Universidade de
Aveiro
2022

JORGE PAULO ALVES DE OLIVEIRA

TRANSFORMAÇÕES DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES E COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA COM RECURSO AO DUAL *GEOGEBRA-SMARTPHONE*

Universidade de
Aveiro
2022

JORGE PAULO ALVES DE OLIVEIRA

TRANSFORMAÇÕES DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES E COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA COM RECURSO AO DUAL *GEOGEBRA-SMARTPHONE*

Relatório de Estágio apresentado à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, realizado sob a orientação científica da Prof.ª Doutora Isabel Maria Cabrita dos Reis Pires Pereira, Professora Associada do Departamento de Educação e Psicologia da Universidade de Aveiro.

A Deus.
Aos meus queridos. Aos ausentes e aos presentes.

o júri

presidente	Prof.ª Doutora Maria Teresa Bixirão Neto Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro
vogais	Doutor Joaquim António da Piedade Pinto Professor, Agrupamento de Escolas da Gafanha da Nazaré
	Prof.ª Doutora Isabel Maria Cabrita dos Reis Pires Pereira Professora Associada da Universidade de Aveiro

agradecimentos

Um agradecimento sentido, profundo e eterno a todos os professores de uma vida, em especial, à Prof.ª Doutora Isabel Cabrita, ao Prof.º Doutor João Rodrigues e à Professora cooperante Valquíria Fortuna.

Agradeço ainda à Professora Ana Vaz e a todos os meus alunos do estágio.

Agradeço também à escola onde estagiei, à sua direção e a todos com quem convivi e trabalhei.

palavras-chave *GeoGebra*, *smartphone*, transformações geométricas de gráficos de funções, comunicação matemática

resumo Este trabalho tem como objetivo analisar se a utilização do *smartphone* em combinação com o *GeoGebra,* designado de dual*,* para apoio da resolução de tarefas desafiantes é facilitadora do estabelecimento de relações entre gráficos de funções e respetivas transformações geométricas, bem como da melhoria da comunicação matemática. O estudo de caso qualitativo realizou-se numa turma do 10.º ano do curso científico-humanístico de Ciências Socioeconómicas de uma escola no litoral norte, na qual foi desenvolvida a unidade curricular de *Prática de Ensino Supervisionada*. As técnicas utilizadas para a recolha de dados neste estudo foram: a recolha documental e a observação. A análise de conteúdo a que os dados foram sujeitos permitiram concluir que o dual foi facilitador do estabelecimento de relações entre gráficos de funções e respetivas transformações geométricas, bem como da melhoria da comunicação matemática.

keywords

GeoGebra, smartphone, geometric transformations of function graphs, mathematical communication

abstract

This paper aims to analyse whether the use of the smartphone in combination with GeoGebra, called *dual*, to support the resolution of challenging tasks facilitates the establishment of relationships between function graphs and their geometric transformations, as well as improving mathematical communication. The qualitative case study was carried out in a 10th grade class of the scientific-humanistic course of Socioeconomic Sciences of a school in the north coast, in which the curricular unit of Supervised Teaching Practice was developed. The techniques used for data collection in this study were: documental collection and observation. The content analysis of the data allowed us to conclude that *dual* facilitated the establishment of relationships between function graphs and their geometric transformations, as well as improved mathematical communication.

Índice

Índice de Figuras

Índice de Tabelas

1. Introdução

Como observador crítico e reflexivo das questões da aprendizagem, o investigador sempre se preocupou com o desenvolvimento efetivo de competências no âmbito da Matemática, que servissem para toda uma vida, nomeadamente, sólidos conhecimentos e sua aplicação na resolução das tarefas mais diversas, tirando-se partido da comunicação em matemática. Considera ainda inevitável integrar adequadamente tecnologias nesse processo, não só porque o seu uso está plasmado nos diferentes documentos que apoiam a estrutura curricular, designadamente, no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória e nas Aprendizagens Essenciais do Ensino Básico e Secundário (DGE, 2018, 2021) como também por convicção, pois entende que o presente e o futuro da escola são indissociáveis do uso de todo o tipo de tecnologias que marca o dia-a-dia dos cidadãos pelas vantagens educativas que aportam.

O presente trabalho traduz muitas dessas preocupações, reflexões e ações.

No seguimento desta introdução, apresenta-se os Enquadramentos Teórico e Curricular, relacionados com as componentes tecnológica, didática, comunicacional e matemática. Segue-se o Método utilizado, no âmbito do qual se explicitam as opções metodológicas e os participantes no estudo. A este propósito, apresentam-se as caracterizações do contexto educativo, da escola e da turma. Avança-se para a recolha de dados, explicitando-se as técnicas e instrumentos usados, e para uma breve descrição do estudo. Termina-se este ponto fazendo referência ao tratamento a que os dados foram sujeitos. O capítulo seguinte respeita à Apresentação, análise e discussão dos resultados, e finaliza-se com Conclusões e considerações finais e com as referências bibliográficas usadas. Ainda se apresentam apêndices.

2. Enquadramentos teórico e curricular

Segue-se o enquadramento do estudo, partindo-se de uma visão mais geral, passando-se, posteriormente, para enquadramentos mais específicos relacionados com diversas componentes subjacentes ao mesmo.

Subjacente a este trabalho de investigação está a utilização daquilo que é designado por dual, composto por *smartphone – GeoGebra,* no contexto da sala de aula, enquanto ferramenta de apoio à resolução efetiva, por parte dos alunos, de tarefas desafiantes. Destaque-se que o dual é acessível a todos, ou praticamente a todos que, com alguma ajuda, teriam facilidade na sua utilização. Além disso, o *GeoGebra* é gratuito e muito potente.

A combinação do aparelho móvel com a ferramenta *GeoGebra* possibilita condições para a efetivação de aprendizagens matemáticas significantes, permitindo o desenvolvimento de inúmeras capacidades transversais, entre as quais a capacidade de explorar situações matemáticas e a capacidade de comunicar matematicamente (Dantas & Cabrita, 2020).

Apesar das vantagens inerentes ao seu uso, a utilização do dual é ainda bastante incipiente e, quando é usado, nem sempre é de forma articulada com as recomendações curriculares e nem sempre é de forma continuada (Carrega et al., 2021).

O tópico "Generalidades acerca de funções reais de variável real" é estruturante no contexto da disciplina de *Matemática A* do 10.º ano e integra o subtópico "T*ransformações geométricas e simetria de gráficos de funções",* no qual os alunos apresentam algumas dificuldades.

Neste contexto, a questão central desta investigação é: Qual o contributo do dual *smartphone-GeoGebra* para o aprofundamento do conhecimento focado nas transformações geométricas dos gráficos de funções e sua aplicação a situações novas e para o desenvolvimento da comunicação matemática?

Para a obtenção da resposta a esta questão, foram definidos os seguintes objetivos:

- Conceber uma sequência didática, corporizada por tarefas focadas no tópico matemático referido e cuja resolução seja apoiada pelo dual em causa;
- Implementar a sequência mencionada com alunos do 10.º ano de escolaridade no contexto educacional real;
- Avaliar o impacto da experiência vivida pelos discentes no aprofundamento do conhecimento relacionado com o tópico matemático em causa e sua aplicação na resolução de diversas tarefas e no desenvolvimento da comunicação (em) matemática.

2.1. Componente Tecnológica

O uso do telemóvel na sala de aula não é totalmente consensual no nosso tempo. Por exemplo, Kim et al. (2019) concluem que a utilização do telemóvel sem intermediação ou tutoria provoca uma baixa significativa dos resultados escolares. Baert et al. (2019) e Sunday et al. (2021) têm a mesma opinião e estes últimos autores até recomendam que políticas educacionais e a formação de professores comecem a abordar a redução do uso de *smartphones* a tempo de melhorar a aprendizagem e o estudo.

Opinião contrária tem Derounian (2020), que considera que há quatro benefícios das tecnologias móveis em sala de aula: preparar os alunos para o futuro, permitir uma aprendizagem atualizada, usar dispositivos móveis para ler livros didáticos e expandir a aprendizagem para além da sala de aula, permitindo aos alunos continuar as suas tarefas e corrigir erros à medida que avançam.

Dantas & Cabrita (2020) elencam algumas das mais-valias, plasmadas no guia da UNESCO (2014), do uso de m-learning nos variados ambientes de aprendizagem: facilitam a aprendizagem individualizada; permitem retorno e avaliação imediatos; permitem gerir melhor o tempo em ambiente formal; apoiam a aprendizagem fora da sala de aula; potencializam a continuidade da aprendizagem; melhoram a relação custo-eficiência e criam uma ponte entre a aprendizagem formal, a não formal e a informal. Segundo os mesmos autores, a utilização do *smartphone* visa ainda desenvolver competências transversais e específicas da matemática, tais como:

> aplicar conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas; desenvolver capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo; expressar-se oralmente e por escrito em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática; realizar-se pessoalmente e desenvolver um sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas e atitudes de autonomia e cooperação (Dantas & Cabrita, 2020, p. 239)

Opinião também favorável é revelada em Figueiredo (2019) que considera que se têm encarado as competências como se de conhecimentos se tratassem, esquecendo que as primeiras só se desenvolvem pela participação ativa em práticas sociais complexas, reais ou simuladas, ricas e variadas, permitindo a sua emergência e consolidação. Consciente desta realidade, a escola apressou-se a incorporar a ideia de competência, através da utilização das tecnologias digitais procurando promover "alterações neuronais que vão enriquecendo cada indivíduo em função da quantidade e diversidade da sua participação nessas vivências" (Dias de Figueiredo, 2019, p. 3).

Desta forma, é natural que a educação não fique alheia à influência dessa cultura e dos seus artefactos.

Várias instituições educacionais têm facilitado a integração dos dispositivos móveis com o objetivo de potencializar a experiência educativa dos estudantes e promover a aprendizagem em qualquer lugar e momento (Neves, 2018).

Em termos mais institucionais, refira-se o exemplo do relatório europeu *Education and Training Monitor,* de 2016, que chamou a atenção para uma nova abordagem educacional com o intuito de combater os novos problemas da sociedade atual. Nesse relatório, a Comissão Europeia refere que as prioridades europeias no que à educação diz respeito visam a promoção de estratégias que promovam a empregabilidade, o desenvolvimento de competências de literacia digital e de inovação tecnológica, Bento et al. (2017). Ainda neste contexto, a Comissão Europeia recomenda o desenvolvimento de um outro conjunto de prioridades consagradas no *Plano Estratégico de Educação e Formação 2020,* tais como partilhar experiências de aprendizagem que exijam construção de conhecimentos em processos colaborativos e o desenvolvimento de ferramentas de aprendizagem e desenho de estratégias com vista à aquisição de competências digitais. Neste mesmo plano estratégico, está plasmada a necessidade de reduzir o abandono e o insucesso escolar, como uma contribuição para mudar o perfil da sociedade europeia (Bento et al., 2017). O mesmo texto diz ainda:

> verificamos também que existe uma cada vez maior necessidade dos professores em alterarem as suas estratégias pedagógicas e a utilização de dispositivos móveis surge como uma resposta a ser testada, considerando que os alunos têm os seus próprios equipamentos, deixando a questão tecnológica resolvida para o professor, que terá que se centrar na promoção de práticas inovadoras e ativas para os alunos (Bento et al., 2017, p. 463).

Os mesmos autores afirmam ainda que, enquanto sistemas tangíveis, os dispositivos móveis colocam a ênfase na interação entre o aluno e a tarefa, na manipulação com o conteúdo, evitando assim a carga cognitiva adicional daquela já existente com a interação com o conteúdo (Bento et al., 2017).

Um dos *softwares* que, em Matemática, tem tido uma enorme projeção é o *GeoGebra*. Este *software* foi criado por Markus Hohenwarter para ser utilizado em ambiente de sala de aula. O projeto foi iniciado em 2001, na Universidade de Salzburg e tem prosseguido desenvolvimento na *Florida Atlantic University.* É um *software* livre e tem cerca de 200 milhões de utilizadores, adaptando-se a múltiplas plataformas. Contém *software* matemático dinâmico, abrangendo as quatro grandes áreas da Matemática — a Geometria, a Álgebra, o Cálculo e a Probabilidade e Estatística. É de cariz predominantemente construtivista e constitui um excelente recurso para o estudo da Matemática e de outras áreas como a Química e a Física (Santos et al., 2019).

O facto deste *software* dispor de diversas janelas ou vistas, que intercomunicam com o uso de álgebra computacional, permite-lhe um número infindável de aplicações a situações de modelação da ciência em geral, que usam a matemática como uma linguagem privilegiada na análise e descrição dos seus objetos de estudo, em todos os graus de ensino (Santos et al., 2019). Acresce à ideia de acesso a um sistema de aprendizagem de qualidade a necessidade de integração da tecnologia nas diversas áreas de conhecimento. Neste ponto, a integração das diversas componentes do *GeoGebra* nos dispositivos móveis, nomeadamente nos *smartphones*, transforma um objeto quotidiano numa calculadora gráfica com capacidades CAS e que pode funcionar em modo de exame, sendo já utilizado em exames nacionais na Áustria, em algumas regiões da Alemanha e na Noruega (Santos et al., 2019).

Apesar da dificuldade de infraestruturas físicas na rede das escolas africanas, é também um facto que, em muitas escolas, os estudantes possuem telefones móveis, com planos de dados incluídos, que lhes permite usar o *GeoGebra* em sala de aula. Note-se que estudantes de algumas escolas de Maputo se prontificaram a usar os seus dispositivos e dados móveis para desenvolver as tarefas que o professor apresentou na sala de aula. Esta situação contrasta com a realidade de muitos países europeus, onde persiste resistência à utilização de telemóveis na sala de aula (Santos et al., 2019).

Esta ferramenta tem uma vantagem notável sobre muitos outros ambientes, pois permite que no mesmo ecrã convivam múltiplas representações do mesmo ente matemático, facilitando assim o enfoque visual, aprimorando a perceção cognitiva.

É importante notar que a utilização de uma ferramenta como o *GeoGebra* não inviabiliza a utilização de ferramentas mais tradicionais, podendo até serem complementares (Gaspar & Cabrita, 2014).

Por análise de documentação nacional, nomeadamente, as *Aprendizagens Essenciais (AE), Metas Curriculares (MC) e Perfil dos alunos (PA),* foi possível verificar que o sistema de ensino português aconselha, vivamente, a utilização das mais variadas tecnologias. Começando pelo perfil dos alunos, pode-se ler que a promoção do desenvolvimento de literacias múltiplas, tais como a leitura e a escrita, a numeracia e a utilização das tecnologias de informação e comunicação, são alicerces para aprender e continuar a aprender ao longo da vida e para aplicar estas linguagens de modo adequado aos diferentes contextos de comunicação, em ambientes analógico e digital (G. Martins et al., 2016). No mesmo texto, refere-se ainda ser importante adequar a ação de transformação e criação de produtos aos diferentes contextos naturais, tecnológicos e socioculturais, em atividades experimentais, projetos e aplicações práticas desenvolvidos em ambientes físicos e digitais.

Nas *Aprendizagens Essenciais* (AE), e em qualquer dos ciclos, ainda se releva mais a sua importância, diversificando a sua utilização, indicando a sua utilidade. No item, *Práticas Essenciais de Aprendizagem,* são aconselhadas práticas e experiências que estimulem “O recurso à folha de cálculo, a ambientes de geometria dinâmica, a aplicativos digitais diversos, a simulações, a *smartphones*, à calculadora gráfica e sensores.” (DGE, 2021, p. 6). Ainda se defende a utilização de modelos geométricos e outros materiais manipuláveis, e instrumentos variados, incluindo a calculadora e tecnologia digital, nomeadamente aplicações interativas e programas computacionais específicos.

No *Programa e Metas Curriculares do Ensino Secundário – Matemática A*, é referido que “Os alunos devem ser eficientes e precisos na utilização de uma variedade de procedimentos de cálculo e outras ferramentas” (Bivar et al., 2013, p. 6) e acrescenta-se que “Os alunos devem ser capazes de estabelecer conjeturas, em alguns casos, após a análise de um conjunto de situações particulares, nomeadamente pela exploração das potencialidades dos recursos tecnológicos” (Bivar et al., 2013, p. 7).

2.2. Componente Didática

Como já foi referido anteriormente, este estudo persegue alguns objetivos. Destacam-se dois deles pela sua maior complexidade e importância: desenvolver competências específicas relacionadas com as transformações geométricas das funções e sua correspondente transformação algébrica com auxílio da ferramenta *GeoGebra* e a comunicação matemática.

Neste subcapítulo são abordados alguns tópicos que justificam a abordagem didática que foi adotada com este propósito.

A teoria que suporta esta investigação é a *Teoria Construtivista da aprendizagem ou Construtivismo,* de forma mais simplificada.

Várias modalidades relacionadas com o construtivismo aparecem na literatura, incluindo o construtivismo cognitivo com origem em Jean Piaget, o construtivismo radical, defendido por Ernst von Glasersfeld, e o construtivismo social-sociocultural postulado por Lev Vygotsky (Castanon, 2015). Apesar das suas diferenças, os princípios básicos sugerem que o construtivismo aplicado à educação é caracterizado por alunos que constroem ativamente o seu próprio conhecimento e, consequentemente, por professores que funcionam como facilitadores da aprendizagem (Savasci & Berlin, 2012).

Segundo Hein (1991), cada aluno, individualmente e socialmente, constrói o significado das coisas à medida que aprende. O mesmo autor diz ainda que se aceitarmos a posição construtivista, somos inevitavelmente obrigados a seguir uma pedagogia no qual devemos dar aos alunos a oportunidade de interagir com as suas sensações, possibilitando a construção do seu próprio mundo.

De acordo com Wang et al. (2009), o construtivismo permite identificar características importantes para o processo de aprendizagem. Os recursos que podem ser identificados incluem: personalização do conteúdo adequado a cada aluno, acompanhamento das atividades do aluno em cada nível do processo de aprendizagem e geração de um feedback personalizado. Os mesmos autores referem ainda que, no *Construtivismo,* os alunos não 'recebem conhecimento' pela memória, pelos factos ou pela verdade, antes constroem-no ativamente. Becker (1992) defende a ideia de que a escola tem insistido em fazer repetir, recitar, aprender, ensinar o que já está pronto, ao invés de fazer agir, operar, criar, construir a partir da realidade vivida por alunos e professores.

Além disso, Bidarra & Festas (2005) observam que, no construtivismo, o conhecimento deve ser apresentado no seu contexto, chamando a atenção para uma subvalorização do treino e do exercício em detrimento da descoberta, investigação, resolução de problemas e criatividade. Os mesmos autores chamam a atenção para a desvalorização da prática, que pode ter consequências negativas, relembrando que, no entanto, a automatização é, por vezes, necessária para a consolidação.

Convém esclarecer que um dos aspetos mais relevantes na prática construtivista é a valorização do trabalho em grupo e a cooperação ou, melhor ainda, a colaboração na aprendizagem, característica herdada do construtivismo social. Note-se que esse trabalho, em grupos, deve ser potenciado pela intervenção do professor (Bidarra & Festas, 2005).

Na implementação do estudo efetuado, procurou-se promover uma prática construtivista e emancipatória da ação do aluno, centrada nele, e corporizada por tarefas matemáticas. Segundo Stein & Smith (1998, p. 278), uma tarefa é “como um segmento da atividade da sala de aula dedicada ao desenvolvimento de uma ideia matemática particular.”

Além disso, adotou-se uma abordagem exploratória. Canavarro (2011) defende que os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas, que são sistematizadas em discussão coletiva. A autora defende, ainda, que a referida abordagem permite aos alunos construir conhecimentos e desenvolver procedimentos matemáticos e, simultaneamente, desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática.

Uma aula exploratória típica é estruturada em três ou quatro fases: a fase de “lançamento” da tarefa, a fase de “exploração” pelos alunos, e a fase de “discussão e sintetização” (M. K. Stein et al., 2015). Enquanto isso, o professor tem de selecionar, a partir da sua rápida observação e apreciação das produções dos alunos em resposta à tarefa, as soluções que avalia como contribuições positivas para a discussão coletiva e estabelecer a sequência da sua apresentação pelos alunos (M. K. Stein et al., 2015).

Ponte (2005) considera duas dimensões fundamentais nas tarefas, são elas o seu grau de desafio matemático e o seu grau de estrutura. O grau de desafio matemático depende da perceção da dificuldade da questão, variando entre o “reduzido” e “elevado”. Por outro lado, o grau de estrutura varia entre os polos “aberto” e “fechado” (Pedro da Ponte et al., 2012, p. 20).

O mesmo autor esquematiza as duas dimensões fundamentais acima supracitadas, enquadrando aí os diferentes tipos de tarefas (Figura 1).

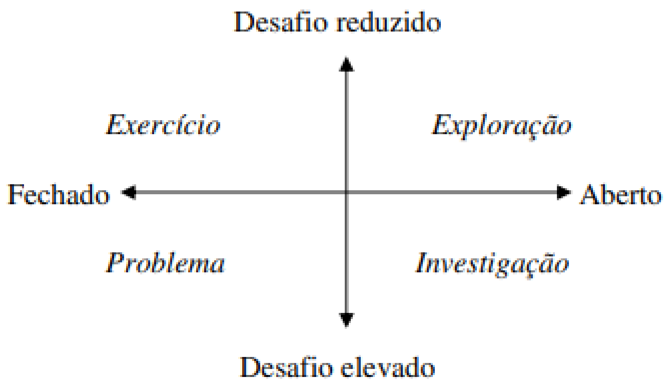


Figura 1-Classificação de tarefas consoante o grau de desafio e de abertura (Ponte,2005, p.8)

Segundo ele: um exercício é uma tarefa fechada e de desafio reduzido; um problema é uma tarefa também fechada, mas com desafio elevado; uma investigação é uma tarefa aberta com desafio elevado; uma exploração é uma tarefa aberta e acessível à maioria dos alunos (Pedro da Ponte et al., 2012).

Um outro aspeto muito relevante relaciona, de forma indireta, a comunicação matemática com a prática da *tarefa* na sala de aula. Ponte (2014) afirma que um estilo de gestão curricular muito agarrado à condução do discurso da aula pelo professor reforça o poder e o controlo deste dentro da sala de aula, alterando significativamente a comunicação dentro da mesma.

A diversidade das tarefas apresentadas na sala de aula e sua gestão têm impactos muito importantes na gestão curricular e na determinação da escolha do manual escolar. Ponte (2005) chama a atenção para o facto de os manuais escolares mais adotados em Portugal, que são selecionados nas escolas pelos próprios professores, privilegiarem a resolução de exercícios repetitivos, sendo um indicador da valorização que a generalidade dos professores atribui a este tipo de tarefa. As tarefas de natureza mais aberta (explorações, investigações, projetos) têm tido um papel reduzido na sala de aula. Nos dias de hoje, a situação não se alterou de forma relevante.

Em termos de gestão curricular, o mesmo autor refere, que em muitos dos casos parece predominar um estilo de gestão curricular muito agarrado à condução do discurso da aula pelo professor e à realização de tarefas pouco desafiantes (exercícios), privilegiando implicitamente objetivos curriculares ligados sobretudo à memorização, ao domínio do cálculo e à aprendizagem de procedimentos.

A lógica das atuais orientações curriculares Martins et al. (2016) e DGE (2021) está muito alinhada com uma aprendizagem ativa, com uma abordagem exploratória e com tarefas o mais abertas e desafiantes possível.

2.3. Comunicação (em) Matemática

A palavra comunicação esteve durante muito tempo ligada a outras áreas curriculares que não incluíam a matemática. No entanto, em Matemática, a comunicação tem um papel fundamental para ajudar os alunos a construírem um vínculo entre as suas noções informais e intuitivas e a linguagem abstrata e simbólica da matemática.

Aprender matemática exige comunicação, pois é através dos recursos de comunicação que as informações, os conceitos e as representações são veiculados entre as pessoas (Cândido, 2001).

De acordo com Serrazina (2018), "Entende-se comunicação matemática nas vertentes oral e escrita como um domínio progressivo da linguagem simbólica da matemática" (p. 15). Por seu lado, Ponte (2005) informa que esta comunicação pode ser unívoca, quando é dominada pelo professor, ou dialógica quando a contribuição dos alunos é valorizada.

