Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2020

Sara Alexandra Dias da Costa e Silva

Teorema de Pitágoras: uma abordagem criativa para o desenvolvimento de competências transversais e específicas

Sara Alexandra

Dias da Costa e Silva

Teorema de Pitágoras: uma abordagem criativa para o desenvolvimento de competências transversais e específicas

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para Professores, realizada sob a orientação científica da Prof.ª Doutora Isabel Maria Cabrita dos Reis Pires Pereira, Professora Associada do Departamento de Educação e Psicologia da Universidade de Aveiro e da Prof.ª Doutora Andreia Oliveira Hall, Professora Associada do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

o júri

Presidente

Prof.ª Doutora Maria Paula de Sousa Oliveira
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

Prof. Doutor António Augusto Gaspar Ribeiro
Professor Coordenador da Escola Superior de Educação de Viseu

Prof.ª Doutora Isabel Maria Cabrita dos Reis Pires Pereira
Professora Associada da Universidade de Aveiro

agradecimentos

Às minhas orientadoras, a Professora Doutora Isabel Cabrita e a Professora Doutora Andreia Hall, pela disponibilidade, compreensão e todo o apoio prestado de forma a tornar viável este trabalho, e aos meus alunos pela colaboração.

Dedico este trabalho às minhas filhas Carolina e Luísa, ao meu marido e aos meus pais pelo incansável apoio.

palavras-chave Teorema de Pitágoras, criatividade, conexões, GeoGebra.

resumo

O ensino nas escolas tem hoje novos desafios na preparação dos alunos para o mercado de trabalho e exige que estes sejam flexíveis, criativos e pró-ativos, uma vez que dificilmente desempenharão a mesma função durante a sua vida, ou até desempenharão funções que hoje ainda nem existem. Respeitando os princípios, áreas de competência e valores previstos no documento Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, espera-se que os docentes, no sentido de os preparar, exerçam uma *praxis* inovadora e criativa. O ensino da matemática, ciência com presença relevante nas mais variadas áreas, assume um papel primordial na articulação com outros saberes. A planificação de experiências didáticas em Matemática deverá ter em conta, designadamente, o contexto e o tempo em que ocorrem. O tema no qual incide o estudo aposta numa abordagem criativa, consubstanciada por uma sequência de tarefas desafiantes que evidenciam conexões várias e cuja resolução é mediada por ferramentas tecnológicas. Esta investigação teve por objetivo analisar o impacto de uma tal abordagem criativa do Teorema de Pitágoras no desenvolvimento de competências transversais e específicas, nomeadamente, numa mais sólida apropriação e aplicação do Teorema de Pitágoras, dando particular destaque ao raciocínio, à resolução de problemas e à comunicação, e no gosto e atitude dos alunos face à Geometria. O estudo de caso, de natureza qualitativa e interpretativa, envolveu alunos do oitavo ano de escolaridade. Os dados foram recolhidos através de observações de aulas, registadas num diário de bordo e documentos relativos às produções dos alunos, tanto em suporte de papel como em suporte digital.

Observou-se, neste estudo, que os alunos, num ambiente de trabalho colaborativo, estabelecendo conexões intra e inter Matemática, com auxílio a recursos tecnológicos, parecem desenvolver o gosto e atitudes mais favoráveis em relação à disciplina, em geral, e à Geometria em particular, sentem-se mais estimulados a participar, estabelecem mais facilmente conexões, discutem ideias, conjeturam e generalizam, desenvolvendo conhecimentos, capacidades e aptidões, transversais e específicas.

keywords

Pythagorean theorem, creativity, connections, GeoGebra.

abstract

Teaching in schools today has new challenges in preparing pupils for the labour market, requiring them to be flexible, be creative and proactive, as they will hardly perform the same function during their lifetime, or even perform functions that do not even exist today. Respecting the principles, areas of competence and values, provided by the document Profile of Students at the Exit of Compulsory Schooling, it is expected that teachers, in order to prepare them, exercise an innovative and creative praxis. The teaching of mathematics, a science with a relevant presence in various areas, assumes a primordial role in the articulation with other areas of knowledge. The planning of didactic experiences in mathematics should take into account, inter alia, the context and time in which they occur. The theme on which the study focused, relied on a creative approach, embodied by a sequence of challenging tasks that evidence various connections and whose resolution is mediated by technological tools. This research aimed to analyse the impact of such a creative approach to the Pythagoras Theorem, on the development of transversal and specific skills, namely in a more solid appropriation and application of the Pythagoras Theorem, giving particular emphasis to reasoning, problem solving and communication, and on the students' taste and attitude towards Geometry. The case study, of qualitative and interpretative nature, involved eighth grade students. The data were collected through observations of classes, recorded in a research diary and documents relating to the students' productions, both on paper and in digital media.

It was observed in this study that students, in a collaborative work environment, establishing intra and inter mathematics connections, with the aid of technological resources, seem to develop taste and attitudes more favourable towards the subject, in general, and Geometry in particular, feel more stimulated to participate, establish more easily connections, discuss ideas, conjecture and generalize, developing skills and abilities.

ÍNDICE GERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DAS TABELAS

1. Problemática do estudo

"(...) a educação, na era científica, não pode continuar, de modo nenhum, a ser feita segundo os moldes do passado. Em todas as escolas o ensino das ciências tem que ser intensificado e remodelado desde as suas bases, não só quanto a programas mas ainda quanto a métodos. Uma vez que a máquina vem substituir o homem progressivamente em trabalhos de rotina, não compete à escola produzir homens-máquinas mas, pelo contrário, formar seres pensantes, dotados de imaginação criadora e de capacidade de adaptação em grau cada vez mais elevado."

(Entrevista de José Sebastião e Silva ao DN, 23-01-1968).

Parece consensual que o ensino não deverá ser uma compilação de factos a trabalhar de forma rotineira, mas que proporcione um conjunto de experiências vividas individualmente e colaborativamente, que possibilitem desenvolver diferentes áreas de competências nos alunos. Atendendo às exigências da sociedade atual, espera-se que hoje o ensino seja mais criativo, promovendo aprendizagens mais sólidas e articuladas com diferentes áreas. A sua abordagem deverá ser criativa. Surge assim a questão "*O que é a criatividade no contexto educativo?*". Este conceito, alvo de estudo e reflexões ao longo de vários anos, parece assumir formas várias, e, de alguma maneira, distintas, dependendo da época e do contexto em que surgem. A maioria das definições de criatividade, segundo Kaufman e Sternberg (2006), pressupõe, cumulativamente: algo novo, diferente, inovador, de elevada qualidade e adequado. Kaufman e Sternberg (2007), fazendo referência a Sternberg (1997,1999), identificam três importantes capacidades que, operadas simultaneamente, são fatores que conduzem ao sucesso. São elas, os pensamentos analítico, criativo e prático. E revelam que o ensino convencional enfatiza a memória em detrimento de outras capacidades. O ambiente educativo deve ser propício ao desenvolvimento de várias competências, devendo os desafios cognitivos ser bem elaborados e aplicados num ambiente estimulante e seguro, onde exista recetividade, compreensão e reforço positivo pelas ideias apresentadas. A aprendizagem, que combina o prazer da descoberta, a motivação para aprender, tempo para refletir e apresentar ideias, potencia as capacidades de cada aluno. O professor é responsável por criar um ambiente com todas essas caraterísticas e, com uma abordagem criativa, estimular os alunos a serem criativos, a aceitar as falhas e avançar, serem curiosos e autónomos.

A criatividade é uma competência transversal a todas as áreas de conhecimento. No Programa de Matemática para o Ensino Básico [PMEB], Bivar et al. (2013) procuram contrariar uma tendência enraizada no ensino, apresentar a matemática aos alunos como um produto acabado e abordá-la de forma tendencialmente rotineira, expondo os conteúdos para, seguidamente, serem exercitados. Segundo o PMEB, destacam-se três grandes finalidades: a estruturação do pensamento, a análise do mundo natural e a interpretação da sociedade, sendo que "*estas finalidades só podem ser atingidas se os alunos forem apreendendo adequadamente os métodos próprios da Matemática*" (Bivar et al., 2013, p. 2). Nas Aprendizagens Essenciais [AE] previstas para a disciplina de Matemática, documento curricular apresentado pelo Ministério da Educação (2018), em articulação com o Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (Martins et al., 2017), documentos complementares ao PMEB, torna-se bastante mais claro quais as finalidades do ensino da Matemática, pois este "*deve visar aprendizagens matemáticas relevantes e sustentáveis para todos os alunos*", (p. 1). Defende-se:

> uma aprendizagem da Matemática com compreensão, bem como o desenvolvimento da capacidade de os alunos em utilizá-la em contextos matemáticos e não matemáticos ao longo da escolaridade, e nos diversos domínios disciplinares, por forma a contribuir não só para a sua autorrealização enquanto estudantes, como também na sua vida futura pessoal, profissional e social (p. 1).

Neste contexto, a escola atual deverá saber dar resposta de forma criativa e estabelecendo conexões intra e inter Matemática, permitindo desenvolver nos alunos um conjunto vasto de competências:

> A aquisição e desenvolvimento de conhecimentos, capacidades e atitudes, e a sua aplicação em contextos matemáticos e não matemáticos, são objetivos essenciais de aprendizagem, associados aos conteúdos de aprendizagem de cada tema matemático — sendo que os que estão definidos em termos de capacidades e as atitudes expressam também um vínculo próximo com a Matemática — e a práticas de aprendizagem que visam proporcionar condições que apoiem e favoreçam aprendizagens sustentáveis, com compreensão e transferíveis ou aplicáveis em contextos matemáticos e não matemáticos. (p. 3).

2. Questões e Objetivos de Investigação

Neste contexto, formulou-se a seguinte questão que norteia a investigação:

Em que medida uma abordagem criativa do Teorema de Pitágoras, consubstanciada por uma sequência de tarefas desafiantes que evidenciam conexões várias e cuja resolução é mediada por ferramentas tecnológicas, favorece o desenvolvimento de competências transversais e específicas?

Com esta investigação, pretende-se analisar o impacto de uma tal abordagem criativa do Teorema de Pitágoras:

a. numa mais sólida apropriação e aplicação do Teorema de Pitágoras, dando-se particular destaque ao raciocínio, à resolução de problemas e comunicação;
b. no gosto e atitude face à disciplina.

3. Estrutura da Dissertação

Esta dissertação inicia-se com uma breve introdução e é composta por quatro capítulos principais.

No primeiro capítulo, é feito o enquadramento teórico do estudo norteado por dois pontos fundamentais: o Teorema de Pitágoras – apontamentos teóricos e o ensino criativo em Matemática. Relativamente ao primeiro ponto, o Teorema de Pitágoras – apontamentos teóricos, é apresentada uma abordagem histórica do Teorema. Seguidamente, são apresentadas algumas provas do Teorema de Pitágoras, a prova do Recíproco do Teorema de Pitágoras, uma generalização do Teorema de Pitágoras e a generalização de Papo. No segundo ponto, ensino criativo em Matemática, abordam-se, principalmente, as competências e conteúdos relacionados com o Teorema de Pitágoras, as orientações metodológicas assentes numa aprendizagem ativa e numa abordagem exploratória, em torno de uma sequência de tarefas desafiantes que evidenciam conexões intra Matemática e entre a Matemática e outras áreas e o dia a dia, cuja resolução é mediada pelas tecnologias.

No segundo capítulo, Método, apresentam-se e fundamentam-se as opções metodológicas adotadas neste caso de estudo; dá-se a conhecer o esquema de investigação; caraterizam-se os participantes; apresentam-se as técnicas e os instrumentos de recolha de dados; faz-se a descrição do estudo e, por fim, explicita-se o tratamento a que foram sujeitos os dados e como serão apresentados os resultados.

No terceiro capítulo, procede-se à apresentação e análise dos resultados.

No quarto capítulo, apresentam-se as principais conclusões, limitações do estudo e uma reflexão final.

A dissertação é finalizada com as referências bibliográficas e os apêndices.

CAPÍTULO I

Teorema de Pitágoras – aspetos matemáticos, curriculares e didáticos

Este capítulo assenta em dois pontos fundamentais: o Teorema de Pitágoras - apontamentos teóricos e o ensino criativo em Matemática.

1. Teorema de Pitágoras – apontamentos teóricos

"A Geometria possui dois grandes tesouros: um é o Teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de um segmento em média e extrema razão. Podemos comparar o primeiro a uma porção de ouro e o segundo a uma joia preciosa."

Kepler (1571-1630), citado por Boyer e Merszbach (2012, p. 57)

Nesta secção, é apresentada uma abordagem histórica do Teorema de Pitágoras. Seguidamente, são apresentadas algumas provas do Teorema de Pitágoras, a prova do Recíproco do Teorema de Pitágoras e algumas generalizações do Teorema de Pitágoras.

1.1. Abordagem histórica

Segundo Maor (2007), o Teorema de Pitágoras é o mais conhecido e mais utilizado teorema em toda a matemática. Apesar de ter sido atribuído a Pitágoras, sabe-se hoje que o teorema já era conhecido muitos séculos antes do seu nascimento, por Babilónios e Chineses, que o usavam na resolução de problemas, e talvez pelos Egípcios.

A evolução do Teorema de Pitágoras e o seu impacto na matemática e na cultura em geral terá começado com os Babilónios 4000 a.C., período este caraterizado por um notável progresso cultural, com inovações que perduram até hoje, como a escrita, a roda e os metais. Esta civilização surgiu num território designado por Mesopotâmia (palavra grega que significa "entre rios") que se localizava entre o Tigre e o Eufrates. No período compreendido entre 3000-2000 a.C., dá-se o início da escrita cuneiforme (do latim *cuneus*, cunha) dos números e, no período 2000-1000 a.C., pode-se observar, em placas de argila, o registo de ternos pitagóricos, resolução de equações quadráticas e resolução de sistemas de equações. Numa placa do período babilónio antigo (1900 a 1600 a.C. aproximadamente), Plimpton 322, apesar de não estar em perfeitas condições, é possível observar-se aquilo que os investigadores consideram ser um problema de medição de áreas de quadrados sobre os lados de um triângulo retângulo.

Uma outra civilização, a chinesa, desenvolveu-se nas margens dos rios Huang Ho (Amarelo) e Yangtze, por volta do terceiro milénio antes de Cristo. A sua história divide-se em quatro períodos gerais: China Antiga, compreendido entre 2000-600 a.C.; China Clássica, de 600 a.C.-221 d.C.; China Imperial, de 221-1911 e China Moderna, desde 1911. No período compreendido entre 1000-500 a.C., os chineses já possuíam um sistema de numeração "com varas" e utilizavam o teorema de Pitágoras.

Os Egípcios escreviam em folhas de papiro mas, devido às vicissitudes do clima, grande parte dos documentos ficaram estragados. Na civilização egípcia, no período compreendido entre 3000-2000 a.C., dá-se o começo da escrita hieroglífica dos números e a construção das pirâmides em Giza. No período entre 2000-1000 a.C., surge a escrita do papiro de Rhind com 85 problemas e do papiro de Moscovo, com 25 problemas, que contêm a resolução de problemas envolvendo equações lineares, cálculo de volumes e áreas. Nos problemas que constam destes papiros não há registo ou referência ao Teorema de Pitágoras. Segundo o autor Struik (1997), não há qualquer indício de que os egípcios conhecessem o Teorema de Pitágoras, "*apesar de algumas histórias infundadas sobre os harpedonaptai, que se supunha terem construído triângulos rectângulos com a ajuda de uma corda com 3+4+5=12 nós*" (p. 55). No entanto, são várias as referências feitas aos antigos egípcios na utilização de uma corda dividida em doze partes iguais separadas por nós, para ajudá-los a marcar ângulos retos nas construções utilizando, assim, o terno pitagórico (3,4,5). Segundo o autor Eves (2011), "*Há registros de que os agrimensores egípcios antigos, do tempo dos faraós, construíam triângulos 3,4,5 com uma corda dividida em 12 partes iguais por 11 nós para demarcar ângulos retos*." (p. 86).

Segundo Sá (2000), na Grécia Antiga, supõe-se ter sido Tales de Mileto, que viveu cerca de 624-548 a.C., o fundador da escola jónica, que se dedicou essencialmente à geometria, aclamado como um dos sete "sábios da Grécia". Nesta escola, há uma tentativa de explicar o mundo de uma forma racional. Na época, supõe-se que já eram conhecidos: os casos de congruência de triângulos; que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais; os ângulos internos de um triângulo valem dois retos e um ângulo é reto se e só se puder inscrever numa semicircunferência.

No estudo da matemática grega inicial, coloca-se o problema da falta de documentos originais, pelas mesmas razões imputadas aos Egípcios.

De Pitágoras pouco se sabe é natural da ilha de Samos, cuja existência não está em dúvida. Viveu na segunda metade do século VI a.C., cerca de 50 anos depois do nascimento do matemático Tales de Mileto. De acordo com relatos muito posteriores, viajou pelo Egito e pela Mesopotâmia, ainda jovem, onde tomou contacto com conhecimentos aritméticos, geométricos, astronómicos e musicais das classes sacerdotais. Em Crotona, na costa sudeste da atual Itália, fundou a Escola Pitagórica, dedicada ao estudo da matemática e filosofia, mas também com uma vertente científica. Os membros estavam sujeitos a um elevado grau de secretismo, e era difícil saber a autoria individual de cada descoberta, pois o mérito era considerado coletivo e atribuído à Escola Pitagórica ou Escola de Crotona.

Para Pitágoras e os seus seguidores, o número era a essência para a compreensão do Universo, o que fazia com que a aritmética fosse a ciência principal, sendo a música, a astronomia e a geometria também objeto de estudo. O conhecimento dos números naturais, bem como das suas propriedades, era o saber fundamental, "tudo é número", sendo que todos os outros saberes daí derivavam. Assim, a geometria pitagórica surge como ciência subordinada à aritmética. A geometria pitagórica assentava no pressuposto da comensurabilidade das grandezas. Os geómetras de Crotona devem ter constatado que existem grandezas incomensuráveis. É possível que tenham tentado saber qual a razão entre o cateto e a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles ou, analogamente, entre o lado e a diagonal de um quadrado. A existência de grandezas incomensuráveis levantou um grande problema na Escola Pitagórica, pois o princípio de que "tudo é número" foi posto em causa. Isto fez com que a investigação matemática abordasse questões ligadas à geometria de uma forma diferente. As demonstrações geométricas que faziam uso da teoria das proporções foram deixadas para trás. Desta forma, surgem dois domínios distintos – a aritmética e a geometria. Esta separação teve consequências em toda a matemática grega pós-pitagórica e, também, na matemática islâmica e europeia até ao século XVII.

1.2. Provas do Teorema de Pitágoras

"Certainly let us learn proving, but also let us learn guessing."

Polya (1954, p. vi)

O Teorema de Pitágoras afirma que, num triângulo retângulo, o quadrado da medida do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos comprimentos dos catetos.

Define-se hipotenusa como o lado que se opõe ao ângulo reto e catetos como os lados que formam o ângulo reto.

O enunciado pode, de forma equivalente, ser formulado pela relação existente entre áreas, ou seja, num triângulo retângulo, a medida da área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das medidas das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos.

Seja a a medida do comprimento do lado que representa a hipotenusa e sejam b e c as medidas dos comprimentos dos lados que representam os catetos. O enunciado do Teorema de Pitágoras afirma que $a^2 = b^2 + c^2$.

São centenas as provas existentes do Teorema de Pitágoras, algumas com apenas pequenas variações umas das outras. O matemático americano, Elisha Scott Loomis, compilou 367 provas, no livro "The Pythagorean Proposition", tendo surgido mais desde a segunda edição do livro em 1940, ano da sua morte. Surgem constantemente novas provas do teorema.

Existindo um elevado número de provas do teorema, procedeu-se a uma seleção das mesmas. As provas apresentadas a seguir privilegiam uma abordagem geométrica estando algumas presentes nas tarefas aplicadas aos alunos.

1.2.1. Prova de James Abram Garfield

Uma das muitas provas possíveis foi apresentada, em 1876, por James Abram Garfield, um general que foi eleito presidente dos Estados Unidos em 1880, tendo exercido o cargo durante quatro meses e sido assassinado em 1881.

A prova[1] baseia-se num trapézio decomposto em três triângulos retângulos, como se pode ver na figura seguinte (figura 1a)).

[1] Prova em vídeo disponível em https://pt-pt.khanacademy.org/math/basic-geo/basic-geometry-pythagorean-theorem/basic-geometry-pythagorean-proofs/v/garfield-s-proof-of-the-pythagorean-theorem

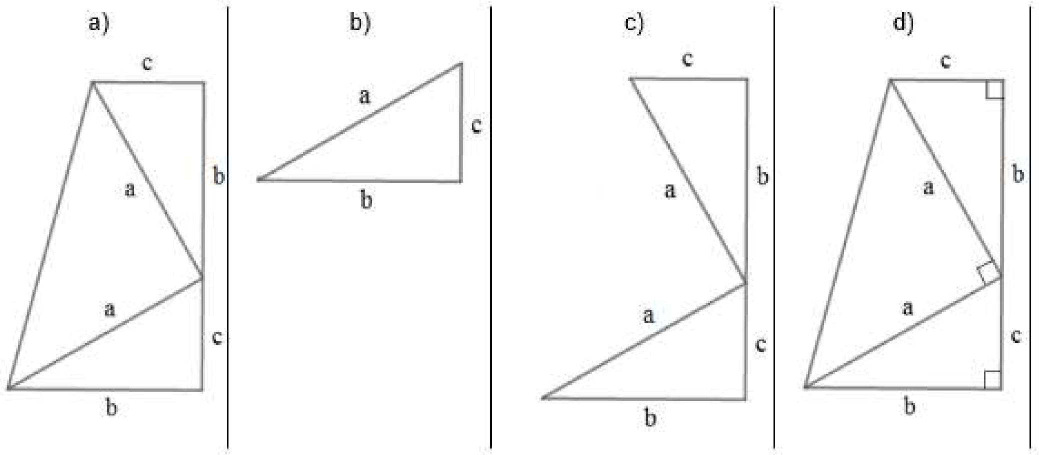


Figura 1 - Prova geométrica de Garfield

A construção da figura acima é sempre possível. Comece-se por considerar um triângulo retângulo cujas medidas de comprimento dos lados são $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$. (figura 1b))

Em seguida, constrói-se um triângulo congruente, de forma a que dois dos seus catetos sejam colineares e não se sobreponham. (figura 1c))

Facilmente se observa que o ângulo formado pelas hipotenusas dos dois triângulos retângulos é reto. (figura 1d))

Obtém-se assim um trapézio, pois dois dos seus lados são paralelos.

Aplicando a fórmula de cálculo da medida da área do trapézio, tem-se que a medida da área do trapézio é:

$$\acute{A}\boldsymbol{rea}_{\boldsymbol{Trap\acute{e}zio}} = \frac{\boldsymbol{medida\ da\ base\ maior\ +\ medida\ de\ base\ menor}}{\boldsymbol{2}} \times \boldsymbol{medida\ da\ altura}$$

$$= \frac{(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})}{\boldsymbol{2}} \times (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

Por outro lado, a medida da área do trapézio é a soma das medidas das áreas dos três triângulos retângulos.

$$\acute{A}\boldsymbol{rea}_{\boldsymbol{Trap\acute{e}zio}} = \boldsymbol{2} \times \frac{\boldsymbol{bc}}{\boldsymbol{2}} + \frac{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{2}}}{\boldsymbol{2}}$$

Igualando as duas expressões:

$$\frac{(b+c)}{2}\times(b+c)=2\times\frac{bc}{2}+\frac{a^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow (b+c)^2=2bc+a^2$$

$$\Leftrightarrow b^2+2bc+c^2=2bc+a^2$$

$$\Leftrightarrow b^2+c^2=a^2$$

Conclui-se, assim, o Teorema de Pitágoras.

1.2.2. Prova de Bhaskara

Esta prova[2] foi desenvolvida pelo matemático Bhaskara no século XII.

Comece-se por construir um quadrado de lado a. Dentro do quadrado, constroem-se quatro triângulos retângulos, tal como mostra a figura 2 a).

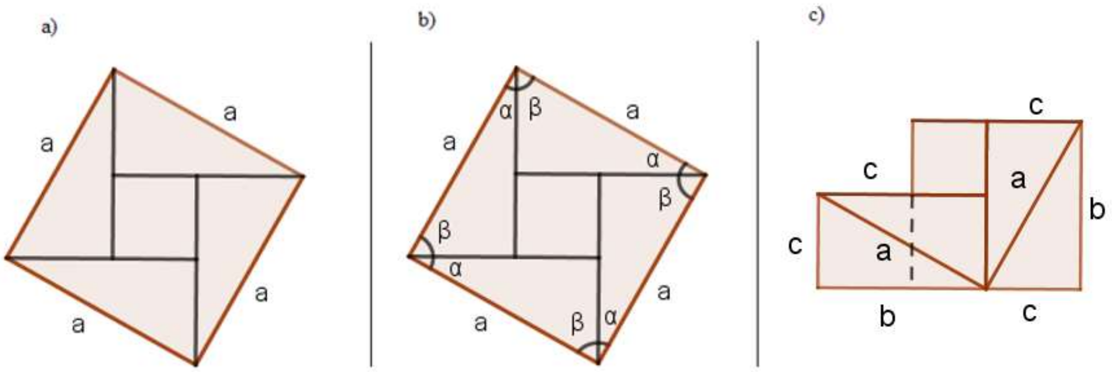


Figura 2 - Prova geométrica de Bhaskara

Todos os triângulos têm a hipotenusa com a mesma medida de comprimento, que é igual à medida do comprimento do lado do quadrado.

[2] Prova em vídeo disponível em https://pt-pt.khanacademy.org/math/basic-geo/basic-geometry-pythagorean-theorem/basic-geometry-pythagorean-proofs/v/bhaskara-s-proof-of-pythagorean-theorem-avi

Os ângulos α e β (ver figura 2 b)) são complementares, logo, os quatro triângulos têm os três ângulos geometricamente iguais. Para além disso, têm um lado com igual medida de comprimento. Logo, os triângulos são congruentes pelo critério de igualdade ALA (ângulo, lado, ângulo).

A área do quadrado é $\boldsymbol{a^2}$.

Reorganizando a figura (ver figura 2 c)), e designando por $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ os catetos, tem-se que a figura fica, assim, composta por dois quadrados de lados com medidas de comprimentos $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$. Logo a medida da área da figura é dada por $\boldsymbol{b^2+c^2}$.

Conclui-se, assim, o Teorema de Pitágoras.

1.2.3. Prova de Perigal

Henry Perigal (1801-1898) foi um matemático que fez uma prova do Teorema de Pitágoras, utilizando a composição e decomposição de figuras, por meio de translações. Esta prova é adaptada de Viseu (2016).

Considere-se a construção seguinte de um triângulo [ABC], retângulo em A, e os quadrados construídos sobre os seus lados [ACGF], [ADEB] e [BIHC].

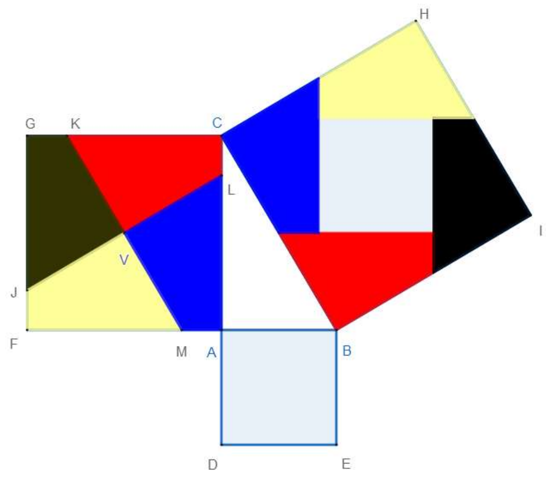


Figura 3 - Composição de decomposição de figuras por meio de translações

Designe-se o centro do quadrado [ACGF] pela letra V, ponto de interseção das diagonais do quadrado. [JL] é paralelo a [CH], por construção, assim como [KM] é paralelo a [CB]. Os pontos K, J, M e L pertencem aos lados do quadrado [ACFG], como se vê na figura.

Considerem-se os quadriláteros [CKVL], [KGJV], [MVJF] e [MALV], obtidos a partir da decomposição do quadrado [ACFG]. Desta forma, [JL] é perpendicular a [KM].

Para mostrar que V é o ponto médio dos segmentos de reta JL e KM, considerem-se dois pontos X e Z tais que, [XV] e [ZV] são perpendiculares aos lados [GF] e [FA] do quadrado [ACGF], como se vê na figura seguinte.

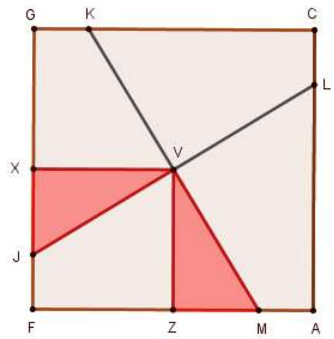


Figura 4 - V é o ponto médio dos segmentos de reta JL e KM

Pelo critério de igualdade de triângulos ALA (ângulo, lado, ângulo), conclui-se que os triângulos [MVZ] e [JVX] são congruentes pois:

- têm ambos um ângulo reto;
- $\overline{VZ} = \overline{VX}$, pois esta medida é igual a metade da medida do comprimento do lado do quadrado [ACGF];
- os ângulos MVZ e JVX são congruentes, pois são complementares do ângulo ZVJ.

Conclui-se, assim, que $\overline{VM} = \overline{VJ}$.

De forma análoga, conclui-se que $\overline{VM} = \overline{VL} = \overline{VK} = \overline{VJ}$. Logo, V é o ponto médio [JL] e [KM].

O quadrilátero [BCKM] é um paralelogramo, pois tem os lados paralelos dois a dois o que implica que $\overline{BC} = \overline{MK}$.

Facilmente se observa que a medida do comprimento de [VM], [VL], [VK] e [VJ] é igual a metade da medida de comprimento do lado do quadrado [BIHC] e, como os quadriláteros [CKVL], [KGJV], [MVJF] e [MALV] têm um ângulo reto no vértice V, é possível aplicar translações de forma a que os quadriláteros encaixarem no quadrado [BIHC].

Falta provar que o quadrilátero não preenchido é congruente com o quadrado [ADEB].

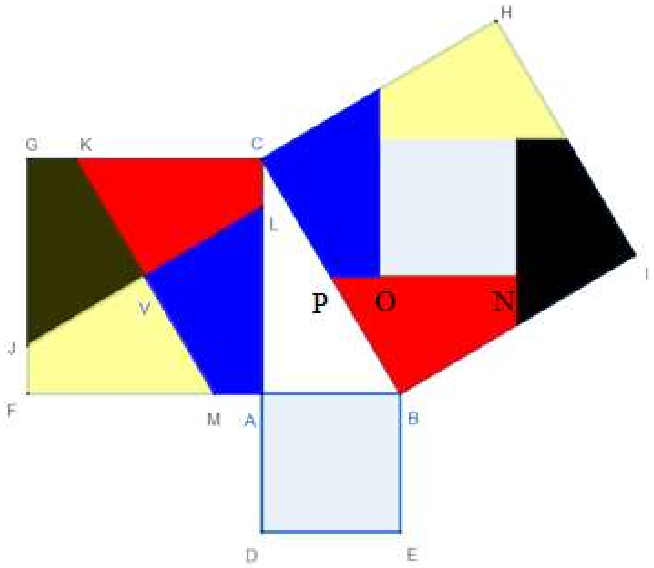


Figura 5 - Prova de Perigal do Teorema de Pitágoras

Facilmente se repara que tem quatro ângulos retos.

Como [BCKM] é um paralelogramo, tem-se que $\overline{BM} = \overline{CK}$.

Logo $\overline{NO} = \overline{NP} - \overline{OP} = \overline{CK} - \overline{KG} = \overline{BM} - \overline{AM} = \overline{AB}$.

Analogamente se prova para os restantes lados do quadrilátero não preenchido.

É possível observar que o quadrado [BIHC] é composto pelos quadriláteros transladados, o que permite provar para qualquer triângulo retângulo que $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

1.2.4. Prova chinesa

Outra possível prova do Teorema de Pitágoras, referida por Maor (2007), é conhecida por prova chinesa.

Na figura 6, pode observar-se a prova de Zhõubì suànjing, um chinês cujos escritos remontam à dinastia Hàn (206 a.C. - 220 d.C.).

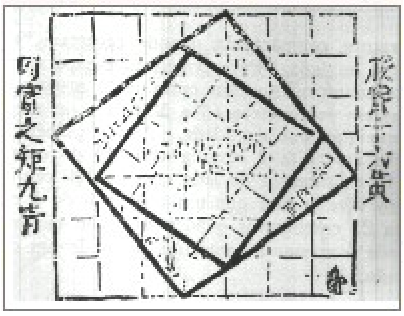


Figura 6 - Prova apresentada por Zhõubì suànjing[3]

Esta prova pode ser obtida comparando as medidas das áreas e as respetivas decomposições dos dois quadrados representados a seguir:

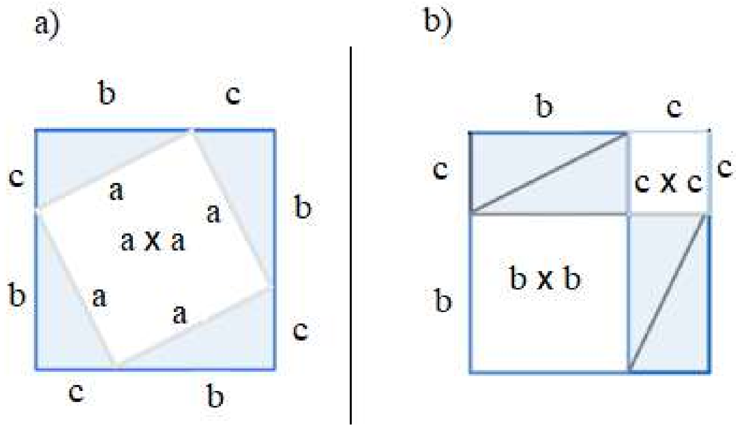


Figura 7 - Prova chinesa do Teorema de Pitágoras

Na figura 7 a), pode observar-se a decomposição do quadrado apresentado por Zhõubì suànjing.

Assim, considerem-se quatro triângulos retângulos geometricamente iguais, sendo a a medida do comprimento do lado que representa a hipotenusa e sejam b e c as medidas dos comprimentos dos lados que representam os catetos. Por definição, cada triângulo tem um ângulo de 90º e designem-se os outros dois ângulos por α e β. Como $\alpha + \beta + 90° = 180°$, tem-se que $\alpha + \beta = 90°$.

Construa-se um quadrado cuja medida do lado é a soma das medidas dos lados dos catetos, b e c. Coloquem-se os triângulos retângulos dentro do quadrado tal como na figura 7 a). O quadrado de lado $b + c$ fica assim decomposto em quatro triângulos retângulos e um quadrilátero. Uma vez que $\alpha + \beta = 90°$, podemos concluir que o

[3] http://www.projetozk.com/hipertextos/numeros_primos/antigos/ant_teopitagoras1.htm

quadrilátero é um quadrado pois a medida de cada um dos seus ângulos internos é $180° - \alpha - \beta$.

Podemos então concluir que a medida da área do quadrado de lado $b + c$ da figura 7 a) é igual à soma das medidas das áreas dos quatro triângulos e do quadrado de lado *a*.

Por outro lado, o quadrado da figura 7 b), congruente com o da figura 7 a), está decomposto nos mesmos quatro triângulos retângulos e em dois quadrados de lados b e c , respetivamente.

Daqui se conclui que a medida da área do quadrado de lado *a* (a branco na figura 7 a)) é igual à soma das medidas das áreas dos dois quadrados de lados b e c (a branco na figura 7 b)), obtendo-se assim o Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

A mesma conclusão pode ser extraída apenas a partir da figura 7a), relacionando a medida da área do quadrado de lado $b + c$ com as medidas das áreas da respetiva decomposição, os quatro triângulos retângulos e o quadrado.

$$(b + c)^2 = 4 \times \frac{b \times c}{2} + a^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

1.2.5. Prova utilizando a semelhança de triângulos

Considere-se um triângulo retângulo [ABC], retângulo em A, e seja [AD] a altura do triângulo relativamente à hipotenusa, como se pode ver na figura 8.

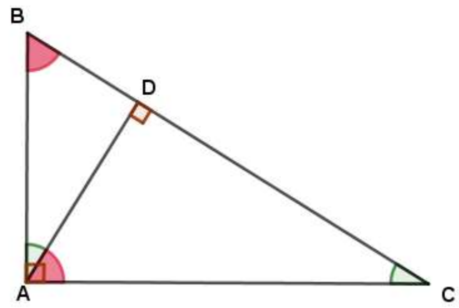


Figura 8 – Decomposição de um triângulo retângulo pela altura relativa à hipotenusa

O triângulo [ABC] fica decomposto em dois triângulos retângulos [ABD] e [ADC].

Os triângulos [ABC] e [ABD] são semelhantes pelo critério AA de semelhança de triângulos, pois ambos os triângulos têm um ângulo reto e o ângulo de vértice B é comum aos dois triângulos.

Como em triângulos semelhantes as medidas dos lados correspondentes são diretamente proporcionais, é possível escrever a relação:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = \overline{BD} \times \overline{BC}$$

Os triângulos [ABC] e [ADC] são semelhantes pelo critério AA de semelhança de triângulos, pois ambos os triângulos têm um ângulo reto e o ângulo de vértice C é comum aos dois triângulos.

Relacionando os lados correspondentes dos dois triângulos, é possível escrever a relação:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = \overline{CD} \times \overline{BC}$$

A partir das igualdades obtidas, tem-se:

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 &= \overline{BD} \times \overline{BC} + \overline{CD} \times \overline{BC} \\ &= (\overline{BD} + \overline{CD}) \times \overline{BC} \\ &= \overline{BC} \times \overline{BC} \\ &= \overline{BC}^2\end{aligned}$$

Conclui-se, assim, o Teorema de Pitágoras.

1.3. Recíproco do teorema de Pitágoras

Como já se provou atrás, num triângulo retângulo, o quadrado da medida do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos comprimentos dos catetos. Prove-se agora a implicação recíproca, a que se chama o Recíproco do Teorema de Pitágoras, apresentada por Maor (2007).

Se, num triângulo, o quadrado da medida do comprimento do lado maior for igual à soma dos quadrados das medidas dos comprimentos dos lados menores, então o triângulo é retângulo.

Prova: Por hipótese, sejam a, b e c as medidas dos comprimentos dos lados de um triângulo, onde $c^2 = a^2 + b^2$.

Consideremos agora um triângulo retângulo de lados a, b e d cujos lados que formam o ângulo reto são a e b. Adote-se as mesmas letras para designar a medida de comprimento dos respetivos lados. Então, pelo Teorema de Pitágoras, tem-se que, $d^2 = a^2 + b^2$. De onde resulta que $c^2 = d^2$ e, consequentemente, $c = d$, pois sendo c e d medidas de comprimentos, são maiores que zero. Como os triângulos têm as medidas dos lados iguais, os seus ângulos são necessariamente iguais, pelo que se um triângulo é retângulo, então o outro também é.

Conclui-se, assim, que o triângulo é retângulo.

1.4. O Teorema de Pitágoras e possíveis generalizações

Neste ponto, pretende-se demonstrar que o Teorema de Pitágoras é válido para outras figuras construídas sobre os lados do triângulo retângulo, sob certas condições bastante gerais. Também se pretende mostrar que é possível obter o Teorema de Pitágoras a partir de um resultado mais geral, enunciado e demonstrado por Papo de Alexandria, cerca de 300 a.C.. Os vários casos apresentados basearam-se em Silva, Fanti e Pedroso (2016).

Por definição, duas figuras geométricas $\mathscr{S}$ e $\mathscr{S}'$ são semelhantes se a cada ponto A de $\mathscr{S}$ corresponde um e um só ponto A' de $\mathscr{S}'$, chamado homólogo do ponto A, de tal forma que, se A e B são pontos quaisquer de $\mathscr{S}$ e A' e B' são seus pontos homólogos em $\mathscr{S}'$, então a razão $\frac{AB}{A'B'}$ é constante e é denominada razão de semelhança da figura $\mathscr{S}$ para a figura $\mathscr{S}'$.

Dado um triângulo retângulo, se as figuras construídas sobre os seus lados são semelhantes e se os lados do triângulo são lados correspondentes nessas mesmas figuras, então a medida da área da figura construída sobre a hipotenusa é igual à soma das medidas das áreas das figuras construídas sobre os catetos.

1.4.1. Caso particular para triângulos equiláteros

A medida da área do triângulo equilátero, construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo, é igual à soma das medidas das áreas dos triângulos equiláteros construídos sobre os catetos deste triângulo.

Prova: Considere-se um triângulo [ABC], retângulo em A. Represente-se por a a medida do comprimento da hipotenusa e por b e c as medidas dos comprimentos dos catetos.

Sejam x a altura do triângulo equilátero construído sobre a hipotenusa do triângulo retângulo e A_a, A_b e A_c as medidas das áreas dos triângulos equiláteros construídos sobre os lados a, b e c do triângulo retângulo [ABC], respetivamente (figura 9).

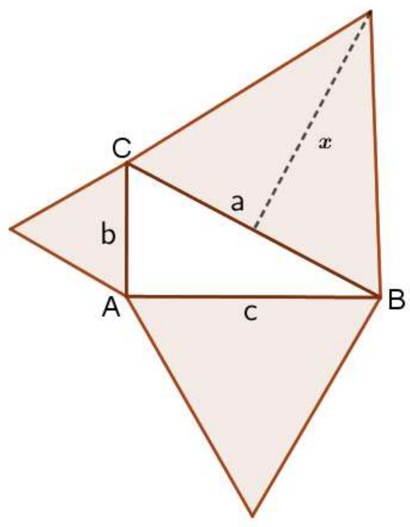


Figura 9 - Triângulos equiláteros sobre os lados do triângulo retângulo

Aplicando o Teorema de Pitágoras para determinar x, tem-se que:

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + x^2 \Leftrightarrow x^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{4}a^2 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}a \quad pois\ x > 0$$

Analogamente se determinam as alturas dos outros dois triângulos equiláteros construídos sobre os catetos.

Assim,

$$A_a = \frac{a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \ ; \qquad A_b = \frac{b \times \frac{\sqrt{3}}{2}b}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 \qquad \text{e} \qquad A_c = \frac{c \times \frac{\sqrt{3}}{2}c}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$$

Somando as medidas das áreas dos triângulos equiláteros construídos sobre os catetos e aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo [ABC], obtém-se:

$$A_b + A_c = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(b^2 + c^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = A_a$$

Portanto $A_a = A_b + A_c$.

1.4.2. Caso particular para triângulos semelhantes

Se num triângulo retângulo se construírem triângulos semelhantes sobre os seus lados e se os lados do triângulo retângulo são lados correspondentes aos lados dos triângulos semelhantes que os contêm, então a medida da área do triângulo construído sobre a hipotenusa é igual à soma das medidas das áreas dos triângulos construídos sobre os catetos (figura 10).

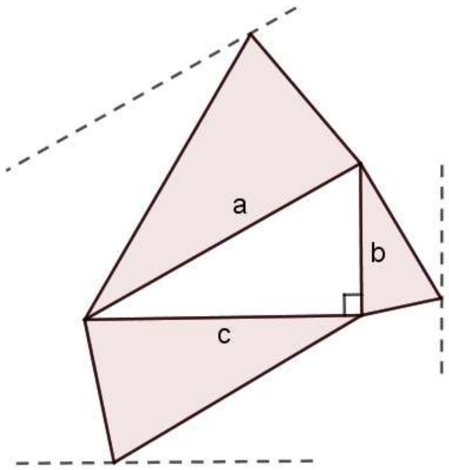


Figura 10 - Triângulos semelhantes construídos sobre os lados do triângulo retângulo

Prova: Considere-se um triângulo [ABC], retângulo em A. Represente-se por a a medida do comprimento da hipotenusa e por b e c as medidas dos comprimentos dos catetos.

Sejam A_a, A_b e A_c as medidas das áreas dos triângulos semelhantes construídos sobre os lados a, b e c do triângulo retângulo [ABC], respetivamente.

Se dois polígonos são semelhantes, então a razão entre as medidas das suas áreas é igual ao quadrado da razão entre as medidas dos comprimentos de dois lados correspondentes quaisquer.

Em particular, o resultado é válido para triângulos semelhantes, assim:

$$\frac{A_b}{A_a} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \Leftrightarrow A_b = \frac{b^2}{a^2} A_a \qquad e \qquad \frac{A_c}{A_a} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \Leftrightarrow A_c = \frac{c^2}{a^2} A_a$$

Somando as medidas das áreas dos triângulos semelhantes construídos sobre os catetos e aplicando o teorema de Pitágoras, obtém-se:

$$A_b + A_c = \frac{b^2}{a^2} A_a + \frac{c^2}{a^2} A_a = \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) A_a = = \left(\frac{a^2}{a^2}\right) A_a = A_a$$

Portanto $A_a = A_b + A_c$.

1.4.3. Caso particular para polígonos regulares semelhantes

A medida da área do polígono regular de *n* lados construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das medidas das áreas dos polígonos regulares de *n* lados construídos sobre seus catetos. A título de exemplo, observe-se a figura 11 com hexágonos regulares construídos sobre os lados de um triângulo retângulo.

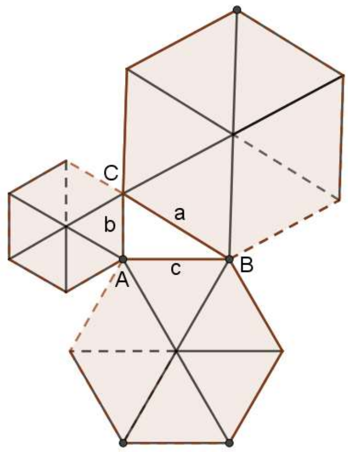


Figura 11 - Polígonos regulares de n lados sobre os lados do triângulo retângulo

Considere-se um triângulo [ABC], retângulo em A, sendo que em cada um dos seus lados foram construídos polígonos regulares de *n* lados. Represente-se por a a medida do comprimento da hipotenusa e por b e c as medidas dos comprimentos dos catetos.

Sejam A_a, A_b e A_c as medidas das áreas dos polígonos regulares construídos sobre os lados a, b e c do triângulo retângulo [ABC], respetivamente.

Os polígonos regulares de *n* lados estão decompostos em n triângulos cujos vértices são dois vértices consecutivos do polígono regular e o seu centro. Sejam T_a, T_b e T_c as medidas das áreas de cada um dos triângulos construídos, respetivamente, sobre a hipotenusa e sobre os catetos de medidas b e c.

Assim,

$$A_a = nT_a \; ; \qquad A_b = nT_b \quad \text{e} \quad A_c = nT_c$$

então:

$$A_b + A_c = nT_b + nT_c = n(T_b + T_c)$$

Mas, como os triângulos são semelhantes então, pelo resultado anterior, tem-se que $T_b + T_c = T_a$,

Logo, $A_b + A_c = n(T_b + T_c) = nT_a = A_a$.

Portanto, $A_a = A_b + A_c$.

1.4.4. Caso particular para polígonos semelhantes

Se num triângulo retângulo se construírem polígonos semelhantes sobre os seus lados e se os lados do triângulo retângulo são lados correspondentes aos lados dos polígonos semelhantes que os contêm, então a medida da área do polígono construído sobre a hipotenusa é igual à soma das medidas das áreas dos polígonos construídos sobre os catetos. A título de exemplo observe-se a figura 12.

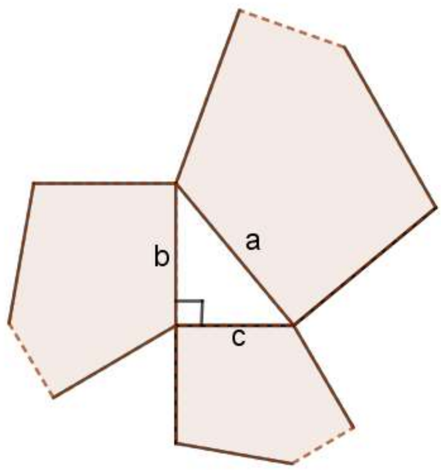


Figura 12 - Polígonos semelhantes de n lados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo

Prova: Considere-se um triângulo [ABC], retângulo em A. Represente-se por a a medida do comprimento da hipotenusa e por b e c as medidas dos comprimentos dos catetos.

Sejam A_a, A_b e A_c as medidas das áreas dos polígonos semelhantes construídos sobre os lados cujas medidas de comprimento são a, b e c do triângulo retângulo [ABC], respetivamente.

Se dois polígonos são semelhantes, então a razão entre as medidas das suas áreas é igual ao quadrado da razão entre as medidas dos comprimentos de dois lados correspondentes quaisquer.

Assim:

$$\frac{A_b}{A_a} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \Leftrightarrow A_b = \frac{b^2}{a^2} A_a \qquad e \qquad \frac{A_c}{A_a} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \Leftrightarrow A_c = \frac{c^2}{a^2} A_a$$

Somando as medidas das áreas dos polígonos semelhantes construídos sobre os catetos e aplicando o teorema de Pitágoras, obtém-se:

$$A_b + A_c = \frac{b^2}{a^2} A_a + \frac{c^2}{a^2} A_a = \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) A_a = = \left(\frac{a^2}{a^2}\right) A_a = A_a$$

Portanto, $A_a = A_b + A_c$.

1.4.5. A generalização de Polya

George Polya (1887 – 1985), matemático e autor da famosa obra "How to Solve it" escrita em 1946, provou a generalização do Teorema de Pitágoras que afirma:

Considere-se, tal como se observa na figura 13, três figuras semelhantes *F*, *G* e *H*, construídas, respetivamente, sobre os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo. Se os segmentos correspondentes aos lados do triângulo retângulo são segmentos homólogos aos lados das figuras semelhantes que os contêm, então as medidas das áreas das figuras *F*, *G* e *H*, representadas respetivamente por A_F, A_G, e A_H satisfazem a relação $A_F + A_G = A_H$.

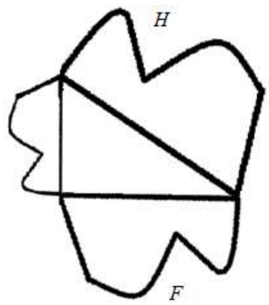


Figura 13 - Figuras semelhantes construídas sobre os lados do triângulo retângulo

Prova: Por hipótese, considere-se um triângulo retângulo, cuja hipotenusa e catetos medem de comprimento, respetivamente, *a*, *b* e *c*. Sejam *F'*, *G'* e *H'* três figuras semelhantes construídas, respetivamente, sobre os catetos e a hipotenusa do triângulo [ABC], para as quais, se verifica a igualdade relativa às medidas das respetivas áreas $A_{F'} + A_{G'} = A_{H'}$.

Sejam *F*, *G* e *H*, outras três figuras semelhantes construídas, respetivamente, sobre os catetos e a hipotenusa do triângulo [ABC] tais que os segmentos correspondentes aos lados do triângulo são segmentos homólogos aos lados das figuras semelhantes que os contêm. Utilizando o resultado já aplicado anteriormente, de que a razão entre as medidas das áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre elas, podemos afirmar:

$$\frac{A_H}{A_G} = \frac{A_{H'}}{A_{G'}} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad \text{e} \quad \frac{A_H}{A_F} = \frac{A_{H'}}{A_{F'}} = \left(\frac{a}{c}\right)^2$$

Então, $\frac{A_H}{A_{H'}} = \frac{A_G}{A_{G'}}$ e $\frac{A_H}{A_{H'}} = \frac{A_F}{A_{F'}}$

Tem-se então que $\frac{A_H}{A_{H'}} = \frac{A_G}{A_{G'}} = \frac{A_F}{A_{F'}}$.

Assim, existe um número real positivo *k,* tal que:

$$A_H = kA_{H'} \ ; \quad A_G = kA_{G'} \quad e \quad A_F = kA_{F'}$$

Logo,

$$A_F + A_G = kA_{F'} + kA_{G'} = k(A_{F'} + A_{G'}) = kA_{H'} = A_H$$

Conclui-se, assim, que $A_F + A_G = A_H$.

Para concluir a demonstração do resultado de Polya, vai-se mostrar que é possível construir três figuras semelhantes, *F*, *G* e *H*, sobre os catetos e a hipotenusa do triângulo [ABC], para as quais, se verifica a igualdade $A_F + A_G = A_H$.

Seja D o ponto de interseção da altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo com o lado do triângulo [BC] (figura 14).

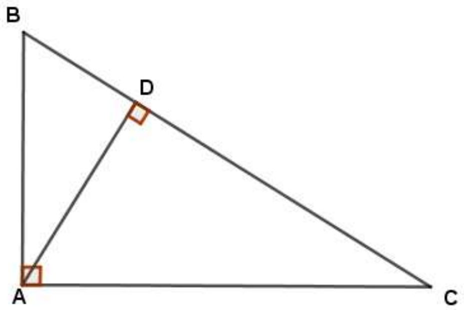


Figura 14 - Altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo

Num triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa divide-o em dois triângulos semelhantes entre si e cada um deles semelhante ao triângulo dado.

