



**Elsa Maria
Godinho de
Assunção**

**APRENDIZAGENS ATIVAS EM MATEMÁTICA
COM RECURSO AO GEOGEBRA: A FUNÇÃO
EXPONENCIAL**



**Elsa Maria
Godinho de
Assunção**

APRENDIZAGENS ATIVAS EM MATEMÁTICA COM RECURSO AO GEOGEBRA: A FUNÇÃO EXPONENCIAL

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para Professores, realizada sob a orientação científica do Doutor Nuno Rafael de Oliveira Bastos, Professor Adjunto da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Viseu e da Professora Doutora Andreia Oliveira Hall, Professora Associada do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

“Muitas formas de ensinar hoje não se justificam mais. Perdemos tempo demais, aprendemos muito pouco, nos desmotivamos continuamente. Tanto professores como alunos temos a clara sensação de que muitas aulas convencionais estão ultrapassadas. Mas, para onde mudar? Como ensinar e aprender em uma sociedade mais interconectada?”

José Manoel Moran (2000)

Dedico este trabalho à minha família, em especial ao meu filho.

o júri

Presidente

Professora Doutora Maria Paula de Sousa Oliveira, Professora Auxiliar, Universidade de Aveiro

Vogais

Doutor Márcio Dinis do Nascimento de Jesus, Professor Adjunto, Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Viseu

Doutor Nuno Rafael Oliveira Bastos, Professor Adjunto, Escola Superior Tecnologia de Viseu

agradecimentos

Aos meus orientadores, Professora Doutora Andreia Hall e Professor Doutor Nuno Bastos pela simpatia, pela disponibilidade, pelos conselhos e esclarecimentos que me transmitiram ao longo deste percurso.

Um especial agradecimento à amiga Maria João Barroso pelo constante apoio e encorajamento durante a elaboração deste trabalho.

.

palavras-chave

Função exponencial, *GeoGebra*, *Sala de aula invertida*, livro dinâmico

resumo

O presente trabalho tem como principal objetivo apresentar o livro dinâmico “A Função Exponencial” que foi elaborado para o ensino deste tema no ensino secundário recorrendo à metodologia da sala de aula invertida. O livro é composto por uma sequência de atividades que abordam os conceitos base deste conteúdo, foi construído recorrendo ao software *GeoGebra* e encontra-se disponível na plataforma do *GeoGebra*.

A sala de aula invertida é caracterizada por dois momentos, um antes da aula presencial em que os alunos estudam previamente os conteúdos disponibilizados pelo professor e a aula presencial onde se realizam atividades práticas como por exemplo resolução de problemas. A utilização do material produzido ocorreu na fase pré-aula e foi disponibilizado aos alunos através do *GeoGebra Classroom*, ferramenta que permite ao professor acompanhar o desenvolvimento do trabalho dos alunos mesmo à distância.

Os resultados obtidos com a aplicação das atividades na perspetiva da sala de aula invertida foram francamente positivos e mostram que este é um caminho a seguir.

keywords

Exponencial function, *GeoGebra*, *Flipped Classroom*, dynamic book

abstract

The main goal of the this work is to present the dynamic book “A Função Exponencial” that was prepared for the teaching of this topic in secondary education using the flipped classroom method. The book consist of a sequence of activities that explores the basic concepts of this topic. The book and its activities were designed by using the GeoGebra software and it is available on the GeoGebra platform.

The flipped classroom is organised by two moments, one before the face-to-face class in which students had previously studied the contents provided by the teacher and the face-to-face class itself where practical activities, such as problem-solving are carried out. The use of the material produced took place in the pre-class stage and it became available to students through the GeoGebra Classroom, a tool which allows the teacher to monitor the development of the students' work even at distance.

The results obtained with the application of this set of activities in the perspective of the flipped classroom were quite positive and has shown that this is the way to go forward.

Índice

<i>Índice de figuras</i>	<i>iii</i>
<i>Índice de tabelas</i>	<i>vi</i>
<i>Lista de abreviaturas</i>	<i>vii</i>
<i>Introdução</i>	8
1. Enquadramento	10
1.1. Metodologias ativas	10
1.2. A sala de aula invertida.....	11
1.3. Tecnologias digitais no ensino/aprendizagem da matemática.....	12
1.4. Aprendizagens Essenciais e Perfil do Aluno à Saída da Escolaridade Obrigatória	14
2. O GeoGebra	16
2.1. O software GeoGebra Classic (versão 5.0).....	17
2.2. Possibilidades de exploração do GeoGebra.....	24
2.3. A plataforma GeoGebra.....	25
2.4. O GeoGebra Classroom.....	28
3. Função exponencial	31
3.1. Potências de expoente irracional	31
3.2. Função exponencial em \mathbb{R}	34
3.3. Limites notáveis.....	35
3.4. Derivada da função exponencial de base e.....	37
4. O livro dinâmico “A função exponencial”	39
4.1. Descrição das atividades do “Capítulo 1 – Ponto de partida”	40
4.1.1. Atividade introdutória: Crescimento microbiano	40
4.1.2. Exercício.....	42
4.2. Descrição das atividades do “Capítulo 2 – Potências de expoente irracional”	43
4.2.1. Potências de expoente racional – revisão	44
4.2.2. Potência de expoente irracional	47
4.3. Descrição das atividades do “Capítulo 3 – Função exponencial”	50
4.3.1. Função exponencial – propriedades	50
4.3.2. Equações exponenciais	51
4.3.3. Inequações exponenciais	56
4.4. Descrição das atividades do “Capítulo 4 - Atividades para a sala de aula”	59
4.5. Descrição das atividades do “Capítulo 5 - Derivada da função exponencial”	59
4.5.1. Limite notável.....	60
4.5.2. Derivada da função exponencial de base e	62
4.6. Descrição das atividades do “Capítulo 6 - Mais atividades para a sala de aula”	63

4.7. Descrição da construção de applet com exercício de <i>feedback</i> imediato	64
5. Implementação	73
5.1. Descrição dos procedimentos	73
5.2. <i>Feedback</i> dos alunos.....	75
5.3. <i>Feedback</i> da professora	75
6. Considerações finais.....	76
Referências bibliográficas	77
Apêndices	79
Apêndice I: Barra de ferramentas da Folha Gráfica 2D.....	79
Apêndice II: Tutorial para criação de uma conta na plataforma do GeoGebra	83
Apêndice III: Tutorial para a criação de uma folha de trabalho dinâmica (atividade) no GeoGebra	86
Apêndice IV: Tutorial para a criação de um livro no GeoGebra	90
Apêndice V: Tutorial para a criação de uma sala no GeoGebra Classroom	95

Índice de figuras

Figura 1- Interface do GeoGebra Classic versão 5.0 (janelas de Geometria e Álgebra)	18
Figura 2 – Barra de Estilos	18
Figura 3- Janela de ferramentas na tipologia reta	19
Figura 4 – Janela de informação da ferramenta Segmento de Reta	19
Figura 5 - Botões Desfazer e Refazer	20
Figura 6 - Ajuda da ferramenta "Polígono Regular"	20
Figura 7 – Campo de entrada	21
Figura 8 – Entrada direta de comandos em língua materna	21
Figura 9 – Lista de comandos do GeoGebra começados por Fun	22
Figura 10 – Barra de Menu	22
Figura 11 – Opções do item Vista da barra de menu.....	22
Figura 12 – Vista da Folha gráfica 2D e da Folha de Cálculo.....	23
Figura 13 – Vista das folhas gráficas 2D e 3D	23
Figura 14 - Página de entrada da plataforma GeoGebra	25
Figura 15 -Plataforma do GeoGebra – página de materiais	26
Figura 16 - Mapas de tópicos matemáticos inicial e relativo ao tema funções da plataforma do GeoGebra ..	26
Figura 17 - Página do livro "A função exponencial"	27
Figura 18 - Visão geral da atividade.....	29
Figura 19 - Visão geral da tarefa 1 da atividade "Crescimento microbiano"	30
Figura 20 - Representação gráfica da função	36
Figura 21 - Página inicial do livro "A função exponencial"	39
Figura 22 - Capítulo 1: Ponto de partida.....	40
Figura 23 - Atividade introdutória: crescimento microbiano - Animação da tarefa 1	41
Figura 24 - Tarefa 2 da atividade "crescimento bacteriano"	41
Figura 25 - Tarefa 3 da atividade "crescimento bacteriano"	41
Figura 26 - Tarefa 3 da atividade "Exercício"	42
Figura 27 – Passos para a submissão de respostas no GeoGebra Notes.....	43
Figura 28 - Capítulo 2: Potências de expoente irracional	43
Figura 29 - Applet da atividade "Potências de expoente racional" - exercício 1	44
Figura 30 – Exemplos de feedbacks da atividade "Potências de expoente racional" - exercício 1.....	45
Figura 31 - Applet da atividade "Potências de expoente racional" - exercício 2	45
Figura 32 - Exemplos de feedbacks da atividade "Potências de expoente racional" - exercício 2	45
Figura 33 - Applet da atividade "Potências de expoente racional" - exercício 3	46
Figura 34 - Feedback positivo da atividade "Potências de expoente racional" - exercício 3.....	46
Figura 35 - Feedback negativo da atividade "Potências de expoente racional" - exercício 3.....	47
Figura 36 - Applet da atividade "Potência de expoente irracional"	48
Figura 37 - Applet da atividade "Potências de expoente irracional" – exercício com feedback imediato	48
Figura 38 - Atividade "Potências de expoente irracional" – exercício com feedback imediato: opção responder	49
Figura 39 – Feedbacks do exercício da atividade “Potências de expoente irracional.	49
Figura 40 - Capítulo 3: Função exponencial.....	50
Figura 41 - Applet da atividade "Função exponencial - propriedades"	51
Figura 42 – Apresentação constante da atividade “Equações exponenciais” – Equações 1: interface inicial..	52
Figura 43 – Apresentação constante da atividade “Equações exponenciais” – Equações 1: alguns passos da resolução do exemplo 1.....	52
Figura 44 – Exercício 1 da atividade “Equações exponenciais”	53
Figura 45 - Apresentação constante da atividade “Equações exponenciais” – Equações 2: interface inicial...	53
Figura 46 - Apresentação constante da atividade “Equações exponenciais” – Equações 2: alguns passos da resolução do exemplo 1.....	54

Figura 47 - Exercício 2 da atividade “Equações exponenciais”	54
Figura 48 - Apresentação constante da atividade “Equações exponenciais” – Equações 3: interface inicial... 55	55
Figura 49 - Apresentação constante da atividade “Equações exponenciais” – Equações 3: alguns passos da resolução do exemplo 2.....	55
Figura 50 - Exercício 3 da atividade “Equações exponenciais”	56
Figura 51 - Apresentação constante da atividade “Inequações exponenciais” – Inequações 1: alguns passos da resolução do processo 1	57
Figura 52 - Exercício 1 da atividade “Inequações exponenciais”	57
Figura 53 - Apresentação constante da atividade “Inequações exponenciais” – Inequações 2: alguns passos da resolução do exemplo 1.....	58
Figura 54 - Exercício 2 da atividade “Inequações exponenciais”: Interface inicial e exemplo de feedback	58
Figura 55 - Capítulo 4: Atividades para a sala de aula	59
Figura 56 – Capítulo 5: Derivada da função exponencial de base e	59
Figura 57 - Applet da atividade "Limite notável": Justificação visual	60
Figura 58 - Apresentação constante da atividade “Limite notável”: alguns passos da resolução do exemplo 1	61
Figura 59 - Exercício da atividade “Limite notável”: Interface inicial e listagem das respostas possíveis	61
Figura 60 – Apresentação constante da atividade “Derivada da função exponencial de base e”	62
Figura 61 - Exercício constante na atividade "Derivada da função exponencial de base e".....	63
Figura 62 - Capítulo 6: Mais atividades para a sala de aula	63
Figura 63 - Texto das questões e respetivas respostas.....	64
Figura 64 - Inserir Botão	65
Figura 65 - Propriedades do seletor a.....	65
Figura 66 – Configurações	66
Figura 67 - Formatação do botão Anterior	66
Figura 68 - Programação do botão "Anterior"	66
Figura 69 – Comando para criar a Lista das respostas.....	67
Figura 70 - Condição para mostrar o texto 1	67
Figura 71 - Criar uma lista pendente com as respostas possíveis.....	68
Figura 72 - Criar caixa para responder	69
Figura 73 – Condição para visualizar a lista das respostas possíveis	69
Figura 74 – Comando para verificação da resposta à questão 1	69
Figura 75 - Atualização da programação do botão	70
Figura 76 - Condições para mostrar o texto "A resposta está correta"	71
Figura 77 - Condições para visualizar o texto "A resposta está errada. Tenta novamente"	71
Figura 78 - Feedback dos alunos.....	75
Figura 79 - Barra de ferramentas da folha gráfica 2D.....	79
Figura 80 - Caixa 1: Ferramentas de movimento.....	79
Figura 81 - Caixa 2: Ferramentas de pontos	79
Figura 82 - Caixa 3: Ferramentas de linhas	80
Figura 83 – Caixa 4: Ferramentas de linhas especiais.....	80
Figura 84 - Caixa 5 - Ferramentas de polígonos.....	80
Figura 85 - Caixa 6: Ferramentas de círculos e arcos.....	81
Figura 86 - Caixa 7: Ferramentas de cónicas.....	81
Figura 87 - Caixa 8: Ferramentas de medição.....	81
Figura 88 - Caixa 9: Ferramentas de transformações	82
Figura 89 - Caixa 10: Ferramentas de objetos especiais	82
Figura 90 - Caixa 11: Ferramentas de ação	82
Figura 91 - Página de entrada da plataforma do GeoGebra	83
Figura 92 - Janela de registo (1).....	84
Figura 93 - Janela para registo (2).....	84

Figura 94 - Conta do utilizador	85
Figura 95 - Exportação de uma construção	86
Figura 96 - Janela de exportação (1).....	87
Figura 97 - Janela de exportação (2).....	87
Figura 98 - Enviar ficheiro para a plataforma do GeoGebra (1).....	88
Figura 99 - Enviar ficheiro para a plataforma do GeoGebra (2).....	88
Figura 100 - Janela de configuração da atividade.....	89
Figura 101 - Criação de um livro na plataforma do GeoGebra	90
Figura 102 - Informações básicas do livro	91
Figura 103 - Começando a editar o livro.....	92
Figura 104 - Adicionando atividades ao livro.....	92
Figura 105 - Adicionando atividades ao livro.....	93
Figura 106 – Adicionando atividades ao livro	93
Figura 107 – Atividade adicionada ao livro.....	94
Figura 108 -Interface do livro	94
Figura 109 - Botão para criar uma sala de aula	95
Figura 110 - Janela para a criação de uma sala.....	95
Figura 111 - Código e endereço para acesso à sala	96
Figura 112 – Menu da página inicial do GeoGebra.....	96
Figura 113 - Janela de acesso à sala.....	97

Índice de tabelas

Tabela 1 - Descritores das AE de Matemática A (MEC, 2018)	14
Tabela 2- Principais características das aplicações GeoGebra.....	17
Tabela 3 - Primeiros 8 termos das sucessões un , vn , un^2 e vn^2	32
Tabela 4 – Propriedades da função exponencial	34
Tabela 5 - Valores da função quando x tende para zero por valores inferiores a zero.....	35
Tabela 6 - Valores da função quando x tende para zero por valores superiores a zero	35
Tabela 7 - Protocolo de construção	72

Lista de abreviaturas

AE – Aprendizagens Essenciais

ME – Ministério da Educação

MEC – Ministério da Educação e Ciência

PASEO – Perfil do aluno à saída da escolaridade obrigatória

Introdução

Estamos em pleno século XXI e os alunos de hoje têm características muito diferentes dos alunos do século passado. A forma como as pessoas se relacionam e se organizam em sociedade alterou-se, muito devido do desenvolvimento tecnológico. A escola tem de acompanhar estas mudanças.

Assim, é essencial que se utilizem metodologias ativas, que para além de integrarem as ditas novas tecnologias, permitam uma aprendizagem autónoma, captem a atenção e o interesse dos alunos e, desta forma, contribuam para a aquisição de conhecimento sólido e de longa duração.

No entanto, o tempo necessário para conceber materiais com vista à implementação de tarefas que apoiem estas metodologias é elevado, pelo que, o seu uso ainda fica muito aquém do desejado. Por vezes, na tentativa de remediar a falta de tempo, recorre-se a materiais já construídos, mas estes, nem sempre cumprem devidamente os objetivos propostos.

Foram estes aspetos que nortearam a elaboração desta dissertação. Assim, o grande objetivo foi a criação de materiais com vista à elaboração de uma sequência de tarefas para o ensino do tema “Função Exponencial” no ensino secundário recorrendo à metodologia da sala de aula invertida e posterior implementação.

Para alcançar este objetivo, foi construído um livro dinâmico na plataforma do GeoGebra intitulado “A função exponencial”. Este livro é composto por tarefas que permitem o estudo autónomo dos conceitos base da função exponencial. Estas atividades foram, posteriormente, disponibilizadas aos alunos através do GeoGebra Classroom para que fossem realizadas antes da aula presencial. Para a aula presencial foram elaboradas fichas de trabalho com exercícios e problemas de aplicação dos conteúdos trabalhados autonomamente.

No que se refere à estrutura desta dissertação, está organizada em seis capítulos.

No primeiro capítulo é feito um enquadramento salientando os seguintes aspetos: definição de metodologias ativas dando particular ênfase à sala de aula invertida, a importância das tecnologias digitais no processo de ensino/aprendizagem da matemática e ainda o enquadramento das atividades propostas no âmbito da legislação em vigor, nomeadamente Aprendizagens Essenciais (AE) relativas à disciplina de Matemática A do ensino secundário e Perfil do Aluno à Saída da Escolaridade Obrigatória (PASEO).

O segundo capítulo é exclusivamente dedicado ao GeoGebra, ferramenta utilizada para criação e disponibilização dos materiais desenvolvidos.

No terceiro capítulo apresentam-se os conteúdos a lecionar relativos à função exponencial.

A apresentação do livro dinâmico “A função exponencial” é feita no quarto capítulo assim como a descrição de cada uma das atividades que o compõem. É também apresentada a construção detalhada de um dos *applets* incluídos numa das atividades do livro.

No capítulo cinco descreve-se como foi realizada a implementação.

E, finalmente, no sexto capítulo são apresentadas algumas conclusões e perspetivam-se possibilidades de trabalho futuro dando continuidade ao que aqui é apresentado.

Nos apêndices apresentam-se alguns tutoriais relativos a procedimentos na plataforma GeoGebra tais como criação de conta, de folhas de trabalho entre outras possibilidades.

1. Enquadramento

1.1. Metodologias ativas

“A aprendizagem ativa é uma estratégia de ensino muito eficaz, independentemente do assunto, quando comparada com métodos de ensino tradicionais, como a aula expositiva.” (Barbosa & Moura, 2013)

No ensino tradicional os alunos são meros espetadores que apenas recebem o conteúdo exposto nas aulas pelo professor. Neste paradigma, os alunos são agentes passivos e o professor é o protagonista.

No ensino com recurso às denominadas metodologias ativas, os papéis dos intervenientes invertem-se. Aqui o professor assume o papel de mediador o que coloca os alunos como protagonistas da sua aprendizagem.

Neste tipo de metodologias o uso de tecnologia é fundamental, tornando os ambientes de aprendizagem mais dinâmicos e atraentes para os jovens. Nos dias de hoje, em que se vive cercado de tecnologia é importante trazê-la para a rotina escolar sendo que, este é um dos grandes desafios que se colocam atualmente aos professores: a integração da tecnologia como ferramenta no ensino/aprendizagem dos alunos.

Dado que nestas metodologias a aprendizagem depende do próprio aluno são propiciadoras do desenvolvimento de capacidades como a autonomia e o sentido de responsabilidade e contribuem ainda para que os estudantes se envolvam mais na concretização das atividades propostas pelo professor promovendo assim a sua aprendizagem.

Existem diversas formas/estratégias para utilizar estas metodologias, por exemplo, aprendizagem baseada em projetos e/ou problemas, gamificação, sala de aula invertida.

Na secção seguinte aborda-se a estratégia da sala de aula invertida por ser a estratégia utilizada neste trabalho.

1.2. A sala de aula invertida

“A sala de aula invertida é uma modalidade de educação em que a performance do professor é transformada em sala de aula. Ao contrário do sistema tradicional, em que o professor apresenta o conteúdo em sala de aula e propõe tarefas de fixação extraclasse, a sala de aula invertida apresenta novos conceitos de aprendizagem e modernos métodos de ensino, o que avigora a autoaprendizagem.” (Oliveira, 2016)

A Sala de Aula Invertida, também conhecida por Flipped Classroom, tal como o próprio nome sugere, é uma metodologia de ensino que inverte a lógica de organização de uma sala de aula tradicional. Esta ideia não é nova, foi proposta por Lage, Platt e Treglia em 2000 mas existem registos de que foi utilizada pela primeira vez em 1996 na Universidade de Miami na disciplina de Microeconomia. Esta abordagem foi idealizada pelos autores após a observação de que o formato de aula tradicional não se revelava profícuo devido aos estilos de aprendizagem de alguns alunos. Também os professores de Química norte-americanos Jonathan Bergmann e Aaron Sams a utilizaram em 2007.

A ideia base é que o aluno se aproprie dos conceitos fundamentais antecipadamente, com o suporte de materiais fornecidos pelo professor, para que depois, o trabalho em sala de aula se centre, essencialmente, no esclarecimento de eventuais dúvidas e na resolução de problemas. Assim, nesta abordagem, o aluno estuda antes da aula e a aula torna-se um lugar de aprendizagem ativa, onde há perguntas, discussões e atividades práticas. O professor trabalha as dificuldades dos alunos, ao invés de apresentações sobre o conteúdo da disciplina (EDUCAUSE, 2012).

Esta metodologia apresenta como principal vantagem o ser centrada no aluno. O fato de este poder trabalhar com o material fornecido pelo professor antecipadamente e de o poder fazer ao seu ritmo, permite-lhe desenvolver uma melhor compreensão dos conceitos, o poder avançar e recuar as vezes que forem necessárias e dar especial atenção aos conteúdos em que apresenta maior dificuldade, são uma mais-valia. Outro aspeto importante é o facto de possibilitar a integração de mais tecnologia no ensino. No entanto, o tempo necessário para o professor preparar os materiais é elevado, pelo que este aspeto se apresenta como um entrave à implementação desta metodologia.

Não existe um modelo único de inverter a sala de aula, este pode ser personalizado, dentro dos pressupostos atrás mencionados, ao estilo e método do professor que o implementa. Para a fase pré-aula, o professor deve criar e/ou selecionar material relevante para o estudo autónomo dos seus alunos com foco nos conteúdos essenciais a trabalhar. Durante a aula, o professor pode observar e apoiar o trabalho dos alunos, dando *feedback* e apontando caminhos para uma melhor consolidação das aprendizagens.

1.3. Tecnologias digitais no ensino/aprendizagem da matemática

“A tecnologia é essencial no processo de ensino aprendizagem da matemática, influencia a matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos” (NCTM, 2000)

A evolução tecnológica das últimas décadas trouxe consigo muitas mudanças. A forma como se vive em sociedade alterou-se, as formas de comunicar evoluíram de tal forma que se pode afirmar que a distância entre as pessoas não passa de um mero aspeto físico. Os telemóveis, os computadores e a internet fazem com que essa distância não seja um obstáculo. Tudo, ou quase tudo, está à distância de um clique.

Na escola as inovações tecnológicas também marcam a sua presença, o quadro preto a giz foi substituído pelo quadro interativo, os manuais são agora digitais e até os testes manuscritos estão a dar lugar aos testes em suportes informáticos. Todo o processo de ensino/aprendizagem está a mudar. Aparecem novas formas de ensinar, mas também novas formas de aprender. Os meios tecnológicos facilitam a aprendizagem dos conteúdos por parte dos alunos, a explicação dos mesmos por parte dos professores e a introdução de metodologias ativas mais centradas nos alunos.

O uso adequado da tecnologia no processo de ensino/aprendizagem pode ser um agente motivador para novas aprendizagens e facilitador para estas sejam mais significativas, especialmente na disciplina de Matemática onde a sua utilização é cada vez mais recomendada não só em contexto de sala de aula, mas também como um auxiliar para estudo autónomo dos alunos.

As Aprendizagens Essenciais de Matemática A (MEC, 2018) referem que “desde o início do ensino secundário, a tecnologia deve ser usada de forma crítica e inteligente contribuindo para o

desenvolvimento de novas competências” reforçando ainda que “a tecnologia é uma ferramenta cada vez mais presente na sociedade e no mercado de trabalho e também um recurso essencial no ensino, ajudando os alunos a perceber as ideias matemáticas, a raciocinar, a resolver problemas e a comunicar.”

Como práticas essenciais este documento refere que “devem ser criadas condições de aprendizagem para que os alunos tenham oportunidade de:

- Tirar partido da utilização da tecnologia nomeadamente para experimentar, investigar, comunicar, programar, criar e implementar algoritmos
- Utilizar tecnologia para fazer verificações e resolver problemas numericamente, mas também para fazer investigações, descobertas, sustentar ou refutar conjeturas
- Utilizar a tecnologia gráfica, geometria dinâmica e folhas de cálculo, no estudo de funções”

No entanto não basta trazer a tecnologia para a escola é necessário fazê-lo adequadamente e de forma que esta represente efetivamente uma mais-valia no processo de ensino/aprendizagem da Matemática. Tal como refere Wolff (2013), “muitas são as oportunidades que o uso de softwares educacionais oferece ao ensino da Matemática, pode-se considerar como um meio para dinamizar a prática, no entanto, é importante ressaltar que somente o uso sem a reflexão, não proporciona uma mudança no direcionamento da prática, não é o ideal. Não adianta utilizar-se tecnologia se a metodologia é a mesma”. Assim, é necessário que a escola e os seus professores aceitem o desafio de mudar os seus métodos para aproveitar todas as potencialidades oferecidas pelas tecnologias digitais. Tornar o ambiente escolar mais tecnológico não tem de ser necessariamente sinónimo de equipar a escola com tecnologias de última geração. É necessário conhecer as potencialidades e preparar os professores para utilizar esses recursos adequadamente de forma a promover as aprendizagens dos alunos não só na sala de aula, mas também fora dela.

1.4. Aprendizagens Essenciais e Perfil do Aluno à Saída da Escolaridade Obrigatória

O Despacho nº 6605-A/2021, de 6 de Julho, procede à definição dos referenciais curriculares das várias dimensões do desenvolvimento curricular, incluindo a avaliação externa. Assim, a partir do ano letivo 2021/2022 os documentos a considerar são apenas os seguintes:

- O Perfil do Aluno à Saída do Ensino Secundário (PASEO) homologado pelo Despacho nº 6478/2017 de 26 de Julho;
- As Aprendizagens Essenciais (AE) homologadas pelo Despacho nº 8476-A/2018 de 31 de Agosto

Para a elaboração da proposta pedagógica que se apresenta nesta dissertação foram tidas em consideração as orientações constantes nos documentos mencionados acima.

