver problemas complexos com maior agilidade e ter uma compreensão mais profunda de conceitos matemáticos. No entanto, é importante destacar a importância do uso da calculadora gráfica de forma adequada, para que seu uso não se torne algo desnecessário e superficial no processo de aprendizagem da matemática. "O professor desempenha um papel importante no uso da calculadora, evitando que os alunos se tornem dependentes da sua utilização" (Viseu et al, 2016, p.84).

A utilização da calculadora gráfica pelos alunos deve fazer parte de um processo de aprendizagem que envolva o desenvolvimento de habilidades de raciocínio, compreensão de conceitos e resolução de problemas. O NCTM destaca que a calculadora gráfica deve ser utilizada como uma ferramenta que amplie as possibilidades dos alunos na resolução de problemas, e não como um substituto para a compreensão conceitual.

Segundo Silva (2013) os alunos revelam satisfação, encanto e entusiasmo quando realizam tarefas sobre funções com recurso à calculadora. No entanto, e segundo a mesma autora, os alunos apresentavam algumas dificuldades em determinados aspetos, nomeadamente na definição da janela de visualização, na introdução da expressão algébrica que define a função e qual o menu a utilizar em cada situação" (Silva, 2013, p.12).

Também Rosa (2012) conclui que uma das principais dificuldades reveladas pelos alunos é a escolha de uma janela de visualização do gráfico adequada. Para esta autora é importante ter consciência que a noção de janela de visualização é nova para os alunos e que não é de todo uma noção trivial. Também refere que alunos que abordam a matemática de uma forma mecanicista utilizam a calculadora de forma mais limitada, pois limitam-se a reproduzir as técnicas adquiridas. Para estes alunos "A necessária articulação entre conhecimentos matemáticos e espírito crítico, como forma de detetar as informações enganadoras transmitidas pela máquina, surge bastante dificultada e consequentemente a versatilidade na utilização da calculadora fica aquém do que poderia" (Rosa, 2012, p. 21).

Igualmente Sá (2021) refere que os alunos do 10º ano "não percebem quando é que a calculadora gráfica pode ser um recurso valioso." (Sá, 2021, p.58). A autora prossegue afirmando que "A sua utilização, no auxílio da resolução de tarefas pelos alunos ainda não é intuitiva, acabando algumas vezes por ser usada desnecessariamente ou nem demostrar evidências do seu uso" (Sá, 2021, p. 58)

Estas dificuldades evidenciadas na utilização da calculadora gráfica podem ser superadas com uma boa preparação dos alunos e dos professores, com uma utilização frequente e adequada das calculadoras gráficas em contexto de sala de aula, o que vem reforçar a importância da ação dos docentes no estímulo à utilização desta tecnologia , pois já Rocha (2001) refere que "os alunos mostram tendência para utilizar a máquina de forma e nas circunstâncias em que foram ensinados a fazê-lo" (Rocha, 2001, p.5). A mesma autora diz-nos que a utilização que os alunos fazem da calculadora em sala de aula depende muito da utilização que o professor faz desta tecnologia, e que esta depende muito da escolha das tarefas a serem trabalhadas. "Se apenas a utilizarmos para confirmar resultados, resolver inequações e traçar gráficos para deles extrairmos determinadas informações, então não deve surpreender-nos que os prognósticos de termos alunos envolvidos na resolução de problemas, em atividades de modelação e habituados a encarar a Matemática com uma perspetiva inquiridora e reflexiva não se estejam a concretizar" (Rocha, 2011, p.46).

A utilização da calculadora gráfica nas aulas de matemática é potenciadora da resolução de tarefas complexas e desafiadoras, permitindo que cálculos mais demorados se façam de forma rápida e eficiente, deixando tempo livre para explorações gráficas, que de outro modo seriam mais complicadas ou exigiriam outros recursos mais dispendiosos, como computadores ou tablets. Contudo, o desenvolvimento destas potencialidades só será possível se as tarefas propostas aos alunos assim o exigirem. Sendo que, quem propõe aos alunos as tarefas a realizar em sala de aula é o professor, é inegável que a ação deste na escolha das tarefas é de crucial importância. Se o professor não desafiar os alunos com tarefas com grau de complexidade elevada, estes não irão usar as capacidades da calculadora gráfica na sua plenitude. Para escolher ou criar estas tarefas, o professor, além de ter de ser conhecedor da tecnologia, tem de lhe reconhecer importância no processo de ensino e aprendizagem.
Como professora, tenho grandes espectativas em relação à escolha das melhores tarefas para os meus alunos, tendo em consideração o programa, as aprendizagens essenciais e o uso de tecnologia. Acredito que essa responsabilidade é fundamental para garantir que cada aluno tenha a oportunidade de desenvolver as suas capacidades e as suas competências. Não sou eu que decido os conteúdos a lecionar, mas cabe-me a mim selecionar as tarefas mais adequadas para os transmitir. Ser capaz de escolher as melhores tarefas para os alunos é um desafio constante, e neste trabalho não foi diferente.

Capítulo II- Enquadramento Metodológico

Neste capítulo será feito o enquadramento metodológico deste trabalho, tendo em conta as questões de investigação às quais se pretendeu dar resposta, bem como a caraterização do contexto educativo em que foi desenvolvido. Também se descreverá os métodos e instrumentos de recolha de dados utilizados.

2.1. Método de investigação

O presente estudo foi elaborado seguindo um método de investigação essencialmente qualitativo. Esta escolha deriva das características das questões de investigação colocadas.

A investigação qualitativa é descritiva, ou seja, procura compreender a complexidade dos fenómenos estudados, aos descrever e interpretar características e contextos. Os investigadores qualitativos estão mais interessados nos processos através dos quais os fenómenos ocorrem do que nos resultados ou produtos finais, tentando reconhecer padrões a partir dos dados recolhidos, ao invés de tentarem confirmar ou refutar hipóteses predeterminadas. A investigação qualitativa permite compreender os fenómenos de forma holística.

Bogdan & Biklen (2010) referem que a investigação qualitativa é descritiva, que os investigadores valorizam mais os processos do que os resultados e que tendem a analisar os dados de forma indutiva. Afirmam também que "o significado é de importância vital na abordagem qualitativa" (Bogdan & Biklen, 2010, p.50).

A investigação qualitativa é multifacetada, podendo combinar abordagens indutivas e dedutivas (Carmo & Ferreira, 1998). Os procedimentos não seguem uma sequência linear, permitindo uma grande flexibilidade e adaptabilidade por parte do investigador.

Os principais instrumentos de recolha de dados associados à investigação qualitativa são:

- Entrevistas: conversas estruturadas ou semiestruturadas
- Observação Participante
- Recolha Documental
- Grupos Focais (*focus group)*
- Estudo de caso

Foi realizado um estudo centrado em cinco alunos da turma, num ambiente de sala de aula (ambiente natural), com uma turma do 10.º ano. Os dados foram recolhidos através das produções escritas dos alunos, da observação participante e de um *focus group*.

Com este trabalho não se pretendeu enfatizar os resultados obtidos pelos alunos, mas destacar os processos utilizados e as suas dificuldades na realização das tarefas. Não se pretendeu comprovar, nem rejeitar hipóteses previamente determinadas, mas esperava-se poder entender quais as principais dificuldades que os alunos demonstravam na realização destas tarefas, assim como compreender se utilizavam a calculadora gráfica na resolução das mesmas.

2.2 O contexto educativo

A Prática de Ensino Supervisionada decorreu numa Escola Básica e Secundária, localizada numa cidade de um município da NUT III – Região de Aveiro.

Segundo informações do Instituto Nacional de Estatística, consultadas no portal PORDATA – Estatísticas sobre Portugal e Europa, podemos dizer que, estatisticamente, o município caracteriza-se, em relação aos principais indicadores demográficos, económicos e sociais, da seguinte forma:

Indicador	**Valor**
População residente em 2021	80954
Percentagem da população Jovem (dos 0 aos 14 anos)	13%
Percentagem da população entre os 15 e os 64 anos	66%
Percentagem de famílias unipessoais	25%
Percentagem de alojamentos próprios	66,6%
Ganho médio mensal	1243€
Taxa de mortalidade sénior (mais de 80 anos)	10,9%
Desempregados inscritos no IEFP no total da população residente	4,6%
Poder de compra per capita (em 2019)	121,8

Este município tem uma ligação estreita ao mar. A sua atividade económica assenta muito nesta ligação, sendo que o setor do turismo tem vindo a apresentar um grande crescimento, alavancando o setor terciário, tornando-o o setor económico mais relevante na economia do município.

Caracterização da escola

A escola foi originalmente criada em 1893, tendo iniciado a sua atividade no ano seguinte, em instalações provisórias no centro da cidade. Apenas em 1956, após variadas designações e reformulações a escola é instalada na sua atual localização.
Após obras de reabilitação que se prolongaram por vários anos a escola, apresenta um edificado moderno e funcional, adaptado à sua oferta formativa constituído por dois edifícios, sendo um deles maioritariamente composto por oficinas. O edifício principal é composto por 50 salas de aulas, 2 salas equipadas com computadores, 7 laboratórios, 1 sala de Educação Visual e uma sala de Geometria Descritiva. Tem ginásio, biblioteca, reprografia, bar e cantina.
Atualmente a escola tem um total de 1137 alunos divididos pela sua oferta formativa, a saber: 442 no 3º ciclo do Ensino Básico, 585 no Ensino Secundário Regular e 110 no Ensino Profissional.

A escola desenvolve, atualmente uma série de projetos, onde se destacam os projetos Comenius SOS, Eco-Escolas, Desporto Escolar e Erasmus+.

Caracterização da turma

De entre as turmas possíveis para a implementação do estudo, escolhi uma turma do 10.º ano de escolaridade, do Curso Científico-Humanístico Ciências Socioeconómicas, que, no seu plano de estudos têm a disciplina de Matemática A.

A turma tinha 26 alunos, 24 dos quais a frequentar pela primeira vez o 10.º ano e nenhum a usufruir de medidas de suporte à aprendizagem e inclusão (ao abrigo do Decreto-lei n.º 54/2018 de 6 de julho). Seis alunos tinham nacionalidade estrangeira, três dos quais a frequentar a disciplina de Português Língua Não Materna. Apenas dois alunos beneficiavam de Ação Social Escolar, um no escalão A e outro no escalão B.

Das observações em contexto de sala de aula, desde o início do ano letivo, pode-se dizer que os alunos eram atentos, esforçados e empenhados na realização das tarefas propostas. Gostavam de participar tanto oralmente, respondendo às questões colocadas e colocando as suas dúvidas, como resolvendo tarefas no quadro, quando solicitados.

Ao nível do comportamento, eram geralmente calmos, embora nos dias em que, anteriormente, tinham aula de Educação Física, mostravam-se mais conversadores e menos participativos.

O programa de gestão escolar – INOVAR+ (https://inovar-mais.com) utilizado na escola permitiu recolher algumas informações sobre a turma, mas os alunos também responderam a um pequeno questionário, para ajudar a caracterizar a turma de uma forma mais específica.

Dos alunos presentes, onze identificaram-se com o género masculino e doze com o género feminino. A maioria, cerca de 60%, tem 15 anos de idade. Seis alunos frequentaram o 3.º ciclo do Ensino Básico fora de Portugal e apenas cinco já frequentavam esta escola no ciclo de ensino anterior. Doze alunos declararam que gostavam de Matemática, um que não gostava e os restantes que gostavam "mais ou menos".
Em relação à classificação que obtiveram no final do 3.º ciclo, 9.º ano de escolaridade, cerca de 78% obtiveram nível positivo, sendo que três obtiveram nível 5, sete nível 4, oito nível 3 e um nível 2. No entanto quatro alunos não se recordavam da classificação obtida.
Quando questionados sobre o seu gosto pelo tema "Funções", uma larga maioria, cerca de 60% declarou que não gostava.
Dezoito alunos possuíam calculadora gráfica, observando-se a existência de vários modelos, como se mostra na Figura 18, sendo prevalente o modelo *TI-nspire CX* da *Texas Instruments.* Seis alunos referiram ter calculadora da *NumWorks* mas não eram detentores do equipamento, apenas usavam a *App* nos seus *smartphones*.

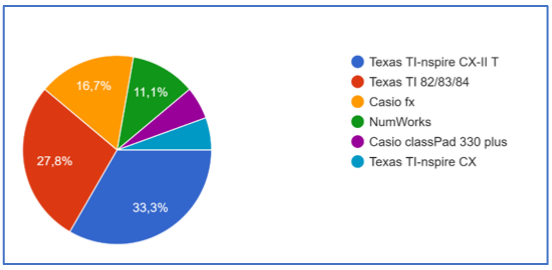


Figura 18:Distribuição dos modelos de calculadoras gráficas dos alunos

Dado que, aproximadamente um mês antes da intervenção pedagógica, os alunos iniciaram a utilização da calculadora gráfica nas aulas, achei pertinente questionar os alunos sobre o seu gosto pela utilização da calculadora gráfica e sobre a forma como faziam a aprendizagem da sua manipulação.

À pergunta *"Gostas de usar calculadora gráfica nas aulas de matemática",* é de destacar que quatro alunos responderam "*Não*", (Figura 19).

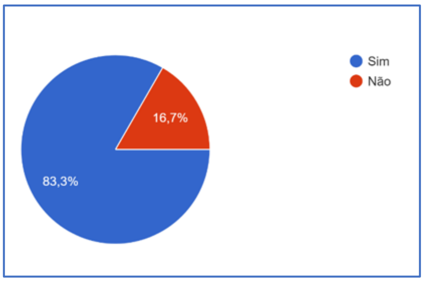


Figura 19: Resposta à questão
" Gostas de usar calculadora gráfica nas aulas de matemática?"

