Universidade de
Aveiro

2022

JOÃO ÁLVARO
CUNHA DAS NEVES

IMPACTO DE PRÁTICAS DE AVALIAÇÃO FORMATIVA NA QUALIDADE DO SUCESSO DOS ALUNOS DE MATEMÁTICA A NO ENSINO SECUNDÁRIO

Universidade de Aveiro

2022

JOÃO ÁLVARO CUNHA DAS NEVES

IMPACTO DE PRÁTICAS DE AVALIAÇÃO FORMATIVA NA QUALIDADE DO SUCESSO DOS ALUNOS DE MATEMÁTICA A NO ENSINO SECUNDÁRIO

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para Professores (2.º ciclo), realizada sob a orientação científica da Doutora Maria Paula de Sousa Oliveira, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

Dedico este trabalho à minha mãe e ao meu pai que apesar de já não estarem entre nós, foram pedras fundamentais na pessoa e no profissional que sou hoje. Tenho certeza de que estão muito orgulhosos por mais esta etapa da minha vida profissional.

“Qualquer tarefa deve permitir que os alunos aprendam,

os professores ensinem e ambos avaliem”

(Domingos Fernandes, 2020)

o júri

presidente

JOÃO PEDRO ANTUNES FERREIRA DA CRUZ,
Professor Auxiliar do Departamento de Matemática; Universidade de Aveiro

MARIA CRISTINA SOUTO DE MIRANDA,
Professora Coordenadora do Instituto Superior de Contabilidade e Administração, Universidade de Aveiro

MARIA PAULA DE SOUSA OLIVEIRA,
Professora Auxiliar do Departamento de Matemática; Universidade de Aveiro

Agradecimentos

Um trabalho de dissertação, apesar de ser um processo de investigação individual, reúne contributos de várias pessoas, que de alguma forma ajudaram a encontrar o melhor caminho em cada fase do mesmo.

Em primeiro lugar não posso deixar de agradecer à minha orientadora, professora Paula de Sousa Oliveira, por sempre ter acreditado em mim, pela sua paciência, pela sua orientação pautada por um elevado rigor ciêntifico e um empenho inexcedível. Muito obrigado por me ter corrigido sempre que necessário sem nunca me desmotivar.

À minha mulher, Inês, pelo incentivo, compreensão e apoio incondicional ao longo de todo o trabalho. Agradeço toda a admiração e por acreditar que sou sempre capaz de fazer mais e melhor em cada etapa da minha vida.

Às minhas filhas, Vitória e Beatriz, pela motivação e entusiamo que manifestaram desde o primeiro momento. Agradeço admiração, o carinho e amor que exteriorizaram durante todo este processo.

Às minhas colegas e amigas, Arminda Magalhães e Ana Rosa Furtado, pelo estímulo intelectual e emocional que contribuíram para a concretização desta dissertação. Agradeço todo o companheirismo, a sabedoria que partilham naturalmente, o trabalho que desenvolvem e que fazem de mim um profissional cada vez melhor.

Palavras-chave

Avaliação formativa, Avaliação sumativa, Rubricas de Avaliação, Ensino, Aprendizagem, Matemática, Limites de Funções Reais de Variável Real.

Resumo

Esta dissertação tem como objetivo a criação e implementação de uma sequência didática assente nos princípios da avaliação pedagógica.

Na conceção e elaboração desta sequência didática, foi dado um enfoque particular à avaliação pedagógica, uma vez que ela está no cerne da conceptualização deste trabalho de investigação-ação. A sequência didática, ao ter de ser concretizada no contexto escolar, numa sala de aula em interação com os alunos, não pode deixar de ter em conta um domínio do currículo. O tema escolhido foi Funções Reais de Variável Real, lecionado no 12.º ano de escolaridade, abordando o conceito de limite de uma função e suas aplicações, nomeadamente: continuidade; Teorema de Bolzano-Cauchy e assíntotas ao gráfico de uma função.

Foram selecionadas várias técnicas de recolha de informação com finalidade formativa para elevar o rendimento dos alunos, com base na ideia de que estes aprendem mais quando compreendem os objetivos pretendidos para a sua aprendizagem, onde estão em relação a esses objetivos e como podem alcançá-los. As técnicas: Questão-aula com feedback descritivo, Código de correção, Pausa de 3 minutos/Ponto mais importante e Plano Individual de Trabalho, permitiram, quer ao professor quer aos alunos, aumentar a qualidade de *feedback* no que diz respeito ao ensino e à aprendizagem.

No capítulo VI desta dissertação apresenta-se uma reflexão do impacto da avaliação, tendo em conta a perspetiva do professor e dos alunos. Foram analisadas as técnicas de recolha de informação utilizadas nas dimensões formativa e sumativa da avaliação, bem como as técnicas de feedback implementadas em cada uma dessas duas dimensões, refletindo sobre a sua eficácia, aferida pelo impacto das mesmas nas aprendizagens dos alunos, mas também, a montante, na motivação e empenho dos mesmos e no seu contributo para a autorregulação dos alunos, concretizando os objetivos da avaliação como aprendizagem.

Este trabalho foi aplicado e concretizado na Escola Secundária Jerónimo Emiliano de Andrade, em três turmas do 12º ano do curso Cientifico-Humanísticos: duas de Ciências e Tecnologias e numa turma de Ciências Socioeconómicas. Toda a atividade foi desenvolvida durante o 1º semestre do ano letivo de 2021/22 em contexto de pandemia COVID 19 com as restrições definidas pela DGS.

O principal propósito desta dissertação é pensar, refletir e melhorar as minhas práticas pedagógicas de ensino e de avaliação para que os meus alunos aprendam mais e melhor.

Keywords

Formative assessment, Teaching, Mathematics, Education, Limits and Continuity, Real Functions, Summative assessment.

Abstract

This dissertation aims to create and implement a didactic sequence based on the principles of pedagogical assessment.

In the design and elaboration of this didactic sequence, a particular focus was given to pedagogical assessment since it is the conceptualization core of this research-action work. The implementation of a didactic sequence in a classroom environment and in interaction with students has to be in accordance to a domain of the school curriculum. The domain chosen was real functions of one real variable, which is lectured on the 12th grade of secondary school. The specific topic was the concept of limit of a function and its applications, namely: continuity; Bolzano-Cauchy’s theorem and asymptotes of a function.
Several techniques for collecting information were selected for training purposes to increase students' performance, based on the idea that they learn more when they understand the learning objectives, where they are regarding these objectives and how to achieve them. The techniques used were the question-lesson with descriptive feedback, the correction code, the 3-minutes break/Most important point and the Individual Work Plan. These four techniques allowed both, the teacher, and the students, to increase the quality of feedback regarding teaching and learning.

Chapter VI of this dissertation presents a reflection on the impact of assessment, from the student's and from the teacher's perspective. In this chapter we analyze the information collection techniques used in the formative and summative dimensions of assessment, as well as the feedback techniques implemented in each of these two dimensions, reflecting on their effectiveness, gauged by their impact on students' learning and in their motivation and commitment. The contribution of these techniques to students' self-regulation, achieving the objectives of assessment as learning is also discussed here.

This work was applied and developed at the Jerónimo Emiliano de Andrade Secondary School, in three 12^{th} grade classes of the Scientific-Humanistic course: two of Science and Technologies and one of Socio-Economic Sciences. The entire activity was carried out during the 1st semester of the 2021/22 school year in the context of the COVID 19 pandemic with the restrictions defined by the portuguese Health General Direction.

The main purpose of this dissertation is to think, reflect and improve my pedagogical teaching and assessment practices so that my students learn more and better.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

ANEXOS

I – INTRODUÇÃO

Esta dissertação de mestrado, sobre o tema “Impacto de práticas de avaliação formativa na qualidade do sucesso dos alunos de Matemática A no Ensino Secundário”, tem como objetivo a criação e implementação de uma sequência didática assente nos princípios da avaliação pedagógica. Implementar um processo de avaliação pedagógica que ajude os alunos a aprender mais e, sobretudo, melhor, assumiu-se como o objetivo central do trabalho desenvolvido. É a partir da materialização, da integração de conhecimento, que se torna possível desenvolver práticas de avaliação pedagógica que tenham real sentido e que envolvam ativamente todos e cada um dos participantes, na concretização dos seus fundamentais desígnios (distribuição sistemática de *feedback* de elevada qualidade, envolvimento dos alunos nos processos de avaliação, diversificação dos processos de recolha de informação).

Na conceção e elaboração da sequência, foi dado um enfoque particular à avaliação pedagógica, uma vez que esta está fortemente relacionada com o ensino, a aprendizagem e, consequentemente, com o currículo da disciplina de Matemática. Assim, o principal propósito desta dissertação é pensar, refletir e melhorar as minhas práticas pedagógicas de ensino e de avaliação para que os meus alunos aprendam mais e melhor. Não se trata de um relato de boas práticas acerca de como se faz uma boa avaliação. É, antes, um documento em que se discutem questões de natureza conceptual e académica associadas a questões de natureza prática que me interessam particularmente como professor, já que um docente é, antes de mais, um profissional do ensino e da aprendizagem, em constante atualização. E, neste sentido, não pode deixar de ser um texto de natureza reflexiva de vinte e seis anos de trabalho, dedicação e envolvimento em processos de melhoria das práticas pedagógicas de ensino e de avaliação e das aprendizagens dos alunos. Apesar disso, reconheço que persistem dificuldades com a integração da avaliação formativa nas práticas pedagógicas, apesar dos seus reconhecidos e comprovados benefícios para as aprendizagens dos alunos. Estas dificuldades estão relacionadas com a complexidade que essa integração envolve, com a resistência à implementação de práticas que não conhecemos na nossa experiência enquanto alunos e na, muitas vezes, inconsciente replicação desta experiência na nossa atividade docente. O caminho para uma avaliação mais pedagógica passará pela promoção de uma vertente mais reflexiva nas práticas de avaliação que aplicamos e por compreender que a complexidade da avaliação decorre do facto de esta estar fortemente relacionada com o ensino, a aprendizagem e, consequentemente, com o currículo e a pedagogia. Assim, torna-se importante enquadrar e discutir, a partir de uma experiência de implementação de um percurso pedagógico, questões consideradas essenciais para desenvolver práticas de avaliação mais orientadas para a melhoria das aprendizagens dos alunos.

Este texto está organizado em oito capítulos, incluindo o capítulo presente, o da *Introdução*. No capítulo dois – *Fundamentação científica* **–** é apresentada uma sequência de conteúdos desenvolvida com alunos de 12º ano de escolaridade. Esta sequência envolve as funções reais de variável real: limites, continuidade e assíntotas. São apresentadas as definições dos conceitos, teoremas, demonstrações e alguns exemplos práticos de aplicação dos conteúdos. Na verdade, o desenvolvimento da avaliação pedagógica está muito relacionado com a seleção criteriosa de uma diversidade de tarefas e propostas de trabalho através das quais seja possível aprender, ensinar e avaliar tendo em conta o currículo nacional, nomeadamente as Aprendizagens Essenciais (AE) (Ministério da Educação, 2018) e o Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (PASEO) (Ministério da Educação, 2017). É no contexto dos temas da disciplina que podemos melhorar as nossas práticas de ensino e de aprendizagem, pois são elas que acabam por determinar a natureza das avaliações. No capítulo 3 – *Os desafios da avaliação pedagógica nos referenciais curriculares em vigor* – apresentam-se os referenciais para o desenvolvimento curricular, bem como o quadro normativo que regulamenta todo o sistema de avaliação e as principais modalidades de avaliação em todo o Ensino Secundário. No capítulo quatro – *Fundamentação da avaliação pedagógica* – discutem-se conceitos basilares do domínio da avaliação, nomeadamente alguns princípios da avaliação, a avaliação formativa e avaliação sumativa, sublinhando a sua natureza eminentemente pedagógica, o *feedback dado* através da avaliação formativa e da avaliação sumativa, a definição de critérios de avaliação relacionados com os perfis de aprendizagens específicas e rubricas de avaliação de tarefa. No capítulo cinco – *Construção e implementação de uma sequência didática assente nos princípios da avaliação pedagógica* –procede-se a uma breve caracterização do contexto e das turmas onde foi aplicada a sequência didática. A partir dos princípios e das orientações decorrentes da Avaliação Pedagógica, produziram-se alguns documentos com orientações práticas e concretas no domínio dos critérios de avaliação, das técnicas de recolha de informação, do *feedback,* da autoavaliação e das práticas de classificação. No capítulo seis - *Impacto da avaliação pedagógica na aprendizagem dos alunos do ensino secundário* – são destacadas e relacionadas as ideias que, na minha perspetiva, podem contribuir de forma significativa para a transformação e melhoria das práticas de ensino e de avaliação e, consequentemente, nas aprendizagens de todos os alunos. O capítulo sete é dedicado às conclusões. No capítulo oito – *Bibliografia* – são apresentadas as referências bibliográficas que possibilitaram a realização deste trabalho. O trabalho termina com os *Anexos onde* são apresentados todos os anexos referenciados neste trabalho.

II – F UNDAMENTAÇÃO CIENTÍFICA

1. Funções reais de variável real: limites, continuidade e assíntotas

A fundamentação apresentada de seguida teve em conta a informação consultada nos documentos curriculares da disciplina como Aprendizagens Essenciais (Ministério da Educação, 2018), Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (Ministério da Educação, 2017), Programa e Metas Curriculares (Ministério de Educação e Ciência, 2013) e Aprendizagens essenciais-articulação com o perfil dos alunos (Ministério da Educação, 2018), em alguns manuais escolares de Matemática A como Novo Espaço 11 (Costa & Rodrigues, 2016), Máximo 11 (Neves, Guerreiro, & Silva, 2016), Expoente 11 (Gomes & Raposo, 2016) e M∀T 11 (Viegas & Valente, 2016) e os livros de Análise Matemática (Sousa Pinto, 2010) e (Almeida, et al., 2010).

Ao longo deste capítulo são apresentados alguns exemplos que ajudam alunos do Ensino Secundário a entender e ilustrar os conceitos estudados.

1.1 Limite de funções reais de variável real

O conceito de limite de uma função num ponto assume um papel relevante na Matemática. No programa de Matemática A do Ensino Secundário, o tema Sucessões é abordado previamente ao estudo do limite de uma função num ponto, daí que se recorra à definição de limite segundo Heine.

O que se pretende neste trabalho é analisar o comportamento de uma função na vizinhança de um ponto aderente ao domínio (esse ponto pode não pertencer ao domínio). Comecemos pelo conceito de ponto aderente a um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$.

1.1.1 Ponto aderente a um conjunto

Definição 1: Dado um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ um número real a designa-se por **ponto aderente a A** quando existe uma sucessão de elementos de A que tende para a, ou seja, quando existe uma sucessão (x_n), tal que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_n \in A\ \wedge \lim_{n \to +\infty} x_n = a.$$

Decorre imediatamente da definição que qualquer elemento de A é ponto aderente a A. Com efeito, dado $a \in A$, a sucessão constante com o valor de a converge para a e, como é obvio, todos os seus termos pertencem a A.

Quanto aos pontos que não pertencem a A, poderá dar-se o caso de serem ou não pontos aderentes a A.

Exemplo 1:

Seja $A =]2\,,7]$. Todos os números reais maiores do que 2 e menores ou iguais a 7 são aderentes a A uma vez que lhe pertencem.

O número 2, que não pertence a A , será aderente a A se existir uma sucessão de elementos de A que tenha limite 2.

Ora, a sucessão (u_n) definida por $u_n = 2 + \frac{1}{n}$ tende para 2 e todos os seus termos pertencem a A, portanto, 2 é aderente a A.

Mostrar que pontos que não estejam em $]2\,,7]$ não são pontos aderentes a A não está no âmbito do programa de Matemática A, contudo para ilustrar este facto, usa-se um exemplo.

Será que existem outros pontos que não pertencem a A mas que são aderentes a A?

Consideremos, por exemplo, o número 7,1. Será que é aderente a A?

Facilmente se reconhece que no intervalo $]7{,}09\,;7{,}11[$, ou seja, na vizinhança de raio $0{,}01$ de 7,1, não existe qualquer elemento de A com limite igual a 7,1 e, portanto, 7,1 não é aderente A.

A aderência de A é $[2\,,7]$.

Exemplo 2:

Seja $B = \{1\,,2,3\}$.

O conjunto dos pontos aderentes a B é $\{1\,,2\,,3\}$, ou seja, a aderência de B é o próprio conjunto B.

No seguinte exemplo, provamos a não existência de outros pontos para além dos termos da sucessão e do seu limite, que sejam aderentes a E, pelo facto de se tratar de sucessões, assunto abordado no 11º ano.

Exemplo 3:

Seja $E = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. O conjunto E é o conjunto de todos os termos da sucessão (u_n) definida por $u_n = \frac{1}{n}$. Trata-se de um conjunto com um número infinito de elementos, mas que não é um intervalo.

Todos os elementos de E são aderentes a E.

Dado que a sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$ tende para 0 e todos os termos da sucessão pertencem a E, concluímos que 0, muito embora não pertença a E, também é aderente a E.

Justifiquemos que não existe mais nenhum ponto aderente a E.

De facto, seja b um ponto não pertencente a E e diferente de 0.

- Se $b > 1$, designando por δ a distância de b a 1, na vizinhança de centro em b e raio δ não existe qualquer ponto de E.
- Se $b < 0$, designando por δ a distância de b a 0, na vizinhança de centro em b e raio δ não existe qualquer ponto de E.
- Se $0 < b < 1$ e $b \neq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$, existem dois termos consecutivos da sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$, designemos, $\frac{1}{p}$ e $\frac{1}{p+1}$, tais que $\frac{1}{p+1} < b < \frac{1}{p}$. Designando por δ a menor das distâncias de b a estes dois termos, na vizinhança de centro b e raio δ não há nenhum ponto de E.

Portanto, a aderência de E é $E \cup \{0\}$.

1.1.2 Definição de limite de uma função (segundo Heine)

Definição 2: Dados uma função real de variável real f e um ponto a aderente ao domínio de f, o ponto $b \in \mathbb{R}$ designa-se por **limite de $f(x)$ quando x tende para a**, quando para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f convergente para a, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Simbolicamente escreve-se $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

Observação: Esta definição de limite está de acordo com o Programa de Matemática A para o Ensino Secundário.

Para mostrar que uma função f não admite limite num ponto a aderente ao seu domínio, basta mostrar que existem duas sucessões distintas (x_n) e (w_n) de elementos de D_f convergentes para a, tais que $\lim f(x_n) \neq \lim f(w_n)$. Excluem-se aqui as situações de limites infinitos.

Exemplo 4:

A função real de variável real f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & se\ x \geq 1 \\ x+1 & se\ x < 1 \end{cases}$$

tal como sugere a sua representação gráfica na Figura 1, não tem limite em 1.

Efetivamente, considerando as sucessões (x_n) e (w_n) de termos gerais $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ e $w_n = 1 + \frac{1}{n}$, uma vez que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $x_n < 1$ *e* $w_n > 1$, obtém-se:

$$\lim f(x_n) = \lim\left(1 - \frac{1}{n} + 1\right) = 2$$

e

$$\lim f(w_n) = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \left(\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^2 = 1^2 = 1$$

Portanto, f não tem limite no ponto 1.

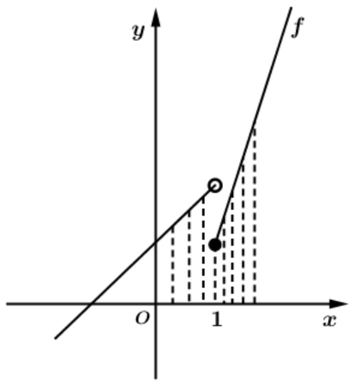


Figura 1 – Limite segundo Heine

Teorema 1: O limite de $f(x)$ quando x tende para a, quando existe, é único.

Esta definição baseia-se no conceito, já estudado, de limite de uma sucessão e, como vimos, uma sucessão convergente admite um único limite.

Com efeito, consideremos uma qualquer sucessão de valores de x a tender para a, por valores do domínio de f. O limite de $f(x_n)$, quando x_n tende para a, se existir, é único, já que se trata de uma sucessão.

Então, o limite da função, quando x tende para a, que pela definição de limite segundo Heine é igual a $\lim\limits_{n} f(x_n)$, também será único.

Definição 3: Dados uma função real de variável real f e um ponto a aderente ao domínio de f, diz-se que o **limite de $f(x)$ quando x tende para a é** $+\infty$ (respetivamente, $-\infty$), e representa-se por $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ (respetivamente, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$), quando para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f convergente para a, $\lim f(x_n) = +\infty$ (respetivamente, $\lim f(x_n) = -\infty$).

Exemplo 5:

Consideremos a função f real de variável real definida por:

$$f(x) = \frac{2x+4}{(x+1)^2}$$

Utilizando a definição de limite provamos que:

a) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = +\infty$.

Seja (x_n) uma sucessão de termos diferentes de -1, convergente para -1. Utilizando a álgebra de limites de sucessões, temos:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} f(x_n) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2x_n+4}{(x_n+1)^2} \\ &= \frac{2\lim\limits_{n\to+\infty} x_n + 4}{\left(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n + 1\right)^2} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Logo, $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 3$.

Considerando uma sucessão (w_n) convergente para 1, tal que $\forall\, n \in \mathbb{N}, w_n \neq -1$, ou seja, todos os termos da sucessão (w_n) estão no domínio de f, temos:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} f(w_n) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2w_n+4}{(w_n+1)^2} \\ &= \frac{2\lim\limits_{n\to+\infty} w_n + 4}{\left(\lim\limits_{n\to+\infty} w_n + 1\right)^2} \\ &= \frac{6}{2} \\ &= 3\end{aligned}$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 3$.

1.1.3 Limites laterais

Por vezes uma função tem comportamentos distintos, à esquerda e à direita de um ponto aderente ao seu domínio, daí que seja importante definir o conceito de limite lateral.

Definição 4: Dados uma função real de variável real f e um ponto a aderente a D_f e

- seja $]b, a[\subseteq D_f$. $l_e \in \mathbb{R}$ é o **limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores inferiores a a** e designa-se por **limite de $f(x)$ à esquerda de a** quando

$$l_e = \lim_{x\to a} f_{|]b,a[}(x)$$ [1]

- seja $]a, c[\subseteq D_f$. $l_d \in \mathbb{R}$ é o **limite de $f(x)$ quando x tende para a ores superiores a a** e designa-se por **limite de $f(x)$ à direita de a** quando

$$l_d = \lim_{x\to a} f_{|]a,d[}(x)$$ [2]

---

[1] $f_{|A}$ significa f restrição ao conjunto A.
[2] $f_{|A}$ significa f restrição ao conjunto A.

Escreve-se $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l_e$ e $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l_d$

Estas definições estendem-se de igual modo aos casos em que os limites l_e e l_d são $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemplo 6:

Consideremos a função real de variável real f definida em $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ por $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

A representação gráfica desta função é:

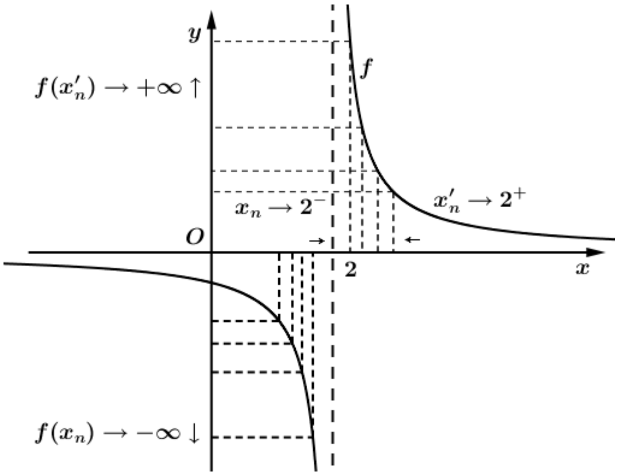


Figura 2 – Exemplo de limite infinito

Observando a representação gráfica da função f, podemos constatar que:

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$, visto que qualquer sucessão (x_n) em $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ a tender para 2, por valores inferiores a 2, corresponde uma sucessão de valores $f(x_n)$ a tender para $-\infty$, isto é, $\lim\limits_{x\to 2} f|_{]-\infty\,,2[}(x) = -\infty$.

- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$, visto que qualquer sucessão (x_n) em $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ a tender para 2, por valores superiores a 2, corresponde uma sucessão de valores $f(x_n)$ a tender para $+\infty$, isto é, $\lim\limits_{x\to 2} f|_{]2\,,+\infty[}(x) = +\infty$.

Teorema 2: Dados uma função real de variável real f e um ponto a aderente ao respetivo domínio, D_f, com $a \notin D_f$, se os limites $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existem e são iguais, então, existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e, nesse caso,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x).$$

A implicação recíproca é imediata, já que, se existe $\lim_{x \to a} f(x)$, e esse limite é $l \in \mathbb{R}$, qualquer que seja a sucessão (x_n) de pontos do domínio de f, a correspondente sucessão das imagens, $f(x_n)$ tende para l.

Para provar o teorema 2, suponhamos que os limites laterais são iguais (podendo ser infinitos), mas que não existe o limite $\lim_{x \to a} f(x)$.

Seja $l = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$.

Como não existe $\lim_{x \to a} f(x)$, podemos afirmar que existe uma sucessão (x_n), com $x_n \in D_f \setminus \{a\}$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, convergente para a, mas tal que $(f(x_n))$ não converge para l. Consideremos desta sucessão, duas subsucessões:

- $\left(x_{n_1}\right)$ tal que $x_{n_1} < a, \forall n_1 \in \mathbb{N}$
- $\left(x_{n_2}\right)$ tal que $x_{n_2} > a, \forall n_2 \in \mathbb{N}$

Como os limites laterais são iguais a l temos

$$\lim_{n_1 \to +\infty} f\left(x_{n_1}\right) = l = \lim_{n_2 \to +\infty} f\left(x_{n_2}\right)$$

Como

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \left\{x_{n_1} : n_1 \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{x_{n_2} : n_2 \in \mathbb{N}\right\}$$

resulta que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$, contrariando a hipótese.

Corolário 1: Dados uma função real de variável real f e um ponto $a \in D_f$ e se os limites $\lim_{x \to a^-} f(x)$ e $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existem e são iguais a $f(a)$[3], então, existe $\lim_{x \to a} f(x)$ e, nesse caso,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Vejamos alguns exemplos que ilustram a inexistência e a existência de limite de uma função num ponto.

[3] Neste caso a função diz-se contínua em a.

Exemplo 7:

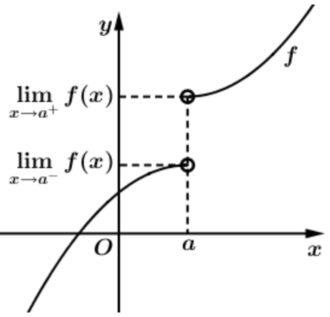


Figura 3 – Inexistência de limite de uma função, num ponto não pertencente ao domínio

- $a \notin D_f$
- $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

e, portanto, não existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

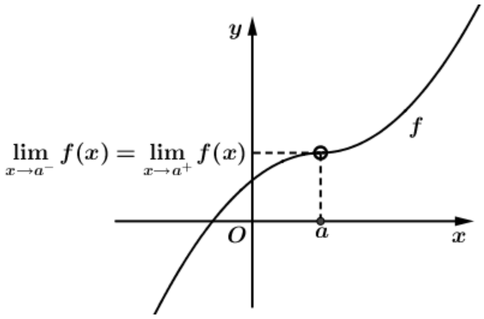


Figura 4 – Existência de limite de uma função, num ponto não pertencente ao domínio

- $a \notin D_f$
- $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

Existe o $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

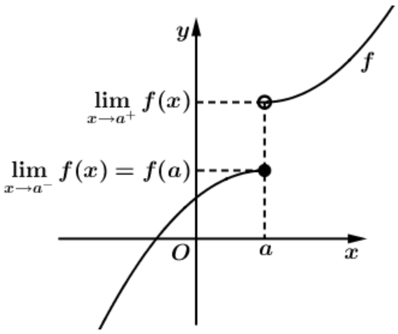


Figura 5 – Inexistência de limite de uma função, num ponto pertencente ao domínio I

- $a \in D_f$
- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) \neq f(a)$

E, apesar de $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$, não existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

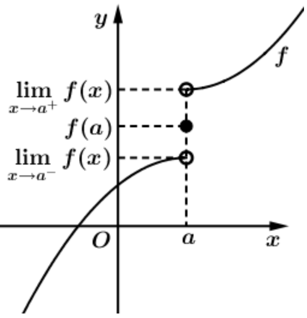


Figura 6 – Inexistência de limite de uma função, num ponto pertencente ao domínio II

- $a \in D_f$
- $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq f(a)$ e

  $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) \neq f(a)$

logo, não existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, porque tomando a sucessão constante $y_n = a$, o limite dessa sucessão será $f(a)$.

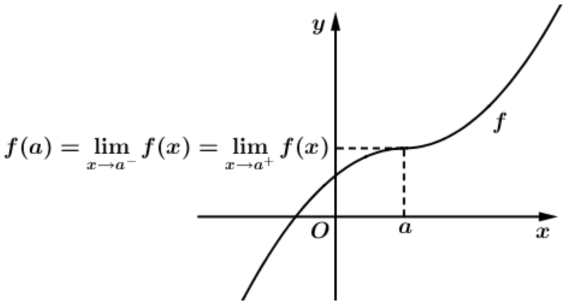


Figura 7 – Existência de limite de uma função, num ponto pertencente ao domínio

- $a \in D_f$
- $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

Existe $\lim_{x\to a} f(x)$ e

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a^-} f(x)\\ &= \lim_{x\to a^+} f(x)\\ &= f(a)\end{aligned}$$

Neste caso a função diz-se contínua em a

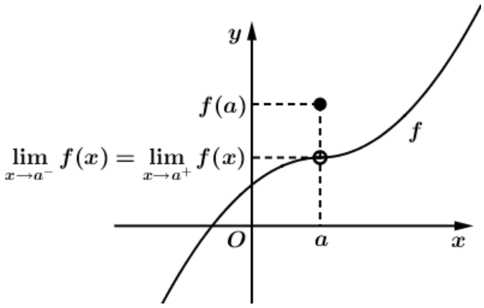


Figura 8 – Inexistência de limite de uma função, num ponto pertencente ao domínio

- $a \in D_f$
- $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$
- $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq f(a)$ e

  $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq f(a)$

logo, não existe $\lim_{x\to a} f(x)$.

Definição 5: Dada uma função real de variável real f de domínio não majorado (respetivamente não minorado), diz-se que $b \in \mathbb{R}$ é o **limite de $f(x)$ quando x tende para** $+\infty$**,** (respetivamente, $-\infty$), e representa-se por $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x) = b}$ (respetivamente, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$), quando, para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f com limite $+\infty$ (respetivamente, $-\infty$), $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = b$ (respetivamente, $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = b$).

Exemplo 8:

Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por $f(x) = \frac{x-1}{x}$.

Calcular $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

Seja (u_n) uma qualquer sucessão de termos não nulos que tenda para $+\infty$.

$$\begin{aligned}\lim f(u_n) &= \lim \frac{u_n - 1}{u_n}\\ &= \lim\left(\frac{u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n}\right) =\end{aligned}$$

$$= \lim\left(1 - \frac{1}{u_n}\right)$$
$$= 1 - 0$$
$$= 1$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

1.1.4 Operações com limites de funções

Muitas funções reais resultam de operações aritméticas entre funções, ou como composição de funções. Os seguintes teoremas justificam o cálculo de limite nessas situações.

Teorema 3 (operações com limites): Sejam f e g funções reais de variável real $f: D_f \to \mathbb{R}$ e $g: D_g \to \mathbb{R}$, tais que

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = c$$

com b , $c \in \mathbb{R}$ e a ponto aderente dos respetivos domínios ou $-\infty$ ou $+\infty$ (caso o domínio seja um conjunto ilimitado inferior ou superiormente, respetivamente) então:

1. $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = b + c$;
2. $\lim\limits_{x \to a} (f \times g)(x) = b \times c$;
3. $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{b}{c}$ se $g(x) \neq 0$, para todo o $x \in D_g$ e $c \neq 0$;
4. $\lim\limits_{x \to a} (k \times f)(x) = kb$, $k \in \mathbb{R}$;
5. $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^r = b^r$, sendo $r \in \mathbb{Q}^+$ e $f(x) \geq 0$, para todo o $x \in D_f$;
6. $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^r = b^r$, sendo $r \in \mathbb{Q}$ e $f(x) > 0$, para todo o $x \in D_f$.

Nota: Todas as propriedades acima enunciadas são suscetíveis de serem alargadas ao caso de $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ serem infinitos, exceto se conduzirem a situações de indeterminação, nomeadamente, $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ ou $0 \times \infty$.

Demonstração: A título de exemplo, demonstramos a propriedade 3.

Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c \neq 0$, qualquer que seja a sucessão (x_n) cujos termos estão na interseção dos domínios de f e g (note-se que $g(x) \neq 0$, para todo o $x \in D_g$), tem-se $\lim f(x_n) = b$ e $\lim g(x_n) = c$.

Então,

$$\lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{b}{c}$$

e, portanto,

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{b}{c}$$

Teorema 4: Dados um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$, duas funções reais de variável real f e g de domínio D e um ponto a aderente a D, se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e g é limitada, então,

$$\lim_{x\to a}[f(x)\times g(x)] = 0.$$

Nota: Esta propriedade é ainda válida para os limites laterais e, também, sendo D um conjunto não limitado (superior ou inferiormente), quando x tende para $+\infty$ ou para $-\infty$.

Exemplo 9:

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$, pois a função seno é limitada, $-1 \leq \sin x \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, e $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$.

Exemplo 10:

$\lim_{x\to 2}\left[(x^2-4)\times\cos\left(\frac{1}{x-2}\right)\right] = 0$ porque $\lim_{x\to 2}(x^2-4) = 0$ e $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}, -1 \leq \cos\left(\frac{1}{x-2}\right) \leq 1$.

Teorema 5 (limite da função composta): Dadas duas funções reais de variável real, f e g , e um ponto a aderente a $D_{g\circ f}$, se $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to b} g(x) = c \in \mathbb{R}$, então

$$\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = c.$$

Demonstração:

Seja (x_n) uma sucessão de elementos de $D_{g\circ f}$ convergente para a; como $\lim_{x\to a} f(x) = b$, tem-se que $f(x_n)$ converge para b. Como $\lim_{x\to b} g(x) = c$, qualquer sucessão (y_n) de elementos de D_g convergente para b é tal que $\lim g(y_n) = c$, em particular, $\lim g\big(f(x_n)\big) = c$.

Portanto, para qualquer sucessão (x_n) de elementos de $D_{g\circ f}$ convergente para a, $\lim g\big(f(x_n)\big) = c$, ou seja:

$$\lim_{x\to a}(g\circ f)\,(x) = c.$$

Exemplo 11:

Na Figura 9 está parte da representação gráfica de uma função f.

Suponhamos que pretendíamos determinar $\lim_{x\to 2} f(3x+1)$.

Designemos $3x+1$ por y , isto é, consideremos a mudança de variável $3x+1 = y$.

Se $x \to 2$, então $3x+1 \to 7$, isto é, $y \to 7$.

Assim, $\lim_{x\to 2} f(3x+1) = \lim_{y\to 7} f(y) = 4$.

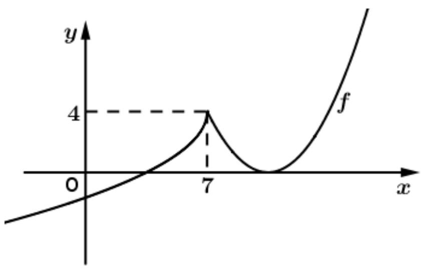


Figura 9 – Gráfico da função do Exemplo 11

Exemplo 12:

Usemos o limite da função composta para determinar $\lim_{x \to -2} |x^2 - 5|$.

Sejam $f(x) = |x|$ e $g(x) = x^2 - 5$.

Tem-se $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2 - 5) = |x^2 - 5|$.

Portanto, o que se pretende calcular é $\lim_{x \to -2} (f \circ g)\,(x)$.

Ora, $\lim_{x \to -2} g(x) = \lim_{x \to -2} (x^2 - 5) = (-2)^2 - 5 = -1$ e $\lim_{x \to -1} |x| = \lim_{x \to -1} (-x) = 1$.

Então, $\lim_{x \to -2} |x^2 - 5| = 1$.

1.2 CONTINUIDADE E PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES CONTÍNUAS

Intuitivamente, quando se fala de continuidade surge a ideia de não interrupção. Uma linha contínua é uma linha sem interrupções. Formalmente, a continuidade de uma função num ponto do seu domínio surge associada à noção de limite nesse ponto.

Observemos, desde já, que a definição de continuidade de uma função num ponto se refere apenas a pontos do domínio da função, enquanto a definição de limite de uma função num ponto se refere, não necessariamente a pontos do domínio, mas sim a pontos aderentes ao domínio da função.

Vimos também que para $a \in D_f$, decorrendo da definição de limite, se o $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, então é igual a $f(a)$.

1.2.1 Continuidade de uma função num ponto

Definição 5: Dada uma função real de variável real f e um ponto a do respetivo domínio, diz-se que a função f é **contínua em $\boldsymbol{a}$** quando $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.

Desta definição resulta imediatamente que, para que $f\colon D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ seja uma função contínua no ponto $a \in D_f$, a ponto interior a D_f, se devem verificar as seguintes condições:

1. que existam e sejam finitos os limites laterais $\lim_{x \to a^-} f(x)$ e $\lim_{x \to a^+} f(x)$;
2. que seja $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$;
3. que seja $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$.

Note-se que se $a \in D_f$ não for um ponto interior do domínio, um dos limites laterais não faz qualquer sentido. Por exemplo, se $D_f = [a\,, b]$ apenas se pode estudar a existência do $\lim_{x \to a^+} f(x)$. Neste caso, as condições **1.** a **3.** são reformuladas:

1. que exista e seja finito o limite $\lim_{x \to a^+} f(x)$;
2. $f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$.

Se alguma das condições **1**, **2** ou **3,** acima referidas falhar, então $a \in D_f$ diz-se um ponto de descontinuidade de f.

Exemplo 13:

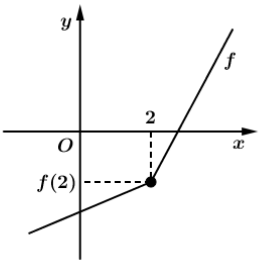


Figura 10 – Estudo da continuidade de uma função num ponto I

- f é contínua em 2 já que $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

  $D_f = \mathbb{R}$

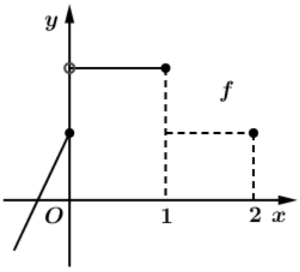


Figura 11 – Estudo da continuidade de uma função num ponto II

- f não é contínua em 0
- f é contínua em 1 e em 2

Repare-se que o domínio de f é $]-\infty, 1] \cup \{2\}$.

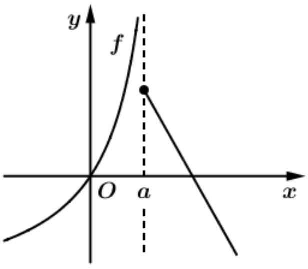


Figura 12 – Estudo da continuidade de uma função num ponto III

- A função f não é contínua no ponto a, já que $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$, valor diferente de $f(a)$.

