Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2020

Alberto Alexandre dos Reis Cunha Taveira

Estudo da Geometria do Círculo em Cursos de Educação e Formação para Adultos

Alberto Alexandre dos Reis Cunha Taveira

Estudo da Geometria do Círculo em Cursos de Educação e Formação para Adultos

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para Professores, realizada sob a orientação científica da Professora Doutora Paula Oliveira, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro e da Professora Doutora Dina Seabra, Professora Adjunta da Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Águeda da Universidade de Aveiro.

o júri

presidente

Prof. Doutora Maria Paula Lopes dos Reis Carvalho
Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Prof. Doutor Nuno Rafael Oliveira Bastos
Professor Adjunto da Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Viseu do Instituto Politécnico de Viseu

Prof. Doutora Paula Oliveira
Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

agradecimentos

Agradeço às minhas orientadoras, Prof. Doutora Paula Oliveira e Prof. Doutora Dina Seabra, pelos incentivos prestados e pelo apoio total que demonstraram no acompanhamento desta dissertação. O encorajamento, rigor científico e disponibilidade, estiveram sempre presentes, principalmente nos momentos em que surgiram maiores dificuldades.

Agradeço também à minha família, esposa e filhas, pelo apoio e compreensão nos momentos em que necessariamente me tive de ausentar para desenvolver este projeto.

palavras-chave

Circunferência, círculo, área do círculo, perímetro do círculo, educação, formação.

resumo

Este trabalho tem como principal objetivo abordar conteúdos geométricos associados à circunferência e ao círculo no âmbito dos cursos de educação e formação para adultos. Nesta modalidade de formação, por via das saídas profissionais, existe a necessidade de os formandos lidarem com objetos com características mensuráveis e de aplicarem técnicas e formulários de cálculo na determinação de medidas. Baseando-se nos conteúdos a lecionar, pretende-se que sirva de documento de apoio, nesta área, para os formadores.

keywords Circumference, circle, area of a circle, perimeter of a circle, education, training.

abstract The main objective of this work is to address geometric contents associated with the circumference and circle in the context of adult education and training courses. In this type of training, through professional outputs, there is a need for trainees to deal with objects with measurable characteristics and to apply techniques and calculation forms in the determination of measurements. Based on the contents to be used, it is intended to serve as a supporting document, in this area, for trainers.

CONTEÚDO

Lista de Figuras

Lista de Abreviaturas

ANQEP - Agência Nacional para a Qualificação e Ensino Profissional

CNQ - Catálogo Nacional de Qualificações

EFA - Educação e Formação para Adultos

IEFP, I.P. - Instituto de Emprego e Formação Profissional, Instituto Público

MV - Matemática para a Vida

MV_3A - Matemática para a Vida, percurso formativo do tipo B3, unidade de formação A

MV_3B - Matemática para a Vida, percurso formativo do tipo B3, unidade de formação B

MV_3C - Matemática para a Vida, percurso formativo do tipo B3, unidade de formação C

MV_3D - Matemática para a Vida, percurso formativo do tipo B3, unidade de formação D

SNQ - Sistema Nacional de Qualificações

Introdução

O desenvolvimento desta dissertação tem como principal objetivo abordar conteúdos geométricos, nomeadamente, o estudo da circunferência e do círculo, em turmas de cursos de Educação e Formação para Adultos [EFA], Nível Básico, percurso formativo do tipo B3.

A escolha deste tópico relaciona-se com o facto dos formandos inscritos nesta modalidade de formação, por via das saídas profissionais, terem necessidade de lidar com objetos com características mensuráveis e aplicarem técnicas e formulários de cálculo na determinação de medidas. Esta dissertação, apesar de não pretender ser um manual de formação, apresenta o tema da geometria do círculo com uma abordagem teórica e prática que poderá servir de guia para os formadores da área.

A Matemática é uma área onde os conhecimentos se aprofundam através da sua aplicação, por exemplo, através da resolução de exercícios ou problemas. Nos cursos de Educação e Formação para Adultos, o papel do formador no desenvolvimento da formação e na motivação do público alvo é preponderante. Deste modo, o formador pode, e deve, utilizar a autonomia prevista nos referenciais de formação de modo a gerir os conteúdos de forma mais adequada ao grupo de formação com que está a trabalhar. Sempre que possível, a escolha das tarefas deverá ter em linha de conta a saída profissional e os interesses dos formandos.

Esta dissertação está organizada em três capítulos.

No primeiro capítulo é feita a contextualização dos cursos de Educação e formação para Adultos - Nível Básico e são identificados os objetivos específicos incluídos nos referenciais de Matemática para a Vida [MV] relacionados com a geometria do círculo, nomeadamente, objetivos presentes nas unidade de formação de curta duração [MV_3B] e [MV_3C].

No segundo capítulo desta dissertação, após uma breve perspetiva histórica sobre a circunferência e o círculo na qual é evidenciada a evolução do conceito do número irracional Pi, apresentam-se os conceitos básicos relacionados com a circunferência e círculo, tais como, raio, diâmetro, corda, arco, setor circular, ângulos, coroa circular, entre outros.

Por fim, no terceiro capítulo apresentam-se algumas propostas de atividades devidamente enquadradas e adaptadas ao público alvo, organizadas de acordo com diferentes graus de dificuldade. Para todas estas atividades é apresentada uma resolução detalhada e fundamentada.

Ao longo desta dissertação utilizou-se o programa de geometria dinâmica Geogebra Classic 5 para realização de construções geométricas.

Capítulo 1 - Cursos de educação e formação para adultos

1.1 - Enquadramento

Os cursos de Educação e Formação para Adultos [EFA] são uma modalidade de educação e formação destinada a adultos e constituem-se como o principal instrumento para a sua qualificação, visando a redução dos seus défices de qualificação bem como a melhoria dos níveis de empregabilidade e de inclusão social/profissional. Estes cursos inserem-se no quadro conceptual da educação e formação ao longo da vida.

De acordo com a Circular Normativa emitida pelo Instituto de Emprego e Formação Profissional, IP [IEFP, I.P.] (Instituto de Emprego e Formação Profissional, I.P., 2009) e Decreto-Lei n° 396/2007 (Ministério do Trabalho e da Solidariedade Social, 2007) que estabelece o regime jurídico do Sistema Nacional de Qualificações [SNQ] e define as estruturas que asseguram o seu funcionamento, os cursos EFA, assumem-se como uma modalidade de formação que promove a dupla certificação (escolar e profissional). Estes cursos são desenvolvidos com base nos referenciais de formação constantes do Catálogo Nacional de Qualificações [CNQ] e visam responder a necessidades concretas dos ativos empregados e desempregados.

A Portaria n° 230/2008, de 7 de março (Ministérios do Trabalho e da Solidariedade Social e da Educação, 2008), com as alterações introduzidas pela Portaria n.º 283/2011, de 24 de outubro (Ministérios da Economia e do Emprego e da Educação e Ciência, 2011), define o regime jurídico dos cursos EFA e das Formações Modulares.

Em Portugal, os primeiros cursos EFA surgiram em 2000/2001. Atualmente, esta modalidade de formação está amplamente difundida e são várias as entidades formadoras públicas e privadas que promovem este tipo de formação, nomeadamente, o IEFP, I.P..

Os cursos EFA - Nível Básico destinam-se a adultos com idade igual ou superior a 18 anos à data de início da formação, sem a qualificação adequada para efeitos de inserção ou progressão no mercado de trabalho e, prioritariamente, sem a conclusão do ensino básico ou do ensino secundário. Nesta modalidade existem vários percursos formativos, os quais, se organizam em função das habilitações de acesso dos candidatos. A tabela 1 apresenta um resumo relativo às condições de acesso e respetivas certificações escolares e/ou profissionais desses cursos.

EFA - Nível Básico

Percurso Formativo	Habilitações mínimas de acesso	Certificação		
		Dupla certificação	Certificação escolar	Certificação profissional
B1	Inferior ao 1.° ciclo do ensino básico	1.° ciclo do ensino básico e Nível 1 do Quadro Nacional de Qualificações	1.° ciclo do ensino básico	
B2	1.° ciclo do ensino básico	2.° ciclo do ensino básico e Nível 1 do Quadro Nacional de Qualificações	2.° ciclo do ensino básico	
B1+B2	Inferior ao 1.° ciclo do ensino básico			
B3	2.° ciclo do ensino básico	3.° ciclo do ensino básico e Nível 2 do Quadro Nacional de Qualificações	3.° ciclo do ensino básico	Nível 2 do Quadro Nacional de Qualificações
B2+B3	1.° ciclo do ensino básico			
Percurso flexível a partir de processo RVCC	Inferior ao 1.° ciclo do ensino básico			
Básico profissional	9.° ano de escolaridade			Nível 2 do Quadro Nacional de Qualificações

Tabela 1: Habilitações mínimas de acesso em função da tipologia de percurso (Instituto de Emprego e Formação Profissional, I.P., 2009)

Os cursos EFA - Nível Básico integram três componentes de formação com diferentes objetivos: Componente de Base, Componente Tecnológica e Componente de Formação Prática em Contexto de Trabalho.

A Componente de Base é uma componente com caráter transdisciplinar e transversal que visa a aquisição ou reforço de competências pessoais, sociais e profissionais, tendo em vista a (re)inserção na vida ativa e a adaptabilidade aos diferentes contextos de trabalho. Esta componente tem também o objetivo de potenciar o desenvolvimento dos cidadãos, no espaço nacional e comunitário, proporcionando as condições para o aprofundamento das capacidades de autonomia,

iniciativa, autoaprendizagem, trabalho em equipa, recolha e tratamento da informação e resolução de problemas. Todas as unidades de Matemática para a Vida estão englobadas nesta componente.
A Componente Tecnológica visa dotar os formandos de competências científicas e tecnológicas que lhes permitam o desenvolvimento de atividades práticas e de resolução de problemas inerentes ao exercício de uma determinada profissão.
Na Componente de Formação Prática em Contexto de Trabalho pretende-se consolidar as competências científicas e tecnológicas adquiridas em contexto de formação, através da realização de atividades inerentes ao exercício profissional, bem como facilitar a futura (re)inserção profissional dos formandos.
Os conteúdos de MV no Nível Básico tipo B3, estão organizados em quatro unidades de formação de curta duração, inseridas na Componente de Base, cada uma com uma duração de 50 horas. Em termos de validação, cada unidade funciona de forma independente.
A primeira unidade de formação de curta duração designa-se por [MV_3A] e pretende que os formandos adquiram conhecimentos para interpretar, organizar, analisar e comunicar informação utilizando processos e procedimentos matemáticos.
A segunda unidade é designada por MV_3B e pretende que os formandos consigam usar a Matemática para analisar e resolver problemas e situações problemáticas.
A terceira unidade é designada por MV_3C e tem como objetivo que os formandos compreendam e usem conexões matemáticas em contextos de vida.
A quarta unidade, designa-se por [MV_3D] e pretende que os formandos adquiram capacidade de raciocinar matematicamente de forma indutiva e de forma dedutiva.
No final de cada ação de formação, os formandos terão de validar todas as unidades da componente de base, da componente tecnológica e também a formação prática em contexto de trabalho, de modo a concluírem o seu percurso formativo com a obtenção da dupla certificação. Caso obtenham validação em todas as unidades do referencial de base e não obtenham validação em todas as unidades de formação da componente tecnológica, os formandos ficarão apenas com certificação de equivalência ao 9° ano do Ensino Básico.
Caso algum dos formandos não complete a totalidade das unidades da componente de base, mas complete todas as unidades da componente tecnológica ou parte delas, obterá apenas uma certificação parcial a qual não confere qualquer diploma. Contudo, serão sempre registadas as unidades de competência concluídas num instrumento designado por Passaporte Qualifica e o formando obterá um certificado de qualificações discriminando as unidades efetuadas.

Na fase final da ação de formação, os formandos que até esse momento tenham obtido aproveitamento a todas as unidades da Componente de Base e Componente Tecnológica, realizam um estágio curricular de 120 horas correspondente à Componente de Formação Prática em Contexto de Trabalho. Este estágio decorre em entidades de acolhimento com protocolos no âmbito da saída profissional, onde os formandos colocam em prática os conhecimentos adquiridos. Concluída com sucesso a Prática em Contexto de Trabalho, os formandos obtêm um certificado de qualificações e respetivo diploma no qual é atestada a conclusão do 3° Ciclo do Ensino Básico e a respetiva Certificação Profissional de Nível 2.

Em termos de saídas profissionais, a oferta é diversificada. Todos os referenciais estão regulados e publicados no site da Agência Nacional para a Qualificação e Ensino Profissional [ANQEP] e fazem parte do Catálogo Nacional de Qualificações. A título de exemplo, algumas das saídas profissionais são: Operador de Logística; Cabeleireiro; Pintor Automóvel; Operador de Jardinagem; Carpinteiro de Limpos; Pintor de Construção Civil; Reparador de Carroçarias ou Empregado de Andares.

1.2 - Unidades de formação de Matemática para a Vida

Regra geral, pelas vivências escolares anteriores, a maioria dos formandos tem um forte preconceito negativo relativamente ao estudo da Matemática. Por este motivo, precisam de um acompanhamento e reforço positivo para superarem esse preconceito. É muito importante o papel do formador relativamente a esta situação e a escolha das atividades a desenvolver assume um papel decisivo na motivação do público inscrito nestes cursos.

Em seguida apresentam-se os critérios de evidência para as unidades de MV (MV_3A, MV_3B, MV_3C e MV_3D) extraídos de um referencial de formação de um curso EFA do tipo B3 (Agência Nacional para a Qualificação e Ensino Profissional, 2020).

Na Unidade MV_3A pretende-se que os formandos adquiram conhecimentos para interpretar, organizar, analisar e comunicar informação utilizando processos e procedimentos matemáticos.

Os critérios de evidência desta unidade são:

- Sequencializar as tarefas elementares de um projeto;
- Usar relações de conversão cambial para proceder a operações financeiras habituais;
- Analisar e interpretar criticamente gráficos relativos a situações da realidade;
- Comparar conjuntos de dados utilizando: frequências absolutas reconhecendo as limitações/erros desta utilização e frequências relativas;
- Analisar e comparar distribuições estatísticas utilizando medidas de localização (moda, mediana, média aritmética);

- Analisar criticamente a validade de argumentos baseados em indicadores estatísticos;
- Tratar as informações numéricas contidas em textos relativos, nomeadamente, a temas de vida, com vista a uma interpretação mais esclarecida;
- Comunicar processos e resultados usando a Linguagem Matemática e a Língua Portuguesa.

A Unidade MV_3B - Usar a Matemática para analisar e resolver problemas e situações problemáticas tem os seguintes critérios de evidência:

- Utilizar um modelo de resolução de problemas, por exemplo, o proposto por Polya (1945): interpretar o enunciado explicitando os dados e o objetivo do problema e usar condição(ões) matemática(s) para traduzir os dados quando tal for adequado;
- Estabelecer e executar um plano de resolução do problema, utilizando tabelas, esquemas, decidindo sobre o uso de cálculo mental, de algoritmo de papel e lápis, ou de instrumento tecnológico, conforme a situação em análise, criando versões mais simples do problema dado, na procura de leis de formação, conforme o tipo de situação;
- Verificar se o plano se adequa ao problema, tomando as decisões adequadas ao resultado da verificação, nomeadamente, interpretando em contexto as soluções de equações e de inequações, decidindo sobre a razoabilidade de um resultado;
- Comunicar processos e resultados usando a Linguagem Matemática e a Língua Portuguesa;
- Resolver problemas que envolvam modelos matemáticos simples: equações do 1° e do 2° grau, inequações do 1° grau, teorema de Pitágoras, relações trigonométricas do triângulo retângulo, números racionais não inteiros e alguns números irracionais (π, $\sqrt{2}$, etc.), usando a estimativa e o cálculo mental, como meio de controlo de resultados;
- Resolver problemas que envolvam os conceitos de perímetro, área, volume, potenciação, radiciação e números expressos em notação científica;
- Resolver problemas que envolvam raciocínio proporcional: percentagens, conceitos de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa.

Na Unidade MV_3C - Compreender e usar conexões matemáticas em contextos de vida os critérios de evidência são:

- Usar criticamente as funções de uma calculadora científica;
- Reconhecer diferentes modos de representação de números e determinar números irracionais, por construção com material de desenho, justificando matematicamente este procedimento;

- Utilizar a notação científica para representar números muito grandes ou números muito próximos de zero;
- Utilizar estratégias de cálculo mental adequadas às situações em jogo e relacioná-las com as propriedades das operações;
- Interpretar numérica e graficamente relações funcionais, nomeadamente, de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa;
- Relacionar vários modelos de variação linear, polinomial, exponencial, identificar ligações entre a resolução gráfica e a resolução analítica de sistemas de equações/inequações;
- Resolver problemas de medida em desenhos à escala, escolhendo escalas para representar situações;
- Estabelecer a ligação entre conceitos matemáticos e conhecimento de procedimentos na realização de construções geométricas (quadriláteros, ou outros polígonos e lugares geométricos);
- Reconhecer o conceito de semelhança de figuras e usar as relações entre elementos de figuras com a mesma forma;
- Descrever figuras geométricas no plano e no espaço e sequencializar um projeto em tarefas elementares;
- Comunicar os resultados de trabalhos de projeto usando a Linguagem Matemática e a Língua Portuguesa.

A Unidade MV_3D - Raciocinar matematicamente de forma indutiva e de forma dedutiva tem os seguintes critérios de evidência:

- Inferir leis de formação de sequências, numéricas ou geométricas, utilizando simbologia matemática, nomeadamente, expressões designatórias;
- Revelar competências de cálculo, apresentando, nomeadamente, exemplos de situações em que um produto é menor que os fatores e de situações em que o quociente é maior que o dividendo;
- Estabelecer conjeturas a partir da observação (raciocínio indutivo) e testar conjeturas utilizando processos lógicos de pensamento;
- Usar argumentos válidos para justificar afirmações matemáticas, próprias ou não, como por exemplo, a particularização e a generalização;
- Usar modos particulares de raciocínio matemático, nomeadamente, a redução ao absurdo;

- Reconhecer as definições como critérios embora convencionais e de natureza precária, necessários a uma clara comunicação matemática, de organização das ideias e de classificação de objetos matemáticos.

Nesta dissertação, foram consideradas, para efeitos de elaboração de propostas de atividades práticas, alguns critérios de evidência presentes nas unidades MV_3B e MV_3C, nomeadamente:

- Resolver problemas que envolvam números racionais não inteiros e alguns números irracionais, como por exemplo, π e $\sqrt{2}$;

- Resolver problemas que envolvam os conceitos de perímetro, área, volume; potenciação e radiciação;

- Estabelecer a ligação entre conceitos matemáticos e conhecimento de procedimentos na realização de construções geométricas (quadriláteros, outros polígonos e lugares geométricos);

- Descrever figuras geométricas no plano e no espaço;

- Comunicar os resultados de trabalhos de projeto usando a Linguagem Matemática e a Língua Portuguesa.

Capítulo 2 - Circunferência

Neste capítulo será apresentada uma breve perspetiva sobre a importância histórica e técnica da circunferência. Serão ainda incluídos os conceitos elementares associados ao estudo da circunferência que constituirão a base teórica para o desenvolvimento do Capítulo 3 desta dissertação.

2.1 - Um pouco de história

2.1.1 - O povo Sumério

Desde o início da civilização as formas geométricas tornaram-se elementos inseparáveis das obras criadas pelo Homem. Um dos pontos mais relevantes na evolução tecnológica e logística foi a "invenção da roda", este feito, terá tido origem na civilização Suméria por volta do ano 3500 a.C.. Pensa-se que este aproveitamento das formas circulares terá sido inspirado pela utilização de troncos rolantes para movimentação de cargas. (Santiago, s.d.)

Figura 1: Uma das primeiras representações da roda, em tumbas na Mesopotâmia (reprodução) (Pragmatismo Político, s.d.)

Os Sumérios foram responsáveis pelo desenvolvimento da aritmética e de outros ramos da Matemática. Esta sociedade organizava-se em cidades e acredita-se que essa confluência de pessoas no mesmo local foi responsável por originar a introdução de moeda, em detrimento das trocas diretas de produtos. O povo Sumério deu grande importância à Matemática e à sua representação, nomeadamente, na forma escrita. De facto, a escrita Matemática é considerada como a primeira forma de escrita, através da chamada escrita cuneiforme.

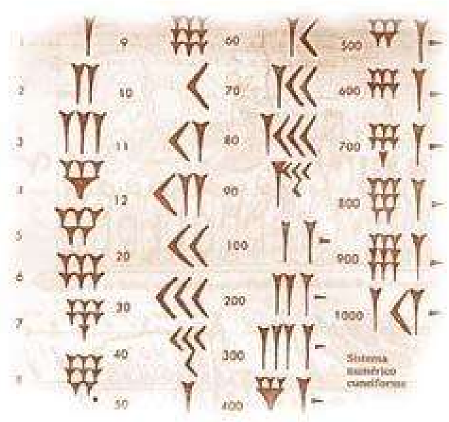


Figura 2: Sistema numérico cuneiforme (Albuquerque, 2013)

2.1.2 - O número Pi

No estudo de formas circulares o número Pi assume um papel muito importante. O número irracional Pi exprime a razão constante entre o perímetro[1] do círculo e a medida do seu diâmetro.

$$\pi = \frac{P}{d}$$

A letra grega π foi adotada para a representação do número Pi a partir da palavra grega perímetro "περίμετρος". Esta foi utilizada, provavelmente, pela primeira vez por Sir William Jones. (William Jones, 2018)

Figura 3: William Jones Matemático (1675 - 1749) (William Jones, 2018)

Um valor aproximado do número Pi chega até aos nossos dias através da Bíblia, onde figura a resolução de um problema que relaciona o perímetro de um círculo com o seu diâmetro[2].

---

[1] As definições de perímetro e diâmetro serão apresentadas em 2.2.6 e 2.2.3, respetivamente.

[2] Por vezes, por simplificação de escrita, refere-se diâmetro em vez de medida do diâmetro.

Na Bíblia cristã, no primeiro livro dos Reis, Capítulo 7, Versículo 23, diz-se que o Rei Salomão (1009 a.C. - 922 a.C.) ordenou a construção no seu palácio da floresta do Líbano de um reservatório designado por “Mar de Fundição”.

“Fez o tanque de metal fundido, redondo, medindo quatro metros e meio de diâmetro e dois metros e vinte e cinco centímetros de altura. Era preciso um fio de treze metros e meio para medir a sua circunferência.” (Livro 1 dos Reis, Capítulo 7, s.d.).

Figura 4: Representação do templo do rei Salomão (Nascimento, s.d.)

Tendo em conta os dados anteriores, calculando a razão entre o perímetro e a medida do diâmetro do rebordo do tanque descrito, resulta implicitamente um valor aproximado de π:

$$\frac{13,5}{4,5} = 3$$

Este valor, apesar de representar uma aproximação pouco precisa, evidencia que, na época, já existia uma consciência da relação entre perímetro e diâmetro de um círculo.

Arquimedes de Siracusa, grande Matemático e Filósofo Grego (287 a.C. – 212d.C.), afirmou que: “A circunferência de um círculo é igual ao triplo do seu diâmetro mais uma certa porção do diâmetro que é mais pequena do que 1/7 do diâmetro e maior do que 10/71 do próprio diâmetro” (Radice, 1985).

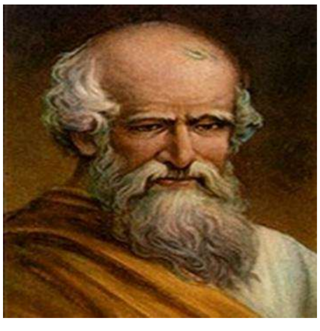


Figura 5: Representação de Arquimedes Matemático Grego (287a.C. - 212a.C.) (Arquimedes de Siracusa, 2019)

Designando por *P* o perímetro do círculo e por *d* o diâmetro da circunferência, a tradução do texto indica o seguinte enquadramento:

$$3d + \frac{10}{71}d < P < 3d + \frac{1}{7}d \Leftrightarrow \frac{223}{71}d < P < \frac{22}{7}d,$$

ou seja,

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

O valor sugerido por Arquimedes corresponde ao valor médio destes dois valores:

$$\left(\frac{223}{71} + \frac{22}{7}\right) : 2 = \frac{3123}{994} \simeq 3{,}14185$$

representando uma aproximação do número Pi com três casas decimais corretas (Radice, 1985).