Aplicando o critério de semelhança de triângulos AA (ângulo; ângulo) facilmente se conclui que os três triângulos são semelhantes.

Conclui-se, ainda, que a medida da área do triângulo [ABC] é igual à soma das medidas das áreas dos dois triângulos [ADB] e [ADC].

Sobre os lados do triângulo retângulo [ABC], constroem-se as figuras *F*, *G* e *H*, respetivamente, sobre os catetos e a hipotenusa, de tal forma que o ponto A´ é obtido por reflexão do ponto A segundo o eixo de reflexão BC; o ponto D´ é obtido por reflexão do ponto D segundo o eixo de reflexão AC e D´´ é obtido por reflexão do ponto D segundo o eixo de reflexão AB (figura 15).

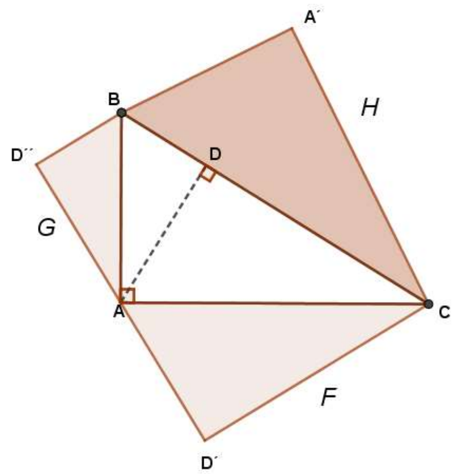


Figura 15 - Construção dos três triângulos semelhantes sobre os lados do triângulo retângulo

Assim, o triângulo [ABC] é geometricamente igual ao triângulo [A´BC], o triângulo [ADC] é geometricamente igual ao triângulo [AD´C] e o triângulo [ABD] é geometricamente igual ao triângulo [ABD´´].

Verifica-se, assim, a igualdade $A_F + A_G = A_H$.

A prova anterior é feita sem utilizar o Teorema de Pitágoras, pelo que pode ser considerado como um caso particular do Teorema de Polya, uma vez que os quadrados construídos sobre os lados são figuras semelhantes.

O Teorema de Polya aplica-se apenas a triângulos retângulos, vejamos porquê.

Considere-se um qualquer triângulo [ABC], cujas medidas dos comprimentos dos lados são representadas por *a*, *b* e *c*. Sobre os lados do triângulo constroem-se figuras semelhantes *F*, *G* e *H* de tal forma que as medidas das suas áreas satisfazem a igualdade $A_F + A_G = A_H$ e os vértices do triângulo são pontos homólogos das figuras que os contêm. Nestas condições, o triângulo é retângulo.

Como *F*, *G* e *H* são figuras semelhantes, tem-se que:

$$\frac{A_G}{A_H} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \Rightarrow A_G = \frac{a^2}{c^2} A_H$$

e $\frac{A_F}{A_H} = \left(\frac{b}{c}\right)^2 \Rightarrow A_F = \frac{b^2}{c^2} A_H$

Assim,

$$A_H = A_G + A_F \Rightarrow A_H = \frac{a^2}{c^2} A_H + \frac{b^2}{c^2} A_H \Rightarrow A_H = \left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}\right) A_H \Rightarrow 1 = \frac{a^2 + b^2}{c^2}$$

$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$, onde, pelo recíproco do Teorema de Pitágoras, a, b e c, são, respetivamente, as medidas de comprimento dos catetos e da hipotenusa de um triângulo retângulo.

Fica, assim, provado que a generalização de Polya se aplica apenas, a triângulos retângulos. A generalização de Polya inclui os casos descritos anteriormente nas subsecções 1.4.1. a 1.4. 4..

1.4.6. A generalização de Papo

Papo de Alexandria foi um matemático grego do período helenístico e um dos últimos e mais importantes da Grécia Antiga, que viveu cerca de 300 a.C.. Foi, também um importante pesquisador e autor de textos sobre cientistas da antiga civilização grega, e demonstrou uma interessante generalização que permite obter o Teorema de Pitágoras como um caso particular. Papo considerou um triângulo qualquer, não necessariamente retângulo, e em vez de utilizar os quadrados construídos sobre os lados, construiu paralelogramos.

Teorema de Papo: Considere-se um qualquer triângulo [ABC] e sobre dois dos seus lados constroem-se dois paralelogramos quaisquer. Então, é possível construir sobre o terceiro lado do triângulo um paralelogramo cuja área é igual à soma das medidas das áreas dos outros dois paralelogramos.

Prova: Considere-se um triângulo [ABC] e sobre dois dos seus lados a construção de paralelogramos, tal como mostra a figura 16.

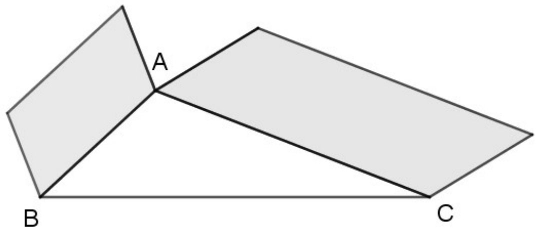


Figura 16 - Paralelogramos sobre dois dos lados do triângulo [ABC]

A construção do terceiro paralelogramo tem em conta as seguintes condições (figura 17):

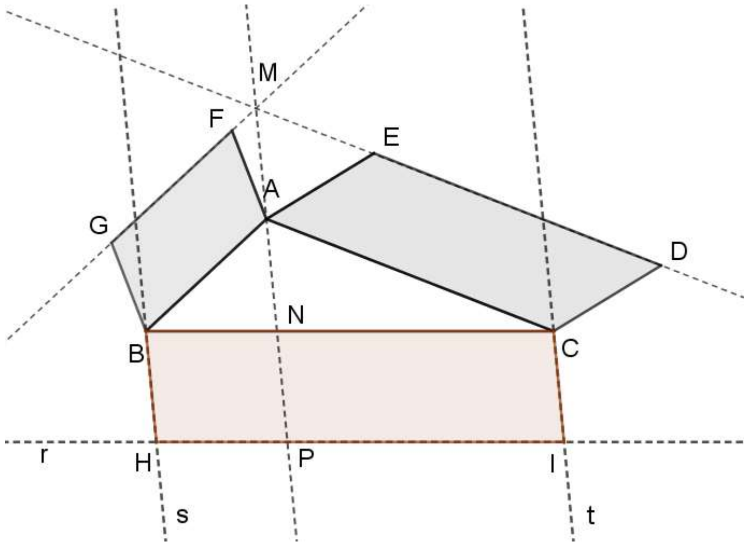


Figura 17 - Construção de Papo

- O ponto M resulta da interseção das retas GF e ED.
- O ponto N resulta da interseção de MA com BC.
- O ponto P pertence à reta MA e $\overline{MA} = \overline{NP}$.
- Seja r uma reta que passa pelo ponto P e é paralela à reta BC.
- A reta s passa pelo ponto B e é paralela à reta que passa MA.
- O ponto H resulta da interseção das retas r e s.
- A reta t passa pelo ponto C e é paralela à reta MA.
- O ponto I resulta da interseção das retas r e t.

Obtém-se assim o paralelogramo [BHIC].

Falta ver a relação que existe entre as medidas das áreas dos três paralelogramos (figura 18).

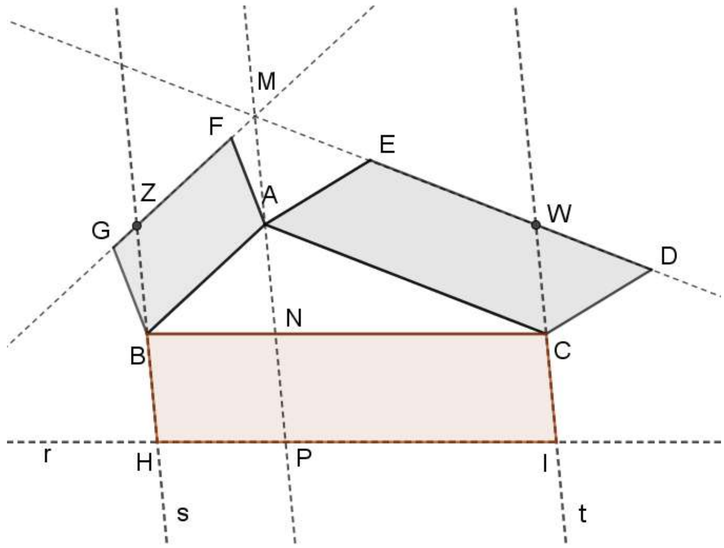


Figura 18 - Construção de Papo com pontos de interseção

Sejam Z o ponto de interseção das retas s e GF e W o ponto de interseção das retas t e ED.

Os paralelogramos [BNPH] e [ABZM] têm a mesma medida de área, pois têm base igual por construção, $\overline{MA} = \overline{NP}$ e a mesma altura pois estão entre retas paralelas.

A medida de área do paralelogramo [ABGF] é igual à medida de área do paralelogramo [ABZM], pois os triângulos [BZG] e [AMF] são geometricamente iguais.

Logo, os paralelogramos [ABGF], [ABZM] e [BNPH] têm a mesma medida de área.

De modo análogo, tem-se que os paralelogramos [PICN] e [ACWM] têm a mesma medida de área, pois têm base igual por construção, $\overline{MA} = \overline{NP}$ e a mesma altura pois estão entre retas paralelas.

A medida de área do paralelogramo [ACDE] é igual à medida de área do paralelogramo [ACWM], pois os triângulos [CDW] e [AEM] são geometricamente iguais.

Logo, os paralelogramos [PICN], [ACWM] e [ACDE] têm a mesma medida de área.

Fica, assim, provado o Teorema de Papo.

Do Teorema de Papo, pode-se concluir o Teorema de Pitágoras, uma vez que este é um caso particular. Basta, para isso, considerar que o triângulo é retângulo e construir quadrados sobre os catetos. Seguindo os passos da construção de Papo, surge a construção de um quadrado sobre a hipotenusa.

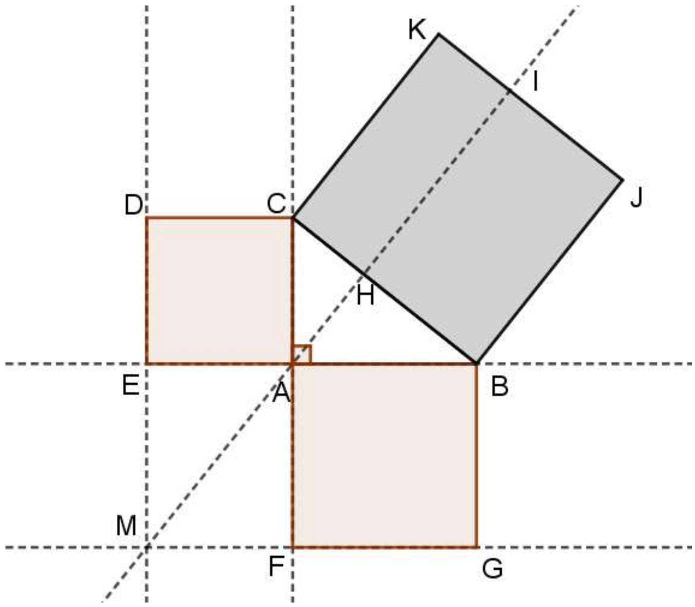


Figura 19 - Construção de Papo – Teorema de Pitágoras (caso particular)

Se se verificar que [BJKC] é um quadrado, conclui-se que o Teorema de Pitágoras é um caso particular do Teorema de Papo.

Por construção, [AEMF] é um retângulo, logo, os triângulos [AFM] e [AME] são geometricamente iguais. Facilmente se observa, também, que o triângulo [ABC] é geometricamente igual aos triângulos [AFM] e [AME], pelo critério de igualdade LAL (lado; ângulo; lado). Então $\overline{AM} = \overline{BC}$ e, por construção, $\overline{AM} = \overline{HI},$ de onde se conclui que $\overline{BC} = \overline{HI}$.

- $\sphericalangle FAM = \sphericalangle CAH$ são ângulos verticalmente opostos;
- $\sphericalangle FMA = \sphericalangle ACB$, porque os triângulos [AFM] e [ABC] são geometricamente iguais;
- $\sphericalangle AHC = \sphericalangle AFM$ e são ambos retos pois, por construção, $\sphericalangle AFM$ é reto.
- Como $\sphericalangle AHC$ e $\sphericalangle CHI$ são suplementares e $\sphericalangle AHC$ é reto então $\sphericalangle CHI$ é reto também;
- Por construção, [BJ], [HI] e [CK] são paralelos.

Conclui-se, então, que o paralelogramo [BJKC] é um quadrado, mostrando que o Teorema de Pitágoras é um caso particular do Teorema de Papo.

2. Ensino criativo em Matemática

"A Ciência pode ser encarada sob dois aspectos diferentes. Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborada, e o aspecto é totalmente diferente — descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que logo surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições."

(Caraça, 1989, p. xiii)

Nas mais variadas áreas, está presente o conceito de criatividade, como aspeto essencial para o desenvolvimento de qualquer sociedade, o que leva Cropley (2003) a considerar como sendo da máxima importância o desenvolvimento do pensamento criativo como resposta aos desafios deste século. Ora, a escola, espaço privilegiado de preparação para a vida, deverá trabalhar essa dimensão e nos mais variados domínios. A Matemática não é exceção. E, desde logo, praticar um ensino criativo, levará a estimular a criatividade dos alunos nessa área.

Segundo Antunes e Almeida (2007), Torrance (1974) defende que a criatividade apresenta quatro caraterísticas essenciais: fluência, flexibilidade, originalidade e elaboração. Explicitam que a fluência refere-se ao número de respostas produzidas sobre um mesmo assunto, a flexibilidade ao número de diferentes categorias das respostas dadas, a originalidade ao número de respostas menos frequentes, ou seja, que se afastam do óbvio, e a elaboração ao enriquecimento e número de detalhes relevantes colocados nas respostas.

A fluência, segundo Cabrita e Coelho (2015), apresenta-se como a capacidade de produzir um grande número de ideias diferentes, sobre um determinado assunto matemático, mobilizando conhecimentos matemáticos básicos sólidos, estabelecendo múltiplas associações e realizando conexões entre os diferentes assuntos e áreas. Segundo os mesmos autores, a flexibilidade é "*determinante no sucesso em Matemática e esta dimensão permite aos alunos a utilização de diferentes abordagens na resolução de um problema*" (pp. 44,45), encontrando diferentes resoluções "*originais ou ótimas*". A dimensão relativa à originalidade apresenta-se como a capacidade de produzir ideias diferentes e únicas através de uma forma de pensar exclusiva.

Pensando na relação entre ensino criativo e o desenvolvimento do potencial criativo do aluno, é importante refletir como é que o primeiro se poderá operar na Matemática.

Neste contexto, o ensino deverá, designadamente, privilegiar e evidenciar as relações entre as disciplinas, através de tarefas desafiantes e significantes e tirando partido, sempre que se justifique, das tecnologias que se afigurem mais adequadas. Tal como referem Cabrita e Amaral (2018), a propósito de um estudo que envolveu a Matemática e a Educação Visual, "*No que respeita à Matemática, imprescindível para melhor se ler, apreciar e descrever o mundo, um dos temas que se tem revelado mais desafiador é a Geometria*" (p. 90). E, apoiando-se nas mais recentes orientações para o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, reforçam o uso, inteligente, de software dinâmico "*pelas suas comprovadas potencialidades didáticas e porque contribui, ainda, para aproximar o contexto educativo do quotidiano altamente tecnológico*" (p. 91).

Ponte (2005) distingue duas formas básicas de encarar o ensino da Matemática: o ensino direto e a abordagem exploratória.

No ensino direto, o professor assume o protagonismo, sendo ele que transmite a informação, prevendo que os alunos, ouvindo, são capazes de aprender e aplicar a informação e técnicas explicadas e exemplificadas pelo professor. Neste tipo de ensino, são valorizadas tarefas fechadas e pouco complexas, quanto à sua natureza, em cuja resolução os alunos aplicam, diretamente, aquilo que aprenderam com a exposição do professor.

Diversas investigações sustentam que a Matemática ainda continua a ser ensinada nestes moldes e segundo Cabrita e Coelho (2015), referindo Stein, Engle, Smith, e Hughes (2008), "*à revelia de um modelo exploratório, não se dando oportunidade aos alunos de realizar e discutir tarefas matemáticas desafiantes que promovam, designadamente, o raciocínio matemático, a comunicação e a criatividade*" (p. 44).

De facto, no ensino assente numa abordagem exploratória, segundo Ponte (2005) , "*a ênfase desloca-se da atividade ensino para a atividade mais complexa ensino-aprendizagem*" (p. 22). Professor e alunos estão ativos, sendo o envolvimento do aluno muito maior. Segundo Oliveira, Menezes e Canavarro (2012), neste tipo de ensino, os alunos têm a possibilidade de discutir e partilhar as suas ideias e aprendem em resultado do seu trabalho efetivo.

É central a resolução de tarefas diversificadas e desafiantes, de preferência apoiada por recursos didáticos, e a sua posterior discussão. Mas, segundo Stein et al. (2008), a prática do ensino exploratório em Matemática exige muito mais do que seleção ou (re)criação da tarefa. É fundamental que, previamente à aula, o professor antecipe todas as potencialidades da tarefa e se prepare para a complexidade da sua exploração na sala de aula.

Em contexto de sala de aula, uma aprendizagem ativa e uma abordagem exploratória admitem quatro fases:

(a) motivação/introdução;
(b) resolução efetiva das tarefas pelos alunos;
(c) confronto de estratégias e discussão;
(d) síntese das principais conclusões.

Após uma cuidada preparação para o trabalho que se vai seguir e a disponibilização da tarefa, normalmente um problema ou uma atividade de exploração ou de investigação, o professor deve assegurar a compreensão da mesma por parte dos alunos e motivá-los para se empenharem na sua consecução. Cabe também ao professor estabelecer o tempo para cada momento da tarefa, organizar o desenvolvimento do trabalho da turma, gerir os recursos e o modo de trabalho dos alunos (Anghileri, 2006). O professor deverá apoiar o trabalho autónomo dos alunos, que deverá ser individual ou em pequenos grupos, incentivando e garantindo a participação de todos. Nesta fase, as intervenções do professor deverão ser cuidadas, de forma a não diminuir o grau de complexidade ou dificuldade da tarefa. Ao longo de todo este processo, é importante garantir que os alunos consigam concluir a tarefa, de forma a apresentar o seu trabalho à turma ou a um grupo de alunos e discutir as principais ideias. Estas constituem o mote para a síntese dos aspetos mais relevantes, que deve ser feita com a intervenção dos alunos. Segundo Canavarro et al. (2012), a discussão final é

> um momento de institucionalização das aprendizagens, que toda a turma deve reconhecer e partilhar, no qual tanto podem surgir novos conceitos ou procedimentos emergentes da discussão da tarefa como serem revistos e aperfeiçoados conceitos e procedimentos já conhecidos e aplicados, estabelecidas conexões com situações anteriores, e/ou reforçados aspetos fundamentais dos processos matemáticos transversais como a representação, a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática (p. 257).

Igualmente relevante é a dimensão relacional. Tal como referem Franke, Kazemi e Battey (2007),"*O professor trabalha para orquestrar o conteúdo, as representações do conteúdo, e as pessoas na sala de aula em interação uns com os outros*" (p. 127). Referem ainda a dimensão multidimensional do ensino, sendo o professor o responsável por proporcionar um ambiente propício à aprendizagem de todos os alunos, orientar as suas participações e acompanhar as atividades de modo a que se possam desenvolver matematicamente.

Fleith e Alencar (2005) ressalvam caraterísticas de um ambiente que pode potenciar a criatividade. Tal clima criativo em sala de aula deverá:

(a) proteger o trabalho criativo do aluno da crítica destrutiva;

(b) desenvolver nos alunos a habilidade de pensar em termos de possibilidade, de explorar consequências, de sugerir modificações e aperfeiçoamentos para as próprias ideias;

(c) encorajar os alunos a refletir sobre o que eles gostariam de conhecer melhor;

(d) não se deixar vencer pelas limitações do contexto em que se encontra, mas fazer uso dos próprios recursos criativos para contornar obstáculos;

(e) envolver o aluno na solução de problemas do mundo real;

(f) encorajar o aluno a elaborar produtos originais.

Neste contexto, Cabrita e Coelho (2015) consideram fundamental:

> fortalecer traços de personalidade dos alunos — autoconfiança, curiosidade, persistência, independência de pensamento, coragem para explorar situações novas e lidar com o desconhecido; ajudar a desfazer bloqueios emocionais — o medo de errar e ser criticado, insegurança e complexo de inferioridade e implementar atividades desafiantes que criem oportunidades de atuação criativa. (p. 44).

Assim, e segundo os autores Cabrita e Coelho (2015), a resolução e a formulação de problemas em Matemática estão profundamente relacionadas com a criatividade e o seu desenvolvimento passa pela criação de um ambiente de sala de aula que permita aos alunos integrarem as dimensões da criatividade nos seus trabalhos e questionarem, refletirem, mudarem e recriarem. É ainda necessário encorajar o risco e aceitar o erro e recompensar as ideias e produtos criativos.

Todos os aspetos focados anteriormente têm de se conjugar com as orientações dos documentos curriculares em vigor, assumindo-se aqui o professor como principal responsável pelas escolhas tomadas. De acordo com Shawer (2010), existem três abordagens curriculares mais comuns − *curriculum-developer, curriculum-maker* ou *curriculum-transmiter*. As diferentes abordagens parecem conduzir a ambientes pedagógicos distintos, como referem Ferreira, Cabrita, Lucas e Breda (2017), no que concerne à motivação para a aprendizagem, ao desenvolvimento do currículo em sala de aula e ao próprio desenvolvimento profissional, sendo que as duas primeiras abordagens, referindo Shawer (2010), "*apontam para uma maior capacidade de adaptação do professor às características do contexto pedagógico, o que influenciará as características do próprio desenvolvimento curricular, mais flexível e adaptável*" (p. 123) .

O Programa de Matemática do Ensino Básico (Bivar et al., 2013) assenta em três finalidades para o ensino da Matemática: a estruturação do pensamento, a análise do mundo natural e a interpretação da sociedade. Neste documento, em relação aos objetivos, mencionam-se "*desempenhos fundamentais que os alunos deverão evidenciar em cada um dos três ciclos de escolaridade básica*" (p. 3) que devem concorrer para

> a aquisição de conhecimentos de factos e de procedimentos, para a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático, para uma comunicação (oral e escrita) adequada à Matemática, para a resolução de problemas em diversos contextos e para uma visão da Matemática como um todo articulado e coerente (p. 4).

Ao Programa e Metas Curriculares foram, posteriormente, associados dois documentos curriculares, as Orientações de Gestão Curricular [OGC] (2016), a vigorar desde 2016/2017, e as Aprendizagens Essenciais [AE] (2018), a vigorar desde 2018/2019, no primeiro ano de cada ciclo, sendo dada continuidade nos anos letivos seguintes até abranger todo o ciclo. Segundo Canavarro et al. (2019), "*fornecem indicações para a gestão dos conteúdos sem pretender substituir o programa em vigor*". Ainda segundo os mesmos autores, "*estas orientações trouxeram fundamentalmente a possibilidade de flexibilizar a lecionação de tópicos, permitindo uma gestão vertical ao longo do ciclo*" (p. 61).

Segundo as AE, o ensino da Matemática deve ser norteado pelas seguintes finalidades principais: "*Promover a aquisição e desenvolvimento de conhecimento e experiência em Matemática e a capacidade da sua aplicação em contextos matemáticos e não matemáticos"* e *"Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de reconhecer e valorizar o papel cultural e social desta ciência*." (pp. 2-3). Canavarro et al. (2019) referem que as finalidades se assemelham às exaradas no revogado Programa de Matemática de 2007 e que se justificam pela necessidade de articulação com o Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (2017). O Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória afirma-se como um referencial para os docentes que lecionam no âmbito da escolaridade obrigatória. Sendo a educação para todos, refere o documento, o contexto é diverso e complexo. Entre as várias áreas de competências descritas no documento, neste estudo privilegiou-se as que dizem respeito ao desenvolvimento das capacidades de raciocínio, à resolução de problemas e à comunicação.

Ainda de acordo com as AE (2018), os alunos deverão "*raciocinar indutiva e dedutivamente, com a formulação, teste e demonstração de conjeturas, e de argumentarem matematicamente, progredindo na fundamentação das suas ideias e na análise dos argumentos de outros*." (p. 5); deverão também "*resolver problemas, em situações de maior complexidade e que convocam a mobilização das novas aprendizagens nos diversos domínios, aprofundando a análise de estratégias e dos resultados obtidos, e formulando problemas em contextos variados*" (p. 5) e "*comunicar em matemática, oralmente e por escrito, com a utilização da notação e simbologia matemáticas próprias dos diversos conteúdos estudados, e progridam na fluência e no rigor com que representam, exprimem e discutem as suas ideias, procedimentos e raciocínios.*" (p. 5).

Na opinião de Oliveira (2008), o "*raciocínio matemático designa um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio)*" (p. 3). Esta articulação de conhecimentos prévios para obtenção de novos conhecimentos, segundo Ponte et al. (2008), "*envolve sobretudo encadear asserções de forma lógica e justificar esse encadeamento*" (p. 89). Segundo Boavida (2008), de alguma forma, o raciocínio esteve sempre ligado à Matemática e o seu desenvolvimento não advém, unicamente, de tarefas com determinadas especificidades, é fundamental desenvolver o pensamento dos alunos com base no porquê "*é importante que os alunos se envolvam em actividades de formulação, teste e prova de conjecturas…*" (p. 1).

As orientações curriculares em vigor também estabelecem que o aluno deverá estar habilitado para a formulação e investigação de conjeturas matemáticas e para refutá-las, justificá-las e/ou demonstrá-las.

A resolução de problemas está na base das orientações curriculares já desde as décadas de 80 e 90, no panorama internacional, e as suas influências fizeram-se sentir nos programas de Matemática nacionais. Polya, em 1945, referiu que, para aprender Matemática, não chega resolver exercícios, é preciso propor aos alunos problemas com os quais se sintam desafiados e motivados. Para este autor, apesar de, em ambos os casos, não existir dúvida sobre o que é pedido e o professor saber, antecipadamente, se a resposta apresentada pelo aluno está certa ou errada, estes tipos de tarefas diferem no método de resolução. Para resolver exercícios, mesmo que com graus de dificuldade distintos, há um método de resolução já conhecido do aluno. Em relação aos problemas, também com graus de dificuldade diferentes, o aluno não dispõe de um método imediato de resolução. Ponte (2003) sugere que, "*Em vez de uma dicotomia, é vantajoso considerar um continuum entre exercício e problema e ter presente que o seu interesse educativo não depende só do seu grau de dificuldade mas de muitos outros factores.*" (p. 9).

Aprofundando a ideia, Polya, Stein e Smith apresentam, tal como refere Ponte (2014), uma distinção entre tarefas com baixo e alto nível de exigência cognitiva. A resolução das primeiras apela à memorização de procedimentos, sem qualquer estabelecimento de conexões, e as segundas distinguem-se por estabelecerem conexões e exigirem 'fazer-se' Matemática.

Polya (1945) apresentou um modelo de resolução de problemas que constitui uma referência para o ensino e é composto por quatro fases distintas:

(a) Compreensão do problema (understanding the problem);
(b) Conceção de um plano (devising a plan);
(c) Execução do plano (carrying out the plan);
(d) Avaliação do trabalho desenvolvido (looking back).

A compreensão do problema passa por recolher e organizar a informação acerca do problema. A conceção de um plano para resolver o problema, depois da compreensão do mesmo, consiste em elaborar um plano que permita solucioná-lo. Na execução do plano, coloca-se em prática o plano com o objetivo de encontrar solução(ões) ou verificar que não existe(m). A avaliação do trabalho desenvolvido consiste na verificação das estratégias implementadas na resolução do problema e da adequação da solução aos dados e condições do problema.

As estratégias de resolução de problemas podem passar pela elaboração de esquemas, tabelas ou diagramas, procura de regularidades/padrões, experimentação de casos particulares ou tentativa e erro.

Segundo Ponte (2003), dependendo de quem resolve a tarefa, esta pode assumir categorias diferentes, "*uma certa tarefa pode ser o ponto de partida para uma investigação ou uma situação evocativa de investigações e aprendizagens já realizadas*" (p. 9). Mas, então, convém clarificar também o que se entende por tarefas de investigação e de exploração. O conceito de tarefa de investigação envolve, não só, a formulação de conjeturas e questões e apresentação de demonstrações ou refutações, bem como a discussão e argumentação na apresentação de resultados.

Os autores Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas e Ferreira, em 1999, referidos por Ponte (2003), definiram quatro etapas caraterísticas de uma investigação matemática, são elas:

(a) Formular a questão a investigar;
(b) Formular conjeturas relativamente a essa questão;
(c) Testar as conjeturas e, eventualmente, reformulá-las;
(d) Validar e comunicar os resultados.

Assim, nas atividades de investigação, a questão que a orienta deve ter um elevado grau de abertura, sendo os alunos a definir o percurso a seguir, elaborando as suas próprias questões e conjeturando uma ou mais hipóteses, com vista a clarificar a questão inicial (Ponte & Matos, 1996). Ponte (2005) considera que uma tarefa de investigação tem quatro dimensões básicas: o seu grau de dificuldade, a sua estrutura, o seu contexto referencial e o tempo requerido para a sua resolução. Na figura 20, pode-se observar a relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura:

Figura 20 - Relação entre diversos tipos de tarefas (retirado de Ponte, (2005))

Ainda segundo o mesmo autor, cada uma destas tarefas desempenha um papel importante para alcançar certos objetivos curriculares:

(a) As tarefas de natureza mais fechada (exercícios, problemas) são importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático nos alunos, uma vez que este raciocínio se baseia numa relação estreita e rigorosa entre dados e resultados.

(b) As tarefas de natureza mais acessível (explorações, exercícios), pelo seu lado, possibilitam a todos os alunos um elevado grau de sucesso, contribuindo para o desenvolvimento da sua autoconfiança.

> (c) As tarefas de natureza mais desafiante (investigações, problemas), pela sua parte, são indispensáveis para que os alunos tenham uma efetiva experiência matemática.
>
> (d) As tarefas de cunho mais aberto são essenciais para o desenvolvimento de certas capacidades nos alunos, como a autonomia, a capacidade de lidar com situações complexas, entre outras. (p. 17).

Segundo Ponte (2014), podem implementar-se tarefas diversas dependendo da forma de organização dos alunos, o ambiente de aprendizagem e a sua capacidade e experiência anterior. No entanto, é pela reflexão sobre essa atividade que o aluno aprende, tendo presente que esta depende de dois elementos igualmente importantes: "*(i) a tarefa proposta; e (ii) a situação didática criada pelo professor.*" (p. 17)

A resolução das tarefas de natureza mais desafiante (investigações, problemas) requer imaginação e criatividade, está num patamar de complexidade superior. Segundo Abrantes (1994), estas capacidades de ordem superior surgem ligadas à comunicação, ao espírito crítico, às demonstrações e outros processos de natureza metacognitiva.

No que diz respeito à comunicação, torna-se relevante estimulá-la entre alunos, sendo o domínio da Geometria um contexto privilegiado pois, como referem os autores Breda et al. (2011), "*A geometria propicia um contexto favorável para que os alunos se envolvam em actividade matemática e desenvolvam a comunicação matemática. Permite estabelecer conexões entre diferentes áreas da Matemática*." (p. 13). Para que se estabeleçam interações ricas para o desempenho matemático dos alunos, estes devem ter momentos de partilha e colaborativos, em trabalho de pares ou grupo mais alargado, de forma a refletirem, resolverem as tarefas propostas, apresentar e argumentar as suas conclusões. Num ensino assente numa aprendizagem exploratória, a comunicação assume um papel primordial, seja esta oral ou escrita. Os mesmos autores consideram que "*A comunicação é uma capacidade transversal importante, permitindo que os alunos sejam capazes de interpretar, explicar e representar o processo em termos matemáticos.*" (p. 14).

Num ambiente criativo, os materiais didáticos podem constituir-se verdadeiros mediadores na resolução de tarefas desafiantes e no desenvolvimento de competências transversais e específicas. A abordagem da Geometria é propícia à utilização de recursos tecnológicos que permitem, aos alunos, um contacto diferente com a disciplina de Matemática, baseado em experiências individuais e de pares, explorando ou investigando. De entre eles, destaca-se o GeoGebra, pois os alunos mais facilmente formulam hipóteses, exploram vários casos, raciocinam indutivamente e testam ou refutam as conjeturas. Este software constitui um ambiente favorável ao permitir, em menos tempo que usando papel, lápis e material de construção, um número elevado de experiências, facilitando a formulação e testagem de conjeturas e a sua confirmação ou refutação.

No tema Geometria, na abordagem ao conteúdo de aprendizagem "Teorema de Pitágoras", as AE preveem, recorrendo a situações e contextos variados, incluindo a utilização de materiais diversificados e tecnologia, que os alunos resolvam tarefas que mobilizem e, assim, também desenvolvam a capacidade de resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação matemática e que, em particular, sejam capazes de:

1. Demonstrar o teorema de Pitágoras e utilizá-lo na resolução de problemas em contextos matemáticos e não matemáticos;
2. Resolver problemas usando ideias geométricas em contextos matemáticos e não matemáticos, aplicando estratégias de resolução, incluindo a utilização de tecnologia, e avaliando a plausibilidade dos resultados;
3. Desenvolver a capacidade de abstração e de generalização e de compreender a noção de demonstração e construir argumentos matemáticos e raciocínios lógicos;
4. Exprimir oralmente e por escrito ideias matemáticas, com precisão e rigor, para justificar raciocínios, procedimentos e conclusões, recorrendo ao vocabulário e linguagem próprios da geometria e da matemática em geral (convenções, notações, terminologia e simbologia). (pp. 9,10)

Ainda no mesmo documento, estão descritas as práticas essenciais de aprendizagem, devendo ser criadas condições de aprendizagem para que os alunos, em experiências individuais e de grupo, tenham oportunidade de:

1. Explorar, analisar e interpretar situações de contextos variados, numa abordagem do espaço ao plano, que favoreçam e apoiem uma aprendizagem matemática com sentido (dos conceitos, propriedades, operações e procedimentos matemáticos);
2. Realizar tarefas de natureza diversificada (projetos, explorações, investigações, resolução de problemas, exercícios, jogos);
3. Utilizar modelos geométricos e outros materiais manipuláveis, e instrumentos variados incluindo os de tecnologia digital e a calculadora, na exploração de propriedades de figuras no plano e de sólidos geométricos;
4. Utilizar instrumentos de medida e desenho (régua, compasso, esquadro e transferidor) na construção de objetos geométricos;

5. Visualizar e interpretar representações de figuras geométricas;
6. Reconhecer relações entre as ideias matemáticas em geometria e aplicar essas ideias em outros domínios matemáticos e não matemáticos;
7. Resolver problemas que requeiram a aplicação de conhecimentos já aprendidos e apoiem a aprendizagem de novos conhecimentos;
8. Resolver e formular problemas, analisar estratégias variadas de resolução e apreciar os resultados obtidos;
9. Abstrair e generalizar e reconhecer e elaborar raciocínios e argumentos, discutindo e criticando argumentos de outros;
10. Comunicar utilizando a linguagem matemática, oralmente e por escrito, para descrever e justificar, raciocínios, procedimentos e conclusões;
11. Analisar o próprio trabalho para identificar progressos, lacunas e dificuldades na sua aprendizagem. (pp. 9,10)

A implementação das práticas essenciais de aprendizagem assume um papel primordial no desenvolvimento do currículo, e assim, segundo Fernandes (2006), importa "*perceber como é que professores e alunos se comportam ao nível do ensino, da aprendizagem e da avaliação perante cada um dos tipos de tarefas seleccionadas*." (p. 38)

Relativamente à avaliação dos alunos esta deve ser pautada por princípios fundamentais, tais como, a transparência, a coerência e a positividade. De acordo com Fernandes (2004) o processo de avaliação deverá ser transparente, com os objetivos e aprendizagens a desenvolver e todos os processos de avaliação expressos de forma clara e disponíveis. Os critérios de avaliação devem ser apresentados de forma percetível aos alunos e devem constituir um elemento fundamental de orientação nos mesmos. As apreciações aos trabalhos realizados pelos discentes devem ter em conta os respetivos critérios e estes devem ser capazes de autorregular as suas aprendizagens.

Segundo Fernandes (1997), uma avaliação alternativa às limitações da avaliação tradicional surge da necessidade de desenvolver uma avaliação coerente com as mudanças curriculares e que se adeque às finalidades do ensino básico. Desta forma, o autor estabelece que a avaliação, como processo, não deverá impedir o progresso do aluno, nem inviabilizar oportunidades de aprendizagem, mas sim, constituir-se como um meio favorável de promoção da melhoria, motivando os alunos a atingirem objetivos educacionais e simultaneamente tomarem conhecimento das suas aprendizagens. A concretização das recomendações sugeridas nos documentos curriculares impõe a necessidade de articular a avaliação com as metodologias e estratégias utilizadas, fazendo coincidir as tarefas de aprendizagem com tarefas de avaliação, "*Só desta forma a avaliação* *fará parte integrante do ensino e da aprendizagem e poderá assumir o seu papel regulador*" (Fernandes, p. 285). Um outro princípio apresentado por Fernandes, adotado de Cockcroft (1982), "*reconhece a necessidade de desenvolver uma avaliação através da qual os alunos tenham plenas oportunidades para demonstrarem o que podem e sabem fazer*" (p. 285). Para tal, deverão ser utilizadas tarefas de avaliação contextualizadas, implementadas num ambiente menos formal, com flexibilidade de tempo, de maneira a que os alunos tenham mais possibilidades para demonstrarem os conhecimentos, as atitudes e os valores de que são possuidores.

De acordo com Fernandes (2019), as expressões como Avaliação Formativa e Avaliação Sumativa recorrentemente usadas, são substituídas de alguma forma por Avaliação para as Aprendizagens e Avaliação das Aprendizagens, respetivamente. Assim, o autor, numa tradução livre que o Assessment Reform Group (ARG), no Reino Unido, criou para a designação Avaliação para as Aprendizagens, considerou-a como "*um processo de recolha e interpretação de evidências que professores e alunos utilizam para determinar em que situação se encontram os alunos, onde se pretende que eles cheguem e qual a melhor forma de lá chegarem*" (p. 12). O mesmo autor, refere ainda os dez princípios definidos pela ARG inteiramente ligados à Avaliação para as Aprendizagens:

1. integrar uma planificação eficaz do ensino e da aprendizagem.
2. estar focada em como os alunos aprendem.
3. ser reconhecida como central nas práticas na sala de aula.
4. ser entendida como uma capacidade profissional fundamental para os professores.
5. ser sensível e construtiva pois qualquer avaliação tem um impacto emocional.
6. ter em conta a importância da motivação dos alunos.
7. promover o empenho para se alcançarem as finalidades e a compreensão dos critérios através dos quais se avalia a sua consecução.
8. orientar os alunos para que aprendam como melhorar.
9. desenvolver as capacidades de autoavaliação dos alunos para que estes sejam reflexivos e autónomos.
10. reconhecer todo o espetro de aprendizagens de todos os alunos. (p. 13)

A Avaliação para as Aprendizagens, segundo Fernandes (2019), é uma avaliação próxima dos alunos, acompanhando permanentemente as dinâmicas de ensino e de aprendizagem proporcionando um feedback que apoie e oriente os alunos, onde a comunicação e a interação assumem um papel primordial. A Avaliação das Aprendizagens é feita pontualmente, normalmente usada para classificar os alunos e com menor interação entre os intervenientes.

Neste contexto, num ensino criativo, as abordagens devem ser dinâmicas, originais e inovadoras, de forma a potenciar a imaginação nos alunos e a criação de novas ideias (Jeffrey & Craft, 2004). Ao ensinar de forma criativa, os professores, revelando o seu entusiasmo, estimulam a imaginação dos alunos e a sua criatividade, aspetos que favorecem e apoiam uma aprendizagem matemática com sentido. Neste processo, num ambiente de aprendizagem em que os alunos se sintam motivados, devem ser implementadas tarefas que envolvam os alunos em "*atividades matematicamente ricas e produtivas*" Ponte (2005, p. 1), que estabeleçam conexões intra e inter Matemática, apoiadas pelas tecnologias. Compete aos professores ser fluentes no funcionamento da aula, flexíveis com a abordagem e originais nas propostas de trabalho, e ser capazes de estimular o raciocínio matemático, a resolução de problemas e a comunicação dos alunos (Zamir & Leikin, 2011). De acordo com os mesmos autores "*o ensino é uma atividade complexa que deve ser criativa e direcionada à criatividade dos alunos*” (p. 18).

CAPÍTULO II

MÉTODO

"...só uma fundamentação teórica confere os instrumentos necessários para a interrogação do real e adequada escolha das metodologias de investigação, e para que se ultrapasse a mera visão do senso comum sobre os fenómenos."

(Amado, 2017, p. 19)

O investigador interpretativo, segundo Amado (2017) tem como principal interesse a possibilidade de particularizar, mais do que generalizar, *"Os fatores universais descobrem-se quando se manifestam em forma concreta e específica, não em abstração e generalidade (Erickson, 1989: 223)"* (p. 46). A forma de investigar procura explorar as interpretações e os sentidos da ação.

Neste capítulo, fundamentam-se as opções metodológicas deste estudo. É ainda exibido o esquema de investigação, caraterizados os participantes em estudo, apresentadas as técnicas e instrumentos de recolha de dados e feita a descrição do estudo. Por último, explica-se o tipo de tratamento a que foram submetidos os dados e refere-se como serão apresentados os resultados.

1. Opções Metodológicas

Com este estudo, pretende-se averiguar em que medida uma abordagem criativa do Teorema de Pitágoras no oitavo ano de escolaridade, consubstanciada por uma sequência de tarefas desafiantes que evidenciam conexões várias e cuja resolução é mediada por ferramentas tecnológicas, favorece uma mais sólida apropriação e aplicação daquele Teorema, dando-se particular destaque ao raciocínio, à resolução de problemas e à comunicação, e ao gosto e atitude face à disciplina.

Portanto, optou-se por um estudo de natureza qualitativa e interpretativa, que teve em conta cinco pontos essenciais definidos por Bogdan & Biklen (1994), nomeadamente: (1) os dados são recolhidos no ambiente natural dos participantes e é o investigador o principal responsável na recolha desses mesmos dados; (2) os dados recolhidos são de carácter descritivo; (3) nas metodologias qualitativas o processo implementado assume um papel primordial relativamente aos resultados; (4) a análise dos dados é indutiva; (5) o investigador privilegia o significado que os participantes atribuem às experiências.

Sendo este um estudo qualitativo e descritivo, procura apresentar e descrever de que maneira os alunos aplicam e articulam os seus conhecimentos no conteúdo em questão, nomeadamente, que estratégias utilizam, que conjeturas e justificações apresentam. É interpretativo no sentido em que se pretende perceber o processo pelo qual passaram os alunos, incluindo as principais dificuldades sentidas.

Esta investigação decorre em contexto de sala de aula, numa turma do oitavo ano da qual a investigadora é também professora de Matemática. Num ambiente propício à aprendizagem e a partir de uma diversidade de tarefas implementadas, em termos pedagógicos, procura-se experimentar novas formas de trabalho que proporcionem a interação entre os alunos, o desenvolvimento de capacidades de raciocínio, resolução de problemas e comunicação e a consolidação de conhecimentos e apropriação de novos conceitos.

Em todo este processo, o investigador deve manter uma conduta atenta e imparcial tal como refere Eisenhart (1988)

> O investigador deve estar envolvido na atividade como um insider e ser capaz de reflectir sobre ela como um outsider. Conduzir a investigação é um acto de interpretação em dois níveis: as experiências dos participantes devem ser explicadas e interpretadas em termos das regras da sua cultura e relações sociais, e as experiências do investigador devem ser explicadas e interpretadas em termos do mesmo tipo de regras da comunidade intelectual em que ele ou ela trabalha. (pp. 103,104)

Procurando-se responder ao "como?" e "porquê?" a abordagem adequada, segundo Yin (1984) e Ponte (1994) é o estudo de caso. Para este mesmo autor,

> É uma investigação que se assume como particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única em muitos aspectos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global do fenómeno de interesse. (1994, p. 2).

Pretende-se a partir de algo particular, contribuir para o todo.

Stake (2007) argumentava que a generalização não deve ser, necessariamente, um objetivo em todas as pesquisas. Em estudos de natureza qualitativa, segundo o autor, seleciona-se um caso particular pelo que é e pelo que faz, sendo a intenção da escolha compreender esse caso específico. Também refere que a partir de um estudo de caso, não se pretende fazer um estudo estatístico e, portanto, o caso não deverá ser visto como uma "amostra" que permita generalizar. Stake (1994) refere que a seleção dos casos é o "*passo mais crítico da pesquisa por estudo de caso*" (p. 243). E acrescenta que, "*Ao fazer um estudo singular de caso, pode escolher-se um caso extremo ou único, ou mesmo um caso revelatório…*" (p. 243). Ainda sobre a escolha dos casos a selecionar, Stake (2007) indica que pode ser útil selecionar "casos que são típicos ou representativos de outros casos (...)" (p. 20). E acrescenta que "*Por vezes um caso típico funciona bem, mas frequentemente um caso pouco habitual torna-se ilustrativo de circunstâncias que passam desapercebidas nos casos típicos*" (2005, p. 17).

A presente investigação será enquadrada num estudo de caso múltiplo, tendo por referência dois casos típicos representativos de situações distintas.

2. Esquema de Investigação

Na figura seguinte, apresentam-se, em forma de esquema, as principais etapas da investigação, bem como as técnicas e instrumentos associados.

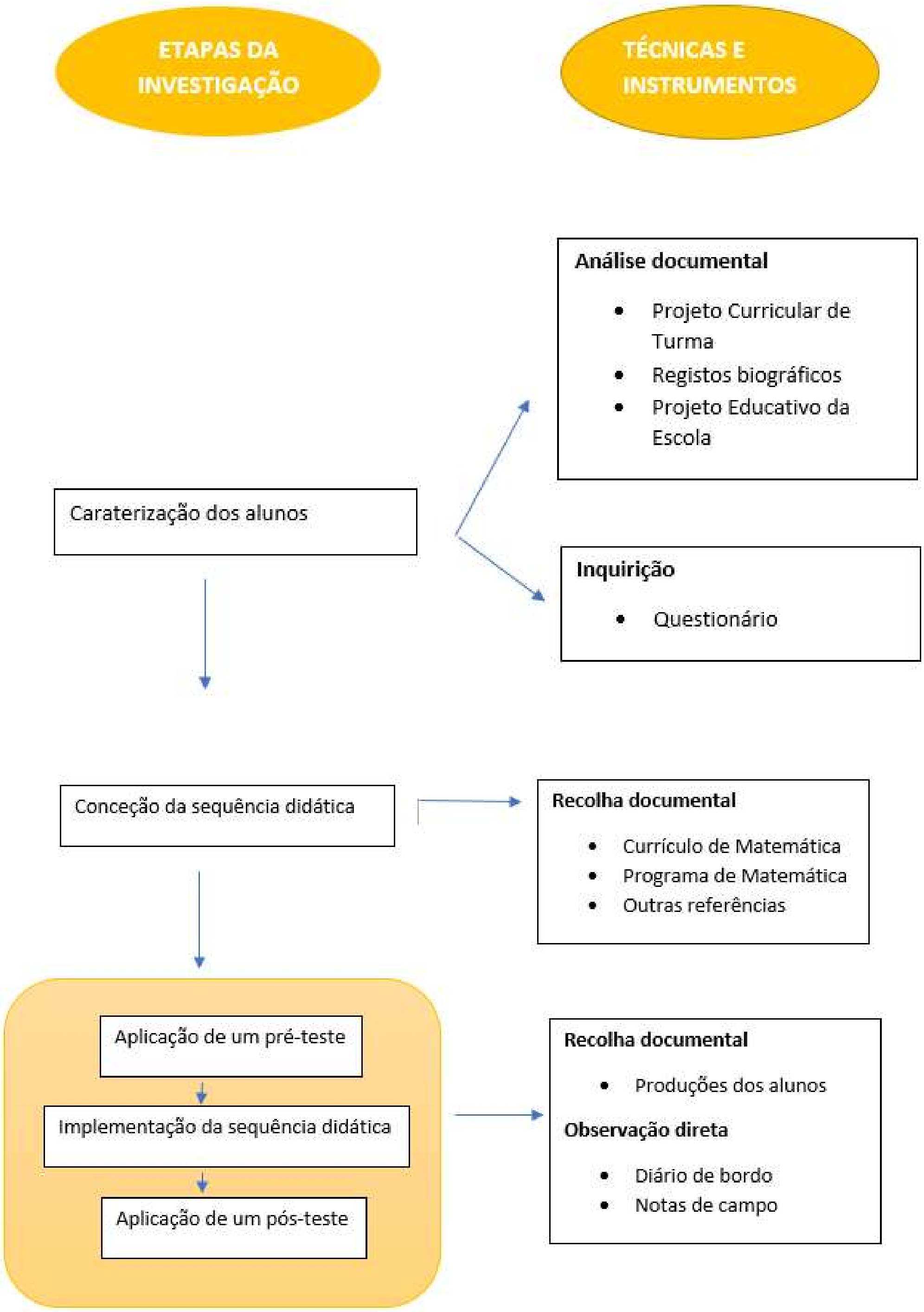


Figura 21 - Esquema da investigação

3. Participantes no Estudo

Este estudo foi desenvolvido num Agrupamento de Escolas com 2.º e 3.º ciclos do ensino básico, numa turma do 8.º ano de escolaridade do distrito de Viseu no ano letivo 2019/2020. Foram participantes do estudo, a professora/investigadora, os alunos da turma e, em particular, os alunos caso. A professora/investigadora planeou e implementou todos os procedimentos inerentes à investigação. Os Encarregados de Educação e a Direção do Agrupamento tomaram conhecimento e autorizaram a participação no estudo. O anonimato dos participantes foi garantido, por razões legais e éticas.

3.1. Caraterização da escola e do meio envolvente

Para caraterizar a escola e o meio envolvente consultou-se o Projeto Educativo da Escola. O Agrupamento de Escolas está inserido na zona ocidental do concelho de Cinfães. Esta região é predominantemente rural, de relevo muito acentuado e com grande dispersão populacional. O concelho de Cinfães tem um Índice de Desenvolvimento Económico e Social muito baixo, encontrando-se em 293º lugar no total de 308 municípios, o que se reflete no sucesso dos alunos. O grau de escolarização da população com mais de 15 anos é outro entrave. Neste concelho apenas 26.9% da população tem uma escolarização superior ao 2.º ciclo, comparando com os 48,6% a nível nacional. Verifica-se também um progressivo decréscimo populacional relativamente a 1981 e 2001, com quebras de população de 20% e 9%, respetivamente. Em relação à população jovem, com menos de 15 anos, segundo informação dos Censos realizados em 2011, perdeu-se 23,5% entre 2001 e 2011.

No ano letivo 2019/2020 o Agrupamento foi frequentado por 564 alunos, distribuídos por 35 turmas, desde o pré-escolar ao 9.º ano. Ao longo dos últimos anos verificou-se um decréscimo acentuado do número de alunos. A atividade docente esteve a cargo de 58 docentes, sendo 86% docentes do Quadro de Agrupamento ou Quadro de Zona Pedagógica. Nesse ano letivo, 45% dos alunos beneficiava de escalão A e 28% escalão B.

3.2. Caraterização da Turma

Os alunos da turma, na sua maioria, eram provenientes de agregados familiares com rendimentos baixos e, de vinte alunos, dezassete beneficiavam de apoio socioeconómico. As habilitações escolares máximas dos elementos do agregado familiar eram o 12.º ano em ambos os géneros, sendo que a maioria possuía habilitações ao nível do 6.º ano de escolaridade. Os participantes tinham entre os 13 e os 15 anos e cinco alunos apresentavam retenções. O aproveitamento global da turma foi considerado satisfatório, assim como o comportamento. Estas informações foram recolhidas no Projeto Curricular de Turma e a partir de um questionário (apêndice nº 1), cuja análise se apresenta a seguir.

A turma era constituída por vinte alunos, oito do sexo feminino e doze do sexo masculino. À questão "Como classificas o teu aproveitamento a Matemática?", as respostas foram:

Insatisfaz	**Satisfaz Pouco**	**Satisfaz**	**Satisfaz Bem**	**Satisfaz Muito**
0	5	10	3	2

Tabela 1 - Aproveitamento a Matemática

Pode observar-se que a maioria dos alunos considerava ter um desempenho satisfatório àquela disciplina.

A partir dos dados da tabela 2, pode inferir-se que a generalidade dos alunos (treze alunos) gostavam muito de Matemática e dez alunos gostavam muito de Geometria. Dois alunos pareciam não gostar de Matemática e um de Geometria. Apenas um aluno não concordou que a Geometria pode ser útil, catorze concordaram e cinco concordaram totalmente.

