



Ana Maria
Rodrigues
da Silva

Metodologias de agregação em modelos de
regressão linear: estimação em contexto de
colinearidade e *big data*



Ana Maria
Rodrigues
da Silva

**Metodologias de agregação em modelos de
regressão linear: estimação em contexto de
colinearidade e *big data***

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações, realizada sob a orientação científica do Doutor Pedro Filipe Pessoa Macedo, Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, e da Doutora Maria da Conceição Cristo Santos Lopes Costa, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.



*Dedico este trabalho aos meus pais, e ao meu namorado,
Tiago.*

o júri

presidente

Doutora Enide Cascais Silva Andrade

Professora Associada do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

vogais

Doutor Rui Américo Ferreira da Costa

Investigador Júnior do Departamento de Física da Universidade de Aveiro

Doutor Pedro Filipe Pessoa Macedo

Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro (orientador)

agradecimentos

Aos meus orientadores, o Doutor Pedro Filipe Pessoa Macedo, e a Doutora Maria da Conceição Cristo Santos Lopes Costa, pelo apoio incondicional que forneceram no decorrer desta dissertação. Pela confiança depositada, pelo esforço, por toda a disponibilidade e simpatia. Por todos os ensinamentos. Um obrigada não é suficiente para agradecer tudo o que fizeram por mim e pelo meu trabalho. Foi uma honra trabalhar sobre a vossa orientação.

Aos meus pais e irmã, pelo apoio, carinho e compreensão que sempre estava à espera quando chegava à minha cidade natal. Sempre com um abraço caloroso. Sempre com palavras amigas de apoio. Com muito amor e orgulho. Sem vocês nunca tinha conseguido chegar até aqui, e nunca me vou esquecer de tudo o que fizeram por mim. Espero, um dia, conseguir retribuir pelo menos o mínimo do que vocês deram por mim. Mãe, a mulher guerreira. Pai, um lutador. Manita, símbolo de força.

Ao meu namorado Tiago. Por todo o amor ao longo destes anos. Pela força transmitida. Por ter acreditado em mim desde o primeiro dia em que nos conhecemos. A melhor pessoa que alguma vez tive a felicidade de conhecer. Também, sem ele, nada disto teria sido possível. Por azar, não acreditava na sorte. Isso mudou, contigo ao meu lado.

Não posso deixar de agradecer à família do Tiago, à Isabel e ao Carlos, por me terem acolhido como uma filha e ajudado quando sempre necessitei. Ao Pedro, por tudo o que fez por mim ao longo deste meu percurso. E à Maria, pelo enorme apoio e paciência todos os dias. Pelo companheirismo e amizade. O meu eterno obrigado a todos.

Aos meus meninos, Ana, Vítor, Catarina e Mariana, por nunca me fazerem sentir sozinha. Por nunca terem desistido de mim. Vocês merecem o melhor que a vida vos possa dar. À Pronto, Simão e Andreia, por mostrarem que ainda existem pessoas boas neste mundo. Vou ter Aveiro sempre no coração, por causa de vocês. E às minhas lindas meninas, Cristina e Lorena, pelo suporte e amizade ao longo destes anos.

Às restantes pessoas que marcaram o meu percurso académico e que, de alguma forma, me fizeram crescer.

palavras-chave

Info-metrics, big data, regressão linear, colinearidade, dados não homogêneos, entropia, máxima entropia, entropia normalizada, mínimos quadrados ordinários, máxima entropia generalizada, máxima entropia generalizada ponderada, bagging, magging, neagging

resumo

Nos últimos dois anos, foram gerados 90% dos dados existentes atualmente, com 2.5×10^{18} bytes de informação gerada diariamente. No futuro, o previsível aumento substancial da quantidade de informação implicará o surgimento de mais problemas relacionados com a dimensão dos dados. Apesar deste crescimento acentuado na quantidade de informação ser vantajoso, existem muitos desafios que ainda são necessários ultrapassar, tais como, por exemplo: como guardar, partilhar e proteger os dados? Como obter, de forma eficiente, a informação relevante contida nestes grandes volumes de dados? Os métodos tradicionais de processamento de dados não conseguem gerir e fornecer uma análise adequada da informação para um problema de *big data*. Para além disto, os conjuntos de dados podem apresentar características indesejadas em tratamento estatístico, como dados não homogêneos, presença de colinearidade nos dados ou outras dificuldades da análise estatística, resultando em observações afetadas por ruído. Metodologias de agregação e a abordagem de *info-metrics* pretendem resolver, de uma forma mais eficiente e precisa, alguns destes problemas. Neste trabalho, são simuladas diferentes matrizes de variáveis explicativas, com diferentes números de condição, e gerados vetores de perturbações aleatórias, modelados por diferentes distribuições estatísticas. Deste modo, são obtidos conjuntos de dados com diversas características distintas. Posteriormente, são efetuadas amostragens aleatórias, com diferente número de grupos e diferente número de observações por grupo, e calculadas as estimativas dos coeficientes de regressão para cada um dos grupos obtidos. Foram utilizados os seguintes estimadores: o usual OLS, o estimador GME, e uma extensão deste, o W-GME. Por último, estes vetores de estimativas são agregados segundo um determinado critério, nomeadamente com a implementação de um dos três procedimentos: *bagging*; mais indicado para dados homogêneos, *magging*, mais vocacionado para dados não homogêneos; e uma nova metodologia, *neagging*, baseada no conteúdo de informação de cada grupo. O objetivo deste trabalho foi estudar o desempenho destas metodologias em modelos de regressão linear, aplicando diferentes estimadores e estudando a variação de alguns dos parâmetros intrínsecos aos métodos. Os resultados mostram que os estimadores influenciam o desempenho dos métodos de agregação e que o procedimento *magging*, recorrendo ao estimador W-GME, fornece os melhores resultados para a generalidade dos cenários, principalmente nos que são afetados por colinearidade.

keywords

Info-metrics, big data, linear regression, collinearity, inhomogeneous data, entropy, maximum entropy, normalized entropy, ordinary least squares, generalized maximum entropy, weighted generalized maximum entropy, bagging, magging, neagging

abstract

Over the past two years, 90% of the current total data was generated, with more than 2.5×10^{18} bytes of information generated daily. In the future, this growth in information volume will increase, meaning that more problems related with data dimension will arise. Although an increase in information volume could be advantageous, there is a need to overcome the many challenges associated, such as saving, sharing, and protecting the data, as well as extracting relevant information from larger volumes of data. A proper analysis of the results in the context of a big data problem cannot be fully fulfilled by the traditional methods of data processing. Moreover, the datasets can present undesirable characteristics, such as inhomogeneous data, the presence of collinearity in the data and other difficulties in statistical analysis, resulting in observations affected by noise. Aggregation methodologies and the info-metrics approach look forward to solve some of these problems in a more efficient and precise way. Different matrices of explanatory variables with different condition numbers and random perturbations vectors, modelled by distinct distributions, were simulated in this work. As follows, datasets with diverse characteristics were obtained. Then, random samplings varying the number of groups and the number of observations per group were performed, and the estimatives of the regression coefficients were calculated for each of the obtained groups. The estimators considered were the usual OLS, the GME estimator, and its extension, the W-GME. Finally, the aggregation of these estimated vectors was achieved by implementing one of the following procedures: bagging, most indicated in homogeneous data; magging, aimed towards inhomogeneous data; and a new methodology called neagging, based on the information content of each group. The objective of this work was to study the performance of these methodologies in linear regression models, applying different estimators and studying the methods, considering the variation of some of their intrinsic parameters. The obtained results showed that the estimators influence the performance of the aggregation methods and that the magging procedure, using the W-GME estimator, usually provides the best results in most of the scenarios, mainly in the ones affected by collinearity.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Motivação	1
1.2	Objetivo e estrutura da tese	3
2	Contexto e estado da arte	5
2.1	Regressão Linear	5
2.2	Entropia	6
2.2.1	Conceitos de entropia	6
2.2.2	Princípio de máxima entropia	7
2.2.3	Entropia normalizada	9
2.3	Métodos de estimação	10
2.3.1	Estimador de mínimos quadrados ordinários - OLS	10
2.3.2	Estimador de máxima entropia generalizada - GME	11
2.3.3	Estimador de máxima entropia generalizada ponderada - W-GME	19
2.4	Procedimentos de agregação	20
2.4.1	<i>Bagging</i>	21
2.4.2	<i>Magging</i>	21
2.4.3	Agregação de entropia normalizada - <i>Neagging</i>	22
2.5	Problemas de regressão afetados por colinearidade	23
3	Estudo de simulação	25
3.1	Introdução	25
3.2	Resultados e Discussão	32
4	Conclusões	67
	Bibliografia	69
	Apêndices	71
	Apêndice A	72
A.1	Erros Normais	72
A.2	Erros t-Student	89
A.3	Erros Cauchy	105
	Apêndice B	121

Lista de Figuras

3.1	Comparação de três funções densidade de probabilidade (Normal, t-Student e Cauchy).	26
3.2	Gráficos comparativos dos erros de precisão, referentes aos cenários com $C = 10$ e $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, para diferentes distribuições de erro. Valor1/Valor2 significa número de grupos/ número de observações em cada grupo.	38
3.3	Gráficos comparativos dos erros de precisão, referentes aos cenários com $C = 10$ e $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, para diferentes distribuições de erro. Valor1/Valor2 significa número de grupos/ número de observações em cada grupo.	39
3.4	Gráficos comparativos dos erros de precisão, referentes aos cenários com $C = 20000$ e $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, para diferentes distribuições de erro. Valor1/Valor2 significa número de grupos/ número de observações em cada grupo.	40
3.5	Gráficos comparativos dos erros de precisão, referentes aos cenários com $C = 20000$ e $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, para diferentes distribuições de erro. Valor1/Valor2 significa número de grupos/ número de observações em cada grupo.	41
3.6	<i>Box plots</i> das estimativas dos 10 coeficientes de regressão linear, utilizando os métodos de agregação <i>bagging</i> , <i>magging</i> e <i>neagging</i> . Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 20$	44
3.7	<i>Box plots</i> dos erros de precisão, relativos aos procedimentos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 20$	45
3.8	<i>Box plots</i> das estimativas dos 10 coeficientes de regressão linear, utilizando os métodos de agregação <i>bagging</i> e <i>magging</i> . Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$	47
3.9	<i>Box plots</i> das estimativas dos 10 coeficientes de regressão linear, utilizando o método de agregação <i>neagging</i> . Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$	48
3.10	<i>Box plots</i> dos erros de precisão, relativos aos procedimentos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$	48
3.11	<i>Box plots</i> das estimativas dos 10 coeficientes de regressão linear, utilizando os métodos de agregação <i>bagging</i> e <i>magging</i> . Cenário: $\mathbf{e} \sim t(3)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 20$	50

3.12	<i>Box plots</i> das estimativas dos 10 coeficientes de regressão linear, utilizando o método de agregação <i>neagging</i> . Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 20$	51
3.13	<i>Box plots</i> dos erros de precisão, relativos aos procedimentos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 20$	52
3.14	<i>Box plots</i> das estimativas dos 10 coeficientes de regressão linear, utilizando o método de agregação <i>bagging</i> . Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$	54
3.15	<i>Box plots</i> das estimativas dos 10 coeficientes de regressão linear, utilizando o método de agregação <i>magging</i> . Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$	55
3.16	<i>Box plots</i> das estimativas dos 10 coeficientes de regressão linear, utilizando o método de agregação <i>neagging</i> . Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$	55
3.17	<i>Box plots</i> dos erros de precisão, relativos aos procedimentos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$	56
3.18	<i>Box plots</i> das estimativas dos 10 coeficientes de regressão linear, utilizando o método de agregação <i>bagging</i> . Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 20$	58
3.19	<i>Box plots</i> das estimativas dos 10 coeficientes de regressão linear, utilizando os métodos de agregação <i>magging</i> e <i>neagging</i> . Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 20$	59
3.20	<i>Box plots</i> dos erros de precisão, relativos aos procedimentos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 20$	60
3.21	<i>Box plots</i> das estimativas dos 10 coeficientes de regressão linear, utilizando os métodos de agregação <i>bagging</i> , <i>magging</i> e <i>neagging</i> . Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 100$	62
3.22	<i>Box plots</i> dos erros de precisão, relativos aos procedimentos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 100$	63
3.23	Variação nos diferentes grupos do valor do parâmetro γ , referente ao estimador W-GME, na última réplica executada. ■, valor do parâmetro γ em cada grupo, - - - - -, média do valor do parâmetro γ quando obtidos todos os valores do parâmetro para cada grupo, - - - - -, auxiliar na visualização da flutuação do parâmetro.	64

Lista de Tabelas

3.1	Tabela resumo dos erros de precisão dos cenários referentes à matriz de dados com $e \sim N(0, 1)$	34
3.2	Tabela resumo dos erros de precisão dos cenários referentes à matriz de dados com $e \sim t(3)$	35
3.3	Tabela resumo dos erros de precisão dos cenários referentes à matriz de dados com $e \sim C(0, 2)$	36
3.4	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 20$	43
3.5	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 20$	43
3.6	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 100$	46
3.7	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 100$	46
3.8	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $Obs = 20$	49
3.9	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $Obs = 20$	49

3.10	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $Obs = 100$	53
3.11	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $Obs = 100$	53
3.12	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 20$	57
3.13	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordado. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 20$	57
3.14	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 100$	61
3.15	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordado. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 100$	61
A.1	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 20$	73
A.2	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 20$	73
A.3	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 100$	74
A.4	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 100$	74

A.5	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 20$	75
A.6	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 20$	75
A.7	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$	76
A.8	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$	76
A.9	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 20$	77
A.10	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 20$	77
A.11	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 100$	78
A.12	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 100$	78
A.13	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 20$	79
A.14	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 20$	79

A.15	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 100$	80
A.16	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 100$	80
A.17	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 20$	81
A.18	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 20$	81
A.19	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 100$	82
A.20	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 100$	82
A.21	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $Obs = 20$	83
A.22	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $Obs = 20$	83
A.23	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $Obs = 100$	84
A.24	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $Obs = 100$	84

A.25	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $Obs = 20$	85
A.26	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $Obs = 20$	85
A.27	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $Obs = 100$	86
A.28	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $Obs = 100$	86
A.29	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 20$	87
A.30	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 20$	87
A.31	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 100$	88
A.32	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 100$	88
A.33	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 20$	89
A.34	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 20$	89

A.35	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 100$	90
A.36	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 100$	90
A.37	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $Obs = 20$	91
A.38	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $Obs = 20$	91
A.39	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $Obs = 100$	92
A.40	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $Obs = 100$	92
A.41	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $Obs = 20$	93
A.42	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $Obs = 20$	93
A.43	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $Obs = 100$	94
A.44	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $Obs = 100$	94

A.45	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 20$	95
A.46	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 20$	95
A.47	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 100$	96
A.48	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 100$	96
A.49	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 20$	97
A.50	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 20$	97
A.51	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 100$	98
A.52	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 100$	98
A.53	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $Obs = 20$	99
A.54	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $Obs = 20$	99

A.55	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $\mathbf{e} \sim t(3)$, $C = 20000$, $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$	100
A.56	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $\mathbf{e} \sim t(3)$, $C = 20000$, $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$	100
A.57	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $\mathbf{e} \sim t(3)$, $C = 20000$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 20$	101
A.58	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $\mathbf{e} \sim t(3)$, $C = 20000$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 20$	101
A.59	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $\mathbf{e} \sim t(3)$, $C = 20000$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 100$	102
A.60	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $\mathbf{e} \sim t(3)$, $C = 20000$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 100$	102
A.61	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $\mathbf{e} \sim t(3)$, $C = 20000$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 20$	103
A.62	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $\mathbf{e} \sim t(3)$, $C = 20000$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 20$	103
A.63	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $\mathbf{e} \sim t(3)$, $C = 20000$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$	104
A.64	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $\mathbf{e} \sim t(3)$, $C = 20000$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$	104

A.65	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 20$	105
A.66	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 20$	105
A.67	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 100$	106
A.68	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 100$	106
A.69	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $Obs = 20$	107
A.70	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $Obs = 20$	107
A.71	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $Obs = 100$	108
A.72	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $Obs = 100$	108
A.73	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $Obs = 20$	109
A.74	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $Obs = 20$	109

A.75	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $Obs = 100$	110
A.76	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $Obs = 100$	110
A.77	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 20$	111
A.78	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 20$	111
A.79	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 100$	112
A.80	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 100$	112
A.81	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 20$	113
A.82	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 20$	113
A.83	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 100$	114
A.84	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 100$	114

A.85	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $Obs = 20$	115
A.86	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $Obs = 20$	115
A.87	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $Obs = 100$	116
A.88	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $Obs = 100$	116
A.89	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $Obs = 20$	117
A.90	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $Obs = 20$	117
A.91	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $Obs = 100$	118
A.92	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $Obs = 100$	118
A.93	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 20$	119
A.94	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 20$	119

A.95	Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 100$	120
A.96	Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados. Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 100$	120

Lista de Abreviaturas

bGME	Procedimento de agregação <i>bagging</i> com estimativas dos coeficientes de regressão obtidas pelo estimador GME
bOLS	Procedimento de agregação <i>bagging</i> com estimativas dos coeficientes de regressão obtidas pelo estimador OLS
bW-GME	Procedimento de agregação <i>bagging</i> com estimativas dos coeficientes de regressão obtidas pelo estimador W-GME
GME	Máxima entropia generalizada
LRM	Modelo de regressão linear
LSCV	Validação cruzada de mínimos quadrados
ME	Máxima entropia
mGME	Procedimento de agregação <i>maggging</i> com estimativas dos coeficientes de regressão obtidas pelo estimador GME
mOLS	Procedimento de agregação <i>maggging</i> com estimativas dos coeficientes de regressão obtidas pelo estimador OLS
mW-GME	Procedimento de agregação <i>maggging</i> com estimativas dos coeficientes de regressão obtidas pelo estimador W-GME
NE	Entropia normalizada
nGME	Procedimento de agregação <i>neaggging</i> com estimativas dos coeficientes de regressão obtidas pelo estimador GME
nW-GME	Procedimento de agregação <i>neaggging</i> com estimativas dos coeficientes de regressão obtidas pelo estimador W-GME
OLS	Mínimos quadrados ordinários
W-GME	Máxima entropia generalizada ponderada

Nota: As siglas usadas nestas abreviações seguem a ordem da sua correspondente designação na literatura inglesa.

Notação Geral

- \mathbf{A} matriz (uma letra maiúscula a negrito)
- \mathbf{A}' transposta da matriz \mathbf{A}
- \mathbf{A}^{-1} inversa da matriz \mathbf{A}
- \mathbf{A}_N matriz quadrada de dimensão N
- \mathbf{a} vetor coluna (uma letra minúscula a negrito)
- \mathbf{a}' transposta do vetor coluna \mathbf{a} (um vetor linha)
- \mathbf{a}_k k -ésima coluna da matriz \mathbf{A}
- $\mathbf{1}_N$ vetor coluna de uns com dimensão $(N \times 1)$
- \mathbf{I}_N matriz identidade com dimensão $(N \times N)$
- \otimes produto de Kronecker
- \odot produto de Hadamard (elemento a elemento)

Notação Capítulo 3

$\hat{\beta}_{aggr}$	Coefficientes de regressão estimados após agregação
$\hat{\beta}_{aggr}$	Coefficientes de regressão estimados finais após agregação (média das réplicas)
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ $	Erro de predição 1
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ ^*$	Erro de predição 2
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	Erro de precisão 1
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	Erro de precisão 2
$s_{\hat{\beta}_{aggr}}^2$	Variância de $\hat{\beta}_{aggr}$
$s_{\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ }^2$	Variância do erro de predição 1 ($\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ $)
$s_{\ \hat{\beta} - \beta\ }^2$	Variância do erro de precisão 1 ($\ \hat{\beta} - \beta\ $)

Capítulo 1

Introdução

A motivação para este trabalho de investigação, bem como o objetivo que se ambiciona alcançar e a estrutura do documento, é apresentada ao longo deste capítulo.

1.1 Motivação

A regressão linear é uma das ferramentas mais importantes em análise estatística. É uma metodologia que permite modelar a relação entre as variáveis independentes e a variável dependente. A linearidade é uma das suas muitas vantagens, uma vez que torna o procedimento de estimação simples e, mais importante, as equações lineares permitem uma fácil e intuitiva interpretação. Esta é uma das razões pela qual o modelo linear e outros modelos semelhantes são tão difundidos em diferentes áreas de investigação, tais como medicina, sociologia, psicologia, física e economia, entre muitas outras áreas de investigação quantitativa. Como consequência, pode ser usada, por exemplo, para descrever relações entre variáveis de interesse, de modo a explicar processos ou fenómenos, ou para realizar previsões sobre a variável dependente em estudo. Dada a sua simplicidade matemática, esta metodologia traduz-se num algoritmo muito simples, de fácil e rápida implementação computacional. A sua complexidade é muito menor relativamente a outros algoritmos existentes para inferência estatística.

No contexto de *big data*, os conjuntos de dados são maiores e mais complexos, que crescem de forma exponencial. Usualmente, esses conjuntos apresentam um volume demasiado elevado para os *softwares* tradicionais de processamento de dados, que não conseguem geri-lo e fornecer análises adequadas da informação em estudo. Formalmente, a definição de *big data* supõe dados que contêm elevada variedade, que surgem em grande volume, com grande velocidade e dados com um nível de incerteza associado. Estes são comumente conhecidos como os quatro V's de *big-data*: Variedade (diferentes formas de dados), Volume (quantidade de dados), Velocidade (análise dos dados em transmissão) e Veracidade (incerteza dos dados). A análise de *big data* suscita problemas computacionais e problemas estatísticos que necessitam de ser tratados em simultâneo. Devido ao grande volume de dados, a carga computacional é um dos maiores problemas, tanto pelo nível de memória utilizado, como pelo tempo consumido na obtenção de resultados. Acresce que, nestes cenários de grande volume de informação, devido à variedade dos dados estes não são, frequentemente, homogêneos (Bühlmann e Meinshausen[1]). Dados não homogêneos traduzem-se em dados não independentes e identicamente distribuídos

(não i.i.d.) ou dados provenientes de uma distribuição não estacionária. Os métodos estatísticos tradicionais de estimação, quando implementados, por exemplo, em modelos lineares de regressão ou de classificação, falham em capturar esta estrutura de não homogeneidade presente nos dados, provocando um decréscimo no desempenho da predição e suscitando uma interpretação errônea dos parâmetros. Existem várias abordagens estatísticas para lidar com dados não homogêneos, nomeadamente modelos de efeitos mistos, modelos de mistura e modelos de regressão em termos de conglomerados, mas estes apresentam, geralmente, uma carga computacional muito elevada para problemas de *big data*. Os métodos de agregação visam contribuir para a resolução destas dificuldades através de amostragem aleatória no conjunto original de observações (população). Os grupos observados por amostragem são tratados separadamente e a informação individual obtida é agregada, posteriormente, segundo um determinado critério. No entanto, a presença de dados não homogêneos e afetados por colinearidade continua a gerar desafios do ponto de vista estatístico. Os métodos de estimação tradicionais usados em problemas mal-postos, nomeadamente em problemas afetados por colinearidade, fornecem soluções altamente instáveis.

Neste contexto, a abordagem *info-metrics* é uma ferramenta útil. Trata-se de uma abordagem inter-disciplinar para modelação científica, inferência e processamento de informação de forma eficiente. É a ciência de modelar e realizar inferência em condições de informação limitada e com ruído (Golan [2]). Do ponto de vista científico, esta abordagem encontra-se na interseção da teoria de informação, métodos estatísticos de inferência, matemática aplicada, econometria, teoria da complexidade, análise de decisão, modelação e filosofia da ciência (Golan [3]). Esta abordagem fornece uma estrutura de otimização para lidar com problemas mal-postos, ou seja, com problemas onde não existe informação suficiente para encontrar uma solução única. Estes problemas são extremamente comuns em ciência, tipicamente caracterizados por informação limitada, informação incompleta, colinearidade, observações atípicas, entre muitas outras dificuldades. Assim, *info-metrics* fornece uma estrutura matemática de otimização, tendo por base noções de informação, probabilidade e entropia relativa (Golan [4]), generalizando o princípio de máxima entropia (Jaynes [5, 6]). Este princípio estabelece que, em qualquer problema de inferência, a distribuição de probabilidade adequada para descrever a informação existente deverá ser obtida pela maximização da medida de entropia de Shannon (Shannon [7]), sujeita a toda a informação disponível. A discussão e enquadramento desta abordagem, todos os detalhes matemáticos, demonstrações e exemplos relativos a *info-metrics* encontram-se em Golan [2].

Desta forma, adquirem-se, assim, alguns dos recursos para lidar com os problemas relacionados com *big data* em contexto de regressão linear, nomeadamente na presença de não homogeneidade nos dados e elevada carga computacional, como também problemas que surgem de informação insuficiente ou afetada por colinearidade, os problemas mal-postos. Estes inconvenientes podem ser resolvidos com a ajuda de métodos de agregação e com a abordagem de *info-metrics*. Um primeiro trabalho na conjugação destes tópicos foi desenvolvido por Freitas [8], no qual esta dissertação se inspirou metodológica e computacionalmente.

1.2 Objetivo e estrutura da tese

O objetivo deste trabalho é obter estimativas adequadas para problemas de regressão linear com ruído, quando as variáveis explicativas são afetadas por colinearidade ou outro género de perturbação (correspondendo a uma variável dependente influenciada por ruído), e o conjunto de observações (população) é de elevada dimensão. Neste sentido, são simuladas matrizes de variáveis explicativas afetadas por colinearidade, e vetores de perturbações aleatórias modelados por diferentes distribuições de probabilidade, originando vetores de observações afetados por ruído. Da população extraem-se amostras aleatórias com repetição, variando o número de grupos e de observações por grupo. Posteriormente, são calculados os vetores de estimativas relativos aos coeficientes de regressão usando alguns dos estimadores mencionados na literatura para, por fim, usar metodologias de agregação para obter uma estimativa final para os parâmetros populacionais da regressão linear, agregando os vetores de estimativas obtidos em cada grupo. O intuito é analisar o desempenho destes métodos de agregação, mediante diferentes cenários adversos nos conjuntos de dados e recorrendo a diferentes estimadores, para além da alteração de parâmetros específicos nos métodos estudados. Esta dissertação constitui, assim, um desenvolvimento da investigação iniciada por Freitas [8].

Em adição ao capítulo inicial de introdução, no Capítulo 2 é discutido o contexto do trabalho e respetivo estado da arte. O Capítulo 3, o mais relevante deste trabalho, esclarece o estudo de simulação, elucidando sobre a sua implementação, com posterior discussão dos resultados obtidos. O Capítulo 4 conclui o trabalho, com resumo dos principais resultados alcançados.

Capítulo 2

Contexto e estado da arte

Os formalismos dos temas principais abordados neste trabalho são apresentados e discutidos neste capítulo. Na secção 2.1, é sumariado o modelo de regressão linear, cuja aplicação se estende a diversas áreas da ciência. Na secção 2.2, são analisados vários conceitos relacionados com entropia, máxima entropia e entropia normalizada, conceitos muito utilizadas no decorrer deste trabalho. De seguida, na secção 2.3, são examinados os três estimadores usados na obtenção das estimativas dos coeficientes de regressão, nomeadamente: o estimador OLS, um dos estimadores mais frequentemente mencionados na literatura; com particular atenção, o estimador GME, uma vez que tem um bom desempenho em dados afetados por colinearidade (um dos problemas abordados neste trabalho); e o W-GME, uma extensão do GME. Para além disto, na secção 2.4 é feita uma breve revisão dos métodos de agregação utilizados na obtenção das estimativas globais (finais após agregação) para os parâmetros de regressão desconhecidos, quando se enfrenta um problema de *big data*, em particular os métodos de agregação *bagging*, *maggining* e *neagging*. Para finalizar, na secção 2.5 é discutido como os modelos de regressão podem ser afetados por colinearidade e técnicas para detetar este problema.

2.1 Regressão Linear

O Modelo de Regressão Linear (LRM) considera que a relação entre a variável de resposta (explicada/predita ou dependente; ainda conhecida como regressando) e as variáveis independentes (variáveis explicativas ou regressores) é uma função linear dos parâmetros. O LRM é uma das ferramentas mais úteis de inferência estatística e, como tal, é usado como ponto de partida para uma grande parte das investigações estatísticas empíricas de modelação. A análise empírica permite obter estimativas dos parâmetros desconhecidos dos modelos e, geralmente, tenta avaliar conjecturas teóricas em relação ao comportamento da informação observada. Uma vez construído o modelo, este pode ser usado para previsão ou análise de comportamento.

O LRM é usado para estudar a relação entre uma variável dependente, e uma ou mais variáveis independentes, através da seguinte forma genérica:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}, \quad (2.1)$$

onde \mathbf{y} é um vetor ($N \times 1$) de observações com ruído, $\boldsymbol{\beta}$ é um vetor ($K \times 1$) de parâmetros

desconhecidos, \mathbf{X} é uma matriz ($N \times K$) conhecida de variáveis explicativas¹ (também denominada de matriz de *design*) e \mathbf{e} denota um vetor ($N \times 1$) de perturbações aleatórias (erros). O termo \mathbf{e} permite acomodar no modelo todos os fatores não observados que podem influenciar o valor da variável dependente \mathbf{y} e não traduzidos pelas variáveis explicativas existentes, tais como fatores de natureza aleatória do comportamento humano, ou erros de medida (aleatórios) das variáveis independentes. Assume-se que cada observação numa amostra $(y_i, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iK})$, com $i = 1, \dots, N$, é gerada por um processo subjacente descrito por

$$y_i = \beta_0 + x_{i1}\beta_1 + x_{i2}\beta_2 + \dots + x_{iK}\beta_K + e_i. \quad (2.2)$$

O objetivo é estimar os parâmetros desconhecidos do modelo, usar os dados para validar as conjecturas teóricas e, desta forma, usar o modelo para prever a variável \mathbf{y} . Os pressupostos subjacentes ao modelo de regressão clássico são discutidos, com grande rigor matemático, em Greene [9]. Um dos pressupostos tradicionais é o da normalidade, que se traduz na premissa de que as perturbações seguem uma distribuição normal de média zero e variância constante. Porém, este pressuposto é desnecessário na estimação de parâmetros, sendo apenas útil para a inferência estatística.²

2.2 Entropia

Nesta secção, são apresentados vários conceitos fundamentais que, posteriormente, serão aplicados não só em alguns dos estimadores utilizados na obtenção das estimativas dos coeficientes de regressão, como até numa das metodologias de agregação abordada para obter estimativas finais (globais) num problema de *big data*. Estas noções iniciais servirão posteriormente de base para o desenvolvimento da estrutura inferencial da abordagem de *info-metrics*.