Sendo de fundamental relevância a comunicação escrita, pelo registo mais estático e persistente no tempo, pelo facto de estar ligada à prova escrita, ao teste, ao exame, o professor deve dispor de um instrumento de análise composta por quatro dimensões, como propõem Pires et al. (2018), (Figura 2).

Clareza		
O aluno expressa, por escrito, as suas ideias, recorrendo a vocabulário correto e a representações adequadas.		
Nível baixo: o aluno apresenta ideias imprecisas, utiliza vocabulário incorreto ou incompreensível e recorre a representações inadequadas.	Nível médio: o aluno apresenta ideias precisas, mas utiliza vocabulário pouco preciso ou compreensível e recorre a representações pouco adequadas.	Nível elevado: o aluno apresenta ideias precisas, utiliza vocabulário preciso e correto e recorre a representações adequadas
Fundamentação		
O aluno justifica, de forma escrita, os seus processos ou ideias, apresentando argumentos plausíveis.		
Nível baixo: o aluno justifica os seus processos ou ideias de forma imprecisa.	Nível médio: o aluno justifica razoavelmente os seus processos ou ideias.	Nível elevado: o aluno justifica adequadamente os seus processos ou ideias.
Lógica		
O aluno manifesta raciocínio e coerência nos registos escritos, apresentando conexões entre as ideias registadas.		
Nível baixo: o aluno revela pouco raciocínio e coerência nos registos escritos, não mostrando conexão entre as ideias.	Nível médio: o aluno revela algum raciocínio e coerência nos registos escritos, a par de alguma conexão entre as ideias.	Nível elevado: o aluno revela raciocínio e coerência nos registos escritos, manifestando conexão entre as ideias.
Profundidade		
O aluno revela, de forma escrita, o domínio de aspetos importantes e complexos sobre o assunto a trabalhar.		
Nível baixo: o aluno revela, frequentemente, não dominar aspetos importantes sobre o assunto.	Nível médio: o aluno revela, algumas vezes, o domínio de aspetos importantes e complexos sobre o assunto	Nível elevado: o aluno revela, frequentemente, dominar os aspetos mais complexos sobre o assunto.

Figura 2-Fonte: (Pires et al.,2018, p. 29)

Este instrumento de análise pode ser utilizado para qualquer momento de avaliação, quer seja um teste, uma tarefa ou uma composição matemática, mas fundamentalmente, deve ser utilizado em momentos mais formativos, possibilitando uma assimilação mais descontraída e contínua ajudando o aluno na consolidação da capacidade de comunicação matemática. Este instrumento reúne um conjunto de categorias e níveis, que de forma muito organizada e simples, permitem a identificação e a classificação da comunicação efetuada.

Convém salientar, que para além da expressão escrita na comunicação matemática, a oralidade é igualmente relevante, pois este é o recurso de comunicação mais acessível, que todos os alunos podem utilizar, seja em matemática ou em qualquer outra área do conhecimento. “Ela é um recurso de comunicação simples, ágil e direto que permite revisões praticamente instantâneas, podendo ser truncada e reiniciada assim que se percebe uma falha ou inadequação” (Cândido, 2001, p. 17).

Desta forma, devemos solicitar que os alunos verbalizem os procedimentos que adotam, justificando-os, ou que comentem o que escrevem, representam ou esquematizam, relatando as etapas de sua pesquisa, permitindo que modifiquem conhecimentos prévios e construam novos significados para as ideias matemáticas. “A comunicação oral favorece a perceção das diferenças, a convivência dos alunos entre si e o exercício de escutar um ao outro em uma aprendizagem coletiva, possibilitando às crianças terem mais confiança em si mesmas, sentirem-se mais acolhidas e sem medo de se expor publicamente" (Cândido, 2001, p. 17).

> As perspetivas defendidas nas orientações curriculares para o ensino da matemática enquadram-se na comunicação enquanto processo de interação social, que difere de outras visões de comunicação enquanto transmissão de informação. Nestas óticas sobre a comunicação, o papel do professor e do aluno adquirem significados substancialmente distintos, em consonância com as conceções e práticas de ensino da matemática (Guerreiro, 2011, p. 27).

Numa prática mais tradicional do ensino da matemática, o mesmo autor parece sugerir que não se valoriza o papel do destinatário, o aluno, pelo contrário, tenta-se assegurar uma maior fidelidade dos recetores aos desejos do emissor, o professor, procurando garantir uma maior eficácia da mensagem. Aqui, a qualidade da aprendizagem da matemática depende da capacidade do professor de se fazer entender e transmitir os seus conhecimentos matemáticos e da capacidade do aluno em entender o professor e compreender os seus ensinamentos (Guerreiro, 2011).

Pelo contrário, a comunicação é uma interação social, o conhecimento não existe na cabeça do professor pronto a ser transmitido, mas emerge de uma prática discursiva que se desenvolve na sala de aula, decorrente de processos coletivos de comunicação e interação entre alunos e o professor, "em que o discurso não está no sentido dos signos ou representações, mas está no uso das palavras, frases ou signos e símbolos" (Guerreiro, 2011, p. 29). O mesmo autor diz ainda que "é na comunicação que os conhecimentos matemáticos são partilhados pelos alunos e pelo professor e entendidos por cada um dos intervenientes" (p. 29) e conclui: "As conceções e práticas de comunicação matemática que parecem ajustar-se à comunicação como interação social decorrem da valorização dos conhecimentos e das estratégias pessoais dos alunos, originando uma comunicação reflexiva, baseada em questões inquiridoras e pautada por padrões de discussão “ (Guerreiro, 2011, p. 37).

Para o desenvolvimento da comunicação matemática, deve ser proposto aos alunos um conjunto de tarefas que sejam propícias ao desenvolvimento da mesma, opinião partilhada por Medeiros & Meira (2019) que defendem que quando o aluno é desafiado a pensar e a raciocinar matematicamente na busca de soluções, é levado muitas vezes a outros problemas, o que proporciona comunicação, interação e a interligação de ideias viabilizadas pelo diálogo partilhado.

Convém referir que nenhuma das Fichas Formativas ou tarefas tem indicação para que todas as respostas sejam justificadas, no entanto, os alunos foram informados de que todas as suas produções, em qualquer tipo de tarefa, têm que vir sempre acompanhas de justificações e de reflexões, promovendo assim a valorização da comunicação, estimulando a sua prática, valorizando as suas explicações, opiniões, comentários e decisões.

As tarefas utilizadas na investigação revelaram um cariz exploratório, esta abordagem ao ensino em que a comunicação se sustenta em processos de discussão e de negociação, dão corpo a situações de produção e consolidação do conhecimento matemático por parte dos alunos, Assim, assume-se que a comunicação não é apenas um instrumento de verbalização das ideias matemáticas, assume também uma natureza de negociação de significados com vista à construção do conhecimento matemático (Guerrero et al., 2016).

Nessa perspetiva, promover a comunicação em sala de aula é dar aos alunos uma possibilidade de organizar, explorar e esclarecer seus pensamentos. O nível ou o grau de compreensão de um conceito ou ideia está intimamente relacionado à comunicação eficiente desse conceito ou ideia. A compreensão é acentuada pela comunicação, do mesmo modo que a comunicação é realçada pela compreensão (Cândido, 2001).

Na opinião por Astrigilda et al. (2021) o *GeoGebra* possui uma interface amigável que facilita a criação de construções matemáticas e modelos que permitem explorações interativas, tal permite intuir ou entender certos conceitos através da experimentação e da visualização, sendo um meio estimulador ou facilitador da comunicação das suas ideias e opiniões. Os mesmos autores, defendem que com a utilização do *GeoGebra* os alunos conseguiram construir e consolidar conceitos, assim como consolidar o seu raciocínio e a sua comunicação matemática oral e escrita.

A relevância e o interesse na comunicação matemática, enfatizadas em documentos curriculares, como a publicação do *Perfil do Aluno à Saída da Escolaridade Obrigatória*, em 2017, e das *Aprendizagens Essenciais*, em 2018 e 2021, reafirma a importância desta capacidade transversal, a par da capacidade de resolução de problemas e de raciocínio matemático. Mas, além disso, realçou a comunicação matemática como uma orientação metodológica, destacando a relevância do trabalho entre pares e das discussões coletivas.

2.4. Componente Matemática

Segue-se o enquadramento matemático referente ao tópico abordado no contexto deste estudo G*eneralidades acerca de funções reais de variável real* incidindo, particularmente, no subtópico *Transformações geométricas e simetria de gráficos de funções*.

Na primeira aula, foi explorada a relação entre o gráfico da função $f(x)$ e os gráficos das funções $g(x) = f(x) + c, c \in \mathbb{R}$ e a relação entre o gráfico da função $f(x)$ e os gráficos das funções $g(x) = f\ (x - c), c \in \mathbb{R}$.

No primeiro caso, pode-se verificar que, dada uma função real de variável real *f,* um número real *c* e um plano munido de um referencial cartesiano, o gráfico de uma função g, definida em $D_g = D_f$, é a imagem do gráfico cartesiano de f pela translação do vetor $\vec{u}(0, c)$*.* Tal verifica-se ao considerar-se um ponto $P\big(x, f(x)\big)$, qualquer, pertencente a $f(x)$, e um ponto $P'\big(x, g(x)\big)$, qualquer, pertencente à função $g(x)$*,* pode-se escrever P' na forma $P'(x, f(x) + c)$. Pode-se, assim, encontrar um vetor que esteja associado a $P\ e\ a\ P'$, dessa forma $\vec{u} = P' - P = \big(x, g(x)\big) - \big(x, f(x)\big) = (x, f(x) + c) - \big(x, f(x)\big) = \big(x - x, f(x) + c - f(x)\big) = (0, c)$. Efetivamente, todos os pontos da função $g(x)$ resultam do gráfico de $f(x)$ pela translação associada a um vetor que se designou por $\vec{u}$.

Essa translação vertical depende do valor de c, isto é, se c for positivo, a translação vertical será uma deslocação "para cima" de f, se c for negativo, a translação vertical será uma deslocação "para baixo" de f (Figura 3).

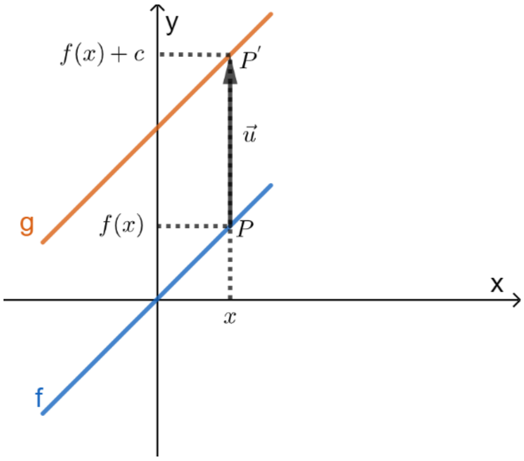


Figura 3-Representação dos gráficos $f(x)$ e $f(x)+c$

No segundo caso, pode-se verificar que, dada uma função real de variável real *f*, um número real *c* e um plano munido de um referencial cartesiano, o gráfico cartesiano da função g, tal que $g(x) = f(x-c)$, no conjunto $D_g = \{x + c : x \in D_f\}$ é a imagem do gráfico cartesiano de *f* pela translação do vetor $\vec{u}(c, 0)$. Desta forma, ao considerar-se um ponto $P(x-c, f(x-c))$, qualquer, pertencente a f, e um ponto $P'(x, g(x))$, qualquer, pertencente à função g, pode-se escrever P' na forma $P'(x, f(x-c))$. Pode-se, ainda, encontrar um vetor que esteja associado a P e a P', $\vec{v} = P' - P = (x, g(x)) - (x-c, f(x-c)) = (x, f(x-c)) - (x-c, f(x-c)) = (x - x + c, f(x-c) - f(x-c)) = (\text{c}, 0)$. Efetivamente, todos os pontos da função g resultam do gráfico de f pela translação associada a um vetor que se designou por $\vec{v}$.

Essa translação horizontal depende, tal como no caso anterior, do valor de c, isto é, se c for positivo, a translação horizontal será "para a direita" de f, se c for negativo, a translação horizontal será "para a esquerda" de f (Figura 4).

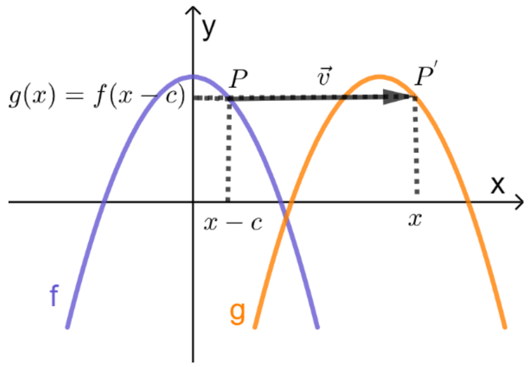


Figura 4-Relação entre os gráficos das funções $f(x)$ e $f(x - c)$

Tanto num caso como no outro, outras conclusões foram analisadas como, por exemplo, o impacto destas transformações, quer no domínio, quer no contradomínio das respetivas funções. Para esse efeito, construi-se uma tabela com os dados obtidos (Tabela 1).

Tabela 1-Quadro resumo das transformações por translação da função $f(x)$

		$f(x),\ D_f = [m,n],\ D'_f = [p,q]$				
		Expressão analítica	*Domínio*	*Contradomínio*	*Ponto Genérico*	*Observações*
Translação	*Vertical:* $\vec{t} = (0, c)$	$f(x) + c$	$[m, n]$	$[p + c, q + c]$	$P(x, y)$ *passa a* $P'(x, y + c)$	*"Para cima/baixo"*
	Horizontal: $\vec{t} = (c, 0)$	$f(x - c)$	$[m + c, n + c]$	$[p, q]$	$P(x, y)$ *passa a* $P'(x + c, y)$	*"Para lado direito/esquerdo"*

Importa referir que, em ambas as transformações de funções acima analisadas, foi utilizado o termo *translação. Do ponto de vista matemático, translação* está incluída nas *transformações de semelhança*, num grupo designado de *isometrias*. Uma *transformação de semelhança* é, segundo Breda et al. (2011) "uma transformação do plano no plano que preserva a razão das distâncias entre quaisquer dois pontos (distintos) do plano e os respetivos transformados" (p. 75). Por sua vez, uma isometria é uma transformação geométrica que "mantém invariante (constante) a razão das distâncias entre os pontos e os seus transformados" (Breda et al., 2011, p. 76). Por fim, uma translação, segundo os mesmos autores, é "uma transformação T associada a um vetor $\vec{u}$ ($T_{\vec{u}}$) que, a cada ponto P do plano, associa o ponto Q tal que $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$. Por outras palavras, $T_{\vec{u}}\ (P) = Q$ se e somente se $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$ "(p. 88).

Na segunda sessão, explorou-se os gráficos obtidos por contração e dilatação horizontal, ou seja, verificou-se a relação entre gráficos das funções f e g, sendo $g(x) = f(ax)$ para valores de $0 < a < 1$ e $a > 1$. O objetivo era reconhecer que, dada a função real de variável real f, um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$) e um plano munido de um referencial ortogonal, o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = \left\{\frac{x}{a} : x \in D_f\right\}$ por $g(x) = f(ax)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela dilatação horizontal (respetivamente pela contração horizontal) de coeficiente $\frac{1}{a}$.

Verifica-se que a relação $g(x) = f(ax)$ não é uma transformação de semelhança, com exceção para $a = 1$. Neste caso, ocorre uma transformação geométrica designada por dilatação/contração horizontal (Bivar et al., 2013).

Essa deformação horizontal depende do valor de a, isto é:

- Se $a > 1$ a imagem de um ponto $P(x, y)$ do gráfico de f pela contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{a}$ é o ponto $P'\left(\frac{x}{a}, y\right)$ que pertence ao gráfico $g(x) = f(ax)$;
- Se $0 < a < 1$, a imagem de um ponto $P(x, y)$ do gráfico de f pela dilatação horizontal de coeficiente $\frac{1}{a}$ é o ponto $P'\left(\frac{x}{a}, y\right)$ que pertence ao gráfico $g(x) = f(ax)$ (Figura 5).

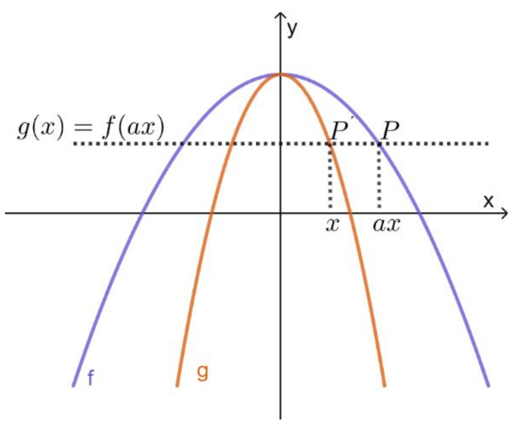


Figura 5-Relação entre os gráficos de $f(x)$ e $f(ax)$

Tal como na aula anterior, foi apresentado um quadro resumo da transformação geométrica estudada, refletindo alguns aspetos que são essenciais (Tabela 2).

Tabela 2-Resumo da transformação por dilatação e contração horizontal de $f(x)$

	$f(x),\ D_f=[m,n],\ D'_f=[p,q]$				
	Expressão analítica	*Domínio*	*Contradomínio*	*Ponto Genérico*	*Observações*
Contração horizontal $a>1$	$f(ax)$	$\left[\frac{m}{a},\frac{n}{a}\right]$	$[p,q]$	$P(x,y)$ *passa a* $P'\left(\frac{x}{a},y\right)$	*"Domínio + contraído"*
Dilatação horizontal $0<a<1$	$f(ax)$	$\left[\frac{m}{a},\frac{n}{a}\right]$	$[p,q]$	$P(x,y)$ *passa a* $P'\left(\frac{x}{a},y\right)$	*"Domínio + dilatado"*

Na terceira aula, foram estudados os gráficos obtidos por contração e dilatação vertical, ou seja, verificou-se a relação entre gráficos das funções f e g, sendo $g(x)=af(x)$ para valores de $0<a<1\ e\ a>1$ e os gráficos obtidos por reflexão em relação aos eixos coordenados de f e g, sendo $g(x)=-f(x)\ e\ g(x)=f(-x)$.

No primeiro caso, reconhece-se que, dada a função real de variável real f, um número $0<a<1$ (respetivamente $a>1$) e um plano munido de um referencial ortogonal, o gráfico cartesiano de uma função g definida em D_f por $g(x)=af(x)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela contração vertical (respetivamente pela dilatação vertical) de coeficiente a.

Verifica-se, tal como anteriormente, que a relação $g(x)=af(x)$ não é uma transformação de semelhança, com exceção para $a=1$. Neste caso, ocorre uma transformação geométrica designada por dilatação/contração vertical (Bivar et al., 2013).

Essa deformação vertical depende do valor de a, isto é:

- Se $a>1$ a imagem de um ponto $P(x,y)$ do gráfico de f pela dilatação vertical de coeficiente a é o ponto $P'(x,ay)$ que pertence a $g(x)=af(x)$.
- Se $0<a<1$, a imagem de um ponto $P(x,y)$ do gráfico de f pela contração vertical de coeficiente a é o ponto $P'(x,ay)$ que pertence ao gráfico $g(x)=af(x)$ (Figura 6).

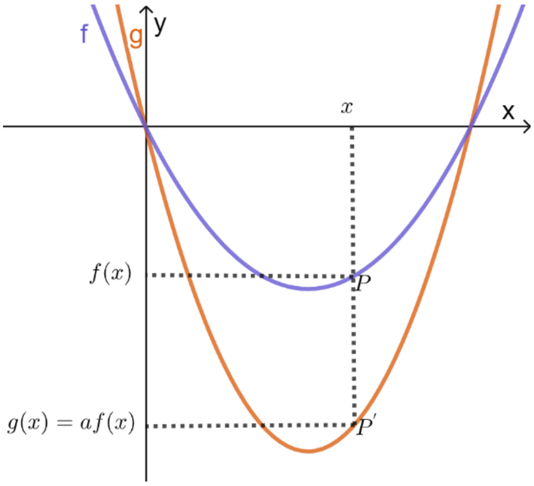


Figura 6-Relação entre o gráfico f(x) e $af(x)$

Quadro síntese (Tabela 3):

Tabela 3-Resumo da transformação por contração e dilatação vertical de $f(x)$

	$f(x),\ D_f = [m, n],\ D'_f = [p, q]$				
	Expressão analítica	*Domínio*	*Contradomínio*	*Ponto Genérico*	*Observações*
Contração vertical $0 < a < 1$	$a\,f(x)$	$[m, n]$	$[ap, aq]$	$P(x, y)$ *passa a* $P'(x, ay)$	*"Contradomínio + contraído"*
Dilatação vertical $a > 1$	$a\,f(x)$	$[m, n]$	$[ap, aq]$	$P(x, y)$ *passa a* $P'(x, ay)$	*"Contradomínio + dilatado"*

No segundo caso, verificam-se duas situações. Na primeira, deve-se reconhecer que, dada uma função real de variável real *f* e um plano munido de um referencial ortogonal, o gráfico cartesiano da função g definida em $D_g = D_f$, por $g(x) = -f(x)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela reflexão do eixo Ox. Na segunda, deve-se reconhecer que, dada uma função real de variável real f e um plano munido de um referencial ortogonal, o gráfico cartesiano da função g definida em $D_g = \{-x : x \in D_f\}$ por $g(x) = f(-x)$ é a imagem do gráfico cartesiano de *f* pela reflexão do eixo Oy.

No estudo referente às reflexões com os eixos coordenados, considere-se, na primeira situação, a função real de variável real f e a função g definida por $g(x) = f(-x)$. A cada ponto P (x, y) do gráfico de f, pode-se associar, de forma única, um ponto P' de coordenadas $P'(-x, y)$ pertence ao gráfico de g. Assim sendo, P' é o transformado de P pela reflexão axial do eixo Oy, situação que se encontra ilustrada (Figura 7).

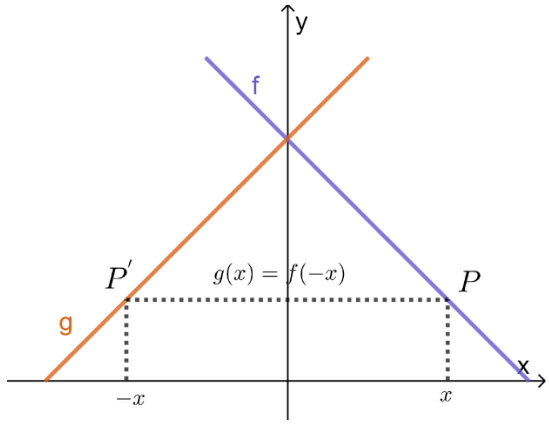


Figura 7-relação entre os gráficos de $f(x)$ e $f(-x)$

No outro caso, considere-se a função f, real de variável real, e a função $g(x)$ = $-f(x)$. A cada ponto P (x, y) do gráfico de f, pode-se associar, de forma única, um ponto P' de coordenadas $P'(x, -y)$ pertence ao gráfico de g. Assim sendo, P' é o transformado de P pela reflexão axial do eixo Ox, situação que se encontra ilustrada (Figura 8).

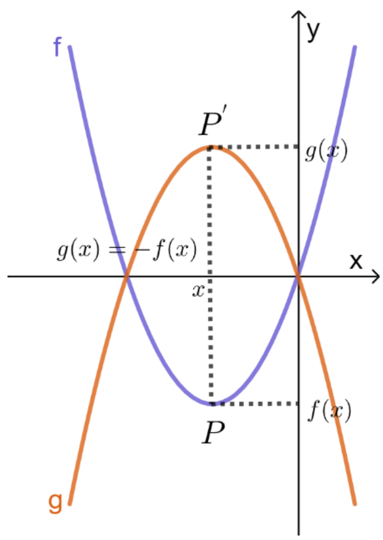


Figura 8-Relação entre os gráficos $f(x)$ e $-f(x)$

Quadro síntese (Tabela 4):

Tabela 4-Quadro resumo das transformações por reflexão

		$f(x),\ D_f = [m,n],\ D'_f = [p,q]$				
		Expressão analítica	*Domínio*	*Contradomínio*	*Ponto Genérico*	*Observações*
Reflexão	*Axial eixo* Ox	$-f(x)$	$[m,n]$	$[-q,-p]$	$P(x,y)$ *passa a* $P'(x,-y)$	*"Espelho água"*
	Axial eixo Oy	$f(-x)$	$[-n,-m]$	$[p,q]$	$P(x,y)$ *passa a* $P'(-x,y)$	*"Espelho vidro"*

Convém referir que este subtópico tem relevância. Dá sequência ao que está descrito no *Programa e Metas Curriculares do ensino Básico* nos descritores 2.2 e 2.3 do 8º ano, relativo ao estudo das funções, é posteriormente consignado no *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Secundário*, nos descritores: 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14, 2.15 e 2.16 no domínio FRVR10 e tem impacto nos descritores 4.3, 4.4 e 4.5 relativo ao domínio FRVR11 do mesmo programa (Bivar et al., 2013).