	Concordo totalmente	**Concordo**	**Não concordo**	**Discordo totalmente**	**Não tenho opinião**
Gosto de Matemática.	**13**	**5**	**2**	**0**	**0**
Gosto de Geometria.	**10**	**9**	**1**	**0**	**0**
A Geometria é útil.	**5**	**14**	**1**	**0**	**0**

Tabela 2 - Opiniões sobre Matemática/Geometria

Pode-se observar, na tabela 3, as respostas dadas pelos alunos acerca da necessidade de um ensino criativo. Constatou-se que a generalidade dos alunos assinalou não concordar ou discordar totalmente não ser necessário ser criativo em

Matemática/Geometria; havia divergências de opinião em relação ao facto de um ensino criativo tornar as aprendizagens mais efetivas; a generalidade dos alunos assinalou não concordar ou discordar totalmente, em relação a sentirem-se menos motivados para aprender se a abordagem for criativa; que a criatividade se associava a uma forma mais diversificada de explorar os conteúdos matemáticos/geométricos; que estes aprendiam melhor quando as tarefas eram desafiantes e admitiam várias resoluções e que este tipo de ensino contribuía para que o aluno resolvesse tarefas de forma autónoma e responsável.

	Concordo totalmente	**Concordo**	**Não concordo**	**Discordo totalmente**	**Não tenho opinião**
Em Matemática/Geometria não é necessário ser criativo.	**0**	**1**	**14**	**3**	**2**
É importante que o ensino da Matemática/Geometria seja criativo para que as aprendizagens sejam mais efetivas.	**1**	**9**	**7**	**2**	**1**
Os alunos sentem-se menos motivados para aprender Matemática/Geometria se for abordada de forma criativa.	**0**	**4**	**10**	**6**	**0**
Num ensino criativo, exploram-se conteúdos matemáticos/geométricos da forma mais diversificada possível.	**2**	**13**	**3**	**2**	**0**
Os alunos aprendem melhor Matemática/Geometria quando o professor propõe tarefas desafiantes e que admitem várias resoluções.	**2**	**13**	**3**	**2**	**0**
Um ensino criativo a Matemática/Geometria permite que o aluno resolva tarefas de forma autónoma e responsável.	**1**	**16**	**2**	**0**	**1**

Tabela 3 - Respostas dos alunos sobre ensino criativo

Em relação à questão "*Achas que se pode ensinar Matemática/Geometria de forma criativa? Como?*" a generalidade das respostas considera que sim, com diferentes argumentos. Os argumentos apontados pelos alunos remeteram para três aspetos distintos: a) a diversidade de materiais didáticos não tecnológicos - "*Sim. Eu acho que se pode ensinar utilizando muitos ou vários materiais diferentes, sem estar sempre a utilizar o quadro e também em sítios diferentes.*", "*Sim, fazendo vários exercícios com diferentes tipos de objetos e estruturas*"; b) aplicações em contextos reais- "*Acho, podemos ser criativos a utilizar as formas da natureza*", "*Sim, dando exemplos do dia-a-dia*" e c) o uso de ferramentas tecnológicas: "*Acho que sim, através de jogos ou figuras 3D*" e "…

permitindo o uso de telemóveis e computadores, permitindo a realização de trabalhos em grupo e recorrendo a situações do dia-a-dia".

Relativamente à parte do questionário dirigida para as conexões intra e/ou inter Matemática/Geometria (tabela 4), todos os alunos exceto um concordaram que a melhor forma de aprender é quando os vários saberes se articulavam entre si; todos consideraram existir relação entre os vários conteúdos da disciplina de Matemática; a maioria considerou que a Geometria está presente nas outras disciplinas de forma recorrente; que em Matemática/Geometria utilizavam regularmente competências de outras disciplinas e com muitas aplicações no dia-a-dia.

	Concordo totalmente	**Concordo**	**Não concordo**	**Discordo totalmente**	**Não tenho opinião**
A melhor forma de aprender é quando os vários saberes se articulam entre si.	**9**	**10**	**1**	**0**	**0**
Em Matemática, os conteúdos estão todos relacionados entre si.	**15**	**5**	**0**	**0**	**0**
A Matemática/Geometria está presente nas outras disciplinas de forma recorrente.	**6**	**6**	**4**	**3**	**1**
Em Matemática/Geometria, utilizas regularmente competências de outras disciplinas.	**2**	**10**	**8**	**0**	**0**
A Matemática/Geometria tem muitas aplicações no dia-a-dia.	**6**	**7**	**4**	**3**	**0**

Tabela 4 - Respostas dos alunos sobre conexões intra e/ou inter Matemática

Na questão aberta, "*Para o desenvolvimento de competências transversais e específicas, consideras importante que, em Matemática/Geometria, se explicitem conexões internas à própria disciplina/tema e relações entre a Matemática/Geometria e outras áreas disciplinares e com o dia-a-dia? Por quê?*" a generalidade dos alunos respondeu afirmativamente. Apesar de a maioria dos alunos terem reconhecido que é possível estabelecer conexões e a importância das mesmas, as suas respostas revelaram exemplos de conexões pouco consistentes e superficiais: "*A Matemática/Geometria é importante no dia a dia porque todos os dias a toda a hora resolvemos coisas geométricas*"; "*Acho que a Geometria articula-se com disciplinas, por exemplo Educação Visual e com o dia-a-dia, como por exemplo quando vamos fazer uma piscina temos de saber as medidas*." e "*Eu acho que está em conexão com as outras disciplinas porque para todas as disciplinas e para o dia-a-dia deparamo-nos com a Matemática e por exemplo na físico-química nas* *equações*".

Na parte do questionário direcionada ao correto uso do computador no ensino e na aprendizagem da Matemática/Geometria, a generalidade dos alunos (tabela 5) assinalou que contribuiu para uma aprendizagem mais estimulante e autónoma; promove o desenvolvimento de novas ideias; potencia a construção de conhecimento; põe em evidência conexões entre temas/tópicos matemáticos; ajuda a perceber as diferentes aplicações e a importância da Matemática no quotidiano; desenvolve competências facilitando a resolução de problemas, e permite o acesso a informação variada. No entanto, mais de metade dos alunos, onze, assinalou que aumenta o distanciamento entre professor e alunos.

Se usado corretamente, o computador no ensino e na aprendizagem da Matemática/Geometria:	**Concordo totalmente**	**Concordo**	**Não concordo**	**Discordo totalmente**	**Não tenho opinião**
contribui para uma aprendizagem mais estimulante e autónoma.	**4**	**12**	**3**	**0**	**1**
promove o desenvolvimento de novas ideias.	**13**	**5**	**2**	**0**	**0**
potencia a construção de conhecimento.	**15**	**2**	**3**	**0**	**0**
põe em evidência conexões entre temas/tópicos matemáticos.	**2**	**13**	**5**	**0**	**0**
ajuda a perceber as diferentes aplicações e a importância da Matemática no quotidiano.	**3**	**9**	**5**	**0**	**3**
desenvolve competências facilitando a resolução de problemas.	**6**	**10**	**2**	**0**	**2**
aumenta o distanciamento entre professor e alunos.	**2**	**7**	**10**	**0**	**1**
permite o acesso a informação variada.	**16**	**4**	**0**	**0**	**0**

Tabela 5 - Respostas dos alunos sobre o uso do computador no ensino/aprendizagem

Em relação à questão, "*Consideras importante a utilização do computador no ensino e na aprendizagem da Matemática e, em particular, da Geometria? Por quê?*", apesar de, na tabela anterior, terem reconhecido benefícios na utilização do computador no ensino e na aprendizagem da Matemática/Geometria, nesta questão as respostas divergiram. Os alunos que responderam afirmativamente reconheceram como benefícios: o acesso a novas informações- "*Sim, pois, podemos pesquisar várias coisas diferentes e também ajuda-nos a descobrir novas fórmulas de aprendizagem.*"; maior facilidade na elaboração de trabalhos- "*Acho que é muito mais fácil fazer trabalhos (mais difíceis) no computador, é* *muito mais rápido e prático. E quando tivermos alguma dúvida podemos tirá-la na internet.*"; maior motivação- "*Sim, porque os alunos com o uso do computador podem sentir que a Matemática é mais divertida e interessante.*"; e a articulação de vários destes benefícios- "*Considero o uso do computador importante pois permite-nos acesso a mais informações, torna as aulas mais didáticas e motiva mais os alunos em relação à disciplina.*". Alguns alunos referiram não considerarem importante a utilização do computador com os argumentos: "*Eu acho que o computador não interfere na nossa aprendizagem na Geometria em alguns conteúdos, mas noutros o computador ajuda bastante a compreender outros assuntos da matéria*"; "*Não, porque a Geometria é basicamente desenho rigoroso e o computador não tem nada haver.*" e "*Não porque o computador não tem nada a ver com Geometria.*".

3.3. Seleção dos casos

Neste estudo, tendo em conta os objetivos definidos, as referências anteriores e o tempo de implementação, fez-se a seleção de dois grupos constituídos por dois alunos cada, tendo em atenção a participação dos alunos no questionário, no teste (inicial e final) e em todas as aulas lecionadas no contexto do estudo empírico.

Nas aulas referidas, os alunos desenvolveram trabalho de pares na quase totalidade das tarefas pois, desta forma, puderam partilhar conhecimentos, discutir ideias e mesmo esclarecer dúvidas. Também se atendeu a razões de logística pois, sempre que as tarefas necessitavam da utilização de computadores, a sala onde trabalhavam tinha apenas doze computadores operacionais.

A seleção dos alunos para este estudo obedeceu aos seguintes critérios: o desempenho escolar na disciplina, principalmente no que respeita ao raciocínio, à resolução de problemas e à comunicação, gosto e atitude em relação à disciplina, em geral, e à Geometria, em particular, e teriam de ter estado presentes em todos os momentos da aplicação da sequência didática. A seleção foi determinada pelo conhecimento que a professora/investigadora possuía do aproveitamento dos alunos por ser o segundo ano com eles, pelo desempenho escolar e o gosto e atitude demonstrados pelos alunos no decurso do estudo e pelas produções dos alunos.

Depois de uma cuidada análise dos dados recolhidos, foram selecionados para este estudo dois pares.

O primeiro par foi selecionado dado revelar-se um caso típico relativamente à *performance* da maior parte dos pares da turma. O segundo par foi selecionado dado que revelou uma evolução superior em relação aos restantes alunos da turma no que respeita aos aspetos em estudo.

Os pares serão designados neste estudo por P1 (par 1) e P2 (par 2). O P1 foi constituído por dois elementos designados por Ana e Beatriz e o P2 constituído por dois elementos designados por Inês e Marta, nomes fictícios.

Estas quatro alunas mostraram entusiasmo por poderem trabalhar em pares, encontravam-se em patamares de conhecimento diferenciados relativamente à disciplina e eram empenhadas nas atividades em que se envolviam desde que ocorressem dentro da sala de aula. Uma sua caracterização mais pormenorizada será apresentada no capítulo seguinte.

3.4. A Professora-Investigadora

A professora detém uma licenciatura em Matemática – Ramo Educacional, pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, concluída em 2001. Encontra-se a lecionar desde essa altura, tendo experiência com realidades escolares muito diferentes, contando já com inúmeras escolas no seu currículo, localizadas em Trás-os-Montes, Douro Litoral, Beira Alta, Baixo Alentejo, Algarve e Ilha da Madeira. Lecionou nos segundo e terceiro ciclos do ensino básico, e nos ensinos secundário e recorrente. À data de realização deste estudo, contava com 18 anos de serviço no ensino público. Sendo professora do Quadro de Agrupamento de uma escola do distrito de Viseu, lecionava Matemática ao 8.º ano numa escola deste distrito aquando da realização deste estudo. Durante a sua atividade profissional, desempenhou variados cargos, nomeadamente: Diretora de Turma, Coordenadora dos Diretores de Turma, Equipa de Avaliação Docente e elemento do secretariado de exames. Frequentou diversas ações de formação, no âmbito da sua área curricular, supervisão educativa, avaliações na escola: conceções e práticas e na área das tecnologias da informação e comunicação.

A turma à qual foi aplicado o estudo estava com a professora pelo segundo ano o que, de alguma forma, agilizou e facilitou a implementação da investigação, uma vez que os alunos já estavam familiarizados com a docente. Sendo em simultâneo a investigadora também a professora, procurou-se que a recolha de dados fosse feita num ambiente discreto e natural com o mínimo de interferências com o normal decorrer das aulas.

4. Técnicas e instrumentos de recolha de dados

"…um estudo de caso é uma investigação de natureza empírica. Baseia-se fortemente em trabalho de campo ou em análise documental. Estuda uma dada entidade no seu contexto real, tirando todo o partido possível de fontes múltiplas de evidência como entrevistas, observações, documentos e artefactos"

Ponte, (1994, p. 3)

Numa investigação qualitativa, a recolha dos dados, segundo Lessard-Hébert, Goyette, & Boutin (2008), pode ser feita por:

- inquérito, que pode assumir duas formas distintas - a entrevista e o questionário, dependendo se a forma é oral ou escrita;
- observação;
- recolha documental.

Nesta investigação, foram privilegiadas a inquirição, observação direta e a recolha documental como técnicas de recolha de dados suportadas por: questionário, produções dos alunos e diário de bordo. Esta recolha diversificada visa estudar, de forma o mais completa e real possível, as experiências vividas pelos alunos em todo este processo. No entanto, como refere Ponte (1994) "*Não se deve ignorar o facto que neste tipo de investigação o principal instrumento é precisamente o investigador, não havendo nada que substitua a sua perspicácia observadora, bem como a riqueza e pertinência das suas perspectivas de análise.*" (p. 14).

4.1. Inquirição

Relativamente à inquirição, o instrumento utilizado foi o questionário.

O questionário (apêndice nº 1) foi implementado no início do estudo para se poder recolher informação que, de outra forma seria mais difícil obter num contexto de vinte indivíduos. O questionário tem três questões abertas e cinco fechadas, sobre a relação do aluno com a Matemática/Geometria, relação de um ensino criativo com a Matemática/Geometria, existência de conexões intra e/ou inter Matemática/Geometria e contributo do uso do computador no ensino e na aprendizagem da Matemática/Geometria. Nas questões fechadas, foi utilizada uma escala baseada em Likert com cinco opções: não tenho opinião, discordo totalmente, não concordo, concordo e concordo totalmente, de forma a medir o nível de concordância ou não concordância da afirmação, sendo que a opção não tenho opinião teve por objetivo permitir que os alunos apenas manifestassem um nível de concordância caso assim o entendessem.

4.2. Recolha documental

Como complemento à observação direta, os documentos assumem um papel primordial. Nesta investigação, começou-se por recolher e analisar documentos orientadores e reguladores, tais como o Projeto Educativo da Escola, o Projeto Curricular de Turma, o Currículo Nacional de Matemática, o Programa de Matemática do Ensino Básico, as Aprendizagens Essenciais, o Perfil do Aluno à saída da escolaridade obrigatória e a planificação anual elaborada a nível da escola. Com base nestes documentos, foi elaborada a sequência didática, incluindo o teste.

Para efeitos de recolha de dados para a investigação, na implementação das aulas para abordagem do tópico Teorema de Pitágoras, os principais documentos recolhidos foram as resoluções dos alunos às tarefas propostas, quer no papel quer no GeoGebra.

4.2.1. Teste

O teste aplicado no âmbito desta investigação sobre o conteúdo "Teorema de Pitágoras" foi concebido de acordo com os objetivos definidos no Currículo e no Programa de Matemática para o Ensino Básico em vigor (2013) para o 8.º ano e os objetivos deste estudo. Outro aspeto importante foi assegurar a coerência entre o teste e a abordagem do tópico matemático em causa. Este instrumento (apêndice nº 3) é composto por seis questões, tendo sido elaborado para ser realizado individualmente, na primeira parte, e em pares, na segunda parte, com duração de cinquenta minutos cada. Na primeira parte, mais teórica, os alunos resolveram o teste apenas com material de escrita e, na segunda parte, mais prática, com recurso ao programa GeoGebra.

Este instrumento foi aplicado duas vezes: antes e depois da sequência didática, para melhor aferir da evolução dos alunos.

A primeira questão é meramente conceptual e, com ela, pretendeu-se aferir conhecimentos sobre a definição de hipotenusa e catetos.

Na segunda questão com duas alíneas solicitou-se o cálculo de duas distâncias, onde se aplica o Teorema de Pitágoras podendo-se, posteriormente, utilizar a semelhança de triângulos e/ou o Teorema de Tales.

Na terceira questão os alunos para darem a resposta, tinham, primeiro, de determinar uma distância (correspondente à medida do comprimento da hipotenusa de um triângulo) aplicando o Teorema de Pitágoras, e depois relacionar distância e tempo (função linear).

Na quarta questão foi solicitado aos alunos para verificarem se o triângulo era retângulo e, pretendia-se que aplicassem o Recíproco do Teorema de Pitágoras.

Na quinta questão os alunos tinham de calcular uma distância (correspondente à medida de comprimento do cateto de um triângulo) aplicando o Teorema de Pitágoras.

Na sexta e última questão os alunos tinham o programa GeoGebra disponível para auxiliar nas resoluções das cinco alíneas. Pretendeu-se que a forma como as alíneas estavam sequenciadas permitisse aos alunos inferir o Teorema de Pitágoras tendo que, nos raciocínios intermédios, utilizar critérios de semelhança de triângulos e concluir que a decomposição de um triângulo retângulo pela altura relativa à hipotenusa divide-o em dois triângulos semelhantes entre si e cada um deles semelhante ao triângulo dado.

4.2.2. Outras produções dos alunos

Ao longo da investigação, as outras produções dos alunos são relativas à resolução das tarefas que estiveram na base das aulas lecionadas e foram efetuadas em suporte de papel e em formato digital, tendo sido, posteriormente, recolhidas para uma análise mais aprofundada.

4.3. Observação

Segundo Yin (2005), a observação participante fornece “oportunidades incomuns” para a recolha de dados num estudo de caso, pois permite participar na investigação “*dentro do estudo de caso, e não de um ponto de vista externo*” (p. 122).

Neste estudo, a observação foi participante e constituiu um meio privilegiado e essencial de recolha de dados. Dessa observação, foram feitos registos nas notas de campo e no diário de bordo. Esta técnica foi utilizada em toda a sequência didática. A professora da disciplina e simultaneamente investigadora acompanhou e orientou todo o processo, prestando apoio aos alunos sempre que necessário na execução das suas tarefas.

5. Descrição do estudo

A professora e investigadora agendou uma reunião com os Encarregados de Educação, após autorização da Direção do Agrupamento, para estes tomarem conhecimento da investigação e autorizarem ou não os seus educandos a participar. Todos os Encarregados se mostraram recetivos e autorizaram, por escrito, a implementação do estudo, tendo-lhes sido garantido o anonimato de todo o tipo de registos.

O estudo empírico desenvolvido contemplou momentos distintos - primeiro a aplicação de um inquérito por questionário, depois a aplicação de um teste inicial, ao qual se seguiram seis sessões de abordagem do Teorema de Pitágoras. No final, aplicou-se novamente o teste.

5.1. Etapas e Procedimentos

O início do estudo dá-se com a aplicação de um questionário já descrito anteriormente, numa aula com duração de cinquenta minutos.

Os alunos manifestaram surpresa e curiosidade em relação ao mesmo e alguma dificuldade em responder a algumas das questões que, para eles, pareciam não estar relacionadas, pelo menos de forma mais direta, com a disciplina. A este respeito, a investigadora informou-os de que deveriam fazer uma leitura atenta do questionário e refletir sobre as questões colocadas e responder mediante a experiência escolar que tinham até ao momento. O tempo previsto para a implementação do questionário foi suficiente e, de uma forma geral, os alunos empenharam-se.

Na aula seguinte, foi aplicado um teste de avaliação com duração de cem minutos (apêndice nº 3), na modalidade "teste inicial", antes da implementação da sequência didática. O teste contemplava duas partes, uma para ser respondida de forma individual, em cinquenta minutos, e outra parte com a mesma duração realizada em pares no computador. Foi sentido um desconforto geral por parte dos alunos por não conseguirem responder às questões propostas. A professora acalmou-os, informando que se tratava de um teste inicial, com características diagnósticas, incentivando-os a responder da forma que considerassem ser a mais adequada.

Seguiu-se a implementação das seis sessões, de acordo com a planificação efetuada (apêndice nº 2), tendo por base seis tarefas com diferentes graus de complexidade e abertura. Saliente-se que a implementação das tarefas não originou qualquer alteração à ordem que estava prevista, bem como à duração da sequência didática. Procurou-se que todo o processo decorresse com a maior naturalidade possível, mantendo as rotinas habituais dos alunos. Os alunos trabalharam em pares, num ambiente que se pretendeu que fosse potenciador da criatividade, salvaguardando-os da crítica destrutiva, habilitando-os a pensar, explorar e a aperfeiçoar as suas ideias, num clima criativo. A formação dos pares foi deixada ao critério dos alunos, atendendo às suas preferências, e mantida ao longo da implementação da sequência didática.

A prática implementada ao longo das sessões foi baseada numa aprendizagem ativa e numa abordagem exploratória, admitindo as quatro fases propostas por Stein et al. (2008):

(a) motivação/introdução;

(b) resolução efetiva das tarefas pelos alunos;

(c) confronto de estratégias e discussão;

(d) síntese das principais conclusões.

Após a entrega da tarefa, normalmente um problema ou uma atividade de exploração/investigação, assegurava-se a compreensão da mesma por parte dos alunos e de modo a sentirem-se motivados e empenhados na sua consecução. Houve o cuidado de estabelecer tempo para cada momento da tarefa, de organizar o desenvolvimento do trabalho da turma, gerir os recursos e o modo de trabalho dos alunos. O apoio no trabalho autónomo dos alunos foi garantido, incentivando a participação de todos. As intervenções da professora procuraram ser cuidadas de forma a não diminuir o grau de dificuldade da tarefa. Ao longo de todo este processo, foi importante garantir que os alunos conseguiam concluir a tarefa, de forma a apresentarem o seu trabalho, à turma ou em grupos, comunicando as suas principais conclusões e elaborando sínteses.

Relativamente à observação das aulas da implementação da sequência didática, a investigadora assumiu um papel participante, acompanhando o trabalho dos alunos prestando apoio sempre que necessário ou solicitado.

Esta aprendizagem ativa do Teorema de Pitágoras, assente numa abordagem exploratória, evidenciando conexões várias e mediada por um ambiente de geometria dinâmico, GeoGebra, pode considerar-se de cariz criativo, pois foram implementadas metodologias diferentes das geralmente utilizadas em sala de aula.

Não foi seguida a sequência proposta em qualquer manual escolar do oitavo ano, pelo facto de estes não espelharem verdadeiras articulações e apresentarem atividades que, na sua maioria, apelam à memorização. A forma sucinta como é apresentado nos manuais escolares o Teorema de Pitágoras e todos os resultados que daí surgem ou que estão relacionados não envolve os alunos num verdadeiro processo de criação, pois não são levados a explorar, analisar e refletir.

Por último, aplicou-se o teste, nos mesmos moldes da aplicação inicial.

As produções dos alunos foram recolhidas após cada tarefa e as notas de campo que se foram tirando ao longo das seis sessões foram, posteriormente, elaboradas no Diário de Bordo.

Neste, registaram-se, ainda, respostas acerca da opinião sobre a unidade didática implementada, solicitada no final do estudo.

5.2. As tarefas

"É muitas vezes mais eficaz, em termos de aprendizagem, que eles descubram um método próprio para resolver uma questão do que esperar que eles aprendam o método do professor e sejam capazes de reconhecer, perante uma dada situação, como o aplicar"

Ponte (2005, p. 9).

Neste ponto, dão-se a conhecer as seis tarefas propostas que consubstanciaram a sequência didática.

As seis tarefas foram cuidadosamente elaboradas segundo as orientações do Currículo Nacional de Matemática, o Programa de Matemática do Ensino Básico, das Aprendizagens Essenciais, do Perfil do Aluno à saída da escolaridade obrigatória e a planificação anual elaborada a nível da escola, no que diz respeito ao conteúdo "Teorema de Pitágoras", e atenderam às caraterísticas da turma.

Intencionalmente, estabeleceram-se conexões intra e/ou inter Matemática, e a sua resolução envolvia o recurso a um ambiente de geometria dinâmico (GeoGebra). Com o trabalho a pares, pretendia-se que, de forma o mais autónoma possível, desenvolvessem competências relacionadas, designadamente, com a partilha, discussão, construção de conhecimentos, formulação e testagem de conjeturas, demonstração, raciocínio, resolução de problemas e comunicação. A comunicação assumiu nestas sessões um papel primordial pois, para além de constante, tinha de ser clara e precisa, de forma a que os raciocínios fossem percebidos. Procurou-se que os alunos se sentissem sempre motivados e empenhados na realização das tarefas pois, só assim, se cria um ambiente propício à aprendizagem.

Segue-se a apresentação de cada uma das tarefas.

5.2.1. Tarefa 1

A tarefa 1 (apêndice nº 4) é constituída por quatro questões.

Na primeira questão, eram pedidas informações que os alunos considerassem relevantes sobre a vida e obra de Pitágoras. A pesquisa seria efetuada antes da aula e a partilha das informações seria feita no início da aula. Pretendeu-se que os alunos contextualizassem o conteúdo que estavam prestes a iniciar, do ponto de vista da História da Matemática.

Na segunda questão, com recurso ao GeoGebra e em trabalho de pares, os alunos tinham de completar uma tabela com as medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os lados de diversos triângulos relacioná-las entre si e com a classificação do triângulo quanto aos lados. O objetivo era que tirassem conclusões. Assim, considerando a, b e c, as medidas dos comprimentos dos lados de um triângulo e sendo a a medida comprimento do maior lado, deveriam concluir que:

1. $a^2 = b^2 + c^2$ se e só se o triângulo é retângulo;
2. $a^2 > b^2 + c^2$ se e só se o triângulo é obtusângulo;
3. $a^2 < b^2 + c^2$ se e só se o triângulo é acutângulo.

No final, as conclusões deveriam ser registadas.

Na terceira questão, também com recurso ao GeoGebra, caso fosse necessário, pretendia-se que os alunos, a partir das conclusões tiradas na questão anterior, aplicassem o Recíproco do Teorema de Pitágoras para concluir que os triângulos dados eram retângulos ($3^2 + 4^2 = 5^2$ e $5^2 + 12^2 = 13^2$). Na terceira alínea, os alunos deveriam ser capazes de indicar outros ternos pitagóricos, recorrendo à semelhança de triângulos e, usando, para isso, o conhecimento de que, em triângulos semelhantes as medidas dos lados correspondentes são proporcionais. Assim, os alunos estabeleciam conexões entre dois temas da Matemática, de forma a reforçar a compreensão dos novos conceitos.

Com a quarta e última questão da tarefa, pretendia-se sintetizar e partilhar os conhecimentos recentemente construídos pelos alunos, consolidando as aprendizagens da aula.

5.2.2. Tarefa 2

A tarefa 2 (apêndice nº 5) é constituída por uma única questão.

Previamente, os alunos, em Educação Visual, realizaram uma construção geométrica que digitalizaram, correspondente à prova do Teorema de Pitágoras, atribuída ao matemático Henry Perigal, descrita na secção 1.2.3. desta dissertação. Tal atividade enquadrou-se no objetivo “Relacionar elementos de organização e de suporte da forma” e, trabalharam o descritor de desempenho “Distinguir e caracterizar a expressão do movimento (movimento implícito; repetição de formas: translação, rotação, rebatimento; expressão estática e dinâmica).” Na aula de Matemática, os alunos, sobre a digitalização referida, fizeram uma réplica da construção geométrica, recorrendo ao GeoGebra, construção que pressupõe o domínio de menus ligados à Geometria. A partir daí, foram exploradas e partilhadas, entre pares, conclusões relativas às duas construções.

Ao longo da realização da tarefa, estabeleceram-se conexões entre Matemática e Educação Visual e, ainda, entre diferentes conteúdos de Matemática - as Isometrias e o Teorema de Pitágoras. Os alunos puderam observar uma prova do Teorema de Pitágoras através da decomposição de figuras e comparando áreas.

5.2.3. Tarefa 3

A tarefa 3 (apêndice nº 6) é constituída por três questões.

Na primeira questão, os alunos são solicitados a inferir o Teorema de Pitágoras a partir de um trapézio decomposto em três triângulos retângulos, uma prova da autoria de James Abram Garfield, descrita na secção 1.2.1. desta dissertação. Começa-se por determinar a medida da área do trapézio aplicando a respetiva fórmula e, seguidamente, a medida da área do trapézio através da soma das medidas das áreas dos três triângulos. Estabelecendo uma relação entre as expressões em causa, os alunos conseguem inferir o Teorema de Pitágoras. Nesta fase, poderiam recorrer à visualização de um vídeo da Khan Academy[4] que apresenta a demonstração de James Abram Garfield.

Na segunda questão, são apresentadas afirmações para serem classificadas em verdadeiras ou falsas, para avaliar as aprendizagens realizadas.

A terceira questão envolve o cálculo de medida de áreas e a aplicação do Teorema de Pitágoras, com o intuito de os alunos verem uma sua aplicação prática e sentirem-se confortáveis na realização de uma tarefa de grau de complexidade mediano.

5.2.4. Tarefa 4

A tarefa 4 (apêndice nº 7) é composta por uma questão.

Tem um maior grau de abertura e, por isso, é colocada aos alunos com a intenção de os fazer explorar, com recurso ao GeoGebra, se o enunciado do Teorema de Pitágoras "*Num triângulo retângulo, a medida da área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos."* é válido para outras figuras que não seja o quadrado. A forma como a questão é apresentada leva os alunos a proceder a explorações em triângulos retângulos. Se, por hipótese, considerarem como base um triângulo retângulo e, sobre os lados deste, construírem figuras e/ou polígonos semelhantes, exploram casos particulares do Teorema de Polya. Esta é uma tarefa que pretende envolver e desafiar os discentes na formulação de conjeturas, delineamento e aplicação de estratégias e validação das suas conclusões. O

[4] Disponível em https://pt-pt.khanacademy.org/math/basic-geo/basic-geometry-pythagorean-theorem/basic-geometry-pythagorean-proofs/v/garfield-s-proof-of-the-pythagorean-theorem

GeoGebra permite, através de construções relativamente rápidas, que os alunos explorem múltiplas situações em cinquenta minutos.

5.2.5. Tarefa 5

A tarefa 5 (apêndice nº 8) é constituída por cinco questões retiradas de Provas de Aferição do 8.º ano de escolaridade e de Provas de Final de Ciclo do 9.º ano, com a finalidade de mobilizar e de consolidar as aprendizagens efetuadas ao longo da implementação da sequência didática.

Apresentam-se situações de contexto real, nas quais se aplica o Teorema de Pitágoras no plano e no espaço, permitindo aos alunos identificarem o seu progresso, lacunas e dificuldades nesta experiência de pares, que se pretendeu colaborativa.

5.2.6. Tarefa 6

A tarefa 6 (apêndice nº 9) é constituída por duas questões.

O início da aula dá-se com o visionamento do episódio 12 da temporada 1, "Teorema de Pitágoras" da série "Isto é Matemática"[5], onde se podem ver aplicações do Teorema de Pitágoras em contextos do quotidiano. Seguidamente, é proposto aos alunos o desafio de criarem um problema/situação cuja resolução passe pela utilização do teorema. Este desafio colocado aos alunos, aparentemente simples, envolve áreas de competências que passam pela comunicação escrita e oral, desenvolvimento do pensamento criativo, aplicação do saber científico, desenvolvimento do raciocínio e a resolução de problemas.

A segunda questão envolve uma prova geométrica do Teorema de Pitágoras, a partir de uma imagem padronizada como se vê na figura 22.

[5] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=1Liyw0fab10

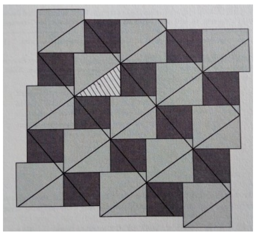


Figura 22 - Prova geométrica do Teorema de Pitágoras (Maor, 2007)

É pedido aos alunos que, textualmente, possam inferir o Teorema a partir da imagem, e concluir que, o quadrado contruído sobre a hipotenusa do triângulo retângulo, representado a tracejado, contém os quadrados construídos sobre os catetos, cada um deles decomposto num triângulo e num quadrilátero. Após esta observação, facilmente se estabelece a ligação ao Teorema de Pitágoras, principalmente se for enunciado relacionando as áreas, "a medida da área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das medidas das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos".

Estas questões da tarefa 6, pelo seu grau de abertura, constituem um desafio cognitivo, exigindo dos alunos um grande sentido de observação e articulação das aprendizagens, para além de todas as outras competências já referidas.

A sequência das tarefas descrita, para o conteúdo - Teorema de Pitágoras, é composta por tarefas desafiantes com patamares de dificuldade distintos. Estabelece conexões com a disciplina de Educação Visual, é feito o enquadramento do ponto de vista da História da Matemática, contém aplicações em contextos reais, tira partido da tecnologia e, articula com outros conteúdos matemáticos, nomeadamente, semelhança de triângulos, Teorema de Tales, cálculo de áreas, isometrias e decomposição de um triângulo retângulo pela altura relativa à hipotenusa. A necessidade de desenvolver tais recursos didáticos, planificados para uma abordagem criativa, procura promover atitudes favoráveis em relação à disciplina e permitir mobilizar conhecimentos adquiridos e fomentar novas aprendizagens.

6. Tratamento e apresentação dos resultados

Pretende-se, neste ponto, mostrar de que forma os dados recolhidos foram tratados e como serão apresentados os resultados no capítulo seguinte.

Os dados foram sujeitos a uma análise de conteúdo orientada por categorias de análise decorrentes dos objetivos definidos e da questão de investigação. Foram, assim, definidas as categorias:

1. Geometria – Teorema de Pitágoras: apropriação e aplicação. Dá-se particular destaque ao raciocínio, à resolução de problemas e à comunicação;
2. gosto e atitude face à disciplina.

Mais concretamente, no que respeita ao primeiro ponto, está em causa o seu enunciado e do respetivo recíproco e provas do teorema. Em relação à aplicação do Teorema de Pitágoras, pretende-se avaliar a evolução dos alunos relativamente ao conteúdo em estudo, dando-se particular destaque ao raciocínio, à resolução de problemas e comunicação.

No segundo ponto, no que concerne ao gosto e atitude face à disciplina, pretende-se observar a forma como a percecionam e a interação e envolvimento emocional.

No capítulo seguinte, apresentam-se os resultados relativos a cada par de alunos, tendo em atenção a forma como evoluíram relativamente às dimensões de análise enunciadas.

Tenta-se corroborar as afirmações feitas tirando partido da digitalização de produções dos alunos e de transcrições do Diário de Bordo. O discurso assumirá um pendor descritivo, mas tenta-se evoluir para uma interpretação de resultados.

CAPÍTULO III

APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

> *"Os resultados de um estudo de caso podem ser dados a conhecer de diversas maneiras, incluindo textos escritos, comunicação oral ou registos em vídeo. O seu relato assume normalmente a forma de uma narrativa cujo objectivo é contar uma história que acrescente algo de significativo ao conhecimento existente e seja tanto quanto possível interessante e iluminativa."*
>
> Ponte (1994, p. 3)

Neste capítulo, apresentam-se os resultados relativos aos dois pares de alunas selecionadas, tendo em atenção a forma com evoluíram relativamente às dimensões de análise enunciadas no capítulo anterior. Os dados obtidos através de diversas fontes foram cruzados de forma a avaliar o impacto da abordagem criativa ao nível do desenvolvimento de competências transversais e específicas em cada um dos casos selecionados.

Pretende-se, também, contemplar uma dimensão interpretativa sobre os processos que foram observados designadamente durante a realização das diversas tarefas, tendo em vista a apropriação e aplicação do Teorema de Pitágoras, dando destaque ao raciocínio, à resolução de problemas e comunicação, e o desenvolvimento do gosto e de uma atitude positiva face à disciplina, na forma como a percecionaram, como interagiram e o envolvimento emocional.

Assim, para os dois casos selecionados, faz-se uma apresentação das alunas que os formam, focando-se algumas das suas características pessoais e a relação que têm com a Matemática e, em particular, com a Geometria. Evidenciam-se, ainda, alguns aspetos relacionados com o ensino criativo, conexões intra e/ou inter Matemática/Geometria e a utilização do computador no ensino e na aprendizagem, que foram recolhidos através do Questionário. Em seguida, analisa-se o trabalho realizado durante a implementação da sequência didática, tentando-se descrever e interpretar, para cada categoria, as produções escritas das alunas, os comportamentos, as reações e os comentários produzidos durante a resolução das tarefas, bem como outros dados obtidos a partir da observação direta e de conversas informais, dos testes inicial e final.

1. O par P1

O primeiro caso é composto por duas alunas, Ana e Beatriz, ambas com 13 anos, no momento da implementação do estudo.

A Ana tinha tido nível 3 no ano letivo anterior a Matemática, bem como a Beatriz.

A Ana era educada, empenhada nas atividades propostas em contexto de sala de aula, persistente na consecução dos seus objetivos, com uma personalidade forte, alheia às observações dos colegas seguindo o seu rumo com autoconfiança elevada. Interessa salientar que o contexto familiar em que estava inserida não valorizava a escola e a aluna, à data do estudo, possuía interesses divergentes dos escolares.

A Beatriz era educada, de natureza tímida, trabalhava de forma sistemática nas tarefas da aula, sentindo-se pouco à vontade para intervir perante os colegas e, excecionalmente, solicitava ajuda ou exponha as suas dúvidas.

As alunas tinham, ambas, um aproveitamento satisfatório à disciplina, sendo que a Ana era algo irregular nos seus resultados e a aluna Beatriz mais consistente.

Em relação à resolução de problemas, ambas as alunas apresentavam dificuldades quando os problemas propostos envolviam um número significativo de conexões matemáticas, ou seja, articulação de várias ideias matemáticas envolvidas num único problema. Apresentavam, também, alguma resistência em relacionar um domínio matemático com diferentes contextos e diferentes áreas. Geralmente, nas suas produções escritas não apresentavam razoabilidade e logicidade. No entanto, a Ana, sendo mais interventiva e tendo mais facilidade em comunicar oralmente, apresentava raciocínios mais estruturados do que os seus registos escritos não existindo, por vezes, coerência entre as duas formas de comunicar. No caso da Beatriz, esta situação não se colocou uma vez que a aluna se inibia de participar oralmente e, quando participava, fazia-o sempre de forma bastante incompleta.

No Questionário, ambas as alunas referiram gostar de Matemática e, em particular, de Geometria, consideraram a Geometria útil e classificaram o seu aproveitamento à disciplina de satisfatório.

Relativamente à parte do Questionário que respeita ao ensino criativo na abordagem da Geometria, ambas as alunas consideraram ser necessário ser criativo em Geometria; que uma abordagem criativa torna as aprendizagens mais efetivas e os alunos sentem-se motivados e que um ensino deste tipo explora conteúdos de forma o mais diversificada possível.

Em relação à questão aberta: "*Achas que se pode ensinar Matemática/Geometria de forma criativa? Como?*", reforçaram algumas destas ideias. A Ana respondeu "*A Geometria pode ensinar-se de forma criativa por exemplo PowerPoint, fazendo aulas ao ar livre, fazer desafios entre os alunos e trabalhos de grupo*" e a Beatriz "*Sim, fazendo vários exercícios com diferentes tipos de objetos e estruturas*".

No que concerne à parte do Questionário relativa às conexões intra e/ou inter Matemática/Geometria, as alunas reconheceram que a melhor forma de aprender é quando os saberes se articulam entre si; os conteúdos da disciplina estão todos relacionados entre si e, em particular, a presença da Geometria surge de forma recorrente nas outras disciplinas.

A Ana reconheceu que, em Matemática, em particular na Geometria, utilizam-se regularmente competências de outras disciplinas e que tem muitas aplicações no dia-a-dia.

Já a Beatriz não concordou que, em Geometria, utiliza-se regularmente competências de outras disciplinas, e que tem muitas aplicações no dia-a-dia.

Na questão aberta: "*Para o desenvolvimento de competências transversais e específicas, consideras importante que, em Matemática/Geometria, se explicitem conexões internas à própria disciplina/tema e relações entre a Matemática/Geometria e outras áreas disciplinares e com o dia-a-dia? Por quê?*", a Ana respondeu "*Acho bastante importante pois estamos a praticar e a pôr em prática os conhecimentos de todas as outras disciplinas.*" e a Beatriz, "*Acho que os conteúdos estão ligados entre si e acho que para o meu dia-a-dia a Geometria não é muito necessária porque na minha rotina não preciso de a utilizar, mas mais tarde no meu futuro poderá ser útil*".

Na última parte do Questionário, no âmbito da utilização do computador no ensino e na aprendizagem da Matemática em particular da Geometria, ambas as alunas consideraram que contribui para uma aprendizagem mais estimulante e autónoma; que promove o desenvolvimento de novas ideias; potencia o conhecimento; permite estabelecer conexões; desenvolve competências facilitando a resolução de problemas e, permite acesso a informação variada. Em relação ao aumento de distanciamento entre professor e alunos, a Ana não tinha opinião e a Beatriz respondeu não concordar.

Relativamente à questão aberta: "*Consideras importante a utilização do computador no ensino e na aprendizagem da Matemática e, em particular, da Geometria? Por quê?*", a Ana respondeu "*Eu considero importante porque na internet existe de tudo e pode-nos ajudar em quase tudo*"; e a aluna Beatriz "*Sim, pois os programas matemáticos e geométricos inseridos nos computadores, também nos dão novos conhecimentos.*".

Em jeito de conclusão, pode afirmar-se que as alunas consideraram relevante a implementação de um ensino criativo para melhores aprendizagens e privilegiaram o uso do computador como complemento à aprendizagem. Relativamente aos vários tipos de conexões, estas foram valorizadas pela Ana e não tanto pela Beatriz.

1.1. Geometria – Teorema de Pitágoras: apropriação e aplicação

Neste ponto, apresentam-se os resultados relativos à forma como as alunas que constituem o primeiro par se foram apropriando do Teorema de Pitágoras e o aplicaram na resolução de tarefas variadas, incluindo as constantes do teste inicial e final.

1.1.1. Produções relativas às tarefas que orientaram as sessões implementadas

Tarefa 1

As pesquisas efetuadas pelas duas alunas Ana e Beatriz (figuras 23 e 24) contêm poucas informações, tendo provavelmente registado as primeiras que surgiram, sem o cuidado de as completarem ou alargarem a sua pesquisa sobre Pitágoras.

Por norma, estas alunas faziam os trabalhos de casa, mas de forma pouco cuidada e rigorosa.

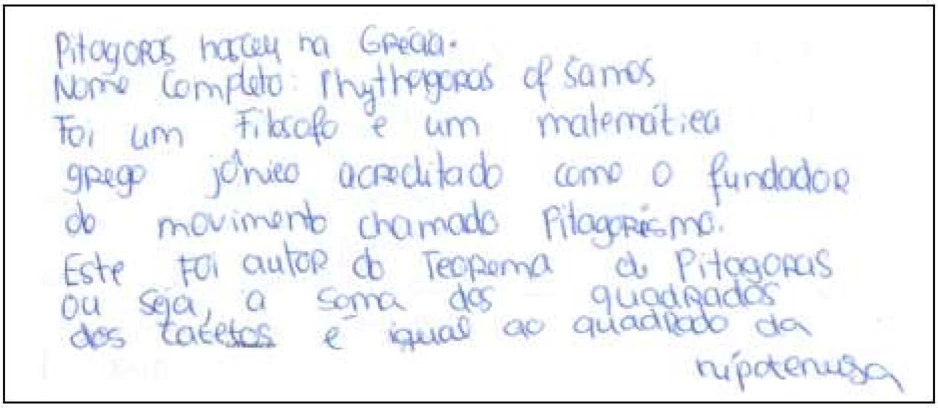

Pitagoras naceu na Grecia.
Nome Completo: Phythagoras of Samos
Foi um Filosofo e um matemática
grego jónico acreditado como o fundador
do movimento chamado Pitagorismo.
Este foi autor do Teorema de Pitagoras
ou seja, a soma dos quadrados
dos catetos é igual ao quadrado da
hipotenusa

Figura 23 - Resposta da Ana à questão 1 da tarefa 1

Na resposta dada pela Ana, esta fez referências soltas e apresentou uma resposta muito incompleta.

Pitagoras foi um filósofo e matemático
e é o fundador do Pitagorismo
Os seus principais interesses são metafisica,
música, matemática, ética, politica e astronomia

Figura 24 - Resposta da Beatriz à questão 1 da tarefa 1

A resposta da Beatriz ainda é mais reduzida, parecendo servir, apenas, para cumprir a formalidade de realizar o trabalho de casa.

Ambas apresentaram textos muito pobres em conteúdo, revelando pouco empenho na pesquisa e usaram escassas fontes de pesquisa. Apesar de as alunas, no Questionário, terem reconhecido a importância do uso do computador na aprendizagem, em particular a Ana que fez referência específica à Internet, nesta questão, não mostraram as potencialidades de tal uso.

Em relação à segunda questão, as alunas fizeram a construção pedida no programa GeoGebra com relativa facilidade e as movimentações necessárias para o preenchimento da tabela. A figura 25 apresenta os valores explorados pelo par, que estão de acordo com os que o programa apresentou, tendo em atenção as condições exigidas.

Classificação do triângulo quanto aos ângulos	Área de [ACDE]	Área de [AGFB]	Área de [BCIH]
acutângulo	43,8 cm²	43,8 cm²	43,8 cm²
acutângulo	25,12 cm²	23,83 cm²	24,47 cm²
acutângulo	22,09 cm²	44,9 cm²	24,47 cm²
retângulo	16,84 cm²	7,25 cm²	9,74 cm²
retângulo	11,68 cm²	8,04 cm²	19,91 cm²
retângulo	19,85 cm²	34,91 cm²	14,59 cm²
obtusângulo	12,5 cm²	34,97 cm²	13,91 cm²
obtusângulo	30,37 cm²	17,2 cm²	61,66 cm²
obtusângulo	30,37 cm²	2,98 cm²	22,77 cm²

Figura 25 - Resposta das alunas Ana e Beatriz à questão 2.a) da tarefa 1

Na alínea seguinte, que pedia para explorarem a informação compilada na tabela de forma a estabelecerem relações entre as medidas das áreas dos quadrados, como a questão foi colocada de forma abrangente, as alunas apresentaram dúvidas quanto à resposta a dar.

Beatriz – *Professora, não percebo a pergunta?*

Ana – *Relação entre as áreas, como assim? São todas diferentes, só o primeiro é que é igual?* (referindo-se à primeira linha preenchida)

Professora – *Para cada triângulo preencheram quatro colunas. Que informação contém cada uma delas?*

Ana – *Fácil, diz em cima, classificação e áreas.*

Professora – *Classificação e áreas de quê?*

Ana – *Classificação é do triângulo e as áreas dos quadrados.*

Professora – *Certo, e agora com essas informações vão tentar perceber de que forma se relacionam.*

Ana – *Já percebi! Os números, é isso? Posso usar máquina de calcular?*

O par, após a colocação das dúvidas, experimentou, com a máquina de calcular, várias operações com os valores da tabela, sempre arredondados às unidades. Em simultâneo, as alunas continuaram a manipular a construção fazendo experiências com outros valores.

Beatriz – *Professora, acho que já sei! Se eu mexer na figura e o triângulo for acutângulo as áreas destes dois juntos são sempre mais.*

Ana – *Estes dois juntos, para serem iguais ao maior, o triângulo tem de ser quase reto. Aliás retângulo.*

O par continuou a sua experimentação, antes de redigir a resposta. Curiosamente, e não obstante estarem a trabalhar em conjunto, cada uma das alunas optou por dar a sua resposta individualmente, apesar da conclusão ter sido feita de forma colaborativa. De alguma maneira, quiseram mostrar que ambas perceberam, apresentando respostas com conteúdos semelhantes, mas com textos diferentes (figuras 26 e 27).

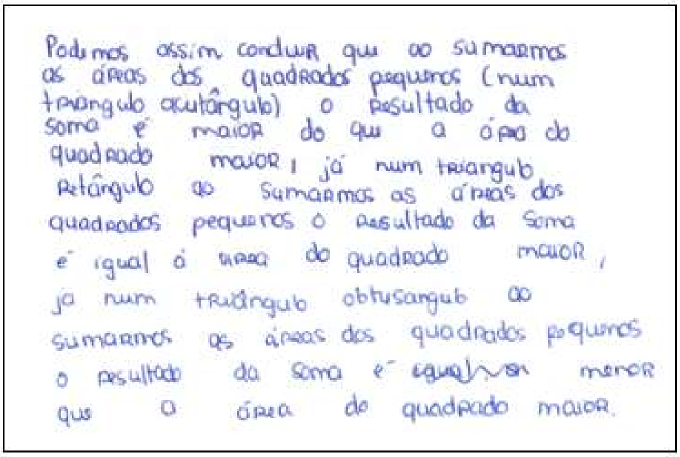

Podemos assim concluir que ao sumarmos as áreas dos quadrados pequenos (num triângulo acutângulo) o resultado da soma é maior do que a área do quadrado maior, já num triangulo retângulo ao sumarmos as áreas dos quadrados pequenos o resultado da soma é igual á área do quadrado maior, já num triângulo obtusângulo ao sumarmos as áreas dos quadrados pequenos o resultado da soma é ~~igual~~ menor que a área do quadrado maior.

Figura 26 - Resposta da Ana à questão 2.b) da tarefa 1

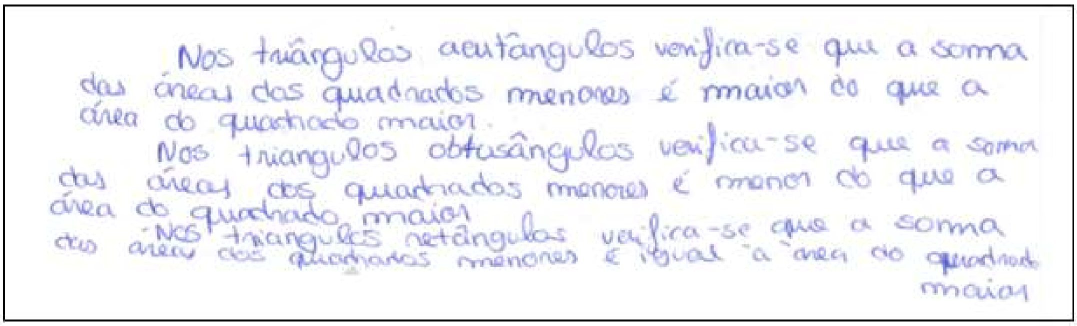

Nos triângulos acutângulos verifica-se que a soma das áreas dos quadrados menores é maior do que a área do quadrado maior.
Nos triângulos obtusângulos verifica-se que a soma das áreas dos quadrados menores é menor do que a área do quadrado maior
Nos triângulos retângulos verifica-se que a soma das áreas dos quadrados menores é igual à área do quadrado maior

Figura 27 - Resposta da Beatriz à questão 2.b) da tarefa 1

As alunas reconheceram corretamente relações entre medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os lados dos vários triângulos e as suas comunicações escritas, utilizando linguagem corrente, descreveram de forma percetível as conclusões a que tinham chegado.

Na primeira alínea da terceira questão, as alunas recorreram à construção que tinham no GeoGebra para as auxiliar na resolução. Aquando da construção nas condições pedidas, ambas reconheceram que poderiam ter resolvido a questão diretamente, sem recurso ao GeoGebra, com base nas conclusões que tinham tirado anteriormente.

As respostas dadas pelas alunas (figuras 28 e 29) vão ao encontro do raciocínio que elaboraram na questão anterior, tendo verificado corretamente a relação entre as medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo e concluindo que se trata de um triângulo retângulo.

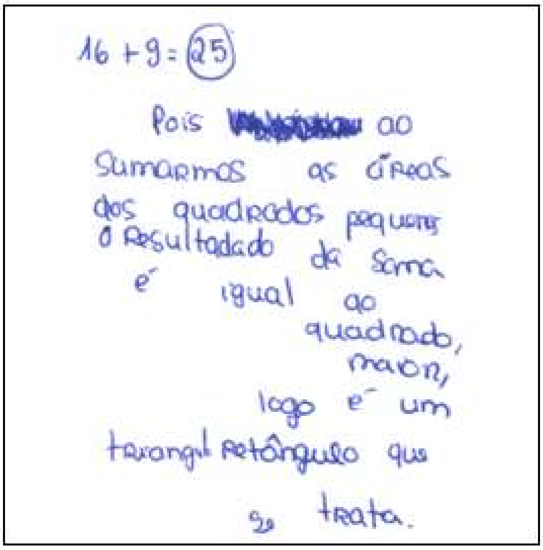

16 + 9 = 25
Pois ao sumarmos as áreas dos quadrados pequenos o Resultadado da Soma é igual ao quadrado, maior, logo é um tarangul retângulo que se trata.

Figura 28 - Resposta da Ana à questão 3.a) da tarefa 1

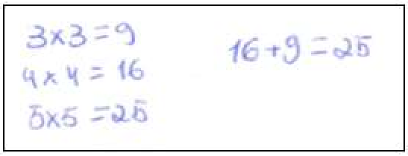


Figura 29 - Resposta da Beatriz à questão 3.a) da tarefa 1

Na segunda alínea, apenas usaram o GeoGebra para confirmar as suas respostas. Ambas responderam corretamente (figuras 30 e 31).