2.2.1 Conceitos de entropia

Em termos estatísticos, o conceito de entropia reflete o que, em média, espera conhecer-se com as observações disponíveis, e depende da forma como se mede a informação. Em termos técnicos, a entropia mede a incerteza associada a uma variável aleatória e, assim, pode ser vista como uma medida da uniformidade desta variável. A entropia é, por isto, uma medida de informação esperada (ou ganho de informação), calculada em relação à “uniformidade”. Formalmente, seja $\mathbf{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_K\}$ um conjunto finito, e \mathbf{p} uma função massa de probabilidade adequada para \mathbf{A} . Uma distribuição de probabilidade “adequada” significa que todos os elementos de \mathbf{A} são não-negativos e que a soma desses K elementos é unitária. A fórmula de Hartley

$$I(\mathbf{A}_K) = \log_2 K, \quad (2.3)$$

¹A primeira coluna da matriz \mathbf{X} coincide, geralmente, com uma coluna de uns, correspondente ao termo constante. Quando esta coluna não existe, o termo constante não é contabilizado no modelo e a dimensão de K é ajustada em concordância, ou seja, corresponde ao número de variáveis independentes.

²Esta discussão terá sentido posteriormente, uma vez que nas simulações descritas na Secção 3, são gerados vetores de perturbações aleatórias com outras distribuições para além da distribuição Normal.

determina a quantidade de informação necessária para representar todos os elementos do conjunto \mathbf{A} formado por K elementos discretos (Hartley [10]). Uma vez que é o logaritmo do número de possibilidades (K), esta é uma medida de informação logarítmica. Shannon [7] baseou-se na fórmula de Hartley para desenvolver o seu critério de informação. O conteúdo de informação de Shannon de um resultado a_k é

$$h(a_k) = h(p_k) \equiv \log_2 \frac{1}{p_k}. \quad (2.4)$$

A entropia de Shannon representa o conteúdo de informação esperado de um determinado resultado para uma certa variável aleatória, e define-se como

$$H(\mathbf{p}) \equiv \sum_{k=1}^K p_k \log_2 \frac{1}{p_k} = - \sum_{k=1}^K p_k \log_2 p_k = E \left[\log_2 \left(\frac{1}{p(X)} \right) \right], \quad (2.5)$$

para a variável aleatória X , onde $0 \log 0 = 0$. Este critério de informação mede a incerteza associada a X que é implicada pela função massa de probabilidade \mathbf{p} . A escolha da base logarítmica corresponde à escolha que se deseja para medir a informação. Se a base usada for 2, as unidades resultantes são *bits*, um dígito binário que é a unidade básica de informação. Toda a informação pode ser especificada em termos de *bits*. Por exemplo, uma variável aleatória com dois possíveis resultados armazena um *bit* de informação. N dessas variáveis aleatórias armazenam N *bits* de informação, uma vez que o número total de estados/resultados é 2^N e $\log_2(2^N) = N$ (Shannon [7]). A escolha da base 2 constitui a forma mais eficiente de codificar e decodificar os dados. O critério de informação de Shannon é, por isto, comumente expresso em *bits*. A medida de entropia $H(\mathbf{p})$ atinge o seu máximo quando $p_1 = p_2 = \dots = p_K = \frac{1}{K}$ (a distribuição de probabilidade é uniforme, o que corresponde a probabilidades pontuais iguais), transformando-se na fórmula de Hartley (2.3), e o seu mínimo quando a função de probabilidade é uma função de massa pontual ($\exists k \in \{1, 2, \dots, K\} : p_k = 1$ e $p_j = 0, \forall j \neq k$). Além disso, esta medida é uma função da distribuição de probabilidade \mathbf{p} , e não uma função dos valores concretos assumidos pela variável aleatória. Se X é uma variável aleatória com possíveis realizações distintas x_1, x_2, \dots, x_K , com probabilidades correspondentes p_1, p_2, \dots, p_K , a entropia $H(\mathbf{p})$ não depende dos valores x_1, x_2, \dots, x_K de X , pelo contrário, depende de p_1, p_2, \dots, p_K . Exemplos sobre o conceito de entropia encontram-se em Golan [3].

2.2.2 Princípio de máxima entropia

O princípio de Máxima Entropia (ME) foi desenvolvido por Jaynes [5, 6], baseando-se na medida de entropia de Shannon. Mais tarde, Golan et al. [11] discutem e ilustram este princípio, tendo como propósito a sua posterior generalização. Considerando

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{p}, \quad (2.6)$$

onde \mathbf{y} denota o vetor ($N \times 1$) de observações, \mathbf{X} denota uma matriz ($N \times K$) não invertível com $N < K$, e \mathbf{p} denota o vetor ($K \times 1$) de probabilidades desconhecidas, o princípio de ME consiste na escolha de \mathbf{p} que maximiza a entropia de Shannon, equação (2.5), ou seja,

$$H(\mathbf{p}) = - \sum_{k=1}^K p_k \ln p_k = -\mathbf{p}' \ln \mathbf{p}, \quad (2.7)$$

sujeito às restrições de consistência com o modelo $\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{p}$, e às restrições de aditividade, $\mathbf{p}'\mathbf{1}_K = 1$. A entropia representa a medida de incerteza associada a uma distribuição de probabilidade, fornecendo uma base lógica para atribuir probabilidades que sejam consistentes com a informação no problema $\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{p}$. Visto isto, o princípio de ME escolherá a distribuição que maximiza a entropia, de entre todas as distribuições consistentes com a informação conhecida. Não usando mais informação do que a conhecida, é escolhido o vetor \mathbf{p} mais próximo da distribuição uniforme e, simultaneamente, consistente com os dados.

Formalmente, define-se o estimador de ME como

$$\arg \max_{\mathbf{p}} \{-\mathbf{p}' \ln \mathbf{p}\}, \quad (2.8)$$

sujeito às restrições de consistência com o modelo (com os dados conhecidos) e de aditividade,

$$\begin{cases} \mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{p} \\ \mathbf{1}'_K \mathbf{p} = 1 \end{cases}. \quad (2.9)$$

Deste modo, o formalismo de ME permite resolver o problema sem ruído, $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$, usando o procedimento de otimização (maximização) descrito acima, convertendo-o num problema de inferência, onde o objetivo é formar a melhor previsão a partir da informação disponível. O princípio de ME fornece, assim, a base para transformar a informação contida nos dados numa distribuição de probabilidade que descreve o estado de conhecimento, refletindo a incerteza acerca dos resultados individuais e, assim, considerar não só os dados, mas também informação relevante acerca da variedade dos diferentes resultados possíveis (Golan et al. [11]).

A solução deste problema não apresenta uma solução analítica de forma fechada,³ mas é possível obter-se uma aproximação numérica da solução através dos multiplicadores de Lagrange ($\boldsymbol{\lambda}$ e μ). A função de Lagrange é da forma

$$\mathcal{L} = -\mathbf{p} \ln \mathbf{p} + \boldsymbol{\lambda}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{p}) + \mu(1 - \mathbf{p}'\mathbf{1}_K). \quad (2.10)$$

Resolvendo as equações de optimalidade, obtém-se

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{\exp(-\mathbf{X}'\hat{\boldsymbol{\lambda}})}{\Omega(\hat{\boldsymbol{\lambda}})}, \quad (2.11)$$

onde

$$\Omega(\hat{\boldsymbol{\lambda}}) = \sum_{k=1}^K \exp(-\mathbf{X}'\hat{\boldsymbol{\lambda}}) \quad (2.12)$$

é o fator de normalização, que converte as probabilidades relativas em probabilidades absolutas. A solução (2.11) estabelece uma relação única não linear entre $\hat{\mathbf{p}}$ e \mathbf{y} através de $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$.

Para sucintamente ilustrar o princípio de ME, considere-se o famoso problema dos dados de Jaynes [5, 6]. Possuindo apenas a média dos resultados, y , de um grande número de lançamentos independentes de um dado, como estimar o vetor de probabilidades

³Uma solução diz-se de forma fechada se resolve um dado problema em termos de funções e operações matemáticas, a partir de um dado conjunto geralmente aceite.

p_1, p_2, \dots, p_6 , isto é, a probabilidade de cada resultado elementar possível? Observe-se que a distribuição de frequências é desconhecida, e que a informação disponível é somente a média dos resultados. A formulação de ME para este problema é a seguinte:

$$\max H(\mathbf{p}) = - \sum_{k=1}^6 p_k \ln p_k \quad (2.13)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 p_k k &= y, \\ \sum_{k=1}^6 p_k &= 1. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Este é um problema similar ao problema (2.9) com uma observação (a média) e seis parâmetros desconhecidos. Usando a metodologia baseada na ME, é possível atribuir uma probabilidade única a cada resultado elementar possível. Se, por exemplo, o resultado médio for 3.5, o princípio de ME atribui pesos iguais a todos os resultados. Se a média dos resultados for maior/menor que 3.5, o diagrama de barras correspondente às probabilidades estimadas evidenciará assimetria negativa/positiva, respetivamente.

2.2.3 Entropia normalizada

Para medir o conteúdo de informação de um sistema e a importância da contribuição de cada observação na redução da incerteza associada, Golan et al. [12] e Soofi [13] definiram a medida de Entropia Normalizada (NE). Na formulação de ME, o nível máximo da incerteza ocorre quando as restrições de consistência com os dados, $\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{p}$, não são informativas e a distribuição de probabilidade relativamente aos K estados é uniforme, como afirmado por Golan et al. [11]. À medida que cada parte de informação é adicionada, isto é, cada restrição de consistência introduz informação no modelo, existe um afastamento da distribuição uniforme o que, conseqüentemente, implica uma redução da incerteza associada. A proporção da restante incerteza total é medida pela NE

$$S(\hat{\mathbf{p}}) = - \frac{\sum_k \hat{p}_k \ln \hat{p}_k}{\ln(K)}, \quad (2.15)$$

onde $S(\hat{\mathbf{p}}) \in [0, 1]$ e $\ln(K)$ representa a incerteza máxima (o nível de entropia da distribuição uniforme com K resultados equiprováveis). Um valor de $S(\hat{\mathbf{p}}) = 0$ implica total ausência de incerteza (isto é, $\exists k \in \{1, 2, \dots, K\} : p_k = 1$ e $p_j = 0, \forall j \neq k$) e $S(\hat{\mathbf{p}}) = 1$ implica incerteza perfeita (isto é, $p_k = 1/K, \forall k = 1, 2, \dots, K$). Soofi [13] introduz uma medida análoga, denominada índice de informação, denotada por II , utilizada para medir a redução da incerteza: $1 - S(\hat{\mathbf{p}})$.

Uma vez que a NE, $S(\hat{\mathbf{p}})$, é uma medida relativa da incerteza associada ao sistema se, por exemplo, uma observação do conjunto de dados for eliminada, é possível comparar $S(N)$ com $S(N - 1)$. Se as duas medidas forem iguais, prontamente se conclui que não existe informação adicional incorporada na observação/restrrição eliminada. No entanto, se $S(N) < S(N - 1)$, esta observação fornece uma distribuição de probabilidade mais informativa e, conseqüentemente, permite reduzir a incerteza associada aos parâmetros desconhecidos.

2.3 Métodos de estimação

Existem várias abordagens para estimar os parâmetros do LRM. Nesta secção, em particular, serão discutidos os estimadores OLS, GME e W-GME. O estimador OLS é o estimador mais habitual para a estimação dos parâmetros desconhecidos do LRM, embora o seu desempenho seja afetado, entre outros fatores, pela presença de colinearidade nos dados. O estimador GME procura lidar com a existência de colinearidade nos dados, usando o princípio de ME discutido na secção 2.2.2, e o estimador W-GME é uma extensão do estimador GME, que permite introduzir diferentes pesos nas entropias existentes na função objetivo, associadas à precisão e à predição.

A secção 2.2 focou-se na utilização do princípio de ME na resolução de sistemas que podem ser representados por relações determinísticas (modelos sem ruído), isto é, a relação subjacente é não estocástica. Porém, na prática, dadas as características dos dados e a natureza dos processos de geração subjacentes, as observações raramente estão desprovidas de erros de medição e poucas relações são livres de “surpresas” (Golan et al. [11]). Na presença de tais perturbações, a tarefa de recuperação de informação traduz-se através de problemas com ruído. A modelação estatística de fenómenos reais é frequentemente descrita em termos do LRM. Dada a simplicidade e flexibilidade das formas lineares, este modelo é um recurso conveniente na formulação de problemas com ruído. Como tal, considerar-se-á unicamente o LRM (ver Secção 2.1) neste trabalho.

2.3.1 Estimador de mínimos quadrados ordinários - OLS

O estimador de Mínimos Quadrados Ordinários (OLS) é o método mais popular para obter as estimativas dos parâmetros desconhecidos no LRM, embora existam cenários em que outros estimadores (incluindo variantes do OLS original) são preferidos (por exemplo, na regressão robusta ou em regularização). Formalmente, seja $\hat{\beta}$ o vetor das estimativas dos parâmetros da população, e ϵ o vetor de resíduos⁴ que assume a forma

$$\epsilon = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta}. \quad (2.16)$$

As estimativas para os parâmetros desconhecidos são obtidas resolvendo o problema de minimização quadrático

$$\arg \min_{\hat{\beta}} S(\hat{\beta}), \quad (2.17)$$

onde a função objetivo $S(\hat{\beta})$ é dada por

$$S(\hat{\beta}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta}\|^2, \quad (2.18)$$

isto é, o vetor estimado dos coeficientes de regressão minimiza a soma dos quadrados dos resíduos. A soma dos quadrados dos resíduos, $\epsilon'\epsilon$ pode ser reescrita como

$$\epsilon'\epsilon = \mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\mathbf{y}'\mathbf{X}\hat{\beta} + \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta}. \quad (2.19)$$

⁴O vetor e refere-se a fenómenos não observáveis, e o vetor de resíduos ϵ refere-se à diferença entre os valores observados e os valores preditos da variável dependente, para uma determinada estimação, baseada num determinado conjunto de observações, pelo que $e \neq \epsilon$.

A condição necessária para o mínimo consiste na derivada da equação 2.19, igualada a zero e resolvida em ordem a $\hat{\beta}$. Desta forma, obtêm-se as denominadas equações normais de mínimos quadrados (Greene [9])

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{y}, \quad (2.20)$$

onde a matriz $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ é denominada matriz Gram. Como a inversa da matriz Gram existe (pelos pressupostos do LRM), então o vetor estimado dos coeficientes de regressão linear é dado por

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}. \quad (2.21)$$

Uma vez que os estimadores OLS no vetor $\hat{\beta}$ são uma combinação linear das variáveis observadas (\mathbf{X} e \mathbf{y} , sendo que \mathbf{y} é uma variável aleatória), estes são também variáveis aleatórias, com certas propriedades algébricas. Estas propriedades podem ser encontradas em Greene [9].

2.3.2 Estimador de máxima entropia generalizada - GME

Ao aplicar métodos tradicionais de estimação em problemas com ruído baseados no LRM, é frequente a obtenção de soluções instáveis, em particular, na violação de pressupostos clássicos, um cenário frequente na modelação de problemas reais. Assim sendo, deve optar-se por utilizar uma base alternativa de recuperação de informação para resolver os diversos problemas encontrados na prática. O formalismo de ME é uma abordagem viável para lidar com problemas lineares sem a presença de ruído. Adicionalmente, esta abordagem pode ser estendida para contabilizar a presença de perturbações desconhecidas o que, tipicamente, representa um desafio para os outros métodos baseados na entropia.

Golan et al. [11] estenderam o formalismo de ME a problemas com ruído descritos por modelos de regressão linear. Suponha-se que é possível obter informação prévia ou informação não amostral, tanto sobre a componente de sinal, β , como sobre a componente de ruído, e . Por exemplo, na prática é comum deter algum conhecimento prévio sobre a magnitude ou intervalo de valores das incógnitas presentes no sistema. Seguindo este raciocínio, podem definir-se variáveis aleatórias discretas com pesos prévios e suportes finitos, que refletirão a informação não amostral acerca de β e e . Desta maneira, o modelo linear pode ser escrito em termos destas variáveis aleatórias, e o problema de estimação irá converter-se num problema de recuperação das distribuições de probabilidade para β e e , que coordenam a informação prévia disponível com a informação amostral observada. É importante sublinhar que as variáveis aleatórias são usadas apenas como um conceito abstrato para expressar o conhecimento amostral e não amostral disponível.

Uma vez que este conceito é amplamente utilizado no decorrer deste trabalho, uma descrição mais detalhada é efetuada ao longo deste capítulo.

Neste contexto, Golan et al. [11] consideraram cada β_k como uma variável aleatória discreta com um suporte compacto e $2 \leq M < \infty$ resultados possíveis, $\mathbf{z}'_k = [z_{k1}, \dots, z_{kM}]$, tal que $z_{k1} \leq z_{k2} \leq \dots \leq z_{kM}$, nos quais z_{k1} e z_{kM} são os valores extremos plausíveis de β_k (limites inferiores e superiores, respetivamente). Então, pode expressar-se β_k como uma combinação convexa desses dois pontos. Exemplificando este conceito, suponha-se que $M = 2$. Assim, existe um $p_k \in [0, 1]$ tal que

$$\beta_k = p_k z_{k1} + (1 - p_k) z_{kM}. \quad (2.22)$$

Este raciocínio pode ser estendido a cada um dos elementos de β , e o espaço de parâmetros, \mathcal{B} , pode ser representado por um hiper-rectângulo compacto $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^K$.

Para expressar os parâmetros num formato mais geral, seja z_k um conjunto de M pontos que abrangem a k -ésima dimensão de \mathfrak{S} . Dado um vetor de pesos positivos, $\mathbf{p}_k > \mathbf{0}$, o k -ésimo parâmetro pode ser expresso como uma combinação convexa dos pontos \mathbf{z}_k com pesos \mathbf{p}_k

$$\beta_k = \mathbf{z}'_k \mathbf{p}_k, \quad (2.23)$$

onde $\mathbf{p}_k = [p_{k1}, \dots, p_{kM}]$ é um vetor ($M \times 1$) de pesos positivos, em que a soma destes é unitária. Complementarmente, essas combinações convexas podem ser reunidas na forma matricial, tal que qualquer $\beta \in \text{int}(\mathfrak{S})$ pode ser descrito como

$$\beta = \mathbf{Z}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}'_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{z}'_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{z}'_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_K \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

onde \mathbf{Z} é uma matriz ($K \times KM$) de valores de suporte e $\mathbf{p} > \mathbf{0}$ é um vetor ($KM \times 1$) de pesos.

O vetor de perturbações, \mathbf{e} , é considerado como sendo um vetor aleatório com parâmetros de localização (média) e escala (desvio padrão) finitos. À semelhança do vetor de parâmetros desconhecidos β , representa-se a incerteza no que diz respeito aos resultados do processo de erro ao caracterizar cada e_n como uma variável aleatória discreta e finita com $2 \leq J < \infty$ resultados possíveis. Suponha-se que existem limites de erro inferiores e superiores, v_{n1} e v_{nJ} respetivamente, para cada e_n , tal que exista elevada confiança que cada e_n está compreendido entre os limites estabelecidos. Assim, cada e_n pode ser escrito como

$$e_n = \mathbf{v}'_n \mathbf{w}_n, \quad (2.25)$$

onde $\mathbf{v}'_n = [v_{n1}, \dots, v_{nJ}]$, com $v_{n1} \leq v_{n2} \leq \dots \leq v_{nJ}$, é um suporte finito para e_n , e $\mathbf{w}_n = [w_{n1}, \dots, w_{nJ}]$ é um vetor ($J \times 1$) de pesos positivos, sendo que a soma destes é unitária. Para exemplificar este conceito, suponha-se que $J = 2$. Cada perturbação pode ser escrita como

$$e_n = w_n v_{n1} + (1 - w_n) v_{nJ}, \quad (2.26)$$

para algum $w_n \in (0, 1)$. Os $J \geq 2$ pontos podem ser usados para expressar ou recuperar informação adicional sobre e_n . Assumindo, por exemplo, que a distribuição de erro é simétrica e centrada em torno de 0, é possível especificar um suporte simétrico, $v_{n1} = -v_{nJ}$, para cada n .

As N perturbações desconhecidas podem ser escritas na forma matricial como

$$\mathbf{e} = \mathbf{V}\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}'_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{v}'_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{v}'_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_N \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

onde \mathbf{V} é uma matriz ($N \times NJ$) de valores de suporte e \mathbf{w} é um vetor ($NJ \times 1$) de pesos. Como anteriormente, restringem-se os pesos para serem estritamente positivos e terem soma unitária para cada n .

Usando as incógnitas reparametrizadas, $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{Z}\mathbf{p}$ e $\mathbf{e} = \mathbf{V}\mathbf{w}$, pode reescrever-se o modelo (2.1) como

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e} = \mathbf{XZ}\mathbf{p} + \mathbf{V}\mathbf{w}. \quad (2.28)$$

Essencialmente, cada β_k , $k = 1, 2, \dots, K$, e cada e_n , $n = 1, 2, \dots, N$, são percebidos como valores esperados das variáveis aleatórias discretas z_k e v_n , respetivamente, com $M \geq 2$ e $J \geq 2$ resultados possíveis, dentro dos limites inferiores e superiores dos correspondentes espaços de suporte, e a implementação deste conceito pode ser vista como a forma de expressar a incerteza associada a $\boldsymbol{\beta}$ e \mathbf{e} .

Analisando noutra perspetiva, os vetores de pesos \mathbf{p} e \mathbf{w} são entendidos como vetores de probabilidades desconhecidas a estimar, pelo que o vetor erro irá ser considerado como outro vetor de parâmetros desconhecidos a ser estimado em simultâneo com o vetor $\boldsymbol{\beta}$. O objetivo do estimador de máxima entropia generalizada será recuperar os parâmetros desconhecidos através do conjunto de probabilidades \mathbf{p} e \mathbf{w} . Como solução ótima, estas probabilidades devem satisfazer as restrições de consistência com o modelo,

$$\mathbf{y} = \mathbf{XZ}\mathbf{p} + \mathbf{V}\mathbf{w}, \quad (2.29)$$

e as restrições de aditividade (ou de normalização) necessárias para \mathbf{p} e \mathbf{w} , respetivamente,

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_K &= (\mathbf{I}_K \otimes \mathbf{1}'_M)\mathbf{p}, \\ \mathbf{1}_N &= (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{1}'_J)\mathbf{w}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Assim, Golan et al. [11] propuseram o estimador de Máxima Entropia Generalizada (GME) para o problema linear com ruído definido, formalmente, como

$$\arg \max_{\mathbf{p}, \mathbf{w}} \{ -\mathbf{p}' \ln \mathbf{p} - \mathbf{w}' \ln \mathbf{w} \}, \quad (2.31)$$

sujeito às restrições de consistência (com o modelo) e de aditividade (para \mathbf{p} e \mathbf{w}),

$$\begin{cases} \mathbf{y} = \mathbf{XZ}\mathbf{p} + \mathbf{V}\mathbf{w}, \\ \mathbf{1}_K = (\mathbf{I}_K \otimes \mathbf{1}'_M)\mathbf{p}, \\ \mathbf{1}_N = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{1}'_J)\mathbf{w}. \end{cases} \quad (2.32)$$

Este estimador é o procedimento de otimização da estrutura inferencial da abordagem de *info-metrics*. As restrições de consistência são selecionadas de modo a refletir toda a informação disponível para o problema em particular. Nas aplicações práticas do LRM, é frequente obter todas as N observações consistentes com o processo de geração de dados subjacente, $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}$, pelo que cada observação pode ser usada com uma restrição única. Outras abordagens deste estimador são descritas em, por exemplo, Golan [3].

Dado que a função objetivo do GME é estritamente côncava no interior do conjunto das restrições de aditividade, apenas existirá uma solução única se a intersecção entre o conjunto das restrições de consistência e o conjunto das restrições de aditividade for não-vazio. Tal como no formalismo de ME, este estimador selecionará as probabilidades nos suportes \mathbf{Z} e \mathbf{V} que são mais próximas da distribuição uniforme, e satisfazem a informação observada. Os vetores de probabilidade ótimos, $\hat{\mathbf{p}}$ e $\hat{\mathbf{w}}$, são usados para obter estimativas pontuais do vetor de parâmetros desconhecidos e do vetor de perturbações desconhecidas, tal que

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}} &= \mathbf{Z}\hat{\mathbf{p}}, \\ \hat{\mathbf{e}} &= \mathbf{V}\hat{\mathbf{w}}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Resumidamente, a estimação dos parâmetros desconhecidos é dada por $\hat{\beta} = \mathbf{Z}\hat{\mathbf{p}}$, com $\hat{\mathbf{p}}$ derivado do problema de máxima entropia, cuja função objetivo é descrita por (2.31) e as restrições são descritas em (2.32). O princípio fundamental deste estimador é a obtenção de estimativas recorrendo somente à informação disponível e, conseqüentemente, o estimador de máxima entropia não é restringido por nenhuma suposição externa ou pressupostos convenientes. A informação utilizada é a informação observada nos dados, a informação contida nas restrições sobre os valores admissíveis para β e a informação inerente à estrutura do modelo, incluindo a escolha dos suportes para β_k . Uma vez que o valor da função objetivo aumenta à medida que os pesos p_n e w_n são distribuídos mais uniformemente, qualquer desvio desta uniformidade representará o efeito das restrições de dados na ponderação dos pontos de suportes usados para representar β e \mathbf{e} . Este facto permite considerar o estimador GME como um estimador de contração, que contrairá $\hat{\beta}$ para os centros dos suportes definidos na especificação de \mathbf{Z} (Golan et al. [11]). Algumas propriedades do estimador GME, como consistência e normalidade assintótica, são discutidas em detalhe, por exemplo em Mittelhammer et al. [14]. Não obstante, algum detalhe matemático relativo à estrutura de otimização é apresentado de seguida.

O estimador GME pode ser interpretado como um caso particular do estimador de entropia cruzada generalizada, através da minimização da função objetivo

$$I(\mathbf{p}, \mathbf{w}) = \mathbf{p}' \ln \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}} + \mathbf{w}' \ln \frac{\mathbf{w}}{\mathbf{u}}, \quad (2.34)$$

sujeita às mesmas restrições anteriores de consistência (2.29) e aditividade (2.30), onde \mathbf{q} e \mathbf{u} representam vetores uniformemente distribuídos. Seja \mathcal{A} o conjunto de restrições de aditividade e $\text{int}(\mathcal{A})$ o interior desse conjunto. É possível reescrever \mathcal{A} como um produto cartesiano dos dois subconjuntos (2.30) que fazem parte do conjunto total de restrições de aditividade, formando um conjunto não-vazio e compacto. O conjunto de restrições do modelo (2.29) restringirá ainda mais \mathcal{A} àquelas distribuições de probabilidade que são mais “consistentes” com os dados. O conjunto que engloba todas as restrições do problema de otimização apresenta-se como

$$\mathcal{A}^* = \{(\mathbf{p}, \mathbf{w}) \in \text{int}(\mathcal{A}) : \mathbf{y} = \mathbf{XZ}\mathbf{p} + \mathbf{V}\mathbf{w}\}. \quad (2.35)$$

Assumindo que $\mathcal{A}^* \neq \emptyset$, o problema de otimização (2.34) pode ser resolvido usando o método de Lagrange. A equação de Lagrange assume a forma

$$\mathcal{L} = I(\mathbf{p}, \mathbf{w}) + \boldsymbol{\lambda}'[\mathbf{y} - \mathbf{XZ}\mathbf{p} - \mathbf{V}\mathbf{w}] + \boldsymbol{\theta}'[\mathbf{1}_K - (\mathbf{I}_K \otimes \mathbf{1}'_M)\mathbf{p}] + \boldsymbol{\tau}'[\mathbf{1}_N - (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{1}'_J)\mathbf{w}], \quad (2.36)$$

onde $\boldsymbol{\lambda}$ é um vetor ($N \times 1$), $\boldsymbol{\theta}$ é um vetor ($K \times 1$) e $\boldsymbol{\tau}$ é um vetor ($N \times 1$), correspondentes aos multiplicadores de Lagrange. Resolvendo as condições de primeira ordem, obtém-se

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{q} \odot \exp(\mathbf{Z}'\mathbf{X}'\hat{\boldsymbol{\lambda}}) \odot \{(\mathbf{I}_K \otimes \mathbf{1}_M\mathbf{1}'_M)[\mathbf{q} \odot \exp(\mathbf{Z}'\mathbf{X}'\hat{\boldsymbol{\lambda}})]\}^{-1}, \quad (2.37)$$

sendo que as suas probabilidades individuais assumem a forma

$$\hat{p}_{km} = \frac{\exp(z_{km}\mathbf{x}'_k\hat{\boldsymbol{\lambda}})}{\Omega_k(\hat{\boldsymbol{\lambda}})}, \quad (2.38)$$

onde \mathbf{x}_k é a k -ésima coluna de \mathbf{X} e \mathbf{q} representa um vetor uniformemente distribuído. O fator de normalização para \hat{p}_{km} é

$$\Omega_k(\hat{\boldsymbol{\lambda}}) = \sum_{m=1}^M \exp(z_{km} \mathbf{x}'_k \hat{\boldsymbol{\lambda}}), \quad (2.39)$$

que é também conhecido como função de partição (Golan et al. [11]).

De forma análoga obtém-se, para a componente de ruído, o vetor de probabilidade ótimo

$$\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{u} \odot \exp(\mathbf{V}' \hat{\boldsymbol{\lambda}}) \odot \{(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{1}_J \mathbf{1}'_J) [\mathbf{u} \odot \exp(\mathbf{V}' \hat{\boldsymbol{\lambda}})]\}^{-1}, \quad (2.40)$$

com probabilidades individuais

$$\hat{w}_{nj} = \frac{\exp(v_{nj} \hat{\boldsymbol{\lambda}})}{\Psi_n(\hat{\boldsymbol{\lambda}})}, \quad (2.41)$$

onde \mathbf{u} representa um vetor uniformemente distribuído. A função de partição para $\hat{\mathbf{w}}$ é

$$\Psi_n(\hat{\boldsymbol{\lambda}}) = \sum_{j=1}^J \exp(v_{nj} \hat{\boldsymbol{\lambda}}). \quad (2.42)$$

Detalhes adicionais, incluindo a dedução de alguns destes resultados, encontram-se em Golan et al. [11]. Por último, para verificar a unicidade da solução, observe-se que a matriz Hessiana da função objetivo é

$$\nabla_{(p, w)(p', w')} \mathbf{I}(\mathbf{p}, \mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

onde \mathbf{P}^{-1} é uma matriz diagonal ($KM \times KM$) com elementos p_{km}^{-1} e \mathbf{W}^{-1} é uma matriz diagonal ($NJ \times NJ$) com elementos w_{nj}^{-1} . A matriz (2.43) é definida positiva para $\mathbf{p}, \mathbf{w} > \mathbf{0}$, pelo que satisfaz a condição suficiente para convexidade estrita. Logo, existe um mínimo global único para o problema se $\mathcal{A}^* \neq \emptyset$, isto é, se a intersecção entre o conjunto das restrições de consistência e o conjunto das restrições de aditividade for não-vazio (Golan et al. [11]).