  $D_f = \mathbb{R}$

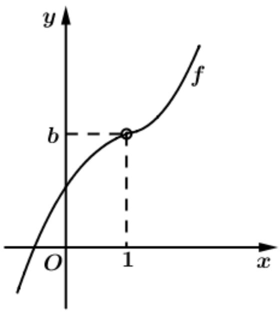


Figura 13 – Estudo da continuidade de uma função num ponto IV

- f não está definida no ponto 1. Logo, não faz sentido falar na continuidade de f neste ponto.

  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Dados uma função real de variável real f e um conjunto $A \subset D_f$, a função f diz-se **contínua em A**, quando é contínua em todos os pontos de A e simplesmente por **contínua** quando é contínua em todos os pontos de D_f.

Exemplo 14:

A função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 & se\ x \geq 1 \\ \\ x^3 & se\ x < 0 \end{cases}$$

é uma função contínua, uma vez que, para qualquer ponto $a \in D_f$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Note-se que $D_f =]-\infty\,, 0[\, \cup [1\,, +\infty[$;

$0 \notin D_f$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$.

1.2.2 Operações com funções contínuas

O teorema seguinte pode ser considerado um corolário do **Teorema 3 (operações com limites**):

Teorema 6: Sejam f e g duas funções reais de variável real $f: D_f \to \mathbb{R}$ e $g: D_g \to \mathbb{R}$ contínuas num ponto $a \in D_f \cap D_g$, então as funções $f + g$, $f - g$ e $f \times g$ são contínuas em a e, se $g(a) \neq 0$, a função $\frac{f}{g}$ é contínua em a.

Atendendo à continuidade das funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

- $f(x) = c$, onde c designa uma constante real;
- $f(x) = x^n\,, n \in \mathbb{N}$;

podemos deduzir, usando o teorema anterior, a continuidade das funções

- Polinomiais: $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $p(x) = a_0x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n$;
- Racionais: $f: \mathbb{R} \backslash \{x \in \mathbb{R} : q(x) = 0\} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ onde p e q são funções polinomiais.

Atendendo à continuidade em $\mathbb{R}$ das funções seno e cosseno, pode deduzir-se a continuidade da função tangente no respetivo domínio, por se tratar do quociente entre duas funções contínuas.

Outro processo importante para combinar funções contínuas num ponto é obtido por composição de funções.

Teorema 7: Dados duas funções reais de variável real f e g e $a \in D_{g \circ f}$, se f é contínua em a e se g é contínua em $f(a)$, então, a função composta $g \circ f$ é contínua em a.

A continuidade da soma, diferença, produto, quociente e composição de funções contínuas estudadas permite-nos justificar a continuidade de funções que resultam da aplicação sucessiva das operações soma algébrica, multiplicação, divisão e composição de funções de referência para a continuidade: funções polinomiais, potências de expoente racional, e as funções seno, cosseno e tangente.

Exemplo 15:

A função real de variável real definida por $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 4x}$ é uma função contínua.

De facto, considerando a potência de expoente racional $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$ e a função polinomial definida por $p(x) = x^3 - 4x$, tem-se que $f(x) = (g \circ p)(x)$

As funções g e p são ambas contínuas e com domínio $\mathbb{R}$, pelo que, pela continuidade da função composta, a função $g \circ p$ é contínua, ou seja, f é contínua.

Exemplo 16:

A função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+4} - x & se\ x > 0 \\ 2 & se\ x = 0 \\ \frac{x^3 - 7x^2 + 6x}{3x} & se\ x < 0 \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}$.

Estudar a continuidade de uma função consiste em averiguar a continuidade em cada ponto do seu domínio.

- No intervalo $]0, +\infty[$, a função é contínua, por se tratar da diferença entre duas funções contínuas: uma que é a composta da função raiz quadrada com uma função polinomial $\left(f(x) = \sqrt{x^2+4}\right)$ e outra que é uma função afim $(g(x) = x)$.

- No intervalo $]-\infty, 0[$, a função é contínua, por se tratar de uma função racional j definida por

$$j(x) = \frac{x^3 - 7x^2 + 6x}{3x}$$

- Averiguar a continuidade no ponto $x = 0$.

- $$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 7x^2 + 6x}{3x} \quad \text{(este limite é uma indeterminação do tipo } \frac{0}{0}\text{)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(x^2 - 7x + 6)}{3x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 7x + 6}{3}$$
$$= \frac{6}{3}$$
$$= 2$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x^2+4} - x\right) = \sqrt{4} = 2$

- $h(0) = 2$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = h(0)$, a função h é contínua no ponto $x = 0$.

Concluímos, assim, que a função h é contínua em $\mathbb{R}$.

1.2.3 Teorema de Bolzano-Cauchy

A prova do Teorema de Bolzano-Cauchy (ou Teorema dos Valores Intermédios) é facilitada se utilizarmos o seu corolário, por isso optamos pela apresentação dos dois resultados na sequência inversa.

Teorema 8: (Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy)

Se f é uma função contínua em $[a\,,b] \subset D_f$, $(a < b)$ e $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais contrários, então a função f tem pelo menos um zero em $]a\,,b[$.

Este enunciado pode ser simplificado escrevendo:

Se f é contínua em $[a\,,b]$ e $f(a) \times f(b) < 0$, então $\exists c \in\,]a\,,b[: f(c) = 0$.

Demonstração:

Suponha-se, por exemplo, que se tem $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$.

O conjunto definido por

$$E = \{x \in [a\,,b] : f(x) > 0\}$$

é não vazio (contém pelo menos o ponto a) e limitado superiormente (já que b é um majorante de E).

Existe então o supremo de E: seja $c = \sup E$.

Visto que b é um majorante de E, então $c \leq b$. Se fosse $c = b$, então, da definição de supremo, existiria uma sucessão (x_n) de elementos de E convergente para b. Como $f(x_n) > 0\,, \forall n \in \mathbb{N}$, ter-se-ia, tendo em conta a continuidade de f,

$$0 \leq \lim_{n \to +\infty} f\,(x_n) = f(b) < 0$$

o que é absurdo. Então $c < b$.

Analogamente se pode mostrar que $a < c$, usando o facto de que o conjunto

$$F = \{x \in [a\,,b] : f(x) < 0\}$$

é limitado inferiormente (a é um minorante) e, portanto, tem ínfimo.

Consequentemente, $c \in \,]a, b[$. Resta mostrar que $f(c) = 0$.

De facto, se for $f(c) \neq 0$, da continuidade de f resulta a existência de um intervalo $]c - \delta\,, c + \delta[$ onde f tem o mesmo sinal que $f(c)$. Este facto, porém, é contraditório com a definição de $c = \sup E$ pois que

(a) se $f(x) > 0$ e $c - \delta < x < c + \delta$, então $c + \dfrac{\delta}{2} \in E$ e, portanto,

$$c = sup(E) \geq c + \frac{\delta}{2}, \text{ o que é impossível;}$$

(b) se $f(x) < 0$ e $c - \delta < x < c + \delta$, então $c = \sup(E) \leq c - \delta$, o que é igualmente impossível.

Então $f(c) = 0$ como se pretendia mostrar.

Com base no teorema anterior pode provar-se um resultado mais geral conhecido por teorema de Bolzano-Cauchy (também designado por Teorema dos Valores Intermédios) que afirma que uma função contínua definida num intervalo fechado não pode passar de um valor para o outro do contradomínio sem passar por todos os valores intermédios.

Teorema 9: (Teorema de Bolzano- Cauchy)

Sendo f uma função real de variável real contínua em $[a\,,b] \subset D_f,\ (a < b,\ \ a, b \in \mathbb{R})$, com $f(a) \neq f(b)$, para qualquer valor de $k \in \mathbb{R}$ entre $f(a)$ e $f(b)$ existe pelo menos um número $c \in \,]a\,,b[$, tal que $f(c) = k$.

Demonstração:

Suponha-se, por exemplo, que $f(a) < f(b)$ e seja $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < k < f(b)$.

Considere-se a função $g: [a\,,b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - k$.

É claro que g verifica as hipóteses do Teorema 8 e, portanto, anula-se num ponto $c \in \,]a\,,b[$. Consequentemente $k = f(c)$.

Corolário 2: Seja I um intervalo qualquer de $\mathbb{R}$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então $f(I)$ é um intervalo.

Demonstração: Sejam $y_1 , y_2 \in f(I)$ arbitrários e suponha-se, sem perda de generalidade, que $y_1 < y_2$. Então, qualquer que seja $y: y_1 < y < y_2$, existe $x \in I$ tal que $f(x) = y$ (pelo teorema dos valores intermédios), logo $[y_1 , y_2] \subseteq f(I)$, o que prova ser $f(I)$ um intervalo.

Exemplo 17:

Os gráficos das Figura 14, Figura 15 e Figura 16 ilustram a aplicação do teorema de Bolzano-Cauchy.

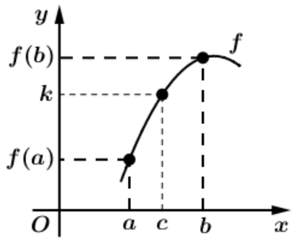


Figura 14 – Teorema dos Valores Intermédios I

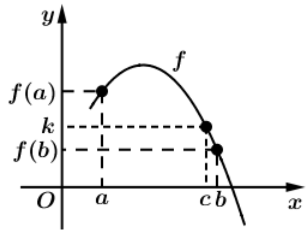


Figura 15 – Teorema dos valores intermédios II

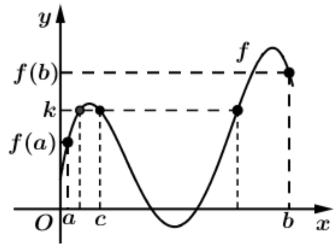


Figura 16 – Teorema dos valores intermédios III

- f é contínua em $[a, b]$
- $k \in \,]f(a)\,, f(b)[$

  Então, pode concluir-se que: $\exists\, c \in \,]a\,, b[\,: f(c) = k$

Exemplo 18:

Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 - x$. Pretendemos mostrar que a equação $f(x) = 3$ é possível em $]1\,, 2[$.

- A função f é contínua em $[1\,, 2]$, porque é uma função polinomial.
- $f(1) = 1^3 - 1 = 0$ e $f(2) = 2^3 - 2 = 6$
- $f(1) < 3 < f(2)$

Como f é contínua em $[1\,, 2]$ e $f(1) < 3 < f(2)$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy conclui-se que $\exists\, c \in \,]1\,,2[\,: f(c) = 3$.

Daqui resulta que a equação $f(x) = 3$ é possível em $]1\,, 2[$.

Note que a condição de continuidade é fulcral neste resultado pois, caso não se verifique, a conclusão do teorema pode não ser válida. Os exemplos das Figura 17, Figura 18 e Figura 19 ilustram a não aplicabilidade do Teorema de Bolzano-Cauchy.

Exemplo 19:

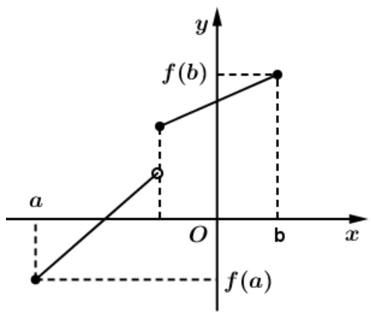


Figura 17 – Não aplicabilidade do Teorema de Bolzano-Cauchy I

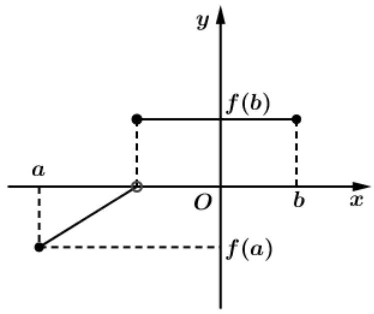


Figura 18 – Não aplicabilidade do Teorema de Bolzano-Cauchy II

$\exists k \in [f(a), f(b)]$

$\forall x \in [a\,,b] : f(x) \neq k$

A função não tem zeros em $[a\,,b]$

Exemplo 20:

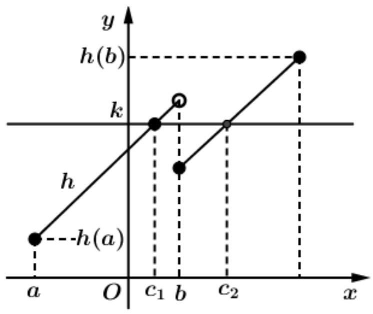


Figura 19 – Não aplicabilidade do Teorema de Bolzano-Cauchy III

No caso da função h verifica-se que, para qualquer valor de k entre $h(a)\ e\ h(b)$, existe um valor $c \in [a\,,b]$ tal que $h(c) = k$. No entanto, este facto não pode ser garantido pelo teorema de Bolzano-Cauchy, já que h não é contínua em $[a\,,b]$.

Exemplo 21:

Seja f definida no intervalo fechado $[0,2]$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x & se\ 0 \leq x < 1 \\ 2 & se\ x = 1 \\ x+2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Não existe nenhum elemento $c \in [0\,,2]$ tal que $f(c) = \frac{3}{2}$.

O intervalo onde esta função está definida é fechado, mas a função não é contínua no ponto $x = 1$.

Nas propostas de tarefas para os alunos, deve ter-se em conta a conveniência de uma progressiva utilização dos conhecimentos e técnicas que vão sendo adquiridos, procurando-se um equilíbrio entre a adequação das questões propostas a essa aquisição progressiva. É também fundamental que os problemas/exercícios sejam formulados de forma diferente para promover a compreensão e interpretação dos conceitos estudados.

Os exemplos que aqui se apresentam, têm em linha de conta os princípios referidos.

Exemplo 22:

Seja f uma função contínua cujos domínio e contradomínio são $[0\,,2]$. Pretendemos mostrar que a equação $f(x) = x$ tem pelo menos uma solução em $[0\,,2]$.

Para mostrar que a equação tem pelo menos uma solução, considera-se a função g real de variável real definida por $g(x) = f(x) - x$.

A função g é c contínua em $[0\,,2]$ por ser a diferença entre duas funções contínuas (f dada e outra polinomial).

$$g(0) = f(0) - 0 = f(0) \quad \text{e} \quad g(2) = f(2) - 2$$

$$g(0) \times g(2) = f(0) \times [f(2) - 2]$$

Como o contradomínio de f é $D'_f = [0\,,2]$, podemos afirmar que

- $0 \leq f(0) \leq 2$, logo $f(0) \geq 0$
- $0 \leq f(2) \leq 2$, e, portanto, $-2 \leq f(2) - 2 \leq 0$. Assim, $f(2) - 2 \leq 0$ e, consequentemente, $f(0) \times [f(2) - 2] \leq 0$,

ou seja,

$$g(0) \times g(2) \leq 0.$$

Como g é contínua em $[0\,,2]$ e $g(0) \times g(2) \leq 0$, pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy conclui-se que $\exists c \in \,]0\,,2[: g(c) = 0$.

Daqui resulta que a equação $f(x) = x$ tem pelo menos uma solução em $]0\,,2[$.

Exemplo 23:

Sejam f e g duas funções contínuas em $[a\,,b]$, tais que $f(a) = g(b)$ e $f(b) = g(a)$ e $f(a)$ e $f(b)$ não nulos. Pretende-se mostrar que o gráfico de $f - g$ interseta o eixo Ox pelo menos uma vez no intervalo $[a\,,b]$.

Seja h a função real de variável real definida por $h(x) = f(x) - g(x)$.

- A função h é contínua em $[a\,,b]$ por ser a diferença entre duas funções contínuas em $[a\,,b]$.

- $h(a) = f(a) - g(a)$ e como $f(a) = g(b)$, então $h(a) = g(b) - g(a)$
- $h(b) = f(b) - g(b)$ e como $f(b) = g(a)$, então $h(b) = g(a) - g(b)$

Atendendo a que $h(b) = g(a) - g(b) = -(g(b) - g(a)) = -h(a)$, $h(a)$ e $h(b)$ têm sinais contrários, ou seja, $h(a) \times h(b) < 0$.

Dado que a função h é contínua em $[a\,,b]$ e $h(a) \times h(b) < 0$, pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que

$$\exists c \in\,]a\,,b[: h(c) = 0.$$

Consequentemente o gráfico de $f - g$ interseta o eixo Ox pelo menos uma vez no intervalo $[a\,,b]$.

Outra propriedade que decorre da continuidade de funções em intervalos fechados é o Teorema de Weierstrass e que permite ainda concluir que a imagem por uma função contínua de um intervalo fechado é um intervalo fechado.

1.2.4 Teorema de Weierstrass

Teorema 10: (Teorema de Weierstrass)

Se f é uma função real de variável real contínua num intervalo $[a\,,b]$, então f admite máximo e mínimo absolutos nesse intervalo.

Demonstração:

Comecemos por provar que f é limitada. Caso não fosse, haveria, para cada número natural n, algum número $x_n \in [a\,,b]$ tal que $|f(x_n)| \geq n$. A sucessão $(x_n)_n$ é limitada (cada x_n está em $[a\,,b]$), pelo que, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, tem alguma subsucessão convergente. Existe então alguma sucessão $(y_n)_n$ de elementos de $[a\,,b]$ que converge para algum $y \in [a\,,b]$ tal que

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} |f(y_n)| = +\infty$$

em particular, a sucessão $\big(f(y_n)\big)_n$ não é limitada.

Por outro lado, f é contínua em y, pelo que existe algum $\delta > 0$ tal que

$$(\forall x \in [a\,,b]): \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1 \Rightarrow |f(x)| < |f(y)| + 1.$$

Mas, para n suficiente grande, $|y_n - y| < \delta$, pelo que $|f(y_n)| < |f(y)| + 1$; em particular, a sucessão $\big(f(y_n)\big)_n$ é limitada.

Chegou-se a uma contradição, que resultou de se ter suposto que f não é limitada. Logo, f é limitada.

Seja $M = \sup f(x)$ e suponha-se que

$$f(x) < M, \forall x \in [a\,,b].$$

Então a função $g: [a\,,b] \to \mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}, \ a \leq x \leq b$$

é contínua. Como toda a função contínua num intervalo $[a\,,b]$ é limitada, a função g é limitada.

Seja $c = \sup g(x)$. Como $g(x) > 0$, é evidente que se tem $c > 0$ e

$$g(x) \leq c\,, \ \forall x \in [a\,,b],$$

donde resulta que

$$f(x) \leq M - \frac{1}{c}, \forall x \in [a\,,b]$$

o que contraria a definição de M.

Consequentemente,

$$\exists x_1 \in [a\,,b] : f(x_1) = M$$

e, portanto, $M = \max f(x)$.

Demonstração análoga se pode fazer para o caso do mínimo.

Exemplo 24:

É importante referir aos alunos que o máximo e mínimo não são necessariamente atingidos nos extremos do intervalo $[a\,,b]$. As funções cujos gráficos estão apresentados nas Figura 20 e Figura 21 ilustram duas situações: uma em que os extremos do intervalo são os extremantes e outra em que o máximo é atingido no interior do intervalo.

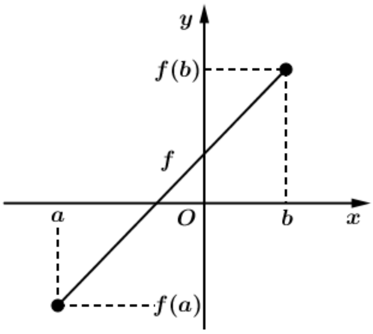


Figura 20 – Gráfico de uma função em que os extremantes são os extremos do intervalo

A função f tem como máximo absoluto $f(b)$ e como mínimo absoluto $f(a)$.

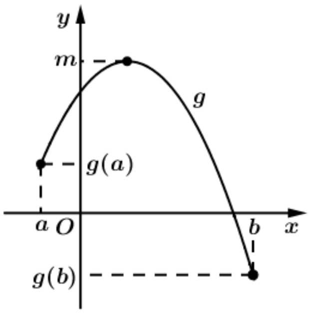


Figura 21 – Gráfico de uma função em que o extremante não é um dos extremos do intervalo

A função g tem como máximo absoluto m e como mínimo absoluto $g(b)$.

Repare-se que o teorema não é válido se a função não é contínua ou se o intervalo não é fechado, como se exemplifica de seguida.

Exemplo 25:

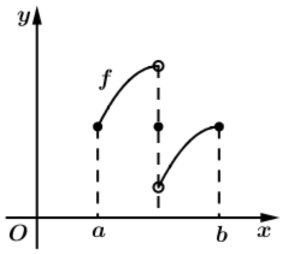


Figura 22 – Não aplicabilidade do Teorema de Weierstrass I

- f não é contínua.
- f não tem máximo nem mínimo.

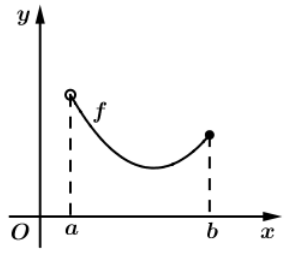


Figura 23 – Não aplicabilidade do Teorema de Weierstrass II

- O intervalo é aberto em a.
- f não tem máximo.
- f tem mínimo.

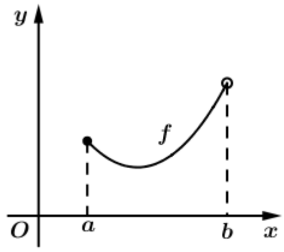


Figura 24 – Não aplicabilidade do Teorema de Weierstrass III

- O intervalo é aberto em b.
- f não tem máximo.
- f tem mínimo.

Exemplo 26:

Seja $f(x) = \frac{1}{x}$ definida no intervalo aberto $]0\,,1[$.

Esta função não tem máximo nem mínimo. Repare que não se pode aplicar o teorema de Weierstrass porque o intervalo onde esta função está definida não é fechado (embora f seja contínua pois é o quociente de funções polinomiais).

Exemplo 27:

Seja f definida no intervalo fechado $[0,1]$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x = 0 \\ 2x & se\ 0 < x < 1 \\ 1 & se\ x = 1 \end{cases}$$

A função f não é contínua nos pontos $x = 0\ e\ x = 1$ e, portanto, não se pode aplicar o teorema de Weierstrass. É fácil ver que esta função também não tem máximo nem mínimo.

O teorema de Weierstrass garante que **o conjunto imagem de um intervalo fechado por uma função contínua é um intervalo fechado.**

Seja f uma função contínua em que o domínio é um intervalo fechado $[a\,,b]$.

Pelo Teorema de Weierstrass sabe-se que:

- $\exists\, m \in [a\,,b] : f(x) \geq f(m)$ (a função f é minorada)

- $\exists\, M \in [a\,,b] : f(x) \leq f(M)$ (a função f é majorada)

Então $\forall\, x \in [a\,,b]$, tem-se $f(m) \leq f(x) \leq f(M)$.

Se o intervalo I for fechado então, pelo Teorema de Weierstrass (Teorema **3 (operações com limites):** Teorema 10), pode refinar-se o resultado do

Corolário 2 dizendo que $f(I)$ é um intervalo fechado (que pode eventualmente reduzir-se a um ponto). No caso em que I não seja fechado, nada se pode afirmar sobre a natureza do intervalo $f(I)$. Por exemplo, a imagem do intervalo $]-1\,,1[$ pela função $x \longrightarrow x^2$ é o intervalo $[0\,,1[$.

1.3 ASSÍNTOTAS AO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

Suponhamos que um ponto percorre o gráfico de uma função. Se a distância desse ponto a uma reta tende para zero, quando a distância do ponto à origem do referencial tende para infinito, diz-se que a reta é assíntota ao gráfico da função.

As retas representadas, a tracejado nas Figura 25 a Figura 30 são assíntotas ao gráfico de uma função f.

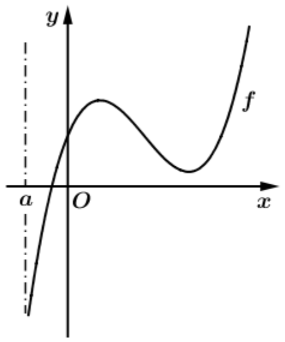


Figura 25 – Assíntota vertical I

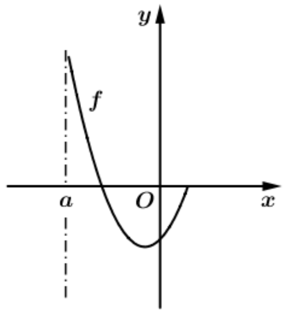


Figura 26 – Assíntota vertical II

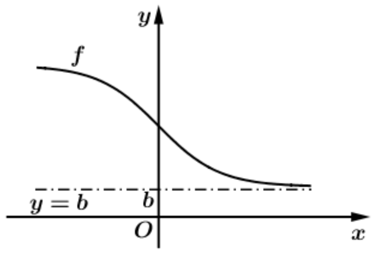


Figura 27 – Assíntota horizontal I

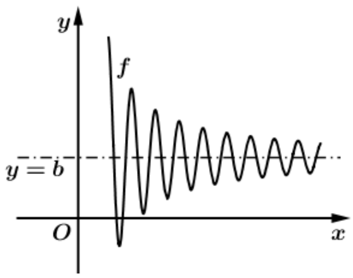


Figura 28 – Assíntota horizontal II

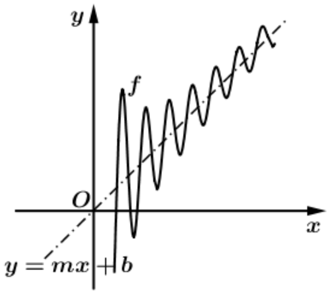


Figura 29 – Assíntota oblíqua

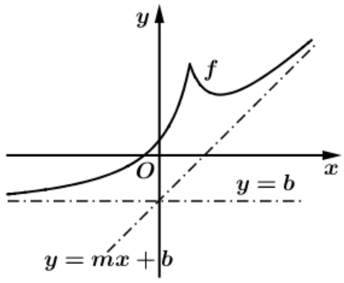


Figura 30 – Assíntotas não verticais

A forma intuitiva como foi apresentado o conceito de assíntota ao gráfico de uma função, pode não ser suficiente para analisar todas as situações. Por isso é preciso formalizar o conceito de assíntota.

De entre as retas que verificam o conceito intuitivo de assíntota ao gráfico de uma função, há retas verticais, retas horizontais e retas oblíquas.

1.3.1 Assíntotas verticais

Definição 6: Suponha-se que, sendo $a \in \mathbb{R}$ um ponto aderente do domínio de f, se verifica pelo menos uma das quatro hipóteses

$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty,\quad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty,\quad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty.$

A distância do ponto $(x\,, f(x))$ com $x \neq a$ à reta de equação $x = a$ é dada por

$$d = |x - a|$$

Então $\lim_{x\to a} d = 0$ e, portanto, $x = a$ é a equação de uma reta assíntota vertical do gráfico de f.

Os **candidatos** a assíntotas verticais $x = a$ são os pontos

- $a \in D_f$, mas é um ponto de descontinuidade de f;
- $a \notin D_f$, mas é um ponto aderente do domínio (por exemplo $\mathbb{R}\backslash\{a\},]-\infty\,, a[;]a\,, +\infty[;]a, b], \ldots$).

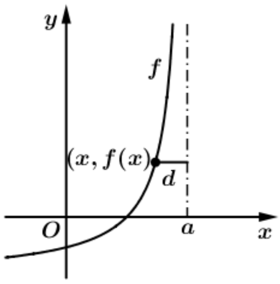


Figura 31 – Definição de assíntota vertical

onde, pelo menos um dos limites $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e/ou $\lim_{x\to a^-} f(x)$ é infinito.

Observação 1: Se uma função é contínua e se o seu domínio é $\mathbb{R}$ ou um intervalo fechado, o seu gráfico não admite qualquer assíntota vertical.

Exemplo 28:

Considere-se a função f, real de variável real, definida por:

$$f(x) = \frac{2x}{x-1}$$

Esta função é contínua, uma vez que é racional e o único ponto aderente ao seu domínio, $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, que não lhe pertence é o 1.

Calculando os limites laterais:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{x-1}\\ &= \frac{2}{0^-}\\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{x-1}\\ &= \frac{2}{0^+}\\ &= +\infty\end{aligned}$$

Tem-se, assim, que a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico da função f.

Note-se que basta que um dos limites laterais seja ∞ para afirmar que a reta é uma assíntota vertical.

Exemplo 29:

Considere-se a função g, real de variável real, definida por:

$$g(x) = \frac{x+1}{1-x^2}$$

Esta função é contínua, uma vez que é racional e os únicos pontos aderentes ao seu domínio, $\mathbb{R}\backslash\{-1\ ,1\}$, que não lhe pertencem são -1 e 1.

Calculando os limites laterais para -1:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1^-} g(x) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{x+1}{1-x^2}\\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{x+1}{(1-x)(1+x)}\\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to -1^+} g(x) = \frac{1}{2}$$

Dado que os limites laterais de $g(x)$ são iguais a $\frac{1}{2}$, não sendo, portanto, nenhum deles infinito. Assim, a reta de equação $x = -1$ não é assíntota vertical ao gráfico da função g.

Calculando os limites laterais para 1:

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x+1}{1-x^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{1-x^2} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

Tem-se, assim, que a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico da função g.

Exemplo 30:

Considere-se a função h, real de variável real definida por:

$$h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$$

Esta função é contínua, pois é o quociente de duas funções contínuas (a função raiz quadrada e uma função polinomial) e o único ponto aderente ao seu domínio, $[0\,,2[\,\cup\,]2\,,+\infty[$, que não lhe pertence é o 2.

Calculando os limites laterais:

$$\lim_{x\to 2^-} h(x) = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}}{x-2} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} h(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x}}{x-2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Tem-se, assim, que a reta de equação $x = 2$ é assíntota vertical ao gráfico da função h.

Exemplo 31:

Considere-se a função j, real de variável real definida por:

$$j(x) = \begin{cases} x^2+2 & se\ x \geq 2 \\ \frac{1}{x-2} & se\ x < 2 \end{cases}$$

O domínio da função j é $\mathbb{R}$, mas a função pode não ser contínua em 2, pois o limite à esquerda de 2 pode não ser igual a $j(2)$, portanto, só a reta de equação $x = 2$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de j.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} j(x) &= \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} \\ &= \frac{1}{0^-} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Dado que a função é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, podemos concluir que a reta de equação $x = 2$ é a única assíntota vertical ao gráfico da função j.

Exemplo 32:

Considere-se a funções f e g, reais de variável real, definidas por:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+5} \quad \text{e} \quad g(x) = \sqrt{3x+6}$$

Esta duas funções enquadram-se na **observação 1** anterior.

Não existem assíntotas verticais aos gráficos das funções f e g porque:

- a função f é uma função racional contínua-em $\mathbb{R}$.
- a função g é contínua (é a raiz quadrada de uma função contínua) e $D_h = [-2\,, +\infty[$.

1.3.2 Assíntotas não verticais

A definição 7 e o teorema 11 foram retirados do livro Análise Matemática (Sousa Pinto, 2010)

Definição 7: Seja f uma função cujo domínio contenha um intervalo da forma $]a\,, +\infty[$ e seja r a reta de equação $y = mx + p$.

A reta r dir-se-á uma **assintota do gráfico de f à direita** (ou, quando $x \to +\infty$) se e só se a distância do ponto $(x\,, f(x))$ à reta r tender para zero quando $x \to +\infty$.

No caso do domínio de f conter um intervalo da forma $]-\infty\,,\ a[$ define-se analogamente **assintota do gráfico de f à esquerda** (ou, quando $x \to -\infty$).

Como consequência da definição de assíntota não vertical temos o seguinte teorema:

Teorema 11: A reta de equação $y = mx + b$ $(m\,, b\ \in \mathbb{R})$ é **assíntota ao gráfico de f em** $+\infty$ (respetivamente, **assíntota ao gráfico de f em** $-\infty$) se e só se

$\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x) - (mx+b)\big) = 0$ (respetivamente, $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x) - (mx+b)\big) = 0$).

onde $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ (respetivamente, $m = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$) e $b = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$ (respetivamente, $b = \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - mx]$).

Demonstração:

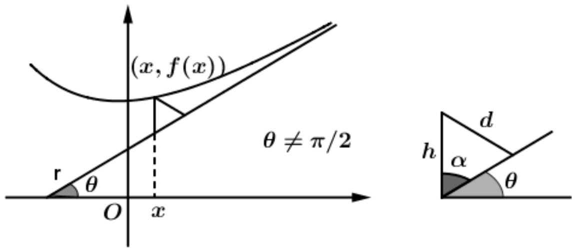


Figura 32 – Assíntota não vertical ao gráfico de uma função

Como $h = |f(x) - mx - p|$ e $d = hsen\,\alpha = hsen\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = hcos\,\theta$, então, tendo em conta que $m = tg\,\theta$, vem

$$d = \frac{|f(x)-mx-p|}{\sqrt{1+m^2}}$$

Consequentemente, para que r seja assintota do gráfico de f à direita é necessário e suficiente que

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx - p] = 0$$

ou, dito de outra forma, é necessário e suficiente que se tenha

$$f(x) = mx + p + \varphi(x) \qquad \textbf{(1)}$$

onde φ é tal que $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.

Dividindo ambos os membros de **(1)** por x vem

$$\frac{f(x)}{x} = m + \frac{p}{x} + \frac{\varphi(x)}{x}$$

donde decorre imediatamente que

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Por outro lado $f(x) - mx = p + \varphi(x)$ e, portanto,

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty}(p + \varphi(x))$$

donde

$$p = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - mx).$$

De forma análoga se determinam os coeficientes m e p para uma assintota do gráfico de f à esquerda (sendo os limites calculados quando $x \to -\infty$).

Observação 2:

- Quando $m = 0$, a assíntota diz-se **assíntota horizontal.**
- Quando $m \neq 0$, a assíntota diz-se **assíntota oblíqua.**

É importante chamar a atenção dos alunos para as seguintes questões:

- Se o domínio de uma função é limitado, não faz sentido falar em assíntotas não verticais.
- Não podem existir mais do que duas assíntotas não verticais ao gráfico de uma função: uma quando x tende para $-\infty$ e outra quando x tende para $+\infty$.

Exemplo 33:

1. Se o $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (-3x+2)] = 0$, podemos concluir que a reta de equação $y = -3x + 2$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

2. Se a reta de equação $y = 5$ é assíntota ao gráfico de f em $-\infty$, podemos concluir que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 5$ ou, de modo equivalente, que $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - 5] = 0$.

Exemplo 34:

Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \frac{2x^3+x^2}{x^2+1}$.

A reta de equação $y = 2x + 1$ é assíntota ao gráfico de f em $-\infty$ se $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (2x+1)] = 0$.

Calculando o limite vem:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x^3+x^2}{x^2+1} - 2x - 1\right] &= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x^3+x^2-2x^3-x^2-2x-1}{x^2+1}\right]\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x-1}{x^2+1}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x^2}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{x}\\
&= \frac{-2}{-\infty}\\
&= 0 \text{ , o que prova pretendido.}
\end{aligned}$$

Exemplo 35:

Seja g a função definida por $g(x) = \frac{3x+1}{x+5}$.

A reta de equação $y = 3$ é assíntota ao gráfico de g em $+\infty$ se $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - 3] = 0$, ou seja, se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$. Calculando o limite vem:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x+1}{x+5}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}\\ &= 3\end{aligned}$$

O que prova o pretendido.

Exemplo 36:

Estudar as funções seguintes quanto à existência de assíntotas não verticais ao seu gráfico e, caso existam, escrever as suas equações.

1. $f(x) = \frac{2x^2+x}{x-1}$

Como o domínio de f não é majorado nem minorado, vamos procurar uma assíntota não vertical ($y = mx + b,\ \text{com } m, b \in \mathbb{R}$) para $+\infty$ e para $-\infty$.

$$\begin{aligned}m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x^2+x}{x-1}}{x}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x}{x^2-x}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2\left(1+\frac{1}{2x}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2} \times \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{2x}}{1-\frac{1}{x}}\\ &= 2\times 1\\ &= 2\\ b = \lim_{x\to+\infty} (f(x)-mx) &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^2+x}{x-1} - 2x\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x-2x^2+2x}{x-1}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x-1}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x} \times \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x}}\\ &= 3\times 1\\ &= 3\end{aligned}$$

Concluímos, assim, que a reta de equação $y = 2x + 3$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

Observe-se que, quando $x \to -\infty$, os cálculos são idênticos e, portanto, também se obtém a mesma reta.

2. $g(x) = \begin{cases} x^2 & se\ x \geq 1 \\ \frac{1}{x-1} & se\ x < 1 \end{cases}$

Como o domínio de g não é majorado nem minorado, vamos procurar uma assíntota não vertical ($y = mx + b,\ \text{com}\ m, b \in \mathbb{R}$) para $+\infty$ e para $-\infty$.

$$\begin{aligned} m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} x \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Como m não é um número real, conclui-se que o gráfico de g não apresenta assíntota não vertical quando $x \to +\infty$.

$$\begin{aligned} m = \lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x-1}}{x} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x(x-1)} \\ &= \frac{1}{+\infty} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b = \lim_{x\to-\infty} (g(x) - mx) &= \lim_{x\to-\infty} (g(x) - 0) \\ &= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x-1}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Concluímos, assim, que a reta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x \to -\infty$.

Exemplo 37:

Acerca de uma função f real de variável real, sabe-se que é contínua no seu domínio e que:

- $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2\,,1\}$
- $\lim_{x\to-2} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to3} f(x)$

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$
- $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = 1$

Dadas as condições vamos identificar as assíntotas ao gráfico de f.

Assíntotas verticais

Uma vez que f é contínua no seu domínio, as retas de equações $x = -2\ e\ x = 1$ são as únicas candidatas a assíntotas verticais ao gráfico da função f.

Tem-se que:

- $\lim_{x \to -2} f(x) = -\infty$

Logo, a reta de equação $x = -2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f.

- $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 3} f(x)$ e, como $3 \in D_f$, então $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3) \in \mathbb{R}$, logo $x = 1$ não é assíntota vertical ao gráfico de f.

Assim, concluímos que a reta de equação $x = -2$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f.

Assíntotas não verticais

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

Logo, a reta de equação $y = 1$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to -\infty$.

- $$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = 1 &\Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - (2x + 1)\big) = 0 \end{aligned}$$

Logo, a reta de equação $y = 2x + 1$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

III – OS DESAFIOS DA AVALIAÇÃO PEDAGÓGICA NOS REFERENCIAIS CURRICULARES EM VIGOR

1. NOS NORMATIVOS EM VIGOR

Desde 2009, e após assegurar uma obrigatoriedade de permanência no sistema de ensino alargada para 12 anos, Portugal enfrenta desafios que se colocam ao nível do uso da avaliação e da forma como se comunicam os resultados da aprendizagem, decorrente desta efetiva democratização do ensino. Desta forma, o sistema educativo deve garantir que todos os seus alunos completem o ensino obrigatório com sucesso, proporcionando a todos e cada um, uma educação de qualidade. Assim, as políticas públicas portuguesas dos últimos anos elegem um conjunto de prioridades e dimensões estruturantes como referente para as decisões de gestão curricular, de ordem pedagógica e organizativa, sendo elas: a construção de um referencial para a organização de todo o sistema educativo português e para o trabalho das escolas, contribuindo para a convergência e a articulação das decisões inerentes às várias dimensões do desenvolvimento curricular – o Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (PASEO) (Despacho n.º 6478/2017, de 26 de julho) (Martins G. , et al., 2017); a identificação de Aprendizagens Essenciais (AE) (Despacho n.º 8476-A/2018) alinhadas com o Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória que se enquadram num "referencial curricular que expressa a visão de conjunto que concretiza e dá sentido ao processo de desenvolvimento do currículo, incluindo a sua subsequente operacionalização e avaliação" (Roldão, Peralta, & Martins, 2017).