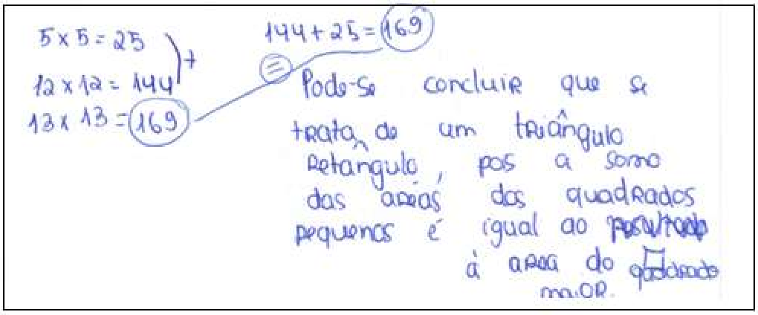


Figura 30 - Resposta da Ana à questão 3.b) da tarefa 1

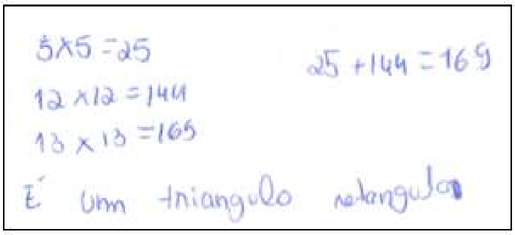


Figura 31 - Resposta da Beatriz à questão 3.b) da tarefa 1

No início da resolução do problema seguinte, as alunas questionaram, entre elas, o significado de terno pitagórico. O par, após alguma partilha de informação, conseguiu relacionar o conceito de terno pitagórico com as duas alíneas que tinham acabado de realizar. Percebeu-se, também, que, ao falarem em triângulos semelhantes, fizeram logo referência aos critérios de semelhança de triângulos. No entanto, pelas respostas dadas (figuras 32 e 33), nota-se que a Ana não estabeleceu qualquer conexão entre ternos pitagóricos e semelhança de triângulos. Já a Beatriz partiu do terno pitagórico (3,4,5), multiplicou-o por 5, obtendo o terno (15,20,25), e verificou a relação descoberta pelo par na questão anterior. Apenas a Beatriz conseguiu estabelecer as conexões pedidas, mas a sua resposta apresenta-se incompleta, sem qualquer justificação para os cálculos que apresenta.

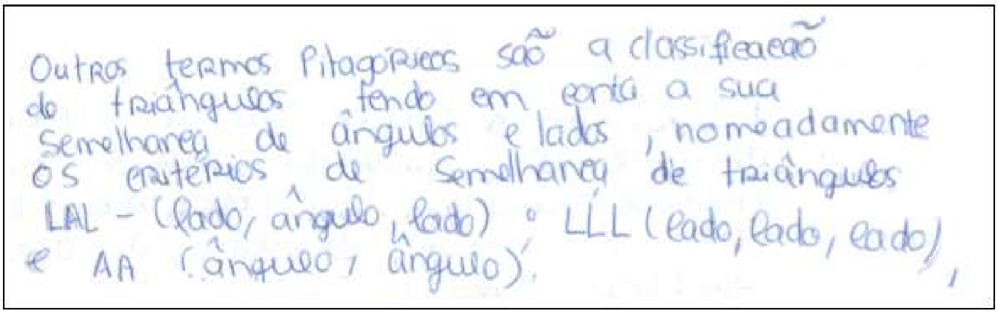


Figura 32 - Resposta da Ana à questão 3.c) da tarefa 1

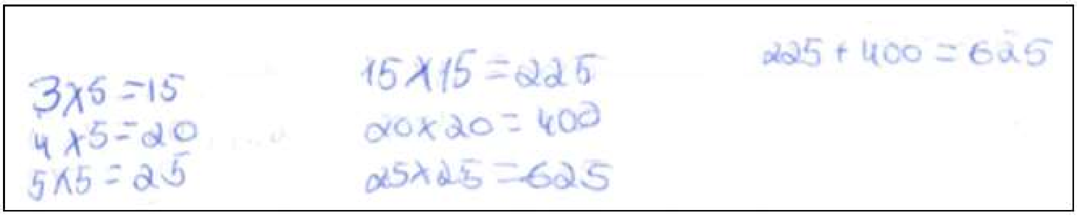


Figura 33 - Resposta da Beatriz à questão 3.c) da tarefa 1

Em relação à quarta e última questão da tarefa, a Ana conseguiu relacionar as áreas e classificar o triângulo quanto aos ângulos corretamente, mas não indicou a medida do comprimento dos lados do triângulo (figura 34).

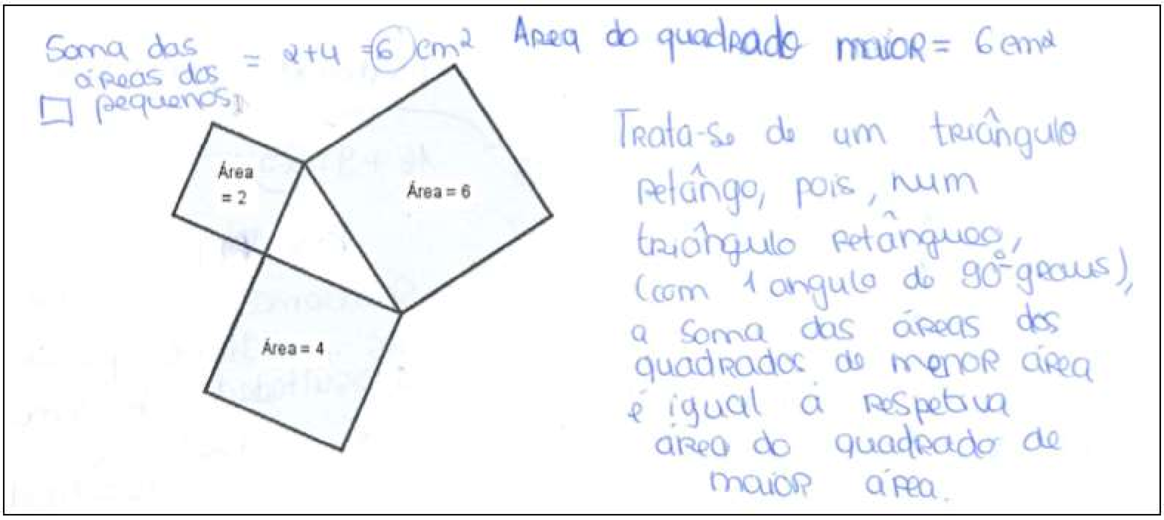


Figura 34 - Resposta da Ana à questão 4 da tarefa 1

A Beatriz conseguiu relacionar corretamente as áreas, classificar o triângulo quanto aos ângulos e indicar a medida do comprimento dos lados do triângulo (figura 35).

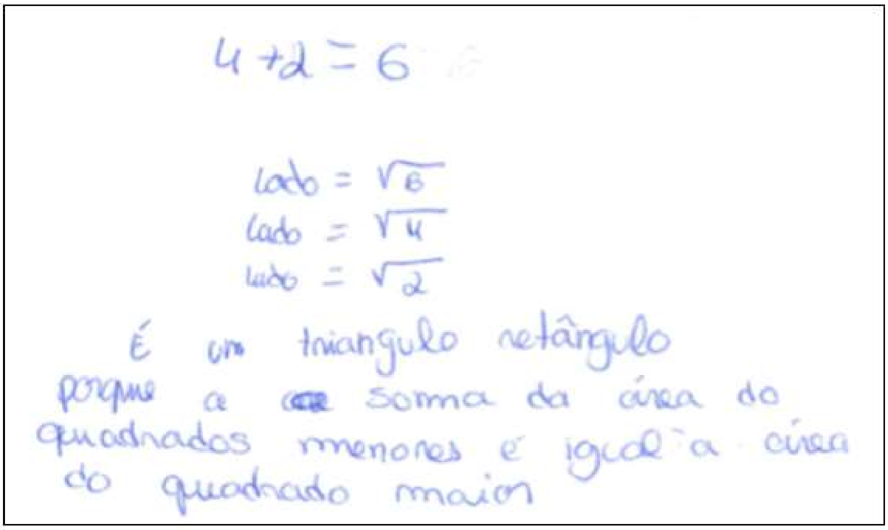


Figura 35 - Resposta da Beatriz à questão 4 da tarefa 1

No final da aula, tiveram ainda tempo de registar as principais conclusões no caderno diário.

Relativamente a esta tarefa exploratória, ambas as alunas conseguiram, no início da sua resolução, usando raciocínio indutivo, estabelecer as relações pretendidas. A aplicação dessas relações não suscitou dúvidas nas questões que se seguiram. Na questão em que tinham de estabelecer conexões entre ternos pitagóricos e a semelhança de triângulos, apesar de, inicialmente, terem surgido algumas dúvidas, pelas comunicações orais que estabeleceram, infere-se que terão compreendido a questão e que saberiam responder. Mas, das suas produções escritas, verifica-se que apenas a Beatriz, ainda que de forma incompleta, estabeleceu essa ponte.

Tarefa 2

As alunas Ana e Beatriz compareceram na aula com as construções que haviam sido pedidas e as respetivas digitalizações.

Durante a construção no GeoGebra, as alunas Ana e Beatriz incorreram em vários erros em momentos distintos, mas que foram detetando com a movimentação da mesma. Isto fez com que a construção fosse várias vezes reiniciada. Os principais erros foram: não terem seguido a ordem das instruções, assim como a ordem das indicações dadas nos menus e não terem selecionado corretamente as entidades pedidas. Como as alunas já tinham feito a construção com lápis e papel, tentaram reproduzi-la no GeoGebra, sem a leitura das instruções, mas aperceberam-se, posteriormente, das falhas. Conseguiram, ainda dentro do tempo previsto para a realização da tarefa, concluir adequadamente a construção (figura 36) e tirar conclusões (figuras 37 e 38).

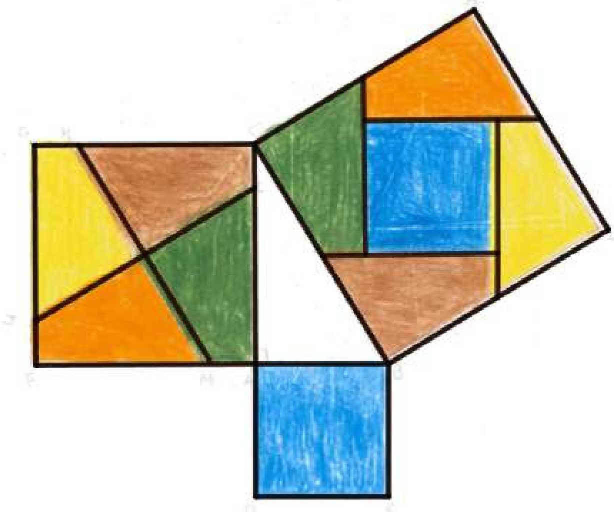
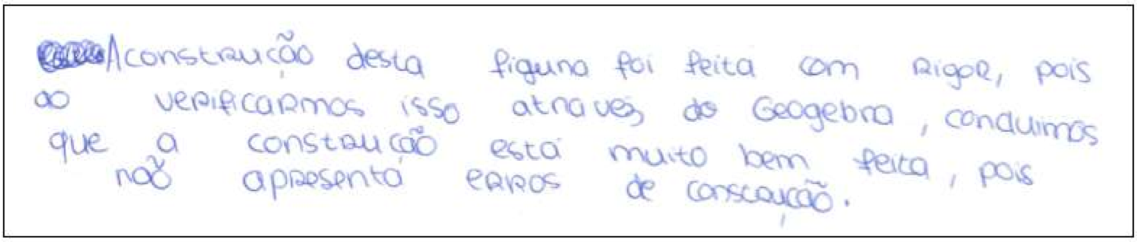
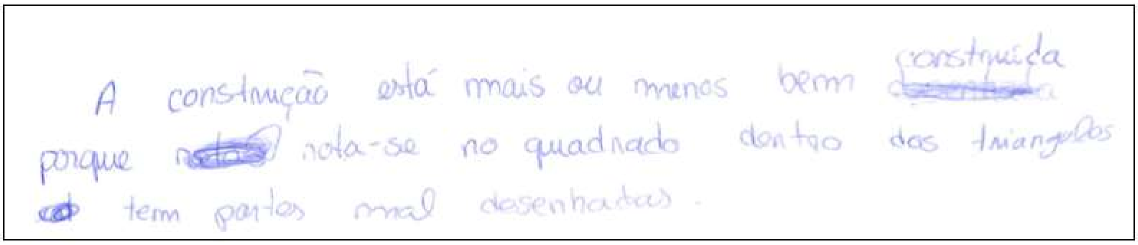


Figura 36 - Digitalização da construção feita em Educação Visual pela Ana, sobreposta à construção realizada no GeoGebra



A construção desta figuna foi feita com rigor, pois ao verificarmos isso através do Geogebra, concluimos que a construção está muito bem feita, pois não apresenta erros de conscrução.

Figura 37 - Conclusão da Ana na tarefa 2



A construção está mais ou menos bem construída porque nota-se no quadrado dentro dos triângulos tem partes mal desenhadas.

Figura 38 - Conclusão da Beatriz na tarefa 2

As conclusões escritas pelas alunas revelam a preocupação que tiveram ao longo da construção no GeoGebra de ver se ambas as construções coincidiam e, portanto, se a construção em lápis e papel estaria bem elaborada.

A tarefa envolve uma prova do Teorema de Pitágoras, através da decomposição de figuras e comparação das medidas das respetivas áreas mas, na redação escrita feita pelas alunas, não há qualquer referência ao teorema, apesar de, durante a aula, ter sido referido oralmente pelo par diversas vezes. A construção de ambos os textos é pouco precisa e rigorosa em relação às ideias que tentam apresentar. Ambas as alunas revelaram, no momento da escrita das conclusões, muitas dificuldades em fazê-lo, sendo evidente que não estavam habituadas a escrever com regularidade.

Tarefa 3

Após a leitura da primeira questão, a dúvida das alunas prendeu-se com o facto de não terem valores numéricos para determinarem a medida da área do trapézio. Esclarecida a dúvida, no sentido em que o que se pretendia era apenas a expressão que traduzisse a medida da área do trapézio, as alunas iniciaram a sua resolução. Como não se lembravam da fórmula da medida da área do trapézio, recorreram à internet para a obter, conseguindo com sucesso (figuras 39 e 40).

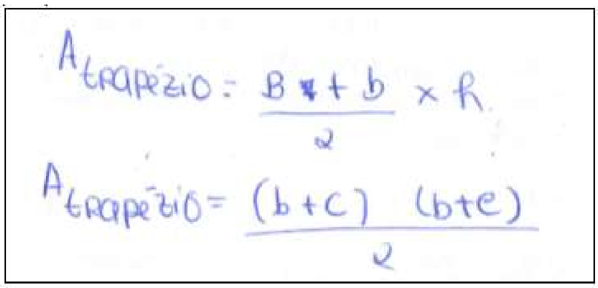


Figura 39 - Resposta da Ana à questão1.a) da tarefa 3

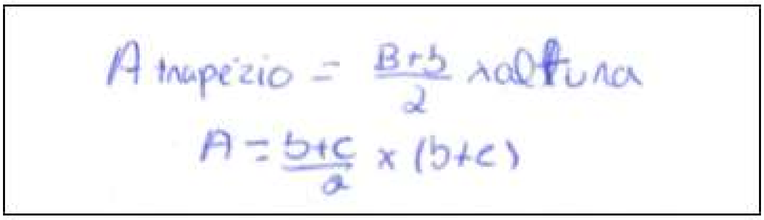


Figura 40 - Resposta da Beatriz à questão1.a) da tarefa 3

Relativamente ao cálculo da medida da área do trapézio através da adição das medidas das áreas dos três triângulos, as alunas responderam corretamente à questão sem apresentar qualquer dúvida sobre a mesma (figuras 41 e 42).

$$A_{trapézio} = A_{①} + A_{②} + A_{③} = \\ = \frac{b \times e}{2} + \frac{a \times a}{2} + \frac{b \times e}{2}$$

Figura 41 - Resposta da Ana à questão1.b) da tarefa 3

$$A_{trapézio} = A_{Ⓐ} + A_{Ⓑ} + A_{Ⓒ} \\ = \frac{b \times c}{2} + \frac{b \times c}{2} + \frac{a \times a}{2}$$

Figura 42 - Resposta da Beatriz à questão1.b) da tarefa 3

Na terceira alínea foi solicitado às alunas que estabelecessem uma relação entre as expressões anteriores, de forma a inferirem o Teorema de Pitágoras. Percebeu-se que as alunas tiveram dúvidas e recorreram ao vídeo da Khan Academy, que foram observando atentamente, de forma pausada e com repetições várias. De forma autónoma e em trabalho colaborativo, conseguiram concretizar com sucesso a questão (figuras 43 e 44).

$$\frac{(b+e)}{\cancel{2}}(b+e) = \frac{b \times e}{\cancel{2}} + \frac{a \times a}{\cancel{2}} + \frac{b \times e}{\cancel{2}} =$$
$$\Leftrightarrow (b+e) \times (b+e) = b \times e + a \times a + b \times e =$$
$$\Leftrightarrow b \times b + \cancel{b \times e} + \cancel{e \times b} + e \times e = \cancel{b \times e} + a \times a + \cancel{b \times e} =$$
$$\Leftrightarrow b \times b + e \times e = a \times a \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

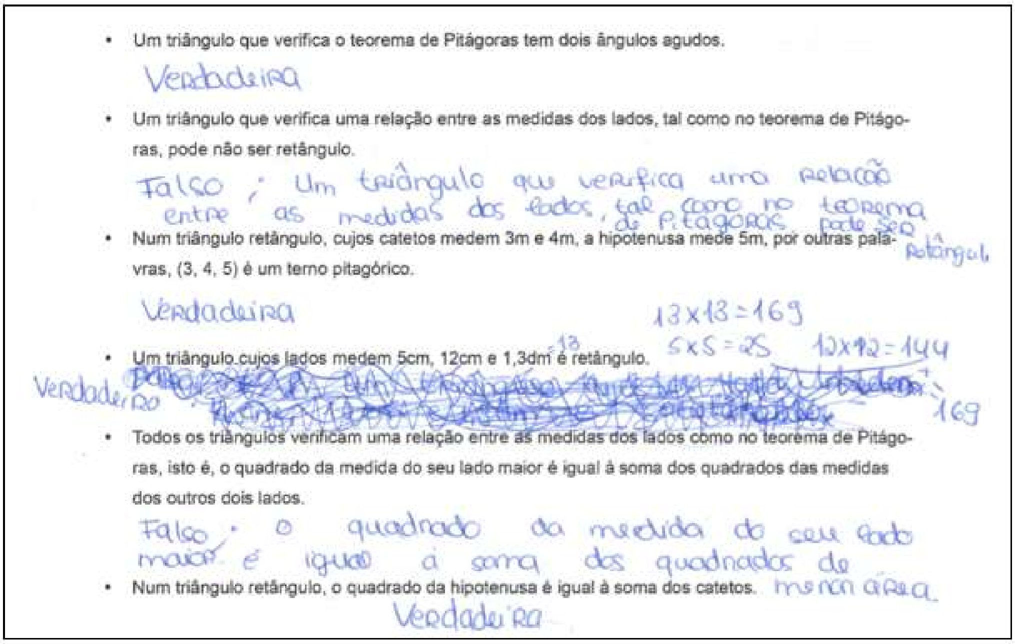
Figura 43 - Resposta da Ana à questão 1.c) da tarefa 3

$$\frac{b+c}{\cancel{2}} \times (b+c) = \frac{b \times c}{\cancel{2}} + \frac{b \times c}{\cancel{2}} + \frac{a \times a}{\cancel{2}}$$
$$\Leftrightarrow (b+c) \times (b+c) = (b \times c) + (b \times c) + a^2$$
$$\Leftrightarrow b^2 + bc + bc + c^2 = 2bc + a^2$$
$$\Leftrightarrow b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2$$
$$\Leftrightarrow b^2 + \cancel{2bc} + c^2 - \cancel{2bc} = a^2$$
$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

Figura 44 - Resposta da Beatriz à questão 1.c) da tarefa 3

A estratégia adotada pelas alunas foi bem-sucedida no contexto do problema. Apresentaram uma resolução cuidada, com argumentos matemáticos válidos e com a aplicação de conhecimentos aprendidos anteriormente a apoiar a aprendizagem de novos.

No que respeita à segunda questão, a Ana classificou corretamente as cinco primeiras afirmações, no entanto, as justificações da segunda e quinta afirmações não estão corretas. Em relação à segunda afirmação, a aluna não indicou claramente que um triângulo que verifique o Teorema de Pitágoras tem de ser retângulo, refere que "pode ser" retângulo. Na quinta afirmação, a aluna entendeu que o erro está na formulação do Teorema de Pitágoras e reformulou-o. Destes dois erros, pode-se inferir que ainda não está claro para a Ana que o Teorema de Pitágoras apenas se aplica a triângulos retângulos. Relativamente à última afirmação, a aluna classificou-a de verdadeira, o que pode revelar pouca atenção na leitura, uma vez que, nas respostas anteriores, a aluna mostrou saber que relação deverá existir entre as medidas de comprimento dos lados de um triângulo retângulo, ou ainda não consolidou as condições do teorema (figura 45).


• Um triângulo que verifica o teorema de Pitágoras tem dois ângulos agudos.

Verdadeira

• Um triângulo que verifica uma relação entre as medidas dos lados, tal como no teorema de Pitágoras, pode não ser retângulo.

Falso ; Um triângulo que verifica uma relação entre as medidas dos lados, tal como no teorema de Pitágoras pode ser retângulo

• Num triângulo retângulo, cujos catetos medem 3m e 4m, a hipotenusa mede 5m, por outras palavras, (3, 4, 5) é um terno pitagórico.

Verdadeira

13x13=169
5x5=25 12x12=144
169

• Um triângulo cujos lados medem 5cm, 12cm e 1,3dm é retângulo.

Verdadeira

• Todos os triângulos verificam uma relação entre as medidas dos lados como no teorema de Pitágoras, isto é, o quadrado da medida do seu lado maior é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados.

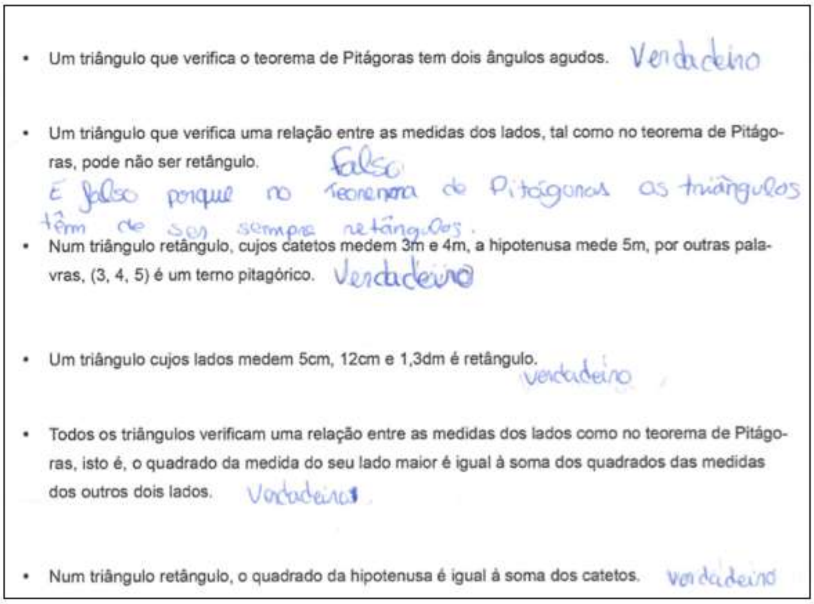
Falso : o quadrado da medida do seu lado maior é igual à soma dos quadrados de

• Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos catetos. mesma área

Verdadeira

Figura 45 - Resposta da Ana à questão 2 da tarefa 3

A Beatriz classificou corretamente as quatro primeiras afirmações e reconheceu que o Teorema de Pitágoras se aplica em triângulos retângulos segundo a justificação apresentada em relação à segunda afirmação (figura 46). No entanto, relativamente à quinta afirmação, a aluna considerou-a verdadeira, parecendo esquecer-se da condição inicial "Todos os triângulos" e debruçando a sua atenção, apenas, na parte final da afirmação. No que respeita à última afirmação, a aluna considerou-a verdadeira, o que indica que não leu com atenção o enunciado ou ainda não consolidou as condições do teorema.



- Um triângulo que verifica o teorema de Pitágoras tem dois ângulos agudos. Verdadeiro
- Um triângulo que verifica uma relação entre as medidas dos lados, tal como no teorema de Pitágoras, pode não ser retângulo. Falso
  É falso porque no teorema de Pitágoras os triângulos têm de ser sempre retângulos.
- Num triângulo retângulo, cujos catetos medem 3m e 4m, a hipotenusa mede 5m, por outras palavras, (3, 4, 5) é um terno pitagórico. Verdadeiro
- Um triângulo cujos lados medem 5cm, 12cm e 1,3dm é retângulo. verdadeiro
- Todos os triângulos verificam uma relação entre as medidas dos lados como no teorema de Pitágoras, isto é, o quadrado da medida do seu lado maior é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados. Verdadeiros
- Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos catetos. verdadeiro

Figura 46 - Resposta da Beatriz à questão 2 da tarefa 3

Relativamente à terceira questão, a Ana realizou corretamente as duas alíneas, embora com algumas incorreções do ponto de vista formal. Na aplicação do Teorema de Pitágoras, na resolução da equação do segundo grau, não teve em atenção a simbologia correta a usar entre equações equivalentes e apresentou apenas uma solução da equação (figura 47). Também não deu uma resposta clara ao problema.

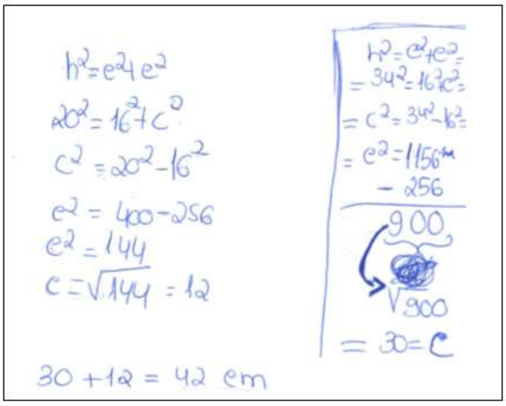


Figura 47 – Resposta da Ana à questão 3.a) da tarefa 3

No cálculo da medida da área, a Ana apresentou a fórmula correta, bem como os valores das diagonais. Mais uma vez, não apresentou de forma clara uma resposta ao problema (figura 48).

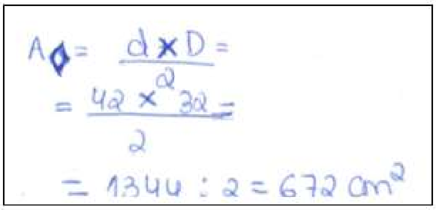


Figura 48 – Resposta da Ana à questão 3.b) da tarefa 3

A Beatriz, nesta questão, respondeu corretamente à primeira alínea, conseguiu aplicar o Teorema de Pitágoras para determinar as duas medidas de comprimento necessárias ao cálculo da medida de comprimento da diagonal maior do papagaio, no entanto os cálculos surgem sem justificação ou fundamento (figura 49).

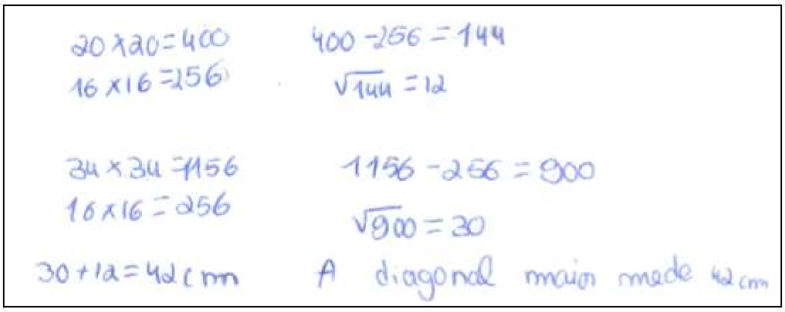


Figura 49 – Resposta da Beatriz à questão 3.a) da tarefa 3

Em relação à segunda alínea, apresentou corretamente a fórmula para o cálculo da medida da área do papagaio, mas apresenta incorreções no valor atribuído à medida de comprimento da diagonal menor e na indicação das unidades (figura 50).

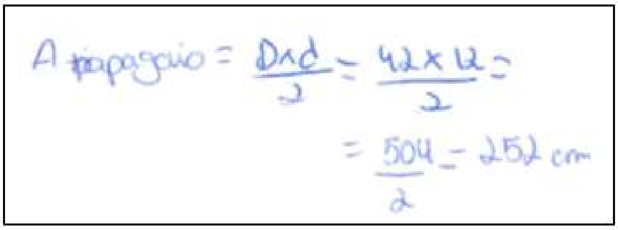


Figura 50 – Resposta da Beatriz à questão 3.b) da tarefa 3

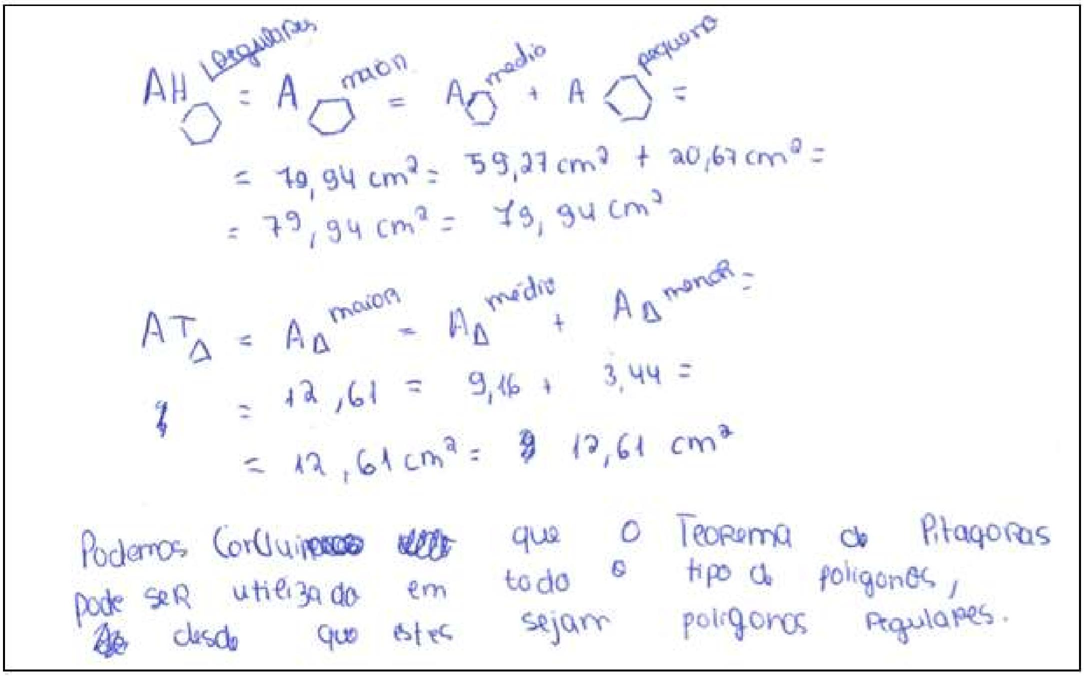
Tarefa 4

O início da realização da tarefa não foi imediato, pois houve dúvidas de interpretação da questão e de como começar a resolvê-la. As alunas Ana e Beatriz, entre elas, começaram por tentar perceber se o triângulo tinha, ou não, de ser retângulo. A Ana mencionou à colega o que tinha aprendido nas tarefas anteriores, lembrando os resultados obtidos no preenchimento da tabela na tarefa 1:

Ana – *Se não for retângulo, não podemos dizer que as áreas são iguais, só dizemos se é maior ou menor.*

Percebe-se a preocupação da Ana em antecipar-se à resolução da tarefa exploratória, mobilizando aprendizagens anteriores e lembrando que, se os triângulos forem obtusângulos ou acutângulos, a relação existente entre a medida da área do quadrado construído sobre o maior lado e a soma das medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os lados menores não é de igualdade.

Fixada essa condição, as alunas avançaram na resolução da tarefa construindo polígonos sobre os lados do triângulo retângulo. A primeira experiência foi feita com triângulos equiláteros, porque selecionaram o menu dos polígonos regulares e definiram o menor número possível de lados. Prosseguiram as construções sempre com polígonos regulares – pentágonos, hexágonos e octógonos. As alunas, após terem experimentado construções com quatro diferentes tipos de polígonos regulares, precipitaram-se a retirar uma conclusão. Destas experiências, registaram as seguintes conclusões (figura 51 e 52).


A_H regulares $= A^{\text{maior}} = A^{\text{médio}} + A^{\text{pequeno}} =$

$= 79,94\ cm^2 = 59,27\ cm^2 + 20,67\ cm^2 =$

$= 79,94\ cm^2 = 79,94\ cm^2$

$AT_\Delta = A_\Delta^{\text{maior}} = A_\Delta^{\text{médio}} + A_\Delta^{\text{menor}} =$

$= 12,61 = 9,16 + 3,44 =$

$= 12,61\ cm^2 = 12,61\ cm^2$

Podemos concluir que o Teorema de Pitágoras pode ser utilizado em todo o tipo de polígonos, desde que estes sejam polígonos regulares.

Figura 51 – Resposta da Ana à tarefa 4

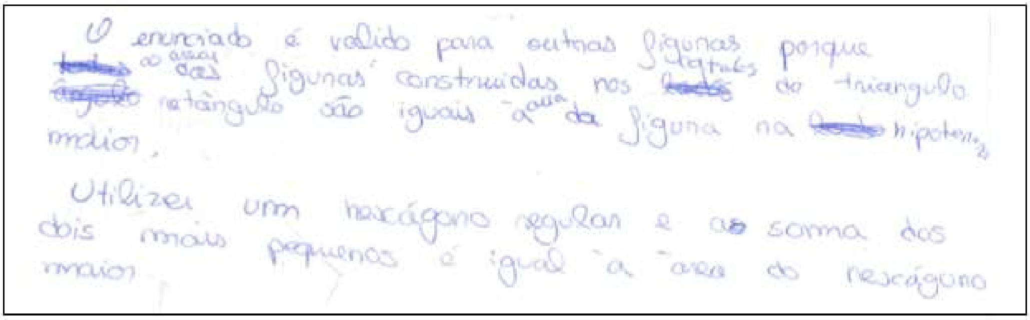


Figura 52 – Resposta da Beatriz à tarefa 4

O facto de terem escolhido polígonos regulares, logo, semelhantes permitiu-lhes explorar a aplicabilidade do Teorema de Polya a casos particulares. Puderam, assim, nesta tarefa, através de estratégias delineadas pelas mesmas, estabelecer hipóteses que procuraram validar no GeoGebra e partir dessa testagem para tirar conclusões. O GeoGebra permitiu, através de construções relativamente rápidas, que as alunas explorassem várias situações.

Das produções escritas das alunas, é possível verificar nas suas conclusões que, a partir do estudo de alguns casos particulares, são levadas a generalizar, sem procurar argumentos fundamentados de forma a validar as suas conclusões.

Tarefa 5

Nesta tarefa, relativamente à primeira questão, as alunas Ana e Beatriz leram e releram o enunciado para tentar perceber o que representavam os valores dados, revelando algumas dificuldades de interpretação do mesmo. Uma vez ultrapassada esta dificuldade, sem problemas, apresentaram a resolução na qual aplicaram o Teorema de Pitágoras para determinar a medida de comprimento da hipotenusa (figura 53 e 54).

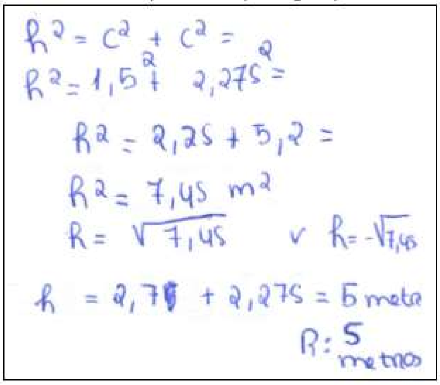


Figura 53 – Resposta da Ana à questão 1 da tarefa 5

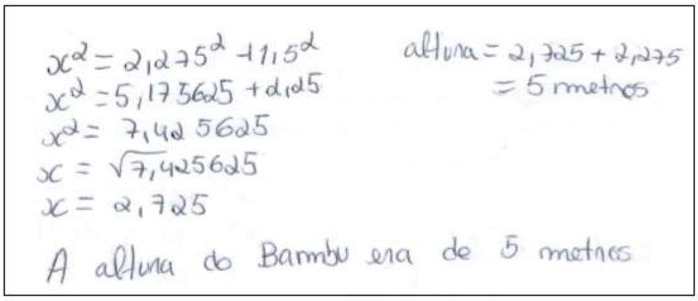


Figura 54 – Resposta da Beatriz à questão 1 da tarefa 5

Na resolução, nenhuma das alunas fez referência ao Teorema de Pitágoras, limitaram-se a aplicá-lo. Continuaram a cometer erros formais – falta do sinal de equivalente em ambas as resoluções de equações – e a aluna Beatriz apenas apresentou uma solução para a equação do segundo grau. Ambas deram a resposta correta ao problema.

Em relação à segunda questão, as alunas conseguiram determinar a altura da torre, aplicando o Teorema de Pitágoras, e apresentaram o resultado arredondado às unidades (figura 55 e 56).

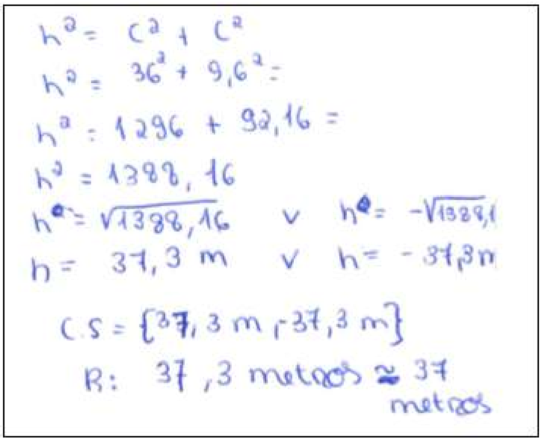


Figura 55 - Resposta da Ana à questão 2 da tarefa 5

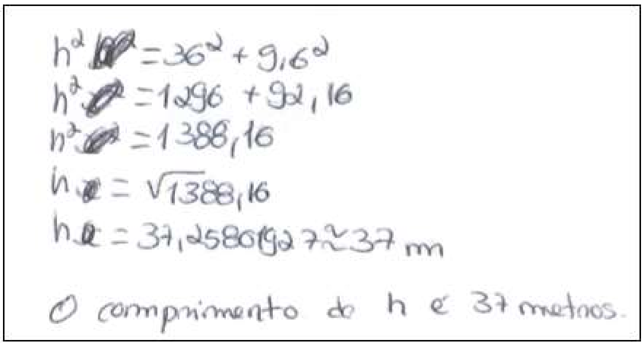


Figura 56 - Resposta da Beatriz à questão 2 da tarefa 5

Tal como na questão anterior, os erros formais repetiram-se nesta. Ambas as alunas não apresentaram dificuldades em aplicar corretamente o Teorema de Pitágoras.

O enunciado da terceira questão é longo, logo, exigiu atenção na leitura de forma a selecionarem os dados realmente relevantes para a resolução. As alunas, na sua resolução, perceberam os dados do problema e conseguiram aplicá-los corretamente. A Ana não teve em atenção as orientações dadas para os arredondamentos nos cálculos intermédios, porque era pedido para, no mínimo, conservar duas casas decimais (figura 57).

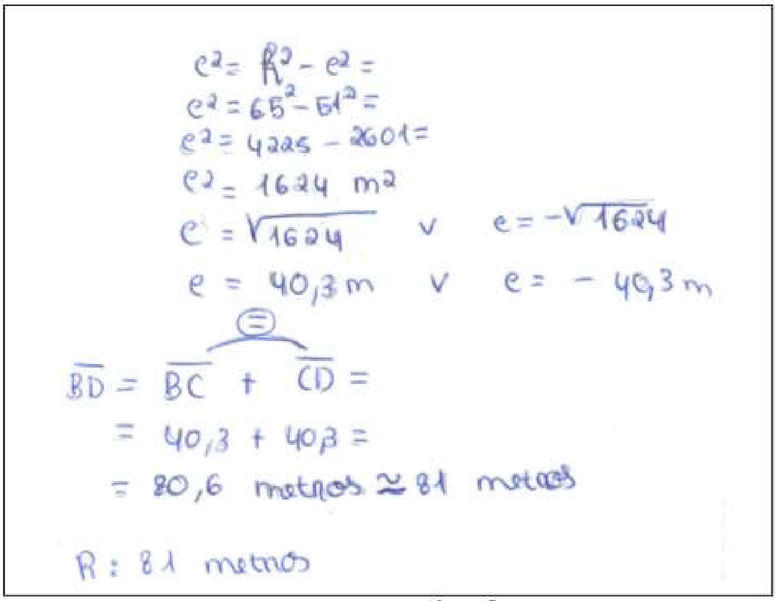


Figura 57 - Resposta da Ana à questão 3 da tarefa 5

A Beatriz cometeu um engano na subtração. O resultado de ambas está correto, apesar das incorreções registadas.

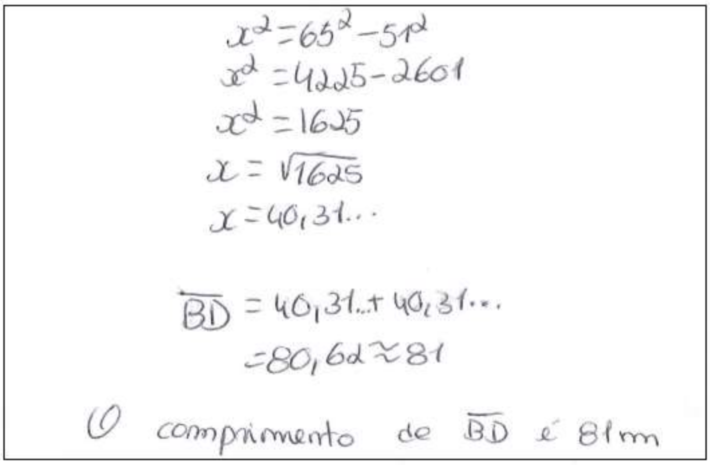


Figura 58 - Resposta da Beatriz à questão 3 da tarefa 5

Relativamente à quarta questão, a Ana resolveu-a sem mencionar a raiz cúbica e nota-se alguma distração ou mesmo confusão pois, se por um lado, nos cálculos, considerou a medida de comprimento da aresta como assumindo o valor 3, por outro, a resposta que é dada não traduz essa informação e, para além disso, as unidades apresentadas remetem para a medida de área (figura 59).

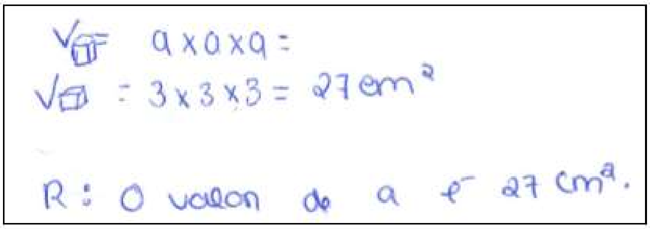


Figura 59 - Resposta da Ana à questão 4.a) da tarefa 5

Em relação à Beatriz, apesar de não ter dado uma resposta à questão, depreende-se que a compreendeu e aplicou a raiz cúbica para determinar a medida do comprimento da aresta (figura 60).

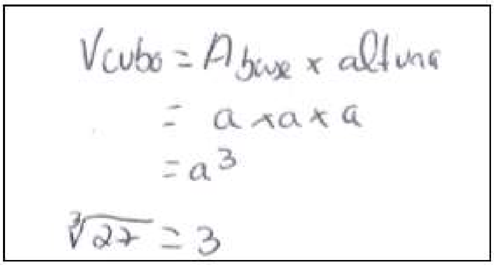


Figura 60 - Resposta da Beatriz à questão 4.a) da tarefa 5

Na resolução da segunda alínea, as alunas tinham de aplicar o Teorema de Pitágoras no espaço, neste caso, para determinarem a medida de comprimento da diagonal espacial de um paralelepípedo retângulo. Começaram por tentar perceber se, nesta alínea, teriam de aplicar o Teorema de Pitágoras e, se sim, de que forma, pois achavam não ter dados suficientes. Percebeu-se, também, a dificuldade de visualizar a situação no espaço e foi quando a professora interveio, dizendo-lhes que podiam imaginar-se dentro do paralelepípedo retângulo que é a sala de aula. A partir deste momento, transpuseram os dados do problema para a sala e perceberam a distância que queriam determinar mas não conseguiram obtê-la. Já quase a desistirem de resolver a questão, a professora perguntou-lhes que medidas precisavam de conhecer para determinarem a diagonal espacial e, rapidamente, responderam $\overline{AE}$. Quando novamente questionadas sobre como poderiam determinar $\overline{AE}$, refletiram que tinham dados suficientes para resolver o problema desde que aplicassem duas vezes o Teorema de Pitágoras. Ambas as alunas conseguiram, assim, determinar a distância pedida (figuras 61 e 62).

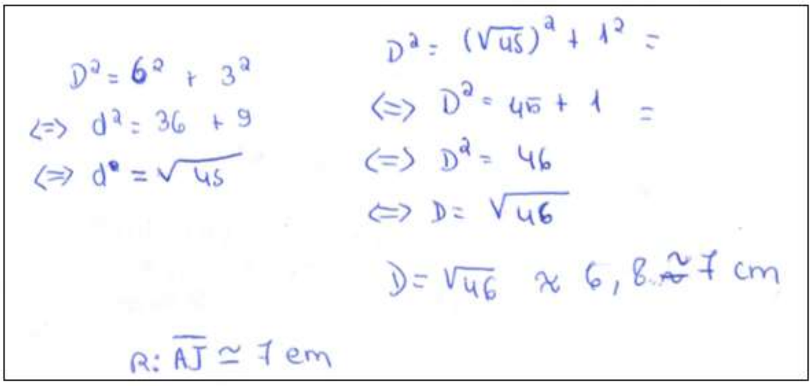


Figura 61 - Resposta da Ana à questão 4.b) da tarefa 5

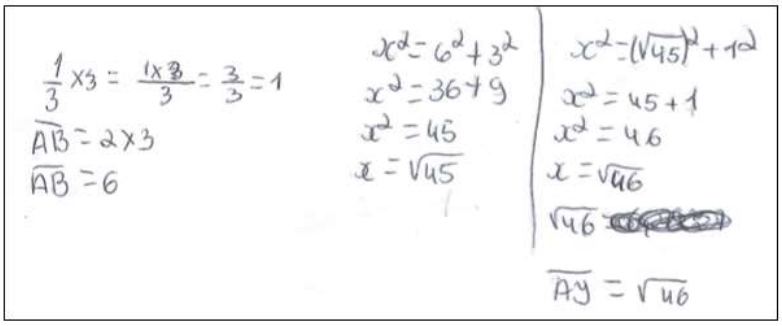


Figura 62 - Resposta da Beatriz à questão 4.b) da tarefa 5

Nesta alínea, apesar de estarem muito perto de conseguirem resolver o problema, caso não houvesse intervenção por parte da professora, a questão não teria sido resolvida.

A quinta questão é composta por três alíneas. Na primeira alínea, as alunas Ana e Beatriz, cujas resoluções se encontram a seguir (figuras 63 e 64), optaram por aplicar o Teorema de Pitágoras, respondendo corretamente, mas apresentando os mesmos erros formais apontados anteriormente.

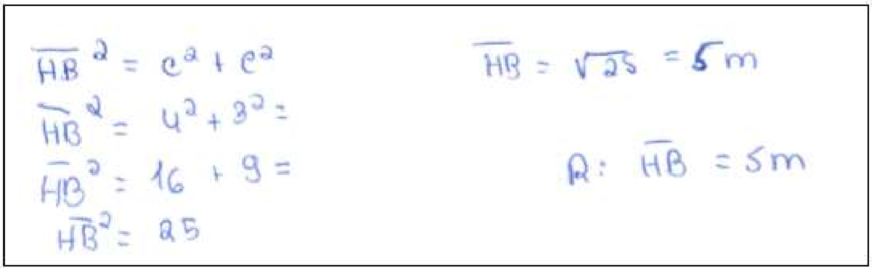


Figura 63 - Resposta da Ana à questão 5.a) da tarefa 5

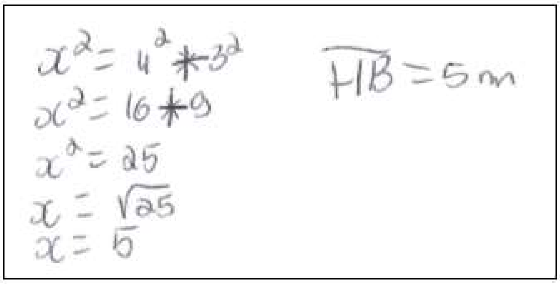


Figura 64 - Resposta da Beatriz à questão 5.a) da tarefa 5

Na segunda alínea, as alunas estabeleceram a relação com a segunda alínea da quarta questão e, portanto, aplicaram duas vezes o Teorema de Pitágoras para determinarem a medida de comprimento da diagonal espacial.

É possível ver na resolução da Ana que, na resposta, fez a aproximação, quando se pedia o valor exato (figura 65).

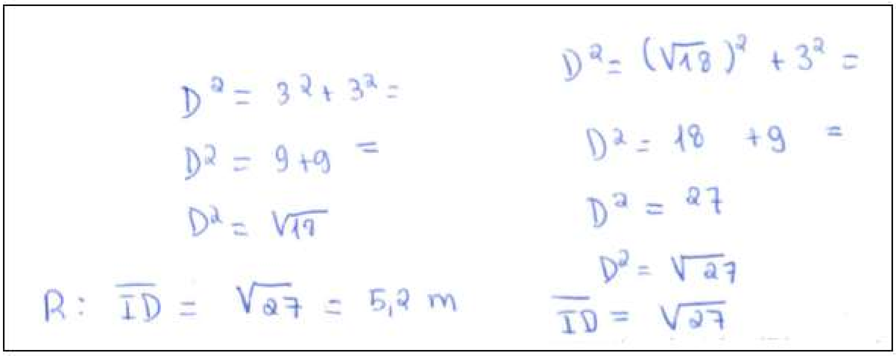


Figura 65 - Resposta da Ana à questão 5.b) da tarefa 5

E a Beatriz comete um erro de cálculo no final da resolução (figura 66).

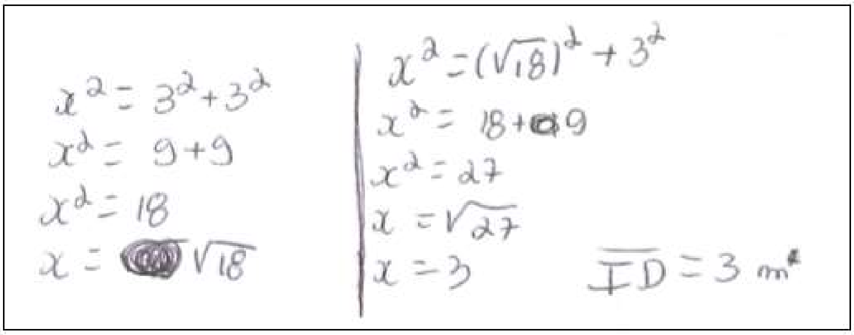


Figura 66 - Resposta da Beatriz à questão 5.b) da tarefa 5

A última alínea da tarefa foi resolvida pelas alunas, sem suscitar dúvidas em relação ao cálculo da medida do volume do modelo geométrico (figuras 67 e 68).