3. Método

Neste terceiro capítulo intitulado por Método, primeiramente, justificam-se as opções metodológicas tomadas ao longo desta investigação. Em seguida, faz-se a caracterização dos participantes do estudo e ainda se apresentam os instrumentos elaborados e utilizados para a recolha de dados. Segue-se uma breve descrição do estudo e o tratamento a que os dados foram sujeitos.

3.1. Opções metodológicas

Toda a investigação qualitativa passa por três etapas que englobam: a fase concetual, que consiste em escolher e formular um problema, proceder à revisão da literatura e enunciar as questões e/ou objetivos de investigação; a fase metodológica, que engloba explicitar as opções metodológicas, os participantes, as técnicas e instrumentos de recolha de dados e as etapas do estudo e definição da forma de tratamento dos dados; por fim, a fase empírica, em que se efetua a recolha de dados e se apresentam, analisam e interpretam os resultados (Maia, 2020).

O foco deste estudo é compreender como é que determinada turma do 10.º ano reage à abordagem do tópico *Transformações geométricas dos gráficos de funções* e suas implicações analíticas, tirando-se partido da ferramenta *GeoGebra* através do *smartphone*, em termos do desenvolvimento de competências específicas e da melhoria da comunicação matemática.

Atendendo ao problema, à questão e aos objetivos da investigação, considerou-se adequado que o estudo tivesse uma natureza qualitativa. Segundo Coutinho (2006, p. 5), "os estudos qualitativos abrangem todas as situações em que as preocupações do investigador se orientam para a busca de significados pessoais, para o estudo das interações entre as pessoas e contextos, assim como formas de pensar, atitudes e perceções dos participantes no processo de ensino e aprendizagem."

Para Bogdan & Biklen (1994), este tipo de estudo tem cinco características principais. Por um lado, a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal. Os autores justificam que este frequenta os locais de estudo, entende as ações porque as observa no seu ambiente habitual de ocorrência, entende o contexto da história das instituições a que pertence e gosta de saber como e em que circunstâncias é que os estudos foram elaborados. Tal foi verificado neste estudo, pois a recolha de dados foi efetuada em ambiente de sala de aula, numa determinada turma, funcionando o investigador como instrumento principal, conhecedor dos alunos, dos seus comportamentos e do seu trabalho.

A segunda característica prende-se com o facto de a investigação qualitativa ser descritiva, pois os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não tanto de números. Estes dados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registos. Tenta-se analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto possível, a forma em que estes foram registados ou transcritos. No caso deste estudo em particular, foram usados os trabalhos dos alunos, registos (mais ou menos formais) da observação direta e participante e registos fotográficos.

Em relação à terceira característica, é referido que os investigadores qualitativos se interessam mais pelo processo do que pelos resultados ou produtos. As estratégias qualitativas relevam o modo como as expectativas se traduzem nas atividades, procedimentos e interações diárias e o modo como se formam as definições que os professores têm dos alunos, que os alunos têm de si próprios e dos outros. Por esse motivo, e neste caso, a preocupação do investigador estava relacionada com o processo de aprendizagem dos alunos, com os erros cometidos, com a forma como comunicam, com as suas dúvidas e com todos os pormenores importantes que apareciam no desenrolar do estudo.

Em quarto lugar, os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva. Tal quer dizer que não se recolhem dados ou provas com o objetivo de confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente, ao invés disso, as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando, ou seja, o investigador qualitativo planeia utilizar parte do estudo para perceber quais são as questões mais importantes e a sua plausibilidade. Não presume que sabe o suficiente para reconhecer as questões importantes antes de efetuar a investigação. De facto, tal foi verificado neste estudo pois, com o desenrolar do mesmo, foram sendo revisitadas e reformuladas algumas das ideias e procedimentos imaginados à partida, bem como desconstruídas algumas *certezas* ou ideias. Para além disso, não se formulou qualquer hipótese.

Por fim, num estudo qualitativo, o valor do *significado* é de importância vital. Os investigadores qualitativos preocupam-se com a perspetivas dos participantes e as suas expectativas e refletem uma preocupação com o registo tão rigoroso quanto possível do modo como as pessoas interpretam os significados. Os investigadores qualitativos estabelecem estratégias e procedimentos que lhes permitam tomar em consideração as experiências do ponto de vista do observador. Por esse motivo, no estudo efetuado, houve sempre a preocupação de procurar entender a forma como todos os participantes construíam a sua realidade, ou seja, a forma como utilizavam o seu livre-arbítrio, atuando sob o seu próprio entendimento das coisas.

A pesquisa qualitativa utilizada teve como design o *estudo de caso*. Este tipo de estudo assume-se como particular, isto é, debruça-se deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspetos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenómeno de interesse (J. P. Ponte, 2006).

Yin (2001) carateriza o estudo de caso como uma investigação empírica na qual os limites entre o fenómeno em estudo e o respetivo contexto não se encontram definidos de forma precisa. Para além disso, o autor refere que o estudo de caso se desenvolve com base num quadro teórico que orienta a recolha e análise de dados, devendo estes provir de múltiplas fontes de evidências.

O estudo de caso deve assentar num desenho metodológico rigoroso, partindo de um problema bem formulado e onde sejam claros os objetivos e o enquadramento teórico da investigação. O problema poderá decompor-se em proposições e estas, por sua vez, em questões orientadoras. Terão de se identificar a(s) unidade(s) de análise e desenhar os instrumentos de recolha da informação (Meirinhos & Osório, 2010).

Deve-se também recorrer a múltiplas fontes de evidência, proceder à triangulação dos resultados para dar resposta às questões orientadoras e, por fim, cruzar criticamente a problemática estudada com os elementos concetuais teóricos que fundamentam o estudo. O seu produto final será uma descrição detalhada do objeto de estudo em que se utilizam técnicas narrativas para descrever, ilustrar e analisar as situações (Craveiro, 2007). Na opinião do mesmo autor*:*

> O paradigma construtivista, entendido como um meio de conhecer o mundo a partir do ponto de vista daqueles que nele vivem, adequa-se completamente à metodologia do estudo de caso, pois sintonizam numa leitura complexa, rica e profunda da realidade (p. 210).

Acrescenta que:

> O estudo de caso assente numa perspetiva construtivista parte do pressuposto de que o conhecimento resulta da interpretação de quem

investiga, através de um processo dialético com os atores sociais implicados no seu contexto de atuação (p. 211).

3.2. Participantes no estudo

O estudo efetuado incidiu, como já foi mencionado, numa turma do 10.º ano, do Curso Científico-Humanístico de Ciências Socioeconómicas, de uma escola situada numa cidade do litoral norte do país, na disciplina de Matemática A.

Nele participaram, de forma indireta, as professoras orientadora e cooperante, designadamente por terem colaborado na planificação do estudo empírico e terem acompanhado, no todo ou em parte, a sua implementação pelo professor-estagiário, que também assumiu o papel de investigador.

Para o desenvolvimento deste estudo, os alunos foram divididos em 6 pares. Os pares de trabalho foram constituídos tendo em conta três fatores: a sua natural afinidade, a sua proximidade na sala de aula e algum nivelamento do conhecimento matemático.

Perante a falta de uma aluna em duas das quatro sessões, foram constituídos grupos alternativos de três alunos, que não se repetiram, ou seja, o aluno que ficou sozinho pela falta da colega participou em dois grupos diferentes.

Os alunos participaram de forma voluntária no estudo e estiveram sempre na posse de informação relativamente à finalidade e procedimentos inerentes à investigação.

3.2.1. Caracterização do meio

O estágio deu-se numa Escola Básica e Secundária localizada no litoral norte do país. A cidade pode, resumidamente, ser caracterizada económica e socialmente da forma indicada abaixo (Tabela 5).

Tabela 5-Dados INE

População residente em 2021	31045 hab.
Percentagem população jovem [0 – 14 anos] em 2021	10,6%
Percentagem população entre [15 – 65 anos] em 2021	61,1%
Percentagem de famílias unipessoais em 2021	24%

Percentagem de alojamento próprio em 2021	58,2%
Ganho médio mensal em 2019	1009 euros
Valor médio das propriedades 2021	110.912 euros
Taxa de mortalidade sénior 2020	11,9%
Crimes registados em 2020	948
Poder de compra per capita em 2019	104,4%
Desempregados inscritos no IEFP 2020	7,9%

Está intimamente ligada ao mar — no passado, por via da pesca e, atualmente, pelo turismo balnear, que assume um papel fulcral na economia do Concelho. As atividades turísticas, associadas a características marcadamente urbanas, tornam o setor terciário preponderante na economia do Concelho.

3.2.2. Caracterização da Escola

Em outubro de 1975, "antecipando largamente o prazo inicialmente previsto", este antigo Liceu viu renovadas as suas instalações com "aparência funcional e, simultaneamente, linhas modernas e agradáveis" (DE, 06.09.75). Acolhe 1804 alunos, distribuídos pelos 3 anos do Cursos Geral dos Liceus (1268 alunos) e pelos 2 anos de Curso Complementar (536 alunos). Nesse mesmo ano, foi criada a Associação de Pais e Encarregados de Educação e a Associação de Estudantes.

Em 2010-2011, foi concluída a requalificação das instalações iniciada no ano letivo de 2008-09. Naquele mesmo ano, foi iniciado o processo da sua agregação com o Agrupamento.

A escola tem hoje uma organização assente num conselho geral, uma comissão administrativa provisória, conselho pedagógico e diferentes departamentos. O agrupamento disponibiliza um conjunto de ofertas educativas e formativas diversificadas, nomeadamente, a educação pré-escolar; 1º,2º e 3º ciclos do Ensino Básico; cursos de educação e formação de jovens de nível básico; cursos científicos–humanísticos; cursos profissionais e do ensino secundário. Amplifica a sua formação utilizando uma biblioteca online, dois sites, um ligado a artes e outro a um jornal da escola, complementado com a utilização da plataforma E-Learning. Tem ainda dois serviços importantes, o SPO (Serviço de Psicologia e de Orientação) e a biblioteca (em espaço físico).

Na atualidade, o Agrupamento definiu os princípios orientadores que são base de todo o seu trabalho, a saber: melhorar os processos de ensino-aprendizagem; promover o desenvolvimento integral da criança/do aluno e promover a cooperação entre a escola, a família e a comunidade.

3.2.3. Caracterização da turma

A turma onde incidiu o estudo é composta por 12 alunos a frequentar, dos treze inscritos. Dos 12 alunos a frequentar, cinco são do sexo masculino e sete são do sexo feminino. As idades vão dos 14 aos 16 anos, seguindo a seguinte composição: três alunos com 14 anos, oito alunos com 15 anos, dois alunos com 16 anos, estando um deles ausente. Dois dos alunos já tiverem uma retenção, ambos no 10.º ano. Onze alunos têm nacionalidade portuguesa, dois nacionalidade estrangeira e, destes, um não tem o português como língua materna. Um aluno beneficia da ação social escolar.

A turma é, na globalidade, muito introvertida, tímida, mas apresenta uma boa união de grupo. Os alunos dão-se bem uns com os outros, relacionando-se com respeito. Apresentam dificuldades assentes em fundamentos matemáticos pouco consolidados e uma capacidade de trabalho não treinada. Têm bom comportamento na sala de aula, não perturbando o seu funcionamento. Apresentam alguma falta de noção das dificuldades e do trabalho a realizar por forma a obterem bom aproveitamento.

Caracterizando alguns hábitos, verifica-se que a quase totalidade dos alunos dorme sete ou mais horas, apenas dois alunos dormem menos de sete horas — e apenas um aluno diz não tomar o pequeno-almoço. Nos tempos livres, têm como atividades ver televisão, navegar na *Internet*, praticar desporto, passear e estar com os amigos. Ler ocupa uma pequena percentagem, tal como ir ao cinema ou teatro.

Dos alunos a frequentar, cinco revelam ter problemas de saúde.

Verifica-se que três alunos dizem aprender melhor sozinhos, três dizem fazê-lo melhor nas aulas, dois em grupo e dois com apoio de explicador. Nove dos 13 alunos dizem ter computador em casa, dos quais 10 dizem possuir ligação à *Internet*. Curiosamente, cinco alunos dizem ser a matemática a sua disciplina preferida, com apenas uma preferência contrária. Dez alunos dizem estudar diariamente e um diz estudar apenas na véspera dos testes, todos dizem estudar em casa.

Em relação às preferências profissionais, verifica-se uma diversidade de escolhas, a saber: dois alunos referem gestão, um refere marketing, quatro preferem outros tipos de gestão, três desejam ser empresários, um prefere economia e outro diz querer algo “que dê muito dinheiro”.

No estudo efetuado para a caracterização dos progenitores, far-se-á a separação entre pai e mãe. Assim, pela análise dos dados obtidos, pode-se referir que, quanto aos progenitores masculinos, oito têm nacionalidade portuguesa, seis não têm qualificação ou é desconhecida e quatro possuem o secundário, um possui o ensino básico e um tem grau de licenciatura. Três dos pais têm situação de trabalho desconhecida, um trabalha por conta de outrem e dois trabalham por conta própria, nada mais se sabe. As idades variam entre os 38 anos, até aos 55. Os dados das mães indicam: 12 têm nacionalidade portuguesa e uma é angolana. Duas das mães têm formação desconhecida, uma tem o ensino básico, uma tem o ensino secundário, sete possuem licenciatura e uma possui uma pós-graduação. Oito das mães trabalham por conta de outrem, três têm situação desconhecida e uma trabalha por conta própria. As idades variam dos 43 anos até aos 56 anos. Por fim, dos encarregados de educação, 11 são mães, um é pai e uma é irmã.

A turma apresentou uma percentagem de aprovação de 73%. Segundo a docente cooperante, “Os alunos avaliados com classificação inferior a 10 valores apresentam um ritmo de trabalho bastante lento, falta de hábitos/métodos de trabalho, inúmeras lacunas de anos anteriores, fundamentalmente ao nível do cálculo. Para além do referido, os alunos evidenciam dificuldades de atenção/concentração, pouca autonomia, uma deficiente participação e dificuldades na compreensão/interpretação de enunciados, agravadas pela não exposição das dúvidas”

Para melhorar, no futuro, os resultados obtidos, a docente cooperante propõe as seguintes estratégias: “verificar regularmente a compreensão de conteúdos e orientações; registar, no quadro, os pontos-chave; solicitar, com mais frequência, a participação oral e um ensino individualizado, sempre que possível e sugere que os alunos frequentem a sala de estudo”.

Finalmente, a docente salientou que “o esforço não poderá ser exclusivamente seu e da escola, sendo imperioso que os alunos cumpram e façam a sua parte.”

3.3. Recolha de dados

Existem três principais técnicas de recolha de dados num estudo qualitativo: a observação, a recolha documental e a inquirição (Bogdan, Robert; Biklen, 1999).

Num estudo de caso qualitativo, os dados recolhidos devem ser variados e numerosos. Yin (2001) considera, mesmo, que a principal força do estudo de caso lhe advém da capacidade de lidar com uma grande diversidade de evidências.

Para a prossecução deste trabalho, efetuou-se a recolha de dados de duas formas: a observação*,* apoiada no registo fotográfico e em notas de campo que se sistematizaram no diário de bordo do investigador, e a resolução dos alunos das tarefas propostas.

3.3.1. Observação das aulas

A observação pode ser caracterizada segundo o tipo de participação do observador. Pode ser direta, participante ou não participante, ou observação indireta (Bogdan, Robert; Biklen, 1999). Na observação indireta, o observador não se encontra presente, observa-se a partir de outros meios como por exemplo, vídeos e/ou fotografias. Na observação direta não participante, o observador está presente, mas tem um papel passivo, sem interagir podendo utilizar uma grelha ou guia de observação para registar o que lhe importa (Bogdan, Robert; Biklen, 1999). Na observação direta participante, existe interação do investigador com a situação em estudo, podendo assumir várias funções dentro da investigação — observar comportamentos ou atitudes, assimilar a compreensão da realidade do estudo a partir do seu centro, participando nas atividades a realizar. O investigador é um observador ativo quando interage com os participantes do estudo e integra-se no contexto da investigação (Bogdan, Robert; Biklen, 1999).

Neste estudo, optou-se pela observação direta participante, dado que o investigador foi o próprio professor-estagiário da turma onde se desenrolou o estudo. A interação entre o professor-estagiário e o grupo de alunos participantes foi contínua ao longo das várias etapas da abordagem exploratória. Na fase da resolução das tarefas pelos alunos, baseou-se em pequenos diálogos, com vista ao esclarecimento de algumas dúvidas no entendimento das tarefas, passando por comentários sobre sugestões que o professor-estagiário e os alunos iam partilhando.

Ao longo de todo o processo, foi utilizado um tipo de *observação naturalista,* em que o observador procura registar tudo o que ocorre dentro da sala de aula, acumulando, sem selecionar, diversos dados tendo como objetivo último a obtenção de um registo o mais exaustivo possível, de modo a explicar *o porquê* e o *para quê* através do *como* (Estrela 94, as cited in Ribeiro, 2011).

A observação pode ser apoiada por notas de campo que, para Bogdan, Robert; Biklen (1999) são "o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e refletindo sobre os dados de um estudo qualitativo" (p. 150). Essas notas de campo, guardadas no *smartphone* e num caderno quadriculado, formaram um diário de bordo, que é definido por Moreira et al. (2021, p. 45) como "técnica narrativa que tem como propósito o registo de observações e reflexões do próprio investigador e que se revelam um elemento promotor do desenvolvimento do pensamento crítico".

Esse diário de bordo incluiu um conjunto de apontamentos que serviu para reflexão e questionamento, permitindo uma *navegação à vista* para a execução de tudo o que estava pensado e planeado, bem como para a correção de aspetos que justificavam melhoria ou intervenção. Registaram-se, ainda, considerações importantes, nomeadamente intervenções dos estudantes, discussão dos conteúdos curriculares, comportamentos, envolvimento nas tarefas, motivações e empenho dos mesmos, à medida que iam acontecendo, de modo a obter uma descrição o mais rigorosa possível para posterior análise.

Segundo Busquets (2001, as cited in Amado, 2014) a elaboração de um bom diário de campo exige que se aprendam habilidades como, observar, escutar, calar, escrever e esquematizar com rapidez e agilidade, traduzir o escrito e esquematizado, ampliar as notas, recordar com precisão.

3.3.2. Recolha Documental

Nesta investigação, a recolha baseou-se nas resoluções produzidos pelos estudantes, mais especificamente, o trabalho dos alunos como resultado da execução das tarefas realizadas durante o estudo. Para além disso, foram também efetuados registos fotográficos que acompanharam a produção escrita. A sua divulgação e análise, concretizada num capítulo posterior, só foi possível porque todos os alunos participantes e respetivos encarregados de educação deram a sua anuência, informada, através de documento escrito.

Para a implementação do estudo empírico e recolha de dados, planificaram-se quatro aulas, duas aulas de 100 minutos e duas aulas de 50 minutos, alternadamente, e todas as fichas e tarefas estão especificadas em apêndice. A organização dos trabalhos seguiu a seguinte ordem: na primeira aula, realizou-se a Ficha Formativa 1 e a tarefa 1, na segunda aula, foi trabalhada a tarefa 2, seguindo-se no terceiro dia a concretização da tarefa 2, segunda parte, e tarefa 3, ficando o último dia para a realização da Ficha Formativa 2.

As tarefas realizadas, bem como as Fichas Formativas, são criação original do professor-estagiário e seguem uma lógica inerente aos objetivos deste trabalho, promovendo a utilização do dual, bem como o desenvolvimento da capacitação associada à comunicação matemática.

3.4. Descrição do estudo

O estudo teve a duração de quatro aulas — duas de 100 minutos e duas de 50 minutos. Nos apêndices de 1 a 4 encontram-se os planos das respetivas sessões.

Note-se que os conteúdos programáticos a lecionar nunca tinham sido abordados formalmente com os alunos. As Fichas Formativas e as tarefas eram uma forma de introduzir e explorar novos conceitos, possibilitando o desenvolvimento de competências desejadas.

Em cada uma das sessões, foram formadas díades a quem foram entregues Fichas Formativas e tarefas de cariz exploratório já citadas.

De um modo geral, as sessões seguiram um padrão comum. Após a entrega das Fichas Formativas ou tarefas ao grupo, era sugerido o registo individual da resolução das mesmas, apesar da discussão ser incentivada entre os elementos do grupo.

Era dado um tempo de execução das tarefas/Fichas Formativas podendo, durante esse período, consultar-se o manual e o caderno diário, usar o dual (exceto na Ficha Formativa 1) e procurar, junto do professor-estagiário, que ia circulando pelos grupos, algumas sugestões para chegar aos resultados pretendidos.

Após a execução das tarefas/Fichas Formativas, era efetuada, de forma breve, uma seleção de alguns trabalhos que, de uma forma ou outra, merecessem uma atenção especial. Essa ação seria o ponto de partida para a discussão em sala de aula, procurando estimular a comunicação e proporcionar um melhor entendimento da matéria.

Posteriormente, era construído, em interação com os discentes, um quadro síntese da matéria explorada, tendo os alunos oportunidade de fazer os registos necessário no seu caderno diário e tirar as dúvidas que achassem convenientes.

Durante as sessões, o professor-estagiário ia anotando acontecimentos relevantes, que eram, posteriormente, descritos com maior detalhe no diário de bordo. Também procedia à recolha de produções dos alunos, designadamente, através de registos fotográficos de texto escrito e de construções no dual.

Para um melhor entendimento e compreensão, apresenta-se, na figura abaixo, um esquema que exemplifica todo o processo (Figura 9).

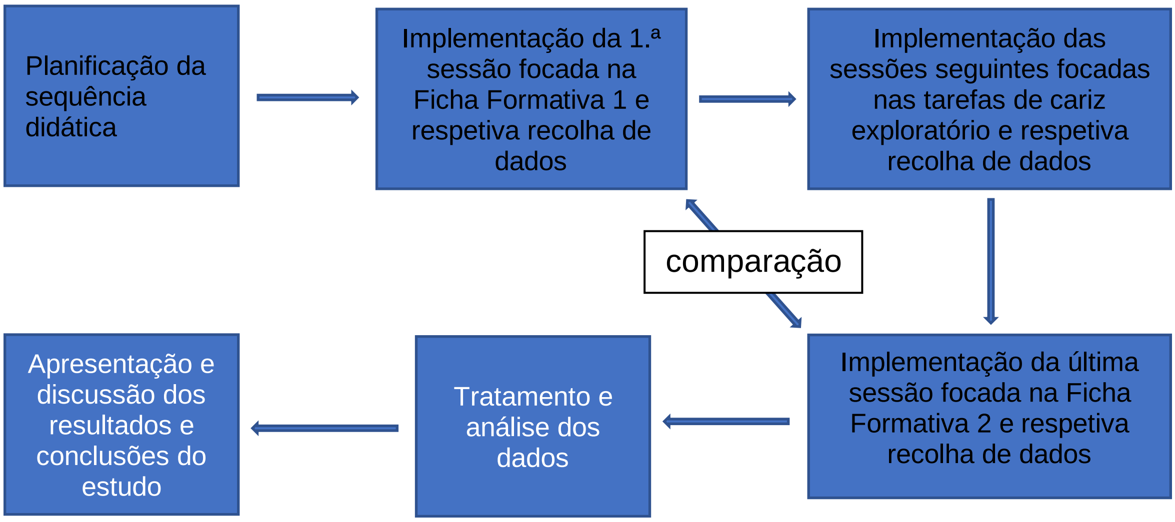


Figura 9-Esquema do estudo

3.5. Tratamento dos Dados

Segundo Bogdan & Biklen (1994), a análise de dados é o processo de busca e de organização sistemáticas de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que se foram acumulando, com o objetivo de aumentar a própria compreensão desses materiais e de permitir apresentar aos outros aquilo que se encontrou.