2.1.3 - Curiosidades sobre o número Pi

Atualmente, existem aproximações do valor de π na ordem dos triliões de casas decimais. Em março de 2019 uma cientista de computação japonesa, Emma Haruka Iwao, determinou uma aproximação do valor do número Pi com 31,4 triliões de dígitos, a qual bateu todos os recordes existentes até então (Emma Haruka Iwao, s.d.).

Oficialmente, celebra-se a 14 de março o dia comemorativo do número Pi como forma de encorajar toda a comunidade educativa a realizar atividades com vista à promoção da Matemática (Science4you, 2019).

2.1.4 - Problema Isoperimétrico

Historicamente existe um problema relacionado com o estudo da circunferência e do círculo que despertou a atenção dos matemáticos (Desigualdade Isoperimétrica, s.d.). Trata-se do problema conhecido por problema isoperimétrico que dá origem a duas propriedades importantes do círculo:

i) O círculo é a figura plana que consegue ter a maior área para um dado perímetro;

ii) O círculo é a figura plana que tem o menor perímetro para uma dada área.

Este problema, teve origem na Grécia antiga por volta do séc. IX a.C., e relacionava-se com a chamada lenda de Dido, a qual, ficou eternizada na obra de Eneida de Virgílio (Eneida, 2010).

Segundo a lenda, o irmão de Dido, Pigmalião, Rei de Tiro (814a.C. - 803a.C.) mandou assassinar o marido de Dido por cobiçar as suas riquezas. Dido teve de fugir com alguns amigos e dissidentes levando consigo todas as riquezas do falecido marido. Quando chegou à costa do mar mediterrâneo, no norte de África, Dido resolve fixar-se e negociar a compra de terras para estabelecer uma nova cidade. Segundo a lenda, o rei indígena Jarbas, proprietário dessas terras, acedeu ao pedido e concedeu a venda de toda a terra que pudesse ficar contida no espaço limitado pela pele de um touro. O que à partida parecia um absurdo, deu origem a uma solução muito engenhosa.

Figura 6: Representação do corte em finas tiras da pele de um touro (Mathias Merian the elder, Public domain, através da wiki Wikimedia Commons).

Dido mandou cortar e emendar a pele do touro em finas tiras obtendo um longo cordel com o qual conseguiu cercar uma considerável porção de terras junto à costa marítima. A forma geométrica formada por essa região foi um semicírculo. A cidade fundada por Dido foi Cartago (Dido, s.d.).

2.2 - Alguns conceitos associados ao estudo da circunferência

O estudo da circunferência pressupõe o conhecimento do conceito de ângulo. Nesse sentido, inclui-se aqui uma secção sobre ângulos e sua caraterização quanto à amplitude.

2.2.1. Conceito de ângulo

Um ângulo define-se como sendo a região do plano compreendida entre duas semirretas com origem num ponto comum designado vértice do ângulo. Na Figura 7 o ponto O é o vértice do ângulo.

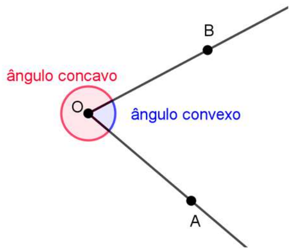


Figura 7: Ângulo concavo e ângulo convexo

As duas semirretas OA e OB delimitam duas regiões do plano e a cada uma dessas regiões associa-se um ângulo.

Neste trabalho, irá ser usado o sentido direto (sentido contrário ao movimento dos ponteiros do relógio) para referenciar ângulos. Para referir o ângulo convexo assinalado na Figura 7 escreve-se ângulo AOB ou simplesmente $\sphericalangle AOB$. Para referir o ângulo côncavo assinalado na Figura 7 iremos escrever ângulo BOA ou simplesmente $\sphericalangle BOA$.

Para representar a amplitude dos ângulos acima utilizaremos a notação $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}A$, respetivamente.

2.2.1.1 - Classificação dos ângulos quanto à sua amplitude

Os ângulos podem ser classificados consoante a sua amplitude como se indica de seguida[3].

Ângulo nulo - É um ângulo com amplitude de 0° ou, em radianos, de amplitude 0.

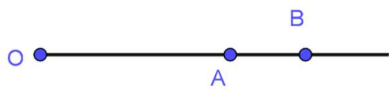


Figura 8: Ângulo nulo

Ângulo agudo - É um ângulo com amplitude entre 0° e 90°, ou, em radianos, de amplitude entre 0 e $\frac{\pi}{2}$.

---

[3] **Nota:** Existem diferentes unidades para medir amplitude de ângulos havendo correspondência entre elas. Um radiano (rad) é a amplitude de um ângulo ao centro (conforme definido na secção 2.3.1) correspondente a um arco de circunferência cujo comprimento é igual ao raio. No Sistema internacional de Unidades, SI, a unidade de medida de amplitude de ângulo é o radiano.

Como o perímetro de um círculo de raio r é $2\pi r$, um ângulo giro tem uma amplitude de 2π radianos. Para converter graus em radianos, e vice-versa, podemos usar a correspondência 360 graus $\leftrightarrow 2\pi$ radianos.

Notação: Para referir a amplitude, em graus, de um determinado ângulo iremos utilizar a abreviatura °. Por exemplo, um ângulo com amplitude de zero graus poderá ser escrito como 0°.

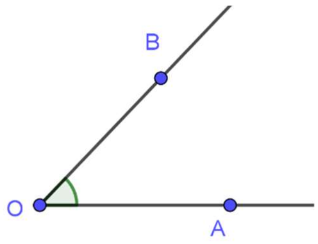


Figura 9: Ângulo agudo

Ângulo reto - É um ângulo com amplitude de 90°, ou, em radianos, de amplitude $\frac{\pi}{2}$.

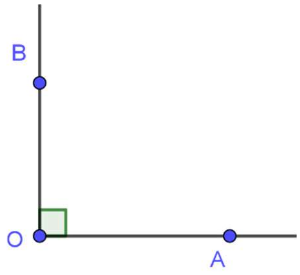


Figura 10: Ângulo reto

Ângulo obtuso - É um ângulo com amplitude entre 90° e 180°, ou, em radianos, de amplitude entre $\frac{\pi}{2}$ e π.

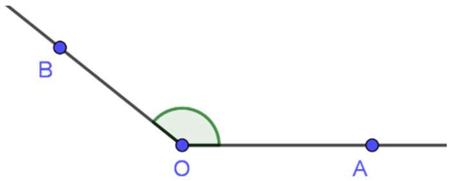


Figura 11: Ângulo obtuso

Ângulo raso - É um ângulo com amplitude de 180°, ou, em radianos, de amplitude π.

Figura 12: Ângulo raso

Ângulo giro - É um ângulo com amplitude de 360°, ou, em radianos, de amplitude 2π.

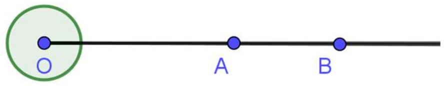


Figura 13: Ângulo giro

2.2.2 - Círculo, circunferência, centro e raio

Uma circunferência define-se como sendo o conjunto de pontos do plano equidistantes de um ponto fixo chamado centro.

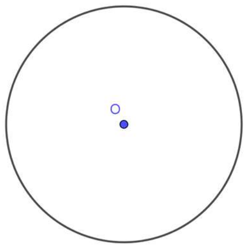


Figura 14: Circunferência de centro O

O ponto O é o centro da circunferência e a distância do centro a qualquer ponto da circunferência é o seu raio, *r*. Pode definir-se raio como a medida do comprimento do segmento de reta que une o centro da circunferência a qualquer ponto da circunferência (ver Figura 15)

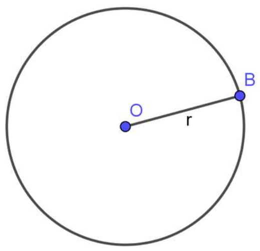


Figura 15: Circunferência de centro O e raio r

O círculo de centro O e raio *r* é a região do plano limitada pela circunferência de centro O e raio *r*, ou seja, o conjunto de pontos do plano cuja distância ao ponto O, centro, é menor ou igual a *r*. O círculo inclui a circunferência e todos os pontos interiores a ela.

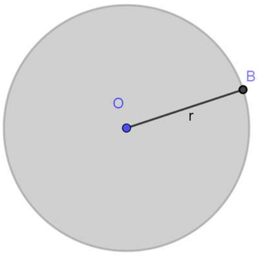


Figura 16: Círculo de centro O e raio r

Nota: Por vezes, em linguagem comum, identifica-se o segmento de reta que une o centro à circunferência pelo termo raio[4].

2.2.3 - Elementos de uma circunferência: corda e diâmetro de uma circunferência

Uma corda é um segmento de reta cujas extremidades estão ambas na circunferência. Quando a corda passa pelo centro da circunferência designa-se por diâmetro.

Deve observar-se que a palavra diâmetro pode ser usada em dois sentidos: como uma corda ou como a medida de uma corda que passa pelo centro da circunferência.

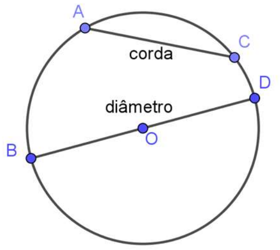


Figura 17: Corda e diâmetro de uma circunferência

Na Figura 17, estão identificadas as cordas [AC] e [BD]. A medida da corda [BD] é o dobro do raio, ou seja, a medida do diâmetro é o dobro da medida do raio.

2.2.4 - Arco maior e arco menor

Um arco de circunferência é definido como a porção da circunferência compreendida entre dois pontos da mesma. Quando os pontos que definem um arco de circunferência não são diametralmente opostos, eles definem um arco menor e um arco maior. Em termos de designação

[4] Parte do segredo das formas geométricas presentes nos jardins tem origem em conceitos matemáticos. Por exemplo, para construção de um canteiro circular o jardineiro utiliza duas estacas unidas por uma corda, fixa uma das estacas no ponto onde pretende o centro do canteiro e, esticando a corda, marca na terra com a outra estaca a circunferência pretendida. O comprimento da corda define a medida do raio da circunferência.

dos arcos, vamos fazer referência aos mesmos através do sentido direto, isto é, o sentido contrário ao movimento dos ponteiros do relógio.

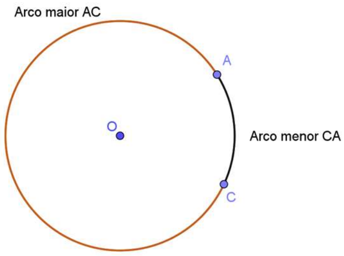


Figura 18: Arco maior e arco menor de uma circunferência

Na Figura 18 os pontos A e C pertencentes à circunferência definem um arco maior (AC) e um arco menor (CA).

2.2.5 - Coroa circular

Coroa circular é a região de um círculo compreendida entre duas circunferências com o mesmo centro (concêntricas) e raios distintos.

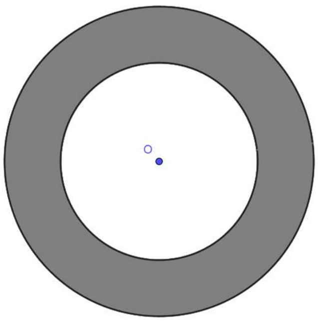


Figura 19: Coroa circular

2.2.6 - Grandezas associadas ao círculo e à circunferência

O perímetro P da circunferência[5] corresponde à medida do comprimento da linha curva que a define e é dado por:

$$P = 2 \times \pi \times r \quad (1)$$

Onde r representa o raio da circunferência.

---

[5] Nota: Por vezes, refere-se perímetro da circunferência quando se pretende referir o perímetro do círculo.

Atendendo a que o dobro do valor do raio é o diâmetro (d), esta fórmula pode ser reescrita do seguinte modo:

$$P = \pi \times d \tag{2}$$

A área de um círculo de centro O e raio r, é a medida da área da região plana limitada pela circunferência de centro O e raio r:

$$A = \pi \times r^2 \tag{3}$$

Dedução da fórmula da área do círculo

Considere-se a circunferência de centro O e raio r e um conjunto de pontos que definem um polígono regular (Figura 20), neste caso um octógono.

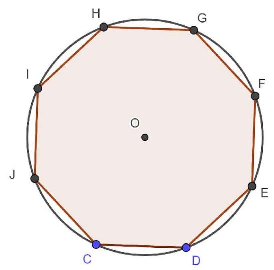


Figura 20: Polígono regular inscrito numa circunferência

O valor da área do octógono inscrito é uma aproximação por defeito da área do círculo apresentado. Podemos calcular a área do polígono através da sua decomposição em triângulos isósceles.

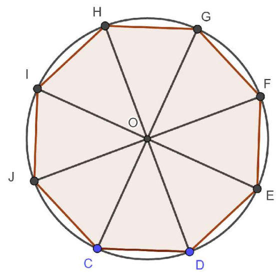


Figura 21: Octógono inscrito numa circunferência decomposto em triângulos isósceles

Seja *h* a medida da altura de cada triângulo e α a amplitude do ângulo formado pela semirreta com origem no ponto O que contém a altura do triângulo e pela semirreta com origem em O que contém o raio [OD] (Figura 22).

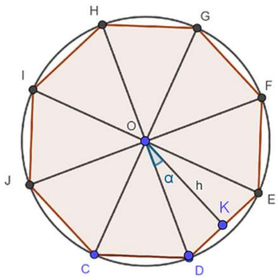


Figura 22: Altura num triângulo isósceles

O ângulo α tem amplitude de $\frac{2\pi}{16}$ radianos porque se trata de um polígono regular de 8 lados.

De seguida, iremos determinar qual a área de cada triângulo isósceles. Para tal, necessitamos determinar a medida o valor da base, $\overline{DE}$, e da altura de cada triângulo, $\overline{OK}$.

Usando a trigonometria do triângulo retângulo:

$$sin\left(\frac{2\pi}{16}\right) = \frac{\overline{DK}}{\overline{OD}} \Leftrightarrow \overline{DK} \ = \overline{OD} \times sin\left(\frac{2\pi}{16}\right)$$

A medida $\overline{DE}\ da$ base do triângulo isósceles [EOD] terá o dobro da medida do comprimento do segmento de reta [DK], assim, concluímos que:

$$\overline{DE} \ = \ 2 \times \overline{OD} \times cos\left(\frac{2\pi}{16}\right)$$

Relativamente à altura [OK] podemos afirmar que:

$$cos\left(\frac{2\pi}{16}\right) = \frac{\overline{OK}}{\overline{OD}} \Leftrightarrow \ \overline{OK} \ = \overline{OD} \times cos\left(\frac{2\pi}{16}\right)$$

Em particular, para este polígono de 8 lados, obtém-se o valor da sua área que só depende do comprimento do segmento [*OD*], que é o raio do círculo.

$$Área\ do\ polígono \ = 8 \times \frac{\left[\overline{OD} \times cos\left(\frac{2\pi}{16}\right)\right] \times \left[2 \times \overline{OD} \times sin\left(\frac{2\pi}{16}\right)\right]}{2}$$

Note-se que este raciocínio é válido independentemente do número de lados do polígono regular inscrito. Quanto mais lados tiver o polígono regular inscrito no círculo, melhor será a aproximação da área do círculo.

Generalizando este raciocínio para um polígono regular de *n* lados inscrito na circunferência, vem:

$$\alpha \ = \ \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$$

e

$$\acute{A}rea\ do\ pol\acute{\imath}gono\ = n \times \frac{2 \times \overline{OD} \times cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \overline{OD} \times sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2}$$

Simplificando esta expressão, tendo em conta a fórmula da duplicação do seno, obtém-se:

$$\acute{A}rea\ do\ pol\acute{\imath}gono\ = n \times \frac{\overline{OD}^2}{2} \times sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Aplicando agora o limite quando *n* tende para infinito da área do polígono, resulta:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n \times \frac{\overline{OD}^2}{2} \times sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right) = \frac{\overline{OD}^2}{2} \times \lim_{n\to+\infty}\left(n \times sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)$$

o que leva a uma indeterminação do tipo $\infty \times 0$. Como,

$$\lim_{n\to+\infty} n \times sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}} \times 2\pi$$

e atendendo a que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x} = 1,$$

usando uma mudança de variável adequada, conclui-se que:

$$\lim_{n\to+\infty} n \times sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 2\pi$$

e, consequentemente,

$$\frac{\overline{OD}^2}{2} \times \lim_{n\to+\infty}\left(n \times sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right) = \frac{\overline{OD}^2}{2} \times 1 \times 2\pi = \overline{OD}^2 \times \pi$$

Como $\overline{OD}^2 = r^2$, resulta a fórmula da área do círculo:

$$\acute{A}rea\ do\ c\acute{\imath}rculo\ = \pi \times r^2$$

Assim, no limite, um polígono regular com um número infinito de lados, teria área igual à área do círculo e o seu perímetro seria igual ao perímetro do círculo. A medida da altura *h*, no limite, seria igual ao valor do raio da circunferência.

Relação entre a área de dois círculos em função da relação dos seus raios

Sejam C_1 e C_2 dois círculos com raios r_1 e r_2, respetivamente, e k uma constante positiva tal que:

$$r_2 = k \times r_1$$

Nestas condições a área de C_1 é dada por:

$$Área\ C_1 = \pi \times r_1^2$$

e a área de C_2 é dada por:

$$Área\ C_2 = \pi \times r_2^2$$

Como $r_2 = k \times r_1$ vem:

$$Área\ C_2 = \pi \times (k \times r_1)^2 = k^2 \times \pi \times r_1^2$$

Assim, a razão entre a área de C_2 e C_1 é:

$$\frac{Área\ C_2}{Área\ C_1} = \frac{k^2 \times \pi \times r_1^2}{\pi \times r_1^2} = k^2$$

Pode-se então concluir que, se os raios verificaram a relação $r_2 = k \times r_1$, as áreas obedecem à relação: $Área\ C_2 = k^2 \times Área\ C_1$.

2.3 - Arcos e ângulos na circunferência

2.3.1 - Ângulo ao centro e arco de uma circunferência

Um ângulo ao centro é aquele que tem o seu vértice no centro da circunferência. A cada ângulo ao centro correspondem dois arcos de circunferência, o arco menor e o arco maior.

Um arco de circunferência é o arco compreendido entre os pontos de interseção das semirretas que definem o ângulo e a circunferência.

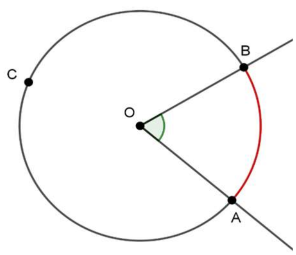


Figura 23: Ângulo ao centro e arco de uma circunferência

Na Figura 23, o ângulo $\sphericalangle AOB$ define o arco menor *AB* e o arco maior *BCA* ou simplesmente *BA*. Uma vez mais, usa-se o sentido direto para definir os arcos.

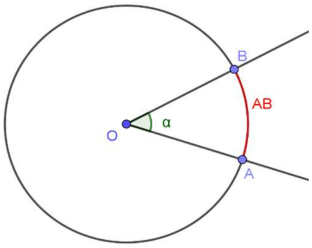


Figura 24: Ângulo ao centro e amplitude do arco correspondente

Por definição, a amplitude de um arco de circunferência é igual à amplitude do ângulo ao centro correspondente.

Notação: Para referir a amplitude do arco *AB* será utilizada a notação $\widehat{AB}$.

Se α é a amplitude do ∢*AOB*, então $\widehat{AB} = \alpha$.

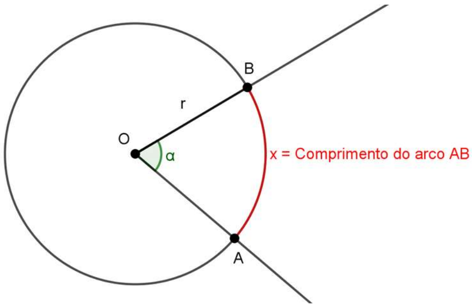


Figura 25: Ângulo ao centro e comprimento do arco correspondente

O comprimento do arco *AB* pode ser determinado a partir da amplitude do ângulo ∢*AOB* usando proporções.

Seja r o raio da circunferência, x o comprimento do arco *AB* e α a amplitude do ângulo ∢*AOB*. Então,

$$\frac{2\pi r}{360°} = \frac{x}{\alpha} \Leftrightarrow x = \frac{\alpha \times 2\pi r}{360°} \tag{4}$$

No caso de se considerar as unidades em radianos o comprimento do arco *AB* é dado por:

$$\frac{2\pi r}{2\pi} = \frac{x}{\alpha} \Leftrightarrow x = \alpha \times r \tag{5}$$

2.3.2 - Ângulo inscrito e arcos correspondentes

Um ângulo inscrito numa circunferência é um ângulo convexo com vértice num ponto da circunferência e com lados secantes à circunferência.

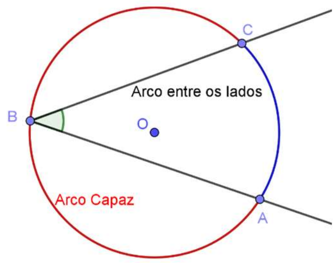


Figura 26: Arco capaz e arco entre os lados

O ângulo $\sphericalangle ABC$ é um ângulo inscrito na circunferência. O Arco *CBA* designa-se por arco capaz e o arco *AC* designa-se por arco compreendido entre os lados do ângulo inscrito.

A amplitude do ângulo inscrito numa circunferência é metade da amplitude do arco correspondente.

Para provar esta afirmação consideram-se três casos distintos.

1° caso:

O centro da circunferência pertence a um dos lados do ângulo inscrito (Figura 27).

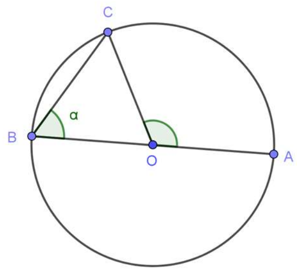


Figura 27: Ângulo inscrito numa circunferência com o centro pertencente a um dos lados do ângulo inscrito

Pretendemos demonstrar que:

$$A\hat{B}C = \frac{\widehat{AC}}{2}$$

Seja α a amplitude do $\sphericalangle ABC$ inscrito na circunferência.

Sabe-se que $A\hat{O}C = \widehat{AC}$ uma vez que $\sphericalangle AOC$ é um ângulo ao centro e o arco correspondente é o arco *AC*. Como:

- $\overline{OB} = \overline{OC}$ = raio, o triângulo [CBO] é isósceles;
- $B\hat{C}O = O\hat{B}C = \alpha$, porque num triângulo a lados iguais opõem-se ângulos iguais;

- $A\hat{O}C = B\hat{C}O + O\hat{B}C = 2\alpha$, porque num triângulo a amplitude de um ângulo externo é igual à soma das amplitudes dos dois ângulos internos não adjacentes;
- Como $\sphericalangle OBC = \sphericalangle ABC$,

resulta

$$\widehat{AC} = 2\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{\widehat{AC}}{2} \Leftrightarrow A\hat{B}C = \frac{\widehat{AC}}{2}$$

como se pretendia demonstrar.

2° caso:

O centro da circunferência pertence ao ângulo inscrito (Figura 28).

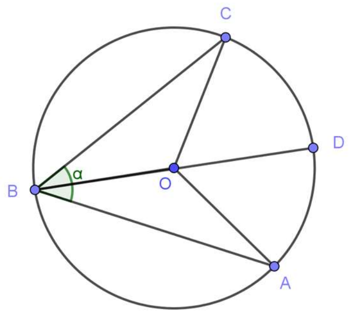


Figura 28: Ângulo inscrito numa circunferência com o centro pertencente ao ângulo inscrito

Pretende-se demonstrar que:

$$A\hat{B}C = \frac{\widehat{AC}}{2}$$

Seja D um ponto tal que a corda [BD] passa pelo centro da circunferência

Pelo que foi provado no caso anterior,

$$A\hat{B}D = \frac{\widehat{AD}}{2} \text{ e } D\hat{B}C = \frac{\widehat{DC}}{2}$$

Como $A\hat{B}C = A\hat{B}D + D\hat{B}C$, então:

$$A\hat{B}C = \frac{\widehat{AD}}{2} + \frac{\widehat{DC}}{2} \Leftrightarrow A\hat{B}C = \frac{\widehat{AC}}{2}$$

Tal como se pretendia demonstrar.

3° caso:

O centro da circunferência não pertence ao ângulo inscrito (Figura 29).