A avaliação centrada na aprendizagem dos alunos, dimensão incontornável e integrada em qualquer processo de ensino e de aprendizagem, surge também nas opções políticas como um instrumento privilegiado para fornecer informações mais esclarecedoras sobre como se pode melhorar o seu desempenho, e também desenvolver um sistema de ensino mais equitativo. Importa realçar que a arquitetura legislativa teve início, de facto, com a alteração do quadro normativo, o qual tem colocado uma ênfase crescente na dimensão formativa. Assim, no atual enquadramento legal em vigor, a Portaria n.º 226-A/2018, de 7 de agosto, que define as regras e procedimentos da conceção e operacionalização do currículo dos cursos científico-humanísticos do ensino secundário, bem como da avaliação e certificação das aprendizagens, destaca, no seu art.º 23.º, a avaliação formativa como "a principal modalidade de avaliação", a qual deve privilegiar, entre outros objetivos, "A regulação do ensino e das aprendizagens, através da recolha de informação que permita conhecer a forma como se ensina e como se aprende", "O caráter contínuo e sistemático dos processos avaliativos" e a "diversidade das formas de recolha de informação".

Para tal, o mesmo diploma prevê, no art.º 20.º, que "o conselho pedagógico da escola, enquanto órgão regulador do processo de avaliação das aprendizagens, define, no âmbito das prioridades e opções curriculares, e sob proposta dos departamentos curriculares, os critérios de avaliação" (art.º 20.º). Estes, salienta este mesmo normativo, "devem traduzir a importância relativa que cada um dos domínios e temas assume nas Aprendizagens Essenciais", concretizando o princípio da integração curricular. Para efetivar a implementação de um referencial comum, partilhado e consensualizado por todos, numa determinada disciplina, esta Portaria determina, neste mesmo artigo, "a construção e implementação de um referencial de avaliação", descrito num "perfil de aprendizagens específicas para cada ano de escolaridade, integrando descritores de desempenho" (art.º 20.º).

Quanto à dimensão sumativa da avaliação, esta Portaria mantém a conceção desta dimensão da avaliação como resultado de "um juízo global sobre as aprendizagens desenvolvidas pelos alunos" (art.º 24.º) ao invés de uma visão atomizada, ainda presente nas práticas de avaliação existentes, que se limita a somar classificações obtidas nos diversos instrumentos de avaliação.

2. No Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória

Um dos referenciais curriculares em vigor é o *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (PASEO) que tem como finalidade "contribuir para a organização e gestão curriculares e, ainda, para a definição de estratégias, metodologias e procedimentos pedagógicos-didáticos a utilizar na prática letiva". Assume-se ainda como "um referencial educativo único que, aceitando a diversidade de percursos, assegure a coerência do sistema de educação e dê sentido à escolaridade obrigatória." (Martins G. , et al., 2017), com consequências práticas na avaliação das aprendizagens dos alunos.

Este referencial apresenta diferentes áreas de competências que devemos considerar aquando da definição de critérios de avaliação. Neste sentido, no PASEO, é elencado um conjunto de dez áreas de competências que devem ser desenvolvidas ao longo dos 12 anos de escolaridade, sendo elas: **a)** Linguagens e Textos; **b)** Informação e Comunicação; **c)** Raciocínio e Resolução de problemas; **d)** Pensamento crítico e Pensamento criativo; **e)** Relacionamento interpessoal; **f)** Desenvolvimento pessoal e autonomia; **g)** Bem-estar, saúde e ambiente; **h)** Sensibilidade estética e artística; **i)** Saber científico, técnico e tecnológico e **j)** Consciência e domínio do corpo. Todas contribuem "para a convergência e a articulação das decisões inerentes às várias dimensões do desenvolvimento curricular: o planeamento e a realização do ensino e da aprendizagem, bem como a avaliação interna e externa das aprendizagens dos alunos" (Decreto-Lei n.º 55/2018, 6 de julho de 2018, art. 3.º). O

PASEO identifica as competências transversais às várias disciplinas. Essas competências têm uma natureza recursiva por se estruturarem em níveis de complexidade crescente e pressuporem um trabalho sistemático ao longo dos vários anos de escolaridade, de modo que o nível de desempenho evidenciado pelos alunos em cada uma delas vá melhorando de ano para ano.

Estas áreas de competência alicerçam-se num conjunto de princípios: "Base humanista; Saber; Aprendizagem; Inclusão; Coerência e flexibilidade; Adaptabilidade e ousadia; Sustentabilidade e estabilidade" e de valores: "Responsabilidade e integridade; Excelência e exigência; Curiosidade, Reflexão e inovação; Cidadania e participação e Liberdade" (Martins G. , et al., 2017), os quais funcionam como horizonte de ação de todo o trabalho pedagógico com os alunos. Para tal, a escola deve assumir-se como uma oficina de cidadania, na qual os alunos devem experienciar situações de aprendizagem que os ajudem a incorporar, desenvolver e sentir como basilares estes valores e princípios. Segundo o próprio PASEO, as áreas de competência, que concretizam estes princípios e valores, são complementares e a sua enumeração não pressupõe qualquer hierarquia interna entre as mesmas. Salienta-se ainda que nenhuma delas corresponde a uma área curricular específica, sendo que em cada área curricular estão necessariamente envolvidas múltiplas competências, teóricas e práticas. O mesmo documento prevê um conjunto de implicações práticas, que passam, necessariamente, por alterações de práticas pedagógicas e didáticas com o intuito de desenvolver as áreas de competências elencadas.

3. Nas *Aprendizagens Essenciais* da disciplina de Matemática do Ensino Secundário

As AE também constituem um referencial curricular em vigor e ditam "o conjunto comum de conhecimentos a adquirir, identificados como os conteúdos de conhecimento disciplinar estruturado, indispensáveis, articulados conceptualmente, relevantes e significativos, bem como de capacidades e atitudes a desenvolver obrigatoriamente por todos os alunos em cada área disciplinar ou disciplina, tendo, em regra, por referência, o ano de escolaridade ou de formação" (Decreto-Lei n.º 55/2018, 6 de julho de 2018, art. 3.º). Na disciplina de Matemática do ensino secundário, as AE encontram-se organizadas por ano de escolaridade e preveem um conjunto de "conhecimentos, capacidades e atitudes ao longo da progressão curricular, explicitando: o que os alunos devem saber; os processos cognitivos que devem mobilizar para aprender; o saber fazer a ele associado (mostrar que aprendeu)" (Roldão, Peralta, & Martins, 2017).

Estas AE incluem os temas matemáticos de Funções e Geometria no 10.º ano de escolaridade; Funções, Geometria e Estatística no 11.º ano e Funções, Probabilidades e Números Complexos no 12.º ano. Para cada tema matemático, as AE formam um todo constituído por conteúdos, objetivos e práticas interrelacionados. Os objetivos concretizam essas aprendizagens relativas a cada conteúdo, incidindo sobre conhecimentos, capacidades e atitudes a adquirir e a desenvolver, bem como as práticas essenciais de aprendizagem que estabelecem condições que apoiam e favorecem a consecução desses objetivos. A aquisição e o desenvolvimento de conhecimentos, capacidades e atitudes e a sua mobilização em contextos matemáticos e não matemáticos são objetivos essenciais associados aos conteúdos de aprendizagem de cada tema matemático. Estes objetivos essenciais, definidos em termos de capacidades e de atitudes, devem ser valorizados com igual importância relativamente aos conteúdos e favorecem uma aproximação aos conceitos matemáticos. Estas AE são enquadradas e articuladas no e com o PASEO, tendo em vista a sua consecução. No que particularmente se refere às aprendizagens dos alunos associadas às áreas de competências aí definidas, seja nas áreas **a)** Linguagens e Textos; **b)** Informação e Comunicação; **c)** Raciocínio e Resolução de problemas; **d)** Pensamento crítico e Pensamento criativo; **i)** Saber científico, técnico e tecnológico (intrinsecamente relacionadas com temas, processos e métodos matemáticos), seja nas restantes áreas - **e)** Relacionamento interpessoal; **f)** Desenvolvimento pessoal e autonomia; **g)** Bem-estar, saúde e ambiente; **h)** Sensibilidade estética e artística; **j)** Consciência e domínio do corpo - a que a Matemática dá igualmente contributos essenciais.

Estes dois documentos curriculares – PASEO e AE - são a base da planificação, realização e avaliação do ensino e da aprendizagem, pelo que são indispensáveis para a definição de critérios de avaliação.

IV – FUNDAMENTAÇÃO DA AVALIAÇÃO PEDAGÓGICA

1. PRINCÍPIOS DA AVALIAÇÃO

Para que a recolha de informação sobre os desempenhos dos alunos seja válida e fiável, devemos acautelar um conjunto de princípios, que garantem a natureza pedagógica da avaliação.

Uma preocupação fundamental é que as práticas de avaliação sejam compatíveis com as orientações curriculares, procurando estar em sintonia com os principais objetivos do currículo, com a importância relativa atribuída aos vários temas e processos, e com as abordagens e formas de trabalho desenvolvidas nas aulas. Para fazer justiça à variedade de orientações curriculares, é necessário recorrer a fontes de informação diversificadas, mas ao mesmo tempo, é preciso recolher e organizar a informação de um modo sistemático e dar-lhe um sentido global. Seguidamente enunciam-se alguns princípios que podem contribuir para organizar as atividades de avaliação pedagógica, e que permitam recolher informação que promova a aprendizagem do aluno e oriente a prática do professor.

Princípio da transparência – a avaliação deve ocorrer num ambiente de transparência e confiança, no qual as críticas e as sugestões sejam encaradas como naturais. A avaliação tem de ser explicada, desde o início do ano escolar, aos alunos (incluindo os critérios de avaliação) e partilhada com os encarregados de educação, devendo ser claro o que se avalia, para quê e como. Se todos conhecermos bem as *regras do jogo* antes do seu início, podemos todos trabalhar para que se aprenda mais e melhor. "O princípio da transparência é fundamental para que os alunos possam ter acesso a uma avaliação que lhes dá confiança, pois passa a ser considerada como um processo que os ajuda a aprender" (Fernandes, 2020).

Princípio da melhoria da aprendizagem – a avaliação deve gerar, ela própria, novas situações de aprendizagem e servir para melhorar a qualidade das aprendizagens dos alunos. Estes devem assumir o compromisso de se envolverem ativamente na melhoria das suas aprendizagens e por conseguinte, dos seus resultados. Segundo Fernandes (2020), o propósito da avaliação não é atribuir classificações, mas sim apoiar os alunos nas suas aprendizagens, informando-os acerca da sua situação, do seu progresso, em relação aos desempenhos que têm de alcançar.

Princípio da integração curricular – a avaliação deve ser consistente com os objetivos, métodos e os principais tipos de atividades preconizadas nos documentos curriculares. Uma avaliação que se aproxima do processo de ensino e aprendizagem e que se integra no próprio desenvolvimento curricular. Este princípio preconiza que tudo o que é avaliado deve ter sido ensinado e que, sempre que possível, as tarefas de avaliação devem coincidir com as tarefas de aprendizagem e de ensino.

Desta forma, a avaliação poderá contribuir para que os alunos desenvolvam a sua autonomia e aprendam mais e com mais profundidade.

Princípio da positividade – a avaliação deve ter um caráter positivo, isto é, focar aquilo que o aluno já é capaz de fazer em vez daquilo que ele ainda não sabe, não se requerendo necessariamente o mesmo nível de desenvolvimento a todos os alunos. Tendo em conta este princípio, não farão sentido práticas de avaliação que consistem na formulação de questões acerca de assuntos não abordados nas aulas ou aos quais não foi dada qualquer relevância. “Uma das tentações mais antigas e mais traumatizantes das práticas de avaliação consiste em avaliar os alunos sobre questões que são apresentadas de forma mais rebuscada ou mais opaca, ou mesmo procurar aquelas que são mais complexas ou menos trabalhadas na sala de aula”. (Neves & Ferreira, 2015).

Princípio da diversificação – a avaliação deve permitir que os alunos com vários estilos de aprendizagem tenham oportunidade de mostrar o que aprenderam e abranger as várias aprendizagens e desempenhos previstos nos diferentes documentos curriculares – programa da disciplina (Aprendizagens Essenciais) e Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória. Para se poder integrar e articular a avaliação com o currículo, torna-se necessário diversificar os métodos de recolha de informação e avaliar em diferentes momentos e contextos. Segundo Fernandes (2020), é através da avaliação que os alunos tomam consciência do tipo de atividades, aprendizagens, atitudes, valores, conhecimentos e capacidades que são valorizadas.

2. Avaliação formativa e avaliação sumativa

Podemos considerar que, numa dimensão formativa, “Avaliar é realizar uma série de ações contínuas que os professores fazem diariamente na sala de aula para obterem informações sobre o nível de aprendizagem atingido pelos seus alunos. Não pode ser uma ação relacionada apenas com os resultados de testes, que são, em última instância, uma simplificação da avaliação” (Gómez, 2006). Deste modo, “A avaliação é um indicador que permite determinar a eficácia e o grau de avanço do ensino-aprendizagem e a formação dos alunos, uma vez que permite ao professor julgar o seu próprio trabalho e refletir sobre ele para redirecionar e corrigir, de forma a contribuir significativamente para melhorar o ensino e, assim, promover uma melhor aprendizagem” (Gómez, 2006).

A palavra “avaliação” possui múltiplos significados que dependem dos contextos e perspetivas a partir dos quais se aborda o termo. A natureza polissémica do conceito é de facto reconhecida na literatura, o que torna difícil definir como um conceito único. Entre os significados mais comuns que lhe são atribuídos estão: medir; verificar; emitir juízos de valor; descrever; aferir; regular; entender; aprender; seriar; etc.

Os termos acima referidos permitem considerar ou distinguir duas perspetivas diferentes sobre o significado de avaliar. Uma avaliação que inclui termos como medir, quantificar, seriar, emitir juízos de valor. Nesse sentido, estes termos expressam uma quantidade precisa, com o objetivo de quantificar. A segunda perspetiva sobre a avaliação envolve termos, tais como, descrever, entender, aprender, por outras palavras, emitir juízos qualitativos. Convém, contudo, distinguir com clareza avaliação de classificação, uma vez que a primeira é condição *sine qua non* da segunda, mas não se confunde com esta. Assim, a avaliação tem a função de regular o processo de ensino e aprendizagem. Ajuda a averiguar se os alunos estão a realizar os progressos pretendidos e a encontrar os caminhos necessários para que consigam atingir as metas estabelecidas para o nível de ensino que frequentam.

Já a classificação tem uma intenção seletiva, isto é, resulta da seriação dos alunos, na medida em que lhes atribui uma posição numa determinada escala, sendo que a classificação facilita a comunicação ao utilizar um código rápido, simples e facilmente entendido pela maior parte das pessoas. É, portanto, um valor numérico, que não traduz o que o aluno aprendeu, as competências que desenvolveu, nem o que precisa de aprender, muitas vezes como critério único das decisões de percurso. Através da avaliação, aprendemos, ou seja, avaliamos porque queremos recolher informação sobre o que os alunos aprenderam e o que lhes falta ainda aprender, em função dos objetivos definidos. Assim, podemos avaliar utilizando vários tipos de escala, nomeadamente descritiva (eg. Muito Bom, Bom, etc.), gráfica (eg. através de um sistema de cores) ou numérica. Neste contexto, classificamos quando queremos conferir uma medida à avaliação, através, sobretudo, de uma escala numérica.

Tal como em qualquer processo de avaliação, importa que os propósitos de tal avaliação sejam entendidos e consensualizados entre os diversos intervenientes. “É necessário avaliar para apoiar e para melhorar as aprendizagens dos alunos e, por outro lado, também é necessário avaliar para que se possa fazer uma súmula, um balanço ou um ponto de situação relativamente à qualidade das aprendizagens realizadas pelos alunos num dado momento e ou após um dado período de tempo” (Fernandes, 2019 a).

Tomando estes pressupostos, a avaliação integra processos com fins formativos e processos com fins sumativos. Nos últimos anos, tem-se vindo a fazer a distinção entre Avaliação *para* a aprendizagem, avaliação *como* aprendizagem e avaliação *da* aprendizagem, precisamente para se sublinhar a diferença entre a avaliação formativa e a avaliação sumativa. As atividades de avaliação para a aprendizagem e a avaliação como aprendizagem têm caráter formativo. A sua utilização sistemática deve permitir que os alunos conheçam bem: o que têm de aprender no final de cada período de tempo; a situação em que se encontram quanto às aprendizagens que têm de desenvolver;

os esforços que têm de fazer para aprenderem o que está previsto e descrito nos documentos curriculares. Segundo Domingos Fernandes, a avaliação formativa, por natureza, tem de estar integrada nos processos de ensino e de aprendizagem. Isto significa que a avaliação formativa tem de ser realizada quando os professores estão a ensinar e quando os alunos estão a aprender; ou seja, ela deve ocorrer durante os processos de ensino e aprendizagem (Fernandes, 2020a). Para além disso, possibilita a identificação de objetivos realistas a curto prazo; o diagnóstico de dificuldades de aprendizagem; fornece um *feedback* efetivo ao aluno; melhora a motivação e a autoestima; dirige-se ao aluno que, ao tornar-se consciente da sua própria aprendizagem, se envolve mais nela; não interrompe a aprendizagem porque a integra; interessa pelos processos e pelos resultados; gera informação valiosa para o professor, ajuda a detetar as causas das dificuldades para melhor as atenuar (Neves & Ferreira, 2015). A avaliação formativa tem, assim, uma dupla natureza. É criterial, porque, no decorrer dos processos de ensino-aprendizagem-avaliação, as aprendizagens dos alunos não são comparadas com algum padrão ou norma, mas analisadas em termos de critérios que são definidos previamente. É ipsativa, pois “o desempenho do aluno num determinado momento é comparado com o desempenho verificado em momentos anteriores” (Neves & Ferreira, 2015), tendo em conta aspetos tais como: o esforço, o contexto em que o trabalho se desenvolve e os seus progressos.

A avaliação da aprendizagem corresponde à dimensão sumativa da avaliação e ocorre quando os professores utilizam elementos da aprendizagem dos alunos para fazer julgamentos sobre o seu desempenho em relação aos objetivos de aprendizagem. A avaliação sumativa não acompanha de forma sistemática o dia a dia do ensino e das aprendizagens, tal como acontece com a avaliação formativa. Ao contrário desta, a avaliação sumativa ocorre normalmente após os processos de ensino e aprendizagem e não durante esses processos. A avaliação sumativa produz informação sistematizada e sintetizada, que é registada e tornada pública, acerca do que se considerou ter sido aprendido pelos alunos (Fernandes, 2020c). Neste sentido, pode dizer-se que é através da avaliação sumativa que as escolas tornam público o que os alunos sabem e são capazes de fazer num dado momento do seu percurso escolar e, por isso, um outro propósito desta modalidade de avaliação está associado à certificação e à tomada de decisão sobre a progressão escolar. A avaliação sumativa tem também uma natureza criterial e, além disso, é normativa, isto é, compara as aprendizagens dos alunos com a norma (uma média, por exemplo) ou com as aprendizagens de um grupo de alunos. Considera-se que há necessariamente uma articulação entre as duas modalidades de avaliação, porque ambas partilham a sua natureza criterial.

A avaliação sumativa pode ser utilizada para atribuir classificações aos alunos, mas também pode ser usada para fazer pontos de situação e distribuir *feedback* de qualidade aos alunos, sem quaisquer efeitos nas suas classificações finais. É essencial sublinhar que não são as tarefas ou os instrumentos usados que determinam a função formativa ou sumativa da avaliação. São os seus propósitos, ou seja, a forma como se usa a informação. “A avaliação formativa e a avaliação sumativa devem implicar processos rigorosos de recolha de informação e de comunicação com os alunos e não se podem confundir uma com a outra. Têm naturezas e propósitos distintos, ocorrem em momentos distintos e têm inserções pedagógicas distintas. Mas são, obviamente, processos complementares que podem e devem contribuir para apoiar o desenvolvimento das aprendizagens dos alunos” (Fernandes, 2020c). Verificando-se a prática de uma verdadeira avaliação formativa, a avaliação sumativa constitui um momento rico de síntese da informação recolhida sobre o que sabem os alunos e são capazes de fazer numa variedade de situações. Mais do que um meio de exclusão e de discriminação, a avaliação contribui para que todos os alunos aprendam mais e melhor. Não atingem todos os mesmos níveis de aprendizagem, mas todos evoluem a partir do seu estado de aprendizagem, das suas expectativas e do *feedback* que lhes dermos sobre o trabalho que realizam.

3. FEEDBACK

O *feedback* pode ser definido como uma informação que resulta da avaliação do desempenho dos alunos e que, por conseguinte, sugere as opções que se deve adotar para atingir os objetivos pretendidos. O *feedback* dos professores, seja escrito ou oral, deve inicialmente concentrar-se no que o aluno tenha feito bem, antes de destacar as áreas que carecem de melhorias. O *feedback* deve incluir orientações sobre como o aluno pode fazer as melhorias necessárias. O *feedback* recebido pelo professor fornece informações críticas, que este precisa para identificar o estado atual de aprendizagem dos alunos, e informa-o sobre os próximos passos do processo de aprendizagem. Assim, entende-se que o *feedback* deve ser tão individualizado quanto possível, pois quanto mais individualizado e sistemático, maiores são as possibilidades de ele promover as aprendizagens dos alunos. Neste sentido, o processo de avaliação formativa é considerado uma das componentes mais determinantes no sucesso do ensino e da aprendizagem: “ o *feedback* é uma das competências centrais e mais poderosas que o professor deve dominar para garantir uma avaliação formativa com impacto positivo nas aprendizagens dos alunos: por um lado, no plano cognitivo, fornece aos estudantes a informação que eles precisam para compreenderem onde estão e o que precisam de fazer a seguir; por outro lado, no plano motivacional, desenvolve o sentimento de controlo sobre a sua própria aprendizagem e, por conseguinte o grau de envolvimento dos alunos através de processos cada vez mais eficazes de autorregulação.” (Machado, 2020) A autorregulação, conforme Brookhart (2010), pode acontecer por meio das componentes da avaliação formativa, nomeadamente: i) *feed up* (para onde é que eu vou?) – para clarificar os objetivos de aprendizagem; ii) *feed back* (como é que estou?) – para fornecer informação útil e pertinente relacionada com os objetivos de aprendizagem definidos; iii) *Feed forward* (para onde é que quero ir?) – para permitir a reorganização das suas ações de ensino e de apoio à aprendizagem. Ainda que o *feedback* seja individualizado e sistemático, é fundamental, porém, saber em que medida os alunos o recebem, compreendem e utilizam para melhorarem as suas aprendizagens.

A eficácia do *feedback* está, pois, relacionada com a perceção que sobre ele têm os alunos. Não podemos esquecer a natureza do *feedback* e os contextos em que é dado, dos quais depende a sua capacidade de ter impacto positivo nas aprendizagens, quer seja formativo quer seja sumativo. Segundo Neves & Ferreira (2015), o *feedback* pode ser avaliativo quando os alunos recebem: apenas uma classificação ou uma apreciação qualitativa com indicações das respostas corretas; informação e explicação sobre a forma correta de responder; ou pode ser descritivo (não necessariamente em texto) quando os alunos recebem informação e explicação sobre a forma correta de responder e indicação de atividades específicas a realizar para melhorar os resultados. O *feedback* avaliativo, serve, à partida, a função da avaliação sumativa, porque o que faz é formular um juízo de valor que se refere, de forma implícita ou explícita, a uma norma, ao passo que o *feedback* descritivo desempenha uma função formativa, porque incentiva a reflexão e a autoavaliação e dá pistas, aponta caminhos e levanta questões. O *feedback* dado ao aluno deve ser sob a forma de informações claras, descritivas, de natureza construtiva e não depreciativa, para que possa ser usado para melhorar as aprendizagens. O quadro abaixo, construído a partir do trabalho desenvolvido por Brookhart (2010), demonstra alguns cuidados a ter na distribuição do *feedback*.

Tabela 1 – *Feedback*

Princípio: O *feedback* deve…	**Sugestões**	**Exemplos**
Descrever e informar (não julgar)	Descreve o trabalho, não o aluno, indicando ações para a melhoria da sua ação.	**Exemplo a evitar:** O teu trabalho está cheio de erros de cálculo! Corrige-os. **Exemplo melhorado:** O teu trabalho ainda apresenta alguns erros de cálculo. Para os corrigires tem em conta a prioridade das operações.
	Evitar palavras que façam o aluno sentir-se mal ("fraco"). Deve tentar descrever o que pode melhorar, salientar os pontos fortes do trabalho.	**Exemplo a evitar:** Fraco **Exemplo melhorado:** Já consegues identificar os valores exatos das razões trigonométricas. Deves melhorar as regras de cálculo envolvendo radicais.

Princípio: O *feedback* deve…	Sugestões	Exemplos
Ser tão específico quanto possível.	Usar palavras específicas sobre aspetos identificados a partir da tarefa proposta.	**Exemplo a evitar:** Estuda mais **Exemplo melhorado:** Tens de rever as regras operatórias dos logaritmos e resolver mais exercícios envolvendo a aplicação dessas regras.
Comunicar (informar) com clareza o aluno.	Escrever usando uma linguagem com que os alunos estão familiarizados.	**Exemplo a evitar:** Não é claro **Exemplo melhorado:** Deves redigir a resposta de forma clara, isto é, deves começar por escrever o significado de $P(A\|B)$ no contexto da situação apresentada.
Sugerir o que o aluno deve fazer para melhorar.	Descreve qual deve ser o próximo objetivo ou meta de aprendizagem a curto prazo. Sugerir uma estratégia ou uma atividade prática que pode ajudar o aluno a alcançar o próximo objetivo.	**Exemplo a evitar:** A tua composição matemática está ótima. **Exemplo melhorado:** A tua composição sobre a aplicação dos modelos exponenciais a situações da vida real tem todos os resultados corretos. Pesquisa outros contextos que possam ser modelados por funções exponenciais.

Fonte: Adaptado de Brookhart (2010)

O *feedback* fornecido no âmbito da avaliação formativa é fundamental para a própria avaliação sumativa, a qual pode ser encarada e estruturada como um *feedback* de súmula, de balanço ou de ponto de situação numa escala temporal de média ou longa duração. A avaliação sumativa com fins classificatórios é também uma forma de *feedback*: perante um trabalho ou um desempenho, o professor fornece uma informação através da qual situa o aluno numa escala adotada, muitas vezes com uma carga valorativa muito forte. Trata-se, contudo, de um *feedback* muito pobre, com um carácter eminentemente normativo, que não orienta de forma precisa e adequada os alunos. Além disso, os alunos tendem a ignorar o *feedback* quando, ao mesmo tempo, são atribuídas classificações. Os comentários do professor são mais valorizados se não forem acompanhados de uma classificação. Para melhorar o *feedback* avaliativo ou de natureza classificatória, podemos usar duas linhas de ação "por um lado, enriquecer e aumentar o significado das notas através, nomeadamente, do recurso a critérios e a rubricas, dando aos alunos a possibilidade de compreender a que corresponde o seu patamar de desempenho; por outro, desenvolver estratégias e práticas que evitem que a avaliação se reduza à atribuição de notas, partindo do pressuposto de que tudo o que os alunos fazem deve ser, sempre e apenas, classificado." (Machado, 2020). Importa acrescentar "que avaliação sumativa, quando acompanhada de alguma síntese descritiva, deve ser o mais informativa possível, pois deve sintetizar os objetivos atingidos" (Fernandes, Neves, Campos, Conceição , & Alaiz, 1994).

4. CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO

A definição e construção de critérios de avaliação constitui uma parte determinante do processo de ensino-aprendizagem-avaliação. Com efeito, "os critérios são designações que se selecionam através da análise cuidada dos elementos curriculares indispensáveis (e.g., Aprendizagens Essenciais, Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória) e que, em conjunto com os respetivos descritores ou indicadores, nos ajudam a identificar o que se considera ser as caraterísticas ou os atributos que os desempenhos dos alunos devem ter quando estão a trabalhar numa dada tarefa de avaliação." (Fernandes, 2021). Assim, os critérios definem algo que é desejável que todos os alunos saibam ou sejam capazes de fazer.

Importa, no entanto, discutir os diferentes níveis de critérios de avaliação que coexistem dentro do espaço escolar: os critérios de avaliação de escola e os critérios de avaliação da disciplina. Os critérios de avaliação de escola constituem o referencial comum de transição dos alunos ao final de um ano de escolaridade ou ciclo de estudos e estes devem ser revistos anualmente de modo a aperfeiçoar o processo educativo. Por sua vez, os critérios de avaliação disciplinares constituem o conjunto de orientações sobre as aprendizagens que se esperam que os alunos desenvolvam em cada disciplina. Tendo-se definido um critério de avaliação como um enunciado que descreve o padrão com que se compara o desempenho do aluno na realização de uma tarefa, dificilmente se poderá admitir, como refere Neves e Ferreira (2015), que na definição de critérios gerais de avaliação se apresentem formulações como «testes valem 80%, os outros elementos 20%». Para mais, a atribuição de percentagens a um conjunto de instrumentos para recolha de informações não permite retratar os diferentes estádios de desenvolvimento dos alunos nas aprendizagens, as suas dificuldades e as necessidades de ajuda e orientação. A valorização, em percentagem, do saber não pode, por si só, contribuir para que se aumente a qualidade das aprendizagens. Sem se conhecer de forma substancial a que «saber» nos referimos, a publicitação dos «pesos» relativos aos instrumentos não concorrem para se aprender mais e melhor. Os critérios de avaliação não são distribuições de ponderações ou pesos por instrumento de avaliação: "Não são meios para atribuir classificações ou critérios de classificação! São indicações claras acerca do que é importante aprender e, consequentemente, avaliar através de uma ou mais tarefas" (Fernandes, 2021).

Este processo de definição de critérios de avaliação que se preconiza, implica um profundo conhecimento do programa estabelecido a nível nacional e uma planificação que permita um aprofundamento do currículo onde se discrimine e distinga o essencial do acessório, bem como o "planeamento das tarefas de aprendizagem e de avaliação centradas no que é fundamental e estruturante, no que exige mais tempo e mais esforço da parte do professor" (Neves & Ferreira, 2015).

Para a construção de critérios, devemos ter em conta algumas orientações fundamentais, designadamente no que diz respeito à clareza e à transparência, pois o objetivo principal é sempre que os critérios e as descrições dos níveis de desempenho sejam relevantes para que os alunos compreendam o que é expectável que aprendam e o que é tido em conta na avaliação do seu trabalho, dando reais oportunidades à autoavaliação/autorregulação das aprendizagens. Pelo exposto, podemos concluir que "Critérios de Avaliação" "não é apenas um documento com dados que se consideram importantes divulgar sobre a avaliação numa determinada escola, é antes de tudo, uma ferramenta que permite refletir sobre o que é desejável que os alunos aprendam e que pode (e deve) adequar-se ao contexto de cada Escola, sem prejuízo do respeito pelos documentos curriculares" (Cardoso & Coelho, 2021).

5. PERFIS DE APRENDIZAGENS ESPECÍFICAS: DOS CRITÉRIOS AOS NÍVEIS DE DESEMPENHO E *STANDARDS*

Em linha com o que se referiu anteriormente, impõe-se passar do nível da escola para o da disciplina, criando os critérios específicos de avaliação de cada uma das disciplinas. Em função dos domínios de avaliação, cada disciplina deverá construir um perfil de aprendizagens específicas, integrando descritores que informem claramente os alunos e encarregados de educação sobre o que distingue um bom de um fraco desempenho, sempre em consonância com as Aprendizagens Essenciais e as áreas de competência inscritas no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória. "Uma das características que tem de merecer a nossa atenção na definição de critérios será a adequação, já que qualquer critério tem de traduzir fielmente o que é que no currículo, está definido como sendo importante aprender e/ou saber fazer. Além do mais, os critérios no seu conjunto deverão abranger a totalidade das aprendizagens a realizar e que são passíveis de ser avaliadas através dos desempenhos dos alunos. Por isso, a completude é igualmente uma caraterística muito relevante a considerar. Destaque-se ainda a importância de os critérios serem definidos de forma que seja possível descrever diferentes níveis de desempenho que representa um continuum de qualidade" (Fernandes, 2021).

Definidos os indicadores e ou descritores de desempenho de âmbito específico da disciplina, poder-se-ão definir perfis de desempenho que correspondam a patamares de proficiência, orientadores das classificações a atribuir no final de cada período ou semestre. Neste caso, estamos perante *standards* que traduzem numa escala, numérica ou outra - uma dada descrição de desempenho.

6. RUBRICAS DE AVALIAÇÃO DE TAREFA

Descendo, agora, ao nível da tarefa, é importante dispormos de referenciais que explicitem o que se pretende que os alunos aprendam com a mesma. Nesta perspetiva, as rubricas de tarefa apresentam potencialidades na clarificação deste referencial. Uma rubrica é um conjunto de linhas orientadoras para a avaliação do trabalho dos alunos e, para tal, deve responder às seguintes questões: Com que critérios deve ser avaliado o desempenho? O que devemos olhar e procurar para avaliar o sucesso do desempenho? Como devem os diferentes níveis de qualidade do trabalho ser distinguidos uns dos outros?

Para a maioria dos autores, as rubricas de tarefa deverão incluir quatro elementos: a descrição geral da tarefa que é objeto de avaliação - os critérios; os níveis de descrição do desempenho relativamente a cada critério; a definição de uma escala que atribui a cada nível de desempenho uma dada menção. Na Figura 33 – Exemplo da organização geral de uma rubrica de avaliação mostra-se uma possível organização para cada um dos elementos referidos.

Descrição geral da Tarefa (Objeto de avaliação)			
Critérios	**Escala**		
	3	**2**	**1**
Critério 1	Descrição do nível de desempenho	Descrição do nível de desempenho	Descrição do nível de desempenho
Critério 2	Descrição do nível de desempenho	Descrição do nível de desempenho	Descrição do nível de desempenho
Critério 3	Descrição do nível de desempenho	Descrição do nível de desempenho	Descrição do nível de desempenho

Fonte: adaptado de Fernandes, D. (2019b)

Figura 33 – Exemplo da organização geral de uma rubrica de avaliação

O conjunto de critérios deve traduzir claramente o que é desejável que os alunos aprendam e os níveis de desempenho devem traduzir orientações fundamentais, para que os alunos possam regular e autorregular os seus progressos nas aprendizagens que têm de desenvolver. "As rubricas de avaliação são importantes porque clarificam para os alunos as qualidades que o seu trabalho deve ter. A descrição é frequentemente expressa de tal forma que os alunos compreendam os objetivos de aprendizagem e os critérios de avaliação. Por essa razão, as rubricas ajudam o professor a ensinar, a articular o processo de ensino-aprendizagem com a avaliação, e ajudam os alunos a aprender" (Brookhart S. , 2013). Assim, numa rubrica, deveremos ter sempre dois elementos fundamentais: um conjunto coerente e consistente de critérios e um conjunto muito claro de descritores para cada um desses critérios. Como acontece com qualquer estratégia, processo ou tarefa de avaliação, as rubricas podem ser mais ou menos eficazes e úteis para avaliar certos objetivos. Ainda segundo Susan Brookhart, o uso de rubricas serve para partilhar os objetivos de aprendizagem e os critérios de sucesso com os alunos quando os objetivos de aprendizagem exigem pensar, escrever, analisar, demonstrar competências complexas, ou a construção de produtos complexos. Em qualquer dos casos, a rubrica pode ser um excelente auxiliar, pois, normalmente, ajuda-nos a melhorar muito a consistência, o rigor e, em geral a qualidade da avaliação realizada. É igualmente importante sublinhar que "as rubricas podem ser utilizadas quer no contexto da avaliação formativa, avaliação para as aprendizagens, ou seja, para distribuir *feedback* de elevada qualidade, quer no contexto da avaliação sumativa, avaliação das aprendizagens, para que, num dado momento, se possa fazer um balanço ou um ponto de situação acerca do que os alunos sabem e são capazes de fazer" (Fernandes, 2019b).

As rubricas de avaliação são, assim, relevantes, por um lado, porque clarificam o que os alunos devem aprender e saber fazer e por outro, orientam o trabalho que os alunos têm de desenvolver. Por exemplo, numa rubrica de avaliação como a Resolução de Problemas, esta contém as etapas (critérios de avaliação) e as orientações (descrições dos níveis de desempenho) que o aluno tem de percorrer para realizar a tarefa proposta. "É desejável que a mesma rubrica possa ser utilizada numa diversidade de tarefas e ao longo de um determinado período de tempo. Fará todo o sentido, perante um dado conteúdo do currículo e determinadas aprendizagens essenciais a realizar, utilizar uma única rubrica para a realização de uma diversidade de tarefas" (Fernandes, 2019b). Deste modo, garante-se que as rubricas de tarefa estejam ao serviço das aprendizagens, garantindo que os alunos compreendem os critérios e as descrições dos níveis de desempenho; consensualizem, no grupo disciplinar, o que se pretende que os alunos aprendam e saibam fazer sempre que realizam essa tarefa; constituam um referencial de avaliação comum, partilhado por todos os intervenientes; promovam a melhoria da consistência, o rigor e a qualidade da avaliação, bem como uma auto, co e heteroavaliação a partir do mesmo referencial. Para facilitar a apropriação, por parte dos alunos, do conteúdo das rubricas, estes "deverão ter acesso às rubricas que estão a ser utilizadas e, inclusivamente, sempre que tal seja possível, participar na identificação de critérios e na descrição dos desempenhos considerados relevantes para as aprendizagens a desenvolver". Sendo assim, fica garantida uma maior "consistência e rigor na avaliação realizada, quer seja formativa ou sumativa, permitindo que os alunos e professores trabalhem, tendo os mesmos critérios como referentes fundamentais" (Fernandes, 2019b).

V – CONSTRUÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA ASSENTE NOS PRINCÍPIOS DA AVALIAÇÃO PEDAGÓGICA

1. CARACTERIZAÇÃO DO CONTEXTO E DAS TURMAS

Nesta secção, inicialmente faz-se uma caracterização do ambiente em que os dados foram obtidos. Em seguida, é feita uma caracterização dos alunos e das turmas nas quais esta sequência de aprendizagem foi desenvolvida. Por fim, apresenta-se uma descrição do processo de implementação da sequência didática desenhada.

1.1 CARACTERIZAÇÃO DO AMBIENTE DE RECOLHA DE RESULTADOS

No ano letivo 2021/22, o ambiente de aprendizagem caracterizou-se por uma estabilidade crescente, apenas pontuada pela falta presencial de alguns alunos em isolamento profilático. Contudo, o uso obrigatório de máscara e sobretudo, o distanciamento físico imposto nos planos de contingência, condicionaram as atividades letivas e todo o trabalho letivo desenvolvido em sala de aula com os alunos. De facto, limitou-se o trabalho cooperativo, como o trabalho de grupo e a pares, mas também o contacto mais próximo do professor com os alunos. A acrescer a estas limitações, a existência de alunos em isolamento e consequente participação, à distância, nas aulas da turma condicionaram as metodologias implementadas na sala, pois era necessário garantir, em simultâneo, o estudo autónomo dos alunos em casa e o trabalho previsto com os alunos na sala.