Naturalmente, as soluções do GME, $\hat{\mathbf{p}}$ e $\hat{\mathbf{w}}$, satisfazem as restrições de aditividade e são estritamente positivas. No entanto, estas dependem dos multiplicadores de Lagrange, $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$, para as restrições de consistência. A única informação restante nas condições de primeira ordem é o conjunto de restrições do modelo, que não são uma função de $\boldsymbol{\lambda}$. Tal como no formalismo de ME, o problema GME não tem uma solução de forma fechada e, por isso, a solução deve ser encontrada através de métodos de otimização numérica. Ainda que na atualidade o poder computacional não provoque uma limitação séria na investigação empírica, continuam a existir diversas vantagens no uso de técnicas eficientes que podem ser usadas num grande conjunto de ambientes computacionais. Posto isto, é possível reescrever o problema de otimização com restrições num problema sem restrições, possibilitando o uso de um vasto conjunto de métodos de otimização numérica sem restrições. Uma vez que as probabilidades ótimas satisfazem as restrições de aditividade para todo o $\boldsymbol{\lambda}$, os termos associados a essas restrições podem ser retirados da equação de

Lagrange. Para um $\boldsymbol{\lambda}$ arbitrário, sejam $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\lambda})$ e $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\lambda})$ as formas funcionais das probabilidades GME ótimas, equações (2.37) e (2.40). Substituindo estas formas na expressão de Lagrange original (2.36), a função objetivo assumirá a forma

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{\lambda} - \sum_{k=1}^K \ln(\Omega_k(\boldsymbol{\lambda})) - \sum_{n=1}^N \ln(\Psi_n(\boldsymbol{\lambda})) \equiv \mathcal{M}(\boldsymbol{\lambda}), \quad (2.44)$$

onde $\mathcal{M}(\boldsymbol{\lambda})$ é denominada função de valor mínimo (Golan et al. [11]). Esta pode ser interpretada como o valor esperado da função de log-verosimilhança com restrições. Para idealizar isto, recorde-se que é expressada a incerteza acerca de $\boldsymbol{\beta}$ e de \boldsymbol{e} ao interpretá-los como variáveis aleatórias nos suportes \boldsymbol{Z} e \boldsymbol{V} , respetivamente. Se $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\lambda})$ e $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\lambda})$ forem interpretados como famílias de funções de massa de probabilidade para essas variáveis aleatórias, a função de log-verosimilhança conjunta pode ser descrita na forma multinomial como

$$S^{-1}l(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_k \sum_m f_{km} \ln(p_{km}(\boldsymbol{\lambda})) + \sum_n \sum_j g_{nj} \ln(w_{nj}(\boldsymbol{\lambda})), \quad (2.45)$$

onde f_{km} e g_{nj} são as frequências observadas dos resultados z_{km} e v_{nj} , respetivamente, para uma amostra de dimensão S .

Repare-se que as distribuições de frequência e de probabilidade são apenas uma estrutura conceptual para representar a incerteza associada aos parâmetros desconhecidos, uma vez que, efetivamente, as distribuições de frequência não existem. No entanto, pode formar-se uma versão análoga da função de log-verosimilhança ao substituir as frequências pelas probabilidades associadas. Por substituição, a equação (2.45) converte-se no valor esperado da função de log-verosimilhança

$$E[l(\boldsymbol{\lambda})] = \boldsymbol{p}'(\boldsymbol{\lambda}) \ln(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\lambda})) + \boldsymbol{w}'(\boldsymbol{\lambda}) \ln(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\lambda})). \quad (2.46)$$

Para assegurar que $E[l(\boldsymbol{\lambda})]$ satisfaz as propriedades da amostra observada, o valor esperado da função de log-verosimilhança será maximizado, sujeito às restrições de consistência. Simplificando a expressão tal como efetuado na equação (2.44), e impondo as restrições de consistência por substituição, verifica-se que o valor esperado da função de log-verosimilhança com restrições é simplesmente a função de valor mínimo, $\mathcal{M}(\boldsymbol{\lambda})$.

Portanto, a versão dual do problema GME consiste na escolha do $\boldsymbol{\lambda}$ que maximiza a função de log-verosimilhança esperada com restrições. O problema GME dual sem restrições é equivalente ao problema GME primal com restrições, se a seguinte propriedade for satisfeita.

Proposição 2.3.1 *Se $\mathcal{A}^* \neq \emptyset$, a solução ótima para o problema GME, $(\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{\boldsymbol{w}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}})$, satisfaz a propriedade de ponto de sela:*

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{w}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) \geq \mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{\boldsymbol{w}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) \geq \mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{\boldsymbol{w}}, \boldsymbol{\lambda}). \quad (2.47)$$

A prova da propriedade de ponto de sela encontra-se em Golan et al. [11]. A proposição implica que a equação de Lagrange é uma função côncava dos multiplicadores de Lagrange desconhecidos, $\boldsymbol{\lambda}$. Em termos da função de valor mínimo, $\mathcal{M}(\boldsymbol{\lambda})$, a propriedade de ponto de sela subentende

$$\mathcal{M}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}) \geq \mathcal{M}(\boldsymbol{\lambda}), \quad \forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^N. \quad (2.48)$$

Esta desigualdade é estrita se existir uma solução interior para o problema, e essa solução for única. Assim, maximiza-se $\mathcal{M}(\boldsymbol{\lambda})$ sobre $\boldsymbol{\lambda}$ sem restrições, para encontrar os multiplicadores de Lagrange ótimos. Posteriormente, calcula-se $\hat{\boldsymbol{p}}$, $\hat{\boldsymbol{w}}$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ e $\hat{\boldsymbol{e}}$ por substituição (Golan et al. [11]).

Esta versão dual do problema GME simplifica a estimação consideravelmente, uma vez que tem vantagens computacionais muito superiores. O gradiente analítico do problema dual,

$$\nabla_{\boldsymbol{\lambda}}\mathcal{M}(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{V}\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\lambda}), \quad (2.49)$$

é simplesmente a restrição de consistência com o modelo, equação (2.29), na forma homogênea. Dada a função objetivo e os gradientes analíticos ou numéricos, o problema dual GME pode ser resolvido com os mesmos métodos que são usados para a máxima verossimilhança e para problemas de mínimos quadrados não lineares.

Já a matriz Hessiana de $\mathcal{M}(\boldsymbol{\lambda})$ assume a forma

$$\nabla_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}'}\mathcal{M}(\boldsymbol{\lambda}) = -\boldsymbol{X}\boldsymbol{Z}\nabla_{\boldsymbol{\lambda}'}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{V}\nabla_{\boldsymbol{\lambda}'}\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\lambda}) = -\boldsymbol{X}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{X}' - \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{\lambda}), \quad (2.50)$$

onde $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{\lambda})$ e $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{\lambda})$ são as matrizes de variância-covariância para as distribuições $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\lambda})$ e $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\lambda})$, respetivamente. Ambas as matrizes de variância-covariância são definidas positivas para qualquer solução interior, $(\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{\boldsymbol{w}})$, o que garante a unicidade da solução. Portanto, a solução única do problema GME pode ser calculada usando técnicas de otimização numérica, que são tipicamente mais apelativas, além de que o vetor gradiente e a matriz Hessiana do problema não apresentam uma construção dispendiosa em termos de recursos computacionais (Golan et al. [11]).

Para atenuar o impacto de problemas mal-postos, é frequente usar informação prévia ou não amostral para melhorar o desempenho de procedimentos de estimação tradicionais. Desta forma, os formalismos de entropia generalizada também fornecem uma base útil para conciliar informação amostral e não amostral em problemas mal-postos (informação incompleta, observações atípicas, colinearidade, etc.). Para isto, é fundamental entender de que forma algumas das escolhas práticas relacionadas com o estimador GME, tal como a seleção dos suportes para os parâmetros e para os erros, o efeito da amplitude dos suportes para os parâmetros e para os erros, e o número de pontos dos suportes, podem afetar as estimativas. Algumas experiências de amostragem foram efetuadas em Golan et al. [11], onde as funções de risco empíricas, o risco de precisão e predição empíricos, entre outros, foram apresentados para compreender estes impactos e proporcionar orientação na especificação dos fatores que são necessários estabelecer no uso do estimador GME.

Partindo da escolha dos suportes dos parâmetros, \boldsymbol{Z} , é importante lembrar que as restrições impostas ao espaço de parâmetros através de \boldsymbol{Z} refletem o conhecimento prévio sobre os parâmetros desconhecidos. No entanto, tal conhecimento nem sempre está disponível, o que poderá levar à necessidade de analisar uma variedade de limites plausíveis para $\boldsymbol{\beta}$. À medida que os suportes dos parâmetros são alargados, as funções de risco do GME assumem apenas uma ligeira tendência de crescimento, refletindo a reduzida restrição que foi imposta ao espaço de parâmetros. Assim, é possível concluir que suportes de grande amplitude podem ser usados sem que isso apresente consequências de risco extremo, se o conhecimento prévio é mínimo e se se pretende garantir que \boldsymbol{Z} contém $\boldsymbol{\beta}$. O estreitamento dos suportes dos parâmetros só melhora o risco se os parâmetros desconhecidos se encontrarem no interior dos suportes respetivos. Apesar disto, não

se deve desconsiderar que aumentar os limites aumenta também o impacto dos dados, decrescendo o impacto dos suportes.

Já a escolha dos suportes dos erros, \mathbf{V} , depende distintamente das propriedades de \mathbf{e} . Devido à presença de $\Sigma_V(\boldsymbol{\lambda})$, que é definida positiva, na matriz Hessiana (2.50), o estimador GME comporta-se no sentido em que todos os coeficientes serão contraídos em direção a zero. Quanto mais amplos forem os suportes em \mathbf{V} , maior é o grau de contração em direção a zero, sendo este medido pelos multiplicadores de Lagrange (Golan et al. [11]). No limite, quando $\hat{\boldsymbol{\lambda}} \rightarrow 0$ e $[v_{n1}, v_{nJ}] \rightarrow [-\infty, +\infty]$, a informação amostral é completamente ignorada e é escolhido $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GME} = \mathbf{0}$. Consequentemente, o desempenho deste estimador dependerá em grande parte da especificação dos suportes dos erros. A desigualdade de Chebychev pode ser usada como um meio prudente na especificação do conjunto de limites de erro, uma vez que para qualquer variável aleatória, \mathbf{X} , tal que $E(\mathbf{X}) = \mu$ e $\text{Var}(\mathbf{X}) = \sigma^2$, esta desigualdade fornece

$$P[|\mathbf{X} - \mu| < v\sigma] \geq v^{-2}, \quad (2.51)$$

para um $v > 1$ arbitrário. Dada a exclusão de alguma probabilidade nas caudas, v^{-2} , os limites de erro Chebychev podem ser da forma $v_{n1} = -v\sigma$ e $v_{nJ} = v\sigma$. Um exemplo disto é a usual regra 3σ , que exclui no máximo um nono da probabilidade para $v = 3$. Assim sendo, a proposta para os suportes dos erros é o uso desta regra 3σ , mas σ é referente ao desvio padrão desconhecido da perturbação. Na prática, σ pode ser substituído por um estimador consistente, como o baseado na regressão OLS. Ainda assim, os suportes dos erros podem necessitar de modificações, dependendo do possível conhecimento prévio acerca da distribuição de erro, uma vez que deve tomar-se em consideração as caudas mais pesadas de algumas das distribuições existentes. Desta maneira, a formulação GME pode ser adaptada para refletir informação subjetiva acerca da distribuição de erro e, conseqüentemente, fornecer soluções mais precisas.

A escolha do número de pontos usados para formar os suportes dos parâmetros e os suportes dos erros, M e J , respetivamente, são igualmente uma seleção relevante, uma vez que Σ_Z e Σ_V são componentes proeminentes na variância aproximada dos estimadores pontuais GME (isto é, as variâncias das distribuições $\mathbf{p}(\boldsymbol{\lambda})$ e $\mathbf{w}(\boldsymbol{\lambda})$ dependem das especificações dos suportes) o que, conseqüentemente, faz com que as dimensões dos suportes afetem as propriedades amostrais do estimador. Por exemplo, uma distribuição uniforme discreta suportada em $\mathbf{z} = [-c, c]$, isto é, o caso em que $M = 2$, tem variância $\sigma_z^2 = c^2$. Se o número de pontos no suporte for aumentado e colocado de maneira equidistante, a variância da distribuição uniforme decresce. À medida que o número de pontos se torna infinitamente grande, a distribuição uniforme torna-se contínua e a variância baixa para $\sigma_z^2 = \frac{c^2}{3}$. Desta maneira, adicionar mais pontos aos suportes de \mathbf{Z} deve diminuir a variância do estimador pontual associado. Adicionalmente, este número também pode ser aumentado para refletir um conhecimento prévio mais apurado sobre $\boldsymbol{\beta}$. Independentemente da razão associada, é indubitável que a carga computacional do problema irá aumentar. Não obstante, o erro de precisão empírico médio (estimativa para o risco de precisão empírico) diminui bruscamente com M , à medida que informação mais apurada sobre $\boldsymbol{\beta}$ é recuperada. Porém, o risco de predição empírico aumenta, destacando o necessário compromisso entre as perdas de precisão e predição, sendo que os ganhos no espaço de parâmetros podem compensar as perdas no espaço amostral. Numa base semelhante, o mesmo se conclui para J (Golan et al. [11]).

O estimador GME tem qualidades muito atrativas, no entanto, a implementação do estimador requer várias decisões subjetivas que não são exigidas no OLS, por exemplo. Porém, a especificação correta desses fatores (em particular, a definição dos suportes) permitirá a obtenção de soluções mais robustas e estáveis relativamente às regras tradicionais de recuperação de informação, uma vez que é feito um uso adicional da informação não amostral. Por exemplo, é comum na prática possuir informação sobre o intervalo em que se encontram cada um, ou somente alguns, dos parâmetros desconhecidos, e esta informação fornece orientação útil na especificação dos suportes dos coeficientes. Similarmente, informação não amostral sobre a distribuição de erro por vezes também se encontra disponível, como o cenário discutido anteriormente de distribuições que possuem caudas mais pesadas, podendo usar-se, assim, suportes para os erros mais largos do que a regra usual 3σ . Apesar da seleção dos suportes dos parâmetros e dos erros serem fulcrais para um melhor desempenho do estimador GME, geralmente nos problemas práticos existe uma noção prévia acerca das componentes desconhecidas. E, não existindo, poderá ser realizada uma análise de sensibilidade a diferentes suportes. Outro princípio útil deste estimador é a adaptabilidade. Em geral, quaisquer estimadores consistentes podem fornecer informação útil sobre os coeficientes e sobre a distribuição das perturbações. Assim, é possível adaptar a especificação dos suportes dos parâmetros e dos erros com base em resultados preliminares de estimadores consistentes, como é o caso da regra 3σ mencionada anteriormente, onde é possível substituir σ por uma estimativa consistente. No conceito da estimativa adaptativa, podem ainda adaptar-se os suportes para os erros de modo a que revelem as características das distribuições de erro, tais como assimetrias, caudas pesadas, entre outras. Por este e por outros diversos motivos, como os encontrados na literatura (Golan [2]), o estimador GME é uma ferramenta poderosa na estimação dos parâmetros desconhecidos do LRM.

2.3.3 Estimador de máxima entropia generalizada ponderada - W-GME

Como discutido na secção 2.3.2, a especificação dos suportes para os parâmetros e para os erros podem afetar consideravelmente os resultados de estimação. Adicionalmente, a especificação da função objetivo (2.31) pode influenciar o desempenho do estimador. Uma vez que as componentes de sinal e de ruído desconhecidas são consideradas nas relações de consistência com o modelo, os parâmetros desconhecidos β e as perturbações e são determinadas em conjunto. Consequentemente, a função objetivo baseada na entropia refletirá as perdas estatísticas no espaço amostral (predição) e no espaço de parâmetros (precisão), o que se traduz no compromisso precisão-predição (Golan et al. [11]). Uma vez que a função objetivo (2.31) considera pesos iguais para as entropias de parâmetro e de erro, pode desejar-se maior relevância na predição ou na precisão e, como tal, atribuir um maior ou menor peso nas componentes de parâmetro e de erro da função objetivo, de maneira a destacar a importância relativa dessas componentes. Deste modo, Golan et al. [11] sugeriram um estimador GME ponderado, o qual Wu [15] denominou estimador W-GME, propondo um método baseado nos dados para obtenção do parâmetro γ . Seguindo a secção 2.3.2, o estimador W-GME assume a forma

$$\arg \max_{\mathbf{p}, \mathbf{w}} H(\mathbf{p}, \mathbf{w}; \gamma) = -(1 - \gamma) \mathbf{p}' \ln \mathbf{p} - \gamma \mathbf{w}' \ln \mathbf{w}, \quad (2.52)$$

sujeito às restrições de consistência e aditividade apropriadas, e onde $\gamma \in (0, 1)$ controla os pesos concedidos às duas componentes de entropia.

Wu [15] mostra que ao resolver as condições de primeira ordem da equação de Lagrange associada, os elementos individuais dos vetores \mathbf{p} e \mathbf{w} são, respetivamente,

$$\begin{aligned}\widehat{p}_{km} &= \frac{\exp(-z_{km}\mathbf{x}'_k\widehat{\boldsymbol{\lambda}}/(1-\gamma))}{\Omega_k(\widehat{\boldsymbol{\lambda}}, \gamma)}, \\ \widehat{w}_{nj} &= \frac{\exp(-v_{nj}\widehat{\boldsymbol{\lambda}}/\gamma)}{\Psi_n(\widehat{\boldsymbol{\lambda}}, \gamma)},\end{aligned}\tag{2.53}$$

onde

$$\begin{aligned}\Omega_k(\widehat{\boldsymbol{\lambda}}, \gamma) &= \sum_{m=1}^M \exp(-z_{km}\mathbf{x}'_k\widehat{\boldsymbol{\lambda}}/(1-\gamma)), \\ \Psi_n(\widehat{\boldsymbol{\lambda}}, \gamma) &= \sum_{j=1}^J \exp(-v_{nj}\widehat{\boldsymbol{\lambda}}/\gamma),\end{aligned}\tag{2.54}$$

e a função objetivo da versão dual, sem restrições, do W-GME

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{\lambda}, \gamma) = \mathbf{y}'\boldsymbol{\lambda} - (1-\gamma) \sum_{k=1}^K \ln(\Omega_k(\boldsymbol{\lambda}, \gamma)) - \gamma \sum_{n=1}^N \ln(\Psi_n(\boldsymbol{\lambda}, \gamma)).\tag{2.55}$$

Dado que $\widehat{\boldsymbol{\lambda}}$ é agora uma função implícita de γ , alterações no compromisso de perda precisão-predição (onde se atribui um valor maior ou menor de γ) alterarão a magnitude dos multiplicadores de Lagrange ótimos e, conseqüentemente, a correspondente solução. Estudos de simulação para avaliar o impacto do parâmetro γ são ilustrados em Golan et al. [11] e Wu [15].

2.4 Procedimentos de agregação

Devido aos problemas associados aos dados em grande escala, tais como problemas computacionais, problemas estatísticos ou de dados não homogêneos, existe a necessidade de obter estimativas precisas e estáveis, enfrentando todas as dificuldades associadas a um problema de *big data*.

Os procedimentos de agregação são uma solução atrativa. A ideia principal é usar métodos de amostragem para recolha de informação, calcular as estimativas relacionadas com as amostras obtidas e agregar os diferentes vetores de estimativas de acordo com algum critério para, deste modo, abordar a dificuldade da eficiência computacional. Para isto, são construídos G grupos a partir de amostras com repetição, retiradas de todo o conjunto de dados ($\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_G$, com $\mathcal{G}_g \subset \{1, 2, \dots, N\}$). Conseqüentemente, estes grupos podem estar sobrepostos ($\mathcal{G}_g \cap \mathcal{G}_{g'} \neq \emptyset$ para $g \neq g'$) ou não necessariamente cobrir todo o espaço amostral. O próximo passo é calcular, para cada grupo, as estimativas para os coeficientes de regressão usando as observações reunidas, $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_g$, $g = 1, 2, \dots, G$, e empregar algum dos estimadores convencionais mencionados na literatura. Assim, obtêm-se G vetores de estimativas para os parâmetros desconhecidos. A etapa final consiste em

agregar os vetores de estimativas obtidos num único vetor final de estimativas, $\widehat{\beta}_{aggr}$, aplicando algum dos diversos procedimentos de agregação existentes. Vários procedimentos de agregação foram propostos na literatura, para lidar com dados homogêneos e com dados não homogêneos. Aqui, são apresentados três, nomeadamente o método *bagging*, mais direcionado para obter estimativas em cenários com dados homogêneos, *magging*, para determinar estimativas adequadas na presença de dados não homogêneos, e *neagging*, um novo método de agregação que usa os conceitos de entropia, em particular o conceito de entropia normalizada discutido na secção 2.2.3.

2.4.1 *Bagging*

No contexto de dados homogêneos, Breiman [16] mostrou um promissor desempenho a nível de predição através da agregação por média em algoritmos de árvores para regressão e votação por maioria em algoritmos de árvores para classificação. Servindo-se deste princípio, o procedimento de agregação *bagging* apenas calcula a média aritmética do conjunto de vetores de estimativas obtidos, de modo a obter o vetor de estimativas final agregado. Este método é o menos complexo computacionalmente, e define-se como (Bühlmann e Meinshausen [1])

$$\widehat{\beta} := \sum_{g=1}^G w_g \widehat{\beta}_g, \quad (2.56)$$

onde $w_g = \frac{1}{G}$ para todo $g = 1, 2, \dots, G$. Este procedimento é simples e uma das suas grandes vantagens é a atribuição de pesos iguais a cada termo para a determinação do vetor de estimativas final e, por isso, o método não depende da resposta \mathbf{y} para o cálculo das mesmas. No entanto, não é adequado para dados não homogêneos.

2.4.2 *Magging*

O procedimento *bagging* possui um fraco desempenho na presença de fortes efeitos atípicos em pequenas porções dos dados populacionais, mas ausentes na maioria deles, ou seja, em cenários de dados não homogêneos. O método de agregação *magging*, também denominado agregação *maximin*, foca-se nos efeitos que são comuns a todos os dados e não, por exemplo, somente nos *outliers* e efeitos de variação do tempo. Bühlmann e Meinshausen [1] definem o *magging* como

$$\widehat{\beta} := \sum_{g=1}^G w_g \widehat{\beta}_g, \quad (2.57)$$

onde

$$w := \arg \min_{w \in \mathbf{W}} \left\| \sum_{g=1}^G w_g \widehat{\mathbf{y}}_g \right\|_2, \quad (2.58)$$

e $\mathbf{W} = \{w : \min_g w_g \geq 0 \text{ e } \sum_{g=1}^G w_g = 1\}$. A caracterização deste método baseia-se, tal como no método *bagging* discutido anteriormente, numa média ponderada do conjunto de vetores de estimativas. Porém, escolhem-se os pesos como uma combinação convexa, de modo a minimizar a norma euclidiana dos valores ajustados, $\widehat{\mathbf{y}}$. Se esta

solução não for única, é considerada a solução com a menor norma euclidiana de entre os vetores de pesos obtidos como possível solução. A ideia principal é a de que se um efeito é comum entre todos os grupos, então este não pode ser “diluído” na procura de uma combinação específica de pesos. Este procedimento foi dos primeiros a ser proposto para dados heterogêneos. Uma explicação mais detalhada sobre o desempenho deste procedimento de agregação em dados não homogêneos, incluindo robustez e propriedades estatísticas, encontra-se em Bühlmann e Meinshausen [1, 17].

2.4.3 Agregação de entropia normalizada - *Neagging*

Costa e Macedo [18] propuseram um novo método de agregação que se baseia na identificação do conteúdo de informação de cada grupo, estendendo o conceito de NE discutido na secção 2.2.3. O método de agregação baseado na NE, designado por *neagging*, é definido como

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} := \sum_{g=1}^G w_g \hat{\boldsymbol{\beta}}_g, \quad (2.59)$$

onde w_g é definido pela entropia normalizada para o sinal, $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$, usando o estimador GME discutido na secção 2.3.2,

$$S(\hat{\boldsymbol{p}})_g = \frac{-\hat{\boldsymbol{p}}' \ln \hat{\boldsymbol{p}}}{K \ln M}, \quad (2.60)$$

tal que $\sum_{g=1}^G w_g = 1$. Este procedimento de agregação é uma média ponderada do conjunto de vetores de estimativas para os coeficientes de regressão, tal como nos procedimentos mencionados anteriormente. No entanto, cada peso é obtido da divisão do seu respectivo índice de informação (medida da redução da incerteza gerada pelo grupo, isto é, medida do conteúdo de informação do grupo) pela soma dos índices de informação obtidos em cada grupo (medida do conteúdo de informação total alcançado pelos grupos), isto é,

$$w_g = \frac{1 - S(\hat{\boldsymbol{p}})_g}{\sum_{i=1}^G 1 - S(\hat{\boldsymbol{p}})_i} = \frac{\Pi_g}{\sum_{i=1}^G \Pi_i}, \quad g = 1, 2, \dots, G. \quad (2.61)$$

Dado que o conceito principal do método *neagging* é idêntico ao do método *bagging*, espera-se que os seus resultados sejam semelhantes na presença de dados homogêneos. Porém, uma vez que os pesos em (2.59) dependerão do conteúdo de informação de acordo com (2.61), os pesos serão, em geral, não uniformes, tal como no método *magging*, caso os dados não sejam homogêneos.

Para além da proposta (2.59) para a obtenção do vetor de estimativas dos parâmetros desconhecidos para o LRM, Costa e Macedo [18] testaram a hipótese de especificar $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ não como uma média ponderada com pesos baseados no índice de informação, mas calculando a entropia normalizada de cada grupo e escolhendo a estimativa obtida pelo GME do grupo com menor entropia normalizada. De facto, este vetor de estimativas não corresponderá a um vetor de estimativas agregado, mas sim a um escolhido de entre os vetores estimados possíveis (obtidos em cada grupo). Os dois procedimentos revelaram resultados semelhantes em termos de erro de precisão quando a amplitude dos suportes de parâmetros é pequena. Porém, a abordagem (2.59) demonstrou melhores resultados

quando a informação acerca dos parâmetros desconhecidos é reduzida, ou seja, quando a amplitude dos suportes é maior.

2.5 Problemas de regressão afetados por colinearidade

Em casos práticos, a utilização de alguns estimadores pode originar soluções indefinidas ou instáveis. Nestas circunstâncias, as estimativas possuem elevada variância e os intervalos de confiança para os parâmetros populacionais possuem enorme amplitude, dificultando o processo de inferência. Estes problemas são conhecidos como problemas mal-condicionados (uma das principais características que traduzem um problema mal-posto), e a presença de colinearidade nos dados afeta de forma considerável a estimação estatística. Formalmente, a colinearidade traduz-se pela dependência exata ou quase exata de uma ou mais do que uma das variáveis explicativas, e é definida em termos de condicionamento da matriz \mathbf{X} . Neste caso, a matriz \mathbf{X} não admite inversa ou, admitindo, a matriz inversa é numericamente instável. Neste caso, diz-se que as variáveis explicativas presentes na matriz \mathbf{X} são colineares.⁵ Para o LRM, o impacto de dados afetados por colinearidade é muitas vezes demonstrado pelo desempenho do estimador OLS. Na presença de colinearidade, o desempenho do estimador piora consideravelmente, dado que as variâncias das estimativas dos parâmetros podem ser substancialmente grandes e, conseqüentemente, as estimativas tendem a ser menos precisas. Este facto deve-se à dificuldade em inverter a componente matricial $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ do estimador OLS e, portanto, quanto maior for o nível de colinearidade, menos interpretáveis serão os parâmetros.

Existem várias abordagens para detetar colinearidade (ou mau condicionamento). Por exemplo, em sistemas lineares de equações, $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, em que \mathbf{A} é uma matriz quadrada não singular, a matriz \mathbf{A} diz-se mal condicionada se o seu número de condição, definido por $\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$, for um valor elevado. Além disso, esta mede a sensibilidade da solução \mathbf{x} a pequenas perturbações em \mathbf{A} ou em \mathbf{b} . Outra abordagem discutida na literatura de análise numérica é o cálculo do número de condição através da decomposição em valores singulares.

Definição 2.5.1 *A decomposição em valores singulares de uma matriz \mathbf{X} ($N \times K$) é uma fatorização da forma*

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T, \quad (2.62)$$

onde as matrizes \mathbf{U} ($N \times K$) e \mathbf{V} ($K \times K$) são matrizes ortogonais, $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}_K$, e a matriz \mathbf{D} ($K \times K$) é uma matriz diagonal com elementos não negativos de forma decrescente $\mu_k, k = 1, \dots, K$, denominados valores singulares da matriz \mathbf{X} .

Uma vez \mathbf{X} decomposta, sem a necessidade de calcular alguma inversa para obter o número de condição da matriz, Besley et al. [9] discutiram e demonstraram que o condicionamento de uma matriz \mathbf{X} pode ser resumido pelo rácio do valor singular máximo,

⁵Se a dependência for exata, não é possível sequer obter estimativas fornecidas pelo OLS. No entanto, mesmo que a dependência não seja exata, o seu efeito pode ser extremamente nefasto e tanto maior quanto maior for o grau de dependência entre duas ou mais variáveis explicativas. A designação de colinearidade no corpo do texto refere-se, portanto, a todas as situações em que se verificam os efeitos desta dependência, sem que seja necessário que a dependência seja exata.

pelo valor singular mínimo, ou seja,

$$\text{cond}(\mathbf{X}) = \frac{\mu_{max}}{\mu_{min}}, \quad (2.63)$$

onde μ representa os elementos da diagonal principal da matriz \mathbf{D} , obtida da decomposição em valores singulares da matriz \mathbf{X} .

Capítulo 3

Estudo de simulação

3.1 Introdução

Neste estudo de simulação, o principal objetivo é comparar o desempenho de vários métodos de agregação, em particular, os métodos de agregação *bagging*, *maggining* e *neagging*. Assim, é estudado o comportamento destes procedimentos, quando alterado o estimador dos coeficientes de regressão, nomeadamente aqueles discutidos anteriormente, OLS, GME e W-GME. Consequentemente, é possível confrontar o desempenho dos métodos de agregação *bagging* e *maggining* quando aplicado um dos três estimadores (OLS, GME e W-GME) para obtenção das estimativas dos coeficientes de regressão, tal como o desempenho do método de agregação *neagging* quando aplicado um dos estimadores GME e W-GME.

