**Universidade de Aveiro** Departamento de Educação e Psicologia
**2020**

**Cristiana Solange Oliveira Amaral**

# O erro como instrumento de apoio aos processos de ensino e aprendizagem: uma experiência com alunos do 7.º ano de escolaridade

**Universidade de Aveiro** Departamento de Educação e Psicologia
**2020**

**Cristiana Solange Oliveira Amaral**

# O erro como instrumento de apoio aos processos de ensino e aprendizagem: uma experiência com alunos do 7.º ano de escolaridade

Relatório de estágio apresentado à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre Ensino da Matemática no 3ºciclo e Ensino Secundário, realizada sob a orientação científica da Doutora Ana Maria Reis D'Azevedo Breda, Professora Associada com Agregação, do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

Aos meus pais pelo apoio e por acreditarem sempre em mim.

À minha irmã por me aturar nos dias menos bons, obrigada pela paciência.

Aos meus avós pelo exemplo de vida.

Eu vejo os amigos mascarados,
Eu vejo todos os inimigos,
Eu vejo amigos descarados,
Eu vejo inimigos meus amigos.

Gostava de ver verdadeiros,
Gostava de ver amizade,
Gostava de ver os primeiros,
Gostava de ver sinceridade.

Se penso fico sem saber,
Se penso fico em agonia,
Se penso fico a sofrer.

A todos peço perdão,
Aqueles que eu ofendi,
Digo de coração,
Já não sei como vivi.

Gil da Silva Amaral

**o júri / the jury**

presidente / **Maria Teresa Bixirão Neto**
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

vogais / examiners committee **Ana Elisa Esteves Santiago**
Professora Ajunta Convidada do Instituto Politécnico de Coimbra

**Ana Maria Reis D'Azevedo Breda**
Professora Associada c/ Agregação do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

**agradecimentos**

Este relatório de estágio não dependeu só de mim para ser concluído, sem a ajuda de algumas pessoas que agradeço estarem na minha vida teria sido impossível concluir.

Desta forma, agradeço assim:

- À Professora orientadora Dr. Ana Breda, por toda a ajuda, pela tolerância, pelas críticas, pelas sugestões, pela disponibilidade, assim como pela compreensão ao longo da realização deste trabalho.

- À professora Lúcia Matos, pelo acompanhamento, pelas brincadeiras, pela boa disposição e principalmente pela ajuda que forneceu.

- Aos meus pais, avós e à minha irmã que sempre me incentivaram e apoiaram nas minhas decisões.

- Às minhas colegas de Estágio pelos bons e maus momentos que passámos ao longo de todo o tempo de Estágio.

- Aos alunos que cooperaram neste estudo pela disponibilidade. Sem o seu contributo a realização deste estudo seria impossível.

- Às minhas amigas pelo apoio, pela disponibilidade e carinho sempre demonstrados.

- A toda a minha família que me ajudou a terminar este projeto através do seu apoio, do seu carinho e da sua energia positiva.

**palavras-chave** Ensino de Matemática, Aprendizagem, Erros, Avaliação formativa, Funções.

**resumo**

Ao longo do tempo os processos de ensino e aprendizagem têm sido alvo de contínua mudança, revestindo-se de grande importância as formas de avaliação que os acompanham. A avaliação formativa, em que o objetivo passa por acompanhar o progresso individual de cada aluno tendo em conta os objetivos de aprendizagem traçados é um instrumento de autorregulação aos processos acima mencionados. O erro cometido (pelo aluno) e analisado (pelo professor) assume um valor de grande relevância quando compreendido como articulador de novos saberes e promotor de mediações (docente/discente) eficazes a aprendizagens significativas e sólidas. Neste contexto formulou-se o seguinte problema de investigação: Análise da natureza dos erros mais comuns no subdomínio das Funções e as suas consequências nos processos de ensino e aprendizagem. Desta forma, pretende-se dar um contributo às seguintes questões de investigação: i) Qual a natureza dos erros mais frequentes que os alunos do 7.º ano de escolaridade cometem na resolução de questões relacionadas com o tema das funções? ii) De que forma é que os alunos se apercebem dos erros que cometem? Que dispositivos de regulação pode usar o professor por forma a favorecer o processo de superação do erro? Que evolução apresentam? Considerando a natureza das questões de investigação, o estudo realizado é de natureza mista (qualitativo e quantitativo), essencialmente qualitativa, e insere-se no design de um estudo de caso múltiplo, sendo a turma participante uma turma do 7.º ano de escolaridade duma escola do distrito de Aveiro. A recolha de dados foi efetuada através das produções escritas, de todos os alunos da turma, em dois testes de avaliação e numa ficha de trabalho e de entrevistas semiestruturadas efetuadas a um conjunto de alunos, selecionados, dessa turma. Os resultados obtidos sugerem que (1) os alunos cometem com maior frequência erros que ocorrem devido às características da linguagem algébrica, (2) o questionamento oral e o constante feedback organizado e estruturado são dispositivos reguladores que o professor pode e deve usar por forma a favorecer o processo de superação do erro.

**keywords** Mathematics Teaching, Learning, Errors, Formative Evaluation, Functions.

**abstract** Over the time the teaching and learning processes have been the aim of continuous changes. The methods used in evaluation that are related to them, are very important. Formative evaluation, in which the objective is to follow the individual progress that each student take into account and the learning objectives defined, are instruments used in self-regulation of the students knowledge. The error made (by the student) and analyzed (by the teacher) assumes a value of great relevance when understood as an articulator of mediations (teacher/student) effective to significant and solid learning. In this context, the research problem that was formulated is: Analyse the nature from the most common errors in the subdomain "functions" and their consequences on teaching and learning processes. Thus, the following research questions are: i) What is the nature of the most common mistakes made by students in the 7th grade in the resolution of questions related to the subject of functions? ii) How do students perceive their own mistakes? What can be the adjustment devices that teachers can use in order to overcoming students errors? What benefits can be enumerated? Considering the nature of the research questions, the study carried out is a mixed nature (qualitative and quantitative), essentially qualitative, and is part of the design of a multiple case study. The participating class is a 7th grade class from a school in Aveiro district. The data collection was carried out through the written productions, of all the students in the class, in a work sheet and semi-structured interviews carried out to a group of selected students from that class. The results obtained suggest that (1) students make more frequent mistakes, due to the characteristics of algebraic language, (2) oral questioning and constant organized and structured feedback are regulatory devices that the teacher can and should use in order to promote the process of overcoming the error.

## Índice:

## Índice de Figuras:

## Índice de Tabelas

## Lista de Abreviaturas

CEB – Ciclo do Ensino Básico

EE – Encarregado de Educação

ES – Ensino Secundário

FT – Ficha de trabalho realizada no dia 13 de março de 2020

ME – Ministério da Educação

ORPC – Outras Respostas Parcialmente corretas

OTD – Organização e Tratamento de Dados

PES – Prática de Ensino Supervisionada

RI – Resposta Incorreta

RINC – Resposta incompleta

RPC – Resposta Parcialmente correta

RTC – Resposta totalmente correta

SR – Sem Resposta

T1 – Teste de avaliação de conhecimentos realizado dia 3 de dezembro de 2019

T2 – Teste de avaliação de conhecimentos realizado dia 14 de fevereiro de 2020

# 1. Introdução

Atendendo a que qualquer trabalho de investigação é motivado por razões e factos inerentes a cada ser humano, no presente capítulo pretendo expor as razões associadas à minha escolha. Nesse sentido, apresento as questões de investigação que sustentam a investigação desenvolvida e às quais irei tentar dar resposta ao longo do presente relatório de estágio.

O predomínio da ideia de erro como algo inadequado, a ser punido e constrangido, permanece no processo avaliativo, desqualificando o aluno e condenando-o, como o único responsável por não aprender, pelo seu insucesso, o que nem sempre é assim. Por vezes também há uma parte de responsabilidade, não consciente, do professor no erro que o aluno comete. A metodologia de ensino empregue pode não ser a adequada, levar o aluno a não compreender o que se ensina, e, em consequência, levá-lo a cometer erros.

Com este estudo pretende-se centrar no erro, encarando-o como um elemento fundamental no processo de ensino e de aprendizagem matemática no subdomínio *Funções*. Assim sendo, irei analisar quais os erros mais frequentes e tentarei dissecar, sempre que possível, se os erros foram superados. Os erros são frequentemente detetados a partir de uma avaliação, e, portanto, tentarei perceber como os alunos a encaram.

A organização do trabalho desenvolvido, e a respetiva estrutura será também objeto deste capítulo.

## 1.1. Motivação e pertinência

A aprendizagem do conceito de função inicia-se desde os 1.º e 2.º ciclos do ensino básico e vai-se consolidando e aprofundando nos ciclos seguintes. Sem usarem a definição formal de função utilizam-na, por exemplo, no tópico "sequências" onde a cada "(...) número (ordem) se faz corresponder um dado termo (...)" (Ponte, Branco & Matos, 2009, p. 116). Abordam este conceito em Organização e Tratamento de Dados (OTD) quando "envolvem correspondências entre duas variáveis que se podem representar em tabelas e gráficos. "(Ponte, Branco & Matos, 2009, p. 116).

O programa de Matemática do ensino básico define que é no 3.º CEB que o subdomínio *Funções* é estudado de forma explícita. "O estudo das funções visa a compreensão da noção de função, enquanto relação entre variáveis e como correspondência unívoca entre dois conjuntos, e também a capacidade de usar este conceito na resolução de problemas reais "(Ponte, Branco & Matos, 2009, p. 116).

Em relação às competências matemáticas, o subdomínio *Funções* envolve, primordialmente, o raciocínio algébrico e a compreensão de relações funcionais. Formular e comunicar generalizações, assim como reconhecer e representar relações entre variáveis são processos cruciais do pensamento matemático e da sua utilização para compreender situações e resolver problemas de diferentes matérias e do quotidiano (Serrazina, Abrantes & Oliveira, 1999).

Nas aulas de matemática, nem todos os alunos participam, por diversas razões, nas tarefas propostas, nomeadamente, por insegurança, por vergonha, por medo, entre outras. A forma como se gere o currículo e a maneira como os alunos trabalham, fazem com que a apatia de alguns seja aceite como um comportamento normal, sem que muitas vezes se questione as razões que levam a esse comportamento.

Enquanto professores, temos como principal objetivo o formar indivíduos competentes, criativos, flexíveis, autónomos e dinâmicos, que estejam constantemente à procura de aprender e que consigam lidar com situações novas e diferentes.

Segundo o Programa de Matemática para o Ensino Básico, os alunos do 3.º CEB devem ser capazes de construir o seu conhecimento matemático. "Os alunos devem ser capazes de estabelecer conjeturas, em alguns casos, após a análise de um conjunto de situações particulares" (ME, 2013, p. 4).

O processo educativo, no seu todo, está em constante alteração, as estratégias de ensino são cada vez mais diversificadas e, nesse sentido, é responsabilidade do professor adequar estratégias aos objetivos traçados.

É extremamente importante utilizar frequentemente avaliações formativas e, a partir destas, recorrer a estratégias adequadas por forma a suscitar aprendizagens sólidas.

No âmbito da educação matemática, segundo Puerto, Minnaard e Seminara (2004), há erros que aparecem sistematicamente nas produções dos alunos. As dificuldades que se originam no processo de aprendizagem conectam-se e os obstáculos manifestam-se na prática sob a forma de respostas incorretas.

Numa perspetiva do erro, é comum ouvirmos no nosso dia-a-dia "A errar é que se aprende", mas será que todo o erro se "converte" em aprendizagem? Se ignorarmos o erro, podemos, ainda assim, aprender? Como converter um erro numa oportunidade de aprendizagem? Estas são algumas das questões que iremos aflorar.

Com a utilização de uma estratégia de avaliação formativa é interessante saber quais os raciocínios que os alunos fazem e que, por vezes, não são aqueles que se espera. Neste sentido, consideramos pertinente compreender o que os leva a cometer determinados erros.

Ao analisar as falhas cometidas pelos discentes é fundamental analisar para além da natureza intrínseca dessas falhas o contexto em que estas surgem, nomeadamente, em que tipos de tarefas/problemas ocorrem, para que dessa forma haja uma aprendizagem construtivista, onde os alunos possam aprender com os seus erros.

A necessidade de analisar o erro surgiu enquanto aluna. Senti que muitas vezes errava e não percebia porque razão tal acontecia, não sabia a sua origem. Por consequente, e sendo o tema das funções um dos temas mais importantes na formação académica, é uma mais valia estudar estratégias que, em função dos erros cometidos, possam ajudar os alunos a construir e solidificar a sua aprendizagem.

### 1.2. Problema e questões de investigação

No sentido de tentar compreender, colmatar e transformar os erros consistentemente cometidos, por alunos do 7.º ano de escolaridade em tarefas do subdomínio *Funções*, em oportunidades de aprendizagem formulou-se o seguinte problema de investigação "Análise da natureza dos erros mais comuns no subdomínio das funções e suas consequências no processo de ensino e aprendizagem."

Ora, no sentido de investigar o problema acima referido, pretende-se responder às seguintes questões de investigação:

- Qual a natureza dos erros mais frequentes que os alunos do 7.º ano de escolaridade cometem na resolução de questões relacionadas com o tema das funções?
- De que forma é que os alunos se apercebem dos erros que cometem? Que dispositivos de regulação pode usar o professor por forma a favorecer o processo de superação do erro? Que evolução apresentam?

Com este trabalho, pretendo contribuir para a conceção de tarefas exploratórias, no subdomínio das funções e na abordagem didática a desenvolver para a compreensão do conceito de função e das noções a este associado, mitigando as situações de erro detetadas.

No que concerne ao meu crescimento profissional, espero que este trabalho possa contribuir para a minha formação, enquanto futura professora e, neste sentido, que me possa ajudar a adequar estratégias de acordo com as dificuldades expressas implícita ou explicitamente pelos discentes.

### 1.3. Estrutura e organização do estudo

O presente estudo está descrito em seis capítulos principais: introdução, fundamentação teórica, prática de ensino supervisionada, metodologia de investigação, a análise e discussão dos dados e as considerações finais.

No capítulo "Introdução" estão expostas a motivação e pertinência, o problema e as respetivas questões de investigação e é apresentada a estrutura e organização do estudo.

O segundo capítulo é dedicado à contextualização e apresentação de conceitos e teorias que serviram de base no desenvolvimento deste estudo. Este capítulo apresenta cinco subcapítulos sendo eles as perspetivas sobre o currículo de Matemática, os critérios de idoneidade Matemática, os tipos de tarefas matemáticas, as estratégias de avaliação no ensino de matemática e, por fim, os erros no ensino de matemática.

No capítulo "Prática de Ensino Supervisionada" pretende-se dar a conhecer a caracterização do contexto da PES, alguns pontos em destaque sobre as intervenções realizadas e, por fim, apresenta-se uma reflexão sobre a minha experiência como estudante nesta unidade curricular.

Em seguida apresenta-se o capítulo onde são descritas as fases deste estudo, assim como as técnicas e instrumentos de recolha de dados.

No capítulo que se segue designado por "Análise e Discussão dos Dados" faz-se uma análise minuciosa às respostas dos alunos, para estudar a frequência e a natureza/tipologia dos erros e a evolução dos alunos. É ainda apresentado um subcapítulo em que através da análise das entrevistas realizadas se apresenta o modo como a avaliação é percecionada pelos alunos.

O capítulo "Considerações finais" dedica-se a expor as principais conclusões, os constrangimentos deste estudo, assim como, sugestões para uma futura investigação neste tema.

Este relatório contempla, ainda, os capítulos de "Referências Bibliográficas" e os "Apêndices" que servem de apoio ao estudo realizado.

## 2. Fundamentação Teórica

Neste capítulo estão presentes as perspetivas teóricas resultantes da revisão de literatura que suportou o presente estudo.

Os tópicos incidem sobre a teoria construtivista do processo de ensino e de aprendizagem, estratégias inovadoras e o erro como elemento a considerar para os alunos ultrapassarem as suas dificuldades.

### 2.1. Perspetivas sobre o currículo de Matemática

"A palavra currículo é de origem latina – *currere* – e significa caminho, jornada, trajetória, percurso" (Ribeiro & Santos, 2011, p. 160).

Segundo Vale (2010) e Ribeiro e Santos (2011) o termo "currículo" pode ser visto como um projeto inacabado, como um processo dinâmico. As transformações do mesmo ocorrem em diversos aspetos. Estas transformações podem estar dependentes das intervenções das estruturas políticas e das estruturas da escola.

O currículo de Matemática deve ser coerente e baseado em propósitos e objetivos.

#### 2.1.1. Aprendizagens essenciais no 7.º ano de escolaridade

Como finalidades do ensino da Matemática e "respeitando os princípios de equidade e qualidade" (Ministério da Educação [ME], 2018, p. 1), deve dispor-se as aprendizagens matemáticas mais importantes e sustentáveis para todos os alunos.

Os conteúdos de aprendizagem devem ser trabalhados, direcionando os alunos numa perspetiva de resolução de problemas, em diversos contextos, promovendo o raciocínio matemático e a comunicação, conforme afirma o ME (2018). Pretende-se ainda, segundo o ME (2018), que os alunos consigam desenvolver a capacidade de raciocinar indutiva e dedutivamente, por forma a progredirem na fundamentação das suas ideias e na análise dos argumentos dos colegas. Os alunos devem ainda desenvolver a capacidade de comunicar matematicamente, com a notação e simbologia adequada aos diversos conteúdos e, portanto, pretende-se que "progridam na fluência e no rigor com que representam, exprimem e discutem as suas ideias, procedimentos e raciocínios" (ME, 2018, p. 5).

## 2.2. Critérios de idoneidade Matemática

A didática da Matemática assume uma importância primordial no fornecimento de conhecimento descritivo e na explicação dos processos de ensino e de aprendizagem de conteúdos específicos que estimulam o entendimento desses procedimentos.

Segundo Godino (2011), o Enfoque Ontosemiótico é um sistema teórico inclusivo que surgiu no contexto da Didática da Matemática e que permite articular diferentes pontos de vista e noções teóricas sobre o conhecimento matemático e o seu processo de ensino e aprendizagem.

Godino (2011) apresenta um marco teórico que permite ter em conta a complexidade dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Segundo o mesmo autor, o processo de ensino e de aprendizagem deveria incluir ferramentas que permitissem abordar questões relativas às seguintes facetas e às suas interações. Sendo estas facetas a:

- **Epistémica** – conhecimento didático-matemático sobre o próprio conteúdo, é decidir a diferença de significados que podem possuir os objetos matemáticos, segundo os diversos marcos institucionais e os contextos de uso.
- **Cognitiva** – conhecimento sobre como os alunos aprendem, raciocinam e como progridem na sua aprendizagem (significados pessoais).
- **Afetiva** – conhecimento sobre os aspetos afetivos (emoções, atitudes, crenças e valores) de cada discente em relação aos objetos matemáticos e ao processo de estudo seguido.
- **Interacional** – diz respeito a todas as variáveis que estão interligadas com as interações entre professor e alunos.
- **Mediacional** – conhecimento dos recursos tecnológicos apropriados para fomentar a aprendizagem dos discentes.
- **Ecológica** – conhecimento das relações do conteúdo matemático com outras disciplinas e fatores curriculares, socioprofissionais, políticos, económicos que condicionam os processos de estudo matemático.

(Godino, 2017)

Este modelo de Godino (2011) considera essenciais as idoneidades epistémica e cognitiva, embora considere que as restantes facetas também condicionam o processo de ensino e de aprendizagem dos alunos. Estas duas idoneidades são as mais importantes pois ambas estão definidas sobre a noção de significado. Assim sendo, para o estudo que se segue estas facetas são também elas as mais relevantes, uma vez que nos permitem analisar as situações-problema, linguagens, as regras, os argumentos, as relações e, assim como, todos os conteúdos que envolvem uma determinada tarefa.

Um processo de estudo matemático terá uma maior idoneidade epistémica na medida em que o conteúdo implementado (ou pretendido) representa bem o conteúdo de referência (Godino, 2011, p. 8).

Apresentam-se na tabela 1 os componentes e indicadores da idoneidade epistémica.

Tabela 1 – Componentes e indicadores da idoneidade epistémica, adaptado (Godino, 2011, p. 9).

| COMPONENTES: | INDICADORES: |
|---|---|
| **Situações-problemas** | Uma amostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercício e aplicação – propõem-se situações de generalização de problemas (problematização). |
| **Linguagens** | Uso de diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica...).<br>Nível de linguagem adequado ao público que se dirige.<br>Propõem-se situações de expressão matemática e interpretação. |
| **Regras (Definições, proposições, procedimentos)** | As definições e procedimentos são claros e corretos, estão adaptados ao nível educativo a que se dirige.<br>Apresentam-se os enunciados e procedimentos fundamentais do tema para o nível educativo dado.<br>Propõem-se situações onde os discentes têm que gerar ou negociar definições, proposições ou procedimentos. |
| **Argumentos** | As explicações, verificações e demonstrações são adequadas ao nível educacional ao qual são direcionadas.<br>Promovem-se situações onde o aluno tem de argumentar. |
| **Relações** | Os objetos matemáticos (problemas, definições, proposições, etc.) relacionam-se e conectam-se entre si. |

| | |
|---|---|
| | Os diversos significados dos objetos que intervêm nas práticas matemáticas são identificados e articulados. |

Definimos por idoneidade cognitiva o grau em que os conteúdos implementados (ou pretendidos) são adequados aos discentes. A seguir apresenta-se a tabela 2 com os componentes e indicadores da idoneidade cognitiva.

Tabela 2 – Componentes e indicadores da idoneidade cognitiva, adaptado (Godino, 2011, p. 10).

| COMPONENTES: | INDICADORES: |
|---|---|
| **Conhecimentos prévios (os mesmos elementos são tomados em consideração na adequação da idoneidade epistémica)** | Os discentes têm os conhecimentos prévios necessários para o estudo do tema.<br>Os conteúdos pretendidos podem-se alcançar nas suas diversas componentes. |
| **Adaptações curriculares às diferenças individuais** | Incluem-se atividades de ampliação e de reforço.<br>Promove-se o acesso e a realização de todos os alunos. |
| **Aprendizagem (os mesmos elementos são tomados em consideração na adequação da idoneidade epistémica)** | As diversas formas de avaliação indicam que os alunos alcançam a apropriação dos conhecimentos e competências pretendidos (compreensão conceptual e proposicional; competência comunicativa e argumentativa; fluência processual; compreensão situacional; competência metacognitiva).<br>A avaliação considerando os diversos níveis de compreensão e competência.<br>Os resultados das avaliações são divulgados e usados para tomar decisões. |

## 2.3. Tipos de Tarefas Matemáticas

A natureza das tarefas matemáticas pode ser diferente conforme os contextos de ensino e de aprendizagem. Ponte (2005) sugere que um professor ao planificar as suas intervenções deve considerar diversos tipos de tarefas. Assim sendo, deverá existir diversificação, uma vez que cada tipo de tarefa tem um papel específico na aprendizagem. Estas tarefas podem ser mais ou menos desafiantes, mais abertas ou mais fechadas. Podem ter ainda um contexto que se associa à realidade ou podem ser tarefas construídas a partir da matemática pura, estas tarefas podem ainda ser de curta, média e longa duração.

Ponte (2005) expõe um quadro organizador dos diferentes tipos de tarefas, referindo que é fundamental analisar duas dimensões sendo estas o grau de desafio matemático e o grau de estrutura.

O grau de desafio matemático é aquele que podemos ver como a "(...) perceção da dificuldade de uma questão (...)" (Ponte, 2005, p. 7). Este grau de desafio constitui uma dimensão usada para "(...) graduar as questões que se propõem aos alunos, tanto na sala de aula como em momentos especiais de avaliação como testes e exames" (Ponte, 2005, p. 7). Assim sendo, o grau de desafio matemático pode variar entre "reduzido e elevado" (Ponte, 2005, p. 7).

O grau de estrutura é aquele que pode variar entre "aberto e fechado" (Ponte, 2005, p. 7). Ponte (2005) designa por uma tarefa fechada uma tarefa que menciona diretamente o que se pretende que os alunos façam. Já as tarefas de cariz aberto são aquelas que se comportam com "(...) um grau de indeterminação significativo (...)" (Ponte, 2005, p. 7) mediante o que é pedido.

No sentido de caracterizar cada tarefa Ponte (2005) apresenta o seguinte esquema:


Figura 1 – Tipologia de tarefas quanto ao grau de desafio e de estrutura (Ponte, 2005, p. 8).

Os exercícios são tarefas em que aquilo que se pretende é expresso de maneira clara. Na resolução deste tipo de tarefas o aluno emprega de forma direta os conhecimentos e técnicas que aprende, não necessita de grande esforço cognitivo, Ponte (2005).

No que diz respeito aos problemas, estes, como podemos observar pelo esquema anterior (figura 1), são tarefas de grau elevado, requerendo um esforço cognitivo mais elevado. Em geral, num problema o aluno tem de interpretar o enunciado e em seguida criar uma estratégia de resolução, assim sendo, este tipo de tarefas exige reflexão e persistência (Ponte, 2005).

Nas tarefas de cariz aberto estão incluídas as tarefas de exploração e as tarefas de investigação. A diferença entre estes dois tipos de tarefas está relacionada com o grau de desafio. Quando o aluno não tem que pensar muito, ou seja, quando não tem muito para planear estamos diante de uma "(...) tarefa de exploração. Caso contrário, será designada por tarefa de investigação" (Ponte, 2005, p. 8).

Ponte (2005) ainda refere o contexto e a duração da tarefa como duas dimensões de grande importância.

No que concerne à duração da tarefa esta pode ser realizada em "poucos minutos ou demorar dias, semanas ou meses" (Ponte, 2005, p. 9). Neste sentido, a realização da tarefa pode ser de longa ou de curta duração, como podemos observar na figura 2.

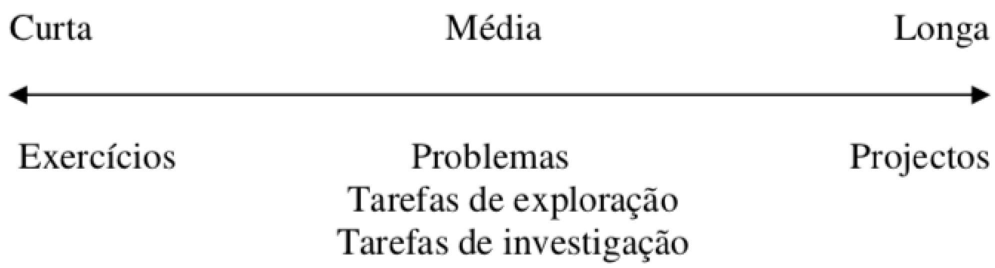



Figura 2 – Tipos de tarefas relacionadas com a duração (Ponte, 2005, p. 10).

Relativamente ao contexto Ponte (2005) engloba tarefas ligadas à vida real, tarefas relacionadas, parcialmente, à realidade e tarefas às quais apenas se referem à Matemática pura.

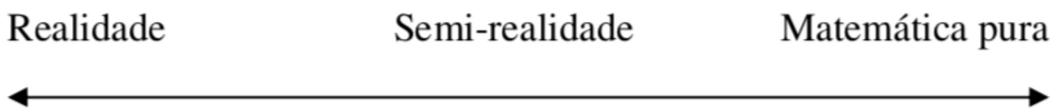



Figura 3 – Tipos de tarefas relacionadas com o contexto (Ponte, 2005, p. 11).

As tarefas que estão ligadas parcialmente à realidade são, frequentemente, os problemas e os exercícios de Matemática. Neste tipo de tarefas a "atenção foca-se apenas na propriedade ou propriedades que interessam a quem enunciou o problema e é nelas que o aluno é suposto centrar-se" (Ponte, 2005, p. 10).

## 2.4. Estratégias de Avaliação no Ensino de Matemática

Com a evolução dos tempos surgem novas estratégias para o processo de ensino da matemática, nomeadamente, no que diz respeito à avaliação uma vez que esta é de grande importância.

Avaliar é uma tarefa bastante complexa na profissão de um docente, sendo que, é necessário que as capacidades dos alunos sejam corretamente compreendidas, para que a subjetividade não seja exageradamente acentuada. Nesta medida, ser justo é dever do professor, e, portanto, este deve ser o mais justo sempre que possível na forma como avalia os trabalhos dos seus alunos.

Através da avaliação podemos determinar como se ensina e também de como se aprende. "(...) A avaliação terá como finalidade a regulação de todo o processo, ao permitir aos alunos que sejam capazes de identificar as suas dificuldades e implementar estratégias para as superar (...)" (Vieira, 2019, p. 66).

Cada conceito avançado em matemática é baseado em conceitos elementares, e os conceitos avançados não podem ser aprendidos sem uma compreensão sólida dos conceitos elementares (Siyepu, 2015). Desta forma, é importante que os alunos ultrapassem as suas dificuldades básicas.

A avaliação enquanto processo inclui as seguintes etapas, embora estas não necessitem de ser obrigatoriamente seguidas de forma linear e sequencial, segundo Santos (2016):

(i) Deve existir uma tomada de decisão sobre o que é pertinente conceber para atingir um determinado objetivo.

(ii) Numa fase seguinte deve existir uma recolha de informação.

(iii) Em seguida, a informação recolhida deve ser interpretada.

(iv) Por fim, deve haver um desenvolvimento de uma ação fundamentada.

O que permite distinguir as modalidades da avaliação é o fim que pretendemos analisar, ou seja, está relacionado com o objetivo que pretendemos atingir. Existem dois principais objetivos que pretendemos com a avaliação, nomeadamente, "(...) avaliar para ajudar a aprender e avaliar para sintetizar a aprendizagem" (Santos, 2016, p. 640).

Ao longo dos tempos, muitos autores tendem a salientar como é importante a avaliação numa perspetiva de ensino e aprendizagem. Nesse sentido, uma avaliação nestes termos permite examinar, com detalhe, as dificuldades e os progressos dos alunos. Ainda é possível corrigir erros, inverter os processos, reforçar estímulos, isto é, nesta perspetiva de avaliação deve-se adequar estratégias conforme as necessidades de cada aluno, para que este seja capaz de alcançar as metas que se pretende atingir (Vieira, 2019).

É também importante que o aluno tome consciência do seu processo de aprendizagem. Assim sendo, as ações avaliativas não devem servir apenas de apoio ao professor, mas devem também apoiar o aluno, pois assim podem, ambos, direcionar as suas práticas rumo aos objetivos pretendidos para a aprendizagem.

Podemos ver a avaliação de duas maneiras sendo que a mesma informação, recolhida da mesma forma chama-se formativa se for utilizada para apoiar a aprendizagem e o ensino, ou sumativa se só servir para registar e reportar, segundo Harlen citado por (Santos, 2016).

#### 2.4.1. Avaliação diagnóstica

A avaliação diagnóstica é aquela que permite ao professor ter informações acerca das capacidades do aluno antes de dar a início um processo de ensino. Pode ser ainda uma forma de determinar a presença ou a ausência de conhecimentos prévios (Vale, 2010).

#### 2.4.2. Avaliação formativa

O termo avaliação formativa surge no final dos anos 90 e levou à aparição do termo "*assessment for learning*" (Vieira, 2019). Este tipo de avaliação, segundo o Decreto-Lei nº 55/2018, de 6 de Julho, "(...) assume carácter contínuo e sistemático, ao serviço das aprendizagens, recorrendo a uma variedade de procedimentos, técnicas e instrumentos de recolha de informação, adequados à diversidade das aprendizagens, aos destinatários e às circunstâncias em que ocorrem" (p. 2937).

A avaliação formativa é aquela modalidade predominante nas salas de aula, estritamente articulada com o ensino e com a aprendizagem. Segundo Fernandes (2014), este tipo de avaliação toma em conta o indivíduo como pessoa. O docente tem em consideração o meio onde o aluno está inserido, as suas dificuldades, os esforços, assim como a evolução que cada aluno apresenta ao longo do processo.

Por forma a combater o insucesso escolar surge, então, a avaliação formativa que "(...) para além de dar mais oportunidade ao aluno permitindo-lhe repensar as questões colocadas, é talvez um contributo para que estes tenham uma atitude diferente em relação à Matemática e possam adquirir mais confiança em si próprios" (Santos, 2016, p. 651).

Quando a avaliação é formativa, a informação recolhida apoia-se em estratégias de diferenciação pedagógica, por forma a ajudar os alunos a superar as suas dificuldades. Esta modalidade pode permitir a integração escolar e apoio aos discentes.

Assim sendo, uma estratégia de avaliação formativa possibilita aos alunos, aos professores, aos pais e EE obter *feedback* sobre o "desenvolvimento do ensino e da aprendizagem, com vista ao ajustamento de processos e estratégias "(ME, 2018, p. 2937).

#### 2.4.2.1. Teste em duas fases

Embora os testes escritos sejam a principal forma de recolha de dados para a avaliação dos alunos na disciplina de Matemática o teste em duas fases começa a ser cada vez mais, uma estratégia de avaliação formativa que é aplicada no processo de ensino e aprendizagem dos alunos dos dias de hoje.

O teste em duas fases consiste na aplicação do mesmo teste em duas ocasiões distintas. Este teste em duas fases é resolvido individualmente e é composto por perguntas de resposta curta, com questões mais fechadas e perguntas de resposta aberta, que devem envolver interpretações justificações e/ou resolução de problemas segundo Leal referenciado por Menino e Santos (2004) e Santos (2016). Neste sentido, este tipo de teste permite incidir em aprendizagens de grau elevado de dificuldade cognitiva, como sendo, "(...) o raciocínio matemático, a comunicação matemática e a resolução de problemas" (Santos, 2016, p. 648).

Numa primeira etapa deste processo o teste é realizado em sala de aula e em tempo limitado e há quem ainda refira que este teste deve ser realizado "com consulta (o caderno diário do próprio aluno)" (Santos, 2016, p. 647). Em seguida, o professor recolhe o teste e devolve-o ao discente com anotações/*feedback* escrito que forneça informações ao aluno por forma a que este possa "aprofundar/melhorar/corrigir aspetos da primeira versão do teste por si realizada" (Santos, 2016, p. 647).

Numa segunda fase do processo é realizada a segunda versão do teste fora da sala de aula num período de tempo mais alargado determinado entre professor e alunos, como referem (Menino & Santos, 2004) e (Santos, 2016).

Este processo termina com a atribuição de uma classificação final que toma em consideração as duas versões do teste resolvido e também a evolução verificada da primeira para a segunda etapa (Santos, 2016).

#### 2.4.2.2. Portefólio Reflexivo

O portefólio reflexivo possibilita que o aluno perceba se atingiu os objetivos estipulados na aprendizagem estabelecida, através da reflexão crítica sobre as suas produções (Orvalho, 2012).

"Este instrumento é constituído por trabalhos significativos dos alunos nos seus percursos de aprendizagem" (Ferreira, 2018, p. 15). Todos estes trabalhos incluídos no portefólio são cuidadosamente planeados, de forma organizada e em "função dos critérios de avaliação do portefólio que são previamente negociados" entre professor e alunos (Ferreira, 2018, p. 15).

Segundo Orvalho (2012), através do portefólio reflexivo cada discente pode indicar:

(i) "a forma como fez a apropriação do conhecimento, sustentada na reflexão crítica, permanente e sistemática" (p. 5716);

(ii) pela diversidade das suas produções pode divulgar a aquisição "das aprendizagens e o significado que lhes atribui nas pontes que construiu entre as teorias e a prática" (p. 5716).

(iii) "a fundamentação do caminho escolhido demonstra o sentido prospetivo das suas expetativas e o grau de desenvolvimento e de transformação conseguido" (p. 5716).

Fernandes referenciado por Orvalho (2012) aponta algumas vantagens na construção deste tipo de instrumento, nomeadamente:

*i) abranger mais componentes de avaliação, fugindo da submissão dos alunos a uma avaliação alheia; ii) melhorar a ligação entre desenvolvimento curricular e avaliação; iii) contextualizar a avaliação ao invés da avaliação formal; iv) demonstrar evidências claras de aprendizagem; v) refletir de forma crítica; vi) melhorar a autoestima; vii) identificar os progressos e as dificuldades; viii) permitir tomar melhores decisões para um ensino diferenciado.* (p. 5717)

Tendo em conta o referido anteriormente, este tipo de instrumento sendo adequadamente aplicado poderá estabelecer um enorme contributo para a aprendizagem do aluno. Desenvolvida através da autoavaliação, do constante *feedback* fornecido e da reflexão sobre a sua aprendizagem, (Dias, 2012).

#### 2.4.2.3. O *Feedback* na avaliação formativa

Na avaliação formativa, considerando o indivíduo enquanto pessoa e tendo em conta todo o seu trabalho, resulta ser papel do professor fornecer *feedback* sobre o mesmo. Este pode servir para facilitar a correção dos erros, assim como tentar percebê-los.

As interações constantes em sala de aula são o suporte da avaliação formativa, assim como, diversas estratégias usadas em função do contexto onde professores e alunos estão inseridos, como nos refere Vieira (2019).

Para que o impacto do *feedback* no processo de ensino e aprendizagem seja positivo, é imprescindível que o professor assegure que o *feedback* fornecido seja regulado por características que garantam que tal sucede. No que concerne a essas características, salientam-se a sua natureza, o foco, a forma sintática, as estratégias e a sua tipologia. Na tabela seguinte (tabela 3) sintetizam-se as características acima mencionadas e as respetivas descrições.

Tabela 3 - Características do feedback, construída através da consulta de vários autores.