O domínio das Funções Exponenciais é abordado apenas no ensino secundário mais concretamente no décimo segundo ano de escolaridade. Inicia-se com o estudo da função exponencial e das suas propriedades no conjunto dos números racionais mostrando-se depois que este tipo de função, através de passagens ao limite e de alguns resultados intuitivos, se pode estender ao conjunto dos números reais mantendo as mesmas propriedades algébricas. O cálculo da derivada da função exponencial é introduzido a partir do limite notável $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

Os descritores presentes nas AE relativos à função exponencial são os seguintes:

Domínio organizador: Funções exponenciais e logarítmicas
Conhecer as propriedades das funções reais de variável real do tipo $f(x) = a^x$, ($a > 0$): monotonia, sinal, continuidade, limites e propriedades algébricas;
Conhecer e aplicar os limites notáveis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k}$;
Conhecer e aplicar a derivada da função exponencial.

Tabela 1 - Descritores das AE de Matemática A (MEC, 2018)

No que se refere às práticas essenciais de aprendizagem, este documento diz que “devem ser criadas condições de aprendizagem para que os alunos, em experiências individuais e colaborativas, tenham oportunidade de:

- Comunicar, utilizando linguagem matemática, oralmente e por escrito, para descrever, explicar e justificar procedimentos, raciocínios e conclusões;
- Avaliar o próprio trabalho para identificar progressos, lacunas e dificuldades na sua aprendizagem”.

Estas práticas entroncam nas seguintes áreas e respetivas competências associadas descritas no PASEO:

- Linguagem e textos: utilizar e aplicar de modo proficiente diferentes linguagens e símbolos associados às línguas, à literatura, à música, às artes, às tecnologias, à matemática e à ciência;
- Informação e comunicação: utilizar e dominar instrumentos diversificados para pesquisar, descrever, avaliar, validar e mobilizar informação, de forma crítica e autónoma, verificando diferentes fontes documentais e a sua credibilidade; transformar a informação em conhecimento;
- Raciocínio e resolução de problemas: desenvolver processos conducentes à construção de produtos e de conhecimento, usando recursos diversificados;
- Pensamento crítico e pensamento criativo: convocar diferentes conhecimentos, de matriz científica e humanística, utilizando diferentes metodologias e ferramentas para pensarem criticamente;
- Relacionamento interpessoal: adequar comportamentos em contextos de cooperação, partilha, colaboração; trabalhar em equipa e usar diferentes meios para comunicar presencialmente e em rede;
- Desenvolvimento pessoal e autonomia: estabelecer relações entre conhecimentos; estabelecer objetivos, traçar planos e concretizar projetos, com sentido de responsabilidade e autonomia;
- Saber científico, técnico e tecnológico: compreender processos científicos.

2. O GeoGebra

“O *GeoGebra* tem assumido um papel cada vez mais preponderante na aprendizagem da Matemática. Para além de ser um software gratuito, a qualidade das suas ferramentas e permanente expansão têm sido os fatores mais significativos para a adoção deste software em detrimento de outros.” (Reis & Santos, 2022)

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica de distribuição livre destinado a todos os níveis de ensino e que reúne geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo. O seu nome resulta da combinação das palavras **Geometria** e **Álgebra**. De manipulação fácil e intuitiva, apresenta uma excelente visualização dos objetos. Foi desenvolvido em 2001 por Markus Hohenwarter aquando da realização do seu mestrado na Universidade de Salzburgo.

O GeoGebra é um software de código aberto, oferecendo acesso gratuito a uma ferramenta matemática de elevada qualidade. Por isso, a sua popularidade é cada vez maior, atualmente conta com uma comunidade de milhões de utilizadores em cerca de 190 países, está traduzido para 55 idiomas e o número de downloads mensais ascende os trezentos mil. Existem 62 institutos GeoGebra distribuídos por 44 países que desempenham um papel fundamental na divulgação do software e das suas aplicações, na reflexão sobre as suas potencialidades e na integração de novas funcionalidades. O seu criador já recebeu diversos prémios tanto na Europa como nos Estados Unidos da América.

O GeoGebra tem vindo a impor-se como uma ferramenta poderosa nas práticas dos professores de matemática de todos os níveis de ensino. A sua utilização pode contribuir para o desenvolvimento de práticas inovadoras no ensino e conseqüente melhoria na aprendizagem desta disciplina.

Atualmente o GeoGebra conta com sete aplicações distintas: Calculadora, Calculadora Gráfica, Calculadora 3D, Geometria, GeoGebra Clássico, Calculadora CAS e GeoGebra 3D Realidade Aumentada. Todas elas podem ser instaladas no computador, no telemóvel ou utilizadas online, com exceção da última que, dadas as suas características, apenas funciona no telemóvel. Destacam-se, na tabela 2, as principais características de cada uma dessas aplicações:

Aplicação	Caraterísticas
Calculadora	Desenhar gráficos, criar transformações, encontrar derivadas e integrais
Calculadora gráfica	Desenhar gráficos e resolver equações
Calculadora 3D	Representar funções 3D, superfícies e outros objetos em 3D
Geometria	Construir círculos, ângulos, transformações
GeoGebra clássico	Conjunto de aplicativos para geometria, folha de cálculo, probabilidade e CAS
Calculadora CAS	Resolver equações, manipular expressões, calcular derivadas e integrais
GeoGebra 3D realidade aumentada	Estudar formas geométricas tridimensionais visualizando-as no ambiente real

Tabela 2- Principais características das aplicações GeoGebra

2.1. O software GeoGebra Classic (versão 5.0)

Nesta secção faz-se uma breve apresentação do GeoGebra Clássico 5, na sua versão para computador. Este foi o software utilizado para a construção das atividades que compõem o livro dinâmico “A função exponencial”.

Como já foi referido, o GeoGebra é um software que combina diversas representações de um mesmo objeto. Por este motivo, a interface do utilizador contém componentes que não se encontram em outros softwares de matemática, está dividida em janelas que apresentam diferentes representações dos objetos. Por defeito, quando se inicia o programa, aparecem as janelas **Folha algébrica** e **Folha Gráfica 2D**. O utilizador pode dar entrada dos objetos em qualquer uma delas. Utilizando a barra de ferramentas podem adicionar-se objetos diretamente na folha gráfica, ou, em alternativa, no campo de entrada recorrendo à representação algébrica do objeto. A figura 1 apresenta a interface padrão do GeoGebra versão 5.0.625.0-d.

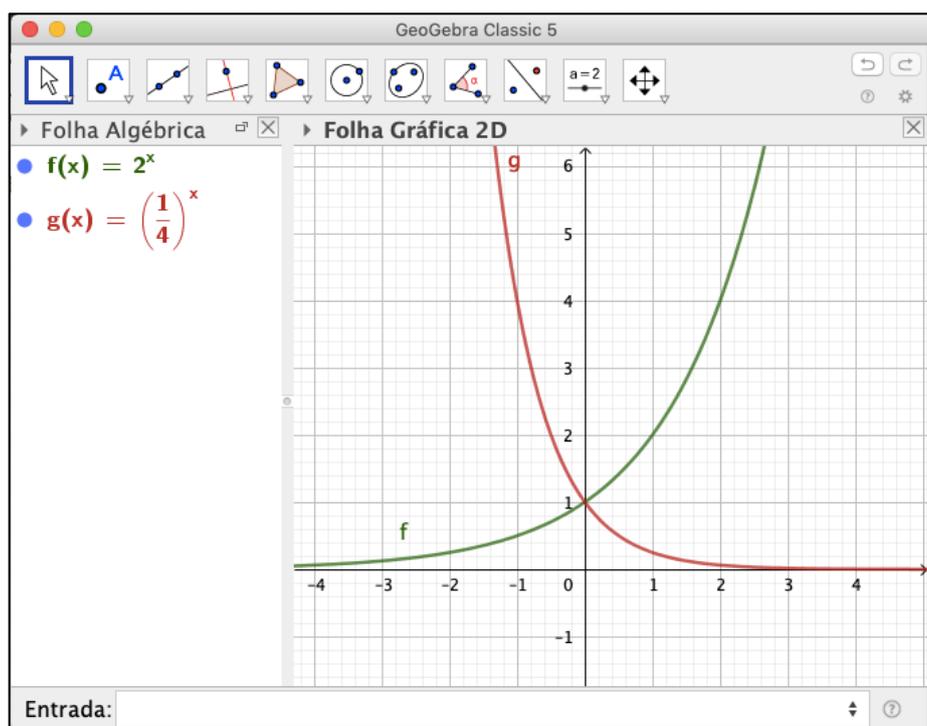


Figura 1- Interface do GeoGebra Classic versão 5.0 (janelas de Geometria e Álgebra)

A folha gráfica contém uma área de desenho onde são exibidas as representações geométricas dos objetos. Os eixos coordenados e a grelha, que aparecem por defeito, podem ser facilmente escondidos pelo utilizador. Para isso, selecciona-se o triângulo que se encontra ao lado de “**Folha Gráfica 2D**” e aparece uma Barra de Estilos onde o utilizador pode personalizar o estilo da folha gráfica como se mostra na figura 2.

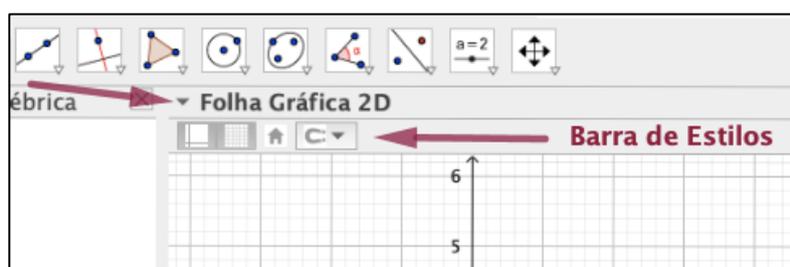


Figura 2 – Barra de Estilos

Na folha gráfica os objetos existentes podem ser modificados de forma simples, arrastando-os com recurso ao rato, e novos objetos podem ser criados recorrendo à “**Barra de Ferramentas**”. Esta barra é constituída por um conjunto de ferramentas agrupadas por tipologia (caixa de ferramentas) que possibilitam a execução de construções geométricas recorrendo exclusivamente à utilização do rato.

Para visualizar todas as ferramentas disponíveis dentro de cada topologia deve clicar-se no triângulo que se encontra no canto inferior direito que logo surge no ecrã uma janela que mostra todas as possibilidades, como se ilustra na figura 3.

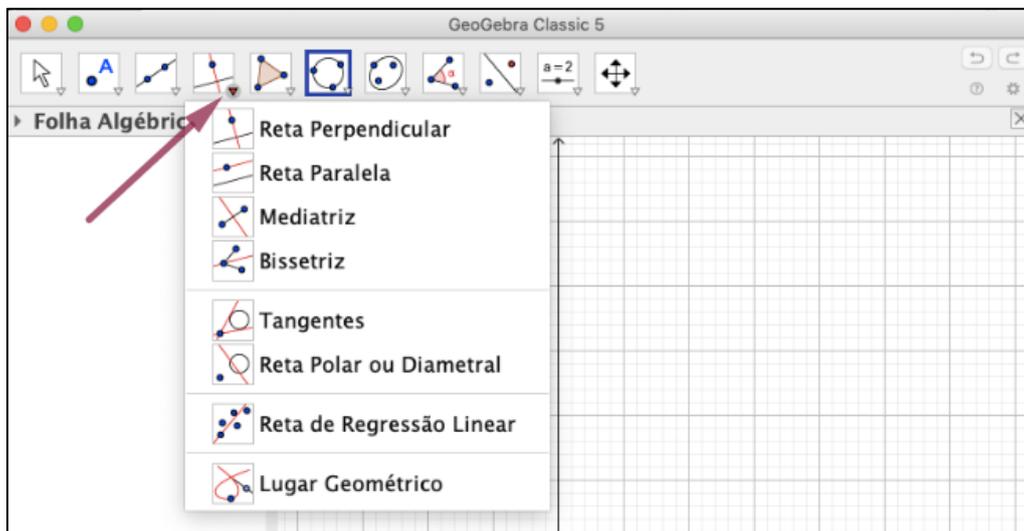


Figura 3- Janela de ferramentas na tipologia reta

Depois de seleccionada a ferramenta esta aparece destacada com rebordo azul o que significa que está ativada. Quando se arrasta o rato sobre ela, abre-se uma caixa de diálogo que exhibe algumas informações nomeadamente o nome da ferramenta e uma ajuda para a sua utilização como se pode ver na figura 4.

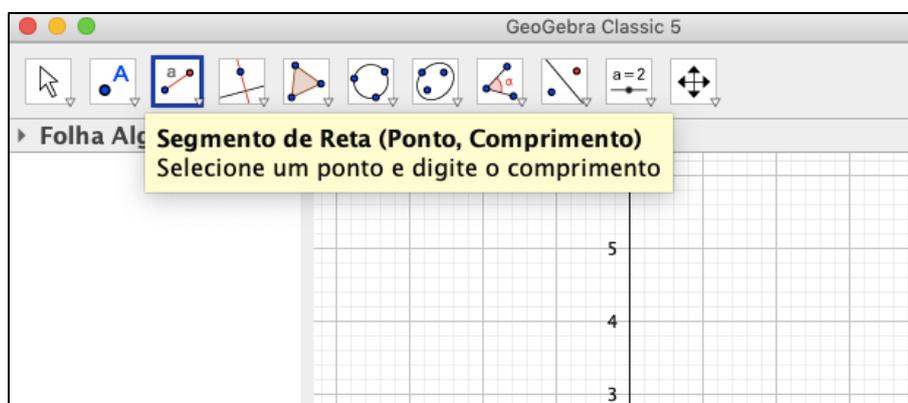


Figura 4 – Janela de informação da ferramenta **Segmento de Reta**

No apêndice I apresenta-se uma breve descrição das várias opções disponíveis na barra de ferramentas da Folha Gráfica 2D.

No canto direito da barra de ferramentas existem dois botões que permitem *Desfazer* e *Refazer* os últimos passos da construção possibilitando, ao utilizador, desfazer erros cometidos ao realizar a construção.

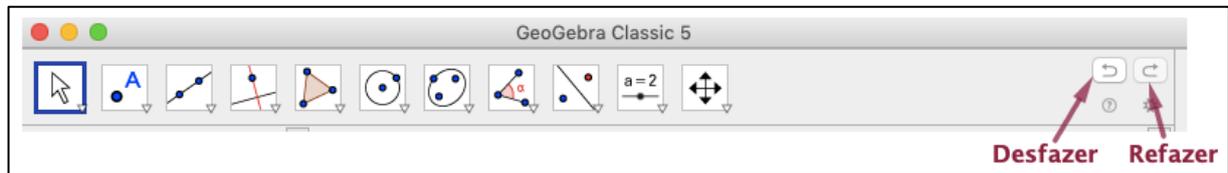


Figura 5 - Botões Desfazer e Refazer

Por baixo do botão Desfazer encontra-se um pequeno ponto de interrogação. Ao clicar sobre ele surge uma caixa de diálogo com uma ajuda relativa à ferramenta que está ativa.

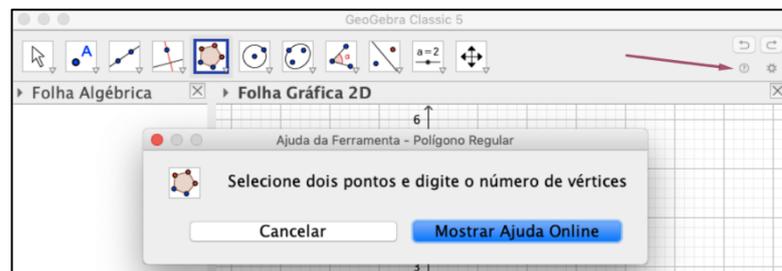


Figura 6 - Ajuda da ferramenta "Polígono Regular"

No que se refere à Folha de Álgebra, que aparece colocada no lado esquerdo da interface, esta contém as representações numéricas e algébricas dos vários objetos. Estas representações aparecem organizadas em três categorias:

- Objetos livres que podem ser diretamente modificados pelo utilizador pois não dependem de nenhum outro objeto;
- Objetos dependentes que são os resultados dos processos de construção e dependem de outros objetos. Apesar de não se poder modificar diretamente estes objetos, eles alteram-se quando os objetos livres que lhes dão origem são modificados;
- Objetos auxiliares que são utilizados para complementar a construção, imagens, e/ou para introduzir elementos interativos como botões ou caixas para entrada de texto por exemplo.

Na parte inferior da interface fica situado o campo de “**Entrada**” e, é neste local que se podem introduzir expressões algébricas diretamente pelo teclado e visualizar a respetiva representação geométrica na janela gráfica.

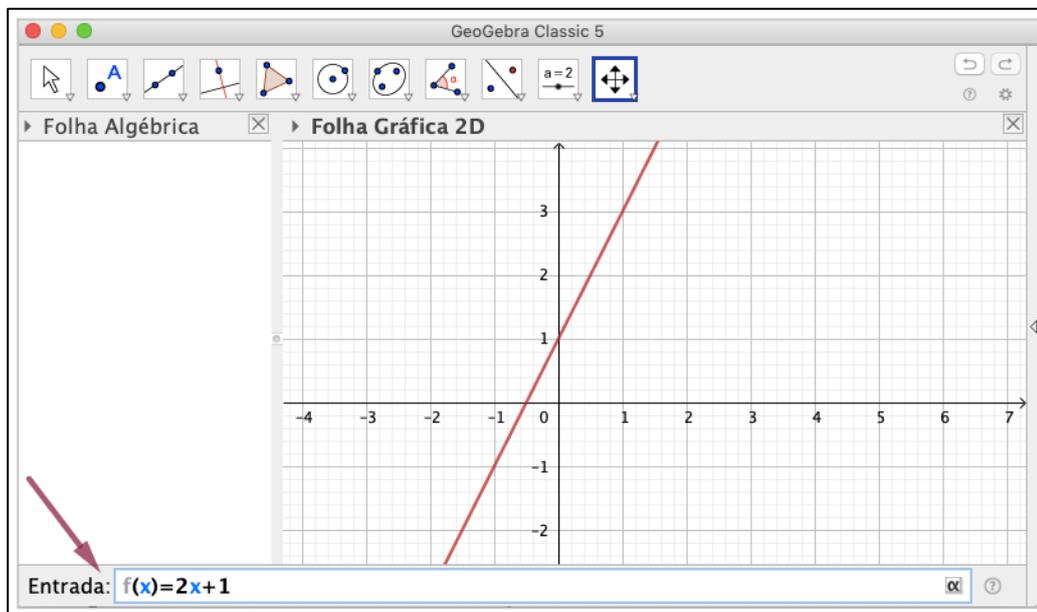


Figura 7 – Campo de entrada

Também é possível inserir comandos em língua materna pelo campo de entrada. Por exemplo se se digitar **Reta(A, B)** gera na janela gráfica uma reta que passa nos pontos A e B previamente definidos. O GeoGebra tem uma grande quantidade de comandos pré-definidos que podem ser aplicados em objetos já existentes ou para criar novos objetos.

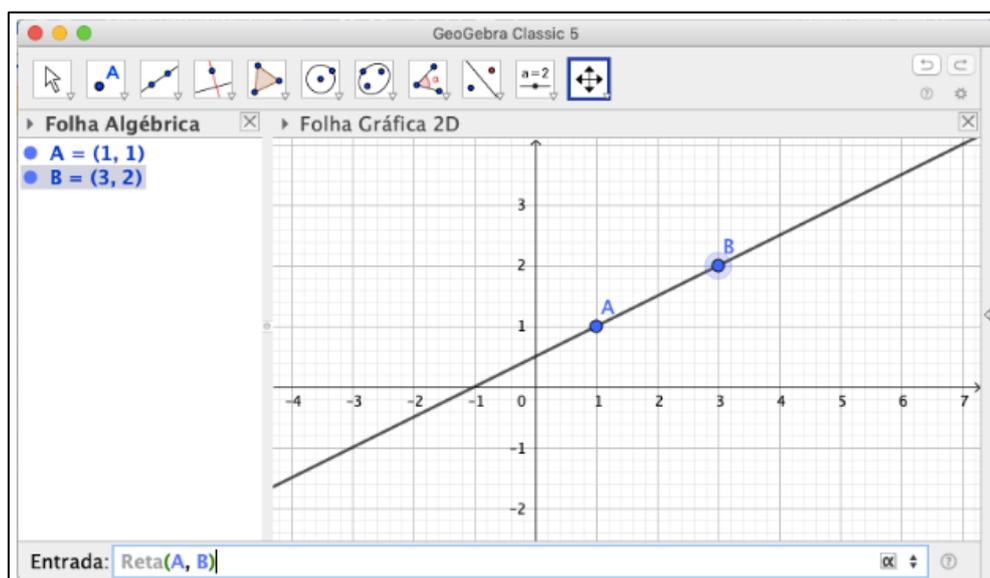


Figura 8 – Entrada direta de comandos em língua materna

Ao digitar o nome de um comando no campo de entrada surge uma caixa de diálogo que apresenta uma listagem de todos os comandos que começam pelas letras já digitadas e respetiva sintaxe.

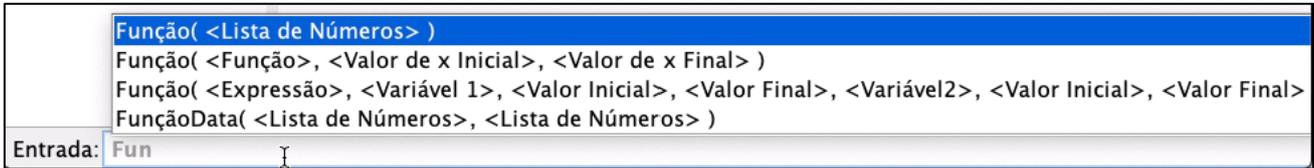


Figura 9 – Lista de comandos do GeoGebra começados por Fun

A interface do GeoGebra contém ainda uma Barra de Menu que fica situada por cima da barra de ferramentas. A partir das opções aqui disponíveis, o utilizador pode guardar, imprimir, exportar construções, alterar configurações padrão do programa, personalizar a barra de ferramentas entre outras opções.



Figura 10 – Barra de Menu

A partir do item Vista o utilizador pode personalizar a interface ocultando/mostrando folhas. Na figura seguinte podem ver-se as várias opções disponíveis.

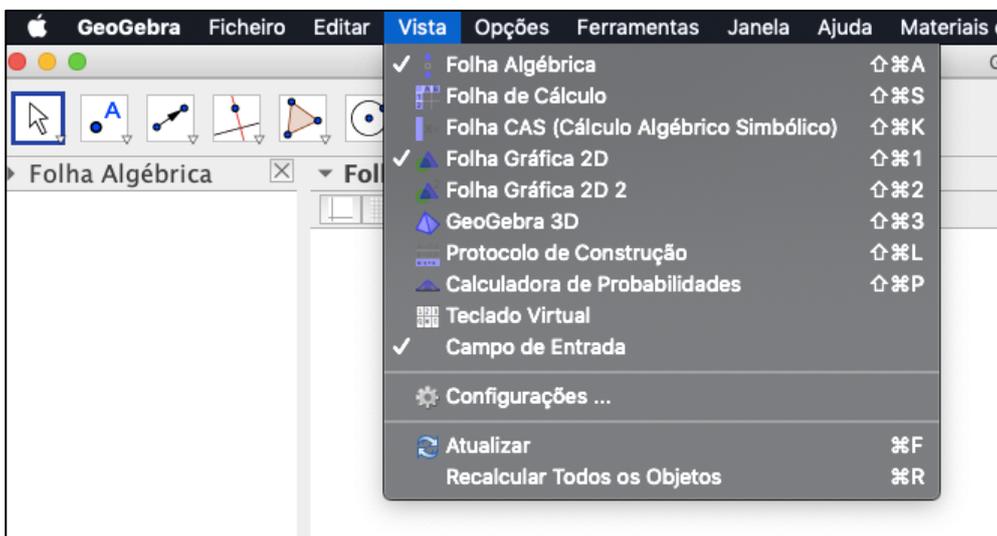


Figura 11 – Opções do item Vista da barra de menu

Desta forma a interface pode ser personalizada de acordo com as representações que se pretendem trabalhar. Nas figuras 12 e 13 apresentam-se duas das combinações possíveis.

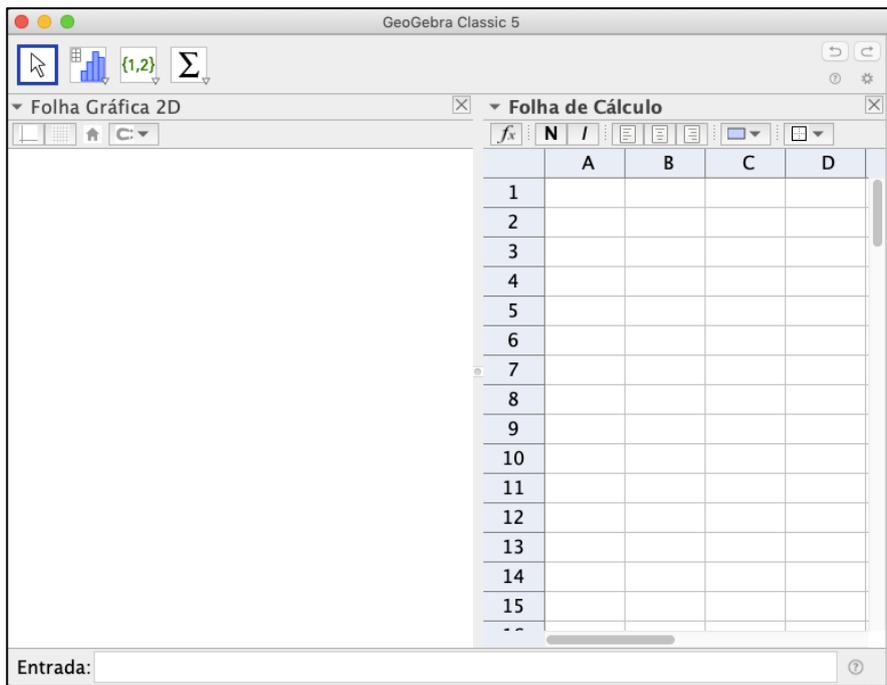


Figura 12 – Vista da Folha gráfica 2D e da Folha de Cálculo

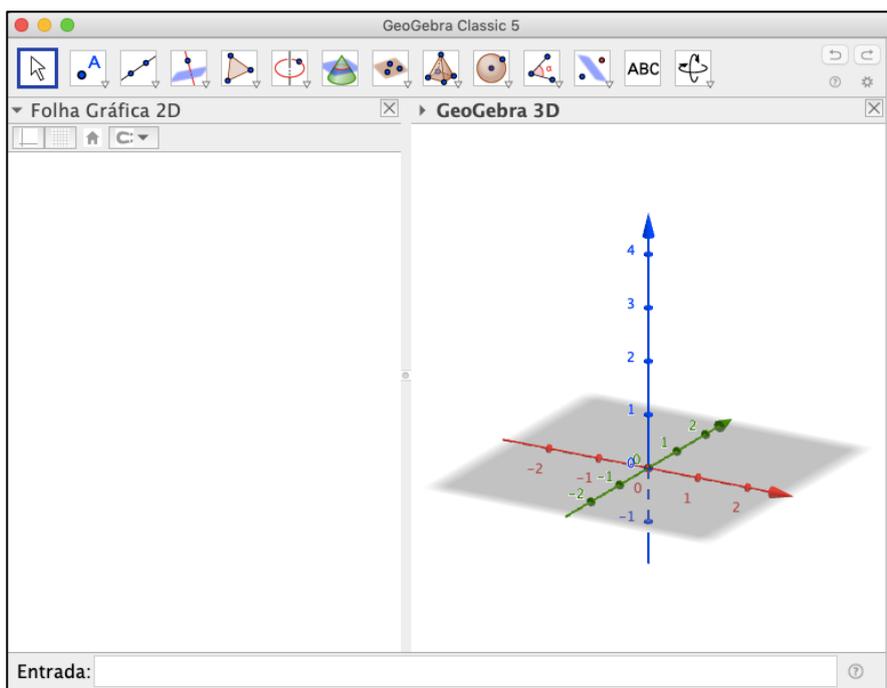


Figura 13 – Vista das folhas gráficas 2D e 3D

Repare-se que a barra de ferramentas varia consoante a folha que está ativa.