Diferentes características de modelação serão modificadas durante o estudo de simulação, com o intuito de avaliar o comportamento dos procedimentos de agregação quando aplicados a conjuntos de dados com outras especificidades, além de variar, inclusive, parâmetros intrínsecos aos métodos. Relativamente às características deste estudo, é considerado um modelo de regressão linear, com um número de observações de 30000 e um número de variáveis explicativas de 10 ($N = 30000$ e $K = 10$). São simuladas duas matrizes \mathbf{X} (30000×10) de variáveis explicativas, que correspondem a matrizes de variáveis com dois números de condição diferentes, representando dois cenários distintos de colinearidade: $\text{cond}(\mathbf{X}) = 10$, para casos de quase ausência de colinearidade; e $\text{cond}(\mathbf{X}) = 20000$, para casos em que se apresenta elevada colinearidade nos dados, uma vez que o número de condição da matriz está relacionado com a presença de colinearidade nas variáveis explicativas, como discutido na secção 2.5. O número de parâmetros do modelo de regressão corresponderá ao número de variáveis explicativas e, como consequência, o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\beta}$ será um vetor (10×1), definido como $\boldsymbol{\beta} = [2, 1, -3, 5, -5, 3, 4, -2, -1, -4]$, não contendo o termo constante. Além disto, são considerados três tipos diferenciados de erro para os conjuntos dados: erros modelados por uma distribuição normal de média zero e desvio padrão unitário, $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, para representar cenários com ruído relativamente baixo; erros com base numa distribuição t-Student com três graus de liberdade, $\mathbf{e} \sim t(3)$, para representar cenários com ruído relevante, embora moderado; e erros que seguem uma distribuição de Cauchy com parâmetro de localização zero e parâmetro de escala dois, $\mathbf{e} \sim C(0, 2)$, para representar cenários com muito ruído. As caudas da distribuição de Cauchy são consideravelmente mais pesadas do que as caudas da distribuição Normal,

sendo que as caudas da distribuição t-Student encontram-se no intermédio destas duas, como se pode verificar na Figura 3.1. Desta forma, obtêm-se três vetores distintos \mathbf{e} (30000×1) de perturbações aleatórias que originam seis vetores \mathbf{y} (30000×1) de observações com ruído, combinando os dois diferentes números de condição com os três vetores de perturbações aleatórias, para obter uma ampla variedade de vetores de observações com ruído com diferentes características.

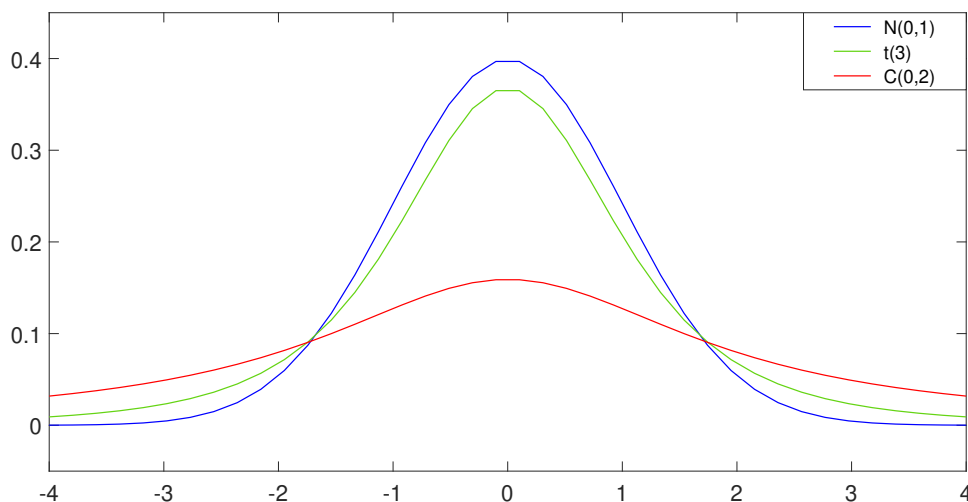


Figura 3.1: Comparação de três funções densidade de probabilidade (Normal, t-Student e Cauchy).

As reparametrizações impostas pelos estimadores GME e W-GME são efetuadas definindo a matriz \mathbf{V} , que contém os suportes dos erros, com suportes simétricos e centrados em zero, usando a regra 3σ , onde para σ é considerado o desvio padrão empírico das observações com ruído, sendo que o suporte é sempre o mesmo para cada perturbação desconhecida. Consequentemente, os vetores de suporte dos erros assumirão a forma $\mathbf{v}_n = [-3\sigma, 3\sigma]$ para todo o $n = 1, \dots, 30000$, encontrando-se igualmente espaçados, sendo usados $J = 3$ pontos para formar estes suportes. Adicionalmente, são considerados dois suportes distintos para os parâmetros, ambos simétricos e centrados em zero, pelo que estes vetores estarão também espaçados de forma equidistante, considerando $M = 5$ pontos para formar estes suportes. Além de serem estudados dois suportes diferentes para os parâmetros, quando se fixa um deles, assume-se que é o mesmo para cada um dos parâmetros desconhecidos do modelo. Assim sendo, são definidas duas matrizes \mathbf{Z} distintas, que contém os suportes para os parâmetros, uma com $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$ para todo o $k = 1, \dots, 10$, para refletir cenários onde existe algum conhecimento prévio acerca dos valores entre os quais se podem encontrar os parâmetros e, por isto, é possível reduzir a amplitude dos suportes dos parâmetros; e outra com $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$ para todo o $k = 1, \dots, 10$, para refletir cenários onde o conhecimento prévio disponível é insuficiente. O objetivo é compreender (embora de forma preliminar, pois não é este o objetivo do trabalho) de que forma a amplitude dos suportes dos parâmetros afetam os resultados dos estimadores GME e W-GME.

Completando com as especificações necessárias referentes aos métodos de agregação, a amostragem aleatória com reposição foi efetuada considerando dois valores para o número de grupos, nomeadamente $G = 10$ e $G = 20$, com o intuito de analisar se o aumento do

número de grupos em cada método de agregação provoca diferenças significativas nos resultados obtidos, e dois valores para o número de observações por grupos, $\text{Obs} = 50$ e $\text{Obs} = 100$, para avaliar se o acréscimo de observações em cada grupo, ou seja, o aumento de informação disponível em cada grupo, produz resultados relevantes no desempenho de cada um dos métodos de agregação.

Resumidamente, serão analisados no total 48 cenários, referentes à combinação das duas matrizes de variáveis explicativas (dois números de condição) e dos três vetores de erro (três distribuições de erro), gerando no total seis diferentes conjuntos de dados, associados aos dois suportes para os parâmetros, aos dois valores para o número de grupos nos métodos de agregação e aos dois valores para o número de observações por grupo, que formam no total oito variantes de estruturas. Para além disto, um dos pontos fulcrais deste estudo de simulação será também estudar a variância dos resultados, uma vez que existe um processo de amostragem aleatória envolvido, para compreender se os resultados obtidos são diretamente associados ao método de agregação utilizado, ou se é consequência de um processo de amostragem menos informativo. Para isto, são conduzidas experiências de Monte Carlo de 10 réplicas para cada cenário, com o objetivo de explorar o comportamento amostral das situações em estudo.

Para simular os conjuntos de dados, o primeiro passo é simular a matriz de variáveis explicativas \mathbf{X} . Inicialmente, é usado um gerador de números pseudoaleatórios para produzir uma matriz \mathbf{X}_0 ($N \times K$) a partir de uma distribuição normal com média zero e desvio padrão unitário. Para obter o número de condição desejado para a matriz \mathbf{X} , é usada a decomposição em valores singulares (ver definição 2.5.1). Efetuando esta decomposição na matriz \mathbf{X}_0 , serão obtidas três matrizes distintas: duas matrizes unitárias, \mathbf{U} e \mathbf{V} , e uma matriz diagonal \mathbf{S} . De seguida, modificam-se os valores singulares de \mathbf{X}_0 , presentes por ordem decrescente na diagonal principal da matriz \mathbf{S} , usando o conceito descrito na secção 2.5 que, resumidamente, define o número de condição de uma matriz através do rácio do seu valor singular máximo pelo seu valor singular mínimo. Desta forma, para definir a matriz \mathbf{X} de variáveis explicativas com o número de condição desejado, atribui-se ao primeiro elemento da diagonal principal de \mathbf{S} o valor de $2/(1 + C)$, com C o número de condição desejado, e ao último elemento da diagonal principal de \mathbf{S} o valor de $2 \times C/(1 + C)$, sendo que os restantes elementos da diagonal principal assumirão o valor de um. Posteriormente, a matriz \mathbf{X} relativa ao número de condição C será obtida através da multiplicação da matriz \mathbf{U} referida anteriormente, pela matriz \mathbf{S} onde foi alterada a sua diagonal principal, e subsequentemente pela matriz transposta de \mathbf{V} . Desta forma, obtêm-se as duas matrizes \mathbf{X} de variáveis explicativas utilizadas neste estudo de simulação, uma com $\text{cond}(\mathbf{X}) = 10$ e outra com $\text{cond}(\mathbf{X}) = 20000$. Seguidamente, é necessário gerar aleatoriamente os três vetores de perturbações aleatórias que serão explorados neste estudo de simulação. Para gerar $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, é usado um gerador de números pseudoaleatórios para formar um vetor ($N \times 1$) a partir de uma distribuição normal *standard*. De maneira semelhante, a geração de $\mathbf{e} \sim t(3)$ usa um gerador de números pseudoaleatórios para formar um vetor ($N \times 1$) a partir de uma distribuição t-Student com 3 graus de liberdade. Finalmente, para gerar $\mathbf{e} \sim C(0, 2)$, é usado o método de geração de variáveis aleatórias amplamente conhecido, denominado Método de Transformação Inversa, que se baseia no seguinte teorema:

Teorema 3.1.1 *Seja F_V a função de distribuição da variável aleatória V . Defina-se a inversa generalizada de F_V : $F_V^{-1}(u) = \inf \{v \in \mathbb{R} \mid F_V(v) \geq u\}$, $\forall u \in (0, 1)$ e seja*

$U \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$. Defina-se $V := F_V^{-1}(U)$. Então, a variável aleatória V tem função de distribuição $F_V^{-1}(U)$.

A função de distribuição da distribuição de Cauchy tem a forma

$$F(v) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{v - v_0}{\rho}\right) + \frac{1}{2}, \quad (3.1)$$

onde v_0 é o parâmetro de localização, e ρ é o parâmetro de escala. Para aplicar o resultado do teorema 3.1.1, iguala-se a equação (3.1) a uma incógnita u , e resolve-se esta igualdade em ordem a v , da qual se obtém a seguinte expressão

$$v = v_0 + \rho \tan\left(\pi\left(u - \frac{1}{2}\right)\right) = F_V^{-1}(U). \quad (3.2)$$

Seguidamente, é usado um gerador de números pseudoaleatórios para formar um vetor $(N \times 1)$ a partir de uma distribuição uniforme com parâmetro de limite mínimo 0 e parâmetro de limite máximo 1. Este vetor é posteriormente introduzido na fórmula $F_V^{-1}(U)$, em substituição de u , definindo $v_0 = 0$ e $\rho = 2$, para obter o vetor de erro que segue uma distribuição de Cauchy com parâmetro de localização zero e parâmetro de escala dois. Finalmente, para obter os seis vetores de observações com ruído, efetua-se a combinação das duas matrizes \mathbf{X} de variáveis explicativas, com os três vetores \mathbf{e} de perturbações aleatórias, usando a expressão do LRM em (2.1), com o vetor de parâmetros β definido acima.

Obtidos os conjuntos de dados, procede-se à estimação dos coeficientes do LRM, utilizando as técnicas de agregação mencionadas anteriormente, *bagging*, *magging* e *neagging*, e variando os estimadores utilizados em cada procedimento de agregação, nomeadamente os estimadores OLS, GME e W-GME. Para cada uma das 48 experiências de Monte Carlo relativas aos cenários em análise, são calculadas, em cada uma das 10 réplicas, as estimativas dos coeficientes de regressão de cada método de agregação considerado, utilizando os diferentes estimadores abordados. Estas estimativas serão definidas por $\hat{\beta}_{aggr}$, expressando os coeficientes de regressão estimados após agregação. As estimativas finais dos coeficientes de regressão, isto é, obtidas após efetuada a experiência de Monte Carlo, relativamente a cada um dos procedimentos de agregação, utilizando os diferentes estimadores considerados neste estudo, são calculadas realizando a média dos 10 valores $\hat{\beta}_{aggr}$ que foram obtidos de cada réplica, sendo denominadas por $\hat{\beta}_{\overline{aggr}}$, expressando os coeficientes de regressão estimados finais após agregação (média das réplicas). Futuramente, quando apresentados os resultados deste estudo, a abreviatura geral 'aggr' será substituída pelas seguintes abreviaturas: bOLS para representar o procedimento de agregação *bagging* com estimativas dos coeficientes de regressão obtidas pelo estimador OLS; bGME para representar o procedimento *bagging* com estimativas GME; bW-GME para representar o procedimento *bagging* com estimativas W-GME; mOLS para representar o procedimento *magging* com estimativas OLS; mGME para representar o procedimento *magging* com estimativas GME; mW-GME para representar o procedimento *magging* com estimativas W-GME; nGME para representar o procedimento *neagging* com estimativas GME; e nW-GME para representar o procedimento *neagging* com estimativas W-GME. Note-se que as abreviaturas e notações aqui mencionadas encontram-se sintetizadas na Secção Lista de Abreviaturas e na Secção Notação Capítulo 3, respetivamente.

Primeiramente, são extraídas aleatoriamente com reposição 50 ou 100 observações, G número de vezes, G representando o número de grupos, que podem ser 10 ou 20. Seguidamente, são calculadas as estimativas dos coeficientes de regressão, usando as observações de cada grupo. As estimativas através do estimador OLS são obtidas efetuando a célebre decomposição QR à matriz \mathbf{X} de variáveis explicativas, decomposição que na literatura mostra ser muito eficaz na obtenção da solução de mínimos quadrados. Os aspetos teóricos desta decomposição encontram-se em Besley [9], que emprega as transformações de Householder. As estimativas através do estimador GME são obtidas partindo da construção da matriz de suporte dos parâmetros \mathbf{Z} , em que, facultados os limites de suporte $[z_{k1}, z_{kM}]$ e o número de pontos M para o formar, é determinado o valor do espaçamento dos vetores de suporte. Todos os suportes são posteriormente colocados na matriz $\mathbf{Z} (K \times KM)$. De seguida, é construída a matriz de suporte dos erros \mathbf{V} . Inicialmente, são determinados os limites dos suportes, calculando o desvio padrão das observações com ruído, $s(Y)$, e definindo os limites dos suportes como $[v_{n1}, v_{nJ}]$, com $v_{n1} = -3 s(Y)$ arredondado por defeito, e $v_{nJ} = 3 s(Y)$ arredondado por excesso. De maneira semelhante à construção de \mathbf{Z} , todos os suportes são posteriormente colocados na matriz $\mathbf{V} (N \times NJ)$. Para calcular os vetores de probabilidade \mathbf{p} e \mathbf{w} que minimizam a função (2.31), sujeita às restrições (2.32), é usada uma função do MATLAB[®] denominada 'fmincon' que utiliza, entre outros, o Método de Ponto Interior para resolver este problema de otimização. Os valores das estimativas dos coeficientes de regressão, $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, são encontrados aplicando a fórmula apresentada nas equações (2.33). As estimativas através do estimador W-GME são obtidas de forma muito semelhante às do estimador GME, uma vez que a diferença entre estes estimadores reflete-se na existência do parâmetro de ponderação γ , que atribuirá diferentes pesos às entropias de parâmetro e de erro, contrariamente ao estimador GME que atribui pesos iguais a cada uma delas. Desta forma, o processo de construção das matrizes \mathbf{Z} e \mathbf{V} , assim como o processo de obtenção dos vetores de probabilidade ótimos $\hat{\mathbf{p}}$ e $\hat{\mathbf{w}}$, é efetuado de maneira análoga aos descritos acima, respeitante ao estimador GME. A diferença reside na função a minimizar, uma vez que usa a função objetivo (2.52). No entanto, é necessário utilizar uma estratégia para determinar um valor para o parâmetro de ponderação γ , dado que não existe orientação clara na seleção deste parâmetro. Wu [15] sugeriu um método baseado nos dados para a seleção de γ , utilizando o Método da Validação Cruzada de Mínimos Quadrados (LSCV) que, essencialmente, dada a matriz de suporte dos parâmetros \mathbf{Z} , a matriz de suporte dos erros \mathbf{V} , e um peso $\gamma \in (0, 1)$, calcula as estimativas dos coeficientes de regressão, $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, usando o processo de obtenção dos vetores de probabilidade ótimos do W-GME, com $N - 1$ observações, com a n -ésima observação omitida. Efetua este procedimento para $n = 1, \dots, N$, e define cada estimativa obtida por $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{-n}(\gamma)$. Para cada n , calcula o erro de predição quadrático, $\hat{s}_n(\gamma) = (y_n - \mathbf{x}_n \hat{\boldsymbol{\beta}}_{-n}(\gamma))^2$ e efetua a soma dos erros de predição, $\sum_{n=1}^N \hat{s}_n(\gamma) = \hat{S}(\gamma)$. Este processo é realizado para qualquer valor de γ que se deseje testar. No final, o valor do parâmetro γ é selecionado tal que $\hat{S}(\gamma)$ seja mínima. Um método de escolha de hiperparâmetros idêntico a este é o *Leave One Out Cross-Validation*, que é o mais amplamente conhecido. O processo sugerido por Wu [15] para a seleção de γ produz estimadores consistentes assintoticamente, mas é um método extremamente exaustivo, pois implica o cálculo de N estimativas de $\boldsymbol{\beta}$ usando o estimador W-GME, o qual envolve o cálculo de um problema de otimização que, pela sua natureza, compreende altos custos computacionais. Num problema de *big data*, tal como o implícito neste estudo de simulação, este método é impraticável pelas

suas exigências computacionais. Apesar de, neste contexto, se trabalhar com grupos de observações e não o conjunto total de dados, é necessário ter em conta o número de grupos e a sua dimensão, que aumentará a quantidade de estimativas de β necessárias para aplicar o LSCV e incrementará ainda mais os custos computacionais. Por esta razão, é proposto outro método para a seleção do parâmetro de ponderação γ , em que a sua implementação segue os seguintes passos:

1. é efetuada uma amostragem aleatória sem reposição, de modo a obter um subconjunto que contém aproximadamente 70% das observações com ruído e respetivas variáveis explicativas. Este subconjunto denomina-se conjunto de treino (C_{TR}). Os dados não presentes no subconjunto anterior são reunidos num subconjunto denominado conjunto de teste (C_{TE});
2. dada a matriz de suporte dos parâmetros \mathbf{Z} , a matriz de suporte dos erros \mathbf{V} , e um peso $\gamma \in (0, 1)$, são calculadas as estimativas dos coeficientes de regressão, $\hat{\beta}$, usando o processo de obtenção dos vetores de probabilidade ótimos do estimador W-GME, com as observações que fazem parte do C_{TR} . Esta estimativa é definida por $\hat{\beta}_{C_{TR}}(\gamma)$;
3. é calculada a norma euclidiana da diferença entre o vetor de observações com ruído do C_{TE} e a multiplicação da matriz de variáveis explicativas do C_{TE} pela estimativa dos coeficientes de regressão obtidos anteriormente, isto é,
$$\| \mathbf{y}_{C_{TE}} - \mathbf{x}_{C_{TE}} \hat{\beta}_{C_{TR}}(\gamma) \| = \sqrt{\hat{S}(\gamma)}$$
;
4. os passos 1, 2 e 3 são executados para qualquer conjunto de possíveis valores de γ que se deseje testar. No final, seleciona-se o valor de γ que minimiza $\sqrt{\hat{S}(\gamma)}$.

Esta metodologia é baseada no método *Holdout*, que consiste em dividir o conjunto total de dados em dois subconjuntos mutuamente exclusivos – uma parte da amostra é considerada um conjunto de treino (estimação de parâmetros) e a restante reúne-se num conjunto de teste (validação das estimativas obtidas) –, estimar os vários modelos, aplicar os dados de teste para calcular o erro de predição e escolher o modelo com o menor erro de predição. O conjunto de dados pode ser separado em quantidades iguais ou não, mas, usualmente, o C_{TR} tem maior dimensão. A proporção de divisão mais frequente é a consideração de 70% dos dados para o C_{TR} , e os restantes 30% para o C_{TE} . Neste contexto específico, o objetivo é obter as estimativas do W-GME a partir dos C_{TR} , usando os diversos valores de γ definidos previamente, e testá-las nos C_{TE} para avaliar o desempenho dos modelos em teste. Esta avaliação fornecerá a estimativa de γ mais adequada para o problema em questão, sem que seja necessário efetuar outros cálculos que incluam percorrer todos os dados disponíveis, evitando o aumento dos custos computacionais. Esta abordagem é muito útil em contexto de *big data*, uma vez que, para conjuntos de dados com dimensões muito elevadas, torna-se extremamente complexo percorrer todas as observações disponíveis. Se for possível obter respostas aproximadas às perguntas colocadas sem ter de percorrer todo o conjunto de dados, a carga computacional do problema diminui consideravelmente. Foram testados para o parâmetro γ todos os valores no intervalo $[0, 1]$ com espaçamento de 0.01. As estimativas dos coeficientes de regressão, $\hat{\beta}$, são calculadas aplicando a mesma fórmula que a encontrada nas equações (2.33).

Para finalizar, uma vez obtidas as várias estimativas dos coeficientes de regressão, calculadas através dos diversos estimadores, é necessário agregá-las de modo a obter uma estimativa final para os parâmetros desconhecidos do modelo de regressão linear. As metodologias de agregação, quando executadas, farão uso dos estimadores OLS, GME e W-GME para os casos dos procedimentos *bagging* e *magging*, e dos estimadores GME e W-GME para o caso do procedimento *neagging*. A aplicação do método de agregação *bagging* consiste simplesmente em efetuar uma média ponderada, com pesos iguais, dos vetores de estimativas obtidos de cada grupo (10 vetores no caso de $G = 10$ ou 20 vetores, no caso de $G=20$), como mencionado na secção 2.4.1. Assim, recorrendo às 10 réplicas, são obtidos os valores $\hat{\beta}_{bOLS}$, $\hat{\beta}_{bGME}$ e $\hat{\beta}_{bW-GME}$. A execução do método de agregação *magging*, especificado na secção 2.4.2, efetua uma média ponderada dos vetores de estimativas obtidos de cada grupo, semelhantemente ao método *bagging*, embora os pesos não sejam necessariamente uniformes. O procedimento escolhe os pesos como uma combinação convexa, com o objetivo de minimizar a norma euclidiana dos valores ajustados, $\hat{\mathbf{y}}$. Pormenores sobre a implementação computacional deste método encontram-se em Abdi et al. [19]. Desta forma, são obtidos os $\hat{\beta}_{mOLS}$, $\hat{\beta}_{mGME}$ e $\hat{\beta}_{mW-GME}$. Por último, a implementação do método de agregação *neagging*, estabelecido na secção 2.4.3, consiste em calcular as entropias normalizadas para o sinal usando os vetores de probabilidade ótimos $\hat{\mathbf{p}}$ obtidos pelos estimadores GME e W-GME, para cada um dos grupos, equação (2.60). Posteriormente, determina-se o índice de informação $1 - S(\hat{\mathbf{p}})$ de cada grupo, e calculam-se os pesos dividindo o índice de informação de cada grupo pelo conteúdo de informação total, isto é, a soma de todos os índices de informação. De seguida, multiplica-se o vetor de pesos construído, pelas estimativas obtidas através dos estimadores GME e W-GME. Deste modo, obtêm-se os $\hat{\beta}_{nGME}$ e $\hat{\beta}_{nW-GME}$.

Para avaliar o desempenho dos métodos de agregação, são analisados vários resultados tais como erro de predição 1, erro de predição 2, erro de precisão 1, erro de precisão 2, a variância dos coeficientes de regressão estimados finais após agregação, a variância do erro de predição 1, e a variância do erro de precisão 1. A exibição dos resultados obtidos necessita de notação específica para sintetizar de forma clara a que corresponde cada valor apresentado. Todas as notações apresentadas futuramente, bem como algumas apresentadas previamente, encontram-se sintetizadas na Secção Notação Capítulo 3.

Para cada uma das experiências de Monte Carlo relativas aos cenários em análise, são calculados, para todas as 10 réplicas, os erros de predição e de precisão associados a cada um dos $\hat{\beta}_{aggr}$ obtidos. O erro de predição é deduzido através da norma euclidiana da diferença entre o vetor de observações preditas usando o modelo (multiplicação da matriz das variáveis explicativas pelas estimativas dos coeficientes de regressão após agregação) e o vetor simulado de observações com ruído, isto é, $\|\mathbf{X}\hat{\beta}_{aggr} - \mathbf{y}\|$. Já o erro de precisão é calculado através de norma euclidiana da diferença entre o vetor de estimativas dos coeficientes de regressão após agregação e o vetor de parâmetros original considerado na simulação, ou seja, $\|\hat{\beta}_{aggr} - \beta\|$. Os erros de predição e precisão 1 são obtidos efetuando a média dos 10 erros de predição e precisão obtidos em cada réplica, pelo que se obtêm $\|\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\|$ e $\|\hat{\beta} - \beta\|$, respectivamente, e os erros de predição e precisão 2 são determinados implementando as fórmulas do erro de predição e precisão, mas utilizando para tal os coeficientes de regressão estimados finais após agregação (média das réplicas), $\hat{\beta}_{aggr}$, obtendo-se os valores $\|\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\|$ e $\|\hat{\beta} - \beta\|$, respectivamente. As variâncias dos resultados são calculadas com recurso à fórmula da variância usual, isto é, a média da soma dos

quadrados das diferenças entre cada elemento e a sua média. No cálculo da variância de $\hat{\beta}_{aggr}$, da variância do erro de predição e da variância do erro de precisão, isto traduz-se em

$$\begin{aligned}
s_{\hat{\beta}_{aggr}}^2 &= \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R (\hat{\beta}_{aggr_i} - \hat{\beta}_{aggr})^2, \\
s_{\|\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\|}^2 &= \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R (\|\mathbf{X} \hat{\beta}_{aggr} - \mathbf{y}\|_i - \|\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\|)^2, \\
s_{\|\hat{\beta} - \beta\|}^2 &= \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R (\|\hat{\beta}_{aggr} - \beta\|_i - \|\hat{\beta} - \beta\|)^2,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

respectivamente, com R correspondente ao número de réplicas, 10.

3.2 Resultados e Discussão

Os resultados apresentados no âmbito deste trabalho pretendem realçar as tendências gerais deste trabalho de simulação. Para melhor compreender e analisar os resultados obtidos, são apresentadas tabelas resumos dos erros de precisão 1 e 2 referentes a todos os cenários enunciados previamente. Para além disso, são apresentados gráficos comparativos de erros de precisão entre os diferentes métodos, quando alterados o número de grupos e o número de observações por grupo, de forma a avaliar o impacto destes fatores nos métodos de agregação estudados, com os respetivos estimadores considerados. Devido à extensão deste estudo de simulação, pelo elevado número de cenários apresentados e posteriores vetores de estimativas e variâncias obtidos (oito vetores por cada cenário, relativos a cada um dos procedimentos de agregação com os diferentes estimadores considerados), são destacados os resultados de determinados cenários, que pretendem estabelecer um conjunto representativo do total dos cenários considerados neste estudo. Não obstante, o Apêndice A contém a totalidade dos resultados obtidos. Os valores das estimativas dos coeficientes de regressão, dos erros de precisão 1 e 2, e dos erros de predição 1 e 2, resultantes destes cenários, encontram-se nas Tabelas 3.4, 3.6, 3.8, 3.10, 3.12 e 3.14. As variâncias associadas a estes resultados encontram-se nas Tabelas 3.5, 3.7, 3.9, 3.11, 3.13 e 3.15. Note-se que os valores apresentados com o valor 0.00 não representam o valor nulo, mas sim um valor inferior a 0.01. Além disto, são apresentados *box plots* das estimativas dos coeficientes de regressão e do erro de precisão referentes a estes cenários, para uma análise visual/gráfica (entre outros aspetos) das variâncias relativamente a estes resultados.

Analisando os erros de precisão obtidos nos cenários $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, Tabela 3.1, nas situações de baixa colinearidade ($\text{cond}(\mathbf{X}) = 10$), observa-se que o $\|\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\|$ é geralmente inferior quando aplicado um dos estimadores baseados no princípio de ME. Apesar de, usualmente, o estimador OLS apresentar um bom desempenho em dados que apresentem baixa colinearidade, as estimativas obtidas pelos procedimentos que utilizaram os estimadores GME e W-GME sobressaem em relação às estimativas obtidas pelos procedimentos bOLS e mOLS. O bGME, bW-GME, mGME, mW-GME são os métodos que se distinguem pelo seu bom desempenho. Porém, o desempenho do método *bagging* com os estimadores GME e W-GME tende a piorar com o aumento da largura dos suportes dos coeficientes, destacando-se o melhor desempenho do *magging* com a utilização destes estimadores. Adicionalmente, o desempenho do mW-GME supera, em geral, o do mGME, nos cenários onde $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$. O nGME apresenta igualmente um dos melhores desempenhos, mas somente na situação em que o suporte para os parâmetros é menos amplo ($\mathbf{z}_k = [-10, 10]$).

Analisando agora um cenário com elevada colinearidade ($\text{cond}(\mathbf{X}) = 20000$), observa-se um acréscimo acentuado de $\|\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\|$ nos métodos de agregação que utilizam o estimador OLS, enquanto que as metodologias que se destacaram anteriormente, no cenário com baixa presença de colinearidade, continuam a comportar-se de maneira semelhante. Isto indica que a presença de colinearidade não parece afetar os resultados fornecidos pelos métodos de agregação referidos anteriormente, nomeadamente aqueles que usam estimadores baseados no princípio de ME. Uma vez que o desempenho do estimador OLS é geralmente afetado pelo volume de colinearidade nos dados, e o estimador GME (e, por extensão, o estimador W-GME) é apropriado para lidar com dados afetados por colinearidade, estes resultados não são inesperados. Novamente, o método de agregação *magging* com os estimadores GME e W-GME evidencia-se pelo seu desempenho, e os comportamentos observados para os cenários de baixa colinearidade são também observados nestes cenários mas, apesar disso, com o aumento de G e Obs, o bGME e o bW-GME voltam a aumentar o seu desempenho.