Apesar da natureza qualitativa do presente estudo, Yin (2001) afirma que o estudo de caso pode utilizar uma mistura de evidências quantitativa e qualitativa. Também Denzin (2018) destaca que os métodos quantitativos e qualitativos se tornaram compatíveis e os pesquisadores podem usar ambos nas suas investigações empíricas. Tal verificou-se neste caso, por forma a *quantificar* alguns dos fenómenos e explicitar a congruência de algumas das conclusões.

Por sua vez, Amado (2014) afirma que a questão da análise de dados é central na investigação. Não basta recolher dados, é preciso saber analisá-los e interpretá-los, não sendo possível fazer uma coisa sem a outra.

Os dados recolhidos foram alvo de uma análise de conteúdo orientada por categorias de análise (Bardin, 1977). Tais categorias foram definidas à priori, em função das questões orientadoras/orientações da investigação, cruzando-se com a revisão de literatura. Apresentam-se, na Tabela 6, as principais categorias orientadoras da referida análise.

Tabela 6-Categorias de análise dos Dados

Conhecimento (relacionado com)	▪ Gráficos obtidos por translação ▪ Gráficos obtidos por contração e dilatação ▪ Gráficos obtidos pela reflexão dos eixos coordenados
Aplicação desse conhecimento na resolução das tarefas propostas	▪ Compreensão do enunciado ▪ Delineamento de estratégia de resolução ▪ Implementação da estratégia ▪ Avaliação da razoabilidade da solução à luz do enunciado.
Comunicação	▪ Utilização da linguagem (matemática) com clareza, rigor e profundidade ▪ Utilização correta de representações simbólicas ▪ Explicação e justificação, de forma lógica e usando argumentos plausíveis, de procedimentos raciocínios e conclusões.

Também se usaram dados quantificáveis, que foram alvo de análise estatística descritiva.

4. Apresentação, Análise e Discussão dos Resultados

Nesta secção, apresenta-se, analisa-se e discute-se resultados do estudo realizado no que se refere à exploração das Fichas Formativas e das tarefas propostas nas aulas que foram alvo do estudo empírico (apêndices 1-4). As principais vertentes de análise são o efeito do dual na construção e aplicação de conhecimentos e na comunicação matemática, no estudo das transformações geométrica de funções no plano.

Para a análise realizada foi considerada a produção individual, e não a de grupo, procurando-se perceber, de forma mais fina, a evolução de cada um dos alunos.

Apesar da autorização, assinada pelos encarregados de educação, para ser permitida a sua identificação, bem como a sua presença em registos de áudio e vídeo, os alunos vão ser identificados por letras, por forma a preservar a sua identidade e respeitar a sua privacidade.

É também pertinente referir algumas notas prévias:

- As notas dentro do mesmo grupo são díspares havendo, por vezes, diferenças de mais de 50%. Isto reflete a autonomia dada a cada um dos grupos e alunos e ao resultado das diferenças de opinião no seio do mesmo;
- Um dos alunos utilizou, na *Tarefa 1,* a calculadora, que preferiu ao telemóvel, porque referiu ter a bateria sem carga;
- Um dos alunos faltou à Ficha Formativa 2*,* tendo tido, para efeito do estudo, nota 0;
- O professor-estagiário respondia a questões que lhe eram colocadas no âmbito do entendimento dos enunciados, mas nunca no âmbito das estratégias ou dos conteúdos, bem como dos conhecimentos necessários já anteriormente assimilados.

A partir deste momento, será desenvolvida a análise dos resultados obtidos, efetuando, sempre que necessário, a apresentação de imagens, de tabelas e de outros registos decorrentes da observação.

Inerente ao estudo, estava, como já se referiu, o contributo do dual para um melhor entendimento da matéria lecionada — construção e aplicação de conhecimento — e o desenvolvimento da comunicação. Portanto, considerou-se pertinente uma análise, de índole *quantitativa*, referente ao primeiro momento de trabalho, a Ficha Formativa 1, e ao momento final, a Ficha Formativa 2 (Apêndice 1 e 4).

A Ficha Formativa 1 (Apêndice 1) foi resolvida, como já se referiu, com apoio de material de escrita e folhas para esboçarem e escreverem o que achassem correto, tendo sido mobilizados conhecimentos prévios e capacidades específicas e transversais de cada um dos alunos.

Para a sua correção, foram construídas grelhas de classificação, Tabelas 7 e 8, com os respetivos itens, com discriminação dos domínios de aprendizagem, nomeadamente *Conceitos e Procedimentos* (CP), *Resolução de Problemas e Domínio de Instrumentos e da Tecnologia* (RP) e *Comunicação Matemática* (CM), para além da cotação para cada uma das questões.

Tabela 7-Grelha de classificação da Ficha Formativa 1

Ficha Formativa 1																						
Itens	1.1			1.2			1.3			2.1			2.2			2.3			Totais			
Domínios	CP	RP	CM	CP	RP	CM	CP	RP	CM	CP	RP	CM	CP	RP	CM	CP	RP	CM	CP	RP	CM	Nota
Cotação	8	10	8	16	8	8	16	12	8	9	12	12	16	16	8	12	9	12	77	67	56	200
(A)	0	0	0	1	0,5	0,5	2	1,5	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	4	3	2,5	9,5
(B)	0	0	0	2	1	1	4	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	4	3	13
(C)	0	10	8	8	4	4	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	9	15	13	37
(D)	0	0	0	6	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	3	3	12
E)	0	0	0	2	1	1	0	0	0	0	0	0	3	2,5	1,5	0	0	0	5	3,5	2,5	11
(F)	6	7,5	6	4	2	2	6	4,5	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	16	14	11	41
(G)	8	10	8	3	1,5	1,5	0	0	0	0	0	0	4	3	2	0	0	0	15	14,5	11,5	41
(H)	8	10	8	6	3	3	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	17	13	11	41
(I)	0	0	0	4	2	2	4	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	5	4	17
(J)	8	10	8	2	1	1	2	1,5	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	13	12,5	10	35,5
(K)	8	10	8	10	5	5	0	0	0	1,5	2	2	0	0	0	0	0	0	19,5	17	15	51,5
(L)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 8-Grelha de classificação da Ficha Formativa 2

Itens	1.1			1.2			1.3			2.1			2.2			2.3			Totais			
Domínios	CP	RP	CM	CP	RP	CM	CP	RP	CM	CP	RP	CM	CP	RP	CM	CP	RP	CM	CP	RP	CM	Nota
Cotação	8	10	8	16	8	8	16	12	8	9	12	12	16	16	8	12	9	12	77	67	56	200
(A)	0	0	0	10	5	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	5	6	21
(B)	8	10	8	7	4	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15	14	12	41
(C)	8	10	8	5	0	2	0	0	0	4	2	2	2	4	2	0	0	0	19	16	14	49
(D)	6	7,5	6	9	5	4	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	16	13,5	11	40,5
(E)	4	5	4	4	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	7	6	21
(F)	8	10	8	6	2	2	3	1	1	2	0	0	4	4	2	0	0	0	23	17	13	53
(G)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(H)	8	10	8	16	8	8	0	0	0	8	11	11	14	14	7	6	4,5	6	52	47,5	40	139,5
(I)	6	7,5	8	4	2	2	4	3	2	3	3	6	6	6	3	0	0	0	23	21,5	21	65,5
(J)	8	10	8	4	2	2	2	1	1	6	9	6	10	14	7	3	0	0	33	36	24	93
(K)	8	10	8	16	8	8	4	3	2	1	1	1	0	0	0	10	7	10	39	29	29	97
(L)	8	10	8	3	2	2		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11	12	10	33

As grelhas foram preenchidas e os resultados foram obtidos. No entanto, esta classificação não foi transmitida aos alunos. A informação que lhes foi sendo fornecida estava relacionada com o seu modo de trabalhar, com o estimular de atitudes e comportamentos mais eficazes e reflexivos, com informação relativa ao nível das suas produções e evolução das mesmas.

Dos resultados recolhidos, foi possível criar um gráfico[1] comparativo das classificações relativas a ambas as Fichas Formativas (Figura 10).

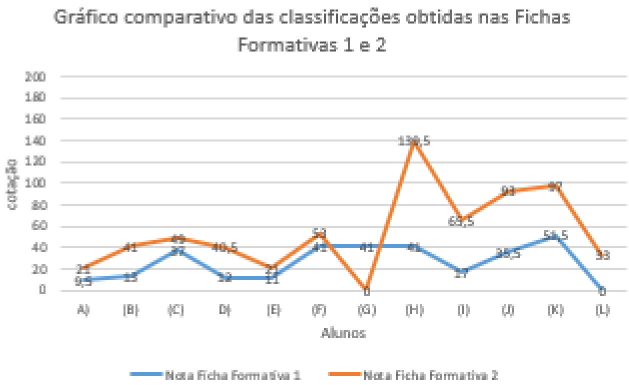


Figura 10-Gráfico comparativo das classificações obtidas nas Fichas Formativas

Uma sua análise permite constatar que houve ganhos absolutos relevantes da ficha inicial para a ficha final — média de 2,6 na Ficha Formativa 1 e média de 4,4 na Ficha Formativa 2. Os alunos que mais parecem ter beneficiado com a experiência foram o H, I e J, tendo obtido, respetivamente, nas Fichas Formativas 1 e 2, 41,17 e 35,5 para, posteriormente, obterem 139,5, 65,5, 93. Os que menos parecem ter beneficiado foram o A e E, tendo obtido, respetivamente, nas Fichas Formativas 1 e 2, 9,5 e 11 obtendo posteriormente 21.

Tendo em conta que a resolução das tarefas em causa, bem como das Fichas Formativas, tinha como objetivo ajudar a fornecer indicações relativamente aos conhecimentos adquiridos, antes e durante o estudo, bem como, à sua aplicação e melhoria da comunicação matemática, foi construído um conjunto de gráficos que possibilitam um olhar mais objetivo sobre cada um dos domínios (Figuras 11, 12 e 13). A média de classificações registadas nas componentes foi de CP — 9,9, RP — 8,7 e CM — 7,2, para a Ficha Formativa 1, e de para 20,8, 18,2 e 15,5, para a Ficha Formativa 2. Infere-se, portanto, que a componente que obteve uma evolução mais expressiva foi a componente CP, seguida da RP e CM.

---

[1] Embora este tipo de gráfico não seja adequado, optou-se por esta representação por, visualmente, ser mais percetível.

Uma leitura mais fina do gráfico da Figura 11 permite constatar que houve ganhos absolutos relevantes da ficha inicial para a ficha final quanto a conceitos e procedimentos— média de 9,9 na Ficha Formativa 1 e média de 20,8 na Ficha Formativa 2. Os alunos que mais parecem ter melhorado foram o H e J, tendo obtido, respetivamente, nas Fichas Formativas 1 e 2,13 e 17 para, posteriormente, obterem 33 e 52. Os que menos parecem ter beneficiado foram o A, e E, tendo obtido, respetivamente, nas Fichas Formativas 1 e 2, 4 e 5 obtendo posteriormente 10 e 8.

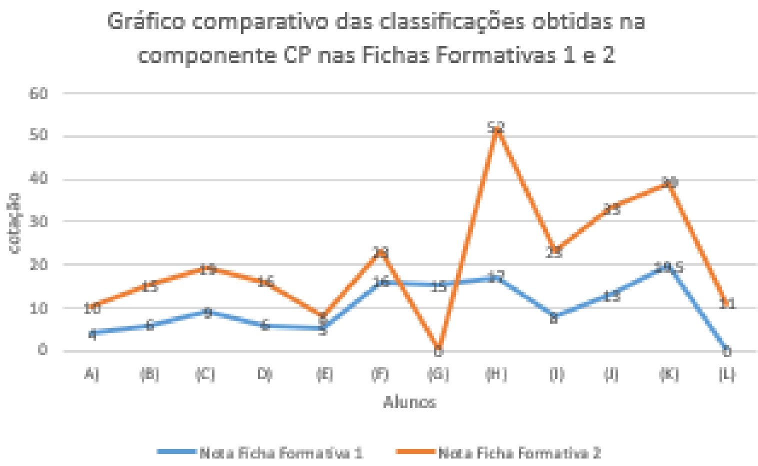


Figura 11-Gráfico comparativo das classificações obtidas na componente CP nas Fichas Formativas 1 e 2

Pela análise do gráfico 12, percebe-se que houve também ganhos relevantes da ficha inicial para a ficha final quanto a resolução de problemas e domínio de instrumentos e da tecnologia — média de 8,7 na Ficha Formativa 1 e média de 18,2 na Ficha Formativa 2. Os alunos que mais parecem ter melhorado foram o H e J, tendo obtido, respetivamente, nas Fichas Formativas 1 e 2,13 e 12,5 para posteriormente obterem 47,5 e 36. Os que menos parecem ter beneficiado foram o A, e C, tendo obtido, respetivamente, nas Fichas Formativas 1 e 2, 3 e 15 obtendo posteriormente 5 e 16.

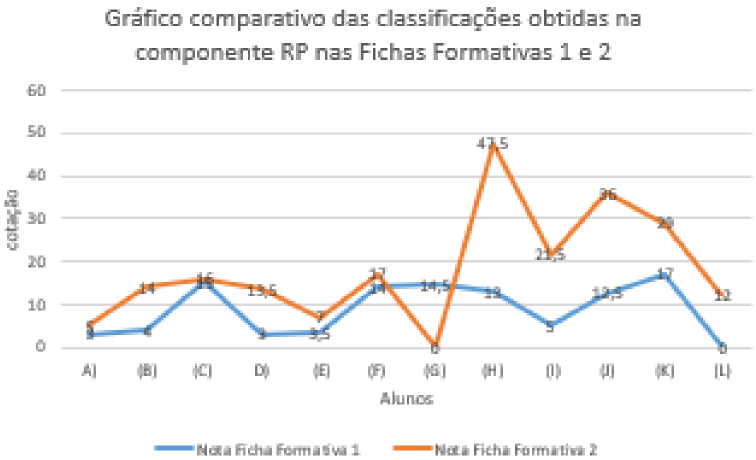


Figura 12-Gráfico comparativo das classificações obtidas na componente RP nas Fichas Formativas1 e 2

Uma leitura do gráfico seguinte permite concluir que houve ganhos relevantes da ficha inicial para a ficha final no que se refere à comunicação matemática — média de 8,7 na Ficha Formativa 1 e média de 18,2 na Ficha Formativa 2. Os alunos que mais parecem ter melhorado foram o H e I, tendo obtido, respetivamente, nas Fichas Formativas 1 e 2, 11 e 4 para, posteriormente, obterem 40 e 21. Os que menos parecem ter beneficiado foram o C e F, tendo obtido, respetivamente, nas Fichas Formativas 1 e 2, 13 e 11 obtendo, posteriormente, 14 e 13.

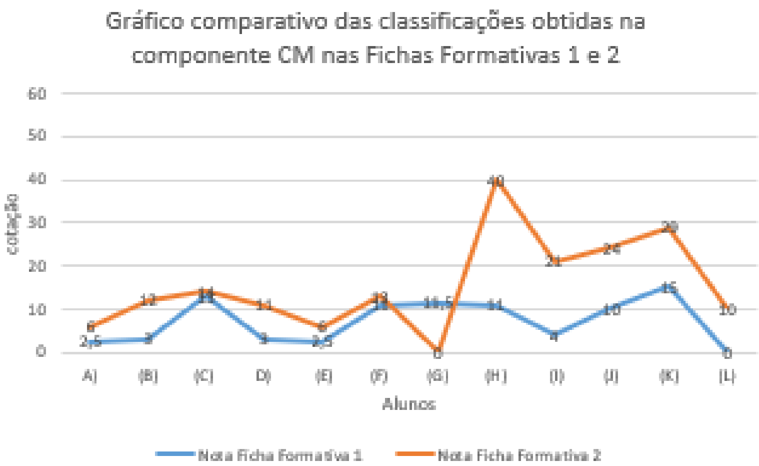


Figura 13-Gráfico comparativo das classificações obtidas na componente CM nas Fichas Formativas 1 e 2

Os resultados apresentados não permitem que se rotule de *exata* a análise realizada porque é possível questionar, por exemplo, o peso que foi dado a cada um dos domínios, a cotação atribuída às questões e até o rigor e justiça da correção, mas, nesse caso, o *qualitativo* foi usado para uma melhor compreensão do não quantificável (Silva, 2018).

Fazia então sentido uma leitura mais atenta das fichas formativas, um olhar mais minucioso sobre momentos das mesmas, uma análise mais fina das produções dos alunos e das dinâmicas vivenciadas.

Um primeiro olhar recaiu sobre a ficha formativa 1. Na primeira alínea, foram obtidas algumas respostas corretas. No entanto, é destacado o aluno F pelo simples facto de ter sido o único que englobou as suas respostas num pequeno texto. Não deixando de revelar compreensão do enunciado, averiguou alguma razoabilidade da solução à luz do resultado, utilizou linguagem matemática, procurou uma explicação e justificação, concluiu, mas não revelou conhecimentos matemáticos que proporcionassem a resposta correta.

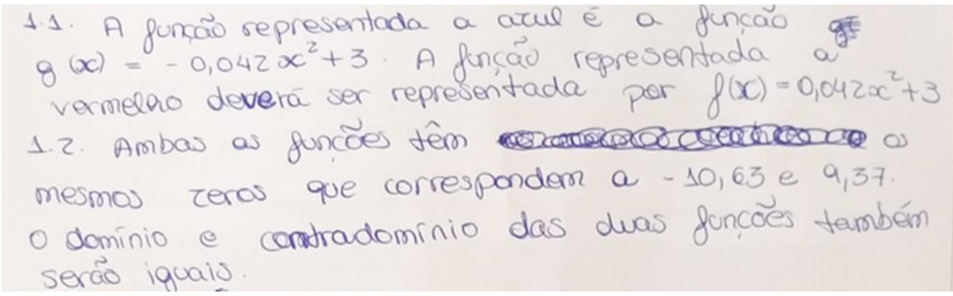

1.1. A função representada a azul é a função $g(x) = -0,042x^2+3$. A função representada a vermelho deverá ser representada por $f(x) = 0,042x^2+3$
1.2. Ambas as funções têm os mesmos zeros que correspondem a -10,63 e 9,37. O domínio e contradomínio das duas funções também serão iguais.

Figura 14-Resposta do aluno F à alínea 1.1 da Ficha Formativa 1

Na segunda questão, todos os alunos responderem, no entanto, nenhum o fez de forma correta. Para essas incorreções contribuíram a aceitação de valores $+\infty$ e $-\infty$, quer do domínio, quer no contradomínio, e intervalos de números reais com outros erros de notação e valor. A figura abaixo exemplifica a maior parte dos erros encontrados. Tais erros remetem para uma má compreensão do enunciado e uma desadequada avaliação da razoabilidade da solução à luz do enunciado.

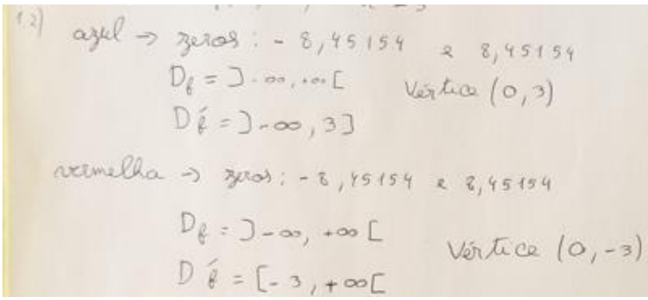

1.2) azul → zeros: - 8,45154 e 8,45154
$D_f =]-\infty, +\infty[$ Vértice (0,3)
$D'_f =]-\infty, 3]$
vermelha → zeros: - 8,45154 e 8,45154
$D_f =]-\infty, +\infty[$ Vértice (0,-3)
$D'_f = [-3, +\infty[$

Figura 15-Resolução do aluno K, alínea 1.2

A última alínea do primeiro grupo de questões gerou várias interpretações, mas nenhuma se adequou ao que era pretendido. A interpretação mais comum, está exposta na figura abaixo.

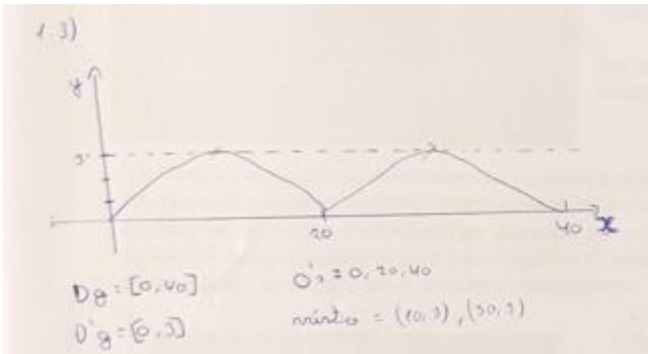


Figura 16-Resolução do aluno I, alínea 1.3

Verifica-se que a errada interpretação do enunciado acabou por desencadear um conjunto de respostas inadequadas. Nesses casos, a implementação da estratégia adotada bem como a explicação dos procedimentos adotados não foram suficientes para a obtenção de uma resposta correta.

No segundo grupo de questões, são muito poucas as respostas dadas. Na figura abaixo é possível verificar uma das que sintetiza a maior parte das produções relativas à questão 2.1 e 2.2.

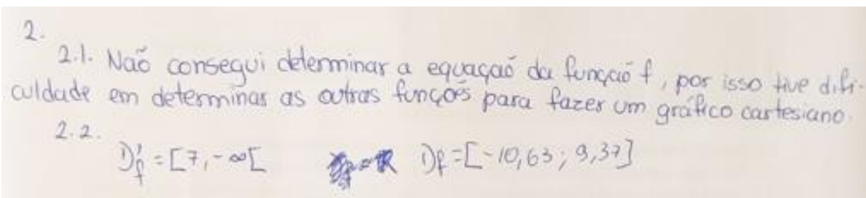

2.
2.1. Não consegui determinar a equação da função f, por isso tive dificuldade em determinar as outras funções para fazer um gráfico cartesiano.
2.2.
$D'_f = [7, -\infty[$ R $D_f = [-10,63; 9,37]$

Figura 17-Respostas do aluno J, alíneas 2.1 e 2.2

É percetível a dificuldade em obter a expressão analítica da função f, mesmo tal não sendo pedido, e erros nas respostas do domínio e do contradomínio, erros esses recorrentes ao longo de todo o estudo.

As respostas encontradas revelam má compreensão do enunciado, falta de estratégia de resolução, inadequação da solução à luz do enunciado, linguagem matemática incorreta, e uma justificação pouco estruturada, sem argumentos plausíveis e conclusões erradas.

Na última questão não foi obtida qualquer resposta, no entanto, foram emitidos comentários escritos e orais que merecem alguma atenção. Primeiro, um comentário escrito, aliás comum, visível na Figura 18.

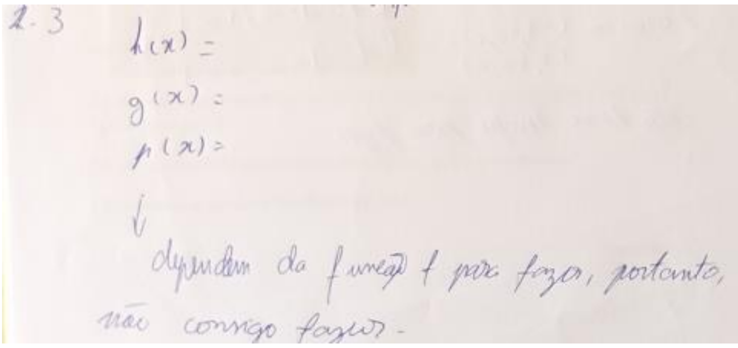


Figura 18-Comentário do aluno C, alínea 2.3

Segundo, um comentário feito em tom aflito e espantado, pelo aluno G, registado em diário de bordo: “O professor não se enganou na ordem das perguntas?”. Tais comentários são reveladores do primeiro impacto em relação ao tipo de metodologia aplicada, às tarefas propostas e a uma nova abordagem do trabalho a efetuar.

Convém relembrar que, nesta primeira aula, não era facilitado o uso do dual pois havia o objetivo de realizar contraponto com as tarefas seguintes e com a ficha formativa 2. A segunda ficha formativa utilizada é muito semelhante à ficha formativa 1 e aqui já foi facilitado o uso do *smartphone*-*GeoGebra*. Para além disso, a segunda ficha formativa foi realizada depois de todas as tarefas terem sido concluídas.