Na questão seguinte (Figura 20), " Como aprendes a usar a calculadora gráfica?", era permitida seleção múltipla, e como seria de esperar, a quase totalidade dos alunos respondeu que aprendia com a professora, na aula de Matemática. Seis responderam que aprendem com os colegas, o que sugere que pedem ajuda uns aos e também seis indicaram que aprendem sozinhos, o que revela alguma curiosidade e experimentação do equipamento. Curiosamente apena um referiu o recurso ao *YouTube.*

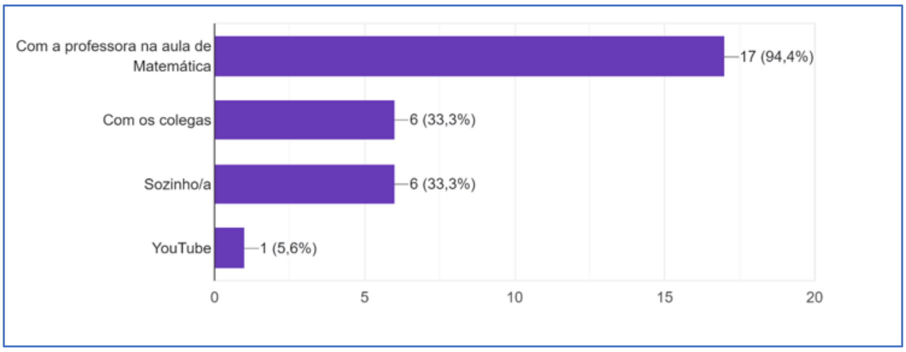


Figura 20: Resposta à pergunta "Como aprendes a usar a calculadora gráfica?"

Apesar destas questões terem sido respondidas apenas pelos 18 alunos que tinham calculadora gráfica, cerca de 12% declaram que o que sabiam fazer com a calculadora era menos do que o que já tinha sido ensinado e trabalhado em sala de aula e 23,5% que sabiam mais do que foi ensinado em sala de aula (Figura 21).

Figura 21: Resposta à questão "O que sabes fazer com a calculadora gráfica?"

2.3. Planificação da intervenção pedagógica

A planificação da intervenção pedagógica tinha de articular o tema do trabalho com o programa da disciplina, a planificação anual feita pelo Grupo de Matemática, a planificação da professora cooperante para a turma em questão e as Aprendizagens Essenciais (ME, 2018b).

Sendo que, um dos objetivos era que o contexto das tarefas fosse retirado da Economia, promovendo desta forma interdisciplinaridade entre as duas disciplinas, foi necessário encontrar tarefas desse contexto que fossem adequadas à intervenção pedagógica. Os manuais de Matemática B e o estudo levado a cabo por Ferreira & Fortulan (2012) que aborda funções aplicadas à Economia, foram inspiração para a elaboração das tarefas.

Na disciplina de Economia A, no tema "Preços e Mercados", espera-se que os alunos compreendam determinados conceitos como custo, receita, lucro, prejuízo, oferta, procura, equilíbrio de mercado, só para referir alguns. Ora estes conceitos fazem parte de uma área de aplicação prática da matemática, à qual chamamos matemática financeira. Esta é uma área que utiliza conceitos matemáticos para estudar o comportamento do dinheiro ao longo do tempo. Usamos funções para modelar, estudar e analisar as transformações que o dinheiro sofre através da influência de inúmeras variáveis. Esta área reveste-se de grande importância, tendo sido incluída nas Novas Aprendizagens da Matemática para o Ensino Secundário (ME, 2023), onde, no 10.º ano de Matemática A, foi incluído o tópico "Modelos Matemáticos em Finanças". Além dos conhecimentos de matemática financeira que se espera que os alunos adquiram, este tópico contribuí para a sua literacia financeira, ajudando a construir cidadãos consciente e informados, capazes de tomar as melhores decisões em relação às suas finanças pessoais.

Para ilustrar esta ideia, tomemos como exemplo o conceito de ponto de equilíbrio de mercado. O ponto de equilíbrio é o ponto de interseção entre as curvas que são os gráficos das funções que modelam a oferta e a procura. Na disciplina de Economia, são apresentados aos alunos tarefas para identificação do ponto de equilíbrio, quer através de representações gráficas (Figura 22), quer através de tabelas (Figura 23).

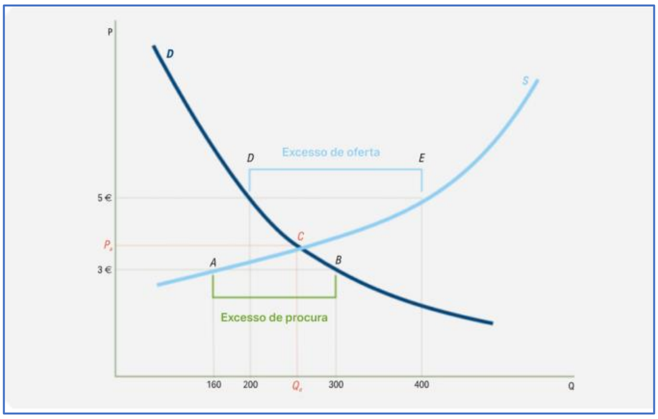


Figura 22: Ponto de equilíbrio
Fonte: Ferreira, F. & Soares, M., 2021, p.162

12. **Supõe que o quadro abaixo é representativo do mercado de jogos de consola.**

Preço (€)	Quantidade procurada Q_D (milhares de unidades)	Quantidade oferecida Q_S (milhares de unidades)
15	90	30
20	70	40
25	50	50
30	30	60
35	10	70

12.1. Completa, no teu caderno, os espaços em branco de forma a tornares a afirmação verdadeira.

Ao preço de ______, os consumidores procuram ______ e os produtores estão dispostos a oferecer ______. Neste caso, existe equilíbrio no mercado.

Figura 23 -Exemplo de tarefa
Fonte: Ferreira & Soares, 2021, p.165

No entanto, em situação nenhuma os alunos conhecem as expressões analíticas das funções que modelam a oferta e procura. A determinação do ponto de equilíbrio de mercado, C, é feita por observação das representações das curvas da procura D e da oferta S, procurando o ponto de interseção. Do meu ponto de vista, este seria um tipo de tarefa que poderia integrar a utilização de calculadora gráfica, não só na aula de Matemática, mas também na aula de Economia. Outra possibilidade é a consulta de tabelas, procurando a linha onde os valores de oferta e procura são iguais, como no caso apresentado na Figura 23.

Para levar a cabo esta investigação, foram então elaboradas três fichas de trabalho para serem realizadas ao longo de três aulas consecutivas, de dois tempos letivos cada uma. Na primeira ficha os alunos teriam de recorrer a métodos de resolução exclusivamente analíticos, na segunda recorrer a métodos gráficos com recurso à calculadora gráfica e na terceira seriam livres para escolher a sua estratégia.

2.4. Participantes no estudo

Neste estudo, os participantes são a professora e investigadora (autora deste trabalho) e os alunos de uma turma do 10.º de escolaridade da área de socioeconómicas, tendo o estudo de caso incidido em cinco alunos que serão identificados como aluno A, B, C, D e E. A escolha destes alunos foi feita através da observação direta em sala de aula, tendo em conta o seu interesse e empenho na realização de tarefas e a sua vontade em superar dificuldades. As suas classificações também foram tidas em conta, embora não tenha sido o critério preponderante.

2.5. A intervenção pedagógica

Como já foi referido, a intervenção pedagógica decorreu ao longo de três aulas consecutivas de dois tempos letivos de 50 minutos cada uma.

Em cada uma das aulas foi adotada uma abordagem de ensino exploratório. Esta abordagem é baseada na ideia de que a aprendizagem é mais eficaz quando os alunos estão envolvidos ativamente no processo de aprendizagem, sendo agentes de construção do seu próprio conhecimento e consequentemente, do conhecimento dos colegas. No ensino exploratório o professor desempenha principalmente um papel de facilitador, orientando os alunos e oferendo ajuda, quando necessário.

Uma aula com esta abordagem pode ser dividida em três partes (Stein et al, 2008, citado em Canavarro et al, 2014), nomeadamente lançamento, exploração e por fim, discussão e sintetização. Na primeira parta da aula, a fase de lançamento, o professor apresenta a tarefa aos alunos, garantindo que todos percebem o que lhes é pedido. Na segunda parte, fase de exploração, os alunos devem trabalhar de forma autónoma, sendo que a ação do professor deve ser de apoiar pontualmente os alunos, a fim de não interferir e condicionar as estratégias de resolução por estes adotada. Na terceira parte da aula, a ação do professor deve ser de moderar a discussão que se espera que surja entre os alunos, uma vez que estes irão apresentar e discutir as suas resoluções e/ou resultados obtidos. Esta fase deve terminar com uma sintetização dos conteúdos.

Assim, em cada uma das aulas, foi lido por mim, em voz alta, o enunciado das tarefas. Em seguida, os alunos foram convidados a resolver as fichas de forma individual. Os alunos, de um modo geral, empenharam-se na resolução das tarefas, mesmo quando tinham dificuldades. O facto de as suas resoluções, certas ou erradas, não contribuírem para a classificação da disciplina, trouxe, por um lado alguma leveza e descontração na resolução das tarefas, e por outro, alguma falta de empenho em superar as dificuldades, optando alguns alunos por deixar as questões em branco. No final de cada aula foram apresentadas pelos alunos as suas estratégias, sendo feita uma discussão participada das tarefas.

2.5.1. A Ficha de Trabalho I

A Ficha de Trabalho I (Apêndice II) tinha como finalidade a resolução analítica das tarefas propostas. A resolução das tarefas envolvia os conceitos de custo e receita, a interpretação da linguagem natural e tradução para linguagem simbólica, a resolução de equações do 1.º e 2.º graus, a determinação de extremos e a representação gráfica.

Era importante para este estudo a realização de tarefas com recurso exclusivo a métodos analíticos, para observar qual o desempenho dos alunos neste tópico. Se dominavam ou não as ferramentas necessárias à resolução de equações do 1.º e 2.º graus.

No início do primeiro tempo desta primeira aula, houve necessidade de esclarecer algumas dúvidas que os alunos colocaram sobre a aula anterior, o que condicionou o tempo disponível para a resolução da primeira ficha. Sendo assim, tomei a decisão de pedir aos alunos que resolvessem apenas o segundo exercício. Esta decisão não foi tomada de ânimo leve, pois desta forma não se recolheram as resoluções que os alunos teriam produzido. No entanto, acredito que este facto não alteraria de forma significativa os resultados do estudo.

Como já referido, a finalidade desta ficha era a resolução das tarefas com recurso exclusivo a métodos analíticos. Assim a ficha tinha o seguinte cabeçalho que se apresenta na Figura 24:

Resolve as questões seguintes, utilizando métodos exclusivamente analíticos.
Apresenta todos os cálculos efetuados e todas as justificações necessárias.

Figura 24: Cabeçalho da Ficha de Trabalho I

Além disso, também tinha a nota a que se refere a figura seguinte, para auxiliar a recordar alguns conceitos de Economia (Figura 25).

Seja x a quantidade produzida de um produto. O custo de produção depende de x e a relação entre eles é chamada de função **Custo**, $\boldsymbol{C}$. O custo é formado por duas parcelas: custos fixos e custos variáveis. A **Receita**, $\boldsymbol{R}$, relaciona o preço unitário, p, e a quantidade vendida, x, de determinado produto, da seguinte forma $\boldsymbol{R(x) = px}$.

Figura 25: Nota referente a conceitos de Economia presente na Ficha de Trabalho I

O exercício 2 iniciava da seguinte forma (Figura 26):

2. Um cantor *pop* vai dar um concerto numa sala com capacidade para 360 pessoas. Com base em experiências anteriores, sabe-se que se vender os bilhetes a 20 euros terá 240 espectadores e que, por cada euro de variação do preço do bilhete, há uma variação de 20 espectadores.

   2.1. Seja x a variação, em euros do custo de cada bilhete $(-12 < x < 20)$.
   No contexto da situação apresentada, qual é o significado das expressões:

   2.1.1. $20 - x$

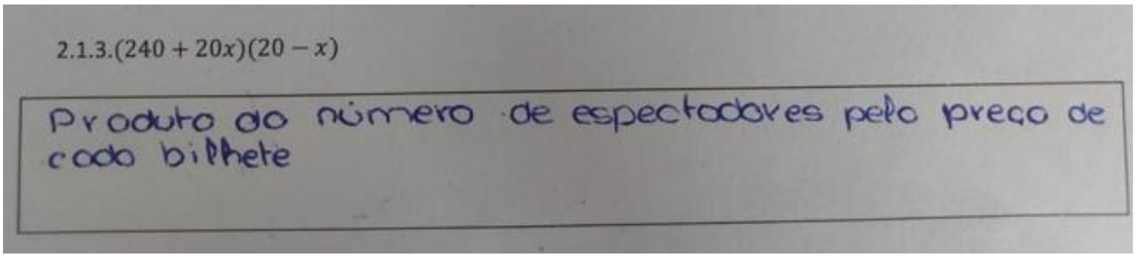
   2.1.2. $240 + 20x$

   2.1.3. $(240 + 20x)(20 - x)$

Figura 26: Excerto do enunciado do exercício 2 da Ficha I

No lançamento da tarefa, fiz uma primeira leitura em voz alta do enunciado. Os alunos não colocaram dúvidas, mas quando iniciaram a resolução individual, foram surgindo algumas dificuldades. Foi necessário apoiar alguns alunos para fazerem uma leitura mais atenta e consequentemente fazerem a tradução da linguagem natural para a linguagem simbólica. Houve dificuldades na mobilização dos conceitos da Economia, que teriam permitido uma explicitação do significado das expressões.

Veja-se, por exemplo, a resposta do Aluno C à alínea 2.1.3, apresentada na Figura 27.