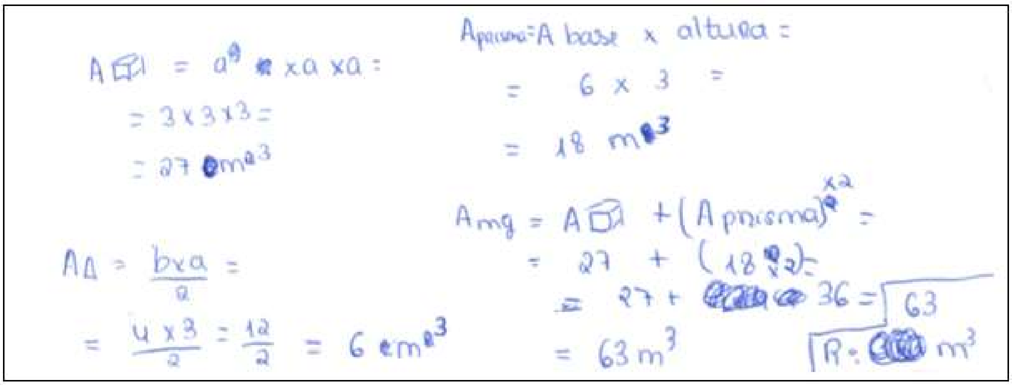


Figura 67 - Resposta da Ana à questão 5.c) da tarefa 5

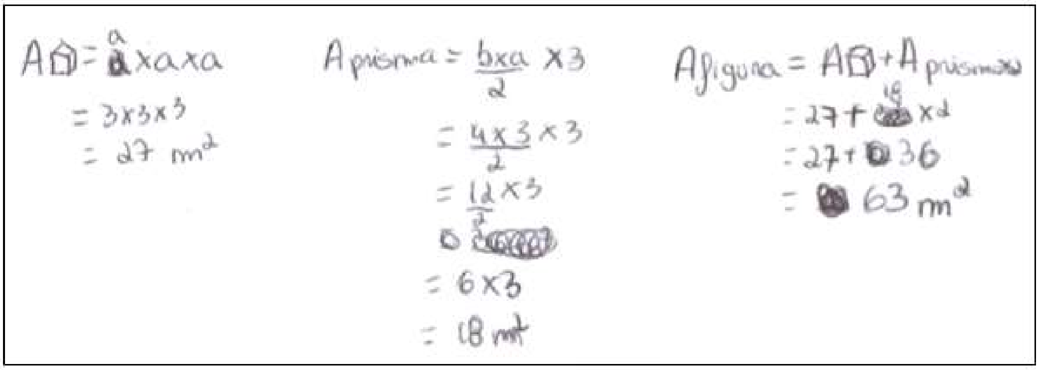


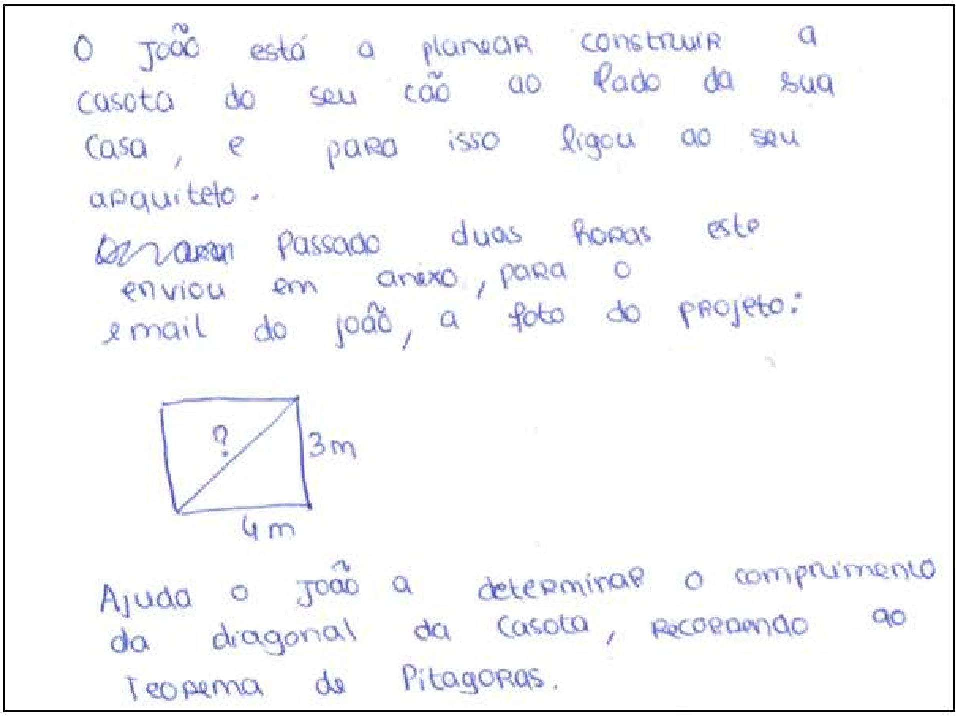
Figura 68 - Resposta da Beatriz à questão 5.c) da tarefa 5

Mas verificam-se algumas falhas formais de escrita ao longo da resolução da tarefa confundindo a letra A de área com o habitual V de volume e, talvez por isso, tenham cometido erros nas unidades de medida (erros corrigidos pela Ana, mas não pela Beatriz).

Nesta tarefa de contextos reais e variados, as alunas, de forma bastante autónoma, conseguiram resolver os problemas apresentados, mobilizando as aprendizagens efetuadas nas aulas anteriores, bem como outras. É de salientar que as alunas tiveram um bom desempenho, apesar de terem apresentado falhas formais um pouco por toda a tarefa.

Tarefa 6

Nesta primeira questão, as alunas, como se pode ver pelas respostas dadas (figuras 69 e 70), apresentaram problemas cuja resolução envolve o Teorema de Pitágoras. Mas, a Ana pede para determinar a medida de comprimento da diagonal o que, no contexto da questão que coloca, não faz sentido. Já no caso da Beatriz, dado tratar-se de criar um laço humano, pode ser mais relevante.


O João está a planear construir a casota do seu cão ao lado da sua casa, e para isso ligou ao seu arquiteto.
Passado duas horas este enviou em anexo, para o email do joão, a foto do projeto:

Ajuda o João a determinar o comprimento da diagonal da casota, recorrendo ao Teorema de Pitagoras.

Figura 69 - Resposta da Ana à questão 1 da tarefa 6

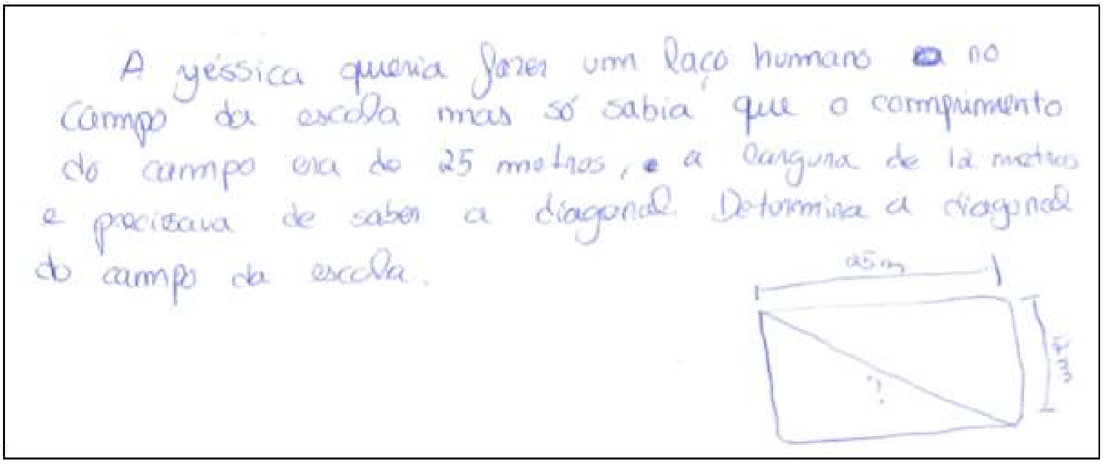

A yéssica queria fazer um laço humano no campo da escola mas só sabia que o comprimento do campo era de 25 metros, e a largura de 12 metros e precisava de saber a diagonal. Determina a diagonal do campo da escola.

Figura 70 - Resposta da Beatriz à questão 1 da tarefa 6

Relativamente à segunda questão, pode ver-se pelas respostas dadas pelas alunas que ambas observaram a figura e tentaram descodificar o Teorema de Pitágoras a partir da imagem. Usaram como referência o enunciado do Teorema recorrendo às medidas das áreas dos quadrados construídos sobre a hipotenusa e sobre os catetos do triângulo representado a tracejado. A Ana não conseguiu fazer a associação correta das respetivas decomposições com o Teorema (figura 71).

No meu ponto de vista nesta figura acima
está presente o Teorema de Pitágoras
pois os quadrados colocados por
cima da figura inicial mostram-nos
que ao lado da hipotenusa do triângulo retângulo corresponde o quadrado de área MAIOR
(e como é visível na imagem foi colo-
cado propositadamente maior), enquanto
como podemos observar, os quadrados
de menor área que correspondem
aos catetos são relativamente menores
e estão pintados de preto.
Esta imagem mostra-nos que, a
soma dos dois quadrados de menor
área (a negrito) é igual à
área do quadrado maior.

Figura 71 - Resposta da Ana à questão 2 da tarefa 6

A Beatriz conseguiu observar a prova geométrica do Teorema de Pitágoras. Aquando da entrega da resolução da tarefa, a aluna Beatriz referiu que resolveu esta questão como se fosse um puzzle, movimentando peças, o que se torna claro ao ler a sua resposta (figura 72).

O triângulo que está a tracejado
tem um quadrado desenhado sobre a hipotenusa
e tem 5 figuras. O teorema de pitágoras diz que
a área do quadrado da hipotenusa é igual à área
dos quadrados dos catetos então as 5 figuras
desenhadas no quadrado da hipotenusa estão espalhadas
nos quadrados dos catetos.

Figura 72 - Resposta da Beatriz à questão 2 da tarefa 6

1.1.2. Teste inicial e teste final

Neste ponto, pretende-se fazer uma análise das respostas dadas pelas alunas Ana e Beatriz no teste inicial e no teste final.

Em relação à primeira questão, no teste inicial, as alunas apresentaram incorreções de simbologia, bem como erros na identificação dos catetos e da hipotenusa de um triângulo retângulo (figuras 73 e 74).

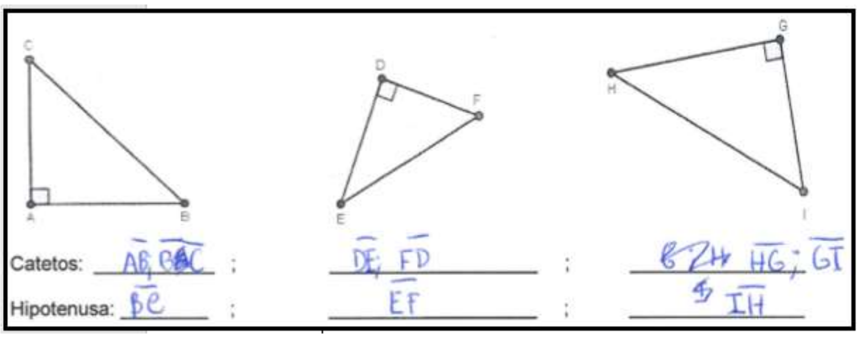


Figura 73 - Resposta da Ana à questão 1. do teste inicial

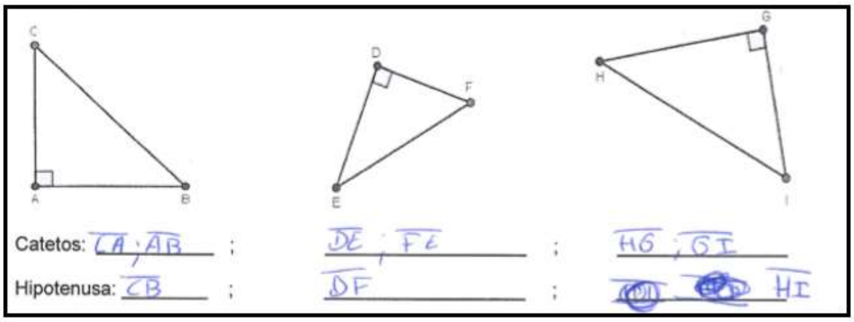


Figura 74 - Resposta da Beatriz à questão 1. do teste inicial

No teste final, ambas as alunas responderam corretamente.

A Ana, no teste inicial, na questão 2.a) (figura 75) apenas apresentou a comparação de lados correspondentes em triângulos semelhantes e não uma resolução válida para o problema. A Beatriz não respondeu a esta questão no teste inicial.

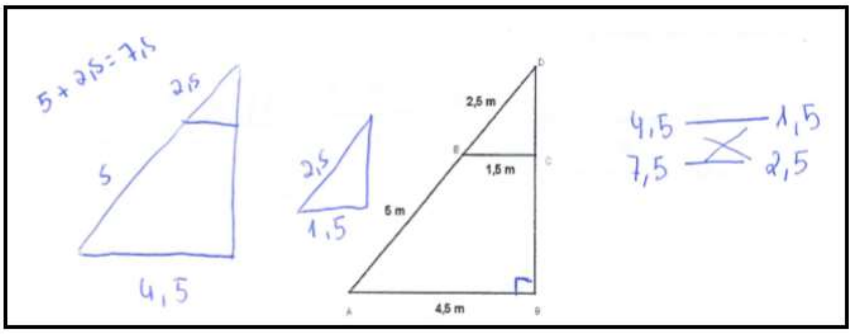


Figura 75 - Resposta da Ana à questão 2.a) do teste inicial

No teste final, ambas as alunas aplicaram corretamente o Teorema de Pitágoras, fazendo a identificação dos catetos e da hipotenusa de um triângulo retângulo e estabelecendo a sua relação.

Na resolução da Ana, é percetível que aplicou o Teorema de Pitágoras, apesar de não o mencionar, e conseguiu determinar a altura pedida, mas apresentou erros de linguagem formal. Não deu resposta clara ao problema (figura 76).

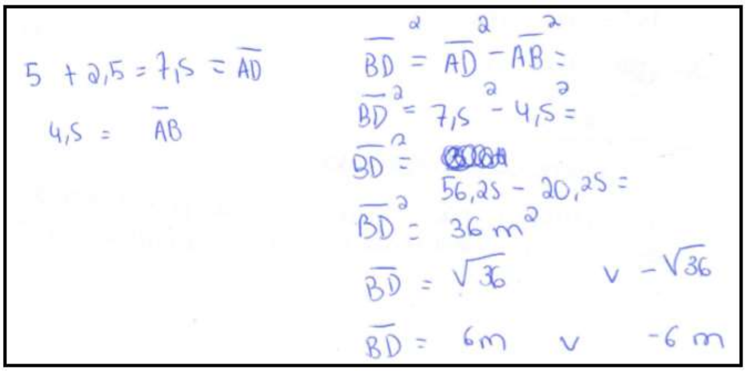


Figura 76 - Resposta da Ana à questão 2.a) do teste final

A Beatriz conseguiu determinar o valor correto da altura da torre, mas na sua resolução, não colocou o sinal de equivalente entre equações equivalentes e não apresentou a segunda solução da equação nem as unidades de medida (figura 77).

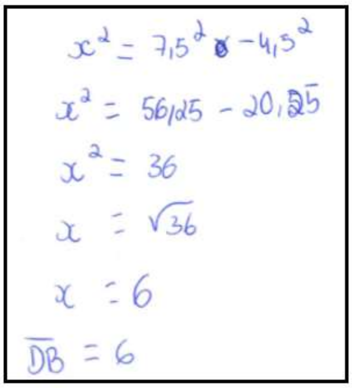


Figura 77 - Resposta da Beatriz à questão 2.a) do teste final

Relativamente à segunda alínea, em que é pedido para determinar a altura do abrigo, a opção de resolução escolhida por ambas as alunas foi a aplicação do Teorema de Pitágoras. Ambas conseguiram determinar a medida pedida. A Ana teve o cuidado de apresentar as duas soluções da equação do segundo grau, no entanto cometeu um erro de cálculo numa das soluções da equação e erros de linguagem formal. Não apresentou resposta ao problema (figura 78).

b)- $\overline{ED} - \overline{EC}$

$\overline{DC}^2 = 2,5^2 - 1,5^2 =$

$\overline{DC}^2 = 6,25 - 2,25 =$

$\overline{DC}^2 = 4\ m^2$

$\overline{DC} = \sqrt{4} \quad \vee \quad -\sqrt{4}$

$\overline{DC} = 2m \quad \vee \quad -\sqrt{2}$

Figura 78 - Resposta da Ana à questão 2.b) do teste final

A Beatriz conseguiu determinar a altura do abrigo, mas tal como na alínea anterior, na sua resolução não colocou o sinal de equivalente entre equações equivalentes, não apresentou a segunda solução da equação e não apresentou unidades de medida (figura 79).

$x^2 = 2,5^2 - 1,5^2$

$x^2 = 6,25 - 2,25$

$x^2 = 4$

$x = \sqrt{4}$

$x = 2$

$\overline{DC} = 2$

Figura 79 - Resposta da Beatriz à questão 2.b) do teste final

Na terceira questão do teste inicial, ambas as alunas conseguiram determinar o tempo que demora o percurso correspondente a 24 metros. Mas as respostas estão muito incompletas em função do que é pedido (figuras 80 e 81).

10 —— 7
24 —— x

$x = \frac{24 \times 7}{10} = \frac{84}{5} = \boxed{16,8 = x}$

Figura 80 - Resposta da Ana à questão 3 do teste inicial

s —— M
7 —— 10
x —— 24

$\frac{7 \times 24}{10} = \frac{168}{10} = 16,8 \approx 17$ segundos

Figura 81 - Resposta da Beatriz à questão 3 do teste inicial

No teste final, a Ana conseguiu determinar a distância percorrida no trajeto fora da passadeira, aplicando o Teorema de Pitágoras, e o tempo que demora a fazer esse percurso. Os restantes cálculos estão errados e desprovidos de sentido (figura 82).

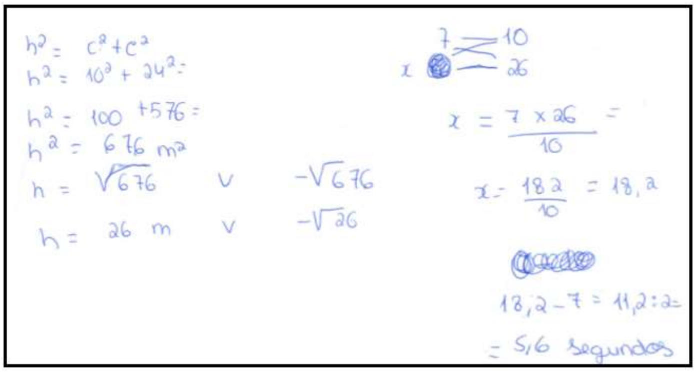


Figura 82 - Resposta da Ana à questão 3 do teste final

A Beatriz também conseguiu determinar a distância percorrida no trajeto fora da passadeira, assim como o tempo que demora a fazer esse percurso. Mas não concluiu o problema (figura 83).

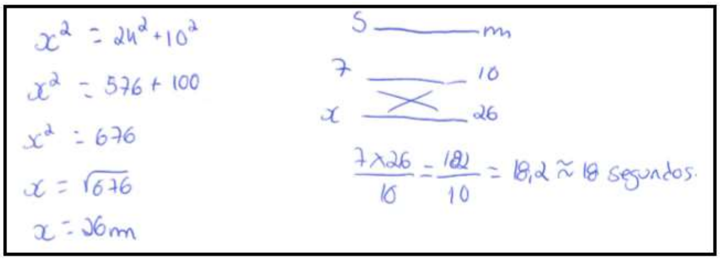


Figura 83 - Resposta da Beatriz à questão 3 do teste final

No teste inicial, as alunas não responderam à quarta questão.

No teste final, a Ana concluiu que o triângulo, com as medidas dadas no enunciado do problema, é retângulo. Relativamente à resposta dada em função do raciocínio que apresentou através dos cálculos, não há coerência, pode mesmo dizer-se que não percebeu o problema (figura 84).

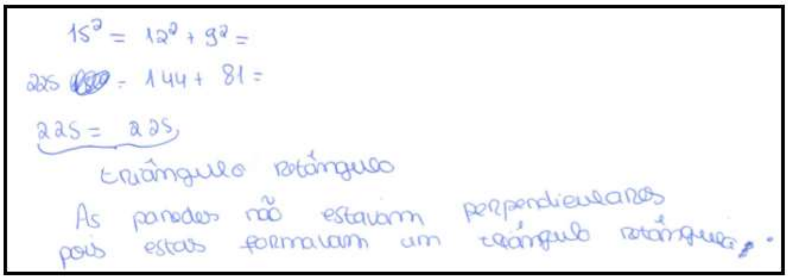


Figura 84 - Resposta da Ana à questão 4 do teste final

A Beatriz, no teste final, aplicou o Recíproco do Teorema de Pitágoras, mas não concluiu nada sobre a classificação do triângulo quanto aos ângulos e respondeu corretamente ao problema, mas com um argumento inválido (figura 85).

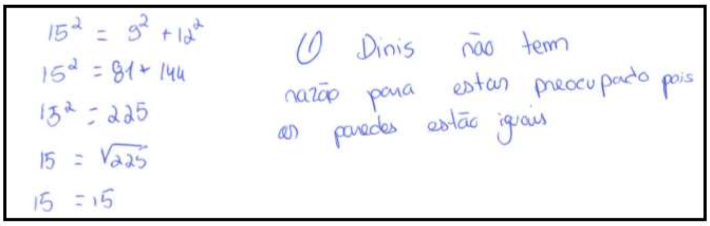


Figura 85 - Resposta da Beatriz à questão 4 do teste final

Relativamente à quinta questão, no teste inicial, apenas a Ana respondeu, mas de forma errada (figura 86).

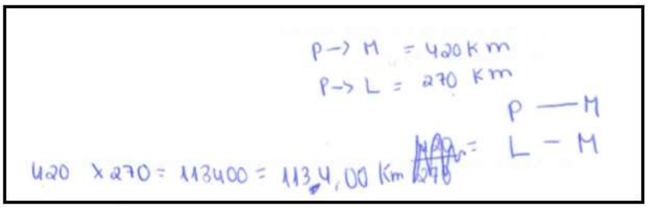


Figura 86 - Resposta da Ana à questão 5 do teste inicial

No teste final, ambas as alunas chegaram ao resultado pretendido. A Ana teve, do ponto de vista formal, mais cuidado na apresentação da sua resolução, resolveu a equação apresentando as duas soluções e referiu aquela que é resposta ao problema (figura 87).

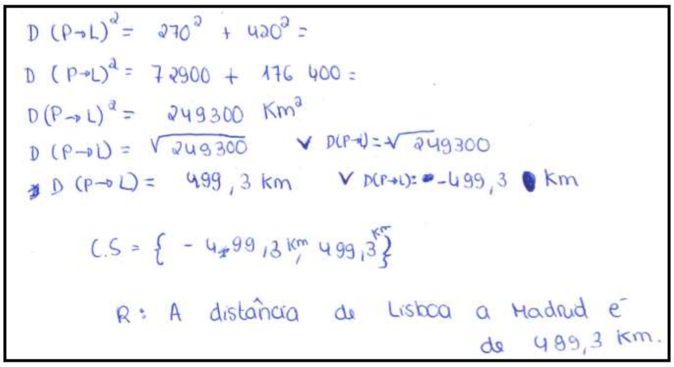


Figura 87 - Resposta da Ana à questão 5 do teste final

A Beatriz não deu resposta ao problema, no entanto, pode-se depreender pelo arredondamento efetuado pela mesma e que é pedido no enunciado que o valor 499,3 km representa a distância pedida.

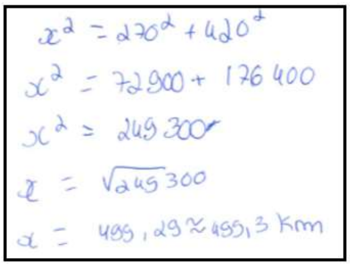


Figura 88 - Resposta da Beatriz à questão 5 do teste final

No teste inicial, as alunas estiveram durante os cinquenta minutos a fazer a construção com as indicações do enunciado, não tendo apresentado qualquer resposta às cinco alíneas da sexta e última questão.

No teste final, de forma mais célere, fizeram a construção com as indicações pedidas, à exceção da indicação de dois ângulos. Na primeira alínea desta questão, as alunas não responderam, no entanto, tinham informação suficiente na construção que fizeram para concluir que os três triângulos eram semelhantes entre si (figura 89).

Relativamente à segunda alínea, as alunas apresentaram, na construção, as medidas de comprimento dos lados pedidas no enunciado do problema, ainda que com incorreções de notação relativamente aos pontos.

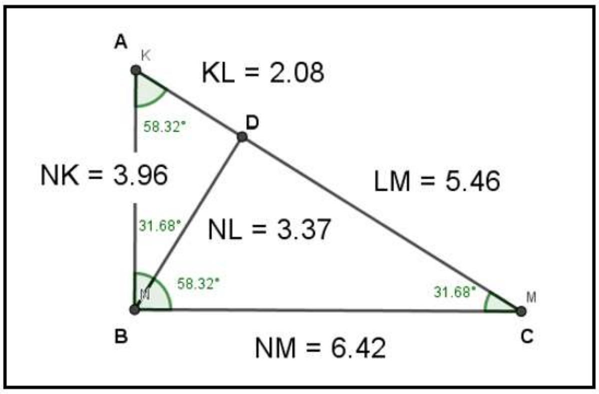


Figura 89 - Resposta das alunas Ana e Beatriz à questão 6.b) do teste final

Relativamente às terceira e quarta alíneas, as alunas apenas resolveram parte do que é pedido, conseguiram relacionar os lados correspondentes dos triângulos semelhantes, mas não verificaram a relação que escreveram fazendo a substituição pelas medidas dos comprimentos dos lados indicados na construção (figuras 90 e 91).

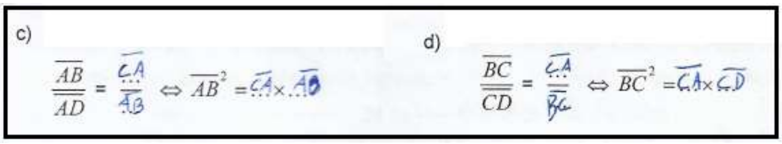


Figura 90 - Resposta da Ana às questões 6.c) e 6.d)

c)

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = \overline{AC} \times \overline{AD}$$

d)

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = \overline{AC} \times \overline{CD}$$

Figura 91 - Resposta da Beatriz às questões 6.c) e 6.d)

Na última alínea (figura 92), apenas a Ana apresentou resposta. Pela sua resolução, percebe-se que aplicou o Teorema de Pitágoras ao triângulo [ABC] e, em seguida, procedeu às substituições a partir das igualdades obtidas nas alíneas c) e d), ou seja, não respeitou a ordem pela qual a questão é colocada. Apresentou algumas ideias, mas sem a estruturação necessária para conseguir concluir a questão.

e)

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$$

$$\overline{CA} \times \overline{AD} + \overline{CA} \times \overline{CD} = \overline{AC}^2$$

Figura 92 - Resposta da Ana à questão 6.e)

Na tabela seguinte, mostram-se os resultados comparativos, para as alunas Ana e Beatriz, no teste inicial e teste final.

Questões	Cotação	Ana		Beatriz	
		Teste inicial	Teste final	Teste inicial	Teste final
1.	6	3	6	3	6
2. a)	7	0	6	0	6
2. b)	7	0	6	0	6
3.	10	2	7	2	7
4.	10	0	6	0	7
5.	10	0	10	0	8
6. a)	10	0	0	0	0
6. b)	10	0	9	0	9
6. c)	10	0	6	0	6
6. d)	10	0	6	0	6
6. e)	10	0	5	0	0
Totais		5	**67**	5	**61**

Tabela 6 - Resultados comparativos das alunas Ana e Beatriz no teste inicial e no teste final

No início da abordagem ao conteúdo “Teorema de Pitágoras”, as alunas Ana e Beatriz revelaram desconhecer o teorema, bem como as suas aplicações, pois, no teste inicial, as suas respostas ou a ausência delas assim o indiciam. Também foi possível observar que, apesar de já estarem familiarizadas com o programa GeoGebra, na segunda parte do teste inicial, grande parte do tempo foi despendida na construção, não terminada, facto que se alterou no teste final dado que as alunas, de forma mais célere, fizeram a construção e conseguiram responder a mais algumas questões.

Após a abordagem da sequência didática, no teste final, cujas questões incidiram sobre a apropriação e aplicação do Teorema de Pitágoras, aplicação do Recíproco do teorema e uma prova do teorema baseada na semelhança de triângulos, as alunas apresentaram um desempenho satisfatório. As alunas usufruíram de forma bastante positiva desta abordagem, constatando-se uma evolução muito relevante ao nível dos conhecimentos e capacidades matemáticas relacionados com o tópico em questão. No início deste estudo, apresentavam um aproveitamento satisfatório na disciplina, que conseguiram manter. Salienta-se que a Ana ficou próximo de um aproveitamento bastante satisfatório.

1.2. Gosto e atitude perante a disciplina

No início do estudo, no Questionário, ambas as alunas referiram gostar de Matemática e, em particular, de Geometria, que consideraram útil. As alunas já revelavam gosto pela disciplina, o que se refletia na forma como se empenhavam nas tarefas em contexto de sala de aula. No entanto, fora deste espaço, o seu empenho e interesse era muito pouco, facto comum a mais elementos da turma. Como o estudo foi implementado em contexto de sala de aula e supervisionado pela professora, essa dificuldade não se colocou, à exceção da primeira questão da tarefa 1 em que foi pedido um trabalho de pesquisa.

Ao longo da implementação do estudo, as alunas Ana e Beatriz mostraram-se bastante entusiasmadas na realização das tarefas da sequência didática – “*as alunas sentiam-se motivadas na execução das tarefas, procurando melhorar cada vez mais as suas produções*” (Diário de Bordo, 13/11/2019). A relação positiva que mantiveram ficava-se pelo par e não era partilhada com os outros colegas da turma. Cooperaram, colaboraram e entreajudaram-se, sempre, com o objetivo de superarem todos os desafios a que estiveram expostas – “*perante as dificuldades sentidas, o empenho prevaleceu*” (Diário de Bordo, 18/11/2019). Apresentavam sempre com grande apreço e orgulho a resolução das tarefas no final de cada aula. Não raras vezes, as alunas preferiram ficar na sala de aula durante o intervalo a comentar a forma como tinha corrido a tarefa o que, neste par, foi efetivamente uma surpresa porque o seu interesse sempre se cingiu ao tempo destinado para a aula. O facto de se terem empenhado e revelado interesse na realização das tarefas e da sua resolução ao longo das sessões ter sido bem-sucedida foram fatores impulsionadores de uma atitude positiva para com a disciplina.

Quando questionadas sobre a forma como decorreu a sua aprendizagem relativa ao conteúdo em estudo, a Ana referiu ter gostado destas aulas "*pois podemos usar o GeoGebra para ajudar a tirar conclusões e relacionar a Matemática com outras disciplinas como EV. Também gosto de trabalhar em grupo. É muito mais divertido*." (Diário de Bordo, 21/11/2019). Esta afirmação da aluna reforça algumas das ideias que tinha antes do estudo, quando considerou serem fatores relevantes para um ensino criativo vários aspetos, tais como, a utilização de programas (referindo-se ao PowerPoint), a mudança do espaço físico da aula, a colocação de desafios aos alunos e o trabalho de grupo. A aluna apresentava uma ideia bastante abrangente de ensino criativo, contemplando vários aspetos distintos, realçando-se o gosto manifestado pelo trabalho de grupo e a utilização do computador.

A Beatriz referiu, no final do estudo, que: "*Gostava que as aulas tivessem mais tempo. A minha parte preferida é fazer construções no GeoGebra e resolver os exercícios com o computador, poder pesquisar, ver vídeos com várias aplicações do Teorema*." (Diário de Bordo, 21/11/2019). No início do estudo, em relação ao ensino criativo, a aluna apenas se referiu à aplicação de "*vários exercícios com diferentes tipos de objetos e estruturas",* o que revela uma visão algo simplista e redutora do ensino criativo. Também não concordava, à data da implementação do Questionário, que em Geometria utilizasse regularmente competências de outras disciplinas, nem que tinha muitas aplicações no dia-a-dia reconhecendo, no final do estudo, as várias aplicações do Teorema de Pitágoras. É de salientar o gosto que manifestou pelas aulas ao afirmar que gostaria que tivessem mais tempo.

As respostas dadas pelas alunas parecem dar a entender que, apesar de antes do estudo valorizarem um ensino criativo, ainda que de forma bastante distinta, e a importância do uso do computador, estas dinâmicas são agora reforçadas nas suas respostas.

Esta abordagem parece ter beneficiado estas alunas, tendo tido boas implicações no gosto e atitudes destas para com a Matemática, e, em particular a Geometria.

2. O par P2

O segundo caso, o par P2, é composto por duas alunas, Inês e Marta, ambas com 13 anos, no momento da implementação do estudo.

As alunas tinham tido nível 4 a Matemática no ano letivo anterior, caraterizando-se por terem um comportamento e atitude semelhantes, serem ambas interessadas, empenhadas, organizadas e persistentes e destacavam-se dos restantes elementos da turma quer pela forma de estar, quer pelos resultados que obtinham. As duas alunas tinham, entre elas, uma amizade e cumplicidade muito fortes, pois estavam juntas desde a pré-escola. Apoiavam-se mutuamente e tinham brio nos trabalhos que apresentavam.

Em relação à resolução de problemas, as alunas mostravam-se sempre bastante persistentes e empenhadas na sua consecução. No entanto, era possível detetar lacunas ao nível da interpretação dos textos e eram frequentes os erros quando a resolução envolvia um número significativo de conexões intra e inter Matemática. A Marta reconhecia que a Matemática se relaciona com outras áreas e está presente em contextos reais, aderindo com mais entusiasmo a tarefas desafiantes com diferentes tipos de conexões. A Inês apresentava preferência por atividades que não relacionassem a Matemática com diferentes contextos e diferentes áreas, preferindo atividades mais centradas em procedimentos, nas quais mais facilmente era bem-sucedida. Nas produções escritas ou intervenções orais, ambas as alunas tinham cuidado com o rigor do raciocínio apresentado, procurando fundamentá-lo. No entanto, era possível detetar lacunas principalmente ao nível do encadeamento lógico da argumentação. Ao nível da comunicação, ambas as alunas tinham melhor desempenho na apresentação dos seus raciocínios através da oralidade, visto que nem sempre registavam a totalidade dos argumentos, bem como justificações, nas suas produções escritas.

No Questionário, ambas as alunas assinalaram “Concordo totalmente” em relação às três opções: “Gosto de Matemática”, “Gosto de Geometria” e “A Geometria é útil” e classificaram o seu aproveitamento à disciplina de “Satisfaz Bem”.

Relativamente à parte que respeita ao ensino criativo na abordagem da Geometria, a Inês considerou que não é necessário ser criativo em Geometria, enquanto que a Marta considerou que sim. Em relação às afirmações seguintes, as opiniões não diferem - que uma abordagem criativa torna as aprendizagens mais efetivas e, dessa forma, os alunos sentem-se motivados e que um ensino deste tipo explora conteúdos de forma o mais diversificada possível.

No que respeita à questão aberta "Achas que se pode ensinar Matemática/Geometria de forma criativa? Como?" a Inês respondeu "*Acho que sim, através de jogos ou figuras 3D*" e a Marta opinou "*Eu penso que se pode ensinar Matemática/Geometria de forma criativa, permitindo o uso de telemóveis e computadores, permitindo a realização de trabalhos em grupo e recorrendo a situações do dia-a-dia".*

No que concerne à parte do Questionário relativa às conexões intra e/ou inter Matemática/Geometria, as alunas reconheceram que a melhor forma de aprender é quando os saberes se articulam entre si; os conteúdos da disciplina estão todos relacionados entre si e, em particular a Geometria, têm muitas aplicações no dia-a-dia. A Inês referiu não concordar que a Matemática/Geometria está presente nas outras disciplinas de forma recorrente, mas concordou que a Geometria utiliza regularmente competências de outras disciplinas. A Marta referiu concordar que a Matemática/Geometria está presente nas outras disciplinas de forma recorrente, no entanto, não concordou que a Geometria utiliza regularmente competências de outras disciplinas.

Relativamente à questão aberta: "*Para o desenvolvimento de competências transversais e específicas, consideras importante que, em Matemática/Geometria, se explicitem conexões internas à própria disciplina/tema e relações entre a Matemática/Geometria e outras áreas disciplinares e com o dia-a-dia? Por quê?*", a Inês respondeu "*Acho que a Geometria articula-se com disciplinas, por exemplo Educação Visual e com o dia-a-dia, como por exemplo quando vamos fazer uma piscina temos de saber as medidas*." e a Marta redigiu "*Considero importante pois a Matemática está relacionada com várias disciplinas e com várias questões do dia-a-dia. Por exemplo, os arquitetos para construírem uma casa, para verificar se as paredes são perpendiculares*".

No que respeita à última parte do Questionário, no âmbito da utilização do computador no ensino e na aprendizagem da Matemática, em particular da Geometria, ambas as alunas consideraram que contribui para uma aprendizagem mais estimulante e autónoma, que promove o desenvolvimento de novas ideias, potencia o conhecimento, permite estabelecer conexões, ajuda a perceber as diferentes aplicações e a importância da Matemática no dia-a-dia, desenvolve competências facilitando a resolução de problemas e permite acesso informação variada. A Inês considerou que aumenta o distanciamento entre professor e alunos e a Marta não concordou com a afirmação. Em relação à questão aberta: "*Consideras importante a utilização do computador no ensino e na aprendizagem da Matemática e, em particular, da Geometria? Por quê?*", a Inês respondeu "*Acho que é muito mais fácil fazer trabalhos (mais difíceis) no computador, é muito mais rápido e prático. E quando tivermos alguma dúvida podemos tirá-la na internet*." e a Marta *considerou* "*o uso* *do computador importante pois permite-nos acesso a mais informações, torna as aulas mais didáticas e motiva mais os alunos em relação à disciplina*.”.

2.1. Geometria – Teorema de Pitágoras: apropriação e aplicação

Neste ponto, apresentam-se os resultados relativos à forma como as alunas que constituem o segundo par se foram apropriando do Teorema de Pitágoras e o aplicaram na resolução de tarefas variadas, incluindo as constantes do teste inicial e final.

2.1.1. Produções relativas às tarefas que orientaram as sessões implementadas

Tarefa 1

Após a leitura das pesquisas, sobre a vida e obra de Pitágoras, por alguns alunos da turma, as alunas Inês e Marta, como já era habitual em aulas anteriores, mantiveram uma atitude mais reservada e contida em relação à sua participação perante a turma, preferindo apresentar as informações por elas recolhidas já depois de alguns alunos terem lido as suas. As suas pesquisas, apesar de conterem mais algumas informações do que as dos restantes colegas, apresentam, ainda, um conteúdo pouco substancial sobre o que foi pedido. A Inês indicou a época em que viveu Pitágoras, as áreas de estudo a que se dedicou, a sua naturalidade, fez referência ao lema da Escola Pitagórica e ao enunciado do Teorema de Pitágoras, como se pode ver na figura 93.

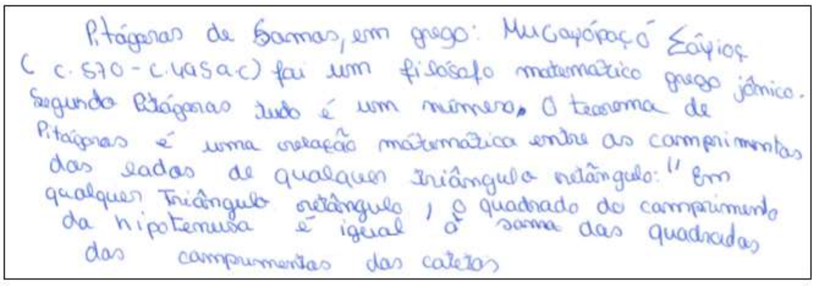

Pitágoras de Samos, em grego: Πυθαγόρας ὁ Σάμιος
(c. 570 - c. 495 a.c) foi um filósofo matemático grego jónico.
Segundo Pitágoras tudo é um número. O teorema de
Pitágoras é uma relação matemática entre os comprimentos
dos lados de qualquer triângulo retângulo: " Em
qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento
da hipotenusa é igual à soma dos quadrados
dos comprimentos dos catetos

Figura 93 - Resposta da Inês à questão 1 da tarefa 1

A Marta indicou a época, naturalidade, áreas de estudo e referiu-se, ainda, à criação da Escola Pitagórica e ao Teorema de Pitágoras como base para inúmeros cálculos, ver figura 94.

Pitagoras de Samos nasceu aproximadamente entre os anos 570 e 571 a.C.,
numa cidade antiga chamada Samos.
No início da sua vida, Pitagoras teve fortes influências, pricipalmente
cientificos e filósofos. Desde jovem teve ideias concretas e definidas sobre
inúmeros assuntos. Criou a escola Pitagórica, aí surgiu a palavra matemática.
Criou o teorema de Pitagoras, que serve de base para inúmeros cálculos. Para
além de matemático, foi também filosofo.

Figura 94 - Resposta da Marta à questão 1 da tarefa 1

As alunas, nas suas pesquisas, disseram apenas terem recorrido a um site da internet, Wikipédia, como fonte de pesquisa, não cruzaram diferentes fontes para testar a veracidade das informações recolhidas como, por exemplo, o manual de Matemática adotado. Encararam esta atividade de forma ligeira, não valorizando todo o conhecimento que poderiam ter adquirido, bem como, a informação transmitida aos restantes colegas da turma.

Relativamente à questão que se seguiu, as duas alunas, partilhando o computador, procuraram seguir com rigor as orientações dadas no enunciado para realizarem a construção pedida no programa GeoGebra. Neste ponto, a professora foi chamada a intervir algumas vezes, sobretudo por aspetos técnicos relacionados com o programa GeoGebra. Neste par, as dificuldades, ou até mais, as incertezas sobre a correção da construção estiveram muito presentes, necessitando de uma aprovação constante da parte da docente para prosseguirem. Após a construção, completaram a tabela pedida e registaram os valores, como se pode ver na figura 95.

Classificação do triângulo quanto aos ângulos	Área de [ACDE]	Área de [AGFB]	Área de [BCIH]	
Acutângulo	~~[illegible]~~ 40,9cm²	36,74cm²	35,8cm²	= 72,54 cm²
Acutângulo	57,54cm²	57,31cm²	58,81cm²	= 100,12 cm²
Acutângulo	36 cm²	29,09cm²	15,2cm²	= 44,29 cm²
Obtusângulo	88,42cm²	49,52cm²	8,23cm²	= 57,75 cm²
Obtusângulo	9,47cm²	14,24cm²	39,83cm²	= 23,71 cm²
Obtusângulo	18,39cm²	39,95cm²	7,15cm²	= 25,54 cm²
Retângulo	35,25cm²	39,95cm²	4,68cm²	= 39,93 cm²
Retângulo	17,26cm²	9,15cm²	26,72cm²	= 26,41 cm²
Retângulo	17,97cm²	7,75cm²	10,02cm²	= 17,77 cm²

Figura 95 - Respostas das alunas Inês e Marta à questão 2.a) da tarefa 1

Na discussão efetuada pelo par sobre como poderiam relacionar as medidas das áreas dos quadrados, é curioso perceber que ambas tentaram fazer o paralelismo com o que já tinham pesquisado sobre o Teorema de Pitágoras na primeira questão da tarefa.

Desta forma, a relação entre as medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo foi a primeira a ser estabelecida. Em ambas as respostas, como se pode ver nas figuras 96 e 97, as alunas referiram que a relação existente é "aproximadamente igual" pois, de facto, os valores que surgem na tabela retirados do programa GeoGebra, fruto de arredondamentos às centésimas, originam essa discrepância.

Investiram algum tempo na procura de relações por meio de uma igualdade com outras operações para os triângulos acutângulos e obtusângulos pois, inicialmente, parecia-lhes que maior ou menor não seria suficiente como relação. Das respostas, pode-se verificar que a Inês, no texto, referiu erradamente "quadrados acutângulos" e "quadrados obtusângulos", provavelmente por lapso, atendendo às discussões que teve com o seu par de trabalho. A Marta estabeleceu as relações pedidas corretamente.

Posso concluir: Nos triângulos retângulos a soma das áreas dos quadrados menores é, aproximadamente, igual á area do quadrado maior. Nos quadrados acutângulos, a soma das áreas dos qudrados menores é maior do que a área do quadrado maior. Nos quadrados obtusângulos a soma dos quadrados menores é menor do que a área do quadrado maior.

Figura 96 - Resposta da Inês à questão 2.b) da tarefa 1

Posso concluir que nos triângulos acutângulos a soma das áreas dos dois quadrados menores é maior do que a área do quadrado maior. Nos triângulos obtusângulos, concluo que a soma das áreas dos quadrados menores é menor do que a área do quadrado maior. Nos triângulos retângulos, a soma das áreas dos quadrados menores é aproximadamente igual à do quadrado maior.

Figura 97 - Resposta da Marta à questão 2.b) da tarefa 1

Ambas as alunas responderam à questão 3.a) relacionando com o que concluíram anteriormente. A partir das medidas de comprimento dos lados do triângulo, determinaram a medida das áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo e estabeleceram a relação que verificaram ser de igualdade e, assim, concluíram que um triângulo nessas condições é retângulo, como se pode ver nas figuras 98 e 99. Quando questionadas pela professora do porquê de, nesta questão, terem considerado uma relação de igualdade quando, anteriormente, nas conclusões, referiram 'aproximadamente igual', a Marta, de imediato, respondeu "*É como no cálculo da área do círculo. Depende do número de casas decimais que usamos para o* π. *É por isso que*, *nas soluções*, *o resultado às vezes é um bocadinho diferente*". Assumiram que essa diferença se devia aos arredondamentos.

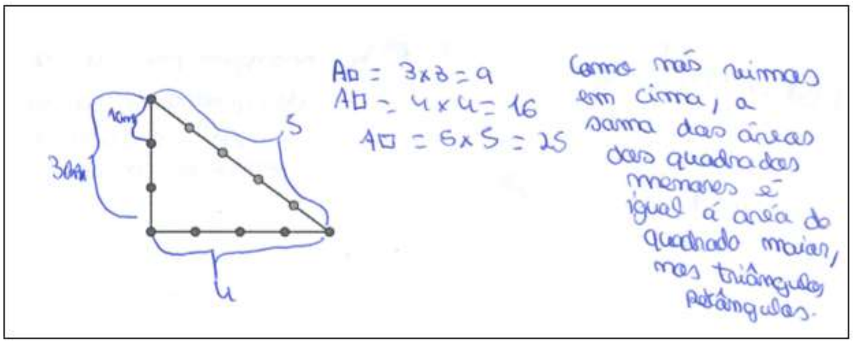


Figura 98 - Resposta da Inês à questão3.a) da tarefa 1

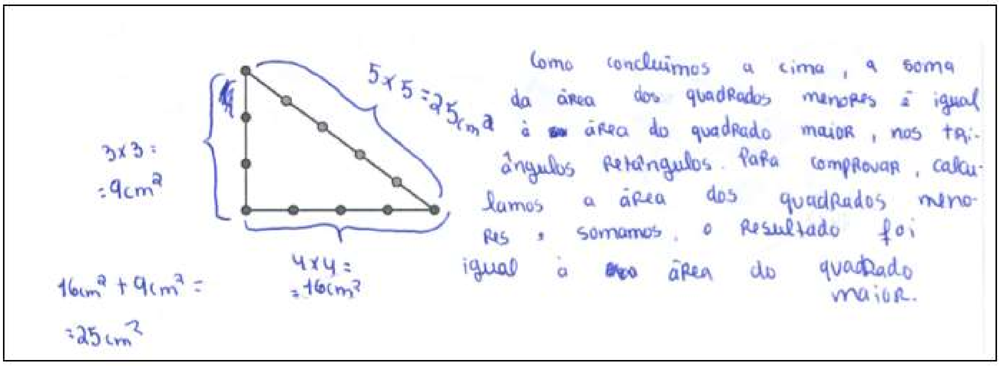


Figura 99 - Resposta da Marta à questão 3.a) da tarefa 1

De forma análoga, as alunas responderam corretamente à questão 3.b), como se pode ver nas figuras 100 e 101.

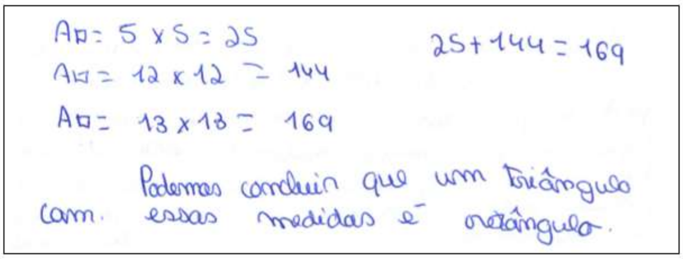
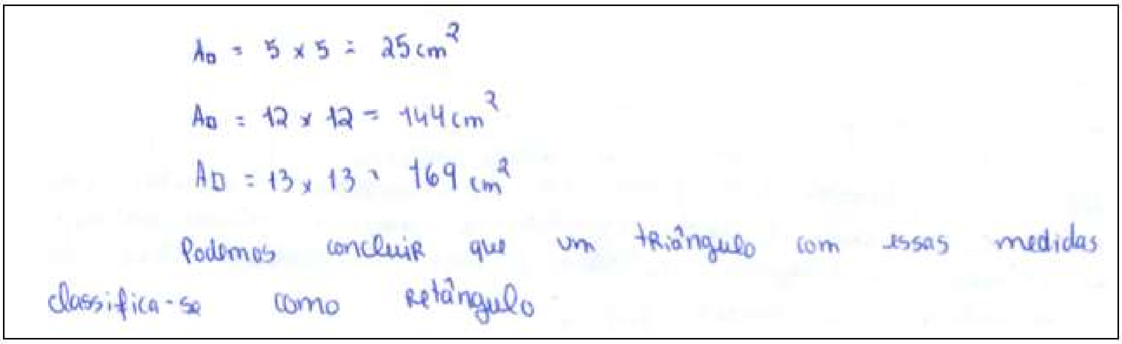


Figura 100 - Resposta da Inês à questão 3.b) da tarefa 1



$A_{\square} = 5 \times 5 = 25 \, cm^2$

$A_{\square} = 12 \times 12 = 144 \, cm^2$

$A_{\square} = 13 \times 13 = 169 \, cm^2$

Podemos concluir que um triângulo com essas medidas classifica-se como retângulo

Figura 101 - Resposta da Marta à questão 3.b) da tarefa 1

A questão 3.c) não foi percebida pelas alunas pelo que tentaram, primeiramente, tirar dúvidas com os colegas que estavam ao lado, mas esses ainda não estavam a responder a essa questão. Voltaram a tentar, em par, resolver a questão, explorando a construção que tinham efetuado no GeoGebra, mas sem sucesso. Decidiram, então, questionar a professora sobre o que se pretendia.

Professora - *Que ternos pitagóricos conseguiram identificar até ao momento?*

Após alguma hesitação.

Inês - *São os do exercício 2, certo? O (3,4,5) e (5,12,13).*

Professora - *Sim, podem utilizar esses ternos pitagóricos. E o que é que sabem de figuras semelhantes, em particular de triângulos semelhantes?*

Inês - *Os critérios AA, LAL e LLL.*

Marta - *E agora, fazemos o quê com essa informação?*

Professora - *Quando referiram os ternos pitagóricos, que informação é dada acerca dos triângulos?*

Marta - *O comprimento.*

Professora - *Então?*

Inês - *Podemos multiplicar por um número qualquer e continuam semelhantes.*

Apesar das alunas terem na sua posse todas as informações relevantes para a resolução da questão, não estavam a conseguir relacioná-las. O facto de a professora não ter intercedido logo no início fez com que o par fizesse um levantamento de todos os dados do problema, os tentasse relacionar e se inteirasse do mesmo. Aquando da intervenção da docente, já estavam cientes do que pretendiam, daí terem conseguido, com alguma orientação, dar as respostas que se podem ver a seguir, nas figuras 102 e 103.

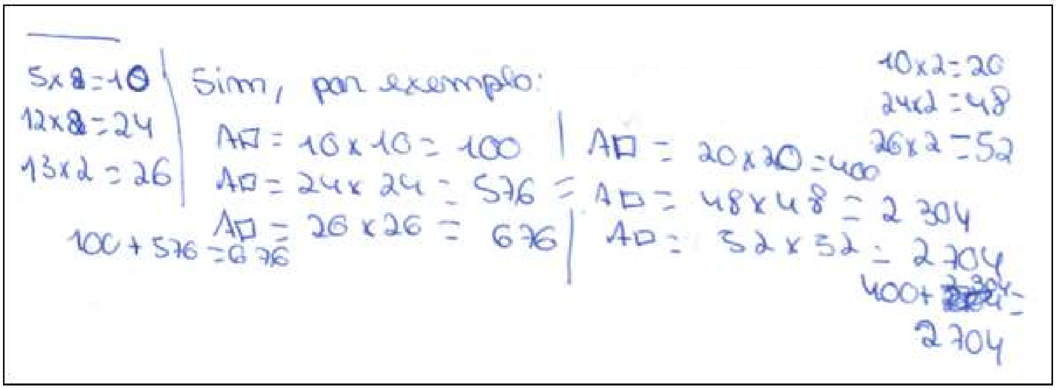


Figura 102 - Resposta da Inês à questão 3.c) da tarefa 1

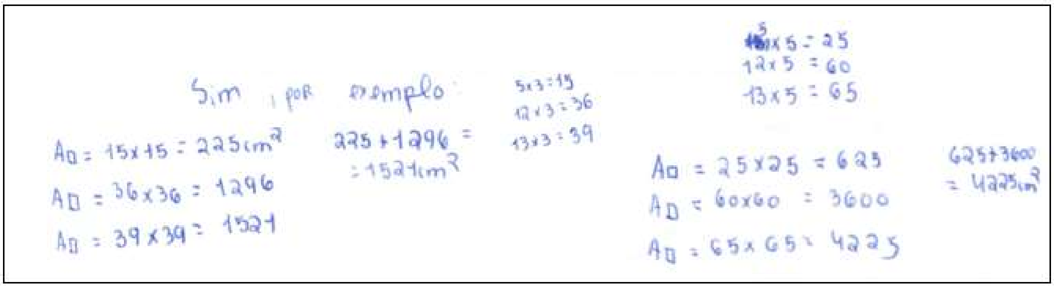


Figura 103 - Resposta da Marta à questão 3.c) da tarefa 1

Pelas respostas dadas, percebe-se que, apesar de as alunas estarem a trabalhar em pares, optaram por apresentar ternos pitagóricos distintos, ainda que o procedimento seja em tudo idêntico.