Na análise da ficha formativa 2, verifica-se que a primeira questão foi abordada por praticamente todos os alunos. Na globalidade, as respostas dadas são bastante satisfatórias, não havendo nada de relevante a assinalar. A utilização do dual simplificou o trabalho efetuado e ajudou a criar um ambiente de confiança perante as soluções encontradas (Figura 19).

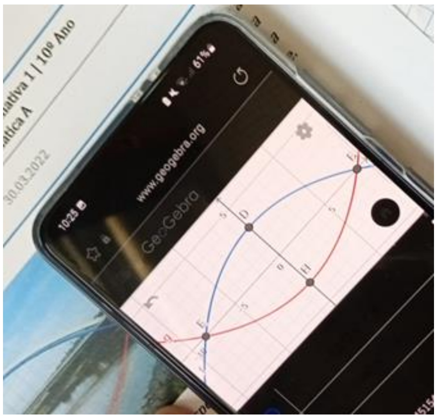


Figura 19-Utilização do dual, aluno C, alínea 1.1

Em relação à questão 1.2, existem algumas resoluções bem conseguidas, duas das quais corretas. No entanto, uma grande parte das soluções apresentam os intervalos do domínio e do contradomínio com imprecisão na sua escrita, sendo comum a colocação de um valor negativo à direita de zero (Figura 20). Além disso, em muitas resoluções consideram-se os valores 10.73 e 9.37 como sendo os zeros das funções representadas. Tal é revelador de uma má compreensão do enunciado e de alguma falta de atenção.

Figura 20-Imprecisão recorrente. Ficha Formativa 2, alínea 1.2, aluno B

A questão 1.3 foi também, tal como na ficha formativa 1, alvo de variadas interpretações, no entanto, algumas soluções já se aproximaram da solução mais adequada, sendo uma delas destacada na figura abaixo. No entanto, e ainda assim, é percetível alguma desadequação na justificação, falta de rigor na exposição do raciocínio e a falta de uma pequena conclusão.

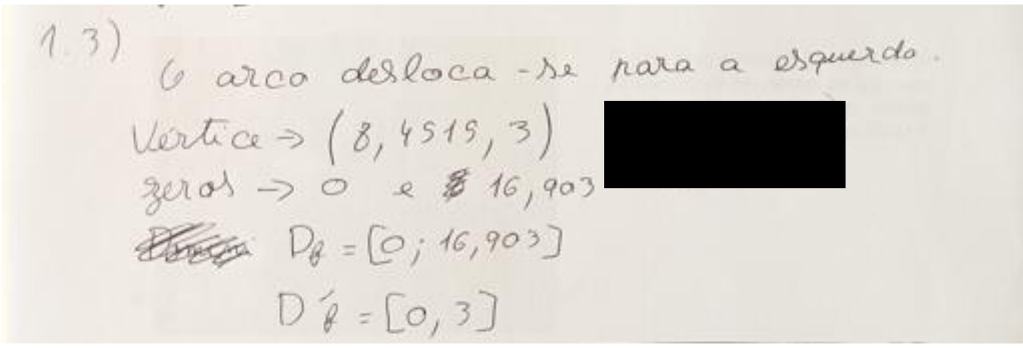


Figura 21-Resolução do aluno K, alínea 1.3

A questão 2.1 já não suscitou tantas dúvidas como no passado recente, os alunos já tinham trabalhado este tipo de problema durante as sessões anteriores e produziram resoluções mais próximas do que era pedido, no entanto, a falta de rigor na reprodução gráfica do dual para o papel é algo que é transversal a todas as produções, como exemplificado na figura abaixo. Uma justificação possível é a falta de prática nas referidas reproduções. É ainda utilizada uma errada representação simbólica, procedimentos indevidos e uma rudimentar justificação (Figura 22). Uma nota de assinalar — apenas um aluno representa a função $p(x)$, de forma não completamente correta.

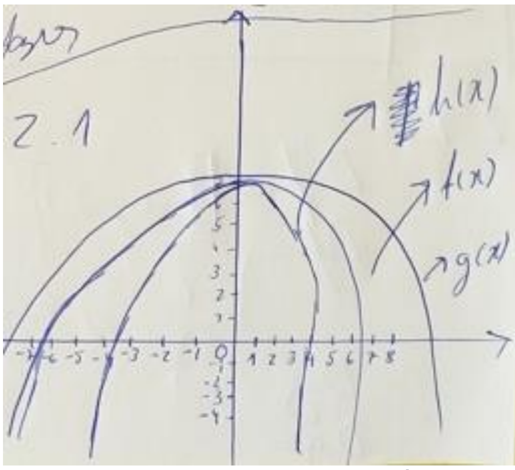


Figura 22.Produção do aluno K, alínea 2.1

Na alínea 2.2, existem algumas melhorias em relação à ficha formativa 1, nomeadamente, numa certa apropriação do raciocínio adequado, no entanto, muitas imprecisões foram assinaladas, como verificado na figura seguinte, sobretudo em arredondamentos malsucedidos, valores desadequados, contradomínios errados por falta de razoabilidade à luz do enunciado.

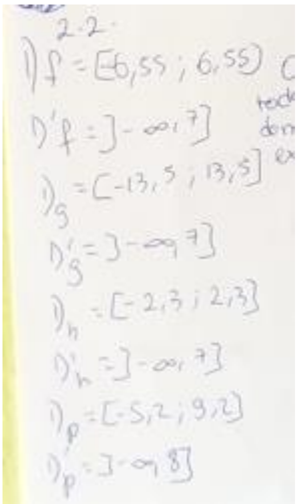


Figura 23-Resolução do aluno F, alínea 2.2

A utilização do dual nesta questão foi muito comum, nem sempre com as expressões analíticas das funções mais adequadas, mas sempre reveladoras de melhoria, em alguns casos relevante, em relação à resolução da ficha formativa 1 (Figura 24).

Figura 24-Recurso ao dual, aluna F, alínea 2.3

Na última questão da ficha formativa, apenas uma produção registou algum sucesso, todos os outros registos apresentam total desadequação ao que é pedido, expressões incompletas ou ausência de resposta. Uma nota no diário de bordo lembra que a falta de tempo pode ter sido um importante inibidor de algumas resoluções, pois alguns alunos manifestavam sugestões plausíveis quando questionados pelo professor-estagiário.

A resolução das tarefas não foi classificada, mas serviu como um conjunto de registos que refletissem a evolução do trabalho efetuado, um fio condutor, uma ponte entre o antes e o depois. Serviram o procedimento descritivo desenvolvido neste trabalho, que contempla, também, a alusão aos diversos trabalhos produzidos pelos alunos. Como parte fundamental do estudo, a resolução das tarefas merece um olhar atento.

A *Tarefa 1,* no apêndice 1, tinha como objetivo o estudo da relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $f(x) + c, c \in \mathbb{R}$ e o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $f\ (x - c)$, $c \in \mathbb{R}$.

Nove dos doze alunos responderam à questão 1.1, mas apenas uma das respostas intuiu a necessidade de se efetuar uma translação horizontal na função $h(x)$, embora o tenha feito de forma errada, efetuando a translação para a esquerda de f(x), e não teve em atenção aos zeros das funções $f(x)$ e $g(x)$, Figura 25.

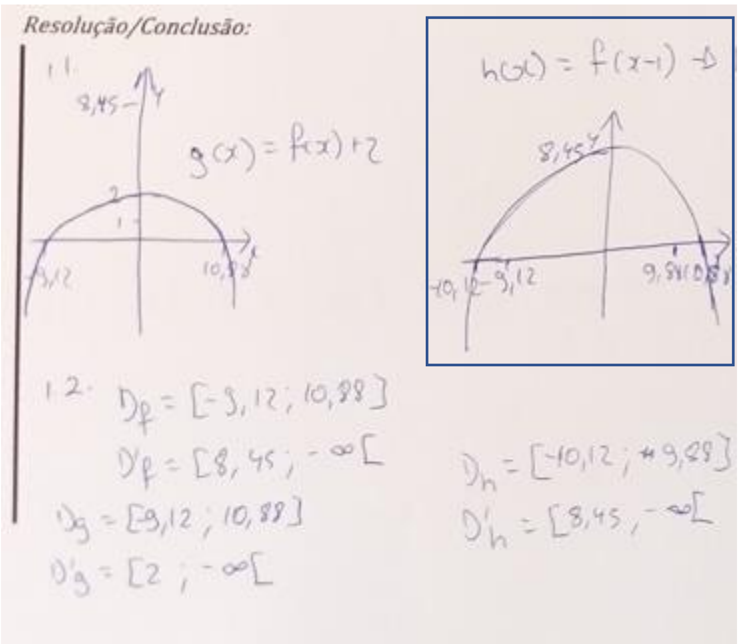


Figura 25-Resolução da Tarefa 1, alínea 1.1, aluno J

De forma incorreta, todos os intervenientes procuraram identificar a expressão analítica adequada ao gráfico apresentado, esquecendo que esse não era o objetivo da questão. Este aspeto remete-nos para uma inadequada compreensão do enunciado. Perante as dificuldades sentidas, o professor-estagiário apelou a uma leitura mais atenta dos mesmos, possibilitando ainda a consulta do manual. Para além disso, o professor-estagiário deu orientações no sentido de utilizarem no dual a representação de outro tipo de funções mais simples, que servissem de ponto de partida para o seu trabalho, nomeadamente as funções afim.

Em relação à questão 1.2, quase todos os alunos aceitaram os valores do eixo das abcissas visíveis nas definições da janela gráfica como sendo os zeros da função quadrática representada. Não verificaram que esses valores estavam explícitos no enunciado e que estavam relacionados com os pontos $A \, e \, B$. Além disso, aceitaram, sem exceção, que o contradomínio da função f seria $[8{,}54; -\infty[$ ou $]-\infty; 8{,}45]$, sem cuidar que o domínio da função representada poderia não ser o domínio para a solução da questão, não averiguando a razoabilidade da solução à luz do enunciado. Para além disso, está errada a representação do domínio no primeiro intervalo. Apenas dois alunos relacionaram o domínio da função f e o domínio da função g, mantendo-o inalterável, embora com valores incorretos (Figura 26).

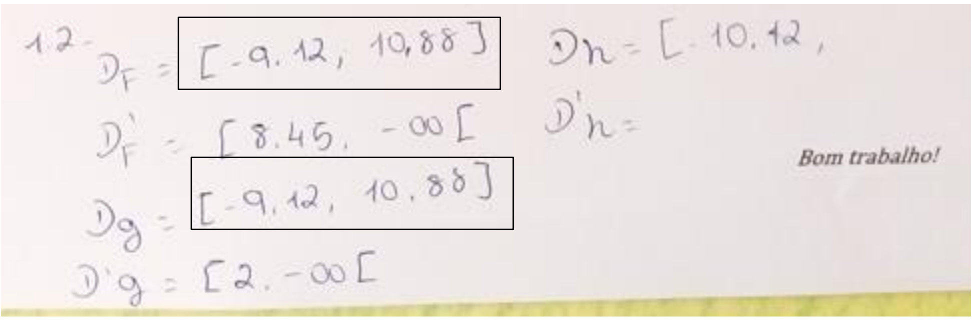
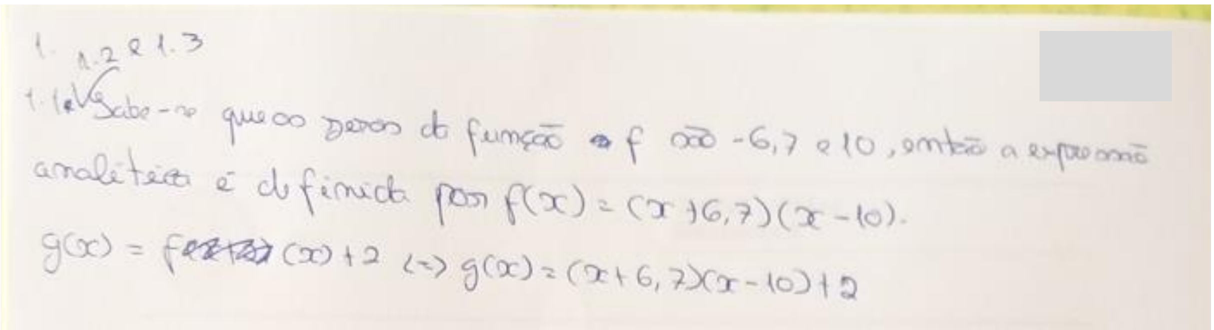


Figura 26-Resolução da Tarefa 1, alínea 1.2, aluno B

No que concerne à última alínea, apenas dois alunos responderam à questão. Em nenhum dos casos foram obtidas as expressões analíticas das funções pedidas. Apenas um dos alunos tentou, embora sem êxito, obter a expressão analítica da função $f(x)$, esquecendo, no entanto, de considerar o valor da variável *a* na expressão $f(x) = a(x - x_0)(x - x_{1)}$ representativo do sentido da concavidade da parábola e, em módulo, da amplitude de abertura da mesma, para, a partir daí, poder obter a expressão analítica das funções g e h (Figura 27).


1. 1.2 e 1.3

1. 1.3 Sabe-se que os zeros da função f são -6,7 e 10, então a expressão analítica é definida por $f(x) = (x+6,7)(x-10)$.

$g(x) = f(x)+2 \Leftrightarrow g(x) = (x+6,7)(x-10)+2$

Figura 27-Resolução da Tarefa 1, alínea 1.3, aluno H

Apesar de se ter acabado, recentemente, o domínio *ALG 10*, Bivar et al. (2013), com o conteúdo *Polinómios,* verificou-se que tais conhecimentos não foram aqui aplicados, nem foram resgatados conhecimentos sobre a parábola do 9º ano, nomeadamente sentido da concavidade da parábola e amplitude da sua abertura. Assim sendo, as produções obtidas foram escassas e apresentaram lacunas significativas. No melhor dos casos, tenta-se obter a expressão analítica da parábola, tendo em atenção informação fornecida no enunciado, mas falta o coeficiente real que determina o sentido da concavidade da parábola e que, em valor absoluto, define o grau de *abertura* da mesma.

A não utilização de conhecimentos adquiridos recentemente, bem como a sua não articulação com as tarefas deste estudo, são um importante motivo de reflexão.

Na totalidade das produções, verificou-se erros na compreensão dos enunciados, estratégia inadequada de resolução, avaliação errada da razoabilidade da solução à luz do enunciado, ausência de clareza e profundidade na linguagem matemática, incorreção em representações simbólicas e utilização de argumentos não plausíveis.

Relativamente à tarefa 2, parte 1, é pedido o estudo da relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $f(ax), a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Tal como no trabalho anterior, esta tarefa (apêndice 2), está dividida em três partes. Cada uma das partes procura seduzir os alunos para um caminho de exploração, mobilizando raciocínio e conhecimento. Mais uma vez, é instigada a utilização do dual.

Na questão 1.1, nove dos onze alunos responderam à questão, no entanto, apenas três responderam ao que era pedido, ou seja, a representação no referencial cartesiano das funções $f(x), i(x)$ e $j(x)$.Todos os outros utilizaram uma abordagem mais analítica, esquecendo que tal não era necessário. Abaixo está a reprodução da resolução de um dos alunos que mais perto esteve da solução adequada. Neste caso, pode-se reparar na existência de várias imprecisões em termos de comunicação matemática, nomeadamente, numa utilização da linguagem matemática de forma desorganizada e pouca justificação dos procedimentos utilizados. Para além disso, verifica-se uma errada compreensão do enunciado. Mas é importante realçar que este contributo foi muito importante para a síntese final da aula (Figura 28).

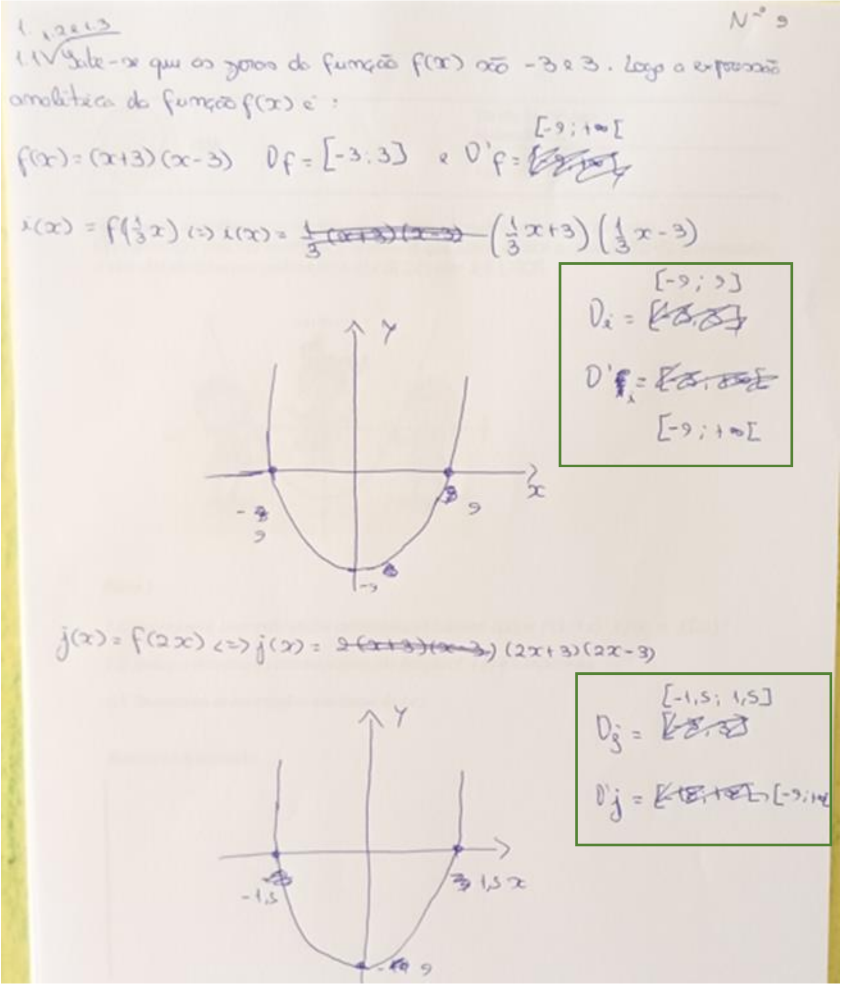


Figura 28-Resolução da Tarefa 2, parte 1, alínea 1.1, aluno H

No diário de bordo, foram anotadas observações feitas, de forma recorrente, relacionadas com a possibilidade de se poder responder às questões da tarefa pela ordem que se achasse correta. Curiosamente, o aluno B, depois de verificar que tal seria possível, comentou: “Que confusão, assim nem sei por onde começar” revelando estranheza pela liberdade de delineamento da estratégia que lhe estava a ser dada, bem como à implementação da mesma.

A utilização do dual foi comum a todos os alunos, ficando representada a sua utilização na figura abaixo.

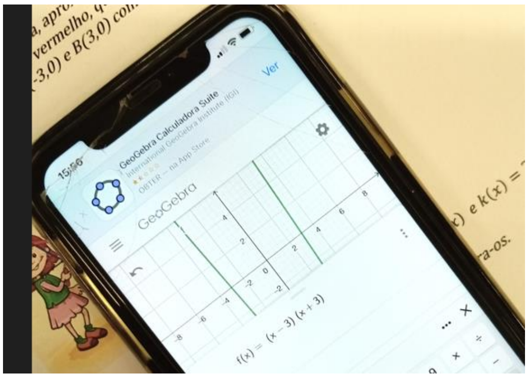


Figura 29-Exemplo da utilização do dual na Tarefa 2, alínea 1.1, pelo aluno E

A questão seguinte foi respondida por seis alunos, mas só dois deles apresentaram uma resposta parcialmente correta. O aluno F e o aluno H determinaram os intervalos pretendidos para o domínio, mas erraram na determinação do contradomínio. A solução que ambos apresentaram é idêntica e pode ser verificada na figura anterior, destacada em caixas verdes.

Relativamente à última alínea, três alunos tentaram obter a solução adequada, mas dois deles fizeram-no no contexto da alínea 1.1, que não era o pedido. Assim sendo, um aluno fez o que era suposto ser feito, mas não de forma completamente correta (Figura 30).

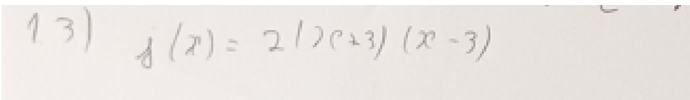


Figura 30-Resolução da Tarefa 2, parte 1, alínea 1.3, aluno k

A expressão que o aluno obteve deveria ter sido substituída pela expressão $f(x) = \frac{1}{3}(x+3)(x-3)$. O aluno justificou a sua resolução porque, segundo ele, “o 2 na igualdade $j(x) = f(2x)$ seria o valor a multiplicar por $(x+3)(x-3)$”.

Em todas as outras respostas houve erros de cálculo, má estratégia de resolução ou ausência dela, ausência de justificações ou de argumentos plausíveis.

Na terceira aula, seriam resolvidas duas tarefas (Apêndice 3). Na primeira hora, foi explorada a segunda parte da tarefa 2 e, na segunda hora, fez-se o estudo da situação retratada na *Tarefa 3.* Na tarefa 2, parte 2, está em causa a relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $af(x), a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$; na segunda tarefa, a relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos da função $-f(x)$ e da função $f(-x)$.

Em relação à resolução da segunda parte da tarefa 2, apenas dois alunos não responderam à alínea 2.1, todos os outros fizeram esboços de representações das funções pedidas, tendo-se verificado que muitos deles já se tinham apropriado da expressão analítica da função f, resultante da síntese realizada na aula anterior. Estava, portanto, a ser consolidado conhecimento e a estratégia didática estava a produzir efeitos desejados.

Das respostas obtidas, uma delas se destaca, pois, o aluno efetuou as alterações corretas a nível do contradomínio de $p(x)$ e $k(x)$ em relação a $f(x)$, preservando o domínio de $p(x)$ e $k(x)$ em relação à função original (Figura 31).

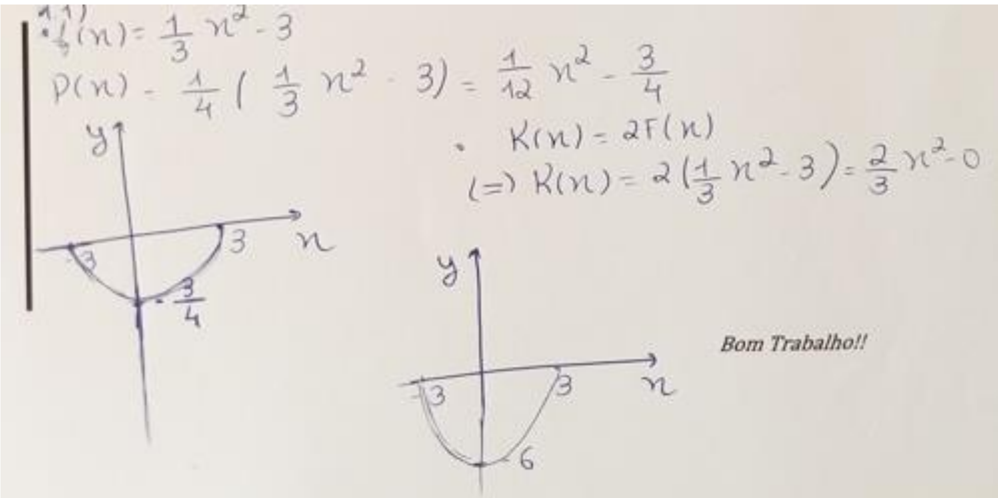
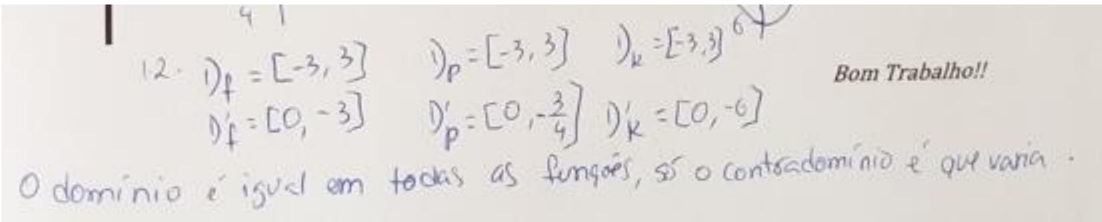


Figura 31-Resolução da Tarefa 2, parte 3, alínea 2.1, aluno B

Em relação à questão seguinte, todos os alunos responderam com a exceção de três deles. Dos que responderam, metade apresenta erros nos valores encontrados, representando, num intervalo de números reais, o menor dos valores à direita desse intervalo, ou seja, escrevem por exemplo, $D'_f = [0, -6]$, em vez de $D'_f = [-6,0]$.