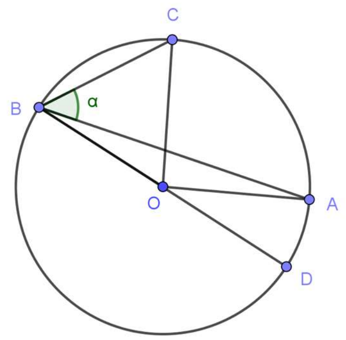


Figura 29: Ângulo inscrito numa circunferência com o centro da circunferência não pertencente ao ângulo inscrito

Pretende-se demonstrar que:

$$A\hat{B}C = \frac{\widehat{AC}}{2}$$

Pelo que foi provado no 1° caso,

$$D\hat{B}A = \frac{\widehat{DA}}{2} \text{ e } D\hat{B}C = \frac{\widehat{DC}}{2}$$

Como $A\hat{B}C = D\hat{B}C - D\hat{B}A$, resulta que:

$$A\hat{B}C = \frac{\widehat{DC}}{2} - \frac{\widehat{DA}}{2} = \frac{\widehat{AC}}{2}$$

Como se pretendia demonstrar.

A propriedade acima demonstrada permite relacionar a amplitude do ângulo ao centro com a amplitude do ângulo inscrito correspondente: a amplitude de um ângulo inscrito numa circunferência é metade da amplitude do ângulo ao centro correspondente.

Se β é a amplitude do ângulo inscrito e α a amplitude do ângulo ao centro, então:

$$\beta = \frac{\alpha}{2}$$

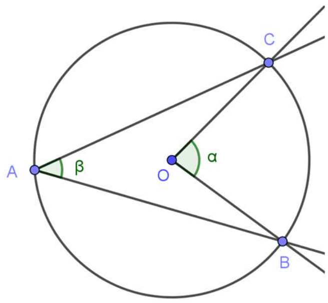


Figura 30: Ângulo ao centro numa circunferência e ângulo inscrito correspondente

2.3.3 - Setor circular

Um setor circular é definido como sendo a região de um círculo limitada por um arco e pelos dois raios que intersetam os seus extremos.

Geralmente, um arco de circunferência define dois setores circulares. Na Figura 31 representa-se o setor circular correspondente ao arco maior *BA* e o setor circular correspondente ao arco menor *AB*. Uma vez mais, no que se segue utiliza-se o sentido direto para referenciar os setores circulares.

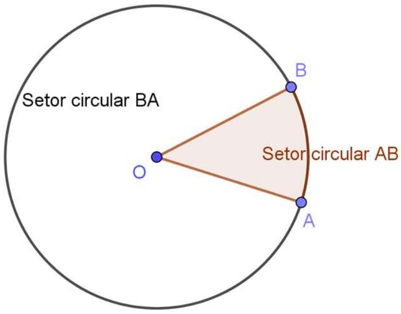


Figura 31: Setores circulares de um círculo

O setor circular identificado na Figura 31 tem uma área diretamente proporcional à área do círculo em função da amplitude do arco *AB*, de acordo com a seguinte proporção:

$$\frac{A_{S.Circ\ AB}}{Área\ do\ círculo} = \frac{\widehat{AB}}{360°} \tag{6}$$

Desta relação de proporcionalidade direta resulta que podemos determinar a área do setor circular correspondente ao arco AB, recorrendo à seguinte fórmula:

$$A_{S.Circ\ AB} = \frac{\widehat{AB}}{360°} \times Área\ do\ círculo \tag{7}$$

ou, em radianos:

$$A_{S.Circ\ AB} = \frac{\widehat{AB}}{2\pi} \times Área\ do\ círculo \tag{8}$$

2.4 - Movimento de rotação e movimento retilíneo uniforme

No quotidiano as formas circulares são utilizadas em diversos contextos, nomeadamente, em sistemas dinâmicos destinados a movimentar objetos ou pessoas. Neste sentido, as formas circulares assumem um papel importante na generalidade dos sistemas que envolvem movimento, por exemplo, nas componentes mecânicas de veículos motorizados e não motorizados, nas gruas de construção, nas roldanas, nos tapetes e escadas rolantes, entre muitos outros. Neste ponto desta dissertação, será feita uma breve abordagem à relação entre movimento de rotação de formas circulares e o movimento retilíneo correspondente. Com esta relação poderemos, por exemplo, determinar a velocidade de um automóvel em função do número de rotações por unidade de tempo que as suas rodas efetuam e vice-versa.

Importa salientar que na disciplina de Física estas questões são amplamente aprofundadas, mas tal não é o objetivo desta dissertação. Por simplificação, considera-se apenas o chamado movimento retilíneo uniforme.

Este tipo de movimento carateriza-se por ser um movimento com velocidade constante ao longo do tempo onde não são considerados os períodos transitórios de aceleração ou desaceleração. A velocidade média, ou, neste contexto, simplesmente velocidade, é uma grandeza que resulta do quociente entre espaço percorrido e tempo:

$$v = \frac{E}{t} \tag{9}$$

onde E – representa espaço percorrido e t- representa tempo[6].

Para efeitos de explicação da relação entre movimento de rotação e movimento retilíneo uniforme, considere-se que uma determinada forma circular, representada pela circunferência de centro C e

[6] No Sistema Internacional de unidades a unidade principal de medida de grandeza de comprimento é o metro (m), enquanto que a unidade principal de medida de grandeza de tempo é o segundo (s). As abreviaturas dos múltiplos e submúltiplos da unidade principal de medida de comprimento metro (**m**) são: km hm dam **m** dm cm mm. Por vezes, poderá ser necessário referir o tempo em horas ou minutos segundo a regra: 1 hora (h) = 60 minutos (min) = 3600 segundos (**s**) e 1 minuto (min) = 60 segundos (**s**).

raio r, se encontra em rotação constante em torno do seu centro realizando *n* rotações por segundo no sentido indicado (Figura 32):

Figura 32: Relação entre movimento de rotação e movimento retilíneo uniforme

Obviamente, que, por cada rotação completa realizada, o ponto C desloca-se no sentido da esquerda para a direita uma distância igual à medida do comprimento do perímetro do círculo. Portanto, o espaço percorrido pelo ponto C por cada rotação completa será $2\pi\mathrm{r}$. Note-se também que na figura está assinalado o ponto P1, o qual, corresponderá à posição do ponto P, pertencente à circunferência, no final de uma rotação completa.

Resta agora saber qual será a velocidade com que o ponto C se desloca durante este movimento retilíneo uniforme. Se a forma circular realizar n rotações por segundo (*rps*), o ponto C estará a sofrer um deslocamento retilíneo uniforme a uma velocidade de $2\pi r \times n$ metros por segundo, ou seja:

$$v_C = 2\pi r \times n \quad [m/s] \tag{10}$$

Capítulo 3 - Atividades e Fichas de trabalho

3.1 - Notas prévias

Neste capítulo, serão apresentadas sugestões de atividades e fichas de trabalho com o objetivo de poderem vir a servir de material de apoio para formadores e formandos nas sessões de MV referentes ao estudo da circunferência e do círculo.

Será importante que os formandos compreendam as caraterísticas mensuráveis dos objetos relacionados com a circunferência e apliquem técnicas e fórmulas adequadas na determinação de medidas desconhecidas. Pretendeu-se, acima de tudo, proceder à criação e compilação de atividades e fichas de trabalho que desafiassem os formandos a resolverem problemas reais em contextos variados.

Todas as propostas apresentadas neste capítulo enquadram-se nos critérios de evidência referidos no Capítulo 1 desta dissertação. Caberá aos formadores da área desenvolver com os vários grupos de trabalho os conteúdos teóricos subjacentes às atividades e fichas de trabalho presentes neste capítulo, no entanto, sugere-se que os formandos sejam orientados na elaboração de um resumo/formulário que possa servir de apoio.

Neste capítulo serão apresentados os enunciados das atividades/propostas práticas, os respetivos objetivos e a análise detalhada da sua resolução. No final desta dissertação, para que possam ser reproduzidos e distribuídos pelos diversos grupos de trabalho, figuram todas as atividades e fichas de trabalho em formato destacado.

Em termos da aplicação das atividades e fichas de trabalho apresentadas neste capítulo, caberá ao formador adequar da melhor forma a sua sequência, tendo em conta as especificidades do grupo de formandos e também as questões logísticas e meios disponíveis. Como sugestão, indica-se que os formandos realizem as atividades práticas 1 e 2 intercaladas com as propostas das fichas de trabalho 1 e 2 e façam posteriormente os exercícios complementares que constam na ficha de trabalho 3.

3.2 - Atividade 1 - À descoberta do número Pi

Objetivos da atividade:

- Determinar experimentalmente um valor aproximado do número irracional Pi;
- Em contextos de vida resolver problemas que envolvam números racionais e números irracionais;
- Comunicar os resultados de trabalhos de projeto usando a Linguagem Matemática e a Língua Portuguesa.

Pré-requisitos:

Previamente à realização desta atividade deverão ser definidos os conceitos de perímetro, raio, diâmetro e corda de uma circunferência.

Material necessário:

- Fio de pesca;
- Fita métrica;
- Calculadora.

Avaliação:

- Empenho e participação;
- Aferição de medidas e preenchimento da tabela;
- Tomada de conclusões e comunicação dos resultados obtidos.

Desenvolvimento:

Nesta atividade o formador deverá começar por definir grupos de trabalho com 2 ou 3 elementos. Sempre que possível, os vários grupos de trabalho deverão ser homogéneos entre si, de modo a que se promova a aprendizagem entre pares. Os formandos deverão ser informados que esta atividade implica a participação e empenho de todos os elementos do grupo.

Será distribuída aos formandos a Ficha de atividade 1 (presente em apêndice a esta dissertação).

Os formandos irão procurar 10 objetos circulares, de tamanhos diferentes, dentro ou fora da sala (análogos aos da Figura 33).

Figura 33: Medição do perímetro e diâmetro - Caso real

Irão utilizar o fio de pesca para, em grupo, conseguirem ajustá-lo em torno do objeto em causa. Deverão ter o cuidado de fazer esse ajuste adequadamente, pois disso depende o sucesso desta atividade. Posteriormente, irão esticar o fio de pesca sobre a fita métrica e registar o valor do perímetro do objeto na tabela.

Utilizando a fita métrica irão medir diretamente o diâmetro do objeto, deverão ter o cuidado de tomar a medição do diâmetro e não de uma corda. O formador deverá alertar para o facto de todas as medições terem sempre um erro associado, no entanto, todas deverão ser realizadas com o máximo rigor, para evitar erros grosseiros.

Após estas medições, deverão registar na tabela os valores recolhidos.

No final do registo das medições de vários objetos, deverão voltar à sala de formação e determinar com a calculadora o quociente $\frac{P}{d}$ relativo a cada objeto identificado.

Deverão constatar que estes quocientes são uma aproximação do valor de π . Poderão ainda fazer a média aritmética destes valores e comparar com o que seria esperado.

Como complemento desta atividade, o formador poderá sugerir uma pesquisa na internet sobre o número Pi e a realização de um trabalho/apresentação sobre o decorrer desta atividade.

3.3 - Atividade 2 - Descobrir a área de um círculo usando quadrados

Objetivos da atividade:

- Determinar experimentalmente um valor aproximado da área de uma tampa de uma caixa de visita;
- Compreensão de aproximação por defeito e por excesso;
- Em contextos de vida resolver problemas que envolvam números racionais e números irracionais;
- Comunicar os resultados de trabalhos de projeto usando a Linguagem Matemática e a Língua Portuguesa.

Pré-requisitos:

Previamente à realização desta atividade deverão ser definidos os conceitos de área de um quadrado, área de um círculo e raio.

Material necessário:

- Fita métrica;
- Calculadora.

Avaliação:

- Empenho e participação;
- Aferição de medidas e realização de cálculos;
- Tomada de conclusões e comunicação dos resultados obtidos.

Desenvolvimento:

Nesta atividade o formador deverá começar por definir grupos de trabalho com 2 ou 3 elementos. Sempre que possível, os vários grupos de trabalho deverão ser homogéneos entre si, de modo a que se promova a aprendizagem entre pares. Os formandos deverão ser informados que esta atividade implica a participação e empenho de todos os elementos do grupo.

Será distribuída aos formandos a Ficha de atividade 2 (presente em apêndice a esta dissertação).

Os formandos irão começar por procurar a tampa de uma caixa de visita, redonda, idêntica à da Figura 34 (no seu interior deverão figurar quadrados):

Figura 34: Tampa de uma caixa de visita

Será importante que os formandos consigam imaginar quantos quadrados completos existiriam na zona central da tampa da Figura 34 onde se lê "ÁGUAS PLUVIAIS" juntamente com os que caberiam na zona onde existem orifícios.

No início desta atividade, será pedido que se determine a área de um dos pequenos quadrados da tampa, pelo que será necessário recordar a fórmula de cálculo da área do quadrado.

Posteriormente, o formador deverá chamar a atenção para o facto de existirem alguns quadrados que não se encontram completos, nomeadamente, aqueles que se encontram posicionados perto do rebordo interior da tampa. Ao questionar os formandos sobre o número de quadrados completos existente na face da tampa, eles irão indicar um número de quadrados cuja área total será necessariamente inferior à área da tampa.

Por outro lado, caso se contabilizem como quadrados completos todos aqueles que não o são, os formandos irão indicar um número de quadrados cuja área total será superior à área da tampa.

No guião desta atividade estão criados os espaços para que se completem todos os valores referidos e também o valor do raio da tampa.

Os formandos serão levados a concluir que a área da tampa da caixa de visita estará enquadrada entre a área total dos pequenos quadrados, quando estes se contabilizam por defeito, e a área total desses quadrados, quando estes se contabilizam por excesso.

Finalmente, irão calcular a média aritmética desses dois valores e comparar com o resultado obtido, através da utilização da fórmula da área do círculo (3).

O formador deverá realçar que, quanto menor fosse o lado dos quadrados na face da tampa, melhor seria a aproximação obtida.

Como complemento desta atividade poderá ser sugerida uma pesquisa sobre o tema da área do círculo e a origem da fórmula de cálculo.

3.4 - Atividade 3 - Comparação de áreas de figuras planas com o mesmo perímetro

Objetivos da atividade:

- Comparar experimentalmente a área de um quadrado, um retângulo, um triângulo e um círculo, com igual perímetro;
- Em contextos de vida resolver problemas que envolvam números racionais e números irracionais;
- Comunicar os resultados de trabalhos de projeto usando a Linguagem Matemática e a Língua Portuguesa.

Pré-requisitos:

Previamente à realização desta atividade deverão ser definidos os conceitos de perímetro e área de figuras planas (quadrado, retângulo, triângulo e círculo).

Material necessário:

- Fio de lã (aproximadamente 1m);
- Fita métrica;
- Calculadora.

Avaliação:

- Empenho e participação;
- Aferição de medidas e realização de cálculos;
- Tomada de conclusões e comunicação dos resultados obtidos.

Desenvolvimento:

Nesta atividade o formador deverá começar por definir grupos de trabalho com 2 ou 3 elementos. Sempre que possível, os vários grupos de trabalho deverão ser homogéneos entre si, de modo a que se promova a aprendizagem entre pares. Os formandos deverão ser informados que esta atividade implica a participação e empenho de todos os elementos do grupo.

Será distribuída aos formandos a Ficha de atividade 3 (presente em apêndice a esta dissertação).

Os formandos serão desafiados a utilizarem um fio de lã para representarem algumas figuras conhecidas. O formador deverá começar por indicar que os grupos de trabalho deverão ter o cuidado de utilizar o comprimento total do fio na representação das várias figuras.

Os formandos deverão fixar na secretária de trabalho as várias figuras e proceder à medição das grandezas necessárias para o cálculo da área, no final, irão comparar os resultados obtidos e tentar tomar conclusões.

Nota: Caso os formandos não consigam concluir experimentalmente, com total certeza, que para um dado perímetro fixo (comprimento do fio) o círculo é, de todas as figuras construídas, aquela que apresenta maior área, o formador poderá responder a esta questão recorrendo-se dos formulários e fazendo uma comparação analítica das várias situações que possam surgir.

A título de exemplo, vamos comparar a área do quadrado com a área do círculo, para um mesmo perímetro.

Supondo que se procede à utilização de um fio com comprimento $100\ cm$, então, cada lado do quadrado medirá 25 cm, pelo que a área desse quadrado será:

$$A = 25 \times 25 \ = \ 625\ cm^2$$

Em relação ao círculo, vamos começar por descobrir o seu raio através da fórmula do perímetro do círculo (1). Se o perímetro mede $100\ cm$, então:

$$100 \ = \ 2 \times \pi \times r \Leftrightarrow r = \frac{100}{2\pi}$$

Aplicando a fórmula da área do círculo (3) resultará que:

$$A \ = \ \pi \times r^2 \ \Leftrightarrow A = \pi \times \left(\frac{100}{2\pi}\right)^2 \Leftrightarrow A = \frac{10000}{4\pi} \Leftrightarrow A \simeq 796\ cm^2$$

O que permitirá concluir o desejado, para este caso particular.

O formador poderá ainda generalizar esta dedução utilizando uma variável para representar o comprimento do fio, isto é, representando por P o comprimento do fio, nestas condições, o raio do círculo será dado por:

$$r = \frac{P}{2\pi}$$

A área do deste círculo será:

$$A \ = \ \pi \times r^2 \ \Leftrightarrow A = \pi \times \left(\frac{P}{2\pi}\right)^2 \Leftrightarrow A = \frac{P^2}{4\pi}$$

Em relação à área de um quadrado com perímetro P, ter-se-á a expressão:

$$\left(\frac{P}{4}\right)^2 = \frac{P^2}{16}$$

Comparando os dois resultados obtidos, os formandos poderão concluir que a área do círculo é de facto superior à área do quadrado quando as duas figuras têm o mesmo perímetro, uma vez que:

$$\frac{P^2}{4\pi} > \frac{P^2}{16}$$

3.5 - Ficha de trabalho 1 - Aplicação de conceitos geométricos elementares

Objetivos desta ficha de trabalho:

- Em contextos de vida resolver problemas que envolvam os conceitos de perímetro, área, volume, potenciação e radiciação;
- Em contextos de vida resolver problemas que envolvam números racionais e números irracionais;
- Estabelecer a ligação entre conceitos matemáticos e conhecimento de procedimentos na realização de construções geométricas (quadriláteros, outros polígonos e lugares geométricos);
- Descrever figuras geométricas no plano e no espaço;
- Comunicar os resultados de trabalhos de projeto usando a Linguagem Matemática e a Língua Portuguesa.

Pré-requisitos:

Previamente à realização desta atividade deverão ser definidos os conceitos de perímetro e área de figuras planas (quadrado, retângulo, triângulo e círculo).

Material necessário:

- Régua;
- Compasso;
- Transferidor;
- Calculadora.

Avaliação:

- Empenho e participação;
- Realização de construções geométricas;
- Desenvolvimento de raciocínio geométrico e dedutivo;
- Tomada de conclusões e comunicação dos resultados obtidos.

Desenvolvimento – Resolução dos exercícios propostos na ficha de trabalho 1:

Esta ficha de trabalho está estruturada com o objetivo de abordar conceitos referentes à circunferência, ao círculo e a outras figuras planas, no que diz respeito ao perímetro e área. De seguida, serão resolvidos os exercícios propostos e comentados os resultados.

Nota: Na ficha estará indicado para nos cálculos se considerar Pi $\simeq$ 3,14.

Exercício 1

Com este exercício, pretende-se que os formandos relembrem algumas formas geométricas e formalizem o modo como estas formas deverão ser referidas em contexto matemático.

Enunciado: Identifique as figuras representadas em a), b), c) e d).

a)

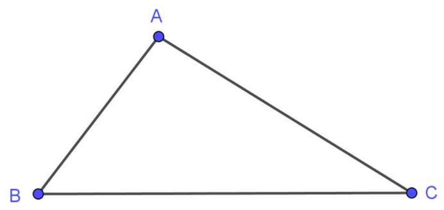


Figura 35: Exercício 1a)

Neste caso, os formandos deverão responder que se trata de um triângulo com vértices nos pontos A, B e C. O formador deverá indicar que, matematicamente, este triângulo se deverá representar por triângulo [ABC], ou simplesmente Δ[ABC].

b)

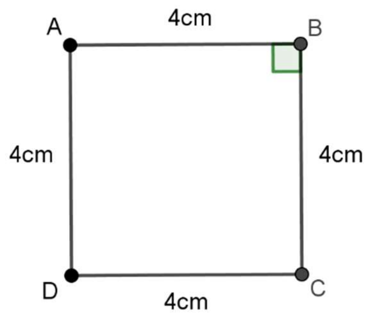


Figura 36: Exercício 1b)

A Figura 36 deverá ser descrita como sendo um quadrado com vértices nos pontos A, B, C e D e ser identificada como quadrado [ABCD]

c)

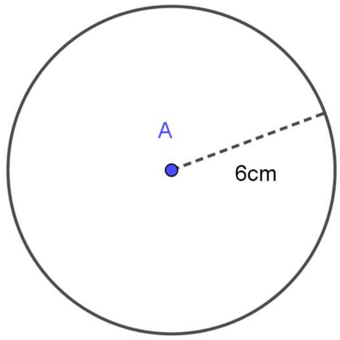


Figura 37: Exercício 1c)

Neste caso, os formandos deverão identificar que a Figura 37 é uma circunferência de centro A e raio 6 cm.

d)

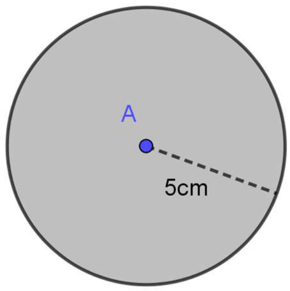


Figura 38: Exercício 1d)

Nesta alínea, os formandos deverão identificar que se trata de um círculo com centro no ponto A e raio 5 cm. O formador deverá alertar para as diferenças entre circunferência e círculo, apresentando as devidas definições.

Exercício 2

Com este exercício, pretende-se que os formandos consigam manusear instrumentos de desenho geométrico, nomeadamente, régua e compasso, de modo a desenharem circunferências e círculos.

Enunciado: Represente numa folha do seu caderno as seguintes figuras**:**

a) Uma circunferência com centro no ponto O e raio 3 cm.

Neste exercício o formador deverá indicar aos formandos como utilizar corretamente o compasso (será necessário confirmar que os compassos estão sem folgas e devidamente funcionais).

Os formandos deverão começar por assinalar o centro da circunferência, depois, deverão proceder a uma abertura do compasso de 3 cm fazendo esse ajuste recorrendo a uma régua graduada em centímetros. Posteriormente, deverão fixar a agulha do compasso designada por “ponta seca” no ponto O e, com um movimento leve, proceder ao traçado da linha que define a circunferência. No final, deverão obter uma figura parecida com a Figura 39:

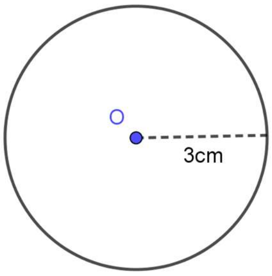


Figura 39: Exercício 2a)

b) Um círculo com centro no ponto C e raio 4,5 cm.

Nesta alínea, os formandos deverão repetir o procedimento usado na alínea anterior, começando por assinalar o ponto C e traçando a circunferência de centro em C e raio 4,5 cm.

No final, deverão sombrear toda a zona limitada pela circunferência, uma vez que o círculo inclui a circunferência e toda a zona limitada por esta. Deverá ficar representada uma figura idêntica à Figura 40:

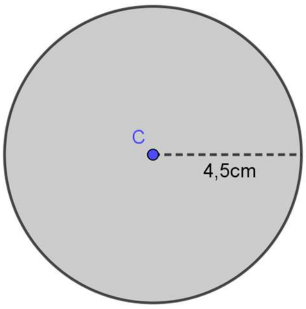


Figura 40: Exercício 2b)

Uma vez mais, será pertinente que o formador evidencie as diferenças entre circunferência e círculo.

Exercício 3

Com este exercício, pretende-se que os formandos utilizem corretamente as fórmulas de cálculo associadas ao perímetro do círculo, utilizando o raio e a medida do diâmetro.