A Inês, a partir do terno pitagórico (5, 12, 13), determinou o terno (10, 24, 26) e, a partir deste, o terno (20, 48, 52), multiplicando sucessivamente por 2. A Marta partiu também do terno pitagórico (5,12,13), multiplicou-o por 3 e por 5, encontrando os ternos (15, 36, 39) e (25, 60, 65). É curioso notar que ambas aplicaram a relação que tinham concluído anteriormente para triângulos retângulos e, quando questionadas pela professora sobre essa situação, a justificação dada foi que estavam a verificar se os ternos encontrados continuavam a corresponder a triângulos retângulos pois, senão, tinham-se enganado.

Em relação à questão seguinte, o par respondeu corretamente, apresentando uma justificação válida ao que era pedido, mais uma vez, com base nas conclusões tiradas no início da aula. Apresentaram, também, a medida do comprimento dos lados do quadrado, tanto o valor exato como alguns valores aproximados que, neste contexto, não faz grande sentido. As respostas podem observar-se nas figuras 104 e 105.

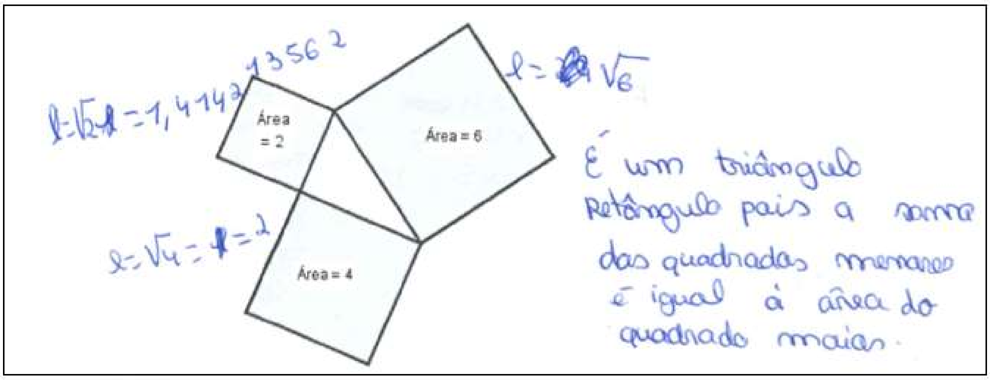


Figura 104 - Resposta da Inês à questão 4 da tarefa 1

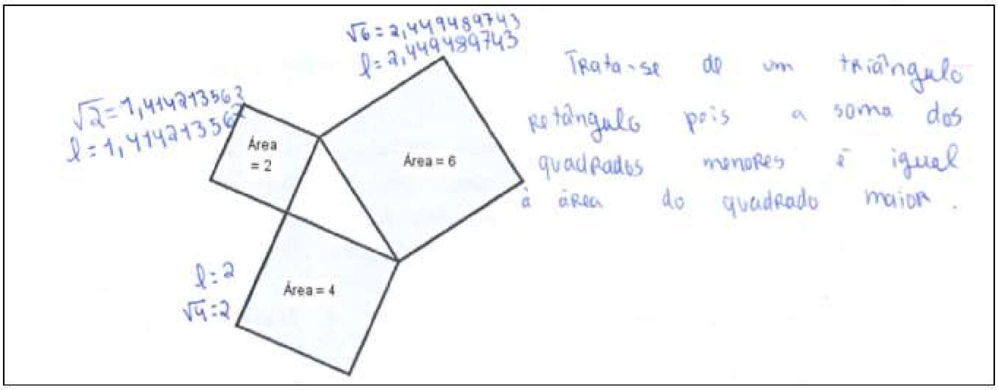


Figura 105 - Resposta da Marta à questão 4 da tarefa 1

As alunas conseguiram concretizar a tarefa dentro do tempo previsto para a aula, tendo ainda, nos minutos finais, colaborado com um outro par que se encontrava mais atrasado na realização da tarefa. A sua colaboração não consistiu em dar as respostas aos colegas, mas tentaram ajudá-los a encontrar, sozinhos, as respostas, prática que era comum nas aulas de Matemática.

Tarefa 2

Previamente à resolução desta tarefa, as alunas já tinham efetuado uma construção que trouxeram para a aula, com a respetiva digitalização feita na reprografia da escola.

A Inês apresentou-se um bocadinho apreensiva em relação à tarefa pois, ao recebê-la, percebeu que iria reproduzir no programa GeoGebra a construção que tinha feito em Educação Visual. Quando a professora a questionou sobre a reação à tarefa, informou que a mesma não tinha corrido bem na aula de Educação Visual.

As alunas começaram a construção no programa GeoGebra, seguindo as orientações de forma cuidada e rigorosa, mas precisavam constantemente da confirmação da professora para prosseguirem. Tal facto pode, eventualmente, ter-se ficado a dever à dificuldade da construção efetuada com instrumentos de medida e desenho. Ambas as alunas não conseguiram realizar na aula de Educação Visual a construção sem inúmeras correções. Concluída a construção no GeoGebra, as alunas puderam estabelecer comparações entre as construções. Na figura 106, é possível observar as duas construções sobrepostas.

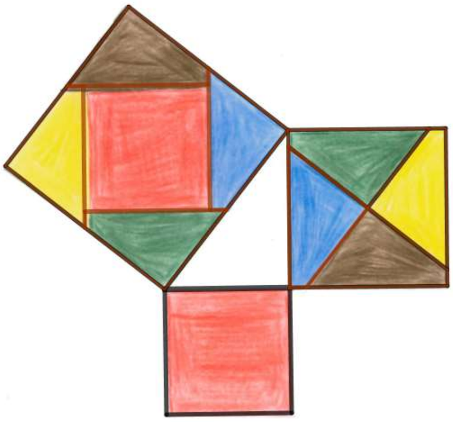


Figura 106 - Digitalização da construção feita em Educação Visual pela Marta, sobreposta à construção realizada no GeoGebra

Foi notório o alívio e, simultaneamente, o ânimo das alunas aquando da conclusão da construção no GeoGebra. A conclusão da Inês relativamente à tarefa recai sobre a qualidade da construção, como se pode ver na figura 107, pois, ao longo da tarefa, o principal foco foi conseguir realizar a construção.

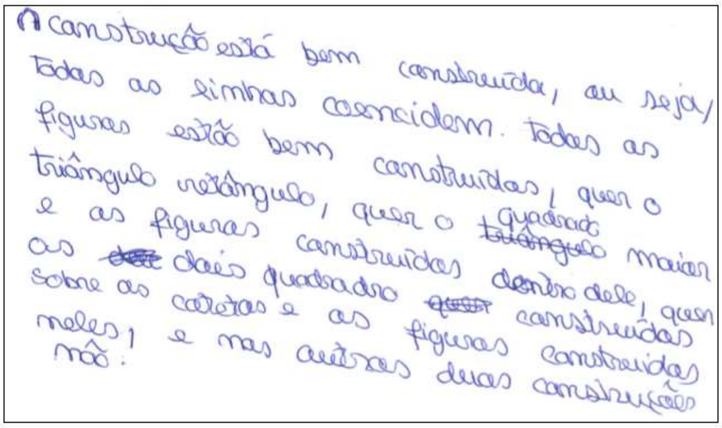


Figura 107 - Resposta da Inês à tarefa 2

A Marta fez também referência à qualidade da construção e uma ligação da mesma ao Teorema de Pitágoras, como se vê na figura 108. Nenhuma das alunas referiu, nas conclusões, que efetuaram uma prova geométrica do Teorema de Pitágoras.

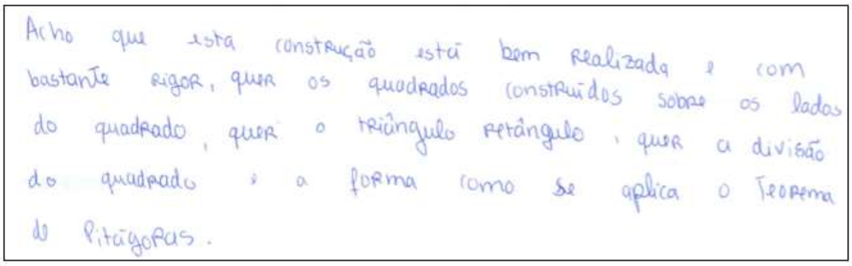

Acho que esta construção está bem realizada e com bastante rigor, quer os quadrados construídos sobre os lados do quadrado, quer o triângulo retângulo, quer a divisão do quadrado e a forma como se aplica o Teorema de Pitágoras.

Figura 108 - Resposta da Marta à tarefa 2

Na realização desta tarefa exploratória, foi notório neste par algum desconforto no início da aula, principalmente da aluna Inês, provocado pela dificuldade que tinham tido na construção desta prova geométrica do Teorema de Pitágoras utilizando instrumentos de medida e desenho. Ao longo da realização da tarefa, no GeoGebra, foram ficando mais envolvidas e animadas com a simultaneidade das duas construções, quebrando o desconforto inicial.

Após a conclusão da tarefa, a Inês, a título de desabafo, referiu "*Com o GeoGebra tudo se tornou muito mais simples. Até começo a pensar que Educação Visual deveria ser no computador.*"

A Inês, na aula seguinte, fez questão de mostrar à professora a sua construção de Educação Visual sobreposta à construção que realizou no GeoGebra, na Biblioteca da escola. Comentou, com alguma ironia e sorrindo, que a sua prova geométrica do Teorema de Pitágoras afinal não tinha ficado assim tão mal (figura 109).

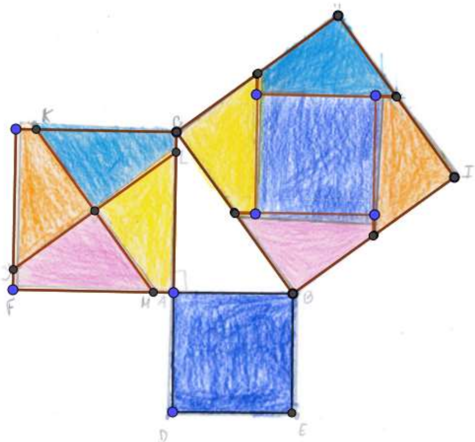


Figura 109 - Digitalização da construção feita em Educação Visual pela Inês, sobreposta à construção realizada no GeoGebra

Tarefa 3

Após a entrega da tarefa 3 e relembrado o Teorema de Pitágoras de forma a contextualizar a tarefa, as alunas Inês e Marta iniciaram a realização da mesma.
Ambas as alunas responderam corretamente à primeira questão 1.a), como se pode ver nas figuras 110 e 111.

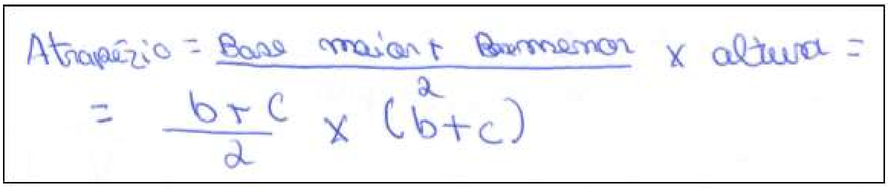


Figura 110 - Resposta da Inês à questão 1.a) da tarefa 3

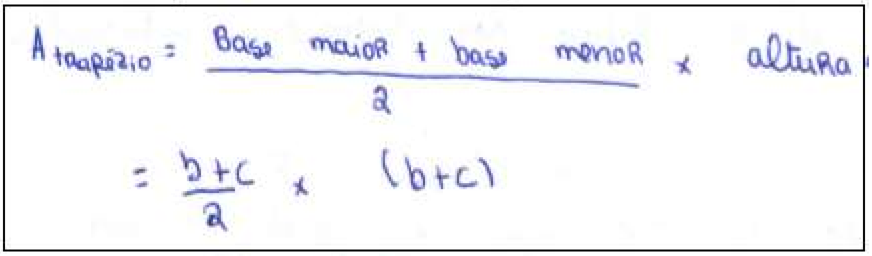


Figura 111 - Resposta da Marta à questão 1.a) da tarefa 3

A questão seguinte foi também resolvida com facilidade por ambas e corretamente, ver figuras 112 e 113.

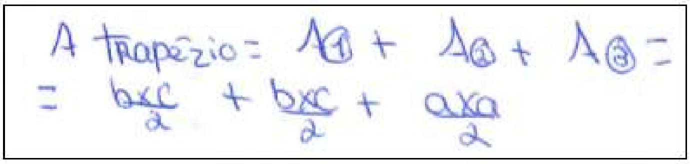


Figura 112 - Resposta da Inês à questão 1.b) da tarefa 3

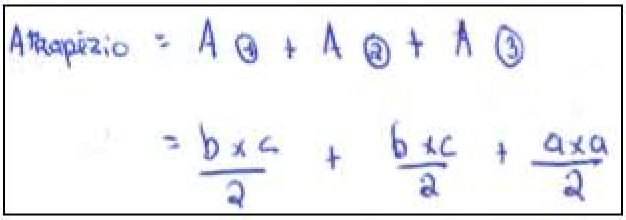


Figura 113 - Resposta da Marta à questão 1.b) da tarefa 3

De forma a inferirem o Teorema de Pitágoras recorrendo às duas alíneas anteriores, as alunas começaram por apresentar dúvidas em relação ao que estava a ser pedido. Numa primeira fase, não perceberam o significado de “infere”, seguidamente, observaram a figura apresentada e não conseguiam estabelecer relação com o Teorema de Pitágoras e a forma como tinha sido abordado nas sessões anteriores, através das medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo. Ao contrário dos restantes pares da turma, que começaram, quase de imediato, a ver o vídeo sugerido, este par esteve insistentemente a ler o enunciado e a tentar colmatar as dúvidas que tinha do mesmo.

A Marta chamou a professora, questionando: - "*Para conseguirmos relacionar as duas alíneas*, *que são formas diferentes para calcular o mesmo, o que é que podemos fazer? Se fosse com números, tinha de dar o mesmo.*"

Apesar de a questão ser colocada de forma algo confusa, a aluna estava a seguir um raciocínio correto que lhe permitiu dar início à prova algébrica, igualando as duas alíneas. Após terem estabelecido a igualdade das duas expressões, conseguiram inferir o teorema (figuras 114 e 115). Em seguida, visionaram o vídeo proposto e fizeram a confirmação da sua demonstração.

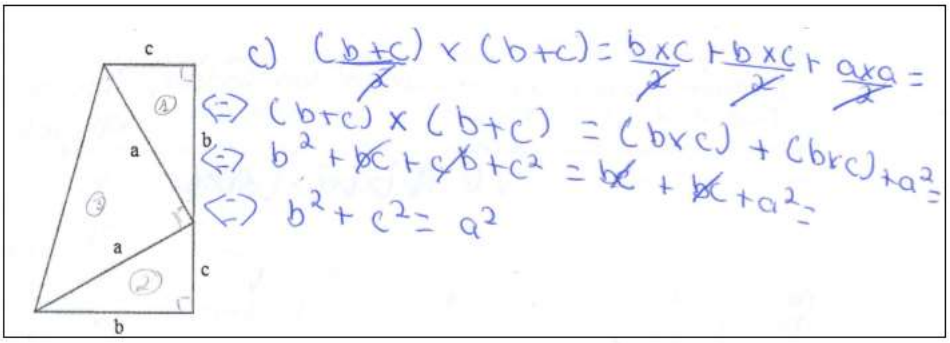


Figura 114 - Resposta da Inês à questão 1.c) da tarefa 3

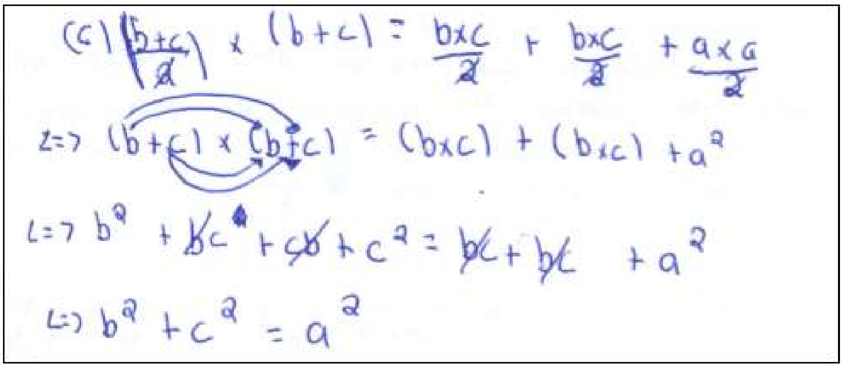


Figura 115 - Resposta da Marta à questão 1.c) da tarefa 3

A manifesta surpresa apresentada pela Marta, cujo envolvimento na exploração da demonstração foi maior, traduziu-se no comentário: "O *Teorema de Pitágoras outra vez! Como é possível?! Esta figura é tão diferente da da aula anterior! Só mesmo em Matemática!*".

Relativamente à questão seguinte, as alunas classificaram corretamente todas as afirmações, justificando as falsas. As justificações das afirmações falsas são válidas, à exceção da justificação da última afirmação da Marta que, eventualmente, por esquecimento, não colocou a palavra quadrado (figuras 116 e 117).

A resolução da questão foi feita de forma célere e com grande cumplicidade na partilha das suas aprendizagens, comunicando de forma objetiva e assertiva.

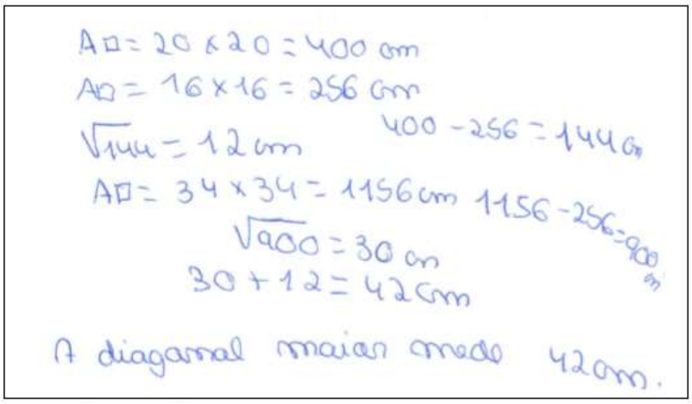
- Um triângulo que verifica o teorema de Pitágoras tem dois ângulos agudos. V
- Um triângulo que verifica uma relação entre as medidas dos lados, tal como no teorema de Pitágoras, pode não ser retângulo. F Um triângulo que verifica uma relação entre as medidas dos lados, tal como no teorema de Pitágoras, só pode ser retângulo.
- Num triângulo retângulo, cujos catetos medem 3m e 4m, a hipotenusa mede 5m, por outras palavras, (3, 4, 5) é um terno pitagórico. V
  A□ = 3x3 = 9cm²
  A□ = 4x4 = 16cm²
  A□ = 5x5 = 25cm²
- Um triângulo cujos lados medem 5cm, 12cm e 1,3dm é retângulo. V
  A□ = 5x5 = 25
  A□ = 12x12 = 144
  A□ = 13x13 = 169
  144 + 25 = 169
  1,3dm = 13 cm
- Todos os triângulos verificam uma relação entre as medidas dos lados como no teorema de Pitágoras, isto é, o quadrado da medida do seu lado maior é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados. F Pois só se verifica em todos os triângulos retângulos
- Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos catetos. F Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos

Figura 116 - Resposta da Inês à questão 2 da tarefa 3

- Um triângulo que verifica o teorema de Pitágoras tem dois ângulos agudos. V
- Um triângulo que verifica uma relação entre as medidas dos lados, tal como no teorema de Pitágoras, pode não ser retângulo. F Um triângulo que verifica uma relação entre as medidas dos lados, tal como no teorema de Pitágoras, só pode ser retângulo.
- Num triângulo retângulo, cujos catetos medem 3m e 4m, a hipotenusa mede 5m, por outras palavras, (3, 4, 5) é um terno pitagórico. V
  A□ = 3x3 = 9cm²
  A□ = 4x4 = 16cm²
  A□ = 5x5 = 25cm²
- Um triângulo cujos lados medem 5cm, 12cm e 1,3dm é retângulo. V
  144 + 25 = 169cm²
  A□ = 13x13 = 169
  A□ = 5x5 = 25cm²
  1,3dm = 13cm
  A□ = 12x12 = 144cm²
- Todos os triângulos verificam uma relação entre as medidas dos lados como no teorema de Pitágoras, isto é, o quadrado da medida do seu lado maior é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados. F, pois só se verifica nos triângulos retângulos.
- Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos catetos. F Num triângulo retângulo da hipotenusa é igual à soma do quadrado dos catetos.

Figura 117 - Resposta da Marta à questão 2 da tarefa 3

Relativamente à primeira alínea da questão seguinte, a Inês resolveu-a corretamente, embora apresente erros formais nas unidades de medida da área, como se pode ver na figura 118.

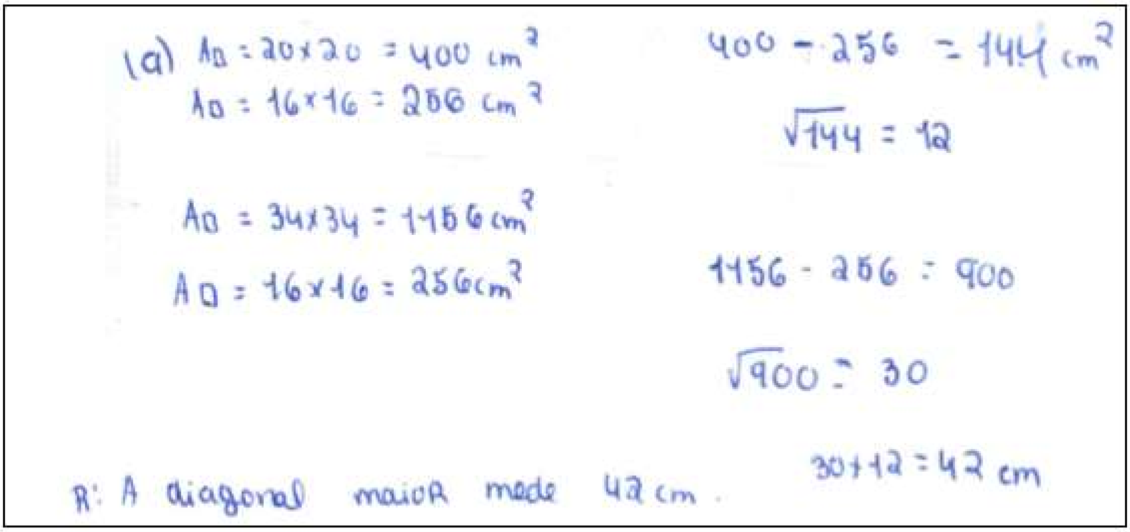


A□ = 20 x 20 = 400 cm
A□ = 16 x 16 = 256 cm
$\sqrt{144}$ = 12 cm
400 - 256 = 144 cm
A□ = 34 x 34 = 1156 cm
1156 - 256 = 900 cm
$\sqrt{900}$ = 30 cm
30 + 12 = 42 cm
A diagonal maior mede 42 cm.

Figura 118 - Resposta da Inês à questão 3.a) da tarefa 3

A Marta respondeu corretamente à questão, como se vê na figura 119.

Na resolução apresentada pelas alunas, para calcularem a medida de comprimento de um lado em falta num triângulo retângulo, recorreram às relações que descobriram na tarefa 1, privilegiando a relação existente entre as medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo.



(a) A□ = 20x20 = 400 cm²
A□ = 16x16 = 256 cm²
400 - 256 = 144 cm²
$\sqrt{144}$ = 12
A□ = 34x34 = 1156 cm²
A□ = 16x16 = 256 cm²
1156 - 256 = 900
$\sqrt{900}$ = 30
30+12 = 42 cm
R: A diagonal maior mede 42 cm.

Figura 119 - Resposta da Marta à questão 3.a) da tarefa 3

Ambas as alunas respondem corretamente à determinação da medida da área do papagaio, como se pode ver nas figuras 120 e 121.

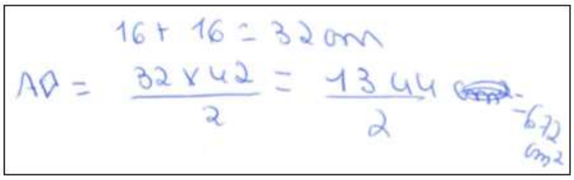


Figura 120 - Resposta da Inês à questão 3.b) da tarefa 3

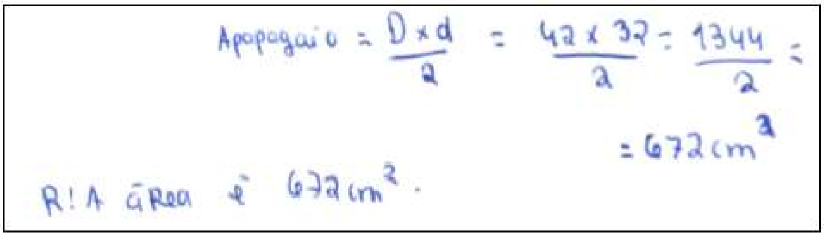


Figura 121 - Resposta da Marta à questão 3.b) da tarefa 3

Após concluírem a tarefa e como faltavam alguns minutos para o final da aula, ambas as alunas optaram por revê-la. Na entrega da tarefa no final da aula, apresentaram-se orgulhosas e animadas com o trabalho desenvolvido.

Na resolução desta tarefa, estão patentes a atenção e o cuidado na forma como as alunas apresentaram as suas produções escritas. Tiveram a noção e a capacidade de desenvolver uma demonstração, construída através de argumentos matemáticos válidos, e apresentaram um raciocínio lógico na forma como encadearam as suas justificações ao longo de toda a tarefa.

As resoluções desta tarefa assumem um caráter de natureza mais algébrico, que se distingue da resolução da tarefa proposta anteriormente, de natureza mais geométrica. O envolvimento das duas alunas em ambas as tarefas foi diferente. Embora se tivessem empenhado bastante em ambas, foi notório que se sentiram mais à vontade na realização da tarefa de natureza mais algébrica.

Tarefa 4

A entrada na sala de aula fez-se de forma habitual e, sendo na sala de informática, perceberam, de imediato, que iriam trabalhar nos computadores. Enquanto ligavam os computadores, a Inês, de forma afável e com boa disposição, teceu o comentário para os que estavam mais próximos, incluindo a professora, "*Deve ser mais uma demonstração do Teorema de Pitágoras! Estamos uns verdadeiros matemáticos!*". Deste comentário, pode depreender-se que a aluna tinha a noção de que, apesar de já conhecerem o enunciado do Teorema de Pitágoras, este poderia ainda ser explorado por meio de mais demonstrações. Nem todos os alunos da turma tinham essa consciência!

Tal como na tarefa anterior, o par optou pela mesma abordagem à tarefa proposta para essa aula - leram e releram o enunciado até o perceberem e só então avançaram para a exploração proposta.

O par, à medida que formulava conjeturas oralmente, ia procedendo à sua testagem no GeoGebra. Experimentou, a partir do triângulo retângulo, construir polígonos regulares e semelhantes entre si assentes sobre os lados do triângulo. Verificou que mantinham uma relação semelhante à dos quadrados. A exploração foi feita com triângulos equiláteros, pentágonos regulares e hexágonos regulares. Experimentaram com outros polígonos não regulares e, porque não conseguiram que fossem semelhantes entre si, a relação não se verificou.

Após testarem no GeoGebra alguns casos, as alunas, sem passarem pelo processo de justificação, avançaram para as conclusões. As conclusões escritas pelas alunas não traduzem com exatidão e correção as explorações efetuadas na aula. Tal facto pode ter-se devido às dificuldades em comunicar por escrito e/ou uma análise incorreta daquilo que observaram.

A Inês, no primeiro parágrafo das suas conclusões (figura 122), referiu polígonos regulares construídos sobre os lados do triângulo, não referindo que os polígonos, para além de regulares, têm de ter o mesmo número de lados e que o triângulo era retângulo, tal como efetuaram nas suas experiências. A forma como elaborou as conclusões, apesar de focar alguns pontos importantes, como polígonos regulares e semelhantes, não permitiu que as conclusões fossem corretamente escritas em função daquilo que explorou.

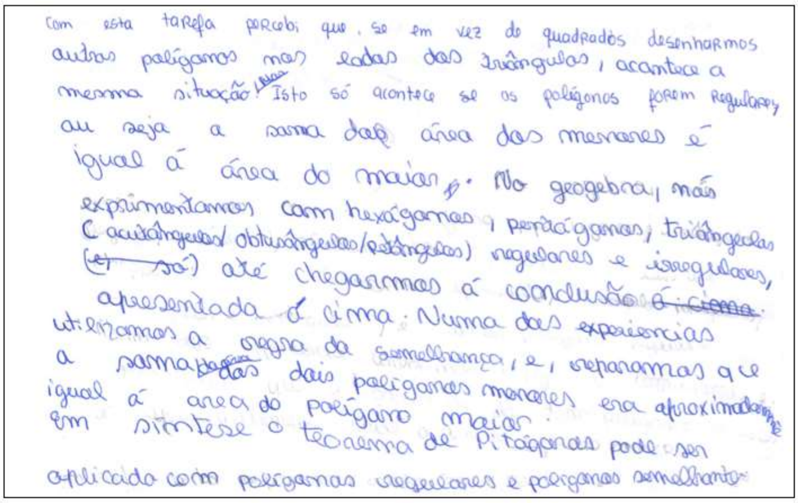

Com esta tarefa percebi que, se em vez de quadrados desenharmos outros polígonos nos lados dos triângulos, acontece a mesma situação! Isto só acontece se os polígonos forem regulares, ou seja a soma das área dos menores é igual á área do maior. No geogebra, nós experimentamos com hexágonos, pentágonos, triângulos (acutângulos/ obtusângulos/ retângulos) regulares e irregulares, ~~(e só)~~ até chegarmos á conclusão apresentada á cima. Numa das experiencias utilizamos a regra da semelhança, e, reparamos que a soma das dois polígonos menores era aproximadamente igual á area do polígono maior. Em síntese o teorema de Pitágoras pode ser aplicado com polígonos regulares e polígonos semelhantes

Figura 122 - Resposta da Inês à tarefa 4

A Marta, nas suas conclusões (figura 123), no início, apenas referiu polígonos, mas em seguida, acrescentou regulares. Mas, tal como a aluna Inês, não teve em atenção o número de lados do polígono. Quando se referiu a polígonos semelhantes, estava apenas a referir-se a polígonos regulares com o mesmo número de lados, pois as suas explorações apenas contemplaram essas situações. No final, referiu irregulares, depreendendo-se que se referia a polígonos irregulares, mas não apresentou conclusões relativamente a estes.

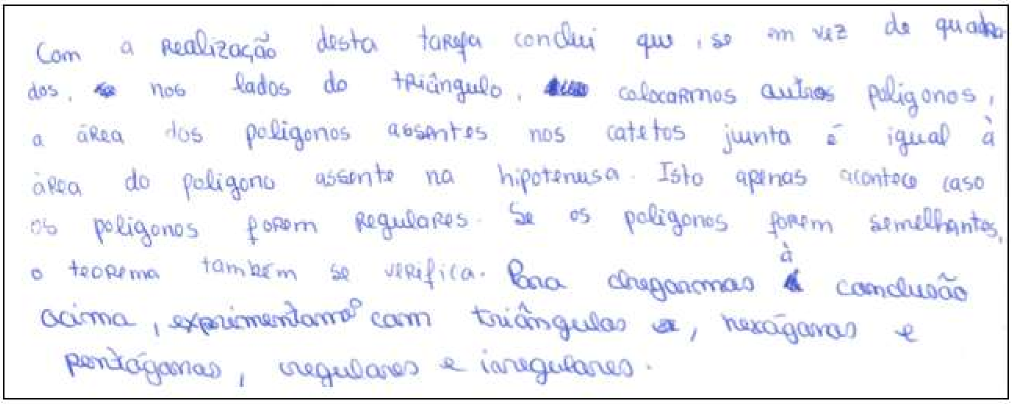

Com a realização desta tarefa conclui que, se em vez de quadrados, nos lados do triângulo, colocarmos outros polígonos, a área dos polígonos assentes nos catetos junta é igual à área do polígono assente na hipotenusa. Isto apenas acontece caso os polígonos forem regulares. Se os polígonos forem semelhantes, o teorema também se verifica. Para chegarmos à conclusão acima, experimentamos com triângulos, hexágonos e pentágonos, regulares e irregulares.

Figura 123 - Resposta da Marta à tarefa 4

Ao longo da realização da tarefa, as alunas empenharam-se e fizerem várias construções para validarem as suas conclusões. No entanto, apesar de terem efetuado boas construções e válidas para a verificação de que o enunciado do Teorema de Pitágoras não é apenas válido para quadrados, as suas conclusões ficaram aquém do esperado. As alunas, nesta tarefa, apresentaram uma composição matemática que não traduziu com precisão e rigor aquilo que pesquisaram. Revelaram muita dificuldade em explicitar os seus raciocínios por meio da escrita. Ao longo da realização da tarefa, quando eram questionadas oralmente, as suas informações eram mais completas e precisas.

Já próximo do final da aula e com a tarefa dada por concluída por parte das alunas, a professora questionou-as sobre como poderiam obter uma justificação que validasse a conclusão para o caso particular dos triângulos equiláteros. Algo confusas com a questão colocada, afirmaram que a justificação se prendia com as experiências que tinha realizado no GeoGebra. Depois de esclarecidas de que, com o GeoGebra, apenas tinham experimentado para alguns casos e o que se pretendia era uma justificação/prova que permitisse a generalização, as alunas acederam ao pedido tentando encontrar uma justificação no pouco tempo restante. Como não conseguiram apresentar uma prova, facto que não surpreendeu atendendo à dificuldade do desafio proposto e ao tempo para o executar, as alunas perguntaram se poderiam ir à aula de apoio, que não frequentavam, esclarecer só essa dúvida. A resposta da professora foi afirmativa e congratulou-as por tal.

Não fazendo parte do programa a prova destes casos particulares da generalização de Polya, a questão ficou em aberto e o desafio lançado ao par bem como, depois, a toda a turma.

Tarefa 5

A tarefa 5 foi distribuída e foi comunicado à turma pela docente a necessidade de uma leitura atenta dos enunciados e para apresentarem todas as justificações e raciocínios envolvidos na resolução dos problemas. O par, após a receção da tarefa, em conjunto, deu uma vista de olhos geral aos enunciados para perceberem o que as esperava na realização da mesma.

Iniciaram a tarefa pela resolução da questão 1. Esta questão suscitou dúvidas na sua interpretação. Para as alunas, não foi imediato perceberem, no contexto do problema, o significado dos valores dados e a que se referiam. Após alguma discussão, as alunas, entre elas, conseguiram, finalmente, perceber que os valores dados se referiam às medidas de comprimento dos catetos de um triângulo retângulo, escrevendo uma equação do segundo grau para determinar a medida de comprimento da hipotenusa.

A Inês, sem que isso fosse pedido, efetuou, na resolução da equação, um arredondamento. Apresentou erros formais de linguagem: a falta do sinal de " ⇔"; a ausência de "$x =$ " no desenvolvimento da equação e a ausência do conjunto solução da equação (figura 124). Não referiu justificação para a escolha da solução positiva da equação, no contexto do problema. Apesar das incorreções na resolução, conseguiu concluir o problema e apresentou a resposta correta.

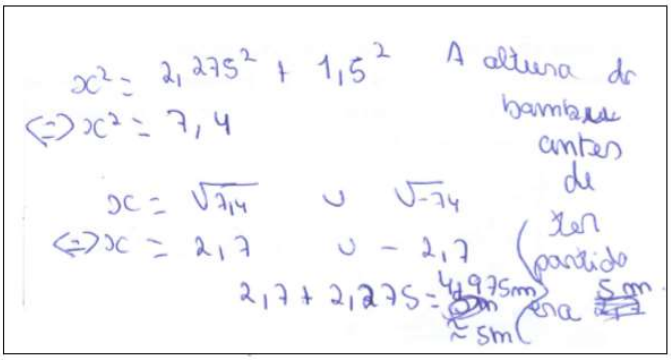


Figura 124 - Resposta da Inês à questão 1 da tarefa 5

A Marta também apresentou erros formais de linguagem, como a falta do sinal de " ⇔", não apresentou as duas soluções da equação e o conjunto solução (figura 125). Conseguiu concluir o problema e apresentou solução para o mesmo.

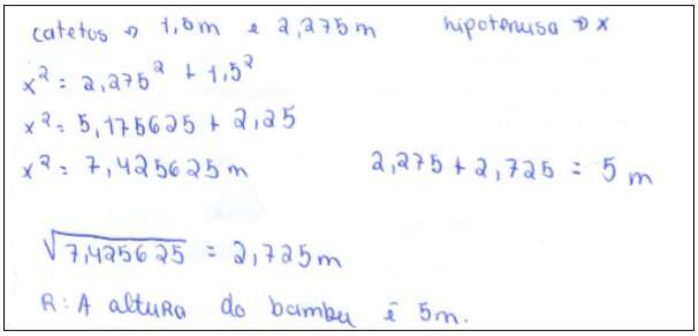


Figura 125 - Resposta da Marta à questão 1 da tarefa 5

Relativamente à questão 2., a Inês, tal como na questão anterior, utilizou uma equação do segundo grau para conseguir responder ao problema, continuando a apresentar na sua resolução erros formais, tais como a alteração da incógnita de h para x, sem justificação, a falta de uma solução da equação do segundo grau e a não apresentação do resultado arredondado às unidades, tal como é pedido no enunciado do problema (figura 126).

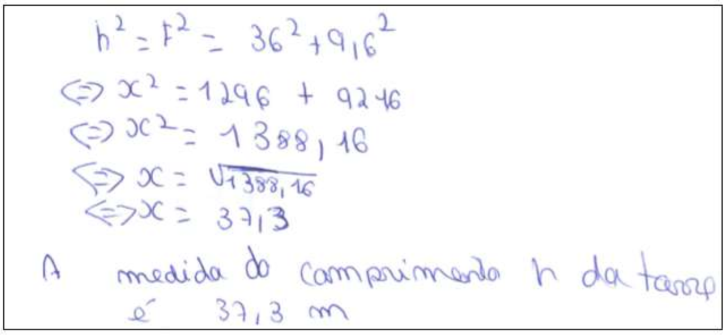


Figura 126 - Resposta da Inês à questão 2 da tarefa 5

Na mesma questão, a Marta (figura 127) também apresentou erros formais, tais como a falta do sinal de " ⟺" e não apresentou as duas soluções da equação. Na resposta ao problema, teve o cuidado de fazer o arredondamento pedido.

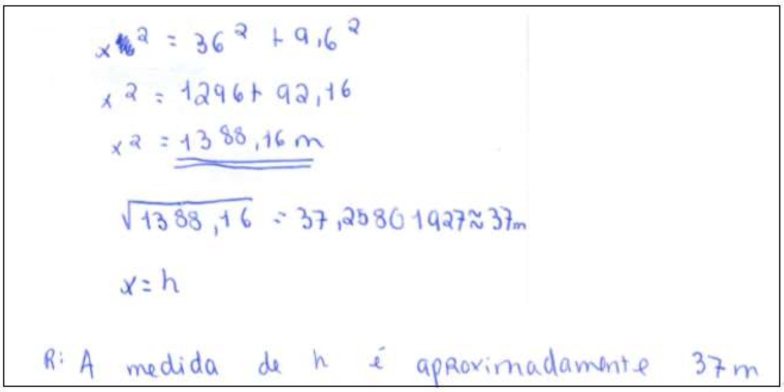


Figura 127 - Resposta da Marta à questão 2 da tarefa 5

Na questão seguinte, a aluna Inês voltou a cometer erros semelhantes aos das questões anteriores, no entanto, respeitou os arrendamentos pedidos no enunciado e apresentou a resposta correta ao problema (figura 128).

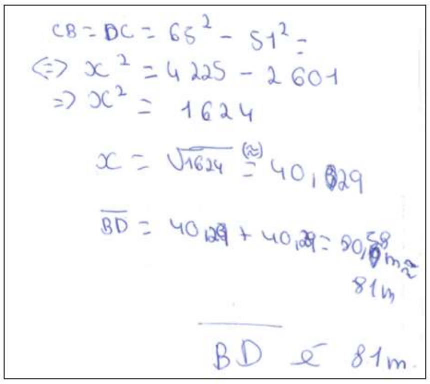


Figura 128 - Resposta da Inês à questão 3 da tarefa 5

Tal como a Marta, repetiu erros formais ao longo da resolução. A resposta ao problema está incorreta, eventualmente por distração, pois o cálculo intermédio está correto (figura 129).

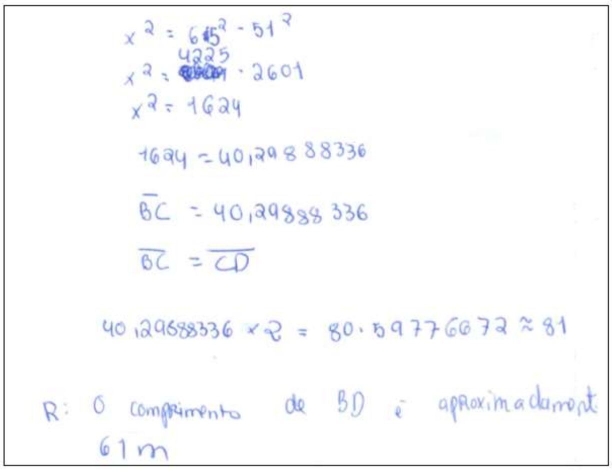


Figura 129 - Resposta da Marta à questão 3 da tarefa 5

Ambas as alunas aplicaram, na resolução da questão 4.a), o conceito de raiz cúbica para determinarem a medida de comprimento da aresta do cubo. Na resposta de ambas, não são apresentadas as unidades de medida de comprimento (figuras 130 e 131).

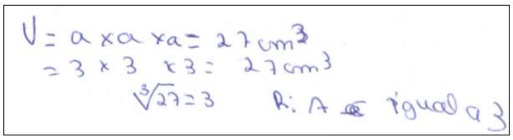


Figura 130 - Resposta da Inês à questão 4.a) da tarefa 5

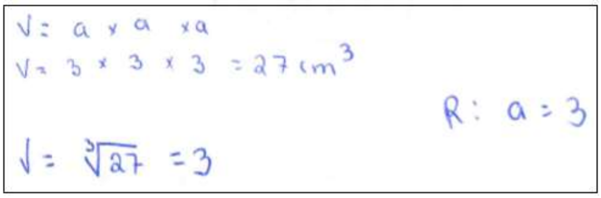

$V = a \times a \times a$
$V = 3 \times 3 \times 3 = 27\,cm^3$
R: $a = 3$
$V = \sqrt[3]{27} = 3$

Figura 131 - Resposta da Marta à questão 4.a) da tarefa 5

Relativamente à alínea b) da questão 4, as alunas não conseguiam perceber de que forma seria possível determinar a distância pedida. Dos seus comentários, percebia-se que tentavam encontrar forma de resolver o problema aplicando o Teorema de Pitágoras. Mas as conclusões a que chegavam recorrentemente era de que faltava alguma informação para o conseguirem. Tentaram por outras vias sem sucesso: procurando triângulos semelhantes, de forma a relacionar as medidas dos comprimentos dos seus lados; relacionando o volume dos dois sólidos dados e até decompondo o paralelepípedo retângulo em outros sólidos. Já algo desanimadas por não estarem a conseguir resolver, colocaram a dúvida:

Marta – *Professora, como é que podemos determinar* $\overline{AJ}$ *se desconhecemos* $\overline{AE}$*? Para aplicar o Teorema de Pitágoras, temos de conhecer dois lados e aqui conhecemos um.*

Professora – *Que medidas de comprimento dos lados conhecem?*

Marta – *Apenas o* $\overline{JE}$*, que mede 1.*

Professora – *E de que forma estão a pensar determinar as medidas em falta?*

Inês e Marta – Quase em simultâneo*: - Com o Teorema de Pitágoras.*

Marta – *Se ao menos conhecêssemos* $\overline{AE}$*…*

Professora – *Observem novamente com atenção a figura e pensem no que acabaram de dizer.*

Foi curioso verificar que as alunas identificaram o triângulo [AEJ] como sendo retângulo, pois era nesse triângulo que estavam a tentar aplicar o Teorema de Pitágoras, quando, regra geral, os alunos não identificam de imediato esse triângulo como sendo retângulo.

As alunas continuaram a tentar descobrir forma de determinar as medidas de comprimento dos lados em falta. Ainda demoraram a concluir que podiam aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo [ABE] e, dessa forma, determinar $\overline{AE}$. Quando o conseguiram, partilharam comigo a sua descoberta, não percebendo como era possível não terem reparado logo nessa situação.

As resoluções apresentadas pelas alunas podem ver-se nas figuras 132 e 133.

Ambas as alunas conseguiram determinar a distância de A a J, sendo que cometeram novamente incorreções do ponto de vista formal.

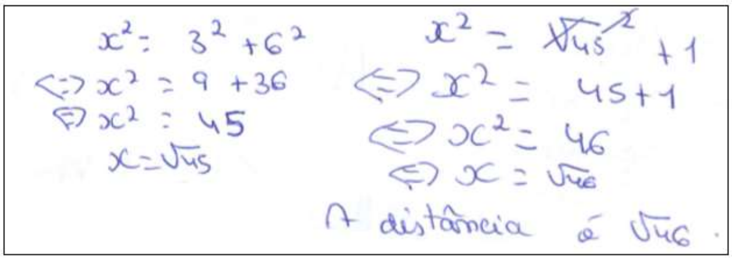

$x^2 = 3^2 + 6^2$
$\Leftrightarrow x^2 = 9 + 36$
$\Leftrightarrow x^2 = 45$
$x = \sqrt{45}$
$x^2 = \cancel{\sqrt{45}}^2 + 1$
$\Leftrightarrow x^2 = 45 + 1$
$\Leftrightarrow x^2 = 46$
$\Leftrightarrow x = \sqrt{46}$
A distância é $\sqrt{46}$.

Figura 132 - Resposta da Inês à questão 4.b) da tarefa 5

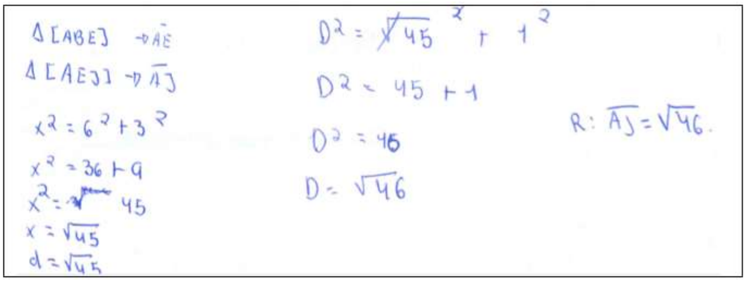

$\Delta[ABE] \rightarrow \overline{AE}$
$\Delta[AEJ] \rightarrow \overline{AJ}$
$x^2 = 6^2 + 3^2$
$x^2 = 36 + 9$
$x^2 = 45$
$x = \sqrt{45}$
$d = \sqrt{45}$
$D^2 = \cancel{\sqrt{45}}^2 + 1^2$
$D^2 = 45 + 1$
$D^2 = 46$
$D = \sqrt{46}$
R: $\overline{AJ} = \sqrt{46}$.

Figura 133 - Resposta da Marta à questão 4.b) da tarefa 5

Relativamente à primeira alínea da quinta questão, as alunas conseguiram, mais uma vez, resolver o problema aplicando o Teorema de Pitágoras, embora cometendo o mesmo tipo de incorreções verificadas nas resoluções anteriores (figuras 134 e 135).

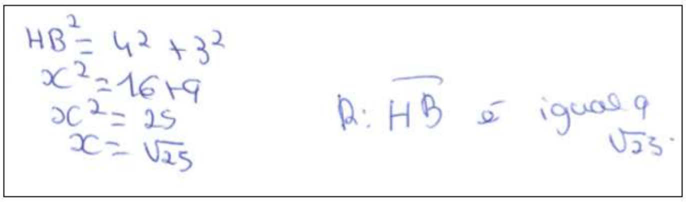

$HB^2 = 4^2 + 3^2$
$x^2 = 16 + 9$
$x^2 = 25$
$x = \sqrt{25}$
R: $\overline{HB}$ é igual a $\sqrt{25}$.

Figura 134 - Resposta da Inês à questão 5.a) da tarefa 5


$HB^2 = 4^2 + 3^2$
$HB^2 = 16 + 9$
$HB^2 = 25$
$HB = \sqrt{25}$
R: $\overline{HB} = \sqrt{25}\,m$

Figura 135 - Resposta da Marta à questão 5.a) da tarefa 5

À semelhança da alínea 4.b), pretendia-se que as alunas aplicassem duas vezes o Teorema de Pitágoras. Desta vez, o par fez rapidamente a analogia a esse problema e apresentou as seguintes resoluções (figuras 136 e 137).

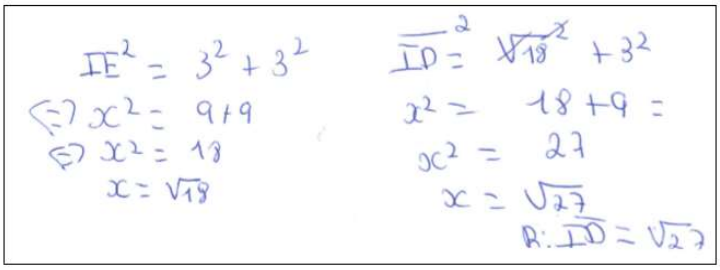


Figura 136 - Resposta da Inês à questão 5.b) da tarefa 5

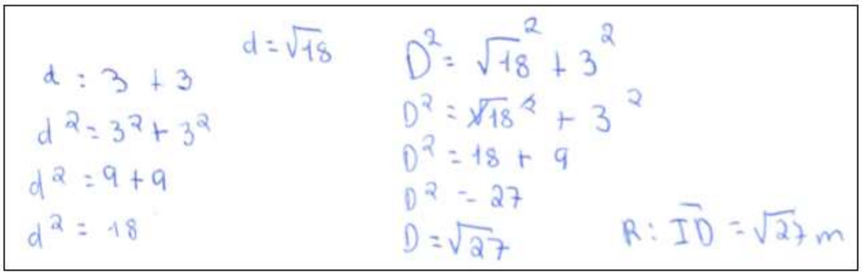


Figura 137 - Resposta da Marta à questão 5.b) da tarefa 5

Quando estavam para iniciar a resolução da última alínea da tarefa, terminou o tempo da aula. As alunas, preocupadas por não terem conseguido concluir, pediram à professora para ficar mais algum tempo. Assim, e já em tempo suplementar, as alunas concluíram a tarefa.

A Inês, na determinação das medidas dos volumes, fez a substituição dos valores corretamente, mas relativamente às unidades, cometeu erros - trocou cm^3 por m^3, e a notação escolhida não é muito feliz, uma vez que utiliza A, em vez de V, para volume (figura 138).

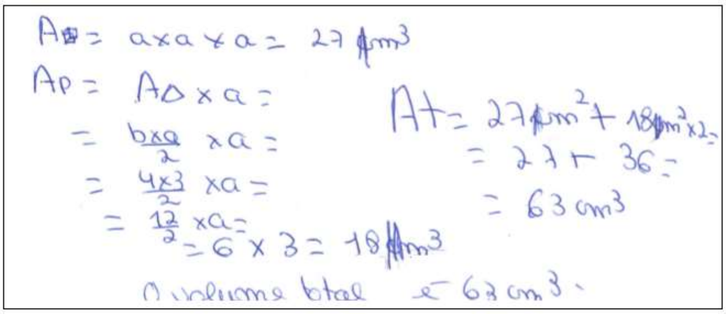


Figura 138 - Resposta da Inês à questão 5.c) da tarefa 5

A Marta apresentou uma resolução correta, teve em atenção as unidades e a notação escolhida (figura 139).

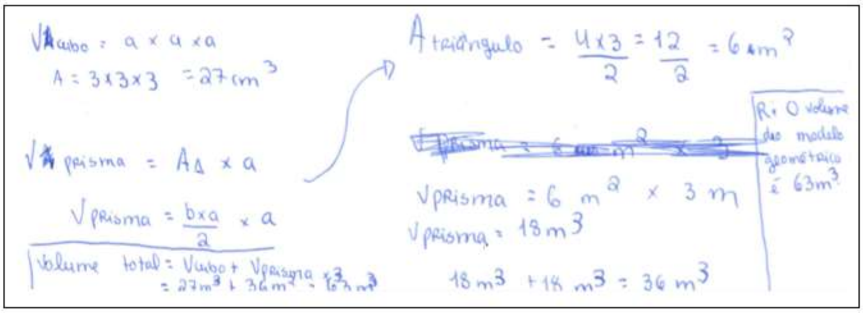


Figura 139 - Resposta da Marta à questão 5.c) da tarefa 5

Ao longo da aula, a professora foi supervisionando o trabalho desenvolvido pelas alunas, constatando que, nas resoluções, de forma recorrente, surgiram erros de natureza formal. Foram, posteriormente, chamadas à atenção para os retificarem e não durante a implementação da tarefa, com o intuito de não as desconcentrar e desfocar dos seus raciocínios.