<table>
<tr><th colspan="2">Formas de feedback</th><th>Descrição</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Natureza<br>(Gipps, 1999, cit. in Santos & Dias, 2006)</td><td>Descritivo</td><td>Está relacionado com o desempenho dos alunos face às tarefas propostas.</td></tr>
<tr><td>Avaliativo/não descritivo</td><td>Está relacionado com a formação de juízos de valor e tem poucos efeitos de natureza reguladora.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="4">Foco<br>(Hattie e Timperley,, 2007, cit. in Santos & Dias, 2006)</td><td>Aluno</td><td colspan="2">Feedback pessoal, na medida em que é dirigido ao self e muitas vezes não está relacionado com o desempenho do aluno na tarefa.</td></tr>
<tr><td>Tarefa</td><td colspan="2">Refere-se a uma tarefa ou produto, indicando se o trabalho está a ser desenvolvido de forma adequada e se as respostas estão corretas ou incorretas.</td></tr>
<tr><td>Processo</td><td colspan="2">Incide sobre o processo utilizado para elaborar um produto ou completar uma certa tarefa.</td></tr>
<tr><td>Autorregulação</td><td colspan="2">Está relacionado com a capacidade dos alunos autoavaliarem o seu trabalho e se envolverem mais profundamente na realização da tarefa.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Forma sintática<br>(Ornelas, 2018)</td><td>Interrogativo</td><td colspan="2">Facilita a compreensão do conteúdo do feedback pelo aluno, quando usada para promover a reflexão ou para solicitar a melhoria da produção.</td></tr>
<tr><td>Exclamativo</td><td colspan="2">Este tipo de feedback é fornecido, geralmente, através de interjeições que visam reforçar, alterar, estagnar ou gratificar um certo comportamento.</td></tr>
<tr><td>Afirmativo</td><td colspan="2">Este feedback serve para afirmar um certo comportamento.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Estratégias<br>(Fonseca, Carvalho, Conboy, Salema, Valente, Gama e Fiúza, 2015)</td><td rowspan="2">Momento em que é fornecido o feedback</td><td>No momento</td><td>Refere-se ao feedback que é fornecido logo após a questão / resolução do aluno.</td></tr>
<tr><td>Adiado</td><td>Refere-se ao feedback que é fornecido momentos mais tarde, por exemplo, um aluno realiza um teste e a professora apenas dá o feedback quando corrige todo o teste do aluno.</td></tr>
<tr><td>Modo do feedback</td><td>Oral</td><td>É oferecida ao aluno uma eventualidade de interagir com quem gerou o feedback.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="4"></td><td rowspan="2"></td><td>Escrito</td><td>A possibilidade de o aluno interagir com quem lhe oferece o feedback deixa de existir, e por consequente, pode levar a uma má interpretação por parte do aluno.</td></tr>
<tr><td>Visual</td><td>É o feedback que é fornecido através de olhares e gestos, para o recetor do feedback perceber um determinado objetivo.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Audiência</td><td>Grupo</td><td>O feedback é dirigido para um grupo de alunos.</td></tr>
<tr><td>Individual</td><td>O feedback é dirigido para um aluno, em particular, individualmente.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Tipos de feedback<br>(Reis, 2011)</td><td>Positivo</td><td colspan="2">O principal objetivo é reforçar um comportamento, ao qual se ambiciona a sua repetição.</td></tr>
<tr><td>Construtivo</td><td colspan="2">O objetivo deste tipo de feedback é construir e ajudar na aprendizagem do observado.</td></tr>
<tr><td>Destrutivo</td><td colspan="2">É o feedback que não serve como orientação, isto é, não apresenta o erro como uma forma de melhorar a aprendizagem.</td></tr>
</table>

O *feedback* formativo pode servir para informar o aluno do seu erro e ajudá-lo a melhorar o seu trabalho (Gomes & Pinto, 2018).

Ser um *feedback* formativo não significa que seja sempre positivo. O *feedback* deve ser positivo quando a informação está correta e deve ter um efeito motivador quando a informação não está completamente correta, pois assim o aluno saberá onde falhou e poderá melhorar. "O *feedback* regula o processo de ensino-aprendizagem, fornecendo, continuamente, informações para que o estudante perceba o quão distante, ou próximo, ele está dos objetivos almejados" (Borges, Miranda, Santana & Bollela, 2014, p. 326).

Como podemos observar na figura 4, o *feedback* é um elemento essencial da interação entre professor aluno, numa perspetiva formativa.

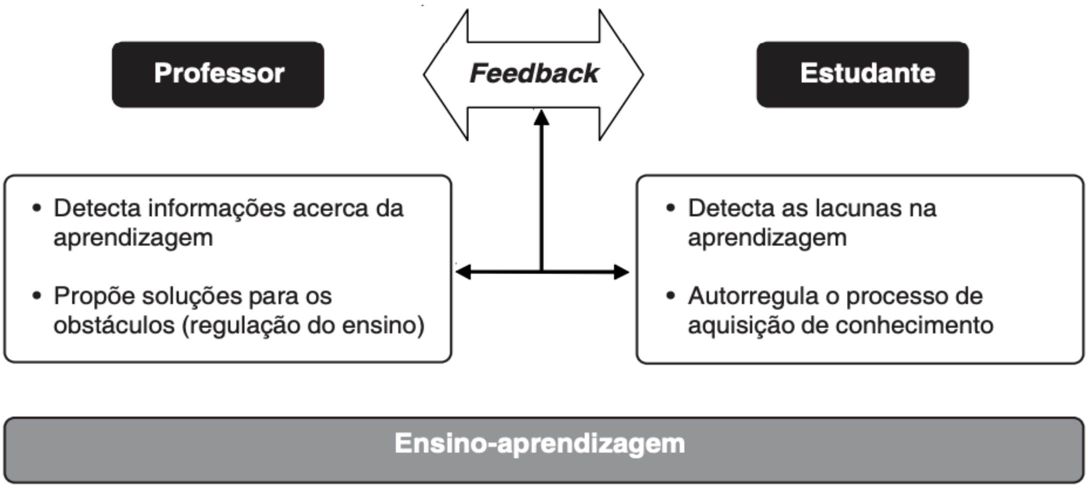



Figura 4 – Papel do docente e aluno no processo de ensino aprendizagem, segundo o modelo de avaliação formativa (Borges, Miranda, Santana, & Bollela, 2014, p. 326).

### 2.4.3. Avaliação sumativa

A avaliação sumativa é aquela que decorre após a avaliação formativa e é efetuada depois de um período de ensino e aprendizagem. Com uma avaliação nesta perspetiva, a preocupação dominante está ao nível das relações professor e aluno.

Esta modalidade, segundo o Decreto-Lei nº 55/2018, de 6 de Julho, "traduz-se na formulação de um juízo global sobre as aprendizagens realizadas pelos alunos, tendo como objetivos a classificação e certificação" (p. 2937).

A avaliação sumativa considera os critérios de sucesso referenciados à regra, ignorando o indivíduo enquanto pessoa. Neste tipo de avaliação interessa conseguir saber o que o aluno aprendeu ou não, o que sabe ou não, o que é ou não capaz de fazer, num momento final de um período de aprendizagem, segundo Sadler citado por Santos (2016).

Podemos observar algumas diferenças entre a avaliação formativa e a avaliação sumativa na tabela 4.

Tabela 4 – Diferenças entre avaliação formativa e sumativa, adaptada de Borges, Miranda, Santana, e Bollela (2014).

| AVALIAÇAO SUMATIVA | AVALIAÇAO FORMATIVA |
|---|---|
| **PONTUAL** | **CONTÍNUA** |

| | |
|---|---|
| Geralmente aplicada no fim de um determinado período de tempo. | Realizada durante os momentos de interação entre professor e alunos. |
| **FORMAL** | **INFORMAL** |
| Realizada num momento definido, normalmente é o dia destinado para realização do teste. | Realizada naturalmente, durante as interações entre professor e alunos e em diferentes cenários. |
| **ESTÁTICA** | **DINÂMICA** |
| Pré-estabelecida no início do ano letivo. Avalia se o aluno adquiriu ou não os conhecimentos e habilidades previstos. | Permite ajustes durante o ano letivo, corrigindo eventuais obstáculos enfrentados pelos alunos na aquisição dos objetivos. |
| **JULGA / HIERARQUIA** | **NÃO JULGA** |
| Define com base nas pontuações quem são os "bons" e os "maus" alunos. Favorece a competição. | Considera a individualização no processo de aprendizagem. Favorece a autoestima entre os discentes. |
| **TOMA DECISÃO** | **EXISTE AUXÍLIO** |
| Decide se o aluno progride ou não. | A natureza deste tipo de avaliação permite que exista auxílio do aluno. |

### 2.5. Os erros nos processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática:

O estudo do conhecimento humano e da capacidade do Homem para compreender sempre foi uma preocupação frequente, de muitos investigadores. A quem erra é atribuída a capacidade de considerar verdadeiros conceitos e procedimentos que estão desenvolvidos de forma incorreta que incluem ideias contraditórias e interpretações e justificações falsas.

Carraher, Carraher e Schliemann mencionados por Rosso e Berti (2010) referem que o importante é que o aluno acerte, que obtenha sucesso na escola, portanto, neste sentido, não é dada importância ao erro, embora o aluno possa ter o processo de resolução correto, mas o resultado errado.

Os autores Nagy e Buriasco (2008) referenciados por Ramos e Curi (2014) descrevem que "numa perspetiva de ensino que considera as respostas dos alunos apenas como 'certas' ou 'erradas', o professor deixa de conhecer/entender, entre outras coisas, a razão das escolhas feitas pelos alunos, bem como possíveis equívocos relacionados à apropriação de alguns conceitos" (p. 15).

O erro pode ser uma possibilidade de aquisição e de consolidação de conhecimentos, nesse sentido, a análise do erro na aprendizagem de matemática tem sido alvo de investigação na educação matemática.

Podemos observar as dificuldades que cada aluno tem através dos erros que comete, assim sendo, é importante refletir acerca do mesmo, assim como a sua origem.

Por norma, quando se fala em erro associa-se ao fracasso, mas nem sempre é assim, podemos também facilmente ligar o erro ao conhecimento, à aprendizagem, à verdade, à cooperação, à autonomia e também à criatividade (Rosso & Berti, 2010).

Efetivamente, numa perspetiva construtivista considera-se que os erros são uma fonte de informação para o docente determinar o que o aluno aprendeu ou não e como aprendeu (Franchi & Rincón, 2004).

Nos modelos construtivistas, os erros são sintomas interessantes dos obstáculos com que os alunos se deparam (Astolfi, 1999).

Segundo Bello, Martinez e Vargas (2017) os erros aparecem como consequência da aplicação correta de um procedimento imperfeito sistematizado, que se pode identificar com facilidade pelo professor. Embora os mesmos autores afirmem que os erros também se possam apresentar quando o aluno utiliza procedimentos imperfeitos e possui conceções inadequadas que não são reconhecidas pelo professor. Os alunos inventam com frequência os seus próprios métodos, que não são formais, mas que alguns chegam a ser muito originais, na realização de tarefas propostas.

Se o erro é visto como um fenómeno anormal, como algo completamente errado e que tem represálias, o aluno acabará por arranjar estratégias para responder certo e não irá responder quando possuir dúvidas, com medo dessas mesmas represálias. Por outro lado, se os alunos sentirem que as suas respostas, mesmo estando erradas, são tomadas em consideração estes envolver-se-ão mais nas tarefas que lhes são propostas. Assim sendo, estarão sempre dispostos a responder às questões, uma vez que não ficarão com medo do que possa vir a ser uma consequência da sua resposta.

Segundo Martins referenciado por Vale (2010) mais importante que o aluno acertar é que o aluno reflita sobre o seu trabalho, é importante que o aluno perceba quais os erros cometidos. Esta capacidade de refletir sobre o seu trabalho pode desenvolver a capacidade de autoquestionamento.

No que diz respeito à análise do erro, esta não deve ser apenas da responsabilidade do professor, os próprios alunos devem analisar os seus erros, a sua produção escrita. Desta forma, os discentes têm oportunidade de "identificar e compreender seus erros, podendo, assim, em outras ocasiões, geri-los, isto é, desenvolver processos de verificação e autocorreção que o ajudem, se necessário, a refazer os caminhos para sua resposta" (Nagy & Buriasco, 2008, p. 39).

### 2.5.1. Evolução do sentido da palavra "Erro"

Socas (2011) diz-nos que relativamente ao estudo das dificuldades e dos erros, ao longo dos tempos, podemos dividi-lo em três etapas.

A primeira etapa da investigação consistia em contar o número de soluções incorretas numa variedade de situações problemáticas e fazer uma análise dos tipos de erros detetados, para poder proceder a uma classificação e assim averiguar como estes surgem a partir de uma solução correta e fazer inferências sobre quais os fatores que levaram ao erro.

Numa segunda etapa, depois dos anos oitenta, começa-se a perceber que o erro é algo normal nos processos de ensino e de aprendizagem, e nesse sentido começa-se a tentar perceber as causas desse mesmo erro. É nesta etapa que surge então a necessidade de classificar os erros, que mais à frente irei abordar.

Nos últimos anos, terceira etapa, Socas (2011) refere que existem estudos onde se analisa de forma global as dificuldades e os erros cometidos na aprendizagem da linguagem algébrica.

### 2.5.2. Tipologia dos erros

Ao abordarmos o erro é necessário relembrarmos que este é uma manifestação exterior de um processo completo na interação de muitas variáveis, como sendo, por exemplo, o professor, o aluno, o currículo, o contexto sociocultural, entre outras variáveis. Sendo assim, uma tarefa muito complexa, por vezes, determinar a causa do erro.

Segundo Siyepu (2015) os erros podem agrupar-se nas seguintes categorias:

- Conceptuais, os quais mostram uma falha na compreensão de conceitos num determinado problema.

- ♦ Interpretativos, que ocorrem quando os alunos interpretam incorretamente um conceito devido à generalização excessiva de um esquema já existente.
- ♦ Extrapolativos, que ocorrem quando os alunos generalizam *demais* uma propriedade.
- ♦ Procedimentais, que ocorrem quando os alunos deixam de realizar manipulações ou algoritmos, mesmo que os conceitos estejam entendidos.

Segundo Brousseau referenciado por Franchi e Rincón (2004), os erros podem ser classificados como sendo:

- ♦ Práticos, ou seja, quando o professor considera que os erros cometidos são erros de cálculo.
- ♦ Distrativos, isto é, erros aos quais o professor considera um descuido do aluno.
- ♦ Técnicos, surgem quando o aluno utiliza o procedimento de forma incorreta.
- ♦ Teóricos, ocorrem quando o conhecimento teórico do aluno não é adequado.

Os mesmos autores mencionam ainda Movshovits et al, os quais enumeram os erros nas seguintes categorias:

- ♦ Erros devidos a dados mal utilizados.
- ♦ Erros que surgem de uma interpretação errada da linguagem.
- ♦ Erros devidos a inferências que logicamente não são válidas.
- ♦ Erros que surgem a partir do uso de teoremas e definições distorcidos.
- ♦ Erros cometidos por falta de verificação na solução.
- ♦ Erros técnicos, que advêm de erros de cálculo, de procedimento em algoritmos básicos.

Astolfi (1999) estabelece uma tipologia para os erros, que pretende terminar com as categorias adotadas tradicionalmente. A perspetiva deste autor permite tipificar as falhas como sendo:

- ♦ Erros devidos a compreensão das instruções de trabalho fornecidas, estão relacionados com a dificuldade que os discentes têm para compreender as instruções de trabalho que lhes são fornecidas, sejam essas instruções orais ou escritas.

- Erros que surgem dos hábitos escolares ou de uma incorreta interpretação das expetativas.
- Os erros como resultado das conceções alternativas dos alunos: estão relacionados com os obstáculos.
- Erros ligados a operações intelectuais implicadas.
- Erros devidos a sobrecarga cognitiva na atividade, estão relacionados com o facto da capacidade de reter memória.
- Erros que têm na sua origem outra disciplina. Derivam do conhecimento de outras disciplinas para dar resposta a uma determinada questão.
- Erros por complexidade do conteúdo.

Segundo Villalobos, referido por Bello e Martínez (2017), os erros podem ser caracterizados como:

- Dados mal utilizados, estes podem resultar de alguma discrepância entre os dados fornecidos e como o aluno trabalha com os mesmos. O aluno ao esquecer algum dado, pode fazer uma leitura errada do enunciado.
- Interpretação incorreta da linguagem. Esta caracterização é o resultado de uma interpretação incorreta do enunciado, uma errada compreensão dos símbolos matemáticos.
- Inferências que não são válidas logicamente, onde os erros se devem a falhas no raciocínio e não no conteúdo propriamente.
- Falta de verificação na solução, estes tipos de erros ocorrem quando todo o processo está completo, mas o mesmo não acontece com o resultado obtido.
- Erros técnicos, estes erros são aqueles onde se incluem os erros de cálculo, erros que ocorrem da manipulação de símbolos algébricos e outros derivados da execução dos algoritmos.

Ainda a respeito da classificação dos erros cometidos pelos alunos Radatz (1979) citado por Vale (2010) classifica-os em cinco categorias. Podem ser erros cometidos:

- Por dificuldades de linguagem.
- Por dificuldades na obtenção de informações espaciais.
- Pelo domínio incorreto de conhecimentos prévios, factos e conceitos.

- Por associações incorretas ou rigidez do pensamento.
- Na utilização de regras e estratégias insignificantes.

O erro pode ser categorizado utilizando diferentes perspetivas. É necessário recorrermos às causas que levaram o aluno a cometer o erro. Nesse sentido e mediante essas causas, temos de escolher uma perspetiva que melhor se adeque. É segundo a perspetiva de Socas (1997), apresentada em seguida, que irei guiar o meu estudo do erro.

O erro é a presença de um esquema cognitivo inadequado no discente, ou seja, não podemos afirmar que o erro é apenas uma consequência de uma falta específica de conhecimento ou da falta de atenção, Socas, citado por Franchi e Rincón (2004).

Socas (1997) considera três pilares não disjuntos, sendo estes o obstáculo, a ausência de significado e atitudes afetivas, "(...) que nos permitem analisar a origem do erro nas aprendizagens de Álgebra" (Vale, 2010, p. 42).

Socas (2011) e Rico (1995) afirmam que as dificuldades dos alunos podem estar associadas:

- à complexidade dos conteúdos da matemática.
- aos processos de pensamento matemático.
- aos processos de ensino que servem para a aprendizagem dos conteúdos matemáticos.
- aos processos de desenvolvimento cognitivo dos alunos.
- a atitudes afetivas e emocionais em relação à matemática.

Socas (2011) relaciona as dificuldades dos alunos aos erros cometidos pelos mesmos, sendo importante a categorização das falhas cometidas pelos discentes.

Por forma a categorizar os erros cometidos pelos alunos, Vale (2010) e Socas e Palarea (2008) apresentam o esquema que se segue, figura 5. Neste esquema são usadas as categorias A, B (B1, B2, B3, subcategorias de B) e C que serão as que irei utilizar no presente estudo, os erros cometidos pelos alunos.

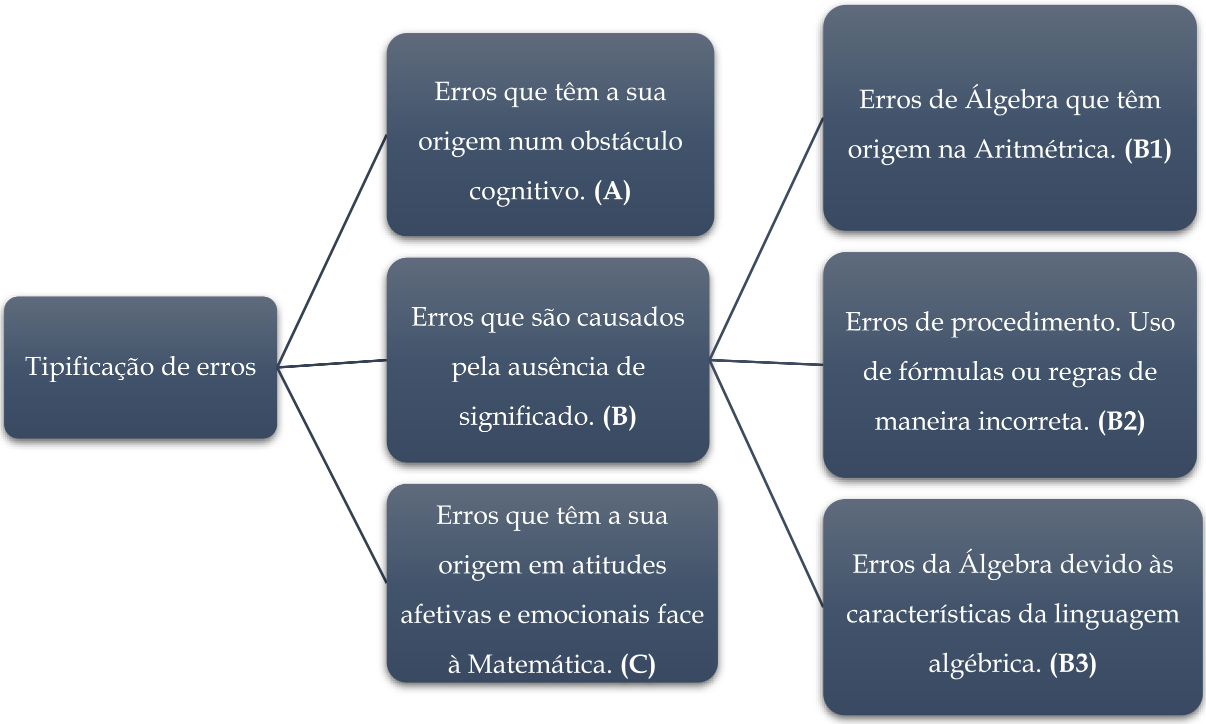



Figura 5 – Esquema, adaptado, de tipificação de erros de Socas (Vale, 2010).

Em seguida, são descritas cada uma das categorias usadas na tipologia de Socas referenciado por Vale (2010) e Socas e Palarea (2008).

**Categoria A** – Os erros que têm a sua origem num obstáculo cognitivo são, segundo Ruano, Socas e Palarea citados por Vale (2010), aqueles relacionados com os conhecimentos que o aluno usa fora do contexto, e que pode provocar respostas erradas, por exemplo, erro de eliminação, erros de concatenação, entre outros.

**Categoria B** – Os erros que surgem a partir de uma ausência de significado. Esta categoria subdivide-se em 3 subcategorias:

**Subcategoria B1** – Os erros identificados nesta subcategoria são aqueles que têm a sua origem na Aritmética. O significado dos símbolos utilizados é o mesmo nas diferentes áreas da matemática. A álgebra não se separa da aritmética, aliás pode considerar-se que a álgebra é uma perspetiva da aritmética generalizada. "Para entender a generalização das relações e processos algébricos, é necessário que o aluno as tenha assimilado no contexto da Aritmética; (...)" (Vale, 2010, p. 43). Erros incluídos nesta subcategoria são por exemplo, aqueles que estão relacionados com o uso de parênteses, potências, erros de divisão entre outros.

**Subcategoria B2** – Erros que surgem a partir de uma incorreta utilização de fórmulas ou regras de procedimento. Estes erros surgem quando o aluno aplica de forma incorreta uma fórmula ou uma regra conhecida. Erros deste tipo podem ser, por exemplo, a aplicação incorreta da propriedade distributiva, erros relativos ao uso de recíprocos, onde os alunos partem de um caso em particular e generalizam para todos os possíveis casos entre outros erros.

**Subcategoria B3** – Erros deste tipo são aqueles que ocorrem devido às caraterísticas da linguagem algébrica, por exemplo a substituição formal de variáveis e a incompreensão do sinal de igual na Álgebra.

**Categoria C** – Os erros referenciados nesta categoria são aqueles que têm origem em atitudes afetivas ou emocionais, como por exemplo a falta de concentração, o excesso de confiança e o esquecimento, entre outras.

Este modelo de Socas permite

> *(...) analizar las dificultades, y errores conceptuales y de procedimiento, en los aspectos operacionales, estructurales y procesuales, y que la naturaleza abstracta del lenguaje algebraico debe ser entendida como un proceso caracterizado por diferentes etapas, reflejadas en los diferentes estadios de desarrollo que se dan en los sistemas de representación cognitivos, que se caracterizan como estadios semiótico, estructural y autónomo. Es en este desarrollo en el que entendemos la construcción del conocimiento conceptual y procedimental del Álgebra.*
> (Socas, 2011, p. 28)

Segundo o referido anteriormente, este modelo permite aprofundar as dificuldades e os erros que os alunos têm na aprendizagem da linguagem algébrica e possibilita novas formas de focar o estudo dos erros.

# 3. Prática de Ensino Supervisionada

O presente estudo foi implementado no âmbito da PES. Neste capítulo expõe-se a caracterização do contexto e três planificações das intervenções que realizei. Cada uma das três planificações é dirigida a três níveis de escolaridade diferentes, 7.º, 10.º e 11.º anos, sendo que uma das planificações foi estruturada para uma intervenção por videoconferência.

Por fim, ainda neste capítulo apresenta-se uma reflexão sobre toda a PES.

## 3.1. Caracterização do contexto da prática de ensino supervisionada

A caracterização do contexto surge no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada, compreende minuciosamente o contexto da mesma. Esta caracterização contém informações sobre a escola e o respetivo agrupamento de escolas onde está inserida e informação sobre as turmas envolvidas.

- **A escola**

A escola onde decorreu a Prática de Ensino Supervisionada é a sede de um agrupamento de escolas e situa-se no distrito de Aveiro. Nesta escola leciona-se desde o 3.º Ciclo do Ensino Básico (CEB) ao Ensino Secundário (ES).

A escola opera num edifício de três pisos. As salas de aula onde me foi possível desenvolver a minha PES todas dispunham de quadro interativo, mas não estavam funcionáveis, pois não existiam canetas para os mesmos. Relativamente à internet, também não era totalmente funcional, pois muitas vezes não era possível o acesso à mesma.

Na escola existiam, no presente ano letivo, exatamente 4 turmas do 7.º ano de escolaridade e 10 turmas do 10.º ano de escolaridade, sendo que 2 destas turmas eram do Cursos de Artes Visuais.

- **As turmas**

Ao longo do período em que decorreu a PES foi-nos possível trabalhar com duas turmas uma do 7.º Ano de Escolaridade (3.º CEB) e outra do 10.º Ano de Escolaridade (ES).

Em seguida é exposta a caracterização das respetivas turmas.

- **7º Ano de Escolaridade**

A turma em questão era o 7.º C e tinha no início do ano letivo 30 alunos, mas 2 dos mesmos nunca estiveram presentes, 12 alunos eram do sexo feminino e 16 eram do sexo masculino. De uma forma geral era uma turma com alunos de diferentes níveis, mas a maioria com bastante empenho.

A diretora de turma do 7.º C era a orientadora cooperante da PES e, neste sentido, tinha acesso à maioria dos processos dos discentes que faziam parte desta turma.

De uma forma global, a turma tinha alunos muito heterogéneos, com alunos com diferentes desempenhos e diferentes objetivos na vida.

- **10º Ano de Escolaridade**

A turma em questão era o 10.º H e tinha exatamente 28 alunos, dos quais, no primeiro período, 15 eram do sexo feminino e 13 eram do sexo masculino. No segundo período um dos alunos do sexo masculino saiu desta turma e entrou uma aluna do sexo feminino, mantendo-se a turma com 28 alunos.

Era uma turma do Curso de Artes Visuais e, nesse sentido tiveram Matemática B, uma disciplina bienal (à qual os alunos dispõem apenas nos 10.º e 11.º anos de escolaridade).

Esta turma tinha também alunos heterogéneos no que diz respeito ao nível de aprendizagem. Sendo todos alunos do Curso de Artes Visuais já teriam objetivos de vida semelhantes.

## 3.2. Intervenções

A intervenção realizada ao 7.º Ano de escolaridade foi no dia 21 de janeiro de 2020 e teve uma duração de 90 minutos. O objetivo principal desta sessão era trabalhar a função de proporcionalidade direta. A planificação desta intervenção encontra-se no Apêndice I.

Em futuras intervenções que contenham os mesmos conteúdos devo ter em consideração: a linguagem científica que utilizo; assim como o que é realizado no quadro, o que nesta intervenção nem sempre aconteceu, um dos alunos não resolveu corretamente uma questão e eu parti do pressuposto que estava correto uma vez que o aluno era um dos melhores alunos da turma.

A intervenção realizada no dia 6 de dezembro de 2019 ocorreu na turma do 10.º Ano de escolaridade caracterizada anteriormente e teve uma duração de 90 minutos. A sessão tinha como objetivo o estudo das funções cúbicas. A planificação desta intervenção encontra-se no Apêndice II.

Em futuras intervenções que contenham os mesmos conteúdos devo ter em consideração: a linguagem científica que utilizo;  a extensão do plano de aula (que desta vez foi exageradamente grande, o que também poderá ter contribuído para a agitação dos alunos);  o uso de exemplos concretos nos tópicos abordados e, só, depois apresentar a sua generalização.

No início da PES, a professora cooperante juntamente com o grupo de estágio decidiu que apenas iríamos trabalhar com turmas de 7.º e 10.º anos de escolaridade. Poderíamos vir a trabalhar com o 11.º ano, mas seria pontualmente, assim sendo, não caracterizei esta turma. Tendo em conta que a PES a partir de março de 2020 decorreu à distância devido às consequências do COVID-19, a última intervenção foi precisamente numa turma do 11.º ano de escolaridade. Esta intervenção foi realizada no dia 4 de maio de 2020, na turma do 11.º Ano de escolaridade do Curso de Artes Visuais e a sua planificação está presente no Apêndice III. Convém referir que estes alunos bem como os alunos do 10.º ano com quem trabalhei, apenas tiveram contacto com a matemática B.

O motivo da intervenção nesta turma, prevista para uma duração de sessenta minutos, foi devido ao facto das aulas serem ministradas por videoconferência, ensino à distância. O principal objetivo desta sessão era levar os alunos a reconhecer numérica e graficamente a relação entre o sinal da taxa de variação e a monotonia de uma função.

Em futuras intervenções que contenham os mesmos conteúdos devo ter em consideração: a linguagem científica que utilizo; tendo em conta que a sessão estava dependente das tecnologias, nomeadamente da internet e do computador, estava receosa que pudesse acontecer algo que comprometesse a sessão, assim sendo, o meu nervosismo era notório, o que não devia acontecer porque acabou por se traduzir em insegurança; penso ter abordado os conceitos com alguma rapidez, pois quando estava a resolver a tarefa com os alunos tive de voltar atrás para rever os conteúdos que os alunos não tinham acompanhado.

### 3.3. Reflexão sobre a PES

A PES constitui uma atividade de bastante interesse, pois é através dela que podemos adquirir novos conhecimentos, novas aprendizagens que nos serão úteis futuramente ao exercer a profissão de professor.

A ideia que tinha do que era ser professora estava muito aquém da realidade, não tinha noção de todo o trabalho que esta profissão envolve.

A professora cooperante teve um papel fundamental no nosso estágio, uma vez que nos incentivou a participar em todas as atividades que fazem parte desta profissão. Foi-nos possível assistir a todas as aulas da professora cooperante e inclusive lecionar algumas, o que foi bastante importante, pois dada a elevada experiência da professora cooperante podemos aprender técnicas e estratégias para aplicar nas nossas práticas. Ainda nos foi possível assistir às reuniões entre professores, professores-alunos-EE, assim como podemos assistir ao atendimento aos EE da direção de turma que foi destinada à professora cooperante.

No que concerne ao pessoal docente e não docente da escola onde decorreu a PES, estes sempre nos receberam bem, sempre nos ajudaram no que precisámos, sempre foram simpáticos connosco.

Inicialmente tínhamos previsto criar um clube da matemática na escola, tentámos, estivemos presentes em algumas sessões destinadas a este fim, mas por não termos alunos, não avançámos mais. Provavelmente teria sido interessante, uma vez que poderíamos ver com mais detalhe as dificuldades dos alunos e ajudá-los. Podíamos, ainda, ajudar a fomentar o gosto pela matemática. Inicialmente, tínhamos pensado em desenvolver com os alunos tarefas das olimpíadas da Matemática, uma vez que alguns alunos da escola iam participar, não tendo nenhum aluno interessado em participar, decidimos terminar esta atividade.

Algumas docentes de matemática da escola onde decorreu a PES pediram-nos que as auxiliássemos nos Jogos Matemáticos. Para mim foi enriquecedor, na medida em que para além de aprender jogos novos relacionados com a Matemática foi possível lidar com alunos de idades diferentes àquelas que estamos geralmente habituados.

A professora cooperante propôs-nos também que desenvolvêssemos algumas atividades para a semana da ciência que ia decorrer na escola. Esta atividade foi bastante interessante pois podemos observar todo o trabalho que envolve uma atividade deste género.

Realizámos algumas atividades que serviriam para os nossos alunos implementarem a outros de algumas escolas do Agrupamento. Com a implementação destas atividades verificámos que os alunos que participaram estiveram bastante empenhados e interessados nas mesmas.

Para cada uma das intervenções foi formulado um plano de aula. Cada plano de aula foi exposto tanto à orientadora científica como à orientadora cooperante, desta forma, e de acordo com as sugestões das orientadoras os planos sofreram alterações. Como já foi referido, devo melhorar certos aspetos no rigor científico. A maioria das alterações feitas nos planos de aulas foi a esse nível, no rigor científico. Através das indicações que me foram feitas consegui perceber qual é a minha maior dificuldade e onde tenho de melhorar.

Ainda decorria o primeiro período quando nos foi proposto ir a "*Taizé*" por uma professora da escola, achámos que esta seria uma experiência, interessante e enriquecedora para nós enquanto futuras docentes. Durante esta viagem para além de ser uma oportunidade de conhecer um novo lugar, foi-nos permitido ajudar a professora responsável pela viagem, na medida em que à noite verificávamos se todos os alunos da escola estavam nas suas camaratas. Desta forma, futuramente saberemos como agir caso estejamos no lugar de professoras responsáveis pelos alunos fora da escola. Penso que esta viagem serviu, ainda, para unir o grupo de estágio.

Decorria o segundo período quando ocorreu o surto do COVID-19 em Portugal, desta forma, não nos foi permitido continuar o estágio presencialmente. No início foi difícil adaptarmo-nos, pois tudo decorrida por videoconferências e não pudemos estar presentes, por exemplo, à reunião geral de professores porque os próprios elementos da escola não conseguiram incluir-nos nesta reunião. Apesar destas dificuldades, conseguimos lecionar uma aula por videoconferência e demos apoio a alguns alunos do 7.º ano.

A constatação de que o professor está em constante aprendizagem tornou-se mais visível com a necessidade que tivemos de recorrer ao ensino à distância. Cada professor teve de adequar as suas estratégias de ensino de acordo com os conteúdos a lecionar. Após lecionar uma aula por videoconferência tive oportunidade de presenciar a grande diferenciação entre o ensino à distância e o ensino presencial. Entre os fatores menos conseguidos no ensino à distância está a pouca perceção que professor tem relativamente à compreensão dos conteúdos lecionados, pelos seus discentes. Este tipo de ensino, à distância, não está ao alcance de todos os alunos podendo afetar a sua aprendizagem, uma vez que nem sempre todos os alunos têm os meios disponíveis, como por exemplo, computadores com microfone, para colocarem as suas dúvidas. A avaliação é difícil de efetuar no ensino à distância, requerendo um forte investimento por parte do professor.

Este foi um ano letivo muito produtivo e de muitas aprendizagens, apesar de ter ainda bastante para aprender.

# 4. Metodologia de Investigação

Neste capítulo é apresentada a metodologia adotada para a realização deste estudo. Ainda neste capítulo serão descritas as diferentes fases do estudo, assim como os instrumentos que serviram de apoio ao estudo.

## 4.1. Opções Metodológicas

Este estudo tem como objetivo analisar os principais erros cometidos pelos alunos em tarefas no domínio da Álgebra, nomeadamente no subdomínio das *Funções*.

Numa perspetiva de análise do erro, é importante caracterizá-lo e saber em que contexto surge.

O estudo efetuado será aplicado em alunos do 7.º ano de escolaridade, início do 3.º CEB, onde se aborda o subdomínio das *Funções* de uma forma mais formal.

A análise será de natureza mista, ou seja, englobará uma componente de natureza qualitativa e outra de cariz quantitativo. Relativamente à componente quantitativa, relacionada com a análise da frequência de alguns erros cometidos pelos alunos, agrega-se a componente qualitativa do estudo com base na caraterização dos erros cometidos, no contexto em que estes aparecem (tarefas propostas/testes) e na produção efetuada pelos alunos.

A natureza qualitativa de um estudo, segundo Bogdan e Biklen (1994), inclui quatro características, embora nem todas as investigações designadas como qualitativas as apresentem com igual eloquência. Essas caraterísticas são:

1. A fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal, (Bogdan & Biklen, 1994, p. 47);
2. A investigação qualitativa é descritiva, (Bogdan & Biklen, 1994, p. 48);
3. O interesse do investigador reside mais no processo do que, simplesmente, nos resultados ou produtos, (Bogdan & Biklen, 1994, p. 49);
4. A análise dos dados é feita de forma indutiva, (Bogdan & Biklen, 1994, p. 50).

A investigação quantitativa permite avaliar opiniões, reações, hábitos e atitudes, num dado universo, por meio de uma amostra que o represente estatisticamente. As características principais de uma investigação deste tipo são (Terence & Filho, 2006, p. 3):

- Obedecer a um plano anteriormente estabelecido, com o objetivo de enumerar ou comparar ocorrências;
- A partir de um quadro teórico, desenvolver as hipóteses e as variáveis da pesquisa;
- Averiguar as ligações entre as variáveis por procedimentos experimentais, controlados com rigor;
- Aplicar, para a análise dos dados, material estatístico;
- Comprovar as hipóteses da pesquisa;
- Servir-se de dados representativos de uma população específica (amostra), a partir da qual os resultados são generalizados;
- Utilizar instrumentos de recolha de dados, como por exemplo, questionários, entrevistas, os testes, entre outros.

O presente estudo insere-se num *design* de estudo de caso múltiplo pois serão analisadas as diferentes resoluções das questões, realizadas pelos discentes. Ponte (2006) refere que os estudos de casos múltiplos são de alguma forma comparáveis e que pretendem "ajudar a conhecer melhor a diversidade de realidades que existem dentro de um certo grupo" (Ponte, 2006, p. 5).

De forma a caracterizar erros cometidos por alunos de uma turma do 7.º ano de escolaridade, foi feita uma análise das produções escritas desses alunos. Trata-se de um estudo de caso baseado fortemente no trabalho de campo e é de natureza empírica.

O processo de análise de dados englobará algumas etapas, nomeadamente:

(i) Escolha dos participantes;

Os participantes escolhidos foram os alunos de uma turma do 7.º ano de escolaridade.

(ii) Aplicação dos instrumentos de recolha de dados;

Foram aplicados, na turma participante, os instrumentos de recolha de dados, que estão descritos no subcapítulo "Técnicas e instrumentos de recolha de dados".

(iii) Seleção dos aspetos mais relevantes das produções dos alunos;

A partir das produções dos alunos e com ajuda do quadro teórico de Socas (1997) foram caraterizados os erros.

Inicialmente foram analisadas, por questão, de forma quantitativa as respostas totalmente corretas, parcialmente corretas, incorretas e aquelas respostas cujo aluno não respondeu. Numa segunda fase desta etapa foram selecionadas as produções escritas dos alunos que estavam parcialmente corretas ou incorretas para que dessa forma fosse possível estudar as falhas dos alunos e, assim, categorizá-las, obtendo assim uma análise qualitativa.

Em seguida, por forma a identificar quais os erros mais frequentes, através da sua categorização fez-se uma análise quantitativa.

(iv) Formulação de entrevistas;

Após a análise de todas as produções escritas dos alunos, com base nos erros mais frequentes e no tipo de erros cometidos foram elaboradas entrevistas. Nestas entrevistas a investigadora confronta os alunos com os seus erros, sendo o objetivo tentar perceber se o aluno já superou as suas dificuldades e de que forma. Ainda no que concerne às entrevistas, foi estruturada uma parte da entrevista destinada à avaliação, para se tentar compreender como os alunos a encaram.

As entrevistas foram realizadas no dia 15 de maio de 2020, altura em que o ensino decorria à distância, pelo que as entrevistas foram realizadas por videoconferência. Os alunos durante as entrevistas foram questionados oralmente e respondendo também oralmente, à exceção de um dos alunos que por não possuir microfone, respondia à investigadora escrevendo. Foi possível gravar o áudio das entrevistas que foram transcritas para o relatório, por forma a proceder a uma análise das mesmas.

(v) Tentar responder às questões de investigação propostas.

Segundo Ponte (2006), "um estudo de caso visa conhecer uma entidade bem definida como uma pessoa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma política ou qualquer outra unidade social." (p. 2). Neste sentido, como se pretende dar resposta a questões do tipo "Porquê" e "Em que contextos surge" e como foram recolhidas, analisadas e interpretadas as produções dos alunos de uma turma do 7.º ano, esta investigação torna-se um estudo de caso.