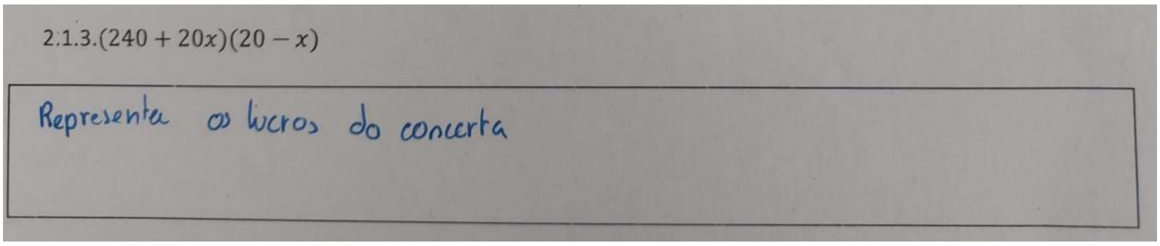

2.1.3. $(240 + 20x)(20 - x)$

Produto do número de espectadores pelo preço de cada bilhete

Figura 27: Resposta do Aluno C à alínea 2.1.3

O aluno descreveu a expressão em termos matemáticos, identificando que é um produto e que os fatores representam, respetivamente, o número de espetadores e o preço de cada bilhete, mas não identificou que esta expressão, no contexto apresentado, representa a receita feita com o concerto.

Em resposta à mesma alínea, o Aluno A (Figura 28) apresentou como resposta “Representa os lucros do concerto”, não distinguindo os conceitos “Receita” e “Lucro”.


2.1.3. $(240 + 20x)(20 - x)$

Representa os lucros do concerto

Figura 28: Resposta do Aluno A à alínea 2.1.3

Na alínea 2.3 (ver Figura 29), era esperado que os alunos determinassem a abcissa do ponto onde a função atinge um extremo, ou seja, a determinação da abcissa do vértice da parábola que é a representação da função, cuja expressão analítica está apresentada na alínea 2.1.3., e, posteriormente, usar esse valor para determinar o custo do bilhete que é dado pela expressão $20 - x$.

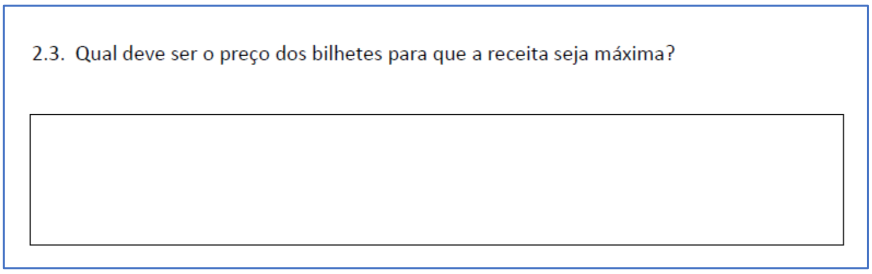
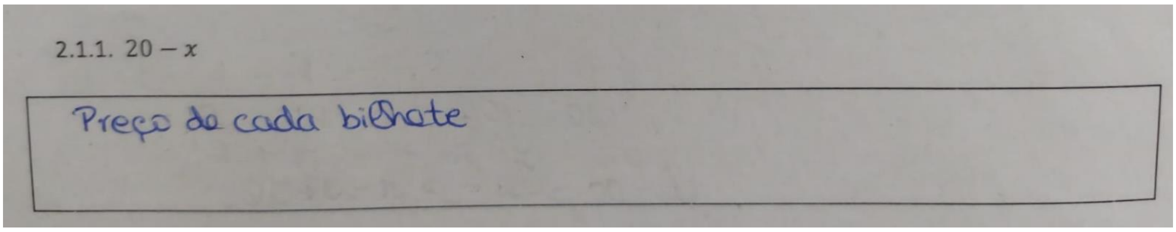

2.3. Qual deve ser o preço dos bilhetes para que a receita seja máxima?

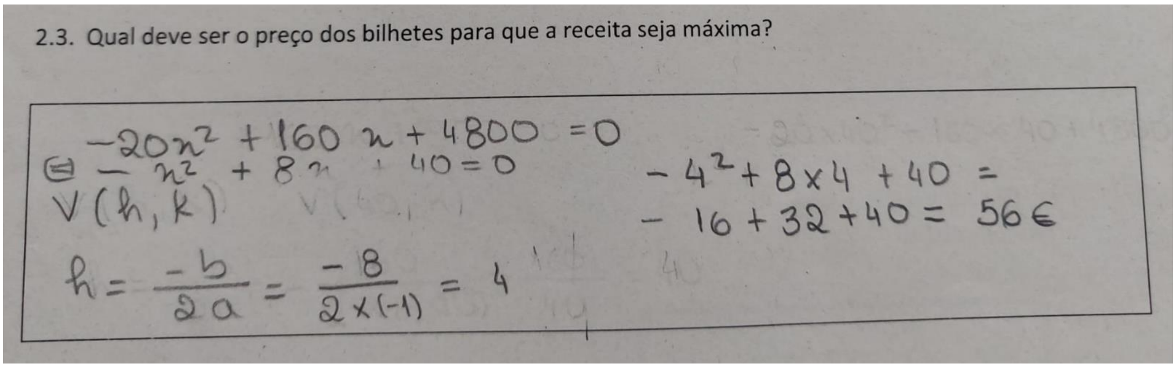
Figura 29: Enunciado da alínea 2.3

O Aluno D na sua resolução (Figura 31) reconheceu que seria útil determinar a abcissa do vértice, identificada com a letra h. Usou a fórmula estudada, o que lhe permitiu determinar o valor com facilidade. No entanto não determinou corretamente o custo do bilhete, embora tenha respondido corretamente à questão 2.1.1. (Figura 30), onde atribui significado correto à expressão $20 - x$.


2.1.1. $20 - x$

Preço de cada bilhete

Figura 30: Resposta do Aluno D à alínea 2.2.1.


2.3. Qual deve ser o preço dos bilhetes para que a receita seja máxima?

$-20x^2+160x+4800=0$

$\Leftrightarrow -x^2+8x+40=0$

$V(h,k)$

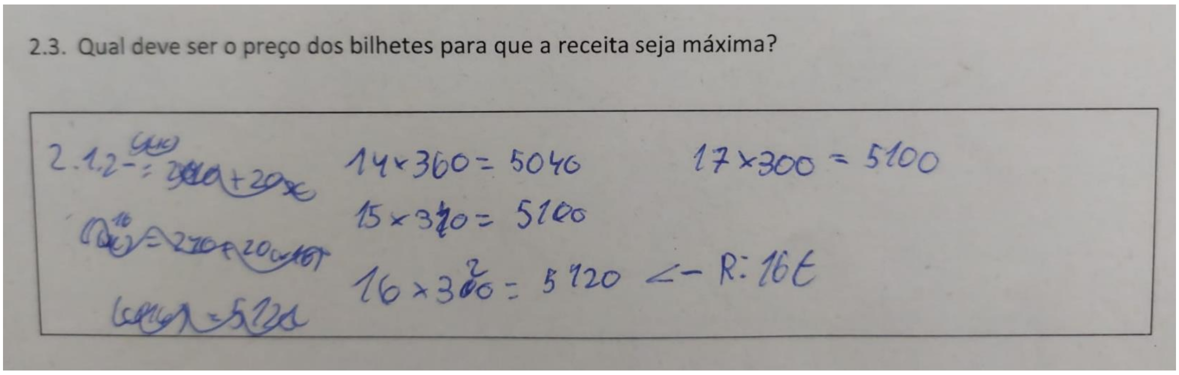
$h=\frac{-b}{2a}=\frac{-8}{2\times(-1)}=4$

$-4^2+8\times4+40=$

$-16+32+40=56€$

Figura 31: Resposta do Aluno D à alínea 2.3

Já o Aluno B (Figura 32) escolheu uma estratégia de tentativa e erro, chegando ao valor correto.


2.3. Qual deve ser o preço dos bilhetes para que a receita seja máxima?

$14\times360=5040$

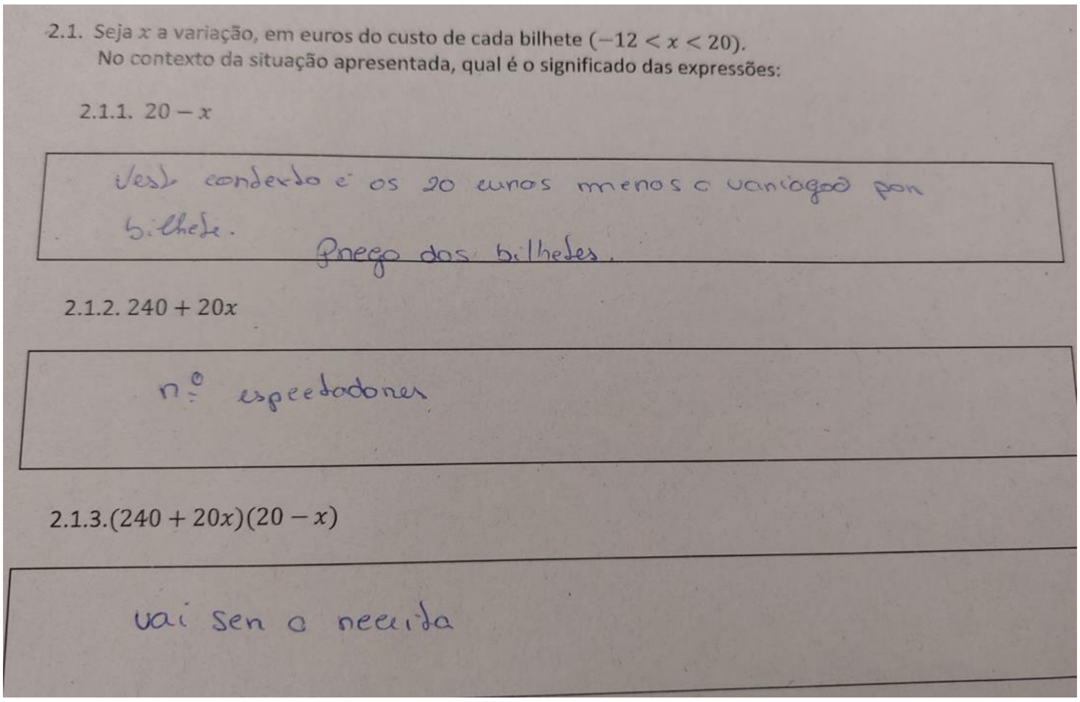
$15\times340=5100$

$16\times320=5120$ <- R: 16€

$17\times300=5100$

Figura 32: Resposta do Aluno B à alínea 2.3

O aluno E responde corretamente a todas as alíneas da questão 2.1 (Figura 33) e nas restantes questões utilizou sempre a estratégia de tentativa e erro como se ilustra nas Figuras 34, 35 e 36.


2.1. Seja x a variação, em euros do custo de cada bilhete ($-12<x<20$).
No contexto da situação apresentada, qual é o significado das expressões:

2.1.1. $20-x$

Neste contexto é os 20 euros menos a variação por bilhete.
Preço dos bilhetes.

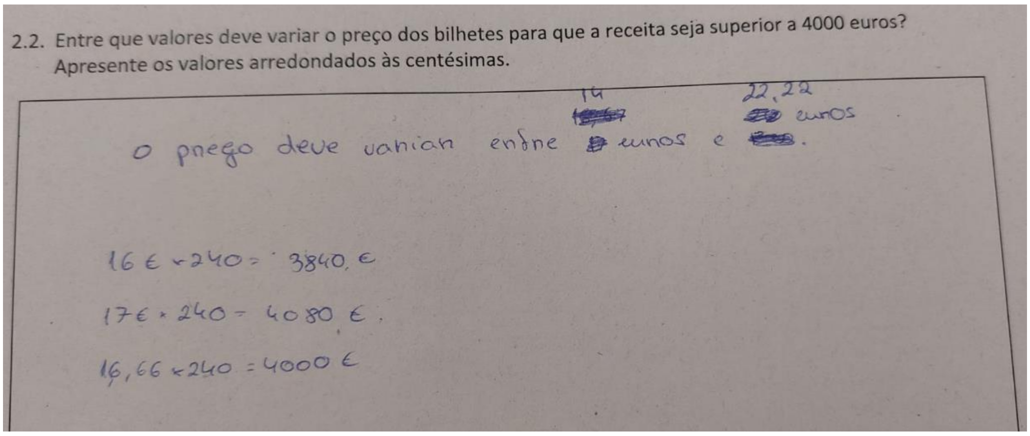
2.1.2. $240+20x$

nº espetadores

2.1.3. $(240+20x)(20-x)$

vai ser a receita

Figura 33: Resposta do Aluno E às alíneas da questão 2.1


2.2. Entre que valores deve variar o preço dos bilhetes para que a receita seja superior a 4000 euros? Apresente os valores arredondados às centésimas.

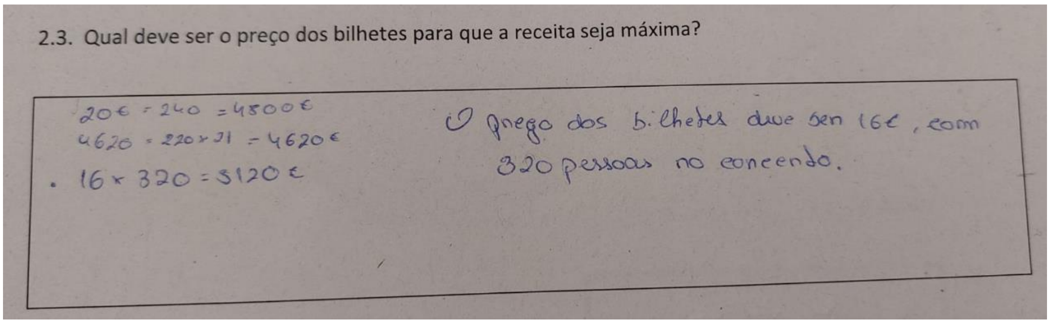
O preço deve variar entre 14 euros e 22,22 euros.