Enunciado: Calcule o perímetro das circunferências:

a)

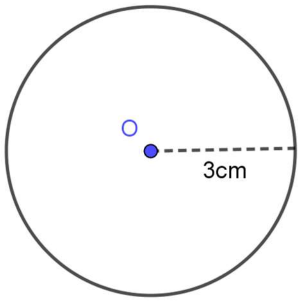


Figura 41: Exercício 3a)

Para determinar o perímetro, os formandos poderão aplicar a fórmula correspondente (1). Substituindo o valor de r por 3, resultará que:

$$P = 2 \times \pi \times 3 \simeq 18{,}84\ cm$$

b)

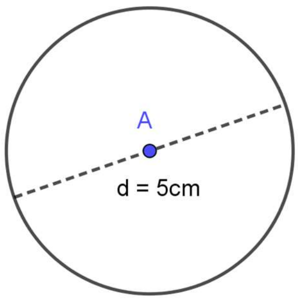


Figura 42: Exercício 3b)

Neste caso, está indicado que a medida do diâmetro é $5\ cm$, pelo que os formandos poderão utilizar diretamente a fórmula de cálculo do perímetro através do diâmetro (2) :

Fazendo a substituição, obterão:

$$P = \pi \times 5 \simeq 15{,}7\ cm$$

Exercício 4

Com este exercício, pretende-se que os formandos calculem o perímetro de figuras geométricas que contenham secções circulares e secções retas. Deverão saber adaptar a diferentes situações os formulários de cálculo adequados.

Enunciado: Determine o perímetro das figuras:

a) Sabendo que $\overline{CD} = 2\ cm$ e que C e D são os centros das duas semicircunferências

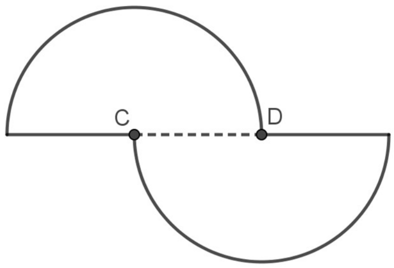


Figura 43: Exercício 4a)

Os formandos deverão observar que a figura é formada por duas semicircunferências de iguais dimensões e dois segmentos de reta com medida de comprimento de $2\ cm$.

Calculando o perímetro de uma circunferência completa, obterão:

$$P = 2 \times \pi \times 2 \simeq 12{,}56\ cm$$

Para obterem o perímetro da figura terão que adicionar ao valor determinado $4\ cm$, referentes à medida dos dois segmentos de reta horizontais. O perímetro total da figura será $16{,}56\ cm.$

Nota: O formador deverá sensibilizar os formandos para a importância destes observarem com cuidado as figuras antes de iniciarem os cálculos, pois, esta observação poderá traduzir uma simplificação do exercício.

b) Sabendo que $\overline{AB} = 8\ cm$ é a medida do lado do quadrado representado na figura

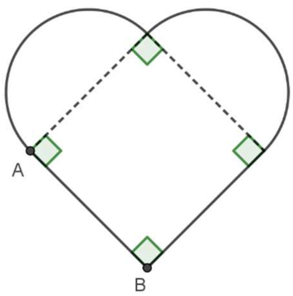


Figura 44: Exercício 4b)

Uma vez mais, será importante que os formandos observem a Figura 44 e tentem simplificar os cálculos. Deverão reparar que a figura é composta por duas semicircunferências, cada uma com medida de diâmetro $8\ cm$, e um quadrado de lado $8\ cm$, do qual só dois lados fazem parte da figura. Começando pelo cálculo do perímetro das duas semicircunferências, usando diretamente a fórmula (1), virá:

$$P = \pi \times 8 \simeq 25{,}12\ cm$$

Ao valor obtido, os formandos terão de adicionar $16\ cm$ referentes aos dois lados do quadrado. O perímetro total da figura será $41{,}12\ cm$.

Exercício 5

Com este exercício pretende-se que os formandos utilizem corretamente a fórmula de cálculo da área do círculo (3), através da substituição do raio.

Enunciado: Calcule a área dos círculos:

a)

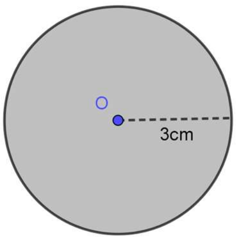


Figura 45: Exercício 5a)

Os formandos deverão recorrer à fórmula da área do círculo substituindo adequadamente o valor do raio[7]:

$$A = \pi \times 3^2 = \pi \times 9 \simeq 28{,}26\ cm^2$$

[7] **Nota:** O formador poderá aproveitar para relembrar algumas propriedades das potências de expoente natural.

b)

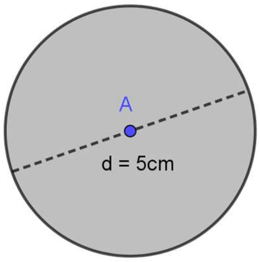


Figura 46: Exercício 5b)

O formador poderá alertar que na Figura 46 está assinalada a medida do diâmetro do círculo e não o raio. Como o valor a concretizar na fórmula da área do círculo é o raio, os formandos terão de previamente dividir o valor do diâmetro por 2:

$$r = \frac{5}{2} = 2{,}5\ cm$$

Aplicando a fórmula de cálculo da área do círculo, obterão:

$$A = \pi \times 2{,}5^2 = \pi \times 6{,}25 \simeq 19{,}63\ cm^2$$

Exercício 6

Com este exercício, pretende-se que os formandos calculem a área de figuras planas através da sua decomposição em figuras elementares e utilização dos formulários de cálculo adequados.

Enunciado: Calcule a área das figuras:

a)

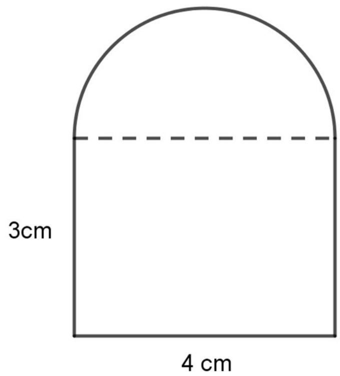


Figura 47: Exercício 6a)

Nesta primeira alínea, os formandos deverão notar que a área da Figura 47 se pode decompor na soma da área de um retângulo e da área de um semicírculo de raio 2 cm. Assim:

$$\acute{A}rea\ da\ figura = 3 \times 4 + \frac{\pi \times 2^2}{2} \simeq 18{,}28\ cm^2$$

b)

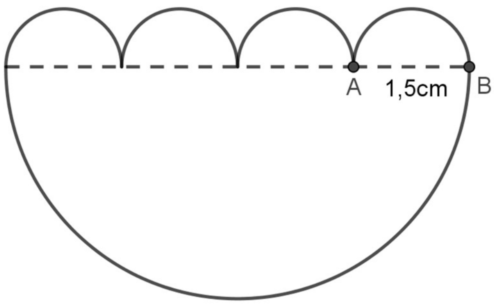


Figura 48: Exercício 6b)

Observando a Figura 48, os formandos deverão ser capazes de concluir que a mesma é composta por um semicírculo de raio 3 cm e quatro semicírculos com raio 0,75 cm.
Aplicando o formulário de cálculo da área do círculo (3), obter-se-á:

$$\acute{A}rea\ da\ figura = \frac{\pi \times 3^2}{2} + 4 \times \frac{\pi \times 0{,}75^2}{2} \simeq 17{,}66\ cm^2$$

Claro que haveria outras hipóteses de resolução deste exercício, nomeadamente, considerar a área dos quatro semicírculos de raio 0,75 cm, como sendo a área de dois círculos de raio 0,75 cm. Caberá ao formador acompanhar as diferentes respostas dos formandos.

Exercício 7

Com este exercício, pretende-se que os formandos apliquem os conhecimentos adquiridos no cálculo de perímetros e área e desenvolvam raciocínio geométrico, através da dedução de medidas desconhecidas.

Enunciado: Observe o esquema relativo à planta de um jardim:

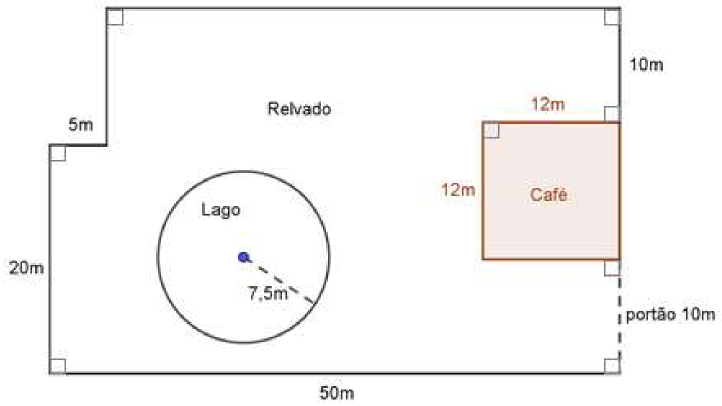


Figura 49: Exercício 7

Determine:

a) A área do Café**.**

Os formandos deverão identificar que a figura representada pelo café é um quadrado com $12\ m$ de lado. Assim, a área pretendida será:

$$A\ =\ 12^2 = 144\ m^2$$

b) A área do Lago**.**

Neste caso ter-se-á de usar a fórmula da área do círculo (3), fazendo $r = 7{,}5\ m$.

$$A\ =\ \pi \times 7{,}5^2 \simeq 176{,}63\ m^2$$

c) O perímetro exterior de todo o recinto.

Nesta alínea, os formandos deverão começar por deduzir as medidas que não estão identificadas na figura, observando o desenho e realizando alguns cálculos simples.

Para determinar $\overline{AB}$ deverão reparar que esse lado tem um comprimento $5\ m$ inferior ao lado DC, então:

$$\overline{AB}\ =\ 50 - 5\ =\ 45\ m$$

Para determinar $\overline{FA}$ os formandos deverão reparar que:

$$\overline{FA}\ =\ \overline{CB}\ -\ \overline{DE} = 32 - 20\ =\ 12\ m$$

O formador deverá reforçar com os formandos estas deduções para que o exercício fique bem compreendido. Finalmente, adicionando a medida de todos os lados do recinto virá:

Perímetro do recinto = $50 + 20 + 5 + 12 + 45 + 32 = 164\ m.$

d) O comprimento de uma vedação a colocar em torno do lago.

Para determinar o comprimento da vedação os formandos terão de determinar o perímetro do lago recorrendo-se da fórmula de cálculo (1):

$$P = 2 \times \pi \times 7{,}5 \simeq 47{,}1\ m$$

e) A área da zona com relva.

Nesta alínea, existem várias alternativas de cálculo, mas o formador deverá incentivar os formandos a escolherem a mais simples. Como sugestão, poderão determinar a área total do retângulo com dimensões de $50\ m$ por $32\ m$ e subtrair a este valor a área do café, do lago e do retângulo que não faz parte do jardim, correspondente ao canto superior esquerdo da figura (dimensões de $5\ m$ por $12\ m$). Deste modo, a área da zona relvada será:

$$\text{Área da zona com relva} = 50 \times 32 - 144 - 176{,}63 - 5 \times 12 = 1219{,}37\ m^2$$

Nota: Caso os formandos estejam a utilizar máquina de calcular básica, o formador poderá aproveitar para alertar sobre as prioridades das operações aritméticas.

Exercício 8

Este exercício, pretende abordar a relação entre o perímetro e raio de uma circunferência, relacionando estas grandezas com o cálculo da área do círculo.

Enunciado: Sabendo que a linha vermelha tem um comprimento de 12,56 m e que todas as semicircunferências têm o mesmo raio, calcule a área da figura:

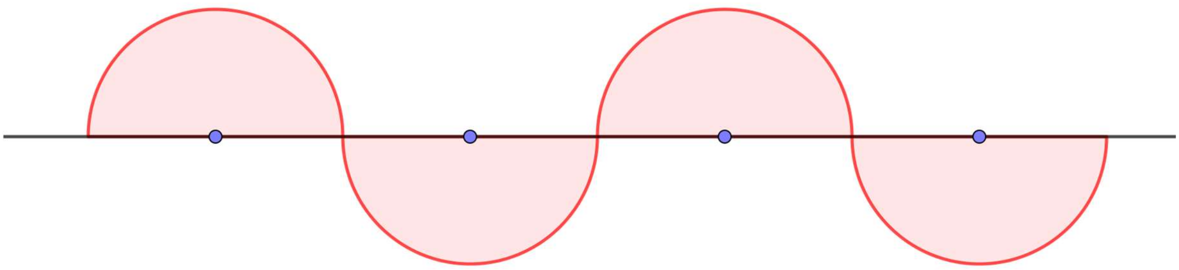


Figura 50: Exercício 8

Neste exercício, os formandos deverão notar que a linha vermelha terá um perímetro igual ao de quatro semicircunferências iguais, ou seja, igual ao do perímetro de duas circunferências completas. Assim, representando por P o perímetro de duas circunferências ter-se-á que:

$$2 \times P = 12{,}56 \Leftrightarrow P = 6{,}28\ cm$$

De seguida, os formandos poderão determinar o raio da circunferência, a partir do valor do perímetro, resolvendo a equação:

$$2 \times \pi \times r \ = \ 6{,}28 \Leftrightarrow r = \frac{6{,}28}{2\pi} \Leftrightarrow r \simeq 1 \ cm$$

Estarão agora em condições de determinar a área pedida, bastando apenas notar que essa área é a de dois círculos com $r \simeq 1 \ cm$, portanto:

Área da figura = $2 \times \pi \times 1^2 = 6{,}28 \ cm^2$

Exercício 9

Neste exercício pretende-se que os formandos apliquem os conhecimentos sobre o estudo da circunferência a um caso com imagem real. O formador deverá alertar que, nestes casos, haverá sempre uma imprecisão inerente à própria figura, precisamente, por se tratar de um exercício com imagem real.

Enunciado: O emblema de uma conhecida marca de automóveis está representado em baixo. Sabe-se que: $\overline{AB} \ = 13 \ cm$ e $\overline{CD} = \ 1{,}2 \ cm$, determine a medida do comprimento do diâmetro e o perímetro de cada uma das circunferências.

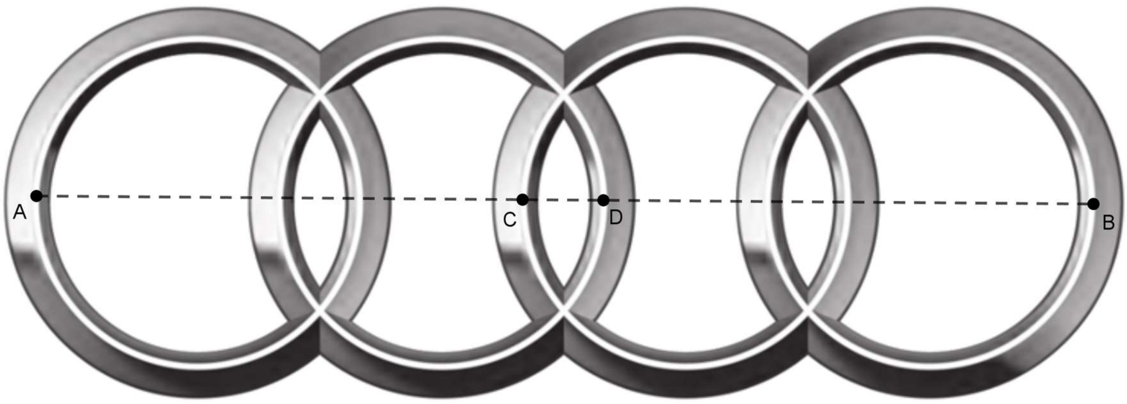


Figura 51: Emblema da marca Audi (Audi, s.d.)

Neste exercício, os formandos deverão começar por observar a imagem da Figura 51 e tentar imaginar qual seria o comprimento do emblema, caso as circunferências não se sobrepusessem, isto é, caso ficassem apenas encostadas tangencialmente. Como existem três zonas de sobreposição e está indicado que $\overline{CD} = \ 1{,}2 \ cm$, o diâmetro das quatro circunferências, caso não existisse sobreposição, seria:

$$13 + 1{,}2 + 1{,}2 + 1{,}2 = 16{,}6\ cm$$

Portanto, a medida do comprimento do diâmetro de cada circunferência será:

$$d = \frac{16{,}6}{4} = 4{,}15\ cm$$

Determinado este valor, será fácil os formandos determinarem o perímetro de cada circunferência, bastará usar a fórmula de cálculo (2):

$$P = \pi \times 4{,}15 \simeq 13{,}03\ cm$$

3.6 - Ficha de trabalho 2 - Aplicação de conceitos geométricos elementares

Objetivos desta ficha de trabalho:

- Em contextos de vida resolver problemas que envolvam os conceitos de perímetro, área, volume; potenciação e radiciação;
- Em contextos de vida resolver problemas que envolvam números racionais e números irracionais;
- Estabelecer a ligação entre conceitos matemáticos e conhecimento de procedimentos na realização de construções geométricas (quadriláteros, outros polígonos e lugares geométricos);
- Descrever figuras geométricas no plano e no espaço;
- Comunicar os resultados de trabalhos de projeto usando a Linguagem Matemática e a Língua Portuguesa.

Pré-requisitos:

Previamente à realização desta atividade deverão ser definidos os conceitos de perímetro e área de figuras planas (quadrado, retângulo, triângulo e círculo), ângulo ao centro, ângulo inscrito; arcos de uma circunferência, comprimento do arco, setor circular e área de um setor circular.

Material necessário:

- Régua;
- Compasso;
- Transferidor;
- Calculadora.

Avaliação:

- Empenho e participação;
- Realização de construções geométricas;

- Desenvolvimento de raciocínio geométrico e dedutivo;

- Tomada de conclusões e comunicação dos resultados obtidos.

Desenvolvimento – Resolução dos exercícios propostos na ficha de trabalho 2:

Esta ficha de trabalho está estruturada com o objetivo de abordar conceitos referentes à circunferência ao círculo e a outras figuras planas, no que diz respeito ao perímetro, área, identificação de segmentos e medidas numa circunferência, ângulos ao centro, ângulos inscritos, arcos, comprimento de um arco, setor circular e área de um setor circular. De seguida, serão resolvidos os exercícios propostos e comentados os resultados.

Nota: Na ficha estará indicado para nos cálculos se considerar $\pi \simeq 3{,}14$.

Exercício 1

Neste exercício os formandos terão de observar a figura e identificar corretamente os elementos solicitados em várias alíneas. O formador deverá exigir rigor nas respostas, nomeadamente, nas notações adotadas.

Enunciado: Na figura está representada uma circunferência de centro O, os restantes pontos assinalados pertencem à circunferência.

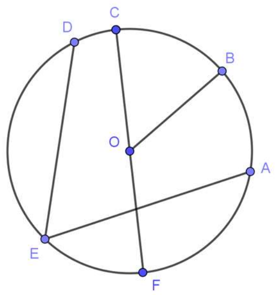


Figura 52: Exercício 1

a) Indique um segmento com medida de comprimento igual ao raio.

Na resposta, os formandos poderão responder: o segmento de reta [*OB*], o segmento de reta [*OC*] ou o segmento de reta [*OF*]. O formador deverá frisar que a ordem pela qual se indicam os extremos de um segmento de reta é irrelevante.

b) Indique um diâmetro.

Por definição, o diâmetro é uma corda que passa pelo centro da circunferência, pelo que a resposta correta a esta alínea será: o segmento de reta [*CF*]

c) Indique uma corda.

Além do diâmetro assinalado na alínea anterior, existem mais duas cordas na circunferência da Figura 52. A resposta a esta alínea poderá ser: [*DE*], [*AE*] ou o diâmetro [*CF*].

d) Indique um ângulo ao centro.

Pela definição, um ângulo ao centro é aquele que tem o vértice no centro da circunferência. Neste caso, poderá ser identificado, por exemplo, um destes ângulos ao centro: ∢*BOC*, ∢*COB*, ∢*BOF*, ∢*FOB*, ∢*FOC*, ∢*COF*. O formador deverá lembrar a convenção do sentido direto para referenciar ângulos e arcos de circunferência (sentido contrário aos ponteiros do relógio).

e) Indique um ângulo inscrito.

Pela definição, um ângulo inscrito tem o vértice na circunferência e lados secantes à circunferência. Neste caso, existe um único ângulo inscrito na circunferência é o ∢*AED*.

f) Sombreie a lápis um setor circular.

Um setor circular é definido como sendo a região de um círculo limitada por um arco e pelos dois raios que intersetam os seus extremos. Neste caso, os formandos poderão sombrear o setor circular limitado pelo arco *BC* ou o setor circular limitado pelo arco *CB*. Graficamente, poderão ser admitidas como corretas as soluções apresentadas na Figura 53:

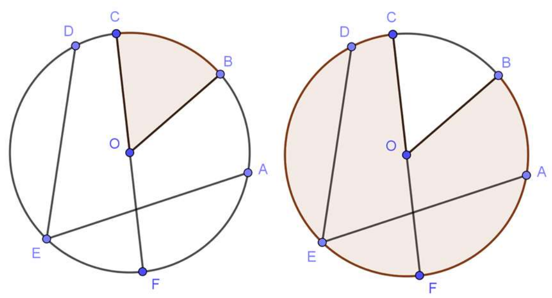


Figura 53: Exercício 1f)

g) Sombreie a lápis o arco DE.

Nesta alínea, deverá ser sombreado o arco correto, lembrando uma vez mais que o sentido convencionado é o sentido direto. Graficamente, terão a solução apresentada na Figura 54:

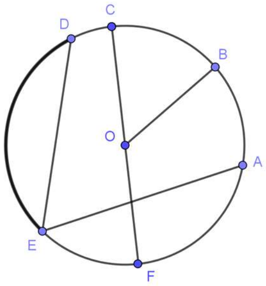


Figura 54: Exercício 1g)

Exercício 2

Este exercício tem o objetivo de os formandos poderem constatar, através de uma construção geométrica, que a amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do ângulo ao centro inscrito no mesmo arco de circunferência. A circunferência na qual será feita a construção, estará disponibilizada no enunciado da ficha de trabalho.

Enunciado: Na figura está representada uma circunferência com centro no ponto C. Utilize o material geométrico adequado para:

a) Representar um ângulo ao centro ∢ACB, com amplitude 60°.

Os formandos deverão começar por usar a régua para assinalar um segmento de reta qualquer entre o centro da circunferência e a linha que a define (com comprimento igual ao raio). A partir desse segmento de reta, será representado um outro que fará com o primeiro um ângulo de 60° (no sentido direto). Para tal, será necessário o formador indicar a forma correta de utilização do transferidor. Graficamente, deverão obter uma figura idêntica à representada na Figura 55:

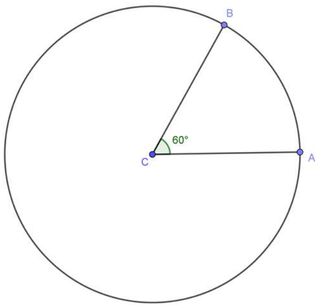


Figura 55: Exercício 2a)

b) Assinalar à sua escolha um ponto D pertencente ao arco BA.

A localização do ponto D será feita à escolha de cada formando, será até conveniente que existam diferenças na turma, para que se tente generalizar o resultado deste exercício.

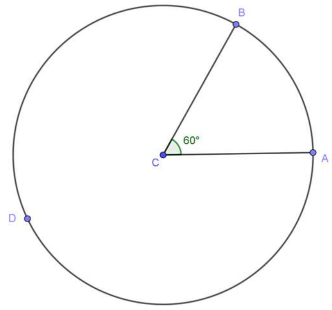


Figura 56: Exercício 2b)

c) Desenhar o ângulo inscrito ∢ADB.

Nesta alínea os formandos deverão utilizar a régua e desenhar o ângulo corretamente.

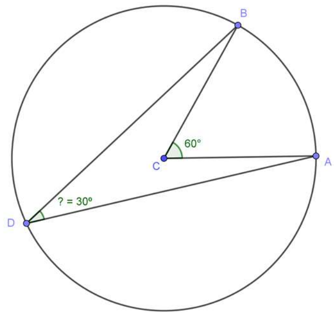


Figura 57: Exercício 2c)

d) Medir a amplitude do ∢ADB.

Nesta alínea, pretende-se que os formandos utilizem corretamente o transferidor e determinem a amplitude do *∢ADB na* Figura 57. Irão certamente constatar que essa amplitude é 30°, pelo que, em grupo, poderão enunciar que a amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do ângulo ao centro no mesmo arco de circunferência. O formador deverá confirmar aos formandos a veracidade deste resultado.