Pelas resoluções apresentadas nesta tarefa, verifica-se já uma tendência para melhorar a razoabilidade das soluções à luz dos enunciados, bem como, procurar explicar e justificar algumas das conclusões a que os alunos iam chegando (Figura 32 e 33).



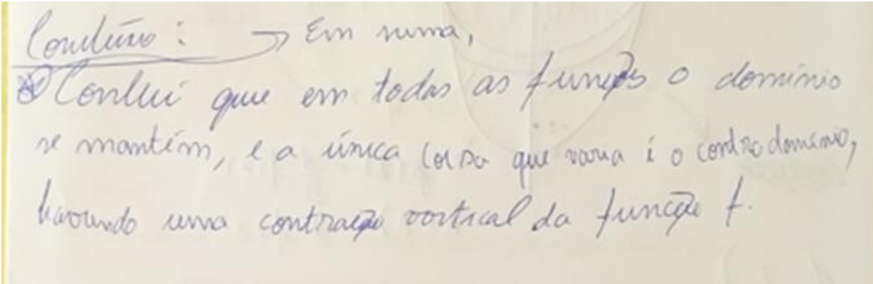
1.2. $D_f = [-3, 3]$ $D_p = [-3, 3]$ $D_k = [-3, 3]$

$D'_f = [0, -3]$ $D'_p = [0, -\frac{3}{4}]$ $D'_k = [0, -6]$

Bom Trabalho!!

O domínio é igual em todas as funções, só o contradomínio é que varia.

Figura 32-Resolução da Tarefa 2, parte 2, alínea 2.2, aluno J

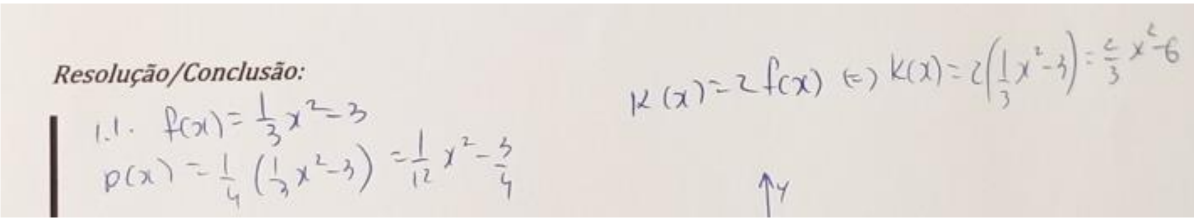


Conclusão: → Em suma,

Conclui que em todas as funções o domínio se mantém, e a única coisa que varia é o contradomínio, havendo uma contração vertical da função f.

Figura 33-Conclusão do aluno C, Tarefa 2, parte 2

Para finalizar a resolução esta tarefa, faltava verificar a última questão. A quase totalidade dos alunos obtiveram as expressões analíticas pedidas, mas muitos fizeram-no fora do contexto pedido, pois escolheram a questão 2.1 para o fazer. A respostas correta foi a do aluno J (Figura 34).



Resolução/Conclusão:

1.1. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3$

$p(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x^2 - 3\right) = \frac{1}{12}x^2 - \frac{3}{4}$

$k(x) = 2f(x) \Leftrightarrow k(x) = 2\left(\frac{1}{3}x^2 - 3\right) = \frac{2}{3}x^2 - 6$

y

Figura 34-Resolução da Tarefa 2, parte 2, alínea 2.3, aluno J

A última tarefa, designada de *Tarefa 3,* envolvia, como já foi referido, o estudo de gráficos obtidos por reflexão em relação aos eixos coordenados.

Verifica-se que são já muitos os alunos que respondem às questões sem seguir uma ordem específica, começando a exploração da tarefa munidos de uma estratégia que os ajude na obtenção de melhores resultados. Tal prática revelou-se eficaz e devolveu ao professor-estagiário um conjunto de sensações muito gratificantes.

Ao analisar as produções dos alunos, verificou-se que todos eles responderam à questão 1.1, no entanto, verifica-se que insistem na expressão analítica da função em detrimento do esboço da representação gráfica. Penso que uma explicação plausível para esse facto, se prende com a necessidade de procurar na utilização do dual uma resposta que corresponda às suas expectativas. De facto, todas as resoluções partem da expressão analítica e só, posteriormente, avançam para a representação gráfica pedida, como se pode verificar (Figura 35).

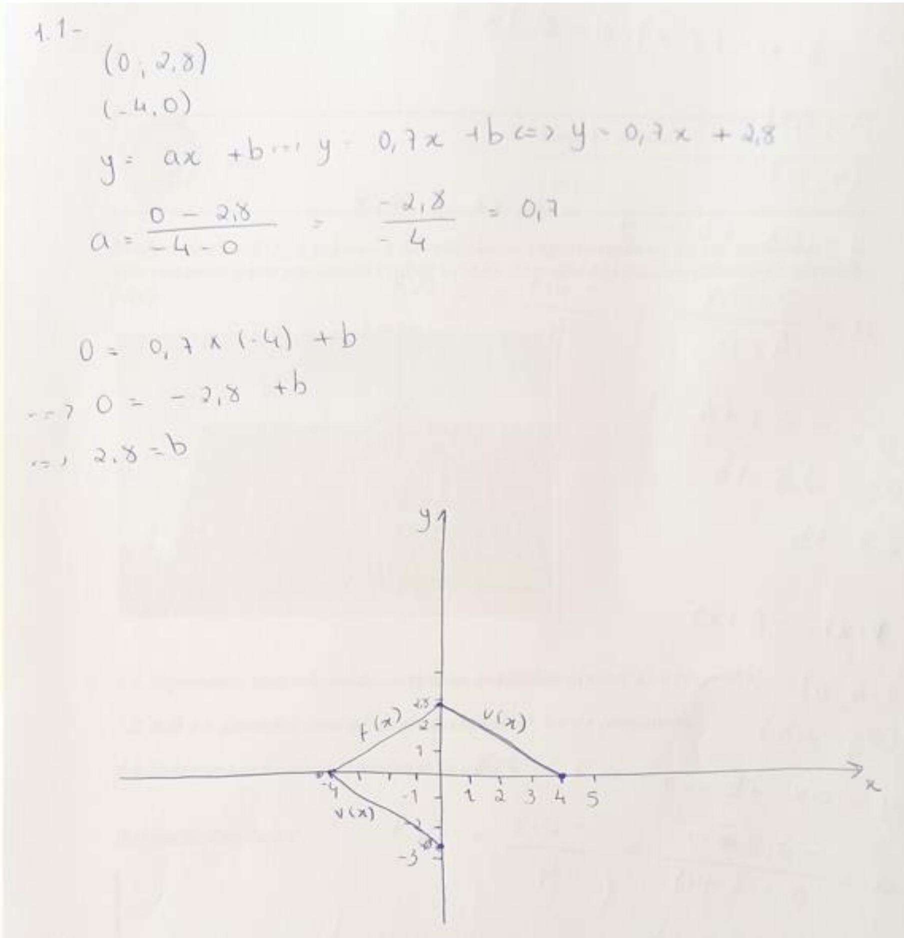


Figura 35-Resolução da Tarefa 3, alínea 1.1, aluno D

A segunda questão foi respondida por todos os alunos com uma exceção. Mas verifica-se que apenas dois alunos apresentam a resposta pretendida, estando uma delas representada na figura que se segue. Todos os outos alunos apresentam algum tipo de erro como, por exemplo, troca de sinais no intervalo real, erro na abertura ou fecho do mesmo, ou ainda, valores arredondados sem que fosse pedido (Figura 36).

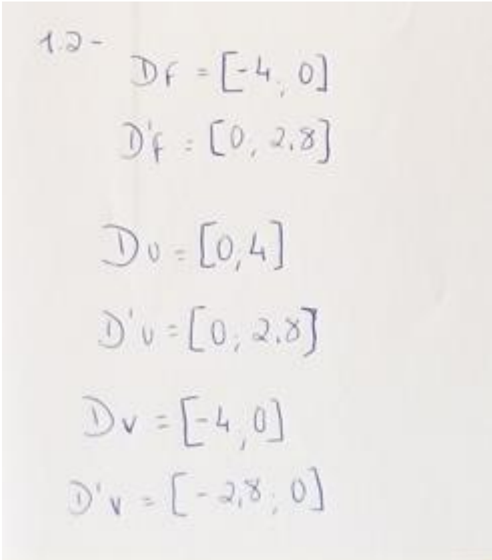


Figura 36-Resolução da Tarefa 3, alínea 1.2, aluno D

Por fim, em relação à determinação das expressões analíticas, praticamente todos os alunos o fizeram, no entanto, nem todos o fizeram na alínea adequada. Invariavelmente, tal acontece por duas ordens de razões: primeiro, porque lhes foi dada liberdade para explorarem a tarefa como achassem mais correto, segundo, pelo reiterado apego à ideia de que o esboço da representação gráfica de uma função tem de estar associado à expressão analítica da mesma. A reprodução abaixo, se bem que praticamente correta, explica um pouco do que aconteceu na maioria dos casos, ficando aqui como referência (Figura 37).

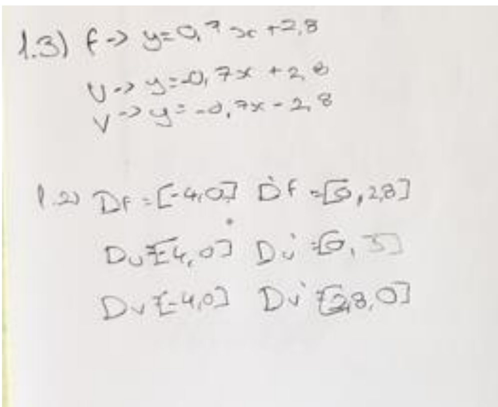


Figura 37-Tarefa 3, alínea 1.3, aluno L

Duas notas finais. À medida que os alunos iam avançando na exploração das suas tarefas, foram obtendo uma maior ligação ao dual como forma de implementarem as soluções pretendidas. Tal é verificável na figura 38. Para além disso e a partir desta altura, começam a ser referidas, pela turma, opiniões favoráveis à forma como estava a ser implementada as aulas. Uma destacou-se — “Isto é para nos obrigar a pensar, não é?”.

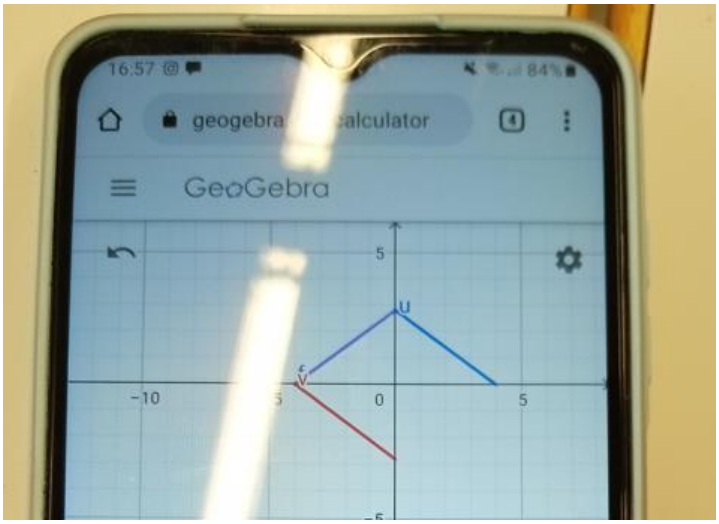


Figura 38-Utilização do dual na Tarefa 3, alínea 1.3, aluno H

5. Reflexões finais

Segue-se uma reflexão final que resume um conjunto de interpretações, observações e conclusões vivenciadas pelo professor-estagiário ao longo de todo o processo. Esta reflexão inclui algumas sugestões para a resolução de determinadas incidências e/ou resultados.

5.1. Principais conclusões do estudo

Como já foi mencionado, este trabalho tem como objetivo analisar se a utilização do dual *smartphone*-*GeoGebra* é facilitadora da aprendizagem, por parte dos alunos, quer relativa às relações entre gráficos de funções e respetivas transformações geométricas, quer relativa à comunicação matemática.

Por isso, neste ponto, ir-se-á sintetizar:

I. a exploração, por parte dos alunos, do dual como mediador da aprendizagem;
II. o aprofundamento de conhecimento e sua aplicação relacionados com as transformações geométricas das funções;
III. A melhoria da comunicação matemática.

O primeiro aspeto foi sendo consolidado ao longo do ano letivo, pois a utilização do dual fez parte das estratégias didáticas adotadas pela professora cooperante. Isso facilitou a atuação do professor-estagiário. Todos os alunos dominavam o dual e conseguiam, na sua utilização, com facilidade, as informações que desejavam.

Em relação aos outros aspetos, os resultados apontam para um impacto positivo do uso do dual como ferramenta epistémica, favorecendo o desenvolvimento de competências tecnológicas e de competências matemáticas transversais e específicas, no contexto do estudo. Tais conclusões podem ser confirmadas pelos resultados obtidos nas Fichas Formativas e sua análise comparativa, pela evolução verificada na resolução das tarefas desenvolvidas e pelas anotações obtidas pela observação efetuada.

Pela análise dos resultados das Fichas Formativas, verificam-se melhorias muito expressivas na resolução das tarefas propostas, incluindo na forma como se comunicou, e na utilização da tecnologia. Quanto à resolução das tarefas, os alunos começaram por ter de apresentar poucas produções que, por norma, estavam incompletas, continham erros de interpretação, notação ou cálculo, passando a ter respostas mais corretas, rigorosas e completas e apresentando mais texto e mais claro e preciso.

Pode-se verificar, como resultado de uma análise mais em pormenor, que as competências melhor desenvolvidas passaram por:

- Reconhecer e interpretar graficamente a relação entre o gráfico de uma função $f(x)$ e os gráficos das funções $af(x)$, com *a* número real não nulo.

- Reconhecer e interpretar graficamente a relação entre o gráfico de uma função $f(x)$ e os gráficos das funções $f(-x)$ e $-f(x)$.
- Resolver problemas.
- Comunicar, utilizando linguagem matemática, oralmente e por escrito, para descrever, explicar e justificar procedimentos, raciocínios e conclusões.

As menos desenvolvidas:

- Reconhecer e interpretar graficamente a relação entre o gráfico de uma função $f(x)$ e os gráficos das funções $f(ax)$, $f(x+c)$ e $f(x)+c$, com a e c números reais e a não nulo.
- Conhecer factos, conceitos e procedimentos, nomeadamente, no uso de ferramentas para aumento de eficiência e precisão. Designadamente, na passagem de informação do recurso tecnológico para o papel.

É possível verificar que as conclusões obtidas neste estudo não divergem, de forma significativa, de outros estudos anteriormente efetuados no que se refere à utilização de tecnologias, ao estudo autónomo e à abordagem exploratória, como são os casos de (Lemos, 2017; Costa, 2016; Armindo, 2016; Rosa, 2018). É possível verificar, ainda, segundo Barbosa & Sant'Ana (2007, p. 19), que o *GeoGebra* "possibilita a visualização geométrica dos elementos algébricos, facilitando a formalização e concetualização dos conteúdos". Por seu lado Gaspar & Cabrita (2014, p. 187), afirmam que "a utilização do *GeoGebra* com outros materiais manipuláveis e ferramentas mais tradicionais, parece ter provocado um impacto positivo no conhecimento, capacidades e atitudes matemáticas".

Segundo Ponte (2010, p. 24), uma aula de aprendizagem exploratória "é muito mais complexa de gerir do que uma aula com base na exposição de conceitos", no entanto, segundo o mesmo autor, não obstante as suas dificuldades e limitações, este trabalho é essencial para uma aula de Matemática que visa objetivos educacionais relacionados com compreensão e raciocínio dos alunos.

O mesmo autor defende, ainda, que uma mesma tarefa pode dar origem a situações de aprendizagem muito diversas, dependendo do modo como é apresentada aos alunos, do modo como estes aceitam o desafio que lhes é proposto e, muito em especial, do modo como evolui a situação de trabalho na sala de aula. Portanto, é sempre necessário alguma cautela e atenção aos resultados que se vão obtendo.

5.2. Reflexão final

Segundo Martins & Loureiro (2020), qualquer processo reflexivo pode ser organizado por uma sequência de fases que se podem definir como: identificação, definição, delimitação, de forma contextualizada, da situação-objeto de reflexão; posterior problematização da situação, questionando e colocando várias hipóteses sobre causas e possíveis soluções; confrontação com a situação/textos/contextos e construção/fundamentação para possíveis resoluções do problema. Não obstante e segundo Dewey (1959, as cited in Silva et al., 2018), as atitudes necessárias para, de facto, a ação ser reflexiva, são três: abertura de espírito, responsabilidade e sinceridade.

Segundo Alarcão (1996), ser reflexivo é "ter a capacidade de utilizar o pensamento como atribuidor de sentido" (p. 3), enquanto Dewey (1933, as cited in F. Martins & Loureiro, 2020) diz ser uma forma especializada de pensar. Por sua vez Alarcão (1996) diz ser um ato que implica questionamento, indagação, perscrutação ativa, rigorosa, organizada, persistente daquilo em que se julga acreditar ou daquilo que habitualmente se pratica e se tem como correto e adequado.

A natureza da prática reflexiva pode ser muito vasta e complexa pois, como diz Schon (1982, p. 62), "Quando um praticante reflete dentro e sobre a sua prática, os possíveis objetos da sua reflexão são tão variados como os tipos de fenómenos à sua frente e os sistemas de conhecimento em prática que ela lhes traz".

Reconhecendo limitações próprias e escassa experiência profissional, serão expostas reflexões sobre considerações mais práticas e diretamente relacionadas com o impacto destas no processo de aprendizagem dos alunos.

Neste capítulo, o professor-estagiário procura, ainda, questionar os seus conflitos e frustrações, numa perspetiva de reflexão, não de acomodação. Esta dicotomia, presente em Herdeiro & Silva (2008), indica que, no segundo caso, procura-se simplesmente a solução mais imediata e simples para o conflito. No primeiro, procura-se analisá-lo à luz de diversas perspetivas, inferir as vantagens e desvantagens e, de seguida, tomar uma decisão.

Na reflexão efetuada, foram encontrados aspetos na investigação que merecem reflexão imediata, nomeadamente: o facto de o *modus operandi* do estudo ter provocado alguma alteração de comportamentos na forma de trabalhar dos alunos; o facto de a metodologia aplicada não ser uma atuação padrão, muito menos realizada num contexto de estudo; o facto de a turma em questão não ter como prática a execução de tarefas como introdução a um novo conceito e não ter como prática habitual a resolução de tarefas com cariz iminentemente exploratório.

Por outro lado, o período dedicado, em cada aula, à análise e à consolidação da matéria deveria ter sido mais prolongado e ser feito de forma ainda mais participativa aproveitando, inclusive, mais o manual promovendo, por exemplo, uma leitura partilhada do mesmo. Ao mesmo tempo, o professor-estagiário, para além de ter estimulado a turma para uma discussão final sobre a aula e respetiva concetualização, poderia ter deixado para os alunos a construção do quadro final com a síntese da matéria explorada. Esta atitude tinha a vantagem de amplificar e de melhorar a prática sobre e da comunicação matemática podendo, por essa via, aumentar e melhorar a recolha documental sobre a mesma. De um outro prisma, esta atitude teria ainda a vantagem de melhorar o entendimento da matéria e a consolidação da mesma, alterando a quantidade e qualidade do conhecimento obtido.

Um outro ponto de reflexão, prende-se com a utilização de díades ao longo do processo de investigação. Verificou-se que a comunicação entre o par nem sempre vai no sentido da discussão, partilha ou cooperação. Muitas das observações efetuadas indicam que, muitas vezes, este trabalho no seio da díade é feito pelo melhor dos dois alunos com a subalternização do segundo, sem que haja intercâmbio de ideias ou de conhecimentos. Uma solução encontrada, ainda no início do processo, foi valorizar a produção individual e estimular o registo dessa produção por cada um dos participantes.

A utilização do dual não melhorou significativamente a produção ligada ao esboço com *papel e lápis* das funções obtidas. Verifica-se que os alunos têm muitas dificuldades em introduzir rigor às reproduções efetuadas. Essa situação pode ser colmatada através da representação de alguns desses esboços no quadro da sala de aula, em partilha com a turma, sob vigilância do docente. De resto, a falta de rigor em algumas outras notações matemáticas devem ser motivo de análise e correção.

Um outro aspeto que merece alguma análise, situa-se no âmbito comportamental e motivacional. Parece que uma parte significativa dos alunos desiste com alguma facilidade da concretização dos objetivos propostos sempre que são confrontados com dificuldades inesperadas. Tal verifica-se independentemente do grau de conhecimento, da matéria lecionada ou da sujeição a determinado grau de dificuldade. Parece que este comportamento está mais relacionado com a motivação para *o querer fazer*. Sendo assim, a capacidade motivacional do professor passa a ter um elevado grau de influência nas tarefas a executar, situação essa constatada muitas vezes ao longo da *prática de ensino supervisionada* pela observação da prática diária da professora cooperante.

É importante ainda refletir um pouco sobre a criação das Fichas Formativas e das tarefas criadas. Com o desenvolvimento do estudo, foi possível verificar que algumas das questões englobadas nas propostas apresentadas aos alunos deveriam ter tido um melhor enquadramento nos objetivos e questões da investigação. Quer isto dizer que, sendo a utilização do dual e a comunicação matemática o centro de toda a ação, seria mais adequado que os materiais fornecidos aos alunos exigissem mais a utilização do dual e estimulassem mais a utilização da comunicação matemática. Uma sugestão para tal melhoria seria pedir aos alunos a criação, à sua escolha, por experimentação, de um conjunto de funções no dual para, a partir daí, poderem, com mais alguns procedimentos, obter as conclusões pretendidas, ou ainda, pedir, a partir da primeira produção de cada um dos alunos, um maior rigor na comunicação matemática, aprimorando a notação, o esboço, os comentários, a escrita, o questionamento e a resolução.

Por fim e após a conclusão de todos os trabalhos propostos, o professor-estagiário podia ter organizado uma pequena reflexão com os alunos sobre todo o trabalho efetuado. Esta atitude promoveria a prática reflexiva entre todos os intervenientes, criaria hábitos de introspeção e diálogo e desenvolvia a análise critica dos procedimentos, atitudes e conhecimentos adquiridos.

5.3. Metarreflexão

O investigador pretende, neste texto, refletir sobre a sua própria reflexão, sobre ele próprio, sobre a reflexão que faz da sua prática, do que projeta para ela, do seu contexto, mas não só, pois, segundo Gonçalves & Ramalho (2009), a metarreflexão, leva ao desenvolvimento de novos raciocínios, novas formas de pensar, de compreender, de agir e equacionar problemas, e a reflexão sobre a reflexão pode ainda conduzir o profissional à compreensão de futuros problemas e à descoberta de novas soluções, apoiando-o na determinação de ações futuras.

É socialmente aceite, a ideia que quase todos podem ser "o professor", acontece que tal tem sido possível, porque, em parte, a sociedade não reviu, na ação do professor, um saber específico. Como se lê em Roldão (2017), é fundamental que ensinar seja fazer aprender alguma coisa a alguém, no lugar de ser um transmitir de alguma coisa a alguém. O médico é reconhecido, porque a sociedade entende, que só ele tem competência para resolver um problema de saúde prescrevendo uma solução para o mesmo, tem um papel de prescritor, reconhecido como tal. A mesma autora, refere que existe um saber profissional docente quando e se o professor o recria mediante um processo mobilizador e transformativo em cada ato pedagógico, contextual, prático e singular, ou seja, ele passa a ser um prescritor de uma solução para um processo de ensino – aprendizagem.

A mesma autora, concretiza: "O professor profissional – como o médico ou o engenheiro nos seus campos específicos – é aquele que ensina não apenas porque sabe, mas porque sabe ensinar. E saber ensinar é ser especialista dessa complexa capacidade de mediar e transformar o saber" (Roldão, 2017, p. 1139).