16 € × 240 = 3840 €

17 € × 240 = 4080 €

16,66 × 240 = 4000 €

Figura 34: Resposta do Aluno E à questão 2.2


2.3. Qual deve ser o preço dos bilhetes para que a receita seja máxima?

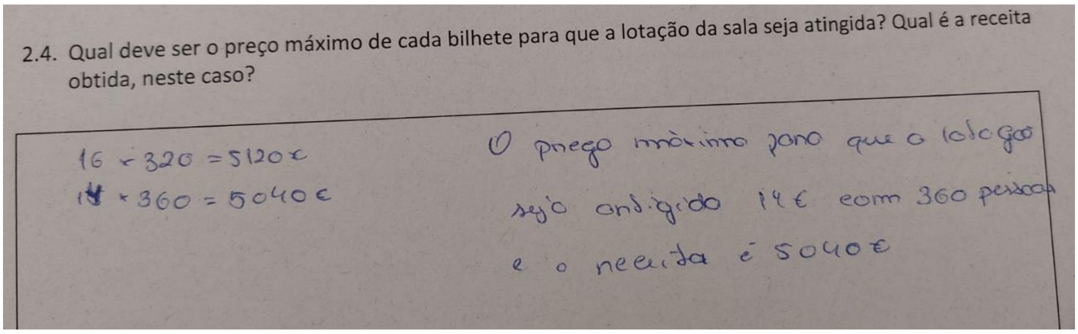
20€ × 240 = 4800€

4620 = 220 × 21 = 4620 €

16 × 320 = 5120 €

O preço dos bilhetes deve ser 16€, com 320 pessoas no concerto.

Figura 35: Resposta do aluno E á questão 2.3.


2.4. Qual deve ser o preço máximo de cada bilhete para que a lotação da sala seja atingida? Qual é a receita obtida, neste caso?

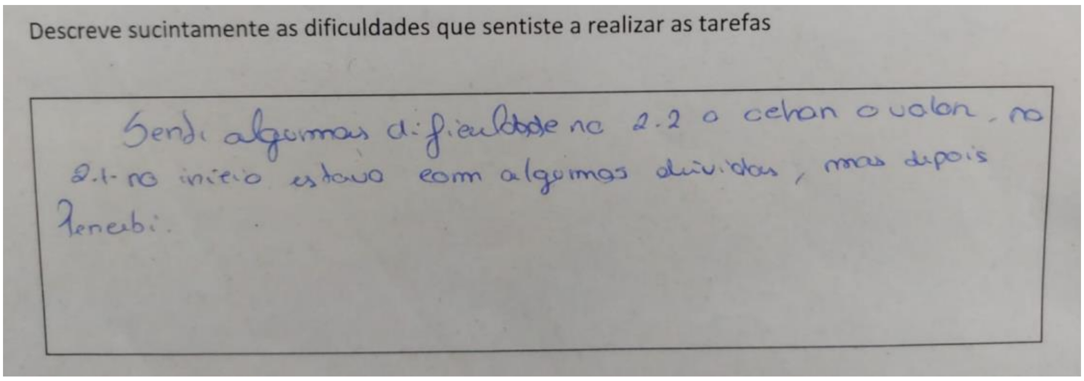
16 × 320 = 5120 €

14 × 360 = 5040 €

O preço máximo para que a lotação seja atingido 14 € com 360 pessoas e a receita é 5040 €

Figura 36: Resposta do aluno E à questão 2.4

Apenas o Aluno E preencheu as dificuldades por si sentidas na realização dos exercícios (Figura 37).


Descreve sucintamente as dificuldades que sentiste a realizar as tarefas

Senti algumas dificuldade na 2.2 a achar o valor, na 2.1 no início estava com algumas dúvidas, mas depois percebi.

Figura 37: Dificuldades reconhecidas pelo Aluno E

Durante a fase de exploração da tarefa por parte dos alunos, fui percorrendo a sala de aula, observando, em particular, o desempenho dos cinco alunos participantes. Constatei que a maioria teve dificuldades em interpretar os enunciados e em distinguir e aplicar os conceitos de Economia envolvidos, em particular na distinção de receita e lucro. Estas dificuldades de vêm ao encontro do que Kingwell (2022) afirma na sua investigação que a "influência dos contextos das tarefas é bastante significativa nas dificuldades de interpretação dos alunos" (Kingwell, 2022, p.95). Além disso, também revelaram dificuldades na resolução das equações, nomeadamente as do 2.º grau. Curiosamente apena um aluno registou que sentiu dificuldades na realização das tarefas.

2.5.2. A Ficha de Trabalho II

A Ficha de Trabalho II (Apêndice III) tinha como finalidade a resolução das tarefas com recurso à calculadora gráfica. A resolução das tarefas envolvia os conceitos de custo, receita e prejuízo, a interpretação da linguagem natural e tradução para linguagem simbólica, a resolução de equações do 1.º e 2,º graus, a resolução de inequações, a determinação pontos de interseção com os eixos coordenados, de extremos e a reprodução das representações gráficas obtidas na calculadora.

A ficha tinha o cabeçalho que se mostra na Figura 28.

Resolva as questões seguintes, utilizando as capacidades da tua calculadora gráfica.

Nas tuas respostas deves reproduzir o(os) gráfico(os) da(as) função(ões) que tiveres necessidade de visualizar. Assinala e indica as coordenadas dos pontos relevantes.

Figura 38: Cabeçalho da Ficha de Trabalho II

Pretendia-se que os alunos utilizassem as capacidades das suas calculadoras gráficas para resolver as questões colocadas.

Era relevante para este estudo que existissem tarefas onde fosse obrigatório a utilização das capacidades gráficas da calculadora, para permitir observar qual comportamento dos alunos durante a sua utilização, nomeadamente a agilidade (ou falta desta) na sua manipulação.

A exemplo do que tinha feito durante a realização da Ficha de Trabalho I, fui percorrendo a sala de aula, observando, em particular, o desempenho dos cinco alunos participantes.

Na Figura 39 apresenta-se o enunciado da questão 1.

1. .Suponha que uma empresa fabrica carteiras e vende-as a 60 euros cada uma. Os custos fixos de produção são 220 000 euros e os custos variáveis são de 12 euros para cada carteira.

Determina quantas carteiras deve a empresa vender para não ter prejuízo.

Figura 39: Enunciado da questão 1

Nesta primeira questão, nenhum aluno utilizou a calculadora gráfica na sua resolução. No entanto, as indicações eram claras em relação à necessidade de utilização das capacidades gráficas da calculadora, logo os alunos não cumpriram com as instruções. Este facto pode ser explicado por um lado, pela facilidade com que esta se resolvia analiticamente, como se pode ver pela resolução do Aluno C apresentada na Figura 40, por outro lado, pela grande dificuldade que os alunos tiveram em encontrar uma janela de visualização adequada, que lhes permitisse dar resposta à questão. Esta situação foi por mim provocada, pois os valores envolvidos eram muito elevados, o que obrigava os alunos a terem de ajustar a janela de visualização. Esta dificuldade revela que estes alunos ainda não dominavam esta competência, pois sabiam o resultado que deveriam obter, uma vez que já tinham resolvido a questão analiticamente, mas nem este facto foi facilitador para uma escolha acertada da janela de visualização. Esta situação vem confirmar o que autores como Rocha (2012) ou Consciência (2013) já haviam detetado. Percebe-se então que esta dificuldade se tem mantido ao longo do tempo, nomeadamente quando os alunos iniciam a utilização da calculadora gráfica, como é o caso de alunos do 10.º ano de escolaridade.

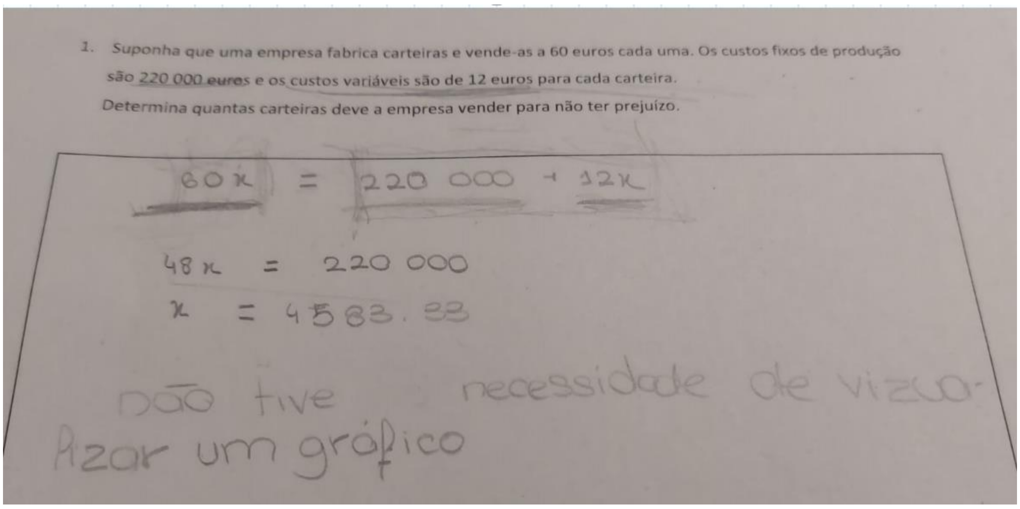


Figura 40: Resolução da Aluna C à questão 1.

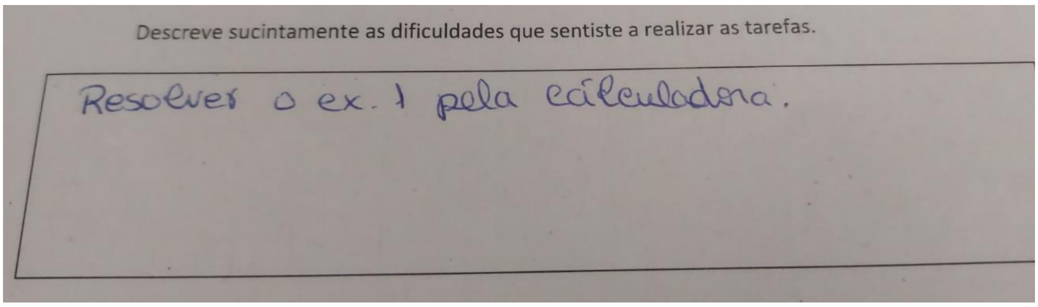


Figura 41: Dificuldade sentidas pelo Aluno D

Na questão 2 cujo enunciado se apresenta na Figura 42 alguns alunos continuaram a não cumprir a indicação da utilização das capacidades gráficas da calculadora.

2.A função $L(x)$ representa o lucro, em milhares de euros, da produção mensal de uma fábrica, de x centenas de peças, $L(x) = -0{,}5x^2 + 4x - 3$.

2.1. Calcula as coordenadas dos pontos de interseção da função L com os eixos coordenados e interpreta os resultados no contexto da situação apresentada.

2.2. Determina o lucro máximo e o número de peças que devem ser produzidas para o obter.

2.3. Quantas peças devem ser produzidas para manter um lucro superior a 3500 euros?

Figura 42: Enunciado da questão 2

Um deles foi o Aluno B. Apresentou a resolução reproduzida na Figura 43. O aluno não apresentou as coordenadas dos pontos, interpretou os resultados obtidos, embora o devesse ter feito convertendo o valor de x, que está em centenas, para unidades e não teve em conta que o valor de lucro era dado em milhares de euros. Também devia ter referido que, sendo o lucro negativo, a fábrica teria tido prejuízo.

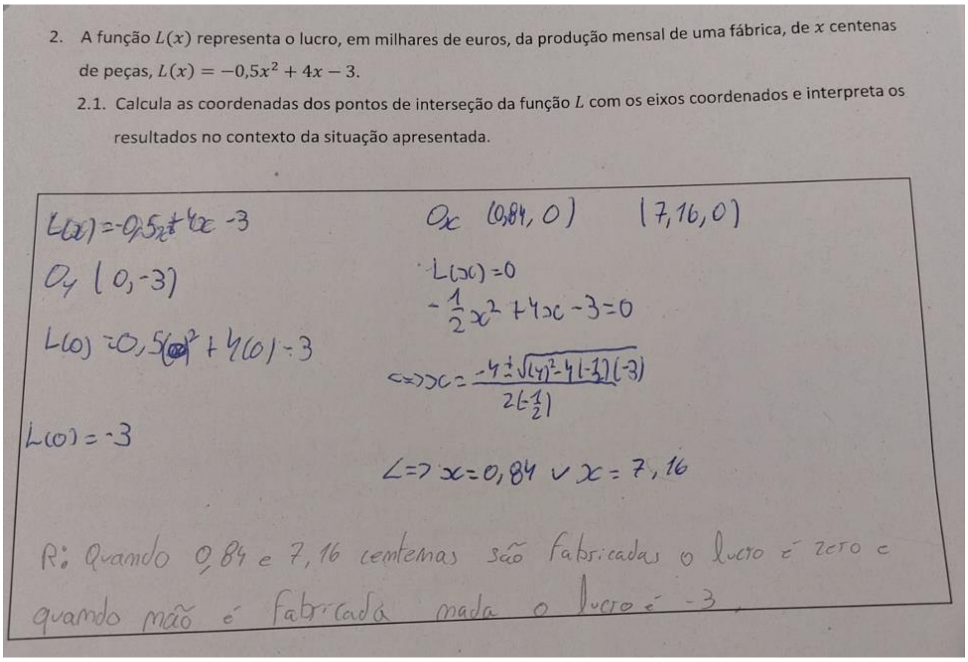


Figura 43: Resposta do Aluno B à alínea 2.1

O aluno C também apresentou resoluções analíticas (Figura 44). Embora apresente uma representação gráfica, pode perceber-se, pela desadequação da escala usada, que não utilizou a calculadora gráfica para a obter, usando os valores obtidos analiticamente como referência.