2.2. Possibilidades de exploração do GeoGebra

Percebe-se facilmente pela descrição da interface do GeoGebra e das suas ferramentas que este é um recurso de enorme potencial para integrar o processo de ensino/aprendizagem da Matemática. No entanto, tal como já foi referido, o software sozinho não ensina nada, é necessário que o professor produza tarefas para uma exploração eficaz das suas potencialidades. Apresentam-se a seguir algumas possibilidades para utilização/exploração do GeoGebra:

- Construções prontas: neste tipo de atividade o professor fornece aos alunos um arquivo com uma construção previamente elaborada e estes têm apenas de a manipular. Pode recorrer-se a atividades deste tipo quando se está perante um processo de construção trabalhoso e/ou quando para compreender o conceito que se pretende trabalhar não é necessário que seja o aluno a realizar a construção.
- Atividades que exigem construção: existem conceitos e propriedades matemáticas que são mais facilmente compreendidas quando se faz a respetiva construção. Numa situação destas, o professor deve disponibilizar aos alunos um tutorial para a construção e, orientações de como manipular a figura construída, para que se possam perceber as propriedades em estudo.
- Folhas de trabalho dinâmicas: são páginas da internet que contêm uma ou mais figuras dinâmicas, explicações e questões/tarefas para os alunos. Quando bem elaboradas podem contribuir significativamente para uma melhor compreensão de conceitos e propriedades uma vez que, dada a sua interatividade, permitem manipular os objetos. Este tipo de atividades podem apoiar a aprendizagem pela descoberta e/ou incentivar a autoaprendizagem. De referir ainda que, nas folhas de trabalho dinâmicas também é possível fazer construções dado que estas podem conter todas as ferramentas do GeoGebra. No entanto, é possível ir muito mais além, fazendo uso da interface JavaScript que o GeoGebra oferece, e criar exercícios interativos que verificam a resposta dos alunos e até fornecer algum feedback. As propostas constantes do livro dinâmico “A função exponencial” são maioritariamente deste tipo.

- Apresentações dinâmicas e/ou animações: esta é uma possibilidade menos explorada, mas de grande potencial. É possível, recorrendo ao GeoGebra, criar apresentações e/ou animações automáticas para a explicação de conteúdos recorrendo, por exemplo, ao protocolo de construção. A mais-valia destas apresentações é a de poderem incluir figuras dinâmicas e por isso serem manipuladas para uma melhor compreensão do que se está a apresentar.

2.3. A plataforma GeoGebra

Os exemplos apresentados na secção anterior não esgotam de forma alguma as possibilidades que o GeoGebra oferece. Atualmente existe muito material disponível na internet com sugestões de atividades, construções e até vídeos, que podem contribuir para o trabalho não só do professor, mas também dos alunos.

O próprio GeoGebra disponibiliza uma plataforma cujo endereço é www.geogebra.org onde existe muito material partilhado por utilizadores de todo o mundo e que pode ser utilizado e/ou adaptado. Podem encontrar-se lá propostas sobre os mais variados temas matemáticos e para todos os níveis de ensino. Na figura 14 apresenta-se a página de entrada da plataforma.

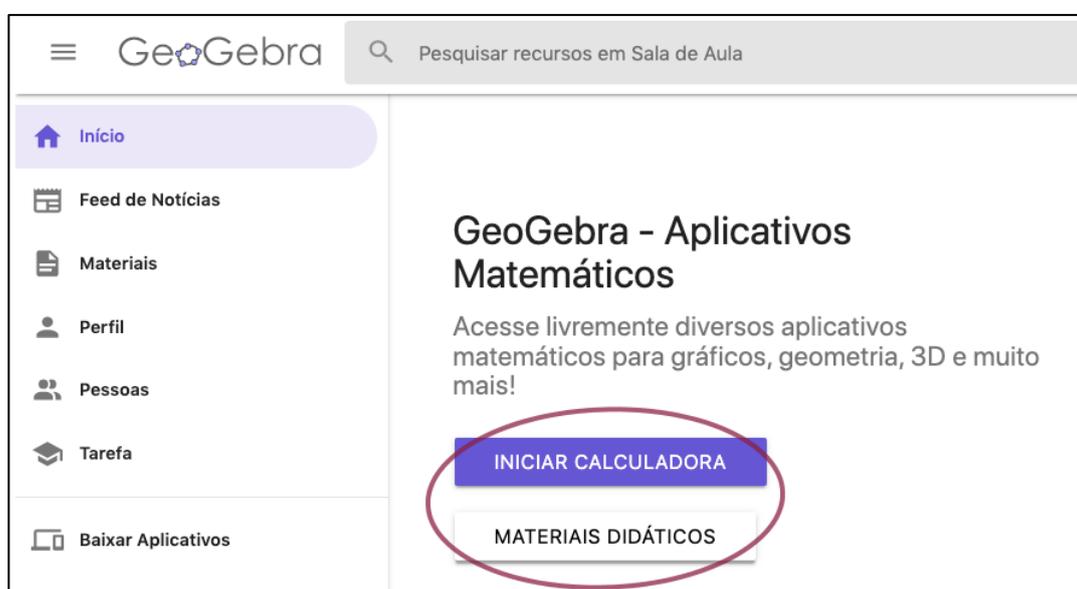


Figura 14 - Página de entrada da plataforma GeoGebra

Nesta página aparecem duas opções INICIAR CALCULADORA e MATERIAIS DIDÁTICOS. A primeira conduz à calculadora do GeoGebra e a segunda à página da plataforma onde se podem encontrar atividades construídas e disponibilizadas por outros utilizadores.

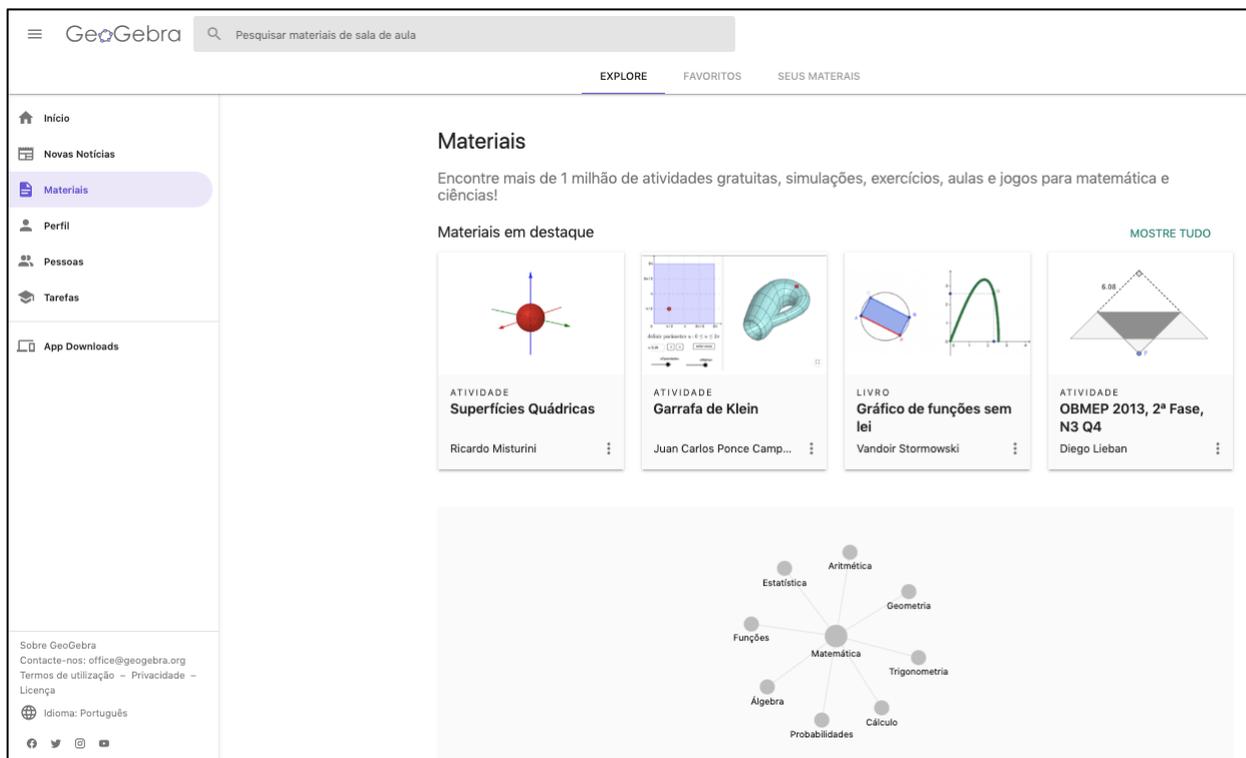


Figura 15 -Plataforma do GeoGebra – página de materiais

Para encontrar materiais sobre um conteúdo matemático específico pode proceder-se de duas formas, utilizando a barra de pesquisa situada no topo da página ou recorrendo ao mapa de tópicos matemáticos. Neste mapa podem encontrar-se várias opções, ao selecionar uma delas, surge novo mapa que permite ir aprimorando a pesquisa conforme se pode ver na figura 16.

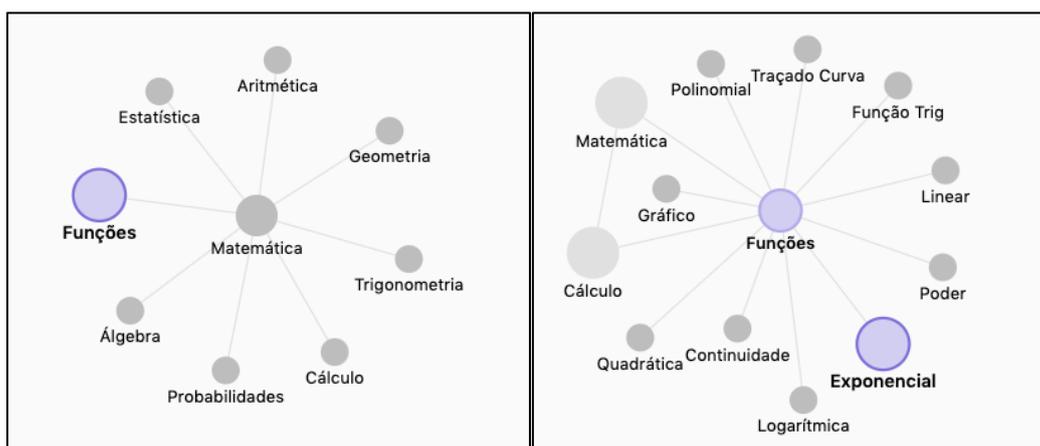


Figura 16 - Mapas de tópicos matemáticos inicial e relativo ao tema funções da plataforma do GeoGebra

As potencialidades desta plataforma não se esgotam com a disponibilização de materiais e das aplicações online, vai muito mais além. É possível, com as ferramentas aqui disponíveis, criar livros digitais dinâmicos. Estes livros são a compilação de atividades já existentes na plataforma ou concebidas para integrar um livro. Assim, cada página do livro corresponde a uma atividade que pode conter para além de applets criados com o GeoGebra, textos, imagens, questões de escolha múltipla ou de resposta aberta, arquivos em pdf, vídeos, ligações a outras páginas web ou o GeoGebra Notes.

O que distingue um livro digital dinâmico de um livro digital clássico é o facto de as várias representações dos objetos matemáticos estarem conectadas e, quando se altera uma delas, a(s) outra(s) ajusta(m)-se simultaneamente. Na figura seguinte apresenta-se uma página do livro “A função exponencial” onde se pode visualizar esta característica. Ao movimentar o seletor do rato, ambas as representações, simbólica (algébrica) e visual (geométrica) da função se atualizam. Este aspeto pode ajudar os alunos a compreender melhor e mais rapidamente a relação existente entre estas representações.

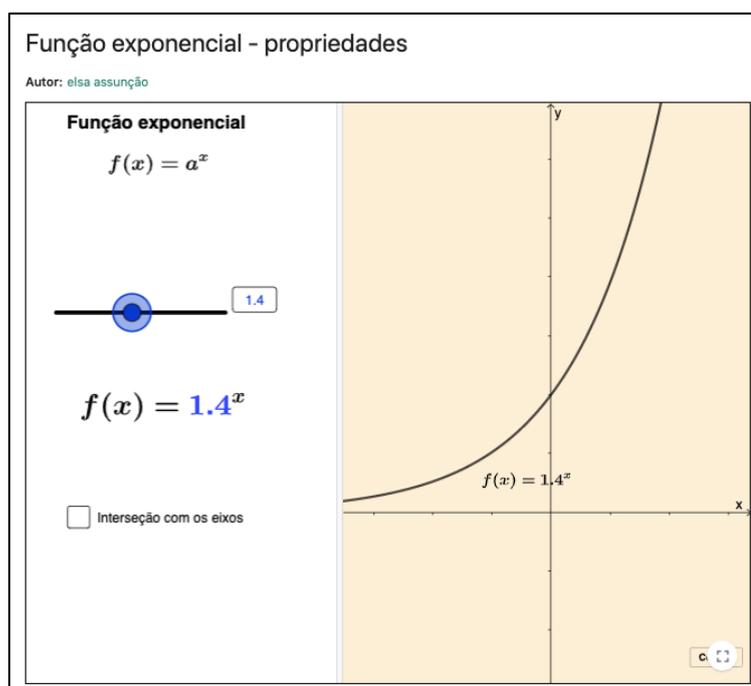


Figura 17 - Página do livro "A função exponencial"

Outra característica importante é o facto de os textos constantes dos applets poderem ser, eles próprios, dinâmicos. Textos dinâmicos são textos que contêm simbologia matemática e variáveis que podem ser alteradas pelo utilizador através da manipulação de outros registos relacionados com o texto. No exemplo apresentado na imagem anterior o texto apresentado para definir

algebricamente a função exponencial possui estas características. Quando se movimenta o seletor a base da potência altera-se. Também é possível realizar cálculos automáticos dentro do próprio texto recorrendo a valores ou medidas dos objetos que fazem parte do applet GeoGebra. Os resultados destes cálculos são atualizados sempre que esses objetos forem alterados. Este tipo de textos são uma mais-valia para a elaboração de exercícios dinâmicos, apresentação de demonstrações, definições, propriedades ou exemplos. Esta particularidade foi utilizada na elaboração de algumas das atividades que compõem o livro dinâmico “A função exponencial”. Outra característica importante é o facto de o texto poder não estar totalmente visível, ou seja, pode fazer-se o texto ir aparecendo à medida que o applet é manipulado. Para este efeito, recorre-se a um seletor ou a um botão.

2.4. O GeoGebra Classroom

“O conjunto de todas as plataformas associadas ao GeoGebra estão automatizando e levando mais longe as capacidades deste software, aproximando as suas características de um LMS, tornando o software, junto com as suas plataformas associadas, um ecossistema amigável e com potencialidades de eficácia para o ensino e aprendizagem da matemática e das ciências.” (Santos & Reis, 2022)

O GeoGebra Classroom é uma das várias ferramentas disponíveis na plataforma do GeoGebra e, tal como o nome indica, simula uma sala de aula virtual. Foi concebido para ser utilizado em conjunto com outras plataformas de ensino à distância, como por exemplo o Zoom, mas com potencialidades para ser utilizado sozinho.

A sua utilização é bastante intuitiva. Os professores podem interagir virtualmente com os alunos, tanto em modo síncrono como assíncrono e acompanhar o trabalho realizado por cada um.

Assim, o GeoGebra Classroom é um recurso que pode ajudar o professor a motivar os alunos para a resolução de atividades em tempo real. Uma atividade pode ser constituída por várias atrefas, incluir applets, questões abertas ou de escolha múltipla, textos vídeos ou ligações para outras páginas

da internet. Mesmo à distância, o professor, consegue verificar quais as habilidades que foram ou não desenvolvidas, quais as estratégias que os alunos utilizaram na resolução das tarefas propostas, e onde é que os alunos apresentaram maiores dificuldades, entre outras possibilidades. Ao professor é dada a possibilidade de ter uma visão geral de todas as tarefas propostas ou de cada tarefa individualmente. A visão geral inicial mostra o que os estudantes estão a fazer sendo possível visualizar o progresso de cada aluno conforme se pode observar na figura 18.

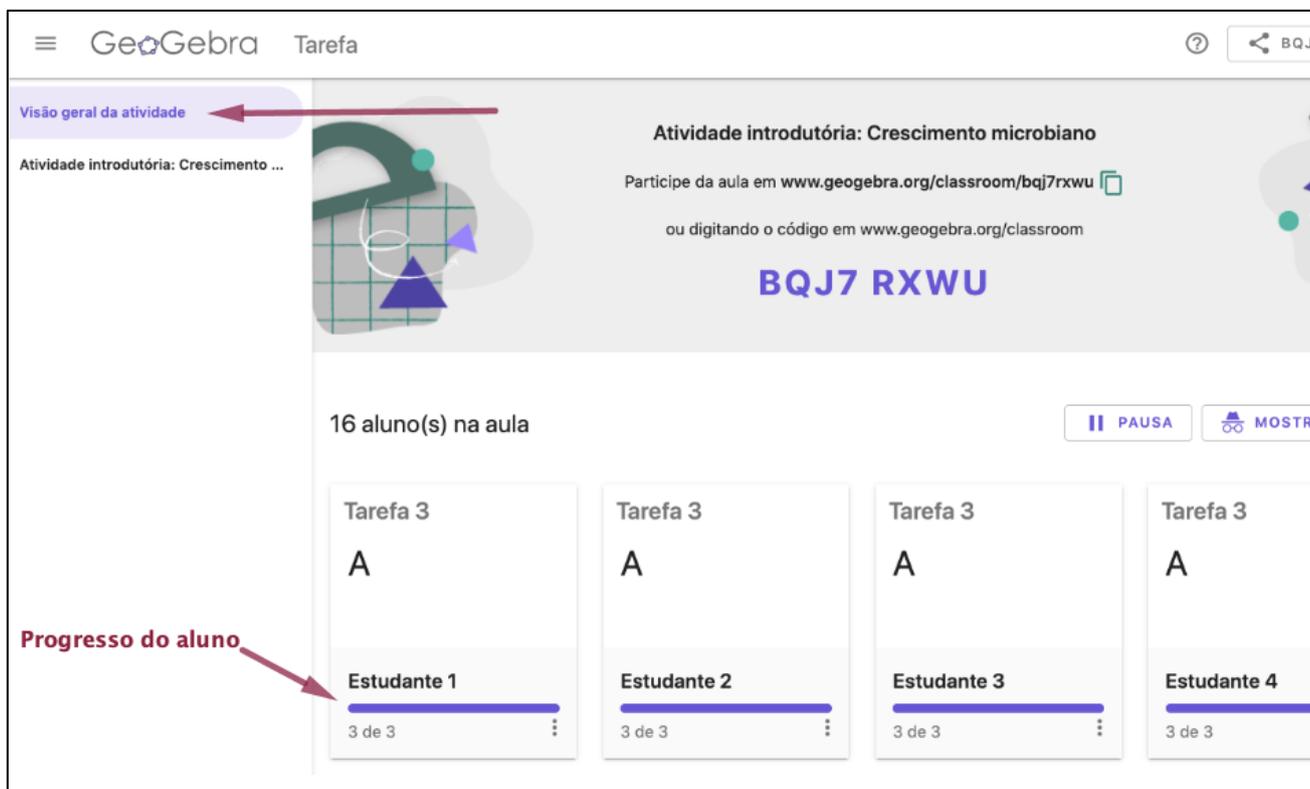


Figura 18 - Visão geral da atividade

A visão geral das tarefas mostra ao professor qual o estado de concretização das tarefas pelos alunos através de uma barra de estado que vai sendo atualizada à medida que os alunos vão realizando o seu trabalho.

A visão geral de cada tarefa, figura 19, permite observar o que os alunos já realizaram de uma tarefa específica, fornecendo ao professor informação de forma que este possa decidir qual o *feedback* a dar a cada estudante.

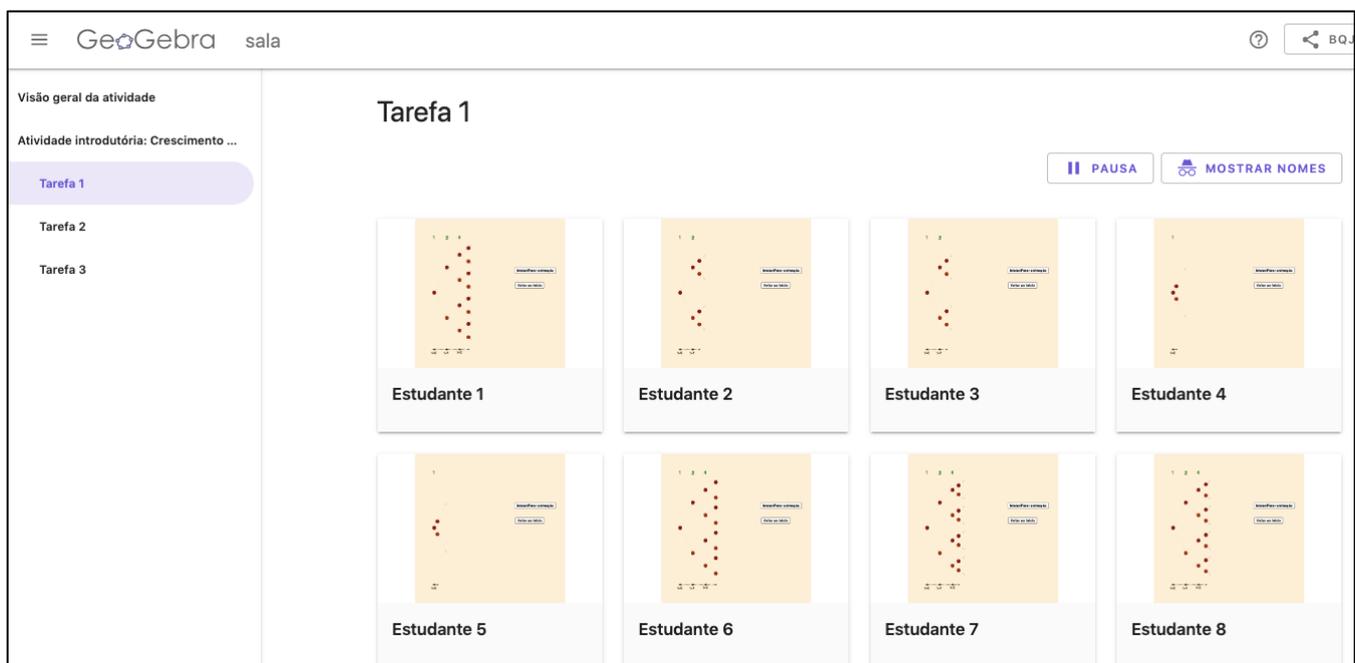


Figura 19 - Visão geral da tarefa 1 da atividade "Crescimento microbiano"

De entre as características desta ferramenta destacam-se as seguintes: para um aluno realizar uma tarefa não necessita de ter uma conta na plataforma do GeoGebra, basta aceder pelo código ou endereço fornecido pelo professor; a interação entre o professor e os alunos pode ser realizada em modo síncrono ou assíncrono; a rápida verificação por parte do professor do progresso dos alunos na realização de uma atividade; as tarefas criadas ficam armazenadas no perfil do professor e este tem a possibilidade de as organizar numa pasta específica para uma determinada turma; o aluno pode fechar uma tarefa e retomá-la posteriormente para continuar uma resolução ou mesmo refazê-la na totalidade, caso ele tenha uma conta na plataforma e tenha acedido à tarefa a partir desta; possibilidade de gerar uma tarefa a partir de atividades (folhas de trabalho ou livro) constantes do seu perfil ou utilizar atividades prontas disponibilizadas no modo público na plataforma do GeoGebra.

3. Função exponencial

Neste capítulo apresentam-se os conteúdos a lecionar aos alunos relativos ao tema da função exponencial. Os argumentos aqui apresentados são baseados nos manuais de matemática A para o décimo segundo ano de escolaridade atualmente em vigor, e nas aprendizagens essenciais da disciplina.

Como conhecimentos prévios, os alunos apenas conhecem a noção de potência de expoente racional ($a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, com n natural e m inteiro) e respetivas propriedades. A prova de alguns dos resultados apresentados não faz parte das aprendizagens dos alunos neste nível de escolaridade sendo, por isso, referidas de forma intuitiva, recorrendo a gráficos e/ou a exemplos.

3.1. Potências de expoente irracional

Nesta secção apresenta-se uma explicação que permite atribuir significado a potências cujo expoente é um número irracional.

Para definir potência de expoente irracional, começa por se referir que qualquer número irracional é o limite de uma sucessão de números racionais. Este conceito não é de todo intuitivo, mas consegue-se ilustrar através de enquadramentos. Veja-se o seguinte exemplo.

Qual o significado da expressão $2^{\sqrt{3}}$?

$\sqrt{3}$ é um número irracional, como tal, corresponde a uma dizima infinita não periódica,

$\sqrt{3} = 1,732\ 050\ 807\ \dots$ e pode ser aproximado por sucessões de números racionais.

A construção do número irracional $\sqrt{3}$ como limite de uma sucessão de números racionais pode ser feito recorrendo ao procedimento que se descreve de seguida.

Considerem-se as seguintes sucessões:

(u_n) : maior número racional com n algarismos cujo quadrado é menor que 3

(v_n) : menor número racional com n algarismos cujo quadrado é maior que 3

O primeiro termo de cada uma destas sucessões será 1 e 2, respetivamente, dado que:

$$1^2 < 3 \text{ e } 2^2 > 3$$

De seguida escolhe-se o maior algarismo d_1 , com $0 \leq d_1 \leq 9$, tal que $(1, d_1)^2 < 3$

O segundo termo de cada uma das sucessões será: $u_2 = 1, d_1$ e $v_2 = u_2 + 0,1$

O algarismo seguinte, d_2 , é escolhido pelo mesmo processo de d_1 , ou seja, tal que $(1, d_1 d_2)^2 < 3$

Assim, o terceiro termo de cada uma das sucessões será: $u_3 = 1, d_1 d_2$ e $v_3 = u_3 + 0,01$.

Para encontrar os termos seguintes basta continuar este processo.

Na tabela 3 apresentam-se os primeiros oito primeiros termos de cada uma destas sucessões e respetivos quadrados:

(u_n)	(v_n)	$(u_n)^2$	$(v_n)^2$
1	2	1	4
1,7	1,8	2,89	3,24
1,73	1,74	2,9929	3,0276
1,732	1,733	2,999824	3,003289
1,7320	1,7321	2,99982400	3,00017041
1,73205	1,73206	2,9999972025	3,0000318436
1,732050	1,732051	2,999997202500	3,000000666601
1,7320508	1,7320509	2,99999997378064	3,00000032019081

Tabela 3 - Primeiros 8 termos das sucessões (u_n) , (v_n) , $(u_n)^2$ e $(v_n)^2$

Decorre da forma como foram definidas que, a sucessão (u_n) é monótona crescente e a sucessão (v_n) é monótona decrescente e que ambas são limitadas. Logo, as duas sucessões são convergentes sendo $\sqrt{3}$ o seu limite comum uma vez que $(u_n)^2$ e $(v_n)^2$ convergem ambas para 3.