Note-se que, quando avaliada a qualidade das estimativas obtidas (erro de precisão 2), os cenários com uma maior amplitude dos suportes dos parâmetros, maior número de grupos e maior número e observações exibem as estimativas mais adequadas para os coeficientes de regressão do problema apresentado, com a utilização do bGME, bW-GME e nGME, independentemente do grau de colinearidade presente (mas mais visível com a presença mais acentuada de colinearidade).

Tabela 3.1: Tabela resumo dos erros de precisão dos cenários referentes à matriz de dados com $e \sim N(0, 1)$.

Nº Condição	Suporte (β)	Nº Grupos / Nº Observações	Erro de Precisão	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
10	[-10,10]	10/20	1	86,29	10,46	10,73	45,60	10,48	10,48	10,44	16,99
			2	29,51	10,45	10,62	13,84	10,48	10,48	10,44	12,90
		10/100	1	34,23	10,33	10,18	24,85	10,48	10,49	13,75	14,50
			2	15,15	10,25	9,89	13,55	10,48	10,49	9,72	8,40
		20/20	1	52,09	10,41	10,39	13,69	10,48	10,48	10,41	17,53
			2	14,38	10,41	10,34	8,89	10,48	10,48	10,40	12,65
		20/100	1	24,91	10,22	9,64	12,40	10,45	10,47	13,92	11,61
			2	9,67	10,20	9,54	8,46	10,45	10,47	10,43	6,42
	[-200,200]	10/20	1	116,43	22,75	21,16	54,84	14,69	11,22	25,44	70,89
			2	26,87	11,63	10,17	31,28	11,26	10,66	10,59	26,23
		10/100	1	39,15	17,31	15,79	25,82	15,76	10,38	22,73	40,36
			2	13,84	8,74	7,49	14,79	9,95	9,09	11,42	18,20
		20/20	1	68,26	17,31	18,35	19,50	11,44	10,51	19,38	99,55
			2	9,74	8,94	8,85	13,83	10,76	10,50	8,58	36,65
		20/100	1	29,83	12,85	12,23	13,56	13,11	10,23	16,78	28,06
			2	12,21	6,92	7,13	8,40	9,07	10,03	8,03	13,27
20 000	[-10,10]	10/20	1	108807,14	10,45	10,53	53822,66	10,47	10,49	10,42	13,76
			2	43621,66	10,45	10,45	20524,79	10,47	10,49	10,42	11,11
		10/100	1	41645,18	10,21	10,20	23219,29	10,39	10,46	13,55	14,92
			2	6285,39	10,14	10,04	1885,42	10,39	10,46	9,67	10,48
		20/20	1	134468,19	10,44	10,36	11333,22	10,48	10,48	10,41	13,03
			2	30674,01	10,44	10,34	1133,52	10,48	10,48	10,40	9,95
		20/100	1	26088,79	10,21	9,91	5521,06	10,47	10,48	13,56	12,73
			2	12642,34	10,20	9,85	1508,44	10,47	10,48	10,42	8,04
	[-200,200]	10/20	1	160028,52	23,20	21,74	94346,67	15,84	10,76	26,54	68,17
			2	6329,60	11,41	9,61	11141,37	11,11	10,08	11,66	29,92
		10/100	1	46393,15	16,28	15,70	29834,98	11,59	9,95	21,25	48,95
			2	5738,78	6,59	6,79	20050,43	5,72	8,71	8,66	30,20
		20/20	1	91114,53	16,68	15,50	8984,21	10,52	10,53	21,27	47,21
			2	44962,43	8,30	8,46	8975,99	10,38	10,52	9,47	18,12
		20/100	1	37064,06	10,60	10,77	10508,84	9,38	10,02	13,47	44,37
			2	5656,43	3,69	3,96	9093,49	9,02	9,92	3,76	30,13

Tabela 3.2: Tabela resumo dos erros de precisão dos cenários referentes à matriz de dados com $e \sim t(3)$.

Nº Condição	Suporte (β)	Nº Grupos / Nº Observações	Erro de Precisão	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$	
10	[-10,10]	10/20	1	202,85	11,19	11,17	69,84	10,47	10,48	22,73	22,46	
			2	44,87	10,71	10,67	23,17	10,47	10,48	13,39	13,50	
		10/100	1	60,44	12,26	12,22	34,76	10,37	10,43	14,65	14,60	
			2	42,94	9,86	9,79	19,40	10,36	10,35	10,27	10,25	
		20/20	1	130,97	11,35	11,31	17,50	10,48	10,48	22,95	21,78	
			2	27,91	11,04	10,97	10,40	10,48	10,48	14,44	14,24	
		20/100	1	41,95	12,53	12,52	13,14	10,52	10,53	13,55	13,53	
			2	12,13	11,06	11,07	10,96	10,51	10,53	11,22	11,22	
		[-200,200]	10/20	1	179,85	31,06	29,84	82,42	16,19	10,33	92,55	139,51
				2	43,87	13,68	16,66	37,81	10,50	10,03	62,91	77,26
			10/100	1	57,63	87,17	86,21	28,69	23,30	26,74	341,40	343,79
				2	10,15	36,13	36,89	10,62	10,75	13,46	130,56	130,94
	20/20		1	124,30	21,48	23,15	11,20	10,82	10,56	93,96	119,50	
			2	28,80	13,22	12,38	10,46	10,33	10,51	55,08	43,32	
	20/100		1	39,77	51,49	51,45	11,61	10,39	12,10	219,09	216,45	
			2	12,51	23,44	23,61	10,22	10,08	11,24	86,37	83,99	
	20 000	[-10,10]	10/20	1	193579,81	11,11	10,91	76289,47	10,47	10,48	21,02	21,30
				2	13066,07	10,62	10,31	9848,51	10,47	10,48	11,06	10,53
			10/100	1	95677,66	13,74	13,75	36441,85	10,50	10,52	15,29	15,24
				2	24643,99	11,25	11,26	7486,23	10,48	10,51	11,62	11,64
20/20			1	245249,84	10,84	10,94	10325,39	10,49	10,49	22,79	20,49	
			2	41755,93	10,51	10,60	1449,45	10,49	10,49	13,25	13,10	
20/100			1	55489,57	11,89	11,87	3785,99	10,54	10,57	12,83	12,81	
			2	22566,09	10,25	10,22	1618,99	10,49	10,51	10,21	10,20	
[-200,200]			10/20	1	308013,72	34,30	33,81	133724,12	16,12	10,97	114,29	147,73
				2	4035,98	14,89	13,11	5534,59	10,54	10,18	65,23	60,69
			10/100	1	69083,72	77,57	76,32	33072,85	19,06	15,02	258,82	259,92
				2	3721,44	34,33	34,23	11179,60	11,13	9,81	113,40	113,81
		20/20	1	135002,53	22,11	21,25	2172,45	10,04	10,44	102,45	127,05	
			2	77503,47	10,79	10,95	1299,89	9,88	10,43	51,63	47,99	
		20/100	1	45676,85	55,23	56,39	10954,65	10,81	12,48	240,71	246,11	
			2	523,39	28,43	30,17	551,49	10,10	10,95	119,62	123,56	

Tabela 3.3: Tabela resumo dos erros de precisão dos cenários referentes à matriz de dados com $e \sim C(0, 2)$.

Nº Condição	Suporte (β)	Nº Grupos / Nº Observações	Erro de Precisão	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
10	[-10,10]	10/20	1	7807,18	14,10	14,07	492,17	10,50	10,52	16,56	16,55
			2	2280,33	11,45	11,42	143,15	10,50	10,49	11,85	11,85
		10/100	1	5561,96	13,84	13,84	267,47	10,88	10,88	13,84	13,84
			2	3782,26	10,75	10,75	42,82	9,75	9,75	10,74	10,74
		20/20	1	3246,65	12,18	12,16	46,15	10,48	10,49	13,66	13,65
			2	1194,67	10,69	10,69	15,46	10,48	10,49	10,73	10,73
		20/100	1	44481,86	13,10	13,10	39,40	10,46	10,46	13,10	13,10
			2	42915,80	11,39	11,39	21,07	10,37	10,37	11,39	11,39
	[-200,200]	10/20	1	5087,95	131,86	135,29	289,24	16,08	14,32	295,25	293,38
			2	1435,85	35,02	35,35	53,45	10,74	10,72	74,96	73,93
		10/100	1	95540,28	225,51	225,53	309,14	138,16	138,17	225,06	225,10
			2	93551,86	84,75	84,81	202,73	44,36	44,36	84,70	84,89
		20/20	1	6505,53	78,92	78,79	52,46	11,08	10,52	194,14	192,51
			2	4648,72	25,86	25,43	34,48	10,74	10,50	66,51	65,59
		20/100	1	55171,34	134,45	134,39	31,16	19,95	19,95	134,91	134,82
			2	52819,77	55,50	55,34	11,42	10,82	10,81	56,30	56,13
20 000	[-10,10]	10/20	1	18425545,05	13,07	13,12	816608,77	10,47	10,37	15,16	15,13
			2	14091527,33	9,97	9,97	73850,75	10,47	10,28	10,25	10,23
		10/100	1	3960459,12	13,56	13,56	544287,19	10,94	10,94	13,56	13,56
			2	1139209,54	10,86	10,86	140661,72	10,38	10,38	10,86	10,86
		20/20	1	498229663,96	11,49	11,46	53777,20	10,49	10,49	13,26	13,15
			2	493730593,87	10,07	10,06	3794,02	10,49	10,49	10,07	9,97
		20/100	1	123549997,74	12,94	12,94	38200,42	10,64	10,64	12,95	12,95
			2	121549224,35	11,23	11,23	929,59	10,52	10,52	11,24	11,24
	[-200,200]	10/20	1	6984823,10	116,09	115,91	487157,74	21,45	11,75	265,34	260,49
			2	676483,39	30,10	30,70	31685,39	11,91	10,14	75,36	73,29
		10/100	1	7771232,94	196,80	197,01	417367,82	106,57	107,76	198,21	197,33
			2	3216059,63	69,85	68,67	31103,91	46,85	45,23	70,56	69,52
		20/20	1	597840024,33	88,56	89,99	54361,45	12,96	13,21	199,86	198,30
			2	591403182,85	29,08	29,85	54354,20	11,28	11,53	62,53	61,92
		20/100	1	116093776,13	138,41	138,70	134750,24	29,62	29,79	139,90	140,18
			2	108344985,84	45,65	45,69	73639,60	13,08	13,00	47,22	47,23

Quando $e \sim t(3)$, o bGME e o bW-GME baixam o seu desempenho, em comparação com o caso anterior. Pela Tabela 3.2, verifica-se que os métodos que apresentam $\|\hat{\beta} - \beta\|$ mais baixo são repetidamente o mGME e o mW-GME. Os métodos de agregação *bagging* e *neagging* evidenciam geralmente um decréscimo no seu desempenho, comparativamente à tabela anterior, indiciando que estes métodos são mais afetados pela presença de maiores perturbações nos dados. Os efeitos provocados pela colinearidade e existência de outras perturbações mais adversas são notórias nos métodos de agregação que aplicam o estimador OLS.

Finalmente, analisando o caso em que $e \sim C(0, 2)$, Tabela 3.3, as conclusões são semelhantes ao caso $e \sim t(3)$. Os métodos de agregação *bagging* e *neagging* apresentam fracos desempenhos, principalmente na utilização do estimador OLS, e o método de agregação *magging* é reconhecido pelo seu desempenho, na utilização dos estimadores GME e W-GME. Contudo, o mW-GME revela um comportamento maioritariamente dominante em termos de erro de precisão em relação ao mGME (com desempenho semelhante ou com diferenças não significativas nos casos em que não sobressai), nomeadamente nos cenários com $z_k = [-200, 200]$.

Posteriormente, é necessário analisar em que medida o aumento do número de grupos (G) e de observações por grupo (Obs) pode afetar a performance dos vários métodos de agregação com a utilização dos estimadores considerados. Pela inspeção dos Gráficos 3.2 e 3.4, para o mesmo suporte, $z_k = [-10, 10]$, com $\text{cond}(\mathbf{X}) = 10$ e $\text{cond}(\mathbf{X}) = 20000$, verifica-se que o bOLS demonstra piorar o desempenho quando Obs é mais reduzido, sendo que $\|\hat{\beta} - \beta\|$ é menor quando este número aumenta. O aumento de G parece melhorar a performance do bOLS, com exceção do caso $e \sim C(0, 2)$, que apresenta um efeito atípico no erro de precisão do bOLS, eventualmente, devido à presença acentuada de ruído. Estes resultados são expectáveis devido à teoria estatística inferencial e de amostragem. O método mOLS parece seguir um comportamento semelhante, em que tanto o aumento de G como o aumento de Obs conduzem a um melhor desempenho, inclusive nos casos em que $e \sim C(0, 2)$. No entanto, os estimadores baseados no princípio de ME não aparentam seguir este comportamento, mantendo-se aproximadamente constantes com o aumento de G e a adição de mais observações por grupo, sendo mais inequívoco nos métodos de agregação *bagging* e *magging*. A imutabilidade dos valores de $\|\hat{\beta} - \beta\|$ em relação ao incremento do número de grupos/observações é uma grande vantagem no uso dos métodos *bagging* e *magging* que utilizam os estimadores GME e W-GME. Uma vez que não existe a necessidade de um maior número de grupos, ou de maiores conjuntos de dados na obtenção de estimativas adequadas para o problema em termos de erro de precisão, é possível reduzir a carga computacional da implementação destes procedimentos de agregação.

Em suma, como observado nas Tabelas 3.1, 3.2 e 3.3, verifica-se que os melhores resultados de erro de precisão são obtidos através do bGME, bW-GME, mGME e o mW-GME, em cenários de erros modelados por uma distribuição Normal, e do mGME e mW-GME, em cenários modelados por uma distribuição de t-Student ou de Cauchy.

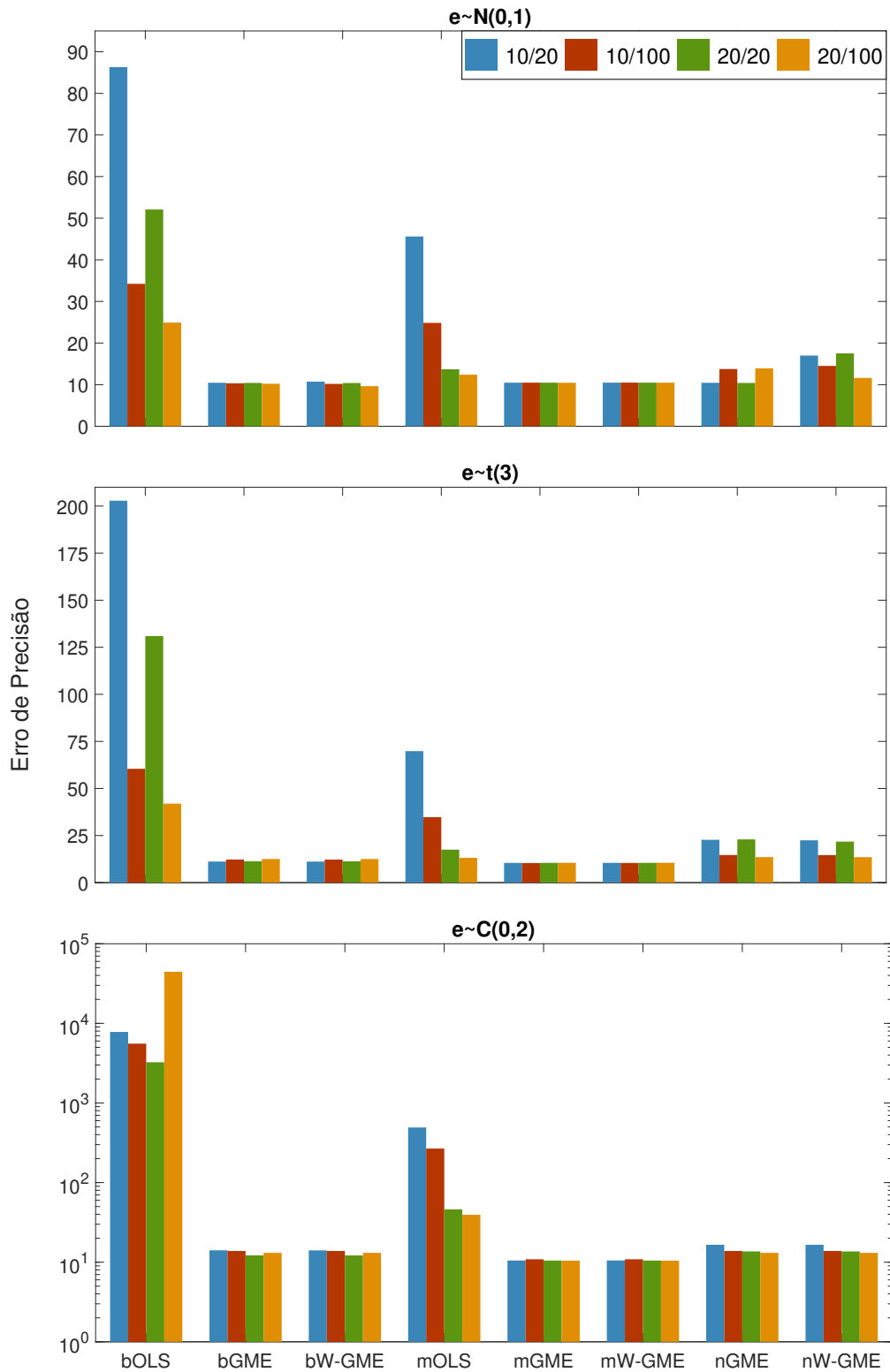


Figura 3.2: Gráficos comparativos dos erros de precisão, referentes aos cenários com $C = 10$ e $z_k = [-10, 10]$, para diferentes distribuições de erro. Valor1/Valor2 significa número de grupos/ número de observações em cada grupo.

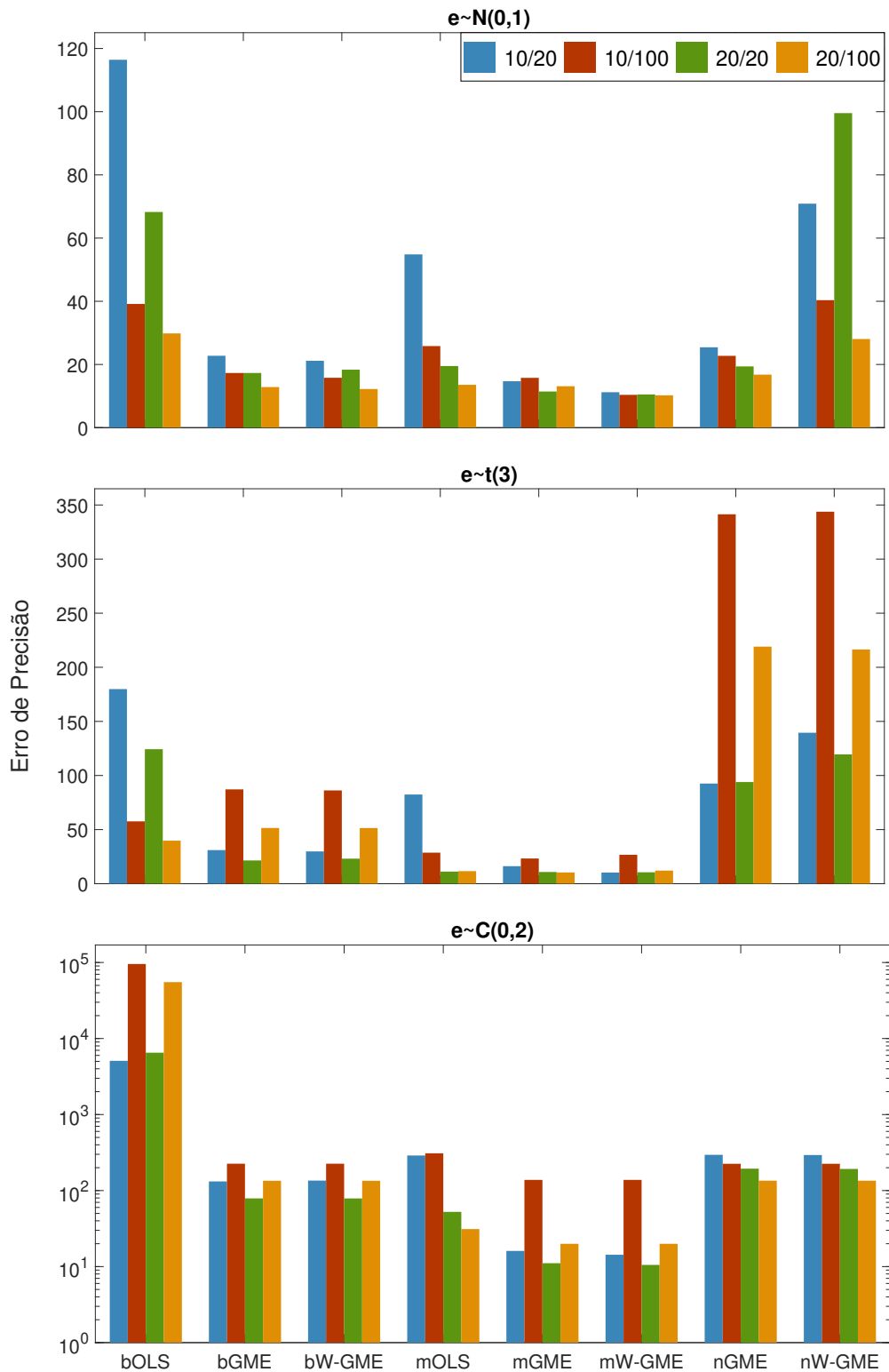


Figura 3.3: Gráficos comparativos dos erros de precisão, referentes aos cenários com $C = 10$ e $z_k = [-200, 200]$, para diferentes distribuições de erro. Valor1/Valor2 significa número de grupos/ número de observações em cada grupo.

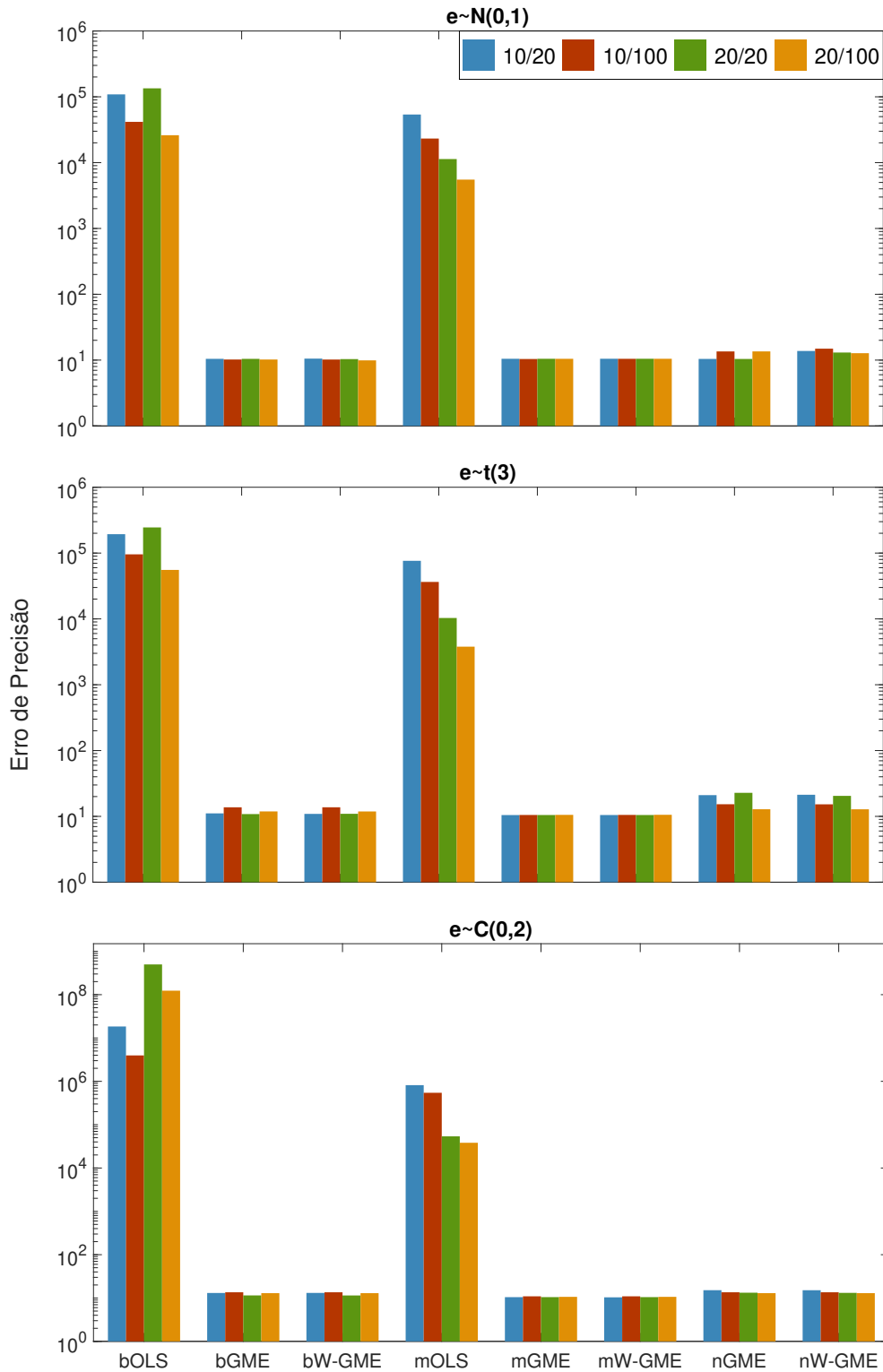


Figura 3.4: Gráficos comparativos dos erros de precisão, referentes aos cenários com $C = 20000$ e $z_k = [-10, 10]$, para diferentes distribuições de erro. Valor1/Valor2 significa número de grupos/ número de observações em cada grupo.

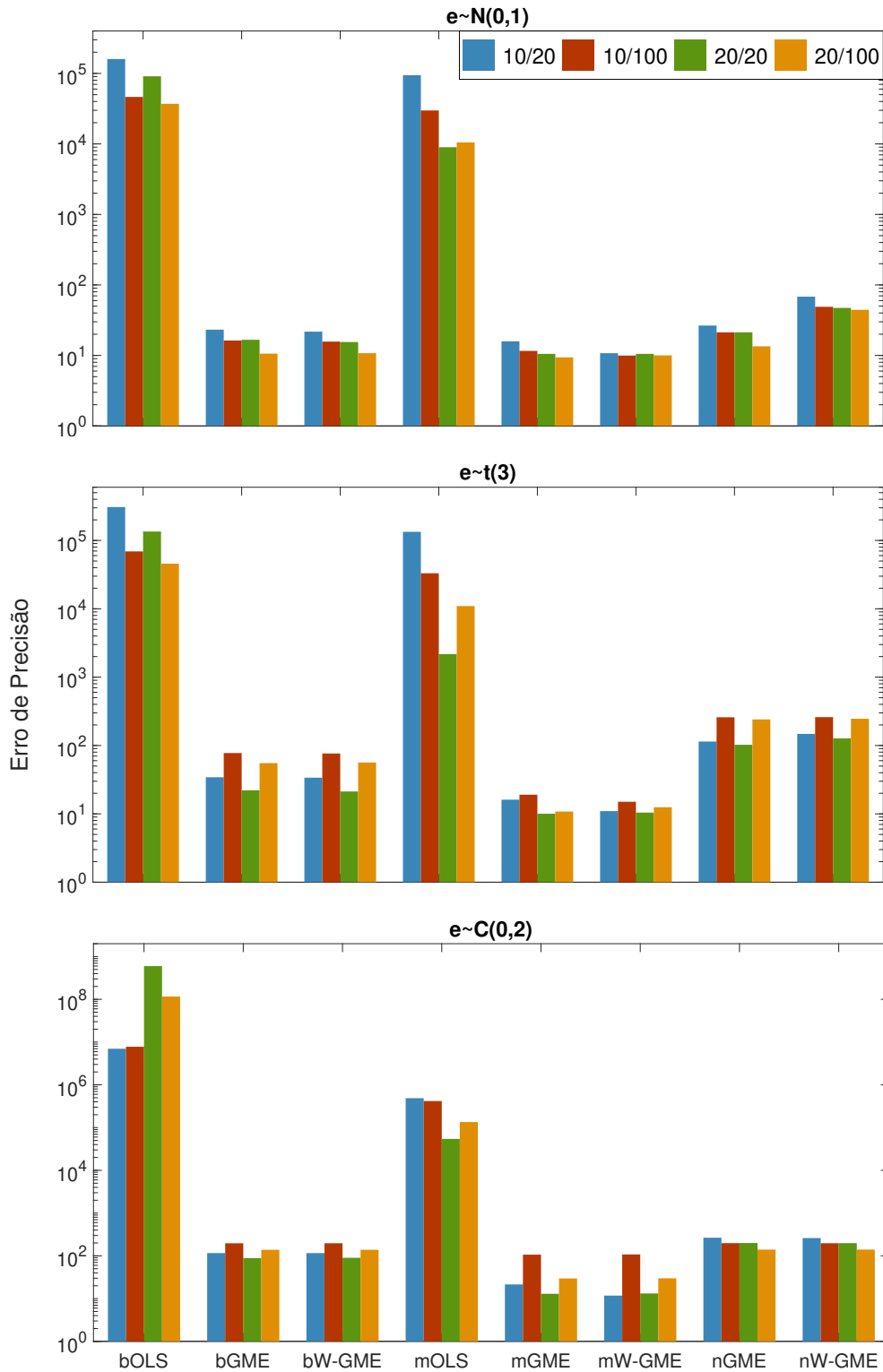


Figura 3.5: Gráficos comparativos dos erros de precisão, referentes aos cenários com $C = 20000$ e $z_k = [-200, 200]$, para diferentes distribuições de erro. Valor1/Valor2 significa número de grupos/ número de observações em cada grupo.

Analisando os resultados dos Gráficos 3.3 e 3.5, para o mesmo suporte $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, com $\text{cond}(\mathbf{X}) = 10$ e $\text{cond}(\mathbf{X}) = 20000$, as conclusões para os métodos de agregação que empregam o estimador OLS permanecem sensivelmente as mesmas que as anteriores para todas as distribuições de erro consideradas. Porém, com o aumento da amplitude dos suportes dos parâmetros (e apesar de cenários em que $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$ o $\|\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\|$ manter-se aproximadamente constante para o bGME, bW-GME, mGME e mW-GME) quando $\mathbf{e} \sim t(3)$ e $\mathbf{e} \sim C(0, 2)$, todos os procedimentos de agregação com estimadores baseados no princípio de ME apresentam um decréscimo no seu desempenho quando aumentado Obs (contrariamente aos resultados obtidos para o suporte mais estreito). À exceção do método *neagging* no caso de $\mathbf{e} \sim C(0, 2)$, este decréscimo parece ser mais acentuado com o aumento do número de observações e permanece inalterado com o aumento do número de grupos. No caso do método *neagging*, este efeito pode significar que agregar estimativas com o conhecimento da proporção do conteúdo de informação de vários grupos é mais vantajosa em relação à agregação com a indicação da proporção do conteúdo de informação de grupos de maior dimensão, uma vez que os grupos com muitas observações não significam necessariamente um maior estado de conhecimento ou menor estado de incerteza.