Exercício 3

Este exercício pretende que os formandos pratiquem as relações entre amplitude de ângulos e arcos. Na alínea a) a relação em causa será entre o ângulo ao centro e arco correspondente, na alínea b) será explorada a relação entre ângulo ao centro e ângulo inscrito, num mesmo arco de circunferência.

Enunciado: Determine as amplitudes desconhecidas (justifique as suas respostas):

a)

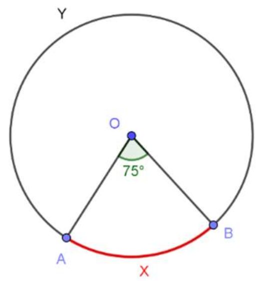


Figura 58: Exercício 3a)

Os formandos deverão responder que X = 75°, uma vez que X é a amplitude do arco *AB*, o qual é o arco correspondente ao ângulo ao centro, com essa amplitude. O formador poderá frisar que existe uma relação direta entre a amplitude de um ângulo ao centro e o arco de circunferência correspondente a esse ângulo. Relativamente ao valor de Y, observando a Figura 58, os formandos poderão verificar que Y é a amplitude do arco *BA*, ou seja:

Y = 360° - 75° = 285°

b)

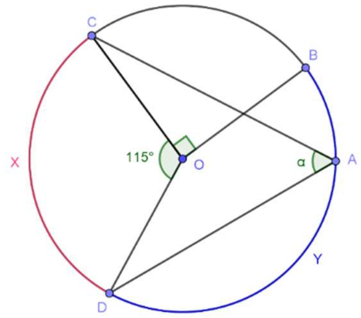


Figura 59: Exercício 3b)

Nesta questão, os formandos poderão começar por constatar que na Figura 59 a amplitude do arco *CD* é 115°, uma vez que o ângulo ∢*COD* é um ângulo ao centro e os seus lados limitam o arco *CD*, portanto, X = 115°. De seguida, poderão concluir que $\alpha = \frac{115}{2}$ = 57,5°, uma vez que o ângulo inscrito num arco de circunferência, tem metade da amplitude do ângulo ao centro inscrito nesse mesmo arco. Relativamente ao valor da amplitude do arco *DA*, os formandos deverão começar por determinar a amplitude do ângulo ∢*DOB*:

DÔB = 360° - 115° - 90°

$D\hat{O}B = 155°$

Uma vez que o $\measuredangle DOB$ é um ângulo ao centro e os lados limitam o arco *DB*, poderão finalmente concluir que:

$$Y = \widehat{DB} = 155°.$$

Exercício 4

Com este exercício, pretende-se explorar as relações entre ângulo ao centro e arco correspondente. Serão também exploradas as relações entre raio, comprimento da medida de um arco de circunferência e área de um setor circular.

Enunciado: Na figura está representada uma circunferência de centro C e raio 3 cm. Está também assinalada a amplitude do $\measuredangle$ACB.

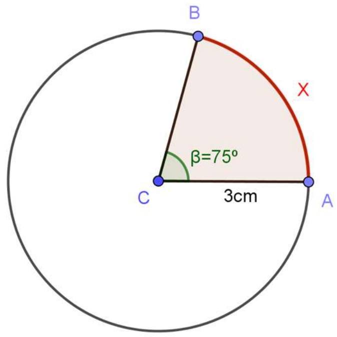


Figura 60: Exercício 4

a) Determine a amplitude do arco AB.

Os formandos deverão responder a amplitude do arco é igual à amplitude do $\measuredangle ACB$, porque o arco *AB* é o arco correspondente ao ângulo ao centro com essa amplitude, isto é, $\widehat{AB} = 75°$.

b) Determine a medida do comprimento do arco AB (designada por X).

Nesta alínea os formandos poderão utilizar a fórmula de cálculo do comprimento de um arco a partir do ângulo ao centro correspondente (4), ou então, determinar o valor desconhecido a partir da proporcionalidade direta entre a medida do perímetro do círculo e a amplitude do ângulo giro:

$$\frac{2 \times \pi \times 3}{360°} = \frac{\mathrm{X}}{75°} \Leftrightarrow \mathrm{X} = \frac{2 \times \pi \times 3 \times 75°}{360°} \Leftrightarrow \mathrm{X} \simeq 3{,}93\ cm$$

c) Determine a área do setor circular que está sombreado.

Os formandos poderão utilizar a fórmula de cálculo da área de um setor circular a partir do raio (7), ou, alternativamente, através da seguinte proporção (6) :

$$\frac{A_{S.Circ\ AB}}{Área\ do\ círculo} = \frac{\widehat{AB}}{360°}$$

Assim,

$$\frac{A_{S.Circ\ AB}}{\pi \times 3^2} = \frac{75°}{360°} \Leftrightarrow A_{S.Circ\ AB} = \frac{\pi \times 3^2 \times 75°}{360°} \simeq 5{,}89\ cm^2$$

Exercício 5

Este exercício tem como objetivo que os formandos coloquem em prática as relações entre raio, comprimento da medida de um arco de circunferência e área de um setor circular.

Enunciado: Em cada figura calcule a área da parte colorida e o comprimento do arco assinalado com um X.

a)

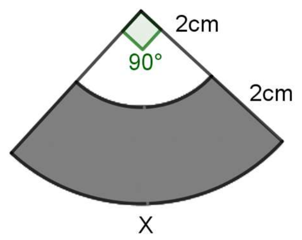


Figura 61: Exercício 5a)

O formador deverá esclarecer que a área da zona sombreada corresponde à diferença entre a área de dois setores circulares com raios distintos, respetivamente, raio 4 cm e raio 2 cm, ambos limitados por arcos com amplitude de 90° (correspondentes a um ângulo ao centro de 90°).

Relativamente ao comprimento do arco designado por X, aplicando desta vez a fórmula de cálculo (4), resultará que:

$$\mathrm{X} = \frac{90° \times 2 \times \pi \times 4}{360°} \Leftrightarrow \mathrm{X} \simeq 6{,}28\ cm$$

Para determinar a área sombreada da Figura 61 ter-se-á de fazer a diferença entre as áreas dos dois setores circulares. Desta vez, o formador poderá sugerir que os formandos recorram à fórmula (7):

$$Área\ da\ zona\ sombreada\ = \frac{90°}{360°} \times \pi \times 4^2 - \frac{90°}{360°} \times \pi \times 2^2 \simeq 9{,}42\ cm^2$$

b)

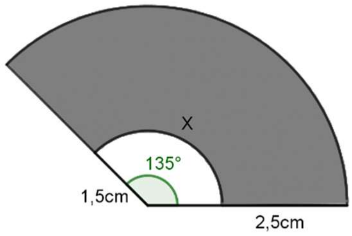


Figura 62: Exercício 5b)

Esta alínea terá resolução semelhante à da alínea anterior. Começando por determinar X, com recurso à fórmula (4):

$$\mathrm{X} = \frac{135° \times 2 \times \pi \times 1{,}5}{360°} \simeq 3{,}53\ cm$$

Para determinar a área da zona sombreada da Figura 62, ter-se-á de fazer a diferença entre as áreas de dois setores circulares (um com raio $4\ cm$ e outro com raio $1{,}5\ cm$). Uma vez mais, para determinar a área de cada setor circular poderá ser utilizada a fórmula de cálculo (7).

$$Área\ da\ zona\ sombreada\ = \frac{135°}{360°} \times \pi \times 4^2 - \frac{135°}{360°} \times \pi \times 1{,}5^2 \simeq 16{,}19\ cm^2$$

Exercício 6

Neste exercício, pretende-se que os formandos apliquem os conhecimentos sobre o estudo da circunferência a um caso com imagem real. O formador deverá alertar uma vez mais que, nestes casos, haverá sempre uma imprecisão inerente à própria figura, precisamente, por se tratar de um exercício com imagem real.

Enunciado: Observe o emblema da marca Mercedes – Benz. Sabe-se que o arco BC mede $18{,}84\ cm$.

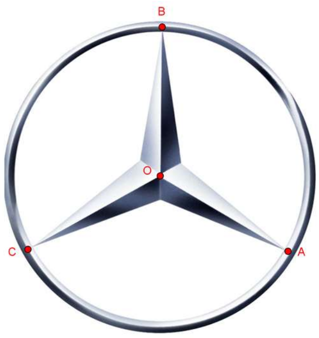


Figura 63: Emblema da Mercedes-Benz (Mercedes-Benz Debuts New Augmented Reality Technology at 2019 U.S. Open, 2019)

Determine:

a) A amplitude do ângulo ∢AOB.

Observando a Figura 63 os formandos poderão concluir que $A\hat{O}B = 120°$, pois os vértices da estrela dividem a circunferência em três partes com o mesmo comprimento de arco.

b) A amplitude do ângulo ∢ACB.

Os formandos deverão observar na Figura 63 que o ∢*ACB* é um ângulo inscrito na circunferência, sendo *AB* o arco correspondente com amplitude de 120°. Por essa razão:

$$A\hat{C}B = \frac{120°}{2} = 60°$$

c) A medida do comprimento do diâmetro do emblema.

A medida do arco *BC* é a terça parte do perímetro do círculo. No enunciado refere-se que a medida do comprimento deste arco é 18,84 cm, portanto, a medida do perímetro do círculo será:

$$P = 3 \times 18{,}84 \ = \ 56{,}52 \ cm$$

Usando a fórmula do perímetro do círculo (2), igualando a este valor, os formandos poderão determinar o valor do diâmetro, bastando resolver a seguinte equação:

$$\pi \times d \ = \ 56{,}52 \Leftrightarrow d = \frac{56{,}52}{\pi} \Leftrightarrow d \simeq 18 \ cm$$

d) A área do setor circular que corresponde ao arco CA.

Nesta alínea, os formandos poderão usar a fórmula (7), ou, alternativamente, calcular a terça parte da área círculo de centro O e raio 9 $cm.$ (**Nota:** a medida do diâmetro foi determinada na alínea anterior).

$$A_{S.Circ\ CA} \ = \ \frac{120°}{360°} \times \pi \times 9^2 \simeq 84{,}78 \ cm^2$$

Exercício 7

Com este exercício, pretende-se que os formandos apliquem os conhecimentos sobre ângulos ao centro, comprimento de arco e área de um setor circular, num exercício com imagem real.

Enunciado: Observe a fotografia do jardim, o qual, foi plantado para representar um relógio. Note que existem vários pontos assinalados na figura.

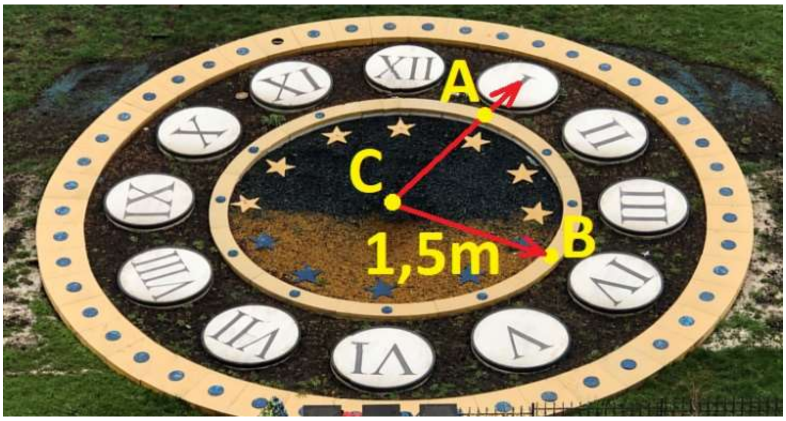


Figura 64: Jardim em forma de relógio (Imagem Adaptada) (Junior, 2019)

a) Qual é a distância entre o ponto C e o ponto A?

A distância entre os pontos C e A é igual à distância entre os pontos C e B, uma vez que, tanto o ponto A, como o ponto B, pertencem à circunferência de centro C e raio 1,5 m, logo:

$$\overline{CA} = 1{,}5\ m$$

b) Qual é a amplitude do ∢BCA?

Observando a Figura 64, os formandos poderão concluir que o ∢*BCA* é um ângulo reto, pela própria geometria do relógio representado. O formador poderá justificar indicando que o relógio está dividido em 12 partes, cada uma correspondente a 1 hora, estando os pontos A e B separados por 3 horas de diferença, por isso:

$$B\hat{C}A = 3 \times \frac{360°}{12} = 90°$$

c) Qual é o comprimento do arco BA?

Os formandos poderão começar por determinar o perímetro do círculo de centro C e raio 1,5 m com recurso à fórmula de cálculo (1):

$$P = 2 \times \pi \times 1{,}5 \iff P \simeq 9{,}42\ m$$

Será provável que os formandos indiquem que o comprimento do arco *BA* seja igual à quarta parte do perímetro do círculo, o que estará correto. No entanto, se o formador quiser apresentar um raciocínio mais generalizado, poderá referir que o arco *BA* tem uma amplitude de 90° e determinar o comprimento do arco *BA*, designando-o por x, através da proporção:

$$\frac{360°}{90°} = \frac{9{,}42}{x} \iff x = \frac{90 \times 9{,}42}{360} \iff x \simeq 2{,}36\ m$$

Nota: Também se poderá utilizar diretamente a fórmula de cálculo (4), no entanto, o formador deverá incentivar os formandos na utilização de diferentes alternativas de resolução de um mesmo problema.

d) No setor circular limitado pelo arco BA irão ser plantadas flores. Estas deverão ser plantadas com uma dispersão aproximada de 30 plantas por m^2. Faça uma estimativa do número de flores que poderão ser colocadas nessa zona do jardim.

Para calcular a área do setor circular limitado pelo arco *BA*, tendo em conta a sua amplitude já determinada, os formandos poderão usar a fórmula relativa à área de um setor circular (7):

$$A_{S.Circ} = \frac{90°}{360°} \times \pi \times 1{,}5^2 \Leftrightarrow A_{S.Circ} \simeq 1{,}77\, m^2$$

Para fazer a estimativa do número de flores, tendo em conta a dispersão pretendida, será necessário fazer o seguinte cálculo:

$$n.°\, de\, pés = 1{,}77 \times 30 \simeq 53\, flores$$

No final, será importante o formador recapitular o exercício desde o início para que os formandos consolidem todos os raciocínios efetuados.

Exercício 8

Com este exercício pretende-se, uma vez mais, que os formandos analisem uma imagem real e ponham em prática os conceitos adquiridos sobre setores circulares e amplitude de arcos.

Enunciado: O alvo representado é composto por circunferências concêntricas e vários setores circulares. Sabe-se que: $\overline{OA} = 12{,}8\, cm$ e $\overline{OC} = 20\, cm$.

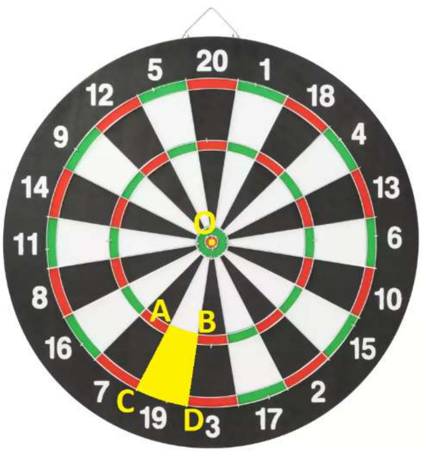


Figura 65: Alvo de um jogo de setas (Dardos, s.d.)

a) Em quantos setores circulares iguais está dividido o alvo?

Os formandos deverão observar diretamente a Figura 65 e responder que esta se encontra dividida em 20 setores circulares.

b) Qual é a amplitude do arco de cada um dos setores circulares referidos na alínea anterior?

Como foram identificados 20 setores circulares, a amplitude de cada um será dada pelo quociente:

$$\frac{360°}{20} = 18°$$

Nota: Será importante o formador frisar que o conjunto dos 20 arcos referidos têm todos a mesma amplitude e perfazem uma amplitude de 360° - consequência direta da circunferência ter 360° de amplitude.

c) Compare a amplitude dos arcos AB e CD.

Observando a Figura 65, os formandos deverão responder que estes dois arcos estão ambos limitados pelos lados de um ângulo ao centro com amplitude de 18°. Por esse motivo, ambos terão uma amplitude de 18°.

d) Calcule a área da região pintada a amarelo.

A região pintada a amarelo na Figura 65 corresponderá à diferença entre a área do setor circular limitado pelo $\sphericalangle COD$ e raio 20 cm e a área do setor circular limitado pelo $\sphericalangle AOB$ e raio $12{,}8\ cm$. Para determinar o valor solicitado nesta alínea, os formandos poderão utilizar a fórmula para cálculo da área de um setor circular (7) e efetuar a diferença das áreas referidas:

$$Área\ da\ zona\ amarela\ = \frac{18°}{360°} \times \pi \times 20^2 - \frac{18°}{360°} \times \pi \times 12{,}8^2 \simeq 37{,}08\ cm^2$$

3.7 - Ficha de trabalho 3 - Propostas de trabalho com aplicação em contexto real

Objetivos desta ficha de trabalho:

- Em contextos de vida resolver problemas que envolvam os conceitos de perímetro, área, volume; potenciação e radiciação;

- Em contextos de vida resolver problemas que envolvam números racionais e números irracionais;
- Estabelecer a ligação entre conceitos matemáticos e conhecimento de procedimentos na realização de construções geométricas (quadriláteros, outros polígonos e lugares geométricos);
- Descrever figuras geométricas no plano e no espaço;
- Comunicar os resultados de trabalhos de projeto usando a Linguagem Matemática e a Língua Portuguesa.

Pré-requisitos:

Previamente à realização desta atividade deverão ser definidos os conceitos de perímetro e área da circunferência e círculo, ângulo ao centro, ângulo inscrito; arcos de uma circunferência, comprimento do arco, setor circular, área de um setor circular e relação entre movimento de rotação e movimento retilíneo uniforme.

Material necessário:

- Calculadora

Avaliação:

- Empenho e participação
- Resolução correta dos exercícios propostos
- Desenvolvimento de raciocínio geométrico e dedutivo
- Tomada de conclusões e comunicação dos resultados obtidos

Desenvolvimento – Resolução dos exercícios propostos na ficha de trabalho 3:

Esta ficha de trabalho com exercícios complementares pretende que os formandos apliquem os conceitos referentes à circunferência e ao círculo em exercícios inspirados em contextos reais. Desta forma, os formandos poderão colocar em prática o que aprenderam com as atividades e fichas de trabalho anteriores, fazendo agora exercícios de caráter aglutinador.

Previamente, além dos conhecimentos básicos sobre a geometria da circunferência, será importante o formador rever com os formandos as unidades de medida do Sistema Internacional de unidades (SI) fazendo, por exemplo, uma breve referência às principais unidades desses sistema, identificando grandezas fundamentais e as grandezas derivadas, nomeadamente, as grandezas de medição de comprimento e as grandezas de medição de tempo. Será também oportuno, no desenrolar da resolução destes trabalhos complementares, que o formador refira os conceitos básicos sobre movimento de rotação e movimento retilíneo uniforme, resumidos do final do Capítulo 2.

Durante a resolução das propostas de trabalho apresentadas nesta ficha, por elas terem um maior grau de complexidade comparativamente aos das fichas de trabalho 1 e 2, será normal que os formandos necessitem de um apoio extra por parte do formador, no entanto, este deverá apenas intervir caso seja necessário, para que se fomente a autonomia dos formandos e consolidem eficazmente os seus conhecimentos.

De seguida, serão resolvidos os exercícios propostos e comentados os resultados.

Nota: Na ficha estará indicado para nos cálculos se considerar $\pi \simeq 3{,}14$.

Exercício 1

Com este exercício, pretende-se que os formandos relacionem o perímetro de duas circunferências com raios distintos, realizem reduções e cálculos com diversas grandezas e relacionem movimento circular com o movimento retilíneo uniforme.

Enunciado: Todos os dias o João gosta de dar uma volta na sua bicicleta antiga. Como é bastante observador e curioso, reparou que o pneu da roda traseira está a ficar com o piso bastante mais gasto do que o pneu da roda dianteira. Para investigar esta situação, o João decidiu fazer uma experiência prática. Reparou que, num trajeto de 100 metros em linha reta, a roda dianteira deu 38 voltas completas, enquanto que a roda traseira deu 114 voltas. Parece que estava explicado o porquê do desgaste do pneu traseiro…

Figura 66: Bicicleta do João (Magoo's, s.d.)

a) Comente o resultado da experiência realizada pelo João.

Os formandos deverão comentar que, devido à diferença de tamanho das duas rodas, a roda traseira, terá de realizar um maior número de voltas para percorrer a mesma distância da roda dianteira. Este facto, levará a que o pneu da roda traseira apresente um desgaste superior derivado à sua superfície sofrer maior fricção. O formador poderá acrescentar que se parte do princípio de que os compostos de borracha dos dois pneus são iguais.

b) Por cada volta completa da roda dianteira, quantas voltas deu a roda traseira?

Para dar resposta a esta questão os formandos poderão calcular a razão entre o número de voltas dado pela roda dianteira e pela roda traseira em 100 metros, ou seja:

$$\frac{38}{114} = \frac{1}{3}$$

O formador deverá salientar que esta razão significa que, por cada volta completa da roda dianteira, a roda traseira terá dado três voltas completas, existindo uma relação de proporcionalidade direta entre o número de voltas das duas rodas na razão de 1 para 3.

c) Determine o deslocamento da bicicleta na estrada por cada volta completa da roda dianteira.

Nesta alínea, pretende-se que os formandos deduzam a resposta diretamente a partir dos dados do enunciado, pois está indicado que, para percorrer 100 metros, a roda dianteira realizou 38 voltas completas. Para responder à questão colocada, bastará que os formandos calcularem o quociente:

$$\frac{100}{38} \simeq 2{,}63\ m$$

Isto é, por cada volta completa da roda dianteira, a bicicleta deslocar-se-á 2,63 *m* na estrada.
Os formandos deverão ainda perceber que este valor corresponde ao perímetro da roda dianteira.

d) Qual é o raio de cada uma das rodas? (apresente o resultado em centímetros).

Para determinar o raio da roda dianteira, os formandos deverão utilizar o valor do perímetro que foi determinado na alínea anterior. De seguida, deverão utilizar a fórmula do perímetro do círculo (1), resolvendo a equação em ordem ao raio r, tal como se apresenta:

$$2{,}63 = 2 \times \pi \times r \Leftrightarrow r = \frac{2{,}63}{2\pi} \Leftrightarrow r \simeq 0{,}42\ m$$

Relativamente à roda traseira, os formandos poderão utilizar um processo idêntico, no entanto, o formador poderá sugerir que se utilize a relação entre os dois perímetros que foi determinada na alínea b). Utilizando o valor desta razão entre os dois perímetros, bastará dividir por três a medida do valor do raio da roda dianteira, para que os formandos determinem o raio da roda traseira:

$$\frac{0{,}42}{3} \simeq 0{,}14\ m$$

Neste ponto, os formandos deverão efetuar a redução destes valores para a unidade centímetros. A resposta final deverá ser:

$$raio\ da\ roda\ dianteira \simeq 42\ cm$$
$$raio\ da\ roda\ traseira \simeq 14\ cm$$

e) Quando a bicicleta do João circula a uma velocidade constante de 25 Km/h, quantas rotações por minuto (*rpm*) estará a realizar a roda dianteira? E a roda traseira?

Nesta alínea, pretende-se que os formandos relacionem a velocidade do movimento retilíneo uniforme, com o movimento de rotação das rodas da bicicleta. Como sugerido, o formador deverá ter abordado este tema anteriormente e bastará relembrar aos formandos que, neste tipo de movimento, a velocidade é uma grandeza que resulta do quociente entre o espaço percorrido e tempo, recordando oportunamente a expressão (9):

$$v = \frac{E}{t}$$

onde E – representa espaço e t- representa tempo

Com orientação do formador, os formandos deverão conseguir determinar quantas rotações por minuto estará a girar a roda dianteira, quando a velocidade da bicicleta for 25 Km/h (constante).
Para tal, deverão colocar todas as grandezas de comprimento reduzidas à mesma unidade, por exemplo, metro (m). As grandezas relativas à unidade tempo, também deverão ser expressas na mesma unidade, por exemplo, minuto (min).
Efetuando a redução de *Km* para metros ter-se-á:

$$25\ Km = 25000\ m$$

Relativamente à redução de horas (h) para minutos (min), o formador deverá recordar que 1 hora corresponde a 60 minutos. Tendo em conta as reduções efetuadas, os formandos poderão concluir que a velocidade expressa em m/min será:

$$25\ Km/h = \frac{25000}{60}\ m/min \simeq 416{,}67\ m/min$$

Para determinar o número de rotações por minuto realizadas pela roda dianteira, a esta velocidade, bastará efetuar o quociente entre este valor e o perímetro da roda dianteira.

$$\frac{416{,}67}{2{,}63} \simeq\ 158{,}43\ rpm$$

Nota: O formador poderá ajudar os formandos a interpretar este valor, referindo que a roda dianteira irá girar, por minuto, 158 voltas completas e ainda 43% de outra volta.