A partir de (u_n) e (v_n) podem construir-se as sucessões: $w_n = 2^{u_n}$ e $t_n = 2^{v_n}$.

Entende-se por $2^{\sqrt{3}}$ como sendo $\lim w_n = 2^{\lim u_n}$ ou $\lim t_n = 2^{\lim v_n}$ ficando assim justificada a sua existência.

De uma forma geral:

Dado um número real positivo, a , e um número irracional x , se (r_n) é uma sucessão de números racionais de limite x , a sucessão a^{r_n} é convergente, representando-se o seu limite por a^x .

Como o limite de uma sucessão convergente é único, fica assim atribuído significado à expressão a^x , para a positivo e x irracional.

3.2. Função exponencial em \mathbb{R}

Dado um número real $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, a função definida em \mathbb{R} por: $f(x) = a^x$, designa-se por **função exponencial de base a** .

Na tabela 4 apresentam-se as propriedades desta função.

Propriedades da função exponencial de base a		
	$a > 1$	$0 < a < 1$
Domínio	\mathbb{R}	
Contradomínio	\mathbb{R}^+ <ul style="list-style-type: none"> $\forall_{x \in \mathbb{R}}, a^x > 0$ a função f não tem zeros pelo que a equação $a^x = 0$ é impossível em \mathbb{R} 	
Injetividade	A função f é injetiva $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y, \forall_{x,y \in \mathbb{R}}$	
Continuidade	A função f é contínua	
Gráfico		
Monotonia	f é estritamente crescente em \mathbb{R} $x < y \Leftrightarrow a^x < a^y, \forall_{x,y \in \mathbb{R}}$	f é estritamente decrescente em \mathbb{R} $x < y \Leftrightarrow a^x > a^y, \forall_{x,y \in \mathbb{R}}$
Limites	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$
Assíntotas	A reta de equação $y = 0$ é uma assíntota ao gráfico de f	

Tabela 4 – Propriedades da função exponencial

3.3. Limites notáveis

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ ¹

Justificação

Quando se calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$, obtém-se uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Considerando a função real de variável real $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, e analisando os valores que se obtêm para as imagens da função quando x toma valores muito próximos de zero constata-se que esta parece tender para um, como se pode ver nas tabelas 5 e 6.

x	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001	-0,00001	-0,000001
$\frac{e^x - 1}{x}$	0,95162582	0,99501663	0,99950017	0,99995	0,999995	0,9999995

Tabela 5 - Valores da função quando x tende para zero por valores inferiores a zero

x	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001
$\frac{e^x - 1}{x}$	1,05170918	1,00501671	1,00050017	1,00005	1,000005	1,0000005

Tabela 6 - Valores da função quando x tende para zero por valores superiores a zero

A análise da representação gráfica da função $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ (figura 20) reforça a conjectura de que

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

¹ Apresenta-se uma justificação em vez de uma demonstração devido ao facto da demonstração requerer conhecimentos para além dos exigidos nesta etapa do 12º ano

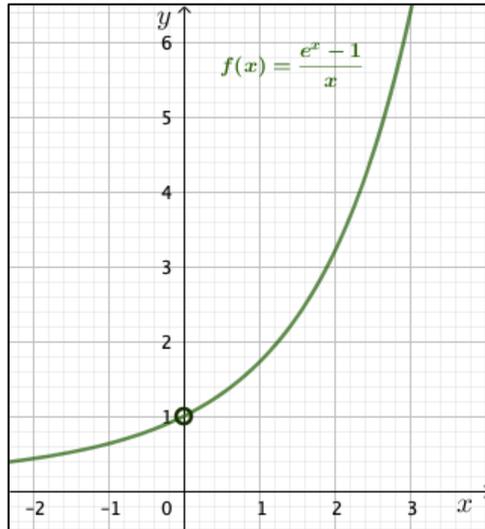


Figura 20 - Representação gráfica da função

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty, k \in \mathbb{R}$$

Demonstração

Considere-se a função definida por $f(y) = \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y$ definida em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

$f(y)$ é crescente e $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = e$.

Se $k \in \mathbb{R}^+$:

$$f\left(\frac{k+1}{x}\right) = \left(1 + \frac{1}{\frac{k+1}{x}}\right)^{\frac{k+1}{x}} = \left(1 + \frac{x}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{x}} \leq e$$

$$\left[f\left(\frac{k+1}{x}\right)\right]^x = \left(1 + \frac{x}{k+1}\right)^{k+1} \leq e^x$$

$$\text{Então, } \left(\frac{x}{k+1}\right)^{k+1} \leq \left(1 + \frac{x}{k+1}\right)^{k+1} \leq e^x$$

$$\left(\frac{x}{k+1}\right)^{k+1} \leq e^x \Leftrightarrow \frac{x^{k+1}}{(k+1)^{k+1}} \leq e^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^k \times x}{(k+1)^{k+1}} \leq e^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x}{x^k} \geq \frac{x}{(k+1)^{k+1}}$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(k+1)^{k+1}} = +\infty$, podemos concluir que, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty$.

Se $k = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

Se $k \in \mathbb{R}^-$:

$$k < 0 \Rightarrow -k > 0$$

$$\text{Então, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \times x^{-k} = +\infty \times (+\infty) = +\infty$$

3.4. Derivada da função exponencial de base e

1. A função exponencial é diferenciável em \mathbb{R} sendo: $(e^x)' = e^x$.

Demonstração

Seja $f(x) = e^x$ uma função definida em \mathbb{R}

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} e^x \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \\ &= e^x \times 1 = e^x \end{aligned}$$

2. Sendo u uma função real de variável real, $(e^u)' = u' e^u$.

Demonstração

Se $u = g(x)$ e $f(x) = e^x$ então $(f \circ g)(x) = e^u$

Pela regra da derivada da função composta tem-se:

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x)) = g'(x) \times e^{g(x)} = u' e^u.$$

4. O livro dinâmico “A função exponencial”

Neste capítulo apresenta-se a descrição do livro dinâmico concebido para este trabalho e das várias atividades que o compõem.

Tal como já foi referido anteriormente, este livro foi pensado para ser usado numa perspetiva de sala de aula invertida, pelo que as atividades que se propõem foram idealizadas para estimular a aprendizagem autónoma dos alunos e a sua autorregulação.

O livro dinâmico está disponível na plataforma do GeoGebra e pode ser visualizado através do endereço: <https://www.geogebra.org/m/z9angd4p>.



Figura 21 - Página inicial do livro "A função exponencial"

Está organizado em seis capítulos: os capítulos 1, 2, 3 e 5 contêm as atividades fornecidas aos alunos para realizarem o seu estudo autónomo na fase pré-aula. Os capítulos 4 e 6 contêm as fichas de trabalho que foram aplicadas em sala de aula e respetivas propostas de resolução. Inclui ainda um capítulo prévio, onde é feita a apresentação do livro, e um capítulo final onde consta a bibliografia utilizada para a construção das atividades.

4.1. Descrição das atividades do “Capítulo 1 – Ponto de partida”

Este capítulo é constituído por duas atividades, como mostra a figura seguinte, e pode ser visualizado na plataforma do GeoGebra através do endereço: <https://www.geogebra.org/m/z9angd4p#chapter/804346>



Figura 22 - Capítulo 1: Ponto de partida

Com a realização das atividades que compõem este capítulo pretende-se dar sentido à expressão “crescimento exponencial” e relacionar esse crescimento com as progressões geométricas.

4.1.1. Atividade introdutória: Crescimento microbiano

Esta atividade pode ser acedida diretamente através do endereço <https://www.geogebra.org/m/z9angd4p#material/shymg2xe> e é composta por três tarefas. O objetivo é contextualizar o crescimento exponencial e relacioná-lo com as progressões geométricas estudadas no décimo primeiro ano.

A atividade inicia-se com um texto introdutório sobre o crescimento microbiano de forma a contextualizar o crescimento exponencial, seguido de uma animação que pretende ilustrar a situação descrita. A primeira tarefa a realizar pelos alunos é a leitura do texto e a visualização da animação.

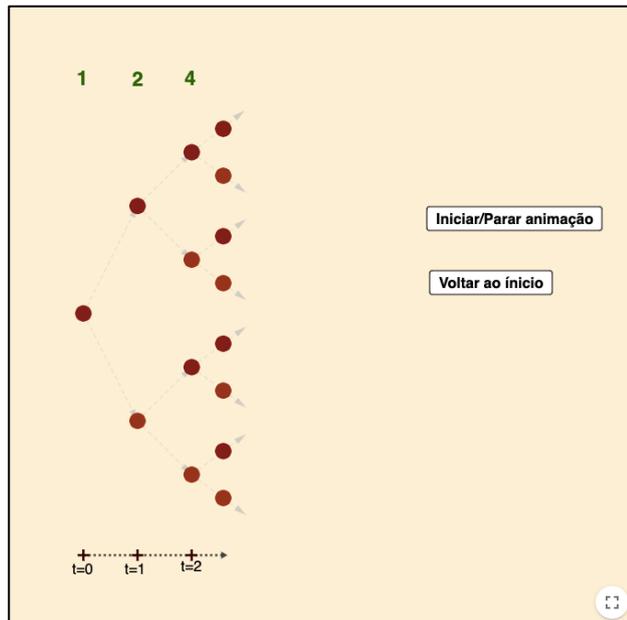


Figura 23 - Atividade introdutória: crescimento microbiano - Animação da tarefa 1

Com a segunda tarefa, uma questão de resposta curta, pretende-se que os alunos cheguem a uma expressão algébrica que traduza a situação apresentada.

Ao fim de t períodos de 15 minutos qual será a expressão que traduz o número de indivíduos da população?

Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Figura 24 - Tarefa 2 da atividade "crescimento bacteriano"

Na terceira tarefa pretende-se que o aluno generalize a situação descrita para o caso de a cultura se iniciar com mais do que um microrganismo.

Uma expressão para determinar o número aproximado de microrganismos no instante t , medido em minutos, poderá ser:

Assinale a sua resposta aqui

A $N(t) = N_0 \times 2^{15t}, t \geq 0$

B $N(t) = N_0 + 2^{15t}, t \geq 0$

C $N(t) = N_0 \times 2^{15t}, t \geq 0$

D $N(t) = N_0 + 2^{15t}, t \geq 0$

VERIFIQUE MINHA RESPOSTA (3)

Figura 25 - Tarefa 3 da atividade "crescimento bacteriano"

4.1.2. Exercício

Esta atividade pode ser diretamente acessada através do endereço <https://www.geogebra.org/m/z9angd4p#material/bf8c8afu>.

Com a realização desta atividade pretende-se que os alunos manipulem algebricamente a função $N(x) = 50 \times 2^{\frac{x}{15}}$. É composta por cinco tarefas (questões) que os alunos devem realizar no seu caderno diário e depois submeter foto da resolução.

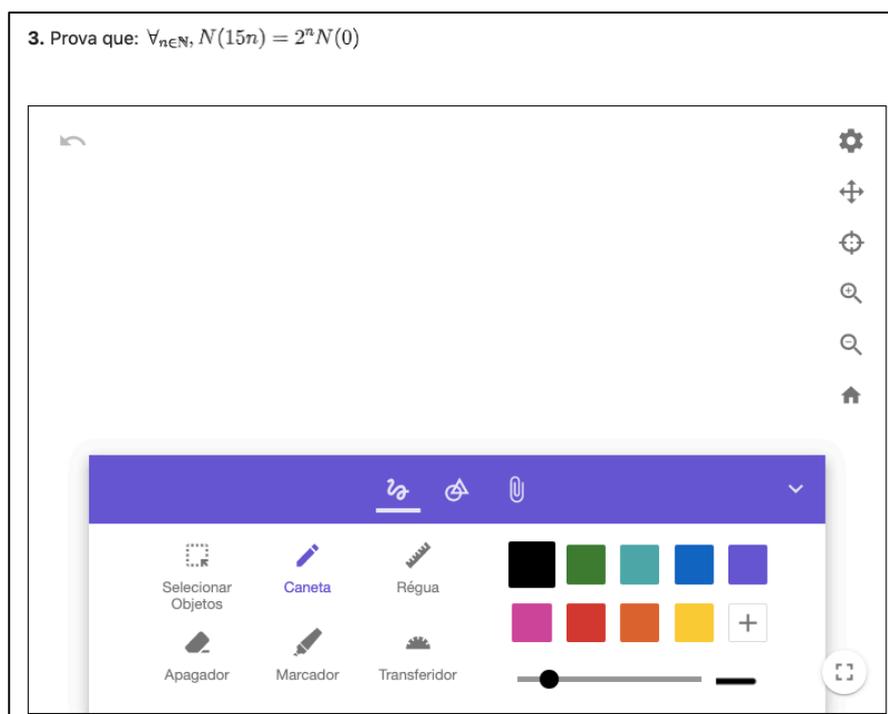


Figura 26 - Tarefa 3 da atividade "Exercício"

Os applets que compõem as tarefas desta atividade foram criados com recurso ao GeoGebra Notes. Para submeter a resposta deve seleccionar-se sequencialmente o clip na barra azul e depois a opção "camara" como se mostra na figura 27.

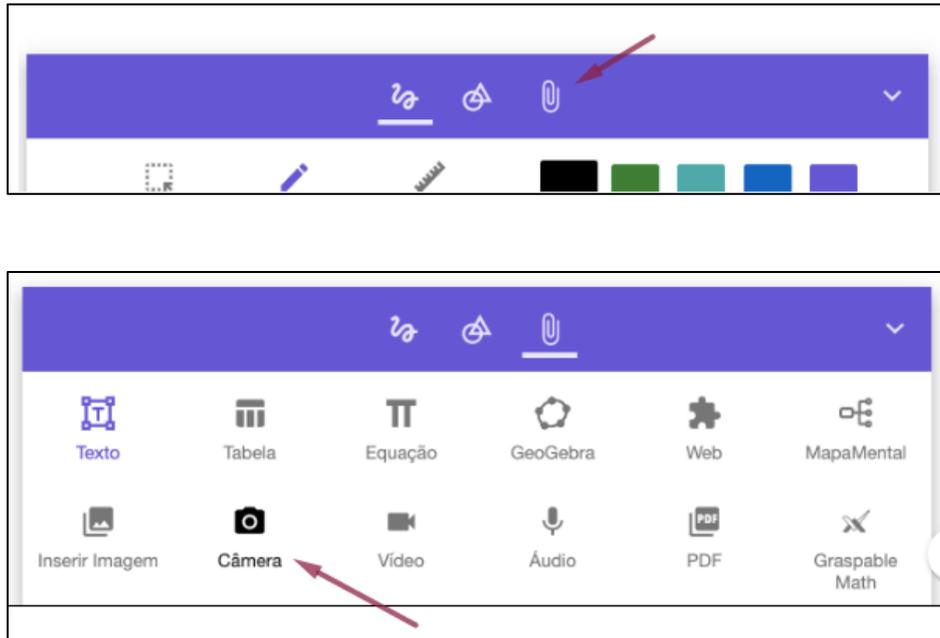


Figura 27 – Passos para a submissão de respostas no GeoGebra Notes

4.2. Descrição das atividades do “Capítulo 2 – Potências de expoente irracional”

Este capítulo é composto por duas atividades, como se mostra na figura seguinte, e pode ser visualizado na plataforma do GeoGebra através do seguinte endereço: <https://www.geogebra.org/m/z9angd4p#chapter/804347>.

Cap. 2 - Potências de expoente irracional

- 1) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, a^0 = 1$
- 2) $\forall a \in \mathbb{R}, a^n = a \times a \times \dots \times a, n \in \mathbb{N}$
- 3) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}, n \in \mathbb{N}$
- 4) $\forall a \in \mathbb{R}^+, a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$

Potências de expoente racional - revisão

Qual é a significação de expoente irracional?

Potência de expoente irracional

Figura 28 - Capítulo 2: Potências de expoente irracional

Com a realização das atividades que compõem este capítulo pretende-se recordar a noção de potência de expoente racional e dar sentido à potência de expoente irracional.

4.2.1. Potências de expoente racional – revisão

Esta atividade está disponível na plataforma do GeoGebra através do endereço <https://www.geogebra.org/m/z9angd4p#material/aqd3tgrq>

Com a realização desta atividade pretende-se que os alunos recordem as noções de potência de expoente natural, de expoente inteiro e de expoente racional, assim como, as regras operatórias das potências.

Esta atividade é composta por um pequeno texto introdutório e três tarefas, sendo cada uma das tarefas constituída por um applet que contém um exercício com *feedback* imediato.

Exercício 1

Representa na forma $a^{\frac{p}{q}}$ o número seguinte:

$$\sqrt{\frac{1}{5}}$$

Indica o valor dos parâmetros **a**, **p** e **q**:

a=

p=

q=

$?\frac{?}{?}$

1 de 4

Figura 29 - Applet da atividade "Potências de expoente racional" - exercício 1

Exercício 1

Representa na forma $a^{\frac{p}{q}}$ o número seguinte:

$$\sqrt{\frac{1}{5}}$$

Indica o valor dos parâmetros **a**, **p** e **q**:

a=5
p=-1
q=2

$5^{-\frac{1}{2}}$ **Correto!!**

Alinea anterior Alinea seguinte

1 de 4

Exercício 1

Representa na forma $a^{\frac{p}{q}}$ o número seguinte:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}}$$

Indica o valor dos parâmetros **a**, **p** e **q**:

a=6
p=3
q=2

$6^{\frac{3}{2}}$ **Incorreto!!**

Alinea anterior Alinea seguinte Tentar novamente

2 de 4

Figura 30 – Exemplos de *feedbacks* da atividade "Potências de expoente racional" - exercício 1

Exercício 2

Determina o valor de cada uma das seguintes expressões:

$$64^{\frac{1}{3}} + 32^{\frac{2}{5}}$$

=

Alinea anterior Alinea seguinte

1 de 5

Figura 31 - Applet da atividade "Potências de expoente racional" - exercício 2

Exercício 2

Determina o valor de cada uma das seguintes expressões:

$$64^{\frac{1}{3}} + 32^{\frac{2}{5}}$$

= 8 **Correto !!**

Alinea anterior Alinea seguinte

1 de 5

Exercício 2

Determina o valor de cada uma das seguintes expressões:

$$27^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

= 6 **Incorreto !!**

Alinea anterior Alinea seguinte Tentar novamente

3 de 5

Figura 32 - Exemplos de *feedbacks* da atividade "Potências de expoente racional" - exercício 2

Exercício 3

Sendo x um número real e sabendo que $3^x = 10$, determina o valor de:

$$3^{x+1}$$

=

[Alínea anterior](#) [Alínea seguinte](#)

1 de 3

Figura 33 - Applet da atividade "Potências de expoente racional" - exercício 3

Exercício 3

Sendo x um número real e sabendo que $3^x = 10$, determina o valor de:

$$3^{x+1}$$

=

Correto !!

[Alínea anterior](#) [Alínea seguinte](#)

1 de 3

Figura 34 - Feedback positivo da atividade "Potências de expoente racional" - exercício 3

Neste exercício o aluno para além da informação de resposta incorreta pode ainda visualizar uma proposta de resolução como se mostra na figura 35.

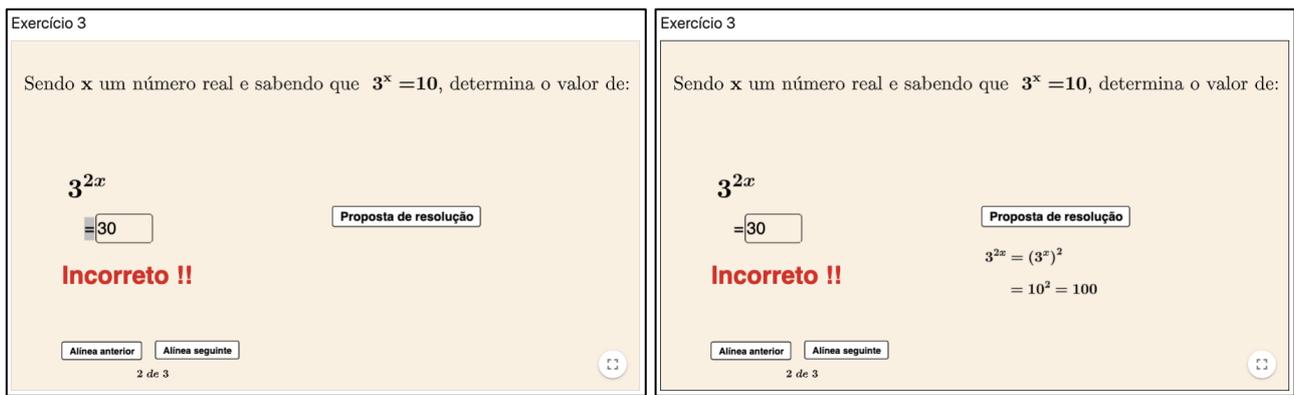


Figura 35 - *Feedback* negativo da atividade "Potências de expoente racional" - exercício 3

4.2.2. Potência de expoente irracional

Pode aceder-se a esta atividade na plataforma do GeoGebra através do endereço: <https://www.geogebra.org/m/z9angd4p#material/muf4dn4y> .

Com a realização desta atividade pretende-se que os alunos atribuam significado à potência de expoente irracional. Esta atividade é composta por três tarefas. A primeira tarefa consiste numa apresentação teórica em que se atribui significado à potência de expoente irracional, sendo as outras duas compostas de exercícios.

Para visualizar a explicação os alunos devem navegar no applet usando os botões **Anterior** e **Seguinte** de modo a acompanhar as várias etapas da explicação.

Qual é o significado da expressão $2^{\sqrt{7}}$?

O número $\sqrt{7}$ é um número irracional logo corresponde a uma dízima infinita não periódica
 $\sqrt{7} \approx 2.6457513110646\dots$

Consideremos as sucessões:

$(u_n) : 2 \quad 2,6 \quad 2,64 \quad 2,645 \quad 2,6457 \rightarrow \sqrt{7}^-$ (u_n) é monótona crescente e os seus termos são valores aproximados de $\sqrt{7}$ por defeito.

$(v_n) : 3 \quad 2,7 \quad 2,65 \quad 2,646 \quad 2,6458 \rightarrow \sqrt{7}^+$ (v_n) é monótona decrescente e os seus termos são valores aproximados de $\sqrt{7}$ por excesso.

Ambas as sucessões são convergentes sendo $\sqrt{7}$ o seu limite e $u_n < \sqrt{7} < v_n, \forall n \in \mathbb{N}$

A partir das sucessões (u_n) e (v_n) podemos construir as seguintes sucessões:

$2^{u_n} : 2^2 \quad 2^{2,6} \quad 2^{2,64} \quad 2^{2,645} \quad 2^{2,6457} \dots$
 $2^{v_n} : 2^3 \quad 2^{2,7} \quad 2^{2,65} \quad 2^{2,646} \quad 2^{2,6458} \dots$

Tendo em conta que a função exponencial 2^x , com $x \in \mathbb{Q}$, é monótona, tem-se: $2^{u_n} < 2^{\sqrt{7}} < 2^{v_n}, \forall n \in \mathbb{N}$

A sucessão 2^{u_n} é crescente e majorada. \Rightarrow Ambas as sucessões são convergentes e $2^{\sqrt{7}}$ é o limite comum.
A sucessão 2^{v_n} é decrescente e minorada.

Fica, assim, garantida a existência do número $2^{\sqrt{7}}$

De modo análogo se pode definir potência de base $a > 0$ e expoente x , sendo x um número real qualquer

Figura 36 - Applet da atividade "Potência de expoente irracional"

Após a exploração da apresentação anterior devem realizar o exercício que envolve potências de expoente irracional. Na figura 37 apresenta-se a interface inicial do exercício.

Exercício 1

Determina o valor da seguinte expressão:

$$\frac{4^{\sqrt{3}}}{(2^{\sqrt{6}})^{-\sqrt{2}}}$$

Responder

Alinea 3 de 4

Figura 37 - Applet da atividade "Potências de expoente irracional" – exercício com *feedback* imediato

Após a resolução no caderno diário o aluno deve clicar em responder, ao fazer esta ação abre-se uma caixa de diálogo com várias opções de resposta onde deve selecionar a sua resposta.

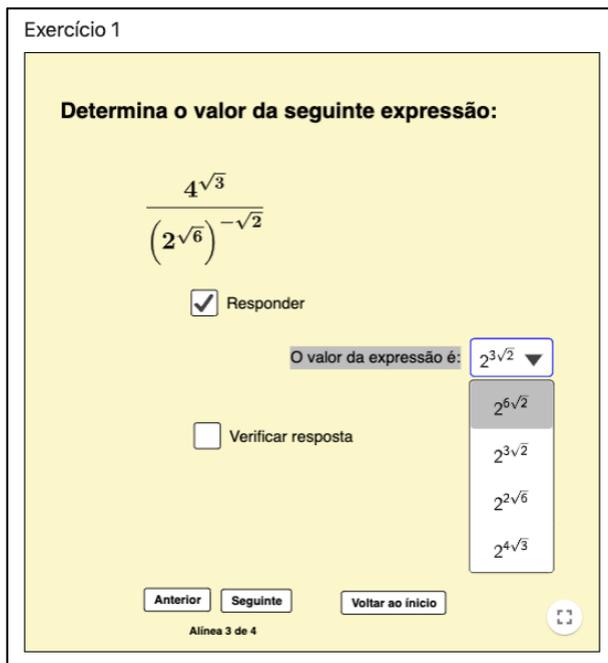


Figura 38 - Atividade "Potências de expoente irracional" – exercício com *feedback* imediato: opção responder

Depois de selecionada a resposta deve “Verificar resposta”, e receberá um *feedback* imediato. A figura 39 mostra os *feedbacks* possíveis.

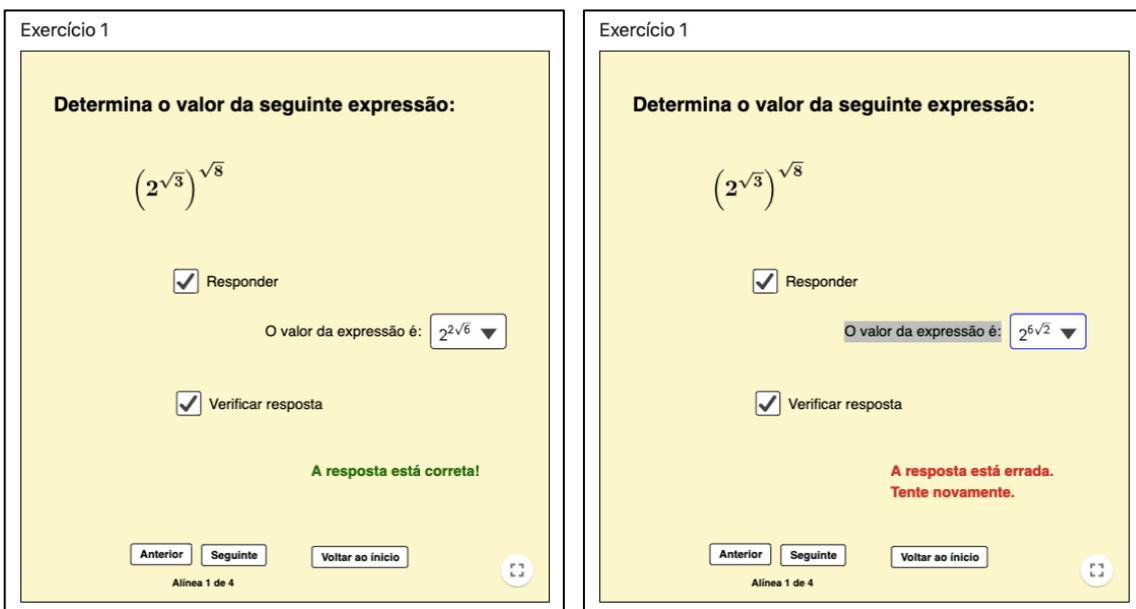


Figura 39 – *Feedbacks* do exercício da atividade “Potências de expoente irracional”.