Refere-se ainda que os alunos das turmas em estudo conheceram, em 2019/20, no 10.º ano de escolaridade, o período de confinamento geral no terceiro período, por força da pandemia, o que afetou diretamente a motivação, o comportamento e o aproveitamento dos alunos, tendo ficado conteúdos por lecionar e tendo outros sido alvo de adaptação.

No ano letivo 2020/21, já no 11.º ano, foi necessário lecionar e aprofundar vários conteúdos não explorados no ano anterior, obrigando à adaptação da planificação prevista, num contexto muito marcado por alunos com falta de ritmo de trabalho, com dificuldades acrescidas e consequente impacto no seu desempenho e inclusive, pela falta contínua de alunos nas aulas presenciais, por motivo de isolamento profilático.

O ano letivo 2021/22 assumiu-se, assim, como o ano em que se concluíram os reajustamentos programáticos, tendo sempre em perspetiva a conclusão da disciplina e a realização do Exame Nacional, que abrange os conteúdos dos três anos do ensino secundário.

1.2 CARACTERIZAÇÃO DO GRUPO TURMA

Para uma melhor contextualização e enquadramento do trabalho e das metodologias utilizadas, fez-se uma caraterização dos alunos envolvidos, tendo em consideração seis pontos: o curso, o género, a idade, o número de retenções no percurso escolar, o número de níveis inferiores a dez valores, e as habilitações académicas dos encarregados de educação. Para a recolha dos dados elencados, foram consultadas as fichas biográficos dos alunos, preenchidas no início do ano letivo, onde constam as informações que serão analisadas de seguida.

- **Dados relativos ao curso dos alunos**

A sequência didática foi implementada nas turmas A, B e F do 12.º ano, as turmas A e B pertencem ao curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias com 30 (trinta) alunos e a turma F pertence ao curso Científico-Humanístico de Ciências Socioeconómicas com 18 (dezoito) alunos. Significa que a população em estudo é constituída por 48 (quarenta e oito) alunos, conforme consta na Tabela 2.

Tabela 2 – Distribuição dos alunos por turma e curso

Curso	Turma	Número de alunos
Ciências e Tecnologias	**A**	**14**
	B	**16**
Ciências Socioeconómicas	**F**	**18**
Total		**48**

- **Dados relativos ao género dos alunos**

Dos 48 (quarenta e oito) alunos em estudo, 20 (vinte) pertencem ao género masculino, que corresponde a 41,67 % dos alunos, 28 (vinte e oito) são do género feminino, que corresponde a 58,53% dos alunos (Gráfico 1).

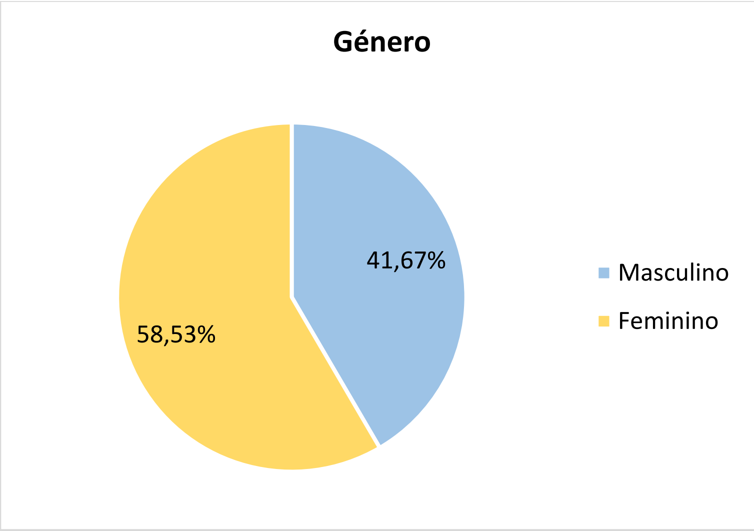


Gráfico 1 – Distribuição dos alunos por género

- **Dados relativos às idades dos alunos**

No Gráfico 2 pode observar-se a distribuição da idade dos alunos a 15 de setembro de 2021. Verifica-se que neste grupo de alunos, um aluno tem 16 anos, trinta e seis têm 17 anos, oito têm 18 anos, dois têm 19 anos e um tem 20 anos. A idade média dos alunos é 17 anos idade expectável para alunos que estão a iniciar o 12.º ano de escolaridade.

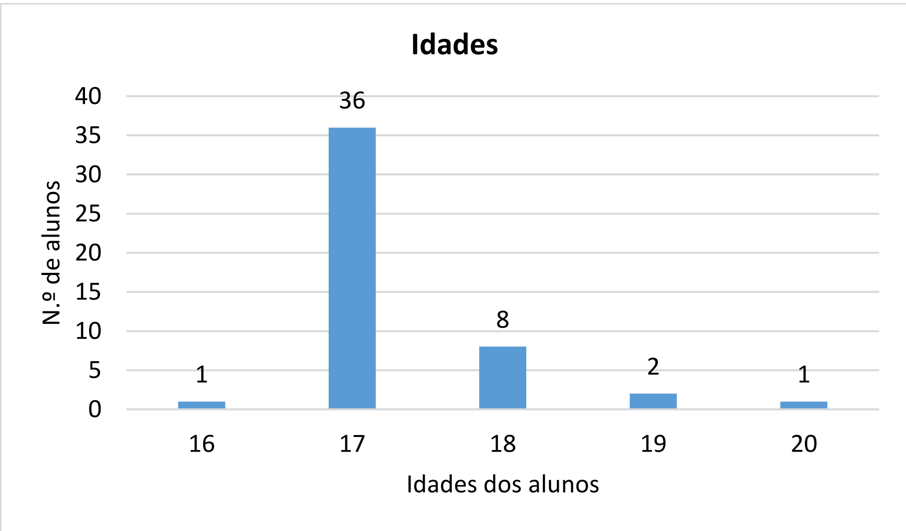


Gráfico 2 – Distribuição da idade dos alunos a 15 de setembro de 2021

- **Dados relativos ao número de retenções no percurso escolar**

No grupo de alunos objeto de estudo podemos constatar que a grande maioria (trinta e sete) não apresenta qualquer retenção no seu percurso escolar, o que corresponde a 77,08% dos alunos, que (oito) dos alunos tiveram apenas uma retenção, o que corresponde a 16,67% dos alunos, (dois) alunos apresentam duas retenções, o que corresponde 4,17% dos alunos e que 2,08% dos alunos tiveram três retenções no seu percurso escolar (Gráfico 3).

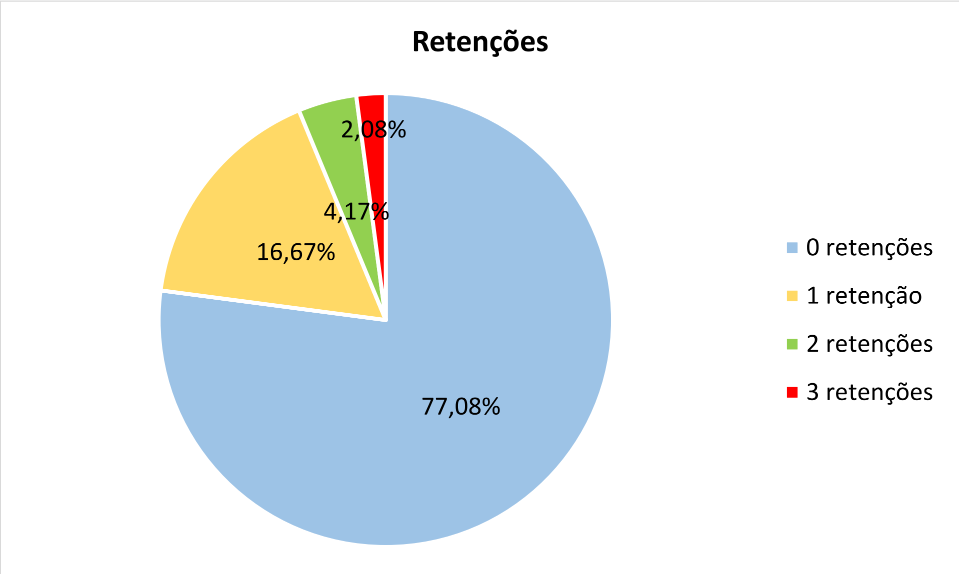


Gráfico 3 – Distribuição do número de retenções no percurso escolar

- **Número de alunos com nível inferior a 10 valores na disciplina**

Dos 48 (quarenta e oito) alunos em estudo, 11 (onze) apresentam nível inferior a 10 valores na disciplina de Matemática A no 11.º ano de escolaridade e 37 (trinta e sete) alunos obtiveram nível superior a 10 valores. Dos 37 alunos, 8 alunos, apresentam nível superior ou igual a 17 valores, sendo, por isso um grupo heterogéneo no que respeita a classificações obtidas no ano anterior, conforme mostra a Tabela 3.

Tabela 3 – Distribuição dos alunos por níveis de classificação no 11º ano

Classificação no 11.º ano	Número de alunos	Freq. Relativa (em %)
Inferior a 10 valores	11	23%
Entre 10 e 16 valores	29	60%
Superior a 16 valores	8	17%
Total	48	100%

- **Dados relativos às habilitações académicas dos encarregados de educação**

A análise das habilitações académicas dos encarregados de educação é efetuada com base na informação do Gráfico 4. Constata-se que existe um número elevado de encarregados de educação (vinte e um) com licenciatura, o que corresponde a cerca de 43,91% e, se considerarmos todo o ensino básico, 1º, 2º e 3º ciclos, temos nove encarregados de educação, o que corresponde a 18,75%. Também se pode observar que 56,25% não possuem mais do que o ensino secundário.

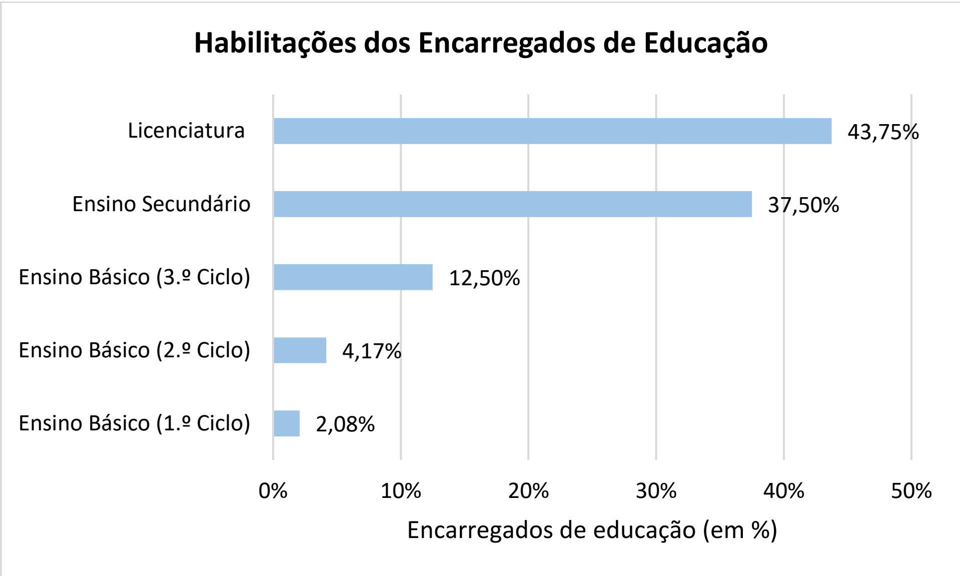


Gráfico 4 – Distribuição das habilitações académicas dos encarregados de educação

2. SEQUÊNCIA DIDÁTICA IMPLEMENTADA

2.1 OBJETIVOS

O objetivo da dissertação é implementar um projeto de investigação - ação, nas minhas aulas, numa sequência didática em que se aplique um processo de avaliação pedagógica que ajude os meus alunos a aprender mais e, sobretudo, melhor. É a partir da materialização, da integração de conhecimento, que se torna possível desenvolver práticas de avaliação pedagógica que tenham real sentido e que envolvam ativamente todos e cada um dos participantes, na concretização dos seus fundamentais desígnios (distribuição sistemática de *feedback* de elevada qualidade, envolvimento dos alunos nos processos de avaliação, diversificação dos processos de recolha de informação).

Na conceção e elaboração desta sequência didática, foi dado um enfoque particular à avaliação pedagógica, uma vez que ela está no cerne da conceptualização deste trabalho de investigação-ação.

A sequência didática, ao ter de ser concretizada no contexto escolar, numa sala de aula, em interação com os alunos, não pode deixar de ter em conta um domínio do currículo. Assim, quando pensei na conceção e na elaboração da sequência, escolhi o tema das funções do 12.º ano de escolaridade – Conceito de limite de uma função e suas aplicações, nomeadamente: continuidade; Teorema de Bolzano-Cauchy e assíntotas ao gráfico de uma função. Esta sequência foi desenvolvida durante as primeiras semanas do ano letivo 2021/22.

Para efeitos da conceção e elaboração da sequência, tive em conta os seguintes elementos:

- um conjunto de princípios no domínio da avaliação pedagógica;
- um sistema de avaliação;
- um sistema de classificação.

No que se refere aos princípios no domínio da avaliação pedagógica, cujo principal propósito é contribuir para que os alunos aprendam mais e melhor, identifiquei como prioritário trabalhar e incutir, nas rotinas das minhas práticas letivas, os seguintes princípios:

1. Coerência entre os processos de avaliação, as aprendizagens e as competências desenvolvidas, de acordo com os contextos em que ocorrem;

2. Reforço das dinâmicas de avaliação formativa, avaliação para as aprendizagens, que permitam um maior conhecimento da eficácia do trabalho realizado na sala de aula e um acompanhamento ao primeiro sinal de dificuldade nas aprendizagens dos alunos;

3. A avaliação formativa - avaliação para as aprendizagens-, e a avaliação sumativa - avaliação das aprendizagens-, devem valorizar a evolução dos desempenhos dos alunos e o compromisso com o seu percurso educativo;

4. Primazia da avaliação formativa, com valorização dos processos de autoavaliação regulada e da sua articulação com os momentos de avaliação sumativa;

5. A avaliação formativa e a avaliação sumativa devem ter em conta as finalidades e objetivos de aprendizagem previstos no currículo, assim como a definição clara e concisa dos critérios através dos quais se pode avaliar a sua consecução;

6. Importância das técnicas utilizadas na melhoria da qualidade das aprendizagens na perspetiva dos alunos.

É minha preocupação que a avaliação sumativa surja sempre como consequência do trabalho desenvolvido formativamente em sala de aula e que os instrumentos de avaliação sumativa estejam em consonância com os instrumentos de avaliação formativa. É importante que uma avaliação sumativa esteja articulada com os princípios, os métodos e os conteúdos da avaliação formativa. Esta ideia tem um alcance significativo, pois, se estivermos perante a prática de uma verdadeira avaliação formativa, a avaliação sumativa acaba por consistir num momento particularmente rico e devidamente ponderado de integração e de síntese da informação recolhida acerca do que os alunos sabem e são capazes de fazer numa variedade de situações. Mas são, obviamente, processos complementares que podem e devem contribuir para apoiar o desenvolvimento das aprendizagens dos alunos.

2.2 Descrição do processo de implementação da sequência didática desenhada

2.2.1 Partilha do documento-síntese "Antes de começar: princípios e fases do processo de avaliação a implementar"

De modo a informar os alunos, desde o início do ano letivo, das "regras do jogo", isto é, os princípios da avaliação considerados fundamentais, as fases e os objetivos do processo de avaliação a implementar ao longo do ano, foi entregue aos alunos um documento-síntese, intitulado "Antes de começar: princípios e fases do processo de avaliação a implementar" (*Anexo 1*), no qual consta a seguinte informação:

- Princípios da avaliação, com enfoque para o da transparência, essencial à autorregulação e empoderamento dos alunos ao longo do processo de avaliação; o da melhoria da qualidade das aprendizagens, assente num envolvimento ativo e no compromisso dos alunos em melhorarem as suas aprendizagens e, por conseguinte, os seus resultados e o da diversificação, de forma a incluir, na avaliação, desempenhos variados dos alunos, sem o recurso exclusivo à testagem.
- Temas lecionados no Ensino Secundário (Figura 34), numa visão articulada entre os três anos deste nível de ensino e dando enfoque aos previstos para o 12.º ano[4];

[4] Os temas de Geometria estão identificados com uma seta verde. Os temas assinalados com uma seta vermelha dizem respeito às Funções. Da análise da tabela, constata-se que os temas de Funções são transversais a todo o Ensino Secundário.

10.º Ano

- Geometria analítica no espaço
- Cálculo vetorial no plano e no espaço
- Generalidades acerca de funções reais de variável real
- Funções quadráticas, módulo e funções definidas por ramos

11.º Ano

- Geometria analítica no plano e no espaço
- Sucessões
- Funções reais de varável real
- Limites e derivadas de funções polinomiais e racionais

12.º Ano

- Continuidade e assíntotas
- Derivadas, monotonia e concavidades
- Funções exponenciais e logarítmicas
- Funções trigonométricas

Figura 34 – Temas abordados na disciplina de Matemática A – Ensino Secundário

- Explicitação das duas dimensões da avaliação a implementar, a saber, a avaliação formativa e a avaliação sumativa, esclarecendo os objetivos subjacentes a cada uma delas; como se concretizam e em que momentos. Recorreu-se, para tal, às metáforas da casa (ora em construção – avaliação formativa- ora construída – avaliação sumativa) e do jogo de futebol (ora em fase de treino, ora em competição) (Figura 35). Integraram-se, em cada uma destas duas dimensões, os instrumentos de recolha de informação a aplicar: no âmbito da avaliação formativa, definiu-se o Plano Individual de Trabalho (PIT), a Questão-aula, o Código de Correção e as técnicas Pausa de 3 minutos e Ponto Mais Importante. Para a avaliação sumativa, definiu-se a Ficha de Avaliação Sumativa e Questão-aula;

Avaliação formativa:

- para treino, consolidação e melhoria: O que ainda não sei? O que tenho de fazer para melhorar?
- não releva para a classificação final.

- Plano Individual de Trabalho (PIT)
- Questões-Aula
- Código de Correção
- Pausa dos 3 Minutos (P3M)
- Ponto Mais Importante

Avaliação sumativa:

- para atestar, num determinado momento, o que o aluno sabe;
- releva para a classificação final.

- Ficha de avaliação sumativa
- Trabalhos individuais / Outros
- Balanço do trabalho desenvolvido

Figura 35 – Explicitação das dimensões da avaliação implementadas

- Explicitaram-se os critérios de avaliação subjacente a todo o processo de avaliação dos alunos, quer os critérios específicos da disciplina, definidos ao nível do grupo disciplinar da escola (Mobilização de conceitos e procedimentos; Resolução de problemas; Raciocínio matemático e Comunicação matemática), quer ainda os critérios transversais, de caráter atitudinal, definidos ao nível da escola (Autonomia; Responsabilidade; Participação/Envolvimento);
- Delineou-se o cronograma do sistema de classificação, com a calendarização dos instrumentos de avaliação sumativa a realizar e para cada um destes, os critérios mobilizados e a respetiva classificação, a qual, complementada com a classificação final do instrumento (Figura 36) e respetiva ponderação na classificação final do aluno, concretiza a avaliação criterial (Figura 37). Esta informação é coligida pelo professor e também pelo aluno em documento próprio fornecido pelo professor, neste mesmo documento, "Antes de começar: princípios e fases do processo de avaliação a implementar", para que o aluno disponha de toda a informação sobre o seu desempenho em contexto sumativo, propiciando, nos momentos de balanço (sobretudo, de final de semestre), uma autoavaliação mais sustentada, logo, consciente e informada.

	Data	Instrumento/tarefa	C1	C2	C3	C4	Classificação
1.º Semestre		Ficha de avaliação sumativa - 1					
		Questão de aula – Comunicação Matemática					
		…					

	Data	Instrumento/tarefa	C1	C2	C3	C4	Classificação
2.º Semestre		…					
		Questão de aula – Resolução de Problemas					
		Ficha de avaliação sumativa - 3					

Preencher as colunas identificadas com C1, C2, C3 e C4 com a informação devolvida na Tarefa/Instrumento de avaliação:
MB – Muito Bom; **B** – Bom; **S** – Suficiente; **I** – Insuficiente; **MI** – Muito Insuficiente

Figura 36 – Folha de registo das menções atribuídas nos critérios avaliados em cada Instrumento/tarefa

1.º Semestre	
Instrumento de avaliação	**Percentagem na classificação final**
Ficha de avaliação sumativa - 1	**25%**
Questão de aula - Comunicação Matemática	**5%**
…	…

2.º Semestre	
Instrumento de avaliação	**Percentagem na classificação final**
Ficha de avaliação sumativa - 1	**25%**
Questão de aula - Comunicação Matemática	**5%**
…	…

Figura 37 – Ponderação atribuída a cada instrumento/tarefa de avaliação

2.2.2 Partilha dos Perfis de Aprendizagens Específicas

Considerando que, como o referimos na primeira parte da presente dissertação, a legislação prevê a aprovação, pelo Conselho Pedagógico, de um Perfil de Aprendizagens Específicas por disciplina (Anexo 2 e Anexo 3), foi elaborado este documento que funciona como referencial da avaliação na disciplina de Matemática do ensino secundário.

Foi apresentado e explicado aos alunos este referencial, nomeadamente a relação entre os critérios definidos e os respetivos níveis de desempenho e standards (Figura 38 e Figura 39), bem como a mais-valia de disporem de uma descrição, por níveis, dos desempenhos esperados para reforçar a transparência no processo de avaliação e dotar os alunos de um referencial para o nível de desempenho máximo.

Critérios	20 a 18 valores	17 a 14 valores	13 a 10 valores	9 a 7 valores	6 a 0 valores
Mobilização de conceitos e procedimentos	Revela um conhecimento consolidado sobre os conteúdos explorados e utiliza com rigor, nos diferentes tipos de tarefas propostas, os procedimentos matemáticos e a linguagem simbólica.	Revela um conhecimento globalmente consolidado sobre os conteúdos explorados e utiliza adequadamente, embora com falhas pontuais, nos diferentes tipos de tarefas propostas, os procedimentos matemáticos e a linguagem simbólica.	Revela um conhecimento globalmente consistente-sobre os conteúdos explorados e utiliza adequadamente, embora com algumas falhas, na maioria das tarefas propostas, os procedimentos matemáticos e a linguagem simbólica.	Revela um conhecimento insuficiente e superficial sobre os conteúdos explorados e utiliza com falhas recorrentes, na maioria das tarefas propostas, os procedimentos matemáticos e a linguagem simbólica.	Não revela conhecimento sobre os conteúdos explorados e não utiliza ou utiliza com falhas sistemáticas, nas tarefas propostas, os procedimentos matemáticos e a linguagem simbólica.
…	…	…	…	…	…

Figura 38 – Perfis de aprendizagens específicas (critérios específicos da disciplina)

Critérios	20 a 18 valores	17 a 14 valores	13 a 10 valores	9 a 7 valores	6 a 0 valores
Responsabilidade (cumprimento dos prazos, material, pontualidade, integração do *feedback* no processo de melhoria)	Revê as tarefas com base no *feedback* fornecido, aperfeiçoando-as em função dos objetivos previstos.	Revê as tarefas com base no *feedback* fornecido, aperfeiçoando-as, mas não atingindo totalmente os objetivos previstos.	Revê as tarefas com base no *feedback* fornecido, aperfeiçoando-as, mas atingindo apenas alguns dos objetivos previstos.	Revê as tarefas integrando apenas algumas orientações do *feedback* fornecido, aperfeiçoando-as pontualmente, atingindo muito pontualmente os objetivos previstos.	Não revê Ou Revê as tarefas sem integrar as orientações do *feedback* fornecido.
…	…	…	…	…	…

Figura 39 – Perfis de aprendizagens específicas (critérios transversais da disciplina)

2.2.3 Partilha das rubricas de avaliação de tarefa

A participação no processo de avaliação exige a partilha de referenciais de sucesso e de desempenho que clarifiquem para todos os intervenientes (professores e alunos) as aprendizagens esperadas, bem como os critérios que explicitem a forma como devem ser adquiridas. Para clarificar e explicitar o que é espectável que os alunos aprendam com uma determinada tarefa, foram entregues e discutidos com os alunos dois documentos onde constam as rubricas de tarefa, uma de resolução de problemas e outra de comunicação matemática (Anexo 4 e Anexo 5). Assim, os alunos ficaram a conhecer e a compreender antecipadamente as descrições dos níveis de desempenho dos critérios definidos, ficaram com uma ideia mais clara do que se espera que consigam saber e ser capazes de fazer e de como o seu trabalho será avaliado (Figura 40 e Figura 41). É muito importante que os alunos sejam informados do que é necessário para resolver um dado problema ou uma tarefa de comunicação matemática, que passos devem percorrer para resolverem a tarefa, assim como do que é tido em conta para formularem juízos de valor acerca da qualidade do trabalho que têm de desenvolver. No entanto, todos estes documentos necessitam de um trabalho permanente de mediação do professor e a capacidade de compreensão dos alunos, pois se os alunos não compreenderem os objetivos de aprendizagem e os critérios de sucesso, a relevância e a participação ficarão comprometidas.

Critérios \ Escala		Muito Bom	Bom	Suficiente	Insuficiente	Muito Insuficiente
A-Compreensão do problema		• Transcrevi todos os dados corretamente. • Relacionei corretamente, num esquema, os conceitos necessários à resolução do problema.	• Transcrevi todos os dados corretamente. • Relacionei corretamente, num esquema, mas com erros pontuais, os conceitos necessários à resolução do problema.	• Transcrevi todos os dados corretamente. • Relacionei num esquema, mas com várias incorreções, os conceitos necessários à resolução do problema.	• Cometi alguns erros na transcrição dos dados. • Relacionei num esquema, mas com várias incorreções, alguns dos conceitos necessários à resolução do problema.	• Não transcrevi os dados do problema. • Fiz num esquema que não integra os conceitos necessários à resolução do problema.
C-Implementação da estratégia	⋮	• …	• …	• …	• …	• …
	Identificação dos pontos e das suas coordenadas	• Identifiquei com rigor o(s) ponto(s) do gráfico necessário(s) à resolução do problema e indiquei as suas coordenadas, efetuando os procedimentos necessários.	• Identifiquei com rigor o(s) ponto(s) do gráfico necessário(s) à resolução do problema e indiquei as suas coordenadas, efetuando a maioria dos procedimentos necessários.	• Identifiquei com pouco rigor o(s) ponto(s) do gráfico necessário(s) à resolução do problema e indiquei as suas coordenadas, efetuando a maioria dos procedimentos necessários.	• Não identifiquei o(s) pontos do gráfico necessário(s) à resolução do problema, mas indiquei as suas coordenadas.	• Não efetuei os procedimentos necessários.
	⋮	• …	• …	• …	• …	• …

Figura 40 – Rubrica de tarefa – Resolução de problemas

Critérios \ Escala	Muito Bom	Bom	Suficiente	Insuficiente	Muito Insuficiente
…	• …	• …	• …	• …	• …
Aplicação dos conhecimentos	• Constrói uma explicação que contempla corretamente todos os pontos elencados.	• Constrói uma explicação que contempla corretamente todos os pontos elencados, mas com erros pontuais.	• Constrói uma explicação que contempla corretamente a maioria dos pontos elencados.	• Constrói uma explicação que contempla corretamente a minoria dos pontos elencados.	• Não constrói uma explicação. OU • Constrói uma explicação que contempla incorretamente todos os pontos elencados.
Fundamentação	• Aplica e relaciona corretamente os conceitos.	• Aplica e relaciona corretamente, mas com falhas pontuais, os conceitos.	• Aplica e relaciona alguns dos conceitos, de forma globalmente correta, com falhas pontuais que não comprometem a resolução.	• Aplica e relaciona alguns dos conceitos, com incorreções que comprometem a resolução.	• Não aplica nem relaciona os conceitos. OU • Aplica e relaciona os conceitos incorretamente.
…	• …	• …	• …	• …	• …

Figura 41 – Rubrica de tarefa – Comunicação Matemática

2.3 TÉCNICAS DE RECOLHA DE INFORMAÇÃO COM FINALIDADE FORMATIVA

A avaliação para as aprendizagens envolve a utilização da avaliação em sala de aula para elevar o rendimento dos alunos, com base na ideia de que estes aprendem mais quando compreendem os objetivos pretendidos para a sua aprendizagem, onde estão em relação a esses objetivos e como podem alcançá-los. Deste modo, a avaliação é vista como suporte da aprendizagem e ocorre quando os professores utilizam dados sobre a aprendizagem dos alunos para informar o ensino. Implica que os professores averiguem o conhecimento dos alunos, as suas perceções, conceções alternativas e falhas na aprendizagem, e usem esses dados para informar a planificação das aulas e a prática pedagógica, com o objetivo de ajudar os alunos a potenciar as suas competências.

As cinco técnicas de avaliação formativa que implementei, nesta sequência de aprendizagem, tiveram como objetivo:

- Partilhar os perfis de aprendizagem com os alunos, incluindo os níveis de desempenho, de forma que estas se tornem explícitos para eles;
- Ajudar os alunos a compreender esses perfis para que os atinjam;
- Fornecer *feedback* construtivo que ajude os alunos a identificar as formas de melhorar o seu rendimento;
- Acreditar que cada aluno pode melhorar os seus resultados de aprendizagem anteriores e que os alunos possam rever e refletir sobre o seu desempenho e os progressos conseguidos.
- Assegurar que os alunos aprendem estratégias de autoavaliação para identificarem áreas que precisam melhorar;
- Aumentar os níveis de motivação e de autoestima, essenciais para uma aprendizagem eficaz e para o progresso, através de técnicas de avaliação eficazes.

Foram aplicadas cinco técnicas de avaliação formativa, adaptadas da obra *50 Técnicas de Avaliação Formativa* (Lopes & Silva, 2012)

- A de distribuição, por escrito, de *feedback* descritivo nas questões-aula aplicadas;
- O código de correção, quer nas tarefas formativas (questões-aula), quer nos testes de avaliação sumativa.
- A Pausa de três minutos;
- O Ponto mais importante da aula;
- O Plano Individual de Trabalho.

2.3.1 Questão-aula com *feedback* descritivo

Como se aplica?

É utilizado o código de correção e é dado *feedback* escrito numa grelha com sugestões e propostas de melhoria (Anexo 6). Cada questão-aula compreende um conjunto de três a quatro itens, com tipologias diferentes; são dados 15 a 20 minutos, no final da aula, para resolverem individualmente o conjunto de itens; os conteúdos testados correspondem aos conteúdos lecionados na semana anterior; na correção é utilizado o código de correção que dá *feedback* ao aluno relativamente ao tipo de erros cometidos; é fornecido todo o *feedback* necessário para a melhoria das aprendizagens (Figura 42). Após os alunos terem realizado as questões-aula de caráter formativo, terem recebido *feedback* e terem trabalhado os conteúdos em que apresentavam fragilidades, alguns dos itens que foram objeto de avaliação formativa poderão ser aplicados num instrumento de avaliação com caráter sumativo.

Permite aos alunos:

- ✓ Verificar o que já sabe fazer e o que necessita melhorar.
- ✓ Caso as dificuldades sejam pontuais ou apenas de alguns alunos, as propostas de melhoria serão realizadas apenas por esses alunos, de forma autónoma ou no apoio educativo sob a orientação de um professor da disciplina. Caso as dificuldades sejam generalizadas, volto a trabalhar esse conteúdo com toda a turma.
- ✓ A avaliação para a aprendizagem conduz a que os alunos aprendam num *continuum* e permaneçam confiantes de que podem continuar a aprender em níveis de complexidade mais elevados se persistirem em tentar aprender, diminuindo, assim, a probabilidade de os alunos desistirem de aprender por frustração ou desespero;
- ✓ Reforçar a reflexão individual e melhorar a autoavaliação.

Permite ao professor:

- ✓ Aferir a compreensão dos conteúdos e o desenvolvimento de várias competências e decidir sobre as próximas atividades de aprendizagem;
- ✓ Proporcionar aos alunos *feedback* sobre o domínio explorado e respetivos conteúdos, bem como das competências desenvolvidas durante a aprendizagem.

<table>
<tr><th>Conteúdos</th><th>Consegue</th><th>Consegue, mas</th><th>Revela dificuldades</th><th>Não consegue</th></tr>
<tr><td>Justificar a continuidade de uma função num subconjunto do seu domínio.</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Definir as condições de aplicabilidade do Teorema de Bolzano-Cauchy.</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(…)</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Consegue, mas necessita melhorar</td><td colspan="3">• Apresentação/organização da sua resposta.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">• O uso correto das notações formais (Ex. troca entre sinal de = e o sinal de <=> …).</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">• (…)</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Necessita de rever</td><td colspan="3">• A continuidade de uma função num subconjunto do domínio.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">• As condições de aplicabilidade do Teorema de Bolzano-Cauchy</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">• (…)</td><td></td></tr>
<tr><td>Observações</td><td colspan="4">O que não sabe deve voltar a estudar ou a pedir ajuda na aula para poder atingir os objetivos pretendidos. Rever os exercícios resolvidos nas aulas e cumprir o plano individual de trabalho.</td></tr>
</table>

Figura 42 – Tabela de *feedback* da Questão-aula

2.3.2 Código de correção

Como se aplica?

Utiliza-se um conjunto de símbolos que identificam erros-tipo/falhas nas respostas aos itens de construção que envolvam cálculos ou justificações e que têm em conta as situações específicas previstas nos critérios de classificação que são aplicados nas provas de avaliação sumativa externa, disponibilizados pelo Instituto de Avaliação Educacional (IAVE) (Anexo 7). Perante a verificação de uma das situações descritas no Código de Correção, o professor regista o símbolo respetivo durante o processo de avaliação/classificação/análise das respostas produzidas pelos alunos. O professor poderá/deverá fazer o levantamento dos símbolos mais utilizados/das situações registadas com maior frequência e partilhá-las com os alunos, preferencialmente, na aula em que devolve as tarefas/os instrumentos de avaliação aos alunos (Figura 43).

Permite aos alunos:

- ✓ Quando o aluno recebe as tarefas ou os instrumentos de avaliação, analisa os símbolos registados nas respostas, confrontando-os com o Código de Correção que foi partilhado com ele;
- ✓ De uma forma exequível, o professor disponibiliza informação de qualidade que ajuda o aluno a melhorar o seu desempenho;
- ✓ O professor identifica o que está menos bem, mas é ao aluno que cabe (re)fazer a tarefa, corrigir o erro;
- ✓ Ao tipificar os erros e exemplificar cada um destes, permite aos alunos identificar o tipo de erro cometido numa tarefa e utilizar estratégias de autorregulação para os corrigir.

Permite ao professor:

- ✓ Fornecer, de forma codificada, a tipologia de erros cometidos pelos alunos, nomeadamente erros de arredondamento, erros de cálculo, erro formal …
- ✓ Devolver informação de qualidade aos alunos, sem acréscimo de tempo de trabalho do professor.
- ✓ A apropriação do Código de Correção pelos alunos é beneficiada quando os professores da disciplina (ou de disciplinas afins) utilizam o mesmo conjunto de símbolos.

✓	• **Etapa completamente certa**
✗	• **Etapa completamente errada**
〰	• **Erro de cálculo**
○	• **Erro formal**
—	• **Erro de escrita matemática**
…	• …

Figura 43 – Código de correção

2.3.3 Técnica Pausa de 3 minutos

Como se aplica?

No final de cada semana de aulas, o professor pede aos alunos para, individualmente ou em grupo, em cerca de 3 minutos, sintetizarem oralmente os conceitos abordados até ao momento e relacionarem os mesmos com os conceitos explorados anteriormente (Anexo 8). A verbalização desta síntese permite também esclarecer dúvidas ou fornecer uma explicação adicional.

Confrontam-se as várias sínteses orais e consensualiza-se uma versão a registar no quadro (Figura 44).

Permite aos alunos:

- ✓ Refletirem sobre os conceitos apresentados, sistematizarem-nos e relacionarem-nos com conhecimentos ou experiências anteriores;
- ✓ Percorrerem três etapas cognitivas:
  - ✓ **Sintetizar** as ideias-chave abordadas até ao momento da aula em que se utiliza a técnica;
  - ✓ **Relacionar o**s conceitos: complementar com conteúdos já trabalhados;
  - ✓ **Verbalizar** o conhecimento.
- ✓ Compararem as ideias dos colegas com a sua própria forma de pensar sobre o mesmo assunto. Neste processo de confronto, os alunos podem reestruturar as suas ideias ou completá-las, tornando-as mais complexas;
- ✓ Esclarecer qualquer dúvida de imediato, evitando que os alunos acumulem dificuldades que podem originar falhas mais profundas na compreensão e comprometer aprendizagens subsequentes.

Permite ao professor:

- ✓ Aferir, durante o processo de aprendizagem, se os alunos compreendem os conceitos explorados;
- ✓ Remediar as falhas detetadas de uma forma imediata, evitando ter de retomar conteúdos mais tarde;
- ✓ Responsabilizar os alunos pela sua aprendizagem, dando-lhes oportunidade para controlarem este processo em etapas sucessivas e devidamente orientadas.

2.3.4 Ponto Mais Importante

Como se aplica?

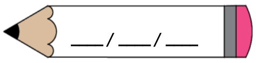
No final da semana, como complemento à técnica Pausa de 3 minutos, explicita-se, no mesmo registo, o Ponto Mais Importante (cf. Figura 44), através do qual os alunos salientam o(s) conteúdo(s) que consideram mais importante(s) (Anexo 8).

Permite aos alunos:

- ✓ Sistematizarem os conteúdos trabalhados na aula e identificar os pontos mais importantes;
- ✓ Focarem-se nos objetivos previstos para a semana letiva;
- ✓ Hierarquizarem os conteúdos, distinguindo os conteúdos estruturantes.

Permite ao professor:

- ✓ Recolher informação sobre a importância que os alunos dão, para a sua aprendizagem, aos conceitos explorados;
- ✓ Usar esta informação para esclarecer ou enfatizar conceitos ou situações, se os pontos mais importantes dos alunos diferirem dos pontos principais da semana de aulas;
- ✓ Aferir a eficácia das estratégias implementadas, visível quando os alunos identificam os conteúdos estruturantes abordados.



Pausa dos 3 minutos	
Que conceitos aprendemos hoje	**Relação com o que já aprendeste**
Ponto mais importante:	

Figura 44 – Pausa de 3 minutos e Ponto mais importante

2.3.5 Plano Individual de Trabalho

Como se aplica?

Depois de uma Questão-aula, com finalidade formativa, na qual são identificados os conteúdos a aprofundar em função do desempenho dos alunos, elabora-se um Plano Individual de Trabalho (Anexo 9).

O Plano é utilizado como complemento e não como estratégia central no processo de aprendizagem. Não é implementado na fase inicial da aprendizagem, mas para treinar, sistematizar conceitos explorados na aula ou para os aplicar em contextos mais variados.

O Plano é composto por duas partes: uma, de trabalho obrigatório, a realizar, de forma autónoma, por todos os alunos e outra, de caráter facultativo, assente em tarefas de aprofundamento dos conteúdos (Figura 45). As aulas de apoio são utilizadas como momentos de acompanhamento deste Plano, bem como para esclarecer as dúvidas apresentadas.