Sousa (2005) considera que um estudo de caso "visa essencialmente a compreensão do comportamento de um sujeito, de um dado acontecimento, ou de um grupo de sujeitos (...) considerados como entidade única, diferente de qualquer outra, numa dada situação contextual específica, que é o seu ambiente natural" (p. 139).

Com este estudo pretende-se inferir quais as dificuldades dos discentes ao resolverem tarefas sobre *Funções* e em que contextos surgem. Neste sentido, podemos referir que este estudo é um estudo de caso.

Em conclusão, tendo em conta o que foi referido anteriormente, considerou-se esta investigação um caso de estudo, pelas seguintes razões:

(i) Com base em estudos já existentes serão recolhidas, analisadas e interpretadas as resoluções de questões concebidas por alunos do 7.º ano de escolaridade, no processo de aprendizagem em matemática;

(ii) Pretendeu-se estudar profundamente, quanto possível, um aspeto específico em pouco tempo;

(iii) Analisaram-se os erros nas produções escritas dos alunos, baseando-se no quadro teórico estudado pela investigadora.

## 4.2. Fases do Estudo

O estudo iniciou no final do mês de setembro de 2019 e terminou no mês de junho de 2020 e divide-se em três principais fases.

Na primeira fase procedeu-se à revisão de literatura que serviu de suporte teórico ao estudo e ao estado da arte na temática do erro em matemática.

A segunda fase consistiu na realização das técnicas e instrumentos de Recolha de Dados e, nesta fase, ainda se procedeu à recolha de dados.

Na terceira e última fase ocorreu a análise dos dados recolhidos, assim como se realizou a conclusão do estudo.

A tabela 5 sintetiza as fases do estudo realizado, exibindo o que aconteceu em cada mês.

Tabela 5 – Planificação das várias fases do estudo.

| | **Set 2019** | **Out 2019** | **Nov 2019** | **Dez 2019** | **Jan 2020** | **Fev 2020** | **Mar 2020** | **Abr 2020** | **Mai 2020** | **Jun 2020** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Escolha do tema** | X | X | | | | | | | | |
| **Pesquisa bibliográfica** | X | X | X | X | X | | | | | |
| **Introdução** | | X | X | X | | | | | | |
| **Intervenção na unidade de ensino** | | X | X | X | | | | | X | |
| **Fundamentação teórica** | | X | X | X | X | X | | | | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Elaboração das tarefas para o teste T1** | | | X | X | | | | | | |
| **Resolução do teste T1 por parte dos alunos** | | | | X | | | | | | |
| **Elaboração da ficha de trabalho sobre Funções, FT** | | | | | X | X | | | | |
| **Elaboração das tarefas para o teste T2** | | | | | X | X | | | | |
| **Resolução do teste T2 por parte dos alunos** | | | | | | X | | | | |
| **Resolução da FT por parte dos alunos** | | | | | | | X | | | |
| **Elaboração das questões para uma entrevista** | | | | | | | | X | X | |
| **Entrevista** | | | | | | | | | X | |
| **Metodologia** | | | | X | X | X | X | | X | |
| **Análise e discussão de dados** | | | | | | | X | X | X | |
| **Conclusões** | | | | | | | | | X | |
| **Revisão do trabalho** | | | | | | | | | X | X |

### 4.3. Técnicas e instrumentos de Recolha de Dados

Nesta investigação os dados recolhidos foram obtidos através da produção de todos os alunos em dois testes de avaliação de conhecimentos, numa ficha de trabalho, sobre funções, e através de uma entrevista semiestruturada a alguns alunos. Estes instrumentos foram aplicados à turma em diferentes momentos.

Para a recolha de dados foi solicitada uma autorização aos respetivos EE que se apresenta no Apêndice IV.

#### 4.3.1. Testes escritos de avaliação de conhecimentos

Uma vez que o estudo pretende centrar-se no domínio da Álgebra, mais concretamente no subdomínio *Funções*, foram elaboradas diversas questões sobre este tema em vários testes escritos de conhecimentos.

Como o objetivo deste estudo será analisar os erros cometidos pelos alunos nas resoluções de tarefas, não será de grande interesse investigar tarefas que são de escolha múltipla, uma vez que neste tipo de questões não temos acesso ao processo de resolução de cada aluno.

##### 4.3.1.1. Teste escrito de avaliação de conhecimentos– 3 de dezembro de 2019 (T1)

O teste escrito de avaliação de conhecimentos realizado no dia 3 de dezembro de 2019 (Apêndice V) continha três tarefas referentes ao subdomínio das funções (Tarefas 10, 11 e 12). As questões 10.1., 11. e 12.5. são de escolha múltipla, assim sendo, não serão analisadas uma vez que não sabemos qual foi o processo de resolução dos alunos.

Na tabela 6 estão contempladas as informações das questões sobre funções do T1. Apresenta-se, ainda, no Apêndice VI informações mais detalhadas destas questões e da respetiva resolução.

Tabela 6 – Questão, objetivos e caracterização (T1).

| **Teste de avaliação de conhecimentos – 3 de dezembro de 2019 (T1)** | | |
|---|---|---|
| **Questão** | **Objetivos da questão** | **Caracterização da tarefa (Ponte, 2005)** |
| Questão 10.1. | Reconhecer uma função através das diversas representações. | Exercício |

| | | |
|---|---|---|
| Questão 10.2. | Identificar duas funções iguais. | Exercício |
| Questão 10.3. | Saber fazer a correspondência de um objeto à sua imagem e vice-versa. | Exercício |
| Questão 12.1. | Assinalar os pontos no referencial, a partir das suas coordenadas. | Exercício |
| Questão 12.2. | Identificar domínio e contradomínio de uma função. | Exercício |
| Questão 12.3. | Verificar se o contradomínio e o conjunto de chegada são iguais. | Exercício |
| Questão 12.4. | Representar algebricamente uma função. | Problema |
| Questão 12.5. | Saber fazer a correspondência de um objeto à sua imagem e vice-versa. | Exercício |

#### 4.3.1.2. Teste escrito de avaliação de conhecimentos – 14 de fevereiro de 2020 (T2)

O teste escrito de avaliação de conhecimentos realizado a 14 de fevereiro de 2020 apresentava 6 questões do subdomínio em estudo (Tarefas 4, 5, 6, 7, 8 e 9 – Apêndice VII). As questões 4., 5. e 7.3 são de escolha múltipla, nesse sentido, não serão analisadas pois não sabemos quais os processos de resolução dos alunos.

Na tabela 7 estão contempladas as informações das questões sobre funções do T2. Apresenta-se, ainda, no apêndice VIII informações mais detalhadas destas questões e da respetiva resolução.

Tabela 7 – Questão, objetivos e caracterização (T2).

| **Teste de avaliação de conhecimentos – 14 de fevereiro de 2020 (T2)** | | |
|---|---|---|
| **Questão** | **Objetivos da questão** | **Caracterização da tarefa (Ponte, 2005)** |
| Questão 6. | Reconhecer a representação gráfica de uma função de proporcionalidade direta.<br>Associar uma função de proporcionalidade direta a uma função linear. | Problema |
| Questão 7.1. | Operar com diferentes tipos de funções (adição de uma função afim com uma função constante).<br>Reconhecer uma função afim não linear. | Problema |
| Questão 7.2.1. | Saber fazer a correspondência de um objeto à sua imagem.<br>Adicionar as imagens com mesmo objeto das funções apresentadas. | Exercício |
| Questão 7.2.2. | Saber fazer a correspondência de um objeto à sua imagem.<br>Multiplicar as imagens com mesmo objeto das funções apresentadas. | Exercício |
| Questão 7.3. | Traduzir os dados do problema para a respetiva representação algébrica. | Problema |

| | | |
|---|---|---|
| Questão 7.4.1. | Interpretar os dados do problema.<br>Reconhecer através da expressão analítica que se pretende determinar a imagem do objeto 3. | Problema |
| Questão 7.4.2. | Interpretar os dados do problema.<br>Reconhecer através da expressão analítica que se pretende determinar o objeto da imagem 2,5. | Problema |
| Questão 8. | Associar as expressões analíticas às respetivas representações gráficas. | Problema |
| Questão 9.1. | Requer o uso de, por exemplo, uma regra três simples. | Problema |
| Questão 9.2. | Completar os valores da tabela que estão em falta, recorrendo, por exemplo, a uma regras três simples. | Problema |
| Questão 9.3. | Requer que os alunos expressem a representação algébrica que traduz os dados do problema. | Problema |
| Questão 9.4.1. | Requer o uso de, por exemplo, uma regra três simples. Ou o uso da expressão analítica. | Problema |
| Questão 9.4.2. | Requer o uso de, por exemplo, uma regra três | Problema |

| | | |
|---|---|---|
| | simples. Ou o uso da expressão analítica. | |

### 4.3.2. Ficha de trabalho a aplicar a alunos do 7.º ano de escolaridade (FT)

Após estudar todo o subdomínio *Funções* foi aplicada uma ficha de trabalho sobre este subdomínio.

A ficha de trabalho, presente no Apêndice IX, é constituída por três questões e em todas elas os alunos devem apresentar o seu processo de resolução.

Na tabela 8 estão contempladas as informações das questões sobre funções do FT. Apresenta-se, ainda, no apêndice X informações mais detalhadas destas questões e da respetiva resolução.

Tabela 8 – Questão, objetivos e caracterização (FT).

| **Ficha de trabalho sobre Funções (FT)** | | |
|---|---|---|
| **Questão** | **Objetivos da questão** | **Caracterização da tarefa (Ponte, 2005)** |
| Questão 1.1. – alínea a. | Associar um objeto à sua imagem e vice-versa.<br>Operar com funções. | Problema |
| Questão 1.1. – alínea b. | Associar um objeto à sua imagem e vice-versa.<br>Operar com funções. | Problema |
| Questão 2.1. | Interpretar os dados do problema.<br>Operar com a subtração. | Problema |
| Questão 2.2. – alínea a. | Interpretar os dados do problema.<br>Interpretar $P(3)$ no contexto do problema. | Problema |

| | | |
|---|---|---|
| Questão 2.2. – alínea b. | Interpretar os dados do problema.<br>Resolver $P(r) = 100$ no contexto do problema. | Problema |
| Questão 2.2. – alínea c. | Requer que os alunos expressem a representação algébrica que traduz os dados do problema. | Problema |
| Questão 3.1. – alínea a. | Requer que os alunos operem com funções. | Problema |
| Questão 3.1. – alínea b. | Requer que os alunos operem com funções. | Problema |
| Questão 3.1. – alínea c. | Requer que os alunos operem com funções. | Problema |
| Questão 3.1. – alínea d. | Requer que os alunos operem com funções. | Problema |
| Questão 3.2. | Identificar funções constantes. | Exercício |

### 4.3.3. Entrevista

Segundo Marconi e Lakatos referenciados por Santos et al. (2006) a entrevista possui as seguintes vantagens:

> *(...) poder ser usada em todos os segmentos da população; possuir grande flexibilidade, por permitir a repetição, a reformulação e uma especificação das questões colocadas e do seu significado; permitir a avaliação e o registo de reações, de gestos e do comportamento do inquirido (entrevistado); possibilitar a obtenção de dados não disponíveis noutras fontes; permitir informação mais precisa; permitir a quantificação e o tratamento dos dados.* (p. 85)

Após a análise dos resultados obtidos pelos instrumentos utilizados, foi realizada uma entrevista a cada um dos alunos escolhidos, para que dessa forma fosse possível obter dados mais concisos sobre as suas resoluções, assim como ajudar os alunos a colmatar as suas falhas.

Ribeiro (2008) aponta alguns pontos fortes de uma entrevista nomeadamente a flexibilidade na aplicação, a facilidade de adaptação de protocolo e que viabiliza a comprovação e esclarecimento de respostas.

Haguette (1997) menciona que "a entrevista pode ser definida como um processo de interação social entre duas pessoas na qual uma delas, o entrevistador, tem por objetivo a obtenção de informações por parte do outro, o entrevistado" (p. 86).

Boni e Quaresma (2005) e Rosa e Arnoldi (2017) afirmam que numa entrevista semiestruturada as questões seguem uma formulação flexível e sua sequência depende do discurso dos sujeitos e da dinâmica que acontece naturalmente, assim sendo, este tipo de entrevista concilia perguntas abertas e fechadas. Existe um conjunto de questões que estão previamente definidas e o entrevistador aplica-as num contexto semelhante a um diálogo informal (Boni & Quaresma, 2005).

Por forma a obter consentimento dos Encarregados de Educação (EE) passou-se aos alunos a autorização em apêndice (Apêndice XI). Apenas houve consentimento de quatro dos oito EE, nesse sentido, só foram realizadas quatro entrevistas.

As entrevistas realizadas aos discentes no âmbito deste estudo eram semiestruturadas e tiveram uma duração de cerca de 15 minutos (Apêndices XII, XIII e XIV). Tendo em conta que as entrevistas foram realizadas no mês de maio de 2020 e, sendo que a PES decorria através da plataforma utilizada pela escola as entrevistas foram também realizadas e gravadas por videoconferência. Na videoconferência, para garantir o anonimato, foi apenas gravado o áudio e mais tarde o seu conteúdo foi transcrito.

Com a entrevista objetivava-se recolher informação sobre:

(i) Qual foi o raciocínio do aluno aquando da resolução da tarefa, por exemplo, se respondeu aleatoriamente, se o erro cometido sucedeu após uma falha algébrica ou após uma falha geométrica.

(ii) A perceção do erro por parte do aluno, ou seja, pretendia-se perceber se o aluno após a correção, realizada nas aulas, teria superado o erro cometido.

(iii) O que pensam os alunos sobre o *feedback*, se concordam e se acham importante.

(iv) O que é que os alunos entendem por avaliação, que perspetiva têm sobre esta temática.

# 5. Análise e Discussão dos Dados

No presente capítulo descreve-se e analisa-se os principais dados obtidos neste estudo. Os dados adquiridos neste estudo foram o resultado das produções escritas dos alunos nos testes de avaliação de conhecimentos e na ficha de trabalho realizada.

Com o intuito de facilitar a análise dos gráficos e tabelas serão utilizadas as seguintes abreviaturas:

(i) RTC – Respostas totalmente corretas;

(ii) RPC – Respostas parcialmente corretas;

RINC – Respostas incompletas;

ORPC – Outras Respostas Parcialmente corretas;

(iii) RI – Respostas incorretas;

(iv) SR – Sem resposta, ou seja, o aluno não responde à questão;

(v) $A_i$ – Aluno $i$, onde $1 \leq i \leq 30$ e com $i \in \mathbb{N}\backslash\{5; 15\}$

(vi) Prof. – Professora investigadora.

## 5.1. Erros cometidos pelos alunos participantes

O presente estudo passou pela análise das respostas dos alunos em três instrumentos de recolha de dados. Estes instrumentos de recolha de dados eram dois testes de avaliação de conhecimentos e uma ficha de trabalho realizados pela seguinte ordem:

1º o teste de avaliação de conhecimentos realizado no dia 3 de dezembro de 2019, 1.º Período;

2º o segundo instrumento foi o teste de avaliação de conhecimentos feito no dia 14 de fevereiro de 2020, 2.º Período;

3º por último foi realizada a ficha de trabalho elaborada pela investigadora, a 13 de março de 2020, 2.º Período.

No que concerne às questões sobre o subdomínio *Funções* referidas anteriormente algumas delas serão apenas objeto de uma análise quantitativa. É o caso das questões 10.1. e 11. do teste T1 e a questão 7.3. do teste T2. Nestas perguntas o aluno deve selecionar a opção que considera ser a correta de entre quatro apresentadas. Este tipo de questões não permite inferir o raciocínio que o aluno terá efetuado e que terá conduzida à sua escolha. As questões supracitadas apenas servirão para analisar se os alunos respondem corretamente ou não.

As questões 10.3. e 12.5. (do teste T1) apelam ao conhecimento sobre os conceitos de objeto e imagem deste, por meio de uma função. Respostas corretas a estas questões não permitem saber se o conhecimento que requerem foi adquirido, uma vez que o aluno pode ter dado a resposta correta por mero acaso. O mesmo acontece com a questão 6. e 9.2. (do teste T2) em que o aluno não necessita expor o seu raciocínio, desta forma não iremos analisá-las com detalhe.

Ainda no teste T2, a questão 8 é de associação e, assim sendo, será analisada através de uma entrevista a cada aluno que respondeu parcialmente correto ou incorretamente. A questão supracitada requer que o aluno saiba representar uma função graficamente partindo do conhecimento da sua expressão analítica, da sua representação algébrica.

Tabela 9 – Análise geral do número de respostas no T1, T2 e na FT.

| | SR | RTC | RPC | | RI | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | ORPC | RINC | | |
| **T1** | 6 | 174 | 23 | 18 | 29 | 250 |
| **T2** | 43 | 169 | 50 | 39 | 36 | 337 |
| **FT** | 5 | 105 | 58 | 35 | 17 | 220 |
| **Total** | 54 | 446 | 132 | 92 | 83 | 807 |

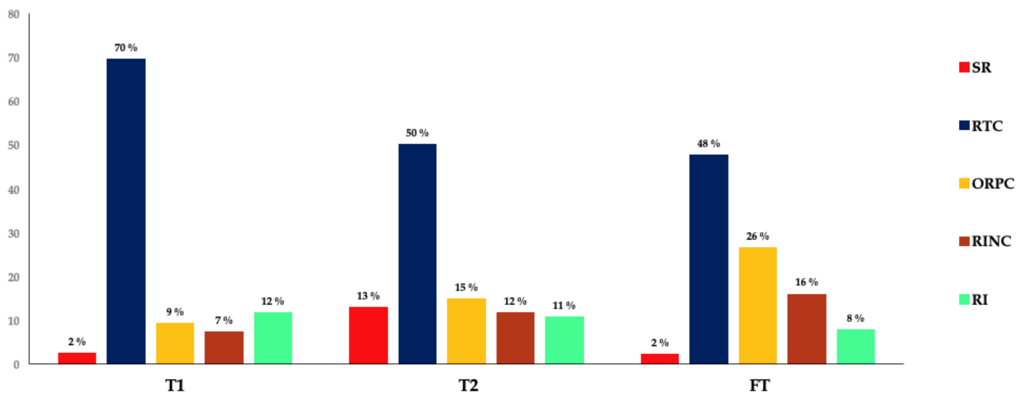



Figura 6 - Análise geral do número de respostas no T1, T2 e na FT, em percentagem.

O gráfico anterior (figura 6) representa a análise do número de respostas dos alunos, em percentagem. Observando a figura 6 confirma-se que em todos os instrumentos o maior número de respostas diz respeito às respostas totalmente corretas. É possível, ainda, concluir que existe uma pequena percentagem de respostas onde os alunos não apresentam qualquer resolução.

Apesar de existirem algumas respostas incorretas e algumas respostas parcialmente corretas, podemos conferir que as percentagens não são muito elevadas e que apresentam valores muito semelhantes.

No presente estudo, iremos, sempre que possível, categorizar os erros cometidos por alunos. Vamos analisar as respostas a questões parcialmente corretas e incorretas, uma vez que são aquelas onde ocorrem os erros cometidos pelos discentes. Para além das questões já mencionadas, existem outras respostas parcialmente corretas que não serão analisadas detalhadamente no estudo supracitado como é o caso de algumas respostas incompletas.

**<u>Respostas incompletas:</u>**

Todas as resoluções apresentadas em seguida dizem respeito a algumas resoluções parcialmente corretas, visto que os alunos não concluem a sua resposta.

- **Alunos $A_{24}$ e $A_{28}$**

**Teste de avaliação de conhecimentos T1 – Resolução da questão 12.1.**

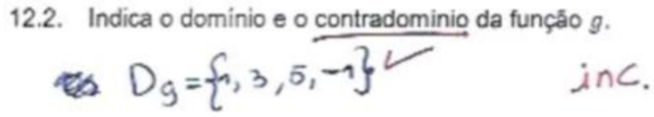
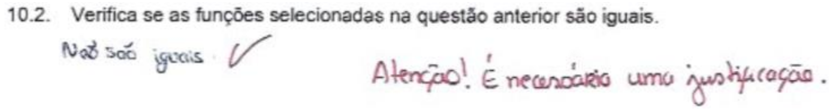



Figura 7 – Resolução pelo aluno $A_{24}$.

A resolução dos alunos $A_{24}$ e $A_{28}$ (figura 7) está parcialmente correta uma vez que os alunos apresentam corretamente o domínio da função, mas não apresentam o contradomínio. Desta forma, esta é uma resolução incompleta.

- **Alunos $A_8, A_{13}, A_{14}, A_{18}$ e $A_{23}$**

**Teste de avaliação de conhecimentos T1 – Resolução da questão 10.2.**



10.2. Verifica se as funções selecionadas na questão anterior são iguais.

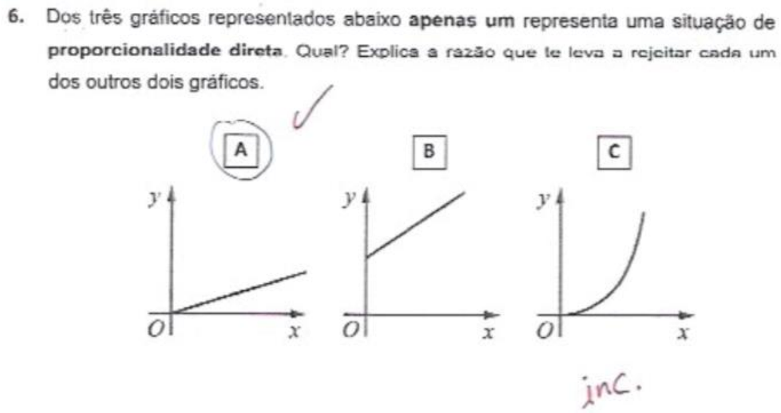
Não são iguais

Atenção! É necessário uma justificação.

Figura 8 – Resolução pelo aluno $A_{13}$.

♦ **Alunos $A_4, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{16}, A_{18}, A_{23}, A_{25}$ e $A_{29}$**

**Teste de avaliação de conhecimentos T2 – Resolução da questão 6.**



6. Dos três gráficos representados abaixo **apenas um** representa uma situação de **proporcionalidade direta**. Qual? Explica a razão que te leva a rejeitar cada um dos outros dois gráficos.

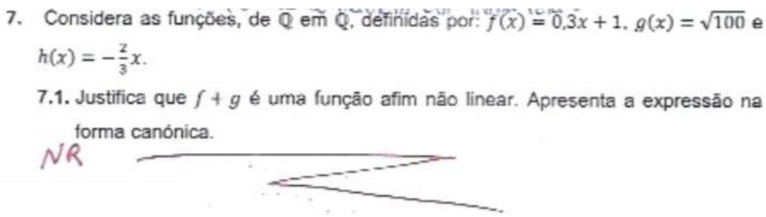


Figura 9 – Resolução pelo aluno $A_{11}$.

Na figura 9, os vários alunos deveriam ter justificado a razão que os levou a rejeitar cada uma das outras duas representações gráficas, mas não o fizeram, assim como na figura 8 podemos observar que os alunos também não justificam a sua resposta, fazendo destas resoluções incompletas.

♦ **Alunos $A_1, A_8, A_{10}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{18}, A_{21}, A_{22}, A_{23}$ e $A_{26}$**

**Teste de avaliação de conhecimentos T2 – Resolução da questão 7.1.**



7. Considera as funções, de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$, definidas por: $f(x) = 0{,}3x + 1$, $g(x) = \sqrt{100}$ e $h(x) = -\frac{2}{3}x$.

7.1. Justifica que $f + g$ é uma função afim não linear. Apresenta a expressão na forma canónica.

NR

Figura 10 – Resolução pelo aluno $A_1$.

Nesta questão existem muitos alunos que não respondem. Apenas podemos concluir que ou o aluno não teve tempo de responder à questão ou existem dificuldades em responder, mas não sabemos quais as razões.

- **Alunos $A_6, A_9, A_{26}$**

**Ficha de Trabalho sobre Funções FT – Resolução da questão 2.2., alínea b.**

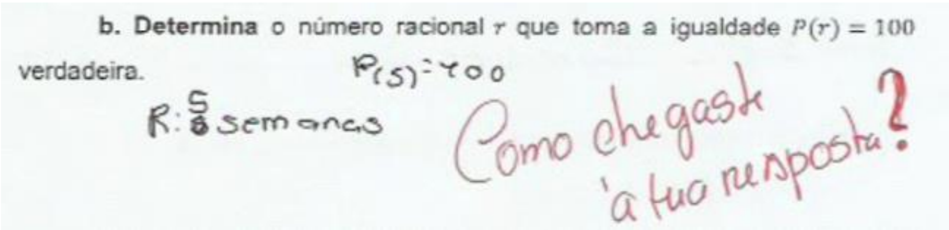



Figura 11 – Resolução pelo aluno $A_{26}$.

No que concerne à figura 11, os alunos não expõem o raciocínio que os levou a concluir o resultado da questão e, portanto, a resposta apresenta-se parcialmente correta.

- **Alunos $A_8, A_{10}, A_{11}, A_{12}$ e $A_{24}$**

**Ficha de Trabalho sobre Funções FT – Resolução da questão 3.1., alínea b.**

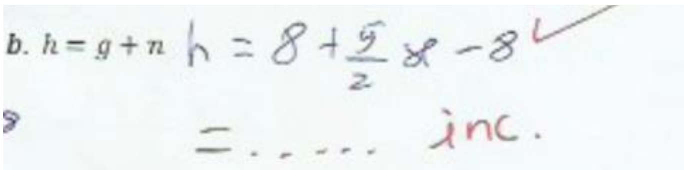



Figura 12 – Resolução pelo aluno $A_{11}$.

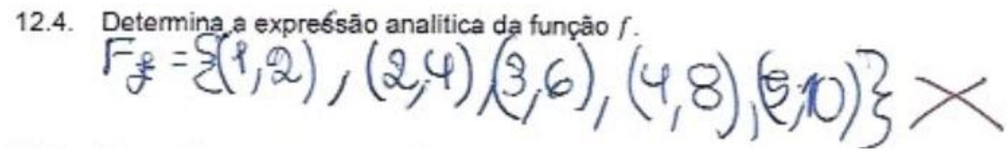
Na resolução apresentada (figura 12) os discentes iniciam corretamente a resolução, mas não a concluem. Apenas podemos concluir que ou o aluno não teve tempo de responder à questão ou existem dificuldades em responder, mas não sabemos quais as razões.

<u>**Categorização dos erros cometidos:**</u>

<u>**Categoria A:**</u> **Erros que têm a sua origem num obstáculo cognitivo.**

♦ **Alunos $A_6$ e $A_8$**

**Teste de avaliação de conhecimentos T1 – Resolução da questão 12.4.**


12.4. Determina a expressão analítica da função $f$.

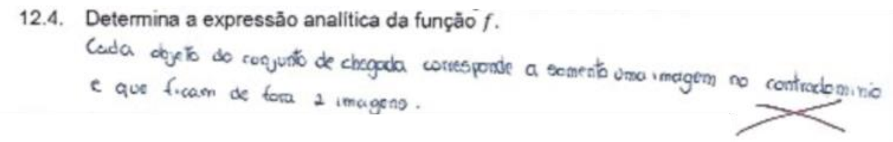
$F_f = \{(1,2), (2,4), (3,6), (4,8), (5,10)\}$

Figura 13 – Resolução pelo aluno $A_6$.

A resolução que estes alunos apresentam (figura 13) não é a resolução esperada. Os alunos confundem o gráfico da função $f$ com a expressão analítica, assim sendo, usam o seu conhecimento fora do contexto e, portanto, este erro inclui-se na categoria A.

♦ **Aluno $A_1$**

**Teste de avaliação de conhecimentos T1 – Resolução da questão 12.4.**


12.4. Determina a expressão analítica da função $f$.

Cada objeto do conjunto de chegada corresponde a somente uma imagem no contradomínio e que ficam de fora 2 imagens.

Figura 14 – Resolução pelo aluno $A_1$.

A partir da resolução apresentada pelo aluno $A_1$ (figura 14) podemos verificar que o aluno $A_1$ não apresenta a resolução esperada, através desta resposta concluímos que o aluno não sabe o que é a expressão analítica de uma função. Este erro inclui-se na categoria A.

**<u>Categoria B:</u> Erros que são causados pela ausência de significado.**

**<u>Categoria B1:</u> Erros de Aritméticos num contexto Algébrico.**

♦ **Alunos $A_6$, $A_8$ e $A_{24}$**

**Teste de avaliação de conhecimentos T2 – Resolução da questão 7.2.2.**

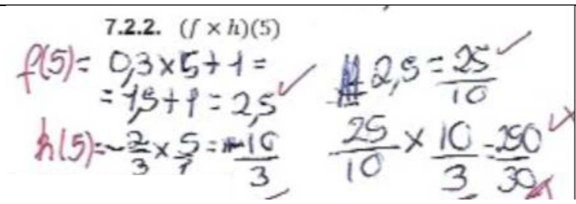



Figura 15 – Resolução pelo aluno $A_6$.

Na resolução que se apresenta na figura 15 é visível que os alunos $A_6, A_8$ e $A_{24}$ escrevem que a multiplicação de dois números com sinais contrários é um número positivo, o que faz com as suas resoluções estejam parcialmente corretas, o erro inclui-se, portanto, na subcategoria B1. Para além do descrito, os alunos deixam a resolução incompleta, na medida em que não apresentam o resultado sob a forma de fração irredutível.

- **Aluno $A_{17}$**

**Teste de avaliação de conhecimentos T2 – Resolução da questão 9.4.1.**

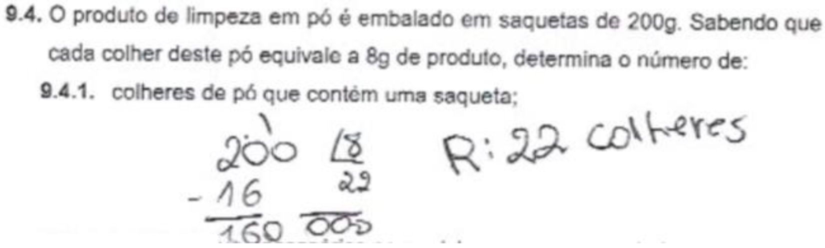



Figura 16 – Resolução pelo aluno $A_{17}$.

O erro cometido na resolução (figura 16) foi na divisão. O aluno não sabe como resolver a divisão e, assim sendo, comete um erro de categoria B1.

- **Aluno $A_9$**

**Ficha de Trabalho sobre Funções FT – Resolução da questão 3.1., alínea c.**

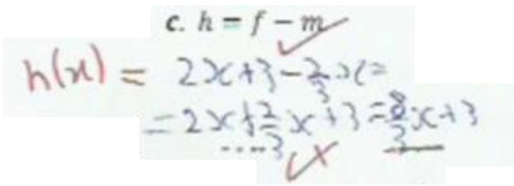



Figura 17 – Resolução pelo aluno $A_9$.

O aluno $A_9$ na ficha de trabalho aplicada, quando usa a propriedade comutativa da adição falha no sinal, trocando o sinal negativo pelo sinal positivo, como podemos observar na figura 17.

<u>Categoria B2:</u> **Erros de procedimento algébricos. Uso de fórmulas ou regras (algébricas) de maneira incorreta.**

♦ **Aluno $A_{22}$**

**Teste de avaliação de conhecimentos T1 – Resolução da questão 12.1.**

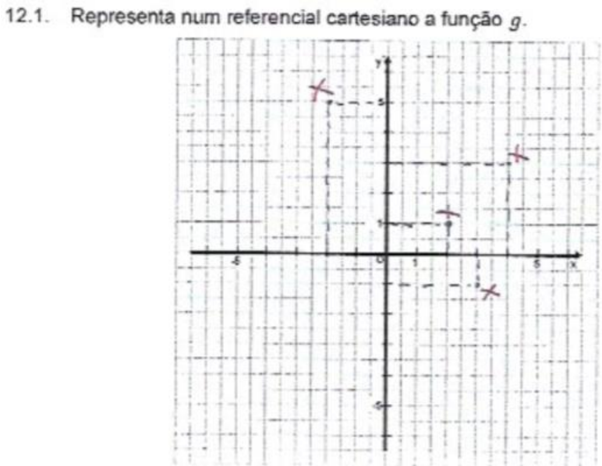



Figura 18 – Resolução pelo aluno $A_{22}$.

A resolução que o aluno apresenta, figura 18, está incorreta. O erro cometido pelo aluno leva a crer que o aluno confunde ordenada com abcissa e, assim sendo, assinala incorretamente todos os pontos que fazem parte do gráfico de $g$. Desta forma, comete um erro de subcategoria B2.

♦ **Aluno $A_{19}$**

**Ficha de Trabalho sobre Funções FT – Resolução da questão 1.1., alínea b.**

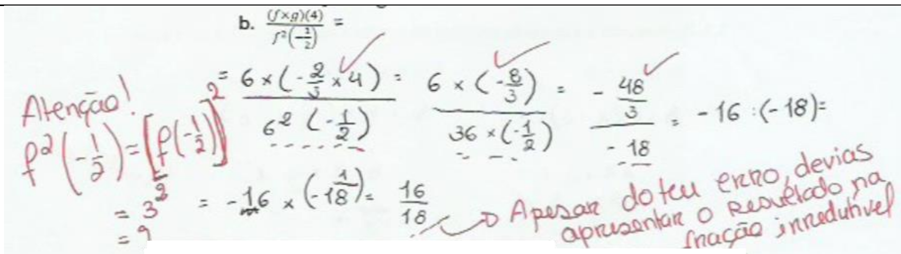



Figura 19 – Resolução pelo aluno $A_{19}$.

Observando a figura 19, o aluno comete um erro de procedimento, uma vez que não sabe calcular a imagem do objeto $-\frac{1}{2}$ pela função $f^2$, assim sendo comete um erro de subcategoria B2. Para além do erro cometido, este aluno, não termina a sua resolução pois não apresenta o resultado sob a forma de fração irredutível.

- **Alunos $A_{10}, A_{11}, A_{13}, A_{19}, A_{23}$ e $A_{24}$**

**Ficha de Trabalho sobre Funções FT - Resolução da questão 2.2., alínea b.**

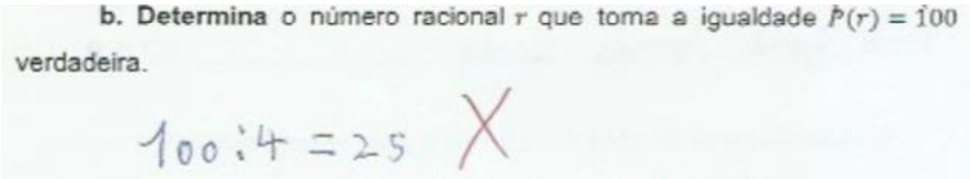



Figura 20 – Resolução pelo aluno $A_{10}$.

Na resolução anterior, figura 20, verifica-se que estes alunos não conseguiram interpretar corretamente o enunciado da questão. Os alunos dividem o peso do Sr. Pestana pelo número de quilos que este perde a cada semana, o que está incorreto. O primeiro passo seria ao peso inicial do Sr. Pestana, 120 kg, subtrair 100 kg, o seu peso final. Desta forma, obtinham o peso perdido ao fim de $r$ semanas de dieta. Para encontrar o valor de $r$ bastava dividirem o valor obtido por 4, ou seja, pelo número de quilogramas perdido em cada semana de dieta. Portanto, o erro cometido inclui-se nesta subcategoria B2.

- **Aluno $A_{25}$**

**Ficha de Trabalho sobre Funções FT – Resolução da questão 3.1., alínea a.**

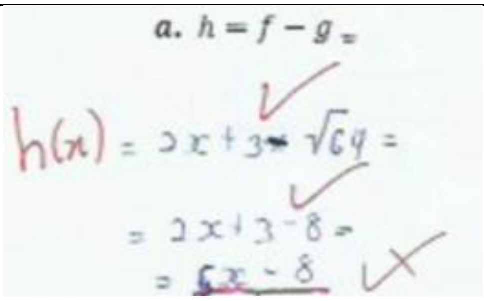



Figura 21 – Resolução pelo aluno $A_{25}$.

O erro exposto na figura 21 é um erro de procedimento, uma vez que o aluno adiciona o coeficiente do termo com incógnita com o termo independente, desta forma este erro está incluído nesta subcategoria, B2.

♦ **Alunos $A_{12}$ e $A_{26}$**

**Ficha de Trabalho sobre Funções FT – Resolução da questão 3.1., alínea b.**

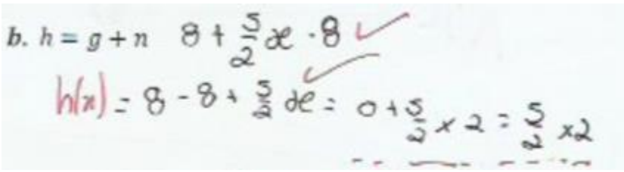



Figura 22 – Resolução pelo aluno $A_{26}$.

O erro cometido por estes alunos leva a crer que estes não sabem operar com funções, uma vez que substituem o $x$ por 2. Assim sendo, o erro cometido é de procedimento, portanto de subcategoria B2.

<u>**Categoria B3:**</u> **Erros algébricos devido às características da linguagem algébrica.**

♦ **Aluno $A_6$, $A_{11}$, $A_{12}$, $A_{21}$, $A_{22}$ e $A_{28}$**

**Teste de avaliação de conhecimentos T1 – Resolução da questão 10.2.**

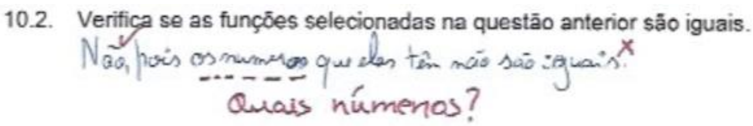



Figura 23 – Resolução pelo aluno $A_{22}$.

Os alunos respondem corretamente à questão, mas não justificam de forma correta. Entende-se que com "os números" os alunos pretendem designar os elementos que pertencem ao domínio e os que pertencem ao contradomínio. Este erro inclui-se na subcategoria B3.

♦ **Alunos $A_4$, $A_6$, $A_8$, $A_{21}$ e $A_{23}$**

**Teste de avaliação de conhecimentos T1 – Resolução da questão 12.2.**

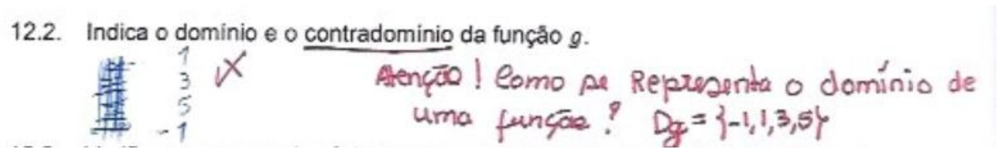



Figura 24 – Resolução pelo aluno $A_4$.