Finalmente, a última tarefa da atividade consta de uma questão de escolha múltipla.

4.3. Descrição das atividades do “Capítulo 3 – Função exponencial”

Este capítulo é composto por três atividades como se mostra na figura seguinte e pode ser visualizado na plataforma do GeoGebra através do endereço: <https://www.geogebra.org/m/z9angd4p#chapter/804348>.



Figura 40 - Capítulo 3: Função exponencial

Com as atividades propostas neste capítulo pretende-se que os alunos se apropriem das propriedades da função exponencial, nomeadamente, continuidade, monotonia, assintotas, limites e que resolvam equações e inequações que exponencias.

4.3.1. Função exponencial – propriedades

Esta atividade encontra-se disponível na plataforma do GeoGebra através do endereço: <https://www.geogebra.org/m/z9angd4p#material/ag67bycu>.

Com a realização desta atividade pretende-se que os alunos, através da manipulação do applet e da resposta às questões apresentadas consigam chegar às propriedades da função exponencial e elaborar um quadro resumo com as mesmas.

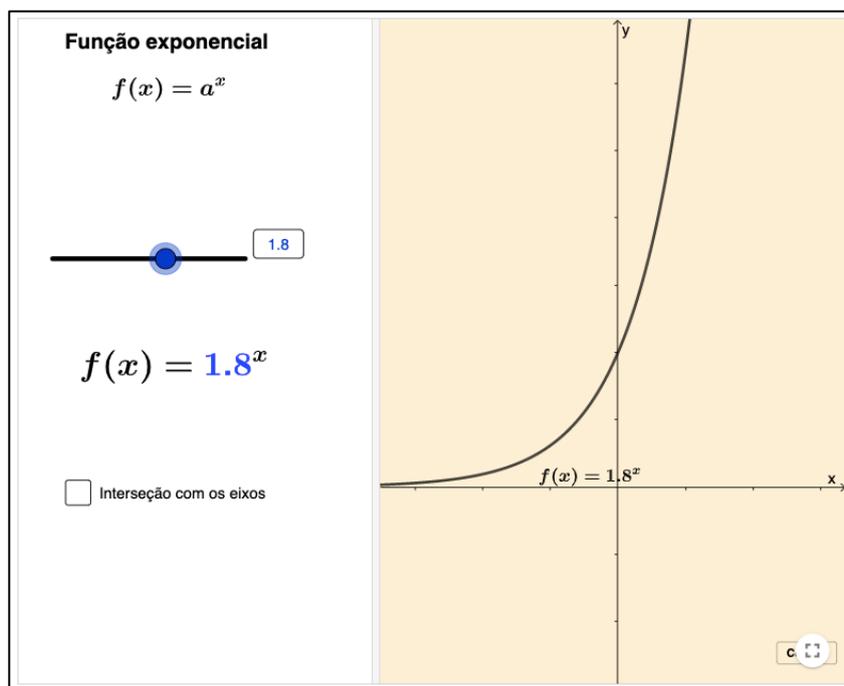


Figura 41 - Applet da atividade "Função exponencial - propriedades"

4.3.2. Equações exponenciais

Pode aceder-se a esta atividade na plataforma do GeoGebra através do endereço: <https://www.geogebra.org/m/z9angd4p#material/ggphhjng>.

Esta atividade é composta por um texto introdutório e por seis tarefas agrupadas em três grupos. Cada grupo contém uma apresentação dinâmica onde se exemplifica a resolução de algumas equações e um exercício dinâmico com *feedback* imediato para os alunos treinarem.

No primeiro grupo – **Equações 1** - apresentam-se equações de nível mais elementar e no segundo – **Equações 2** - apresentam-se equações que envolvem a colocação de potências em evidência e no terceiro – **Equações 3** – equações em que é necessário recorrer a uma mudança de variável.

Para visualizar os exemplos os alunos devem começar por seleccionar um deles e depois, usando os botões **Anterior** e **Seguinte**, podem visualizar todos os passos necessários para a resolução da equação.

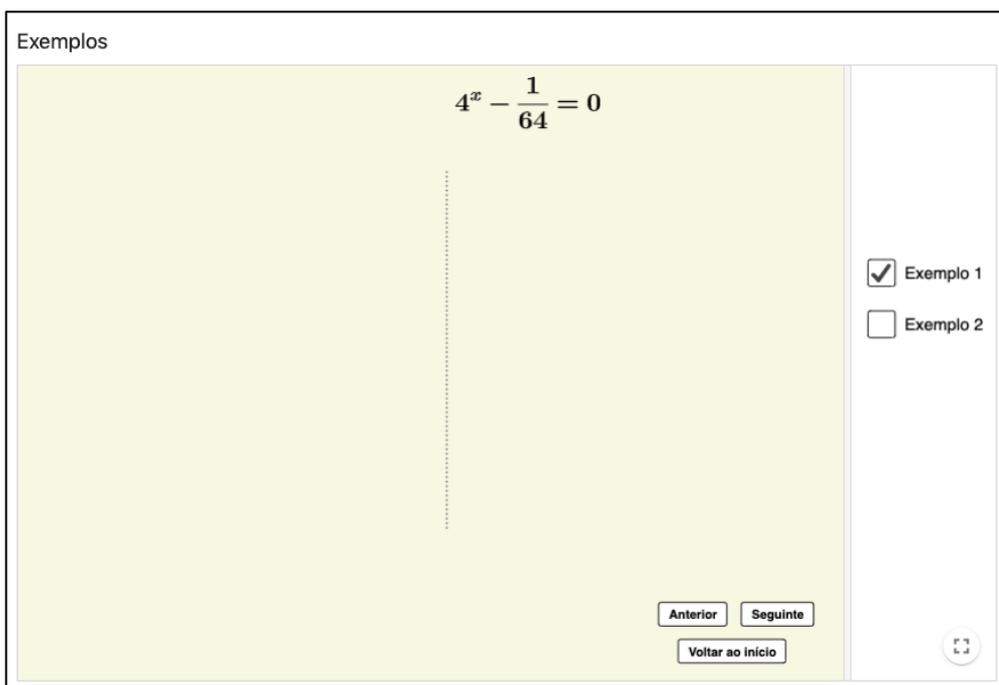


Figura 42 – Apresentação constante da atividade “Equações exponenciais” – Equações 1: interface inicial

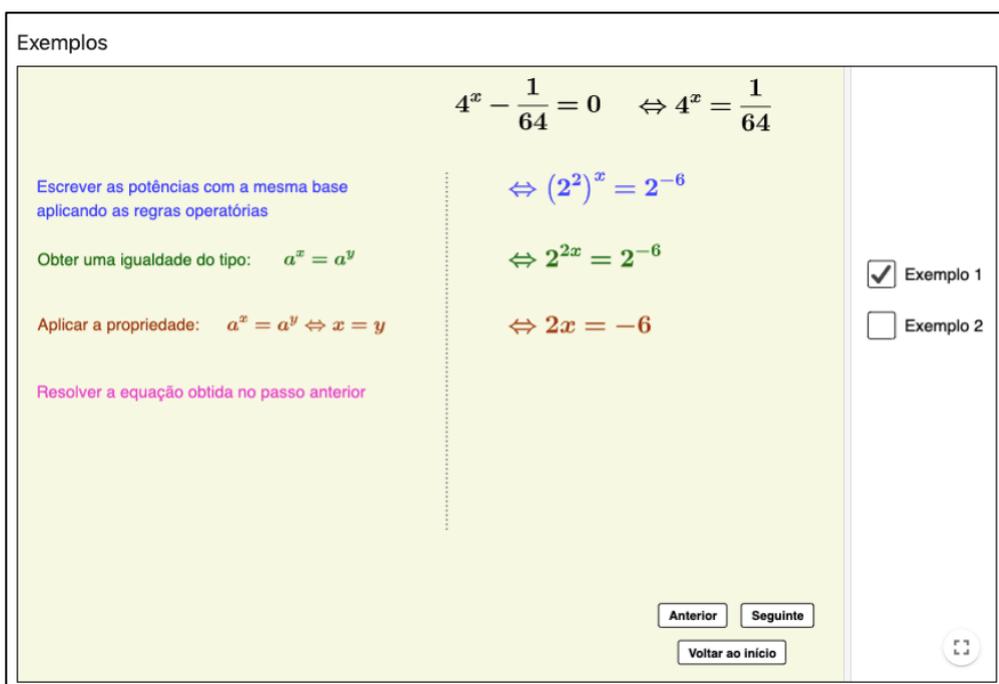


Figura 43 – Apresentação constante da atividade “Equações exponenciais” – Equações 1: alguns passos da resolução do exemplo 1

Resolva a seguinte equação:

$$9^{x-1} = 3^{2-x}$$

Responder

Alinea 1 de 4

Resolva a seguinte equação:

$$9^{x-1} = 3^{2-x}$$

Responder

A solução da equação é:

Verificar resposta

A resposta está correta!

Alinea 1 de 4

Figura 44 – Exercício 1 da atividade “Equações exponenciais”

Exemplos

$$3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} = 21$$

Exemplo 1

Exemplo 2

Figura 45 - Apresentação constante da atividade “Equações exponenciais” – Equações 2: interface inicial

Exemplos

$$3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} = 21$$

Escrever as potências com a mesma base e o mesmo expoente $\Leftrightarrow \frac{3^x}{3} - 3^x + 3 \times 3^x = 21$

Colocar a potência em evidência $\Leftrightarrow 3^x \left(\frac{1}{3} - 1 + 3 \right) = 21$

Simplificar a expressão $\Leftrightarrow 3^x \times \left(\frac{7}{3} \right) = 21$

Isolar a potência

Anterior Seguinte
Voltar ao início

Exemplo 1
 Exemplo 2

Figura 46 - Apresentação constante da atividade “Equações exponenciais” – Equações 2: alguns passos da resolução do exemplo 1

Resolva a seguinte equação:

$$4^{x+1} - 4^x = 24$$

Responder

Anterior Seguinte Voltar ao início

Alinea 1 de 4

Resolva a seguinte equação:

$$4^{x+1} - 4^x = 24$$

Responder

O conjunto-solução da equação é:

Verificar resposta

$S = \left\{ \frac{1}{4} \right\}$
 $S = \{-3; 0\}$
 $S = \{1\}$
 $S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$

Anterior Seguinte Voltar ao início

Alinea 1 de 4

Figura 47 - Exercício 2 da atividade “Equações exponenciais”

Exemplos

$$-6 \times 2^{-x} + 2^x = -1$$

Exemplo 1
 Exemplo 2

Anterior Seguinte
 Voltar ao início

Figura 48 - Apresentação constante da atividade “Equações exponenciais” – Equações 3: interface inicial

Exemplos

$$-6 \times 2^{-x} + 2^x = -1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{6}{2^x} + 2^x = -1$$

Efetuar uma mudança de variável $a^x=y$

$$\Leftrightarrow -\frac{6}{y} + y = -1 \Leftrightarrow \frac{-6 + y^2 + y}{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 + y - 6 = 0 \text{ pois } y=2^x \Rightarrow y \neq 0$$

Resolver a equação obtida no passo anterior

$$\Leftrightarrow y = 2 \vee y = -3$$

Substituir y por a^x

$$\Leftrightarrow 2^x = 2 \vee 2^x = -3$$

Impossível

$$\Leftrightarrow 2^x = 2^1$$

Aplicar a propriedade $a^x=a^y \Leftrightarrow x=y$

Exemplo 1
 Exemplo 2

Anterior Seguinte
 Voltar ao início

Figura 49 - Apresentação constante da atividade “Equações exponenciais” – Equações 3: alguns passos da resolução do exemplo 2

Resolva a seguinte equação:

$$-3^{2x-1} + 28 \times 3^{x-2} = 1$$

Responder

Anterior Seguinte Voltar ao início

Alínea 4 de 4

Resolva a seguinte equação:

$$-3^{2x-1} + 28 \times 3^{x-2} = 1$$

Responder

O conjunto-solução da equação é:

Verificar resposta

**A resposta está errada.
Tente novamente.**

Anterior Seguinte Voltar ao início

Alínea 4 de 4

Figura 50 - Exercício 3 da atividade “Equações exponenciais”

4.3.3. Inequações exponenciais

Pode aceder-se a esta atividade na plataforma do GeoGebra através do endereço: <https://www.geogebra.org/m/yaba5vvx>.

Esta atividade é composta por um texto introdutório e por quatro tarefas agrupadas em dois grupos. Cada grupo contém uma apresentação dinâmica onde se exemplifica a resolução das inequações e um exercício dinâmico com *feedback* imediato para os alunos treinarem.

Ao primeiro grupo – **Inequações 1** - correspondem inequações de nível mais elementar e ao segundo – **Equações 2** - apresentam-se inequações em que é necessário recorrer a uma mudança de variável para as resolver.

Para visualizar os exemplos os alunos devem começar por selecionar um deles e depois, usando os botões **Anterior** e **Seguinte**, podem visualizar todos os passos necessários para a resolução da inequação. No primeiro grupo apresenta-se apenas um exemplo resolvido

por dois processos, recorrendo à potência de base entre zero e um e à potência de base superior a um. No segundo grupo apresentam-se dois exemplos.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} > 8^{2-x}$$

$$\Leftrightarrow (2^{-1})^{x-1} > (2^3)^{2-x}$$

$$\Leftrightarrow 2^{1-x} > 2^{6-3x}$$

$$\Leftrightarrow 1-x > 6-3x$$

escrever as potências na mesma base
 a exponencial de base 2 é estritamente crescente

Processo 1
 Processo 2

Figura 51 - Apresentação constante da atividade “Inequações exponenciais” – Inequações 1: alguns passos da resolução do processo 1

Resolva a seguinte inequação:

$$9^{x+1} - \sqrt{3} \leq 0$$

Responder
 Verificar resposta

O conjunto-solução da inequação é:

Alínea 4 de 4

Figura 52 - Exercício 1 da atividade “Inequações exponenciais”

Na segunda apresentação desta atividade o aluno pode visualizar os cálculos auxiliares necessários a uma determinada etapa da resolução recorrendo ao botão **Mostrar cálculo auxiliar** que aparece na quando se visualiza a respetiva etapa.

$3^{2x} + 9 \geq 10 \times 3^x$

$\Leftrightarrow 3^{2x} - 10 \times 3^x + 9 \geq 0$

$\Leftrightarrow (3^x)^2 - 10 \times 3^x + 9 \geq 0$

$\Leftrightarrow y^2 - 10y + 9 \geq 0$

$\Leftrightarrow y \leq 1 \vee y \geq 9$

Faz-se a mudança de variável
 $3^x = y$

Mostrar cálculo auxiliar

$y^2 - 10y + 9 = 0$
 $\Leftrightarrow y = 1 \vee y = 9$

Anterior Seguinte Voltar ao início Exemplo 1 Exemplo 2

Figura 53 - Apresentação constante da atividade “Inequações exponenciais” – Inequações 2: alguns passos da resolução do exemplo 1

O exercício que sucede a esta apresentação tem as mesmas características dos anteriores. Possibilita que o aluno vá verificando as suas respostas à medida que avança nas várias alíneas.

Resolva a seguinte inequação:

$2^x - 4^x \geq -2$

Responder

Anterior Seguinte Voltar ao início

Alinea 1 de 4

Resolva a seguinte inequação:

$2^{x-1} + 2^{2-x} > 3$

Responder

O conjunto-solução da inequação é: ▼

Verificar resposta

A resposta está correta!

Anterior Seguinte Voltar ao início

Alinea 3 de 4

Figura 54 - Exercício 2 da atividade “Inequações exponenciais”: Interface inicial e exemplo de *feedback*

4.4. Descrição das atividades do “Capítulo 4 - Atividades para a sala de aula”

Este capítulo é composto por duas atividades como se mostra na figura seguinte e pode ser visualizado na plataforma do GeoGebra através do endereço: <https://www.geogebra.org/m/z9angd4p#chapter/845210>.

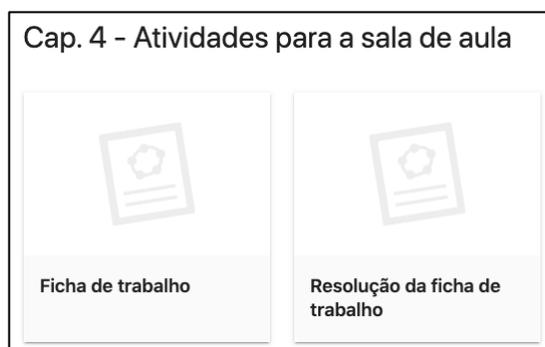


Figura 55 - Capítulo 4: Atividades para a sala de aula

A primeira atividade consiste da ficha de trabalho que foi fornecida aos alunos em papel e trabalhada em aula presencial após a realização das atividades constantes dos capítulos anteriores. Na segunda atividade pode encontrar-se uma proposta de resolução da mesma.

4.5. Descrição das atividades do “Capítulo 5 - Derivada da função exponencial”

Este capítulo é composto por duas atividades como se mostra na figura seguinte e pode ser visualizado na plataforma do GeoGebra através do endereço: <https://www.geogebra.org/m/z9angd4p#chapter/804349>.

Cap. 5 - Derivada da função exponencial de base e



Figura 56 – Capítulo 5: Derivada da função exponencial de base e

Com as atividades propostas neste capítulo pretende-se que os alunos fiquem a conhecer o limite notável $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ e o utilizem para determinar limites que envolvam exponenciais e ainda determinar a função derivada de funções que envolvam a exponencial de base e recorrendo às regras de derivação.

4.5.1. Limite notável

Pode aceder-se a esta atividade na plataforma do GeoGebra através do endereço: <https://www.geogebra.org/m/z9angd4p#material/xnr9uhyg>.

Esta atividade inicia-se com um texto introdutório seguido de um applet que os alunos podem manipular de forma a visualizar que o limite referido é igual a 1. A demonstração desta propriedade não faz parte do currículo para este ano de escolaridade.

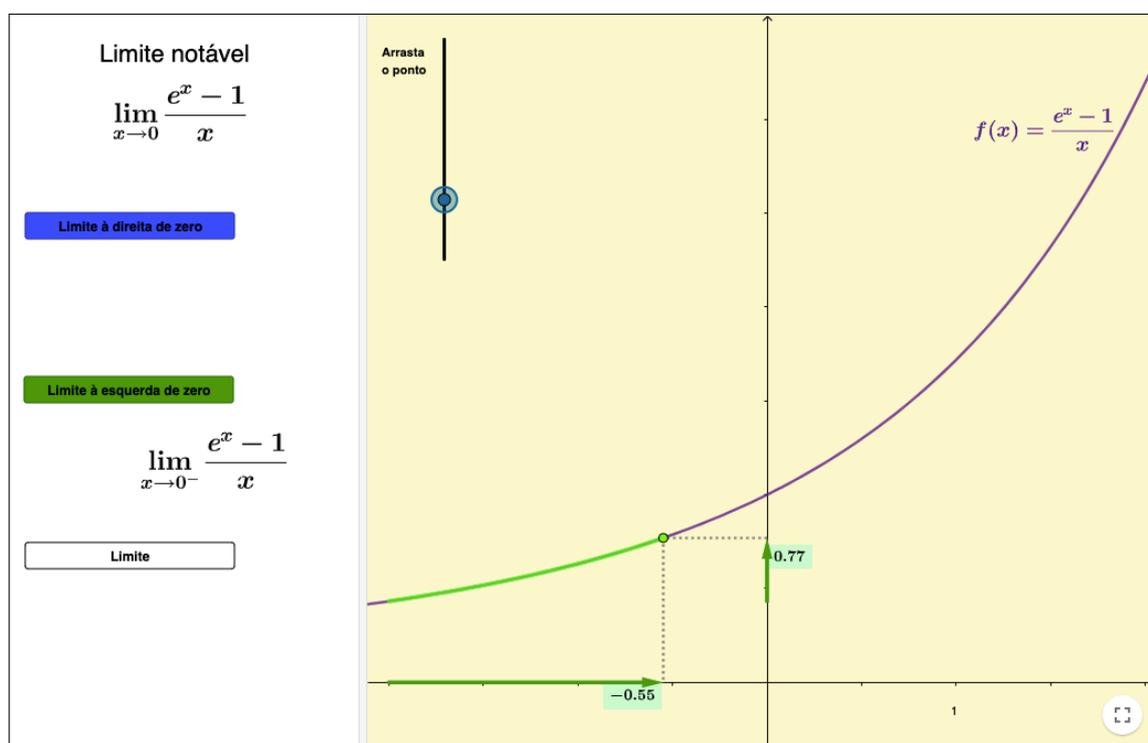


Figura 57 - Applet da atividade "Limite notável": Justificação visual

Segue-se uma apresentação com exemplos resolvidos e um exercício dinâmico com *feedback* imediato, semelhantes às já apresentadas anteriormente.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2}{3x} = \frac{0}{0} \text{ (indeterminação)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^x - 1)}{3 \times x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{3} \times \frac{e^x - 1}{x} \right)$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \text{ (limite notável)}$$

$$= \frac{2}{3} \times 1$$

$$= \frac{2}{3}$$

Exemplo 1
 Exemplo 2

Anterior Seguinte
 Voltar ao início

Figura 58 - Apresentação constante da atividade “Limite notável”: alguns passos da resolução do exemplo 1

Determina o valor do seguinte limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{e^x - 1}$$

Responder

Anterior Seguinte Voltar ao início

Alinea 4/4

Determina o valor do seguinte limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{e^x - 1}$$

Responder

O valor do limite é:

Verificar resposta

- 1
- 4
- 1/4
- 3

Anterior Seguinte Voltar ao início

Alinea 4/4

Figura 59 - Exercício da atividade “Limite notável”: Interface inicial e listagem das respostas possíveis

4.5.2. Derivada da função exponencial de base e

Pode aceder-se a esta atividade na plataforma do GeoGebra através do endereço: <https://www.geogebra.org/m/z9angd4p#material/fqtns6wr>.

Esta atividade inicia-se com um texto introdutório seguido dois applets que os alunos podem manipular de forma a visualizar a dedução das regras de derivação da função exponencial de base e. Segue-se um exercício dinâmico com *feedback* imediato, semelhante aos já apresentados nas atividades anteriores.

Derivada da função exponencial de base e (1)

Seja $f(x) = e^x$

Por definição de derivada tem-se, para qualquer $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x (e^h - 1)}{h} \\ &= e^x \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \\ &= e^x \times 1 \\ &= e^x \end{aligned}$$

A função exponencial é diferenciável para todo o $x \in \mathbb{R}$ e: $(e^x)' = e^x$

Derivada da função exponencial de base e (2)

Seja $f(x) = e^u$ em que u é uma função real de variável real

Se $u = g(x)$ e $h(x) = e^x$ então $f(x) = (h \circ g)(x) = h(g(x)) = e^u$

Pela regra de derivação da função composta tem-se:

$$\begin{aligned} (h \circ g)'(x) &= g'(x) \times h'(g(x)) \\ &= g'(x) \times e^{g(x)} \\ &= u' e^u \end{aligned}$$

Então, $(e^u)' = u' e^u$

Figura 60 – Apresentação constante da atividade “Derivada da função exponencial de base e”

Determina, nos pontos em que existe, uma expressão da derivada da função:

$$f(x) = 5e^x - 2e^{2x} + ex$$

Responder

O conjunto-solução da equação é:

Verificar resposta

$$f'(x) = \frac{4e^{4x+1}(x^4 - x^3 + 1)}{(1 + x^4)^2}$$

$$f'(x) = 5e^x - 4e^{2x} + e$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2} e^{\frac{3x^2+1}{x^2}}$$

$$f'(x) = 4e^{4x}$$

Anterior Seguinte Voltar ao início

Alínea 4 de 4

Figura 61 - Exercício constante na atividade "Derivada da função exponencial de base e"

4.6. Descrição das atividades do "Capítulo 6 - Mais atividades para a sala de aula"

Este capítulo é composto por duas atividades como se mostra na figura seguinte e pode ser visualizado na plataforma do GeoGebra através do endereço: <https://www.geogebra.org/m/z9angd4p#chapter/845210>.

Cap. 6 - Mais atividades para a sala de aula



Ficha de trabalho



Resolução da ficha de trabalho

Figura 62 - Capítulo 6: Mais atividades para a sala de aula

A primeira atividade consiste da ficha de trabalho que foi fornecida aos alunos em papel e trabalhada em aula presencial após a realização das atividades constantes do capítulo anterior. Na segunda atividade pode encontrar-se uma proposta de resolução da mesma.

4.7. Descrição da construção de applet com exercício de *feedback* imediato

Nesta secção apresenta-se a descrição detalhada de como construir um exercício com *feedback* automático semelhante aos que se podem encontrar no livro dinâmico.

Considere-se um exercício genérico composto por quatro questões. Nesta descrição serão identificadas como Questão1, Questão2, Questão3 e Questão4 e as respetivas respostas por Resposta1, Resposta2, Resposta3 e Resposta4.

A construção divide-se em várias etapas.

Etapa 1: Digitar os textos correspondentes às questões e às respetivas respostas

Com a ferramenta Texto selecionada clica-se na folha gráfica e digita-se o texto pretendido. De seguida oculta-se o texto da folha gráfica. Para isso basta clicar no círculo azul que está junto ao texto na janela de álgebra.

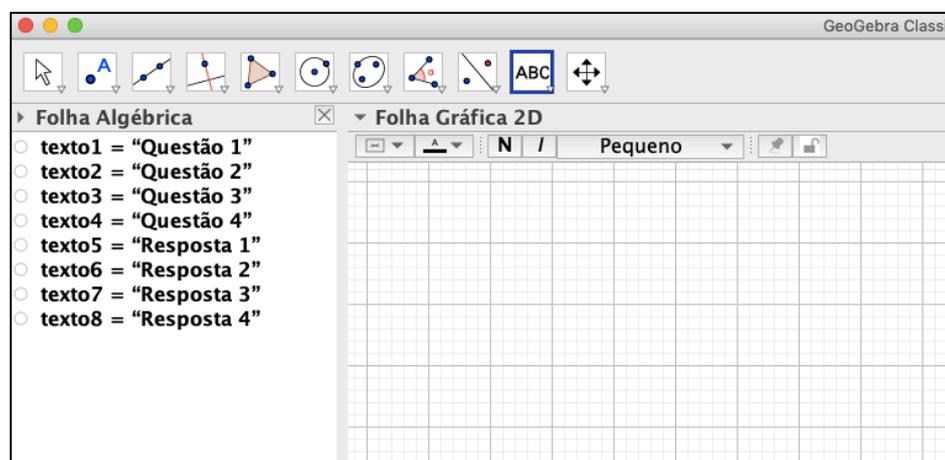


Figura 63 - Texto das questões e respetivas respostas

Etapa 2: Criar botões para navegar entre as questões do exercício

Vão criar-se três botões para poder navegar entre as questões do exercício. Um para passar à questão seguinte, um para voltar à questão anterior e outro para voltar ao início.