Permite aos alunos:

- ✓ Escolher a ordem de realização das tarefas e no caso da segunda parte, de aprofundamento, selecionar as tarefas assentes nos conteúdos onde revelou dificuldade;
- ✓ Trabalhar ao seu ritmo, explorar o seu potencial, sem ser travado por um ritmo de trabalho médio, imposto pelo professor à turma toda;
- ✓ Promover a autorregulação do seu processo de aprendizagem;
- ✓ Autoavaliar a sua aprendizagem e colmatar as dificuldades diagnosticadas, com a ajuda do professor e de colegas, para aumentar as suas probabilidades de sucesso.

Permite ao professor:

- ✓ Quando é realizado na aula, o professor liberta-se, nestes momentos, do papel de condutor da turma para acompanhar os alunos com dificuldade;
- ✓ Oferecer ajuda diferenciada de acordo com as dificuldades de aprendizagem mostradas pelos alunos;
- ✓ Possibilita a consolidação e/ou a restruturação de conhecimentos menos bem adquiridos.

Plano Individual de Trabalho 3

Assuntos: Teorema de Bolzano-Cauchy. Assíntotas verticais

Trabalho de treino (Trabalho obrigatório)

Devo ser capaz de	**Vou fazer**		**O que fiz** (indicar o n.º do exercício e página, se for o caso)	**Já sou capaz (✖ ou✓)**
Teorema de Bolzano-Cauchy	**3**	Ficha 3 - Apoio		
	7			
Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy	**4**	Ficha 3 - Apoio		
	8			
Aplicação do Teorema de Bolzano-Cauchy na solução de condições.	**9**	Ficha 3 - Apoio		
…	…	…		

Trabalho de aprofundamento

Devo ser capaz de	**Tarefas**		**O que penso fazer**	**O que fiz**
Aplicação do Teorema de Bolzano-Cauchy na solução de condições.	**11**	Ficha 3 - Apoio		
Aplicação do Teorema de Bolzano-Cauchy na resolução de problemas.	**16**			

Figura 45 – Plano Individual de Trabalho

2.4 AVALIAÇÃO SUMATIVA

2.4.1 Objetivos

Durante o processo de ensino e aprendizagem, foram aplicados vários instrumentos de avaliação sumativa, com o objetivo de recolher informação rigorosa e consistente com as finalidades de aprendizagem constantes no currículo. Na elaboração dos instrumentos de avaliação, foram tidos em conta: a avaliação formativa realizada durante toda a sequência; a formulação dos itens de modo a serem consistentes com o que foi ensinado; a necessidade, relativamente a um determinado conteúdo, de a formulação dos itens ter diferentes níveis de complexidade cognitiva; que estes mesmos itens não mobilizassem conhecimentos, capacidades ou procedimentos que não foram devidamente tratados nas aulas; a utilização de diferentes tipologias de itens (por exemplo, de escolha múltipla, de resposta curta; de resposta restrita) (Anexo 10).

Pese embora o caráter sumativo destes instrumentos de avaliação, os mesmos têm também algum potencial formativo, pois pretende-se, por um lado, obter informação sobre os conteúdos lecionados nesta sequência de aprendizagem e por outro, dar ao aluno *feedback* para além da classificação obtida (global e por item), através da: classificação do instrumento de avaliação; da correção em grande grupo; da aplicação do código de correção já apresentado no Anexo 7 e da apropriação dos critérios de classificação. Por fim, foi feita a análise e síntese dos resultados, utilizando um gráfico de distribuição das classificações por intervalos, a média de classificação da turma, o desvio padrão e índice de dificuldade de cada item.

Tal como a avaliação formativa, a avaliação sumativa também tem um papel muito relevante no processo de aprendizagem dos alunos. A avaliação sumativa permite recolher uma informação sistematizada e sintetizada e aferir se as estratégias implementadas, nomeadamente de autorregulação do aluno (que através do trabalho faseado e do *feedback* dado, teve oportunidade de consolidar aprendizagens), alcançaram os resultados previstos. Elaborei um balanço, acerca do que os alunos sabem e são capazes de fazer no final da sequência didática. Dito de outra forma, a avaliação sumativa permitiu-me recolher, de forma pensada e deliberada, informações consideradas indispensáveis para classificar os meus alunos.

Para me ajudar a validar e a melhorar a qualidade de cada um dos meus testes, foi elaborada uma matriz de conteúdos (Figura 46 e Anexo 11), fornecida aos alunos, e uma matriz de especificações (Figura 47 e Anexo 12). Após a aplicação do instrumento de avaliação, foi feita uma análise utilizando as caraterísticas psicométricas do instrumento e dos itens, através do índice de dificuldade, do índice de discriminação e a relação entre as duas medidas. Esta análise permite recolher informação sobre a qualidade do instrumento e, consequentemente, transmite confiança no que os alunos sabem e são capazes de fazer. Dito de outra maneira, a avaliação tem qualidade quando permite obter uma representação rigorosa das aprendizagens desenvolvidas pelos alunos e, simultaneamente, responde às necessidades de informação sobre os seus desempenhos e as suas aprendizagens.

Domínio cognitivo / TEMAS / Conteúdos	Nível Inferior Conhecer / Reproduzir	Nível Médio Aplicar / Interpretar	Nível Superior Raciocinar / Criar	Peso (pontos – %)
C1 – MOBILIZAÇÃO DE CONCEITOS E PROCEDIMENTOS		Item 1. – RR (25 pontos)		**25 – 12,5%**
C2 – RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS		Item 3.2. – RR (30 pontos)	Item 5.1. – RR (30 pontos) Item 5.2. – RR (25 pontos)	**85 – 42,5%**
…	…	…	…	**…**
Peso (pontos – %)	**20 – 10%**	**100 – 50%**	**80 – 40%**	**200 – 100%**

Itens de seleção: **EM** – Escolha Múltipla; **A** – Associação; **V/F** – Verdadeiro/Falso; **C** – Completamento; **O** – Ordenação.
Itens de construção: **C** – Completamento; **RC** – Resposta Curta; **RR** – Resposta Restrita; **RE** – Resposta Extensa.

Figura 46 – Matriz específica de um instrumento de avaliação sumativa

Objeto de avaliação – Aprendizagens Essenciais: conhecimentos e capacidades

LIMITES DE FUNÇÕES POLINOMIAIS, RACIONAIS E IRRACIONAIS

- Conhecer o conceito de limite segundo Heine;
- Determinar:
  - limite de uma função num ponto aderente ao respetivo domínio;
  - limites laterais;
  - limites no infinito;
- Operar com limites e casos indeterminados em funções;
- Calcular limites recorrendo ao levantamento algébrico de indeterminações.

CONTINUIDADE E ASSÍNTOTAS

- …

Caraterização – Estrutura / Cotação (em 200 pontos)

	Conteúdo	Número/tipologia de item	Cotação (em 200 pontos)
Grupo I	• Limites; • Continuidade num ponto; • Assíntotas; • Interpretação geométrica de derivada; • Derivadas.	5 itens/ escolha múltipla	50 pontos
Grupo II	• Limites; • Teorema de Bolzano-Cauchy; • Continuidade de uma função.	1 ou 2 itens/ resposta restrita	10 a 20 pontos
…	• …	…	…

Figura 47 – Matriz de conteúdos de um instrumento de avaliação sumativa

2.4.2 Sistema de classificação

Na definição do sistema de classificação da disciplina de Matemática A, optou-se por ponderar o desempenho dos alunos nos critérios (específicos e transversais) elencados nos Perfis de Aprendizagens Específicas, a saber:

- C1 – Mobilização de conhecimentos
- C2 – Resolução de problemas
- C3 – Raciocínio matemático
- C4 – Comunicação Matemática

2.4.3 Código de correção

Nos instrumentos de avaliação sumativa, é utilizado o mesmo código de correção aplicado nas tarefas com caráter formativo (Anexo 7), promovendo-se a coerência entre os momentos de avaliação formativa e os de avaliação sumativa.

2.4.4 Rubricas de avaliação

No sentido de proporcionar, também nos instrumentos de avaliação sumativa, um feedback assente nos desempenhos previstos nos Perfis de Aprendizagens Específicas, é fornecido, no cabeçalho de cada teste, uma avaliação qualitativa, através de menção, por critério, do desempenho do aluno (Figura 48). A menção dada integra uma rubrica de avaliação, de caráter longitudinal, previamente fornecida aos alunos, a qual constitui uma versão sintética dos Perfis de Aprendizagem Específicas.

Nome: ____ N.º: _____ Turma: ____	O professor: ___________________

C1 – Mobilização de conceitos e procedimentos	**C2** – Resolução de problemas	**C3** – Raciocínio matemático	**C4** – Comunicação matemática

Classificação: ___________________ **(em 20 valores)**

MB – Muito Bom; **B** – Bom; **S** – Suficiente; **I** – Insuficiente; **MI** – Muito Insuficiente

Figura 48 – *Feedback* da avaliação sumativa

No final do enunciado do instrumento de avaliação, apresentam-se as cotações por item e por critério (Figura 49).

Critérios	Item / Cotação (em pontos)							Total
C1 – Mobilização de conceitos e procedimentos	**1.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.1.**	**7.**	**9.**	**86**
	10	10	10	10	15	17	14	
C2 – Resolução de problemas	**12.**	**13.**						**32**
	16	16						
C3 – Raciocínio matemático	**2.**	**6.2.**	**8.**	**10.2.**	**11.**			**68**
	10	14	14	16	14			
C4 – Comunicação matemática	**10.1.**							**14**
	14							
								200

Figura 49 – Distribuição das cotações dos itens / critérios de avaliação

No que diz respeito às fichas de avaliação sumativa construídas e aplicadas com fins classificatórios, elas têm também um uso pedagógico de reforço e melhoria das aprendizagens dos alunos, porque para além da classificação, distribui *feedback* com base nos critérios de avaliação e níveis de desempenho definidos para cada um. O professor entrega uma rubrica (Anexo 13) que foi discutida com os alunos, onde explicitou os objetivos de aprendizagem e os critérios de avaliação transversais a todas as tarefas de avaliação sumativa. A rubrica é constituída por quatro critérios, indicando cinco níveis de proficiência em relação aos objetivos de aprendizagem (Figura 50).

No momento da entrega e da correção do instrumento de avaliação realizado, o aluno tem a possibilidade de cruzar a informação registada no cabeçalho do teste (cf. Figura 48), informação essa que atribui uma menção qualitativa por critério, com os perfis de desempenho na rubrica fornecida. Esta análise tem o propósito de apoiar os alunos na identificação das dificuldades de aprendizagem em função dos critérios definidos.

Critérios	Muito Bom	Bom	Suficiente	Insuficiente	Muito Insuficiente
…	…	…	…	…	…
Raciocínio matemático	Desenvolve um raciocínio lógico adequado e correto para justificar procedimentos matemáticos e apresentar uma estratégia completa, justificando corretamente todas as etapas.	Desenvolve um raciocínio lógico adequado, embora com algumas imprecisões, para justificar procedimentos matemáticos e implementar uma estratégia completa, justificando com algumas imprecisões todas as etapas.	Desenvolve um raciocínio lógico (com imprecisões que não comprometem a compreensão) para justificar procedimentos matemáticos e implementar uma estratégia nem sempre completa, justificando de forma globalmente correta algumas das etapas.	Desenvolve um raciocínio lógico, ainda que de forma superficial e com erros que comprometem a compreensão, para justificar procedimentos matemáticos e implementar uma estratégia incompleta, justificando com incorreções as etapas efetuadas.	Não desenvolve um raciocínio lógico e não justifica procedimentos matemáticos nem implementa uma estratégia ou fá-lo de forma incorreta.
…	…	…	…	…	…

Figura 50 – *Feedback* com base nos critérios avaliados nos instrumentos de avaliação sumativa

2.4.5 Síntese descritiva de avaliação intercalar de semestre

A fim de fornecer, no momento de avaliação intercalar, a meio do semestre, um balanço qualitativo do desempenho dos alunos, que complemente os resultados quantitativos obtidos nos instrumentos de avaliação sumativa, é elaborada uma rubrica síntese de avaliação intercalar (Figura 51 e Anexo 14). A sua aplicação em contexto de sala de aula fornece aos alunos e ao professor, num processo de análise partilhada, um balanço do trabalho desenvolvido, depois, partilhado, com os encarregados de educação pelos meios formais utilizados pela escola.

Critério	20 a 18 valores	17 a 14 valores	13 a 10 valores	9 a 7 valores	6 a 0 valores
Mobilização de conceitos e procedimentos	Revela um conhecimento consolidado sobre os conteúdos explorados. Utiliza com rigor, nos diferentes tipos de tarefas propostas, os conceitos e os procedimentos matemáticos.	Revela um conhecimento globalmente consolidado sobre os conteúdos explorados. Utiliza adequadamente, embora com falhas pontuais, nos diferentes tipos de tarefas propostas, os conceitos e os procedimentos matemáticos.	Revela um conhecimento globalmente consistente sobre os conteúdos explorados. Utiliza adequadamente, embora com algumas falhas, na maioria das tarefas propostas, os conceitos e os procedimentos matemáticos.	Revela um conhecimento insuficiente e superficial sobre os conteúdos explorados. Utiliza com falhas recorrentes, na maioria das tarefas propostas, os conceitos e os procedimentos matemáticos.	Não revela conhecimento sobre os conteúdos explorados e não utiliza, nas tarefas propostas, os conceitos e os procedimentos matemáticos.
…	…	…	…	…	…

Figura 51 – Rubrica para as sínteses descritivas das avaliações intercalares

VI – O IMPACTO DA AVALIAÇÃO PEDAGÓGICA NA APRENDIZAGEM DOS ALUNOS DO ENSINO SECUNDÁRIO

Pretende-se aferir o impacto das práticas de avaliação pedagógica implementadas nas aprendizagens dos alunos. Propomos fazê-lo em dois campos: na perspetiva do professor e na dos alunos. Para tal, reconstituimos a sequência das técnicas de avaliação aplicadas através de quatro ciclos: o da avaliação formativa; o da avaliação sumativa; o ciclo de *feedback da* avaliação formativa e o ciclo de *feedback da* avaliação sumativa.

1. IMPACTO AFERIDO PELO PROFESSOR

Propomo-nos descrever as técnicas de recolha de informação utilizadas nas dimensões formativa e sumativa da avaliação, bem como sobre as técnicas de feedback implementadas em cada uma dessas duas dimensões, refletindo sobre a sua eficácia, aferida pelo impacto das mesmas nas aprendizagens dos alunos, mas também, a montante, na motivação e empenho dos mesmos e no seu contributo para a autorregulação dos alunos, concretizando os objetivos da avaliação como aprendizagem.

1.1 CICLO DE AVALIAÇÃO FORMATIVA

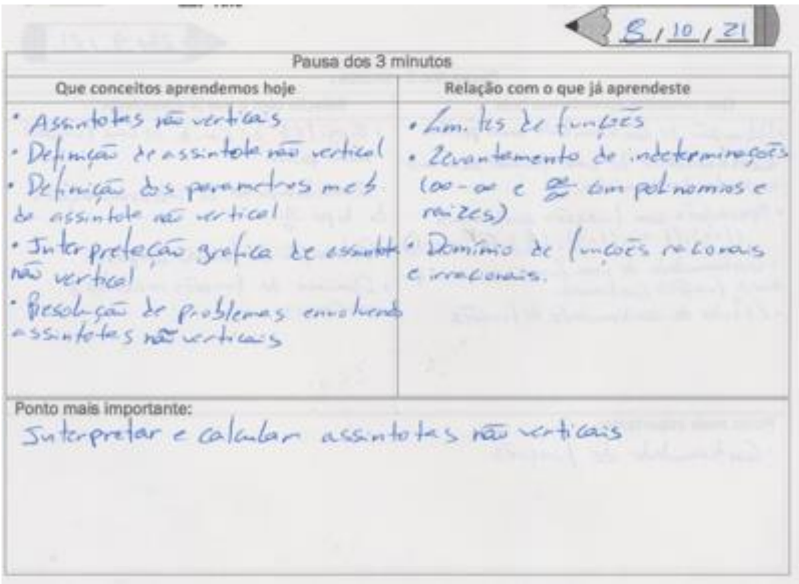
Figura 52 – Ciclo de Avaliação formativa

A definição do ciclo de avaliação formativa definido na Figura 52 teve como objetivo a melhoria das aprendizagens de todos os alunos, em particular, dos alunos com mais dificuldades, bem como a melhoria dos resultados nas avaliações internas e externas. Para que a avaliação formativa faça real sentido, esta tem de dar origem a uma distribuição de *feedback* que permita que os alunos possam rever o que trabalharam no sentido de reformular e/ou melhorar. Este ciclo define claramente as três etapas fundamentais que devem ser consideradas nas práticas de avaliação formativa e que correspondem a três perguntas fundamentais**: *O que é que temos de aprender? Em que estado nos encontramos em relação ao que temos de aprender? O que devemos fazer para ultrapassar dificuldades que ainda possam persistir?***

- **Pausa de Três minutos**

A Técnica da Pausa de Três Minutos/ Ponto Mais Importante (Figura 53) tem como objetivo sintetizar, clarificar e discutir com os alunos o que é preciso aprender sob forma de um ou mais objetivos de aprendizagem. Foi uma técnica muito útil para ajudar os alunos a definir o caminho a seguir e, simultaneamente, contribuiu para o desenvolvimento da sua autoavaliação através das questões tais como *O que aprendeste de novo hoje? Como relacionas os novos conteúdos com os conteúdos já lecionados? Qual o ponto ou os pontos mais importantes desta aula?*

A informação recolhida nesta Pausa de 3 minutos permitiu ao professor adequar o *feedback* a dar aos alunos de modo a permitir-lhes rever e melhorar o seu trabalho. Esta técnica também se tornou muito útil no sentido em que os conteúdos nela aferidos também constam da matriz de conteúdos fornecida aos alunos antes de cada instrumento de avaliação sumativa ou da Questão-aula, de caráter formativo, a realizar no início da semana seguinte, constituindo-se esta matriz como guia orientador do estudo dos alunos. É muito importante que os alunos sejam informados antecipadamente dos objetivos de aprendizagem que são considerados mais relevantes na avaliação. Esta prática mostrou-se muito útil para a preparação dos alunos para a realização das Questões- aula realizadas durante a sequência de aprendizagem.


8 / 10 / 21

Pausa dos 3 minutos

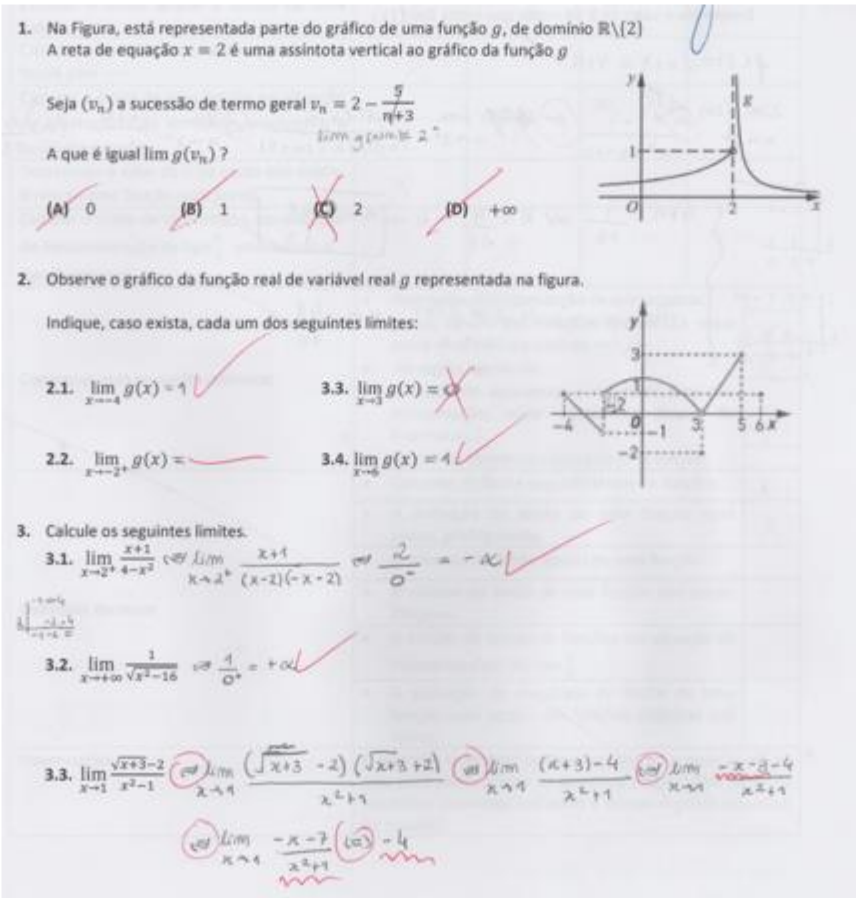
Que conceitos aprendemos hoje	Relação com o que já aprendeste
• Assintotas não verticais • Definição de assintota não vertical • Definição dos parametros m e b de assintota não vertical • Interpretação grafica de assintota não vertical • Resolução de problemas envolvendo assintotas não verticais	• Limites de funções • Levantamento de indeterminações ($\infty - \infty$ e $\frac{\infty}{\infty}$ com polinomios e raizes) • Dominio de funções racionais e irracionais.

Ponto mais importante:
Interpretar e calcular assintotas não verticais

Figura 53 – Documento de um aluno sobre a Pausa dos 3 minutos

- **Questão aula**

Sendo a avaliação formativa um processo pedagógico que acompanha os processos de ensino e aprendizagem com o propósito de os melhorar, foi particularmente relevante para a melhoria das aprendizagens dos alunos, a realização sistemática de Questões-aula (Figura 54), uma vez que foi através das mesmas que recolhi informação de qualidade acerca do que os alunos sabem e são capazes de fazer em cada momento, possibilitando a distribuição de *feedback* que os ajude a aprender mais e, sobretudo melhor, com mais compreensão. Estas Questões-aula foram essenciais para os alunos tomarem consciência da situação em se encontram relativamente aos objetivos de aprendizagem a alcançar, isto é, perceberem o que já aprenderam e o que ainda lhes falta aprender (Figura 55). Permitiram, assim, responder à questão ***Em que situação estou?***, já que, em cada Questão-aula, os alunos puderam conhecer a sua situação em relação ao que é preciso aprender e saber fazer e, usando essa informação, tomar as medidas que se impunham necessárias para melhorar a qualidade do seu trabalho (Figura 56).



1. Na Figura, está representada parte do gráfico de uma função g, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{2\}$
A reta de equação $x = 2$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função g

Seja (v_n) a sucessão de termo geral $v_n = 2 - \frac{5}{n+3}$

A que é igual $\lim g(v_n)$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) $+\infty$

2. Observe o gráfico da função real de variável real g representada na figura.

Indique, caso exista, cada um dos seguintes limites:

2.1. $\lim_{x \to -4} g(x) = 1$

3.3. $\lim_{x \to 3} g(x) = 0$

2.2. $\lim_{x \to -2^+} g(x) =$

3.4. $\lim_{x \to 6} g(x) = 1$

3. Calcule os seguintes limites.

3.1. $\lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{4-x^2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{(x-2)(-x-2)} = \frac{3}{0^-} = -\infty$

3.2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-16}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

3.3. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{x^2+1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+3)-4}{x^2+1} = \lim_{x \to 1} \frac{-x-3-4}{x^2+1}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{-x-7}{x^2+1} = -4$

Figura 54 – Parte da Questão-aula de um aluno

Conteúdos	Consegue	Consegue, mas	Revela dificuldades	Não consegue
Aplicar o conceito do limite segundo Heine graficamente.				X
Aplicar a definição de limite, de uma função num ponto, graficamente.			X	
Calcular o limite lateral à direita de uma função.	X			
Calcular o limite de uma função quando x tende para $+\infty$.	X			
Calcular o limite de uma função em situação de indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, envolvendo a função irracional.		X		
Determinar o valor de k de modo que exista limite de uma função num ponto.	X			
Calcular o limite de uma função, em situação de indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, envolvendo a função racional.		X		

Figura 55 – *Feedback* sobre uma Questão-aula de um aluno

Consegue, mas necessita melhorar	• Apresentação/organização da sua resposta.	
	• O uso correto das notações formais (Ex. troca entre sinal de = e o sinal de <=> ...).	X
	• As regras de cálculo.	X
	• A forma de apresentar o resultado final (Ex. aproximação, valor exato, na forma de intervalos...).	
	• Escrita de conceitos básicos de uma função.	
Necessita de rever	• Conceito de limite segundo Heine de funções.	X
	• A definição de limite de uma função num ponto, graficamente.	X
	• O conceito de limite lateral de uma função.	
	• O cálculo do limite de uma função nos ramos infinitos.	
	• O cálculo de limites de funções em situação de indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.	
	• A aplicação da existência de limite de uma função num ponto, em funções definidas por ramos	
Observações	O que não sabe deve voltar a estudar ou a pedir ajuda na aula para poder atingir os objetivos pretendidos. Rever os exercícios resolvidos nas aulas e cumpri o plano individual de trabalho.	

Figura 56 – Trabalho a realizar para melhorar as aprendizagens

- **Plano Individual de Trabalho**

Para ajudar os alunos a responderem à pergunta ***O que temos de fazer a seguir?,*** foi entregue, após a realização de cada Questão-aula, um Plano Individual de Trabalho (Figura 57) com o objetivo de desenvolver as estratégias e/ou processos que se revelem necessários para reformular, melhorar e/ou aprofundar a qualidade do trabalho realizado para poder aprender. Para que a avaliação formativa tenha o impacto desejado no ensino e na aprendizagem, deve implicar necessariamente o envolvimento ativo dos alunos e dos professores durante todo o processo de ensino e de aprendizagem. O Plano Individual de Trabalho deve ser realizado de forma autónoma, ao ritmo de cada aluno e de acordo com as necessidades e dificuldades de cada um. O professor, em estreita interação com os alunos, na aula de apoio, analisa e trabalha este Plano Individual de Trabalho, de modo que o aluno ultrapasse as dificuldades eventualmente detetadas no cumprimento do mesmo.

Plano Individual de Trabalho 1

Assuntos: **Limites de uma função num ponto. Regras operatórias de limites**

Trabalho de treino (Trabalho obrigatório)

Devo ser capaz de	Vou fazer		O que fiz (indicar o n.º do exercício e página, se for o caso)	Já sou capaz (✗ ou ✓)
Limite de uma função num ponto	20	M – p. 116	✓	✓
	21	M – p. 117	✓	✓
	1	Ficha 1 - Apoio	✓	✓
	2		✓	✓
	23	M – p. 118	✓	✓
	24		24.2	✗
	6	Ficha 1 - Apoio	6.1	✗
Propriedades operatórias sobre limites de funções	28	M – p. 120		✗
	29	M – p. 121	✓	✓
	30		30.2	✗
	4	Ficha 1 - Apoio	4.2	✗
	34	M – p. 123	✓	✓
	35		35.1 a 35.3	✗

…

Trabalho de aprofundamento

Devo ser capaz de	Tarefas		O que penso fazer	O que fiz
Limite de uma função num ponto	17	M – p. 149	✓	
	19	M – p. 150		
Propriedades operatórias sobre limites de funções	23	M – p. 151		
Indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$	7	Ficha 1 - Apoio	✓	
	8		✓	

M – Manual – Novo Espaço 11 – Parte 2

Figura 57 – Plano Individual de Trabalho de um aluno

Com este ciclo de avaliação formativa consegui dar um *feedback* eficaz, entendido pelos alunos como um reforço positivo na correção do erro que, assim, é mobilizado pedagogicamente para melhorar as aprendizagens e não para estigmatizar os alunos. Por outro lado, permitiu contribuir para a melhoria das aprendizagens dos alunos, uma vez que lhes permitiu: compreender o que é necessário aprender ou os objetivos de aprendizagem que é preciso alcançar; tomar consciência da situação em que se encontram relativamente a tais objetivos; e aprender o que é necessário fazer de seguida para efetivamente os alcançar.

1.2 CICLO DE AVALIAÇÃO SUMATIVA

Figura 58 – Ciclo de Avaliação sumativa

Tendo em conta o ciclo de avaliação sumativa (Figura 58), a preparação de qualquer instrumento de avaliação sumativa e a definição de critérios de avaliação constitui uma prática pedagógica de inegável valor, pois, por um lado, determina o que foi importante aprender, um planeamento de tarefas de avaliação centradas no que é fundamental e estruturante e, por outro lado, contribui para que os alunos e o professor consigam discernir a qualidade do trabalho desenvolvido. Os critérios são muito importantes para assegurar uma maior clareza e transparência no que os alunos devem aprender e saber fazer. Todos os instrumentos de avaliação sumativa (ficha de avaliação ou questão-aula) assentam em um ou mais dos seguintes critérios de avaliação: Mobilização de conceitos e procedimentos; Resolução de problemas; Raciocínio matemático e Comunicação matemática.

A definição dos critérios e a avaliação referida a critérios contribuem para ensinar e aprender melhor, pois implicam uma constante clarificação e transparência do processo avaliativo e a implementação de dinâmicas pedagógicas na sala de aula.

Para cada instrumento de avaliação sumativa é fornecida aos alunos uma matriz de conteúdos (cf. Figura 47), onde constam os temas previstos nas Aprendizagens Essenciais e uma definição de objetivos de aprendizagem onde se explicita o que é estruturante e fundamental. Esta matriz é essencial para os alunos perceberem antecipadamente quais os objetivos de aprendizagem que são considerados mais relevantes, o número de questões por cada um dos temas consideradas, a tipologia dos itens e, igualmente, os pontos que são atribuídos a cada uma das questões. Esta prática é manifestamente recomendável, pois para além de melhorar a preparação dos alunos para a realização de tarefas de avaliação sumativa, representa o que é mais importante aprender.

A matriz específica de um instrumento de avaliação (cf.Figura 46) configura um documento de trabalho do professor para relacionar os itens de avaliação com os conteúdos que são objeto de avaliação e os critérios definidos para a disciplina. É desejável que, em qualquer instrumento de avaliação, os alunos obtenham notas parciais, referentes aos diversos temas tendo em conta os objetivos de aprendizagem, os critérios de avaliação e os respetivos pesos relativos à importância de cada um deles no desenvolvimento do currículo. A elaboração das várias matrizes específicas correspondentes aos vários instrumentos de avaliação permitem, assim, definir a importância que cada critério tem em cada tema e, consequentemente, o que é primordial aprender e ensinar. Se pensarmos nas tarefas de avaliação sumativa que se realizam ao longo do semestre ou ano, percebemos que o mesmo critério não tem o mesmo peso em todas as tarefas, e por isso, é fundamental construirmos e analisarmos a matriz específica de cada instrumento, de modo que a nota final traduza, o mais fielmente possível, o que os alunos sabem e são capazes de fazer nos diferentes domínios do currículo. Por exemplo, uma das questões-aula realizadas durante esta sequência didática (Figura 59) avaliava apenas a comunicação matemática, isto quer dizer que um 18, considerado uma excelente nota numa escala de 0 – 20, pode ser enganador, uma vez que corresponde apenas ao desempenho num dos critérios previstos na avaliação do aluno.

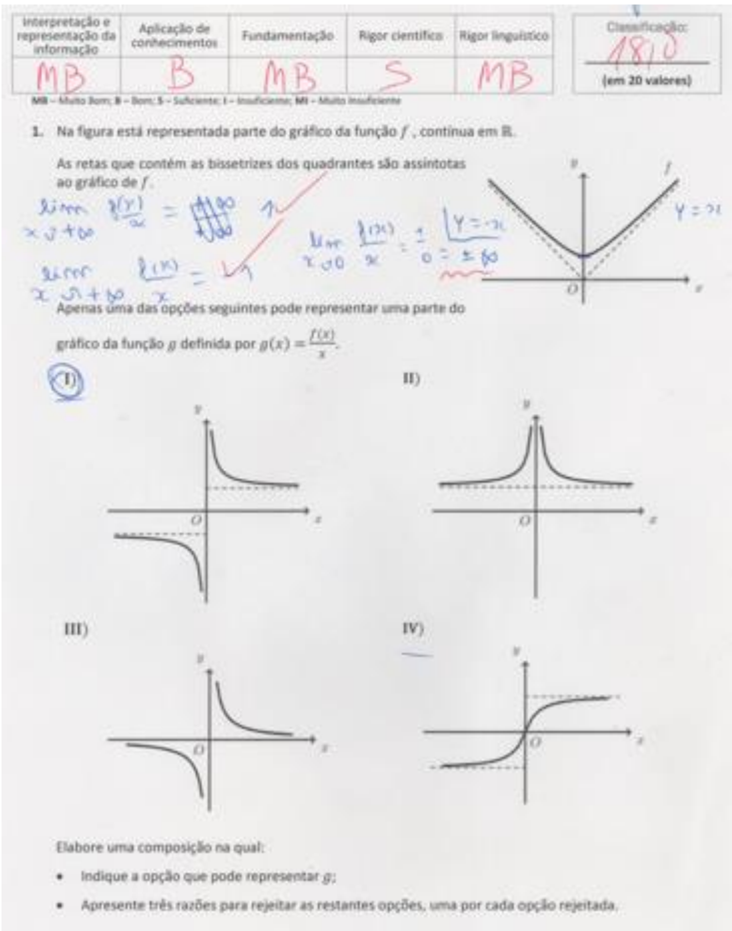


Figura 59 – Parte da Questão-aula de um aluno - Comunicação matemática

É de referir ainda a importância das rubricas de tarefa no *feedback* a dar ao aluno, como já vimos atrás através de alguns exemplos, pois, mais uma vez, neste exemplo, apesar de o aluno ter uma classificação de 18 valores, analisando os vários indicadores de desempenho do critério, verifica-se que, no rigor científico, teve um nível Suficiente e na aplicação de conhecimento, um nível Bom.

Em suma, a avaliação sumativa permite recolher, de forma pensada, deliberada e planeada, informações consideradas indispensáveis para classificar os alunos. As notas devem ser sempre determinadas com base em critérios e/ou objetivos de aprendizagem cuja recolha de informação deve ser diversificada através dos instrumentos de avaliação.

1.3 CICLO DO *FEEDBACK* NA AVALIAÇÃO FORMATIVA

Figura 60 – Ciclo de *Feedback* na avaliação formativa

Na sequência de *feedback* representada na Figura 60, foram selecionadas várias tarefas que permitiram aos alunos aprender, ao professor ensinar e ambos refletirem e avaliarem a qualidade do trabalho realizado. É importante sublinhar que não chega distribuir *feedback* de qualidade para que os alunos aprendam mais e melhor. Devemos garantir que os alunos apreendam as mensagens que se pretendem transmitir através dele, e também se, quando compreendidas, são efetivamente utilizadas.

Dado o número muito elevado de alunos e de turmas, não é fácil elaborar um *feedback* descritivo por aluno assente em aspetos de conteúdo. Para tornar o processo mais adequado e exequível, fi-lo oralmente e/ou utilizei procedimentos mais estandardizados, bem menos trabalhosos, mas que, em geral, se revelam bastante eficazes e úteis para os alunos. A Figura 60 mostra exemplos de procedimentos estandardizados, baseados em critérios, que podem ser aplicados na avaliação de uma variedade de tarefas e que permitem distribuir *feedback* de forma simples e rápida, a um grande número de alunos.

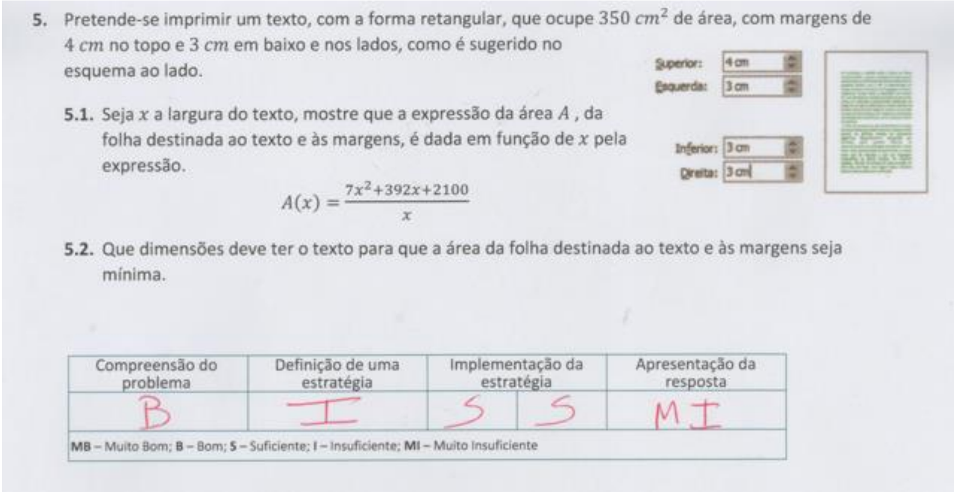
Com a utilização sistemática da técnica da Pausa dos Três Minutos/Ponto Mais Importante, foi possível envolver os alunos em práticas de autoavaliação e de avaliação entre pares, por um lado, e por outro, deu oportunidade de desenvolverem as competências que lhes permitem compreender e utilizar proveitosamente o *feedback.*

Na questão- aula, cada aluno recebe *feedback* através da tabela da Figura 61 que é preenchida com base em critérios. Repare-se que estão enunciados os objetivos da avaliação e a situação em que se encontra relativamente a tais objetivos. Da leitura da tabela podemos concluir, por exemplo, que o aluno "consegue calcular o valor da taxa de variação em contexto de problema;" "Não consegue reconhecer nem aplicar a definição de derivada de uma função num ponto;" e que "consegue, mas necessita de melhorar o cálculo de $f'(2)$, utilizando a definição de derivada num ponto.". Assim, com este formato, o aluno, de forma rápida, vê explicitados os conteúdos que deve aprender e relativamente a cada um deles, o estado do seu desempenho.

Conteúdos	Consegue	Consegue, mas	Revela dificuldades	Não consegue
Calcular o valor da taxa média de variação em contexto de problema.	X			
Determinar o valor do parâmetro a dada a taxa média de variação de uma função, num determinado intervalo.		X		
Reconhecer e aplicar a definição de derivada de uma função num ponto.				X
Calcular o valor do limite, de uma função, dado o valor da derivada de uma função num ponto.				X
Calcular o declive de uma reta secante ao gráfico de uma função.	X			
Calcular $f'(2)$, utilizando a definição de derivada num ponto.		X		
Determinar a equação reduzida de uma reta perpendicular a uma reta tangente ao gráfico de uma função num ponto.	X			

Figura 61 – Exemplo de uma tabela de feedback de uma Questão-aula

Numa Questão-aula, em que a tarefa consistia na resolução de um problema de otimização, o *feedback* foi facultado através da tabela da Figura 62.



5. Pretende-se imprimir um texto, com a forma retangular, que ocupe 350 cm^2 de área, com margens de 4 cm no topo e 3 cm em baixo e nos lados, como é sugerido no esquema ao lado.