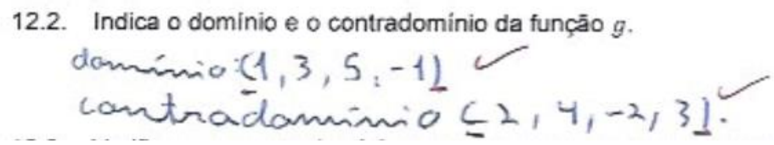



Figura 25 – Resolução pelo aluno $A_{21}$.

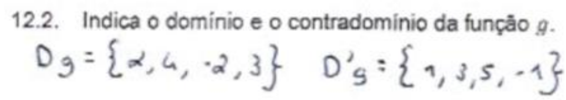



Figura 26 – Resolução pelo aluno $A_{23}$.

Nas resoluções apresentadas anteriormente (figuras 24, 25 e 26) estão presentes erros da subcategoria B3, uma vez os erros cometidos foram em relação às características de linguagem algébrica.

Na figura 24, onde se expõe a resolução da questão 12.2. do T1 pelo aluno $A_4$ podemos verificar que este aluno apresenta os elementos do domínio, mas não os apresenta de forma correta. Nesse sentido, a docente deixa *feedback* ao aluno para que perceba o erro cometido, este aluno também não apresenta o contradomínio da função.

Podemos verificar com a resolução do aluno $A_{21}$ que este escreve os elementos do domínio entre parêntesis, quando deveria escrevê-los entre chavetas ($D = \{1; 3; 5; -1\}$ e $D' = \{2; 4; -2; 3\}$).

Na resolução apresentada na figura 26 o aluno $A_{23}$ troca o domínio com o contradomínio, esta imprecisão pode significar que o aluno confunde domínio com contradomínio.

Incluindo-se estes erros na subcategoria B3.

- **Alunos $A_6, A_8, A_{10}, A_{16}, A_{21}$ e $A_{26}$**

**Teste de avaliação de conhecimentos T1 - Resolução da questão 12.2.**

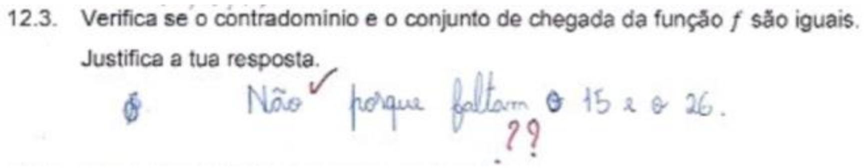



Figura 27 – Resolução pelo aluno $A_{16}$.

A forma como os alunos justificam a sua resposta não está correta, conseguimos perceber que os alunos sabem o que é o conjunto de chegada e o contradomínio, compreende-se também que sabem o que significa dois conjuntos iguais, mas não expressam de forma correta a justificação tornando-se assim um erro de subcategoria B3.

- **Aluno $A_4$**

**Teste de avaliação de conhecimentos T1 - Resolução da questão 12.4.**

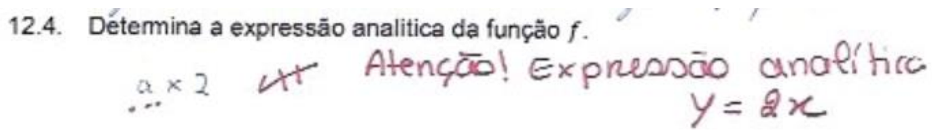



Figura 28 – Resolução pelo aluno $A_4$.

**Ficha de Trabalho sobre Funções FT - Resolução da questão 2.2., alínea c.**

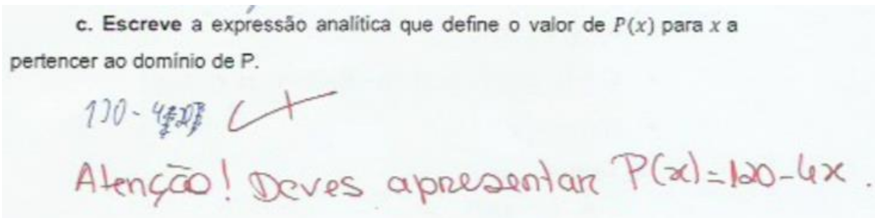



Figura 29 – Resolução pelo aluno $A_4$.

Nas resoluções apresentadas anteriormente podemos observar que o aluno $A_4$ no T1 falha quando não apresenta a expressão analítica como $y = 2x$ ou $y = 2a$, poderia ser um esquecimento e desta forma foi-lhe apresentado *feedback*, mas este aluno volta a cometer o mesmo erro na FT, ora podemos então concluir que o aluno tem dificuldades na forma de apresentar a expressão analítica de uma função, ou seja, tem lacunas ao nível das características da linguagem algébrica e, nesse sentido, este erro apresenta-se na subcategoria B3.

♦ **Alunos $A_{11}$, $A_{19}$ e $A_{25}$**

**Teste de avaliação de conhecimentos T1 - Resolução da questão 12.4.**

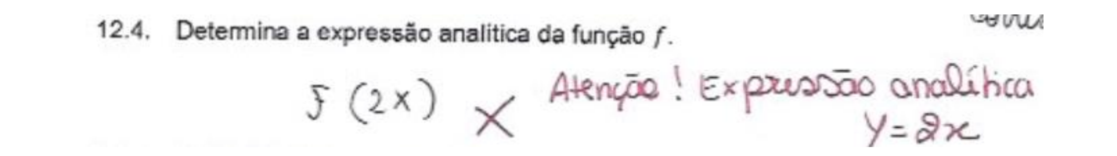



Figura 30 – Resolução pelo aluno $A_{11}$.

Estes alunos têm noção do que é a expressão analítica, mas não sabem como representar matematicamente, ou seja, existem dificuldades nas características da linguagem algébrica, erros de subcategoria B3.

♦ **Aluno $A_6$**

**Teste de avaliação de conhecimentos T2 - Resolução da questão 9.3.**

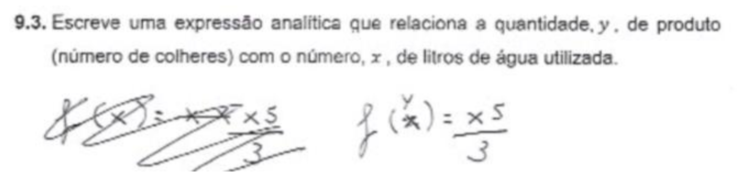
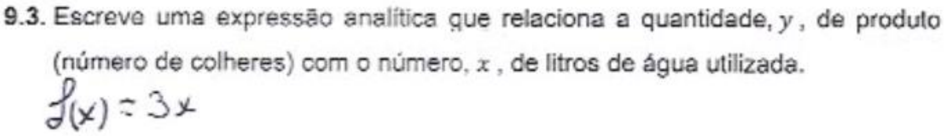



Figura 31 – Resolução pelo aluno $A_6$.

Da resolução do aluno $A_6$ apresentada na figura 31 podemos verificar que não está correta na totalidade o aluno diz que a expressão analítica é $f(y) = \frac{x5}{3}$, o que não é correto. Perante esta imprecisão, podemos concluir que o aluno faz confusão entre imagens e objetos na representação algébrica, cometendo um erro de subcategoria B3.

♦ **Alunos $A_2, A_4, A_6, A_8, A_9, A_{10}, A_{12}, A_{13}, A_{27}$ e $A_{28}$**

**Teste de avaliação de conhecimentos T2 - Resolução da questão 9.3.**


9.3. Escreve uma expressão analítica que relaciona a quantidade, $y$, de produto (número de colheres) com o número, $x$, de litros de água utilizada.

$f(x) = 3x$

Figura 32 – Resolução pelo aluno $A_6$.

Diversos alunos cometeram este erro no teste realizado a 14 de fevereiro de 2020. Nesta questão, era solicitado aos alunos que escrevessem a expressão analítica de uma função de proporcionalidade direta e assim sendo os alunos teriam de calcular a constante de proporcionalidade direta, para poderem escrever a expressão analítica. O erro cometido foi no cálculo desta constante de proporcionalidade direta, na resolução exposta o aluno $A_6$ apresenta a constante como sendo 3. Sendo que a representação algébrica que o aluno apresenta não é aquela que traduz os dados do enunciado, cometendo, portanto, comete um erro de subcategoria B3.

- **Alunos $A_1, A_8, A_9, A_{14}, A_{19}, A_{20}, A_{27}, A_{28}$**

**Teste de avaliação de conhecimentos T2 - Resolução da questão 6.**

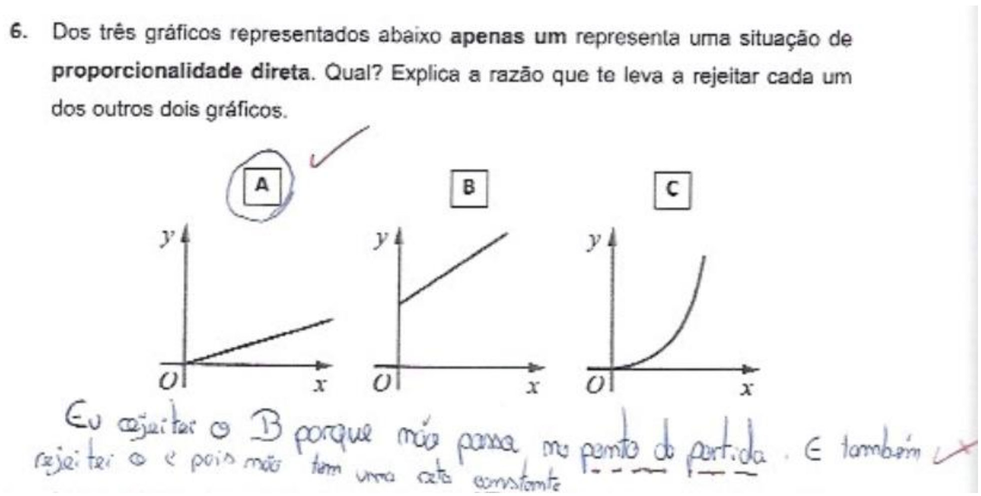



Figura 33 – Resolução pelo aluno $A_8$.

Nas respostas apresentadas por estes alunos são cometidos erros a categoria B3 uma vez que apresentam erros nas características de linguagem algébrica. Como podemos observar na figura 33, o aluno designa a origem do referencial por ponto de partida, menciona ainda que rejeitou o gráfico C por não se tratar de uma reta constante, quando deveria mencionar que "não se trata duma reta", logo não representa uma função de proporcionalidade direta.

Importa ainda referir que dos 20 alunos que tiveram esta questão parcialmente correta estes 8 alunos foram os únicos que responderam corretamente à questão sobre a representação gráfica que poderia representar uma função de proporcionalidade direta, mas explicaram incorretamente a razão que os levou a rejeitar cada um dos outros dois gráficos, as justificações que apresentam são idênticas à apresentada e ilustrada na figura 33. Os restantes alunos cujas resoluções estavam também parcialmente corretas não apresentavam qualquer justificação.

**Categoria C: Erros que têm a sua origem em atitudes afetivas e emocionais face à Matemática.**

- **Alunos $A_1, A_4, A_7, A_8, A_{20}$ e $A_{21}$**

**Teste de avaliação de conhecimentos T1 - Resolução da questão 12.1.**

12.1. Representa num referencial cartesiano a função $g$.

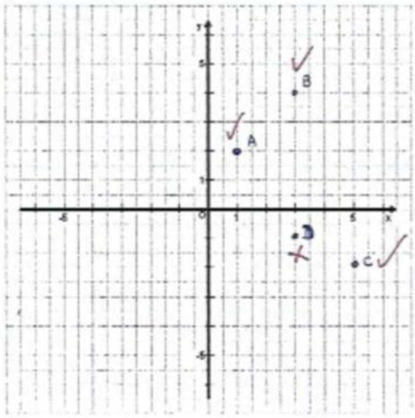


Figura 34 – Resolução pelo aluno $A_1$.

Como podemos observar na figura 34 o aluno apresenta a resposta parcialmente correta uma vez que errou apenas ao assinalar um dos pontos no gráfico. Vários alunos cometeram exatamente o mesmo erro.

No que concerne ao ponto que foi assinalado incorretamente, o aluno trocou a abcissa com a ordenada do ponto, sendo que em vez de indicar o ponto de coordenadas $(-1;\ 3)$ como era solicitado no enunciado indicou o ponto de coordenadas $(3;\ -1)$.

O erro cometido incluiu-se na categoria C pois o aluno errou apenas ao assinalar um dos pontos. Nesse sentido, considera-se que o erro cometido possa dever-se à falta de concentração.

- ♦ **Aluno $A_2$**

**Teste de avaliação de conhecimentos T2 - Resolução da questão 7.2.2.**

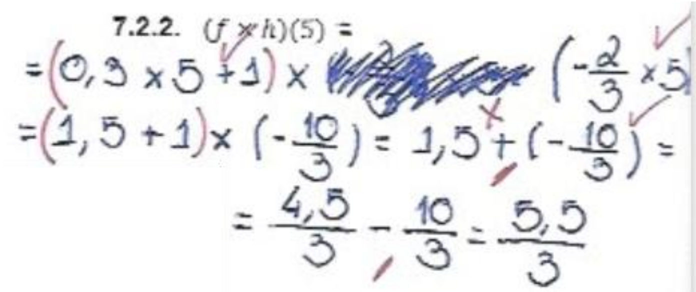



Figura 35 – Resolução pelo aluno $A_2$.

Na resolução 35, o aluno $A_2$ ao substituir o objeto 5 na expressão analítica de $f$, provavelmente esqueceu-se dos parêntesis que fariam toda a diferença nos passos seguintes, uma vez que a multiplicação tem prioridade em relação à adição, cometendo desta forma um erro de categoria C.

- ♦ **Aluno $A_{11}$**

**Teste de avaliação de conhecimentos T2 - Resolução da questão 9.1.**

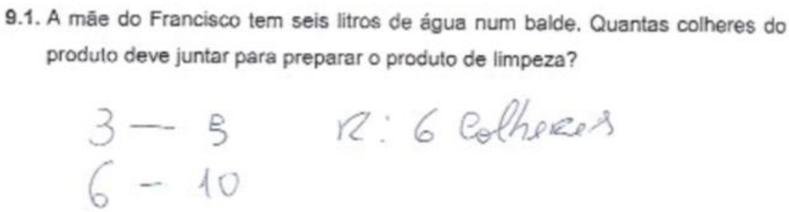



Figura 36 - Resolução pelo aluno $A_{11}$.

O aluno $A_{11}$ aplica corretamente a regra três simples, mas quando responde à questão falha. Nesse sentido, esta imprecisão leva a crer que o aluno se distraiu e acabou por responder incorretamente. Uma vez que o erro ocorreu após uma distração podemos concluir que o erro se inclui na categoria C.

- ♦ **Aluno $A_3$**

**Ficha de Trabalho sobre Funções FT - Resolução da questão 1.1., alínea b.**

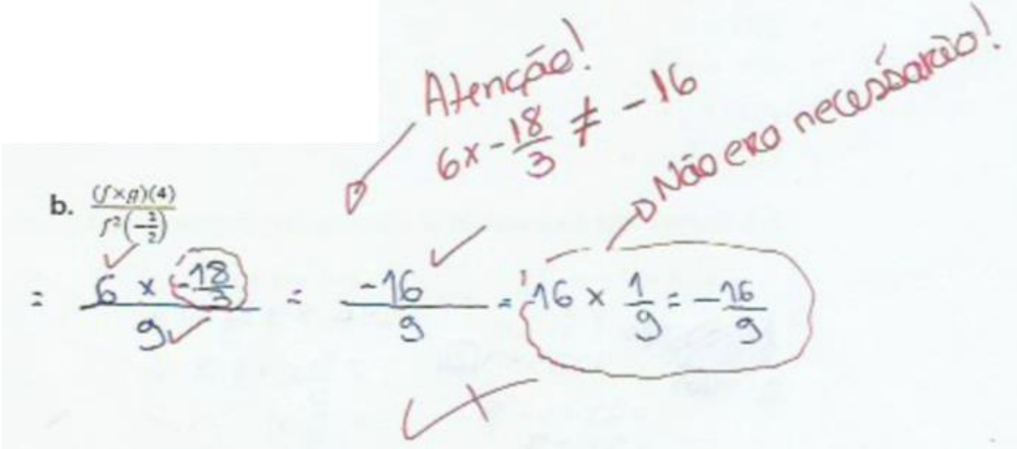



Figura 37 – Resolução pelo aluno $A_3$.

Na resolução anterior, figura 37, podemos verificar que a origem deste erro poderá residir numa atitude afetiva ou emocional, uma vez que apesar do erro em seguida apresenta o resultado correto, mais concretamente uma falta de concentração, categoria C.

**<u>Resoluções com erros de diferentes Categorias:</u>**

- **Aluno $A_6$**

**Teste de avaliação de conhecimentos T2 - Resolução da questão 9.3.**

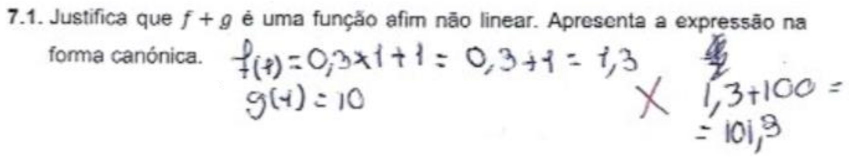



Figura 38 – Resolução pelo aluno $A_6$.

Como podemos observar na figura 38 o aluno $A_6$ calcula a imagem do objeto 1 da função $f + g$, nesse sentido, a resposta deste aluno está incorreta pois não era o que se pretendia e, assim sendo, o aluno comete um erro de categoria A, evidentemente o aluno utilizou o seu conhecimento fora do contexto.

Ainda nesta resolução podemos observar outro erro que se inclui na categoria C, erros que têm origem em atitudes afetivas e emocionais face à Matemática, uma vez que o aluno, provavelmente, distraiu-se ao adicionar 1,3 (imagem do objeto 1 pela função $f$) com 100, quando devia adicionar 10 (imagem do objeto 1 pela função $g$).

Portanto o aluno $A_6$ na resolução desta questão comete dois erros de duas categorias distintas (A e C).

- **Alunos $A_{11}$ e $A_{24}$**

**Ficha de Trabalho sobre Funções FT - Resolução da questão 1.1., alínea b.**

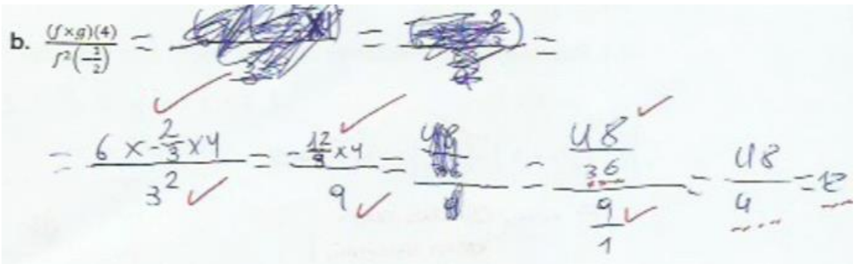


Figura 39 - Resolução pelo aluno $A_{11}$.

Os alunos cometem três erros na resolução que apresentam (figura 39). Um dos erros cometidos é quando escrevem que a multiplicação de um número racional representado sob a forma de fração com um número inteiro com sinais contrários é uma fração com sinal positivo, e, portanto, cometeram um erro da subcategoria B1. Um outro erro cometido incluído na mesma subcategoria ocorre quando os alunos calculam incorretamente a multiplicação de uma fração com um número inteiro $\left(\frac{12}{3} \times 4\right)$, os alunos obtêm $\frac{48}{36}$ quando o correto seria $\frac{48}{3}$.

O último erro cometido sucede quando os alunos calculam a divisão de duas frações, sendo este um erro de subcategoria B2. Os alunos utilizam incorretamente a regra, pois quando temos $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ o que se deve fazer é $\frac{a \times d}{b \times c}$, portanto os alunos deviam ter feito $\frac{48 \times 1}{9 \times 36} = \frac{48}{324}$, assim sendo a resposta está parcialmente correta.

- **Aluno $A_{10}$**

**Ficha de Trabalho sobre Funções FT – Resolução da questão 1.1., alínea b.**

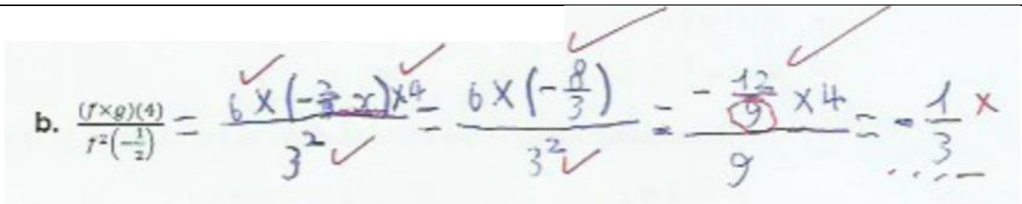


Figura 40 – Resolução pelo aluno $A_{10}$.

A resolução do aluno $A_{10}$, figura 40, apresenta dois erros. Um dos erros cometidos foi na substituição do $x$ por 4, na função $g$. O aluno faz corretamente a multiplicação, mas apresenta essa multiplicação de forma incorreta $\left(\left(-\frac{2}{3}x\right) \times 4\right)$, neste sentido, este erro é de categoria C, pois apesar de o aluno saber o procedimento, provavelmente a falta de concentração levou o aluno a cometer este erro. O segundo erro foi aquando da multiplicação de uma fração por um número inteiro, nesse sentido, o erro inclui-se na subcategoria B1.

**<u>Análise de uma questão através da Entrevista:</u>**

O objetivo da questão 8 do teste realizado a 14 de fevereiro de 2020 (T2), já mencionada anteriormente, era levar os alunos a associarem corretamente a expressão analítica à respetiva representação gráfica.

Sendo esta questão difícil de analisar apenas com as resoluções dos alunos, uma vez que não sabemos o raciocínio destes foi realizada uma entrevista a alguns alunos.

Na tabela 10 apresenta-se uma análise do número de RTC, RPC, RI e SR da questão em análise.

Tabela 10 – Análise do número de RTC, RINC, ORPC, RI e SR.

<table>
<tr><th>T2</th><th>SR</th><th>RTC</th><th>ORPC</th><th>RINC</th><th>RI</th><th>Total de respostas</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Questão 8.</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">19</td><td>5</td><td>0</td><td>1</td><td rowspan="2">27</td></tr>
<tr><td colspan="3">6</td></tr>
</table>

Por forma a analisar com mais detalhe as respostas a esta questão foram feitas três entrevistas. Inicialmente, o objetivo era entrevistar os seis alunos cuja resolução se apresentava parcial ou totalmente incorreta, mas tendo em conta o consentimento dos EE, só foi possível realizar três entrevistas.

Apresenta-se, de seguida, as três entrevistas realizadas aos três alunos que responderam de forma parcialmente corretas à questão. As respostas destes três alunos eram semelhantes, assim sendo, as questões conducentes da entrevista estão presentes no Apêndice XII.

- ♦ Entrevista ao aluno $A_{12}$

**Teste de avaliação de conhecimentos T2 – Resolução da questão 8.**

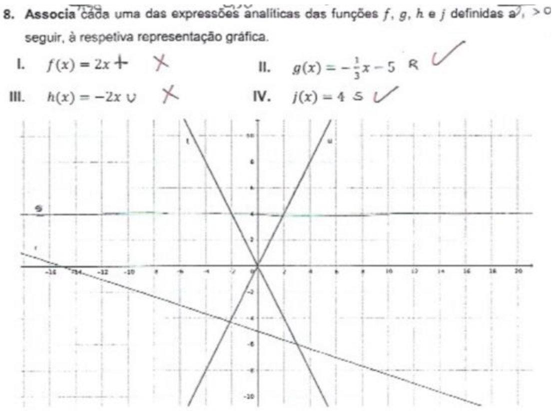



Figura 41 – Resolução pelo aluno $A_{12}$.

| | |
|---|---|
| ***Prof.***: | *Lembras-te desta questão?* |
| ***Aluno $A_{12}$***: | *Ah lembro-me.* |
| ***Prof.***: | *Qual foi o teu raciocínio quando resolveste esta questão? Respondeste à questão aleatoriamente? Consegues explicar me como pensaste na resolução da questão?* |
| ***Aluno $A_{12}$***: | *Eu penso que me enganei na associação.* |
| ***Prof.***: | *Já percebeste o teu erro? Trocaste as expressões analíticas. Porque afirmaste que a expressão analítica I. correspondia à reta t, consegues dizer-me?* |
| ***Aluno $A_{12}$***: | *Não, não consigo.* |
| ***Prof.***: | *Repara que a reta u é a única com declive positivo, logo a expressão analítica correspondente só podia ser $f(x) = 2x$. Achas que se esta questão voltasse a aparecer no teste, conseguias acertar tudo?* |
| ***Aluno $A_{12}$***: | *Sim.* |

(Entrevista 15 de maio de 2020 ao aluno $A_{12}$)

Anteriormente expõe-se **parte da entrevista** efetuada ao aluno $A_{12}$ sobre a sua resolução à questão 8 do teste T2. Como podemos analisar o aluno não comprovou ter ultrapassado o erro cometido. Desta forma, a investigadora propôs ao aluno que associasse outras representações gráficas às respetivas expressões analíticas durante a entrevista.

As questões (Apêndice XIII) foram colocadas ao aluno durante a entrevista com o propósito de tentar saber se o erro cometido foi superado e qual foi a dificuldade sentida nesta questão.

| | |
|---|---|
| ***Prof.***: | *A representação gráfica g irá corresponder a qual destas expressões analíticas?* |
| ***Aluno*** $\boldsymbol{A_{12}}$: | $g\ -\frac{1}{2}x$. |
| ***Prof.***: | *Muito bem! E já agora qual será a expressão analítica que corresponde a* $f$*?* |
| ***Aluno*** $\boldsymbol{A_{12}}$: | $\frac{1}{2}x$. |
| ***Prof.***: | *Exatamente! Então e quais são as expressões analíticas que correspondem a estas duas representações gráficas? À representação gráfica* $f$*?* |
| ***Aluno*** $\boldsymbol{A_{12}}$: | $-\frac{1}{3}x$. |
| ***Prof.***: | *Exatamente! Essa é a associação correta para a função* $f$*. E para* $g$*?* |
| ***Aluno*** $\boldsymbol{A_{12}}$: | $-\frac{1}{3}$. |
| ***Prof.***: | *Muito bem! Esta será uma função constante. E agora relativamente a estas duas funções, o que me podes dizer?* |
| ***Aluno*** $\boldsymbol{A_{12}}$: | *São funções afins?* |
| ***Prof.***: | *É isso mesmo! Então e qual poderá ser a associação correta para a função* $f$*?* |
| ***Aluno*** $\boldsymbol{A_{12}}$: | $f(x) = \frac{1}{4}x - 1$. |
| ***Prof.***: | *Veremos se essa associação está correta? Repara nos exemplos que vimos anteriormente? Será que esta função* $f$ *terá declive positivo?* |
| ***Aluno*** $\boldsymbol{A_{12}}$: | *Terá declive negativo.* |
| ***Prof.***: | *Muito bem! Então qual será a expressão analítica correspondente a esta função?* |
| ***Aluno*** $\boldsymbol{A_{12}}$: | $k(x) = -\frac{1}{4}x + 1$. |

| | |
|---|---|
| ***Prof.*:** | *É isso mesmo, pois a sua ordenada na origem é o ponto de coordenadas (0;1). E agora qual será a expressão analítica de $g$, repara que as duas retas são paralelas.* |
| ***Aluno $A_{12}$*:** | $t(x) = \frac{1}{4}x - 1.$ |
| ***Prof.*:** | *Repara que o declive da expressão analítica $t$ é positivo, mas se as duas retas são paralelas terão o mesmo declive e assim sendo a expressão analítica correspondente será $n(x) = -\frac{1}{4}x - 1$.* |
| ***Aluno $A_{12}$*:** | *Ok.* |
| ***Prof.*:** | *Estivemos aqui a resolver algumas questões idênticas às do teste e reparei que ainda tens algumas dificuldades nesta parte. O que achas que te poderia ajudar a ultrapassar este erro?* |
| ***Aluno $A_{12}$*:** | *Por mim, continuaria a fazer exercícios deste género.* |

(Entrevista 15 de maio de 2020 ao aluno $A_{12}$)

Tendo em consideração esta parte da entrevista realizada ao aluno $A_{12}$ verifica-se que o discente ainda tem dificuldades em fazer corresponder a expressão analítica à respetiva representação gráfica.

Este aluno tem dificuldades na representação geométrica, uma vez que após ser proposta a alínea c), onde as duas representações gráficas representavam funções afins, não lineares o aluno já tendo acertado as alíneas anteriores errou nesta correspondência, referindo que as duas representações gráficas teriam declives diferentes.

Nas alíneas a) e b) existindo também funções afins, mas lineares, com declives negativos o aluno associou corretamente as representações gráficas às respetivas expressões analíticas. Desta forma, o discente mostra que se confunde perante uma função afim não linear, mas que sabe que a função $k(x) = -\frac{1}{4}x + 1$ tem declive negativo.

Este aluno ainda afirma que uma forma de ultrapassar o seu erro será resolver questões que apliquem os mesmos conteúdos.

Com a análise a esta entrevista podemos verificar que as dificuldades deste aluno advêm da representação geométrica, sendo este um erro incluído na subcategoria B2, segundo o mesmo quadro teórico.

- Entrevista ao aluno $A_{21}$

| **Teste de avaliação de conhecimentos T2 – Resolução da questão 8.** |
|---|

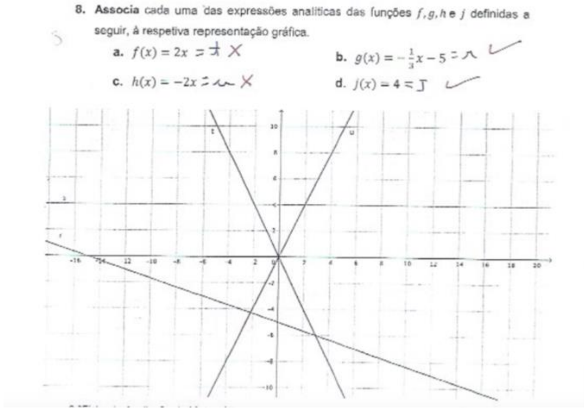



Figura 42 – Resolução pelo aluno $A_{21}$.

***Prof.*:** *Lembras-te desta questão?*

***Aluno $A_{21}$:*** *Sim.*

***Prof.*:** *Qual foi o teu raciocínio quando resolveste esta questão? Respondeste à questão aleatoriamente? Consegues explicar-me como pensaste na resolução da questão?*

***Aluno $A_{21}$:*** *Eu confundi-me.*

***Prof.*:** *Já percebeste o teu erro? Trocaste as expressões analíticas. Porque afirmaste que a expressão analítica I. correspondia à reta t, consegues dizer-me?*

***Aluno $A_{21}$:*** *Porque acho que com os nervos, não vi o menos.*

***Prof.*:** *Ok. Mas qual é a tua maior dificuldade na expressão analítica? Sentes que a dificuldade reside na determinação da expressão analítica? Na identificação do tipo de função representada?*

*(Silêncio... Dificuldade em responder)*

***Prof.*:** *Repara que a reta u é a única com declive positivo, logo a expressão analítica correspondente só podia ser $f(x) = 2x$. Já conseguirias associar corretamente a representação gráfica à expressão analítica?*

***Aluno $A_{21}$:*** *Sim.*

(Entrevista 15 de maio de 2020 ao aluno $A_{21}$)

Quando o aluno é abordado sobre o seu erro, este refere que foi cometido devido ao nervosismo, mas quando se interroga sobre quais as suas dificuldades nos conteúdos que esta questão envolve este tem dificuldades em responder. Assim sendo, e tal como o aluno $A_{12}$ foi proposto ao aluno $A_{21}$ que resolvesse a questão, em anexo (Apêndice XIII), oralmente.

**Prof.:** *Se olharmos para a função $g$ achas que ela terá declive positivo ou negativo?*

**Aluno $A_{21}$:** *Acho que terá declive negativo.*

**Prof.:** *Muito bem! Então qual será a expressão analítica correspondente?*

**Aluno $A_{21}$:** *É a* $-\frac{1}{2}x$.

**Prof.:** *Boa, é isso mesmo! E já agora qual será a expressão analítica que corresponde a* $f$*?*

**Aluno $A_{21}$:** *Acho que é* $\frac{1}{2}x$.

**Prof.:** *Exatamente! E para estas duas representações gráficas? A função* $f$ *terá declive positivo ou negativo?*

**Aluno $A_{21}$:** *Negativo.*

**Prof.:** *Então qual será a expressão analítica correspondente?*

**Aluno $A_{21}$:** $-\frac{1}{3}x$.

**Prof.:** *É isso mesmo! Então e qual poderá ser a associação correta para a função* $g$*?*

**Aluno $A_{21}$:** *A que está a laranja terá declive negativo também.*

**Prof.:** *Repara que esta reta irá representar uma função constante. Lembras-te como se representam as funções constantes?*

**Aluno $A_{21}$:** *Acho que é* $\frac{1}{3}x$.

**Prof.:** *Será? Vamos observar, estas duas representações anteriores, cujo declive era simétrico…*

**Aluno $A_{21}$:** *Ah já sei, já percebi. É* $\frac{1}{3}$.

**Prof.:** *Neste caso a expressão analítica é* $-\frac{1}{3}$ *porque repara que a reta situa-se abaixo do eixo* $Ox$.

**Aluno $A_{21}$:** *Ok, percebi.*

**Prof.:** *Por último, para estas duas representações gráficas qual poderá ser a correspondência correta? Qual será a correspondência correta para a função* $f$*?*

**Aluno $A_{21}$:** *Acho que é* $\frac{1}{4}x + 1$.

**Prof.:** *Será? Estas duas retas têm declive positivo ou negativo?*

**Aluno $A_{21}$:** *Negativo.*

**Prof.:** *Boa.*

**Aluno $A_{21}$:** *Então é* $-\frac{1}{4}x + 1$.

***Prof.:*** *Exatamente! Uma vez que interseta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas* $(0; 1)$.

***Aluno*** $\boldsymbol{A_{21}}$***:*** *Sim.*

(Entrevista 15 de maio de 2020 ao aluno $A_{21}$)

O erro cometido nesta questão foi na associação da função contante à expressão analítica, por consequência de uma dificuldade na representação algébrica. O aluno entendia que numa função constante o declive era negativo, quando, na verdade, o declive era nulo.

Após a professora perguntar como se representam as funções constantes, o discente volta a errar dizendo que a expressão analítica é $\frac{1}{3}x$, o que comprova a dificuldade do aluno na representação algébrica, assim sendo o erro cometido é de subcategoria B3, segundo o quadro de Socas (1997).

Por forma a levar o aluno a entender o seu erro a professora volta a expor a alínea a) cujas representações gráficas têm declives simétricos. Consequentemente, o discente volta a associar a representação gráfica incorretamente, com este erro podemos também concluir que existem dificuldades na representação geométrica e, portanto, comete um erro de subcategoria B2, segundo o quadro de Socas (1997). O aluno $A_{21}$ não consegue associar as duas representações, tem dificuldades em compreender o que é o declive de uma função, assim como não compreende o que significa $y = b$ com $b > 0$, ou seja, tem dificuldades em assimilar a função constante.

Na última alínea o discente volta a errar a associação, tendo confundido os declives.

Tendo em conta todos os factos mencionados anteriormente conclui-se que o aluno $A_{21}$ continua com dificuldades nas representações geométricas e algébricas. Seria importante o aluno tentar assimilar as duas representações individualmente, para posteriormente perceber as semelhanças entre os dois tipos de representação e associá-las corretamente.

- Entrevista ao aluno $A_{24}$

| **Teste de avaliação de conhecimentos T2 – Resolução da questão 8.** |
| --- |

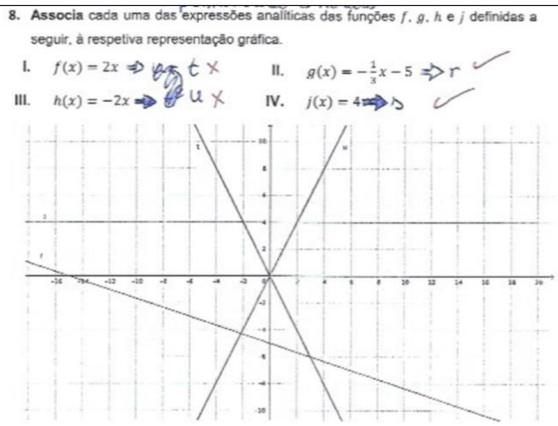



Figura 43 – Resolução pelo aluno $A_{24}$.

***Prof.***: *Qual foi o teu raciocínio quando resolveste esta questão? Respondeste à questão aleatoriamente? Consegues explicar-me como pensaste na resolução da questão?*

***Aluno*** $\boldsymbol{A_{24}}$: *Devo-me ter confundido com a I. e com a III.*

***Prof.***: *Esta questão lidava com duas formas diferentes de representação de uma função. Qual destas duas é mais difícil de compreender? A expressão analítica ou a representação gráfica?*

***Aluno*** $\boldsymbol{A_{24}}$: *Acho que para mim é mais difícil ver a expressão analítica do que ver o gráfico.*

***Prof.***: *Já percebeste o teu erro? Agora já conseguias dizer-me quais seriam as correspondências corretas certo?*

***Aluno*** $\boldsymbol{A_{24}}$: *Sim. A expressão analítica* $f(x) = 2x$ *iria corresponder à reta* $u$.

***Prof.***: *Porquê?*

***Aluno*** $\boldsymbol{A_{24}}$: *Eu agora não consigo ver muito bem o gráfico.*

***Prof.***: *Lembras-te o que é que representa o coeficiente do termo* $2x$*?*

***Aluno*** $\boldsymbol{A_{24}}$: *Tínhamos termos independentes e termos com incógnita.*

***Prof.***: *Não te lembras que esse valor do coeficiente do termo* $2x$ *era designado por declive?*

***Aluno*** $\boldsymbol{A_{24}}$: *Sim.*

***Prof.***: *Pronto, quanto a este declive, este pode ser positivo, negativo ou nulo. No caso da expressão analítica* $f(x) = 2x$ *o declive é positivo então a única correspondência que se poderia fazer era com a reta* $\boldsymbol{u}$. *Certo?*

***Aluno*** $\boldsymbol{A_{24}}$: *Sim.*

***Prof.:*** *No caso da expressão analítica* $h(x) = -2x$ *o declive era negativo e significava que passava na origem do referencial cartesiano então a única correspondência que se poderia fazer era com a reta* $t$. *Certo?*

***Aluno*** $\boldsymbol{A_{24}}$: *Sim.*

(Entrevista 15 de maio de 2020 ao aluno $A_{24}$)

Assim como com os outros dois alunos entrevistados, apenas com esta resolução não era percetível entender se o discente tinha superado este erro. Desta forma, foi proposto também que respondesse à questão em Apêndice XIII.

O aluno $A_{24}$ ao ser confrontado com o seu erro afirmou que a representação algébrica é aquela que lhe suscitava mais dificuldades.

***Prof.:*** *Proponho-te agora que associes estas expressões analíticas às representações gráficas. Qual será a expressão analítica da função* $g$?