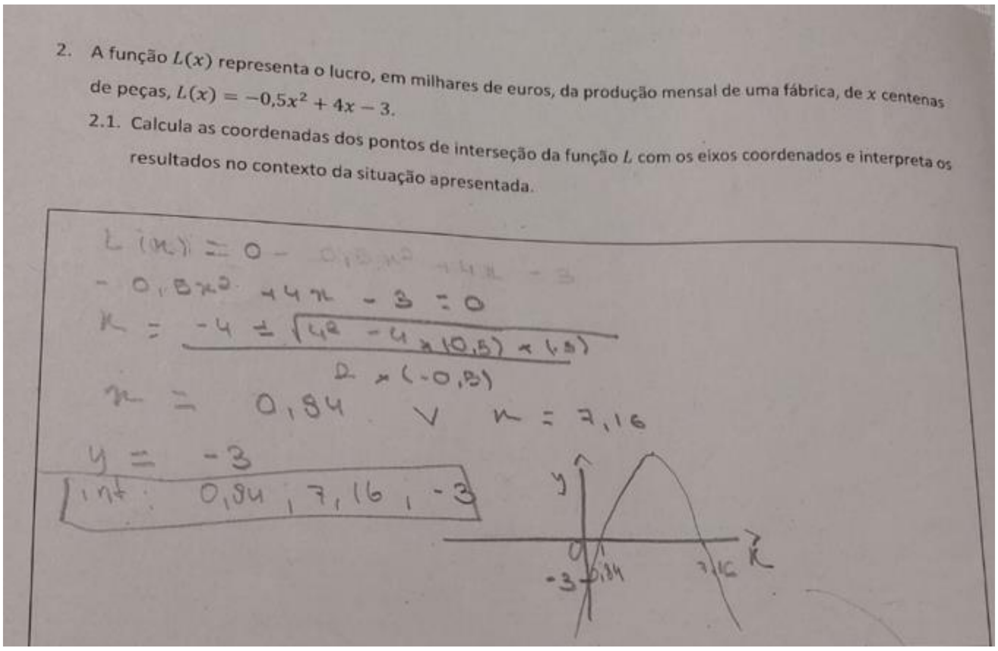


Figura 44: Resoluções do Aluno C às questões 2.1.

Já o Aluno A usou claramente a calculadora gráfica (Figura 45), mas não reproduziu o gráfico que obteve. Apresentou os valores dos zeros da função no canto superior esquerdo, mas sem indicação nenhuma se se tratam de abcissas ou ordenadas. Não apresenta nenhum valor que indicie que determinou as coordenadas do ponto de interseção com o eixo Oy. Interpretou os dois valores que escreveu, mas utilizou uma palavra poe si inventada – "prejuiza".

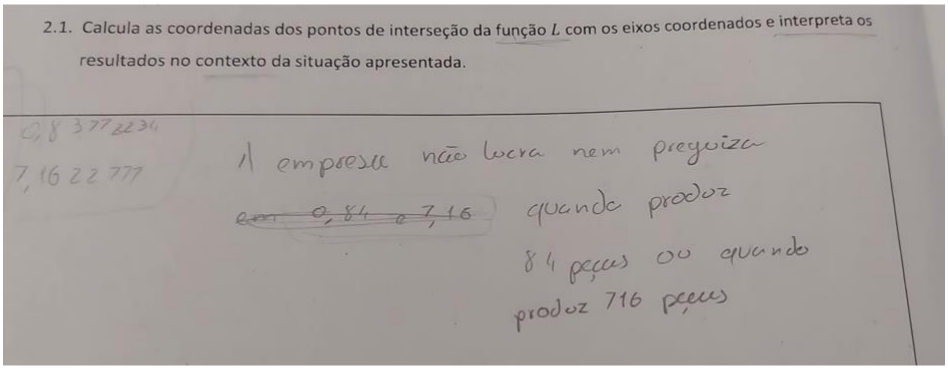


Figura 45: Resposta do Aluno A à alínea 2.1

O Aluno D apresentou uma resolução bastante mais completa (Figura 46). Reproduziu a representação que obteve na calculadora, onde assinalou os pontos que considerou relevantes, tendo também indicado as coordenadas desses mesmos pontos. Da resposta do aluno percebe-se que interpretou corretamente os resultados que obteve, mas a redação da mesma revela dificuldades ao nível da comunicação escrita.

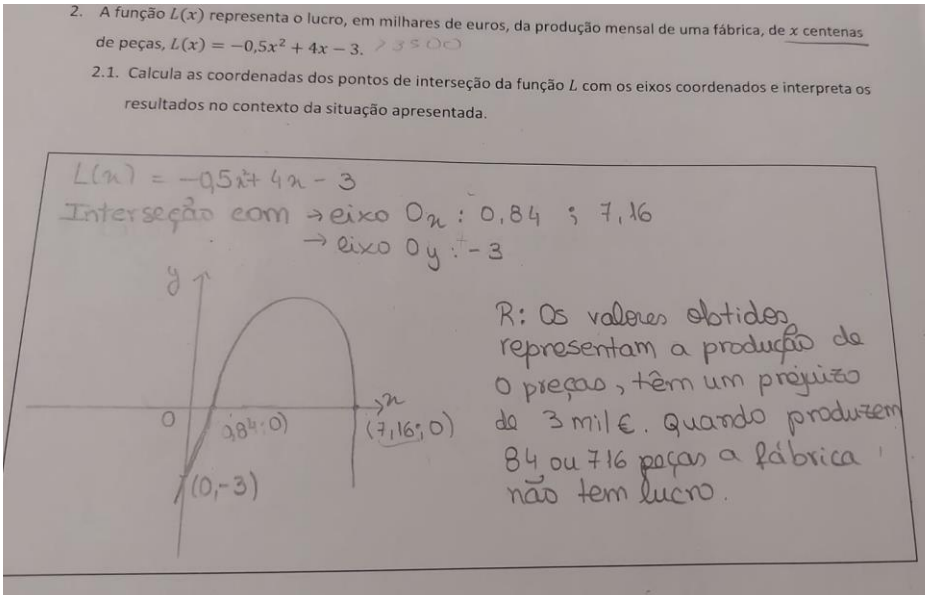


Figura 46: Resposta do Aluno D à alínea 2.1

2.5.3. A Ficha de Trabalho III

Depois dos alunos terem feito duas fichas com indicações claras da estratégia a adotar, na primeira ficha, uso exclusivo de métodos analíticos, e na segunda ficha a obrigatoriedade do recurso às capacidades gráficas da calculadora, esta Ficha de Trabalho III (Apêndice IV) tinha como finalidade a resolução das tarefas sem indicação da estratégia a adotar, dando total liberdade aos alunos para optarem por um dos métodos, ou combiná-los. Pretendia assim perceber qual a estratégia que os alunos privilegiariam. A resolução das tarefas envolvia o conceito de ponto de equilíbrio, a interpretação da linguagem natural e tradução para linguagem simbólica e a resolução de equações.

A ficha tinha uma nota sobre o conceito de Economia que estaria envolvido (Figura 47).

> **Recorda** que a função oferta e a função procura de um produto relacionam o seu preço p e a sua quantidade q e que o ponto de equilíbrio de um mercado é o ponto onde a procura iguala a oferta.

Figura 47: Nota referente a conceitos de Economia presentes na Ficha de Trabalho III

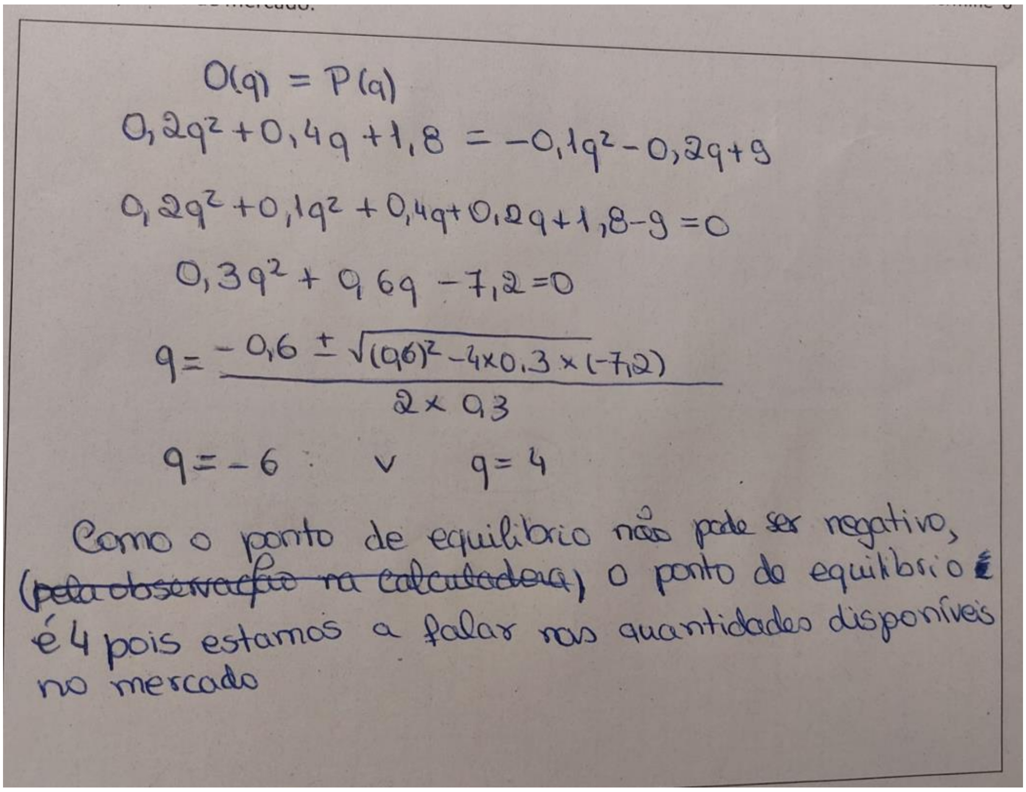
O enunciado do exercício era o que se mostra na Figura 48.

> A função oferta $\boldsymbol{O}$ e a função procura $\boldsymbol{P}$ de um produto, relacionam o seu preço p e a sua quantidade q.
> Para um determinado produto, $\boldsymbol{O(q) = 0,2q^2 + 0,4q + 1,8}$ e $\boldsymbol{P(q) = -0,1q^2 - 0,2q + 9}$. Determine o ponto de equilíbrio de mercado.

Figura 48: Enunciado da Ficha de Trabalho III

Em todas as resoluções apresentadas pelos cinco alunos houve, de forma explicita ou não, referências ao facto de ter de se igualar as expressões analíticas das duas funções, o que revela o seu conhecimento sobre o conceito “ponto de equilíbrio”, dando origem a uma equação do 2.º grau. Três dos cinco alunos optaram por resoluções exclusivamente analíticas, um usa apenas método gráfico, e outro resolve usando as duas estratégias, analítica e gráfica.

Vejamos a resolução do Aluno D que se encontra na Figura 49.



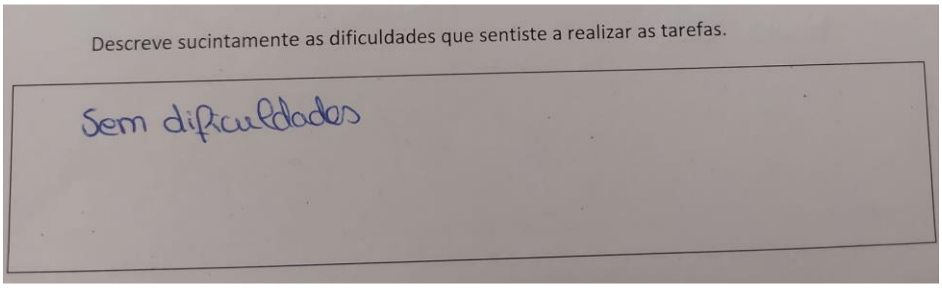
$$O(q) = P(q)$$
$$0{,}2q^2+0{,}4q+1{,}8 = -0{,}1q^2-0{,}2q+9$$
$$0{,}2q^2+0{,}1q^2+0{,}4q+0{,}2q+1{,}8-9=0$$
$$0{,}3q^2+0{,}6q-7{,}2=0$$
$$q=\frac{-0{,}6 \pm \sqrt{(0{,}6)^2-4\times 0{,}3\times(-7{,}2)}}{2\times 0{,}3}$$
$$q=-6 \quad \vee \quad q=4$$

Como o ponto de equilíbrio não pode ser negativo, (~~pela observação na calculadora~~) o ponto de equilíbrio ~~é~~ é 4 pois estamos a falar nas quantidades disponíveis no mercado

Figura 49: Resolução do Aluno D

O Aluno D escolheu uma estratégia analítica, resolvendo a equação do 2º grau, faltando a indicação do sinal de equivalente. Do que escreveu, percebe-se que usou a calculadora para determinar as soluções da equação. Na sua resposta refere "o ponto de equilíbrio não pode ser zero", mas o que quereria dizer é que, sendo q a quantidade, esta não pode ter um valor negativo. Confunde quantidade com ponto de equilíbrio. A quantidade é a abcissa, faltando determinar o valor da oferta (ou da procura, pois serão iguais).

O aluno refere não ter sentido dificuldades (Figura 50).



Descreve sucintamente as dificuldades que sentiste a realizar as tarefas.

Sem dificuldades

Figura 50: Dificuldades sentidas pelo Aluno D

Vejamos agora a resolução apresentada pelo Aluno C que se apresenta na Figura 51.