5.1. Seja x a largura do texto, mostre que a expressão da área A, da folha destinada ao texto e às margens, é dada em função de x pela expressão.

$$A(x) = \frac{7x^2+392x+2100}{x}$$

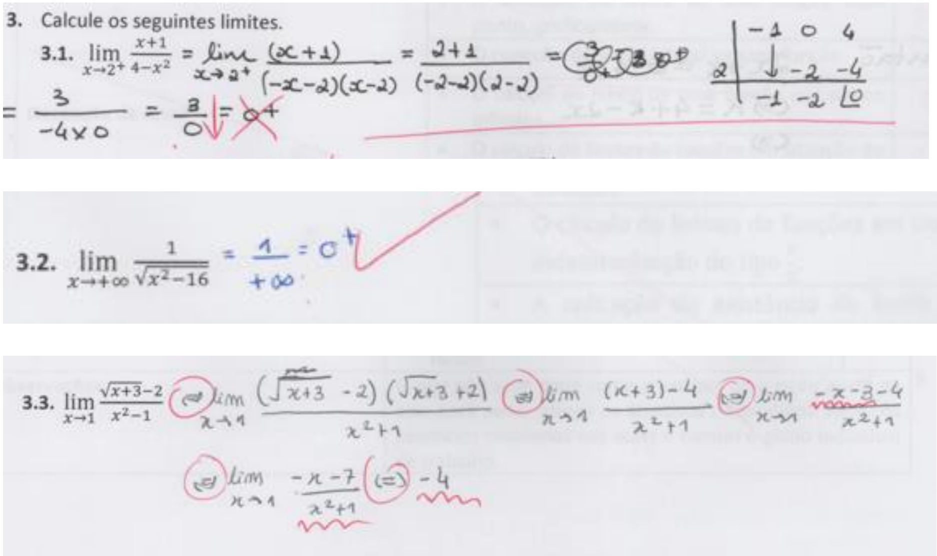
5.2. Que dimensões deve ter o texto para que a área da folha destinada ao texto e às margens seja mínima.

Compreensão do problema	Definição de uma estratégia	Implementação da estratégia		Apresentação da resposta
B	I	S	S	MI
MB – Muito Bom; B – Bom; S – Suficiente; I – Insuficiente; MI – Muito Insuficiente				

Figura 62 – Exemplo de uma tabela de *feedback* de uma tarefa de resolução de problemas

Como se pode observar, estão enunciados os critérios que foram considerados e que foram explicitados, discutidos e compreendidos antes da realização da tarefa e são indicados os níveis de desempenho (MB, B, S, I, MI) correspondentes a descritores que também são do conhecimento prévio dos alunos através da Rubrica de Resolução de Problemas (Anexo 4). Por exemplo, para a *compreensão do problema*, ao descritor "Transcrição de todos os dados corretamente. Relaciona corretamente, num esquema, mas com erros pontuais, os conceitos necessários à resolução do problema.", corresponde o nível de desempenho Bom. Se consideramos o *Implementação da estratégia,* ao descritor "Apresentação da maioria dos passos da resolução e justificação de forma nem sempre clara a maioria das relações matemáticas aplicadas. Efetuou os cálculos, cometendo vários erros.", corresponde um nível de desempenho Suficiente. No fundo, este procedimento simples baseia-se numa rubrica de avaliação analítica que já existe para todas as tarefas que envolvam a resolução de problemas.

Na Figura 63, pode-se observar o *feedback* dado a um aluno numa Questão-aula utilizando o Código de correção (Anexo 7) partilhado com os alunos desde o início do ano letivo. O aluno, de forma autónoma e utilizando símbolos definidos no Código de correção, consegue identificar o tipo de erro cometido por etapa ou por item. Por exemplo, no item **3.1.,** o aluno tem o resultado da etapa errado e falta-lhe um passo intermédio numa das etapas; no item **3.2.,** o aluno tem todas as etapas corretas e no item **3.3.** o aluno tem um erro formal em todas as etapas da resolução e três erros de cálculo em todo o processo de resolução.



3. Calcule os seguintes limites.

3.1. $\lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{4-x^2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x+1)}{(-x-2)(x-2)} = \frac{2+1}{(-2-2)(2-2)} = \frac{3}{-4\times 0} = \frac{3}{0} = \cancel{0^+}$

$$\begin{array}{c|ccc} & -1 & 0 & 4 \\ 2 & \downarrow & -2 & -4 \\ \hline & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

3.2. $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-16}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$

3.3. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} \Leftrightarrow \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{x^2+1} \Leftrightarrow \lim_{x\to 1} \frac{(x+3)-4}{x^2+1} \Leftrightarrow \lim_{x\to 1} \frac{-x-3-4}{x^2+1} \Leftrightarrow \lim_{x\to 1} \frac{-x-7}{x^2+1} \Leftrightarrow -4$

Figura 63 – Exemplo de uma Questão-aula com aplicação do Código de correção

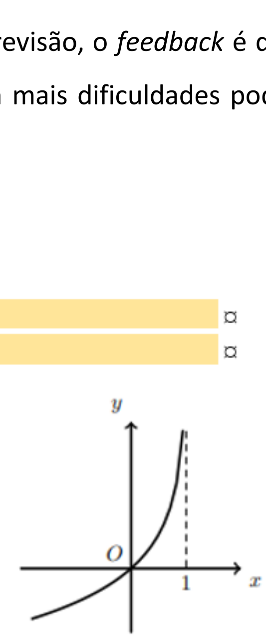
Também na ficha de apoio (Anexo 16), dada na parte final de uma sequência, para consolidar os conteúdos explorados, se pretende promover a autorregulação dos alunos, já que estes têm oportunidade de relacionar tipos de item com os critérios definidos para a disciplina. Na Figura 64, apresenta-se, em **1.**, um item que visa avaliar o critério da Mobilização de conceitos e procedimentos, no nível de complexidade 1 e em **12.**, o item proposto avalia o critério do Raciocínio matemático com o nível de complexidade 3.

Nesta ficha, que funciona como atividade de sistematização e de revisão, o *feedback* é dado oralmente ao aluno na aula em que a mesma é realizada; os alunos com mais dificuldades podem concluir a ficha nas aulas de apoio pedagógico.

Nível complexidade cognitiva:	**Nível 1**
Critério de avaliação:	**Mobilização de conceitos e procedimentos**

1. Na figura ao lado, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico de uma função f, contínua, de domínio $]-\infty\ 1[$.
Tal como a figura sugere, a reta de equação $x = 1$ é assíntota do gráfico de f.

Qual é o valor de $\lim_{x\to 1^-} \frac{3x}{f(x)}$?



(A)	$-\infty$	**(B)**	3	**(C)**	0	**(D)**	$+\infty$

Nível complexidade cognitiva:	**Nível 2**
Critério de avaliação:	**Mobilização de conceitos e procedimentos**

5. Considere a função h definida por $h(x) = \frac{x^2+x}{2x^2-x-3}$

Mostre que a reta de equação $x = -1$ não é assíntota ao gráfico da função h.

Nível complexidade cognitiva:	**Nível 3**
Critério de avaliação:	**Raciocínio matemático**

12. Seja f uma função contínua em $[0\,,2]$ e contradomínio $[0\,,2]$.

Mostre que $f(x) = x$ tem pelo menos uma solução em $[0\,,2]$.

Figura 64 – Parte da ficha de apoio ao plano individual de trabalho 3

Em suma, o *feedback* tem efeitos na motivação e na progressão das aprendizagens dos alunos nas tarefas que lhe são propostas e consequentemente, há ganhos significativos no desempenho dos alunos, ao nível dos conhecimentos, capacidade e competências.

1.4 CICLO DO *FEEDBACK* NA AVALIAÇÃO SUMATIVA

Figura 65 – Ciclo de Feedback na avaliação sumativa

Apesar de ainda predominarem muitas crenças sobre a eficácia das notas ou classificações na motivação e na aprendizagem dos alunos, as notas não são mais do que uma designação, pode ser um algarismo, uma letra, uma expressão, que se utilizam para representar a qualidade do trabalho de um aluno ou as aprendizagens e competências que pode evidenciar num dado momento. É, por isso, necessário complementá-las com informação, por critério, sobre o desempenho do aluno, até porque a mesma nota final pode representar, para o mesmo aluno, desempenhos diferentes nos vários critérios, tal como a mesma nota, atribuída a alunos diferentes, pode representar desempenhos diferenciados. A necessidade de complementar a nota atribuída com informação descritiva e criterial motivou a implementação do ciclo representado na Figura 65.

Aluno A

Aluno B

Aluno C

Aluno D

Aluno E

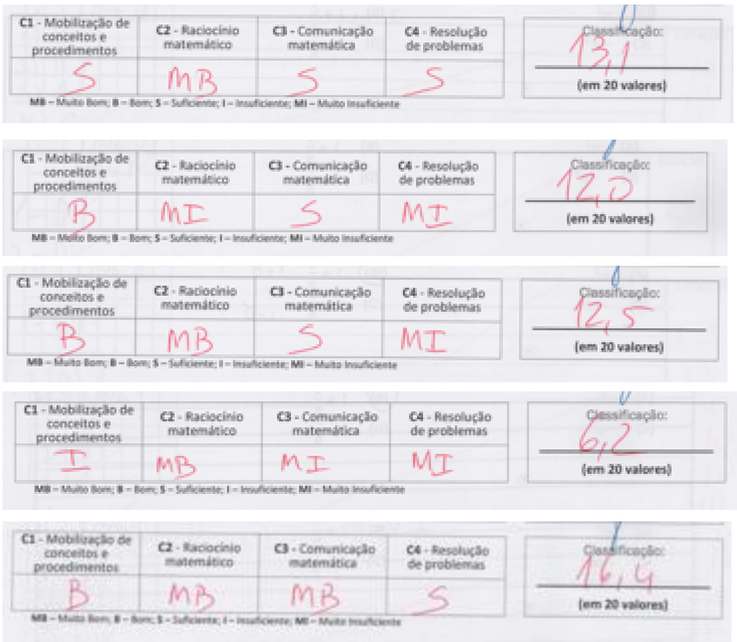


Figura 66 – Relevância pedagógica das notas atribuídas por critério de aprendizagem

A Figura 66 mostra as classificações obtidas por cinco alunos na primeira ficha de avaliação sumativa. Observa-se, dos desempenhos registados por estes cinco alunos, que três têm classificação final entre 12 a 13,1 valores (notas finais semelhantes) mas que correspondem a desempenhos muito diferentes nos vários critérios:

- o **Aluno A** obteve a classificação final de 13,1 valores, o que parece traduzir um desempenho Suficiente em todos os critérios, contudo, no critério do Raciocínio matemático, apresenta um desempenho Muito Bom;

- o **Aluno B**, com classificação final de 12 valores, também ele induzindo um desempenho suficiente, apresenta um desempenho Bom na Mobilização de conceitos e procedimentos e Muito Insuficiente no Raciocínio matemático e na Resolução de problemas, critérios-chave da disciplina;
- o **Aluno C**, com classificação de 12,5, revela um perfil diferente dos anteriores, pois apresenta um desempenho Muito Bom no Raciocínio matemático, Bom na Mobilização de conceitos e procedimentos e Muito Insuficiente na Resolução de problemas, atingindo um nível Suficiente apenas na Comunicação matemática.

Esta leitura mostra que apesar das classificações finais dos três alunos serem semelhantes, as mesmas não espelham o que cada um deles é capaz de fazer em cada um dos critérios, visto apresentarem perfis de aprendizagem diferentes. A nota final, se não for acompanhada de informação por critério (através de menção ou classificação) pode revelar-se inadequada na formulação de um juízo de valor sobre o que o aluno sabe e é capaz de fazer.

Nesta mesma perspetiva, observa-se que os **alunos D e E**, embora apresentem classificações finais divergentes, uma de nível Muito Bom (**Aluno E**) e outra, de nível Muito Insuficiente (**Aluno D**), revelam ambos, no critério do Raciocínio matemático, um desempenho Muito Bom.

Em suma, as notas atribuídas numa tarefa de avaliação sumativa, no final de período ou ano letivo, procuram traduzir, num símbolo, o desempenho do aluno, mas ao agregar, de forma simplista, desempenhos variados e muitas vezes, divergentes, entre os vários domínios e critérios da disciplina, não se dá conta do que sabe o aluno e do que lhe falta aprender. O caso dos alunos acima apresentados são disto exemplo. Se não lhes dermos informação complementar, não terão um *feedback* que lhes permita orientar o seu esforço de aprendizagem nos critérios onde têm de se focar, tornando menos eficaz o esforço e trabalho realizados. Neste sentido, a criação da rubrica de avaliação global, baseada em descritores que correspondem a diferentes níveis de consecução dos critérios e dada aos alunos na entrega de cada instrumento de avaliação sumativa, permite aferir o desempenho atingido em cada critério (Figura 67).

C1 - Mobilização de conceitos e procedimentos	C2 - Raciocínio matemático	C3 - Comunicação matemática	C4 - Resolução de problemas
B	MB	B	S

MB – Muito Bom; B – Bom; S – Suficiente; I – Insuficiente; MI – Muito Insuficiente

Classificação: 15,0 (em 20 valores)

FICHA DE AVALIAÇÃO SUMATIVA:	15, 0 valores

Apreciação global

MOBILIZAÇÃO DE CONCEITOS E PROCEDIMENTOS (B)

Revela um conhecimento globalmente consolidado sobre os conteúdos explorados e utiliza adequadamente, embora com falhas pontuais, os conceitos e os procedimentos matemáticos.

RACIOCÍNIO MATEMÁTICO (MB)

Desenvolve um raciocínio lógico adequado e correto para justificar procedimentos matemáticos e apresentar uma estratégia completa, justificando corretamente todas as etapas.

COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA (B)

Comunica de forma geralmente clara e precisa, conceitos, raciocínios e ideias, usando a linguagem própria da Matemática. Fundamenta matematicamente, de forma adequada e geralmente com correção.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS (S)

Seleciona estratégias nem sempre eficazes para resolver os problemas apresentados. Interpreta, com algumas falhas, os resultados obtidos.

Figura 67 – Desempenho atingido por um aluno em cada critério

No contexto da avaliação pedagógica, tal como se vem apresentando neste trabalho, as notas devem contribuir para orientar o desenvolvimento das aprendizagens dos alunos. As classificações não nos indicam o que os alunos têm de aprender, apenas em que situação se encontram num dado momento, sendo por esta razão um tipo de *feedback* bastante pobre para o ensino e para a aprendizagem.

Nesta mesma procura de partilha de informação aos alunos, a atribuição de classificações por critério – e não apenas a classificação final de período – se assume como uma mais-valia, ao clarificar o valor do desempenho dos alunos. Deste modo, o significado das notas é mais claro, porque decorre diretamente dos critérios definidos que, naturalmente, clarificam o que é importante aprender e o que é objeto de avaliação e de classificação. Neste sentido, as avaliações intercalares e de final de período/semestre foram acompanhadas de sínteses descritivas (Anexo 16) nas quais se explicitam os desempenhos e respetivo nível por critério (Figura 68).

Avaliação Intercalar – 1º Semestre

Classificação dos instrumentos de avaliação

FICHA DE AVALIAÇÃO SUMATIVA: 13,7 valores

QUESTÃO DE AULA: 10 valores

Apreciação global

CONHECIMENTO DE FACTOS E PROCEDIMENTOS
Revela um conhecimento globalmente consolidado sobre os conteúdos explorados. Utiliza adequadamente, embora com falhas pontuais, nos diferentes tipos de tarefas propostas, os conceitos e os procedimentos matemáticos.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
Analisa situações da vida real ou em contextos matemáticos semelhantes aos já explorados e seleciona estratégias nem sempre eficazes para resolver problemas simples, mas fá-lo com orientação sistemática. Interpreta, de forma adequada, resultados obtidos.

RACIOCÍNIO MATEMÁTICO
Desenvolve um raciocínio lógico adequado e implementa uma estratégia completa, justificando de forma globalmente correta todas as etapas através de conceitos, propriedades ou procedimentos matemáticos.

COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA
Comunica, ainda que com várias incorreções, alguns conceitos, raciocínios e ideias, usando pontualmente a linguagem própria da Matemática. Fundamenta matematicamente, de forma vaga e geralmente incorreta.

AUTONOMIA
Realiza e conclui as tarefas de forma globalmente correta, mas com algum apoio.
Ultrapassa obstáculos e enriquece algumas aprendizagens, definindo ou aplicando as estratégias propostas e procurando, com orientação, a informação e os recursos de que precisa.

Figura 68 – Síntese Intercalar de um aluno

2. IMPACTO AFERIDO PELOS ALUNOS

No sentido de recolher informação, junto dos alunos, sobre o impacto das técnicas de avaliação pedagógica implementadas e dos recursos utilizados, foi aplicado, no final do primeiro semestre, um questionário estruturado em três questões (Anexo 17): a primeira, centrada na avaliação do contributo de cada um dos recursos aplicados para a melhoria da aprendizagem dos alunos, utilizando uma escala de 1 a 4 em que 1 "Não contribui nada" e 4 "Contribui muito"; a segunda, na qual se pede que identifiquem o recurso que mais contribuiu para a melhoria da aprendizagem e respetiva justificação; a terceira, na qual se pede para identificar o recurso que carece de aperfeiçoamento e os aspetos a melhorar.

Apresenta-se, a seguir, a análise dos resultados obtidos.

2.1 AVALIAÇÃO DO CONTRIBUTO PARA A APRENDIZAGEM DOS MATERIAIS DISPONIBILIZADOS.

Como se pode observar no Gráfico 5, o recurso que mais contribuiu para a melhoria das aprendizagens (nível máximo da escala) foram as fichas de apoio, seguindo-se, por ordem decrescente, as questões-aula, a matriz de conteúdos, o feedback registado nas questões-aula, o Plano Individual de Trabalho. O Referencial da avaliação e o Perfil de Aprendizagens Específicas foram os recursos apontados como tendo contribuído menos para a aprendizagem.

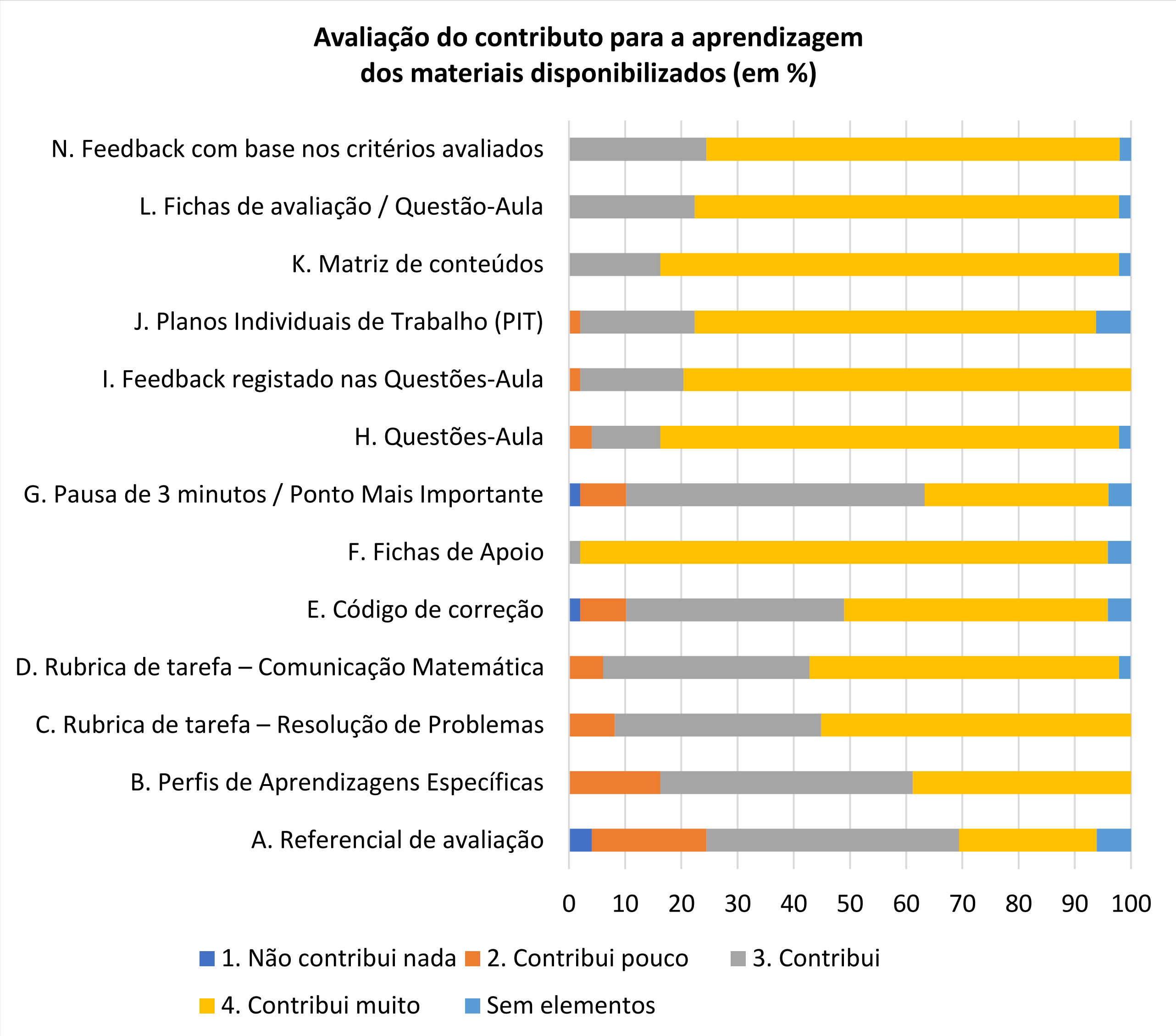


Gráfico 5 – Avaliação do contributo para a aprendizagem dos materiais disponibilizados

2.2 MATERIAL QUE MAIS CONTRIBUI PARA A APRENDIZAGEM

Na segunda questão colocada, na qual se pede que identifiquem o recurso que mais contribuiu para a melhoria da aprendizagem e respetiva justificação, quase metade dos alunos selecionou as questões-aula (42,9%), seguindo-se as fichas de apoio, com 36,7% dos alunos e o *feedback* registado nas questões-aula (8,2%) (Gráfico 6).

Destacam-se, abaixo, as principais razões apontadas:

- **Questão-aula**
    - *Para mim ajudou bastante visto que não sou aluno de estudar regularmente e estas questões-aula melhoraram bastante o meu desempenho.*
    - *Obrigava-nos no sentido positivo da palavra a rever diariamente a matéria.*
    - *As questões-aula foram importantes porque nos obrigavam a criar hábitos de estudo.*
    - *Após a realização das Questões-aula, ficava mais fácil identificar os conteúdos em que tinha mais dificuldades.*
    - *Como a matéria é menor dá para estudarmos aos poucos e com mais frequência facilitando o estudo.*
    - *Porque me obrigavam a estudar a matéria todas as semanas.*
    - *As questões de aula permitem resolver os exercícios como se estivéssemos a fazer o teste, mas sem notas.*
    - *Ajuda a verificar o que se sabe da matéria.*
    - *Permitiu saber o que é que estava mais fraco e o que te tínhamos de melhorar antes do teste.*
    - *Como tínhamos uma questão de aula para cada matéria dada, era uma forma de estudarmos regularmente e de verificar se sabíamos ou não a matéria lecionada.*
    - *Eram úteis para verificar o que sabia e o que precisava melhorar e consolidar.*
    - *Ajudaram-me a perceber melhor os meus pontos fracos antes de realizar os testes.*
    - *Ajudaram-me na preparação para os testes e ajudaram-me a perceber o que já sabia e o que tinha de estudar mais.*
    - *Porque acho que me faziam perceber como estava em relação à matéria dada e ainda tinha recomendações de exercícios para fazer.*

- **Fichas de apoio**
    - *Porque me ajudava a orientar o meu estudo;*
    - *Porque sintetiza os exercícios das matérias estudadas logo facilita imenso a aprendizagem dos conteúdos.*
    - *Uma maior organização dos exercícios por cada tema*
    - *Porque eram um complemento ao meu trabalho, pois tínhamos sempre material extra para trabalhar.*
    - *As fichas de apoio obrigam-nos a estudar todas as semanas tendo assim a matéria sempre em dia.*

- *Pude treinar as matérias em que revelava mais dificuldades.*
- *Como estas foram trabalhadas nas aulas, conseguia-se praticar os conteúdos que forma aprendidos nas aulas.*
- *Porque eram uma grande ajuda para estudar os conteúdos por temas e porque tinham exercícios muito diversificados.*
- *As fichas de apoio ajudaram-me bastante na consolidação da matéria e por isso, acho que foi das coisas que mais ajudaram na aprendizagem das matérias ensinadas.*
- *Permite-nos resolver exercícios mais específicos, especialmente escolhidos pelo professor. Estes exercícios, por serem semelhantes aos dos testes, possibilitam o esclarecimento de dúvidas e melhorar o nosso desempenho nos testes.*
- *Ajudaram imenso na realização das fichas sumativas pois ofereciam muitos exercícios diversos e diferentes uns dos outros, o que permitia que tivéssemos uma noção dos exercícios mais importantes da matéria.*
- *Resumem as aprendizagens e contêm exercícios essenciais para uma boa preparação para os diversos momentos de avaliação.*

- ***Feedback* registado nas Questões-aula**
  - *Permitiam também saber em que ponto estamos e o que é necessário rever.*
  - *Permitiam-nos também saber através de feedback quais eram os pontos importantes a voltar a rever.*
  - *Ajudam-nos a perceber os nossos pontos fortes e fracos e como devemos melhorar.*
  - *Porque ajudam a entender o que precisamos de estudar mais e como o devemos fazer.*
  - *Ajudou-me a preparar-me melhor para os testes e a ver realmente o que precisava melhorar consoante a correção do professor.*

Cruzando os resultados obtidos com as práticas de avaliação conhecidas dos alunos ao longo do seu percurso, centradas na testagem e em questões-aula, de caráter predominantemente sumativo, facilmente se entende a preferência expressa pelas questões-aula e fichas de apoio, não só porque a tipologia de recolha de informação lhes é familiar, mas também porque o feedback dado nestes instrumentos é mais facilmente compreendido pelos alunos, por se centrar diretamente na qualidade das respostas dadas, podendo mobilizar diretamente esta informação para aferir onde devem melhorar até ao próximo teste sumativo. Estes dois recursos são, assim, perspetivados pelos alunos como estratégias eficazes de preparação para os testes de avaliação sumativa.

Os recursos menos selecionados pelos alunos, por reconhecerem que contribuíram menos para a sua aprendizagem, foram, a rubrica de tarefa para resolução de problemas, a Pausa de 3 minutos e os planos individuais de trabalho, bem como o facto de não terem sido selecionados os Perfis de Aprendizagens Específicas, o Referencial de avaliação, o feedback por critério nos testes sumativos, o código de correção e a rubrica de tarefa para comunicação matemática, justifica-se, na minha perspetiva, por se configurarem recursos que implicam uma cultura de avaliação não centrada apenas nos resultados obtidos na avaliação sumativa, mas baseada na identificação dos pontos fortes e dos pontos fracos dos desempenhos e sua relação com desempenhos previstos e descritos. Ora, encontrando-se estes alunos no último ano do seu percurso escolar (12.º ano), a motivação e abertura dos alunos para se apropriarem destas ferramentas e as utilizar para orientar o seu processo de aprendizagem acabam por ser reduzida.

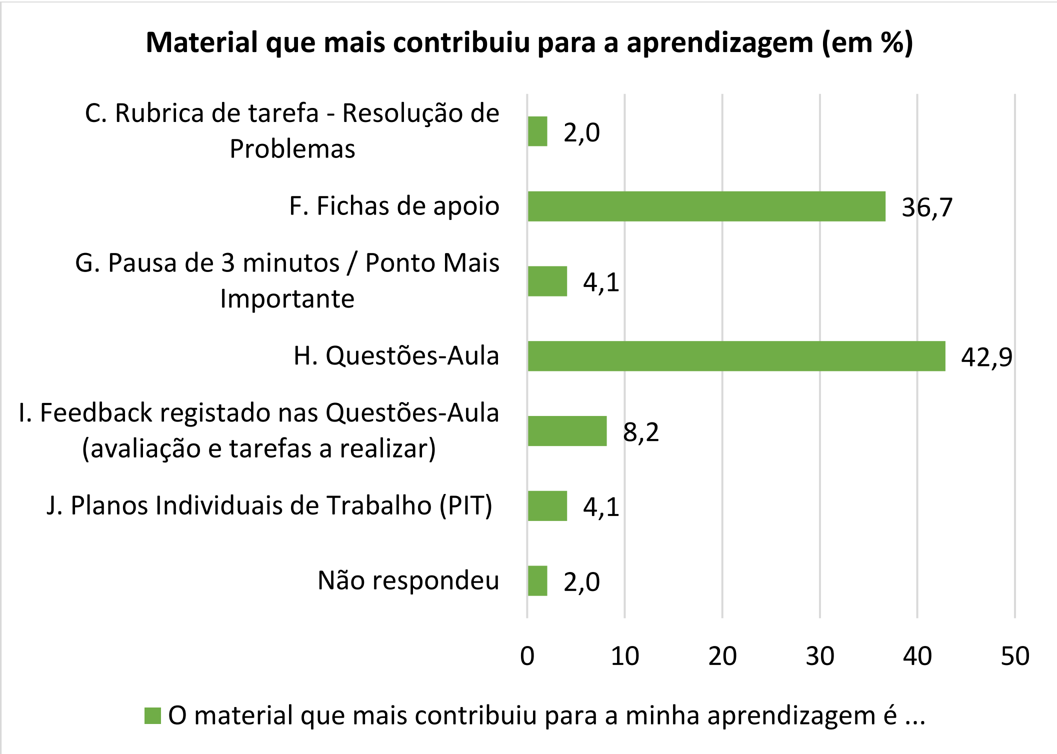


Gráfico 6 – Material que mais contribuiu para a aprendizagem

2.3 MATERIAL QUE NECESSITA DE APERFEIÇOAMENTO

Observa-se que mais de metade dos alunos (61,2%) não apresentou qualquer proposta de material a necessitar de melhoramento, a que se deverá, por um lado, em linha com o referido no ponto anterior, à reduzida familiarização dos alunos com a dimensão formativa da avaliação e as potencialidades que esta pode ter na melhoria das aprendizagens, a montante, dos momentos sumativos, mas também, por outro lado, à quase inexistência de momentos onde, de forma orientada, os alunos reflitam sobre os contributos das técnicas de avaliação na sua aprendizagem.

Os restantes alunos apontaram como recurso a necessitar de melhoramento o Referencial de avaliação (10,2%) e a Pausa de 3 minutos/Ponto mais importante (6,1%), distribuindo-se os restantes por 8 instrumentos.

Destacam-se, abaixo, algumas respostas dadas pelos alunos:

- **Referencial de avaliação**
    - *Deve ser mais trabalhado nas aulas dado o grande número de informações que contém*
    - *Não teve a utilização desejada.*
    - *Maior utilização, pois todos os pontos do documento são importantes para o bom funcionamento da avaliação da disciplina.*
    - *Achei que todos os elementos tinham um objetivo específico, e eram de boa qualidade, talvez esta ficha tenha sido a menos utilizada e sugeria que numa próxima vez a colocasse na parte de trás da ficha dos códigos de correção, apenas os tópicos mais relevantes, de forma a reduzir o número de fichas e focar mais atenção nesta ficha.*
    - *Foi um material pouco utilizado nas aulas.*

- **Pausa de 3 minutos/Ponto mais importante**
    - *Teria ajudado mais se tivesse sido aplicada com maior frequência.*
    - *No geral é muito bom, mas tem de ser feito com mais frequência.*

- **Questão-aula**
    - *Acho que não deve ter qualquer implicação na avaliação pela sua natureza formativa.*

- **Planos Individuais de trabalho**
    - *Têm de ser mais bem trabalhados nas aulas.*
    - *Não foram resolvidos muitos.*

- **Perfis de Aprendizagens Específicas**
    - *Se for possível um pouco mais reduzido e mais sintético.*

- **Rubrica de tarefa – Resolução de problemas**
    - *Demasiada informação.*
    - *Às vezes não entendia o que necessitava de melhorar em certos exercícios.*

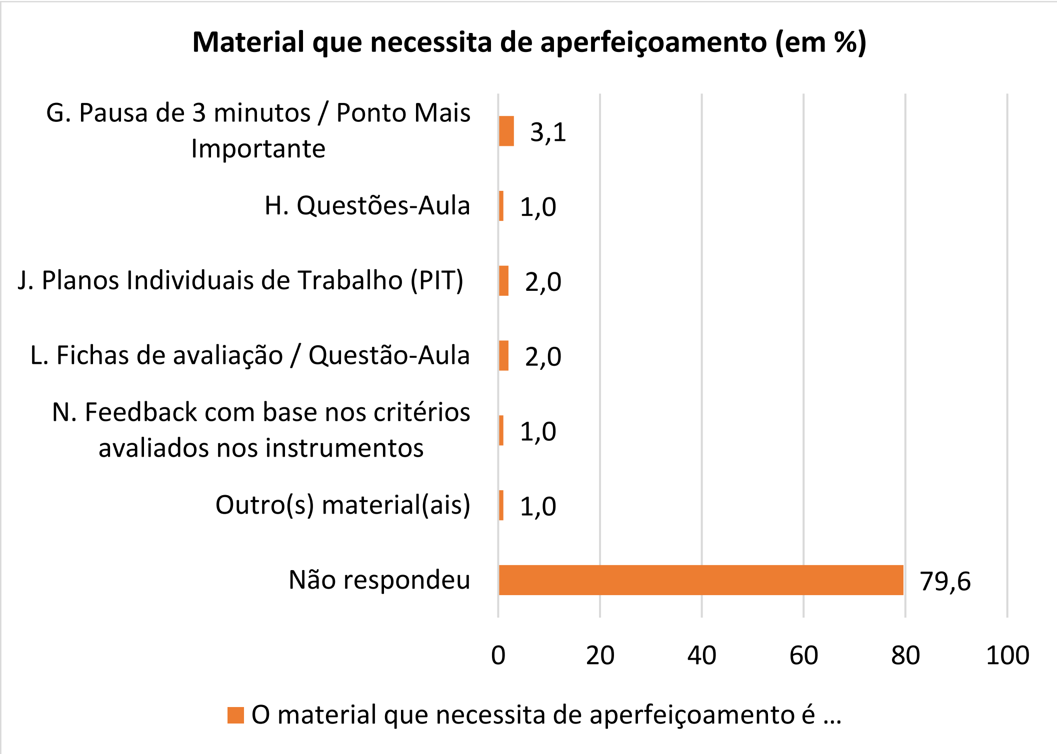


Gráfico 7 – Material que necessita de aperfeiçoamento

VII – CONCLUSÕES

1. CONCLUSÕES GERAIS

A montante dos resultados e do impacto aferido, julgamos importante refletir sobre a própria atitude que os alunos foram revelando ao longo deste percurso de aprendizagem e de avaliação. Percebeu-se que a motivação e abertura dos alunos foi crescente, à medida que se iam apropriando, com o treino e a regularidade de aplicação das técnicas propostas, do que se pretendia. Se, no início, vários não valorizavam o *feedback* dado, à medida que o professor foi valorizando explicitamente o erro como oportunidade de identificar as aprendizagens a melhorar, os alunos sentiram-se menos inseguros e mais abertos a partilhar o que fizeram, incluindo os erros cometidos nas questões-aula, na Pausa de 3 minutos, nas fichas e aulas de apoio pedagógico. Perceberam a efetiva dimensão formativa destas técnicas e as potencialidades de trabalhar a partir dos erros cometidos e de fazerem balanços informais sobre o seu estado de aprendizagem. Este percurso teve um impacto direto na autonomia crescente dos alunos.

O princípio que orienta que toda a avaliação das aprendizagens é o de que toda a avaliação da aprendizagem terá de ser uma avaliação para a aprendizagem. Esta dimensão formativa da avaliação possibilitou a aplicação e a mobilização dos conteúdos abordados, a identificação de dificuldades na aprendizagem e de aspetos a melhorar. A monitorização e avaliação do que se ensina e do que se propõe que os alunos aprendam permitiu produzir informação com rigor e qualidade, proporcionando oportunidades aos alunos de se envolverem nas aprendizagens e refletirem sobre os seus desempenhos, contribuindo, dessa forma, para a criação de oportunidades de sucesso escolar para todos.

Como facilmente se conclui, esta é uma avaliação que exige muito esforço e empenho profissional, pois implica, necessariamente, uma profunda transformação nas práticas pedagógicas. Não é tarefa fácil reposicionar o conhecimento no quotidiano das escolas que sofrem pressões para a obtenção de resultados a qualquer preço e as perspetivas que tendem a ignorar os resultados e a relevância de uma avaliação pedagógica. A escola, ao manter-se refém dos resultados dos testes, compromete a capacidade de autoavaliação e de autorregulação, a desvalorização da autonomia dos alunos, a responsabilidade e a motivação para a aprendizagem dos mesmos. Apesar da credibilidade da investigação sobre este tema e os normativos legais do nosso país estabelecerem que a avaliação formativa deve predominar nas salas de aula e ser um processo essencialmente orientado para a distribuição de *feedback* que contribua para ajudar os alunos a aprender, a verdade é que não tem sido fácil integrar as práticas de avaliação formativa no sistema escolar, o que levanta dois problemas: por um lado, provoca nos alunos uma falta de apropriação de estratégias de aprendizagem, dificuldades na capacidade reflexiva sobre o *feedback* fornecido e na utilização de conhecimentos e capacidades; por outro, impede o trabalho colaborativo entre os professores. Será importante criar um ambiente pedagógico em que os professores e os seu alunos constituam uma comunidade ativa em que todos colaboram no sentido de se alcançarem os objetivos da aprendizagem.

A avaliação pedagógica potencia a avaliação com referência a critérios ou também chamada avaliação criterial, como a própria designação o indica, a qualidade do trabalho desenvolvido pelos alunos é avaliada a partir de um conjunto de critérios previamente definidos, tendo em conta o currículo e os objetivos de aprendizagem. A definição desses critérios e sua explicitação através de rubricas definem o que é relevante para avaliar a qualidade do que os alunos sabem e são capazes de fazer. Assim, podem focar a atenção e os esforços naquilo que é importante aprender, compreendem melhor as apreciações do seu trabalho e recebem um *feedback* eficaz que os ajuda a desenvolver o seu potencial de aprendizagem. A definição de critérios é indispensável para que a escola e o departamento curricular possam definir claramente como tencionam desenvolver as suas ideias, princípios e práticas de avaliação e de classificação.

Este trabalho permitiu-me verificar que a implementação de um processo de Avaliação Pedagógica tem comprovados efeitos positivos na motivação dos alunos para aprender, pois sentem que, de algum modo, controlam os seus processos de aprendizagem, isto é, sentem que os seus erros ou falhas são o motor para muitas das aprendizagens e isso torna-os, reconhecidamente, participantes mais ativos, interessados e empenhados. Diria mesmo que a melhoria das práticas de avaliação pedagógica é um dos mais importantes desafios a enfrentar nos meus próximos anos de carreira.

Afinal, avaliamos para quê?

2. TRABALHO FUTURO

A eficácia do processo implementado será atingida com o alargamento do número de docentes, pelo menos, do grupo disciplinar, que o apliquem. Para tal, o desafio seguinte é o da construção de uma visão do ensino, da aprendizagem e da avaliação ao nível do grupo disciplinar e da própria escola, para que esta assente o seu sistema de avaliação num cariz eminentemente formativo, orientado para a melhoria das aprendizagens dos alunos e não quase apenas para a certificação das mesmas. Um dos desafios a relevar, na cultura de avaliação das escolas que ainda não o tenham feito, passa pela definição de critérios gerais, transversais a todas as disciplinas e que sintetizem o que, na escola, se considera relevante aprender, logo, avaliar. A partir desta decisão, impõe-se decidir, nos vários grupos disciplinares, a eventual definição de critérios específicos. O referencial da avaliação constituído a partir destes critérios funcionará como guia de ação para as práticas de avaliação implementadas.