Dessa forma, o autor deste trabalho, na sua *profissionalidade* reclama para si a possibilidade de "receitar" uma metodologia, uma técnica promotora de aprendizagem, adequada a um aluno específico, com determinada falta de um recursos matemático, em determinado dia e hora, independentemente, de qualquer outro que esteja na sala de aula. É nesse papel que o professor-estagiário se revê, o de professor-prescritor.

Bibliografia

Alarcão, I. (1996). Ser professor reflexivo. *Formação Reflexiva de Professores: Estratégias de Supervisão.*, 16.

Amado, J. (2014). Manual de investigação qualitativa em educação. In I. U. Coimbra (Ed.), *Manual de investigação qualitativa em educação* (2nd ed.). https://doi.org/10.14195/978-989-26-0879-2

Baert, S., Vujić, S., Amez, S., Claeskens, M., Daman, T., Maeckelberghe, A., Omey, E., & de Marez, L. (2019). *Smartphone Use and Academic Performance: Correlation or Causal Relationship?*

Barbosa, N. M., & Sant'Ana, É. (2020). Experimentação didática visando o ensino de Geometria Analítica utilizando smartphones: uma adaptação do Projeto Reforço Escolar com o aplicativo GeoGebra. *REMAT: Revista Eletrônica Da Matemática*, *6*(2), e2007. https://doi.org/10.35819/remat2020v6i2id4177

Bardin, L. (1977). *Análise de Conteúdo* (E. 70, Ed.).

Becker, F. (1992). O que é construtivismo? *Revista de Educação AEC*, *21*(83), 7–15.

Bento, M., Silva, B., Osório, A., Lencastre, J. A., & Pereira, M. B. (2017). Trazer vida à sala de aula: utilização inovadora de dispositivos móveis no processo educativo. In C. IEUM (Ed.), *Proceedings of the X International Conference on ICT in Education - Challenges 2017* (pp. 459–472).

Bidarra, M., & Festas, M. (2005). Construtivismo(s): Implicações e interpretações educativas. *Revista Portuguesa de Pedagogia*, *39*(2), 177–195.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., Timóteo, M., Loura, L., Damião, H., & Festas, I. (2013). *Programa e Metas Curriculares, Matemática A - Ensino Secundário* (D. G. Educação, Ed.).

Bogdan, Robert; Biklen, S. (1999). *Investigação Qualitativa em Educação* (P. Editora, Ed.).

Bold, C. (2013). The reflective practitioner. In B. Books (Ed.), *Supporting Learning and Teaching* (pp. 1–13). https://doi.org/10.4324/9780203963371

Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, H., & Oliveira, P. (2011). Geometria e medida no ensino básico. *Lisboa. Ministério Da Educação, Direção Geral de*

Inovação e Desenvolvimento Curricular. https://www.researchgate.net/profile/Luis_Menezes/publication/270051243_Geometria_e_medida_no_ensino_bsico/links/549f3f8a0cf257a635fe73b3.pdf

Canavarro, A. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *PED - Artigos Em Revistas Nacionais Sem Arbitragem Científica*, *115*, 11–17. http://www.apm.pt/portal/em.php?id=195438&rid=185366&search=words=,author=Canavarro,seccao=,ano=,_SEARCH_DONE=1&page=3 http://hdl.handle.net/10174/4265

Cândido, P. (2001). Comunicação em Matemática. In *Ler, Escrever e Resolver Problemas* (pp. 15–28). Smole & Diniz.

Carrega, J., Oria, M. R., & Ruivo, J. (2021). A utilização do telemóvel em contextos educativos: representações de alunos e de professores. In *Educação e Ensino na Era da Informação II* (pp. 151–162). https://doi.org/10.37572/edart_19122148413

Castanon, G. (2015). O que é o Construtivismo? *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, *1*(2), 209–242.

Costa, M. (2016). *Exploração das propriedades das transformações de gráficos de funções com auxílio do GeoGebra* [Master's thesis]. Universidade de Aveiro.

Coutinho, C. P. (2006). Aspetos metodológicos da investigação em tecnologia educativa em Portugal (1985-2000). *Atas Do XIV Colóquio AFIRSE*, 1--12. http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/6497

Craveiro, M. (2007). *Formação em contexto: um estudo de caso no âmbito da pedagogia da infância* [Doctoral dissertation, Universidade Minho]. https://hdl.handle.net/1822/7085

Dantas, H., & Cabrita, I. (2020). Mobile Learning no desenvolvimento de competências matemáticas: estudo de caso no ensino médio do Instituto Federal de Pernambuco. In CEIs20 (Ed.), *5º Encontro sobre jogos e mobile learning*. http://hdl.handle.net/10773/32593

Denzin, N. (2018). Investigação Qualitativa Crítica. *Sociedade, Contabilidade e Gestão*, *13*(1).

Derounian, J. G. (2020). Mobiles in class? *Active Learning in Higher Education*, *21*(2), 142–153. https://doi.org/10.1177/1469787417745214

DGE. (2018). *Aprendizagens Essenciais: Ensino Básico* (DGE, Ed.). https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico

DGE. (2021). *Aprendizagens Essenciais. Articulação com o Perfil dos Alunos - Ensino Secundário* (DGE, Ed.).

Dias de Figueiredo, A. (2019). Compreender e desenvolver as competências digitais. *RE@D-Revista de Educação a Distância e Elearning*, *2*(1), 1–8. http://hdl.handle.net/10400.2/8108

Fong, J., & Shan, W. J. (2009). Hybrid Learning and Education: Preface. In Springer (Ed.), *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics): Vol. 5685 LNCS*.

Gaspar, J., & Cabrita, I. (2014). GeoGebra e ferramentas tradicionais – Uma conjugação favorável à apropriação das isometrias. In APM (Ed.), *Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 169–190). https://core.ac.uk/download/pdf/32242063.pdf

Gomes, A. A. (2010). Estudo - Planejamento e métodos. *Nuances: Estudos Sobre Educação*, *15*(16). https://doi.org/10.14572/nuances.v15i16.187

Gonçalves, D., & Ramalho, R. (2009). O (e)portfólio reflexivo como estratégia de formação. *Jornadas E-Portfólio*, 1–15.

Guerreiro, A. (2011). Conceções e práticas de comunicação matemática. *Indagatio Didactica*, *3*(1), 25–40.

Guerrero, A., Ferreira, R. A. T., Menezes, L., & Martinho, M. H. (2016). Comunicação na sala de aula: a perspetiva do ensino exploratório da matemática. *Zetetike*, *23*(2), 279. https://doi.org/10.20396/zet.v23i44.8646539

Harasim, L. (2018). Constructivist Learning Theory. In *Learning Theory and Online Technologies* (pp. 61–79). CECA. https://doi.org/10.4324/9781315716831-5

Herdeiro, R., & Silva, A. M. (2008). Práticas reflexivas: uma estratégia de desenvolvimento profissional dos docentes. *ANAIS (Atas) Do IV Colóquio Luso-Brasileiro, VIII Colóquio Sobre Questões Curriculares: Currículo, Teorias, Métodos.*, 1–17. https://core.ac.uk/download/pdf/55610575.pdf

Kim, I., Kim, R., Kim, H., Kim, D., Han, K., Lee, P. H., Mark, G., & Lee, U. (2019). Understanding smartphone usage in college classrooms: A long-term measurement study. *Computers and Education*, *141*, 103–611. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2019.103611

Lemos, C. (2017). *Potencialidades de uma abordagem didática assente na exploração autónoma e colaborativa de ferramentas da web 2.0* [Tese de Doutoramento]. Universidade de Aveiro.

Maia, A. C. B. (2020). Questionário e entrevista na pesquisa qualitativa: elaboração, aplicação e análise de conteúdo - Manual Didático. In *Journal of Chemical Information and Modeling* (Vol. 53, Issue May). Pedro & João. https://www.researchgate.net/publication/341259892_Questionario_e_entrevista_na_pesquisa_qualitativa_Elaboracao_aplicacao_e_analise_de_conteudo

Makiadi Adão, J., André João, K. S., Pires Rocha Silveira, A., & dos Santos, J. M. D. S. (2021). O uso do GeoGebra para a composição e decomposição de figuras geométricas: uma experiência com os alunos da 8ª classe no contexto angolano. *Revista Do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, *10*(2), 129–146. https://doi.org/10.23925/2237-9657.2021.v10i2p129-146

Martins, F., & Loureiro, J. (2020). Natureza e fundamentos do processo de observação e metodologias de observação. In *[Power Point de apoio à UC de OAPE lecionada na UA]*.

Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carrillo, J., Silva, L., Encarnação, M., Horta, M., Calçada, M., Nery, R., & Rodrigues, S. (2016). *O Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (D. G. Educação (DGE), Ed.). https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/perfil_dos_alunos.pdf

Medeiros, K., & Meira, G. (2019). A resolução de problemas geométricos como alternativa de comunicação matemática em sala de aula. *Vidya*, *39*(1), 291–309.

Meirinhos, M., & Osório, A. (2010). O estudo de caso como estratégia de investigação em educação. *Eduser - Revista de Educação*, *2*(2), 49–65. https://doi.org/10.34620/eduser.v2i2.24

Moreira, A., Sá, P., & Costa, A. (2021). *Reflexões em torno de métodos Metodologias de Investigação: métodos* (E. UA, Ed.; 1st ed., Vol. 1).

Neves, I. (2018). Dispositivos Móveis e Formação do Docente: Mobilizando Saberes. *Challenges 2017: Aprender Nas Nuvens, Learning in the Clouds*, 443–460. https://www.nonio.uminho.pt/wp-content/uploads/2020/09/atas_chalenges_2017.pdf

Pedro da Ponte, J., Quaresma, M., & Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i1.5

Peixoto, R. M. M. M. (2012). *O contributo do dicionário digital online para a aprendizagem da língua portuguesa*.

Pires, M. V., Costa, E., & Leite, C. (2018). Contributos para a análise da comunicação (matemática) escrita dos alunos. *Educação e Matemática*, *149–150*(150), 28–33. https://bibliotecadigital.ipb.pt/bitstream/10198/18862/1/Pires%26Costa%26Leite2018_E%26M149%3A150_28-32.pdf

Ponte, J. (2010). Explorar e investigar em matemática: uma atividade fundamental no ensino e na aprendizagem. *Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *21*, 13–30. http://repositorio.ul.pt/handle/10451/3043

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. *O Professor e o Desenvolvimento Curricular*, *1*, 11–34. http://hdl.handle.net/10451/3008

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25*(2006), 105–162. https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3007/1/06-Ponte(BOLEMA-Estudo de caso).pdf

Roldão, M. do C. (2017). Conhecimento, didática e compromisso: triângulo virtuoso de uma profissionalidade em risco. *Cadernos de Pesquisa*, 1134–1149.

Rosa, M. (2018). *Transformações geométricas dos gráficos de funções: um estudo no 10.º ano, com recurso à tecnologia* [Master’s thesis]. Universidade de Lisboa.

Santos, J. M. dos, Silveira, A. P., & da Silva Trocado, A. E. (2019). GeoGebra e situações que envolvem modelação numa abordagem STEAM. *ArXiv*, 1–18. https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1907/1907.02099.pdf

Savasci, F., & Berlin, D. F. (2012). Science Teacher Beliefs and Classroom Practice Related to Constructivism in Different School Settings. *Journal of Science Teacher Education*, *23*(1), 65–86. https://doi.org/10.1007/s10972-011-9262-z

Serrazina, L. (2018). Comunicação matemática e aprendizagens essenciais. *Educação e Matemática*, *149–150*(Outubro, Novembro, Dezembro), 13–16. https://em.apm.pt/index.php/em/issue/view/149/202

Silva, P. (2018). Observação como Técnica de Pesquisa Qualitativa em Periódicos Contábeis Brasileiros. *4º Congresso de Contabilidade e Governança, Brasília*.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2015). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Helping Teachers Learn to Better Incorporate Student Thinking. In *Socializing Intelligence Through Academic Talk and Dialogue* (Vol. 10, Issue 4, pp. 375–388). https://doi.org/10.3102/978-0-935302-43-1_29

Stein, M., & Smith, M. (1998). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática. *Teaching in the Middle School*, *3*(4), 268–275.

Sunday, O. J., Adesope, O. O., & Maarhuis, P. L. (2021). The effects of smartphone addiction on learning: A meta-analysis. *Computers in Human Behavior Reports*, *4*, 100114. https://doi.org/10.1016/j.chbr.2021.100114

Yin, R. (2001). *Estudo de caso. Planejamento e métodos* (2nd ed.). Bookman.

Apêndices

Apêndice 1: Planificação e Materiais da aula 1

Turma: 10.º E1

Data: 30 março 2022

Duração: 100 minutos

Horário: 10.10-11.55

I. Sumário:

- Resolução da Ficha Formativa 1.
- Gráficos obtidos por translação. Relação entre os gráficos das funções f e g, sendo $g(x) = f(x) + k, k \in \mathbb{R}\ e\ g(x) = f(x - k), k \in \mathbb{R}$.
- Resolução da tarefa 1.

II. Conhecimentos e Capacidades Prévias:

3º Ciclo do Ensino Básico (CEB):

- Identificar e representar funções com domínios e conjuntos de chegada finitos em diagramas de setas, tabelas e gráficos cartesianos e em contextos variados.
- Efetuar operações com funções de domínio finito definidas por tabelas, diagramas de setas ou gráficos cartesianos.
- Identificar uma função afim como a soma de uma função linear com uma constante e designar por «forma canónica» da função afim a expressão «$ax + b$», onde a é o coeficiente da função linear e b o valor da constante, e designar por «coeficiente de» e por «termo independente».
- Reconhecer, dada uma função $f: D \to \mathbb{R}, (D \subset \mathbb{R})$ que o gráfico da função definida pela expressão $g(x) = f(x) + b$ (sendo *b* um número real) se obtém do gráfico da função *f* por translação de vetor definido pelo segmento orientado de origem no ponto de coordenadas $(0,0)$ e extremidade de coordenadas $(0, b)$.

- Reconhecer que as retas não verticais são os gráficos das funções afins e, dada uma reta de equação $y = ax + b$, designar *a* por «declive» da reta e *b* por «ordenada na origem».

III. Competências a Desenvolver:

Programas e Metas curriculares

- Reconhecer, dada uma função real de variável real *f*, um número real *c* e um plano munido de um referencial cartesiano, que o gráfico cartesiano da função g, tal que $g(x) = f(x - c)$ no conjunto $D_g = \{x + c : x \in D_g\}$ é a imagem do gráfico cartesiano de *f* pela translação do vetor $\vec{u}(c, 0)$.
- Reconhecer, dada uma função real de variável real *f,* um número real *c* e um plano munido de um referencial cartesiano, que o gráfico cartesiano de uma função g, definida em $D_g = D_f$ por $g(x) = f(x) + c$ é a imagem do gráfico cartesiano de *f* pela translação do vetor $\vec{u}(0, c)$.

Aprendizagens Essenciais

i. *Conhecimentos, capacidades e atitudes*

- Reconhecer simetrias dos gráficos das funções pares e das funções ímpares
- Reconhecer e interpretar graficamente a relação entre o gráfico de uma função e os gráficos das funções $f(x + c)$ *e* $f(x) + c$, com *a* e *c* números reais e *a* não nulo.

ii. *Práticas essenciais de aprendizagens*

- Comunicar, utilizando linguagem matemática, oralmente e por escrito, para descrever, explicar e justificar procedimentos, raciocínios e conclusões.
- Avaliar o próprio trabalho para identificar progressos, lacunas e dificuldades na sua aprendizagem

IV. Descrição da Aula:

Primeiro tempo: 10:10 às 11:00

- Chegada dos alunos, ocupação do respetivo lugar e apresentação da Ficha Formativa 1 (cerca de 10 min).
- Resolução da Ficha Formativa 1 (cerca de 40 min).

Segundo tempo: 11:05 às 11:55

- Chegada dos alunos, ocupação do respetivo lugar, breve explicação do trabalho a efetuar e distribuição dos alunos na sala de aula, em grupos de 2 elementos (cerca de 10 min).
- Distribuição da tarefa 1, para cada aluno, como base para o desenvolvimento da aula. Inclui um conjunto de funções, para que seja efetuado o seu esboço, de forma autónoma, mas partilhada (aproximadamente 25 min).
- Comentários, em sala de aula, relativos aos esboços obtidos, sua discussão e síntese dos conteúdos explorados (cerca de 15 min).

V. Material Didático:

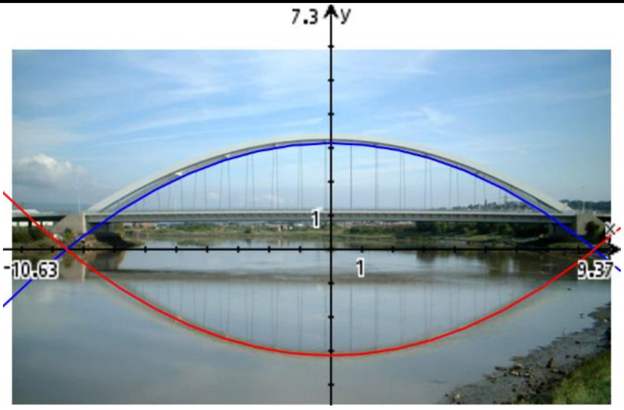
- Quadro branco e marcador.
- Dual *smartphone* - *GeoGebra*
- Material de escrita e de desenho (papel, esferográfica, lápis e borracha).
- Tarefa 1. (Em anexo)
- Ficha Formativa 1. (Em anexo)
- Manual adotado

Ficha Formativa da aula 1

AEML

Ficha Formativa 1 | 10.º Ano
Matemática A

30.03.2022 Bom Trabalho!

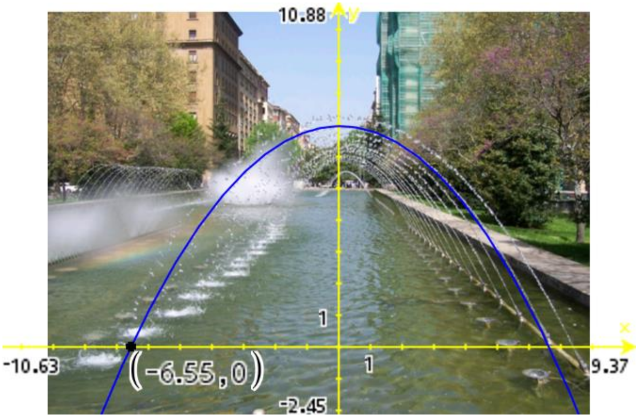


1. Na figura ao lado, está representada a ponte Usk, localizada no Canadá. Para além disso, está também representada a sua sombra no rio com o mesmo nome. Uma das funções tem equação: $g(x) = -0{,}042x^2 + 3$.

1.1. Identifica as funções representadas e as respetivas expressões analíticas.

1.2. Para cada uma delas, identifica vértice, zeros, domínio e contradomínio.

1.3. Imagina que a ponte, é constituída por dois arcos (de cor azul) consecutivos e que a origem do sistema de eixos desloca-se para o zero positivo da referida parábola. Determina, no arco acrescentado, o seu vértice, zeros, domínio e contradomínio.



2. Seja f a função que representa a trajetória de um repuxo que atinge a altura máxima no vértice $V(0,7)$ e tem zeros em $A(-6{,}55; 0)$ e $B(6{,}55; 0)$.

2.1. Representa, num referencial cartesiano, as funções $g(x) = f(2x)$, $h(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ e $p(x) = f(x-1) - 2$

2.2. Indica o domínio e contradomínio das funções f, g, h e p e compara-os.

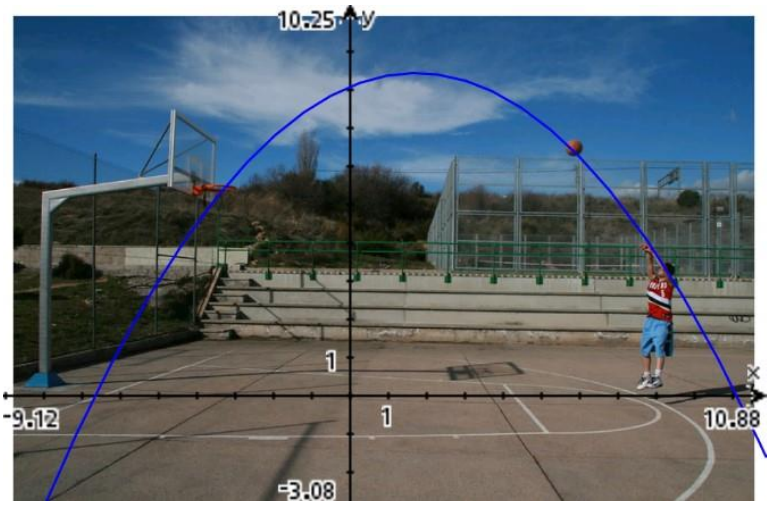
2.3. Determina as expressões analíticas de g, h e p.

AEML

Tarefa 1 | 10.º Ano
Matemática A

30.03.2022 Bom Trabalho!

1. Seja f a função que representa a trajetória da bola de basquetebol que atinge a altura máxima no vértice $V(1{,}72; 8{,}45)$ e tem zeros em $A(-6{,}7; 0)$ e $B(10{,}0)$.



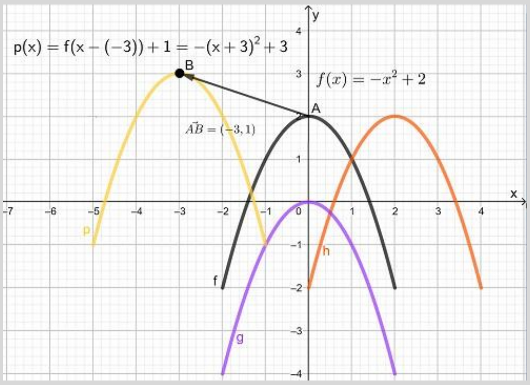
1.1. *Representa, no referencial cartesiano, as funções $g(x) = f(x) + 2$ e $h(x) = f(x-1)$.*

1.2. Indica o domínio e contradomínio das funções f , g e h e compara-os.

1.3. Determina as expressões analíticas de g e h.

Resolução/Conclusão:

PowerPoint da aula 1



Translações

$f(x) = -x^2 + 2, \quad (-2 \le x \le 2)$

$h(x) = f(x - 2)$

$\rightarrow -(x-2)^2 + 2, \quad (-2 \le x - 2 \le 2)$

$g(x) = f(x) - 2$

$\rightarrow \text{If}(-2 \le x \le 2, -x^2 + 2) - 2$

$p(x) = f(x + 3) + 1$

$\rightarrow \text{If}\left(-2 \le x + 3 \le 2, -(x+3)^2 + 2\right) + 1$

		$f(x),\ D_f = [m,n],\ D'_f = [p,q]$				
		Expressão analítica	*Domínio*	*Contradomínio*	*Ponto Genérico*	*Observações*
Translação	*Vertical:* $\vec{t} = (0,k)$	$f(x) + k$	$[m,n]$	$[p+k, q+k]$	$P(x,y)$ *passa a* $P'(x, y+k)$	*"Para cima/baixo"*
	Horizontal: $\vec{t} = (h,0)$	$f(x-h)$	$[m+h, n+h]$	$[p,q]$	$P(x,y)$ *passa a* $P'(x+h, y)$	*"Para lado direito/esquerdo"*

Dados uma função real de variável real f, um número real k e um plano munido de um referencial cartesiano, o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = D_f$ *por* $g(x) = f(x) + k$ *é a imagem do gráfico cartesiano de f associado à translação do vetor* $\vec{u} = (0, k)$.

Dados uma função real de variável real f, um número real h e um plano munido de um referencial cartesiano, o gráfico cartesiano de uma função g definida por $g(x) = f(x - h)$ *no conjunto* $D_g = \{x + h : x \in D_f\}$ *é a imagem do gráfico cartesiano de f associado à translação do vetor* $\vec{u} = (h, 0)$.

Dados uma função real de variável real f, dois números reais h, k e um plano munido de um referencial cartesiano. O gráfico cartesiano de uma função g definida por $g(x) = f(x - h) + k$ *no conjunto* $D_g = \{x + h : x \in D_f\}$ *é a imagem do gráfico cartesiano de f associado à translação do vetor* $\vec{u} = (h, k)$.