***Aluno*** $\boldsymbol{A_{24}}$: *É a função vermelha, não é?*

***Prof.:*** *Sim.*

*(Silêncio... Dificuldade em responder)*

***Prof.:*** *Repara, terá declive positivo ou negativo?*

***Aluno*** $\boldsymbol{A_{24}}$: *Terá declive negativo, portanto ou é a* $k$ *ou a* $n$.

***Prof.:*** *Ok. Como se designa uma função que passa na origem do referencial e que tem declive negativo?*

***Aluno*** $\boldsymbol{A_{24}}$: *Função Linear?*

***Prof.:*** *Exatamente! Então a reta* $g$ *corresponderá a qual expressão analítica?*

***Aluno*** $\boldsymbol{A_{24}}$: *À* $k$, *porque a* $n$ *representa uma função constante.*

***Prof.:*** *Muito bem! E qual será a associação correta para* $f$?

***Aluno*** $\boldsymbol{A_{24}}$: *Será a* $t$.

***Prof.:*** *Isso mesmo! Então e para estas duas representações qual será a correspondência? Para a função* $f$ *qual será a expressão analítica correspondente?*

***Aluno*** $\boldsymbol{A_{24}}$: *A* $f$ *será à* $k$ *e a* $g$ *será à* $n$.

***Prof.:*** *É isso mesmo! Muito bem! Para acabar a correspondência destas duas funções?*

***Aluno*** $\boldsymbol{A_{24}}$: *A* $g$ *será à* $n$.

***Prof.:*** *Sim, está correto. E a* $f$ *será?*

***Aluno*** $\boldsymbol{A_{24}}$: *Será a* $t$.

***Prof.:*** *Será? Terá declive positivo?*

***Aluno*** $\boldsymbol{A_{24}}$: *Ah não, seria a* $k$.

***Prof.***: *Exatamente! Seria a* $k$ *uma vez que interseta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas (0;1) e tem declive negativo.*

(Entrevista 15 de maio de 2020 ao aluno $A_{24}$)

Inicialmente, o discente tem alguma dificuldade em responder, mas após a professora questionar se o declive seria positivo ou negativo, o aluno associa corretamente as representações geométrica e algébrica.

O erro cometido por este aluno foi na última alínea desta questão quando associou incorretamente a função $f$, mas após a professora perguntar se a reta representada teria declive positivo, o aluno $A_{24}$ refere a correspondência correta, ou seja, comete um erro de erro de categoria B3, segundo o quadro de Socas (1997).

O aluno apesar de na última correspondência ter respondido incorretamente parece ter superado o erro cometido no T2 realizado a 14 de fevereiro de 2020.

Ao longo de todas as entrevistas mencionadas anteriormente foi fornecido *feedback* aos alunos. Tendo em conta as características do *feedback* referidas no capítulo "Fundamentação Teórica", estes foram de natureza **descritiva** (pretendia-se que os alunos percebessem os erros cometidos). Quanto ao foco foi na **tarefa**, por exemplo, quando se afirma "Muito bem!", ou seja, estamos a indicar ao aluno que está a resolver corretamente a questão e foi também um *feedback* de **autorregulação interrogativo** na medida em que quando por exemplo o aluno erra na associação e a investigadora questiona, "Será?", com esta pergunta pretende-se que o aluno se aperceba que errou a associação e porque errou. As exclamações, "Boa!", "Muito bem!" e "Exato!" (*feedback* **exclamativo**) são reforços de segurança nas resoluções corretas dadas pelo aluno.

Nas entrevistas o *feedback* é sempre fornecido no momento e é um *feedback* **oral** e dado **individualmente**.

Todos os comentários traduzidos em *feedback* são **positivos** e/ou **construtivos**.

## Evolução das respostas dos alunos:

Os três instrumentos referidos anteriormente (T1, T2 e FT) continham uma questão, que apesar de não ser igual nos três instrumentos, incidia sobre o mesmo conteúdo, a expressão analítica de uma função.

Esperava-se que os alunos fossem evoluindo ao longo do tempo, ou seja, era esperado que na ficha de trabalho quase todos os alunos tivessem a resposta totalmente correta o que não aconteceu como vamos observar pelas resoluções apresentadas em seguida.

Com o objetivo de analisar a evolução dos alunos ao longo dos três instrumentos (T1, T2 e FT) foram escolhidos seis alunos dos vinte que responderam a estas questões e que apresentavam diferentes evoluções nestes instrumentos. Estes seis alunos foram aqueles que expuseram resposta nas três questões e obtiveram, em pelo menos numa delas, uma resposta parcialmente correta ou incorreta. Os restantes catorze alunos ou tiveram as três questões totalmente corretas ou não apresentavam resolução em pelo menos uma das questões.

A fim de tentar compreender o erro de dois alunos, $A_6$ e $A_7$, que não apresentavam evolução, ou seja, que não demonstraram superação do erro através das suas resoluções, foi planeada uma entrevista para que os alunos pudessem argumentar sobre as suas resoluções. Tendo a investigadora apenas obtido o consentimento de um dos dois alunos, só foi possível realizar a entrevista a um destes alunos, o aluno, $A_7$.

Em seguida apresenta-se a análise efetuada sobre a evolução dos seis alunos escolhidos.

- **Aluno $A_4$**

**Teste de avaliação de conhecimentos T1 - Resolução da questão 12.4.**

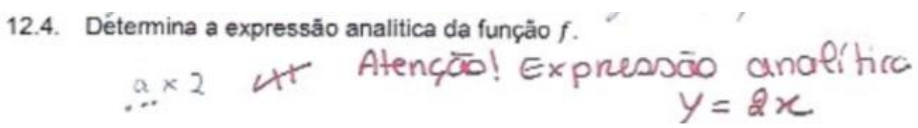
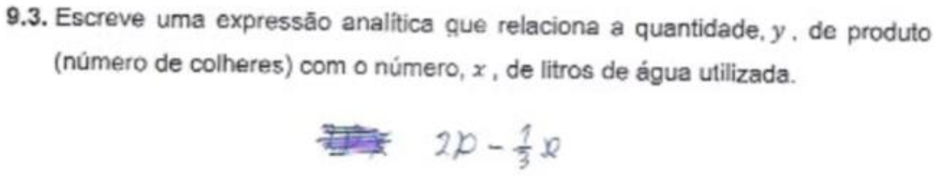



Figura 44 – Resolução pelo aluno $A_4$.

**Teste de avaliação de conhecimentos T2 – Resolução da questão 9.3.**

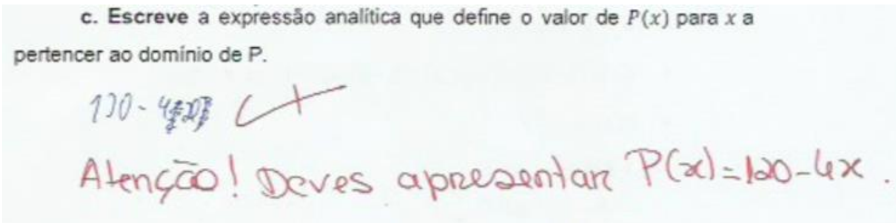


9.3. Escreve uma expressão analítica que relaciona a quantidade, $y$, de produto (número de colheres) com o número, $x$, de litros de água utilizada.

$2x - \frac{1}{3}x$

Figura 45 – Resolução pelo aluno $A_4$.

**Ficha de Trabalho sobre Funções FT - Resolução da questão 2.2., alínea c.**



c. Escreve a expressão analítica que define o valor de $P(x)$ para $x$ a pertencer ao domínio de P.

120 - 4x C+

Atenção! Deves apresentar $P(x)=120-4x$.

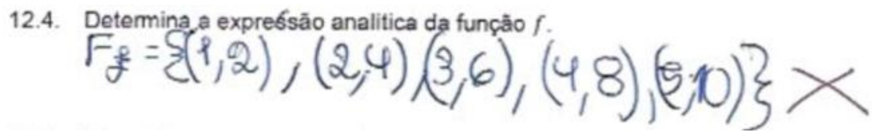
Figura 46 – Resolução pelo aluno $A_4$.

Já foi referido anteriormente que este aluno tem dificuldades na forma de apresentar a expressão analítica de uma função, ou seja, nas características da linguagem algébrica, subcategoria B3. Podemos verificar que não houve evolução do aluno ao longo do tempo.

A produção escrita pelo aluno $A_4$, que se apresenta na figura 45, está incorreta, mas conseguimos perceber que o aluno tem ideia do que é a expressão analítica. Nesta resolução a dificuldade do aluno $A_4$ poderá ter ocorrido na interpretação do problema enunciado, uma vez que a expressão que escreve não coincide com a expressão correta. Desta forma, nas três resoluções deste aluno, apresentam-se erros de subcategoria B3.

- **Aluno $A_6$**

**Teste de avaliação de conhecimentos T1 - Resolução da questão 12.4.**

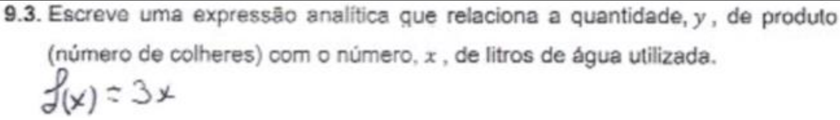


12.4. Determina a expressão analítica da função $f$.

$F_f = \{(1,2), (2,4), (3,6), (4,8), (5,10)\}$ ✕

Figura 47 – Resolução pelo aluno $A_6$.

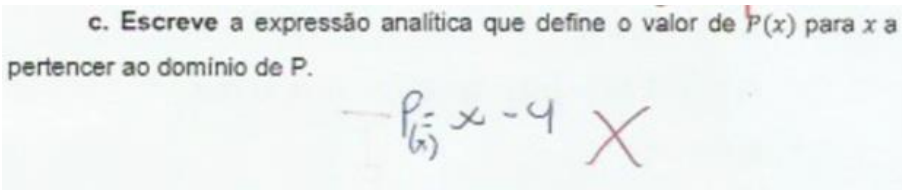
**Teste de avaliação de conhecimentos T2 - Resolução da questão 9.3.**


9.3. Escreve uma expressão analítica que relaciona a quantidade, $y$, de produto (número de colheres) com o número, $x$, de litros de água utilizada.

$f(x) = 3x$

Figura 48 – Resolução pelo aluno $A_6$.

**Ficha de Trabalho sobre Funções FT - Resolução da questão 2.2., alínea c.**


c. Escreve a expressão analítica que define o valor de $P(x)$ para $x$ a pertencer ao domínio de P.

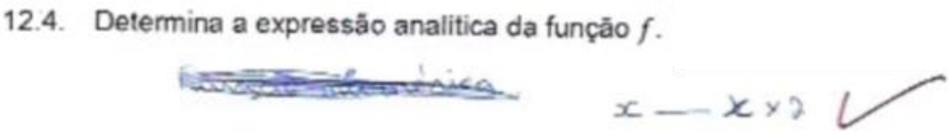
$P_{(x)} = x - 4$

Figura 49 – Resolução pelo aluno $A_6$.

Com as três resoluções expostas do aluno $A_6$ podemos concluir que na primeira resolução (figura 47) comete um erro de categoria A como vimos anteriormente e nas outras duas resoluções comete um erro de subcategoria B3, pois o aluno apresenta uma expressão analítica que não é a expressão analítica que corresponde ao problema enunciado. Assim, conclui-se destas resoluções que este aluno apesar de não conseguir ultrapassar todas as dificuldades do T1 para o T2 passa a ter uma noção daquilo que é a expressão analítica, o que no primeiro teste de avaliação de conhecimentos como se pode verificar não fazia ideia do que era a expressão analítica de uma função. A última resolução (figura 49) está incorreta pois a expressão apresentada pelo aluno não corresponde ao problema enunciado.

- **Aluno $A_7$**

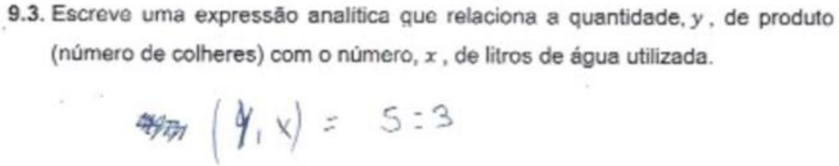
**Teste de avaliação de conhecimentos T1 - Resolução da questão 12.4.**


12.4. Determina a expressão analítica da função $f$.

$x \longrightarrow x \times 2$

Figura 50 – Resolução pelo aluno $A_7$.

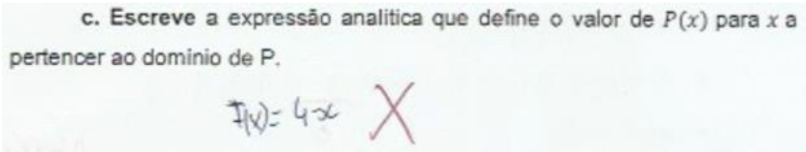
**Teste de avaliação de conhecimentos T2 - Resolução da questão 9.3.**


9.3. Escreve uma expressão analítica que relaciona a quantidade, $y$, de produto (número de colheres) com o número, $x$, de litros de água utilizada.

$(y, x) = 5:3$

Figura 51 – Resolução pelo aluno $A_7$.

**Ficha de Trabalho sobre Funções FT - Resolução da questão 2.2., alínea c.**


c. Escreve a expressão analítica que define o valor de $P(x)$ para $x$ a pertencer ao domínio de P.

$P(x) = 4x$ X

Figura 52 – Resolução pelo aluno $A_7$.

Das produções ilustradas nas figuras 50, 51 e 52 podemos concluir que o aluno pela ilustração (figura 51) não a completa.

Uma vez que o problema enunciado retrata uma situação de proporcionalidade direta o aluno calcula corretamente a constante de proporcionalidade direta, mas não escreve a expressão analítica correspondente, desta forma, esta resposta está parcialmente correta. O erro cometido nesta resolução trata-se de um erro de subcategoria B3.

Na última resolução (figura 52) o aluno volta a cometer um erro da mesma categoria. Escreve uma expressão analítica que não corresponde à situação descrita.

Para tentar compreender as dificuldades deste aluno realizou-se uma entrevista:

***Prof.***: *Podemos verificar, com a tua primeira resolução que não tiveste dúvidas em escrever a expressão analítica, mas por exemplo a segunda resolução está parcialmente correta…*

***Aluno $A_7$:*** *Essa está mal.*

***Prof.***: *E porque é que está mal?*

***Aluno $A_7$:*** *Eu não sabia e deixei essa para o fim e depois eu não consegui fazê-la bem.*

***Prof.***: *Sabes dizer-me onde está o teu erro?*

***Aluno $A_7$:*** *Sim.*

***Prof.***: *Então?*

***Aluno $A_7$:*** *Como não tinha conseguido preencher a tabela também não consegui escrever a expressão analítica.*

***Prof.***: *O que é que iria representar a expressão analítica neste teu caso? Qual seria a expressão analítica?*

| | |
|---|---|
| ***Aluno $A_7$:*** | *Os litros de água utilizados.* |
| ***Prof.:*** | *Será? Olhando para a tua resposta podemos verificar que a resposta está parcialmente correta? Se este problema traduz um problema de proporcionalidade direta, então o que faltou?* |
| ***Aluno $A_7$:*** | *Calculei a constante, faltou a expressão.* |
| ***Prof.:*** | *Exato, para a tua resposta estar totalmente correta faltou a expressão analítica que era $y = \frac{5}{3}x$. E nesta última resolução consegues dizer-me o que é que está incorreto?* |
| ***Aluno $A_7$:*** | *Eu acho que não meti ali o $P(x)$.* |
| ***Prof.:*** | *Tu designaste por $F(x)$ a expressão analítica, o que não está incorreto. Apenas deverias ter utilizado $P(x)$ porque era pedido no enunciado.* |
| ***Aluno $A_7$:*** | *Ok.* |
| ***Prof.:*** | *Então o que é que falta na expressão analítica? Repara que o teu $F(x)$ representaria o peso do Sr. Pestana ao fim de $x$ semanas de dieta. Então consegues dizer-me o que falta?* |
| ***Aluno $A_7$:*** | *Ah, sim.* |
| ***Prof.:*** | *Destas três resoluções observadas anteriormente, podemos verificar que em todas as questões queríamos determinar a expressão analítica, mas na primeira era a partir de um diagrama de setas enquanto nas outras duas era necessário interpretar o enunciado. O que é para ti mais fácil, a partir do diagrama, do gráfico ou da interpretação de um problema?* |
| ***Aluno $A_7$:*** | *Não sei… é que eu também não sou assim muito bom a matemática, também nunca gostei muito.* |
| ***Prof.:*** | *Hum… Mas imagina que eu te pedia para encontrares a expressão analítica. Pensas que seria mais difícil se tivesses de interpretar um enunciado ou, por exemplo, a partir de um gráfico?* |
| ***Aluno $A_7$:*** | *Não sei… acho que será na interpretação do enunciado.* |
| ***Prof.:*** | *Ok. Muito Bem!* |

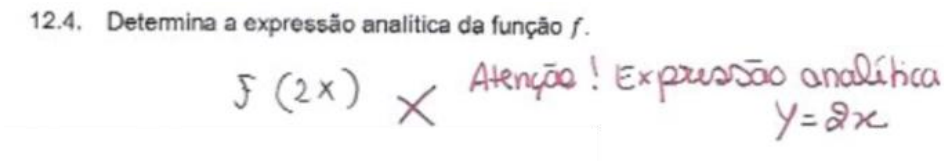
(Entrevista 15 de maio de 2020 ao aluno $A_7$)

O aluno $A_7$ refere que nunca foi "muito bom a matemática, também nunca gostei muito" e que tem dificuldades na interpretação do enunciado. Estas dificuldades em interpretar enunciado levaram este aluno a cometer erros de subcategoria B3, segundo o quadro de Socas (1997), erros de Álgebra devidos às características da linguagem algébrica.

É possível que este aluno ainda não tenha superado estas dificuldades, uma vez que o aluno durante a entrevista mostrou não ter ainda compreendido o erro cometido nos elementos tomados como instrumentos de recolha de dados.

- **Aluno $A_{11}$**

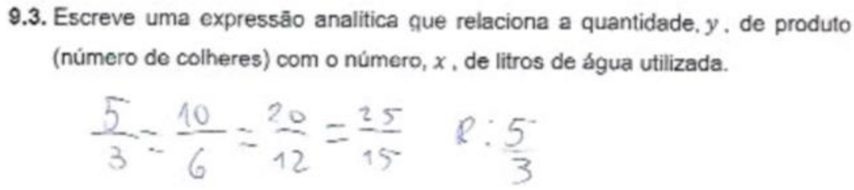
**Teste de avaliação de conhecimentos T1 - Resolução da questão 12.4.**


12.4. Determina a expressão analítica da função $f$.

$f(2x)$ × Atenção! Expressão analítica $y=2x$

Figura 53 – Resolução pelo aluno $A_{11}$.

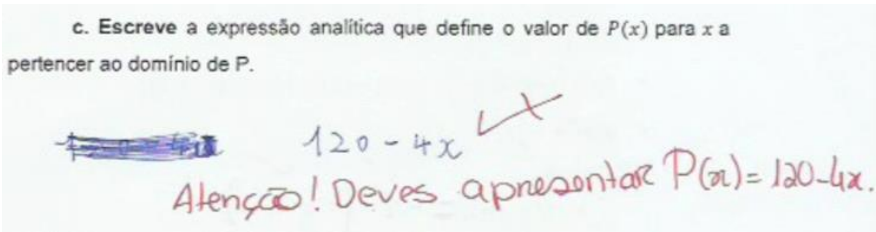
**Teste de avaliação de conhecimentos T2 - Resolução da questão 9.3.**


9.3. Escreve uma expressão analítica que relaciona a quantidade, $y$, de produto (número de colheres) com o número, $x$, de litros de água utilizada.

$\frac{5}{3} = \frac{10}{6} = \frac{20}{12} = \frac{25}{15}$ R: $\frac{5}{3}$

Figura 54 – Resolução pelo aluno $A_{11}$.

**Ficha de Trabalho sobre Funções FT - Resolução da questão 2.2., alínea c.**


c. Escreve a expressão analítica que define o valor de $P(x)$ para $x$ a pertencer ao domínio de P.

$120-4x$

Atenção! Deves apresentar $P(x)=120-4x$.

Figura 55 – Resolução pelo aluno $A_{11}$.

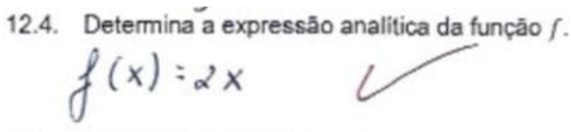
Os dois erros cometidos das duas primeiras resoluções (figura 53 e 54) apresentadas são diferentes, mas são ambos de subcategoria B3, como já foi referido anteriormente.

Na resolução da questão do T1 (figura 53) o discente entende o que se quer com a expressão analítica, mas não sabe escrever corretamente, a resolução do T2 (figura 54) é idêntica à resolução da mesma questão do aluno $A_7$ (figura 51), ou seja, o aluno apenas calcula a constante de proporcionalidade direta, mas não apresenta a expressão analítica, portanto a sua resolução está incompleta.

Com estas três resoluções podemos concluir que o aluno evoluiu, uma vez que a última resolução (figura 55) está *quase* correta.

♦ **Aluno $A_{23}$**

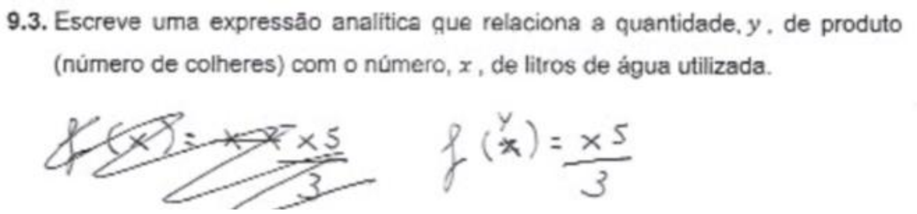
**Teste de avaliação de conhecimentos T1 - Resolução da questão 12.4.**


12.4. Determina a expressão analítica da função $f$.

$f(x) = 2x$

Figura 56 – Resolução pelo aluno $A_{23}$.

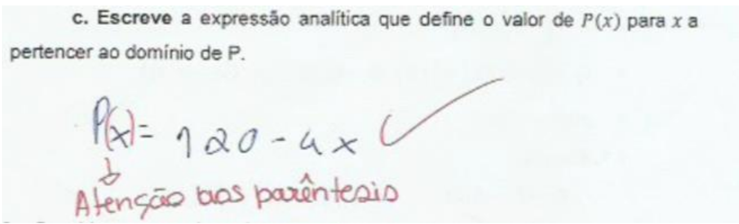
**Teste de avaliação de conhecimentos T2 - Resolução da questão 9.3.**


9.3. Escreve uma expressão analítica que relaciona a quantidade, $y$, de produto (número de colheres) com o número, $x$, de litros de água utilizada.

$\cancel{f(x) = \frac{x5}{3}}$ $f(y) = \frac{x5}{3}$

Figura 57 – Resolução pelo aluno $A_{23}$.

**Ficha de Trabalho sobre Funções FT - Resolução da questão 2.2., alínea c.**


c. Escreve a expressão analítica que define o valor de $P(x)$ para $x$ a pertencer ao domínio de P.

$P(x) = 120 - 4x$

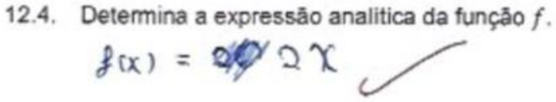
Atenção aos parêntesis

Figura 58 – Resolução pelo aluno $A_{23}$.

O aluno $A_{23}$, como já foi referido anteriormente, comete na resolução da figura 57 um erro de subcategoria B3 apresentando a expressão analítica como sendo $f(y) = \frac{x5}{3}$ e comete um erro de categoria C na última resolução, figura 58, pois esquece-se dos parêntesis.

♦ **Aluno $A_{28}$**

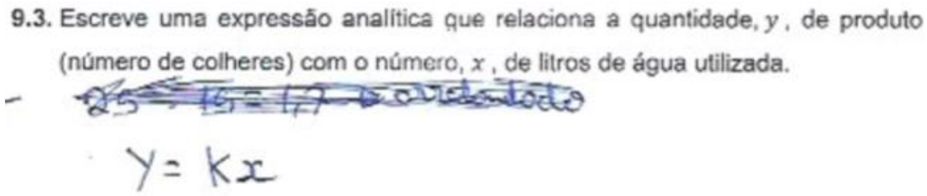
**Teste de avaliação de conhecimentos T1 - Resolução da questão 12.4.**


12.4. Determina a expressão analitica da função $f$.

$f(x) = 2x$

Figura 59 – Resolução pelo aluno $A_{28}$.

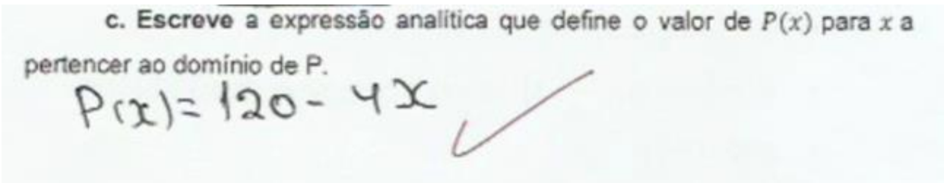
**Teste de avaliação de conhecimentos T2 - Resolução da questão 9.3.**


9.3. Escreve uma expressão analítica que relaciona a quantidade, $y$, de produto (número de colheres) com o número, $x$, de litros de água utilizada.

$y = kx$

Figura 60 – Resolução pelo aluno $A_{28}$.

**Ficha de Trabalho sobre Funções FT - Resolução da questão 2.2., alínea c.**


c. Escreve a expressão analitica que define o valor de $P(x)$ para $x$ a pertencer ao domínio de P.

$P(x) = 120 - 4x$

Figura 61 – Resolução pelo aluno $A_{28}$.

Das três resoluções apresentadas anteriormente (figuras 59, 60 e 61) podemos verificar que o aluno sabe exatamente o que é a expressão analítica de uma função. Apesar disso a resolução do T2 (figura 60) está incompleta, uma vez que o aluno sabe que a situação descrita retrata uma situação de proporcionalidade direta e, assim sendo, a expressão analítica da respetiva função corresponde a uma função linear. Supõe-se que o aluno provavelmente não conseguiu calcular a respetiva constante de proporcionalidade e, portanto, deixou a sua resposta incompleta, incluindo-se esta falha na subcategoria B3.

Tabela 11 – Análise do número de respostas no T1, T2 e na FT, da questão sobre a expressão analítica.

| | SR | RTC | RPC | | RI | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | ORPC | RINC | | |
| **T1** | 5 | 15 | 0 | 1 | 7 | 28 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **T2** | 7 | 2 | 1 | 6 | 9 | 25 |
| **FT** | 1 | 3 | 10 | 0 | 6 | 20 |
| **Total** | 13 | 20 | 11 | 7 | 22 | 73 |

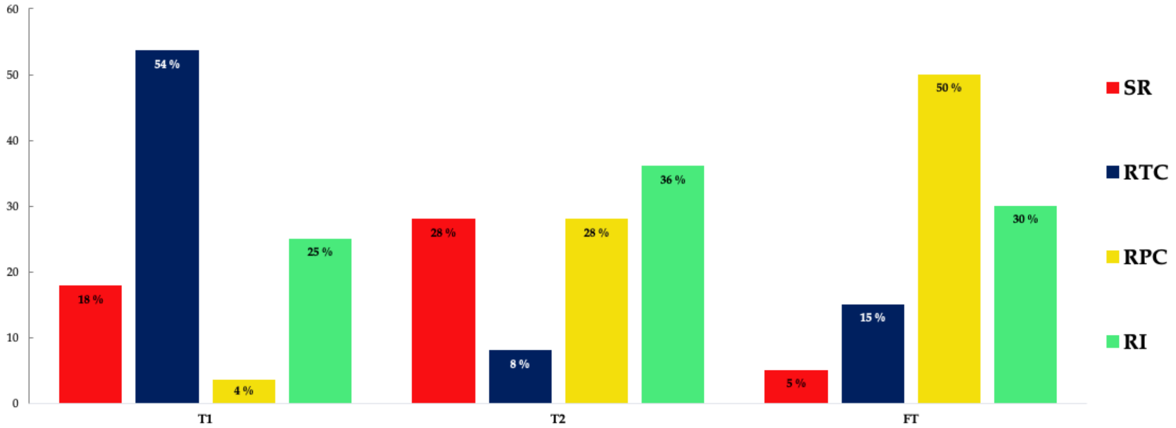



Figura 62 - Análise do número de respostas nos T1, T2 e na FT, da questão sobre a expressão analítica, em percentagem.

Podemos observar que nas resoluções analisadas no último instrumento de recolha de dados aplicado apenas um único aluno não respondeu à questão. Podemos, ainda, observar que existe um grande número de respostas parcialmente corretas (10 respostas), grande parte destas respostas contém erros de Álgebra devido às caraterísticas da linguagem algébrica.

A maior percentagem de respostas totalmente corretas, nesta questão, como podemos verificar foi na resolução do primeiro teste de avaliação de conhecimentos (T1), tal evidência pode dever-se ao facto do conteúdo ter sido abordado recentemente, o que significa que o conhecimento adquirido não foi consolidado.

Perante toda a categorização realizada anteriormente foram reunidos os dados na tabela 9 para que esta pudesse ajudar na análise dos dados recolhidos.

Tabela 12 – Erros por categorias.

| | **Erros de Categoria** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **A** | **B** | | | **C** | |
| | | **B1** | **B2** | **B3** | | |
| $A_1$ | X | | | X | X | 3 |
| $A_2$ | | | | X | X | 2 |
| $A_3$ | | | | | X | 1 |
| $A_4$ | | | | XXXX | X | 5 |
| $A_6$ | XX | X | | XXXX | X | 8 |
| $A_7$ | | | | | X | 1 |
| $A_8$ | X | X | | XXXX | X | 7 |
| $A_9$ | | X | | XX | | 3 |
| $A_{10}$ | | X | X | XX | X | 5 |
| $A_{11}$ | | XX | XX | XX | X | 7 |
| $A_{12}$ | | | XX | XX | | 4 |
| $A_{13}$ | | | X | X | | 2 |
| $A_{14}$ | | | | X | | 1 |
| $A_{16}$ | | | | X | | 1 |
| $A_{17}$ | | X | | | | 1 |
| $A_{18}$ | | | | | | 0 |
| $A_{19}$ | | | XX | XX | | 4 |
| $A_{20}$ | | | | X | X | 2 |
| $A_{21}$ | | | X | XXXX | X | 6 |
| $A_{22}$ | | | X | X | | 2 |
| $A_{23}$ | | | X | XX | X | 4 |
| $A_{24}$ | | XXX | XX | X | | 6 |
| $A_{25}$ | | | X | X | | 2 |
| $A_{26}$ | | | X | X | | 2 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_{27}$ | | | | XX | | 2 |
| $A_{28}$ | | | | XXX | | 3 |
| $A_{29}$ | | | | | | 0 |
| $A_{30}$ | | | | | | 0 |
| **Total** | 4 | 10 | 15 | 43 | 12 | 84 |

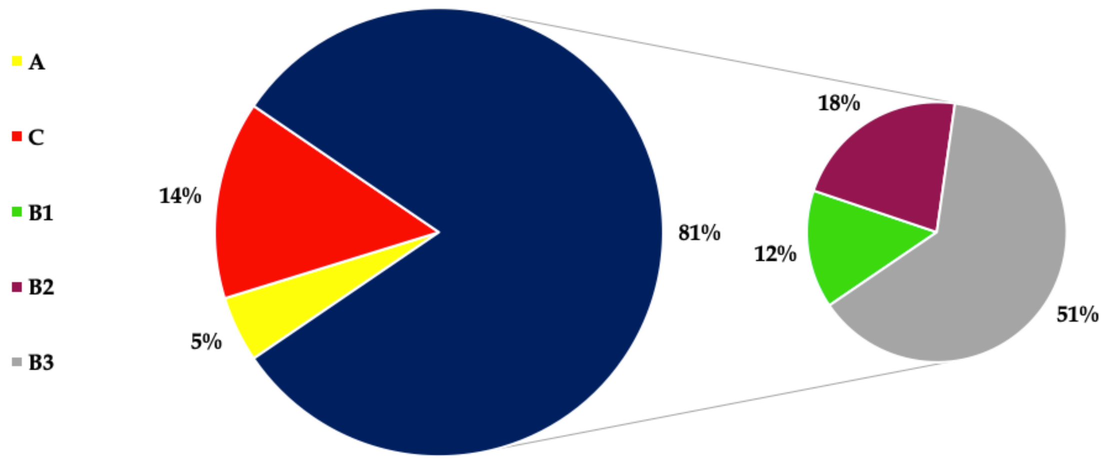


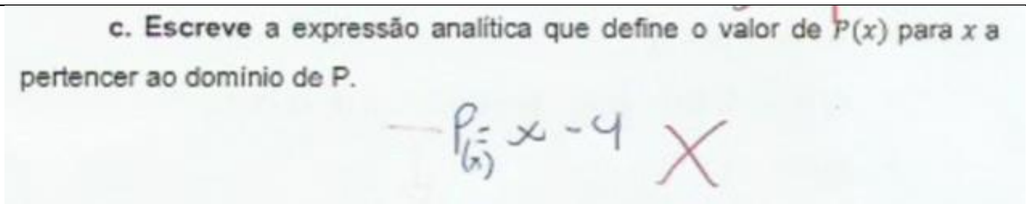

Figura 63 – Distribuição dos erros cometidos.

Podemos concluir pelos gráficos da figura 63 que após a categorização realizada através do quadro teórico de Socas (1997), os erros cometidos pelos participantes deste estudo estão maioritariamente incluídos na categoria B, erros cuja origem é a ausência de significado. Socas (1997) divide, como já foi referido anteriormente, esta categoria em três subcategorias. Dos erros analisados podemos verificar que os erros mais frequentes foram os erros da subcategoria B3, que ocorrem devido às características de linguagem algébrica.

A maior dificuldade que os alunos têm é traduzir para a expressão analítica o enunciado de um problema, como podemos observar na figura 64.

Da tabela 12 podemos observar que todos os alunos que cometem erros da subcategoria B2 cometem também erros da subcategoria B3.

| **Ficha de Trabalho sobre Funções FT - Resolução da questão 2.2., alínea c.** |
|---|


c. Escreve a expressão analítica que define o valor de $P(x)$ para $x$ a pertencer ao domínio de P.

$P_{(x)} = x - 4$ X

Figura 64 – Resolução pelo aluno $A_6$.

Como se pode conferir o aluno $A_6$ não apresenta a solução esperada, mas com a resolução apresentada podemos concluir que sabe o que é a expressão analítica, mas não foi capaz de traduzir corretamente os dados do enunciado.

## 5.2. A avaliação para alguns alunos:

Neste subcapítulo objetiva-se analisar a parte das quatro entrevistas que dizem respeito à avaliação.

O presente estudo pretende olhar para o erro como uma oportunidade de aprendizagem. Dado que, em geral, o erro surge a partir de uma avaliação, foram incorporadas algumas perguntas (Apêndice XIV) sobre a avaliação aos quatro alunos entrevistados.

- Entrevista ao aluno $A_7$

**Prof.:** *Quando ouves falar em avaliação, em que pensas?*

**Aluno $A_7$:** *Que é uma coisa que nos vai avaliar… é uma coisa que nós temos que fazer bem, porque nos vão avaliar, que vai contar para a avaliação.*

**Prof.:** *Na tua opinião, para que serve a avaliação?*

**Aluno $A_7$:** *Para… Eu não sei explicar, não sei… Mas penso que será para nós sabermos o que temos de melhorar e para sabermos o que temos de fazer para sermos melhores.*

**Prof.:** *Achas que podíamos continuar as aulas sem avaliação?*

**Aluno $A_7$:** *Não.*

**Prof.:** *Ao longo dos teus anos como aluno(a) tens sido avaliado(a) na disciplina de Matemática. De que forma?*

**Aluno $A_7$:** *Por fichas, por fichas de avaliação, também conta a maneira como estamos na aula, a postura e isso tudo, comportamento.*

**Prof.:** *Consideras que a forma como a avaliação tem sido efetuada é a melhor? Sentes-te prejudicado? Ou beneficiado? Achas justa?*

***Aluno $A_7$:*** *Acho que é justa.*

***Prof.:*** *Achas que a avaliação te ajuda a cometer menos erros?*

***Aluno $A_7$:*** *Sim acho, porque assim sabemos o que temos de melhorar.*

(Entrevista 15 de maio de 2020 ao aluno $A_7$)

O aluno $A_7$ refere que a avaliação é "uma coisa" que tem de fazer bem. Esta afirmação leva-nos a conjeturar que este discente pensa na avaliação com apenas um só objetivo, acertar as respostas, não apendendo mais se errar.

Quando lhe é questionado sobre para que serve avaliação este assegura que a avaliação serve para os alunos saberem onde têm de melhorar.

- Entrevista ao aluno $A_{12}$

***Prof.:*** *Quando ouves falar em avaliação, em que pensas?*

***Aluno $A_{12}$:*** *Numa nota que me vai ser atribuída, pelo trabalho que fiz.*

***Prof.:*** *Na tua opinião, para que serve a avaliação?*

***Aluno $A_{12}$:*** *Acho que não sei explicar.*

***Prof.:*** *Achas que podíamos continuar as aulas sem avaliação?*

***Aluno $A_{12}$:*** *Não.*

***Prof.:*** *Ao longo dos teus anos como aluno(a) tens sido avaliado(a) na disciplina de Matemática. De que forma?*

***Aluno $A_{12}$:*** *Com trabalho autónomo durante as aulas, a realização de trabalhos de casa, os testes e no comportamento, penso eu.*

***Prof.:*** *Consideras que a forma como a avaliação tem sido efetuada é a melhor? Sentes-te prejudicado? Ou beneficiado? Achas justa?*

***Aluno $A_{12}$:*** *Acho justo, não tenho nada contra a minha forma de avaliação.*

***Prof.:*** *Achas que a avaliação te ajuda a cometer menos erros?*

***Aluno $A_{12}$:*** *Eu acho que sim.*

***(...)***

***Prof.:*** *E achas que se a professora deixasse um comentário, como por exemplo "atenção aos declives das retas", nesta tua resolução à questão 8 do teste te ajudaria a perceber o teu erro? Ou nem sequer irias olhar para este comentário?*

***Aluno $A_{12}$:*** *Acho que não.*

***Prof.:*** *Então pensas que este tipo de comentários não te ajudaria, pois não?*

***Aluno $A_{12}$:*** *Alguns sim, outros não, como por exemplo "cuidado com o declive".*

**Prof.:** *Achas que dependia de quê? Do comentário e da questão?*

**Aluno $A_{12}$:** *Sim.*

(Entrevista 15 de maio de 2020 ao aluno $A_{12}$)

O aluno $A_{12}$ não consegue explicar qual é o objetivo da avaliação, mas quando ouve a palavra "avaliação" remete-o a pensar sobre uma nota que lhe é atribuída pelo trabalho que fez, portanto é-lhe facultado um nível de aprendizagem.

No que concerne ao *feedback* fornecido do professor para o aluno, este discente refere que nem todos os comentários o ajudariam a superar os seus erros, referindo ainda que depende da questão e do comentário.