Tarefa 6

Após o visionamento do vídeo, as alunas Inês e Marta começaram a redigir um problema atendendo às condições mencionadas no enunciado. Optaram por cada uma redigir o seu, trocando ideias entre si.

A Inês elaborou um enunciado muito confuso, sem grande interesse e descontextualizado com o que se pretendia. Se se atender exclusivamente aos dados por ela fornecidos no final do enunciado, é de facto possível determinar a medida de comprimento da diagonal do retângulo conhecendo a medida da largura e a medida do comprimento do mesmo, aplicando o Teorema de Pitágoras (figura 140).

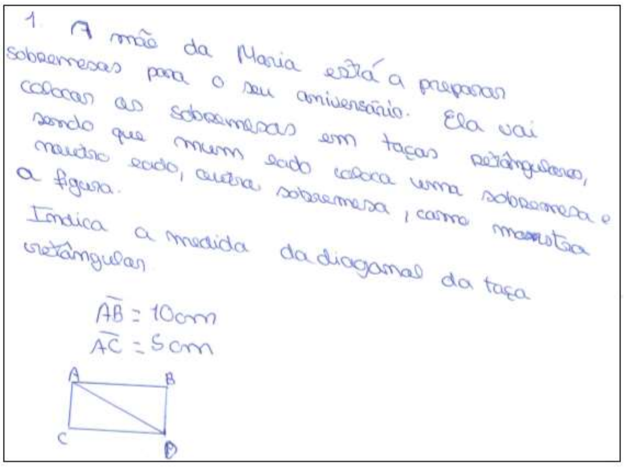


Figura 140 - Resposta da Inês à questão 1 da tarefa 6

Quando o enunciado foi apresentado à turma pela aluna, esta percebeu, aquando da leitura do mesmo, que este não estava claro e, antes que fosse questionada por algum dos seus colegas, explicou-o por palavras suas. Foi percetível que os alunos da turma aceitaram com normalidade um texto confuso. Sem fazerem qualquer reparo ou intervenção, limitaram-se a resolvê-lo atendendo aos dados finais fornecidos no enunciado.

A Marta optou por um contexto diferente e apresentou uma redação ligeiramente mais percetível (figura 141). A resolução do problema é idêntica à relativa ao enunciado apresentado pela Inês, pois há repetição de dados. Na figura apresentada pela aluna, em relação ao retângulo, não houve atenção na indicação das medidas de comprimento, sendo a medida do comprimento menor que a da largura. O enunciado foi também apresentado à turma, no entanto não foi resolvido por se repetirem os dados.

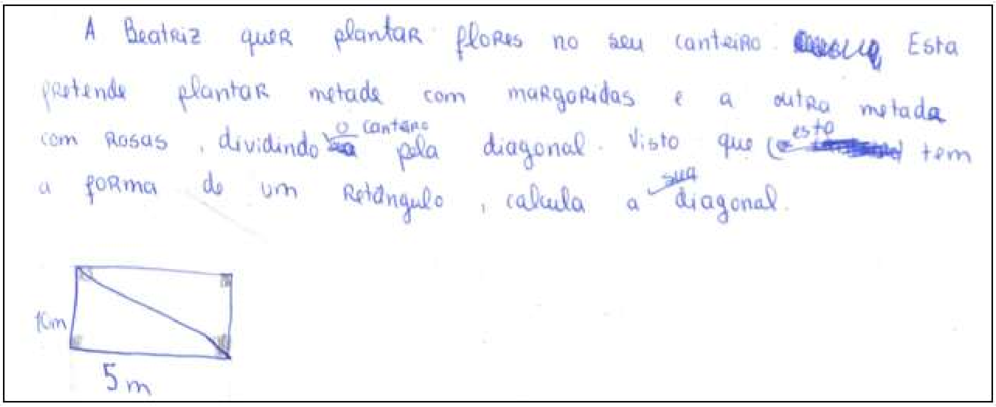
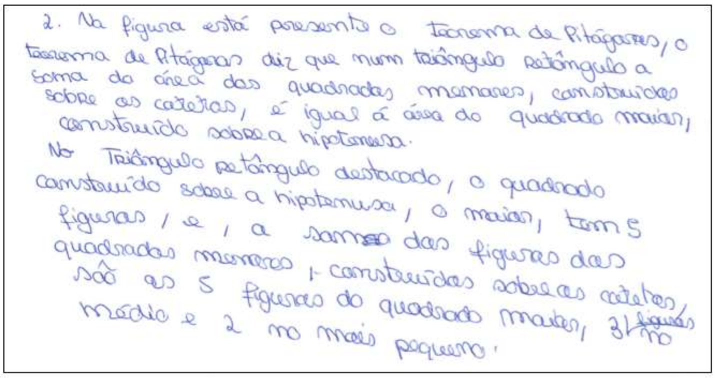


Figura 141 - Resposta da Marta à questão 1 da tarefa 6

Na questão seguinte, as alunas tiveram cerca de quinze minutos para apresentarem um texto onde explicassem de que forma estava presente, na figura fornecida, uma prova geométrica do Teorema de Pitágoras. Ambas as alunas fizeram referência ao enunciado do Teorema de Pitágoras, utilizando a relação existente entre as medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo.

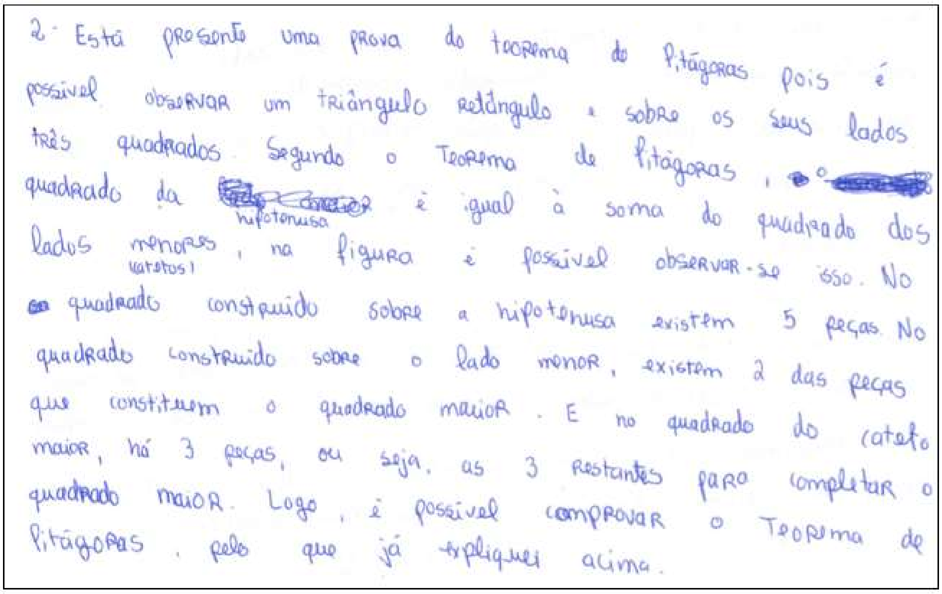
A Inês, após enunciar o teorema, fixou-se no triângulo retângulo destacado a tracejado e comparou as medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os lados. Observou que o quadrado construído sobre a hipotenusa é composto por cinco polígonos, a que chamou figuras, e que esses cinco polígonos, dispostos de forma diferente, compõem os dois quadrados construídos sobre os lados menores, três num quadrado e os outros dois noutro quadrado (figura 142). A aluna usou a decomposição e composição para apresentar a sua justificação, no entanto, no texto que apresentou, não fica muito claro qual a decomposição utilizada, apenas fez referência ao número “de figuras” e não a quais.



2. Na figura está presente o Teorema de Pitágoras, o teorema de Pitágoras diz que num triângulo retângulo a soma da área dos quadrados menores, construídos sobre os catetos, é igual à área do quadrado maior, construído sobre a hipotenusa.
No Triângulo retângulo destacado, o quadrado construído sobre a hipotenusa, o maior, tem 5 figuras, e, a soma das figuras dos quadrados menores, construídas sobre os catetos, são as 5 figuras do quadrado maior, 3 figuras no médio e 2 no mais pequeno.

Figura 142 - Resposta da Inês à questão 2 da tarefa 6

A argumentação apresentada pela Marta é em tudo semelhante à da Inês (figura 143). Fez, de igual forma, referência ao enunciado do Teorema de Pitágoras e apresentou como justificação a decomposição de figuras, também não explicitando quais.



2. Está presente uma prova do teorema de Pitágoras pois é possível observar um triângulo retângulo e sobre os seus lados três quadrados. Segundo o Teorema de Pitágoras, o quadrado da hipotenusa é igual à soma do quadrado dos lados menores (catetos), na figura é possível observar-se isso. No quadrado construído sobre a hipotenusa existem 5 peças. No quadrado construído sobre o lado menor, existem 2 das peças que constituem o quadrado maior. E no quadrado do cateto maior, há 3 peças, ou seja, as 3 restantes para completar o quadrado maior. Logo, é possível comprovar o Teorema de Pitágoras, pelo que já expliquei acima.

Figura 143 - Resposta da Marta à questão 2 da tarefa 6

Este tipo de tarefa, que exigiu das alunas uma comunicação escrita, na forma de um texto explicativo, constituiu um desafio na medida em que as mesmas referiram sentir-se mais confortáveis a resolver problemas de "forma algébrica", ao invés de comunicar desta forma os seus raciocínios. A título de desabafo, a aluna Marta referiu: "*A aula de hoje até parece de Português*, *com todos estes textos, e eu não sou muito boa a Português. Prefiro resolver problemas como na aula passada ou então descobrir coisas novas no GeoGebra*". A Inês continuou: "*Eu até percebo o que pede, mas depois escrever…*". As duas alunas transmitiram a ideia de que, em relação às respostas que deram à tarefa, estas não traduziam na íntegra as suas capacidades, pois sentiam dificuldade em colocar por escrito, através de um texto, os seus raciocínios.

2.1.2. Teste inicial e teste final

Neste ponto, pretende-se fazer uma análise das respostas dadas pelas alunas Inês e Marta no teste inicial e no teste final.

Na primeira questão, a Inês, no teste inicial, apresentou incorreções de simbologia bem como erros na identificação dos catetos e da hipotenusa de um triângulo retângulo (figura 144).

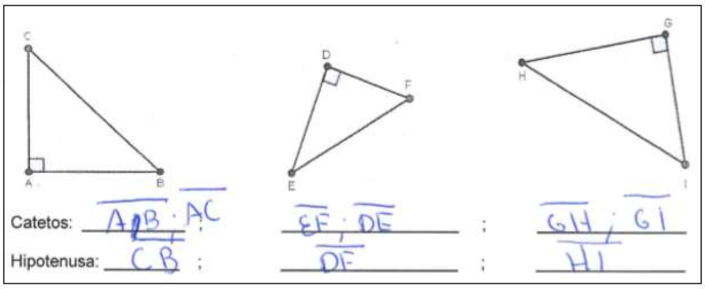


Figura 144 - Resposta da Inês à questão 1. do teste inicial

A Marta soube identificar os catetos e a hipotenusa, mas a simbologia usada está incorreta (figura 145).

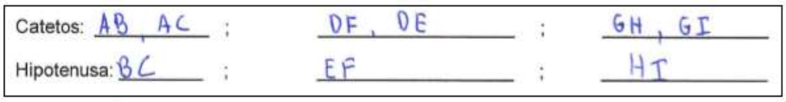


Figura 145 - Resposta da Marta à questão 1. do teste inicial

No teste final, ambas as alunas responderam corretamente.

Relativamente à segunda questão, no teste inicial, a Inês, na alínea a), apresentou uma resolução incorreta, assim como a resposta ao problema (figura 146). A Marta não respondeu a esta questão no teste inicial.

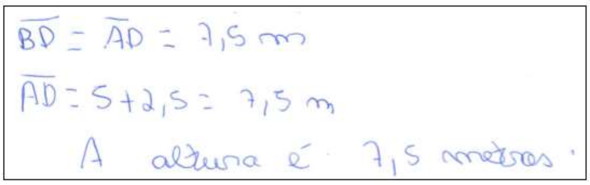


Figura 146 - Resposta da Inês à questão 2.a) do teste inicial

No teste final, ambas as alunas aplicaram o Teorema de Pitágoras, sem lhe fazerem referência na resolução. Pelos cálculos que apresentaram, fizeram a identificação dos catetos e da hipotenusa do triângulo retângulo e estabeleceram a sua relação. A resolução da Inês foi pouco rigorosa e cuidada. Apresentou os cálculos de forma solta, sem justificação e deu uma resposta errada ao problema (figura 147).

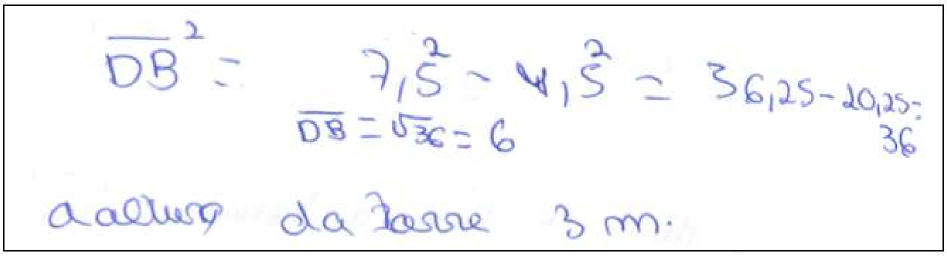


Figura 147 - Resposta da Inês à questão 2.a) do teste final

Na mesma questão, a Marta aplicou o Teorema de Pitágoras, fazendo as substituições das medidas de comprimento pelos valores corretos sem, no entanto, se referir ao teorema e apresentou os cálculos de forma mais cuidada. Na resolução da equação do segundo grau, apenas apresentou uma solução, não fazendo referência à existência de outra solução que, no contexto deste problema, não faz sentido. Respondeu corretamente à questão, embora com algumas imprecisões na sua resolução (figura 148).

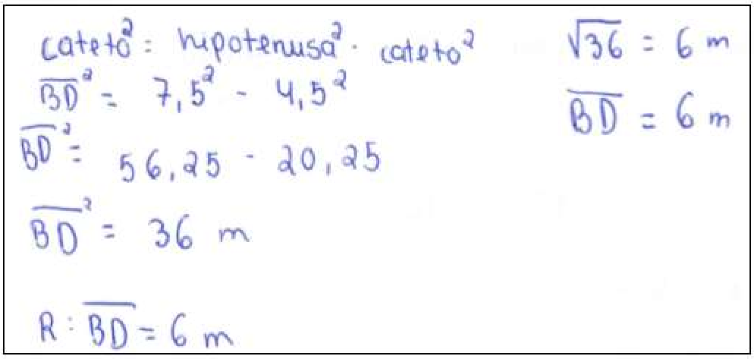


Figura 148 - Resposta da Marta à questão 2.a) do teste final

Na segunda alínea do problema, para determinar a altura do abrigo, a Inês respondeu incorretamente no teste inicial (figura 149) e a Marta deixou a mesma questão por fazer no teste inicial.

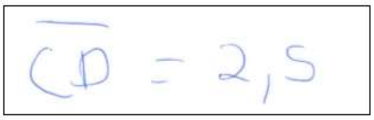


Figura 149 - Resposta da Inês à questão 2.b) do teste inicial

No teste final, a opção de resolução escolhida por ambas as alunas foi a aplicação do Teorema de Pitágoras.

A Inês apresentou uma resolução semelhante à da alínea anterior dada no teste final, pouco rigorosa, não contextualizando os cálculos, não apresentando as duas soluções da equação do segundo grau e apresentando uma resposta ao problema que diverge dos cálculos efetuados (figura 150).

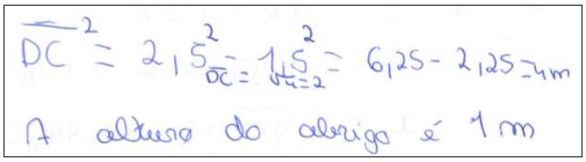


Figura 150 - Resposta da Inês à questão 2.b) do teste final

A Marta apesar de ter determinado corretamente a altura do abrigo, não apresentou novamente a outra solução da equação do segundo grau, não colocou o símbolo " ⟺ " entre equações equivalentes e não explicou/justificou de onde surgiu a equação (figura 151).

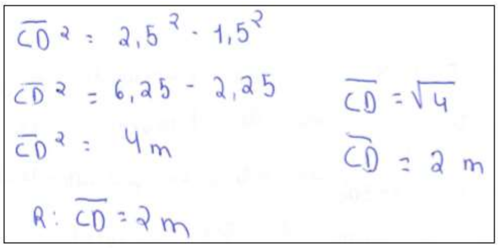


Figura 151 - Resposta da Marta à questão 2.b) do teste final

Na terceira questão no teste inicial, a Inês conseguiu determinar o tempo de parte de um dos percursos correspondente a 24 metros. Determinou, também, o tempo que demora a percorrer 20 metros mas, no contexto do problema, não faz sentido pois nenhum dos trajetos contempla essa distância. A resposta que deu ao problema está incorreta (figura 152).

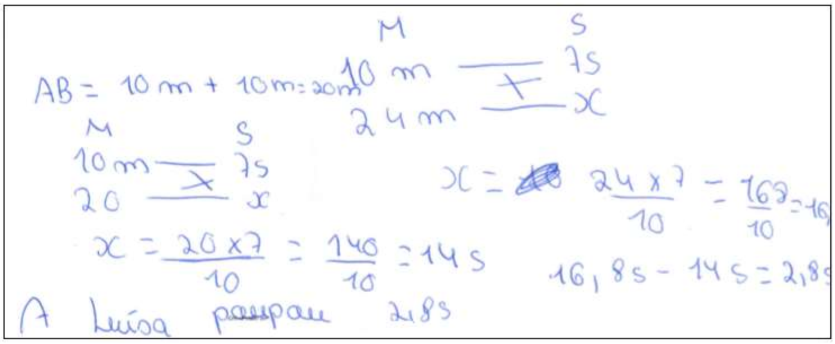


Figura 152 - Resposta da Inês à questão 3. do teste inicial

Relativamente à terceira questão, a Marta, no teste inicial, conseguiu determinar o tempo de parte de um dos percursos, correspondente a 24 metros. Tal como a Inês, nesse percurso, não considerou a parte do percurso relativa à passagem na passadeira (figura 153).

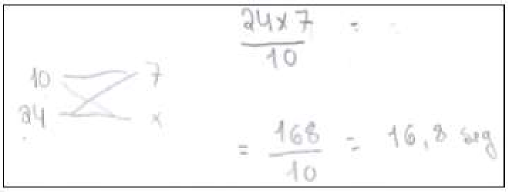


Figura 153 - Resposta da Marta à questão 3. do teste inicial

No teste final, na terceira questão, a Inês, apesar de ter dado uma resposta correta, não apresentou todos os cálculos que a sustentavam. Não apresentou justificação para o tempo (23,8 segundos) que demora a percorrer o maior trajeto, os 34 metros (figura 154).

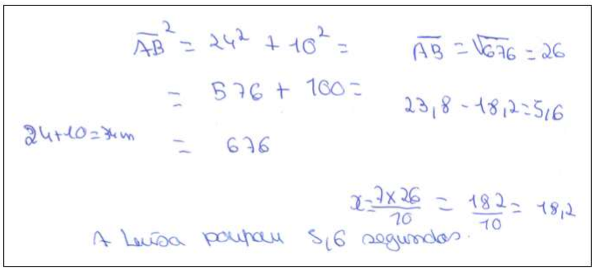


Figura 154 - Resposta da Inês à questão 3. do teste final

Na mesma questão, a Marta, no teste final, apresentou, de forma organizada, o seu raciocínio e deu a resposta correta ao problema. É de referir que continuou a apresentar erros de natureza formal ao nível da resolução de equações do segundo grau.

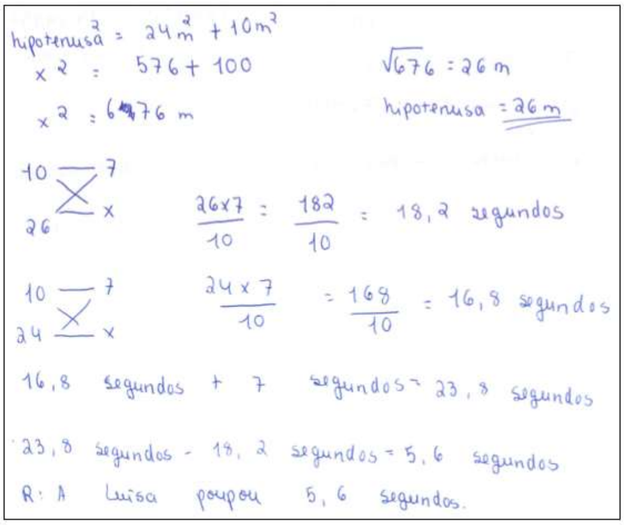


Figura 155 - Resposta da Marta à questão 3. do teste final

Relativamente à quarta questão, no teste inicial, apenas a Marta respondeu, ainda que de forma incorreta (figura 156). O argumento que sustenta a resposta não é válido, nem sequer é fundamentado.

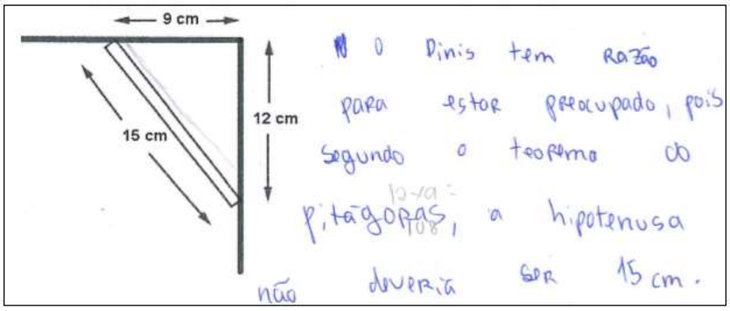


Figura 156 - Resposta da Marta à questão 4. do teste inicial

Na mesma questão, no teste final, a Inês aplicou o Recíproco do Teorema de Pitágoras sem lhe ter feito referência. A conclusão que tirou está correta (figura 157).

$15^2 \overset{?}{=} 9^2 + 12^2$

$225 \overset{?}{=} 81 + 144$

$225 = 225$

O Dinis não tem de estar preocupado, porque as paredes estão perpendiculares.

Figura 157 - Resposta da Inês à questão 4. do teste final

A Marta mencionou e aplicou corretamente o Recíproco do Teorema de Pitágoras e respondeu corretamente (figura 158).

$15^2 = 9^2 + 12^2$

$225 = 81 + 144$

$225 = 225$

O Dinis não tem razão para estar preocupado, pois recorrendo ao recíproco do teorema de Pitágoras, as paredes do seu quarto são perpendiculares. O quadrado da hipotenusa é igual à soma do quadrado dos catetos.

Figura 158 - Resposta da Marta à questão 4. do teste final

No que se refere à quinta questão, apenas a Inês apresentou uma resposta no teste inicial, ainda que incorreta (figura 159).

420 Km + 270 Km =
690 Km

Figura 159 - Resposta da Inês à questão 5. do teste inicial

No teste final, na quinta questão, as alunas apresentaram justificações válidas e responderam corretamente, ainda que, formalmente, pudessem ter tido mais cuidado (figuras 160 e 161).

Lisboa → Madrid = Porto - Madrid + Porto-Lisboa-

$\Leftrightarrow x^2 = 420^2 + 270^2 =$

$\Leftrightarrow x^2 = 176400 + 72\,900 =$

$\Leftrightarrow x^2 = 249\,300$

$x = \sqrt{249300} = 499,299... \approx 499,3$ km

A distância de Lisboa a Madrid é 499,3 km.

Figura 160 - Resposta da Inês à questão 5. do teste final

$\text{hipotenusa}^2 = \text{cateto}^2 + \text{cateto}^2$ $\sqrt{249300} = 499,2995093$

$\approx 499,3$ Km

$\text{hipotenusa}^2 = 270^2 + 420^2$

$\text{hipotenusa}^2 = 729\,00 + 176400$

$\text{hipotenusa}^2 = 249\,300$ Km

R: A distância entre Lisboa e Madrid é aproximadamente 499,3 Km

Figura 161 - Resposta da Marta à questão 5. do teste final

No teste inicial, na sexta questão, as alunas, em par, fizeram a construção no GeoGebra, ainda que de forma incompleta, pois não apresentaram todas as amplitudes dos ângulos internos dos triângulos (figura 162).

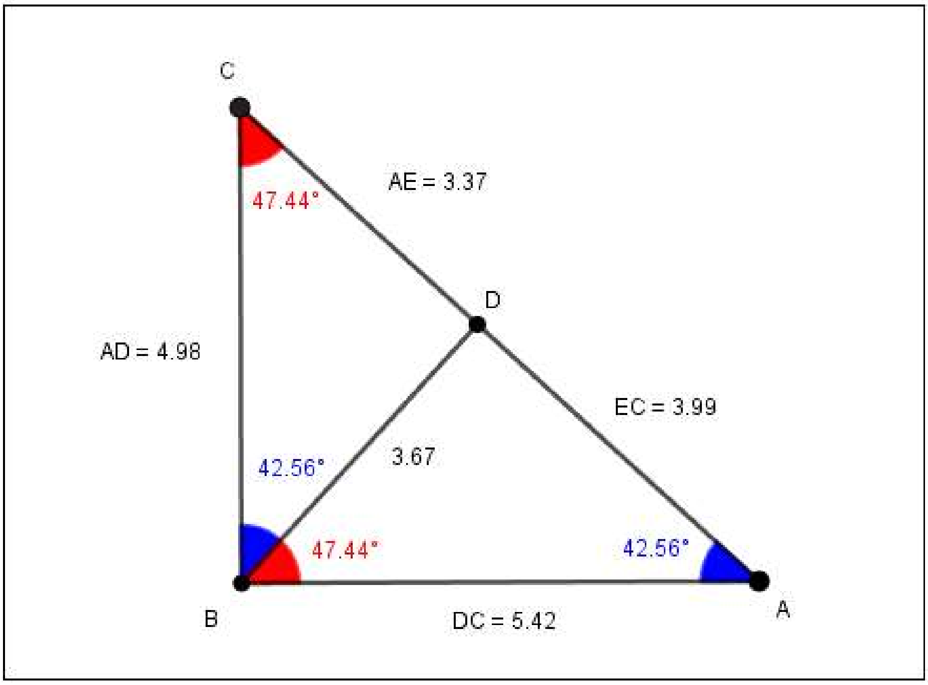


Figura 162 – Construção no GeoGebra das alunas Inês e Marta do teste inicial

Relativamente à primeira alínea da sexta questão do teste inicial, as alunas identificaram a relação existentes entre os três triângulos. Como justificação, apenas referiram o critério, não o explicitando neste contexto (figura 163).

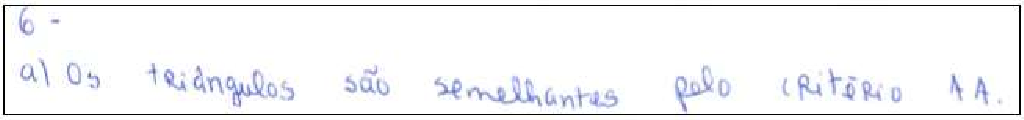

6 -
a) Os triângulos são semelhantes pelo critério AA.

Figura 163 - Resposta das alunas Inês e Marta à questão 6.a) do teste inicial

Ainda no teste inicial, na alínea seguinte, observa-se, na construção efetuada, que, apesar das medidas de comprimento dos lados dos triângulos estarem representadas na figura, surgem incorreções de notação relativamente aos pontos, que não foram corrigidas pelas alunas, no GeoGebra.

No teste final, de forma célere e rigorosa, as alunas procederam à construção no GeoGebra, seguindo as orientações dadas ao longo de toda a tarefa. As respostas dadas pelas alunas estão apresentadas ao lado da construção (figura 164). Esta opção agilizou a consecução da tarefa.

Na primeira alínea, tal como no teste inicial, as alunas observaram a relação de semelhança existente entre os três triângulos e referiram o critério de semelhança de triângulos que lhes permite tirar essa conclusão, no entanto, a justificação não é muito clara, "têm os ângulos iguais", não especificam quais nem de que triângulos, apesar de ser facilmente observável na figura construída.

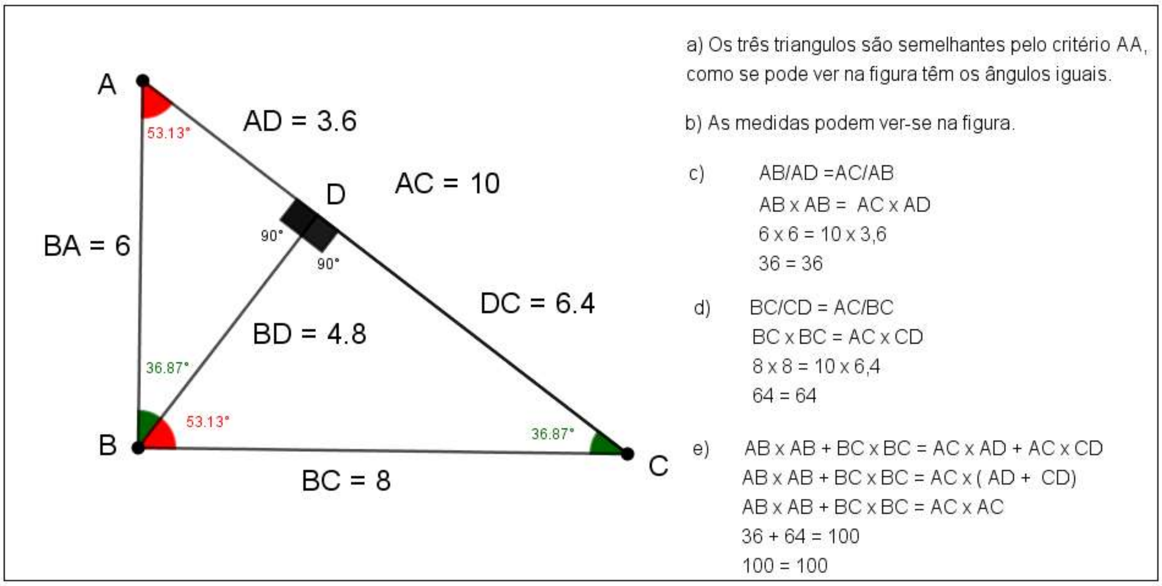


Figura 164 - Respostas das alunas Inês e Marta à questão 6 do teste final

Na resposta à alínea b), observável na construção, verifica-se que estão indicadas todas as medidas de comprimento dos lados dos triângulos e houve o cuidado de mencionar corretamente os pontos que são utilizados para mencionar os comprimentos, o que não aconteceu no teste inicial.

As alunas, nas duas alíneas seguintes, c) e d), estabeleceram corretamente as relações entre os lados correspondentes de triângulos semelhantes. As substituições pelos valores da figura também foram corretamente efetuadas.

O par, em aulas anteriores, já tinha manifestado a sua preferência por justificações algébricas e, nesta última alínea, confirmou-se esta apetência. As alunas apresentaram corretamente o raciocínio que lhes permitiu inferir o Teorema de Pitágoras. É curioso verificar que, após esta prova do Teorema de Pitágoras, as alunas substituíram as medidas dos comprimentos dos lados na igualdade obtida (36 + 64 = 100), avaliando a plausibilidade, ainda que de um caso particular, da conclusão que tinham tirado. Embora se verifique que a simbologia apresentada pelas alunas para representar o comprimento de um segmento esteja incorreta, induzidas talvez pelo próprio programa que assim o representa, a falta de sinais de equivalente e o facto de não referirem, textualmente, que demonstraram o Teorema de Pitágoras a partir das alíneas anteriores, a sequência dos argumentos apresentados está correta. Conseguiram, relativamente à primeira igualdade, estabelecer uma relação entre as duas alíneas anteriores e, nas igualdades seguintes, mobilizaram corretamente procedimentos matemáticos de natureza algébrica.

Na tabela 7, mostram-se os resultados comparativos, para as alunas Inês e Marta, no teste inicial e teste final.

Questões	Cotação	**Inês**		**Marta**	
		Teste inicial	Teste final	Teste inicial	Teste final
1.	6	5	6	5	6
2. a)	7	0	4	0	5
2. b)	7	0	4	0	5
3.	10	2	7	2	9
4.	10	0	8	0	10
5.	10	0	9	0	9
6. a)	10	6	7	6	7
6. b)	10	9	10	9	10
6. c)	10	0	9	0	9
6. d)	10	0	9	0	9
6. e)	10	0	8	0	8
Totais		22	**81**	22	**87**

Tabela 7 - Resultados comparativos das alunas Inês e Marta no teste inicial e no teste final

No início da abordagem ao conteúdo "Teorema de Pitágoras", as alunas Inês e Marta revelaram desconhecer o teorema, bem como as suas aplicações pois, no teste inicial, as suas respostas ou a ausência delas assim o indicia. Também foi possível observar que, apesar de já estarem familiarizadas com o programa GeoGebra, no teste inicial, na segunda parte deste, grande parte do tempo foi despendida na construção que era pedida, facto que se alterou no teste final. As alunas, de forma mais célere e expedita, fizeram a construção e conseguiram organizar-se de forma a terminar a tarefa dentro do tempo estipulado e com bastante sucesso.

Após a abordagem implementada, no teste final, cujas questões incidiram sobre a apropriação e aplicação do Teorema de Pitágoras, na aplicação do Recíproco do teorema e numa prova do teorema baseada na semelhança de triângulos, foi notório o bom desempenho que manifestaram aquando da realização do mesmo, facto esse observável na qualidade das suas produções escritas. As alunas parecem ter usufruído de forma bastante positiva desta abordagem, constatando-se uma evolução muito relevante ao nível dos conhecimentos e capacidades matemáticas relacionados com o tópico em questão. No início deste estudo, apresentavam um aproveitamento bastante satisfatório na disciplina, que conseguiram manter. Salienta-se a aluna Marta que ficou próximo de um aproveitamento muito bom.

2.2. Gosto e atitude perante disciplina

Na fase inicial deste estudo, ambas as alunas Inês e Marta, aquando do preenchimento do Questionário, em relação às opções: “Gosto de Matemática”, “Gosto de Geometria” e “A Geometria é útil”, ambas responderam “Concordo totalmente”. No início do estudo, as alunas já revelavam gosto pela disciplina e possuíam caraterísticas que se mostraram uma mais valia neste tipo de abordagem, tais como interesse, empenho, organização e persistência.

Ao longo da implementação do estudo, essas caraterísticas sofreram uma evolução positiva - revelaram mais ousadia na sua forma de estar e tornaram-se mais confiantes pois foram, por exemplo, deixando de questionar recorrentemente se o que estavam a fazer era o correto. O facto de terem trabalhado em par, permitiu fomentar situações de confronto de ideias, tendo de argumentar para defender as suas e, por outro lado, ouvir e tentar perceber as do seu par. Esta partilha fortaleceu, ainda mais, a relação de ambas as alunas e estimulou, em cada uma delas, vontade de melhorar. Exemplo disso foi o facto de terem comparecido à aula de apoio, por sua iniciativa, após lhes ter sido colocado, já próximo do final de uma aula, um desafio, que não resolveram e que consistia numa prova de um caso particular da generalização de Polya.

De forma algo curiosa, no final de cada aula, pareciam querer um parecer da professora em relação ao seu desempenho, mas sem questioná-lo diretamente. Não raras vezes, interpelavam com a questão: “*Hoje a aula correu bem, não correu?*”. Denota-se que as alunas apresentavam preocupação pela forma como tinham estado durante a aula, procurando um feedback no sentido de melhorarem. Foi-lhes também caraterístico mencionar, de forma perfeitamente genuína, ao receberem uma tarefa, se esta era do seu agrado e ia ao encontro das expetativas que tinham para essa aula. Percebeu-se que, só num ambiente em que os alunos se sentem confortáveis e à vontade, tais comentários poderão surgir. Foi percetível e transmitido por ambas, no decorrer das aulas, a sua preferência por provas algébricas, ao invés de geométricas, as suas dificuldades em redigir por palavras os seus raciocínios, preferindo linguagem matemática, e a dificuldade que tiveram na construção com instrumentos de medida e desenho, principalmente a aluna Inês.

Quando questionadas sobre a forma como decorreu a sua aprendizagem em relação ao conteúdo "Teorema de Pitágoras", a Inês referiu: "*Já tinha ouvido falar de Pitágoras e gostei muito de todas as aulas. Aprendi muito, só com um resultado e tantas aplicações.*" (Diário de Bordo, 21/11/2019) e a Marta respondeu: "*Acho que fiquei com bons conhecimentos do teorema, talvez pela diversidade de atividades, e, o trabalho em pares principalmente no GeoGebra.*" (Diário de Bordo, 21/11/2019). No Questionário aplicado no início do estudo, a Inês considerava não ser necessário ser criativo em Geometria, no entanto, no final da implementação didática, fez referência às diversas aplicações do teorema, reconhecendo, de alguma forma, a necessidade de ser criativo na busca das múltiplas aplicações. No mesmo Questionário, a Marta tinha uma visão mais lata, pois referia que, para um ensino criativo, se poderiam utilizar tecnologias, tais como telemóvel e computador, trabalho de grupo e situações do dia-a-dia, ideias que saem, de alguma forma, reforçadas pela sua resposta no final do estudo.

Pelo envolvimento que as caraterizou na implementação da sequência didática e pelo feedback que as alunas davam de forma recorrente, foi bastante positivo este tipo de abordagem, com consequências muito positivas neste par, não só pelas competências atingidas, mas também, pela boa energia que traziam para as aulas e como nelas interagiam e participavam.

CAPÍTULO IV

PRINCIPAIS CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E REFLEXÕES

Este capítulo encontra-se dividido em três secções. Na primeira, exponho sucintamente as conclusões e implicações do estudo, tendo em conta os objetivos e a questão formulada, na segunda, as limitações e constrangimentos deste estudo e, por fim, as considerações finais.

1. Conclusões e implicações do estudo

Recorde-se que este estudo teve como principais objetivos analisar se uma abordagem criativa do Teorema de Pitágoras, consubstanciada por uma sequência de tarefas desafiantes, estabelecendo conexões várias, e cuja resolução foi mediada por ferramentas tecnológicas, no âmbito de um ensino assente numa aprendizagem exploratória, favorece uma mais sólida apropriação e aplicação do Teorema de Pitágoras, dando particular enfoque ao raciocínio, à resolução de problemas e à comunicação e ao gosto e atitude face à disciplina.

As opções metodológicas adotadas neste estudo, um estudo de casos múltiplos, de natureza qualitativa e interpretativa, não permitem a generalização dos resultados, a não ser a um nível teórico.

A recolha de dados foi efetuada numa turma do 8.º ano de escolaridade e a análise incidiu em dois grupos de dois elementos. A preparação e implementação deste estudo seguiram as orientações curriculares, espelhadas no Programa de Matemática do Ensino Básico (2013) e os documentos mais recentes e complementares do PMEB - as Aprendizagens Essenciais (2018), o Perfil do Aluno à Saída da Escolaridade Obrigatória (2017) e literatura da especialidade. Na planificação da sequência didática, também foram tidas em conta as orientações e a planificação em vigor na escola, de forma a que este trabalho se enquadrasse no decurso normal das atividades escolares.

A realização deste estudo teve por base um Questionário e a implementação de uma sequência didática composta por um teste inicial, seis tarefas e um teste final. Propuseram-se tarefas diversificadas, cuja resolução permitia efetuar diferentes provas do Teorema de Pitágoras assim como aplicações várias, em diferentes contextos. Com o uso de um programa de geometria dinâmica, neste caso, o GeoGebra, pretendia-se, designadamente, uma aprendizagem exploratória mais sólida e significativa dos vários desafios propostos aos alunos. Esta ferramenta tem um grande potencial na resolução gráfica de problemas, permitindo aos alunos múltiplas abordagens. É de notar que as alunas em causa já estavam familiarizadas com o programa, o que fez com que o seu principal foco fosse a resolução das tarefas e não a adaptação e aprendizagem do mesmo. Como complemento às construções efetuadas com recurso ao GeoGebra, as alunas fizeram uma construção com recurso a instrumentos de medida e desenho, em articulação com a disciplina de Educação Visual, na qual apresentaram notoriamente mais dificuldades.

As alunas trabalharam de forma colaborativa, partilharam recorrentemente os seus conhecimentos e descobertas, principalmente com o seu par. Foram várias as ocasiões em que surgiram diferentes opiniões, em que tinham de argumentar para fazer valer o seu ponto de vista, tendo algumas destas discussões sido mediadas pela professora. Esses momentos serviram para promover nas alunas motivação para resolver as tarefas e partilhar estratégias. De um modo geral, foram bastante autónomas na realização das atividades propostas, solicitando apenas o auxílio da professora depois de terem analisado e discutido a tarefa e não terem conseguido avançar mais.

O papel da professora na implementação das tarefas foi pautado mais pela orientação das mesmas, não interferindo nas descobertas e produções das alunas, mas promovendo o diálogo de modo a auxiliar as alunas a explicitar os seus raciocínios.

Da análise das produções dos casos, da observação direta e da inquirição verificou-se que o desenvolvimento de conhecimentos e capacidades não foi igual para os dois pares envolvidos. O primeiro par revelou mais dificuldades em delinear estratégias e a concretizá-las, o que foi notório pelos resultados obtidos no teste final quando comparados com os do outro par. De um modo geral, os pares apropriaram-se das aprendizagens essenciais envolvidas nas tarefas. Foi possível observar, em ambos os pares, a dificuldade sentida no desenvolvimento de algumas tarefas de caráter mais aberto, inicialmente, na sua interpretação e, posteriormente, na elaboração de argumentos válidos e lógicos para fundamentar as suas respostas. Envolveram-se em provas, de forma recorrente, na sequência didática, produzindo raciocínios geométricos e raciocínios algébricos. Neste ponto, o primeiro par apresentou mais dificuldade ao nível das provas algébricas solicitando, mais recorrentemente, a intervenção da professora.

Em relação à resolução de problemas, ambas as alunas do primeiro par apresentavam, antes da implementação da sequência didática, dificuldades na consecução dos mesmos quando estes envolviam um número significativo de conexões intra e inter Matemática e, durante a implementação das tarefas, essas dificuldades, ainda que presentes, foram sendo ultrapassadas com o diálogo estabelecido entre o par e com algumas intervenções solicitadas à professora.

Geralmente, nas suas produções escritas ou intervenções orais, o raciocínio não era por elas muito valorizado pois, com alguma frequência, não apresentavam razoabilidade e logicidade nas suas conclusões e, durante a implementação das tarefas, as alunas foram procurando que os seus registos transparecessem a totalidade da informação que o par discutia na tentativa de superar tais lacunas, ainda que em momentos pontuais. Ao nível da comunicação, a Beatriz mostrou-se mais participativa do que o habitual, quer com o seu par, quer com a professora, mostrando-se mais segura das suas afirmações e pedindo esclarecimentos mais frequentemente. Ao nível da comunicação escrita, ambas as alunas revelaram dificuldades em transmitir os seus raciocínios quando lhes era pedido um texto. Pode-se observar que a comunicação oral era geralmente mais completa que a comunicação apresentada por escrito.

Em relação à resolução de problemas, a Inês e a Marta, antes da implementação do estudo, mostravam-se sempre bastante persistentes e empenhadas na sua consecução, caraterísticas que se mantiveram ao longo do estudo. Na resolução dos problemas apresentados ao longo da sequência didática, as alunas, em par, apresentaram uma boa evolução. Salientam-se situações onde pairaram mais dúvidas e onde a concretização das tarefas não foi tão bem sucedida - a construção da Inês com material de desenho e lápis, da demonstração de Perigal; a redação de um enunciado de um problema cuja resolução envolvesse o Teorema de Pitágoras e a explicação textual, de ambas as alunas, da prova do Teorema de Pitágoras a partir de um padrão. A Inês, no início do estudo, apresentava preferência por exercícios, de forma a sentir-se segura, sendo que, com esta abordagem exploratória, saiu da sua zona de conforto, com a implementação de tarefas desafiantes às quais a aluna reagiu bem, aumentando-lhe a autoconfiança. Nas produções escritas ou intervenções orais, ambas as alunas continuaram a manter o cuidado com o raciocínio apresentado, procurando fundamentá-lo. No entanto, a este nível, continuou-se a detetar lacunas ao nível do encadeamento lógico da argumentação. Ao nível da comunicação, ambas as alunas tinham melhor desempenho na apresentação dos seus raciocínios através da oralidade, visto que, tal como o primeiro par, nem sempre registavam a totalidade dos argumentos, bem como justificações, nas suas produções escritas.

Nesta abordagem, genericamente, foi possível as alunas efetuarem as suas aprendizagens matemáticas, analisando um problema de diferentes formas, estabelecendo relações e conexões, evidenciando a capacidade de raciocinar matematicamente. Na resolução de problemas, construíram argumentos matemáticos e raciocínios lógicos, como forma de justificar as suas conclusões.

As alunas, ao estabelecerem relações, conexões, entre o problema e o seu contexto, não se limitaram a aplicar procedimentos matemáticos, conseguiram percecionar o que estavam a investigar colocando, posteriormente, em prática noutros desafios.

Nas produções que apresentaram, conseguiram seguir um procedimento que lhes permitiu, na generalidade das tarefas, concretizar a resolução de problemas. No que respeita ao primeiro momento da resolução de um problema, apresentado por Polya, a compreensão do problema, as alunas beneficiaram do facto de estarem a trabalhar em pares, podendo discutir, entre eles, o que estava a ser pedido. Em relação ao segundo momento, de conceção do plano, voltavam recorrentemente ao primeiro momento, o da compreensão do problema, e iam articulando com o terceiro momento, a execução do plano. No que concerne a esta etapa, não raras vezes, as alunas iam estabelecendo pontes com aprendizagens anteriores relativas ao conteúdo em questão. No último momento, a avaliação do trabalho desenvolvido, foi notória uma atenção crescente dada pelas alunas às conclusões a que chegavam, mais ao nível da oralidade. Ao longo da implementação da sequência didática, foram-se tornando mais críticas e atentas às exigências das tarefas. No entanto, foram evidentes as dificuldades ao nível da expressão escrita através de textos como forma de justificar os seus raciocínios, procedimentos e conclusões. No recurso ao vocabulário e linguagem próprios da Geometria e da Matemática, em geral, foram recorrentes os erros de natureza formal, ainda que frequentemente corrigidos.

As alunas, ao receberem a tarefa, envolviam-se na sua realização de forma bastante autónoma, em parte devido ao facto de terem trabalhado em pares. O trabalho de pares favoreceu confiança nas suas capacidades e conhecimentos matemáticos e promoveu a capacidade de análise do próprio trabalho, bem como do par envolvido, regulando as aprendizagens. Foi notório o envolvimento crescente nas tarefas, traduzidos no entusiasmo e desempenho, sentindo-se orgulhosas pela concretização das mesmas manifestando um elevado grau de autoconfiança e autonomia. Houve também mobilização de conhecimentos intra e inter Matemática, que ajudou a valorizar o gosto pela disciplina.

Através desta metodologia, num ambiente favorável à aprendizagem, valorizando-se o envolvimento das alunas, estas puderam aplicar e apropriar-se de conhecimentos matemáticos desenvolvendo competências tais como o raciocínio, a resolução de problemas e a comunicação. Perceberam que a aprendizagem vai para além de saber conceitos e procedimentos, envolvendo procura, análise e reflexão conduzindo à descoberta de relações.

O papel que a professora exerceu promoveu nas alunas uma atitude de reflexão, permitindo-lhes explorar, investigar, concretizar e produzir as suas próprias experiências, favorecendo o desenvolvimento de competências.

Com este estudo, foi possível à professora/investigadora refletir e analisar a sua prática pedagógica e encontrar oportunidades de mudança e inovação proporcionando às alunas mais e melhores momentos de exploração e investigação de situações que promovam o desenvolvimento de competências.

2. Limitações e constrangimentos

Ao longo do estudo, foram sendo apontados vários fatores positivos, no entanto, importa referir, de uma forma objetiva, todos os fatores que constituíram limitações ou constrangimentos ao desenvolvimento do próprio estudo.

Um primeiro aspeto condicionante a apontar é o facto de ser o primeiro estudo, mais formal, realizado pela investigadora, o que acarretou muito tempo para se apropriar de como elaborar essa mesma investigação e para a preparar. Mesmo assim, considera-se que esta poderia ter sido mais ambiciosa, desde logo ao nível da elaboração das tarefas propostas, de forma a permitir às alunas ainda mais margem criativa na resolução das mesmas. Houve, da parte da investigadora, alguma cautela e dificuldade em se distanciar da avaliação nacional a que os alunos estão sujeitos no final de ano e no final de ciclo, fazendo com que, parte das tarefas que compõem a sua sequência didática, tivessem uma estrutura semelhante à dos exames nacionais. A simultaneidade das funções de professora e investigadora poderá ter ocasionado que algumas situações dignas de registo não fossem devidamente percecionadas e outras não tivessem sido mais exploradas. No final do estudo, deveria ter sido implementado um Questionário final, de forma, a inquirir as alunas de maneira mais detalhada e formal, permitindo analisar melhor a sua perceção sobre este tipo de abordagem, e, o impacto que esta teve ao nível do gosto e atitudes perante a Matemática e a Geometria em particular.

A falta de condições existentes na sala disponível para os alunos da turma também foi uma limitação, pois nem todos os computadores estavam operacionais. Por vezes, desligavam, fazendo com que os alunos ficassem sem os trabalhos ou parte deles e havia constantemente falhas na rede, o que dificultou, por exemplo, o envio das produções digitais dos alunos.

Apesar do estudo incidir em dois pares de alunas, a investigadora teve de acompanhar, ao longo de todo o processo, vinte alunos, sendo que três estavam abrangidos pelas medidas previstas no Decreto-Lei n.º 54/2018, de 06 de julho: Medidas Universais e Medidas Seletivas e adequações ao processo de avaliação, necessitando de um apoio mais individualizado.

3. Reflexões finais

A investigação desenvolvida foi motivada pelo interesse da investigadora em implementar uma abordagem criativa que procurasse um maior envolvimento dos alunos com a disciplina de Matemática. Com esta investigação, foi possível a implementação de uma tal abordagem, permitindo uma aprendizagem ativa e exploratória, estabelecendo conexões intra e inter Matemática e com o auxílio de ferramentas tecnológicas.

Relativamente às várias conexões que foram estabelecidas, apesar de não ser possível quantificar, fica a perceção de contribuírem para o desenvolvimento de competências, tais como, a resolução de problemas, raciocínio e comunicação, e, de uma atitude mais favorável para com a disciplina. Os benefícios alcançados na aprendizagem dos alunos numa lógica de interdisciplinaridade, em particular, com a disciplina de Educação Visual, segundo Amaral (2015), potenciam a aplicação e apropriação de conhecimentos geométricos e contribuem para o desenvolvimento da criatividade dos alunos e de atitudes favoráveis em relação à Matemática.

O recurso a ambientes dinâmicos de geometria dinâmica, neste caso o GeoGebra, permitiu aos alunos, de forma mais rápida e eficiente, experimentar, investigar, descobrir, sustentar ou refutar conjeturas. O ambiente sentido nas sessões, com recurso ao GeoGebra, promoveu nos alunos um maior envolvimento na realização das tarefas, facilitando a aprendizagem, como indicam estudos já efetuados, por exemplo, por Coelho (2013), Gaspar (2013) e Amaral (2015).

Da análise feita, pode-se aferir, pelos resultados obtidos, o contributo positivo nas aprendizagens dos alunos. Esta abordagem permitiu criar condições de aprendizagem, baseadas em experiências colaborativas, contribuindo para manter os alunos mais focados e empenhados nas tarefas, trazendo claros benefícios no desenvolvimento do raciocínio, na resolução de problemas e na comunicação.

Resulta desta investigação que abordagens de ensino mais criativas deveriam ser mais recorrentes na prática docente, pela forma como os alunos se envolveram e dedicaram à intervenção didática e pelas competências por eles desenvolvidas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Referências bibliográficas

Abrantes, P. (1994). O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática: A experiência do projecto MAT789. *(Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa)*.

Amado, J. (2017). Manual de Investigação Qualitativa em Educação 3ª edição. Obtido de Imprensa da Universidade de Coimbra/Coimbra University Press.

Amaral, M. (2015). *Isometrias – Uma abordagem interdisciplinar no 8º ano de escolaridade .* (Dissertação de Mestrado) Universidade de Aveiro.

Anghileri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 33–52.

Antunes, A., & Almeida, L. (Junho de 2007). *Avaliar a criatividade: Contributos para a validade de alguns subtestes do TPCT, VI*(1), p. 41.

Bivar, A., & al, e. (2013). Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB). *Lisboa: Ministério da Educação e Ciência*.