Relativamente à roda traseira, bastará ter em conta que, por cada volta da roda dianteira, a roda traseira irá girar o triplo das voltas. Logo, se os formandos multiplicarem o resultado obtido pelo fator 3, encontrarão o número de rotações por minuto, a esta velocidade, que a roda traseira irá girar:

$$158{,}43 \times 3 \; = \; 475{,}29 \, rpm$$

Ou seja, esta roda irá girar por minuto 475 voltas completas e 29% de outra volta.

f) Observando a imagem da bicicleta qual é a área de cada setor circular da roda dianteira? E da roda traseira?

Nesta alínea, os formandos deverão observar a Figura 66: Bicicleta do João e constatar que os raios da roda dianteira a dividem em 24 setores circulares, enquanto que os raios presentes na roda traseira, a dividem em 6 setores circulares. Assim, os formandos poderão determinar a amplitude do arco correspondente a cada setor circular.

Na roda dianteira, a amplitude do arco correspondente a cada setor circular, será:

$$\frac{360°}{24} = 15°$$

Na roda traseira, a amplitude do arco correspondente a cada setor circular, será:

$$\frac{360°}{6} = 60°$$

Neste ponto, os formandos poderão utilizar a fórmula de cálculo da área de um setor circular (7), uma vez que já foram determinados os raios das duas rodas. Assim, obterão os valores pretendidos:

$$A_{S.Circ\ da\ roda\ dianteira} \; = \; \frac{15°}{360°} \times \pi \times 42^2 \simeq 230{,}79 \; cm^2$$

$$A_{S.Circ\ da\ roda\ traseira} \; = \; \frac{60°}{360°} \times \pi \times 14^2 \simeq 102{,}57 \; cm^2$$

Exercício 2

Com este exercício, pretende-se que os formandos relacionem o perímetro de duas circunferências com raios distintos, realizem reduções e cálculos com diversas grandezas e relacionem um movimento circular com o movimento retilíneo uniforme correspondente.

Enunciado: Num armazém do ramo da logística existe um tapete rolante destinado a transportar caixas de mercadorias de um piso para o outro. O motor elétrico deste conjunto tem uma velocidade de funcionamento, em condições permanentes, de 1420 *rpm* (rotações por minuto) e aciona através de uma correia de transmissão a tela onde são colocadas as mercadorias. Essa correia de transmissão está intercalada entre duas polies[8].

A polie que está acoplada diretamente no veio do motor (designada por polie A) tem um raio de 2,5 cm, enquanto que a polie acoplada à tela (designada por polie B) tem um raio de 50 cm (igual ao raio do rolo onde a tela é tracionada). A tela tem um comprimento total de 20 metros. Em baixo está apresentado um pequeno esquema referente a este tapete rolante:

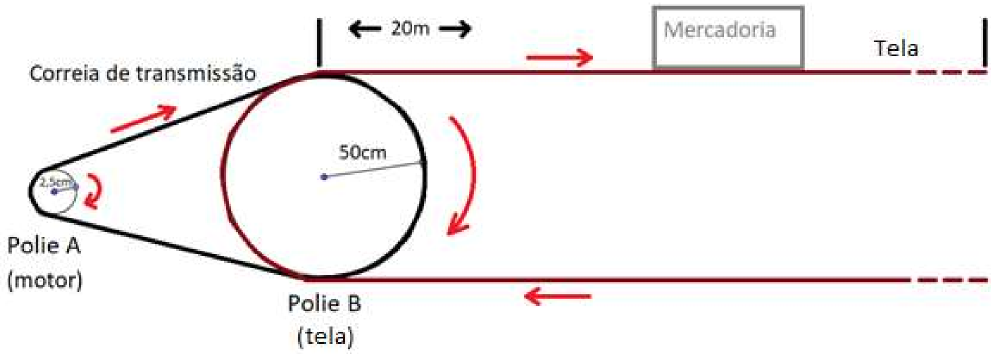


Figura 67: Representação esquemática do tapete rolante: conjunto polies, correia de transmissão e tela

a) Calcule o perímetro de cada uma das polies (apresente o resultado em metros).

Nesta alínea, os formandos terão de aplicar a fórmula do perímetro do círculo (1) e fazer a redução do resultado a metros, isto é:

$$P_{polie\ A} = 2 \times \pi \times 2{,}5 \simeq 15{,}7cm = 0{,}157\ m$$

e

$$P_{polie\ B} = 2 \times \pi \times 50 \simeq 314cm = 3{,}14\ m$$

---

[8] Uma polie é um componente mecânico com forma circular que contém um encaixe central que permite acoplar as polies, por exemplo, ao veio giratório de um motor ou a um rolo que faça movimentar a tela de um tapete rolante. Entre duas polies é intercalada uma correia de transmissão flexível com a função de transmitir o movimento rotativo entre elas.

b) Determine a razão entre os perímetros das polies B e A. Comente o resultado tendo em conta o número de rotações por minuto (rpm) efetuado por cada polie durante o funcionamento do tapete.

Para determinar esta razão, os formandos deverão fazer o seguinte cálculo:

$$\frac{\text{Perímetro da polie B}}{\text{Perímetro da polie A}} = \frac{3{,}14}{0{,}157} = 20$$

Para orientar os formandos na realização do comentário a este resultado, o formador poderá questionar os mesmos sobre a relação entre o número de voltas realizado por minuto das polies A e B, ou então, questionar sobre qual a será a polie que efetuará mais voltas por minuto. Como comentário final, os formandos deverão indicar que, por cada rotação completa da polie B, a polie A realizará 20 rotações completas.

c) Determine quantas voltas por minuto realiza a polie que está acoplada à tela (polie B).

Nesta alínea, os formandos deverão ter em linha de conta que o motor efetua 1420 rpm e que esse será também o número de rpm realizado pela polie A. Relativamente à polie B, já se concluiu na alínea anterior que esta realizará um número de rpm inferior à polie A, na razão de 20 para 1.

Para dar resposta à questão, os formandos poderão, por exemplo, resolver a seguinte proporção:

$$\frac{20}{1} = \frac{1420}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1420}{20} = 71\,rpm$$

d) Determine a velocidade com que as mercadorias circulam na tela (apresente o valor em m/s).

Uma vez que o resultado deverá ser apresentado em *m/s*, os formandos poderão começar por fazer a redução do raio da polie B para metros, isto é:

$$50\,cm = 0{,}5\,m$$

Em termos de reduções, também será necessário que os formandos consigam exprimir o número de rotações da polie B, em termos de rotações por segundo (rps). Para tal, o formador deverá alertar que 1 minuto corresponde a 60 segundos. Por esse motivo, poder-se-á fazer a redução pretendida do seguinte modo:

$$71\,rpm = \frac{71}{60}\,rps \simeq 1{,}18\,rps$$

Para determinar a velocidade das mercadorias na tela, os formandos poderão aplicar a fórmula de cálculo (10). Substituindo adequadamente as variáveis, obter-se-á:

$$v_{mercadorias} = 2\pi \times 0{,}5 \times 1{,}18 \simeq 3{,}71\ [m/s]$$

e) Determine quanto tempo demora uma caixa a chegar ao final da tela (apresente o resultado em segundos).

Observando a Figura 67, os formandos deverão notar que a tela tem 20 m de comprimento e que uma determinada caixa de mercadoria colocada no início, se irá deslocar a uma velocidade de 3,71 m/s (velocidade determinada na alínea anterior). O formador poderá recordar que, neste contexto de movimento retilíneo uniforme, a velocidade é determinada pela expressão (9):

$$v = \frac{E}{t}$$

Os formandos deverão substituir na expressão os valores conhecidos e resolvê-la em ordem à variável t (tempo). Assim:

$$v = \frac{E}{t} \Leftrightarrow 3{,}71 = \frac{20}{t} \Leftrightarrow t = \frac{20}{3{,}71} \simeq 5{,}39\ s$$

Este cálculo permitirá concluir que a caixa demorará aproximadamente 5,39 segundos a chegar ao final da tela.

Exercício 3

Com este exercício pretende-se que os formandos façam uma ligação entre os conceitos relacionados com a circunferência e círculo e os apliquem a um caso real relacionado com os pneus de um automóvel.

Enunciado: Como decifrar os valores que surgem num pneu de um automóvel (Como ler a marcação de um pneu, s.d.).

Figura 68: Pneu 225/55R17

Neste exemplo, as medidas que surgem na parede lateral do pneu têm o seguinte significado:

225 – Significa que a largura do pneu é de 225 mm, ou seja, 22,5 cm;

55 – Significa que a parede lateral tem uma percentagem de 55% em relação à largura do pneu, ou seja, $\frac{55}{100} \times 225 \; = \; 123{,}75 \, mm$

R - Significa que se trata de um pneu com construção radial[9]

17 – Significa que o diâmetro da jante é de 17 polegadas, ou seja, o diâmetro interno do pneu é 17 polegadas.

Nota: No sistema de unidades 1 polegada = 2,54 cm (Polegadas, s.d.).

Os fabricantes de automóveis, muitas vezes, admitem nas características técnicas dos veículos a possibilidade da utilização de mais do que uma medida do conjunto jante-pneu. Para tal, entre outros cálculos, têm em linha de conta que o perímetro final não varie significativamente. Caso se instalasse inadvertidamente um conjunto jante-pneu desapropriado, poderiam ser alteradas as condições de segurança do veículo o que, entre outras consequências, originaria erro no odómetro do veículo (indicação errada da velocidade do veículo) (Equivalência de pneus Auto, s.d.).

a) Suponha que um determinado veículo tem instalado o conjunto jante-pneu indicado na figura anterior. Determine o número de rotações por minuto efetuado pelo pneu quando o veículo circula num movimento retilíneo uniforme a uma velocidade de 100 Km/h (constante).

Nesta alínea, os formandos deverão começar por determinar o perímetro exterior do pneu tendo em conta que o raio do conjunto jante-pneu será dado pela soma do raio da jante com o valor da medida da parede lateral do pneu. Na Figura 68, está indicado que se trata de um pneu adequado a uma jante de 17 polegadas e, por esse motivo, os formandos deverão multiplicar essa medida pelo fator de conversão de polegadas para centímetros. Deste modo, o raio referente à jante será dado por:

$$R_J = \frac{17 \times 2{,}54}{2} = 21{,}59 \; cm$$

De seguida, deverão efetuar a soma deste valor com o da parede lateral do pneu:

[9] Um pneu radial é composto por uma carcaça flexível disposta de maneira radial e por uma armadura metálica para estabilizar a banda de rodagem.

$$R_{J+P} = 21{,}59 + 12{,}375 \simeq 33{,}97\ cm$$

Deste modo, já estarão em condições de calcular o valor do perímetro exterior do pneu:

$$P = 2 \times \pi \times 33{,}97 \Leftrightarrow P \simeq 213{,}33\ cm$$

Para prosseguimento do exercício, o formador poderá sugerir que os formandos expressem esta grandeza em Km, fazendo a seguinte conversão:

$$213{,}33\ cm = 0{,}0021333\ Km$$

Os formandos deverão notar que, no enunciado, é pedido o número de rotações por minuto efetuadas pelo pneu, no entanto, a velocidade do veículo está expressa em Km/h. O formador poderá orientar os formandos sugerindo, por exemplo, a conversão da velocidade de quilómetros por hora, para quilómetros por minuto do seguinte modo:

$$100\ Km/h = \frac{100}{60} \simeq 1{,}67\ Km/min$$

Para determinar o número de rotações por minuto realizadas pelo pneu, bastará que os formandos determinem o quociente entre o valor da velocidade encontrado e o perímetro do pneu:

$$\frac{1{,}67}{0{,}0021333} \simeq 782{,}8\ rpm$$

b) Considere que o proprietário instalou um novo conjunto jante-pneu com as caraterísticas: Jante 18 polegadas; Pneu 215/55. Determine a velocidade real do veículo quando o odómetro indicar uma velocidade de 100 Km/h e comente o resultado obtido.

Os formandos deverão começar por "traduzir" as caraterísticas indicadas para o novo conjunto jante-pneu, em análogo como o que foi descrito para o primeiro caso. Com a ajuda do formador, deverão concluir que:

215 – Significa que a largura do pneu é de 215 mm, ou seja, 21,5 cm;

55 – Significa que a parede lateral tem uma percentagem de 55% em relação à largura do pneu, ou seja, $\frac{55}{100} \times 215 = 118{,}25\ mm$

18 – Significa que o diâmetro da jante é de 18 polegadas, ou seja, o diâmetro interno do pneu é de 18 polegadas.

Depois desta análise, os formandos deverão determinar a nova medida do perímetro exterior do pneu. Tal como anteriormente, o raio do conjunto jante-pneu será dado pela soma do raio da jante com o valor da medida da parede lateral do pneu. Como agora a jante é de 18 polegadas, o seu raio será:

$$R_J = \frac{18 \times 2{,}54}{2} = 22{,}86\ cm$$

Assim, o raio do conjunto jante-pneu será:

$$R_{J+P} = 22{,}86 \ + \ 11{,}825 \ \simeq \ 34{,}69\ cm$$

Estarão então em condições de determinar a medida do perímetro exterior do pneu:

$$P \ = \ 2 \times 3{,}14 \times 34{,}69 \ \ \Leftrightarrow \ \ P \ \simeq \ 217{,}85\ cm$$

Sob orientação do formador, os formandos deverão expressar esta grandeza em Km:

$$217{,}85\ cm = \ 0{,}0021785\ Km$$

O formador deverá então alertar que, pela alínea anterior, quando o odómetro do veículo indicar uma velocidade de 100 Km/h, qualquer que seja a medida do pneu instalado, esse pneu irá realizar 782,8 rpm.

A questão que se coloca agora, é a de saber qual será a velocidade real do veículo quando, com este novo conjunto de jante-pneu, esse pneu estiver a realizar 782,8 rpm.

Para tal, os formandos deverão começar por traduzir o valor de rpm para rph (rotações por hora) do seguinte modo:

$$782{,}8\ rpm \ = \ 782{,}8 \times 60\ rph \ \ \simeq 46968\ rph$$

Para determinar a velocidade real do veículo, bastará efetuar o produto entre este valor e o perímetro do pneu. Assim:

$$Velocidade\ Real \ = \ 0{,}0021785 \times 46968 \ = \ 102{,}3\ Km/h$$

Os formandos poderão finalmente concluir que a velocidade real do veículo, com este novo conjunto jante-pneu, será ligeiramente superior à velocidade indicada no odómetro.

O formador poderá também acrescentar que, em termos percentuais, a velocidade real será 2,3% superior à velocidade indicada pelo odómetro e que, embora esta diferença não pareça muito significativa, representará uma alteração do veículo, pelo que deverá ser sempre confirmado o averbamento deste conjunto jante-pneu no documento único automóvel (DUA).

Exercício 4

Com este exercício pretende-se que os formandos apliquem fórmulas matemáticas envolvendo raio e perímetro do círculo e área do círculo em contexto de um problema relacionado com eletricidade básica. Neste exercício, serão também implicitamente abordadas questões relacionadas com proporcionalidade direta e inversa, reduções de grandezas e utilização de prefixos científicos do Sistema Internacional de unidades.

Enunciado: Os fios condutores elétricos, normalmente, têm secção circular e esta obedece a valores normalizados. Os materiais condutores usualmente utilizados nas instalações elétricas são o cobre e o alumínio.

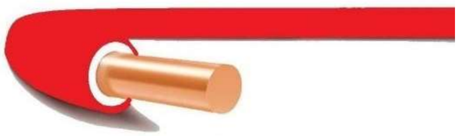


Figura 69: Fio condutor com secção circular

A Resistência elétrica é medida em Ohm [Ω] e traduz a capacidade de um corpo qualquer se opor à passagem de corrente elétrica. A fórmula simplificada para cálculo de resistência elétrica é a seguinte (Constantes Físicas, s.d.):

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

onde:

L - representa o comprimento do fio condutor (em metros)

S - representa a área da secção circular (em mm^2)

ρ - representa a resistividade elétrica do material. Este valor é tabelado e depende do material em causa (em $\Omega mm^2/m$)

Observando as relações matemáticas presentes nesta fórmula podemos afirmar que:

- A resistência elétrica é proporcional ao valor da resistividade do material;
- A resistência elétrica é proporcional ao comprimento do fio condutor;
- A resistência elétrica é inversamente proporcional à área da secção circular do condutor

Na tabela apresentam-se exemplos da resistividade elétrica de alguns materiais:

Elemento / Liga	Símbolo Químico	Resistividade a 20°C ($\Omega mm^2/m$)
Alumínio	Al	0,0282
Cobre	Cu	0,0172

a) Determine a resistência elétrica a 20°C um fio condutor de cobre com uma área de secção de 1,5 mm^2 e 25 metros de comprimento.

O formador poderá começar por referir que a secção de um determinado fio condutor é a figura geométrica que a face do condutor apresenta quando é feito um corte perpendicular ao sentido longitudinal desse fio condutor. Na Figura 69, observa-se claramente que a secção desse fio condutor é um círculo. Nesta alínea, os formandos deverão aplicar diretamente a fórmula:

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

Deste modo, concluirão que a resistência elétrica deste fio condutor será:

$$R = 0{,}0172 \times \frac{25}{1{,}5} \Leftrightarrow R \simeq 0{,}287\ \Omega$$

O formador poderá ainda indicar quais são os prefixos do Sistema Internacional de unidades (SI)[10] habitualmente utilizados. Neste caso, os formandos poderão reescrever o resultado obtido utilizando o prefixo mili (m), isto é:

$$R \simeq 0{,}287\ \Omega = 287\ m\Omega$$

b) Determine o raio deste fio condutor**.**

Neste alínea, como o fio tem secção circular e $A = 1{,}5\ mm^2$, bastará que os formandos utilizem a fórmula de cálculo da área do círculo (3) de modo a determinar o raio do fio condutor:

$$1{,}5 = 3{,}14 \times r^2 \Leftrightarrow r^2 = \frac{1{,}5}{3{,}14} \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{\frac{1{,}5}{3{,}14}} \Rightarrow r \simeq 0{,}69\ mm$$

[10] **Prefixos do Sistema Internacional de Unidades (SI):**

Tera	Giga	Mega	Quilo	Mili	Micro	Nano	Pico
T	G	M	K	m	µ	n	p
10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{3}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}

c) Qual será a resistência elétrica de um fio condutor nas mesmas condições da alínea anterior, mas feito de alumínio?

Os formandos deverão aplicar de novo a fórmula de cálculo da resistência elétrica, mas desta vez, deverão substituir na fórmula o valor da resistividade do alumínio. Assim:

$$R = 0{,}0282 \times \frac{25}{1{,}5} \Leftrightarrow R \simeq 0{,}470\,\Omega = 470\,m\Omega$$

d) Um fio condutor de cobre com 30 metros de comprimento tem um diâmetro aproximado da sua secção circular de 4,51 mm. Determine a resistência elétrica deste condutor.

Os formandos poderão começar por determinar a área da secção circular deste condutor através da fórmula de cálculo (3):

$$A = 3{,}14 \times \left(\frac{4{,}51}{2}\right)^2 \Leftrightarrow A \simeq 15{,}97\,mm^2$$

Com este valor, será possível determinarem o valor da resistência elétrica do fio condutor, substituindo adequadamente na fórmula de cálculo da resistência elétrica:

$$R = 0{,}0172 \times \frac{30}{15{,}97} \Leftrightarrow R \simeq 0{,}0323\,\Omega = 32{,}3\,m\Omega$$

Exercício 5

Com este exercício pretende-se que os formandos comparem a área e perímetro de dois tipos de cabos condutores elétricos. Um deles, terá apenas um fio condutor com secção circular no seu interior (cabo com condutor unifilar), enquanto que o outro, será composto por dois fios condutores circulares agrupados no seu interior (cabo condutor multifilar). Cada um destes dois fios condutores terá área igual a metade da secção do fio condutor indicado no primeiro caso.

Trata-se de um exercício que será resolvido recorrendo a variáveis. No final, pretender-se-á concluir que, considerando a área da secção como constante, o cabo condutor multifilar é aquele que oferece um perímetro equivalente superior. Esta propriedade favorece a passagem de corrente elétrica e o fenómeno associado é conhecido como efeito pelicular da corrente elétrica.

Enunciado: Certamente já reparou que os cabos elétricos, por vezes, apresentam uma configuração interna na qual a quantidade de fios condutores não é sempre a mesma (unifilar ou multifilar).

Figura 70: Cabo unifilar

Figura 71: Cabo multifilar

Uma das razões desta diferença está relacionada com o chamado efeito pelicular da corrente elétrica. Este efeito, é resultante do facto de os eletrões (responsáveis pela corrente elétrica) terem tendência a circular maioritariamente pela parte periférica dos fios condutores, o que está diretamente relacionado com o perímetro do fio condutor.

Investigue a relação matemática entre o perímetro de um condutor C1 com uma determinada área e o perímetro total de dois condutores C2 e C3 cada um deles com metade da área de C1.

Resolução: Neste exercício, o formador poderá começar por propor os formandos a resolução de um problema com valores concretos e só posteriormente avançar para a generalização através da utilização de variáveis.

Suponha-se, por exemplo, que o fio condutor C1 tem uma área da sua secção circular de 6 mm^2. Atendendo à fórmula da área do círculo (3), os formandos poderão determinar o raio do fio condutor C1 pois:

$$A = \pi \times r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

Ou seja,

$$r_{C1} = \sqrt{\frac{6}{\pi}} \simeq 1{,}38\ mm$$

O perímetro do fio condutor C1 será:

$$P_{C1} \simeq 2 \times \pi \times 1{,}38 \simeq 8{,}67\ mm$$

De seguida, o formador deverá indicar aos formandos para considerarem dois fios condutores iguais (C2 e C3), cada um com metade da área do fio condutor C1 (neste caso será 3 mm^2) e calcularem o perímetro total desses dois fios condutores.

Uma vez que os fios condutores C2 e C3 serão iguais, bastará aos formandos realizarem o cálculo do perímetro apenas para um deles, por exemplo de C2. Deverão começar por determinar o raio de C2, a partir da sua área, utilizando a fórmula deduzida anteriormente:

$$r_{C2} = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \simeq 0{,}98\ mm$$

O perímetro do fio condutor C2 será:

$$P_{C2} \simeq 2 \times \pi \times 0{,}98 \simeq 6{,}15\ mm$$

Como os condutores C2 e C3 são iguais, os formandos poderão concluir que o perímetro total dos condutores C2 e C3 é superior ao perímetro do fio condutor C1, pois:

$$2 \times 6{,}15 > 8{,}67 \Leftrightarrow 12{,}3 > 8{,}67$$

De seguida, o formador poderá orientar os formandos para a resolução deste exercício, generalizando o que se pode concluir com o caso particular descrito.

Os formandos deverão começar por considerar os fios condutores C1, C2 e C3, respetivamente com raios R_1, R_2 e R_3, nas condições do enunciado.

O perímetro de C1 será:

$$P_{C1} = 2 \times \pi \times R_1$$

A área de C1 será:

$$A_{C1} = \pi \times {R_1}^2$$

Pelo enunciado, tanto a área de C2 como a área de C3 serão metade do valor da área de C1, isto é:

$$A_{C2} = A_{C3} = \frac{\pi \times {R_1}^2}{2} = \pi \times \left(\frac{R_1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Ou seja, o valor do raio dos condutores C2 e C3 será em ambos os casos:

$$\frac{R_1}{\sqrt{2}}$$

Com base neste pressuposto, os formandos poderão determinar qual será o perímetro de C2 e de C3:

$$P_{C2} = P_{C3} = 2 \times \pi \times \frac{R_1}{\sqrt{2}}$$

Deste modo, o perímetro dos condutores C2 e C3, em conjunto, será dado pela expressão:

$$P_{C2} + P_{C3} = 2 \times 2 \times \pi \times \frac{R_1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times (2 \times \pi \times R_1)$$

Neste ponto, o formador poderá intervir recordando aos formandos operações com números irracionais e como se efetua uma racionalização.