Apêndice 2: Planificação e Materiais da aula 2

Turma: 10.º E1

Data: 31 março 2022

Duração: 50 minutos

Horário: 9:10-10:00

I. Sumário:

- Gráficos obtidos por contração e dilatação horizontal. Relação entre gráficos das funções f e g, sendo e $g(x) = f(ax)$ para $a > 1$ e $0 < a < 1$.
- Realização da tarefa 2, parte 1.

II. Alguns conhecimentos e capacidades prévios:

3º CEB:

- Identificar e representar funções com domínios e conjuntos de chegada finitos em diagramas de setas, tabelas e gráficos cartesianos e em contextos variados.
- Efetuar operações com funções de domínio finito definidas por tabelas, diagramas de setas ou gráficos cartesianos.
- Identificar uma função afim como a soma de uma função linear com uma constante e designar por «forma canónica» da função afim a expressão «$ax + b$», onde a é o coeficiente da função linear e b o valor da constante, e designar por «coeficiente de» e por «termo independente».
- Reconhecer, dada uma função $f: D \to \mathbb{R}, (D \subset \mathbb{R})$ que o gráfico da função definida pela expressão $g(x) = f(x) + b$ (sendo *b* um número real) se obtém do gráfico da função *f* por translação de vetor definido pelo segmento orientado de origem no ponto de coordenadas $(0,0)$ e extremidade de coordenadas $(0, b)$.

- Reconhecer que as retas não verticais são os gráficos das funções afins e, dada uma reta de equação $y = ax + b$, designar *a* por «declive» da reta e *b* por «ordenada na origem».

III. Competências a desenvolver:

Programas e Metas curriculares

- Designar, dado um plano munido de um referencial ortogonal e um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$), por «contração horizontal (respetivamente dilatação horizontal) de coeficiente *a*» a transformação μ do plano que ao ponto $P(x, y)$ associa o ponto $\mu(P)$ de coordenadas (ax, y).
- Reconhecer, dada a função real de variável real f, um número $0 <$
  $a < 1$
  (respetivamente $a > 1$) e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g =$ $\left\{\frac{x}{a} : x \in D_f\right\}$ por $g(x) = f(ax)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela dilatação horizontal (respetivamente pela contração horizontal) de coeficiente $\frac{1}{a}$.

Aprendizagens Essenciais

i. *Conhecimentos, capacidades e atitudes*

- Simetrias dos gráficos das funções pares e das funções ímpares
- Reconhecer e interpretar graficamente a relação entre o gráfico de uma função e os gráficos das funções $f(ax)$, com *a* e *c* números reais e *a* não nulo.

ii. *Práticas essenciais de aprendizagens*

- Comunicar, utilizando linguagem matemática, oralmente e por escrito, para descrever, explicar e justificar procedimentos, raciocínios e conclusões.
- Avaliar o próprio trabalho para identificar progressos, lacunas e dificuldades na sua aprendizagem

IV. Metodologia

- Trabalho de pares na concretização da tarefa 2, parte 1.
- Confronto das principais resoluções e síntese coletiva das ideias principais a reter.

V. Descrição da aula:

- Chegada dos alunos e ocupação do respetivo lugar; apresentação do sumário; breve explicação do trabalho a efetuar; distribuição dos alunos na sala de aula, em pares (aproximadamente 10 min);
- Distribuição da tarefa 2, para cada aluno, como base para o desenvolvimento da aula. Inclui um conjunto de funções, para que seja efetuado o seu esboço, de forma autónoma e partilhada. (aproximadamente 25 min);
- Comentários, em sala de aula, relativos aos esboços obtidos, sua discussão e síntese dos conteúdos explorados (aproximadamente 15 min).

VI. Material didático

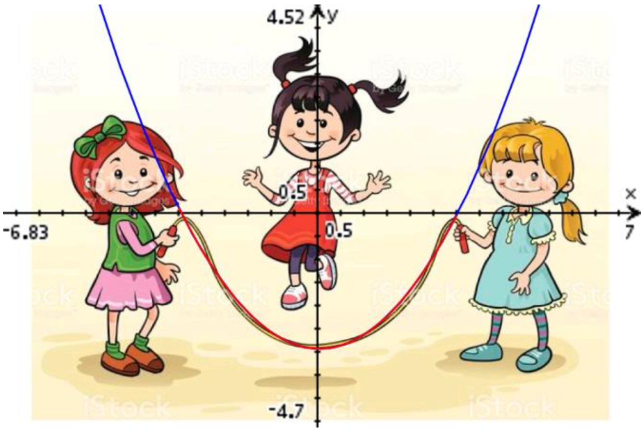
- Quadro branco e marcador.
- Dual *smartphone - GeoGebra*
- Material de escrita e de desenho (papel, esferográfica, lápis e borracha).
- Tarefa 2. (Em anexo)
- Manual adotado

Tarefa 2 | 10.º Ano
Matemática A

AEML

31.03.2022 Bom Trabalho!

Seja, a azul, a parábola que representa, aproximadamente, o formato da corda. Considera f(x) uma sua restrição, a vermelho, que tem o vértice no ponto $V\ (0,-3)$, intercetando o eixo das abcissas nos pontos $A(-3{,}0)$ e $B(3{,}0)$ com $x \in [-3{,}3]$.



Parte 1

1.1. Representa, num referencial cartesiano, as funções $i(x) = f\left(\frac{1}{3}x\right)$ e $j(x) = f(2x)$

1.2. Indica o domínio e contradomínio das funções f, i e j, compara-os.

1.3. Determina as expressões analíticas de i e j.

Resolução/Conclusão:

PowerPoint aula 2

Contrações/Dilatações **Horizontais**

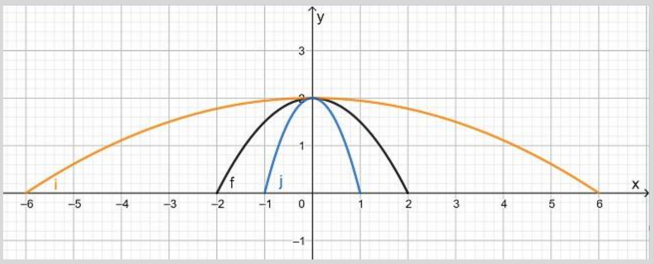
$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2, \quad (-2 \leq x \leq 2)$

$i(x) = f\left(\frac{1}{3}x\right)$

$\rightarrow -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x\right)^2 + 2, \quad \left(-2 \leq \frac{1}{3}x \leq 2\right)$

$j(x) = f(2x)$

$\rightarrow -\frac{1}{2}(2x)^2 + 2, \quad (-2 \leq 2x \leq 2)$



	$f(x),\ D_f = [m,n],\ D'_f = [p,q]$				
	Expressão analítica	*Domínio*	*Contradomínio*	*Ponto Genérico*	*Observações*
Contração horizontal $a > 1$	$f(ax)$	$\left[\frac{m}{a}, \frac{n}{a}\right]$	$[p,q]$	*$P(x,y)$ passa a $P'\left(\frac{x}{a}, y\right)$*	*"Domínio + contraído"*
Dilatação horizontal $0 < a < 1$	$f(ax)$	$\left[\frac{m}{a}, \frac{n}{a}\right]$	$[p,q]$	*$P(x,y)$ passa a $P'\left(\frac{x}{a}, y\right)$*	*"Domínio + dilatado"*

No plano munido de um referencial ortogonal, dada uma função real de varável real f e um número real positivo a, o gráfico da função g, definida por $g(x) = f(ax)$ e $D_g = \left\{\frac{x}{a} : x \in D_f\right\}$, é imagem do gráfico de f por:

- *uma **dilatação horizontal** de coeficiente $\frac{1}{a}$, se 0<a<1;*
- *uma **contração horizontal** de coeficiente $\frac{1}{a}$, se a>1.*

Apêndice 3: Planificação e Materiais da aula 3

Turma: 10.º E1

Data: 1 abril 2022

Duração: 100 minutos

Horário: 15.40-17:25

I. Sumário:

- Gráficos obtidos por dilatação e contração vertical. Relação entre gráficos das funções f e g, sendo $g(x) = af(x)$, para $a > 1$ e $0 < a < 1$ (página 49 do manual).
- Realização da tarefa 2, parte 2.
- Gráficos obtidos por reflexão em relação aos eixos coordenados. Relação entre os gráficos f e g, sendo $g(x) = -f(x)$ e $g(x) = f(-x)$ (página 54 do manual)
- Realização da tarefa 3.

II. Conhecimentos prévios:

3º CEB:

- Identificar e representar funções com domínios e conjuntos de chegada finitos em diagramas de setas, tabelas e gráficos cartesianos e em contextos variados.
- Efetuar operações com funções de domínio finito definidas por tabelas, diagramas de setas ou gráficos cartesianos.
- Identificar uma função afim como a soma de uma função linear com uma constante e designar por «forma canónica» da função afim a expressão «$ax + b$», onde a é o coeficiente da função linear e b o valor da constante, e designar por «coeficiente de» e por «termo independente».
- Reconhecer, dada uma função $f: D \to \mathbb{R}, (D \subset \mathbb{R})$ que o gráfico da função definida pela expressão $g(x) = f(x) + b$ (sendo b um número real) se obtém do gráfico da função f por translação de vetor definido

pelo segmento orientado de origem no ponto de coordenadas $(0,0)$ e extremidade de coordenadas $(0, b)$.

- Reconhecer que as retas não verticais são os gráficos das funções afins e, dada uma reta de equação $y = ax + b$, designar *a* por «declive» da reta e *b* por «ordenada na origem».

III. Competências a desenvolver

Programas e Metas curriculares

- Designar, dado um plano munido de um referencial ortogonal e um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$), por «contração vertical (respetivamente dilatação vertical) de coeficiente *a*» a transformação μ do plano que ao ponto $P(x, y)$ associa o ponto $\mu(P)$ de coordenadas (x, ay).
- Reconhecer, dada a função real de variável real f, um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$) e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em D_f por $g(x) = af(x)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela contração vertical (respetivamente pela dilatação vertical) de coeficiente a.
- Reconhecer, dada uma função real de variável real f e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano da função g definida em $D_g = D_f$, por $g(x) = -f(x)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela reflexão do eixo Ox.
- Reconhecer, dada uma função real de variável real f e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano da função g definida em $D_g = \{-x : x \in D_f\}$, por $g(x) = f(-x)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela reflexão do eixo Oy.

Aprendizagens Essenciais

i. *Conhecimentos, capacidades e atitudes*

- Simetrias dos gráficos das funções pares e das funções ímpares

- Reconhecer e interpretar graficamente a relação entre o gráfico de uma função e os gráficos das funções $af(x), f(-x)$ e $-f(x)$*, com* a e c números reais e a não nulo.

ii. *Práticas essenciais de aprendizagens*

- Comunicar, utilizando linguagem matemática, oralmente e por escrito, para descrever, explicar e justificar procedimentos, raciocínios e conclusões.
- Avaliar o próprio trabalho para identificar progressos, lacunas e dificuldades na sua aprendizagem

IV. Metodologia

- Trabalho de pares na concretização da tarefa 2, parte 2 e tarefa 3.
- Confronto das principais resoluções e síntese coletiva das ideias principais a reter.

V. Descrição da aula:

Primeiro tempo: 15:40 às 16:30

- Chegada dos alunos e ocupação do respetivo lugar; apresentação do sumário; breve explicação do trabalho a efetuar e distribuição dos alunos na sala de aula, em pares (aproximadamente 10 min).
- Continuação da tarefa 2, como base para o desenvolvimento da aula. Inclui um conjunto de funções, para que seja efetuado o seu esboço, de forma autónoma e partilhada (aproximadamente 25min)
- Comentários, em sala de aula, relativos aos esboços obtidos, sua discussão e síntese dos conteúdos explorados (aproximadamente 15 min).

Segundo tempo: 16:35 às 17:25

- Chegada dos alunos e ocupação do respetivo lugar; breve explicação do trabalho a efetuar (aproximadamente 10 min.)
- Distribuição da tarefa 3, para cada um dos alunos, como base para o desenvolvimento da aula. Inclui um conjunto de funções, para que seja efetuado o seu esboço, de forma autónoma e partilhada (25 min)

- Comentários, em sala de aula, relativos aos esboços obtidos, sua discussão e síntese dos conteúdos explorados (aproximadamente 15 min).

VI. Material didático

- Quadro branco e marcador.
- Dual *smartphone - GeoGebra*
- Material de escrita e de desenho (papel, esferográfica, lápis e borracha).
- Tarefas 2 e 3. (Em anexo)
- Manual adotado

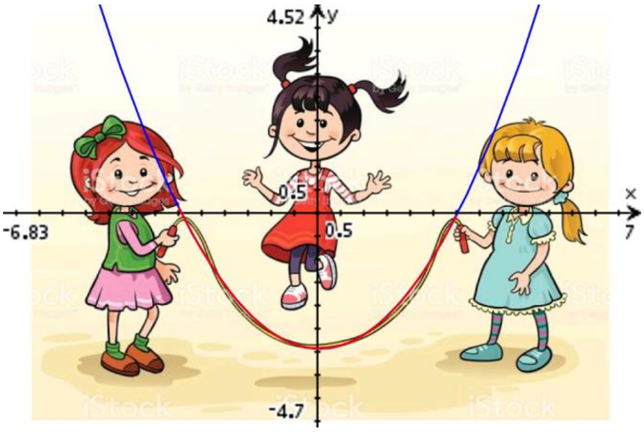
AEML

Tarefa 2 | 10.º Ano
Matemática A

1.04.22 Bom Trabalho!

Parte 2

Seja, a azul, a parábola que representa, aproximadamente, o formato da corda. Considera f(x) uma sua restrição, a vermelho, que tem o vértice no ponto $V(0,-3)$, intercetando o eixo das abcissas nos pontos $A(-3,0)$ e $B(3,0)$ com $x \in [-3,3]$.



2.1. *Representa, num referencial cartesiano, as funções* $p(x) = \frac{1}{4}f(x)$ e $K(x) = 2f(x)$.

2.2. Indica o domínio e contradomínio das funções f, p e k, compara-os.

2.3. Determina as expressões analíticas de p e k.

Resolução/Conclusão:

Designemos por $f(x)$ o segmento de reta abaixo representado com a cor vermelha.
Este segmento passa nos pontos $(0; 2{,}8)$ e $(-4{,}0)$, estando o seu domínio definido no intervalo [-4,0].

1.1. Representa, num referencial cartesiano, as $funções$ $u(x) = f(-x)$ e $v(x) = -f(x)$.

1.2. Indica o domínio e contradomínio das funções f, u e v e compara-os.

1.3. Determina as expressões analíticas de u e v.

Resolução/Conclusão:

Contrações/Dilatações **Verticais**

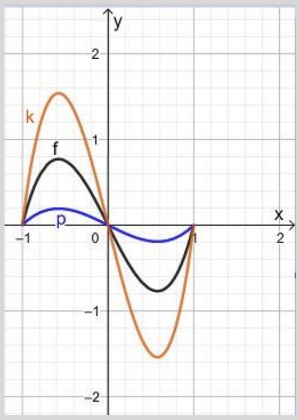
$f(x) = 2x^3 - 2x, \quad (-1 \leq x \leq 1)$

$p(x) = \frac{1}{4} f(x)$

$\rightarrow \frac{1}{4} \text{If}(-1 \leq x \leq 1, 2x^3 - 2x)$

$k(x) = 2 f(x)$

$\rightarrow 2 \text{ If}(-1 \leq x \leq 1, 2x^3 - 2x)$



	$f(x),\ D_f = [m,n],\ D'_f = [p,q]$				
	Expressão analítica	*Domínio*	*Contradomínio*	*Ponto Genérico*	*Observações*
Contração vertical $0 < a < 1$	$a\,f(x)$	$[m,n]$	$[ap,aq]$	$P(x,y)$ *passa a* $P'(x,ay)$	*"Contradomínio + contraído"*
Dilatação vertical $a > 1$	$a\,f(x)$	$[m,n]$	$[ap,aq]$	$P(x,y)$ *passa a* $P'(x,ay)$	*"Contradomínio + dilatado"*

No plano munido de um referencial ortogonal, dada uma função real de variável real f e um número real a, o gráfico da função g definida por $g(x) = af(x)$ *e* $D_g = D_f$ *é a imagem do gráfico de f por:*

- *uma* ***contração vertical*** *de coeficiente a, se 0<a<1;*
- *uma* ***dilatação vertical*** *de coeficiente a, se a>1.*

Reflexões em relação aos eixos

$f(x) = x + 2, \quad (-2 \leq x \leq 0)$

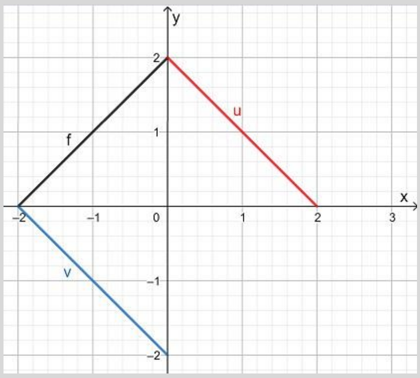
$u(x) = f(-x)$

$\rightarrow \; -x + 2, \quad (-2 \leq -x \leq 0)$

$v(x) = -f(x)$

$\rightarrow \; -\text{If}(-2 \leq x \leq 0, x + 2)$

+ Input...



		$f(x),\ D_f = [m,n],\ D'_f = [p,q]$				
		Expressão analítica	*Domínio*	*Contradomínio*	*Ponto Genérico*	*Observações*
Reflexão	*Axial eixo Ox*	$-f(x)$	$[m,n]$	$[-q,-p]$	$P(x,y)$ *passa a* $P'(x,-y)$	*"Espelho água"*
	Axial eixo Oy	$f(-x)$	$[-n,-m]$	$[p,q]$	$P(x,y)$ *passa a* $P'(-x,y)$	*"Espelho vidro"*

No plano munido de um referencial ortogonal, dada uma função real de variável real f, as funções g e h definidas por $g(x) = -f(x)$ *e* $h(x) = f(-x)$ *são tais que:*

- $D_g = D_f$ *e o gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela reflexão de eixo Ox;*
- $D_h = \{-x : x \in D_f\}$ *e o gráfico de h é a imagem do gráfico de f pela reflexão de eixo Oy.*

Apêndice 4: Planificação e Materiais da aula 4

Turma: 10.º E1

Data: 4 abril 2022

Duração: 50 minutos

Horário: 12.00-12:50

I. Sumário

- Realização de uma ficha formativa.

II. Alguns conhecimentos e capacidades prévios:

- Adquiridos nas aulas (sessões) anteriores.

III. Competências a desenvolver

Programas e Metas curriculares

- Conhecimentos de factos, de conceitos e de procedimentos, nomeadamente, no uso de ferramentas para aumento de eficiência e precisão.
- Raciocínio matemático, por análise de um conjunto de situações particulares, nomeadamente pela exploração das potencialidades dos recursos tecnológicos.
- Comunicação matemática, incentivando os alunos a expor as suas ideias de modo claro, conciso e coerente, a comentar as afirmações dos seus colegas e do professor e a colocar as suas dúvidas. Devem também ser incentivados a redigir convenientemente as respostas, explicando de forma adequada o raciocínio e apresentando as suas conclusões de forma clara, evitando uma utilização inapropriada de símbolos matemáticos como abreviaturas estenográficas.

Aprendizagens Essenciais

i. *Conhecimentos, capacidades e atitudes*

- Reconhecer simetrias dos gráficos das funções pares e das funções ímpares.

- Reconhecer e interpretar graficamente a relação entre o gráfico de uma função e os gráficos das funções $af(x)$, $f(ax), f(x+c)$ e $f(x)+c$, com a e c números reais e a não nulo.

ii. *Práticas essenciais de aprendizagens*

- Comunicar, utilizando linguagem matemática, oralmente e por escrito, para descrever, explicar e justificar procedimentos, raciocínios e conclusões.
- Avaliar o próprio trabalho para identificar progressos, lacunas e dificuldades na sua aprendizagem

IV. Metodologia

- Realização individual da Ficha Formativa 2.

V. Descrição da aula:

- Chegada dos alunos e ocupação do respetivo lugar.
- Apresentação da Ficha Formativa 2.
- Resolução de uma Ficha Formativa 2.

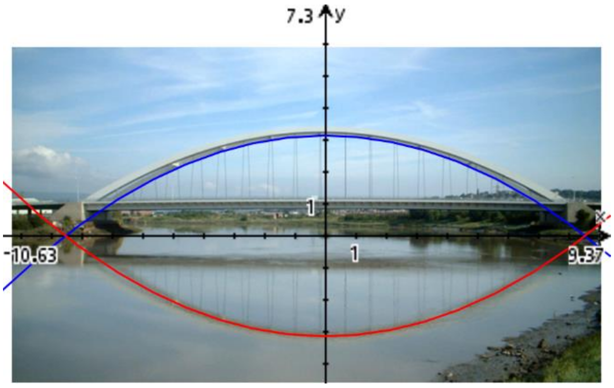
VI. Material didático

- Material de escrita e de desenho (papel, esferográfica, lápis e borracha).
- Ficha Formativa 2.
- Dual *smartphone* – *GeoGebra*

AEML

Ficha Formativa 2 | 10.º Ano

4.04.2022 Bom Trabalho!

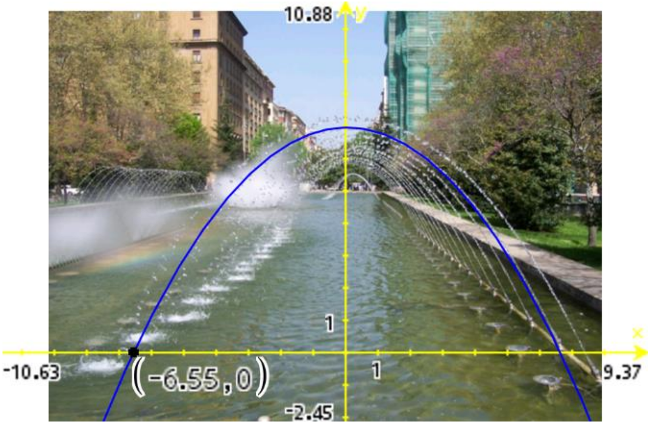


1. Na figura ao lado, está representada a ponte Usk, localizada no Canadá. Para além disso está também representada a sua sombra no rio com o mesmo nome. Uma das funções tem equação: $g(x) = 0{,}042\,x^2 - 3$

1.1. Identifica as funções representadas e as respetivas expressões analíticas.

1.2. Para cada uma delas, identifica vértice, zeros, domínio e contradomínio.

1.3. Imagina que a ponte, é constituída por dois arcos (de cor azul) consecutivos e que a origem do sistema de eixos desloca-se para o zero positivo da referida parábola. Determina, no arco acrescentado, o seu vértice, zeros, domínio, contradomínio.



2. Seja a função que representa a trajetória de um repuxo de água que atinge a altura máxima no vértice $V(0{,}7)$ *e tem zeros em* $A(-6{,}55;0)$ *e* $B(6{,}55;0)$.

2.1. Representa, num referencial cartesiano, as funções, $g(x) = f(1/2\,x)$, $h(x) = f(3x)$ *e* $p(x) = f(x+2) + 1$.

2.2. Indica o domínio e contradomínio das funções f, g, h e p e compara-os.

2.3. Determina as expressões analíticas de g, h e p.

Anexos

Anexo 1: Imagens utilizadas nas fichas formativas e tarefas

Figura 39-Imagem das Fichas Formativas

http://joaquinsevilla.blogspot.com/2011/05/parabolas-pamplonesas.html

Figura 40-Imagem das fichas formativas

https://www.steelconstruction.info/images/thumb/e/e6/R7_Fig33.png/800px-R7_Fig33.png

Figura 41-Imagem da Tarefa 1

http://agrega.juntadeandalucia.es/repositorio/07062011/d1/es-an_2011060713_9110157/ODE-5cd4a03e-2e2c-3831-9477-f04725017911/index.html

Figura 42-Imagem da Tarefa 2

https://www.istockphoto.com/br/vetor/tr%C3%AAs-garotas-pulando-corda-gm166007834-22742344

Figura 43-Imagem da Tarefa 3

https://media.istockphoto.com/photos/roof-shingles-with-garret-house-on-top-of-the-house-among-a-lot-of-picture-id1271912376?b=1&k=20&m=1271912376&s=170667a&w=0&h=yQQEv_BOPul-1pJkV9Nf5ymYmcmEqzLMLuWSTBYc5GM=