Na barra de ferramentas selecionar a ferramenta **Inserir Botão** como se ilustra na figura 64.

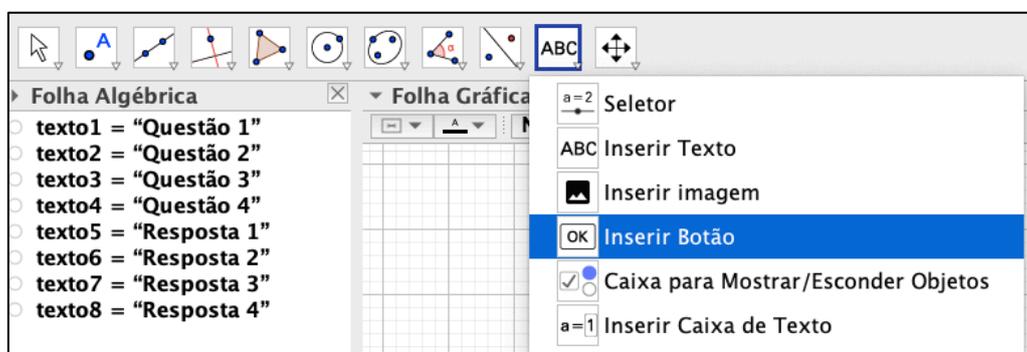


Figura 64 - Inserir Botão

Repete-se o procedimento mais duas vezes para criar os três botões necessários.

Para que os botões possam funcionar, tem de criar-se um seletor. Dado que este exemplo é composto de quatro questões, o seletor, *a*, deverá tomar valores inteiros entre 1 e 4.

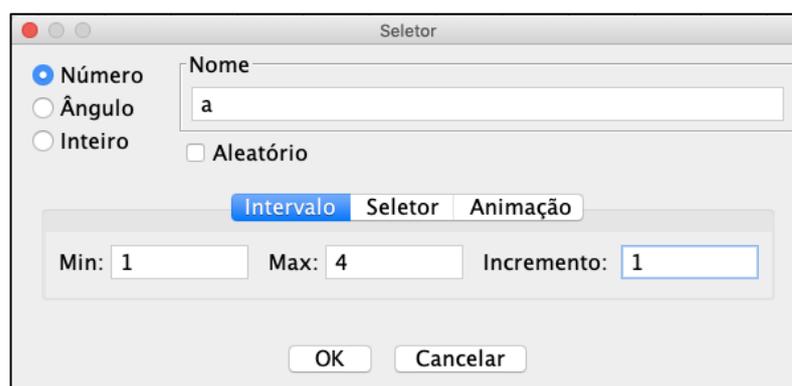


Figura 65 - Propriedades do seletor *a*

De seguida procede-se à programação e formatação dos botões. Para isso seleciona-se no Menu **Editar, Propriedades dos Objetos**. Aparece a janela de **Configurações**. Nesta janela podem alterar-se as configurações de todos os objetos já criados.

Para programar o Botão 1, voltar à questão anterior, seleciona-se na barra vertical à esquerda o objeto botão 1.

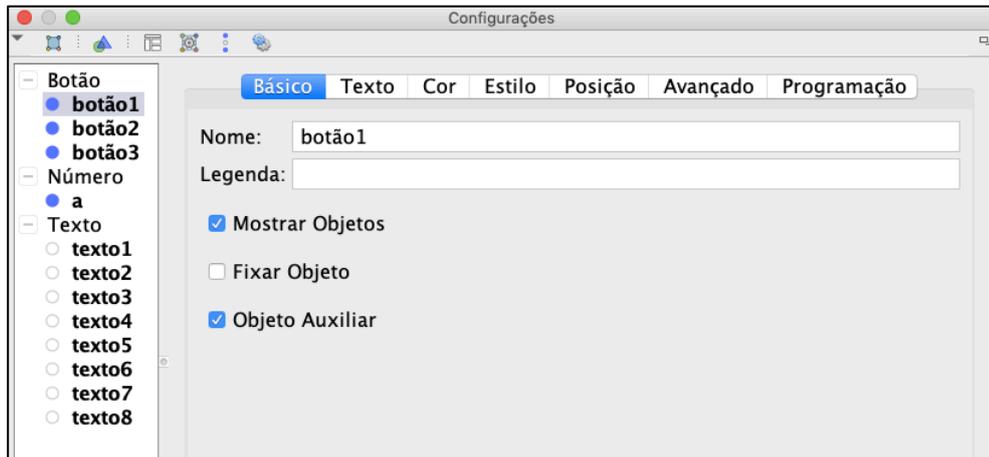


Figura 66 – Configurações

Para formatar a aparência do botão, no separador **Básico** escreve-se a legenda que se pretende que apareça no botão, neste caso “Anterior” e no separador **Texto**, define-se o tamanho e a espessura da letra para a legenda do mesmo.

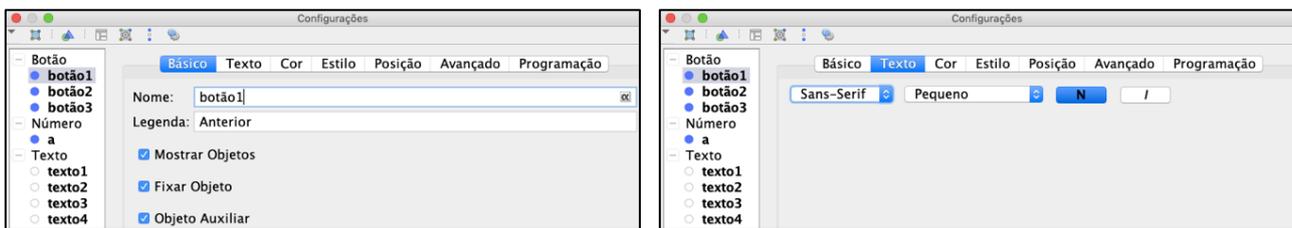


Figura 67 - Formatação do botão Anterior

Como se pretende que o botão funcione sempre que se clique nele, utiliza-se o separador **Programação** para se associar o seletor ao botão de forma que sempre que se clique no botão o seletor recue uma unidade. Para tal, depois de abrir o separador **Programação**, seleciona-se **Se Clicar** e escreve-se na primeira linha de comandos a instrução **DefinirValor(a,a-1)**.

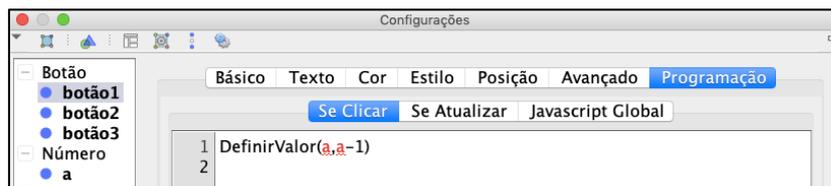


Figura 68 - Programação do botão "Anterior"

Repete-se o procedimento para os outros dois botões cujas legendas são “Seguinte” e “Voltar ao início”. As instruções a escrever deverão ser **DefinirValor(a,a+1)** e **DefinirValor(a,1)**, respetivamente.

Etapa 3: Definir uma lista com as respostas às questões

Nesta etapa define-se a lista de respostas que deverá aparecer para o aluno selecionar a alternativa que considera correta. Para isso recorre-se à linha de comandos e escreve-se **respostas={texto5,texto6,texto7,texto8}** para criar a lista.



Figura 69 – Comando para criar a Lista das respostas

De seguida cria-se uma nova lista com as respostas baralhadas. Na linha de comandos escreve-se **respostasbaralhadas=Baralhar(respostas)**. O GeoGebra cria uma nova lista com o nome de “respostasbaralhadas” que tem os mesmos elementos da lista “respostas”, mas com a ordem pela qual aparecem na lista alterada.

Etapa 4: Associar o texto de cada questão a uma posição do seletor

Nesta etapa definem-se condições para que o texto das questões se altere sempre que se clica num dos botões. Na janela de **Configurações** no separador **Avançado** definem-se as condições para mostrar os textos. Para a questão 1, associada ao texto1, a condição será o seletor estar na posição 1. Digita-se **a==1** conforme se pode ver na figura 70.

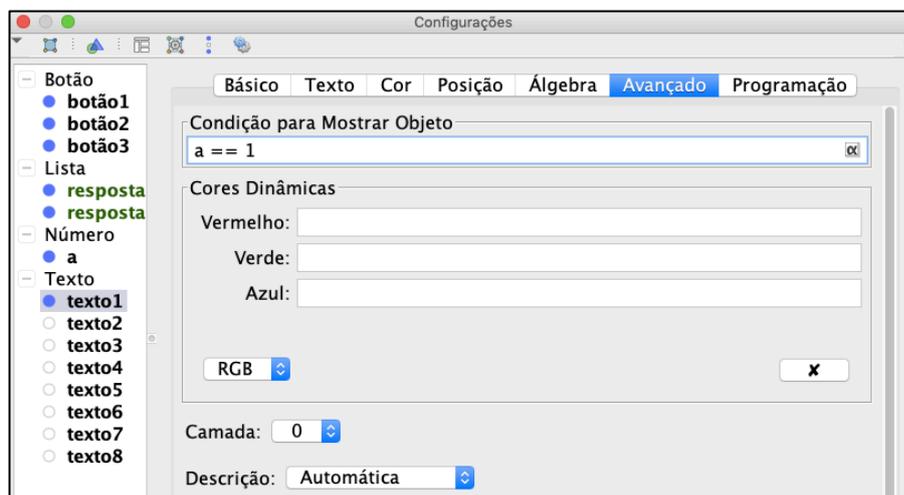


Figura 70 - Condição para mostrar o texto 1

Para os textos das questões seguintes procede-se da mesma maneira, alterando o valor do seletor conforme o número do texto.

Para que o texto das várias questões apareça no mesmo sítio pode definir-se a posição do mesmo no separador **Posição** da janela de **Configurações**.

Etapa5: Apresentar as respostas possíveis numa lista pendente

Na janela de **Configurações** começar por seleccionar o objeto respostasbaralhadas. No separador **Básico** escrever o texto que se pretende que apareça como legenda, por exemplo, “A resposta correta é:” e depois seleccionar a opção **Desenhar como lista pendente**.

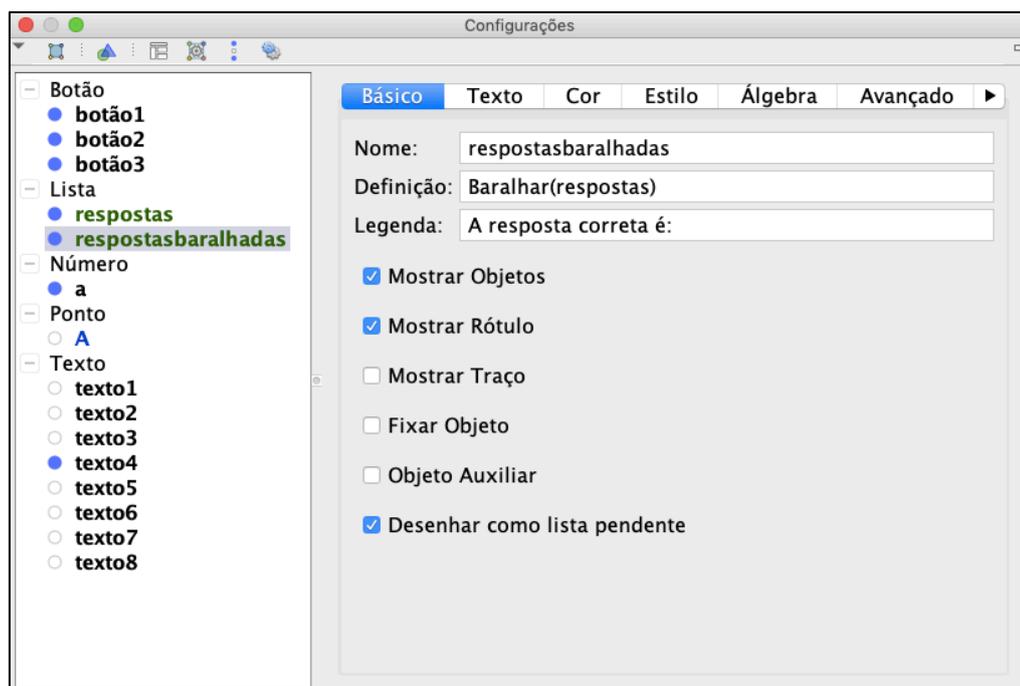


Figura 71 - Criar uma lista pendente com as respostas possíveis

Sair das configurações. Por defeito, a lista vai aparecer no canto superior esquerdo da janela mas com o botão direito do rato pode arrastar-se a lista para o local que se pretender.

Etapa 6: Colocar caixas para abrir a possibilidade de responder e para poder verificar se a resposta dada está correta

Seleccionar a ferramenta **Caixa para Mostrar/Esconder Objetos**. De seguida clicar na folha gráfica, aparece uma caixa de diálogo onde se deve escrever a legenda “Responder” e depois seleccionar a opção **Aplicar**.

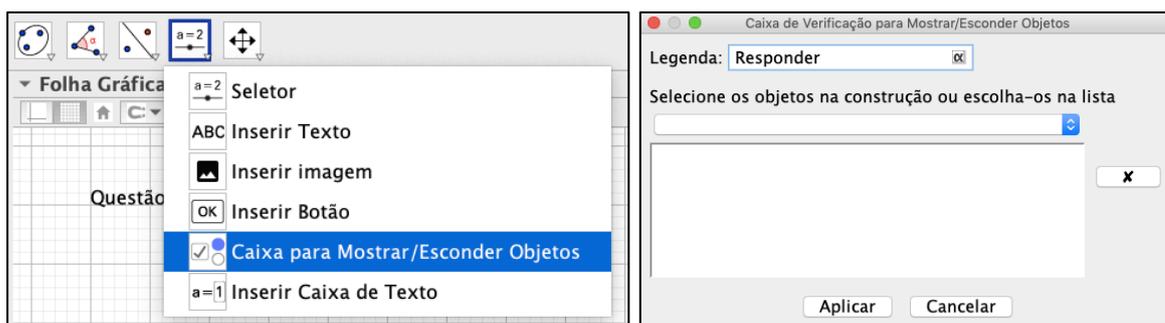


Figura 72 - Criar caixa para responder

Proceder de forma análoga para criar caixa para verificação da resposta.

Para que a listagem das respostas só apareça depois de selecionada a opção Responder procede-se do seguinte modo: na janela **Configurações** selecionar o objeto **respostasbaralhadas** e no separador **Avançado** escrever a condição **b==true** e fazer **Enter**. Deve repetir-se este procedimento para que a caixa de verificação da resposta dada também só apareça depois de se selecionar responder.

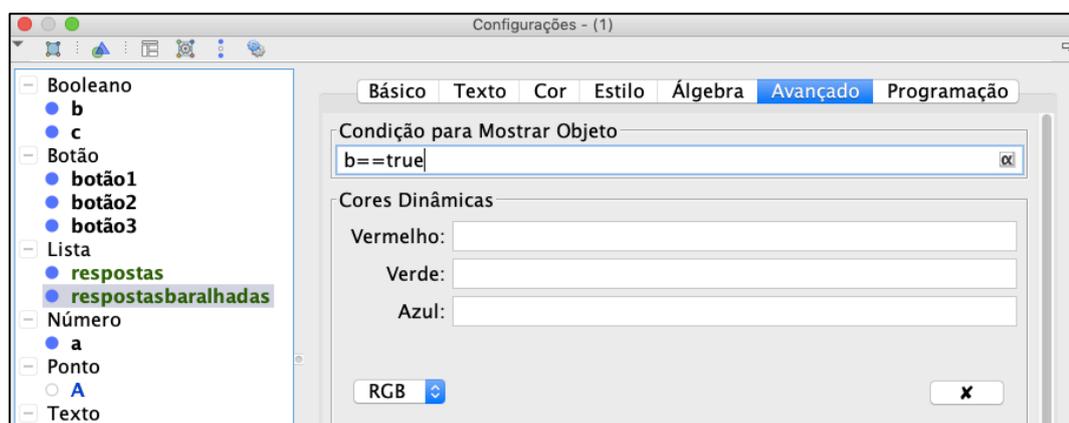


Figura 73 – Condição para visualizar a lista das respostas possíveis

Etapa 7: Verificação se a resposta selecionada está correta

Para verificar se a resposta à questão 1 está correta tem de se comparar a resposta selecionada com o primeiro elemento da lista de respostas. Para fazer isso escreve-se no campo de entrada o comando que se mostra na figura 74:

Entrada: `SelecionarElemento(respostasbaralhadas) ≠ Elemento(respostas, 1) ∧ a ≠ 1`

Figura 74 – Comando para verificação da resposta à questão 1

Repete-se o procedimento para as questões 2, 3 e 4 alterando no comando o algarismo que identifica a questão. Na janela de álgebra surgem quatro variáveis booleanas, se o seu valor for verdadeiro a resposta está correta, se for falso está errada.

Etapa 8: Esconder as respostas sempre que se altera a questão

Para que sempre que se clica num dos botões para passar a outra questão do exercício fique apenas visível o respetivo texto e a opção responder tem de se acrescentar na programação dos três botões as seguintes instruções: **DefinirValor(b,false)** e **DefinirValor(c,false)** e para que a ordem das respostas na lista apresentada vá sendo alterada a instrução **AtualizarConstrução()**

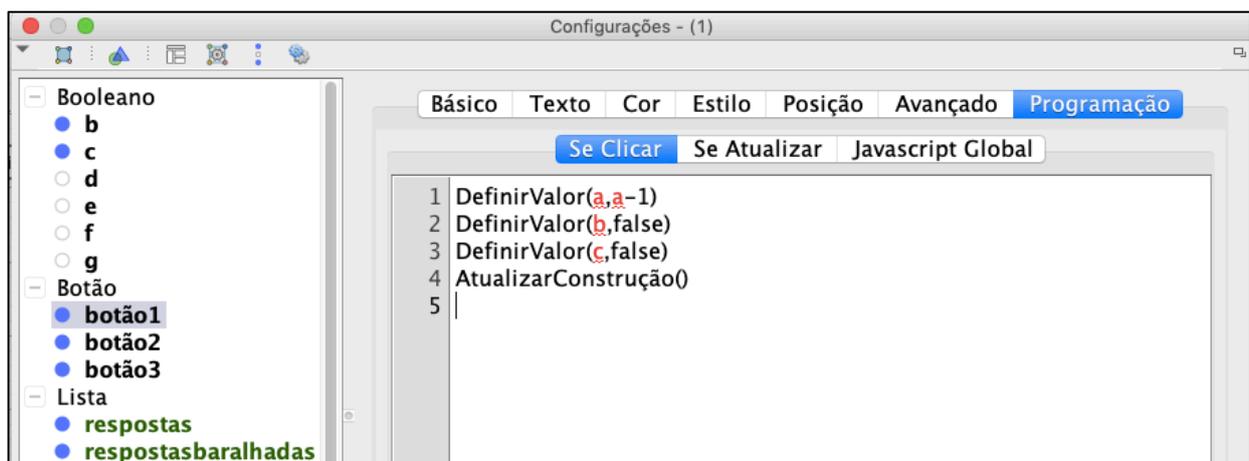


Figura 75 - Atualização da programação do botão

Etapa 9: Textos para o *feedback*

A última etapa consiste em introduzir os textos para o *feedback* e definir as condições para a sua visualização. Assim, os textos podem ser, por exemplo, texto9:“A resposta está correta” e texto10“ A resposta está errada. Tente novamente.”

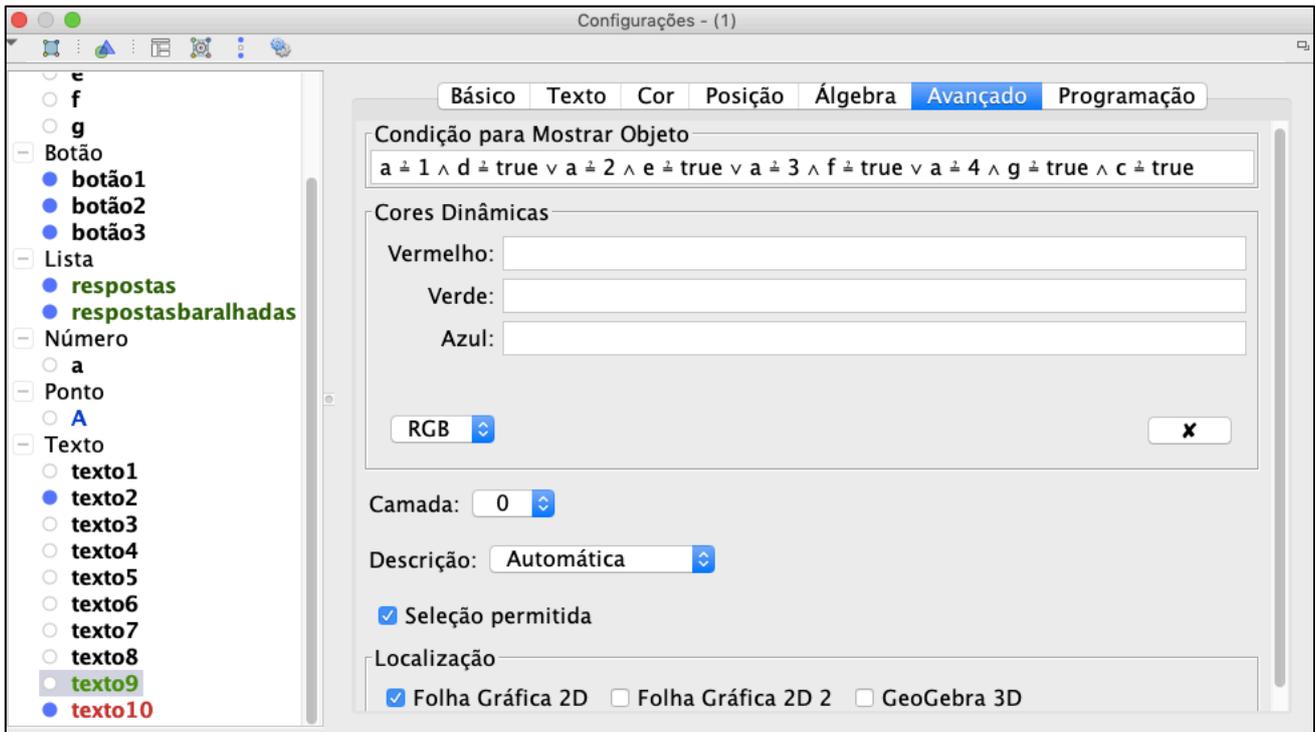


Figura 76 - Condições para mostrar o texto "A resposta está correta"

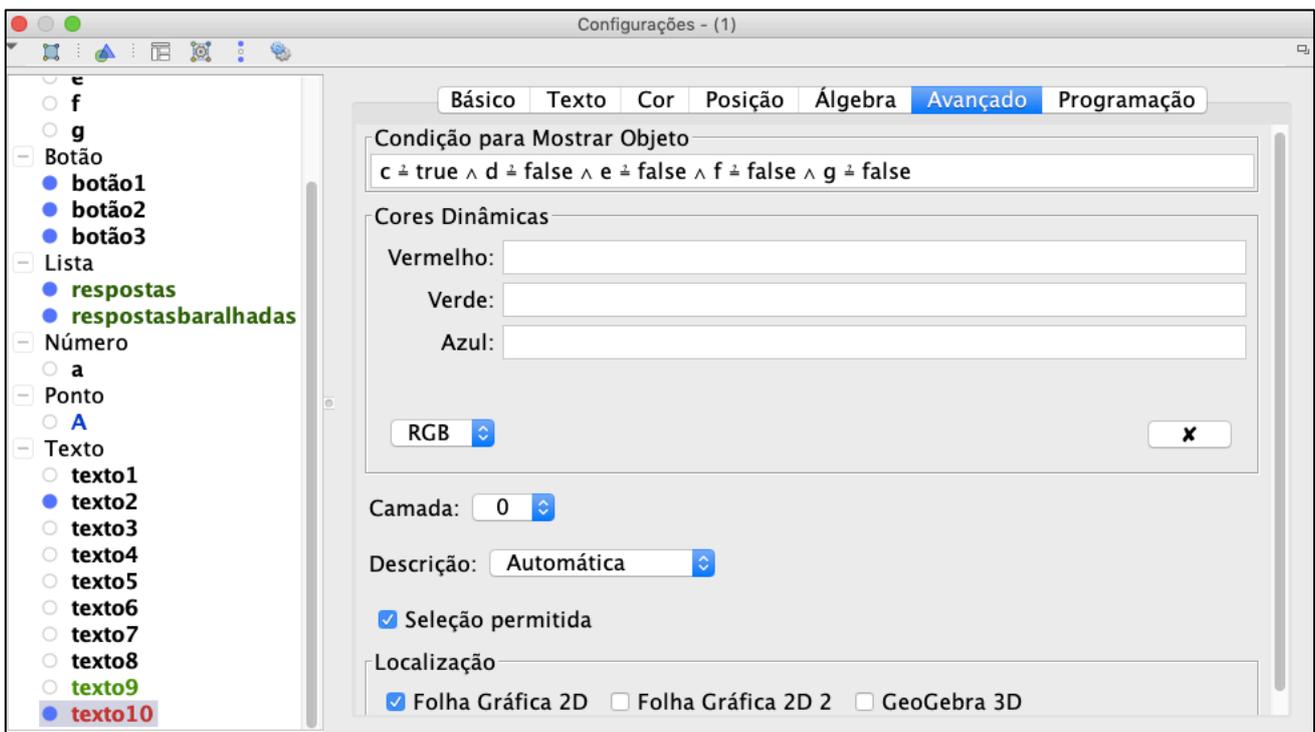


Figura 77 - Condições para visualizar o texto "A resposta está errada. Tenta novamente"

Etapa 10: Personalizar a interface do exercício

Todos os objetos estão criados e programados agora é só fazer alterações ao especto da interface alterando cores e posições dos objetos, esconder a grelha.

Para se introduzirem as questões basta modificar o texto associado a cada uma delas e a respetiva resposta. O texto pode ser em latex e assim apresentar a simbologia matemática.

Apresenta-se de seguida a tabela 7 com o protocolo de construção deste applet.