- Entrevista ao aluno $A_{21}$

**Prof.:** *Quando ouves falar em avaliação, em que pensas?*

**Aluno $A_{21}$:** *É uma coisa que serve para avaliar. Eu não sei explicar, mas sei sim que é uma coisa que é para avaliar o que fazemos na disciplina.*

**Prof.:** *Então achas que serve para avaliar o teu trabalho, certo?*

**Aluno $A_{21}$:** *Sim!*

**Prof.:** *Ao longo dos teus anos como aluno(a) tens sido avaliado(a) na disciplina de Matemática. De que forma?*

**Aluno $A_{21}$:** *Acho que eles faziam as notas do teste, juntamente com o comportamento.*

**Prof.:** *Consideras que a forma como a avaliação tem sido efetuada é a melhor? Sentes-te prejudicado? Ou beneficiado? Achas justa?*

**Aluno $A_{21}$:** *Não.*

**Prof.:** *Então porque não achas a avaliação justa?*

**Aluno $A_{21}$:** *Eu acho que não deveria ser só os testes, devia ser também pelo trabalho autónomo e isso.*

**Prof.:** *Achas que a avaliação te ajuda a cometer menos erros?*

**Aluno $A_{21}$:** *Sim.*

**Prof.:** *De que forma?*

***(Silêncio... Dificuldades em responder)***

**Prof.:** *Por exemplo, num teste, respondes a uma questão e depois na correção a resposta pode estar correta ou não. Certo?*

**Aluno $A_{21}$:** *Sim.*

**Prof.:** *Dessa forma, achas que numa questão que tenhas errado, que voltas a cometer o mesmo erro, da mesma forma?*

**Aluno $A_{21}$:** *Não.*

| | |
|---|---|
| ***Prof.:*** | *Portanto achas que se o professor te der algum feedback sobre o teu erro irá ajudar a superar as tuas dificuldades?* |
| ***Aluno $A_{21}$:*** | *Sim.* |
| ***Prof.:*** | *Muito bem!* |

(Entrevista 15 de maio de 2020 ao aluno $A_{21}$)

Este aluno $A_{21}$ afirma que a avaliação serve para avaliar o trabalho que os alunos fazem na disciplina. Pensa que o trabalho autónomo não faz parte da sua avaliação e assim sendo não considera a avaliação justa. O discente ainda concorda que o *feedback* o pode ajudar a superar as suas dificuldades, assim como a avaliação.

- Entrevista ao aluno $A_{24}$

| | |
|---|---|
| ***Prof.:*** | *Quando ouves falar em avaliação, em que pensas?* |
| ***Aluno $A_{24}$:*** | *Como assim?* |
| ***Prof.:*** | *Por exemplo, quando o professor diz vou avaliar-vos, o que é que te leva logo a pensar?* |
| ***Aluno $A_{24}$:*** | *Que vou ser testado, vou aplicar as minhas capacidades nessa ficha de avaliação, nessa avaliação.* |
| ***Prof.:*** | *Ok! Na tua opinião, para que serve a avaliação?* |
| ***Aluno $A_{24}$:*** | *Serve para testar se eu sei conteúdos sobre essa disciplina.* |
| ***Prof.:*** | *Ao longo dos teus anos como aluno tens sido avaliado na disciplina de Matemática. De que forma?* |
| ***Aluno $A_{24}$:*** | *Fichas de avaliação, minifichas, trabalhos de grupo.* |
| ***Prof.:*** | *Consideras que a forma como a avaliação tem sido efetuada é a melhor? Sentes-te prejudicado? Ou beneficiado? Achas justa?* |
| ***Aluno $A_{24}$:*** | *Sim, acho justa.* |
| ***Prof.:*** | *Achas que seria possível continuar as aulas sem avaliação?* |
| ***Aluno $A_{24}$:*** | *Seria possível, mas acho que não iria ser tão bom para nós.* |
| ***Prof.:*** | *Achas que a avaliação te ajuda a cometer menos erros?* |
| ***Aluno $A_{24}$:*** | *Sim.* |
| ***Prof.:*** | *De que forma?* |
| ***Aluno $A_{24}$:*** | *Então, eu dessa maneira, como vou ser testado, vou mudar a correção e posso aprender com isso.* |
| ***Prof.:*** | *Ok! Muito bem!* |

***(...)***

**Prof.:** *E achas que se a professora deixasse um comentário, como por exemplo "atenção aos declives das retas", nesta tua resolução à questão 8 do teste te ajudaria a perceber o teu erro? Para não voltares a cometê-lo?*

**Aluno $A_{24}$:** *Iria sempre ajudar, mas não ia ser da melhor forma.*

**Prof.:** *Porquê?*

**Aluno $A_{24}$:** *Acho que podia não entender o que a professora queria dizer, podia perceber mal.*

**Prof.:** *Achas que esse tipo de comentários importante?*

**Aluno $A_{24}$:** *Sim.*

(Entrevista 15 de maio de 2020 ao aluno $A_{24}$)

Este aluno refere que a avaliação é onde aplica as suas capacidades e que serve para testar se sabe ou não os conteúdos em avaliação.

O discente refere que a avaliação o ajuda a cometer menos erros, pois se está errado, através da resolução correta pode aprender e não voltar a cometer o mesmo erro.

No que diz respeito ao *feedback*, este aluno acha que não seria a melhor forma de o ajudar a superar o erro, afirmando que podia não interpretar corretamente o comentário feito pela professora.

Analisando as quatro entrevistas podemos verificar que apenas um aluno não acha a avaliação justa, alegando que a avaliação não deveria ter em conta apenas as notas dos testes, mas também o trabalho autónomo realizado. Este aluno supõe que é avaliado apenas pelo seu comportamento e pelas classificações obtidas nos testes de avaliação de conhecimentos. O aluno $A_{21}$ deveria ainda ter sido questionado sobre o que é para ele trabalho autónomo, uma vez que, por exemplo, o trabalho de casa, também é um trabalho autónomo e o aluno, geralmente, também é avaliado dessa forma.

Os alunos entrevistados consideram que a avaliação tem como principal objetivo classificá-los.

# 6. Considerações finais

O presente capítulo tem como finalidade a apresentação das conclusões deste estudo, tendo em consideração as questões de investigação formuladas.

Primeiramente farei uma breve síntese deste estudo seguida das respostas às questões de investigação. Serão descritos os constrangimentos sentidos neste estudo e sugeridos caminhos para uma futura investigação neste tema.

Como já foi referido, é no sentido de tentar compreender, colmatar e transformar os erros consistentemente cometidos por alunos, que surgiram as seguintes questões de investigação:

- Qual a natureza dos erros mais frequentes que os alunos do 7.º ano de escolaridade cometem na resolução de questões relacionadas com o tema das funções?
- De que forma é que os alunos se apercebem dos erros que cometem? Que dispositivos de regulação pode usar o professor por forma a favorecer o processo de superação do erro? Que evolução apresentam?

Este estudo é de natureza mista, sendo em grande parte descritiva e, portanto, qualitativa. Como, também já referido é um estudo de caso múltiplo. Procedeu-se à recolha de dados numa turma com 28 alunos do 7.º ano de escolaridade. Os instrumentos que serviram de apoio a este estudo foram quatro, dois testes realizados nos dias 3 de dezembro de 2019 e 14 de fevereiro de 2020, a ficha de trabalho efetuada no dia 13 de março de 2020 (aplicados a todos os alunos) e a entrevista realizada a quatro alunos no dia 15 de maio de 2020.

## 6.1. Principais conclusões

É de salientar que as conclusões apresentadas são referentes aos casos estudados e que são uma consequência da interpretação dos dados recolhidos pela investigadora e, assim sendo, esta é uma análise subjetiva.

### 6.1.1. Qual a natureza dos erros mais frequentes que os alunos do 7.º ano de escolaridade cometem na resolução de questões relacionadas com o tema das funções?

Por forma a obter dados concisos sobre o número de respostas corretas, incorretas, parcialmente corretas ou sem resposta nos testes de avaliação de conhecimentos (T1 e T2) e na ficha de trabalho (FT) agrupou-se essa informação numa tabela. Posteriormente, procedeu-se à construção do gráfico de barras correspondente.

Da tabela e do gráfico 6 podemos concluir que a maior percentagem de respostas corretas foi no teste de avaliação de conhecimentos realizado no dia 3 de dezembro de 2019, mas que em todos os instrumentos o número de respostas corretas foi sempre o maior. Ao observar este gráfico verificamos que existe uma pequena percentagem de resoluções em que os alunos não apresentam qualquer resposta tanto no T1 como na FT. No T2 apesar da percentagem de questões sem resposta ser de apenas 13 %, não é a percentagem inferior, nesse teste (T2) a menor percentagem diz respeito às respostas incorretas.

É facilmente percetível que esta é uma turma com um bom desempenho uma vez que nos dois testes de avaliação de conhecimentos o número de respostas corretas é igual ou superior a metade das respostas investigadas. Na FT apesar de ser inferior a metade das respostas analisadas a percentagem é de 48 % o que é um valor muito próximo de metade dessas respostas.

É importante referir que ao analisarmos os dados recolhidos por estes três instrumentos temos de ter em consideração que o número de alunos a responder às questões foi sempre diferente. No teste de avaliação de conhecimentos T1 todos os alunos da turma estiveram presentes, ou seja, os 28 alunos participaram. No teste de avaliação de conhecimentos T2 um dos alunos da turma faltou a este teste, e, por conseguinte, realizou um teste diferente dos restantes colegas. Na FT participaram apenas 20 dos 28 alunos da turma, uma vez que esta foi fornecida aos alunos no último dia de aulas presenciais e nem todos os alunos estavam presentes devido ao COVID-19.

A investigadora perante estas informações optou por não considerar para este estudo as respostas incompletas e as sem resposta dos alunos. Poderia ser interessante analisar estas respostas tendo outro suporte, como por exemplo, entrevistas a todos os alunos que tiveram este tipo de resposta, mas devido ao tempo de execução deste estudo seria impossível entrevistar todos estes alunos.

Nogaro e Granella (2004) referem que há necessidade que o professor "tome uma posição diante do erro e da postura" (p. 8) que tem relativamente ao mesmo: "punição, complacência ou possibilidade de aprender" (p. 8).

Por forma a olhar para o erro como um processo de ensino e de aprendizagem Salsa (2017) afirma que "o erro do aluno deve ser compreendido como um possível elemento constituinte do conhecimento, sendo um meio capaz de permitir, ao professor, o acesso à forma de encadeamento da construção de conceitos nos processos de aprendizagem do aluno" (p. 89).

Tendo uma visão construtivista do erro é necessário considerar a natureza do mesmo. Dessa forma os erros cometidos pelos participantes desta turma foram inseridos na categorização dos erros de Socas (1997). O quadro teórico deste autor, como já foi supracitado, possibilita a avaliação da origem dos erros:

[A] Nos obstáculos;

[B] Na ausência de significado;

[C] Nas atitudes afetivas e emocionais.

Socas (1997) subdivide os erros que têm na sua origem ausência de significado em 3 subcategorias: [B1] erros de álgebra com origem na aritmética; [B2] erros de procedimento, uso de regras e fórmulas indevidamente; [B3] erros de álgebra devido às características de linguagem algébrica.

Após a distribuição dos erros pelas diferentes categorias e subcategorias, através do gráfico 63 foi analisada a frequência dos erros. Desta análise podemos concluir que os erros mais frequentes são os erros que têm na sua origem a ausência de significado [B], sendo a subcategoria [B3], ou seja, erros de álgebra devido às características de linguagem algébrica aquela que se destaca, seguida da subcategoria [B2], mas com uma percentagem muito inferior. Os erros inseridos na subcategoria [B1] e categoria [C] aparecem com percentagens muito próximas, respetivamente, 12 % e 14 %, por último apresentam-se os erros de categoria [A] com uma percentagem de 5 %.

Desta análise conclui-se que a maioria dos erros cometidos por alunos do 7.º ano de escolaridade no subdomínio *Funções* são os erros de álgebra devido às características da linguagem algébrica. Tal facto deve-se essencialmente à compreensão da expressão analítica de uma função, ou seja, da representação algébrica. Para além destes alunos lidarem pela primeira vez, com formalidade com este subdomínio, como concluir que a maior dificuldade apresentada é traduzir os dados de um problema para a expressão analítica correspondente. Pelas entrevistas realizadas sobre a questão 8. do T2 comprova isto mesmo, a dificuldade associada às características da linguagem algébrica. Os alunos parecem ter imensas dificuldades na linguagem algébrica, no contexto formal, leva a crer que têm dificuldades em trabalhar com letras, não conseguem atribuir significado às letras.

### 6.1.2. De que forma é que os alunos se apercebem dos erros que cometem? Que dispositivos de regulação pode usar o professor por forma a favorecer o processo de superação do erro? Que evolução apresentam?

Conforme foi referido na fundamentação teórica, mais importante que o aluno acerte é que o aluno reflita sobre as suas produções, é importante que o aluno entenda os erros que comete, afirma Martins referenciado por Vale (2010).

A avaliação formativa é apresentada como um apoio no processo de ensino e de aprendizagem. Se pretendemos avaliar formativamente então devemos "avaliar para ajudar a aprender" (Santos, 2016, p. 640). De outra forma avaliamos apenas para sintetizar a aprendizagem, avaliamos de forma sumativa (Santos, 2016).

Foi no sentido de tentar compreender a função que toma a avaliação para quatro alunos participantes deste estudo que foi realizada uma entrevista a cada um deles.

Das entrevistas realizadas acerca da avaliação, apesar dos alunos terem alguma dificuldade em saber o que é, e para que serve a avaliação, podemos facilmente concluir que a encaram como um meio para os classificar numa escala. Para estes discentes a avaliação apenas serve como apoio para o aluno e não para o professor. Referem que a avaliação serve para avaliar as capacidades dos próprios e que lhes fornece indicações dos conteúdos que devem melhorar, onde devem evoluir nas suas produções. Todos os alunos entrevistados referem que a avaliação traz benefícios para si, que os ajuda a cometer menos erros, pois com os seus erros sabem onde devem melhorar.

Como já sabemos o *feedback* constitui um utensílio que o professor desenvolve com o objetivo de ajudar o aluno no processo de aprendizagem. Aplicar o *feedback* para que o seu impacto seja positivo depende do tipo de *feedback* que é fornecido assim como da forma como é exposto ao discente.

Os alunos entrevistados foram também questionados sobre a sua opinião face ao *feedback*. Todos concordam que o *feedback* fornecido pelo professor é importante na sua aprendizagem, embora um destes alunos tenha referido "Iria sempre ajudar, mas não ia ser da melhor forma". Tendo em consideração a afirmação deste aluno, podemos concluir que a experiência que este tem com o *feedback* não é a melhor. Provavelmente o aluno já experienciou a receção de *feedback* sobre algum conteúdo, mas, possivelmente, não foi aplicado de forma correta, uma vez que este afirma que o *feedback* podia levar a uma interpretação incorreta da informação que o professor pretendia transmitir.

O fornecimento de *feedback* deve ser cuidadosamente pensado e organizado para que leve o aluno a receber corretamente a informação que é pretendida.

Através das entrevistas sobre as questões de associação das representações de uma função concluímos que através do questionamento oral o aluno consegue aperceber-se do seu erro. Por exemplo, quando o aluno $A_{24}$ responde de forma incorreta à associação da expressão analítica à representação gráfica e a professora questiona-o "Será? Terá declive positivo?" o discente apercebe-se que a associação feita estava incorreta apresentando, logo de imediato, a resposta correta.

Não foi possível aplicar nem o teste em duas fases nem o portefólio reflexivo, mas apesar disso estes teriam sido, certamente, dois instrumentos em que os alunos facilmente iriam aperceber-se dos erros cometidos e ajudá-los a superar as suas dificuldades, valorizando muito o seu trabalho autónomo.

Tal como refere Santos (2016) a avaliação formativa tem em consideração o indivíduo, ou seja, por exemplo, se estamos perante uma avaliação deste tipo o docente deve "tomar em linha de conta dificuldades específicas" (p. 641) dos seus alunos, assim como os esforços que fazem e a evolução que apresentam.

Os três instrumentos, T1, T2 e FT tinham em comum uma questão relacionada com a expressão analítica. Nos três instrumentos era solicitado aos alunos que escrevessem a expressão analítica correspondente a um determinado problema. Desta forma, a investigadora foi tentar compreender a evolução de seis alunos, que responderam às três questões assinaladas em cada um dos instrumentos.

Entre as três resoluções expostas (Figuras 44, 45 e 46) do aluno $A_4$ apenas uma está totalmente incorreta e conseguimos perceber que a dificuldade sucedeu na interpretação dos dados do problema. Portanto a evolução não foi muita uma vez que as dificuldades deste aluno não estão diretamente relacionadas com o que foi pedido.

O aluno $A_6$ pelas resoluções apresentadas (Figuras 47, 48 e 49) não conseguiu superar as dificuldades em escrever a expressão analítica. Por forma a entender melhor estas dificuldades foi proposto fazer uma entrevista com este aluno, mas não foi possível a sua realização uma vez que não houve o consentimento do EE.

O terceiro aluno $A_7$ apresenta apenas uma resolução totalmente correta como podemos observar nas figuras 50, 51 e 52, não apresentando qualquer evolução, desta forma, foi realizada uma entrevista. Com esta entrevista foi possível perceber que este aluno tem dificuldades em interpretar o enunciado, traduzindo para a expressão analítica, ou seja, tem dificuldades na representação algébrica.

No que concerne aos três alunos restantes, em que comparámos as suas três resoluções neste conteúdo, todos apresentam evolução, todos conseguiram acertar a resolução à última questão apresentada da FT.

Ainda no que diz respeito à evolução dos alunos e à análise destas três questões sobre a expressão analítica, podemos concluir que este é um conteúdo que incita dificuldades aos alunos. Observando o gráfico 62 conclui-se que apenas no T1 o número de respostas totalmente corretas foi superior às SR, RPC e RI. Tal evidência pode associar-se ao facto de que na questão do T1 teriam de partir de um diagrama de setas e concluir a sua representação algébrica, enquanto que nas outras duas questões referenciadas teriam de interpretar o enunciado.

Os alunos consideram a avaliação, perante as entrevistas realizadas, importante para melhorarem a sua aprendizagem.

Contudo, conclui-se que o questionamento oral e o constante feedback organizado e estruturado são dispositivos reguladores que o professor pode usar por forma a favorecer o processo de superação do erro.

## 6.2. Constrangimentos do estudo

O estudo foi implementado no âmbito da PES e, nesse sentido, a investigadora fez as suas intervenções pontualmente, revelando-se um constrangimento ao estudo que pretendia efetuar, ao impossibilitar uma maior proximidade com todos os alunos da turma.

A investigadora pediu que os alunos resolvessem uma ficha de trabalho em casa, que seria analisada para o estudo, mas os alunos não entregaram a ficha resolvida. Caso a investigadora fosse a professora titular da turma poderia gerir o tempo e conseguir aplicar a ficha numa aula.

No que concerne aos recursos a utilizar, a investigadora durante a sua intervenção teve algumas limitações. Nem sempre foi possível a utilização da internet pois não estava funcional e os quadros interativos presentes nas salas de aula não dispunham de canetas próprias para o seu uso.

Decorria ainda a PES quando o país entrou em estado de emergência devido ao COVID-19. Após esta situação, o grupo de estágio foi obrigado a afastar-se presencialmente da escola. Assim sendo, a PES tal como as aulas decorreram à distância, e nesse sentido, foi também uma limitação. Tendo em conta que as aulas por videoconferência dependem das tecnologias tanto dos professores como dos alunos, houve durante a intervenção, realizada por videoconferência, alguma dificuldade em ouvir os alunos, derivado aos microfones dos alunos.

Ainda no que concerne às tecnologias, estas deixam sempre o professor receoso que alguma coisa não corra da melhor forma uma vez que não depende apenas deste. Por exemplo, no caso de falhar a internet, se for numa intervenção presencial, facilmente este problema é contornado, pois professor e alunos estão presentes na mesma sala, se acontecer numa aula por videoconferência os alunos deixam de poder assistir à aula.

As intervenções por videoconferência, na minha opinião, tornam mais difícil as interações entre professor e alunos. O facto de não vermos as expressões faciais dos alunos dificulta a perceção do professor sobre se os alunos estão a perceber ou não os conteúdos. No caso de alguns alunos não estarem a perceber e se não o disseram, o professor não muda a estratégia de ensino e isso pode ser prejudicial para os alunos.

Quando os alunos estão distraídos numa sala de aula comum, numa intervenção presencial, o aluno é facilmente chamado à atenção e poderá voltar a estar atento. Numa sessão por videoconferência, nem sempre podemos verificar se um aluno está distraído e chamá-lo a atenção ainda será mais difícil.

Uma das minhas maiores dificuldades é recorrer aos termos cientificamente corretos. Nesse sentido, as aulas à distância tornam essa dificuldade mais difícil de ultrapassar pois estamos desde casa a falar com um computador, ou seja, é como se estivéssemos num ambiente informal.

Por fim, quero também destacar a inexperiência da investigadora como uma limitação deste estudo. O facto de a investigadora ser inexperiente fez com que, por exemplo, a entrevista não fosse explorada tanto como devia.

### 6.3. Sugestões para futura investigação

Os conhecimentos obtidos através do desenvolvimento deste estudo podem ser ampliados.

Seria pertinente aplicar este estudo em outros anos de escolaridade, para não só avaliar a frequência do tipo de erros cometidos, mas também para analisar a evolução dos alunos com maior detalhe, assim como concluir se também se verificam as conclusões retiradas neste estudo sobre a frequência dos erros cometidos.

Para ajudar os alunos a tentar ultrapassar os seus erros teria sido interessante aplicar o teste em duas fases e/ou o portefólio reflexivo.

Tendo em conta os momentos vividos em consequência do COVD-19 teria também sido importante a criação de uma aplicação. Nesta aplicação poderia ser promovido o trabalho autónomo dos alunos, uma vez que a aplicação teria vídeos, acesso a sites que envolvessem conteúdos matemáticos, como por exemplo "Khan Academy" e a "Escola Virtual" os quais o aluno poderia consultar por forma a colmatar os seus erros. Os alunos poderiam, ainda, submeter as suas resoluções para serem analisadas com detalhe por um professor. Esta aplicação, por exemplo para um aluno que comete um erro de cálculo iria acabar por lhe sugerir que fizesse alguns cálculos e até mesmo mostrar-lhe vídeos de como resolver esses cálculos.

No que concerne a avaliação poderiam ser realizados questionários tanto a alunos como a professores, com o objetivo de explorar melhor este tema que devido ao limitado tempo do estudo não foi possível completar.

Uma das conclusões retiradas da tabela 9 foi a de todos os alunos cometeram erros da subcategoria B2 cometeram erro da subcategoria B3, não sendo despiciente a incidência de erros nesta última categoria. Uma possibilidade de trabalho para uma futura investigação será o de investigar com detalhe se a correlação detetada é de facto real e se esta possível correlação se propaga na análise de erros noutros tópicos matemáticos.

## Referências Bibliográficas


Aires, L. (2015). *Paradigma Qualitativo e Práticas de Investigação Educacional.* Lisboa: Universidade Aberta. Retrieved from: https://www.researchgate.net/publication/320935448_Paradigma_Qualitativo_e_praticas_de_investigacao_educacional_Universidade_Abertaedicao_atualizada Acedido em: 2019-11-27.

Astolfi, J. P. (1999). *El "error", un medio para enseñar.* Sevilla: Diada Editora.

Bello, P. A., Martinez, M. A., & Vargas, E. A. (2017). *Dificultates, Obstáculos y Errores en el Aprendizaje del número entero presentadas en un objeto virtual de aprendizaje.* Bogotá: Universidade Distrital Francisco José de Caldas.

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação.* Porto: Porto Editora. Retrieved from: https://www.academia.edu/6674293/Bogdan_Biklen_investigacao_qualitativa_em_educacao. Acedido em: 2020-03-17.

Boni, V., & Quaresma, S. J. (2005). Aprendendo a entrevistar: como fazer entrevistas em Ciências Sociais. *Revista Eletrônica dos Pós-Graduandos em Sociologia Política da UFSC, 2*(1), 68-80.

Borges, M. C., Miranda, C. H., Santana, R. C., & Bollela, V. R. (2014). Avaliação formativa e feedback como ferramenta de aprendizado na formação de profissionais da saúde. *Medicina, 47*(3), 324-331. Ribeirão Preto: Faculdade de Medicina.

Brum, L. D., & Cury, H. N. (2013). Análise de erros em soluções de questões de algebra: uma pesquisa com alunos do ensino fundamental. *RenCiMa, 4*(1), 45-62.

Dias, C. M. (2012). *Portefólio reflexivo de matemática enquanto instrumento de avaliação reguladora da aprendizagem de alunos do 11.º ano na disciplina de matemática A*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, Instituto de educação, Lisboa, Portugal.

Fernandes, D. (2014). *Avaliação Das Aprendizagens E Políticas Educativas: O difícil Percurso da Inclusão e Da Melhoria.* Universidade de Lisboa, Instituto de Educação. Lisboa: Universidade de Lisboa.

Ferreira, C. A. (2018). Instrumentos de avaliação para a melhoria do ensino e da aprendizagem. *Revista Electrónica de Educação e Psicologia, 8*, 12-17.

Fonseca, J., Carvalho, C., Conboy, J., Salema, H., Valente, M., Gama, A. & Fiúza, E. (2015). Feedback na prática letiva: Uma oficina de formação de professores. *Revista Portuguesa de Educação, 28*(1) 171-199. Retrieved from: https://www.researchgate.net/publication/279736730_Feedback_na_pratica_letiva_Uma_oficina_de_formacao_de_professores. Acedido em: 2019-11-15.

Franchi, L., & Rincón, A. I. (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. *Educere*, *8*(24) 63-71.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y formación en Educación Matemática,* 0(11), 111-132.

Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Retrieved from: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html. Acedido em: 2019-11-15.

Gomes, S., & Pinto, J. (2018). Prática de questões-aula numa perspetiva de avaliação formativa em Matemática. *Medi@ções, 6*(1), 101-116.

Haguette, T. M. (1997). *Metodologias qualitativas na sociologia.* Petrópolis: Vozes.

ME. (2013). *Programa e Metas Curriculares Matemática Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

ME. (2017). *Perfil do Aluno à Saída da Escolaridade Obrigatória.* Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

ME. (2018). *Aprendizagens Essenciais Matemática (7ºano).* Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Meirinhos, M., & Osório, a. (2010). O estudo de caso como estratégia de investigação em educação. *EDUSER: revisata de educação*, *2*(2) 49-65.

Menino, H., & Santos, L. (2004). Instrumentos de avaliação das aprendizagens em Matemática: o uso do relatório escrito, do teste em duas fases e do portefólio no 2º clico do Ensino Básico, *2*, 1-15.

Ministério da Educação. (2018). Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho. *Diário Da República, 1ª Série* - N.º 129 de 6 de julho de 2018), 2928–2943. Retrieved from: https://dre.pt/home/-/dre/115652962/details/maximized. Acedido em: 2019-12-10.

Nagy, M. C., & Buriasco, R. L. (2008). *A análise da produção escrita em matemática: possível contribuiçao.* In: Buriasco, R. L. C. (Org.): Avaliação e educação matemática. Recife: SBEM. .

NCTM. (2000). Principles and Standards for School Mathematics.

Nogaro, A., & Granella, E. (2004). O Erro no Processo de Ensino e aprendizagem. *Revista de Ciências Humanas, 5*(5).

Ornelas, A. (2018). *Feedback e resolução de problemas de matemática: Uma experiência com alunos do 4º ano*. Dissertação de Mestrado, Instituto Politécnico de Setúbal, Escola Superior de Educação.

Orvalho, L. (2012). O portefólio reflexivo como metodologia de ensino, aprendizagem e avaliação na formação dos professores do ensino artístico. Em *Ensino Superior: Inovação e qualidade na docência.* (pp. 5714-5725). Porto: CIIE - Centro de Investigação e Intervenção Educativas.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema, 25,* 105-132. Retrieved from: https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3007/1/06-Ponte(BOLEMA-Estudo%20de%20caso).pdf). Acedido em: 2019-12-10.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

Puerto, S. M., Minnaard, C. L., & Seminara, S. (2004). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación, 38*(1922), 1-13.

Ramos, M. L., & Curi, E. (set/dez de 2014). ANÁLISE DE ERRO EM UMA QUESTÃO SOBRE FUNÇÃO: uma forma de desvendar as dificuldades dos alunos. *Revista de Educação, Ciências e Matemática, 4*(3), 13-24.

Reis, P. (2011). *Observação de Aulas e Avaliação do Desempenho Docente*. Lisboa: Ministério da Educação - Conselho Científico para a Avaliação de Professores.

Ribeiro, C., & Santos, L. (2011). Um professor, um currículo? Um estudo com duas professoras de Matemática do 3.º ciclo. *Revista Portuguesa da Educação*, *24*(2), 159-182.

Ribeiro, E. A. (2008). A perspectiva da entrevista na investigação qualitativa. *Evidência: olhares e pesquisa em saberes educacionais*, *4*(5), 129-148.

Rico, L. (1995). *Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas.* Barcelona, Espanha: Horsori editorial.

Rosa, M. V., & Arnoldi, M. G. (2017). *A entrevista na pesquisa qualitativa: mecanismos para validação dos resultados.* Brasil: Autêntica Editora.

Rosso, A. J., & Berti, N. M. (2010). O erro e o ensino-aprendizagem de matemática na perspetiva do desenvolvimento da autonomia do aluno. *Boletim Gepem, 23*(37), 1005-1035.

Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA 2*(2), 61-74.

Salsa, I. d. (2017). A importância do erro do aluno em processos de ensino e de aprendizagem. *REMATEC*, *12*(26), 86-99.

Santos, L. (2016). A articulação entre a avaliação somativa e formativa, na prática pedagógica: uma impossibilidade ou um desafio? *Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação*, *24*(92), 637-669.

Santos, L. & Dias, S. (2006). Como entendem os alunos o que lhes dizem os professores? A complexidade do feedback.

Santos, L. A., Garcia, F. M., Monteiro, F. T., Lima, J. M., Silva, N. M., Silva, J. C. & Afonso, C. F. (2016). *Orientações metodológicas para a elaboração de trabalhos de investigação.* Lisboa: Instituto Universitário Militar.

Sarmento, M. J. (2011). *O Estudo de Caso Etnográfico em Educação.* Braga: Instituto de Estudos da Criança da Universidade do Minho.

Serrazina, L., Abrantes, P., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica.* Lisboa: Ministério da Educação.

Silva, J. C., Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C. M., & Lopes, I. C. (2004). *Matemática B.* Ministério da Educação. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Silva, P. P., Silva, F. H., & Silva, M. d. (2015). O construtivismo e a experimentação como tendências pedagógicas e metodológicas para o ensino de física moderna. *Interações*, *11*(39), 430-444.

Siyepu, S. W. (2015). Analysis of errors in derivatives of trigonometric functions. *Siyepu International Journal of STEM Education*, 16, 1-16.

Socas, M. (Julho de 2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números - Revista de Didáctica de las Matemáticas, 77*, 5-34.

Socas, M. M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria*. Barcelona: Horsori.

Sousa, A. B. (2005). *Investigação em Educação*. Livros Horizonte.

Spinillo, A. G., Pacheco, A. B., Gomes, J. F., & Cavalcanti, L. (2014). O erro no processo de ensino-aprendizagem da matemática: errar é preciso? *Boletim Gepem (Online)*, 64, 1-15.

Terence, A. C., & Filho, E. E. (2006). *Abordagem quantitativa, qualitativa e a utilização da pesquisa-ação nos estudos organizacionais.* Fortaleza, Brasil: XXVI ENEGEP.

Torre, S. d. (2004). *Aprender de los errores. El tratamiento didático de los errores como estrategias innovadoras.* Buenos Aires (Argentina): Editorial Magisterio del Río de La Plata.

Vale, M. L. (2010). *O erro como ponte para a aprendizagem em Matemática: um estudo com alunos do 7.º ano do ensino básico* . Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Vieira, I. M. (2019). *Avaliar para aprender nas disciplinas de inglês e matemática no ensino secundário.* Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Yin, R. K. (2001). *Estudo de caso: Planejamento e Métodos* (2.ª Edição ed.). Porto Alegre: Bookman.

# 7. Apêndices

## Apêndice I – Plano de aula 7.º Ano de Escolaridade

| | |
|---|---|
| **Domínio geral:** Álgebra. | **Domínio Específico:** Funções: Função de proporcionalidade direta. |
| **Data:** 21 de janeiro de 2020 | **Duração da Aula:** 90 minutos |
| **Ano/Turma:** 7.ºC | **Horário:** 10:10 até 11:40 |
| **Estagiária:** Cristiana Solange Oliveira Amaral | **Lições:** 59 e 60 |

*Sumário:*

- ✓ Função de proporcionalidade direta.
- ✓ Constante de proporcionalidade direta.
- ✓ Resolução de problemas.

*Objetivos específicos/conhecimentos a adquirir:*

- ✓ Definição de função de proporcionalidade direta.
- ✓ Constante de proporcionalidade direta.
- ✓ Representação de funções de proporcionalidade direta;
- ✓ Reconhecer a função de proporcionalidade direta como uma função linear.

*Aprendizagens Essenciais:*

- ✓ Reconhecer uma função em diversas representações.
- ✓ Desenvolver a capacidade de abstração e de generalização, e de compreender e construir argumentos matemáticos e raciocínios lógicos.
- ✓ Exprimir, oralmente e por escrito, ideias matemáticas.
- ✓ Desenvolver confiança nas suas capacidades e conhecimentos matemáticos, e a capacidade de analisar o próprio trabalho e regular a sua aprendizagem.
- ✓ Desenvolver persistência e autonomia.

*Perfil do Aluno:*

- ✓ Transformar a informação em conhecimento.
- ✓ Interpretar informação.
- ✓ Desenvolver processos conducentes à construção de conhecimento.
- ✓ Interagir com tolerância, empatia e responsabilidade e argumentar e aceitar diferentes pontos de vista.
- ✓ Estabelecer relações entre conhecimentos, emoções e comportamentos;
- ✓ Consolidar e aprofundar as competências que já possuem, numa perspetiva de aprendizagem ao longo da vida.

*Conhecimentos prévios:*

- ✓ Noção de grandezas diretamente proporcionais e de constante de proporcionalidade direta;

- ✓ Proporções; extremos, meios e termos de uma proporção; propriedades; regra de três simples;
- ✓ Problemas envolvendo a noção de proporcionalidade direta entre grandezas mutuamente dependentes;
- ✓ Função Linear.

*Material utilizado:*

- ✓ Material de escrita;
- ✓ Computador;
- ✓ Manual adotado pela escola;
- ✓ Projetor;
- ✓ *Power Point*;
- ✓ Vídeo da Escola Virtual sobre a função de proporcionalidade direta.
- ✓ Quadro branco e canetas.

*Metodologia:*

- ✓ Apresentação de um *power point*;
- ✓ Observação de um vídeo, presente na Escola Virtual;
- ✓ Discussão em grupo turma.

*Estrutura Geral:*

A sessão terá 6 momentos:

- ✓ Revisão do conceito de proporção.
- ✓ Resolução de um problema para introdução do conteúdo "Função de proporcionalidade direta".
- ✓ Análise da constante de proporcionalidade direta".
- ✓ Observação de um vídeo da Escola Virtual
- ✓ Resolução de tarefas.
- ✓ Síntese final.

*Desenvolvimento da aula:*

| Tarefas e atividades de aprendizagem | Duração esperada | Atividades dos alunos e possíveis dificuldades | Resposta do professor e aspetos a ter em atenção | Objetivos e avaliação |
|---|---|---|---|---|
| **1.** Introdução: Revisão do conceito de proporção. | min. | • Recordar a noção de razão.<br>• Reconhecer uma proporção.<br>• **Os alunos podem apresentar dúvidas:**<br>  ○ na definição de proporção. | • Questionar a turma sobre os aspetos importantes inerentes ao conteúdo, já aprendido em anos anteriores, proporção.<br>• **Esclarecimento dos alunos:**<br>  ○ A professora deve relembrar o conceito. | • Compreender e consolidar o conceito de proporção.<br>• Comunicar com linguagem matemática correta. |
| **2.** Resolução de um problema para introdução do conteúdo "Função de proporcionalidade direta". | min. | • Interpretação do enunciado, por forma a responder às questões apresentadas.<br>• **Os alunos podem apresentar dúvidas:**<br>  ○ na determinação da expressão analítica.<br>  ○ na compreensão do objetivo da tarefa. | • Esclarecer o enunciado, dando um exemplo mais simples.<br>• **Esclarecimento dos alunos:**<br>  ○ Através da ilustração no quadro, a professora deve tentar elucidar os alunos no âmbito das suas dúvidas. | • Recorrer a linguagem matemática adequada para resolver a tarefa.<br>• Escrever a expressão analítica.<br>• Reconhecer uma função de proporcionalidade direta.<br>• Compreender a importância das funções de |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | proporcionalidade direta no contexto real. |
| **3.** Análise da constante de proporcionalidade direta". | 20 min. | • Mobilizar conhecimentos para entender a diferença entre uma constante de proporcionalidade direta negativa e positiva. | • Analisar, com ajuda da representação gráfica, as duas situações distintas (constante negativa e positiva). | • Recorrer a linguagem matemática adequada. |
| **4.** Observação de um vídeo da Escola Virtual. | 10 min. | • Observação de vídeo, para ajudar a consolidar os conhecimentos.<br>• Utilizar e comunicar a linguagem matemática correta em discussão grupo-turma. | • A professora deve apelar à discussão do vídeo observado. | • Consolidar conhecimentos adquiridos durante a sessão.<br>• Comunicar com linguagem matemática correta. |
| ***5.*** Resolução de tarefas. | 20 min. | • Interpretar o enunciado, por forma a ter consciência das noções inerentes à Função de proporcionalidade direta que são necessárias aplicar.<br>• **Os alunos podem apresentar dúvidas:** | • A professora deve ir percorrendo os lugares e ajudando os alunos a perceber os enunciados.<br>• Realçar a importância das funções de proporcionalidade direta.<br>• **Esclarecimento dos alunos:** | • Reconhecer a importância em contexto real das funções de proporcionalidade direta.<br>• Reconhecer uma função de proporcionalidade direta. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | ○ a reconhecer uma função de proporcionalidade direta.<br>○ a calcular e interpretar a constante de proporcionalidade direta. | ○ Ajudar os alunos a completarem o raciocínio. | • Calcular e interpretar a constante de proporcionalidade direta.<br>• Recorrer a linguagem matemática adequada. |
| **6.** Síntese Final | 10 min. | • Discussão sobre os conhecimentos adquiridos anteriormente. | • Orientar a discussão em grupo turma dos alunos por forma a esclarecer possíveis duvidas existentes. | • Sintetizar os conceitos de modo a prosseguir nos conteúdos programáticos. |

**Observações:**

- ✓ 4. - O vídeo da Escola virtual que se refere acima pode-se encontrar em:

https://lmsev.escolavirtual.pt/playerteacher/resource/527505/L?se=2387&seType=&coId=91966

- ✓ 5. – As tarefas a desenvolver nesta sessão serão as tarefas 6, 2, páginas 80 e 81, do manual adotado pela escola (no caso de haver tempo).