Ao nível das minhas práticas de recolha de informação, penso que há dois desafios que se me colocam: uma melhor apropriação, pelos alunos, dos recursos utilizados na avaliação, sobretudo os que incidem na sua autorregulação (eg., perfis de aprendizagens específicas, rubricas de tarefa) e o da diversificação das estratégias de avaliação formativa, ainda quase exclusivamente assentes na técnica da testagem.

VIII – BIBLIOGRAFIA

Almeida, D., Seabra, D., Martins, E., Brás, I., Santos , J., & Oliveira, M. (2010). *Análise matemática: unidades teórico-práticas.* Aveiro: Universidade de Aveiro.

Brookhart, S. (2013). *How to create and use rubrics for formative assessment and grading.* Alexandria, VA: ASCD.

Brookhart, S. M. (2010). *Formative Assessment Srategies for Every Classroom* (2ª ed.). Virginia: ASCD.

Cardoso, S., & Coelho, J. P. (2021). *Critérios de Avaliação: Questões de operacionalização. Projeto de Monitorização Acompanhamento e Investigação em Avaliação Pedagógica.* Lisboa: Ministério da Educação/Direção-Geral da Educação.

Costa, B., & Rodrigues, E. (2016). *Novo Espaço - Matemática A 11º ano parte 2.* Porto: Porto Editora.

Fernandes, D. (2019 a). *Para um enquadramento teórico da avaliação formativa e da avaliação sumativa das aprendizagens escolares. Avaliar para aprender em Portugal e no Brasil: Perspetivas teóricas, práticas e de desenvolvimento.* Curitiba: CRV.

Fernandes, D. (2019b). *Rubricas de Avaliação. Folha de apoio à formação - Projeto MAIA.* Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa e Direção Geral de Educação do Ministério da Educação.

Fernandes, D. (2020). *Para uma fundamentação e Melhoria das Práticas de Avaliação. Projeto de Monitorização, Acompanhamento e Investigação em Avaliação Pedagógica.* Lisboa: Universidade de Lisboa | Instituto de Educação | Direção Geral de Educação.

Fernandes, D. (2020a). *Avaliação Formativa. Projeto de Monitorização e Investigação em Avaliação Pedagógica.* Lisboa: Universidade de Lisboa, Instituto de Educação, Dieração-Geral da Educação.

Fernandes, D. (2020c). *Avaliação Sumativa. Projeto de Monitorização Acompanhamento e Investigação em Avaliação Pedagógica.* Lisboa: Universidade de Lisboa, Instituto de Educação, Direção-Geral de Educação.

Fernandes, D. (2021). *Critérios de Avaliação. Folha de apoio à informação - Projeto de Monitorização, Acompanhamento e Investigação em Avaliação Pedagógica.* Lisboa: Ministério da Educação/Direção-Geral da Educação.

Fernandes, D., Neves, A., Campos, C., Conceição , J., & Alaiz, V. (1994). *Portofólios: para uma avaliação mais autêntica, mais participada e mais reflexiva.* Lisboa: IIE.

Gomes , L., & Raposo, D. (2016). *Expoente 11 - Matematica A 11º ano volume 3.* Lisboa: Edições Asa II, S.A.

Gómez, F. (2006). La evoluacion de los estudiantes: una discusión abierta. *Revista Iberoamericana de Educción*, p. 39.

Lopes, J., & Silva, H. S. (2012). *50 Técnicas de Avaliação Formativa.* Lisboa: Lidel - Edições Técnicas, Lda.

Machado, E. (2020). *Feedback. Projeto de Monitorização Acompanhamento e Investigação em Avaliação Pedagógica.* Lisboa: Ministério da Educação|Direção-Geral de Educação.

Martins, G. d., Gomes, C. S., Brocardo, J. L., Pedroso, J. V., Carrillo, J. L., Silva, L. U., . . . Rodrigues, S. C. (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.* Lisboa: Ministério da Educação.

Martins, G., Gomes, C., Borcardo, J., Pedroso, J., Camilo, J., Silva, L., . . . Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.* Lisboa: Ministério da Educação/Direção Geral da Educação. Obtido de https://cutt.ly/MjOQboq

Ministério da Educação. (2016). *Orientações de gestão curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática A.* Lisboa: Ministério da Educação.

Ministério da Educação. (2017). *Perfil dos alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.* Lisboa: Ministério da Educação/Direção-Geral da Educação.

Ministério da Educação. (2018). *Aprendizagens essenciais|articulação com o perfil dos alunos.* Lisboa: Ministério de Educação.

Ministério de Educação e Ciência. (2013). *Programa e Metas Curriculares Matemática A.* Lisboa: Ministério de Educação e Ciência/Direção Geral de Educação.

Neves, A., & Ferreira, A. (2015). *Avaliar é preciso? Guia prático de avaliação para professores e formadores.* Lisboa: Guerra e Paz.

Neves, M., Guerreiro, L., & Silva, A. (2016). *Máximo 11 - Matemática A 11º ano parte 2.* Porto: Porto Editora.

Roldão, M. d., Peralta, H., & Martins, I. P. (2017). *Currículo do Ensino Básico e do Ensino Secundário para a construção de aprendizagens essenciais baseadas no Perfil dos alunos.* Lisboa: Ministério da Educação.

Sousa Pinto, J. J. (2010). *Análise Matemática.* (M. S. Oliveira, & D. d. Seabra, Edits.) Aveiro: Universidade de Aveiro.

Viegas, C., & Valente, S. (2016). *Matemática A 11º ano volume 3.* Lisboa: Texto Editores, Lda.

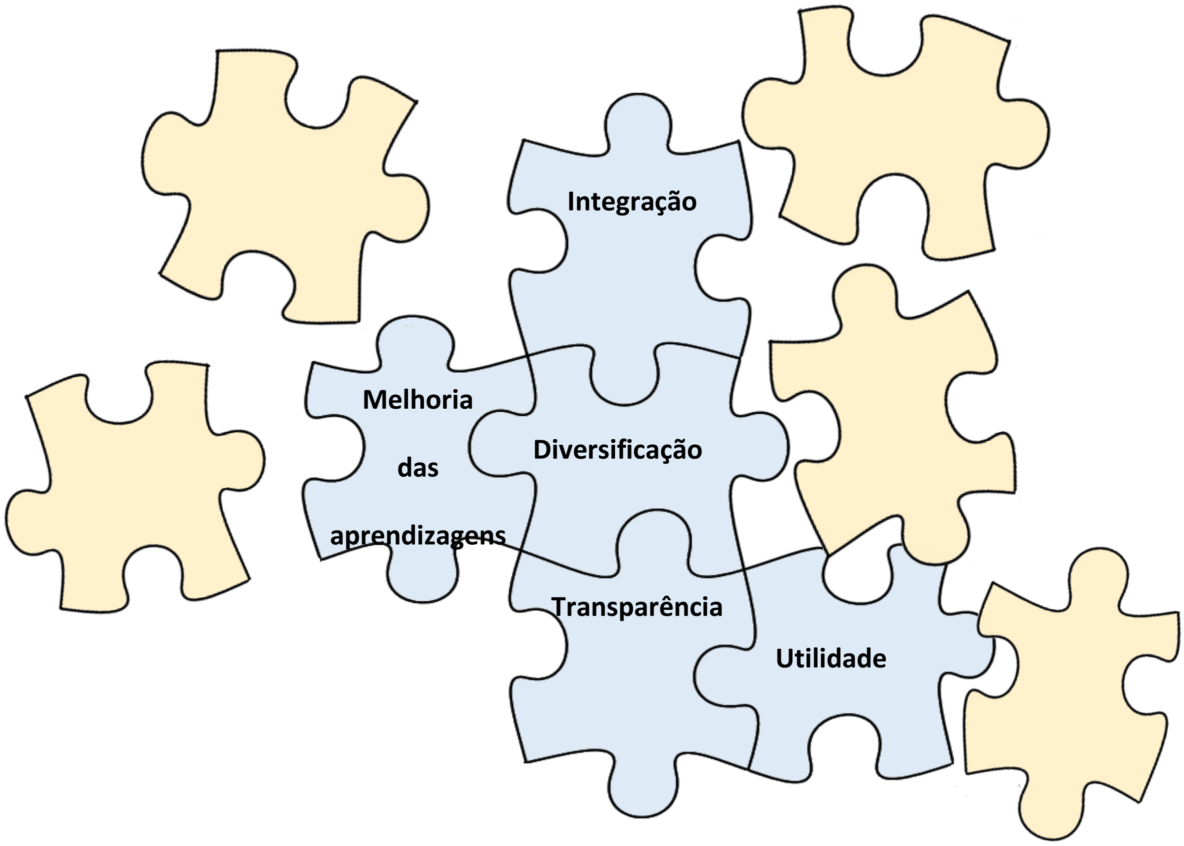
ANEXOS

Anexo 1 – Princípios da Avaliação – Antes de começar

Antes de começar: o processo de avaliação na disciplina de Matemática do 12º ano.

Princípios da avaliação

Em que consistem?



Princípio da diversificação	É importante utilizar-se instrumentos de avaliação de diferentes tipos para: • abranger as várias aprendizagens previstas nos programas (incluindo o *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*); • avaliar os vários desempenhos previstos nos Perfis de aprendizagem específicas aprovados na disciplina; • permitir que os alunos com vários estilos de aprendizagem (visual, linguística, matemática) tenham oportunidade de mostrar o que aprenderam.
Princípio da transparência	A avaliação tem de ser explicada, desde o início do ano escolar, aos alunos (incluindo os critérios de avaliação) e partilhada com os encarregados de educação, devendo ser claro o que se avalia, para quê e como. Se todos conhecermos previamente as "regras do jogo", podemos todos trabalhar para que se aprenda mais e melhor!
Princípio da melhoria da qualidade das aprendizagens	A avaliação deve servir essencialmente para melhorar da qualidade das aprendizagens dos alunos. Estes devem assumir o compromisso de se envolverem ativamente na melhoria das suas aprendizagens e por conseguinte, dos seus resultados.

Conteúdos do Ensino Secundário

10.º Ano	11.º Ano	12.º Ano
Geometria Analítica no plano	Trigonometria	Probabilidades e cálculo combinatório
Geometria analítica no espaço	Geometria analítica no plano e no espaço	Continuidade e assíntotas
Cálculo vetorial no plano e no espaço	Sucessões	Derivadas, monotonia e concavidades
Generalidades acerca de funções reais de variável real	Funções reais de varável real	Funções exponenciais e logarítmicas
Funções quadráticas, módulo e funções definidas por ramos	Limites e derivadas de funções polinomiais e racionais	Funções trigonométricas
Polinómios	Estatística	Números complexos

Avaliação formativa e avaliação sumativa

⇨

Avaliação formativa:

- para construir conhecimento, melhorar técnicas de estudo, métodos de trabalho e de concentração: O que devo fazer para melhorar?
- não releva para a classificação final.

Avaliação sumativa:

- para atestar, num determinado momento, o que o aluno sabe;
- releva para a classificação final.

⇨

Avaliação formativa:

- para treino, consolidação e melhoria: O que ainda não sei? O que tenho de fazer para melhorar?
- não releva para a classificação final.

⇩

- Plano Individual de Trabalho (PIT)
- Questões-Aula
- Código de Correção
- Pausa dos 3 Minutos (P3M)
- Ponto Mais Importante

⇨

Avaliação sumativa:

- para atestar, num determinado momento, o que o aluno sabe;
- releva para a classificação final.

⇩

- Ficha de avaliação sumativa
- Trabalhos individuais / Outros
- Balanço do trabalho desenvolvido

Não é o tipo de instrumento de avaliação que aplicamos que determina a sua função (formativa ou sumativa), mas a forma como utilizamos a informação que dele recolhemos.

Critérios de avaliação

C1	Mobilização de conceitos e procedimentos	**C5**	Autonomia
C2	Resolução de problemas	**C6**	Responsabilidade
C3	Raciocínio matemático	**C7**	Participação / Envolvimento
C4	Comunicação matemática		

Anexo

Avaliação Sumativa (datas e desempenhos)

1º SEMESTRE	Data	Instrumento/tarefa	C1	C2	C3	C4	Classificação
		Ficha de avaliação sumativa - 1					
		Questão de aula - Comunicação Matemática					
		Ficha de avaliação sumativa - 2					
		Questão de aula – Resolução de Problemas					
		Ficha de avaliação sumativa - 3					

2º SEMESTRE	Data	Instrumento/tarefa	C1	C2	C3	C4	Classificação
		Ficha de avaliação sumativa - 1					
		Questão de aula - Comunicação Matemática					
		Ficha de avaliação sumativa - 2					
		Questão de aula – Resolução de Problemas					
		Ficha de avaliação sumativa - 3					

Preencher as colunas identificadas com C1, C2, C3 e C4 com a informação devolvida na Tarefa/Instrumento de avaliação: MB – Muito Bom; B – Bom; S – Suficiente; I – Insuficiente; MI – Muito Insuficiente

Feedback da avaliação sumativa

Rubrica para as fichas de avaliação sumativa

Rubrica para a comunicação matemática

Rubrica para a resolução de problemas

Sistema de classificação

1º Semestre		2º semestre	
Instrumento de avaliação	Percentagem na classificação final	Instrumento de avaliação	Percentagem na classificação final
Ficha de avaliação sumativa - 1	25%	Ficha de avaliação sumativa - 1	25%
Questão de aula - Comunicação Matemática	5%	Questão de aula - Comunicação Matemática	5%
Ficha de avaliação sumativa - 2	25%	Ficha de avaliação sumativa - 2	25%
Questão de aula – Resolução de Problemas	10%	Questão de aula – Resolução de Problemas	10%
Ficha de avaliação sumativa - 3	25%	Ficha de avaliação sumativa - 3	25%

Avaliação Final

Classificação Final	
Domínio cognitivo	90%
Atitudes e valores	10%

Sínteses Descritivas

Anexo 2 – Rubrica de avaliação – Conhecimentos e Capacidades

Critérios		20 a 18 valores	17 a 14 valores	13 a 10 valores	9 a 7 valores	6 a 0 valores
Mobilização de conceitos e procedimentos	**I1**	Revela um conhecimento consolidado sobre os conteúdos explorados e utiliza com rigor, nos diferentes tipos de tarefas propostas, os procedimentos matemáticos e a linguagem simbólica.	Revela um conhecimento globalmente consolidado sobre os conteúdos explorados e utiliza adequadamente, embora com falhas pontuais, nos diferentes tipos de tarefas propostas, os procedimentos matemáticos e a linguagem simbólica.	Revela um conhecimento globalmente consistente-sobre os conteúdos explorados e utiliza adequadamente, embora com algumas falhas, na maioria das tarefas propostas, os procedimentos matemáticos e a linguagem simbólica.	Revela um conhecimento insuficiente e superficial sobre os conteúdos explorados e utiliza com falhas recorrentes, na maioria das tarefas propostas, os procedimentos matemáticos e a linguagem simbólica.	Não revela conhecimento sobre os conteúdos explorados e não utiliza ou utiliza com falhas sistemáticas, nas tarefas propostas, os procedimentos matemáticos e a linguagem simbólica.
	I2	Mobiliza, em situações e problemas variados, com rigor e correção, os conceitos e procedimentos matemáticos abordados.	Mobiliza, em situações e problemas variados, de forma globalmente correta, a maioria dos conceitos e procedimentos matemáticos abordados.	Mobiliza, em situações e problemas semelhantes, ainda que com várias incorreções, os principais conceitos e procedimentos matemáticos abordados.	Mobiliza, num conjunto reduzido de situações e problemas, com várias incorreções, alguns dos conceitos e procedimentos matemáticos abordados.	Não mobiliza ou Mobiliza, num conjunto muito reduzido de situações e problemas, com incorreções sistemáticas, alguns dos conceitos e procedimentos matemáticos abordados.

Critérios		20 a 18 valores	17 a 14 valores	13 a 10 valores	9 a 7 valores	6 a 0 valores
Resolução de problemas	**I1**	Analisa, de forma aprofundada e autónoma, situações da vida real diversificadas e assentes em questões desafiantes. Identifica e aplica modelos matemáticos adequados para a sua interpretação e resolução.	Analisa de forma aprofundada, mas com orientação, situações da vida real diversificadas e assentes em questões desafiantes. Identifica modelos matemáticos adequados para a sua interpretação e resolução, mas aplica-os com falhas pontuais.	Analisa, por vezes, de forma aprofundada e com orientação sistemática, situações da vida real semelhantes às já exploradas. Identifica modelos matemáticos geralmente adequados para a sua interpretação e resolução, mas aplica-os com falhas recorrentes.	Analisa de forma superficial, ainda que com orientação sistemática, situações da vida real semelhantes aos já explorados. Identifica modelos matemáticos, mas nem sempre adequados para a sua interpretação e resolução e aplica-os com falhas sistemáticas.	Não analisa ou analisa situações da vida real de forma superficial e incorreta, o que invalida a identificação e aplicação de modelos matemáticos adequados.
	I2	Seleciona, de forma autónoma e por vezes, criativa, estratégias eficazes para resolver problemas complexos em contextos matemáticos.	Seleciona, com orientação pontual e por vezes, de forma criativa, estratégias geralmente eficazes para resolver problemas complexos em contextos matemáticos.	Seleciona, com orientação sistemática, estratégias, embora nem sempre eficazes, para resolver problemas simples, em contextos matemáticos.	Seleciona, ainda que com orientação regular, estratégias pouco eficazes para resolver problemas simples em contextos matemáticos.	Não seleciona ou Seleciona, ainda que com orientação regular, estratégias inadequadas, o que invalida a resolução de problemas em contextos matemáticos.
	I3	Formula hipóteses válidas e apresenta uma resolução correta, mobilizando todos os conceitos e procedimentos necessários.	Formula hipóteses válidas e apresenta uma resolução globalmente correta, mas com erros pontuais, mobilizando a maioria dos conceitos e procedimentos necessários.	Formula hipóteses, nem sempre válidas e apresenta uma resolução geralmente correta, mas com erros sistemáticos, mobilizando parte dos conceitos e procedimentos necessários.	Formula hipóteses pouco válidas e apresenta uma resolução muitas vezes incorreta, sem mobilizar os conceitos ou procedimentos necessários.	Não formula ou Formula hipóteses incorretas, o que invalida a resolução do problema.
	I4	Prevê e interpreta, de forma crítica e rigorosa, resultados obtidos no contexto do problema.	Prevê e interpreta, de forma crítica e globalmente com rigor, resultados obtidos no contexto do problema.	Prevê e interpreta, de forma adequada, resultados obtidos no contexto do problema.	Prevê e interpreta, de forma muitas vezes inadequada, resultados obtidos no contexto do problema.	Não prevê nem interpreta ou Prevê de forma inadequada resultados, o que invalida a sua interpretação.

Critérios		20 a 18 valores	17 a 14 valores	13 a 10 valores	9 a 7 valores	6 a 0 valores
Raciocínio matemático	**I1**	Aplica com rigor e correção os vários tipos de raciocínio (indutivo, dedutivo, proporcional e espacial) para formular, testar, demonstrar conjeturas e justificar procedimentos matemáticos.	Aplica, de forma globalmente adequada, os vários tipos de raciocínio (indutivo, dedutivo, proporcional e espacial) para formular, testar, demonstrar conjeturas e justificar procedimentos matemáticos.	Aplica, de forma elementar, os vários tipos de raciocínio (indutivo, dedutivo, proporcional e espacial) para formular, testar e demonstrar, ainda que nem sempre de forma precisa, conjeturas e justificar procedimentos matemáticos.	Aplica, com várias incorreções, os vários tipos de raciocínio (indutivo, dedutivo, proporcional e espacial) para formular, testar e demonstrar, de forma pouco precisa, conjeturas e justificar de forma superficial procedimentos matemáticos.	Não aplica Ou Aplica, com incorreções sistemáticas, os vários tipos de raciocínio (indutivo, dedutivo, proporcional e espacial) e não formula conjeturas nem justifica procedimentos matemáticos.
	I2	Constrói explicações e justificações matemáticas completas e raciocínios lógicos adequados.	Constrói explicações e justificações matemáticas geralmente completas e raciocínios lógicos globalmente adequados.	Constrói explicações e justificações matemáticas nem sempre completas e raciocínios lógicos com falhas, mas que não comprometem a compreensão.	Constrói explicações e justificações matemáticas incompletas e raciocínios lógicos imprecisos.	Não constrói explicações ou justificações.
	I3	Concebe estratégias completas e faz generalizações.	Concebe estratégias geralmente completas e faz generalizações.	Concebe estratégias nem sempre completas e faz, apenas com apoio, generalizações.	Concebe estratégias incompletas e/ou muitas vezes, incorretas e não faz generalizações, mesmo com apoio.	Não concebe estratégias nem é capaz de fazer generalizações.
	I4	Avalia com rigor e correção a informação e organiza-a de forma crítica.	Avalia de forma adequada e com correção, ainda que com falhas pontuais, a informação e organiza-a de forma crítica.	Avalia de forma adequada, ainda que com falhas recorrentes na correção, a informação e organiza-a de forma crítica.	Avalia de forma desadequada, com falhas sistemáticas na correção, a informação e não a organiza de forma crítica.	Não avalia a informação nem a organiza.

Critérios		20 a 18 valores	17 a 14 valores	13 a 10 valores	9 a 7 valores	6 a 0 valores
Comunicação matemática	**I1**	Comunica conceitos, raciocínios e ideias, oralmente e por escrito, com clareza, precisão, organização e progressivo rigor lógico.	Comunica conceitos, raciocínios e ideias, oralmente e por escrito, geralmente com clareza, organização e progressivo rigor lógico.	Comunica conceitos, raciocínios e ideias, oralmente e por escrito, ainda que com algumas incorreções na clareza, organização e rigor lógico.	Comunica alguns conceitos, raciocínios e ideias, oralmente e por escrito, ainda que com várias incorreções na clareza, organização e rigor lógico.	Não comunica ou Comunica de forma incorreta conceitos, raciocínios e ideias, o que impede a sua compreensão.
	I2	Exprime com correção o mesmo conceito em formatos diferentes, usando a linguagem própria da Matemática (convenções, notações, terminologia e simbologia).	Exprime com correções pontuais o mesmo conceito em formatos diferentes, usando a linguagem própria da Matemática (convenções, notações, terminologia e simbologia).	Exprime, ainda que com incorreções pontuais, a maioria dos conceitos em alguns formatos, usando a linguagem própria da Matemática (convenções, notações, terminologia e simbologia).	Exprime com várias incorreções parte dos conceitos e apenas em alguns formatos, usando pontualmente a linguagem própria da Matemática (convenções, notações, terminologia e simbologia).	Não exprime ou Exprime de forma incorreta o mesmo conceito, independentemente do formato e não usa a linguagem matemática.
	I3	Argumenta matematicamente, numa discussão orientada, de forma clara e rigorosa, progredindo na fundamentação das suas ideias.	Argumenta matematicamente, numa discussão orientada, de forma adequada e geralmente com correção, progredindo na fundamentação das suas ideias.	Argumenta matematicamente, numa discussão orientada, mas com algumas incorreções ou ambiguidades, progredindo ligeiramente na fundamentação das suas ideias.	Argumenta matematicamente, numa discussão orientada, mas com falhas sistemáticas, progredindo muito pontualmente na fundamentação das suas ideias.	Não argumenta ou Argumenta matematicamente de forma desadequada e sem fundamentação.

Anexo 3 – Rubrica de Avaliação - Atitudes

Critérios		20 a 18 valores	17 a 14 valores	13 a 10 valores	9 a 7 valores	6 a 0 valores
Autonomia	**I1**	Realiza e conclui as tarefas com rigor e correção e sem necessidade de apoio ou com apoio muito pontual.	Realiza e conclui as tarefas de forma globalmente correta, mas com algum apoio.	Realiza as tarefas de forma globalmente correta, mas precisa de apoio regular para as concluir.	Realiza e conclui, com apoio sistemático, a maioria das tarefas, mas com incorreções várias.	Não realiza as tarefas ou fá-lo com muitas incorreções, ainda que com apoio.
	I2	Ultrapassa obstáculos e enriquece as suas aprendizagens, definindo estratégias e procurando por sua iniciativa a informação e os recursos de que precisa.	Ultrapassa obstáculos e enriquece algumas aprendizagens, definindo ou aplicando as estratégias propostas e procurando, com orientação, a informação e os recursos de que precisa.	Ultrapassa a maioria dos obstáculos, aplicando algumas das estratégias propostas e utilizando, com orientação, a informação e os recursos propostos.	Ultrapassa alguns obstáculos, utilizando, ainda que com orientação sistemática, apenas parte das estratégias, da informação e dos recursos propostos.	Não ultrapassa obstáculos ainda que com apoio.
	I3	Identifica, de forma clara, os pontos fortes e fracos da sua aprendizagem e orienta de forma eficaz o seu esforço na superação das suas fragilidades.	Identifica, de forma globalmente clara, os principais pontos fortes e fracos da sua aprendizagem e orienta de forma globalmente eficaz o seu esforço na superação das suas fragilidades.	Identifica, ainda que nem sempre de forma clara, os principais pontos fortes e fracos da sua aprendizagem e orienta, nem sempre de forma eficaz, o seu esforço na superação das suas fragilidades.	Identifica, ainda que de forma pouco clara, alguns pontos fortes e fracos da sua aprendizagem e orienta, de forma avulsa e pouco eficaz, o seu esforço na superação das suas fragilidades.	Não identifica os pontos fortes e fracos da sua aprendizagem ou fá-lo de forma confusa.

Critérios		20 a 18 valores	17 a 14 valores	13 a 10 valores	9 a 7 valores	6 a 0 valores
Envolvimento/ Participação (cumprimento de regras, qualidade da participação)	**I1**	Participa sistemática e oportunamente, a pedido ou por iniciativa, em todas as tarefas propostas.	Participa de forma regular e oportunamente, sobretudo a pedido, na maioria das tarefas propostas.	Participa de forma regular e geralmente, de forma oportuna, sobretudo a pedido, na maioria das tarefas propostas.	Participa esporadicamente e, por vezes, de forma oportuna, quando solicitado, em algumas tarefas propostas.	Não participa ou fá-lo de forma inoportuna, ainda que solicitado.
	I2	Responde com propriedade às questões colocadas, esclarece dúvidas dos colegas e complementa os conteúdos abordados com informação ou exemplos relevantes.	Responde, de forma geralmente apropriada, às questões colocadas, esclarece dúvidas dos colegas e complementa os conteúdos abordados com informação ou exemplos relevantes.	Responde, nem sempre com propriedade, às questões colocadas, esclarece, de forma pontual, dúvidas dos colegas e complementa alguns conteúdos abordados com informação ou exemplos geralmente adequados.	Responde, com alguma propriedade e de forma pontual, às questões colocadas, esclarece, por vezes, algumas dúvidas dos colegas ou complementa alguns conteúdos abordados, mas com informação ou exemplos pouco adequados.	Não responde às questões colocadas ou fá-lo de forma inadequada e com falhas sistemáticas.
	I3	Apresenta as suas dúvidas de forma clara, contextualizada e articulada.	Apresenta as suas dúvidas de forma globalmente clara, contextualizada e articulada.	Apresenta as suas dúvidas geralmente de forma clara, mas nem sempre contextualizada e, por vezes, com lacunas que podem afetar a compreensão.	Apresenta as suas dúvidas de forma pouco clara e descontextualizada, com lacunas que afetam a compreensão.	Não apresenta dúvidas. OU As dúvidas, quando apresentadas, são confusas e descontextualizadas.
	I4	Respeita opiniões divergentes e integra, quando pertinentes, os contributos dos colegas nas tarefas realizadas.	Respeita quase sempre opiniões divergentes e integra, quando pertinentes, parte dos contributos dos colegas nas tarefas realizadas.	Respeita, na maior parte das vezes, opiniões divergentes, mas integra muito pontualmente os contributos, ainda que pertinentes, dos colegas.	Respeita muito pontualmente opiniões divergentes, não integra os contributos, ainda que pertinentes, dos colegas e tece, por vezes, comentários ofensivos ou inoportunos às intervenções dos colegas.	Não respeita opiniões divergentes e tece comentários ofensivos ou inoportunos às intervenções dos colegas.
	I5	Respeita as regras estabelecidas e ajuda a resolver conflitos, contribuindo para um clima de aprendizagem positivo.	Respeita as regras estabelecidas e ajuda, por vezes, a resolver conflitos, contribuindo para um clima de aprendizagem positivo.	Respeita a maioria das regras estabelecidas e contribuindo para um clima de aprendizagem positivo.	Respeita apenas algumas regras estabelecidas e fá-lo pontualmente, gerando, por vezes, alguns conflitos e tensões que põem em causa a criação de um clima de aprendizagem positivo.	Não respeita as regras estabelecidas e gera frequentemente conflitos e tensões que prejudicam a criação de um clima de aprendizagem positivo.

Critérios		20 a 18 valores	17 a 14 valores	13 a 10 valores	9 a 7 valores	6 a 0 valores
Responsabilidade (cumprimento dos prazos, material, pontualidade, integração do *feedback* no processo de melhoria)	**I1**	Realiza todos os trabalhos de casa solicitados.	Realiza quase todos os trabalhos de casa solicitados.	Realiza maior parte dos trabalhos de casa solicitados.	Realiza raramente os trabalhos de casa solicitados.	Nunca realiza os trabalhos de casa.
	I2	Coloca, sempre que necessário, dúvidas sobre as tarefas realizadas, incluindo os trabalhos de casa.	Coloca quase sempre dúvidas, quando necessário, sobre as tarefas realizadas, incluindo os trabalhos de casa.	Coloca algumas dúvidas sobre as tarefas realizadas, incluindo os trabalhos de casa.	Coloca raramente dúvidas, mesmo quando necessário, sobre as tarefas realizadas, incluindo os trabalhos de casa.	Nunca coloca dúvidas, mesmo quando necessário, sobre as tarefas realizadas, incluindo os trabalhos de casa.
	I3	É sempre pontual.	É quase sempre pontual.	É, regra geral, pontual.	É pouco pontual, com vários atrasos injustificados.	Não é pontual, predominando os atrasos sistemáticos e injustificados.
	I4	Traz o sempre o material necessário para as aulas.	Traz quase sempre o material necessário para as aulas.	Traz frequentemente o material necessário para as aulas.	Traz raramente o material necessário para as aulas.	Não traz o material necessário para as aulas.
	I5	Revê as tarefas com base no *feedback* fornecido, aperfeiçoando-as em função dos objetivos previstos.	Revê as tarefas com base no *feedback* fornecido, aperfeiçoando-as, mas não atingindo totalmente os objetivos previstos.	Revê as tarefas com base no *feedback* fornecido, aperfeiçoando-as, mas atingindo apenas alguns dos objetivos previstos.	Revê as tarefas integrando apenas algumas orientações do *feedback* fornecido, aperfeiçoando-as pontualmente, atingindo muito pontualmente os objetivos previstos.	Não revê Ou Revê as tarefas sem integrar as orientações do *feedback* fornecido.

Critérios		20 a 18 valores	17 a 14 valores	13 a 10 valores	9 a 7 valores	6 a 0 valores
	I6	Envolve-se em processos de co e de autoavaliação: identifica, nos seus trabalhos e nos dos colegas, aspetos a melhorar e contribui frequentemente com sugestões pertinentes de melhoria.	Envolve-se em processos de co e de autoavaliação: identifica, nos seus trabalhos e no dos colegas, aspetos a melhorar e contribui com algumas sugestões pertinentes de melhoria.	Envolve-se, com orientação, em processos de co e de autoavaliação: identifica, nos seus trabalhos e nos dos colegas, alguns aspetos a melhorar e contribui pontualmente com sugestões pertinentes de melhoria.	Envolve-se, com orientação sistemática, em processos de co e de autoavaliação: identifica pontualmente, nos seus trabalhos e nos dos colegas, aspetos a melhorar e contribui, por vezes, com sugestões, ainda que pouco pertinentes, de melhoria.	Não se envolve Ou Envolve-se raramente, ainda que orientado, em processos de co e de autoavaliação: não identifica, nos seus trabalhos e nos dos colegas, aspetos a melhorar e não contribui com sugestões de melhoria.

Anexo 4 – Rubrica de Tarefa – Resolução de Problemas

Critério \ Escala		MUITO BOM	BOM	SUFICIENTE	INSUFICIENTE	MUITO INSUFICIENTE
A-Compreensão do problema		• Transcrevi todos os dados corretamente. • Relacionei corretamente, num esquema, os conceitos necessários à resolução do problema.	• Transcrevi todos os dados corretamente. • Relacionei corretamente, num esquema, mas com erros pontuais, os conceitos necessários à resolução do problema.	• Transcrevi todos os dados corretamente. • Relacionei num esquema, mas com várias incorreções, os conceitos necessários à resolução do problema.	• Cometi alguns erros na transcrição dos dados. • Relacionei num esquema, mas com várias incorreções, alguns dos conceitos necessários à resolução do problema.	• Não transcrevi os dados do problema. • Fiz num esquema que não integra os conceitos necessários à resolução do problema.
B-Definição de uma estratégia		• Apresentei uma condição que mobiliza de forma correta os dados do problema, bem como os conceitos necessários.	• Apresentei uma condição que mobiliza de forma correta, mas com falhas pontuais, os dados do problema, bem como os conceitos necessários.	• Apresentei uma condição que mobiliza os dados do problema e alguns dos conceitos necessários, de forma globalmente correta, com falhas pontuais que não comprometem a resolução.	• Apresentei uma condição com incorreções que comprometem a resolução do problema.	• Apresentei uma condição incorreta que compromete a resolução do problema.
C-Implementação da estratégia	Representação gráfica	• Representei com rigor o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) indicada(s) na condição, identifiquei todos os elementos apresentados e respeitei o domínio da função.	• Representei com falhas pontuais o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) indicada(s) na condição, identifiquei todos os elementos apresentados e respeitei o domínio da função.	• Representei com algum rigor o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) indicada(s) na condição, não identifiquei todos os elementos apresentados e respeitei o domínio da função.	• Representei sem rigor o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) indicada(s) na condição, identifiquei alguns dos elementos apresentados, mas não respeitei o domínio da função.	• Não representei o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) indicada(s) na condição.
	Identificação dos pontos e das suas coordenadas	• Identifiquei com rigor o(s) ponto(s) do gráfico necessário(s) à resolução do problema e indiquei as suas coordenadas, efetuando os procedimentos necessários.	• Identifiquei com rigor o(s) ponto(s) do gráfico necessário(s) à resolução do problema e indiquei as suas coordenadas, efetuando a maioria dos procedimentos necessários.	• Identifiquei com pouco rigor o(s) ponto(s) do gráfico necessário(s) à resolução do problema e indiquei as suas coordenadas, efetuando a maioria dos procedimentos necessários.	• Não identifiquei o(s) pontos do gráfico necessário(s) à resolução do problema, mas indiquei as suas coordenadas.	• Não efetuei os procedimentos necessários.
	Apresentação dos passos da resolução	• Apresentei todos os passos da resolução e justifiquei de forma clara todas as relações matemáticas que apliquei.	• Apresentei todos os passos da resolução e justifiquei de forma globalmente clara todas as relações matemáticas que apliquei.	• Apresentei a maioria dos passos da resolução e justifiquei de forma nem sempre clara a maioria das relações matemáticas que apliquei.	• Apresentei apenas alguns passos da resolução e justifiquei incorretamente a maioria das relações matemáticas que apliquei.	• Apresentei apenas alguns passos da resolução e não justifiquei as relações matemáticas que apliquei.
	Cálculos	• Efetuei os cálculos correta-mente em todos os passos.	• Efetuei os cálculos, podendo ter cometido erros pontuais.	• Efetuei os cálculos, cometendo vários erros.	• Efetuei os cálculos, podendo ter cometido erros com alguma frequência.	• Efetuei incorretamente os cálculos.

Escala / Critério	MUITO BOM	BOM	SUFICIENTE	INSUFICIENTE	MUITO INSUFICIENTE
D-Apresentação da resposta	• Escrevi uma resposta que está de acordo com a resolução apresentada e que faz sentido no contexto do problema, apresentado o resultado na forma solicitada.	• Escrevi uma resposta que está de acordo com a resolução apresentada e que faz sentido no contexto do problema, apresentado o resultado na forma solicitada.	• Escrevi uma resposta que está de acordo com a resolução apresentada, podendo não fazer sentido no contexto do problema, apresentado o resultado na forma solicitada.	• Escrevi uma resposta que está de acordo com a resolução apresentada, mas que não faz sentido no contexto do problema, mas não apresentei o resultado na forma solicitada.	• Escrevi uma resposta que não está de acordo com a resolução apresentada OU Não escrevi qualquer resposta.

Anexo 5 – Rubrica de Tarefa – Comunicação matemática

Escala / Critério	MUITO BOM	BOM	SUFICIENTE	INSUFICIENTE	MUITO INSUFICIENTE
Interpretação e representação da informação	• Interpreta a informação apresentada e representa-a corretamente, recorrendo a vários tipos de representações (gráfica, algébrica e tabular) e estabelece conexões entre eles para obter múltiplas perspetivas da situação apresentada.	• Interpreta a informação apresentada e representa-a corretamente, recorrendo a vários tipos de representações (gráfica, algébrica e tabular) e estabelece conexões entre eles, mas com erros pontuais, para obter múltiplas perspetivas da situação apresentada.	• Interpreta a informação apresentada e representa-a corretamente, recorrendo a vários tipos de representações (gráfica, algébrica e tabular) e estabelece conexões entre eles, mas com várias incorreções, para obter uma perspetiva da situação apresentada.	• Interpreta uma parte da informação apresentada e representa-a corretamente, recorrendo a alguns tipos de representações (gráfica, algébrica e tabular) e estabelece as conexões necessárias entre eles, para obter uma perspetiva da situação apresentada, mas fá-lo de uma forma pouco estruturada.	• Não interpreta. OU • Interpreta uma parte da informação apresentada e representa-a incorretamente e não estabelece as conexões necessárias, para obter uma perspetiva da situação apresentada.
Aplicação dos conhecimentos	• Constrói uma explicação que contempla corretamente todos os pontos elencados.	• Constrói uma explicação que contempla corretamente todos os pontos elencados, mas com erros pontuais.	• Constrói uma explicação que contempla corretamente a maioria dos pontos elencados.	• Constrói uma explicação que contempla corretamente a minoria dos pontos elencados.	• Não constrói uma explicação. OU • Constrói uma explicação que contempla incorretamente todos os pontos elencados.
Fundamentação	• Aplica e relaciona corretamente os conceitos.	• Aplica e relaciona corretamente, mas com falhas pontuais, os conceitos.	• Aplica e relaciona alguns dos conceitos, de forma globalmente correta, com falhas pontuais que não comprometem a resolução.	• Aplica e relaciona alguns dos conceitos, com incorreções que comprometem a resolução.	• Não aplica nem relaciona os conceitos. OU • Aplica e relaciona os conceitos incorretamente.
Cálculos	• Efetua corretamente todos os cálculos necessários para a explicação dos pontos elencados.	• Efetua corretamente todos os cálculos necessários para a explicação dos pontos elencados, embora com erros pontuais.	• Efetua os cálculos, mas com vários erros que podem comprometer a explicação dos pontos elencados.	• Efetua os cálculos, mas com vários erros que comprometem a explicação dos pontos elencados.	• Não efetua os cálculos. OU • Os cálculos apresentados estão incorretos.
Rigor científico	• Exprime com correção resultados, processos e ideias matemáticas por escrito, utilizando de forma rigorosa notação, simbologia e vocabulários próprios da Matemática.	• Exprime de forma globalmente correta resultados, processos e ideias matemáticas por escrito, utilizando de forma adequada notação, simbologia e vocabulários próprios da Matemática.	• Exprime, nem sempre de forma correta, resultados, processos e ideias matemáticas por escrito, utilizando de forma geralmente adequada notação, simbologia e vocabulários próprios da Matemática.	• Exprime com várias incorreções parte dos resultados, processos e ideias matemáticas por escrito, utilizando pontualmente notação, simbologia e vocabulários próprios da Matemática.	• Exprime de forma incorreta resultados, processos e ideias matemáticas por escrito, e não utiliza notação, simbologia e vocabulários próprios da Matemática.