Por último, fazendo a comparação das situações com o mesmo número de condição, Gráfico 3.2 com 3.3 e Gráfico 3.4 com 3.5 e, naturalmente, exceptuando os métodos que utilizaram o estimador OLS, pode dizer-se que o aumento da amplitude dos suportes dos parâmetros, de $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$ para $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, provocou um decréscimo acentuado no desempenho de todos os procedimentos de agregação, exceto o mGME e o mW-GME (excluindo os casos com menor G e maior Obs). Esta análise está de acordo com a discussão das Tabelas 3.1, 3.2 e 3.2.

Um dos aspetos mais característicos deste estudo de simulação foi o desempenho similar dos erros de predição para todos os cenários analisados, apenas ocorrendo variação de valores com a alteração da distribuição das perturbações aleatórias. A diferença mais acentuada dos valores de $\|\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\|$ verificou-se associada ao bOLS, que apresenta o maior valor de erro de predição, e de variância associada a este erro. No entanto, o $\|\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\|$ é semelhante para todas as restantes metodologias de agregação e seus estimadores utilizados, mesmo alterando o nível de colinearidade presente nas variáveis explicativas, os suportes dos parâmetros desconhecidos, e o número de grupos e observações por grupo. A única exceção verificou-se nas metodologias de agregação *neagging* quando a amplitude dos suportes é mais ampla, produzindo erros de predição mais elevados e maior variação associada, exceto quando $\mathbf{e} \sim C(0, 2)$. No entanto, o método de agregação *magging* apresenta sistematicamente baixo erro de predição e variância associada, em todos os cenários analisados. Estas conclusões podem ser verificadas efetuado uma breve análise aos resultados que se encontram no Apêndice A.

Tabela 3.4: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 20$.

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	-6,32	-0,02	0,15	-2,48	0,00	0,00	-0,04	1,22
1	-3,51	-0,01	0,08	2,24	0,01	0,00	-0,01	0,46
-3	1,28	-0,03	-0,09	-2,58	-0,01	-0,01	-0,04	-0,04
5	-9,79	0,02	-0,21	1,40	0,01	0,01	0,03	-1,82
-5	1,98	0,00	0,26	-1,09	0,00	0,00	-0,01	2,32
3	21,55	0,05	-0,07	4,49	0,01	0,01	0,08	-0,96
4	8,94	0,02	0,31	7,10	0,01	0,01	0,03	2,09
-2	-6,20	0,00	-0,14	-3,78	-0,01	-0,01	0,01	-1,14
-1	-3,20	0,00	0,19	4,83	0,00	0,00	-0,01	2,27
-4	6,23	0,02	0,17	5,62	0,01	0,01	0,02	1,09
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ $	184,56	173,14	173,15	176,31	173,14	173,14	173,14	173,91
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	86,29	10,46	10,73	45,60	10,48	10,48	10,44	16,99
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ ^*$	173,62	173,14	173,14	173,28	173,14	173,14	173,14	173,24
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	29,51	10,45	10,62	13,84	10,48	10,48	10,44	12,90

Tabela 3.5: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 20$.

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
β_1	154,83	0,01	0,38	26,01	0,00	0,00	0,01	16,55
β_2	863,92	0,00	0,39	121,40	0,00	0,00	0,01	23,21
β_3	1098,51	0,00	0,17	327,87	0,00	0,00	0,01	15,02
β_4	1072,69	0,00	0,25	582,70	0,00	0,00	0,00	15,19
β_5	310,60	0,00	0,24	103,46	0,00	0,00	0,01	15,78
β_6	917,60	0,00	0,23	146,27	0,00	0,00	0,01	24,34
β_7	694,59	0,00	0,34	185,62	0,00	0,00	0,01	24,99
β_8	395,87	0,00	0,18	83,20	0,00	0,00	0,01	13,43
β_9	1398,29	0,00	0,15	545,99	0,00	0,00	0,01	15,83
β_{10}	591,26	0,00	0,12	229,50	0,00	0,00	0,01	19,71
$s^2_{\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ }$	50,04	0,00	0,00	6,31	0,00	0,00	0,00	1,13
$s^2_{\ \hat{\beta} - \beta\ }$	922,32	0,00	0,24	464,13	0,00	0,00	0,01	61,91

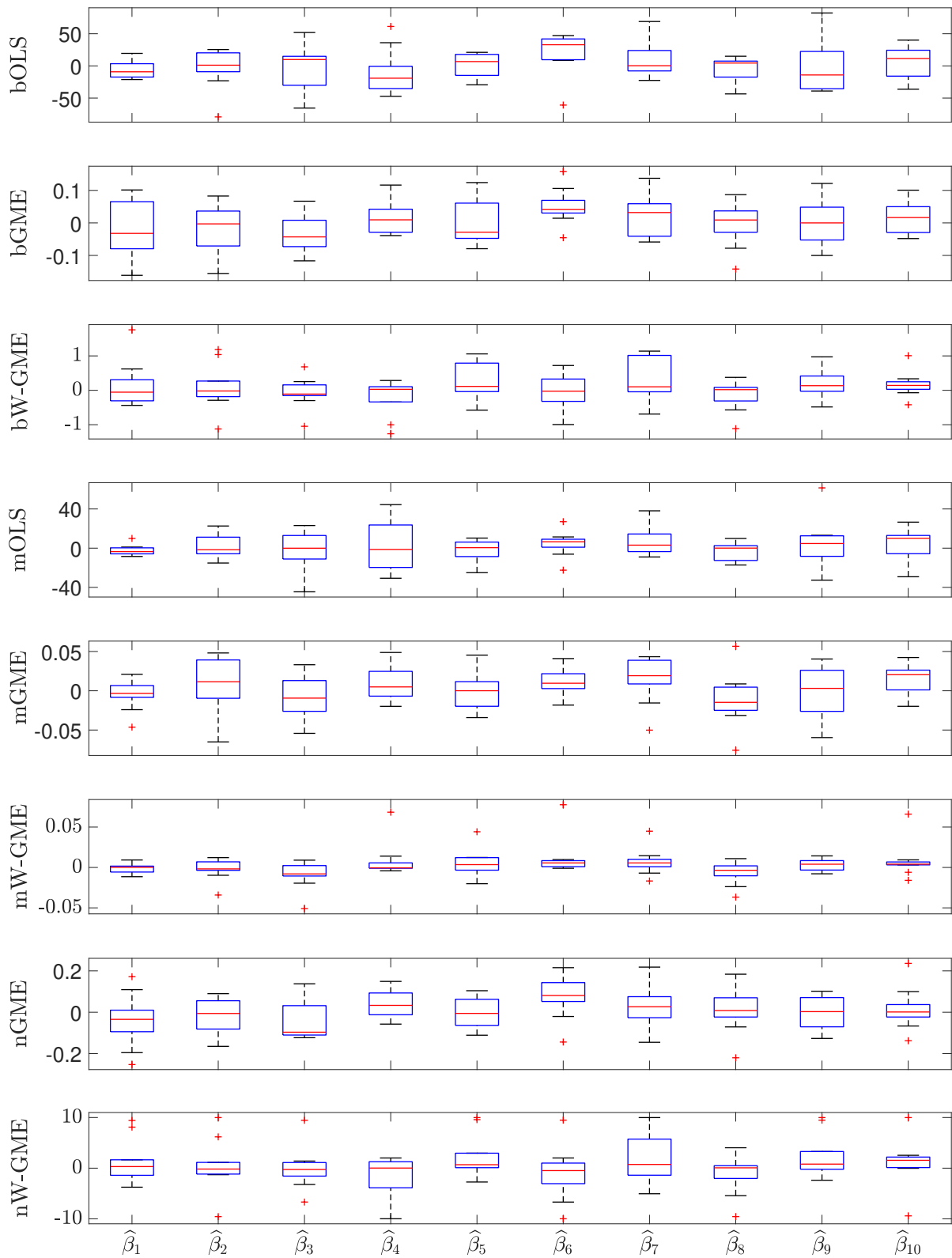


Figura 3.6: *Box plots* das estimativas dos 10 coeficientes de regressão linear, utilizando os métodos de agregação *bagging*, *magging* e *neagging*. Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 20$.

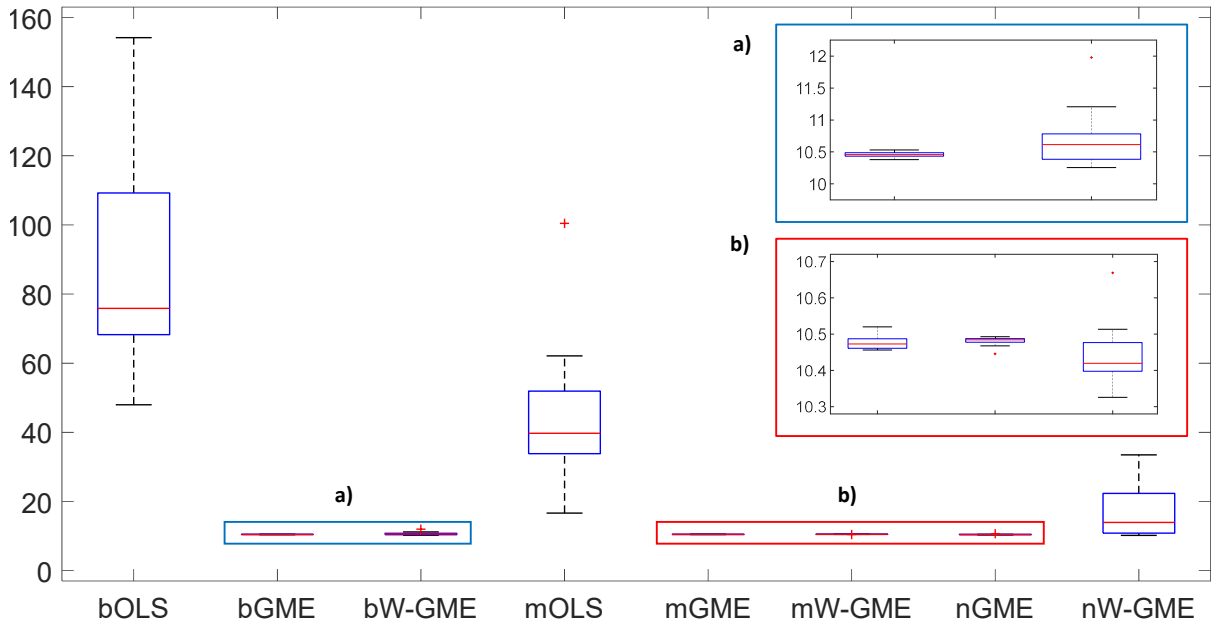


Figura 3.7: *Box plots* dos erros de precisão, relativos aos procedimentos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, $G = 10$, Obs = 20.

Neste cenário inicial, as estimativas fornecidas pelo bGME, bW-GME, mGME, mW-GME e nGME, nas Tabelas 3.4 e 3.5, apresentam um elevado nível de contração em direção ao centro dos seus suportes e reduzida variância dos resultados. Dado que os limites do suporte são pouco amplos, estes exercem muita pressão nas estimativas, uma vez que diminuir os limites dos suportes diminui o impacto dos dados e aumenta o impacto dos suportes. Em função disto, verifica-se a perspetiva discutida na Secção 2.3.2 de que o estimador GME pode ser considerado um estimador de contração. Apesar disto, pela informação prévia disponível concedida ao método, estes fornecem melhores resultados do que o estimador convencional OLS, no contexto de agregação. A análise dos *box plots* associados a estas estimativas demonstram muito pouca variação, indicando que estes procedimentos são mais estáveis do que os restantes procedimentos analisados, como se pode comprovar na Figura 3.6. Adicionalmente, este comportamento é identificado na Figura 3.7, na medida em que se observa que as larguras das caixas dos *box plots* dos erros de precisão referentes a estes procedimentos são muito menores do que as dos outros métodos, mostrando a reduzida variação dos resultados.

Posto isto, pode dizer-se que os métodos de agregação *bagging* e *magging* exibem estimativas mais estáveis para este cenário, embora somente quando aplicados os estimadores GME e W-GME, bem como o método *neagging*, quando aplicado o GME.

Tabela 3.6: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$.

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	1770,09	3,06	3,03	2840,45	0,19	0,10	2,67	13,23
1	-568,21	2,26	1,79	-917,11	0,29	0,13	1,74	-4,36
-3	1213,72	-2,52	-1,92	1955,02	-0,21	-0,01	-2,91	5,63
5	74,67	5,55	4,95	110,62	0,91	0,35	6,83	7,71
-5	-2199,87	-3,04	-3,35	-3532,79	-0,78	-0,36	-3,02	-14,60
3	245,10	3,26	2,93	389,56	0,38	0,07	3,16	2,43
4	1160,02	3,37	3,63	1859,70	0,40	0,25	4,76	12,22
-2	2354,81	-0,09	0,61	3785,60	0,08	-0,02	-0,01	11,52
-1	3501,47	-2,15	-0,51	5632,38	-0,33	-0,30	-2,07	14,54
-4	1735,37	-2,94	-2,29	2793,78	-0,75	-0,15	-3,65	5,33
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ $	173,36	173,19	173,13	173,01	173,02	173,05	173,41	174,48
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	37064,06	10,60	10,77	10508,84	9,38	10,02	13,47	44,37
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ *$	172,87	172,86	172,85	172,95	173,00	173,05	172,87	172,96
$\ \hat{\beta} - \beta\ *$	5656,43	3,69	3,96	9093,49	9,02	9,92	3,76	30,13

Tabela 3.7: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$.

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
β_1	191667076,64	10,62	6,42	22900791,46	0,34	0,09	18,50	822,38
β_2	20006333,87	18,10	12,07	2388780,76	0,61	0,08	23,17	296,98
β_3	90863260,13	13,74	13,56	10851269,32	0,91	0,35	26,66	788,23
β_4	286093,42	6,04	4,15	34112,32	0,85	0,32	11,52	14,57
β_5	296341352,62	9,81	20,77	35403380,15	1,32	0,48	19,76	1579,76
β_6	3591600,95	8,60	4,55	429509,72	0,55	0,21	15,76	35,57
β_7	82100089,13	12,11	16,48	9810366,22	0,83	0,18	21,02	440,41
β_8	340464453,63	10,12	15,76	40689683,52	0,38	0,11	23,09	1173,20
β_9	754035479,95	2,62	9,00	90098250,89	0,96	0,43	3,20	2373,23
β_{10}	185655824,78	12,00	10,64	22171653,17	0,88	0,16	13,10	861,48
$s^2_{\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ }$	0,04	0,03	0,01	0,00	0,00	0,00	0,06	5,94
$s^2_{\ \hat{\beta} - \beta\ }$	623261972,93	4,97	13,16	207033642,80	0,92	0,44	8,42	7325,00

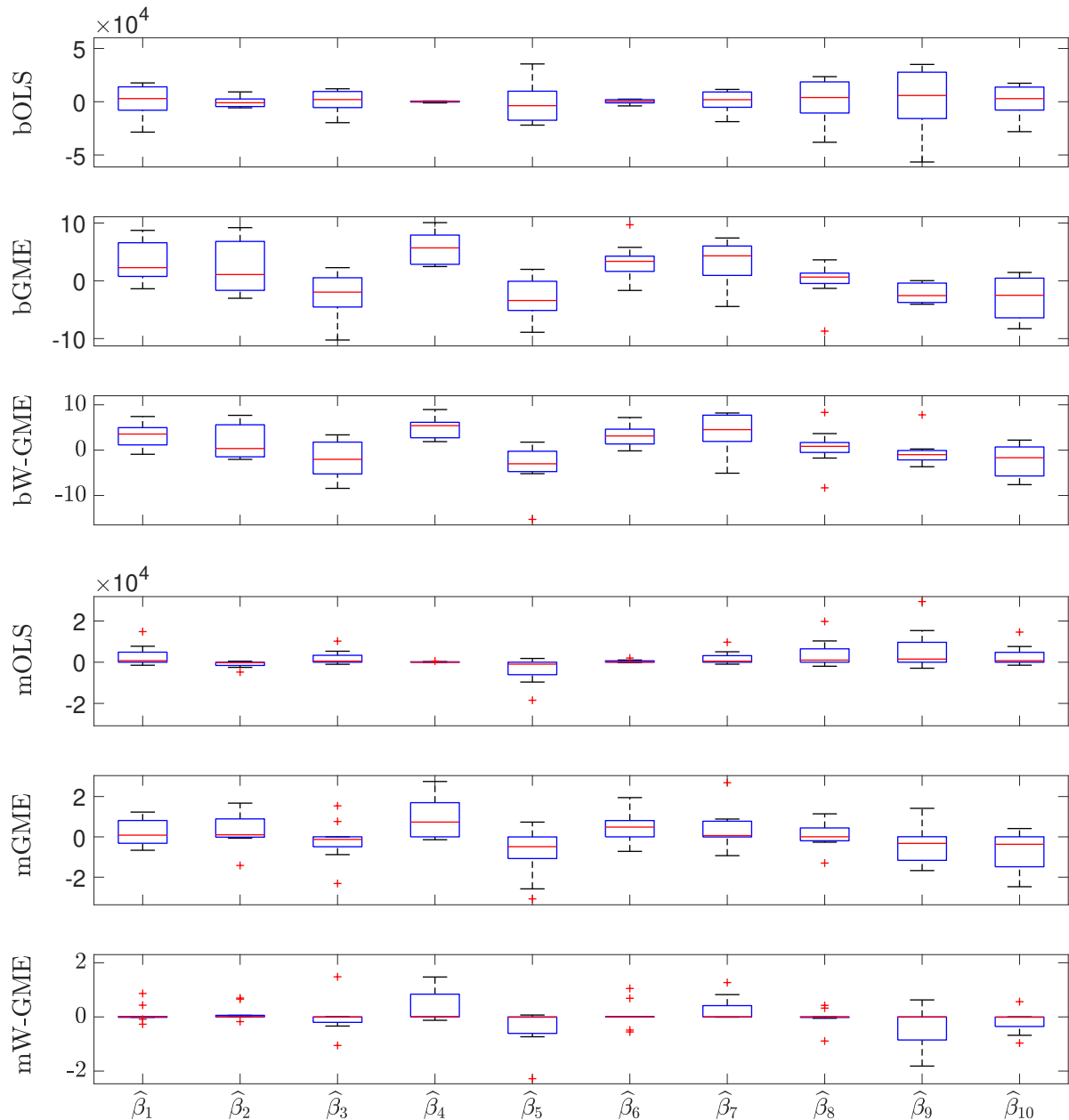


Figura 3.8: *Box plots* das estimativas dos 10 coeficientes de regressão linear, utilizando os métodos de agregação *bagging* e *magging*.

Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$.

Quando comparado o mesmo cenário de erros Normais, mas com maior número de condição e com um acréscimo no número de grupos, no número de observações e na amplitude do suporte para os erros ($C = 20000$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$ e $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$), Tabelas 3.6 e 3.7, as estimativas dos métodos discutidos anteriormente (nomeadamente bGME, bW-GME, mGME, mW-GME e nGME) apresentam um baixo erro de precisão, mas somente o mGME e mW-GME apresentam estimativas com menor variação comparativamente aos restantes procedimentos, como se pode observar nos Gráficos 3.8 e 3.9. Complementarmente, o mesmo se verifica no Gráfico 3.10, onde se observa uma reduzida variância correspondente a estes métodos relativamente ao erro de precisão. Desta forma,

os métodos destacados nestes cenários são o mGME e mW-GME, com os menores valores de $\|\hat{\beta} - \beta\|$ e variâncias associadas, evidenciando estimativas mais estáveis.

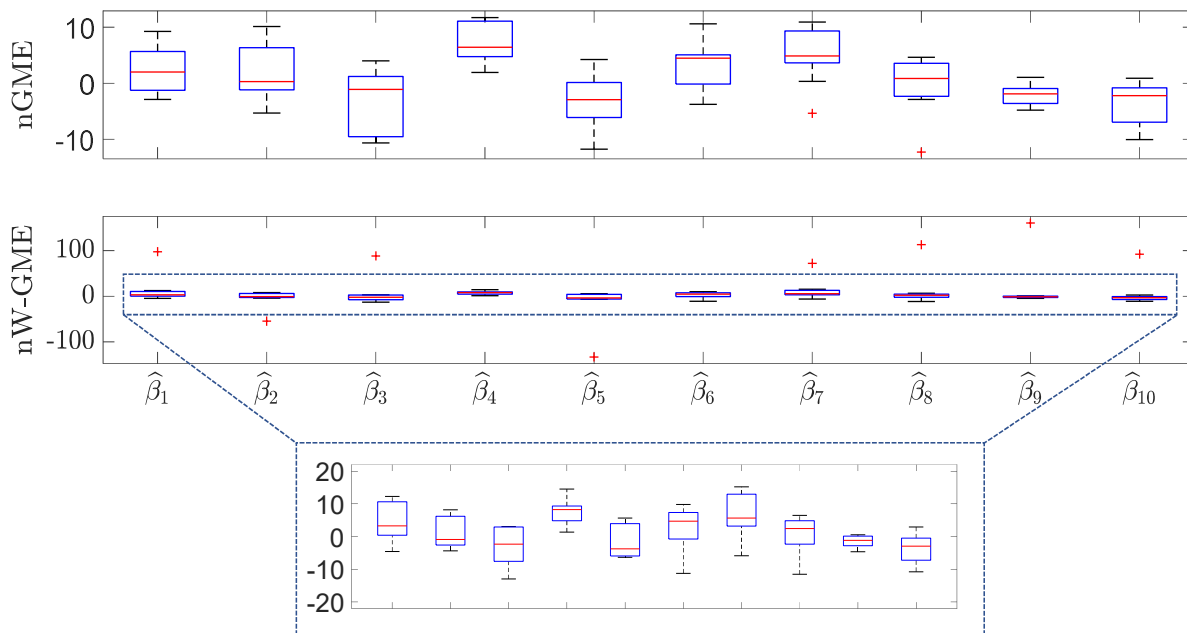


Figura 3.9: *Box plots* das estimativas dos 10 coeficientes de regressão linear, utilizando o método de agregação *neagging*.

Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$.

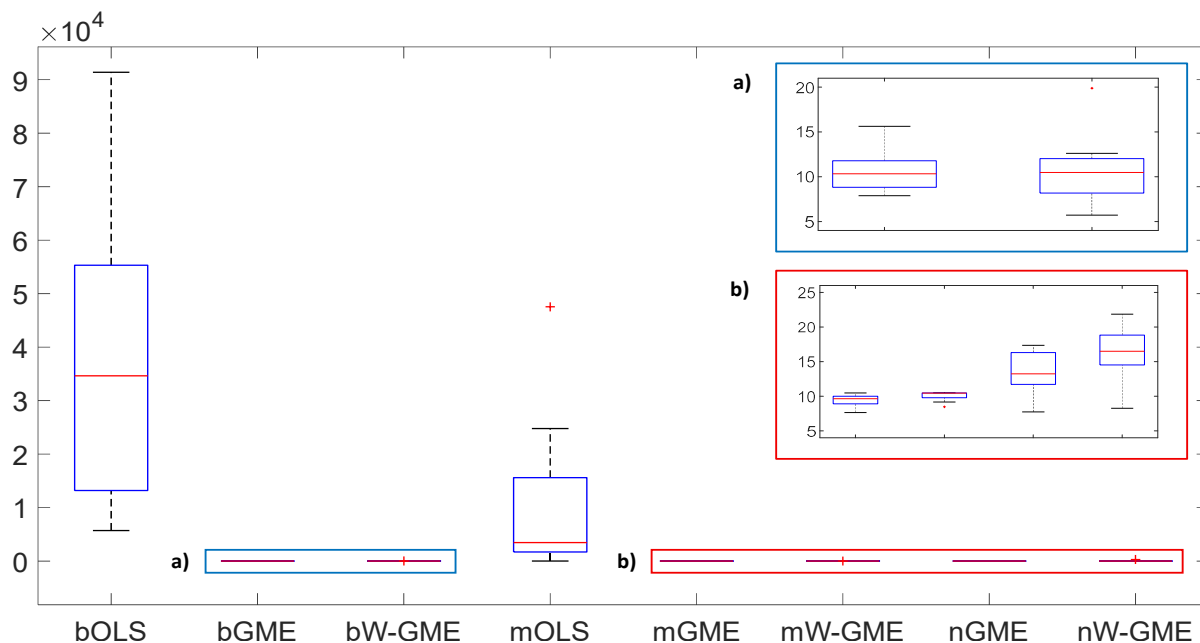


Figura 3.10: *Box plots* dos erros de precisão, relativos aos procedimentos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$.

Tabela 3.8: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $Obs = 20$.

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	-2,29	3,28	3,80	6,70	1,45	0,22	17,07	12,40
1	-9,88	2,73	3,87	15,11	0,06	-0,05	23,64	38,67
-3	12,28	-0,29	2,21	-20,30	-2,65	-0,77	16,04	18,44
5	-25,08	-4,02	-4,05	13,71	1,08	0,07	-21,04	-23,56
-5	2,63	-2,77	-0,67	4,76	2,43	0,13	-24,01	-19,65
3	13,34	-0,21	-3,49	-10,04	1,01	0,11	-15,69	-27,18
4	-6,40	-0,86	-4,04	6,06	-0,90	0,10	-15,44	-26,19
-2	-21,10	-5,42	-5,92	-1,42	-2,42	-0,52	-20,23	-31,34
-1	-4,33	4,96	2,72	21,95	1,61	0,44	16,68	9,74
-4	-3,75	-1,19	-2,44	-10,09	-2,19	-0,40	17,07	8,34
$\ \hat{y} - y\ $	320,08	304,14	303,90	306,55	302,57	302,33	341,86	353,92
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	179,85	31,06	29,84	82,42	16,19	10,33	92,55	139,51
$\ \hat{y} - y\ ^*$	302,70	302,33	302,42	302,88	302,30	302,32	308,16	311,13
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	43,87	13,68	16,66	37,81	10,50	10,03	62,91	77,26

Tabela 3.9: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $Obs = 20$.

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
β_1	745,70	31,39	42,65	161,46	2,98	0,13	3087,43	4162,88
β_2	3487,74	90,20	67,86	830,41	15,22	0,65	3057,85	3681,66
β_3	3461,20	125,15	99,93	586,91	7,26	0,55	3222,60	3687,63
β_4	11238,27	62,98	57,65	1797,34	20,12	0,22	3000,86	3521,83
β_5	601,14	125,77	109,78	261,85	14,80	1,11	3169,70	4357,49
β_6	5145,97	96,75	91,31	638,55	22,68	0,31	3253,45	3984,64
β_7	1963,70	105,89	85,52	265,64	27,15	1,05	3245,80	3733,64
β_8	1964,40	130,13	79,57	643,94	11,48	0,67	3042,58	3434,00
β_9	6369,57	192,36	143,52	1843,56	38,44	1,65	3303,30	4521,63
β_{10}	925,38	101,45	87,96	113,32	16,79	0,57	3173,38	4049,38
$s^2_{\ \hat{y} - y\ }$	121,46	6,67	5,39	10,31	0,04	0,00	12041,61	13560,87
$s^2_{\ \hat{\beta} - \beta\ }$	5482,07	284,62	253,01	1780,23	25,01	0,82	26948,31	25640,10

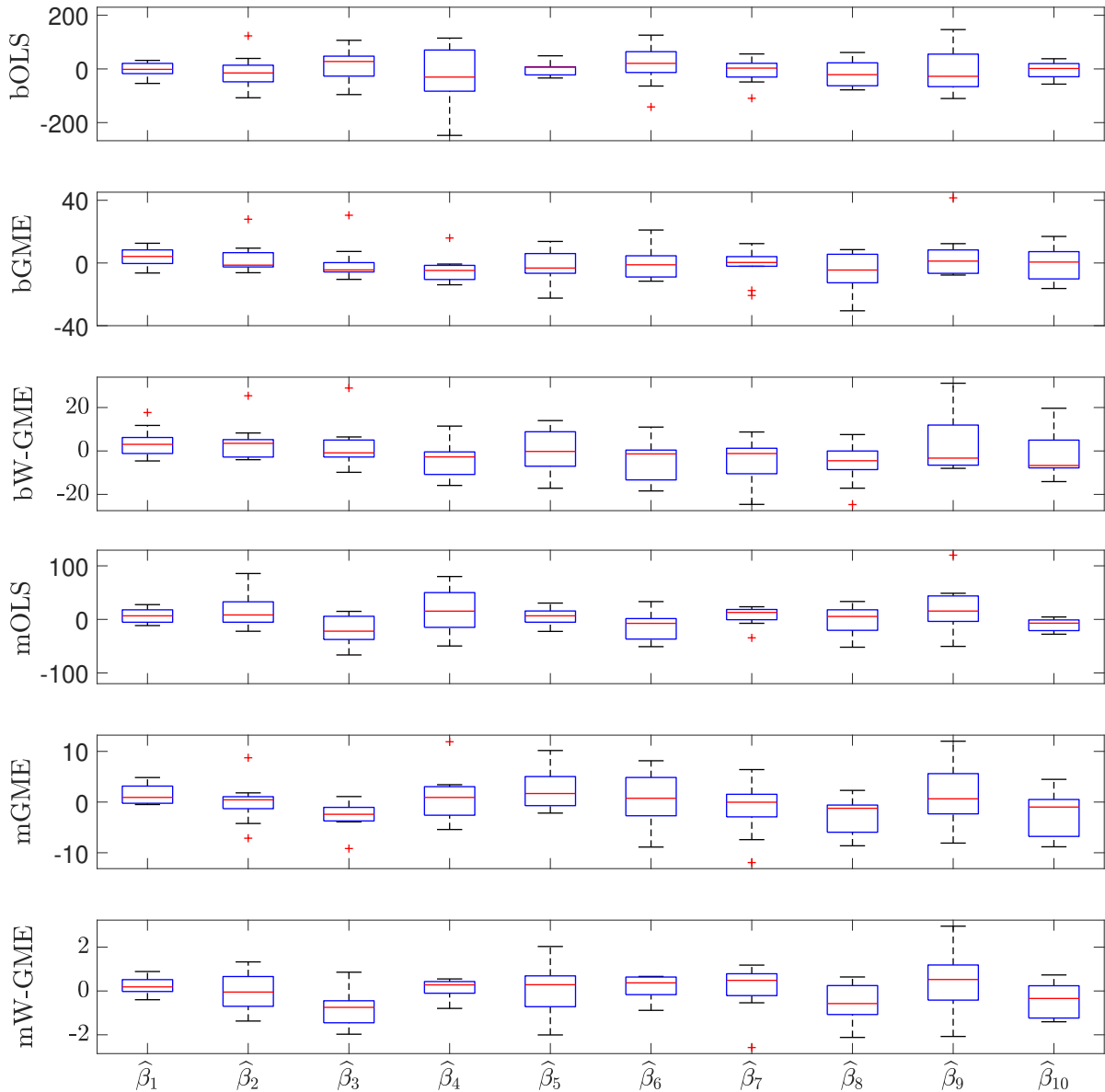


Figura 3.11: *Box plots* das estimativas dos 10 coeficientes de regressão linear, utilizando os métodos de agregação *bagging* e *magging*.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 20$.