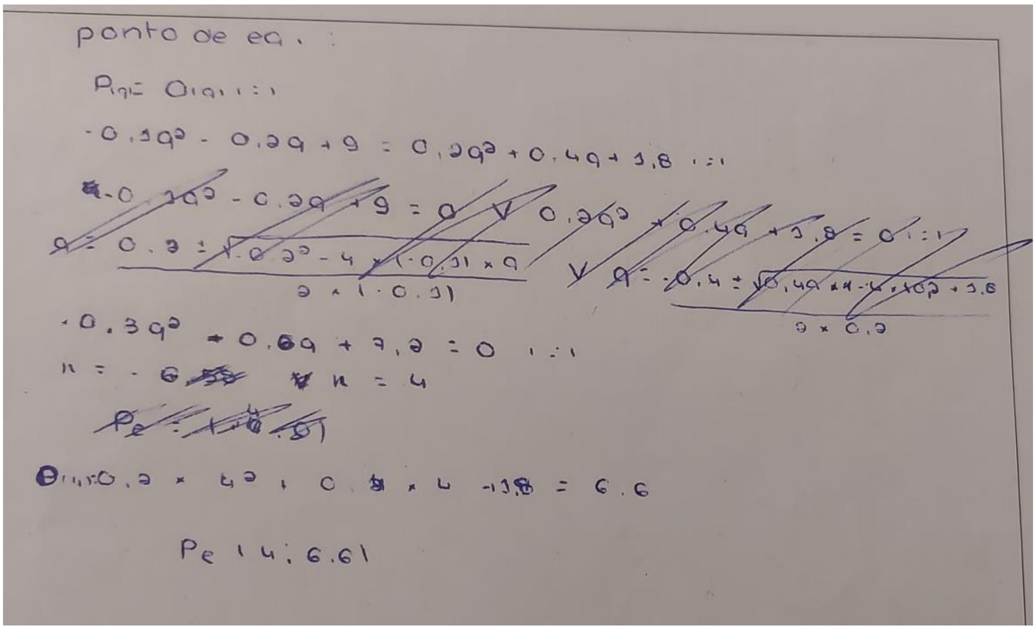
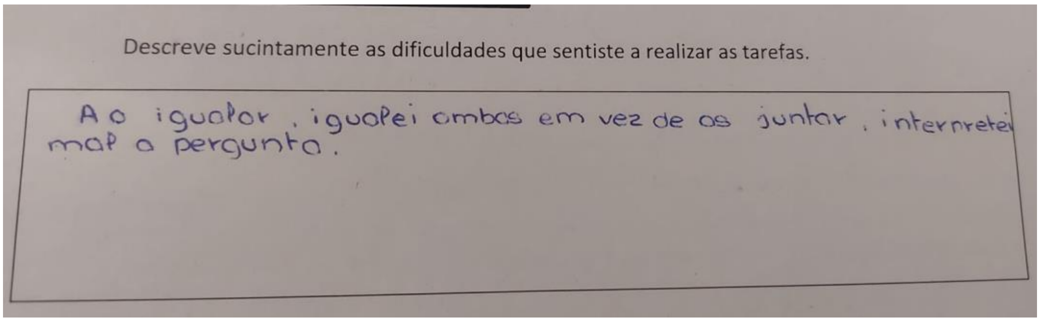


Figura 51: Resolução do Aluno C

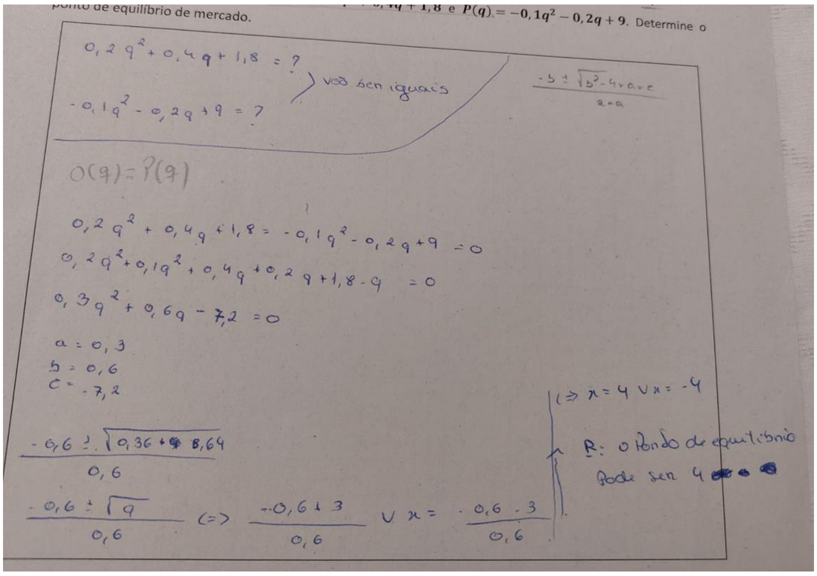
Este aluno também foi um dos que escolheu uma estratégia apenas analítica.
Da parte riscada percebemos que inicialmente igualou ambas as expressões a zero, tendo depois corrigido. Da resolução apresentada podemos inferir que usou a calculadora para a resolver a equação. Apresenta as coordenadas corretas do ponto de equilíbrio, embora não use a notação correta. O aluno descreve as suas dificuldades da seguinte forma (Figura 52):


Descreve sucintamente as dificuldades que sentiste a realizar as tarefas.

Ao igualar, igualei ambas em vez de os juntar, interpretei mal a pergunta.

Figura 52: Dificuldades sentidas pelo Aluno C

Analisemos as respostas do Aluno E (Figura 53) que também apresenta uma resolução analítica. O aluno resolveu de forma incorreta a equação do 2.º grau mas, tendo em conta os valores que obteve, fez uma escolha correta da abcissa positiva, mas apresentou esse valor como ponto de equilíbrio. Da sua resolução podemos perceber que inicialmente iria considerar os dois valores, o positivo, mas também o negativo, tendo riscado este último. O aluno refere que sentiu dificuldades no início da resolução e, mais uma vez, é de referir as fragilidades evidenciadas na comunicação escrita (Figura 54).



ponto de equilíbrio de mercado.
$P(q) = -0,1q^2 - 0,2q + 9$. Determine o

$0,2q^2 + 0,4q + 1,8 = ?$
$-0,1q^2 - 0,2q + 9 = ?$ vão ser iguais

$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

$O(q) = P(q)$

$0,2q^2 + 0,4q + 1,8 = -0,1q^2 - 0,2q + 9 = 0$
$0,2q^2 + 0,1q^2 + 0,4q + 0,2q + 1,8 - 9 = 0$
$0,3q^2 + 0,6q - 7,2 = 0$

$a = 0,3$
$b = 0,6$
$c = -7,2$

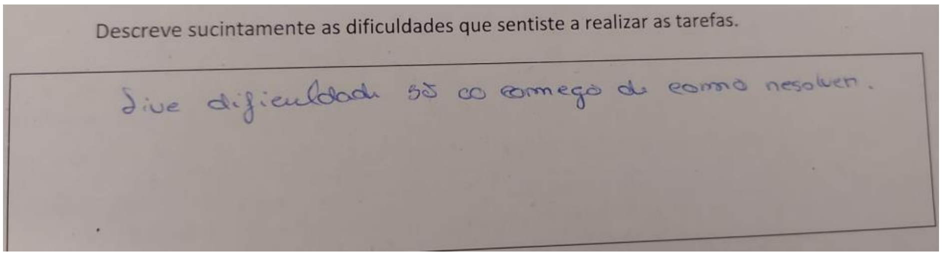
$\frac{-0,6 \pm \sqrt{0,36 + 8,64}}{0,6}$

$\frac{-0,6 \pm \sqrt{9}}{0,6} \Leftrightarrow \frac{-0,6+3}{0,6} \vee x = \frac{-0,6-3}{0,6}$

$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = -4$

R: o ponto de equilíbrio pode ser 4

Figura 53: Resolução do Aluno E



Descreve sucintamente as dificuldades que sentiste a realizar as tarefas.

Tive dificuldade só no começo de como resolver.

Figura 54: Dificuldades sentidas pelo Aluno E

Vejamos agora as resoluções dos dois alunos que optaram por resolver o exercício recorrendo a métodos gráficos.

O Aluno A apresentou uma resolução exclusivamente gráfica (Figura 55).

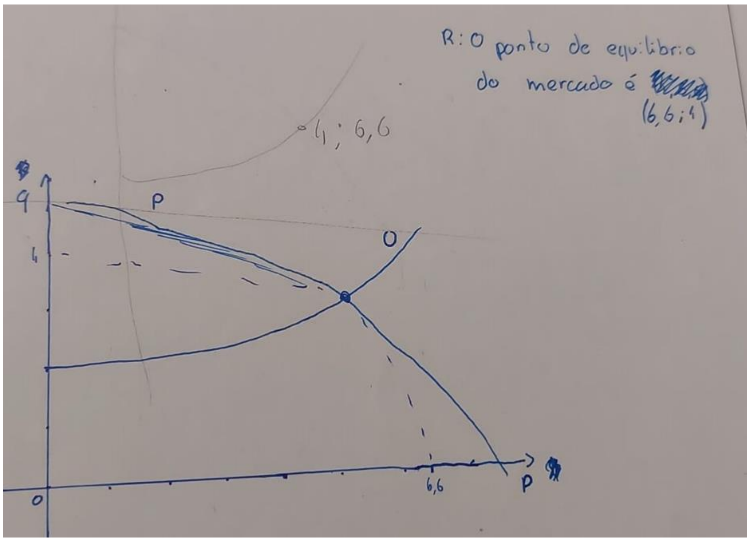


Figura 55: Resolução do Aluno A

Podemos ver que aluno apresentou no eixo horizontal a variável p e no eixo vertical a variável q. O aluno representou apenas o primeiro quadrante, o que é coerente com o contexto do exercício. No entanto, como os eixos estão trocados, apresentou as coordenadas do ponto de equilíbrio também trocadas.

Referiu que "Não tava complicado".

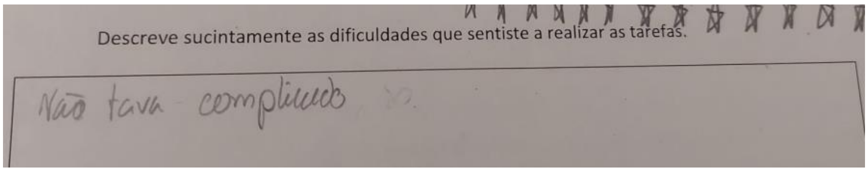


Figura 56: Dificuldades sentidas pelo Aluno A

A resolução deste aluno intrigou-me bastante. Esta troca entre os eixos, e consequentemente a troca entre os valores da abcissa e ordenada na indicação das coordenadas do ponto de equilíbrio não faziam muito sentido. Tentei perceber se o aluno, inadvertidamente, tivesse alterado as definições do menu gráfico da sua calculadora e que esta apresentasse os eixos "ao contrário". Averiguei junto do aluno qual o modelo da sua calculadora, e constatei que tal situação não era possível. Anotei esta questão para colocar ao aluno, para tentar compreender melhor a sua resolução.

Por fim, analisemos a resolução apresentada pelo Aluno B (Figura 57) que presentou uma resolução analítica, complementada com uma resolução gráfica. Não apresentou os sinais de equivalência na resolução da equação do 2.º grau e também este aluno usou a calculadora para resolver a equação. O aluno referiu que q deve ser positivo, tanto na resolução analítica como na gráfica, tendo nesta última riscado a parte do gráfico que não tinha significado no contexto do exercício. Determinou o valor da oferta (ou da procura) mas não apresentou as coordenadas do ponto de equilíbrio.

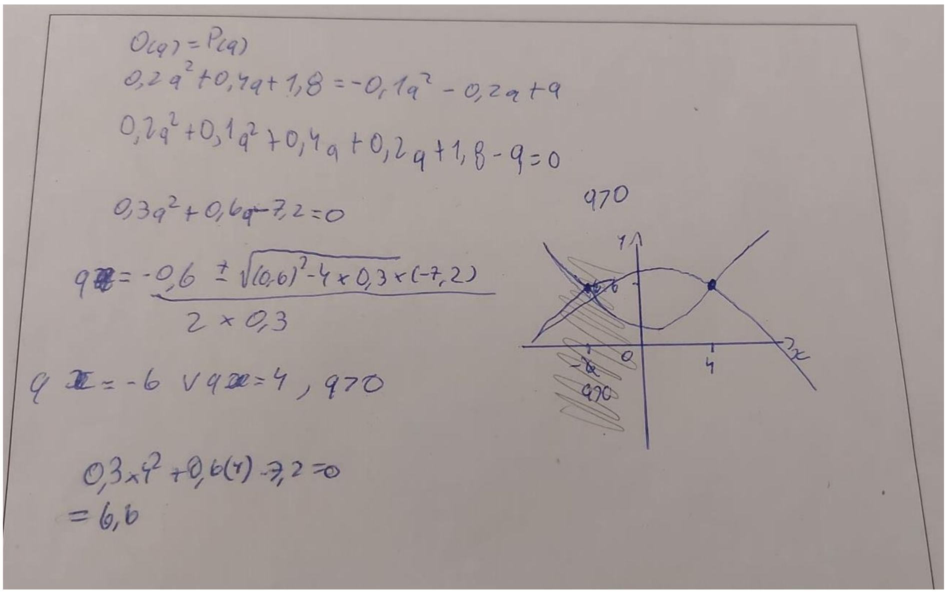


Figura 57: Resolução do Aluno B

O aluno não preencheu o campo das dificuldades sentidas (Figura 58).