**Tarefa para colar no caderno dos alunos:**

A Joana quer fazer uma tarte de maça. Não tinha maças em casa, foi comprar.

Ao chegar ao supermercado observou a placa que continha o preço das maças e começou a fazer cálculos. Sabe-se que o preço a pagar depende do peso.


1. Obteve alguns valores como os que se apresentam na tabela seguinte. Ajuda-a a descobrir os valores em falta.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Maça** $\boldsymbol{kg}$ | | $\mathbf{1,5}$ | **2** | |
| **Preço** € | **2** | | | **9** |

2. Escreve a expressão analítica que permite escrever o custo em função do peso das maças.

3. Será $f$ é uma função de proporcionalidade direta?

## Apêndice II – Plano de aula 10.º Ano de Escolaridade

| | |
|---|---|
| **Domínio geral:**<br>Funções e gráficos – Generalidades. Funções Polinomiais. | **Domínio Específico:**<br>• Função, gráfico e representação gráfica da função cúbica;<br>• Generalidades acerca de funções reais de variável real;<br>• Estudo intuitivo de propriedades das funções quadráticas e cúbicas e dos seus gráficos;<br>• Estudo intuitivo de propriedades das funções cúbicas e dos seus gráficos. |
| **Data:** 6 de dezembro de 2019 | **Duração da Aula:** 90 minutos (45 + 45) |
| **Ano/Turma:** 10.ºH | **Horário:** 11:50 até 13:20 |
| **Estagiária:** Cristiana Solange Oliveira Amaral | **Lições:** 65 e 66 |

*Sumário:*

- ✓ Função cúbica.
- ✓ Famílias de funções cúbicas.
- ✓ Zeros e Sinal da Função cúbica.
- ✓ Transformações de funções;
- ✓ Resolução de exercícios.

*Objetivos específicos/conhecimentos a adquirir:*

- ✓ Analisar gráficos de funções cúbicas;
- ✓ Reconhecer uma função cúbica;
- ✓ Utilizar a calculadora gráfica no estudo de funções cúbicas;
- ✓ Fazer o estudo analítico de funções cúbicas;
- ✓ Interpretar e resolver problemas reais, envolvendo o estudo de funções cúbicas.

*Aprendizagens Essenciais:*

- ✓ Reconhecer, representar e interpretar graficamente funções reais de variável real.
- ✓ Reconhecer propriedades das funções e dos seus gráficos, tanto a partir de um gráfico particular como usando calculadora gráfica, nomeadamente domínio, contradomínio e monotonia.
- ✓ Analisar e compreender os efeitos das mudanças de parâmetros com particular incidência nos gráficos da família das funções cúbicas.
- ✓ Reconhecer e interpretar graficamente a relação entre o gráfico de uma função, definida pela expressão f(x), e os gráficos das funções a.f(x), f(a.x), f(x+a) e f(x)+a ,com a positivo ou negativo.

*Perfil do Aluno:*

- ✓ Transformar a informação em conhecimento.
- ✓ Interpretar informação.

- ✓ Desenvolver processos conducentes à construção de produtos e de conhecimento, usando recursos diversificados.
- ✓ Pensar de modo abrangente e em profundidade, de forma lógica, observando, analisando informação, experiências ou ideias, argumentando com recurso a critérios implícitos ou explícitos, com vista à tomada de posição fundamentada.
- ✓ Consolidar e aprofundar as competências que já possuem, numa perspetiva de aprendizagem ao longo da vida.
- ✓ Manipular e manusear materiais e instrumentos diversificados para imaginar e visualizar produtos.

*Conhecimentos prévios:*

- ✓ Noção de domínio e contradomínio;
- ✓ Interpretação e resolução de problemas em contexto real;
- ✓ Representação de funções graficamente;
- ✓ Noção de zeros e extremos de uma função;
- ✓ Noção de função quadrática.

*Material utilizado:*

- ✓ Material de escrita;
- ✓ Computador;
- ✓ Projetor;
- ✓ *Power Point*;
- ✓ Manual adotado pela escola;
- ✓ *Applet interativo*;
- ✓ Calculadora gráfica;
- ✓ Quadro branco e canetas.

*Metodologia:*

- ✓ Apresentação de um *power point*.
- ✓ Aplicação de um *Applet* Interativo.
- ✓ Ficha de sintetização de conceitos sobre as transformações de funções.
- ✓ Discussão em grupo turma.

*Estrutura Geral:*

A sessão terá 5 momentos:

- ✓ Introdução aos conteúdos inerentes à Função Cúbica.
- ✓ Análise dos parâmetros $a, b, c$ e $d$, com $a \neq 0$ da função $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
- ✓ Resolução e correção de uma tarefa do manual.
- ✓ Estudo das transformações de funções.
- ✓ Sintetização de conceitos através da discussão em grupo-turma.

*Desenvolvimento da aula:*

| Tarefas e atividades de aprendizagem | Duração esperada | Atividades dos alunos e possíveis dificuldades | Resposta do professor e aspetos a ter em atenção | Objetivos e avaliação |
|---|---|---|---|---|
| **1.** Introdução aos conteúdos inerentes à Função Cúbica. | 15 min. | • Os alunos devem estudar a função cúbica, nomeadamente, devem entender que se trata de uma função do 3.º grau e devem ainda estudar os zeros e sinal deste tipo de função. | • A docente deverá estimular os alunos por forma a levar à discussão em grupo turma, sobre os conteúdos inerentes à função cúbica. | • Compreender a diferença entre função cúbica e função quadrática.<br>• Consolidar conhecimentos sobre zeros e sinal de uma função cúbica.<br>• Utilizar linguagem matemática adequada. |
| **2.** Análise dos parâmetros $a, b, c$ e $d$, com $a \neq 0$ da função $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. | 20 min. | • Atender sempre a uma linguagem clara e matematicamente correta.<br>• Entender o que acontece quando se altera um dos parâmetros.<br>• **Os alunos podem apresentar dúvidas:**<br>  ○ na visualização das diferentes funções. | • Com a ajuda do *applet* interativo e através da manipulação do mesmo poderá ser mais fácil a visualização das funções com diferentes parâmetros.<br>• **Esclarecimento dos alunos:**<br>  ○ Com recurso ao *applet,* criado em *GeoGebra*, *e* à *sua* manipulação. | • Utilizar linguagem adequada sobre os conteúdos programáticos.<br>• Compreender os diferentes parâmetros $a, b, c$ e $d$, quando $a \neq 0$.<br>• Estudar o sinal, zeros, domínio, contradomínio, continuidade, paridade e |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | monotonia de algumas funções quadráticas. |
| **3.** Resolução e correção de uma tarefa do manual. | 15 min | • Utilizar e comunicar a linguagem matemática correta em discussão grupo-turma.<br>• Aplicar corretamente os diversos conteúdos matemáticos.<br>• **Os alunos podem apresentar dúvidas:**<br>  ○ na resolução das tarefas. | • A professora deve apelar à discussão grupo turma.<br>• **Esclarecimento dos alunos:**<br>  ○ A professora deve explicar todas as etapas elaboradas na resolução da tarefa. | • Consolidar conteúdos lecionados anteriormente.<br>• Comunicar com linguagem matemática adequada. |
| **4.** Estudo das transformações de funções. | 30 min | • Em discussão grupo turma os alunos deverão juntamente com a docente observar o que aconteceu em cada uma das funções apresentadas. Assim sendo devem ser concluídas as transformações de funções. | • Com a ajuda do *power point* levar os alunos a comparar duas funções.<br>• Concluir que ocorreu uma transformação numa das funções para obter a outra. | • Assimilar as diversas transformações de funções, nomeadamente, translação (vertical e horizontal), dilatação (vertical e horizontal) e simetrias (em relação ao eixo das ordenadas e em relação ao eixo das abcissas). |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **5.** Sintetização de conceitos através da discussão em grupo-turma. | 10 min. | • Compreender os domínios lecionados através da interação em grupo turma.<br>• Utilizar e comunicar em linguagem matematicamente correta na discussão. | • Questionar a turma sobre os aspetos importantes a reter de cada um dos conteúdos lecionados anteriormente. | • Comunicar de forma clara os seus raciocínios e ideias.<br>• Reconhecer a função cúbica como um polinómio do 3.º grau.<br>• Determinar zeros e sinal de uma função cúbica.<br>• Identificar cada uma das transformações de funções.<br>• Utilizar linguagem matematicamente correta. |

**Observações:**

- ✓ 3. - A tarefa a que se refere é a 71 da página 200 do manual adotado pela escola.
- ✓ 4. – Para ajudar a sintetizar os conteúdos relacionados com as transformações de funções é fornecida aos alunos uma síntese sobre este tema.

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

**AGRUPAMENTO DE ESCOLAS**

**10º Ano**

**Funções e gráficos – generalidades. Funções polinomiais**

**Disciplina de Matemática B** **dezembro/2019**

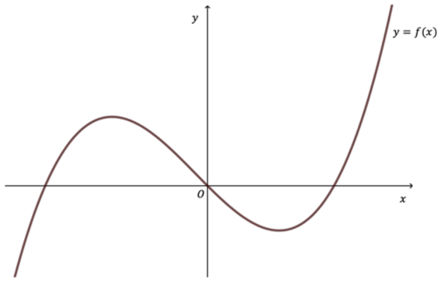
Nome: ______________________________________________ N.º ____ Turma: ____

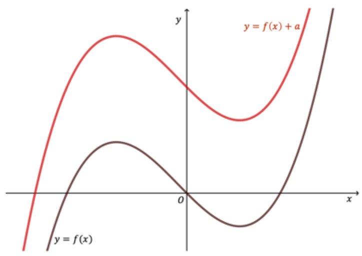
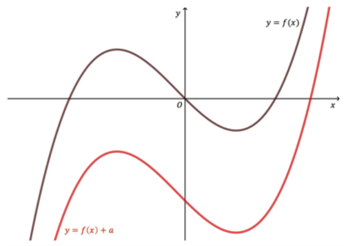
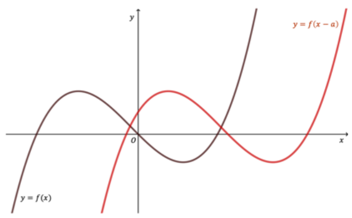
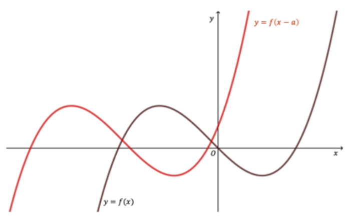
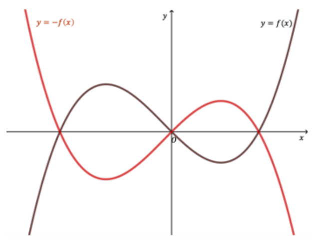
## TRANSFORMAÇÕES DE FUNÇÕES

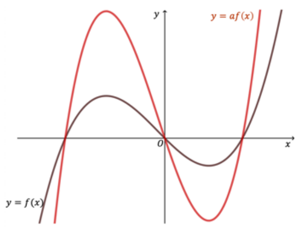
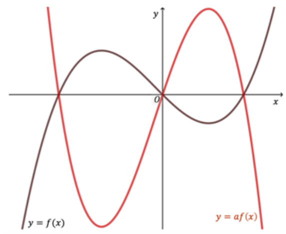
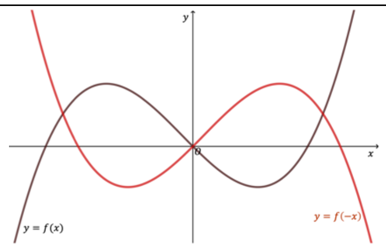
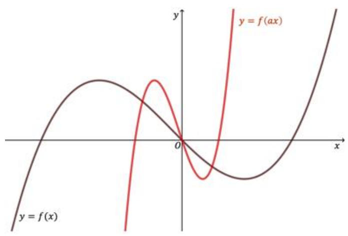
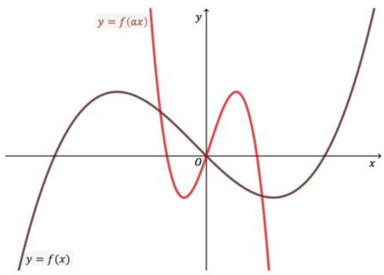
A seguir podemos encontrar um resumo das principais transformações que ocorrem nas funções.

Consideremos uma função $f$ que tem a seguinte representação gráfica, considera que $a \neq 0$.

Função $y = f(x)$




| | | |
|---|---|---|
| Função $y = f(x) + a$ **Translação na Vertical** (Deslocamento de $f$ $a$ unidades na Vertical) | $a > 0$  | $a < 0$  |
| Função $y = f(x - a)$ **Translação na Horizontal** (Deslocamento de $f$ $a$ unidades na Horizontal) | $a > 0$  | $a < 0$  |
| Função $y = -f(x)$ **Simetria em Relação ao eixo das abcissas** |  | |

| | | |
|---|---|---|
| Função $y = af(x)$<br>**Dilatação/Compressão na vertical** | $a > 0$<br><br> | $a < 0$<br><br> |
| ***Observação:***<br>✓ No caso de $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$:<br>o Se $a > 1$, existe uma **dilatação** na **vertical**;<br>o Se $0 < a < 1$, existe uma **compressão** na **vertical**.<br>✓ No caso de $\boldsymbol{a} < \mathbf{0}$:<br>o Começa-se por efetuar uma simetria do gráfico em relação ao eixo das abcissas, em seguida:<br>▪ Se $\|a\| > 1$, existe uma **dilatação** na **vertical**;<br>▪ Se $\|a\| < 1$, existe uma **compressão** na **vertical**. | | |
| Função $y = f(-x)$<br>**Simetria em Relação ao eixo das ordenadas** | <br> | |
| Função $y = f(ax)$<br>**Dilatação/Compressão na horizontal** | $a > 0$<br><br> | $a < 0$<br><br> |

***Observação:***

- ✓ No caso de $\boldsymbol{a > 0}$:
  - Se $a > 1$, existe uma **compressão** na **horizontal**;
  - Se $0 < a < 1$, existe uma **dilatação** na **horizontal**.
- ✓ No caso de $\boldsymbol{a < 0}$:
  - Começa-se por efetuar uma simetria do gráfico em relação ao eixo das ordenadas, em seguida:
    - Se $|a| > 1$, existe uma **compressão** na **horizontal**;
    - Se $|a| < 1$, existe uma **dilatação** na **horizontal**.

**Apêndice III – Plano de aula 11.º Ano de Escolaridade**

| **Ano:** 11.º | **Turma:** F | **Data:** 04 de maio de 2020 | **Horário:** 11h até às 12h |
|---|---|---|---|

**Estagiária:** Cristiana Solange Oliveira Amaral

**Sumário:**

- Sintetização de conteúdos abordados em aulas anteriores.
- Aplicações das taxas de variação: taxa de variação e monotonia.
- Resolução de exercícios de consolidação.

**Objetivos específicos / Conhecimentos a adquirir:**

- Utilizar a calculadora gráfica para encontrar a taxa de variação a partir de uma função;
- Reconhecer numérica e graficamente a relação entre o sinal da taxa de variação e a monotonia de uma função.

**Tema:** Problemas de otimização: Aplicações das taxas de variação.

**Tópicos:**

- Taxa de Variação e monotonia.

**Aprendizagens essenciais:**

- Relacionar a forma do gráfico de uma função com os sinais dos declives das retas tangentes;
- Relacionar o gráfico de uma função com o gráfico dos declives das retas tangentes ao gráfico;
- Reconhecer numérica e graficamente a relação entre o sinal da taxa de variação e a monotonia de uma função;
- Resolver problemas de modelação matemática, no contexto da vida real.

**Perfil do Aluno:**

- Transformar a informação em conhecimento;
- Desenvolver processos conducentes à construção de conhecimento;
- Pensar de modo abrangente e em profundidade, de forma lógica, observando, analisando informação, experiências ou ideias;
- Consolidar e aprofundar as competências que já possuem, numa perspetiva de aprendizagem ao longo da vida.

| |
|---|
| **Conhecimentos prévios:**<br>♦ Noção de reta tangente a um gráfico;<br>♦ Inclinação de uma reta;<br>♦ Determinação do sinal de uma função;<br>♦ Noção de taxa média de variação;<br>♦ Interpretação da taxa média de variação;<br>♦ Representação geométrica da taxa média de variação;<br>♦ Noção de taxa de variação;<br>♦ Interpretação da taxa de variação;<br>♦ Representação geométrica da taxa de variação. |
| **Material utilizado:**<br>♦ Material de escrita;<br>♦ Computador com acesso à internet;<br>♦ *Power Point*;<br>♦ Manual adotado pela escola;<br>♦ Calculadora Gráfica. |
| **Metodologia:**<br>♦ Apresentação de um *Power Point*;<br>♦ Discussão em grupo turma;<br>♦ Manipulação do *Geogebra*;<br>♦ Utilização da calculadora gráfica. |
| **Estrutura da aula:**<br>A sessão terá 3 momentos:<br>**1.** Revisão de conteúdos abordados em aulas anteriores;<br>**2.** Conclusão da relação entre o sinal da taxa de variação e a monotonia de uma função<br>**3.** Realização da tarefa 1, página 158, manual adotado pela escola. |

**Avaliação das aprendizagens:**

Para avaliação das aprendizagens será realizada a tarefa 1 da página 158 (manual adotado pela escola) e através da discussão grupo-turma (3.º Momento da sessão).

**Desenvolvimento da aula:**

♦ **Primeira parte da sessão** (Duração de **10** minutos):

Relembrar os conteúdos variação, taxa média de variação e taxa de variação, com ajuda do *Power Point* e com a demonstração de exemplos, atendendo a uma linguagem clara e matematicamente correta.

Não é esperado que os alunos coloquem dúvidas uma vez que este momento da aula inclui-se na parte síncrona da aula. A aula síncrona surgiu na consequência das aulas por videochamada, desta forma, os alunos nesta parte da aula não devem fazer questões.

♦ **Segunda parte da sessão** (Duração de **20** minutos):

Esta segunda parte da sessão ainda diz respeito à aula síncrona, sendo o principal objetivo concluir a monotonia de uma função a partir da taxa de variação.

A partir do exemplo estabelecido, ou seja, a partir da função $f(x) = x^3 - 7x^2 + 8x + 6$ e através da taxa de variação da função $f$, ou seja, através da derivada da função $f$, com a ajuda da calculadora gráfica e da manipulação do *Geogebra*, deve ser concluído o quadro de sinal da função derivada de $f$, $f'$ e, por conseguinte, a monotonia da função $f$.

♦ **Terceira parte da sessão** (Duração de **30** minutos):

Esta parte da sessão é dedicada à realização da tarefa 1, página 158, manual adotado pela escola. Os alunos devem em discussão grupo turma realizar a tarefa proposta.

Caso existam dúvidas é nesta parte da sessão que devem ser colocadas. Podem surgir dúvidas relativamente aos comandos da calculadora gráfica, dessa forma, a professora deve a partir da calculadora instalada no computador partilhar a tela para e realizar todos os passos necessários para que, dessa forma, os alunos possam visionar e aprender os comandos necessários.

**Apêndice IV – Autorização do Encarregado de Educação de Dados Pessoais**

# DECLARAÇÃO DE AUTORIZAÇÃO DE DADOS PESSOAIS

**Nome do aluno:** ______________________________________________________________

**Ano de escolaridade**: _______ **Turma:** _____

(Selecione a opção pretendida)

☐ **Autorizo** a utilização dos dados pessoais do meu educando no âmbito das atividades escolares desenvolvidas pelas Professoras Estagiárias de Matemática. Consinto que os trabalhos do meu educando sejam fotografados, e que as suas produções sejam alvo de estudo empírico. No entanto, **não consinto** que a identidade do meu educando seja divulgada nem que seja fotografado.

☐ **Não autorizo** a utilização dos dados pessoais do meu educando no âmbito das atividades escolares desenvolvidas pelas Professoras Estagiárias de Matemática. **Não consinto** com a utilização de qualquer material produzido pelo meu educando.

___ de outubro de 2019

______________________________________________________________

(Assinatura do Encarregado de Educação)

**Apêndice V – Teste escrito de avaliação de conhecimentos – 3 de dezembro 2019**

Em seguida estão apresentadas algumas das questões que fizeram parte do 2.º Teste escrito de avaliação de conhecimentos realizado por alunos do 7.ºano de escolaridade.

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

**AGRUPAMENTO DE ESCOLAS**

| **2.ª FICHA DE AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA**<br>Duração: 90 minutos<br>**7.º Ano – Turma C** **Data: ___/___/2019** |
|---|
| **Nome:** ______________________________ **N.º:** ____ |
| **Classificação:** __________ **Professor:** ______________ **Encarregado de Educação** ____________ |

> Nas questões de escolha múltipla seleciona apenas a opção correta.
>
> Nas restantes questões do teste, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.
>
> Não é permitido o uso de calculadora nem de corretor.

**1.** Os passos de **I** a **IV** apresentam o procedimento seguido pela Marta na simplificação da expressão numérica: $-(-1)-(+2)-(-5)+(+1)$.

Considera a sua resolução.

| | |
|---|---|
| $+(+1)+(-2)+(+5)+(+1)$ | **I** |
| $1-2+5+1$ | **II** |
| $1+5+1$ | **III** |
| $7$ | **IV** |

Seleciona a opção que apresenta o erro da Marta na simplificação da expressão numérica.

**(A)** I **(B)** II **(C)** III **(D)** IV

**2.** A turma da Marta foi visitar o centro cultural de congressos de Aveiro. Ao longo da viagem foi registando a fração do trajeto percorrido, para verificar que cada vez estava mais perto do seu destino. Os valores registados pela Marta, em função das etapas percorridas, apresentam-se na figura seguinte.

No seu registo, a Marta considerou 3 etapas.

| 1.ªetapa | 2.ªetapa | 3.ª etapa |
|---|---|---|
| $\frac{2}{5}$ | $\frac{7}{20}$ | $\frac{1}{4}$ |

**2.1.** O que representa a expressão $1-\frac{2}{5}$ no contexto do problema?

**2.2.** Em qual das etapas a distância percorrida foi maior?

**2.3.** À saída da escola, o professor de Matemática da Marta disse que teriam de percorrer $5 \times \left(\frac{1}{5} + 10 : \frac{1}{2}\right) \times 9$ metros.

Determina a que distância, em metros, se encontra a escola da Marta em relação ao centro cultural de congressos de Aveiro.

**3.** A prima da Marta tentou resolver a expressão numérica seguinte

$$\frac{4}{5} \times \left(\frac{2}{3} : 4 - \frac{1}{12}\right) + 7$$

e obteve um número inteiro negativo. Concordas com a prima da Marta?
Apresenta todos os cálculos para responderes à questão.

**4.** Qual das seguintes afirmações é f**alsa**?

(A) O valor absoluto de um número nunca é igual ao próprio número.

(B) O cubo de qualquer número inteiro negativo é um número negativo.

(C) O zero é o elemento absorvente da multiplicação.

(D) Um quadrado perfeito é um número natural que pode ser representado pelo quadrado de um número natural.

Seleciona a opção correta.

**5.** **Calcula** o valor numérico das expressões, utilizando sempre que possível as regras das operações com potências.

**5.1.** $|-1| + 8^5 : 4^5 + 2 \times (-5)$

**5.2.** $(-6)^{12} : 3^{12} : (-2)^9$

**5.3.** $-(-3)^2 - \sqrt{64} - 5^2 \times (-1)^{15}$

**5.4.** $\sqrt{2{,}25} \times \left(5 - \sqrt{4 \times 3 - 3}\right)$

**6.** Completa a expressão numérica $(11^2)^{\boldsymbol{Y}} : \boldsymbol{W}^5 - \sqrt{4} = 9$ com os valores em falta nos espaços onde se encontram as letras Y e W, por forma a obteres uma igualdade verdadeira.

**(A)** Y=6 e W=4 **(B)** Y=3 e W=11

**(C)** Y=3 e W=6 **(D)** Y=3 e W=3

Seleciona a opção correta.

**7.** O grupo de amigos da Marta decidiu comprar gomas para oferecer à Marta no seu aniversário.

- A **Teresa** comprou $\left[(-2)^4 - \sqrt{100}\,\right]$ gomas.
- O **Luís** comprou $\left(\sqrt{36} + \sqrt{9}\right)$ gomas.
- O **Pedro** comprou $\left(\sqrt{4} + 2 \times \sqrt{16}\right)$ gomas.
- O **Vasco** comprou $\left(\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{16}} + 2\right)$ gomas.

Identifica qual dos amigos comprou mais gomas e qual comprou menos gomas para o aniversário da Marta. Apresenta os cálculos que efetuares.

**8.** Observa o terreno da casa da Marta, em que as duas zonas do terreno, agrícola e de habitação, **zona A** e **zona H**, respetivamente, são quadradas.


**8.1.** Sabendo que a área total do terreno é 481 $m^2$ e que a zona A tem 256 $m^2$, determina as dimensões do terreno da casa da Marta, ou seja, da **zona H,** zona habitacional.

**8.2.** O comprimento da parte que liga a zona agrícola à zona de habitação é de 3 $m$. Quantos metros de rede deve comprar o pai da Marta para vedar os dois terrenos mantendo esse espaço aberto? (não considerar o lado que une as duas zonas do terreno da Marta)

**9.** Os investigadores de uma revista americana descobriram que existem 5 173 000 000 000 células no corpo de um ser humano.

**9.1.** Qual das opções representa o número de células existentes no corpo humano escrito em notação científica?

**(A)** $5173 \times 10^{12}$ **(B)** $51{,}73 \times 10^{11}$

**(C)** $5{,}173 \times 10^{12}$ **(D)** $5173 \times 10^{9}$

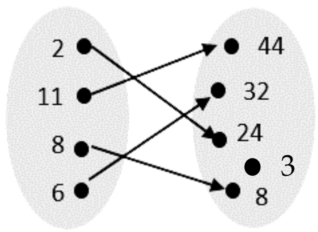
**9.2.** Quantas células existem no total no corpo de cinco pessoas? Apresenta os cálculos que efetuares e o resultado escrito em **notação científica**.

**10.** Considera as correspondências que a seguir se apresentam.

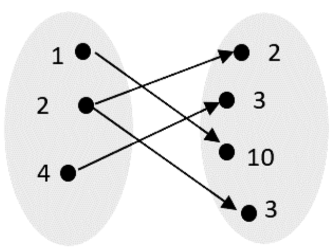
**I**

| **X** | 2 | 6 | 8 | 11 |
|---|---|---|---|---|
| **Y** | 8 | 24 | 32 | 44 |

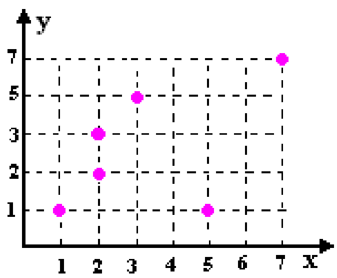
**II**




**III**




**IV**




**10.1.** Qual das opções permite identificar as correspondências que designam funções?

**(A)** I e IV **(B)** II e III

**(C)** III e IV **(D)** I e II

Seleciona a opção correta.

**10.2.** Verifica se as funções selecionadas na questão anterior são iguais.

**10.3.** Indica qual é o objeto que tem por imagem 24 na correspondência II.

**11.** Considera a função $f: A \longrightarrow B$, com

- $A = \{a, b, c\ , d, e\}$
- $B = \left\{0, (-1)^2, \sqrt{4},\ \frac{2}{5}, 5, 100\right\}$

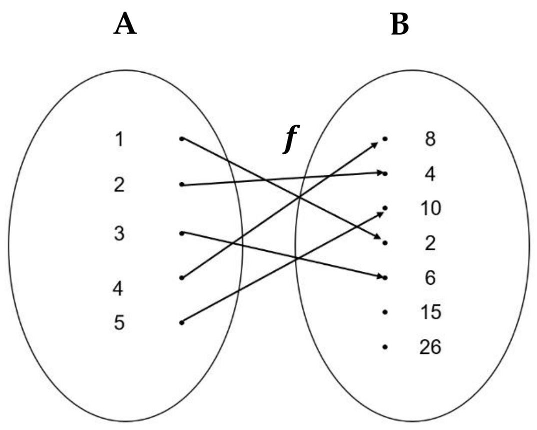
Como se designa $f$ ?

**(A)** Função numérica **(B)** Função numérica de variável numérica

**(C)** Função de variável numérica **(D)** Função não numérica

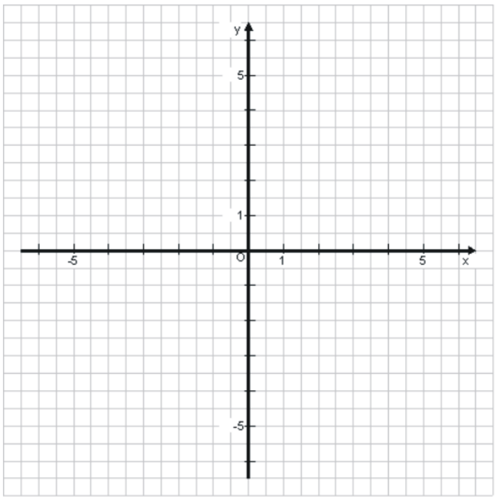
Seleciona a opção correta.

**12.** Considera as funções $f$ e $g$, representadas a partir do diagrama de setas e do gráfico que se seguem, respetivamente.




$G_g = \{(1,2), (3,4), (5,-2), (-1,3)\}$

**12.1.** Representa num referencial cartesiano a função $g$.




**12.2.** Indica o domínio e o contradomínio da função $g$.

**12.3.** Verifica se o contradomínio e o conjunto de chegada da função $f$ são iguais. Justifica a tua resposta.

**12.4.** Determina a expressão analítica da função $f$.

**12.5.** Completa os espaços em branco.

**(A)** $f(5) =$ _____  **(B)** $f($____$) = 8$

**(C)** $g($___$) = 3$  **(D)** $g(1) =$ ____

**12.6.** Considera a experiência aleatória que consiste em escolher um ponto do conjunto A da função $f$. Achas que é mais provável que o número escolhido seja par ou ímpar? Justifica a tua resposta.

**12.7.** Atenta a experiência aleatória que consiste em escolher um par ordenado do gráfico da função $g$. Quantas são as possibilidades de escolher um **par ordenado** cujos números sejam ambos ímpares?

**FIM**

| Quadrados Perfeitos | |
|---|---|
| $\mathbf{10^2}$ | 100 |
| $\mathbf{11^2}$ | 121 |
| $\mathbf{12^2}$ | 144 |
| $\mathbf{13^2}$ | 169 |
| $\mathbf{14^2}$ | 196 |
| $\mathbf{15^2}$ | 225 |

## Cotações

| Item | 1 | 2.1 | 2.2 | 2.3 | 3 | 4 | 5.1 | 5.2 | 5.3 | 5.4 | 6 | 7 | 8.1 | 8.2 | Total: 100 pontos |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cotação | 4 | 3 | 3 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 6 | 3 | 4 | |
| Item | 9.1 | 9.2 | 10.1 | 10.2 | 10.3 | 11 | 12.1 | 12.2 | 12.3 | 12.4 | 12.5 | 12.6 | 12.7 | | |
| Cotação | 4 | 3 | 4 | 2 | 2 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 2 | 2 | | |

## Apêndice VI – Questões sobre Funções T1 (Observações) – 3 de dezembro de 2019

Posteriormente expõem-se cada uma das questões sobre funções do teste de avaliação de conhecimentos realizado a 3 de dezembro de 2019, assim como a respetiva solução esperada e os objetos e processos.

❖ **Enunciado 10.**

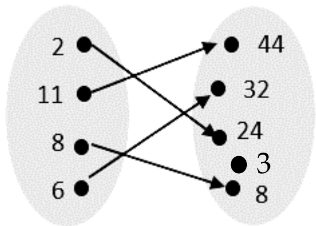
♦ **Questão 10.1.**

Considera as correspondências que a seguir se apresentam.

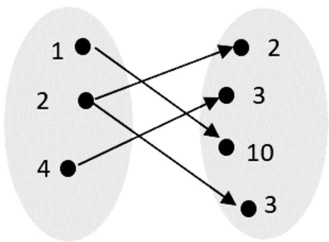
**I**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **X** | 2 | 6 | 8 | 11 |
| **Y** | 8 | 24 | 32 | 44 |

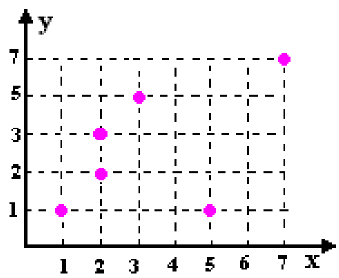
**II**




**III**




**IV**




Qual das opções permite identificar as correspondências que designam funções?

**(A)** I e IV

**(B)** II e III

**(C)** III e IV

**(D)** I e II

*Seleciona a opção correta.*

**Solução esperada:**

∴ Opção correta: **(D)** I e II.

**Objetos e processos:**

Espera-se que o aluno selecione a opção **(D)**. Pretende-se que o aluno saiba reconhecer uma função através das diversas representações, nomeadamente, gráficos cartesianos, expressões analíticas, tabelas, diagramas de setas e gráficos.

A questão não exige o raciocínio do aluno para chegar a resposta correta, assim sendo, não será pertinente analisar as respostas dos alunos neste estudo.

- **Questão 10.2.**

Verifica se as funções selecionadas na questão anterior são iguais.

**Solução esperada:**

∴ Não são funções iguais.

A imagem do objeto 2 na correspondência I é 8, enquanto na correspondência II a imagem do objeto 2 é 24.

**Objetos e processos:**

A solução que se espera requer que o aluno saiba reconhecer quando uma correspondência é uma função, assim como saiba distinguir objeto de imagem. Pretende-se ainda que o aluno saiba identificar duas funções iguais. Importa referir que nesta questão serão analisadas as respostas dos alunos que responderam corretamente à questão anterior (questão 10.1.).

- **Questão 10.3.**

Indica qual é o objeto que tem por imagem 24 na correspondência II.

**Solução esperada:**

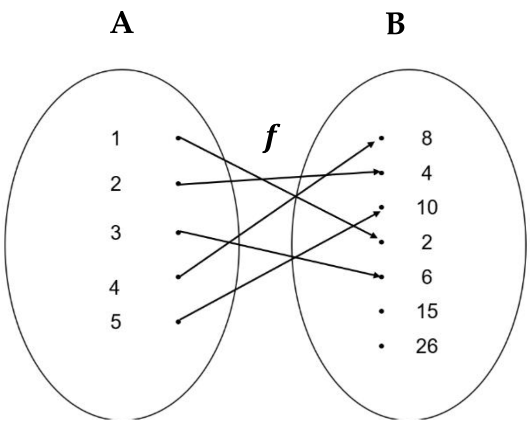
∴ O objeto que tem por imagem 24 na correspondência II é o objeto 2.

**Objetos e processos:**

A solução esperada é muito direta, o aluno necessita saber o que é um objeto e o que é uma imagem, nesse sentido, terá também de saber o que é o domínio, contradomínio e conjunto de chegada de uma função.

- **Enunciado 12.**

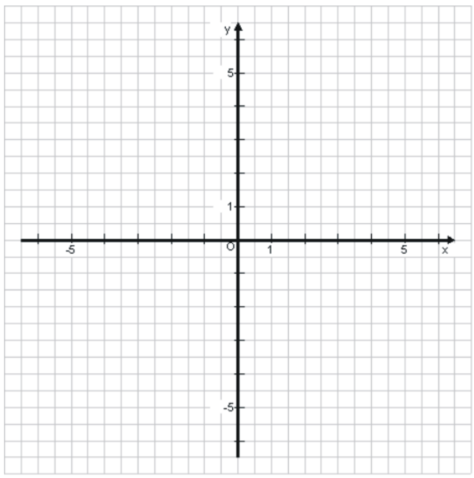
Considera as funções $f$ e $g$, representadas a partir do diagrama de setas e do gráfico que se seguem, respetivamente.




$G_g = \{(1,2), (3,4), (5,-2), (-1,3)\}$

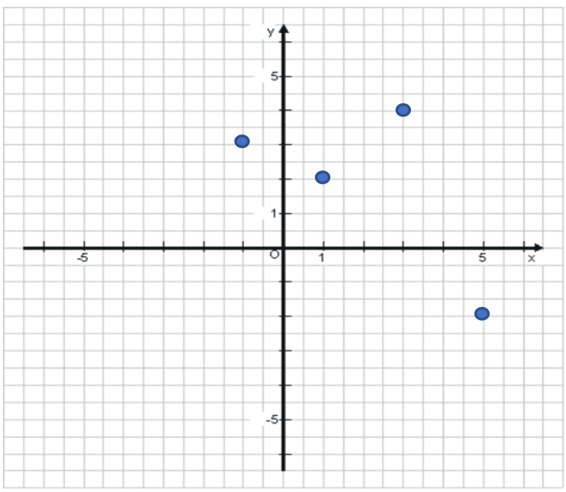
♦ **Questão 12.1.**

Representa num referencial cartesiano a função $g$.




**Solução esperada:**

É esperado que os alunos desenhem os pontos no gráfico como a figura que se apresenta abaixo.



**Objetos e processos:**

Os alunos devem saber assinalar, a partir das coordenadas, os pontos no referencial cartesiano, nesse sentido, todos os conteúdos presentes em questões anteriores têm de estar assimilados.

- **Questão 12.2.**

Indica o domínio e o contradomínio da função $g$.

**Solução esperada:**

∴ Domínio: $D = \{-1, 1,3,5\}$ e Contradomínio: $D' = \{-2, 2,3, 4\}$

**Objetos e processos:**

Espera-se que os alunos identifiquem o respetivo domínio e contradomínio da função solicitada.

- **Questão 12.3.**

Verifica se o contradomínio e o conjunto de chegada da função $f$ são iguais. Justifica a tua resposta.

**Solução esperada:**

∴ O contradomínio e o conjunto de chegada da função $f$ não são iguais.

Contradomínio: $\{2; 4; 6; 8; 10\}$

Conjunto de chegada: $\{2; 4; 6; 8; 10; 15; 26\}$

**Objetos e processos:**

Os alunos devem saber distinguir conjunto de chegada de contradomínio, assim como devem saber interpretar diagramas de setas.

- **Questão 12.4.**

Determina a expressão analítica da função $f$.

**Solução esperada:**

∴ Expressão analítica: $f(x) = 2x$

**Objetos e processos:**

A solução esperada pretende obter uma representação algébrica da função solicitada, mais precisamente a expressão analítica.

- **Questão 12.5.**

Completa os espaços em branco.

**(A)** $f(5) = \_\_\_\_$ **(B)** $f(\_\_\_\_) = 20$

**(C)** $g(\_\_\_) = 9$ **(D)** $g(1) = \_\_\_\_$

**Solução esperada:**

**(A)** $f(5) = 10$ **(B)** $f(4) = 8$

**(C)** $g(-1) = 3$ **(D)** $g(1) = 2$

**Objetos e processos:**

A solução esperada pretende que o aluno faça uma interpretação da representação e a partir dos objetos/imagens deve determinar as imagens/objetos correspondentes.