No cenário $e \sim t(3)$, com menor número de condição, G e Obs , mas $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, Tabelas 3.8 e 3.9, o procedimento que se destaca é o da metodologia de agregação *magging* com a utilização do estimador W-GME pelo reduzido $\|\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\|$ e variâncias associadas. Esta análise é confirmada pela visualização dos Gráficos 3.11, 3.12 e 3.13. Como discutido anteriormente, neste cenário já é visível o decréscimo em termos de predição do bOLS, nGME e nW-GME, além de um aumento geral de $\|\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\|$ nos restantes métodos, comparativamente aos cenários com $e \sim N(0, 1)$.

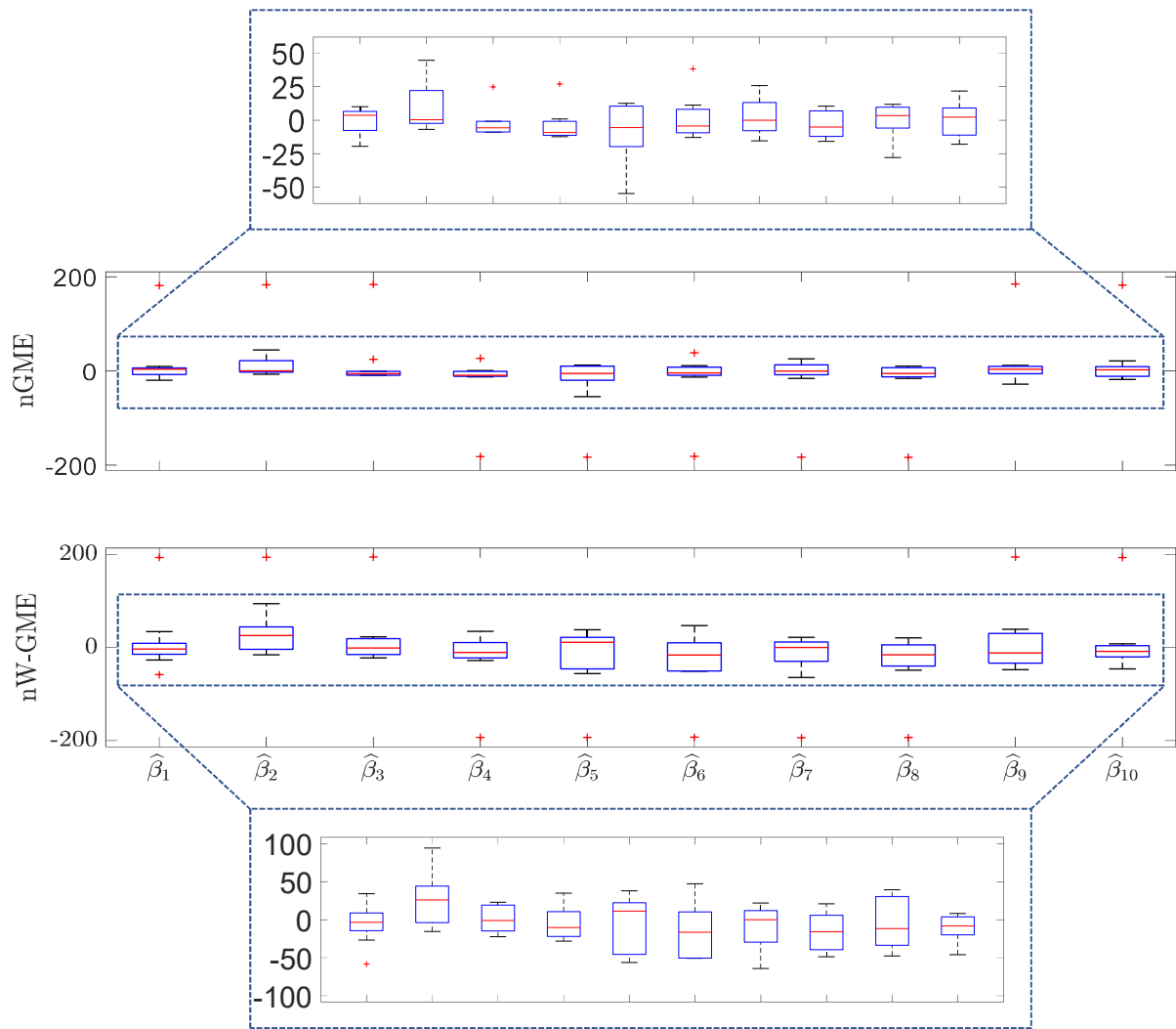


Figura 3.12: *Box plots* das estimativas dos 10 coeficientes de regressão linear, utilizando o método de agregação *neagging*.
 Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 20$.

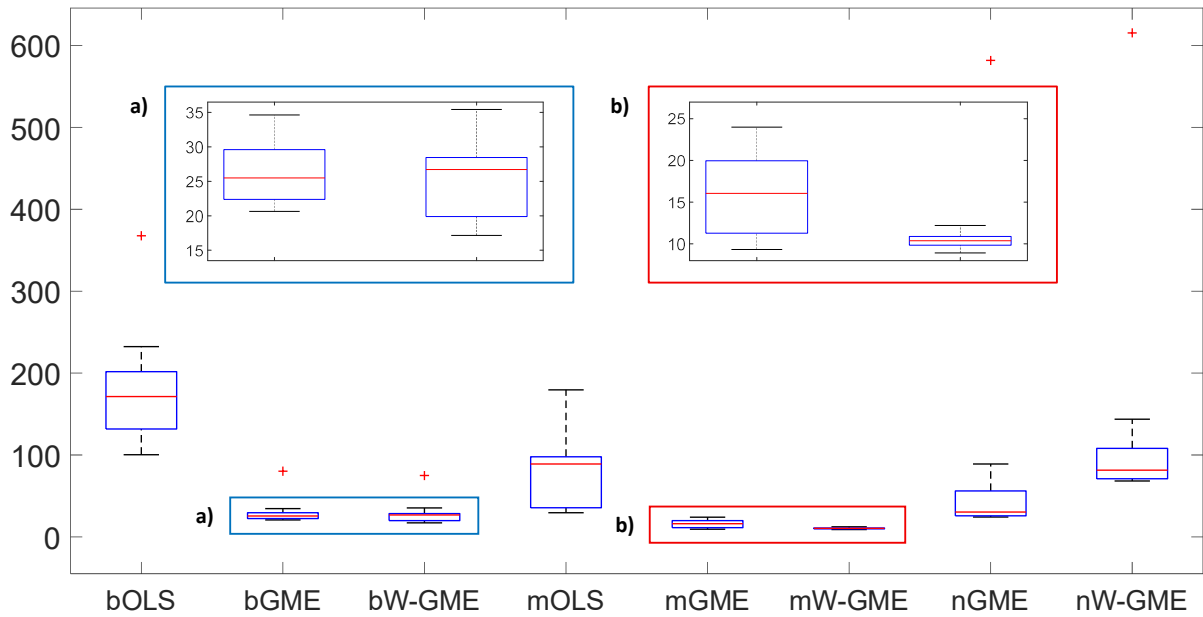


Figura 3.13: *Box plots* dos erros de precisão, relativos aos procedimentos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $Obs = 20$.

Com a redução da amplitude de z_k para $z_k = [-10, 10]$, e o aumento do número de condição, de G e Obs , os métodos de agregação com estimadores baseados no princípio de ME voltam a ganhar protagonismo, como se pode verificar a partir das Tabelas 3.10 e 3.11, tanto a nível de precisão como reduzida variância. Em especial, o método *maggining* exibe os melhores resultados em termos de $\|\hat{\beta} - \beta\|$ e de reduzida variação nas estimativas, como se pode observar nos Gráficos 3.14, 3.15 e 3.16, complementando com a análise do Gráfico 3.17. Outra característica evidente é o praticamente constante valor de erro de predição correspondente a todos os métodos (apesar de ser mais elevado do que nos cenários $e \sim N(0, 1)$).

Tabela 3.10: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $Obs = 100$.

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	7054,80	-0,16	-0,11	-504,54	-0,15	-0,17	-0,24	-0,21
1	-2281,37	-1,32	-1,37	162,95	0,05	0,06	-1,52	-1,54
-3	4850,20	-1,39	-1,45	-348,39	-0,12	-0,14	-1,84	-1,85
5	278,30	1,12	1,08	-19,86	-0,01	-0,03	1,40	1,38
-5	-8769,35	0,10	0,05	627,98	0,17	0,21	0,10	0,09
3	967,54	-0,56	-0,55	-69,33	-0,04	-0,04	-0,72	-0,72
4	4617,18	-0,04	-0,05	-330,62	-0,07	-0,10	0,02	0,00
-2	9389,06	1,04	0,97	-674,36	-0,17	-0,20	1,23	1,19
-1	13975,85	-0,18	-0,22	-1003,04	-0,27	-0,30	-0,13	-0,15
-4	6929,92	-0,47	-0,45	-498,35	-0,16	-0,20	-0,60	-0,58
$\ \hat{y} - y\ $	302,94	302,42	302,42	302,36	302,36	302,36	302,48	302,48
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	55489,57	11,89	11,87	3785,99	10,54	10,57	12,83	12,81
$\ \hat{y} - y\ ^*$	302,34	302,34	302,33	302,34	302,36	302,36	302,33	302,33
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	22566,09	10,25	10,22	1618,99	10,49	10,51	10,21	10,20

Tabela 3.11: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $Obs = 100$.

	$s_{\hat{\beta}_{bOLS}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{bGME}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{bW-GME}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{mOLS}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{mGME}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{mW-GME}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{nGME}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{nW-GME}}^2$
β_1	339733497,15	3,79	3,77	3068861,28	0,11	0,12	5,24	5,11
β_2	35465183,64	3,03	3,06	320490,99	0,01	0,02	3,94	3,91
β_3	161151728,64	2,00	2,00	1458203,02	0,05	0,06	3,17	3,10
β_4	505241,27	5,48	5,32	4662,19	0,00	0,00	9,31	9,13
β_5	525167557,16	1,47	1,53	4748925,91	0,17	0,19	2,51	2,52
β_6	6371296,86	5,13	5,21	57733,09	0,00	0,00	8,08	8,05
β_7	145554953,02	2,25	2,38	1316257,29	0,05	0,05	5,22	5,25
β_8	603585869,37	6,17	6,22	5464503,14	0,20	0,25	10,25	10,21
β_9	1336445338,09	3,94	3,76	12096267,68	0,42	0,49	6,69	6,56
β_{10}	329091892,92	4,80	5,12	2981090,59	0,10	0,12	8,95	8,97
$s_{\ \hat{y} - y\ }^2$	0,17	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01
$s_{\ \hat{\beta} - \beta\ }^2$	913209026,92	1,69	1,88	19804384,47	0,03	0,05	2,99	2,96

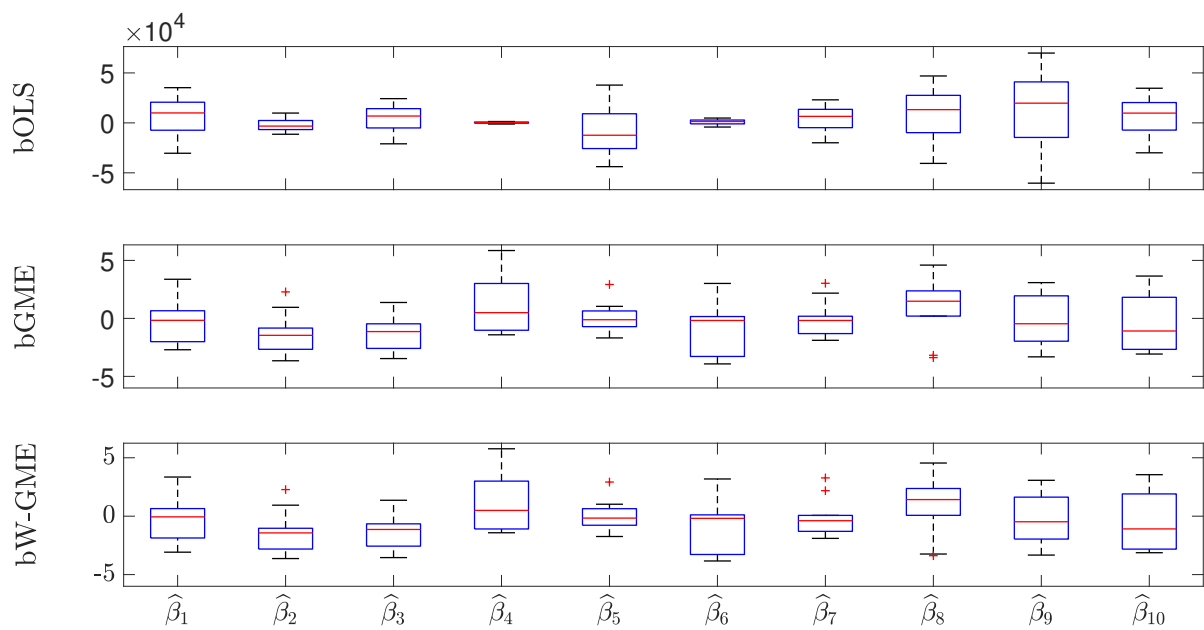


Figura 3.14: *Box plots* das estimativas dos 10 coeficientes de regressão linear, utilizando o método de agregação *bagging*.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$.

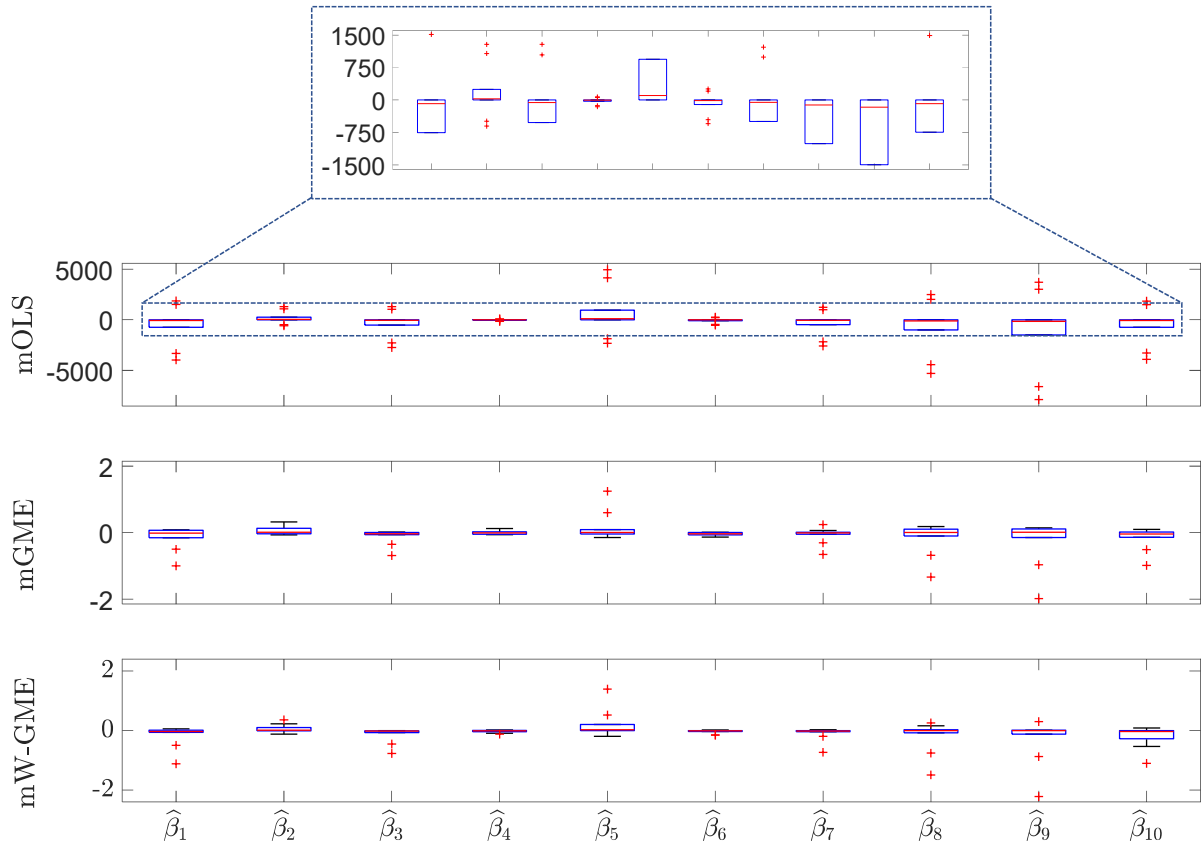


Figura 3.15: *Box plots* das estimativas dos 10 coeficientes de regressão linear, utilizando o método de agregação *magging*.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$.

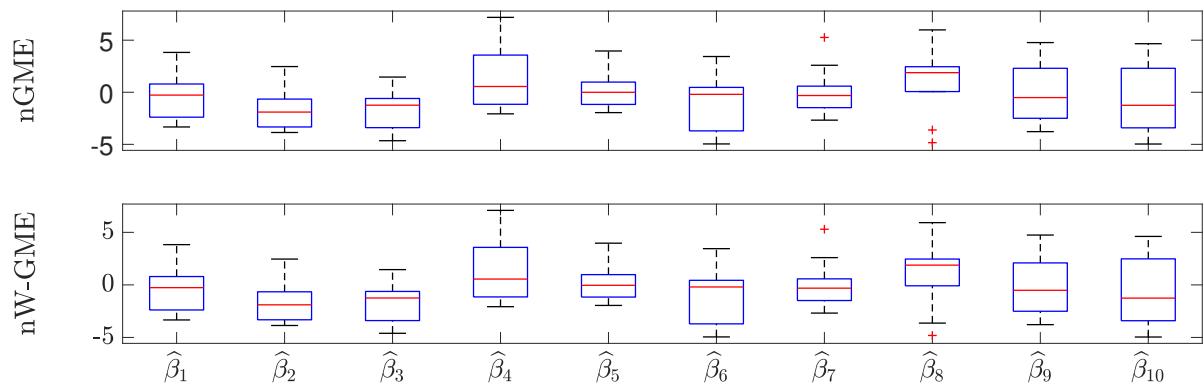


Figura 3.16: *Box plots* das estimativas dos 10 coeficientes de regressão linear, utilizando o método de agregação *neagging*.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$.

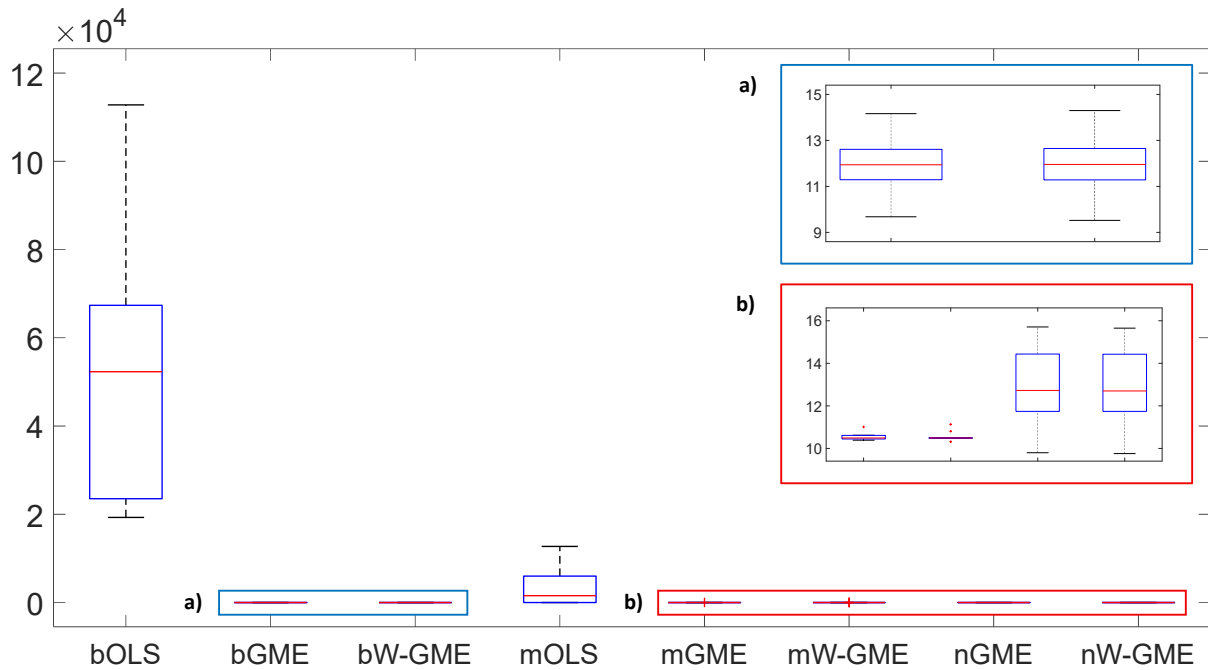


Figura 3.17: *Box plots* dos erros de precisão, relativos aos procedimentos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$.

Analisando agora a situação de $e \sim C(0, 2)$, com valores de $G = 20$ e $\text{Obs} = 20$ e $z_k = [-200, 200]$, as estimativas com erro de precisão inferior e baixos valores de variâncias provêm do mW-GME, tal como se pode confirmar nas Tabelas 3.12 e 3.13, sendo adicionalmente fundamentado com a análise dos Gráficos 3.18, 3.19 e 3.20. Contudo, apesar de apresentarem baixa variância, as estimativas encontram-se excessivamente centradas em torno do zero. Relembre-se que os suportes para os erros são calculados através da regra de 3σ , com σ o desvio padrão das perturbações aleatórias, e que para suportes de erros muito amplos, o estimador GME (e por extensão, o W-GME) comporta-se no sentido de que todos os coeficientes serão contraídos em direção a zero. Pela presença mais acentuada de ruído neste cenário, o desvio padrão das perturbações aleatórias, estimado pelo desvio padrão das observações com ruído, eventualmente foi muito elevado, podendo ter resultado na obtenção de suportes para os erros mais amplos. Além disso, os suportes para os parâmetros têm também grande amplitude, aumentando o impacto dos dados.

Tabela 3.12: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 20$.

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	948,85	-2,94	-2,85	6,67	-0,06	0,00	-7,79	-8,06
1	1523,00	-10,09	-9,61	5,92	-0,17	-0,01	-30,77	-30,19
-3	-605,82	-5,61	-5,62	-13,56	0,23	0,01	-15,58	-15,60
5	2701,38	8,70	7,81	24,11	-0,33	-0,01	22,42	21,85
-5	420,83	-7,93	-8,70	2,19	0,06	0,01	-11,77	-12,80
3	-1708,04	-2,22	-3,43	-10,28	0,23	0,01	-5,46	-6,19
4	170,70	1,29	1,96	-1,42	-0,10	-0,01	18,87	18,70
-2	1217,21	-4,11	-4,86	5,37	-0,17	-0,01	-5,88	-6,11
-1	2399,17	10,55	10,25	15,29	-0,21	-0,01	11,22	10,50
-4	612,16	13,88	13,37	-13,44	0,09	0,00	44,52	43,70
$\ \hat{y} - y\ $	804318,62	804271,11	804271,09	804271,06	804271,01	804271,01	804271,24	804271,23
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	6505,53	78,92	78,79	52,46	11,08	10,52	194,14	192,51
$\ \hat{y} - y\ ^*$	804294,99	804271,10	804271,09	804271,06	804271,01	804271,01	804271,21	804271,20
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	4648,72	25,86	25,43	34,48	10,74	10,50	66,51	65,59

Tabela 3.13: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordado.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 20$.

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
β_1	3907750,66	476,71	459,91	193,45	0,14	0,01	2617,51	2577,41
β_3	13854311,42	755,24	727,84	1224,63	0,94	0,05	4007,58	3948,23
β_3	1947340,32	894,41	958,41	876,12	1,70	0,09	5910,26	5908,61
β_4	37864219,25	463,37	441,09	1996,78	3,84	0,20	2378,25	2373,64
β_5	1867212,89	520,07	489,70	102,16	0,07	0,00	4985,73	4688,18
β_6	13887087,33	630,70	588,35	233,72	1,91	0,10	3142,58	3117,20
β_7	3646516,00	627,73	638,91	13,99	0,22	0,01	3517,86	3450,39
β_8	6390399,28	449,26	508,13	873,58	0,76	0,03	2161,34	2166,79
β_9	27842293,74	660,71	685,43	847,70	1,79	0,10	3549,36	3549,76
β_{10}	3380782,52	524,88	527,36	687,25	0,29	0,01	3477,14	3397,69
$s^2_{\ \hat{y} - y\ }$	10370,59	0,28	0,28	0,02	0,00	0,00	1,54	1,54
$s^2_{\ \hat{\beta} - \beta\ }$	93876620,10	443,78	463,31	5486,33	4,06	0,09	2481,21	2420,69

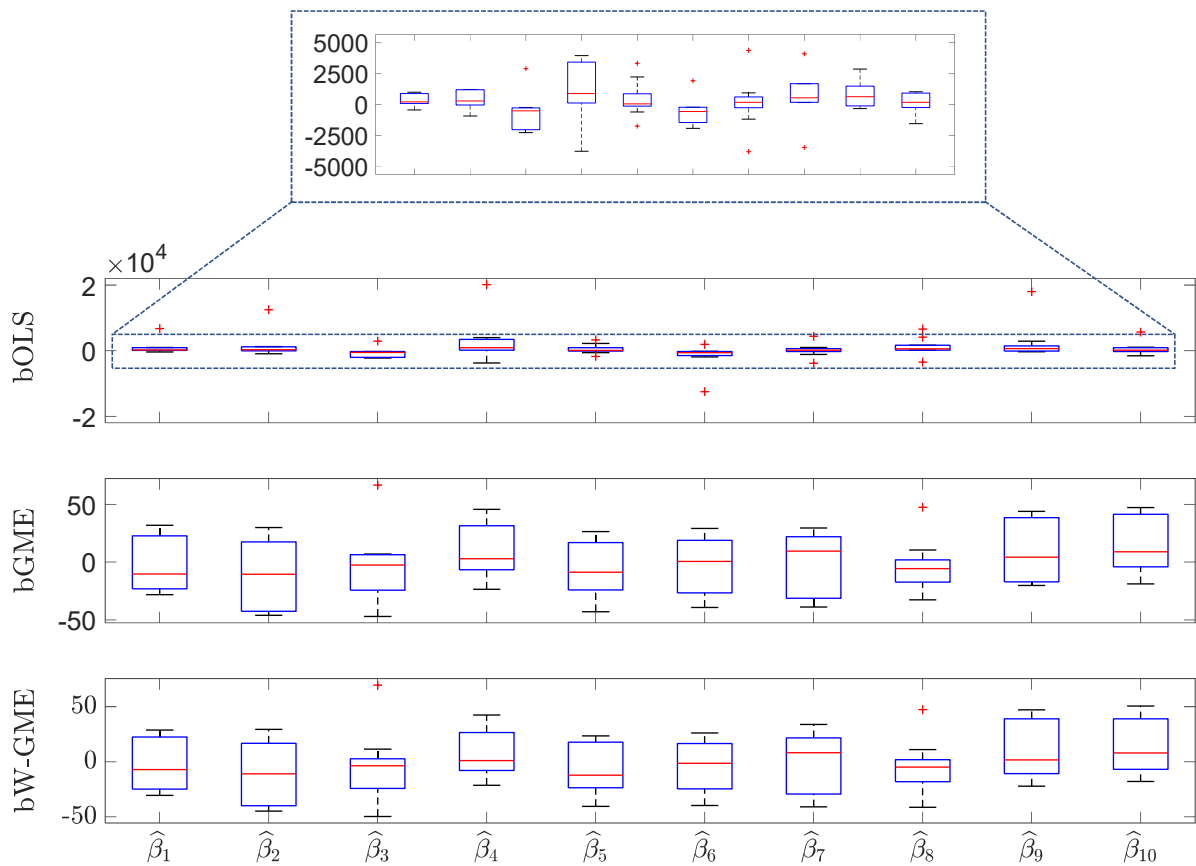


Figura 3.18: *Box plots* das estimativas dos 10 coeficientes de regressão linear, utilizando o método de agregação *bagging*.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 20$.