Racionalizando o fator $\frac{2}{\sqrt{2}}$ resultará que:

$$P_{C2} + P_{C3} = \frac{2\sqrt{2}}{2} \times P_{C1} \Leftrightarrow P_{C2} + P_{C3} = \sqrt{2} \times P_{C1} \simeq 1{,}41 \times P_{C1}$$

Ou seja, os formandos poderão concluir que dois condutores, cada um com metade da área de C1, conseguem totalizar um perímetro superior em 41% ao perímetro de C1. Tal, pelo referido efeito pelicular da corrente elétrica, irá possibilitar uma maior intensidade de corrente elétrica face à utilização de apenas um condutor com o dobro da secção circular.

Capítulo 4 - Conclusões finais

4.1 - Cumprimento dos objetivos propostos

Recordando que esta dissertação teve como principal objetivo abordar conteúdos geométricos associados à circunferência e ao círculo no âmbito dos cursos de Educação e Formação para Adultos, pode-se considerar que este objetivo foi alcançado.

Nesta dissertação, começou-se por fazer a caraterização e enquadramento dos cursos de Educação e Formação para Adultos, identificando os pontos presentes nos referenciais de formação, que pudessem ser abordados no âmbito da geometria do círculo e da circunferência. Claro que os conceitos matemáticos, muitas vezes, apresentam interligações e nem sempre este tipo de abordagem por conteúdo específico é fácil de ser implementada. No entanto, pela ampla abrangência destes conceitos geométricos e pelas pertinentes orientações dadas ao longo desta dissertação, tal dificuldade, foi rapidamente ultrapassada.

De seguida, estruturou-se uma base teórica sólida e adequada ao trabalho a desenvolver, a qual, poderá vir a servir de base aos formadores da área. Neste ponto, deu-se importância à perspetiva histórica do círculo e da circunferência, considerando que tal poderá incentivar a curiosidade natural dos formandos destes cursos e, de certo modo, entusiasmá-los para o estudo da geometria e da Matemática em geral.

Por último, cumpriu-se o objetivo de elaborar uma série de atividades e fichas de trabalho adequadas ao público alvo. Estas propostas contêm vários níveis de dificuldade de modo a poderem ser aplicadas em diferentes turmas. Para cada uma destas atividades e exercícios foi realizada uma resolução detalhada à luz dos conceitos teóricos apresentados, sendo dada importância à aplicação prática e contextualização relacionada com as várias áreas profissionais que estes tipos de cursos disponibilizam. Deste modo, os formandos poderão vir a identificar conceitos matemáticos nas atividades profissionais que porventura venham a desenvolver no seu futuro. Uma vez mais, pretendeu-se que esta dissertação contribuísse efetivamente para a divulgação da Matemática derrubando preconceitos negativos a ela associados.

Importa salientar que, durante o desenvolvimento desta dissertação, se deu a pandemia mundial causada pelo novo corona vírus. Este facto, para além de condicionar em termos sociais e pessoais, também condicionou o acesso a fontes bibliográficas fisicamente disponibilizadas em bibliotecas e livrarias. De facto, para o desenvolvimento desta dissertação a maioria das fontes bibliográficas foram consultadas a partir da internet, o que representou, de certa forma, uma condicionante.

4.2 - Reflexão final

O formador, como agente de mudança, deverá adaptar estratégias ao perfil dos seus formandos, fomentar o desenvolvimento de competências de resolução de problemas da realidade e promover a motivação para a aprendizagem da Matemática. Por estes motivos, será fundamental o desenvolvimento e divulgação de material de apoio diversificado para cada uma das unidades de formação, nomeadamente, para as unidades de Matemática para a Vida.

Como perspetiva futura, poder-se-á alargar este tipo de trabalho a outros pontos presentes nos referenciais dos cursos de Educação e Formação para Adultos, ou até a outros tipos de modalidades de formação, como por exemplo, os Cursos de Aprendizagem para Jovens.

Um ponto de partida óbvio, seria abordar conteúdos relacionados com o cálculo e álgebra aplicados à resolução de problemas, uma vez que, na formação profissional, este tema assume grande importância. Seria necessário começar por identificar nos referenciais de formação quais os critérios de evidência específicos que fossem pertinentes para este tema, de seguida deveria ser apresentada uma base de sustentação teórica e, por último, seriam elaboradas atividades e fichas de trabalho tendo em conta os critérios que levaram ao desenvolvimento desta dissertação, isto é, privilegiando sempre a adequação da Matemática a contextos de vida real, tendo em conta as saídas profissionais e os interesses dos formandos.

Outra linha de desenvolvimento que poderia ser seguida, passaria pela criação de materiais específicos das várias unidades de Matemática para a Vida tendo em vista a sua utilização em plataformas de gamificação e e-learning. Tal base de apoio seria decerto muito útil para aplicação no ensino profissional, nomeadamente, no caso particular do ensino não presencial, que atualmente está a ganhar cada vez mais importância.

Uma vez mais, constata-se que, também neste campo de ação, não existem muitos trabalhos realizados e tal desenvolvimento seria certamente muito valorizado pelos formadores da área. Atendendo a que o ensino profissional tem tendência a ser cada vez mais encarado como uma alternativa válida ao ensino tradicional, o desenvolvimento e publicação deste tipo de trabalhos seria certamente adequado à realidade presente do nosso país e acabaria também por reforçar a valorização do ensino profissional.

Referências Bibliográficas

Agência Nacional para a Qualificação e Ensino Profissional. (2020). Referencial de Formação. Obtido em 28 de julho de 2020, de Catálogo Nacional de Qualificações: http://www.catalogo.anqep.gov.pt/PDF/QualificacaoReferencialPDF/7212/EFA/duplacertificacao/341026_RefEFA

Albuquerque, A. L. (2013). Mathematical curiosities, using the point of view of bees, experts on the subject. Obtido em Julho de 2020, de https://abelhamatematica.blogspot.com/2013/09/os-textos-matematicos-em-escrita.html

Arquimedes de Siracusa. (2019). Obtido em Julho de 2020, de Génios da Ciência: https://geniosdaciencia.bioorbis.org/2019/04/arquimedes-de-siracusa.html

Audi. (s.d.). Obtido em Novembro de 2020, de Logos, brands and logotypes: https://logo-logos.com/audi-logo-1459.html

Cantor's Paradise. (s.d.). Obtido em Outubro de 2020, de Medium: https://medium.com/cantors-paradise/calculus-and-the-legend-of-the-founding-of-carthage-7ec8d033ea06

Como ler a marcação de um pneu. (s.d.). Obtido em Maio de 2020, de BFGoodrich: https://www.bfgoodrich.pt/auto/conselhos-sobre-pneus/como-ler-a-marcacao-de-um-pneu

Constantes Físicas. (s.d.). Obtido em Maio de 2020, de Física.net: https://www.fisica.net/constantes/resistividade-eletrica-(ro).php

Dardos. (s.d.). Obtido em Novembro de 2020, de Decathlon: https://www.decathlon.pt/alvo-de-dardos-aco-conjunto-id_8348130.html?LGWCODE=1405800;131273;6179&gclid=CjwKCAiA-_L9BRBQEiwA-bm5fiio4xYCElI-YnIoQDzoEESW8XtmFdJ7QMpVtDhCOb75E1us32BKshoC77wQAvD_BwE

Desigualdade Isoperimétrica. (s.d.). Obtido em Outubro de 2020, de Wikipédia: https://pt.wikipedia.org/wiki/Desigualdade_isoperim%C3%A9trica

Dido. (s.d.). Obtido em Outubro de 2020, de Wikipédia: https://pt.wikipedia.org/wiki/Dido

Emma Haruka Iwao. (s.d.). Obtido em Setembro de 2020, de Wikipédia: https://pt.wikipedia.org/wiki/Emma_Haruka_Iwao

Eneida. (2010). Obtido em Outubro de 2020, de Wikipédia: https://pt.wikipedia.org/wiki/Eneida

Equivalência de pneus Auto. (s.d.). Obtido em Maio de 2020, de Pneus online: https://www.pneus-online.pt/equivalencia-de-pneus-conselhos.html

Instituto de Emprego e Formação Profissional, I.P. (2009). CN - Circular Normativa n.º3. 4-9.

Junior, L. (2019). *Kiev, a surpreendente capital da Ucrânia*. Obtido em Novembro de 2020, de Ser turista: http://serturista.com.br/ucrania/kiev/kiev-a-surpreendente-capital-da-ucrania/

Livro 1 dos Reis, Capítulo 7. (s.d.). Obtido em Julho de 2020, de Bíblia Online: https://www.bibliaonline.com.br/nvi/1rs/7/23-26+

Magoo's. (s.d.). Obtido em Maio de 2020, de Amazon: https://www.amazon.com/Magoos-Antique-Style-Bicycle-Farthing/dp/B07KML2FL2

Mercedes-Benz Debuts New Augmented Reality Technology at 2019 U.S. Open. (2019). Obtido em Novembro de 2020, de CISION - PR Newswire: https://www.prnewswire.com/news-releases/mercedes-benz-debuts-new-augmented-reality-technology-at-2019-us-open-300905517.html

Ministério do Trabalho e da Solidariedade Social. (2007). Decreto-Lei 396/2007. *Diário da República n.º 251/2007, Série I*, 9165 - 9173. Obtido em Maio de 2020, de https://dre.pt/pesquisa/-/search/628017/details/maximized

Ministérios da Economia e do Emprego e da Educação e Ciência. (2011). Diário da República n.º 204/2011, Série I. *Portaria 283/2011*, 4695 - 4712.

Ministérios do Trabalho e da Solidariedade Social e da Educação. (2008). Diário da Repúblican.º 48/2008, Série I. *Portaria n.º 230/2008*, 1456 - 1470. Obtido em Maio de 2020, de https://dre.pt/pesquisa/-/search/247246/details/maximized

Nascimento, D. (s.d.). *Templo de Salomão-Utensílios*. Obtido em Julho de 2020, de Jesus e a Bíblia: https://www.jesuseabiblia.com/biblia-de-estudo-online/2-cronicas-4-estudo/

Polegadas. (s.d.). Obtido em 5 de 2020, de Metric Conversions: https://www.metric-conversions.org/pt/comprimento/polegadas-em-centimetros.htm

Pragmatismo Político. (s.d.). Obtido em Julho de 2020, de https://www.pragmatismopolitico.com.br/2017/11/origem-da-roda-recente.html

Radice, L. L. (1985). *A Matemática de Pitágoras a Newton.* Lisboa: Edições 70.

Santiago, E. (s.d.). *Roda*. Obtido em Julho de 2020, de InfoEscola: Navegando e Aprendendo: https://www.infoescola.com/cultura/roda/

Science4you. (2019). *Dia do Pi – O número sem fim*. Obtido em Setembro de 2020, de Science4you: https://blog.science4you.pt/curiosidades/dial-do-pi/

William Jones. (2018). Obtido em Julho de 2020, de Wikipédia: https://pt.wikipedia.org/wiki/William_Jones_(matemático)

Apêndices

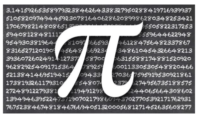
A.1 - Atividade 1 - À descoberta do número Pi

Turma: ___________

Nome: ____ Data: ____/____/________

Unidade: Unidade MV_3B - Usar a Matemática para analisar e resolver problemas e situações problemáticas.

Atividade 1 – À descoberta do número Pi



Material necessário:
- Fio de pesca
- Fita métrica
- Calculadora

O objetivo desta atividade é descobrir experimentalmente uma aproximação de π.

Com a ajuda do formador formem equipas com dois ou três elementos.

Em grupo, procurem 10 objetos circulares de diferentes tamanhos, dentro ou fora da sala de formação.

Utilizem o fio de pesca ajustando-o cuidadosamente em torno de cada objeto, depois, estiquem o fio sobre a fita métrica e meçam o seu comprimento. Utilizem também a fita métrica para medir o diâmetro do objeto.

Registem na tabela os valores recolhidos. Quando terminarem voltem à sala e utilizem a calculadora para determinar o valor da última coluna da tabela.

Registem as conclusões desta atividade tendo em conta que $\pi \simeq 3{,}14$

Objeto circular	Perímetro - P	Diâmetro - d	$\frac{P}{d}$

Conclusões:

____

____

____

____

Sugestões complementares:

Calculem a média aritmética entre os 10 valores obtidos e comparem com os valores obtidos anteriormente.

Realizem uma pesquisa na internet sobre o número Pi, procurando descobrir a evolução histórica deste número. Pesquisem ainda sobre factos curiosos relacionados com o número Pi.

A.2 - Atividade 2 - Área do círculo

Turma: ___________

Nome: ____ Data: ____/____/________

Unidade: Unidade MV_3B - Usar a Matemática para analisar e resolver problemas e situações problemáticas.

Atividade 2 – Área do círculo

Material necessário:

- Fita métrica
- Calculadora

O objetivo desta atividade é descobrir o valor da área de uma tampa de saneamento.

Com a ajuda do formador definam equipas com dois ou três elementos.

Fora da sala procurem uma tampa de saneamento redonda, como a que está representada na figura seguinte:

Tampa de uma caixa de visita

Recorrendo à fita métrica, comecem por medir o raio da tampa (considerem a medida desde o centro até ao rebordo interior da tampa)

r = ____

Meçam o comprimento do lado de um dos pequenos quadrados da face da tampa

l = ____

Calculem a área de um desses quadrados. (Recordem que a fórmula de cálculo da área de um quadrado é dada por $A = l^2$, onde *l* é o comprimento do lado do quadrado)

A = ____

De seguida, façam uma estimativa do número total de quadrados que encaixariam na parte central da tampa e na zona dos orifícios.

n.° de quadrados que caberiam na zona central e nos orifícios da tampa = ____

Contagem por defeito do número de quadrados na face da tampa

Neste passo, contem a quantidade de quadrados completos que estão na face da tampa.
A área total desses quadrados corresponde a uma aproximação por defeito da área da tampa.

Número de quadrados (por defeito) = ____
Área total dos quadrados (por defeito) = ____ × ____ = ____

Contagem por excesso do número de quadrados na face da tampa

Façam a contagem da quantidade de quadrados por excesso, isto é, contabilizem como quadrados completos, mesmo aqueles que não o sejam.
A área total destes quadrados será uma aproximação da medida da área da tampa por excesso.

Número de quadrados (por excesso) = ____

Área total dos quadrados (por excesso) = ____ × ____ = ____

Nota: Esta parte não será contabilizada como sendo um quadrado na contagem por defeito, mas será contabilizada como um quadrado na contagem por excesso.

Tampa de uma caixa de visita

Podem concluir que a área da tampa é superior a ________ e inferior a ________.

Fazendo a média aritmética entre estes dois valores obtém-se um resultado aproximado da área da tampa.

$$\text{Área da tampa} \simeq \frac{\quad + \quad}{2} = \underline{\qquad}$$

Utilizem agora a fórmula da área do círculo para comparar resultados.
Substituam o valor de r na fórmula da área do círculo e determinem a área da tampa utilizando essa fórmula (utilizem $\pi \simeq 3{,}14$).

$$A = \pi \times r^2$$

$$A = \underline{\qquad}$$

Comparem os dois valores encontrados para a área da tampa e comentem eventuais diferenças.

Conclusões:

____

____

____

____

Sugestões complementares:
Investiguem na internet o tema da área do círculo e como foi deduzida a fórmula para cálculo da sua área.

A.3 - Atividade 3 - Área de figuras com o mesmo perímetro

Turma: ___________

Nome: ____ Data: ____/____/________

Unidade: Unidade MV_3B - Usar a Matemática para analisar e resolver problemas e situações problemáticas.

Atividade 3 – Área de figuras com o mesmo perímetro

O objetivo desta atividade é experimentalmente comparar a área de diferentes figuras que tenham o mesmo perímetro.

Com a ajuda do formador definam equipas com dois ou três elementos.

Comecem por estender o fio disponível e medir com exatidão o seu comprimento.

Material necessário:

- Fio de lã (aproximadamente 1m)
- Fita métrica
- Calculadora

De seguida utilizem o fio para, em cima da secretária, representarem as seguintes figuras geométricas:

- Quadrado;
- Triângulo;
- Retângulo;
- Círculo;

Formulário:

Área do quadrado: $A = lado \times lado$

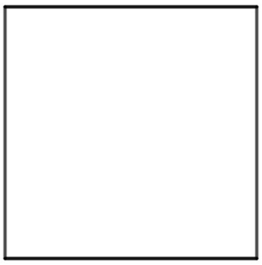
Área do triângulo: $A = \frac{base \times altura}{2}$

Área do retângulo: $A = comprimento \times largura$

Área do círculo: $A = \pi \times r^2$

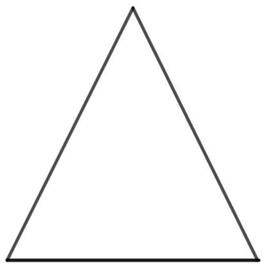
Façam um esboço das figuras obtidas e para cada uma delas calculem a área.

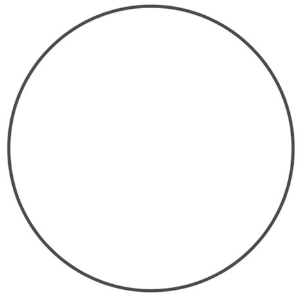
Nota: Podem utilizar as figuras em baixo como um esboço para registo das medidas que achem pertinentes e calcular o valor da área:



Área = ____

Área = ____





Área = ____   Área = ____

a) O que podem afirmar sobre o perímetro das figuras que construíram?

b) De todas estas figuras existe alguma com área superior às restantes?

Sugestões complementares:

Investiguem na internet sobre o tema “Problema Isoperimétrico” e sobre todos os factos históricos curiosos relacionados com este problema.

A.4 - Ficha de trabalho 1 - Aplicação de conceitos geométricos elementares

Ficha de trabalho 1 - Aplicação de conceitos geométricos elementares

Objetivos desta ficha de trabalho:

- Em contextos de vida resolver problemas que envolvam os conceitos de perímetro, área, volume; potenciação e radiciação;
- Em contextos de vida resolver problemas que envolvam números racionais e números irracionais;
- Estabelecer a ligação entre conceitos matemáticos e conhecimento de procedimentos na realização de construções geométricas (quadriláteros, outros polígonos e lugares geométricos);
- Descrever figuras geométricas no plano e no espaço;
- Comunicar os resultados de trabalhos de projeto usando a Linguagem Matemática e a Língua Portuguesa.

Pré-requisitos:

Previamente à realização desta atividade deverão ser definidos os conceitos de perímetro e área de figuras planas (quadrado, retângulo, triângulo e círculo), arcos de uma circunferência, ângulos, setores circulares.

Material necessário:

- Régua;
- Compasso;
- Transferidor;
- Calculadora.

Avaliação:

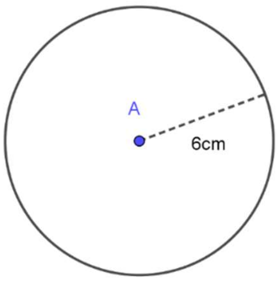
- Empenho e participação;
- Realização de construções geométricas;
- Desenvolvimento de raciocínio geométrico e dedutivo;
- Tomada de conclusões e comunicação dos resultados obtidos.

Nota: Nos cálculos intermédios utilize $\pi \simeq 3{,}14$.

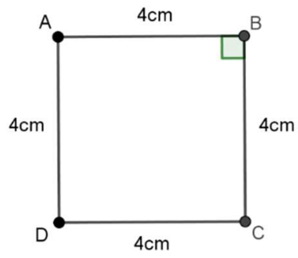
Exercício 1

Identifique as figuras representadas:

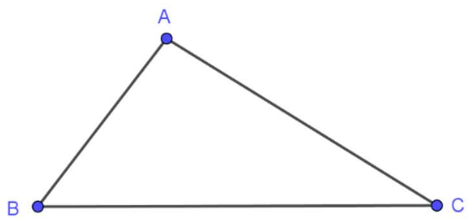
a)



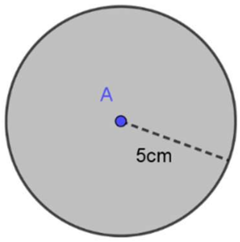
b)



c)



d)



Exercício 2

Represente numa folha do seu caderno as seguintes figuras:

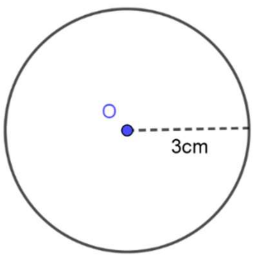
a) Uma circunferência com centro no ponto O e raio 3 cm.

b) Um círculo com centro no ponto C e raio 4,5 cm.

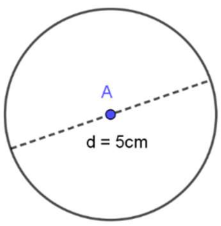
Exercício 3

Calcule o perímetro das circunferências:

a)



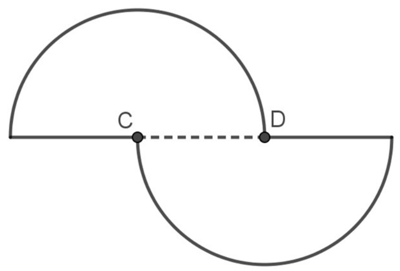
b)



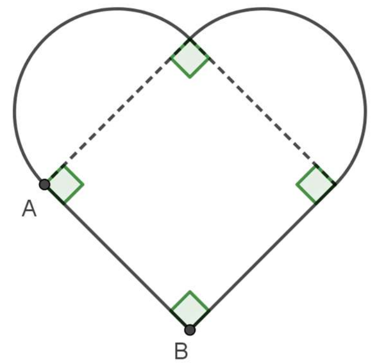
Exercício 4

Determine o perímetro das figuras:

a) Sabendo que $\overline{CD} = 2\ cm$ e que C e D são os centros das duas semicircunferências



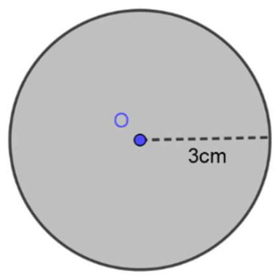
b) Sabendo que $\overline{AB} = 8\ cm$ é a medida do lado do quadrado representado na figura



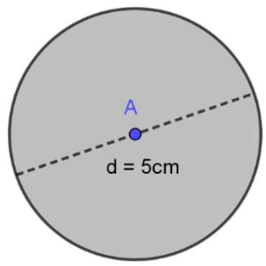
Exercício 5

Calcule a área dos círculos:

a)



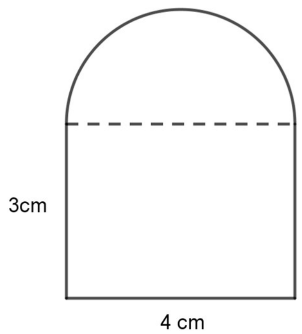
b)



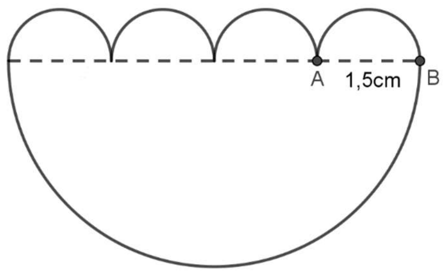
Exercício 6

Calcule a área das figuras:

a)

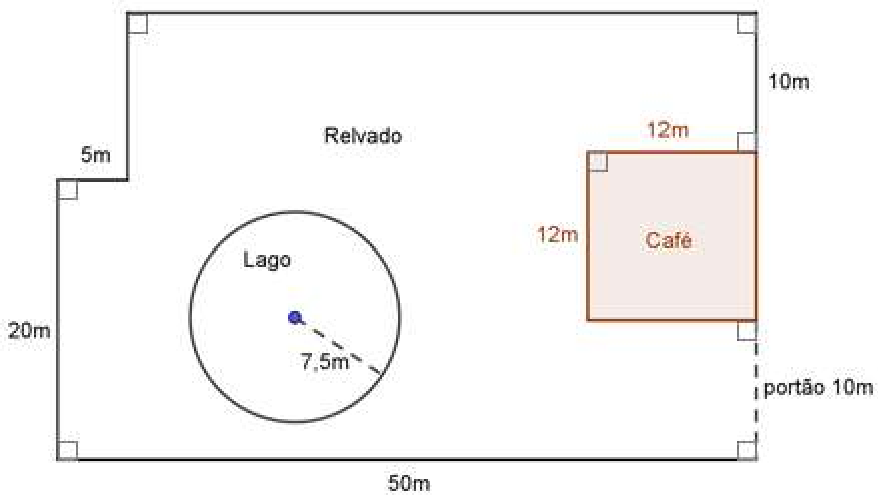


b)



Exercício 7

Observe o esquema relativo à planta de um jardim:



Determine:

a) A área do Café.

b) A área do Lago.