Boavida, A. M. (2008). Raciocinar para aprender e aprender para raciocinar. *Educação e Matemática*(100).

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Boyer, C. B. (2012). *História da matemática.* São Paulo: Blucher.

Cabrita, I., & Amaral, E. (2018). Ciencia cordial - Un Desafío Educativo. *Matemática e Arte - desafios à criatividade*, pp. 90-103.

Cabrita, I., & Coelho, A. (2015). Tecnologias na Educação Matemática. *Ambientes tecnológicos para o desenvolvimento da criatividade em Matemática em contextos exploratórios*, pp. 44-49.

Canavarro, A., & al., e. (2019). Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática. Obtido em 28 de julho de 2019, de https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/recomendacoes_para_a_melhoria_das_aprendizagens_dos_alunos_em_matematica.pdf

Canavarro, A., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. *Investigação em educação matemática*, pp. 255-266.

Caraça, B. J. (1989). *Conceitos Fundamentais da Matemática.* Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora.

Coelho, A. (2013). *GeoGebra e iTALC numa abordagem criativa das isometrias.* (Dissertação de Mestrado) Universidade de Aveiro.

Cropley, A. (2003). *Creativity in education and learning: A guide for teachers and educators.* London: Kogan Page.

Eisenhart, M. (1988). The ethnographic research tradition and mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education. 19*, 99-114.

Eves, H. (2011). *Introdução à história da matemática.* Editora da Unicamp. Obtido de https://vdocuments.mx/introducao-a-historia-da-matematica-howard-eves-55d984c8e7dee.html

Fernandes, D. (1997). Educação em debate. *Avaliação na escola básica obrigatória: Fundamentos para uma mudança de práticas*, pp. 275-294.

Fernandes, D. (2004). *Avaliação das aprendizagens: uma agenda, muitos desafios.* Lisboa: Texto Editora. Obtido em setembro de 2020

Fernandes, D. (2006). Para uma teoria da avaliação formativa. *Revista Portuguesa de Educação*, pp. 21-50.

Fernandes, D. (2019). Para um enquadramento teórico da avaliação formativa e da avaliação sumativa das aprendizagens escolares. *Avaliar para aprender em Portugal e no Brasil: Perspectivas teóricas, práticas e de desenvolvimento*. Obtido de http://hdl.handle.net/10451/40370

Ferreira, A., Cabrita, I., Lucas, M., & Breda, Z. (2017). A monitorização da Reestruturação Curricular do Ensino Secundário Geral de Timor-Leste: as vozes de formadores portugueses. *Revista Lusófona de Educação, 35*, pp. 119-135.

Fleith, D., & Alencar, E. (2005). Escala sobre o clima para criatividade em sala de aula. *Psicologia: Teoria e Pesquisa, 21*(1), pp. 85-91.

Franke, K. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In F. K. Lester (Ed.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, pp. 225-356.

Gaspar, J. (2013). *Abordagem criativa das isometrias para a criatividade em Matemática.* (Dissertação de Mestrado) Universidade de Aveiro.

Jeffrey, B., & Craft, A. (2004). Teaching creatively and teaching for creativity: Distinctions and relationships. Educational Studies. *30*, pp. 77-87.

Kaufman, J. C., & Sternberg, R. J. (2006). *The international handbook of creativity.* New York: Cambridge University Press.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (2008). *Investigação qualitativa. Fundamentos e práticas.* Lisboa: Instituto Piaget.

Maor, E. (2007). *The Pythagorean Theorem: A 4,000-year History.* Princeton (NJ) : Princeton University Press.

Martins, G. e. (2017). Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória. Obtido de https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/perfil_dos_alunos.pdf

ME. (2011). Geometria e Medida no Ensino Básico. *Brochura de apoio ao Programa de Matemática do Ensino Básico (2007) para o Ensino da Geometria e Medida*.

ME. (2016). Orientações de gestão curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática Ensino Básico. Dos 1.º ao 9.º anos de escolaridade.

MEC. (2018). *Aprendizagens Essenciais - Articulação com o Perfil dos Alunos.* Obtido de https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. (2012). Recursos didáticos numa aula de ensino exploratório: da prática à representação de uma prática. *Investigação em educação matemática*, pp. 557-570.

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. *Educação e Matemática*(nº 100), pp. 3-9.

Polya, G. (1945). How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. Obtido em 18 de dezembro de 2019, de https://books.google.pt/books?id=z_hsbu9kyQQC&printsec=frontcover&hl=pt-PT#v=onepage&q&f=false

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning.* Princeton University Press.

Ponte, J. (2014). Práticas Profissionais dos Professores de Matemática. *Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática*, pp. 13-27.

Ponte, J. P. (1994). *O estudo de caso na investigação em educação matemática.* Revista Quadrante.

Ponte, J. P. (2003). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação, 2*, pp. 93-169.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. *O professor e o desenvolvimento curricular*, pp. 11-34.

Ponte, J. P., & Matos, J. F. (1996). Processos cognitivos e interacções sociais nas investigações matemáticas. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.). *Investigar para aprender matemática: Textos seleccionados*, pp. 119-137.

Ponte, J., Branco, N., & Matos, A. (2008). O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. *Educação e Matemática*(nº 100), pp. 89-96.

Reis, F. (s.d.). *Entrevista de José Sebastião e Silva ao DN, 23-01-1968*. Obtido de http://cvc.instituto-camoes.pt/ciencia/p22.html

Sá, C. (2000). *A Matemática na Grécia Antiga.* Lisboa: Universidade Aberta.

Silva, J., Fanti, E., & Pedroso, H. (2016). Teorema de Pitágoras: extensões e generalizações. Obtido em 14 de março de 2020, de https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v06a03-teorema-de-pitagoras.pdf

Stake, R. (2007). *A Arte da Investigação com Estudos de Caso* . Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Stake, R. E. (1994). *Case Studies. Handbook of qualitative research.* Newsbury Park: Sage.

Stake, R. E. (2005). *Investigación com estudio de casos.* (Tradução do original de 1995). Madrid: Morata .

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), pp. 313-340.

Sternberg, R. J., & Grigorenko, E. L. (2007). *Teaching for successful intelligence.* Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Struik, D. J. (1997). *História concisa das matemáticas.* Gradiva.

Torrance, E. P. (1974). *Torrance tests of creative thinking.* Bensenville, IL: Scholastic.

Viseu, F. (2016). A resolução de tarefas matemáticas com recurso ao Sketchpad. Obtido em 2 de outubro de 2019, de http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/55401

Yin, R. (1984). *Case study research: Design and methods.* Beverly Hills, CA: Sage.

Yin, R. (2005). *Introducing the world of education. A case study reader.* Thousand Oaks: Sage Publications.

Yin, R., & K., R. (2005). *Estudo de caso: Planejamento e Métodos.* Porto Alegre.

Zamir, H., & Leikin, R. (2011). Creative mathematics teaching in the eye of the beholder: focusing on teachers' conceptions. *Research in Mathematics Education, 13*(1), pp. 17-32.

APÊNDICES

APÊNDICE 01 - Questionário

Questionário

Este questionário serve para te conhecer melhor. Tem como objetivo recolher a tua opinião, principalmente, sobre criatividade no ensino da Matemática, a relevância das conexões em Matemática e a importância da utilização do computador no ensino e na aprendizagem da disciplina, em particular a Geometria.

Lê com atenção as questões seguintes e responde de forma sincera e rigorosa.

I - Identificação

1. Nome: ____ nº___
   Turma: ______

II – Relação com a Matemática/Geometria

2. Como classificas o teu aproveitamento a Matemática?

   Insatisfaz ☐ Satisfaz Pouco ☐ Satisfaz ☐ Satisfaz Bem ☐ Satisfaz Muito ☐

3. Para cada afirmação, coloca um **x** na opção que consideras mais adequada.

	Concordo totalmente	**Concordo**	**Não concordo**	**Discordo totalmente**	**Não tenho opinião**
Gosto de Matemática.	☐	☐	☐	☐	☐
Gosto de Geometria.	☐	☐	☐	☐	☐
A Geometria é útil.	☐	☐	☐	☐	☐

III – Criatividade e Matemática/Geometria

4. Para cada afirmação, coloca um **X** na opção que consideras mais adequada.

	Concordo totalmente	Concordo	Não concordo	Discordo totalmente	Não tenho opinião
Em Matemática/Geometria não é necessário ser criativo.	☐	☐	☐	☐	☐
É importante que o ensino da Matemática/Geometria seja criativo para que as aprendizagens sejam mais efetivas.	☐	☐	☐	☐	☐
Os alunos sentem-se menos motivados para aprender Matemática/Geometria se for abordada de forma criativa.	☐	☐	☐	☐	☐
Num ensino criativo, exploram-se conteúdos matemáticos/geométricos da forma mais diversificada possível.	☐	☐	☐	☐	☐
Os alunos aprendem melhor Matemática/Geometria quando o professor propõe tarefas desafiantes e que admitem várias resoluções.	☐	☐	☐	☐	☐
Um ensino criativo a Matemática/Geometria permite que o aluno resolva tarefas de forma autónoma e responsável.	☐	☐	☐	☐	☐

5. Achas que se pode ensinar Matemática/Geometria de forma criativa? Como?

IV – Conexões intra e/ou inter Matemática/Geometria

6. Para cada afirmação, coloca um **x** na opção que consideras mais adequada.

	Concordo totalmente	Concordo	Não concordo	Discordo totalmente	Não tenho opinião
A melhor forma de aprender é quando os vários saberes se articulam entre si.	☐	☐	☐	☐	☐
Em Matemática, os conteúdos estão todos relacionados entre si.	☐	☐	☐	☐	☐
A Matemática/Geometria está presente nas outras disciplinas de forma recorrente.	☐	☐	☐	☐	☐
Em Matemática/Geometria, utilizas regularmente competências de outras disciplinas.	☐	☐	☐	☐	☐
A Matemática/Geometria tem muitas aplicações no dia-a-dia.	☐	☐	☐	☐	☐

7. Para o desenvolvimento de competências transversais e específicas, consideras importante que, em Matemática/Geometria, se explicitem conexões internas à própria disciplina/tema e relações entre a Matemática/Geometria e outras áreas disciplinares e com o dia-a-dia? Por quê?

V – Uso do computador

8. Para cada afirmação, coloca um **x** na opção que consideras mais adequada.

Se usado corretamente, o computador no ensino e na aprendizagem da Matemática/Geometria:	**Concordo totalmente**	**Concordo**	**Não concordo**	**Discordo totalmente**	**Não tenho opinião**
contribui para uma aprendizagem mais estimulante e autónoma.	☐	☐	☐	☐	☐
promove o desenvolvimento de novas ideias.	☐	☐	☐	☐	☐
potencia a construção de conhecimento.	☐	☐	☐	☐	☐
põe em evidência conexões entre temas/tópicos matemáticos.	☐	☐	☐	☐	☐
ajuda a perceber as diferentes aplicações e a importância da Matemática no quotidiano.	☐	☐	☐	☐	☐
desenvolve competências facilitando a resolução de problemas.	☐	☐	☐	☐	☐
aumenta o distanciamento entre professor e alunos.	☐	☐	☐	☐	☐
permite o acesso a informação variada.	☐	☐	☐	☐	☐

9. Consideras importante a utilização do computador no ensino e na aprendizagem da Matemática e, em particular, da Geometria? Por quê?

Muito obrigada pela colaboração.

APÊNDICE 02 – Planificação da sequência didática

Planificação da sequência didática

Domínio: Geometria e medida Tema: Teorema de Pitágoras				
Atividade letiva	**Desenvolvimento da aula**	**Conteúdos**	**Competências a desenvolver**	**Avaliação**
1ª aula **(50 minutos)**	A aula inicia-se com a apresentação das informações pesquisadas pelos alunos sobre os aspetos mais relevantes sobre a vida e obra de Pitágoras. A pesquisa será efetuada antes da aula e a partilha das informações seria feita no início da aula. Pretende-se que os alunos contextualizem o conteúdo que estão prestes a iniciar, do ponto de vista da História da Matemática. Em seguida, com recurso ao GeoGebra e em trabalho de pares, os alunos têm uma tabela para completar com as medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os lados de diversos triângulos, onde se pretende que as relacionem entre si e com a classificação do triângulo quanto aos lados. O objetivo é permitir que tirem conclusões. Assim, considerando a, b e c, as medidas dos comprimentos dos lados de um triângulo e sendo a a medida comprimento do maior lado, devem concluir que: - $a^2 = b^2 + c^2$ se e só se o triângulo é retângulo; - $a^2 > b^2 + c^2$ se e só se o triângulo é obtusângulo; - $a^2 < b^2 + c^2$ se e só se o triângulo é acutângulo. No final, as conclusões devem ser registadas. Seguidamente, também com recurso ao GeoGebra, caso necessário, pretende-se que os alunos, a partir das conclusões anteriores, apliquem o Recíproco do Teorema de Pitágoras para concluir que os triângulos dados são retângulos ($3^2 + 4^2 = 5^2$ e $5^2 + 12^2 = 13^2$). Posteriormente, os alunos deverão ser capazes de indicar outros ternos pitagóricos, recorrendo à semelhança de triângulos e, usando, para isso, o conhecimento de que, em triângulos semelhantes os lados correspondentes são proporcionais, ou então, aplicando o teorema de Tales. Assim, os alunos estabelecem conexões entre dois temas da Matemática, de forma a reforçar a compreensão dos novos conceitos. Na última questão da tarefa, pretende-se	- Relacionar as medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os lados dos triângulos com a classificação do triângulo quanto aos lados. - Inferir o Teorema de Pitágoras. - Aplicar o teorema recíproco do teorema de Pitágoras. - Relacionar a semelhança de triângulos / teorema de Tales com os ternos pitagóricos.	- Pesquisar, recolher informação, sintetizar e expor. - Interação no trabalho a pares. - Comunicação oral e escrita. - Estratégias de resolução de problemas. - Desenvolver a capacidade argumentativa. - Estabelecer conexões entre temas matemáticos e contextos reais. - Desenvolver a capacidade de usar o GeoGebra. - Utilizar o GeoGebra para experimentar, descobrir, sustentar ou refutar conjeturas. - Desenvolver confiança nas suas capacidades e conhecimentos matemáticos e a capacidade de analisar o próprio	- Observação da qualidade da pesquisa efetuada em contexto exterior à sala de aula. - Observação das interações do par. -Iniciativa na resolução da tarefa proposta. - Empenho na realização da tarefa. - Capacidade de utilizar o GeoGebra. - Qualidade e rigor das resoluções.

	sintetizar os conhecimentos construídos pelos alunos, de forma a consolidar as aprendizagens da aula.		trabalho e regular a sua aprendizagem. - Desenvolver persistência, autonomia e à-vontade em lidar com situações que envolvam a Matemática.	

<table>
<tr><th colspan="5">Domínio: Geometria e medida

Tema: Teorema de Pitágoras</th></tr>
<tr><th>Atividade letiva</th><th>Desenvolvimento da aula</th><th>Conteúdos</th><th>Competências a desenvolver</th><th>Avaliação</th></tr>
<tr><td>2ª aula

(50 minutos)</td><td>A aula inicia-se com a tarefa 2 constituída por uma única questão.

Previamente, os alunos, em Educação Visual, realizam uma construção geométrica que digitalizam, correspondente à prova do Teorema de Pitágoras, atribuída ao matemático Henry Perigal. Tal atividade enquadra-se no objetivo da disciplina de Educação Visual “Relacionar elementos de organização e de suporte da forma” e, trabalham o descritor de desempenho “Distinguir e caracterizar a expressão do movimento (movimento implícito; repetição de formas: translação, rotação, rebatimento; expressão estática e dinâmica).” Na aula de Matemática, os alunos, sobre a digitalização referida, fazem uma réplica da construção geométrica, recorrendo ao GeoGebra, construção que pressupõe o domínio de menus ligados à Geometria. A partir daí, irão ser exploradas e partilhadas, entre pares, conclusões relativas às duas construções.

Ao longo da realização da tarefa, são estabelecidas conexões entre Matemática e Educação Visual e, ainda, entre diferentes conteúdos de Matemática - as Isometrias e o Teorema de Pitágoras. Os alunos podem assim observar uma prova do Teorema de Pitágoras através da decomposição de figuras e comparando áreas.</td><td>- Demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras do matemático Henry Perigal.</td><td>- Interação no trabalho a pares.

- Comunicação oral e escrita.

- Desenvolver a capacidade argumentativa.

- Estabelecer conexões entre Matemática e Educação Visual.

- Desenvolver a capacidade de usar o GeoGebra.

- Utilizar o GeoGebra para verificar a qualidade de construções previamente elaboradas com recurso a instrumentos de medição e papel.

- Desenvolver confiança nas suas capacidades e conhecimentos matemáticos e a capacidade de analisar o próprio trabalho e regular a sua aprendizagem.

- Desenvolver persistência, autonomia e à-vontade em lidar com situações que envolvam a Matemática.</td><td>- Observação da qualidade da construção em papel da demonstração do teorema de Pitágoras efetuada em contexto exterior à sala de aula.

- Observação das interações do par.

-Iniciativa na resolução da tarefa proposta.

- Empenho na realização da tarefa.

- Capacidade de utilizar o GeoGebra.

- Qualidade e rigor das construções.</td></tr>
</table>

Domínio: Geometria e medida Tema: Teorema de Pitágoras				
Atividade letiva	**Desenvolvimento da aula**	**Conteúdos**	**Competências a desenvolver**	**Avaliação**
3ª aula **(50 minutos)**	A aula inicia-se com a apresentação da tarefa 3 constituída por três questões, e onde é feita uma introdução acerca do autor da prova do teorema de Pitágoras que vão explorar. Na primeira questão, é pedido aos alunos para inferir o Teorema de Pitágoras a partir de um trapézio decomposto em três triângulos retângulos, uma prova da autoria de James Abram Garfield. Começam por determinar a medida da área do trapézio aplicando a respetiva fórmula e, seguidamente, a medida da área do trapézio através da soma das medidas das áreas dos três triângulos. Estabelecendo uma relação entre as expressões em causa, os alunos conseguem inferir o Teorema de Pitágoras. Nesta fase, podem recorrer à visualização de um vídeo da Khan Academy *(*disponível em *https://pt-pt.khanacademy.org/math/basic-geo/basic-geometry-pythagorean-theorem/basic-geometry-pythagorean-proofs/v/garfield-s-proof-of-the-pythagorean-theorem)* que apresenta a demonstração de James Abram Garfield. Na segunda questão, apresentam-se afirmações para classificarem em verdadeiras ou falsas, de forma a avaliar as aprendizagens. A terceira questão envolve o cálculo de medida de áreas e a aplicação do Teorema de Pitágoras. Com a realização das duas últimas questões da tarefa e após o confronto de ideias entre pares, as mesmas servem para sintetizar algumas das principais aprendizagens sobre o teorema de Pitágoras e respetiva aplicação.	- Relacionar medidas de áreas de forma a inferir o teorema de Pitágoras. - Aplicar o Teorema de Pitágoras. - Aplicar o teorema recíproco do teorema de Pitágoras.	- Interação no trabalho a pares. - Comunicação oral e escrita. - Estratégias de resolução de problemas. - Desenvolver a capacidade argumentativa. - Estabelecer conexões entre temas matemáticos. - Desenvolver confiança nas suas capacidades e conhecimentos matemáticos e a capacidade de analisar o próprio trabalho e regular a sua aprendizagem. - Desenvolver persistência, autonomia e à-vontade em lidar com situações que envolvam a Matemática.	- Observação das interações do par. -Iniciativa na resolução da tarefa proposta. - Empenho na realização da tarefa. - Qualidade e rigor das resoluções.

Domínio: Geometria e medida Tema: Teorema de Pitágoras				
Atividade letiva	**Desenvolvimento da aula**	**Conteúdos**	**Competências a desenvolver**	**Avaliação**
4ª aula **(50 minutos)**	A aula inicia-se com a apresentação da tarefa 4 composta por uma questão. A questão com um maior grau de abertura, permite os alunos explorar, com recurso ao GeoGebra, se o enunciado do Teorema de Pitágoras "*Num triângulo retângulo, a medida da área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.*" é válido para outras figuras que não seja o quadrado. A forma como a questão se apresenta leva os alunos a proceder a explorações em triângulos retângulos. Se, por hipótese, considerarem como base um triângulo retângulo e, sobre os lados deste, construírem figuras e/ou polígonos semelhantes, exploram casos particulares do teorema de Polya. Esta é uma tarefa que pretende envolver e desafiar os discentes na formulação de conjeturas, delineamento e aplicação de estratégias e validação das suas conclusões. O GeoGebra permite, através de construções relativamente rápidas, que os alunos explorem múltiplas situações em cinquenta minutos.	- Explorar casos particulares do teorema de Polya. - Relacionar medidas de áreas de forma a inferir o teorema de Polya.	- Interação no trabalho a pares. - Comunicação oral e escrita. - Estratégias de resolução de problemas. - Desenvolver a capacidade argumentativa. - Desenvolver a capacidade de raciocinar com a formulação e teste de conjeturas. - Estabelecer conexões entre temas matemáticos. - Desenvolver a capacidade de usar o GeoGebra. - Utilizar o GeoGebra para experimentar, descobrir, sustentar ou refutar conjeturas. - Desenvolver confiança nas suas capacidades e conhecimentos matemáticos e a capacidade de analisar o próprio trabalho e regular a sua aprendizagem. - Desenvolver persistência, autonomia e à-vontade em lidar com situações que envolvam a Matemática.	- Observação das interações do par. -Iniciativa na resolução da tarefa proposta. - Empenho na realização da tarefa. - Capacidade de utilizar o GeoGebra. - Qualidade e rigor das resoluções.

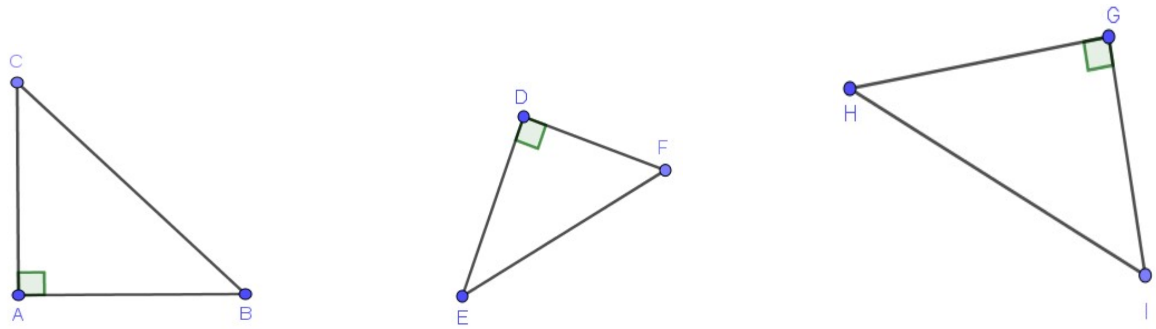
Domínio: Geometria e medida Tema: Teorema de Pitágoras				
Atividade letiva	**Desenvolvimento da aula**	**Conteúdos**	**Competências a desenvolver**	**Avaliação**
5ª aula **(50 minutos)**	A aula inicia-se com a apresentação da tarefa 5 constituída por cinco questões retiradas de Provas de Aferição do 8.º ano de escolaridade e de Provas de Final de Ciclo do 9.º ano, com a finalidade de mobilizar e de consolidar as aprendizagens efetuadas ao longo da implementação da sequência didática. Apresentam-se situações de contexto real, nas quais se aplica o Teorema de Pitágoras no plano e no espaço, permitindo aos alunos identificarem o seu progresso, lacunas e dificuldades nesta experiência de pares, que se pretende colaborativa.	- Aplicar o Teorema de Pitágoras no plano e no espaço na resolução de problemas.	- Interação no trabalho a pares. - Estratégias de resolução de problemas. - Desenvolver a capacidade de comunicar em matemática, oralmente e por escrito, com a utilização da notação e simbologia adequada. -Desenvolver a fluência e rigor na forma de exprimirem as suas ideias, procedimentos e raciocínios. - Estabelecer conexões entre temas matemáticos e contextos reais. - Desenvolver persistência, autonomia e à-vontade em lidar com situações que envolvam a Matemática.	- Observação das interações do par. -Iniciativa na resolução da tarefa proposta. - Empenho na realização da tarefa. - Qualidade e rigor das resoluções.

Domínio: Geometria e medida Tema: Teorema de Pitágoras				
Atividade letiva	**Desenvolvimento da aula**	**Conteúdos**	**Competências a desenvolver**	**Avaliação**
6ª aula **(50 minutos)**	A aula inicia-se com a apresentação da tarefa 6 constituída por duas questões. No início da aula apresenta-se o vídeo do episódio 12 da temporada 1, "Teorema de Pitágoras" da série "Isto é Matemática", onde se pode ver aplicações do Teorema de Pitágoras em contextos do quotidiano. Seguidamente, propõe-se aos alunos o desafio de criarem um problema/situação cuja resolução passe pela utilização do teorema. Neste desafio colocado aos alunos, aparentemente simples, estão envolvidas áreas de competências que passam pela comunicação escrita e oral, desenvolvimento do pensamento criativo, aplicação do saber científico, desenvolvimento do raciocínio e a resolução de problemas. Na segunda questão é pedido para os alunos a partir de uma imagem padronizada apresentarem uma prova geométrica do Teorema de Pitágoras.	- Aplicar o teorema de Pitágoras em contextos reais. - Inferir o Teorema de Pitágoras.	- Interação no trabalho a pares. - Comunicação oral e escrita. - Estratégias de resolução de problemas. - Estabelecer conexões entre temas matemáticos e contextos reais. -Desenvolver o rigor na forma de exprimirem as suas ideias e raciocínios.	- Observação da qualidade da pesquisa efetuada em contexto exterior à sala de aula. - Observação das interações do par. -Iniciativa na resolução da tarefa proposta. - Empenho na realização da tarefa. - Capacidade de utilizar o GeoGebra. - Qualidade e rigor das resoluções.

APÊNDICE 03 - Teste de avaliação de desempenho

Nome: ____ nº _____ Turma: _____

1. Para cada um dos triângulos retângulos seguintes, indica os lados que representam os catetos e a hipotenusa.



Catetos: ____________ ; ______________________ ; __________________

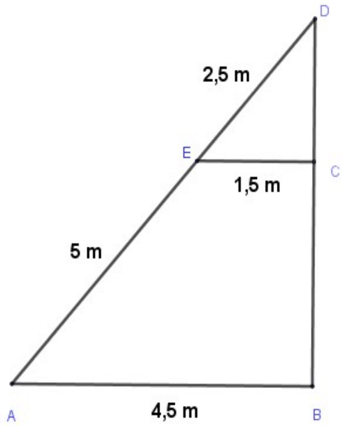
Hipotenusa: _________ ; ______________________ ; __________________

2. *(Questão adaptada do Teste Intermédio de Matemática – 8.º Ano de Escolaridade 2008)*

   Para assegurar a atividade de prevenção, vigilância e deteção de incêndios florestais, foi construída uma torre de vigia de incêndios na Serra do Reboredo, no concelho de Torre de Moncorvo. Na figura da esquerda, podes ver uma fotografia dessa torre. Para determinar a altura da torre e a altura do abrigo, imaginaram-se dois triângulos retângulos, representados na figura da direita.

   A figura seguinte é um esquema desses dois triângulos. O esquema não está desenhado à escala.

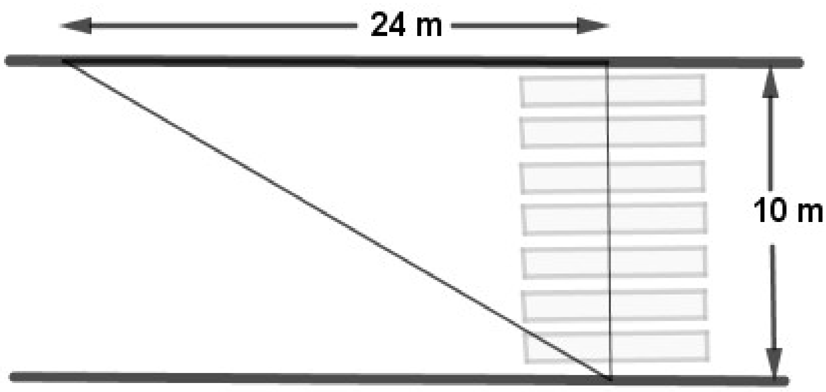
Sabe-se que $\overline{AB} = 4{,}5m$, $\overline{EC} = 1{,}5m$, $\overline{AE} = 5m$ e $\overline{ED} = 2{,}5m$.



a) Determina a altura da torre de vigia, ou seja, a medida de $\overline{BD}$?

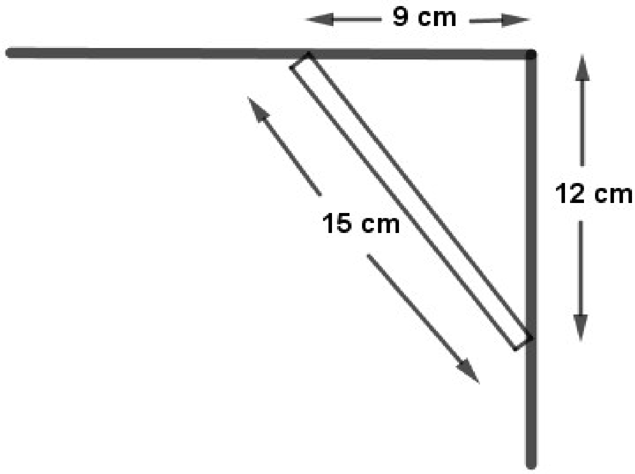
b) Determina a altura do abrigo, ou seja, a medida de $\overline{CD}$?

3. A Luísa está atrasada para apanhar o autocarro. Por esse motivo, de forma imprudente, em vez de atravessar a estrada na passadeira perpendicularmente ao passeio, seguiu na diagonal para encurtar caminho. A figura seguinte ilustra a situação.



Sabendo que a Luísa demora 7 segundos a percorrer 10 metros, quanto tempo poupou a atravessar a estrada fora da passadeira?

4. O Dinis, durante a noite, sentiu a terra tremer. Ouviu nas notícias que, na sua zona se fez sentir um sismo de magnitude 3,6 na escala de Richter. Observou as paredes do seu quarto e ficou com a sensação de que não estavam perpendiculares. Lembrou-se do que tinha estudado na aula de Matemática e resolveu por em prática. Observa a figura seguinte e explica como poderá ter procedido e verifica se o Dinis tem razão para estar preocupado.



5. Observa o mapa.

O triângulo representado na figura pelas cidades de Lisboa, Porto e Madrid é retângulo. Determina a distância entre as capitais dos dois países representados, sabendo que a distância do Porto a Madrid é 420 km e a distância do Porto a Lisboa é 270 km.

Apresenta o resultado com aproximação às décimas.

6. Recorrendo ao programa GeoGebra, constrói um triângulo retângulo [ABC], retângulo em B.

   Constrói o segmento de reta [BD] de modo a que represente a altura relativamente à hipotenusa do triângulo [ABC].

   Seguidamente, com a ferramenta adequada, indica as medidas de todos os ângulos internos dos três triângulos.

   Nota: Caso não consigas usar o GeoGebra para resolver a tarefa, usa papel, lápis e outro material de desenho.

   a) Que relação existe entre os três triângulos? Justifica.

   b) Com a ferramenta adequada, indica na figura as medidas de comprimento de todos os lados dos três triângulos.

   c) Relacionando o Δ[ABD] e o Δ[ABC] completa:

   $$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\ldots}{\ldots} \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = \ldots \times \ldots$$

   Verifica a relação que escreveste substituindo as medidas dos comprimentos pelos valores indicados na figura.

   d) Relacionando o Δ[BCD] e o Δ[ABC] completa:

   $$\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{\ldots}{\ldots} \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = \ldots \times \ldots$$

   Verifica a relação que escreveste substituindo as medidas dos comprimentos pelos valores indicados na figura.

   e) A partir das igualdades obtidas nas alíneas c) e d) enuncia o teorema de Pitágoras.

APÊNDICE 04 - Tarefa 1

Tarefa 1 – 50 minutos

Nome: ____ nº _____ Turma: _____

1. *Um pouco de história…*

   Escreve e partilha com os teus colegas as informações mais relevantes que pesquisaste sobre Pitágoras.

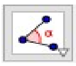
2. Recorrendo ao programa GeoGebra, constrói um triângulo [ABC], e, sobre os lados [AC], [BC] e [AB], constrói os respetivos quadrados [ACDE], [BHIC] e [AGFB].

   Para isso, podes usar, 

 e 

.

   Regista a medida de cada ângulo interno do triângulo e a medida da área dos [ACDE], [BHIC] e [AGFB].

   Para isso, podes usar as ferramentas  e 

.

   Se movimentares algum dos pontos do triângulo, verificas que as medidas dos ângulos e das áreas se alteram.

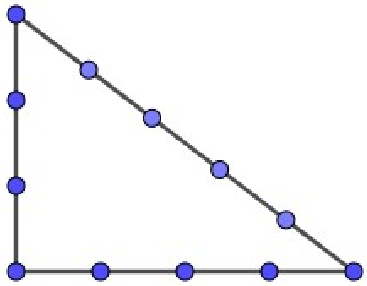
   a) Completa as nove linhas da tabela seguinte com alguns desses valores considerando, para isso, três triângulos acutângulos, três triângulos obtusângulos e três triângulos retângulos.

Classificação do triângulo quanto aos ângulos	**Área de [ACDE]**	**Área de [AGFB]**	**Área de [BCIH]**

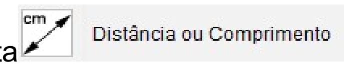
b) O que podes concluir da observação da tabela? Encontras alguma relação entre as medidas das áreas dos quadrados?

3. Há milhares de anos, no Egito, os construtores das pirâmides usavam as chamadas cordas dos 12 nós igualmente espaçados que colocados na posição abaixo, serviam para verificar se as paredes formavam um ângulo reto.

a) Consegues explicar porquê?



Se necessário, recorre à construção que fizeste anteriormente no GeoGebra.

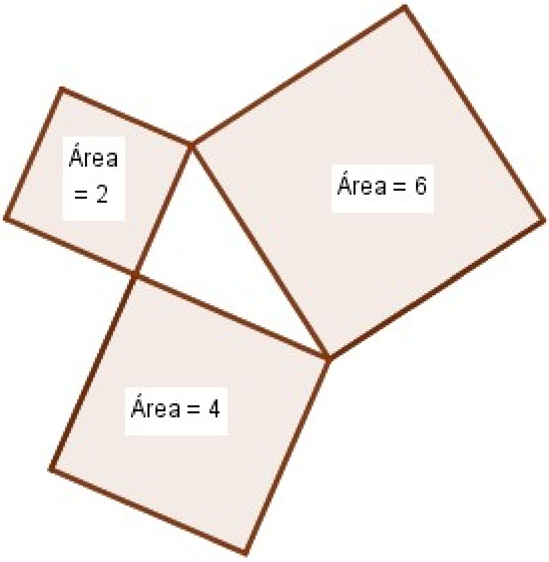
Podes usar a ferramenta 

, para registar a medida de comprimento dos lados do triângulo [AC], [BC] e [AB].

b) E se os lados medirem 5, 12 e 13 unidades, o que concluis?

c) Consegues indicar outros ternos pitagóricos? Podes usar os teus conhecimentos sobre semelhança de triângulos.

4. Observa a figura seguinte com atenção.
Justifica que se trata de um triângulo retângulo e indica a medida de comprimento dos lados do triângulo. Apresenta todos os cálculos que efetuares.



Guarda o ficheiro com o nome ***tarefa_1.ggb***.

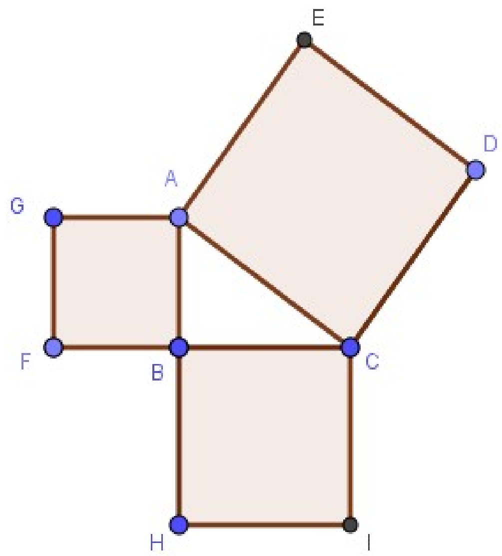
APÊNDICE 05 - Tarefa 2

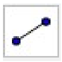
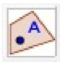
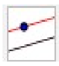
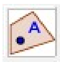
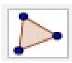
Tarefa 2 – 50 minutos

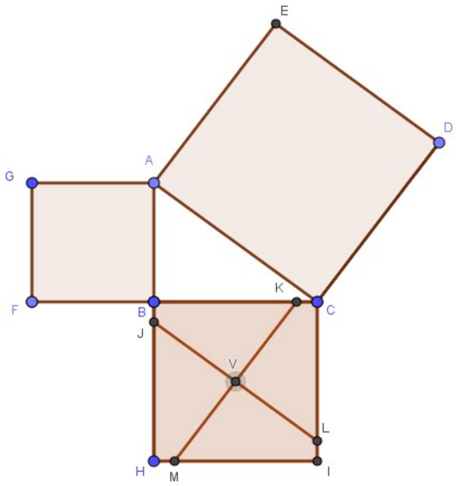
Nome: ____ nº ____ Turma: ____

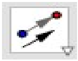
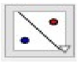
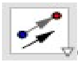
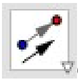
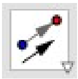
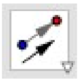
1. Recorrendo ao GeoGebra, vais explorar a construção que fizeste em Educação Visual.

Para isso, constrói a figura seguinte com os pontos tal como estão indicados, sobre a tua digitalização.



- constrói o centro do quadrado [BHIC], designa-o pela letra V (ponto de interseção das diagonais do quadrado)  e ;
- traça uma reta a passar pelo ponto V e paralela ao lado AC ;
- traça uma reta a passar pelo ponto V e paralela ao lado CD ;
- designa por K, J, M e L os pontos de interseção das retas com os lados do quadrado [BHIC], respetivamente [BC], [BH], [HI] e [IC] ;
- constrói os quadriláteros, [VLCK], [VKBJ], [VJHM] e [VMIL], obtidos a partir da decomposição do quadrado [BHIC] ;
- apaga as construções auxiliares tal como na figura abaixo;



- efetua a translação  do quadrilátero [VLCK] segundo o vetor VA menu das transformações geométricas ;
- efetua a translação do quadrilátero [VKJB] segundo o vetor VC;
- efetua a translação do quadrilátero [VJHM] segundo o vetor VD;
- efetua a translação  do quadrilátero [VMIL] segundo o vetor VE;
- efetua a translação  do quadrado [AGFB] de forma a encaixar no espaço restante do quadrado [ACDE].

O que podes concluir?

Acabaste de fazer uma demonstração geométrica do **Teorema de Pitágoras** usando translações.

Esta demonstração do Teorema de Pitágoras é atribuída a um matemático chamado Henry Perigal (1801-1898).

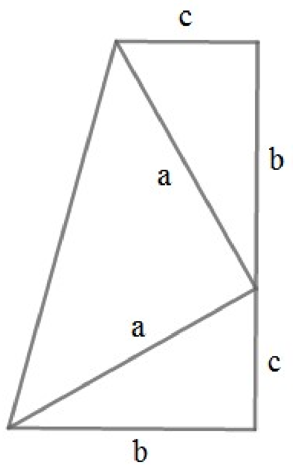
Guarda o ficheiro com o nome ***tarefa_2.ggb***.

APÊNDICE 06 - Tarefa 3

Tarefa 3 – 50 minutos

Nome: ____ nº ____ Turma: ____

1. Na figura seguinte, está representado um trapézio decomposto em três triângulos retângulos.



a) Determina a área do trapézio utilizando a fórmula da área de um trapézio.

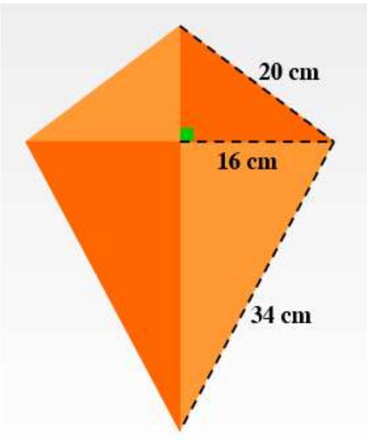
b) Determina a área do trapézio sabendo que está decomposto em três triângulos retângulos.

c) Infere o Teorema de Pitágoras recorrendo às duas alíneas anteriores e, assim farás uma demonstração que foi apresentada por James Abram Garfield, um general eleito presidente dos Estados Unidos durante quatro meses, tendo sido assassinado em 1881. Se tiveres dúvidas, podes explorar o vídeo "Demonstração de Garfield do Teorema de Pitágoras" da Khan Academy em https://pt.khanacademy.org/math/basic-geo/basic-geometry-pythagorean-theorem/basic-geometry-pythagorean-proofs/v/garfield-s-proof-of-the-pythagorean-theorem.

2. Classifica as afirmações seguintes de **verdadeiras** ou **falsas**. Justifica as afirmações falsas.

- Um triângulo que verifica o teorema de Pitágoras tem dois ângulos agudos.
- Um triângulo que verifica uma relação entre as medidas de comprimento dos lados, tal como no teorema de Pitágoras, pode não ser retângulo.
- Num triângulo retângulo, cujos catetos medem 3m e 4m, a hipotenusa mede 5m, por outras palavras, (3, 4, 5) é um terno pitagórico.
- Um triângulo cujos lados medem 5cm, 12cm e 1,3dm é retângulo.
- Todos os triângulos verificam uma relação entre as medidas de comprimento dos lados como no teorema de Pitágoras, isto é, o quadrado da medida de comprimento do seu lado maior é igual à soma dos quadrados das medidas de comprimento dos outros dois lados.
- Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos catetos.

3. A figura seguinte mostra um papagaio cujas medidas de comprimento estão em centímetros.



a) Determina a medida de comprimento da diagonal maior do papagaio.

b) Determina a medida da área do papagaio.

(Tarefa retirada da escola virtual)

APÊNDICE 07 - Tarefa 4

Tarefa 4 – 50 minutos

Nome: ____ nº ____ Turma: ____

Aprendeste, nas últimas aulas, um teorema muito importante bem como diferentes formas de o demonstrar.

O teorema de Pitágoras pode ser enunciado da seguinte forma: "*Num triângulo retângulo, a medida da área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.*"

Será o enunciado válido para outras figuras que não seja o quadrado?

Para tentares responder a esta questão, utiliza o GeoGebra.

Grava com nomes distintos todas as construções que consideres relevantes.

Sugestão: *tarefa_4a.ggb*., *tarefa_4b.ggb*., *tarefa_4c.ggb., …*

Escreve as conclusões a que chegaste.

APÊNDICE 08 - Tarefa 5

Tarefa 5 – 50 minutos

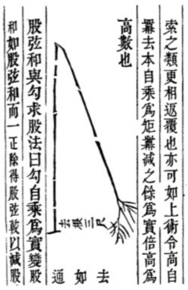
Nome: ____ nº ____ Turma: ____

1. **(Prova de aferição de Matemática - 2002)**

O seguinte problema é adaptado do livro chinês *Nove Capítulos da Arte Matemática*, do século I a.C..

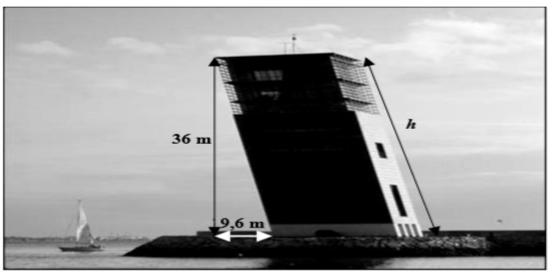
Um Bambu partiu-se a uma altura do chão de 2,275 metros e, a parte de cima ao cair, tocou no chão, a uma distância de 1,5 metros da base do bambu. Qual era a altura do bambu antes de se ter partido?

Resolve o problema e apresenta todos os cálculos que efetuares.



2. **(Prova de aferição de Matemática - 2003)**

Quem chega a Lisboa, entrando pelo Tejo, encontra uma torre "torta", mas elegante, que alberga o Centro de Coordenação e Controlo de Tráfego Marítimo. A torre tem a forma de um prisma quadrangular oblíquo. A sua altura é de 36 m, e a torre está inclinada a sul, segundo um ângulo de cerca de 75º. Se o sol incidisse a pique sobre a torre, esta projetaria uma sombra retangular, em que um dos lados mediria, aproximadamente, 9,6 m, como está representado na figura.



Semanário Expresso, 8/9/2001

Qual é a medida do comprimento *h* da torre?

Apresenta todos os cálculos que efetuares e indica o resultado aproximado às unidades.

3. **(adaptado da Prova final de Matemática 2016 - 2ªfase)**

Na figura, está representado um esquema do modelo de avião Inês80, um dos maiores aviões de transporte de passageiros do mundo. Na figura, estão também representados o triângulo isósceles [ABD] e o segmento de reta [AC], que é a altura do triângulo relativa à base [BD] .

O esquema não está desenhado à escala.

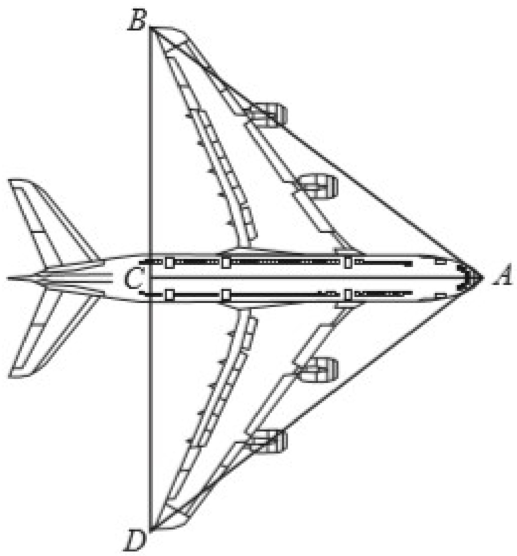
Sabe-se que:

- $\overline{AB} = \overline{AD}$;
- $\overline{AC} = 51\,m$;
- $\overline{AB} = 65\,m$.

Determina $\overline{BD}$, ou seja, determina a envergadura do Inês80.

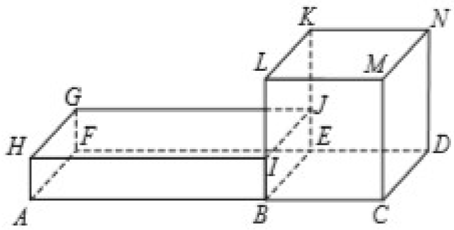
Apresenta o resultado em metros, arredondado às unidades. Sempre que, em cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, duas casas decimais.

Mostra como chegaste à tua resposta.



4. **(adaptado da Prova final de Matemática 2012 - 1ª chamada)**

A primeira figura é uma fotografia de um barco rabelo, atualmente usado para transportar turistas na travessia do rio Douro. Ao lado está representado um modelo geométrico, em tamanho reduzido, da parte coberta desse barco.



O modelo representado é um sólido que pode ser decomposto no cubo [BCDEKLMN] e no paralelepípedo retângulo [ABEFGHIJ].

O modelo não está desenhado à escala.

Sabe-se ainda que:

- o ponto I pertence ao segmento de reta [BL] e $\overline{BI} = \frac{1}{3}\overline{BL}$
- $\overline{AB} = 2\,\overline{BC}$
- o volume total do cubo é 27 cm^3.

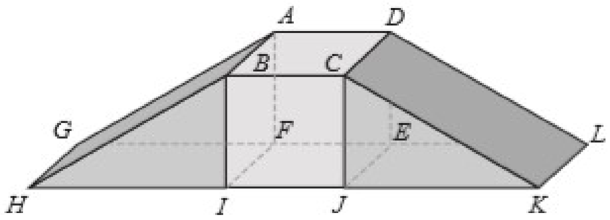
a) Seja ***a*** a medida, em centímetros, do comprimento da aresta do cubo. Determina o valor exato de ***a***.

Mostra como chegaste à tua resposta.

b) Determina a distância de A a J.

5. **(adaptado da Prova final de Matemática 2012 - 2ª chamada)**

A figura representa um modelo geométrico de uma rampa de skate. O modelo não está desenhado à escala.



Este modelo é um sólido que pode ser decomposto no cubo [ABCDEFIJ] e nos prismas triangulares retos [BHIFAG] e [CKJEDL], geometricamente iguais. As bases dos prismas são triângulos retângulos.

Sabe-se ainda que:

- $\overline{HI} = 4m$;
- $\overline{IB} = 3m$;

a) Determina a medida do comprimento da rampa $\overline{HB}$.

b) Determina o valor exato de $\overline{ID}$.

c) Calcula a medida do volume do modelo geométrico composto pelos três sólidos.

d) Calcula a medida do volume do modelo geométrico composto pelos três sólidos.

APÊNDICE 09 - Tarefa 6

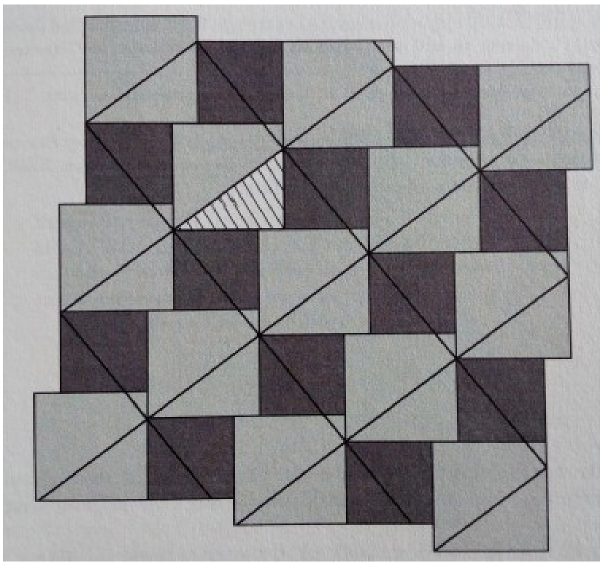
Tarefa 6 – 50 minutos

Nome: ____ nº ____ Turma: ____

1. Agora que visionaste o episódio 12 da temporada 1, “Teorema de Pitágoras” da série “Isto é Matemática”, https://www.youtube.com/watch?v=1Liyw0fab10, onde surgem situações com aplicações práticas do Teorema de Pitágoras, o desafio é criares um problema que possa ser resolvido recorrendo ao teorema.

   Seguidamente, irás apresentá-lo à turma para que possa ser resolvido por todos.

2. Observa a figura seguinte com muita atenção.



(Fonte: Eli Maor, *The Pythagorean Theorem*, pg.113)

Explica, por palavras tuas, de que forma está presente uma prova geométrica do Teorema de Pitágoras.

APÊNDICE 10 - PEDIDO DE AUTORIZAÇÃO AOS ENCARREGADOS DE EDUCAÇÃO

Exmo.(a). Sr.(a). Encarregado(a) de Educação

No âmbito do Curso de Mestrado em Matemática para Professores, estou a desenvolver um projeto na área da Geometria, subordinado ao tema "Teorema de Pitágoras", consciente de que o trabalho de professor requer constante atualização e reflexão, com vista à melhoria das aprendizagens dos alunos. Assim, e com o objetivo de melhorar o desempenho dos alunos, irão ser aplicadas sequências de tarefas, questionários/entrevistas, recolha dos trabalhos desenvolvidos pelos alunos e gravação áudio de algumas aulas. Todo o material recolhido servirá apenas para a investigação no âmbito deste projeto, garantido sempre o anonimato dos alunos participantes. Desta forma, solicito o seu consentimento para a participação do seu educando neste estudo.

Agradecendo desde já a sua colaboração e com os melhores cumprimentos,

A Professora de Matemática

____

(Sara Silva)

(Recortar por aqui) ---

Declaro que autorizo/não autorizo (riscar o que não interessa) que o meu educando ____ número _____ da turma ____, participe neste estudo a ser desenvolvido pela Professora Sara Silva.

Data:___ /____ /______ Assinatura: ______________________________

APÊNDICE 11 - PEDIDO DE AUTORIZAÇÃO À DIREÇÃO DA ESCOLA

_______, 23 de setembro de 2019.

Exmo. Sr. Diretor do Agrupamento de Escolas ____________

Eu, Sara Alexandra Dias da Costa e Silva, docente de Matemática, venho por este meio solicitar autorização para concretizar na turma ___ do oitavo ano, um projeto no âmbito da Geometria que dará suporte ao meu estudo de Mestrado, a desenvolver sob orientação das Professora Doutora Isabel Cabrita e Professora Doutora Andreia Hall, sobre o tema "Teorema de Pitágoras". Este trabalho integra-se no âmbito do curso de Mestrado em Matemática para Professores da Universidade de Aveiro.

Será solicitada autorização aos Encarregados de Educação dos alunos para a participação neste

projeto e será salvaguardado o anonimato dos alunos, quer no processo de recolha de dados quer no relatório da investigação.

Grata pela colaboração e com os melhores cumprimentos,

Pede deferimento,

____

(Sara Alexandra Dias da Costa e Silva)