Escala / Critério	MUITO BOM	BOM	SUFICIENTE	INSUFICIENTE	MUITO INSUFICIENTE
Rigor linguístico	• Redige a resposta de forma clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, pontuação e ortografia).	• Redige a resposta de forma clara, bem estruturada, embora com algumas imprecisões e erros pontuais (de sintaxe, pontuação e ortografia).	• Redige a resposta de forma globalmente clara, com falhas na estruturação e com erros (de sintaxe, pontuação e ortografia) que não afetam, contudo, a compreensão global do texto.	• Redige a resposta de forma confusa, sem estruturação aparente e com erros graves (de sintaxe, pontuação e ortografia), o que afeta a compreensão do texto.	• Redige a resposta de forma lacónica, reduzindo-a a uma frase ou expressão vaga e incompreensível.

Anexo 6 – Questão-aula de carater formativo

Nome: ______________________________________ N.º: _____Turma:_____	**O professor:** ________________________

1. Seja f a função definida por $f(x) = \frac{x^3-5x+1}{x-1}$.
Usando o Teorema de Bolzano-Cauchy, é possível afirmar que a equação $f(x) = 2$ tem, pelo menos, uma solução em $]-1\,,2[$?

2. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^4 - 3x^2 + 1$.
Justifique que a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $]-1\,,0[$.

3. Considere uma função f , definida em $]-\infty\,,2[$, positiva em todo o seu domínio. Sabe-se que a reta de equação $x = 2$ é assíntota ao gráfico de f.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{f(x)}$?

(A) $+\infty$ **(B)** $-\infty$ **(C)** 0 **(D)** $\frac{1}{2}$

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\,,2\}$, definida por $f(x) = \frac{3x^2-7x+2}{x^2-2x}$.
Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais ao gráfico e escreva as equações dessas assíntotas (caso existam).

Anexo

Conteúdos	Consegue	Consegue, mas	Revela dificuldades	Não consegue
Justificar a continuidade de uma função num subconjunto do seu domínio.				
Definir as condições de aplicabilidade do Teorema de Bolzano-Cauchy.				
Concluir utilizando o Teorema de Bolzano-Cauchy os resultados pretendidos.				
Aplicar a definição de assíntota vertical ao gráfico de uma função.				
Indicar os pontos a, tais que a reta de equação $x = a$ é candidata a assíntota vertical.				
Calcular os limites necessários para a conclusão da assíntota.				
Concluir e escrever as equações (caso existam) das assíntotas ao gráfico da função.				
Consegue, mas necessita melhorar	• Apresentação/organização da sua resposta.			
	• O uso correto das notações formais (Ex. troca entre sinal de = e o sinal de <=> …).			
	• As regras de cálculo.			
	• A forma de apresentar o resultado final (Ex. aproximação, valor exato, na forma de intervalos…).			
	• Escrita de conceitos básicos de limites de uma função.			
	• Escrita da continuidade de uma função num subconjunto do domínio.			
Necessita de rever	• A continuidade de uma função num subconjunto do domínio.			
	• As condições de aplicabilidade do Teorema de Bolzano-Cauchy			
	• A aplicação do Teorema de Bolzano-Cauchy, na existência de soluções de uma condição num determinado intervalo.			
	• A definição de assíntota vertical ao gráfico de uma função.			
	• A identificação dos valores de a, potências candidatos a assíntotas verticais.			
	• O cálculo de limites de uma função.			
	• Existência e escrita das equações de assíntotas verticais ao gráfico de uma função.			
Observações	O que não sabe deve voltar a estudar ou a pedir ajuda na aula para poder atingir os objetivos pretendidos. Rever os exercícios resolvidos nas aulas e cumpri o plano individual de trabalho.			

Anexo 7 – Código de correção dos instrumentos de avaliação

Código de correção dos Instrumentos de avaliação

✓	• Etapa completamente certa
✗	• Etapa completamente errada
	• Erro de cálculo
○	• Erro formal
—	• Erro de escrita matemática
• • •	• Erro de arredondamento
↑	• Falta a justificação do passo
↓	• Falta um passo intermédio
↕	• Falta a justificação e um passo intermédio
✓✗	• Resposta incompleta
‖	• Cálculos ou justificações desnecessárias
$	• Não está escrito na forma mais simplificada

Anexo 8 – Pausa dos 3 minutos /Ponto mais importante

___/____/___

Pausa dos 3 minutos	
Que conceitos aprendemos hoje	**Relação com o que já aprendeste**

Ponto mais importante:

___/___/___

Pausa dos 3 minutos	
Que conceitos aprendemos hoje	**Relação com o que já aprendeste**

Ponto mais importante:

Anexo 9 – Plano Individual de Trabalho

Nome: ______________________________ N.º: _____Turma:_____	O professor: ______________________

Plano Individual de Trabalho 3

Assuntos: Teorema de Bolzano-Cauchy. Assíntotas verticais

Trabalho de treino (Trabalho obrigatório)

Devo ser capaz de	Vou fazer		O que fiz (indicar o n.º do exercício e página, se for o caso)	Já sou capaz (✗ ou ✓)
Teorema de Bolzano-Cauchy	**3**	Ficha 3 - Apoio		
	7			
Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy	**4**	Ficha 3 - Apoio		
	8			
Aplicação do Teorema de Bolzano-Cauchy na solução de condições.	**9**	Ficha 3 - Apoio		
	10			
	12			
	14			
Aplicação do Teorema de Bolzano-Cauchy na resolução de problemas.	**15**	Ficha 3 - Apoio		
Equações de assíntotas verticais ao gráfico de uma função.	**1**	Ficha 3 - Apoio		
	2			
	5			
	6			

Trabalho de aprofundamento

Devo ser capaz de	Tarefas		O que penso fazer	O que fiz
Aplicação do Teorema de Bolzano-Cauchy na solução de condições.	**11**	Ficha 3 - Apoio		
Aplicação do Teorema de Bolzano-Cauchy na resolução de problemas.	**16**			

Anexo 10 – Fichas de avaliação de novembro

Nome: ______________________________ N.º: _____Turma:_____	**O professor:** ____________________

C1 - Mobilização de conceitos e procedimentos	**C2** - Resolução de problemas	**C3** Raciocínio matemático-	**C4** - Comunicação matemática	Classificação: ____________________ **(em 20 valores)**

MB – Muito Bom; **B** – Bom; **S** – Suficiente; **I** – Insuficiente; **MI** – Muito Insuficiente

Grupo I.

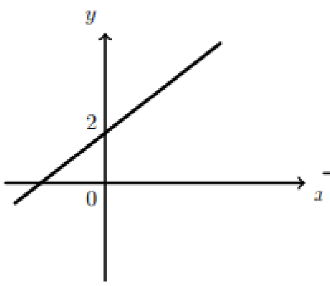
- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreva na sua folha de respostas apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que selecionar para responder a esse item.
- Não apresente cálculos, nem justificações.
- Se apresentar mais do que uma opção, a reposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

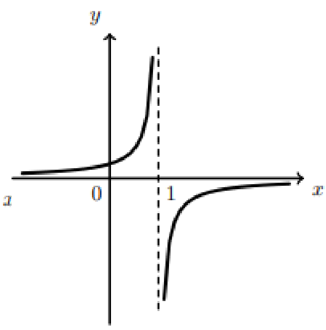
1. De duas funções, f e g , sabe-se que:

- o gráfico de f é uma reta, cuja ordenada na origem é igual a 2;
- o gráfico de g é uma hipérbole.

Nas figuras ao lado estão representadas parte dessa reta e parte dessa hipérbole.

A reta de equação $x = 1$ é assintota do gráfico de g



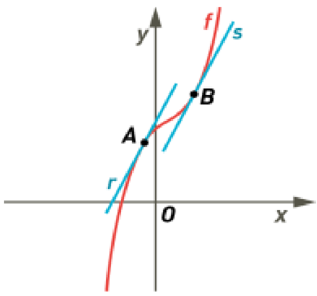


Indique o valor de $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{f(x)}{g(x)}$.

(A) 0 **(B)** 2 **(C)** $+\infty$ **(D)** $-\infty$

2. Na figura está representada a função f definida por:

$$f(x) = x^3 - x^2 + x + 2$$



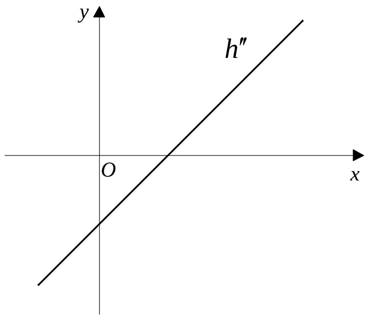
Sabe-se que:

- A e B são pontos do gráfico de f ;
- as retas r e s são paralelas e tangentes ao gráfico de f nos pontos A e B, respetivamente;
- a abcissa do ponto B é 1.

Então, a abcissa do ponto A é:

(A) $-\frac{1}{3}$ **(B)** $-\frac{2}{5}$ **(C)** $-\frac{1}{6}$ **(D)** $-\frac{1}{4}$

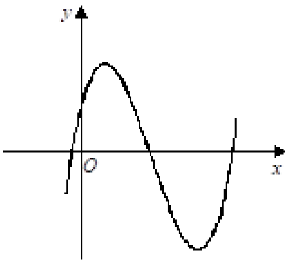
3. Na figura 1, está representada, num referencial xOy, parte do gráfico de uma função h'', segunda derivada de uma função polinomial h.



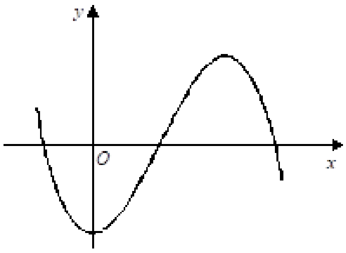
Sabe-se que a primeira derivada da função h é nula no ponto 0, ou seja, $h'(0) = 0$.

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função h ?

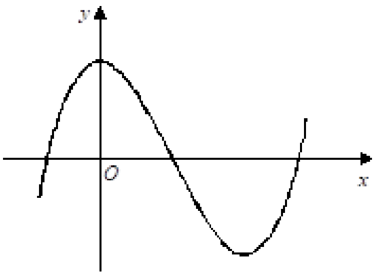
(A)



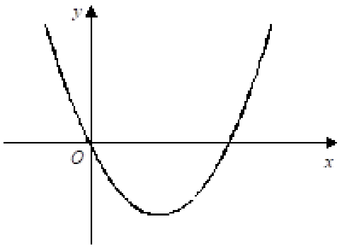
(B)



(C)



(D)



4. Para um certo número real positivo k, a função f definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x)=\begin{cases}\frac{kx}{3}-\frac{k}{2} & se\ x\leq 3\\ \frac{\sqrt{3x}-x}{x-3} & se\ x>3\end{cases}$$

é contínua.
Qual é valor de k ?

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** $-\frac{1}{2}$ **(D)** 1

5. Seja f uma função contínua de domínio $]1,+\infty[$.
Sabe-se que:

- as assíntotas do gráfico de f são as retas definidas pelas equações $x=1\ e\ y=-2x+3$
- $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x}{f(x)}=a$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(f(x)+2x\right)=b$

Podes concluir que $a+b$ é igual a:

(A) 0 **(B)** 3 **(C)** 1 **(D)** -3

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

Atenção: Todos os itens, deste grupo, são para serem resolvidos **sem utilizar a calculadora, a não ser para eventuais cálculos numéricos.**

6. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$h(x)=\begin{cases}\frac{3x+3}{\sqrt{x^2+9}} & se\ x\leq 4\\ \frac{2x^2-3x+1}{x-4} & se\ x>4\end{cases}$$

Estude a função h quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico e, caso existam, escreva as suas equações.

7. Considere a função f, de domínio $[-2\,,+\infty[$, definida por $f(x)=\sqrt{2x+4}+3x$ e a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=-2x^2+3x+5$

7.1. Determine $g'(-1)$, recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto.

7.2. Determine o valor de $(g\circ f)'(0)$.

7.3. Mostre que reta tangente ao gráfico da função g , no ponto de abcissa $\frac{1}{3}$, é perpendicular à reta r definida por $(x\,,y)=(-1\,,3)+k(-5\,,3)\ ,\ k\in\mathbb{R}$.

7.4. Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que a equação $f(x)=g(x)$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1\,,2[$

8. Relativamente à função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x)=kx^2+1$, para determinado valor de k, sabe-se que a reta secante ao respetivo gráfico nos pontos $A\ e\ B$, de abcissas $-2\ e\ 1$, respetivamente, é paralela à bissetriz dos quadrantes pares.

Indique a taxa média de variação de f entre $-2\ e\ 1$ e determine o valor de k.

9. Apicada de determinada espécie de inseto provoca uma infeção, cutânea que se desenvolve segundo a função:

$$i(t)=\frac{7t^2+t+7}{t^2+1}$$

em que i representa a área da infeção, expressa em cm^2, e t o tempo, em segundos, que decorre desde o momento da picada.

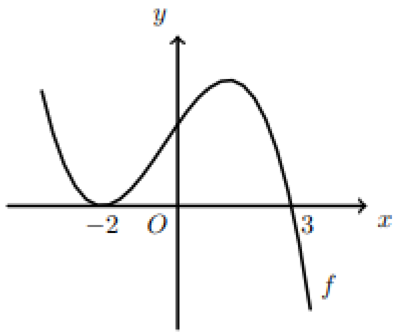
9.1. Qual a área ocupada pela infeção no início?

9.2. Ao fim de quanto tempo é máxima a área infetada? Qual é a área infetada?

10. Na figura ao lado, está representada, num referencial ortogonal xOy , parte do gráfico da função f

Sabe-se que:

- f é uma função contínua em $\mathbb{R}$;
- $-2\ e\ 3$ são os únicos zeros da função f;
- a segunda derivada g'' de uma certa função g tem domínio $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ e é definida por $g''(x)=\frac{f(x)}{-2x+4}$.



10.1. Sabendo que $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}=0$

Comente a seguinte afirmação

“ A função g admite um máximo para $x = -1$”

10.2. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão. Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g.

Critério	Item Cotação (em pontos)							Total
C1 – Mobilização de conceitos e procedimentos	**1.** 10	**3.** 10	**4.** 10	**6.** 20	**7.1** 12	**7.2.** 15	**10.2** 18	**95**
C2 – Resolução de problemas	**8.** 14	**9.2** 20						**34**
C3 – Raciocínio matemático	**2.** 10	**5.** 10	**7.3** 10	**7.4** 18				**48**
C4 – Comunicação matemática	**9.1.** 08	**10.1.** 15						**23**
								200

Anexo 11 – Matriz de conteúdo da ficha de avaliação de novembro

LIMITES DE FUNÇÕES POLINOMIAIS, RACIONAIS E IRRACIONAIS

- Conhecer o conceito de limite segundo Heine;
- Determinar:
  - limite de uma função num ponto aderente ao respetivo domínio;
  - limites laterais;
  - limites no infinito;
- Operar com limites e casos indeterminados em funções;
- Calcular limites recorrendo ao levantamento algébrico de indeterminações.

CONTINUIDADE E ASSÍNTOTAS

- Estudar a continuidade de uma função num ponto e num subconjunto do domínio;
- Identificar e justificar a continuidade de funções polinomiais, racionais e irracionais;
- Conhecer a continuidade da soma, diferença, produto e quociente de funções contínuas;
- Conhecer e aplicar o teorema dos valores intermédios (Bolzano-Cauchy).

DERIVADAS DE FUNÇÕES POLINOMIAIS E RACIONAIS

- Calcular e interpretar geometricamente a taxa média de variação de uma função e a derivada de uma função num ponto;
- Determinar equações de retas tangentes ao gráfico de uma função;
- Resolver problemas envolvendo a derivada e a taxa média de variação de função, nomeadamente sobre velocidades média e instantânea.

DERIVADAS, MONOTONIA E CONCAVIDADES

- Conhecer e aplicar a derivada da soma, da diferença, do produto e do quociente de funções diferenciáveis;
- Conhecer e aplicar a derivada de funções do tipo $f(x) = x^{\alpha}$ (com α racional e $x > 0$);
- Caracterizar a função derivada de uma função e interpretá-la graficamente;
- Relacionar o sinal e os zeros da função derivada com a monotonia e extremos da função e interpretar graficamente;
- Relacionar o sinal e os zeros da função derivada de segunda ordem com o sentido das concavidades e pontos de inflexão;
- Resolver problemas de otimização envolvendo funções diferenciáveis.

Caraterização – Estrutura / Cotação (em 200 pontos)

	Conteúdo	Número/tipologia de item	Cotação (em 200 pontos)
Grupo I	• Limites; • Continuidade num ponto; • Assíntotas; • Interpretação geométrica de derivada; • Derivadas.	5 itens/ escolha múltipla	50 pontos
Grupo II	• Limites; • Teorema de Bolzano-Cauchy; • Continuidade de uma função.	1 ou 2 itens/ resposta restrita	10 a 20 pontos
Grupo III	• Assíntotas verticais e não verticais.	1 ou 2 itens / resposta restrita	10 a 20 pontos
Grupo IV	• Taxa média de variação.de uma função; • Derivada por definição; • Regras operatórias de derivação; • Reta tangente ao gráfico de uma função.	3 ou 4 itens/ resposta restrita	30 a 50 pontos
Grupo V	• 1ª derivada – monotonia e extremos; • 2ª derivada – concavidade e pontos de inflexão.	2 ou 3 itens / resposta restrita	10 a 35 pontos
Grupo VI	• Problemas de otimização.	1 ou 2 itens/ resposta restrita	10 a 30 pontos

Critérios de avaliação

- Conhecimento de factos e de procedimentos
- Resolução de problemas
- Raciocínio matemático
- Comunicação matemática

Material

- Folhas de resposta;
- Caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta (o uso de lápis só é permitido nas construções que envolvam a utilização de material de desenho, devendo o resultado final ser apresentado a tinta);
- Calculadora gráfica.

NOTA: Não é permitido o uso de corretor.

Duração

- 90 + 15 minutos.

23 de novembro de 2021

Anexo 12 – Matriz específica da ficha se avaliação de novembro

Domínio cognitivo / TEMAS/ conteúdos	Nível Inferior	Nível Médio	Nível Superior	Peso (pontos - %)
	Conhecer / Reproduzir	Aplicar / Interpretar	Raciocinar / Criar	
C1 – MOBILIZAÇÃO DE CONCEITOS E PROCEDIMENTOS	**Item 1. – EM (10 pontos)**	Item 7.1. – RC (12 pontos) **Item 3. – EM (10 pontos)** **Item 4. – EM (10 pontos)**	Item 6. – RR (20 pontos) Item 10.2. – RR (18 pontos) Item 7.2. – RC (15 pontos)	**95 – 47,5%**
C2 – RACIOCÍNIO MATEMÁTICO		**Item 2. – EM (10 pontos)** **Item 5 – EM (10 pontos)** Item 7.3. – RC (10 pontos) Item 7.4 – RR (18 pontos)		**48 – 24%**
C3 – COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA	Item 9.1. – RR (08 pontos)	Item 10.1 – RR (15 pontos)		**23 – 11,5 %**
C4 - RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	Item 8. – RR (14 pontos)	Item 9.2. – RR (20 pontos)		**34 – 17%**
Peso (pontos -%)	**32 – 16%**	**115 – 57,5%**	**53 – 26,5%**	**200 – 100%**

Itens de seleção: **EM** – Escolha Múltipla; **A** – Associação; **V/F** – Verdadeiro/Falso; **C** – Completamento; **O** – Ordenação.
Itens de construção: **C** – Completamento; **RC** – Resposta Curta; **RR** – Resposta Restrita; **RE** – Resposta Extensa.

Anexo 13 – Rubrica de avaliação Sumativa – *Feedback*

Critério	Muito Bom	Bom	Suficiente	Insuficiente	Muito Insuficiente
Mobilização de conceitos e procedimentos	Revela um conhecimento consolidado sobre os conteúdos explorados e utiliza com rigor, os conceitos e os procedimentos matemáticos.	Revela um conhecimento globalmente consolidado sobre os conteúdos explorados e utiliza adequadamente, embora com falhas pontuais, os conceitos e os procedimentos matemáticos.	Revela um conhecimento globalmente consistente sobre os conteúdos explorados e utiliza adequadamente, embora com algumas falhas, os conceitos e os procedimentos matemáticos.	Revela um conhecimento insuficiente e superficial sobre os conteúdos explorados e utiliza com falhas recorrentes os conceitos e os procedimentos matemáticos.	Não revela conhecimento sobre os conteúdos explorados e não utiliza os conceitos e os procedimentos matemáticos.

Critério	Muito Bom	Bom	Suficiente	Insuficiente	Muito Insuficiente
Resolução de problemas	Seleciona estratégias eficazes para resolver o(s) problema(s) apresentado(s). Interpreta, de forma crítica e rigorosa, o(s) resultado(s) obtido(s).	Seleciona estratégias geralmente eficazes para resolver o(s) problema(s) apresentado(s). Interpreta, de forma crítica e geralmente com rigor, o(s) resultado(s) obtido(s).	Seleciona estratégias nem sempre eficazes para resolver o(s) problema(s) apresentado(s). Interpreta, com algumas falhas, o(s) resultado(s) obtido(s).	Seleciona estratégias pouco eficazes para resolver o(s) problema(s) apresentado(s). Interpreta, de forma parcialmente incorreta, o(s) resultado(s) obtido(s).	Não seleciona OU Seleciona estratégias inadequadas, o que invalida a resolução de problemas.

Critério	Muito Bom	Bom	Suficiente	Insuficiente	Muito Insuficiente
Raciocínio matemático	Desenvolve um raciocínio lógico adequado e correto para justificar procedimentos matemáticos e apresentar uma estratégia completa, justificando corretamente todas as etapas.	Desenvolve um raciocínio lógico adequado, embora com algumas imprecisões, para justificar procedimentos matemáticos e implementar uma estratégia completa, justificando com algumas imprecisões todas as etapas.	Desenvolve um raciocínio lógico (com imprecisões que não comprometem a compreensão) para justificar procedimentos matemáticos e implementar uma estratégia nem sempre completa, justificando de forma globalmente correta algumas das etapas.	Desenvolve um raciocínio lógico, ainda que de forma superficial e com erros que comprometem a compreensão, para justificar procedimentos matemáticos e implementar uma estratégia incompleta, justificando com incorreções as etapas efetuadas.	Não desenvolve um raciocínio lógico e não justifica procedimentos matemáticos nem implementa uma estratégia ou fá-lo de forma incorreta.

Critério	Muito Bom	Bom	Suficiente	Insuficiente	Muito Insuficiente
Comunicação matemática	Comunica com clareza e precisão, conceitos, raciocínios e ideias, usando a linguagem própria da Matemática. Fundamenta matematicamente de forma clara e rigorosa.	Comunica de forma geralmente clara e precisa, conceitos, raciocínios e ideias, usando a linguagem própria da Matemática. Fundamenta matematicamente, de forma adequada e geralmente com correção.	Comunica, ainda que com algumas incorreções, a maioria dos conceitos, raciocínios e ideias, usando a linguagem própria da Matemática. Fundamenta matematicamente, com algumas incorreções ou ambiguidades.	Comunica, ainda que com várias incorreções, alguns conceitos, raciocínios e ideias, usando pontualmente a linguagem própria da Matemática. Fundamenta matematicamente, de forma vaga e geralmente incorreta.	Não comunica nem fundamenta matematicamente ou fá-lo de forma incorreta.

Anexo 14 – Rubrica de Apreciação global – síntese descritiva

Critério	20 a 18 valores	17 a 14 valores	13 a 10 valores	9 a 7 valores	6 a 0 valores
Mobilização de conceitos e procedimen-tos	Revela um conhecimento consolidado sobre os conteúdos explorados. Utiliza com rigor, nos diferentes tipos de tarefas propostas, os conceitos e os procedimentos matemáticos.	Revela um conhecimento globalmente consolidado sobre os conteúdos explorados. Utiliza adequadamente, embora com falhas pontuais, nos diferentes tipos de tarefas propostas, os conceitos e os procedimentos matemáticos.	Revela um conhecimento globalmente consistente sobre os conteúdos explorados. Utiliza adequadamente, embora com algumas falhas, na maioria das tarefas propostas, os conceitos e os procedimentos matemáticos.	Revela um conhecimento insuficiente e superficial sobre os conteúdos explorados. Utiliza com falhas recorrentes, na maioria das tarefas propostas, os conceitos e os procedimentos matemáticos.	Não revela conhecimento sobre os conteúdos explorados e não utiliza, nas tarefas propostas, os conceitos e os procedimentos matemáticos.

Critério	20 a 18 valores	17 a 14 valores	13 a 10 valores	9 a 7 valores	6 a 0 valores
Raciocínio matemático	Desenvolve um raciocínio lógico adequado para formular, testar, demonstrar conjeturas e justificar procedimentos matemáticos. Implementa uma estratégia completa, justificando corretamente todas as etapas.	Desenvolve um raciocínio lógico adequado para formular, testar, demonstrar conjeturas e justificar procedimentos matemáticos. Implementa uma estratégia completa, justificando com algumas imprecisões todas as etapas.	Desenvolve um raciocínio lógico (com imprecisões que não comprometem a compreensão) para formular, testar, demonstrar conjeturas e justificar procedimentos matemáticos. Implementa uma estratégia nem sempre completa, justificando de forma globalmente correta algumas das etapas.	Desenvolve um raciocínio lógico (com erros que comprometem a compreensão) para formular, testar, demonstrar conjeturas e justificar, ainda que de forma superficial, procedimentos matemáticos. Implementa uma estratégia incompleta, justificando com incorreções as etapas efetuadas.	Não desenvolve um raciocínio lógico e não formula conjeturas nem justifica procedimentos matemáticos. Não implementa uma estratégia.

Critério	20 a 18 valores	17 a 14 valores	13 a 10 valores	9 a 7 valores	6 a 0 valores
Comunica-ção matemática	Comunica, oralmente e por escrito, com clareza e precisão, conceitos, raciocínios e ideias, usando a linguagem própria da Matemática. Argumenta matematicamente de forma clara e rigorosa. Fundamenta eficazmente as suas opções.	Comunica, oralmente e por escrito, de forma geralmente clara e precisa, conceitos, raciocínios e ideias, usando a linguagem própria da Matemática. Argumenta matematicamente, de forma adequada e geralmente com correção. Fundamenta com alguma eficácia as suas opções.	Comunica, oralmente e por escrito, ainda que com algumas incorreções, a maioria dos conceitos, raciocínios e ideias, usando a linguagem própria da Matemática. Argumenta matematicamente, com algumas incorreções ou ambiguidades e com necessidade de reformulação. Fundamenta de forma pouco eficaz as suas opções.	Comunica, oralmente e por escrito, ainda que com várias incorreções, alguns conceitos, raciocínios e ideias, usando pontualmente a linguagem própria da Matemática. Argumenta matematicamente, de forma vaga e geralmente incorreta, mesmo quando reformula o seu raciocínio.	Não comunica nem argumenta matematicamente OU Comunica de forma incorreta conceitos, raciocínios e ideias, o que impede a sua compreensão e não usa a linguagem matemática. Argumenta matematicamente de forma desadequada e sem fundamentação.

Anexo 15 – Síntese descritiva de um aluno – Intercalar

Classificação dos instrumentos de avaliação

FICHA DE AVALIAÇÃO SUMATIVA:	12,9 valores
QUESTÃO DE AULA:	8 valores

Apreciação global

CONHECIMENTO DE FACTOS E PROCEDIMENTOS

Revela um conhecimento globalmente consolidado sobre os conteúdos explorados. Utiliza adequadamente, embora com falhas pontuais, nos diferentes tipos de tarefas propostas, os conceitos e os procedimentos matemáticos.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Analisa, de forma aprofundada e autónoma, situações da vida real ou em contextos matemáticos diversificados. Seleciona estratégias eficazes para resolver problemas complexos e interpreta, de forma crítica e rigorosa, resultados obtidos.

RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Desenvolve um raciocínio lógico com falhas que não comprometem a compreensão e implementa uma estratégia nem sempre completa, justificando de forma globalmente correta algumas das etapas através de conceitos, propriedades ou procedimentos matemáticos.

COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA

Não comunica nem fundamenta matematicamente ou fá-lo de forma incorreta.

AUTONOMIA

Realiza e conclui as tarefas de forma globalmente correta, mas com algum apoio.

Ultrapassa obstáculos e enriquece algumas aprendizagens, definindo ou aplicando as estratégias propostas e procurando, com orientação, a informação e os recursos de que precisa.

PARTICIPAÇÃO

Participa de forma regular e oportunamente, sobretudo quando solicitado, na maioria das tarefas propostas.Contribui, em vários momentos da aula, com dúvidas geralmente pertinentes e respostas adequadas às questões colocadas.

ENVOLVIMENTO

É sempre pontual. Melhora pontualmente alguns aspetos do seu desempenho com base no feedback fornecido. Contribui, por vezes, nos seus trabalhos, com sugestões, embora pouco pertinentes, de melhoria.Apresenta as suas dúvidas de forma globalmente clara, contextualizada e articulada.

Escola Secundária Jerónimo Emiliano de Andrade, 8 de novembro de 2021

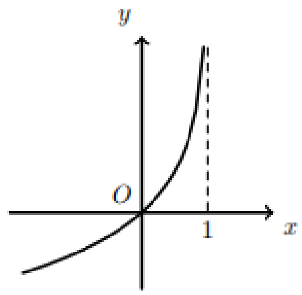
Anexo 16 – Ficha de apoio ao plano individual de trabalho 3

Nome: ______________________ Ano/Turma: ________ Data: ____________

Ficha de Apoio ao Plano Individual de Trabalho 3

Nível complexidade cognitiva:	**Nível 1**
Critério de avaliação:	**Mobilização de conceitos e procedimentos**

1. Na figura ao lado, está representada, num referencial $o.n.\ xOy$, parte do gráfico de uma função f, contínua, de domínio $]-\infty\ 1[$.
Tal como a figura sugere, a reta de equação $x = 1$ é assíntota do gráfico de f.



Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{3x}{f(x)}$?

(A) $-\infty$ **(B)** 3 **(C)** 0 **(D)** $+\infty$

2. De uma função f , real de variável real, sabe-se que:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2 \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 5 \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$$

Qual das seguintes equações define uma assíntota vertical ao gráfico de f ?

(A) $x = 2$ **(B)** $x = 1$ **(C)** $x = 5$ **(D)** $x = 4$

3. Seja g a função definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = x^5 - x + 1$.
O Teorema de Bolzano - Cauchy permite-nos afirmar que a equação $g(x) = 8$ tem pelo menos uma solução no intervalo

(A) $]-1\,,0[$ **(B)** $]0\,,1[$ **(C)** $]1\,,2[$ **(D)** $]2\,,3[$

4. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, contínua no intervalo $[-1\,,4]$.
Tem-se $f(-1) = 3$ e $f(4) = 9$.
Em qual das opções seguintes está definida uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, para a qual o teorema de Bolzano garante a existência de pelo menos um zero no intervalo $]-1\,,4[$?

(A) $g(x) = 2x + f(x)$ **(B)** $g(x) = 2x - f(x)$

(C) $g(x) = x^2 + f(x)$ **(D)** $g(x) = x^2 - f(x)$

Nível complexidade cognitiva:	**Nível 2**
Critério de avaliação:	**Mobilização de conceitos e procedimentos**

5. Considere a função h definida por $h(x) = \frac{x^2+x}{2x^2-x-3}$

Mostre que a reta de equação $x = -1$ não é assíntota ao gráfico da função h.

Nível complexidade cognitiva:	**Nível 3**
Critério de avaliação:	**Mobilização de conceitos e procedimentos**

6. Determine, caso existam, as equações das assíntotas verticais ao gráfico de cada uma das funções definidas, analiticamente, por:

6.1. $f(x) = \frac{3x}{x+1}$

6.2. $f(x) = \frac{4-2x}{x^2-4}$

6.3. $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$

6.4. $f(x) = \begin{cases} \frac{8-x}{x+4} & se\ x < -4 \\ \sqrt{1-x} & se -4 \leq x \leq 1 \\ \frac{-x^2+2x-1}{x-1} & se\ x > 1 \end{cases}$

6.5. $f(x) = \frac{x-2}{x^2+4}$

6.6. $f(x) = \frac{5}{(x+1)^2}$

6.7. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

Nível complexidade cognitiva:	**Nível 1**
Critério de avaliação:	**Raciocínio matemático**

7. Seja f a função real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^4 - x + 2$.
Utilize o Teorema de Bolzano- Cauchy para provar que a equação $f(x) = 5$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $\left]\frac{1}{2}, 2\right[$.

8. Seja g a função de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = 1 + x\ cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.
Mostre que a função g tem pelo menos um zero em $]1\ ,2[$.

Nível complexidade cognitiva:	**Nível 2**
Critério de avaliação:	**Raciocínio matemático**

9. Considere a função f , de domínio, definida por $[2\ , +\infty[$, definida por $f(x) = \sqrt{2x-4} + 3x - 10$.
Mostre que a equação $f(x) = -x + 5$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]3\ ,\ 4[$.

10. Considere a família de funções:

$$f(x) = \begin{cases} a^2x^2 & se\ x \leq 2 \\ (1-a)x & se\ x > 2 \end{cases}, \text{com } a \in \mathbb{R}$$

Pretende-se aplicar o Teorema de Bolzano- Cauchy no intervalo $[0\ , 3]$.
Quais os valores de a para que tal seja possível?

11. Considere a função f, real de variável real, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$, tal que $f(x)=\frac{x}{x+3}$.
Usando o Teorema de Bolzano-Cauchy, mostre que o gráfico da função f interseta a bissetriz dos quadrantes pares num ponto cuja abcissa pertence ao intervalo $]-1\,,3[$.

Nível complexidade cognitiva:	**Nível 3**
Critério de avaliação:	**Raciocínio matemático**

12. Seja f uma função contínua em $[0\,,2]$ e contradomínio $[0\,,2]$.

Mostre que $f(x)=x$ tem pelo menos uma solução em $[0\,,2]$.

13. Seja g uma função contínua, de domínio $\mathbb{R}$, tal que:

- para todo o número real x, $(g\circ g)(x)=x$
- para um certo número real a, tem-se $g(a)>a+1$

Mostre que a equação $g(x)=x+1$ é possível no intervalo $]a\,,g(a)[$.

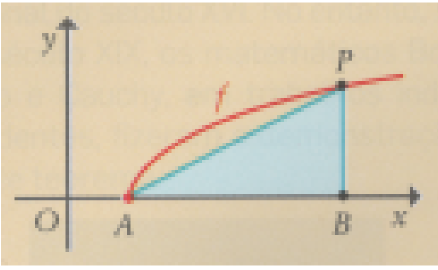
14. Sejam f e g duas funções contínuas em $[a\,,b]$, tais que $f(a)=g(b)$ e $f(b)=g(a)$.

Mostre que o gráfico de $f-g$ interseta o eixo Ox pelo menos uma vez no intervalo $[a\,,b]$.

Nível complexidade cognitiva:	**Nível 3**
Critério de avaliação:	**Resolução de problemas**

15. Seja f a função, de domínio $[1\,,+\infty[$, definida por $f(x)=\sqrt{x-1}$. No referencial está representada parte do gráfico da função f.

Para cada ponto P do gráfico de f, considere os pontos A e B pertencentes ao eixo Ox tais que o ponto A tem a abcissa 1 e ponto B tem abcissa igual à de P.
Mostre, por processos analíticos, que existe um ponto P de abcissa entre 2 e 3 tal que a área do triângulo $[APB]$ é igual 1.



16. Às 10 horas de um determinado dia foi administrado um certo medicamento a uma população de bactérias. t horas após a administração do referido medicamento, a população de bactérias variou segundo o modelo matemático:

$$P(t)=\frac{5t^2}{2t^3+10}\ ,\ 0\leq t\leq 24$$

com P expresso em milhões de bactérias.
Justifique que existiu um instante, entre as 11 horas e as 11 h 30 min, em que o número de bactérias igualou as 500 000 unidades.
Em eventuais cálculos intermédios, sempre que proceda a arredondamentos, conserve três casas decimais.

Anexo 17 – Avaliação pedagógica – Recolha de Informação

Ao longo deste ano letivo, na disciplina de Matemática A foram disponibilizados vários materiais com o intuito de melhorar a qualidade das tuas aprendizagens.
Neste momento, importa conhecer a tua opinião sobre esses materiais e identificar aspetos a manter e aspetos a melhorar.

1. Avalia de 1 a 4, assinalando com **X**, o contributo de cada um dos materiais para a tua aprendizagem na disciplina.
ESCALA: $\mathbf{1}$ – Não contribui nada; $\mathbf{2}$ – Contribui pouco; $\mathbf{3}$ – Contribui; $\mathbf{4}$ – Contribui muito;
$\boldsymbol{SE}$ – Sem elementos, uma vez que não utilizei este material.

Materiais transversais a todos os temas	**1**	**2**	**3**	**4**	***SE***
A. Referencial de avaliação (Ficha CR7)					
B. Perfis de Aprendizagens Específicas					
C. Rubrica de tarefa – Resolução de Problemas					
D. Rubrica de tarefa – Comunicação Matemática					
E. Código de correção					
Materiais elaborados para cada tema	**1**	**2**	**3**	**4**	***SE***
F. Fichas de Apoio					
Materiais elaborados para os momentos de avaliação formativa	**1**	**2**	**3**	**4**	***SE***
G. Pausa de 3 minutos / Ponto Mais Importante					
H. Questões-Aula					
I. *Feedback* registado nas Questões-Aula (avaliação e tarefas a realizar)					
J. Planos Individuais de Trabalho (PIT)					
Materiais elaborados para os momentos de avaliação sumativa	**1**	**2**	**3**	**4**	***SE***
K. Matriz de conteúdos					
L. Fichas de avaliação / Questão-Aula					
N. *Feedback* com base nos critérios avaliados nos instrumentos					

2. Identifica o material que mais contribuiu para a tua aprendizagem e indica a(s) razão(ões) da tua escolha.

(letra) (designação))

Razão(ões)

3. Identifica um material que necessita de ser aperfeiçoado e indica o(s) aspeto(s) a melhorar.

(letra) (designação))

Aspeto(s) a melhorar