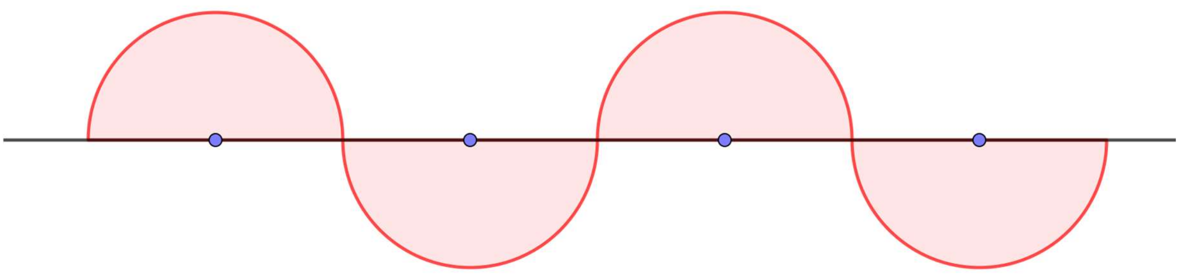
c) O perímetro exterior de todo o recinto.

d) O comprimento de uma vedação a colocar em torno do lago.

e) A área da zona com relva.

Exercício 8

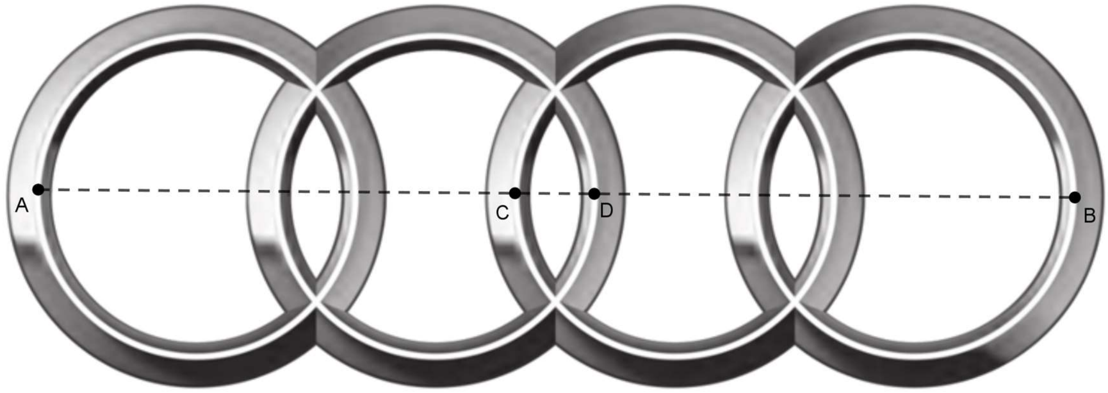
Sabendo que a linha vermelha tem um comprimento de 12,56 m e que todas as semicircunferências têm o mesmo raio, calcule a área da figura:



Exercício 9

O emblema de uma conhecida marca de automóveis está representado em baixo.

Sabe-se que: $\overline{AB} = 13\ cm$ e $\overline{CD} = 1{,}2\ cm$, determine a medida do comprimento do diâmetro e o perímetro de cada uma das circunferências.



Emblema da marca Audi (Audi, s.d.)

A.5 - Ficha de trabalho 2 - Aplicação de conceitos geométricos elementares

Ficha de trabalho 2 - Aplicação de conceitos geométricos elementares

Objetivos desta ficha de trabalho:

- Em contextos de vida resolver problemas que envolvam os conceitos de perímetro, área, volume; potenciação e radiciação;
- Em contextos de vida resolver problemas que envolvam números racionais e números irracionais;
- Estabelecer a ligação entre conceitos matemáticos e conhecimento de procedimentos na realização de construções geométricas (quadriláteros, outros polígonos e lugares geométricos);
- Descrever figuras geométricas no plano e no espaço;
- Comunicar os resultados de trabalhos de projeto usando a Linguagem Matemática e a Língua Portuguesa.

Pré-requisitos:

Previamente à realização desta atividade deverão ser definidos os conceitos de perímetro e área de figuras planas (quadrado, retângulo, triângulo e círculo), arcos de uma circunferência, ângulos, setores circulares.

Material necessário:

- Régua;
- Compasso;
- Transferidor;
- Calculadora.

Avaliação:

- Empenho e participação;
- Realização de construções geométricas;
- Desenvolvimento de raciocínio geométrico e dedutivo;
- Tomada de conclusões e comunicação dos resultados obtidos.

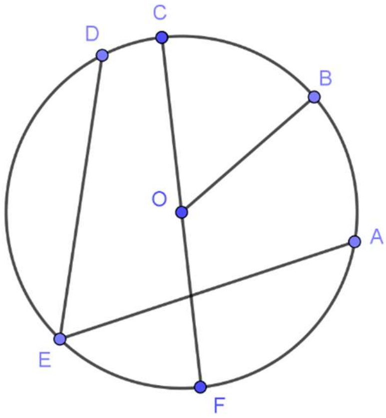
Nota: Nos cálculos intermédios utilize $\pi \simeq 3{,}14$.

Exercício 1

Na figura está representada uma circunferência de centro O, os restantes pontos assinalados pertencem à circunferência.

a) Indique um segmento com medida de comprimento igual ao raio.

b) Indique um diâmetro.



c) Indique uma corda.

d) Indique um ângulo ao centro.

e) Indique um ângulo inscrito.

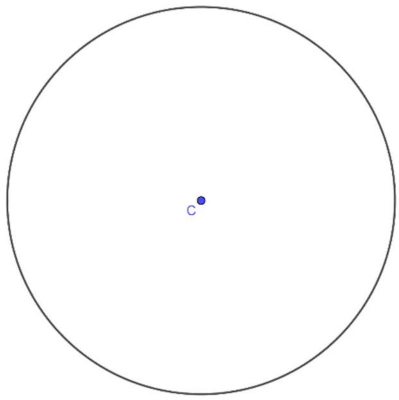
f) Sombreie a lápis um setor circular.

g) Sombreie a lápis o arco DE.

Exercício 2

Na figura está representada uma circunferência com centro no ponto C.

Utilize o material geométrico adequado para:



a) Representar um ângulo ao centro ∢ACB, com amplitude 60°.

b) Assinalar à sua escolha um ponto D pertencente ao arco BA.

c) Desenhar o ângulo inscrito ∢ADB.

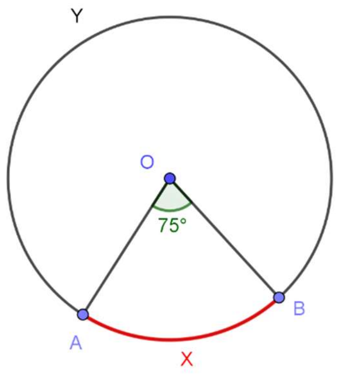
d) Medir a do amplitude do ∢ADB.

Nota: Compare a sua resposta com a dos seus colegas e tire conclusões.

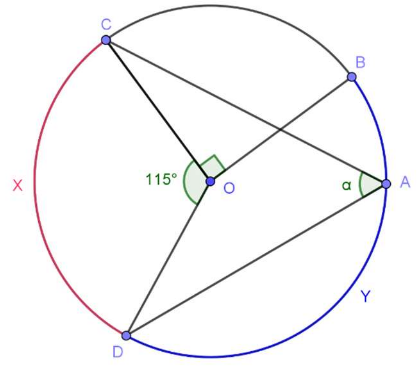
Exercício 3

Determine as amplitudes desconhecidas (justifique as suas respostas):

a)

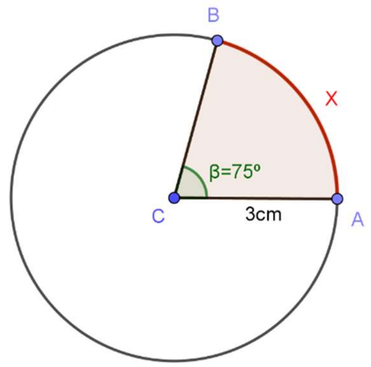


b)



Exercício 4

Na figura está representada uma circunferência de centro C e raio 3 cm. Está também assinalada a amplitude do ∢ACB.



a) Determine a amplitude do arco AB.

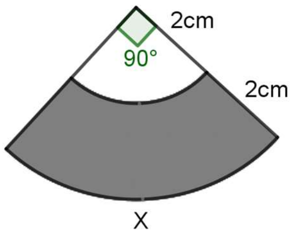
b) Determine a medida do comprimento do arco AB (designada por X).

c) Determine a área do setor circular que está sombreado.

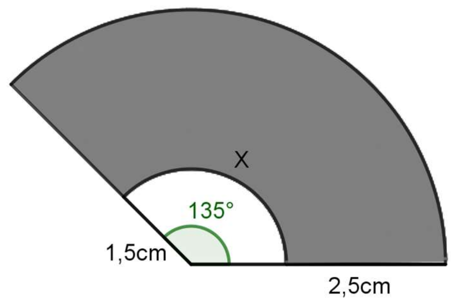
Exercício 5

Em cada figura calcule a área da parte colorida e o comprimento do arco assinalado com um X.

a)



b)



Exercício 6

Observe o emblema da marca Mercedes – Benz. Sabe-se que o arco BC mede 18,84 cm.

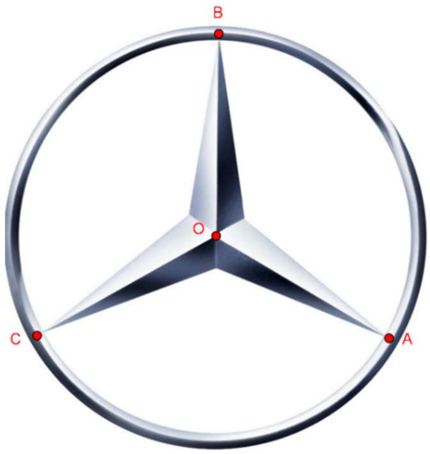
Determine:

a) A amplitude do ângulo $\sphericalangle AOB$.

b) A amplitude do ângulo $\sphericalangle ACB$.

c) A medida do comprimento do diâmetro do emblema.

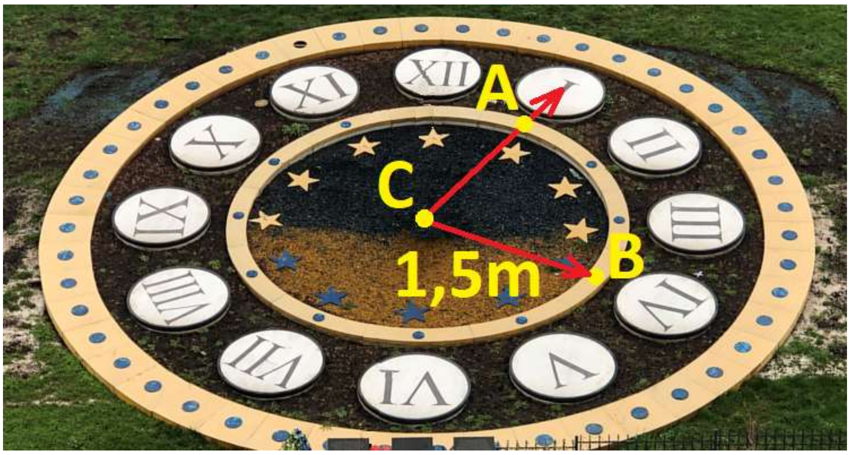
d) A área do setor circular que corresponde ao arco CA.



Emblema da Mercedes-Benz
(Mercedes-Benz Debuts New Augmented Reality Technology at 2019 U.S. Open, 2019)

Exercício - 7

Observe a fotografia do jardim, o qual, foi plantado para representar um relógio. Note que existem vários pontos assinalados na figura.



Jardim em forma de relógio (imagem adaptada) (Junior, 2019)

a) Qual é a distância entre o ponto C e o ponto A?

b) Qual é a amplitude do $\sphericalangle BCA$?

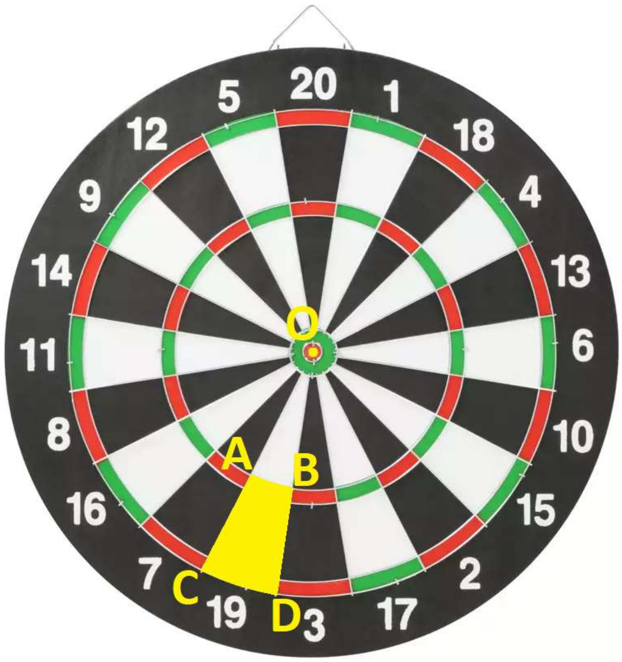
c) Qual é o comprimento do arco BA?

d) No setor circular limitado pelo arco BA irão ser plantadas flores. Estas deverão ser plantadas com uma dispersão aproximada de 30 plantas por m^2. Faça uma estimativa do número de flores que poderão ser colocadas nessa zona do jardim.

Exercício 8

O alvo representado é composto por circunferências concêntricas e vários setores circulares.

Sabe-se que: $\overline{OA} = 12{,}8\ cm$ e $\overline{OC} = 20\ cm$.



Alvo de um jogo de setas (Dardos, s.d.)

a) Em quantos setores circulares iguais está dividido o alvo?

b) Qual é a amplitude do arco de cada um dos setores circulares referidos na alínea anterior?

c) Compare a amplitude dos arcos AB e CD.

d) Calcule a área da região pintada a amarelo.

A.6 - Ficha de trabalho 3 - Propostas de trabalho com aplicação em contexto real

Ficha de trabalho 3 - Aplicação de conceitos geométricos a problemas reais

Objetivos desta ficha de trabalho:

- Em contextos de vida resolver problemas que envolvam os conceitos de perímetro, área, volume; potenciação e radiciação;
- Em contextos de vida resolver problemas que envolvam números racionais e números irracionais;
- Estabelecer a ligação entre conceitos matemáticos e conhecimento de procedimentos na realização de construções geométricas (quadriláteros, outros polígonos e lugares geométricos);
- Descrever figuras geométricas no plano e no espaço;
- Comunicar os resultados de trabalhos de projeto usando a Linguagem Matemática e a Língua Portuguesa.

Pré-requisitos:

Previamente à realização desta atividade deverão ser definidos os conceitos de perímetro e área de figuras planas (quadrado, retângulo, triângulo e círculo), arcos de uma circunferência, ângulos, setores circulares, relação entre movimento circular e movimento retilíneo uniforme.

Material necessário:

- Calculadora.

Avaliação:

- Empenho e participação;
- Realização de construções geométricas;
- Desenvolvimento de raciocínio geométrico e dedutivo;
- Tomada de conclusões e comunicação dos resultados obtidos.

Nota: Nos cálculos intermédios utilize $\pi \simeq 3{,}14$.

Exercício 1

Bicicleta do João (Magoo's, s.d.)

Todos os dias o João gosta de dar uma volta na sua bicicleta antiga. Como é bastante observador e curioso, reparou que o pneu da roda traseira está a ficar com o piso bastante mais gasto do que o pneu da roda dianteira. Para investigar esta situação, o João decidiu fazer uma experiência prática. Reparou que, num trajeto de 100 metros em linha reta, a roda dianteira deu 38 voltas completas, enquanto que a roda traseira deu 114 voltas. Parece que estava explicado o porquê do desgaste do pneu traseiro…

a) Comente o resultado da experiência realizada pelo João.

b) Por cada volta completa da roda dianteira, quantas voltas deu a roda traseira?

c) Determine o deslocamento da bicicleta na estrada por cada volta completa da roda dianteira.

d) Qual é o raio de cada uma das rodas? (apresente o resultado em centímetros).

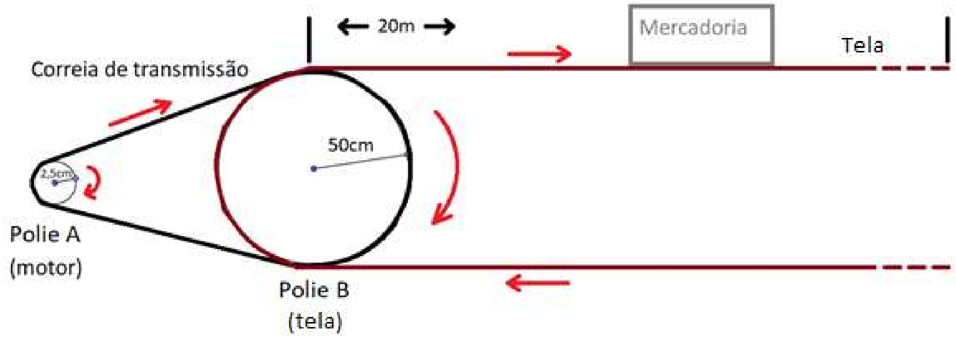
e) Quando a bicicleta do João circula a uma velocidade constante de 25 Km/h, quantas rotações por minuto (rpm) estará a realizar a roda dianteira? E a roda traseira?

f) Observando a imagem da bicicleta qual é a área de cada setor circular da roda dianteira? E da roda traseira?

Exercício 2

Num armazém do ramo da logística existe um tapete rolante destinado a transportar caixas de mercadorias de um piso para o outro. O motor elétrico deste conjunto tem uma velocidade de funcionamento, em condições permanentes, de 1420 rpm (rotações por minuto) e aciona através de uma correia de transmissão a tela onde são colocadas as mercadorias. Essa correia de transmissão está intercalada entre duas polies[11].

A polie que está acoplada diretamente no veio do motor (designada por polie A) tem um raio de 2,5 cm, enquanto que a polie acoplada à tela (designada por polie B) tem um raio de 50 cm (igual ao diâmetro do rolo onde a tela é tracionada). A tela tem um comprimento total de 20 metros. Em baixo está apresentado um pequeno esquema referente a este tapete rolante:



Representação esquemática do tapete rolante: conjunto polies, correia de transmissão e tela

a) Calcule o perímetro de cada uma das polies (apresente o resultado em metros).

b) Determine a razão entre o perímetros da polie B e polie A. Comente o resultado tendo em conta o número de rotações por minuto (rpm) efetuado por cada polie durante o funcionamento do tapete.

c) Determine quantas voltas por minuto realiza a polie que está acoplada à tela (polie B).

d) Determine a velocidade com que as mercadorias circulam na tela (apresente o valor em m/s).

e) Determine quanto tempo demora uma caixa a chegar ao final da tela (apresente o resultado em segundos).

---

[11] Uma polie é um componente mecânico com forma circular que contém um encaixe central que permite acoplar as polies, por exemplo, ao veio giratório de um motor ou a um rolo que faça movimentar a tela de um tapete rolante. Entre duas polies é intercalada uma correia de transmissão flexível com a função de transmitir o movimento rotativo entre elas.

Exercício 3

Como decifrar os valores que surgem num pneu de um automóvel.

Pneu 225/55R17

Neste exemplo, as medidas que surgem na parede lateral do pneu têm o seguinte significado:

225 – Significa que a largura do pneu é de 225 mm, ou seja, 22,5 cm;

55 – Significa que a parede lateral tem uma percentagem de 55% em relação à largura do pneu, ou seja, $\frac{55}{100} \times 225 = 123{,}75\, mm$;

R - Significa que se trata de um pneu com construção radial[12];

17 – Significa que o diâmetro da jante é de 17 polegadas, ou seja, o diâmetro interno do pneu é 17 polegadas.

Nota: No sistema de unidades 1 polegada = 2,54 cm (Polegadas, s.d.).

Os fabricantes de automóveis, muitas vezes, admitem nas características técnicas dos veículos a possibilidade da utilização de mais do que uma medida do conjunto jante-pneu. Para tal, entre outros cálculos, têm em linha de conta que o perímetro final não varie significativamente. Caso se instalasse inadvertidamente um conjunto jante-pneu desapropriado, poderiam ser alteradas as condições de segurança do veículo o que, entre outras consequências, originaria erro no odómetro do veículo (indicação errada da velocidade do veículo) (Equivalência de pneus Auto, s.d.).

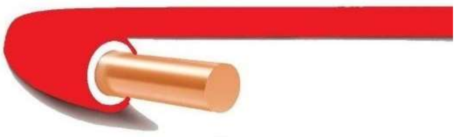
a) Suponha que um determinado veículo tem instalado o conjunto jante-pneu indicado na figura anterior. Determine o número de rotações por minuto efetuado pelo pneu quando o veículo circula num movimento retilíneo uniforme a uma velocidade de 100 km/h (constante).

[12] Um pneu radial é composto por uma carcaça flexível disposta de maneira radial e por uma armadura metálica para estabilizar a banda de rodagem.

b) Considere que o proprietário instalou um novo conjunto jante-pneu com as caraterísticas: Jante 18 polegadas; Pneu 215/55. Determine a velocidade real do veículo quando o odómetro indicar uma velocidade de 100 Km/h e comente o resultado obtido.

Exercício 4

Os fios condutores elétricos, normalmente, têm secção circular e esta obedece a valores normalizados. Os materiais condutores usualmente utilizados nas instalações elétricas são o cobre e o alumínio.



Fio condutor com secção circular

A Resistência elétrica é medida em Ohm [Ω] e traduz a capacidade de um corpo qualquer se opor à passagem de corrente elétrica. A fórmula simplificada para cálculo de resistência elétrica é a seguinte (Constantes Físicas, s.d.):

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

onde:

L - representa o comprimento do fio condutor (em metros);

S - representa a área da secção circular (em mm^2);

ρ - representa a resistividade elétrica do material. Este valor é tabelado e depende do material em causa (em $\Omega mm^2/m$).

Observando as relações matemáticas presentes nesta fórmula podemos afirmar que:

A resistência elétrica é proporcional ao valor da resistividade do material;

A resistência elétrica é proporcional ao comprimento do fio condutor;

A resistência elétrica é inversamente proporcional à área da secção circular do condutor.

Na tabela apresentam-se exemplos da resistividade elétrica de alguns materiais:

Elemento / Liga	Símbolo Químico	Resistividade a 20°C ($\Omega mm^2/m$)
Alumínio	Al	0,0282
Cobre	Cu	0,0172

a) Determine a resistência elétrica a 20°C de um fio condutor de cobre com uma área de secção de 1,5 mm^2 e 25 metros de comprimento.

b) Determine o raio deste fio condutor.

c) Qual será a resistência elétrica de um fio condutor nas mesmas condições da alínea anterior, mas feito de alumínio?

d) Um fio condutor de cobre com 30 metros de comprimento tem um diâmetro aproximado da sua secção circular de 4,51 mm. Determine a resistência elétrica deste condutor.

Exercício 5

Certamente já reparou que os cabos elétricos, por vezes, apresentam uma configuração interna na qual a quantidade de fios condutores não é sempre a mesma (unifilar ou multifilar).

Cabo unifilar Cabo multifilar

Uma das razões desta diferença está relacionada com o chamado efeito pelicular da corrente elétrica. Este efeito, é resultante do facto de os eletrões (responsáveis pela corrente elétrica) terem tendência a circular maioritariamente pela parte periférica dos fios condutores, o que está diretamente relacionado com o perímetro do fio condutor.

Investigue a relação matemática entre o perímetro de um condutor C1 com uma determinada área e o perímetro total de dois condutores C2 e C3 cada um deles com metade da área de C1.

Sugestão: Comece por analisar o que acontece, por exemplo, para um cabo elétrico com secção de 6 mm^2.