Nº	Nome	Descrição	Valor	Legenda
1	Texto texto1		“Questão 1”	
2	Texto texto2		“Questão 2”	
3	Texto texto3		“Questão 3”	
4	Texto texto4		“Questão 4”	
5	Texto texto5		“Resposta 1”	
6	Texto texto6		“Resposta 2”	
7	Texto texto7		“Resposta 3”	
8	Texto texto8		“Resposta 4”	
9	Botão botão1		botão1	Anterior
10	Botão botão2		Botão2	Seguinte
11	Botão botão3		Botão3	Voltar ao início
12	Número a		$a = 2$	
13	Lista respostas	{texto5, texto6, texto7, texto8}	Respostas = {"Resposta 1", "Resposta 2", "Resposta 3", "Resposta 4"}	
14	Lista respostasbaralhadas	Baralhar(respostas)	Respostasbaralhadas = {"Resposta 2", "Resposta 3", "Resposta 1", "Resposta 4"}	A resposta correta é:
15	Booleano c		$c = \text{true}$	Verificar a resposta
16	Booleano b		$b = \text{true}$	Responder
17	Booleano d	SelecionarElemento(respostasbaralhadas) $\stackrel{?}{=} \text{Elemento}(\text{respostas}, 1) \wedge a \stackrel{?}{=} 1$	$d = \text{false}$	
18	Booleano e	SelecionarElemento(respostasbaralhadas) $\stackrel{?}{=} \text{Elemento}(\text{respostas}, 2) \wedge a \stackrel{?}{=} 2$	$e = \text{true}$	
19	Booleano f	SelecionarElemento(respostasbaralhadas) $\stackrel{?}{=} \text{Elemento}(\text{respostas}, 3) \wedge a \stackrel{?}{=} 3$	$f = \text{false}$	
20	Booleano g	SelecionarElemento(respostasbaralhadas) $\stackrel{?}{=} \text{Elemento}(\text{respostas}, 4) \wedge a \stackrel{?}{=} 4$	$g = \text{false}$	
21	Texto texto9		“A resposta está correta”	
22	Texto texto10		“A resposta está errada! Tente novamente”	

Tabela 7 - Protocolo de construção

5. Implementação

Neste capítulo é feita uma descrição dos procedimentos relativos à aplicação das atividades constantes no livro dinâmico “A função exponencial” usando a metodologia da sala de aula invertida, destacando os seguintes aspetos: descrição dos procedimentos da implementação e feedback da professora e dos alunos.

5.1. Descrição dos procedimentos

A aplicação decorreu em seis etapas que se descrevem a seguir.

Etapa 1: Preparação dos alunos. Em aula presencial foi apresentado o livro dinâmico “A função exponencial” aos alunos e explicada a metodologia que iria ser usada no estudo deste tema. Foram também explicados os procedimentos para aceder e realizar as atividades.

Etapa 2: Disponibilização das atividades. Numa primeira fase foram disponibilizadas aos alunos as atividades referentes aos capítulos 1 e 2 do livro “A função exponencial”. Recorrendo à plataforma Teams foram divulgados, na equipa da turma, os endereços de acesso às atividades no GeoGebra Classroom. Três dias depois foi realizada uma sessão online síncrona onde foram esclarecidas as dúvidas surgidas na realização das mesmas. Após a sessão de dúvidas foram disponibilizadas as atividades referentes ao capítulo 3. Os alunos dispuseram de mais três dias para finalizar esta etapa. Ao longo desta etapa, a professora foi monitorizando o progresso dos alunos. Professora e alunos mantiveram contacto através do Teams sempre que foi necessário algum esclarecimento adicional.

Etapa 3: Aula presencial. Nesta aula começou por se fazer uma síntese dos conteúdos estudados em casa e esclareceram-se as dúvidas surgidas durante o estudo autónomo. Este procedimento demorou 50 minutos (uma aula). De seguida os alunos procederam à resolução, em pequenos grupos, da ficha de trabalho fornecida. O tempo reservado para este momento foi de 150 minutos (três aulas). No final foi feita uma síntese do trabalho realizado e destacados alguns detalhes dos exercícios propostos.

Etapa 4: Disponibilização de mais atividades. Foram disponibilizadas aos alunos as atividades referentes ao capítulo 5 num procedimento análogo ao da etapa 2. Os alunos tiveram quatro dias para a concretização das atividades.

Etapa 5: Aula presencial. Procedimento semelhante ao da etapa 3, iniciou-se a aula com uma síntese dos conteúdos estudados autonomamente pelos alunos e esclareceram-se as dúvidas passando depois à realização de uma ficha de trabalho em pequenos grupos, finalizando com uma síntese onde se destacaram os pontos mais importantes. O tempo total dedicado a esta etapa foi de 200 minutos (quatro aulas).

Etapa 6: Balanco do trabalho desenvolvido. De forma a fazer uma avaliação do nível de aceitação pelos alunos da estratégia utilizada foi-lhes pedido que se pronunciassem sobre ela.

Desta forma, o trabalho realizado pelos alunos decorreu alternadamente em casa e na escola.

Em casa estudaram alguns dos conteúdos teóricos relativos à função exponencial e às suas propriedades e treinaram procedimentos como a resolução de equações e inequações, cálculo de limites recorrendo ao limite notável $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ e determinação de derivadas. Estes conteúdos foram depois aplicados na resolução de exercícios e problemas mais abrangentes nas aulas presenciais.

Em sala de aula os alunos concentraram os seus esforços na resolução, em pequenos grupos, das fichas de trabalho fornecidas. O papel da professora durante o tempo das aulas foi o de orientar e apoiar os alunos. Esclareceu dúvidas em relação aos conceitos estudados autonomamente em casa, ajudou na mobilização de outros conhecimentos anteriormente adquiridos e necessários à resolução dos exercícios e, em alguns casos, na interpretação dos enunciados. As aulas presenciais decorreram em sala de aula tradicional, com as mesas justapostas em grupo e sem a obrigatoriedade do uso de quaisquer recursos tecnológicos. Alguns alunos levaram tablets para poderem aceder aos conteúdos do livro dinâmico e às atividades que haviam realizado em casa.

5.2. Feedback dos alunos

No final da implementação solicitei aos alunos que escrevessem três palavras que descrevessem a sua percepção quanto à estratégia didática utilizada. Com as suas respostas elaborei a nuvem de palavras que se apresenta na figura 78. As palavras com maior destaque foram as mais referidas, pelo que pode dizer-se que esta experiência foi, para os alunos, **desafiante** e uma forma **diferente** de aprender.



Figura 78 - Feedback dos alunos

5.3. Feedback da professora

Depois de analisado todo o processo, o feedback é positivo. Pode afirmar-se que os objetivos inicialmente delineados foram alcançados.

Como aspeto negativo destaca-se a morosidade da construção dos materiais a fornecer aos alunos para a implementação desta metodologia. Como aspetos positivos: o empenho demonstrado pelos alunos quer no trabalho autónomo, quer no trabalho em sala de aula; a responsabilidade evidenciada no cumprimento das atividades dentro dos prazos estabelecidos e, a forma como, em sala da aula, trabalharam de forma colaborativa.

6. Considerações finais

O objetivo do trabalho realizado no âmbito desta dissertação foi criar um conjunto de materiais de suporte à implementação da metodologia da sala de aula invertida no ensino da função exponencial.

A implementação decorreu já na reta final do ano letivo e permitiu aos alunos uma abordagem diferente do habitual. Os conteúdos base foram estudados em casa, autonomamente, com recurso aos materiais desenvolvidos para o efeito reservando o tempo de aula presencial para a resolução de exercícios e problemas mais abrangentes e exigentes. A tecnologia, fundamental neste processo, foi amplamente utilizada, mas fora da sala de aula, contornando as dificuldades existentes para a sua utilização em ambiente escolar.

O GeoGebra permitiu a construção dos applets que serviram de base às atividades. A plataforma do GeoGebra possibilitou a construção e disponibilização do livro dinâmico. O GeoGebra Classroom facilitou o acompanhamento do trabalho desenvolvido pelos alunos na fase pré-aula e potenciou o envolvimento dos mesmos em todo o processo, uma vez que estes tinham conhecimento que o seu trabalho estaria a ser alvo da atenção da professora.

O GeoGebra e todas as ferramentas que lhe estão associadas são, assim, uma mais-valia no ensino da matemática. A sua utilização pode ser um ponto de partida para novas metodologias mais motivadoras e centradas no aluno e contribuir para melhores aprendizagens.

Foi uma experiência muito positiva para todos os envolvidos, professora e alunos.

Como perspetiva de trabalho futuro, esta experiência será partilhada com outros professores esperando que ajude a motivá-los para também implementar novas metodologias, criar e partilhar materiais e, desta forma, contribuir para uma melhoria efetiva no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Referências bibliográficas

- Andrade, C., Pereira, P. P., & Pimenta, P. (2017). *Novo Ípsilon 12 - Matemática A 12º ano - Vol.2*. Raiz Editora.
- Barbosa, E. F., & Moura, D. G. (2013). Metodologias ativas de aprendizagem na Educação Profissional e Tecnológica. *Boletim Técnico do Senac*, 39(2).
- Carlos, Mestre, C., Martins, H., Almiro, J., Santos, L., Gabriel, L., . . . Correia, P. (2019). *Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática*. Grupo de Trabalho de Matemática.
- Costa, B., & Rodrigues, E. (2017). *Novo Espaço 12 - Matemática A 12º ano - vol 2*. Porto Editora.
- Dos Santos, J., & Trocado, A. (2016). GeoGebra as a learning Mathematical Environment. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*.
- Educação - Gabinete do Secretário de Estado da Educação. (6 de julho de 2018). Decreto-Lei nº 6605-A/2021 de 6 de Julho. *Diário da República*, nº 129/2018, 2ª série.
- Educação - Gabinete do Secretário de Estado da Educação. (31 de Agosto de 2018). Despacho nº 8476-A/2018, de 31 de Agosto. *Diário da República*, nº 168/2018, 2ª série.
- Educação, M. d. (2018h). *Aprendizagens Essenciais - articulação com o perfil dos alunos, Matemática A, 12º ano*.
- EDUCAUSE. (16 de Agosto de 2022). Obtido de <https://www.educause.edu/>
- Fernandes, C. (2012). *GeoGebra, algumas aplicações ao Ensino da Matemática [Tese de Mestrado]*. Universidade da Beira Interior.
- GeoGebra - aplicativos matemáticos*. (s.d.). Obtido de <http://www.geogebra.org>

- Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carrilo, J., Silva, L., . . . Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Lisboa: Direção Geral da Educação, Ministério da Educação.
- Moran, J. M. (2000). ENSINO E APRENDIZAGEM INOVADORES COM TECNOLOGIAS. *Informática Na educação: Teoria & Prática*, 3(1).
- Negra, C., Martinho, E., & Martins, H. (2017). *Dimensões 12 - Matemática A 12º ano - vol.2*. Santillana.
- Neves, M. A., Guerreiro, L., & Silva, A. P. (2017). *Máximo 12 - Matemática A 12º ano - vol 2*. Porto Editora.
- Oliveira, E. M. (2016). Docência em Direito e a "Sala de aula invertida" como opção metodológica ativa. *Evidência, Araxá*, v. 12.
- Raposo, D., & Gomes, L. (2017). *Expoente 12 - Matemática A, 12º ano - vol 3*. Edições ASA.
- Reis, I. M., & Santos, J. M. (2022). GeoGebra Classroom, em período de confinamento, no ensino e aprendizagem das propriedades dos quadriláteros. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*.
- Viegas, C., & Valente, S. (2017). *Mat 12 - Matemática A 12º ano - vol 2*. Texto Editora.
- Wolff, M. E., & Silva, D. P. (2013). O software GeoGebra no ensino. Em *Os Desafios da Escola Pública Paranaense na perspectiva do professor*. Paraná: Secretaria de Estado da Educação. Superintendência da Educação.

Apêndices

Apêndice I: Barra de ferramentas da Folha Gráfica 2D

A barra de ferramentas da Folha Gráfica 2D do GeoGebra disponibiliza um vasto conjunto de ferramentas que permitem ao utilizador criar representações de objetos diretamente na área de desenho da Folha Gráfica. Cada Ícone desta barra representa uma das onze “Caixas de ferramentas”. Em cada uma pode encontrar-se um conjunto de ferramentas relacionadas. Para abrir a caixa de ferramentas deve clicar-se no triângulo situado no canto inferior direito de cada Ícone.



Figura 79 - Barra de ferramentas da folha gráfica 2D

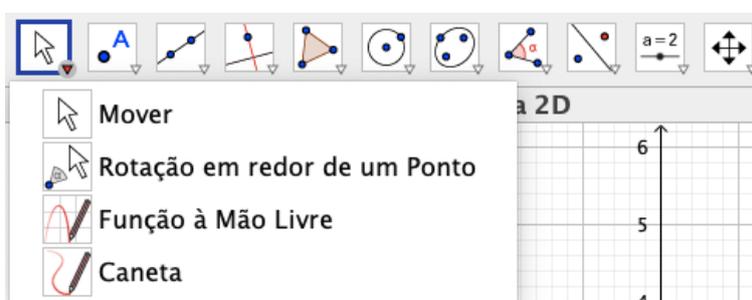


Figura 80 - Caixa 1: Ferramentas de movimento



Figura 81 - Caixa 2: Ferramentas de pontos

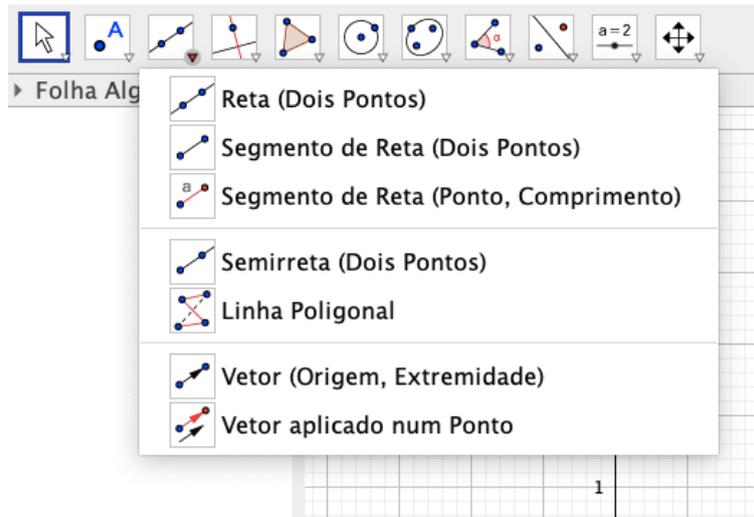


Figura 82 - Caixa 3: Ferramentas de linhas

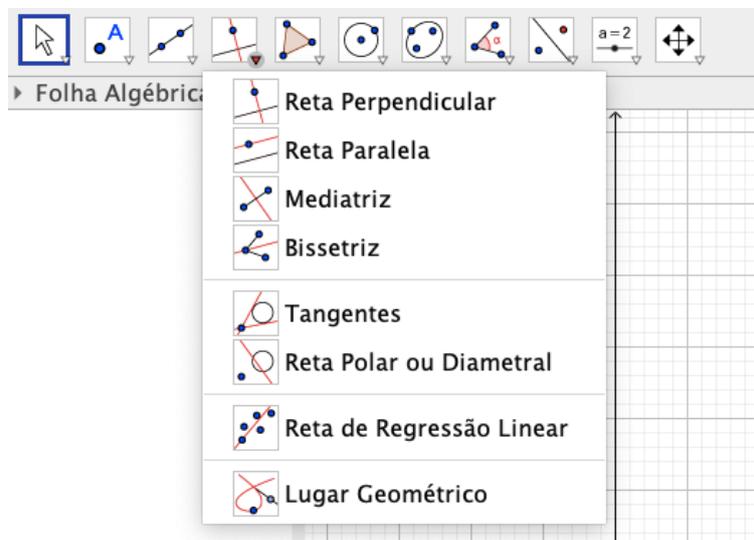


Figura 83 – Caixa 4: Ferramentas de linhas especiais

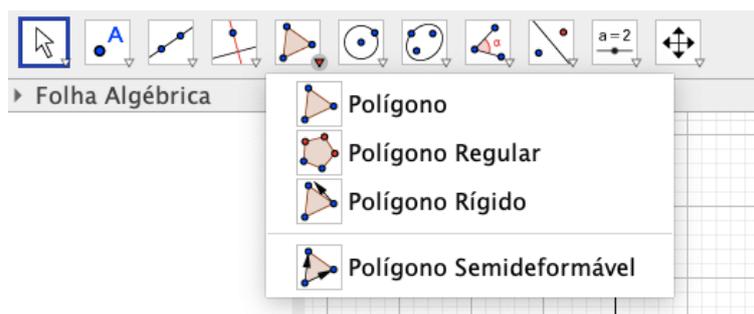


Figura 84 - Caixa 5 - Ferramentas de polígonos

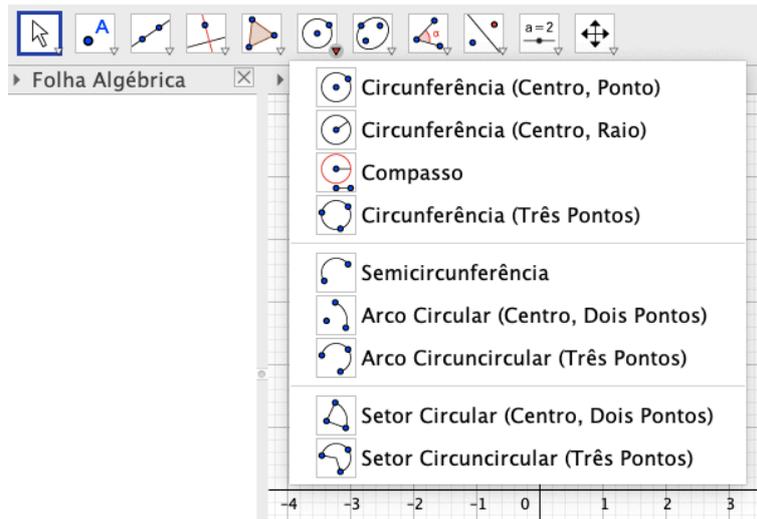


Figura 85 - Caixa 6: Ferramentas de círculos e arcos

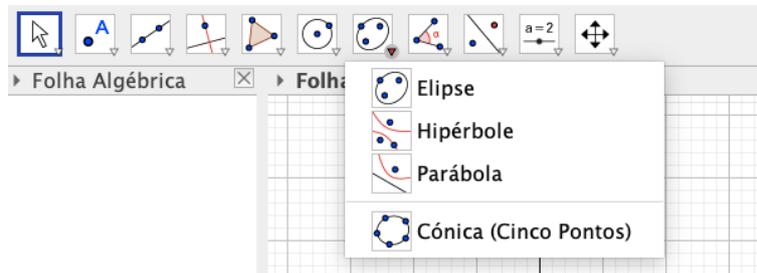


Figura 86 - Caixa 7: Ferramentas de cónicas

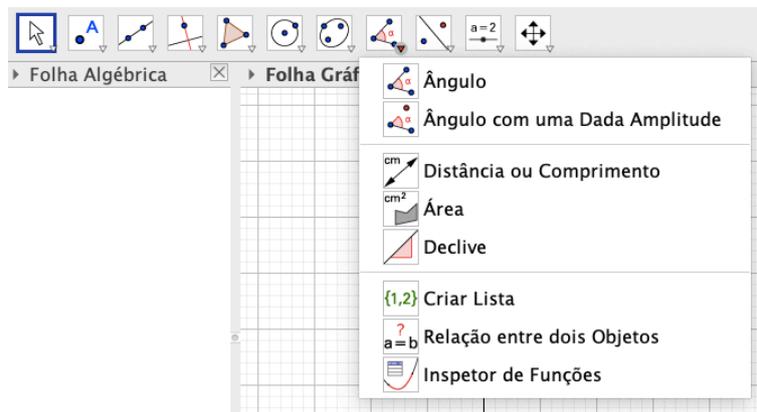


Figura 87 - Caixa 8: Ferramentas de medição

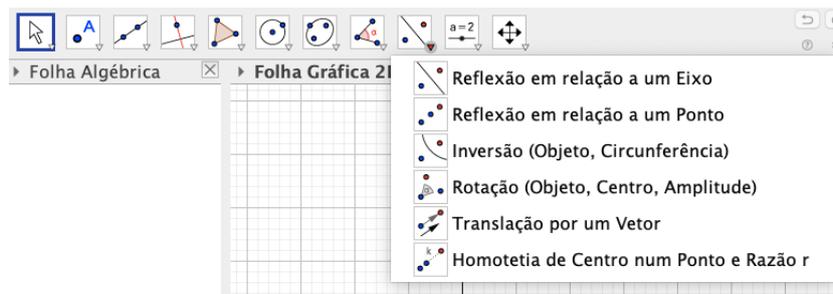


Figura 88 - Caixa 9: Ferramentas de transformações

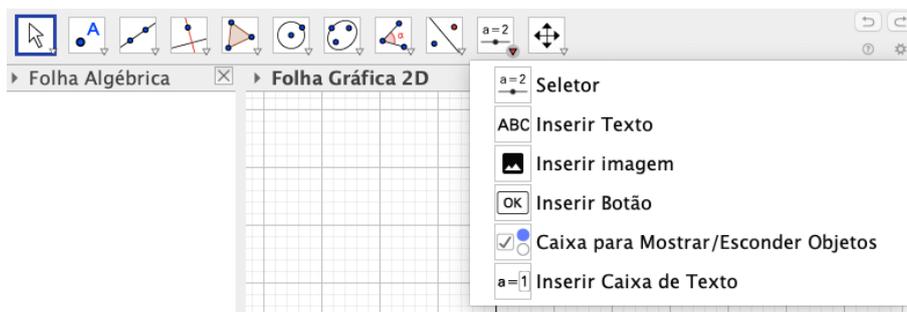


Figura 89 - Caixa 10: Ferramentas de objetos especiais

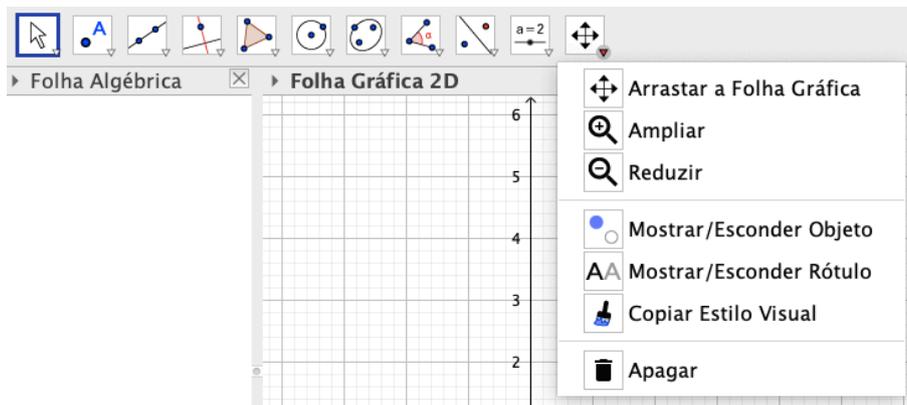


Figura 90 - Caixa 11: Ferramentas de ação

Apêndice II: Tutorial para criação de uma conta na plataforma do GeoGebra

Para criar uma conta de utilizador na plataforma oficial do GeoGebra devem seguir-se as seguintes etapas:

1. Aceder ao site oficial do GeoGebra cujo endereço é o seguinte: <https://www.geogebra.org>



Figura 91 - Página de entrada da plataforma do GeoGebra

2. Selecionar **“ENTRAR”** no canto superior direito. Ao realizar esta ação, abre-se uma nova janela onde se deve seleccionar a opção **“Criar Conta”**.

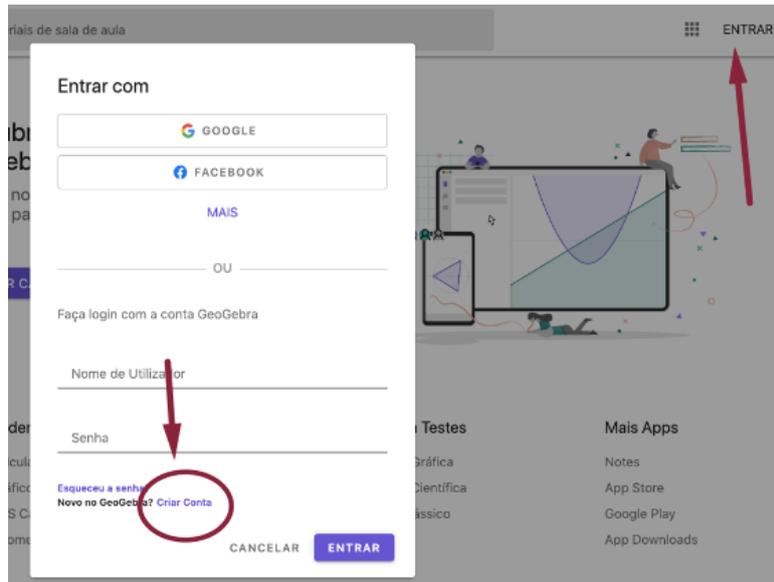


Figura 92 - Janela de registo (1)

3. Depois de efetuados os procedimentos referidos na etapa anterior, surge a seguinte janela:

Figura 93 - Janela para registo (2)

- Existem duas formas de criar a conta, recorrendo a uma conta já existente no Google, Office 365, Microsoft, Facebook ou Twitter, ou, utilizando o login GeoGebra. No primeiro caso basta seleccionar o ícone correspondente, no segundo é necessário preencher todos os campos do formulário
- Depois seleccionar **“Criar uma Conta”**. Será enviado um email para o endereço indicado.
- Abrir o email e seguir o endereço enviado para confirmar a criação da conta.
- De seguida, são solicitadas outras informações e, após o seu preenchimento, o perfil de utilizador na plataforma do GeoGebra está pronto a ser utilizado.

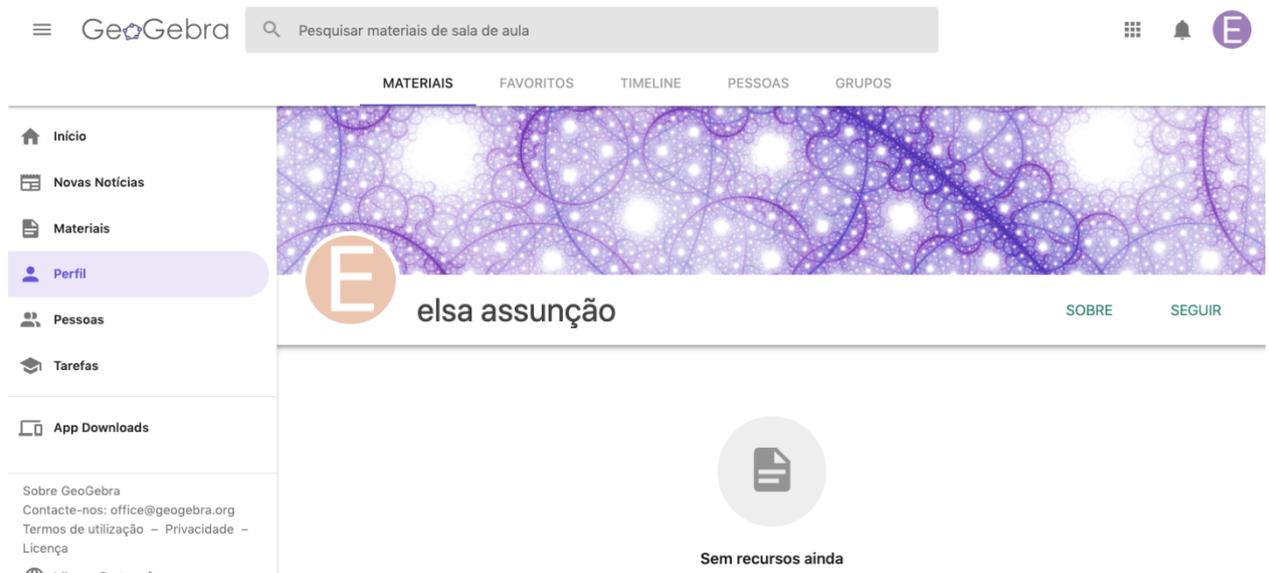


Figura 94 - Conta do utilizador

Apêndice III: Tutorial para a criação de uma folha de trabalho dinâmica (atividade) no GeoGebra

Existem dois processos diferentes para o utilizador exportar uma atividade e assim criar uma folha de trabalho dinâmica: uma forma é via o próprio software, a outra é através da plataforma do GeoGebra.