**Apêndice VII – Teste escrito de avaliação de conhecimentos – 14 de fevereiro 2020**

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS

## 3.ª FICHA DE AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA

Duração: 90 minutos

**7.º Ano – Turma C** **Data:** ___/___/2020

**Nome:** ______________________________________________ **N.º:** ____

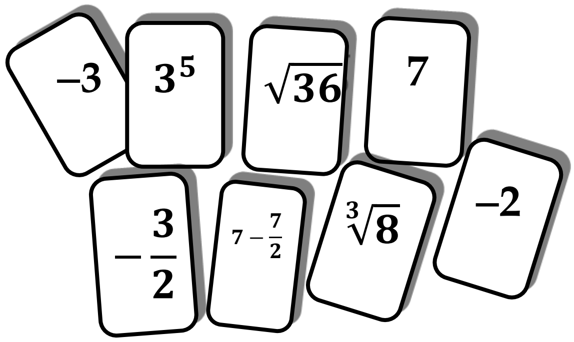
**Classificação:** ____________ **Professor:** ________________ **Encarregado de Educação** ______________

Nas questões de escolha múltipla seleciona apenas a opção correta.

Nas restantes questões do teste, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.

Não é permitido o uso de calculadora nem de corretor.

**1.** Na figura ao lado encontram-se oito peças numeradas.




**1.1.** Observa o esquema apresentado a seguir que te permite efetuar uma sequência de operações conhecido o número colocado nas alíneas seguintes.

Utiliza 3 peças da figura para obteres o resultado pedido.

**1.1.1** $\square \times \square - \square = -1$

**1.1.2.** $\square + \square \times \square = -10$

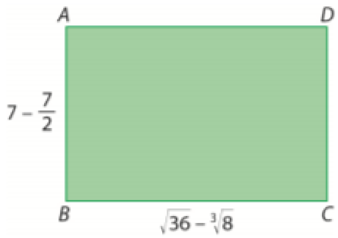
**1.2.** Considera o conjunto $P = \left\{-3;\ 3^5;\ \sqrt{36}\,;7;\ -\frac{3}{2};\ 7-\frac{7}{2};\ \sqrt[3]{8};\ -2\right\}$ formado com os números das peças. De entre os elementos do conjunto $P$, refere:

**1.2.1.** os que representam números inteiros não negativos;

**1.2.2.** dois números simétricos;

**1.3.** O Francisco pretende construir um retângulo utilizando três das peças anteriores: $7-\frac{7}{2}$, $\sqrt{36}$ e $\sqrt[3]{8}$, para as medidas dos lados, que se apresentam na figura ao lado.

Qual é o **perímetro do retângulo**?




**(A)** 12 **(B)** 13 **(C)** 14 **(D)** 15

**2.** Seja $a$ um número maior do que 1.

Quatro colegas do Francisco simplificaram a expressão $\frac{a^3 \times a^4}{a^5}$.

A tabela seguinte mostra a resposta de cada aluno.

| Amigo | Resposta |
|---|---|
| José | $\frac{a^3 \times a^4}{a^5} = \frac{1}{a^2}$ |
| Diogo | $\frac{a^3 \times a^4}{a^5} = a^2$ |
| Helena | $\frac{a^3 \times a^4}{a^5} = a^{12}$ |
| Filipa | $\frac{a^3 \times a^4}{a^5} = a^7$ |

**2.1.** Qual dos alunos deu a resposta correta?

**(A)** José **(B)** Diogo **(C)** Helena **(D)** Filipa

**2.2.** Sabendo que $\frac{a^3 \times a^4}{a^5} = 16$ e $a$ é positivo, calcula o valor da expressão $(3 \times a - 1)^2$.

*Sugestão: Começa por determinar o valor de $a$. Caso não consigas chegar ao valor de $a$, considera $a$ = 5, para determinares o valor da expressão numérica.*

**3.** O Francisco frequenta uma Escola do distrito de Aveiro e adora matemática. Cada aula tem 90 minutos de duração.

**3.1.** Desafiou os colegas de outra turma a descobrirem quantas aulas de Matemática já teve este ano, dizendo-lhes:

"*Já tive* $4{,}5\times10^3$ *minutos de aulas de Matemática*".

Quantas aulas de Matemática teve o Francisco este ano?

**3.2.** A Escola do Francisco está a uma distância de sua casa de $780\,\boldsymbol{m}$. Escreve o número, em notação científica, que representa o **percurso de ida e volta,** em $\boldsymbol{mm}$.

**4.** Qual das seguintes afirmações é **verdadeira**?

**(A)** O contradomínio pode ter mais elementos do que o domínio.

**(B)** Aos elementos do domínio designam-se por imagens.

**(C)** Numa função um objeto não pode ter duas imagens.

**(D)** Na representação gráfica de uma função, a variável dependente situa-se no eixo das abcissas.

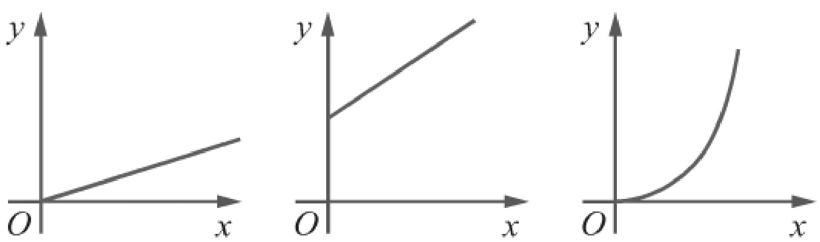
**5.** Numa loja, todos os artigos estão a ser vendidos com 35% de desconto.

**Qual das opções seguintes** traduz o preço a pagar, $y$, por um artigo, $x$, comprado na loja, beneficiando de um desconto de 35%?


**(A)** $y = x + 0{,}35x$ **(B)** $y = x - 35$ **(C)** $y = 0{,}35x$ **(D)** $y = 0{,}65x$

**6.** Dos três gráficos representados abaixo **apenas um** representa uma situação de **proporcionalidade direta**. Qual? Explica a razão que te leva a rejeitar cada um dos outros dois gráficos.

A B C



**7.** Considera as funções, de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$, definidas por: $f(x) = 0{,}3x + 1$, $g(x) = \sqrt{100}$ e $h(x) = -\frac{2}{3}x$.

**7.1.** Justifica que $f + g$ é uma função afim não linear. Apresenta a expressão na forma canónica.

**7.2.** Calcula:

**7.2.1.** $(f + g)(10)$

**7.2.2.** $(f \times h)(5)$

**7.3.** Lê, com atenção, na situação problema que se segue.

*O pai do Francisco pretende estacionar o seu automóvel no parque subterrâneo do Fórum Aveiro. Junto à entrada está à disposição dos utentes um placard com a seguinte informação: "A utilização do parque de estacionamento será efetuada mediante a emissão de um bilhete de acesso e pagamento de uma taxa fixa de 1 euro. De acordo com o tarifário exposto, por cada hora que o carro permaneça no parque de estacionamento, o valor total a pagar será acrescido de 30 cêntimos.*

O custo C, em euros, a pagar pelo estacionamento de uma viatura durante $x$ horas é dada por (seleciona a opção correta):

**(A)** $C(x) = 0{,}3x$ **(B)** $C(x) = 0{,}3x + 1$ **(C)** $C(x) = 0{,}3$ **(D)** $C(x) = 1$

**7.4.** Tendo em conta a função selecionada na alínea anterior, responde aos seguintes itens, indicando todos os cálculos que efetuares.

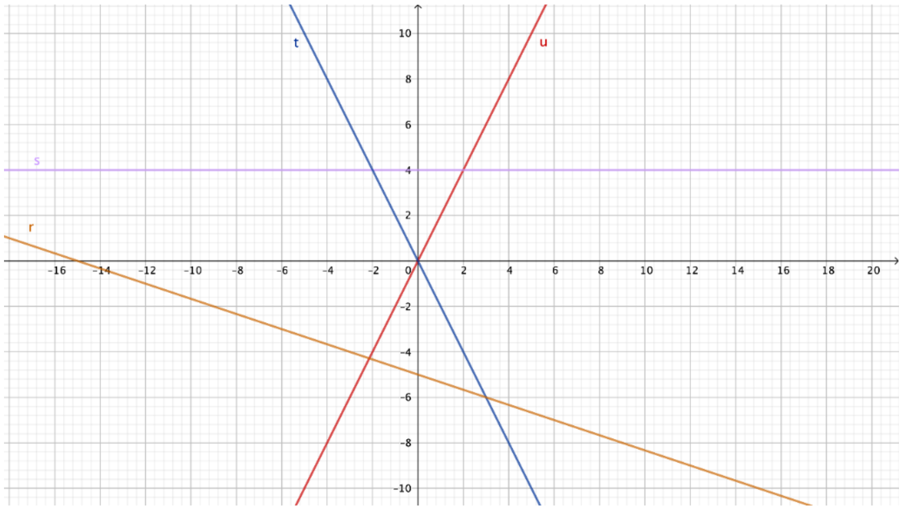
**7.4.1.** Quanto paga o pai do Francisco por estacionar o seu automóvel no parque durante 3 horas?

**7.4.2.** Quantas horas terá permanecido no parque de estacionamento sabendo que pagou 2,5 euros?

**8.** **Associa** cada uma das expressões analíticas das funções $f$, $g$, $h$ e $j$ definidas a seguir, à respetiva representação gráfica.

**I.** $f(x) = 2x$ **II.** $g(x) = -\frac{1}{3}x - 5$

**III.** $h(x) = -2x$ **IV.** $j(x) = 4$




**9.** A mãe do Francisco comprou um produto de limpeza em pó que deve ser misturado com água. De acordo com as instruções da embalagem, deve diluir-se cinco colheres de produto por cada três litros de água.

**9.1.** A mãe do Francisco tem seis litros de água num balde. Quantas colheres do produto deve juntar para preparar o produto de limpeza?

**9.2.** Completa a tabela seguinte que relaciona a quantidade de água, em litros, com o número de colheres de produto de limpeza que é necessário juntar.

| **Número de litros de água** $(\boldsymbol{x})$ | 3 | 6 | | 15 | 21 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Número de colheres de produto** $(\boldsymbol{y})$ | 5 | | 20 | | | |

**9.3.** Escreve uma expressão analítica que relaciona a quantidade, $y$, de produto (número de colheres) com o número, $x$, de litros de água utilizada.

**9.4.** O produto de limpeza em pó é embalado em saquetas de 200g. Sabendo que cada colher deste pó equivale a 8g de produto, determina o número de:

**9.4.1.** colheres de pó que contém uma saqueta;

**9.4.2.** litros de água necessários para misturar com uma embalagem.

**10.** Considera a sucessão $(u_n)$ referente ao **número de molas utilizadas**, em função do número de toalhas estendidas, como ilustram as figuras seguintes.

Figura 1

Figura 2

Figura 3

**10.1.** Quantas molas terá a Figura 5?

**10.2.** Averigua se existe alguma Figura na qual são usadas 100 molas. Justifica a tua resposta.

**10.3.** Qual o termo geral desta sucessão $(u_n)$?

**(A)** $2n$ **(B)** $2n+1$

**(C)** $n$ **(D)** $n+1$

## FIM

## Cotações

| Item | 1.1.1. | 1.1.2. | 1.2.1. | 1.2.2. | 1.3. | 2.1. | 2.2. | 3.1. | 3.2. | 4. | 5. | 6. | 7.1. | 7.2.1. | Total: 100 pontos |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cotação | 3 | 3 | 4 | 3 | 4 | 4 | 5 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | |
| Item | 7.2.2. | 7.3. | 7.4.1. | 7.4.2. | 8. | 9.1. | 9.2. | 9.3. | 9.4.1. | 9.4.2. | 10.1. | 10.2. | 10.3. | | |
| Cotação | 5 | 4 | 2 | 2 | 8 | 2 | 5 | 4 | 3 | 4 | 2 | 3 | 4 | | |

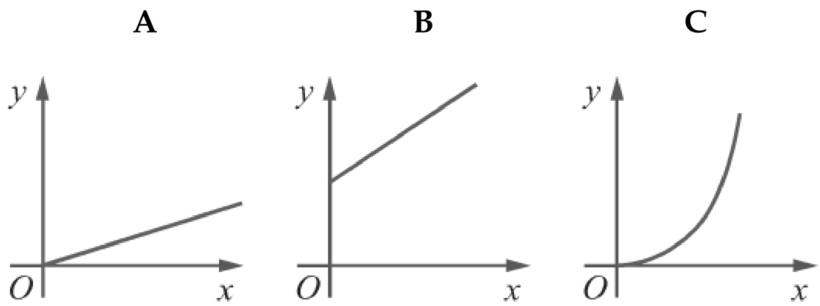
**Apêndice VIII – Questões sobre Funções T2 (Observações) – 14 de fevereiro de 2020**

Posteriormente expõem-se cada uma das questões sobre funções do teste de avaliação de conhecimentos realizado a 14 de fevereiro de 2020, assim como a respetiva solução esperada e os objetos e processos.

❖ **Enunciado 6.**

♦ **Questão 6.**

Dos três gráficos representados abaixo **apenas um** representa uma situação de **proporcionalidade direta**. Qual? Explica a razão que te leva a rejeitar cada um dos outros dois gráficos.




**Solução esperada:**

∴ Apenas a opção A apresenta uma representação gráfica de uma função de proporcionalidade direta porque é o único cuja representação é uma reta que passa na origem do referencial.

Os restantes gráficos não são de funções de proporcionalidade direta porque a opção C) não é uma reta com declive diferente de 0 e a opção B) a reta não passa na origem do referencial.

**Objetos e processos:**

Os alunos devem saber reconhecer todas as possíveis representações de uma função de proporcionalidade direta, devem conseguir associar uma função de proporcionalidade direta a uma função linear.

❖ **Enunciado 7.**

Considera as funções, de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$, definidas por:

$$f(x) = 0{,}3x + 1, \;\; g(x) = \sqrt{100} \text{ e } h(x) = -\tfrac{2}{3}x.$$

♦ **Questão 7.1.**

Justifica que $f + g$ é uma função afim não linear. Apresenta a expressão na forma canónica.

**Solução esperada:**

$$\therefore \; (f + g)(x) = f(x) + g(x) = 0{,}3x + 1 + \sqrt{100} = 0{,}3x + 1 + 10 = 0{,}3x + 11$$

A função $f + g$ é afim não linear porque a expressão algébrica da função é do tipo $ax + b, a \neq 0$ e $b \neq 0$, onde $a$ representa o declive da reta da função e $b$ a ordenada na origem.

**Objetos e processos:**

A solução requer que os alunos apliquem os seus conhecimentos sobre as operações com funções, nomeadamente, a adição de uma função afim com uma função constante. Espera-se que saibam apresentar a expressão na forma canónica e que saibam identificar uma função afim através da sua expressão analítica.

♦ **Questão 7.2.1.**

Calcula $(f + g)(10)$.

**Solução esperada:**

$$\therefore \; (f + g)(10) = f(10) + g(10) = 0{,}3 \times 10 + 1 + \sqrt{100} = 3 + 1 + 10 = 14$$

**Objetos e processos:**

Os alunos devem saber calcular através da expressão analítica da função $f$ a imagem do objeto 10 e o mesmo para a função $g$.

♦ **Questão 7.2.2.**

Calcula $(f \times h)(5)$.

**Solução esperada:**

$$\therefore \; (f \times h)(5) = f(5) \times h(5) = (0{,}3 \times 5 + 1) \times \left(-\frac{2}{3} \times 5\right) = 2{,}5 \times \left(-\frac{10}{3}\right) = \left(-\frac{25}{3}\right)$$

**Objetos e processos:**

Os alunos devem saber calcular através da expressão analítica da função $f$ a imagem do objeto 5 e o mesmo para a função $h$.

♦ **Questão 7.3.**

Lê, com atenção, na situação problema que se segue.

*O pai do Francisco pretende estacionar o seu automóvel no parque subterrâneo do Fórum Aveiro. Junto à entrada está à disposição dos utentes um placard com a seguinte informação: "A utilização do parque de estacionamento será efetuada mediante a emissão de um bilhete de acesso e pagamento de uma taxa fixa de 1 euro. De acordo com o tarifário exposto, por cada hora que o carro permaneça no parque de estacionamento, o valor total a pagar será acrescido de 30 cêntimos.*

O custo C, em euros, a pagar pelo estacionamento de uma viatura durante $x$ horas é dada por (seleciona a opção correta):

**(E)** $C(x) = 0{,}3x$ **(F)** $C(x) = 0{,}3x + 1$ **(G)** $C(x) = 0{,}3$ **(H)** $C(x) = 1$

**Solução esperada:**

∴ Opção correta: **(B)** $C(x) = 0{,}3x + 1$.

**Objetos e processos:**

Apesar da resposta ser de seleção exige que os alunos interpretem o enunciado.

- **Questão 7.4.1.**

Tendo em conta a função selecionada na alínea anterior, responde aos seguintes itens, indicando todos os cálculos que efetuares.

Quanto paga o pai do Francisco por estacionar o seu automóvel no parque durante 3 horas?

**Solução esperada:**

$C(3) = 0{,}3 \times 3 + 1 = 1{,}90$ euros

∴ O pai do Francisco por 3 horas de estacionamento pagará 1,90 €.

**Objetos e processos:**

Os alunos devem fazer a substituição na expressão analítica que representa o custo a pagar pelo estacionamento de uma viatura durante $x = 3$ horas, ou seja, devem determinar a imagem para o objeto 3 pela função $C$.

- **Questão 7.4.2.**

Tendo em conta a função selecionada na alínea anterior, responde aos seguintes itens, indicando todos os cálculos que efetuares.

Quantas horas terá permanecido no parque de estacionamento sabendo que pagou 2,5 euros?

**Solução esperada:**

$$C(x) = 2{,}5 \Leftrightarrow 0{,}3x + 1 = 2{,}5 \Leftrightarrow 0{,}3x = 1{,}5 \Leftrightarrow x = 5$$

ou

$$2{,}5 - 1 = 1{,}5$$

$$\frac{1{,}5}{0{,}3} = 5$$

∴ Terá permanecido 5 horas no parque de estacionamento.

**Objetos e processos:**

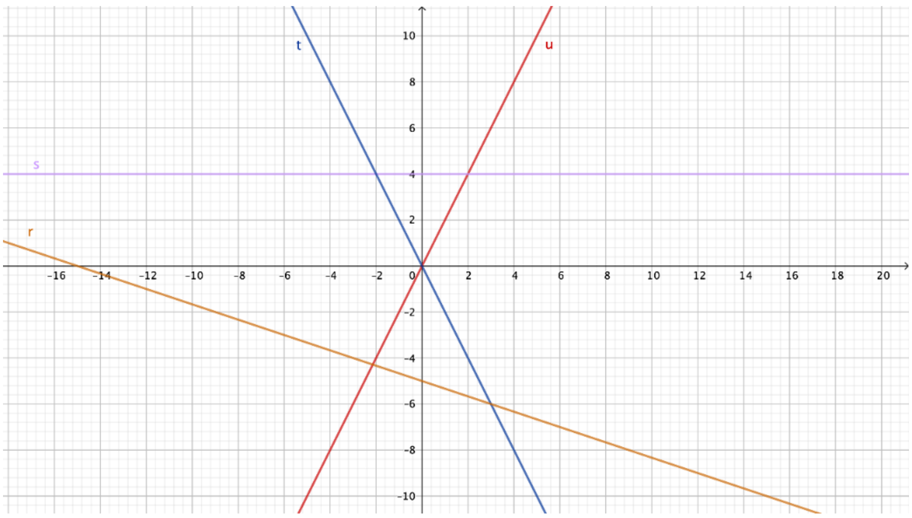
A solução requer o a resolução de uma equação do 1.º grau, embora os alunos ainda não tenham abordado este tema. Facilmente conseguem passo a passo resolver esta questão, mas têm de interpretar o enunciado.

- ❖ **Enunciado 8.**
  - ♦ **Questão 8.**

**Associa** cada uma das expressões analíticas das funções $f$, $g$, $h$ e $j$ definidas a seguir, à respetiva representação gráfica.

**I.** $f(x) = 2x$ **II.** $g(x) = -\frac{1}{3}x - 5$

**III.** $h(x) = -2x$ **IV.** $j(x) = 4$




**Solução esperada:**

∴ A associação pedida é a seguinte:

- I – u (f(x) corresponde a u).
- II – r (g(x) corresponde a r).
- III – t (h(x) corresponde a t).
- IV – s (j(x) corresponde a s).

**Objetos e processos:**

Os alunos devem associar as expressões analíticas apresentadas à respetiva representação gráfica, neste sentido, devem saber o que é o declive, assim como o que é a ordenada na origem.

❖ **Enunciado 9.**

A mãe do Francisco comprou um produto de limpeza em pó que deve ser misturado com água. De acordo com as instruções da embalagem, deve diluir-se cinco colheres de produto por cada três litros de água.

♦ **Questão 9.1.**

A mãe do Francisco tem seis litros de água num balde. Quantas colheres do produto deve juntar para preparar o produto de limpeza?

**Solução esperada:**

∴ A mãe do Francisco deve diluir 10 colheres de produto em seis litros de água.

**Objetos e processos:**

A solução requer o uso de uma regra três simples para descobrir quantas colheres do produto se deve juntar.

♦ **Questão 9.2.**

Completa a tabela seguinte que relaciona a quantidade de água, em litros, com o número de colheres de produto de limpeza que é necessário juntar.

| **Número de litros de água** $(x)$ | 3 | 6 | | 15 | 21 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Número de colheres de produto** $(y)$ | 5 | | 20 | | | |

**Solução esperada:**

| **Número de litros de água** $(x)$ | 3 | 6 | **12** | 15 | 21 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|

| **Número de colheres de produto ($\boldsymbol{y}$)** | 5 | **10** | 20 | **25** | **35** | **40** |
|---|---|---|---|---|---|---|

**Objetos e processos:**

Para completar os dados em falta da tabela os alunos devem perceber que as grandezas são diretamente proporcionais. Nesta questão os alunos não necessitam de apresentar o raciocínio, desta forma, os erros cometidos nesta questão não serão referenciados.

- **Questão 9.3.**

Escreve uma expressão analítica que relaciona a quantidade, $y$, de produto (número de colheres) com o número, $x$, de litros de água utilizada.

**Solução esperada:**

∴ Expressão analítica: $f(x) = \frac{5}{3}x$

**Objetos e processos:**

A solução esperada pretende obter uma representação algébrica da função solicitada, mais precisamente a expressão analítica.

- **Questão 9.4.1.**

O produto de limpeza em pó é embalado em saquetas de 200g. Sabendo que cada colher deste pó equivale a 8g de produto, determina o número de colheres de pó que contém uma saqueta.

**Solução esperada:**

| $colheres\ de\ pó$ | $gramas$ (g) |
|---|---|
| 1 | 8 |
| $x$ | 200 |

$$x = \frac{200}{8} = 25$$

∴ Uma saqueta contém 25 colheres de pó.

**Objetos e processos:**

A solução requer o uso de uma regra três simples para descobrir quantas colheres de pó tem cada saqueta.

♦ **Questão 9.4.2.**

O produto de limpeza em pó é embalado em saquetas de 200g. Sabendo que cada colher deste pó equivale a 8g de produto, determina o número de litros de água necessários para misturar com uma embalagem.

**Solução esperada:**

$$\begin{array}{lr} colheres\ de\ pó & Água\ (l) \\ 5\ \rule{4cm}{0.4pt} & 3 \\ 25\ \rule{3.5cm}{0.4pt} & x \end{array}$$

$$x = \frac{25 \times 3}{5} = 15\ l$$

∴ São necessários 15 litros de água para misturar com uma embalagem.

**Objetos e processos:**

A solução requer o uso de uma regra três simples para calcular quantos litros de água são necessários para misturar.

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

**AGRUPAMENTO DE ESCOLAS**

**Turma:** 7º.C ______/ março/ 2020

Nome: ____________________________________________ N.º ____ Turma: ____

1. Considera as funções $f\colon A \longrightarrow \mathbb{Q}$ e $g\colon B \longrightarrow \mathbb{Q}$, sendo:

- $A = \left\{-2; -\frac{1}{2}; 0; 2; 4; 7\right\}$
- $B = \left\{-3; \frac{2}{3}; 2; 4\right\}$
- $G_f = \left\{(-2; 2); \left(-\frac{1}{2}; 3\right); (0; -4); (2; -1); (4; 6); (7; 2)\right\}$
- $g(x) = -\frac{2}{3}x$

**1.1.** Calcula:

**a.** $(f - g)(2)$

**b.** $\frac{(f \times g)(4)}{f^2\left(-\frac{1}{2}\right)}$

2. O Sr. Pestana, que pesa 120 kg, está a submeter-se a uma dieta rigorosa para perder peso. Ele pretende atingir um peso próximo de 70 kg e prevê, durante a dieta, perder 4 kg por semana. Supõe que esta previsão de perda de peso se verifica na realidade.

**2.1. Determina** o peso do Sr. Pestana após a primeira semana de dieta.

**2.2.** Seja $P$ a função que relaciona o peso do Sr. Pestana com o número, $x$, de semanas de dieta.

**a. Calcula** $P\,(3)$ e interpreta o resultado no contexto da situação.

**b. Determina** o número racional $r$ que torna a igualdade $P(r) = 100$ verdadeira.

**c. Escreve** a expressão analítica que define o valor de $P(x)$ para $x$ a pertencer ao domínio de $P$.

**3.** Considera as seguintes funções de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$, definidas por:

- $f(x) = 2x + 3$
- $g(x) = \sqrt{64}$
- $m(x) = \frac{2}{3}x$
- $n(x) = \frac{5}{2}x - 8$

**3.1. Representa** a expressão analítica da função $h$ na forma $h(x) = ax + b$, se:

$\boldsymbol{a}$. $h = f - g$

$\boldsymbol{b}$. $h = g + n$

$\boldsymbol{c}$. $h = f - m$

$\boldsymbol{d}$. $h = g^2$

**3.2. Identifica**, caso exista, a(s) função(ões) constantes.

**Apêndice X – Questões sobre Funções FT (Observações) – 13 de março de 2020**

Posteriormente expõem-se cada uma das questões sobre funções do teste de avaliação de conhecimentos realizado a 13 de março de 2020, assim como a respetiva solução esperada e os objetos e processos.

❖ **Enunciado 1.**

Considera as funções $f: A \longrightarrow \mathbb{Q}$ e $g: B \longrightarrow \mathbb{Q}$, sendo:

- $A = \left\{-2; -\frac{1}{2}; 0; 2; 4; 7\right\}$
- $B = \left\{-3; \frac{2}{3}; 2; 4\right\}$
- $G_f = \left\{(-2; 2); \left(-\frac{1}{2};\ 3\right); (0; -4); (2; -1); (4; 6); (7; 2)\right\}$
- $g(x) = -\frac{2}{3}x$

♦ **Questão 1.1. - a.**

Calcula $(f - g)(2)$.

**Solução esperada:**

$f(2) = -1$

$g(2) = -\frac{2}{3} \times 2 = -\frac{4}{3}$

$$\therefore (f - g)(2) = f(2) - g(2) = -1 - \left(-\frac{4}{3}\right) = -1 + \frac{4}{3} = -\frac{3}{3} + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

**Objetos e processos:**

Os alunos devem saber calcular através da expressão analítica da função $g$ a imagem do objeto 2, através do gráfico da função $f$ os alunos devem associar o objeto 2 à imagem $-1$.

♦ **Questão 1.1. - b.**

Calcula $\frac{(f \times g)(4)}{f^2\left(-\frac{1}{2}\right)}$.

**Solução esperada:**

$f(4) = 6$

$g(4) = -\frac{2}{3} \times 4 = -\frac{2 \times 4}{3} = -\frac{8}{3}$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$

$$\therefore \frac{(f \times g)(4)}{f^2\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{f(4) \times g(4)}{\left[f\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2} = \frac{6 \times \left(-\frac{8}{3}\right)}{3^2} = \frac{-\frac{48}{3}}{9} = -\frac{16}{9}$$

**Objetos e processos:**

Os alunos devem saber calcular através da expressão analítica da função $g$ a imagem do objeto 4, através do gráfico da função $f$ os alunos devem associar o objeto 2 à imagem $-1$, devem ainda através do gráfico da função $f$ associar o objeto $-\frac{1}{2}$ à imagem 3.

❖ **Enunciado 2.**

O Sr. Pestana, que pesa 120 kg, está a submeter-se a uma dieta rigorosa para perder peso. Ele pretende atingir um peso próximo de 70 kg e prevê, durante a dieta, perder 4 kg por semana. Supõe que esta previsão de perda de peso se verifica na realidade.

♦ **Questão 2.1.**

Determina o peso do Sr. Pestana após a primeira semana de dieta.

**Solução esperada:**

$120 - 4 = 116$ kg

∴ O Sr. Pestana após a primeira semana de dieta pesará 116 kg.

**Objetos e processos:**

A solução exige uma simples subtração após a interpretação do problema.

♦ **Questão 2.2. – a.**

Seja $P$ a função que relaciona o peso do Sr. Pestana com o número, $x$, de semanas de dieta.

Calcula $P$ (3) e interpreta o resultado no contexto da situação.

**Solução esperada:**

$P\ (3) = 120 - 3 \times 4 = 120 - 12 = 108$ kg

∴ No contexto do problema significa que ao fim de 3 semanas de dieta o Sr. Pestana pesará 108 kg.

**Objetos e processos:**

A solução esperada pretende obter o peso do Sr. Pestana após 3 semanas de dieta, dessa forma é necessário que os alunos interpretem o que significa $P(3)$ no contexto do problema.

♦ **Questão 2.2. – b.**

Seja $P$ a função que relaciona o peso do Sr. Pestana com o número, $x$, de semanas de dieta.

Determina o número racional $r$ que torna a igualdade $P(r) = 100$ verdadeira.

**Solução esperada:**

$P\ (r) = 100$

$120 - 4r = 100$

$120 - 100 = 20$

$r = \frac{20}{4} = 5$

$\therefore\ r = 5$, ou seja, são necessárias 5 semanas de dieta para que o Sr. Pestana pese 100 kg.

**Objetos e processos:**

A solução esperada pretende obter o número de semanas de dieta que é necessário o Sr. Pestana fazer para que o seu peso seja de 100 kg.

♦ **Questão 2.2. – c.**

Seja $P$ a função que relaciona o peso do Sr. Pestana com o número, $x$, de semanas de dieta.

Escreve a expressão analítica que define o valor de $P(x)$ para $x$ a pertencer ao domínio de $P$.

**Solução esperada:**

$\therefore P\ (x) = 120 - 4x$, onde $P$ representa o peso do Sr. Pestana após $x$ semanas de dieta.

**Objetos e processos:**

A solução esperada pretende obter uma representação da função $P$ mais precisamente a expressão analítica da função que representa o peso do Sr. Pestana após $x$ semanas de dieta.

❖ **Enunciado 3.**

Considera as seguintes funções de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$, definidas por:

- $f(x) = 2x + 3$
- $g(x) = \sqrt{64}$
- $m(x) = \frac{2}{3}x$
- $n(x) = \frac{5}{2}x - 8$

♦ **Questão 3.1. – a.**

Representa a expressão analítica da função $h$ na forma $h(x) = ax + b$, se:

$$h = f - g$$

**Solução esperada:**

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) \\ &= 2x + 3 - \sqrt{64} \\ &= 2x + 3 - 8 \\ &= 2x - 5 \end{aligned}$$

$$\therefore\ h(x) = 2x - 5$$

**Objetos e processos:**

Espera-se que os alunos trabalhem as operações com funções, nomeadamente a subtração de uma função afim com uma função constante.

♦ **Questão 3.1. – b.**

Representa a expressão analítica da função $h$ na forma $h(x) = ax + b$, se:

$$h = g + n$$

**Solução esperada:**

$$\begin{aligned} h(x) &= g(x) + n(x) \\ &= \sqrt{64} + \tfrac{5}{2}x - 8 \\ &= \tfrac{5}{2}x - 8 + \sqrt{64} \\ &= \tfrac{5}{2}x - 8 + 8 \\ &= \tfrac{5}{2}x \end{aligned}$$

$$\therefore\ h(x) = \frac{5}{2}x$$

**Objetos e processos:**

Espera-se que os alunos trabalhem as operações com funções, nomeadamente a adição de uma função afim com uma função constante.

♦ **Questão 3.1. – c.**

Representa a expressão analítica da função $h$ na forma $h(x) = ax + b$, se:

$$h = f - m$$

**Solução esperada:**

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - m(x) \\ &= 2x + 3 - \tfrac{2}{3}x \\ &= 2x - \tfrac{2}{3}x + 3 \\ &= \tfrac{3\times 2}{3}x - \tfrac{2}{3}x + 3 \\ &= \tfrac{6}{3}x - \tfrac{2}{3}x + 3 \\ &= \tfrac{6-2}{3}x + 3 \\ &= \tfrac{4}{3}x + 3 \end{aligned}$$

$$\therefore\ h(x) = \frac{4}{3}x + 3$$

**Objetos e processos:**

Espera-se que os alunos trabalhem as operações com funções, nomeadamente a subtração de uma função afim com uma função linear.

- **Questão 3.1. – d.**

Representa a expressão analítica da função $h$ na forma $h(x) = ax + b$, se:

$$h = g^2$$

**Solução esperada:**

$$\begin{aligned} h(x) &= [g(x)]^2 \\ &= \left(\sqrt{64}\right)^2 \\ &= 64 \end{aligned}$$

$$\therefore\ h(x) = 64$$

**Objetos e processos:**

Espera-se que os alunos trabalhem as operações com funções, nomeadamente a potência de uma função constante.

- **Questão 3.2.**

Identifica, caso exista, a(s) função(ões) constantes.

**Solução esperada:**

$$\therefore\ g(x) = \sqrt{64}, \text{ função contante.}$$

**Objetos e processos:**

A solução requer que os alunos identifiquem funções constantes entre as funções $f$, $g$, $m$ e $n$.

**Apêndice XI – Autorização do Encarregado de Educação para uma Entrevista**

## DECLARAÇÃO DE AUTORIZAÇÃO PARA UMA ENTREVISTA

**Nome do aluno:** ______________________________________________

**Ano de escolaridade**: _______ **Turma:** ________

(Selecione uma das opções)

☐ **Autorizo** que o meu educando seja entrevistado no âmbito do desenvolvimento de um projeto de investigação para conclusão do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do ensino básico e no ensino secundário. Será garantido, na realização da entrevista, que a identidade do meu educando não será divulgada.

☐ **Não autorizo** que o meu educando seja entrevistado no âmbito do desenvolvimento de um projeto de investigação para conclusão do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do ensino básico e no ensino secundário.

________ de maio de 2020

______________________________________________________________

(Assinatura do Encarregado de Educação)

**Apêndice XII – Planificação da Entrevista (Análise das Resoluções)**

Por forma a não contornar os objetivos que eram pretendidos com a entrevista foram formuladas as seguintes questões:

- ♦ Qual foi o teu raciocínio quando resolveste esta questão? Respondeste à questão aleatoriamente? Consegues explicar me como pensaste na resolução da questão?

- ♦ Qual foi a tua maior dificuldade na associação da representação gráfica à expressão analítica? Sentes que a dificuldade reside na determinação da expressão analítica? Na identificação do tipo de função representada?

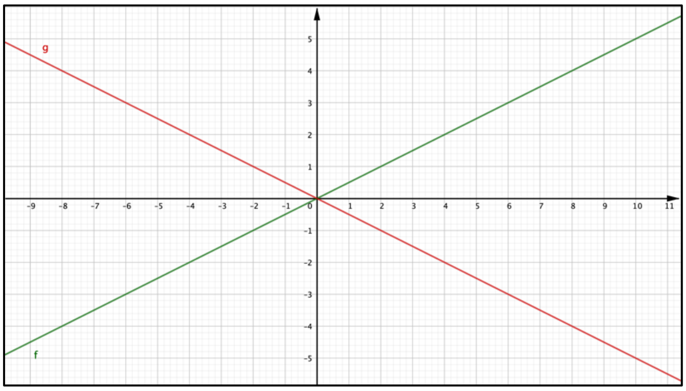
- ♦ Em relação às duas associações assinaladas como incorretas, já conseguiste compreender porquê estão incorretas?

**Apêndice XIII – Questão de associação proposta na entrevista.**

Tendo em conta que apenas com questões sobre as resoluções os alunos não foram suficientes para atingir os objetivos pretendidos com a entrevista foi formulada a questão seguinte:

Associa as representações gráficas às respetivas expressões analíticas:

**a.**



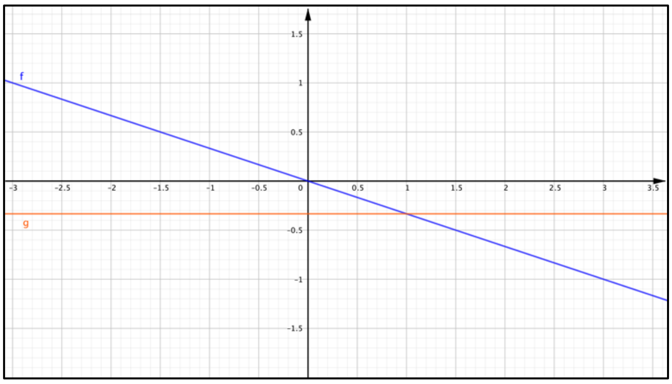

$$m(x) = \frac{1}{2}$$

$$t(x) = \frac{1}{2}x$$

$$k(x) = -\frac{1}{2}x$$

$$n(x) = -\frac{1}{2}$$

**b.**



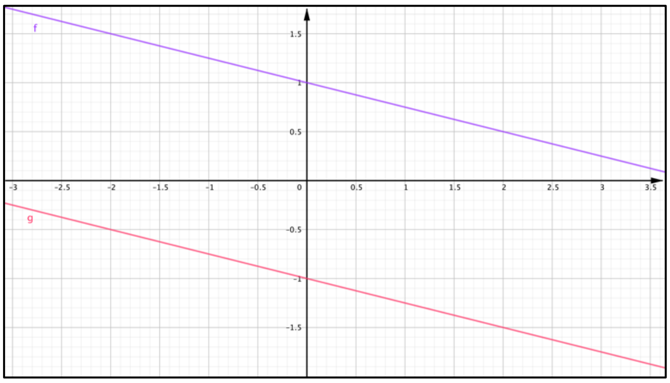

$$m(x) = \frac{1}{3}$$

$$t(x) = \frac{1}{3}x$$

$$k(x) = -\frac{1}{3}x$$

$$n(x) = -\frac{1}{3}$$

**c.**




$$m(x) = \frac{1}{4}x + 1$$

$$t(x) = \frac{1}{4}x - 1$$

$$k(x) = -\frac{1}{4}x + 1$$

$$n(x) = -\frac{1}{4}x - 1$$

**Apêndice XIV – Planificação da Entrevista (Avaliação)**

Por

- Quando ouves falar em avaliação, em que pensas?
- Na tua opinião, para que serve a avaliação?
- Ao longo dos teus anos como aluno(a) tens sido avaliado(a) na disciplina de Matemática. De que forma?
- Consideras que a forma como a avaliação tem sido efetuada é a melhor? Sentes-te prejudicado? Ou beneficiado? Achas justa?
- Achas que a avaliação te ajuda a cometer menos erros? Porquê?