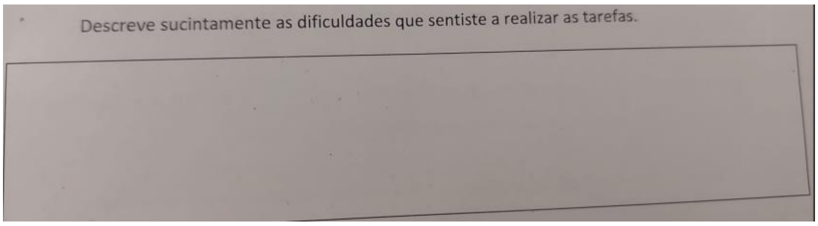


Figura 58: Dificuldades sentidas pelo Aluno B

2.6. *Focus Group*

Para complementar as informações recolhidas através das produções dos alunos e das minhas notas de observação, realizei um *focus group.*

Na sua parte visível, um *focus group* compreende um grupo variável de indivíduos, idealmente compreendido entre 4 e 12, prévia e intencionalmente selecionados, que são convidados a conversar sobre um determinado assunto. Esta conversa é conduzida por um moderador/investigador que fomenta uma interação e discussão entre os participantes. Este papel de moderador/investigador foi desempenhado por mim. A conversa foi gravada e posteriormente transcrita.

A realização deste *focus group* tinha objetivos prédefinidos, nomeadamente o esclarecimento de algumas dúvidas que me surgiram nas produções dos alunos e a possibilidade de provocar uma conversa entre os participantes, onde seriam abordadas questões relacionadas com o contexto das tarefas e a sua relevância, e a utilização da calculadora gráfica na sua resolução. Talvez devido à minha pouca prática na aplicação desta técnica, estes objetivos não foram conseguidos, uma vez que não fui capaz de colocar os alunos a conversar entre si. Os alunos foram respondendo às minhas questões com resposta curtas e pouco elaboradas, o que me levou a ter intervenções mais longas do que seria de esperar de um moderador. Apesar disso, consegui recolher algumas informações pertinentes.

Em relação ao facto de as tarefas terem contextos retirados da Economia, os alunos referiram que foi interessante e que mostrou a presença da Matemática no mundo real, como o referido pelo Aluno E *"Foi interessante, ajudar a Matemática com a Economia é sempre interessante."* e pelo aluno A "*Eu acho que mostrou como é que a Matemática se incorpora em outros sítios do mundo real."*
Apesar deste contexto, os alunos encararam as tarefas propostas como tarefas de Matemática e não de Economia, tendo até sido referido pelo Aluno A, que o conhecimento dos conceitos estudadas em Economia tinha sido irrelevante para a resolução das tarefas.
Todos referiram que gostam de usar calculadora gráfica nas aulas de Matemática, e que a sua utilização "Não é assim tão difícil" (Aluno C), ou "É uma questão de prática" (Aluno D).

Especificamente em relação às resoluções da Ficha de Trabalho III, questionados os alunos que optaram por resoluções analíticas, justificaram as suas escolhas "(…) *porque já tínhamos feito antes estes exercícios analiticamente."* (Aluno D), ou "*Porque achei que era mais fácil." (Aluno C).*

Pedi ao Aluno A, cuja resolução me tinha intrigado, (ver Figura 54), para explicar o facto de ter, no eixo horizontal a variável p e no vertical a variável q, quando deveria ser ao contrário.

Aluno A: Eu por acaso tava com…eu não tava a perceber bem qual é que era para ir em cima e qual é que era para ir em baixo. Confundi-me um bocadinho.

Eu: E achas que te confundiste porque não percebeste bem o exercício ou confundiste-te com a representação que tinhas na calculadora?

Aluno A: Foi só por causa das letras. Acho que as troquei, o p e o q.

Em relação ao facto de a calculadora gráfica ser ou não uma mais valia na resolução deste tipo de tarefas o Aluno C acha que sim, mas o aluno D referiu que dependia das tarefas. O Aluno C afirma que "*Mas aqui ainda não era tanto, mas agora já é mais porque já sabemos usar melhor."* (referindo-se ao facto de que no espaço entre a realização das tarefas e a realização do *focus group* aprendeu a fazer mais coisas com a calculadora).

O Aluno A, na sua resolução, usou logo as capacidades gráficas da sua calculadora e referiu que " *É mais fácil pa mim acho que visualizar os exercícios e ver como é que, como é que o gráfico fica no visor.", "acho que é só porque é mais fácil para mim fazer graficamente."*

Questionei o Aluno E em relação ao porquê das dificuldades por si explicitadas (ver Figura 52). O aluno afirma "*…eu acho que teve a ver um bocadinho com a interpretação do que pedia o exercício" e Aluno E: Eu acho que tenho algumas dificuldades que já vinham vindo do passado e que agora …" estão a agravar-se.*

Todos os alunos concordaram com o facto de ser útil, tanto à Matemática como à Economia, a lecionação de aulas conjuntas destas duas disciplinas.

Capítulo III – Apresentação dos resultados

Neste trabalho pretendi perceber como é que alunos de uma turma do 10.º ano da área de ciências socioeconómicas reagiam a tarefas sobre o tema *Funções*, com contextos retirados de Economia, nomeadamente, estudar a sua preferência por resoluções envolvendo métodos analíticos ou privilegiando métodos gráficos, com recurso a calculadora gráfica. Foram então colocadas as questões de investigação às quais se pretendeu dar resposta:

1. Quais as preferências dos alunos do 10.º ano quanto à abordagem em tarefas relacionadas ao tema de funções, com contextos de Economia: favorecem métodos puramente analíticos, ou recorrem à calculadora gráfica nos seus processos de resolução?

2. Quais as dificuldades que são percebidas pelos alunos ao lidarem com tarefas desse tipo?

A recolha das resoluções dos alunos foi a principal fonte de recolha de dados, complementada com as minhas observações e respetivas notas, assim como informações recolhidas através de um *focus group*.

Em relação à primeira questão, foi possível, com base nos dados recolhidos, perceber que, no grupo de alunos participantes, houve uma prevalência pela escolha pelo método analítico para resolver as tarefas. Esta preferência também foi evidenciada pelo estudo realizado por Nunes (2022), onde participaram alunos que também frequentavam o 10.º ano de escolaridade. Tendo em conta que os alunos durante o 3.º ciclo do Ensino Básico desenvolvem competências de resolução de equação do 1.º e 2.º grau, estando por isso confortáveis com a sua utilização, não é de estranhar que tenham esta preferência por resoluções analíticas. Este facto também já tinha sido reconhecido por Rocha (2002) que afirma que "A técnica preferencial é, em geral, a primeira a ser aprendida, o que não é surpreendente" (Rocha, 2002, p.5). Sendo que é no 10.º que os alunos iniciam o trabalho com calculadora gráfica, estes ainda não tiveram tempo para amadurecer os seus conhecimentos sobre esta tecnologia, por forma a lhe dar uma utilização mais eficiente. Embora existam orientações curriculares para a utilização de tecnologia gráfica no estudo de funções, ao nível do 10.º ano, na disciplina de Matemática A, ainda é dado protagonismo à utilização de processos analíticos para a realização de muitas tarefas do tema *Funções*. O professor tem por isso um papel fundamental para motivar e orientar os alunos na utilização destas tecnologias. Já Rosa (2012) refere que

> Se o professor utilizar a calculadora regularmente, não só para a resolução de exercícios, mas também para a abordagem de conteúdos e conexão entre diferentes temas, os alunos ficarão com outra visão das potencialidades da calculadora e provavelmente farão abordagens inovadoras. (Rosa, 2013, p.16).

Assim, é de grande importância dar tempo e oportunidades em sala de aula para que os alunos trabalhem com as capacidades gráficas das suas calculadoras, por forma a adquirirem fluência na sua utilização.

Em relação à segunda questão, as produções dos alunos revelam que estes não identificam de forma clara as suas dificuldades, ou não as identificam de todo. As interpretações que faço são por isso muito baseadas nas minhas observações e respetivas notas. Assim percebi que os alunos revelaram algumas dificuldades em interpretar os enunciados o que vai ao encontro do estudo feito por Kingwell (2022) que refere, entre outras razões, a falta de domínio da língua e o contexto das tarefas como aspetos que promovem a dificuldades de interpretação de enunciados de tarefas matemáticas. Neste caso os alunos não mobilizaram os conceitos já adquiridos na disciplina de Economia, o que dificultou a interpretação e tradução dos enunciados. Por outro lado, e como já referido anteriormente, a falta de prática na utilização da calculadora gráfica leva a dificuldades na sua utilização, sendo uma das mais evidentes, a escolha de uma janela de visualização adequada.

Os alunos acharam interessante o facto de verem aplicados conceitos de Economia a situações da realidade e afirmaram que os ajudava a compreender melhor os conceitos de Economia. É de notar o facto de estes alunos não reconhecerem vantagens neste contexto das tarefas para o aprofundamento dos seus conhecimentos matemáticos. Os alunos consideraram ser vantajoso existir um trabalho de interdisciplinaridade entre as disciplinas de Matemática e Economia, que poderia passar, por exemplo, por aulas lecionadas em conjunto pelos docentes das duas disciplinas, sendo todos da opinião que este trabalho lhes permitiria compreender melhor os conceitos abordados nas duas disciplinas. Este facto vem confirmar o que já foi afirmado por Barros (2015) "a interdisciplinaridade trará benefícios ao processo de ensino/aprendizagem por proporcionar, entre ouras características, um ensino contextualizado, motivador e mais significativo para os alunos." (Barros, 2015, p.11).

Após realizar este trabalho, percebi que é preciso proporcionar aos alunos, em contexto de sala de aula, mais momentos e tarefas que lhes proporcionem oportunidades de analisar, refletir e discutir o seu trabalho. Desta forma, seriam capazes de se expressar melhor, identificando de forma muito mais clara, oralmente e por escrito, as suas dificuldades e opções na resolução de tarefas. Assim, seria interessante realizar um trabalho continuado, semelhante a este, ao longo dos 11.º e 12.º anos, para acompanhar a evolução destes alunos ao longo do tempo. Poderíamos assim perceber se a tendência para optarem por métodos analíticos se manteria ou não, uma vez que os alunos irão adquirir mais conhecimentos sobre funções e irão dominar melhor as suas calculadoras gráficas, permitindo um aumento da complexidade das tarefas, o que potenciaria o uso da tecnologia. Além disso, poderíamos perceber se haveria evolução positiva, ou não, das suas capacidades de interpretação e comunicação oral e escrita

Capítulo IV- Considerações finais

A realização deste trabalho permitiu-me refletir sobre muitas questões e crescer em conhecimento. Fala-se muito de processos de ensino e aprendizagem, dando bastante enfoque à aprendizagem. Como é que os alunos aprendem? De que forma aprendem melhor? Porque é que apresentam determinado tipo de dificuldades e fragilidades? Qual o papel que as tecnologias desempenham nestes processos? O que devo mudar na minha prática para potenciar as aprendizagens dos meus alunos? Estas são apenas algumas das muitas questões que os professores se colocam diariamente nas suas salas de aula e para as quais, muitas vezes, não têm resposta. Surge assim a necessidade de o professor ter uma ação de investigador. Já Alarcão (2001) defende que "Realmente não posso conceber um professor que não se questione sobre as razões subjacentes às suas decisões educativas" (Alarcão, 2001, p.6). Espero, no desenvolvimento da minha prática docente, continuar a questionar-me sempre, procurando respostas junto dos meus colegas e dos meus alunos, por forma a fazer as melhores opções possíveis.

Não posso terminar este trabalho sem refletir sobre o futuro. O rápido desenvolvimento da tecnologia coloca grandes desafios à sociedade e à educação em particular. A desmaterialização da avaliação externa é um desses desafios. Como se integrará a utilização de calculadoras gráficas nesse cenário? Será que o equipamento físico irá deixar se ser relevante, sendo substituído por emuladores? Estarão as escolas dotadas das condições para fazer esta transição? Será mais fácil para os alunos trabalharem nestes ambientes digitais? E a emergência da inteligência artificial? Que consequências terá no ensino? Serão consequências boas ou más? Todas estas questões estarão, com certeza, na base de muitas investigações futuras, que nos irão trazer a nós, professores, informações valiosas para ajustarmos a nossa ação junto dos nossos alunos, por forma a otimizar os processos de ensino e aprendizagem, pois não podemos viver alheados do que se passa à nossa volta, e faz parte da nossa missão, enquanto professores, prepararmos da melhor forma os nossos alunos para os desafios que irão enfrentar na sua vida futura.

Referências Bibliográficas

Aires, L., (2015). *Paradigma Qualitativo e Páticas de Investigação Educacional*. Universidade Aberta.

Alarcão, I. (2001). Professor-investigador: Que sentido? Que formação?. *Cadernos de Formação de Professores*, 1, 21-30.

Andrade, C., Pereira, P. & Pimenta, P. (2023). *Novo Ípsilon 10*. Raiz Editora.

Andrade, C., Pereira, P. & Pimenta, P. (2023). *Novo Ípsilon 11*. Raiz Editora.

Andrade, C., Pereira, P. & Pimenta, P. (2023). *Novo Ípsilon 12*. Raiz Editora.

Azevedo, A. (2009). *O desenvolvimento do raciocínio matemático na aprendizagem de funções: Uma experiência com alunos do ensino secundário* [Tese de Mestrado]. Universidade de Lisboa

Barros, F. (2015). *A interdisciplinaridade como um caminho possível para a educação integral* [Tese de Mestrado]. Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Breda, A. & Costa, J. (1996). *Cálculo com funções de várias variáveis.* Mc Graw-Hill.

Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, H. & Oliveira, P. (2011). *Geometria e medida no ensino básico.* Ministério da Educação, Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular. https://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/temas%20matematicos/070_Brochura_Geometria.pdf

Bogdan, R., & Biklen, S. (2010). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto Editora

Caetano, A. (2015, novembro 8). *Cálculo I e II.* http://calculo.wikidot.com/

Caetano, C. Introdução a ciência da computação. https://www2.ic.uff.br/~ccaetano/aulas/ICC_Aula_2_Conceitos_Basicos_de_Sistema.pdf

Canavarro, A., Oliveira, H. & Menezes, L. (2014). Práticas de ensino exploratório da Matemática: Ações e intenções de professora. *Práticas profissionais dos professores de Matemática*. 217-233. Instituto de Educação de Lisboa.

Cardoso, D., Szymansky, J., & Rostami, M. (2009). Matemática Discreta, 19-22. Escolar Editora.

Carmo, M. & Ferreira, M. (1998). Metodologia da Investigação- Guia para Auto-aprendizagem. Universidade Aberta

Coelho, P. (2012, 9 de setembro). História da calculadora. Engquimicasantossp. https://www.engquimicasantossp.com.br/2012/09/historia-da-calculadora.html

Consciência, M. (2013). *A calculadora gráfica na aprendizagem das funções no ensino secundário* [Tese de Doutoramento]. Universidade de Lisboa.

Costa, B., & Rodrigues, E. (2019). *Novo Espaço, Parte 1, Matemática A, 10.º ano.* Porto Editora

Cunha, E. (2018). *A matemática como ciência e o uso da calculadora no seu ensino* [Tese de Mestrado]. Universidade Federal de Goiás.

Ferreira, F. & Soares, M. (2021). *Economia A 10º ano.* Porto Editora

Ferreira, V. & Fortulan, V. (2012) Um estudo das funções de 1º e 2º graus aplicadas à economia, *Revista Matiz Online, 3ed edition, ISSN 21794022.* http://www.immes.edu.br/

Giraldes, E., Fernandes, V. & Smith, M. (1997). Curso de Álgebra Linear e Geometria Analítica. McGraw-Hill

Galego, C. & Gomes, A. (2005). Emancipação, rutura e inovação: o "focus group" como instrumento de investigação. *Revista Lusófona de Educação*, 5, 173-184.

Gomes, A. (2005). Apontamentos sobre a pesquisa em educação: uso e possibilidades do grupo focal. *Eccos -Revista Científica*, 7(2), 275-290.

Kingwell, A. (2022). Dificuldades dos alunos na interpretação de tarefas matemáticas. *[Tese de Mestrado]. Universidade* do Porto

ME (2018a). Aprendizagens Essenciais 8.º ANO | 3.º CICLO DO ENSINO BÁSICO. ME-DGE. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/matematica_3c_8a_ff_18julho_rev.pdf

ME (2018b). Aprendizagens Essenciais – Secundário | Matemática A 10.º ano de escolaridade. ME-DGE. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/10_matematica_a.pdf

ME (2023). Aprendizagens Essenciais – Secundário |Matemática A 10.º ano de escolaridade. https://www..dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/mat_a_10_-_vf.pdf

Mestre, C. & Gonçalves, H. (2022). Plim! Caderno de Cálculo e Desafios – Matemática 3º ano. Texto Editora

Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carrillo, J., Silva, L., Encarnação, M., Horta, M., Calçada, M., Nery, R. &Rodrigues, S. (2016). *O Perfil dos Alunos à saída da Escolaridade Obrigatória* (D. G. Educação (DGE), Ed.). https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/perfil_dos_alunos.pdf

National Council of Teachers of Mathematics.(2007). Princípios e Normas para a Matemática Escolar. Lisboa: APM

National Council of Teachers of Mathematics.(2015). Stategic use of technology in teaching and learning mathematics: A position of the National Councik of Teachers of Mathematics.

Neves, M., Ribeiro, B., Roque, B. & Faria, L. (2022). MX Matemática 5º ano. Porto Editora.

Nunes, E. (2022) A resolução de problemas na aprendizagem de tópicos de Funções de alunos do 10.º ano com recurso à calculadora gráfica.[Tese de Mestrado]. Universidade do Minho.

Pinto, J. (2010) Curso de Análise Matemática. UA Editora.

Ponte, J., & Quaresma, M., (2012). O papel do contexto nas tarefas matemáticas. Interacções, 22, 196-216

Ponte, J. (1990) O conceito de função no currículo de Matemática. *Educação e Matemática, 15,* 3-9

Reis, P. (2010). Análise e discussão de situações de docência. Universidade de Aveiro

Reis, P. (2011). Observação de aulas e avaliação do desempenho docente. Lisboa. Ministério da Educação. Conselho Científico para a Avaliação de Professores.

Rocha, H. (2001). *Calculadoras gráficas: Que utilização?* Actas do XII Seminário de Investigação em Educação Matemática, 233-252. Lisboa. APM.

Rocha, H. (2002). *A utilização que os alunos fazem da calculadora gráfica na aula de matemática*. Quadrante, 11, 3-28.

Rocha. H. (2011). *Tecnologias na educação matemática: A calculadora gráfica e a utilização que dela fazemos.* Educação e Matemática, 112, 41-46

Rocha. H. (2012). *A integração da calculadora gráfica no ensino da Matemática: Estudo sobre as práticas Curriculares de Professores do Ensino Secundário* [Tese de Doutoramento]. Universidade de Lisboa.

Rocha, H. (2013). A janela de visualização da calculadora gráfica nas propostas de trabalho de uma professora de matemática. Actas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática, 373-384

Rosa, C., Ribas, L., & Barazzutti, M. (2012, agosto 1-agosto3). *Matemática e Física: juntas pela função afim* [Artigo em Conferência]. III EIEMAT – Escola de Inverno de Educação Matemática, Santa Maria, Brasil.

Sá, C. (2021). *A calculadora gráfica e a comunicação escrita: Experiência com alunos do 10º ano* [Tese de Mestrado]. Universidade do Minho.

Santos, V. (2009). *Cálculo com funções de uma variável -vol.1.* Universidade de Aveiro [não publicados]

Silva, I., Marques, L., Mata, L. & Rosa, M. (2016). *Orientações curriculares para a educação pré-escolar.* Ministério da Educação/Direção Geral da Educação (DGE). Orientacoes_Curriculares.pdf (mec.pt)

Silva, M. (2013) *Tarefas com recurso à calculadora gráfica no ensino secundário do 10º ao 12º ano de escolaridade* [Tese de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa].

Silva, D., & Seixas, S. R. (2010). *As competências que a calculadora gráfica promove no ensino/aprendizagem da matemática: um estudo de caso numa turma do 11.º ano*. Revista Interacções, 6(15). https://doi.org/10.25755/int.429

Vinicius, A., Augusto, C., Barbato, F., Balthazar, G., Romão, G., Tomaz, J., Abdalla, J. & Soares, R. (2014, 6 de agosto). Parábola Trabalho de Matemática. Jorge Abdalla. https://pt.slideshare.net/JorgeMAbdalla/parbola-37739474

Viseu, F., Campos, S., Fernandes, J. & Rocha, H (2016). Uso da calculadora gráfica na exploração de modelos contínuos não lineares, *Revista Eletrônica de Educação Matemática. Florianópolis (SC), 11(2).*

Veloso, E. (2012). *Simetria e transformações geométricas*. APM

Apêndice I – Autorização para participar no estudo

dep
universidade de aveiro
departamento de educação e psicologia

Exmo.(a) Sr.(a) Encarregado(a) de Educação

Eu, Ana Rita Teto, estou neste momento a frequentar o 2º ano do Mestrado em Ensino de Matemática do 3º Ciclo do Ensino Básico e Secundário na Universidade de Aveiro, encontrando-me a realizar a unidade curricular de Prática de Ensino Supervisionada, na situação de professora estagiária, na turma do seu educando.

Para a conclusão do referido mestrado, é necessária a realização de um Relatório de Estágio, o qual, no meu caso, incidirá sobre um estudo acerca da utilização da calculadora gráfica.

O estudo que pretendo realizar exige que os alunos respondam a um breve questionário, assim como realizem pequenas tarefas em sala de aula e participem numa pequena conversa orientada.

Para o efeito, solicito autorização para recolher as respostas do seu educando, assim como para o registo áudio da conversa orientada.

Declaro que os dados recolhidos serão apenas usados para efeitos do estudo a realizar e não terão qualquer influência nas classificações escolares dos alunos. Comprometo-me a garantir o anonimato em relação à identidade dos alunos, assim como em relação à escola que frequentam.

Na espectativa de uma resposta favorável, solicito que assine a autorização em baixo, devendo depois destacá-la e devolvê-la.

Com os melhores cumprimentos

______________________________	______________________________
(Ana Rita Teto – Professora Estagiária)	(Ana Fraga – Professora Cooperante)

- -

Autorizo o(a) meu(minha) educando(a) ____________________________________n.º ____ do 10.º G a participar na recolha de dados dirigida pela professora estagiária Ana Rita Teto, no âmbito da realização do seu relatório de estágio.

Aveiro,_____________de 2023

O/A Encarregado(a) de Educação

____

Apêndice II – Ficha de Trabalho I

Ficha de trabalho I

Ano letivo 2022/2023

Tema: **Funções**

Conteúdo: **Resolução analítica de tarefas sobre funções**

Nome do aluno: ____

Resolve as questões seguintes, utilizando métodos exclusivamente analíticos.

Apresenta todos os cálculos efetuados e todas as justificações necessárias.

Seja x a quantidade produzida de um produto. O custo de produção depende de x e a relação entre eles é chamada de função **Custo**, $\boldsymbol{C}$. O custo é formado por duas parcelas: custos fixos e custos variáveis.

A **Receita,** $\boldsymbol{R}$, relaciona o preço unitário, p, e a quantidade vendida, x, de determinado produto, da seguinte forma $\boldsymbol{R(x) = px}$.

1. A Ana tem uma pequena empresa que produz camisas. Por dia, os custos fixos (salários, energia, água, …) são 200 euros. Os materiais usados na produção de uma camisa custam 10 euros.

   1.1. Qual é o custo total da produção diária de:

   1.1.1. Uma camisa?

   1.1.2. 30 camisas?

1.1.3. x camisas?

1.2. Faz uma representação gráfica da função Custo.

1.3. Num determinado dia foram produzidas 80 camisas. Qual foi o custo médio de cada camisa?

1.4. Sabendo que cada camisa é vendida a 25 euros, calcule o Lucro, L obtido com a venda de:
Sugestão: Comece por estabelecer uma relação entre Lucro, Custo e Receita.

1.4.1. Uma camisa?

1.4.2. 30 camisas?

1.4.3. x camisas?

1.5. Determine qual o número mínimo de camisas que é necessário produzir para que o lucro seja superior a 500 euros?

1.6. Num pequeno texto, descreve a relação existente entre as funções custo e lucro, em função do número de camisas produzidas.

2. Um cantor *pop* vai dar um concerto numa sala com capacidade para 360 pessoas. Com base em experiências anteriores, sabe-se que se vender os bilhetes a 20 euros terá 240 espectadores e que, por cada euro de variação do preço do bilhete, há uma variação de 20 espectadores.

2.1. Seja x a variação, em euros do custo de cada bilhete $(-12 < x < 20)$.
No contexto da situação apresentada, qual é o significado das expressões:

2.1.1. $20 - x$

2.1.2. $240 + 20x$

2.1.3. $(240 + 20x)(20 - x)$

2.2. Entre que valores deve variar o preço dos bilhetes para que a receita seja superior a 4000 euros? Apresente os valores arredondados às centésimas.

2.3. Qual deve ser o preço dos bilhetes para que a receita seja máxima?

2.4. Qual deve ser o preço máximo de cada bilhete para que a lotação da sala seja atingida? Qual é a receita obtida, neste caso?

Descreve sucintamente as dificuldades que sentiste a realizar as tarefas

Apêndice III – Ficha de Trabalho II

Ficha de trabalho II

Ano letivo 2022/2023

Tema: **Funções**

Conteúdo: **Resolução gráfica de tarefas sobre funções**

Nome do aluno: ____

Resolve as questões seguintes, utilizando as capacidades da tua calculadora gráfica. Nas tuas respostas deves reproduzir o(os) gráfico(os) da(as) função(ões) que tiveres necessidade de visualizar. Assinala e indica as coordenadas dos pontos relevantes.

1. .Suponha que uma empresa fabrica carteiras e vende-as a 60 euros cada uma. Os custos fixos de produção são 220 000 euros e os custos variáveis são de 12 euros para cada carteira.

Determina quantas carteiras deve a empresa vender para não ter prejuízo.

2.A função $L(x)$ representa o lucro, em milhares de euros, da produção mensal de uma fábrica, de x centenas de peças, $L(x) = -0{,}5x^2 + 4x - 3$.

2.1. Calcula as coordenadas dos pontos de interseção da função L com os eixos coordenados e interpreta os resultados no contexto da situação apresentada.

1.4. Determina o lucro máximo e o número de peças que devem ser produzidas para o obter.

1.5. Quantas peças devem ser produzidas para manter um lucro superior a 3500 euros?

Descreve sucintamente as dificuldades que sentiste a realizar as tarefas

Apêndice IV – Ficha de Trabalho III

Ficha de trabalho III

Ano letivo 2022/2023

ema: **Funções**

Conteúdo: **Resolução de tarefas sobre funções**

Nome do aluno: ____

Recorda que a função oferta e a função procura de um produto relacionam o seu preço p e a sua quantidade q e que o ponto de equilíbrio de um mercado é o ponto onde a procura iguala a oferta.

A função oferta $\boldsymbol{O}$ e a função procura $\boldsymbol{P}$ de um produto, relacionam o seu preço p e a sua quantidade q.

Para um determinado produto, $\boldsymbol{O(q) = 0,2q^2 + 0,4q + 1,8}$ e $\boldsymbol{P(q) = -0,1q^2 - 0,2q + 9}$.
Determine o ponto de equilíbrio de mercado.

Descreve sucintamente as dificuldades que sentiste a realizar as tarefas.