Primeiro processo: via software

1. Depois de efetuada, no GeoGebra, a construção que se pretende exportar, selecionar sequencialmente as opções “Ficheiro”, “Exportar” e “Folha de Trabalho Dinâmica como Página Web (html)...”

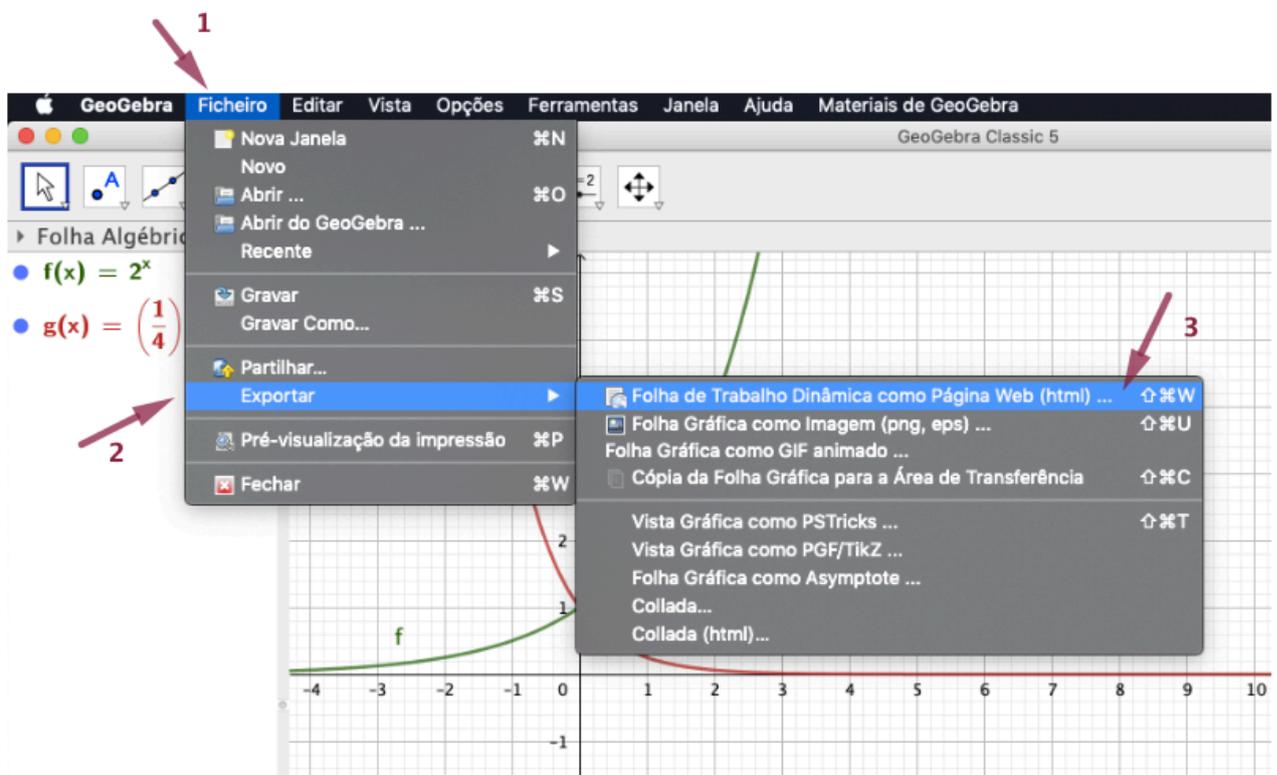


Figura 95 - Exportação de uma construção

2. Depois de feita a seleção referida no ponto anterior, abre-se uma nova janela. Aqui, deverá atribuir-se um título à atividade e, é possível, textos para aparecerem acima e/ou abaixo da construção.

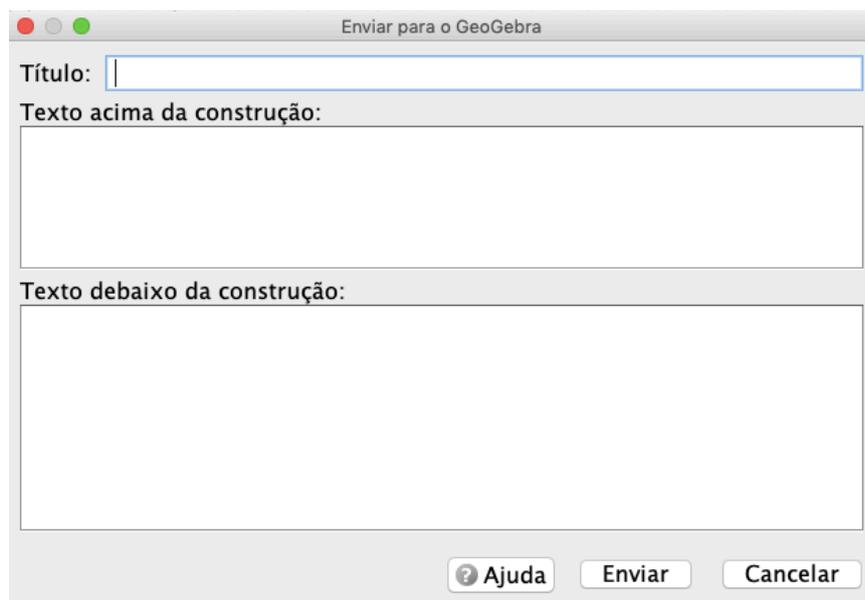


Figura 96 - Janela de exportação (1)

3. Depois de preenchidos todos os campos, selecionar “Enviar”

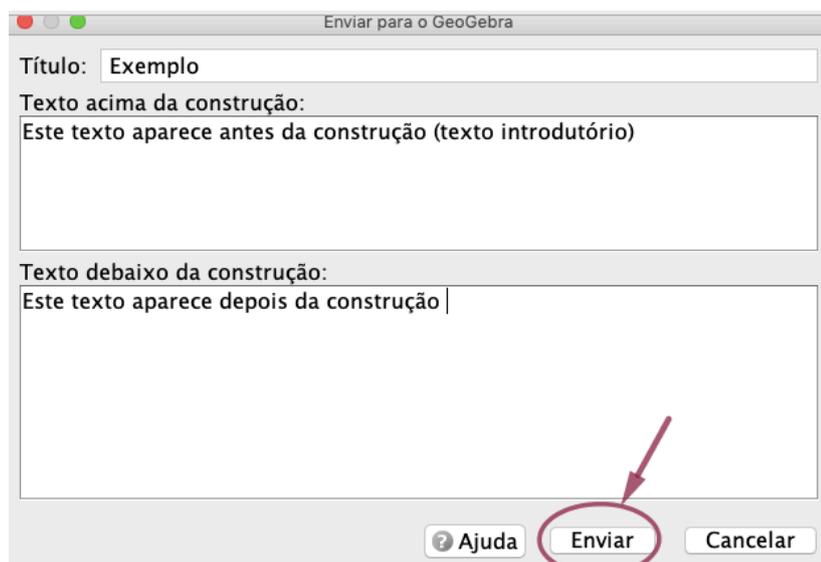


Figura 97 - Janela de exportação (2)

Segundo processo: via plataforma do GeoGebra

Em primeiro lugar deve aceder-se à conta pessoal na plataforma do GeoGebra e ter o arquivo da atividade que se pretende exportar gravado no computador.

1. Na página inicial do perfil do utilizador deve seleccionar-se, sequencialmente, as opções Criar e Enviar.

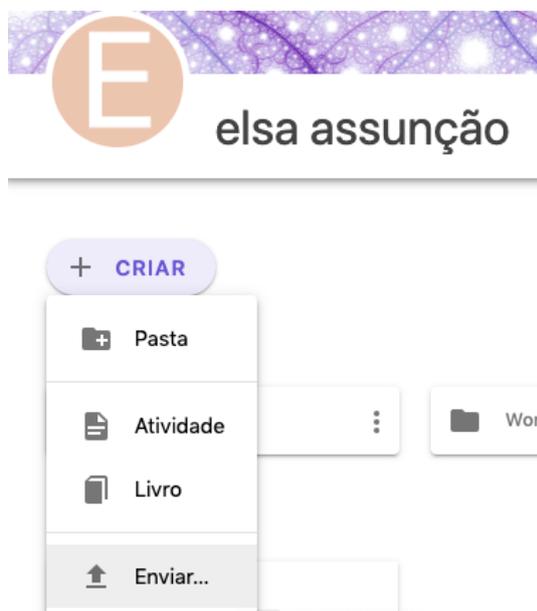


Figura 98 - Enviar ficheiro para a plataforma do GeoGebra (1)

2. Surge a seguinte janela. Deve seleccionar-se **Escolher ficheiro** e depois **Enviar**.



Figura 99 - Enviar ficheiro para a plataforma do GeoGebra (2)

3. Depois de enviado o ficheiro surge uma nova janela onde se deve atribuir um título à atividade.

← GeoGebra

Título

$$3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} = 21$$

Exemplo 1
 Exemplo 2

Anterior Seguinte
Voltar ao início

+ INCLUIR ELEMENTO

Gravar & Fechar Cancelar

Visibilidade: Compartilhado com o Link

Para definir a visibilidade para "Público": por favor, feche esta tela, pressione e escolha "Publicar".
Por favor, note que os recursos não podem ter maior visibilidade do que o original. Também "privado" não é uma opção válida se o

Palavras-chaves

Figura 100 - Janela de configuração da atividade

4. Para além do título podem incluir-se outros elementos como por exemplo texto, questões, vídeos, imagens ou ligações a outras páginas. Para o fazer basta selecionar a opção **+INCLUIR ELEMENTO**.
5. Finalmente seleciona-se a opção **Gravar & Fechar** e a atividade ficará guardada no perfil do utilizador.

Apêndice IV: Tutorial para a criação de um livro no GeoGebra

Para criar um livro dinâmico no GeoGebra deve selecionar-se a opção **CRIAR** na página inicial do utilizador e depois **Livro**.

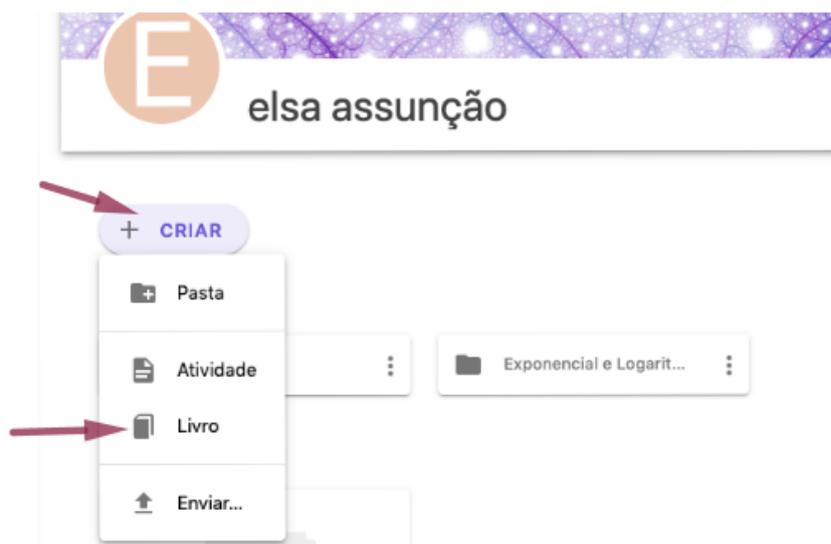


Figura 101 - Criação de um livro na plataforma do GeoGebra

Na sequência destas ações abre-se uma janela semelhante à apresentada na figura seguinte.

Criar Título da Página

Pode ser criado aqui um Livro de recursos GeoGebra, que poderá ser adicionado no próximo passo.

Título

Idioma

Descrição (opcional)

B **I** *f(x)* [www](#)     

Grupo alvo (idade)

Idade dos estudantes para os quais se destina este material

Idade: 3 - 19+

Palavras-chaves

Palavras-chaves são usadas para descrever o seu material e ajudar na pesquisa. Você e outros usuários podem acrescentar novas palavras-chaves mais tarde.

Visibilidade

Por favor, escolha se você quer compartilhar este Livro com outras pessoas ou quer mantê-lo privado.

- Público** - Outros usuários podem encontrar e visualizar este Livro. Obrigado por compartilhá-lo com a comunidade.
Para definir a visibilidade para "Público": por favor, feche esta tela, pressione **!** e escolha "Publicar".
- Compartilhado com o Link** - Somente usuários que possuam o link poderão visualizar este Livro. Ele não aparecerá nos resultados de pesquisa de outros usuários.
- Particular** - Outros usuários não poderão visualizar este Livro GeoGebra. Ele não aparecerá nos resultados de pesquisa de outros usuários.

Por favor, note que você não pode acrescentar materiais particulares em Livros compartilhados ou públicos.

Por favor, note que os recursos não podem ter maior visibilidade do que o original. Também 'privado' não é uma opção válida se o recurso for usado em atividades públicas ou livros, ou tiver sido anexado a uma postagem pública.

 Ao criar um Livro você concorda em publicar o seu trabalho segundo a licença [Creative Commons: Attribution Share Alike](#).

Gravar

Figura 102 - Informações básicas do livro

Este é o local onde se introduzem algumas informações sobre o livro nomeadamente, o título, o idioma utilizado, uma descrição breve, palavras-chave, a faixa etária do grupo-alvo a quem se destina e ainda definir o tipo de visibilidade que se pretende. Para guardar estas informações deve clicar-se em Gravar. Completada esta tarefa pode começar-se a editar o livro.



Figura 103 - Começando a editar o livro

Para estruturar o livro, podem criar-se capítulos, adicionar um capítulo já existente de outro livro ou, simplesmente, iniciar o processo com as atividades escolhidas sem ser necessário criar capítulos. Para adicionar as atividades.

Para adicionar as atividades escolhidas ao livro clica-se no botão **Incluir atividade**. Ao realizar esta ação surge no écran uma janela semelhante à que se apresenta na figura seguinte.

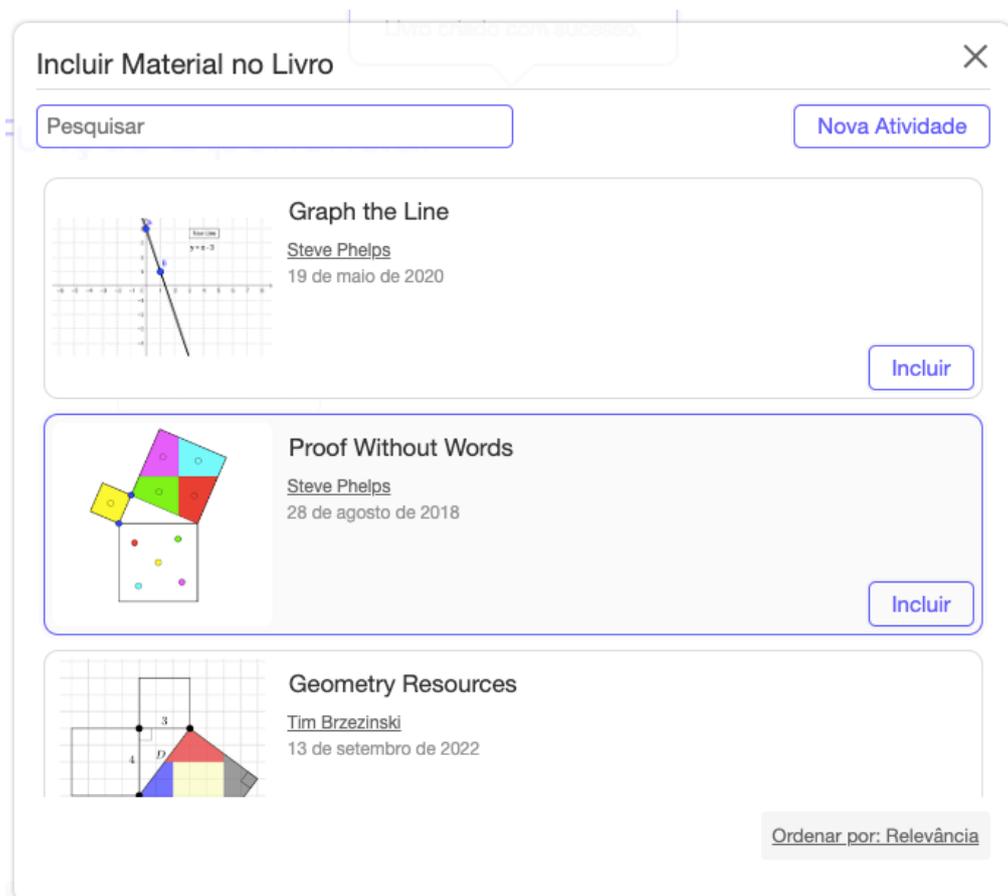


Figura 104 - Adicionando atividades ao livro

Podem incluir-se atividades no livro de duas formas distintas. Ao selecionar **Nova atividade** é possível exportar uma atividade conforme se descreve no anexo III. A outra opção é utilizar uma atividade já existente. Pode fazer-se uma busca nas atividades existentes na plataforma do GeoGebra recorrendo ao campo de entrada **Pesquisar** e digitando uma palavra-chave. Serão apresentadas todas as atividades disponíveis que têm essa palavra-chave nas suas definições, o que pode gerar muitos resultados. Também se pode digitar diretamente o endereço da atividade pretendida.

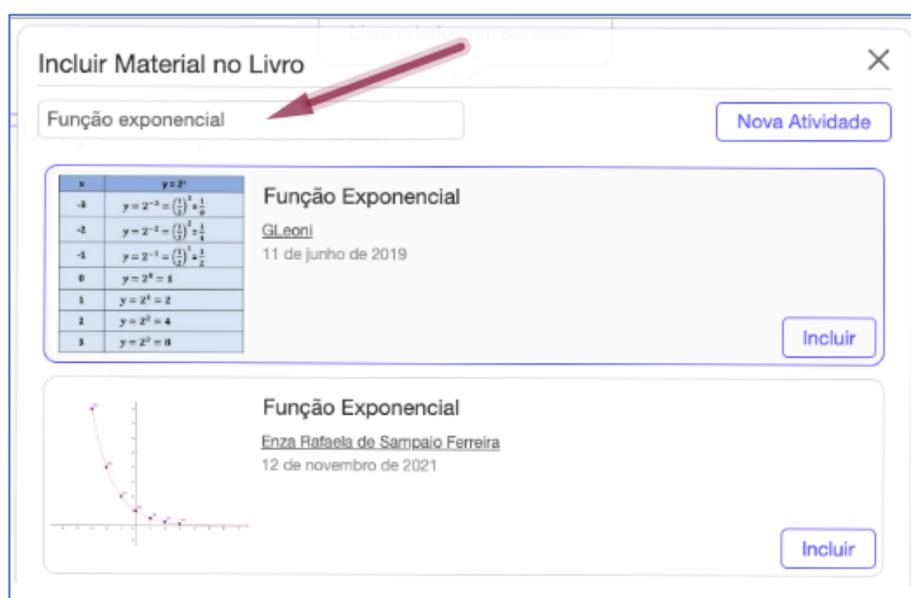


Figura 105 - Adicionando atividades ao livro

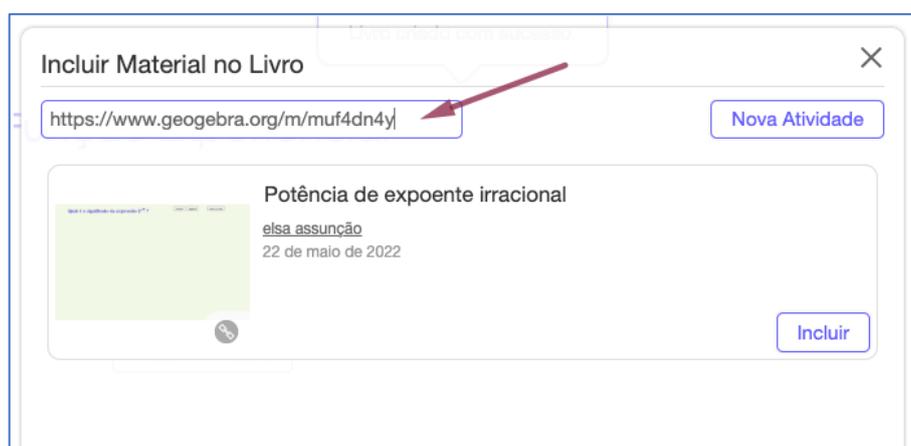


Figura 106 – Adicionando atividades ao livro

Ao selecionar **Incluir**, a atividade é incorporada no livro.

← Editar Livro: A Função Exponencial

Conteúdo Título da Página

Capítulos

Aresentar Capítulo

1

Potência de expoente irraci...

22 de maio de 2022 - 09:48

elsa assunção

Este material não está visível ao público

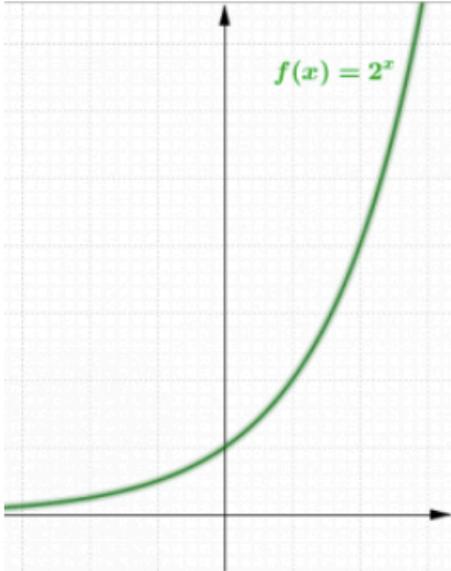
Incluir Atividade

Figura 107 – Atividade adicionada ao livro

O livro após a introdução de todas as atividades tem o aspeto seguinte.

A Função Exponencial

Autor: elsa assunção



Lista de conteúdos

- Apresentação do livro
 - O livro dinâmico
- Cap. 1 - Ponto de partida
 - Atividade introdutória: Crescimento microbiano
 - Exercício
- Cap. 2 - Potências de expoente irracional
 - Potências de expoente racional - revisão
 - Potência de expoente irracional

Figura 108 -Interface do livro

Apêndice V: Tutorial para a criação de uma sala no GeoGebra Classroom

Qualquer atividade alojada na plataforma do GeoGebra pode ser utilizada para criar uma sala de aula virtual no GeoGebra Classroom, no entanto, esta deve conter elementos que se transformem em tarefas para os alunos. Depois de selecionada a atividade que se pretende propor aos alunos, deve clicar-se no botão **CRIAR SALA DE AULA** que se encontra no canto superior direito da página.

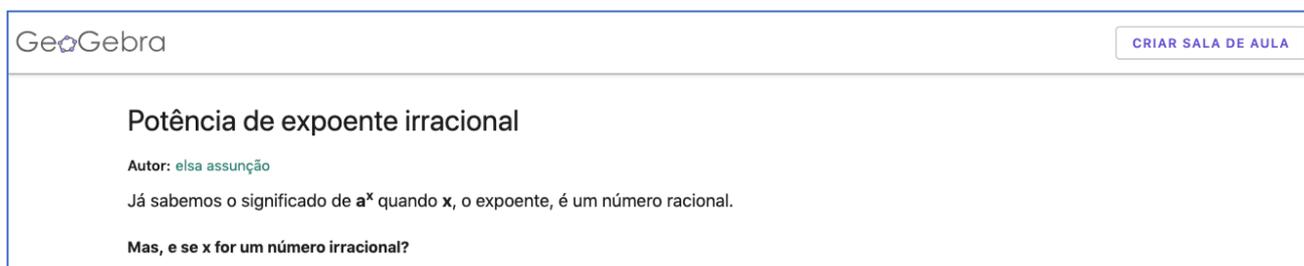


Figura 109 - Botão para criar uma sala de aula

De seguida abre-se uma nova janela onde, depois de atribuir um nome à sala se seleciona CRIAR.



Figura 110 - Janela para a criação de uma sala

Após a criação da sala, abre-se uma janela de visão geral do professor. Nesta janela aparece um código que foi gerado aleatoriamente e um endereço. Estes são os dados de acesso à sala. Os

alunos podem entrar na sala de aula virtual para realizar as tarefas propostas pelo professor utilizando o código ou seguindo o endereço.

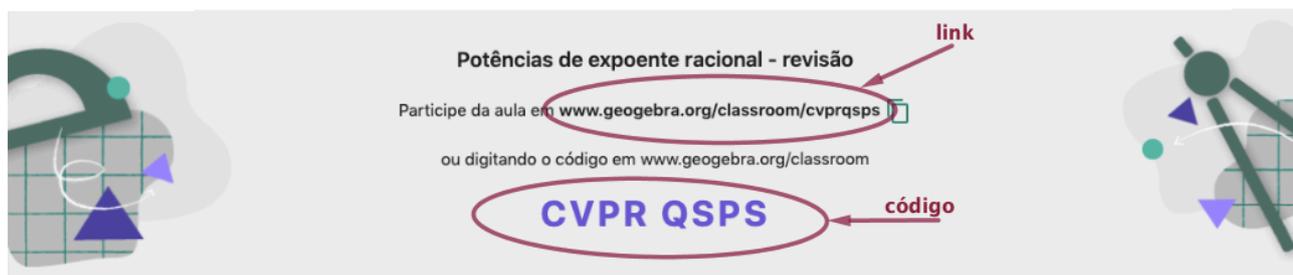


Figura 111 - Código e endereço para acesso à sala

Para entrar na sala utilizando o código os alunos devem, depois de aceder à página oficial do GeoGebra, selecionar a opção **Tarefa** que aparece no menu do lado esquerdo.

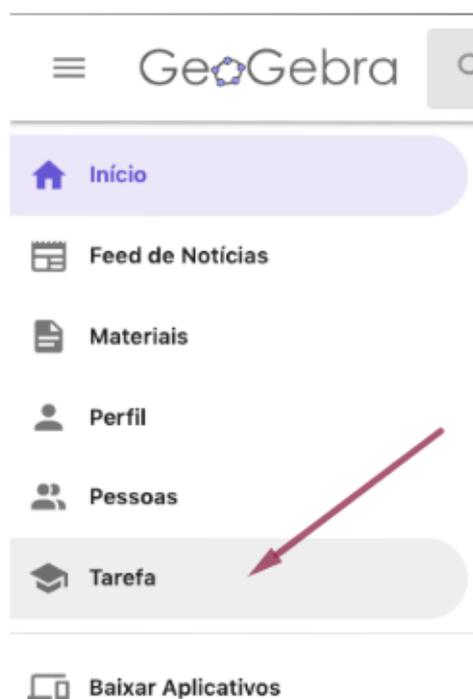


Figura 112 – Menu da página inicial do GeoGebra

Abre-se uma nova janela onde se digita o código da sala.



Figura 113 - Janela de acesso à sala