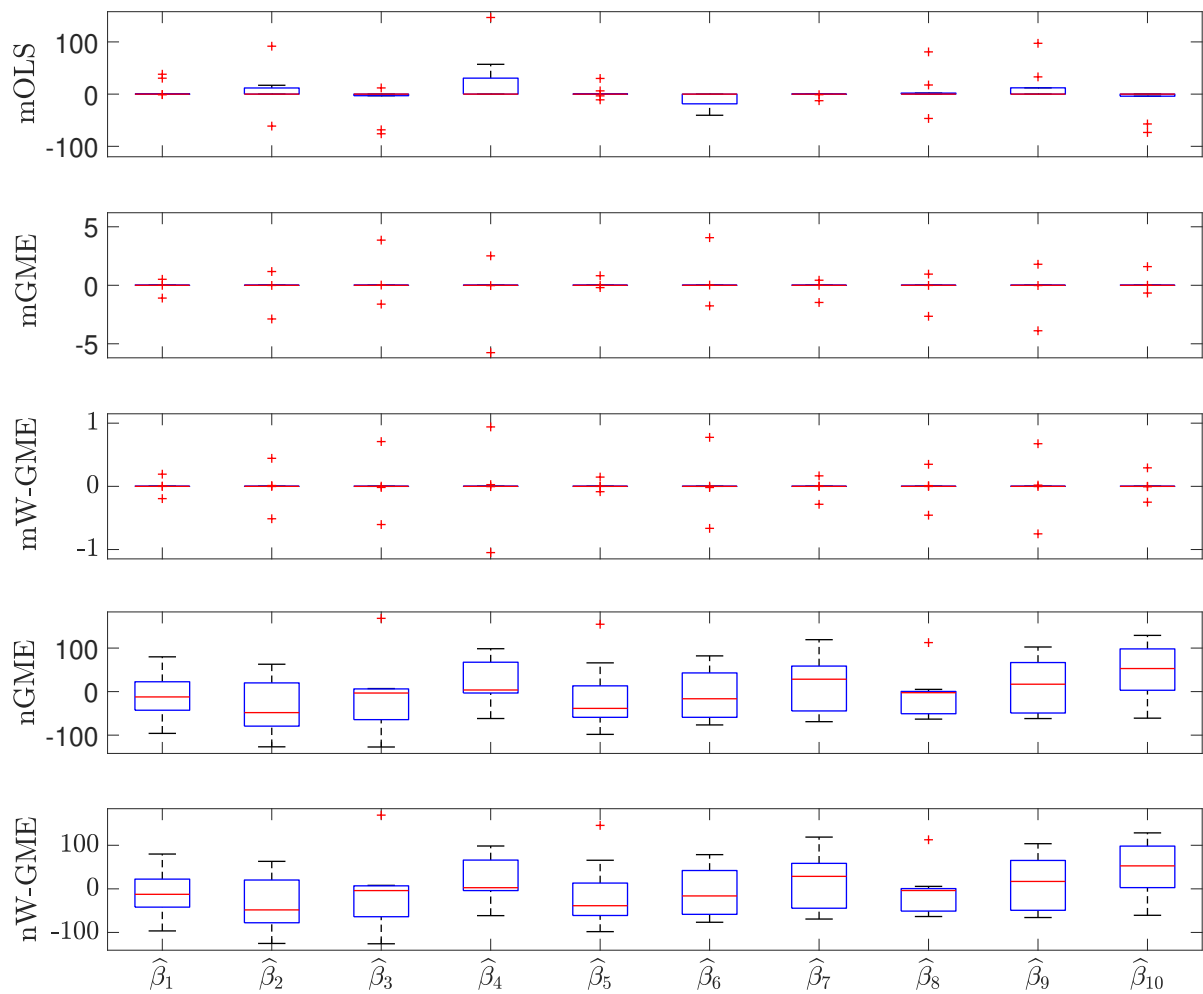


Figura 3.19: *Box plots* das estimativas dos 10 coeficientes de regressão linear, utilizando os métodos de agregação *magging* e *neagging*.
 Cenário: $\mathbf{e} \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 20$.

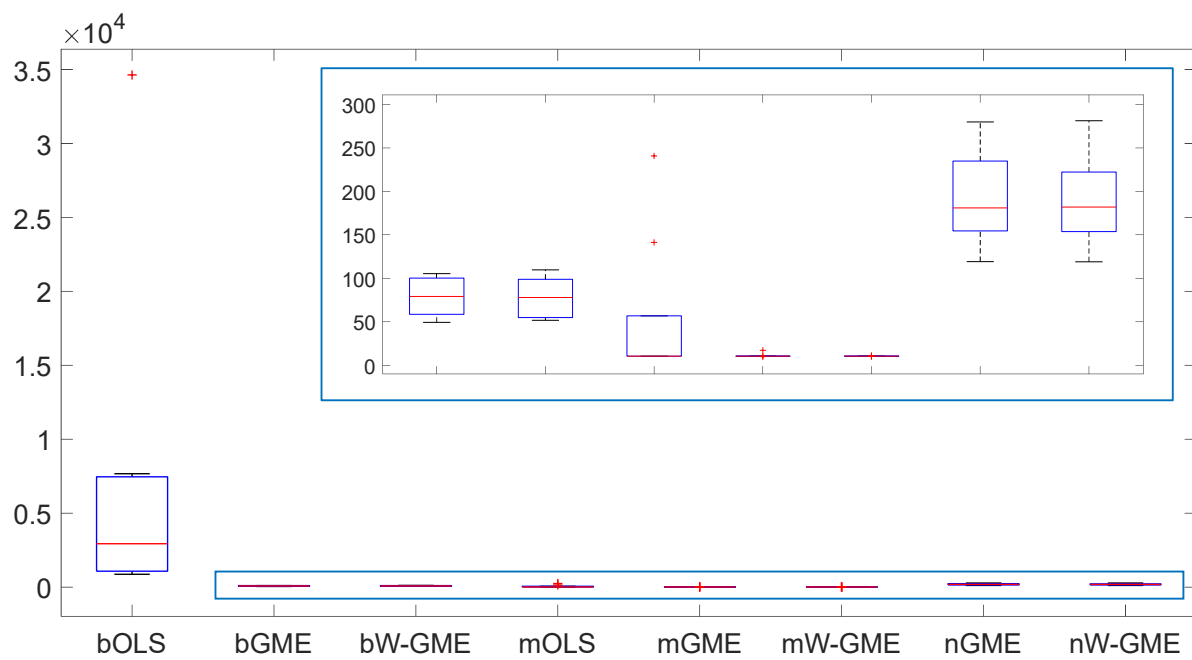


Figura 3.20: *Box plots* dos erros de precisão, relativos aos procedimentos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 20$.

Tabela 3.14: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 100$.

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	355719,14	1,40	1,40	43937,45	0,49	0,49	1,40	1,40
1	-115189,20	-0,20	-0,20	-14172,27	-0,41	-0,41	-0,20	-0,20
-3	244821,50	2,00	2,00	30244,51	0,24	0,24	2,00	2,00
5	13621,95	-0,20	-0,20	1698,90	-0,25	-0,25	-0,20	-0,20
-5	-442165,49	0,80	0,80	-54618,17	-0,31	-0,31	0,80	0,80
3	48939,62	-0,40	-0,40	6025,01	-0,16	-0,16	-0,40	-0,40
4	233204,51	1,80	1,80	28765,20	0,49	0,49	1,80	1,80
-2	474115,16	-0,60	-0,60	58568,28	-0,10	-0,10	-0,60	-0,60
-1	705729,20	-1,80	-1,80	87114,87	-0,68	-0,68	-1,80	-1,80
-4	350345,92	-0,60	-0,60	43251,20	0,18	0,18	-0,60	-0,60
$\ \hat{y} - y\ $	804273,47	804270,97	804270,97	804270,72	804270,95	804270,95	804270,97	804270,97
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	3960459,12	13,56	13,56	544287,19	10,94	10,94	13,56	13,56
$\ \hat{y} - y\ ^*$	804272,27	804270,97	804270,97	804270,70	804270,95	804270,95	804270,97	804270,97
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	1139209,54	10,86	10,86	140661,72	10,38	10,38	10,86	10,86

Tabela 3.15: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordado.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 100$.

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
β_1	2499761566778,26	3,24	3,24	43293458293,80	1,51	1,51	3,24	3,24
β_2	261315299170,54	6,76	6,76	4522448648,17	1,79	1,79	6,76	6,76
β_3	1185045022014,28	8,00	8,00	20537633476,44	1,94	1,94	8,00	8,00
β_4	3696466555,25	5,96	5,96	64342114,49	1,58	1,58	5,96	5,96
β_5	3863500936965,54	5,76	5,76	66931507124,03	1,36	1,36	5,76	5,76
β_6	46847733252,49	20,64	20,64	812039007,63	1,57	1,57	20,64	20,64
β_7	1070270565903,20	3,56	3,56	18544150279,90	0,65	0,65	3,56	3,56
β_8	4440567709445,53	4,84	4,84	76906185160,31	0,51	0,51	4,84	4,84
β_9	9833364616441,75	8,36	8,36	17033558422,52	2,18	2,18	8,36	8,36
β_{10}	2420522897246,66	8,84	8,84	41926322399,83	0,98	0,98	8,84	8,84
$s^2_{\ \hat{y} - y\ }$	32,92	0,00	0,00	0,20	0,00	0,00	0,00	0,00
$s^2_{\ \hat{\beta} - \beta\ }$	11237454770012,20	9,98	9,98	167410820560,02	2,17	2,17	9,98	9,98

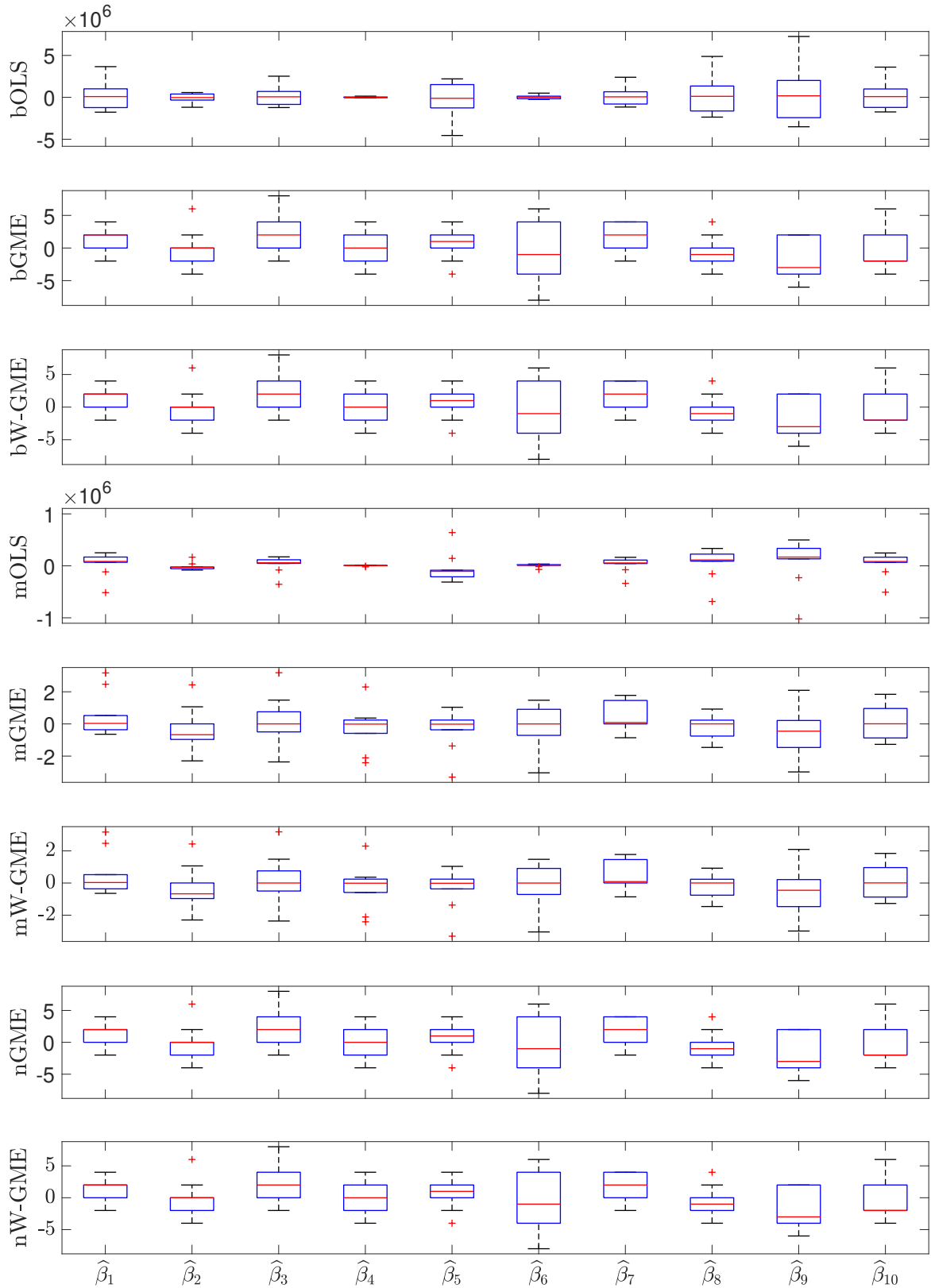


Figura 3.21: *Box plots* das estimativas dos 10 coeficientes de regressão linear, utilizando os métodos de agregação *bagging*, *magging* e *neagging*.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 100$.

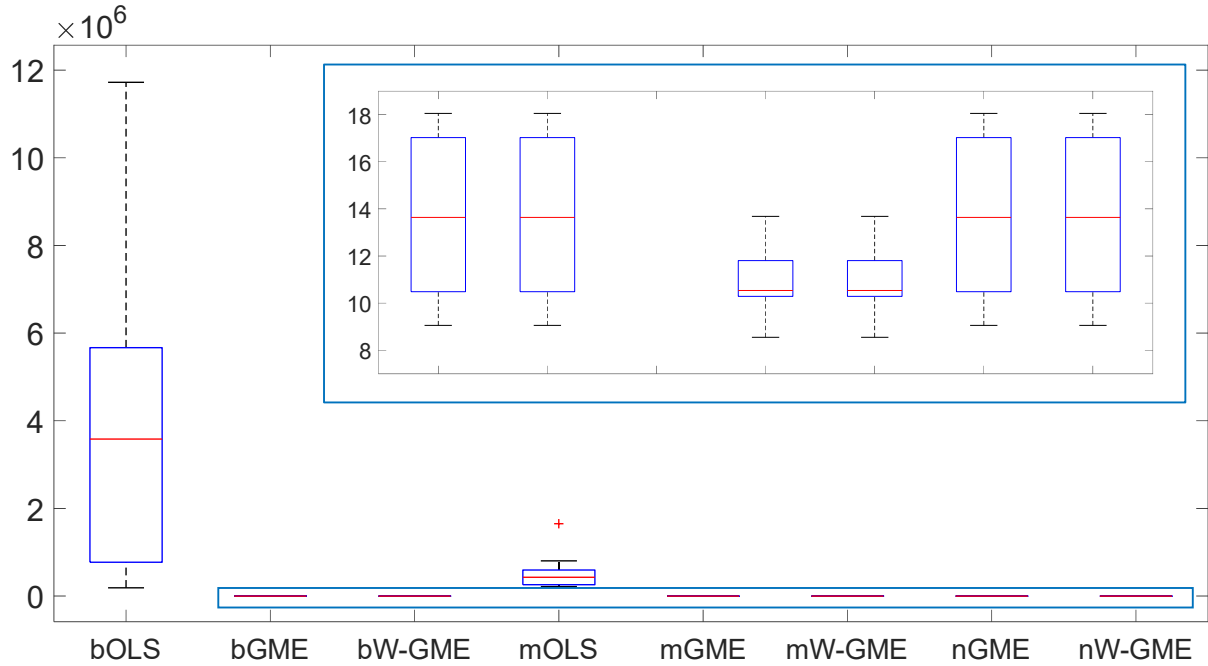
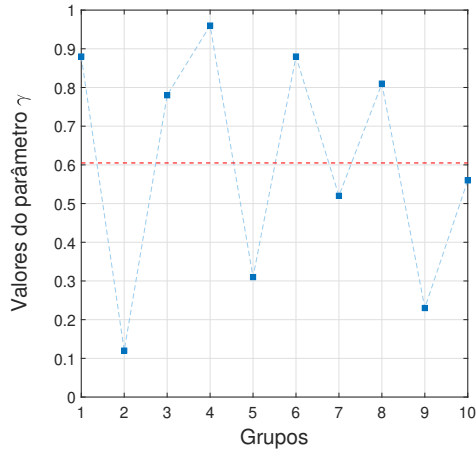


Figura 3.22: *Box plots* dos erros de precisão, relativos aos procedimentos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

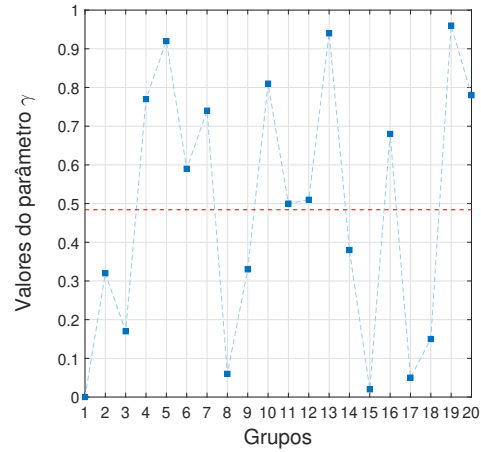
Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 100$.

Para apresentar um termo de comparação com o cenário anterior, considere-se agora a situação em que $z_k = [-10, 10]$, G diminui para 10, e Obs aumenta para 100, situação descrita nas Tabelas 3.14 e 3.15. Verifica-se, novamente, um bom desempenho das metodologias mGME e mW-GME, com variâncias associadas reduzidas e correspondentes erros de precisão com menores valores de variação, como se confirma nos Gráficos 3.21 e 3.22.

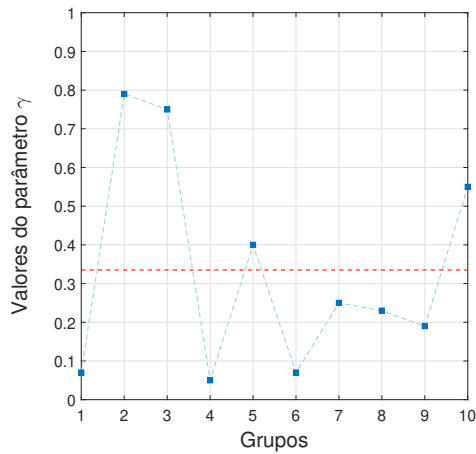
As análises dos *box plots* das estimativas dos coeficientes de regressão e dos erros de precisão, bem como das restantes tabelas associadas, podem fornecer outras informações que não as descritas. As características dominantes e mais comuns ao longo dos diferentes cenários analisados foram apresentadas, mas outras interpretações são possíveis.



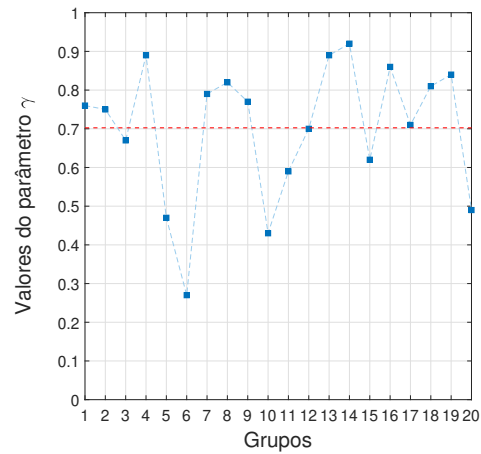
(i) Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 20$.



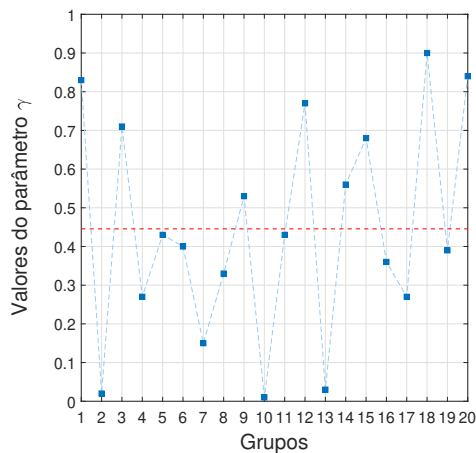
(ii) Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$.



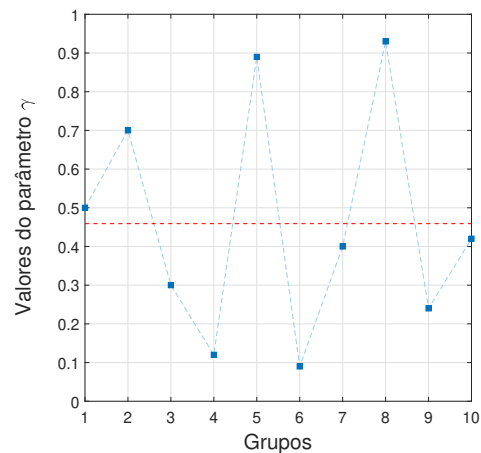
(iii) Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 20$.



(iv) Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$.



(v) Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 20$.



(vi) Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 100$.

Figura 3.23: Variação nos diferentes grupos do valor do parâmetro γ , referente ao estimador W-GME, na última réplica executada. ■, valor do parâmetro γ em cada grupo, - - - - -, média do valor do parâmetro γ quando obtidos todos o valores do parâmetro para cada grupo, - - - - -, auxiliar na visualização da flutuação do parâmetro.

A análise dos resultados termina com a apresentação dos gráficos dos valores do parâmetro γ obtidos em cada grupo, na última réplica executada, para os cenários representativos apresentados anteriormente. Os gráficos semelhantes a estes, relativamente aos restantes cenários analisados, encontram-se no Apêndice B.

O método concebido para a determinação do parâmetro γ é um método baseado nos dados, mas diferente do sugerido no trabalho de Wu [15]. Devido à complexidade computacional, o LSCV não é adequado para problemas de *big data*, pelo que um novo método, descrito na Secção 3.1, foi sugerido para a determinação deste parâmetro. Apesar de tentar determinar-se, com este método, uma estimativa razoável para o parâmetro γ , e não necessariamente a melhor das estimativas, acredita-se que seja suficiente para obter resultados adequados, com um custo computacional muito inferior ao método sugerido.

Pela análise do gráfico 3.23, é possível observar-se a ausência de qualquer género de padrão nos cenários analisados. Isto é um indicativo de que o parâmetro de ponderação γ está a ser selecionado com base nos dados. Como, no contexto de agregação, é necessário calcular um parâmetro γ por grupo¹, é possível observar-se o valor de γ a ajustar-se aos subconjuntos de dados de acordo com o método implementado. Como observado anteriormente, a conjugação do procedimento de agregação *magging* com a estimação através do W-GME, com este novo método de seleção do parâmetro γ , resulta nos melhores resultados em termos de erro de precisão e de baixas variâncias associadas, de entre todos os procedimentos de agregação considerados com os diferentes estimadores discutidos. Daqui se pode concluir que o novo método, apesar de simples, funciona de maneira eficaz na determinação do melhor valor para o parâmetro γ , conseguindo-se testar uma variedade de valores, tantos quantos se desejar.

¹Não é possível apresentar, para cada cenário, um valor do parâmetro γ . No contexto de agregação, é calculada uma estimativa do parâmetro por grupo, utilizando para isso o estimador W-GME. Assim, o valor do parâmetro γ é referente a cada um dos conjuntos de observações (grupo).

Capítulo 4

Conclusões

A eficácia dos métodos de agregação para resolver problemas de *big data* é, de facto, surpreendente. Os parâmetros de modelos de regressão linear mal-postos (em particular, mal-condicionados) em contexto de *big data*, podem ser estimados de forma estável, através da abordagem de *info-metrics*. O princípio de máxima entropia desenvolvido por Jaynes [5, 6] é a base teórica na resolução de problemas mal-postos, mas a abordagem de *info-metrics* que foi desenvolvida por Golan [2] permitiu a sua generalização a problemas mal-postos mais complexos, muito frequentes em diversas áreas científicas.

O objectivo deste trabalho foi perceber quais as metodologias mais adequadas para problemas de *big data* em modelos de regressão linear afetados por colinearidade. Verificou-se, como primeira grande conclusão, que o desempenho dos métodos de agregação depende crucialmente do estimador usado nos grupos obtidos por amostragem, na obtenção das repetivas estimativas dos coeficientes de regressão.

As diferenças mais significativas evidenciadas pelo trabalho de simulação foram a diversidade de estimativas obtidas por cada procedimento de agregação (com os respetivos estimadores aplicados) e os seus correspondentes erros de precisão. O erro de predição apresenta diferenças significativas somente quando alterada a distribuição associada à componente de erro.

Por outro lado, quando os suportes para os coeficientes de regressão são de menor amplitude, assumindo-se que o verdadeiro valor de β está contido no interior desses suportes, a escolha do número de grupos e do número de observações por grupo é indiferente, na utilização dos métodos de agregação *bagging* e *maggining*, com recurso aos métodos de estimação GME e W-GME, uma vez que os resultados são aproximadamente semelhantes, apresentando erros de precisão e variâncias associadas reduzidas, o que indicia estimativas estáveis. Para um alívio da carga computacional, um baixo número de grupos e de observações por grupo é suficiente para obter estimativas consistentes, no cenário anteriormente descrito. Este é, indubitavelmente, um outro resultado importante deste trabalho.

O excelente desempenho do método de agregação *maggining* com a utilização do estimador W-GME foi, quiçá, a descoberta mais relevante neste trabalho de investigação. Quando não se usufrui de qualquer informação prévia sobre os suportes de parâmetros desconhecidos e a distribuição de erro, o método de agregação *maggining* com o estimador W-GME apresenta um desempenho superior em todos os cenários estudados, comparativamente aos restantes procedimentos de agregação com os diversos estimadores utilizados.

Em particular, o estimador W-GME fornece, em geral, melhores resultados em termos de erro de precisão (conjugado com o método de agregação *magging*), especialmente quando os suportes são mais amplos. Este resultado é bastante promissor, uma vez que o estimador GME, que usualmente apresenta um bom desempenho em dados afetados por colinearidade, tem um pior comportamento nesta circunstância de amplitude de suportes mais amplos (como esperado). Se o estimador W-GME, sendo uma das suas extensões, consegue lidar com este problema, torna-se num método de estimação muito atrativo.

Em suma, e como já referido anteriormente, a identificação do excelente desempenho do método de agregação *magging*, adequado em circunstâncias de dados não homogêneos, com a utilização do estimador W-GME, que utiliza pesos na função objetivo do problema de otimização na busca de um melhor compromisso entre precisão e predição, foi uma descoberta relevante que poderá contribuir para a análise de grandes volumes de informação. No entanto, sem dúvida, a investigação deverá prosseguir em trabalho futuro.

Bibliografia

- [1] P. Bühlmann and N. Meinshausen. Maging: Maximin aggregation for inhomogeneous large-scale data. *Proceedings of the IEEE*, 104(1):126–135, 2016.
- [2] A. Golan. *Foundations of Info-metrics: Modeling, Inference, and Imperfect Information*. Oxford University Press, New York, 2018.
- [3] A. Golan. Information and entropy econometrics — a review and synthesis. *Foundations and Trends[®] in Econometrics*, 2(1–2):1–145, 2008.
- [4] A. Golan. On the foundations and philosophy of info-metrics. In S.B. Cooper, A. Dawarand and B. Löwe, editors, *How the World Computes*, CiE2012. Lecture Notes in Computer Science vol. 7318, page 238–245, Berlin Heidelberg, 2012. Springer-Verlag.
- [5] E. T. Jaynes. Information theory and statistical mechanics. *Physical Review*, 106(4):620–630, May 1957.
- [6] E. T. Jaynes. Information theory and statistical mechanics II. *Physical Review*, 108(2):171–190, October 1957.
- [7] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, 27(3):379–423, 1948.
- [8] T. Freitas. *Normalized entropy and other aggregation methodologies in regression models for big data*. Universidade de Aveiro, 2021. (Dissertação não publicada).
- [9] W. H Greene. *Econometric Analysis*. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 6th edition, 2008.
- [10] R. V. L. Hartley. Transmission of information. *Bell System Technical Journal*, 7(3):535–563, 1928.
- [11] A. Golan, G. Judge, and D. Miller. *Maximum entropy econometrics: robust estimation with limited data*. Chichester: John Wiley & Sons, 1996.
- [12] A. Golan, G. Judge, and J. Perloff. A maximum entropy approach to recovering information from multinomial response data. *Journal of The American Statistical Association*, 91:841–853, 1996.
- [13] E. S. Soofi. A generalizable formulation of conditional logit with diagnostics. *Journal of the American Statistical Association*, 87(419):812–816, 1992.

- [14] R. Mittelhammer, N. S. Cardell, and T. L. Marsh. The data-constrained generalized maximum entropy estimator of the GLM: Asymptotic theory and inference. *Entropy*, 15(5):1756–1775, 2013.
- [15] X. Wu. A weighted generalized maximum entropy estimator with a data-driven weight. *Entropy*, 11(4):917–930, 2009.
- [16] L. Breiman. Bagging predictors. *Machine Learning*, 24:123–140, 1996.
- [17] N. Meinshausen and P. Bühlmann. Maximin effects in inhomogeneous large-scale data. *The Annals of Statistics*, 43(4):1801–1830, 2015.
- [18] M. da Conceição Costa and P. Macedo. Normalized entropy aggregation for inhomogeneous large-scale data. In Valenzuela O., Rojas F., Pomares H. and Rojas I., editors, *Theory and Applications of Time Series Analysis.*, ITISE 2018. Contributions to Statistics., pages 19–29. Springer, Cham., 2019.
- [19] H. Abdi, V. E. Vinzi, G. Russolillo, G. Saporta, and L. Trinchera. *The Multiple Facets of Partial Least Squares and Related Methods*. PLS, Paris, France, 2016.

Apêndices

Apêndice A

A.1 Erros Normais

Tabela A.1: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $0bs = 20$.

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	-6,32	-0,02	0,15	-2,48	0,00	0,00	-0,04	1,22
1	-3,51	-0,01	0,08	2,24	0,01	0,00	-0,01	0,46
-3	1,28	-0,03	-0,09	-2,58	-0,01	-0,01	-0,04	-0,04
5	-9,79	0,02	-0,21	1,40	0,01	0,01	0,03	-1,82
-5	1,98	0,00	0,26	-1,09	0,00	0,00	-0,01	2,32
3	21,55	0,05	-0,07	4,49	0,01	0,01	0,08	-0,96
4	8,94	0,02	0,31	7,10	0,01	0,01	0,03	2,09
-2	-6,20	0,00	-0,14	-3,78	-0,01	-0,01	0,01	-1,14
-1	-3,20	0,00	0,19	4,83	0,00	0,00	-0,01	2,27
-4	6,23	0,02	0,17	5,62	0,01	0,01	0,02	1,09
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ $	184,56	173,14	173,15	176,31	173,14	173,14	173,14	173,91
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	86,29	10,46	10,73	45,60	10,48	10,48	10,44	16,99
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ ^*$	173,62	173,14	173,14	173,28	173,14	173,14	173,14	173,24
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	29,51	10,45	10,62	13,84	10,48	10,48	10,44	12,90

Tabela A.2: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $0bs = 20$.

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	154,83	0,01	0,38	26,01	0,00	0,00	0,01	16,55
	863,92	0,00	0,39	121,40	0,00	0,00	0,01	23,21
	1098,51	0,00	0,17	327,87	0,00	0,00	0,01	15,02
	1072,69	0,00	0,25	582,70	0,00	0,00	0,00	15,19
	310,60	0,00	0,24	103,46	0,00	0,00	0,01	15,78
	917,60	0,00	0,23	146,27	0,00	0,00	0,01	24,34
	694,59	0,00	0,34	185,62	0,00	0,00	0,01	24,99
	395,87	0,00	0,18	83,20	0,00	0,00	0,01	13,43
	1398,29	0,00	0,15	545,99	0,00	0,00	0,01	15,83
	591,26	0,00	0,12	229,50	0,00	0,00	0,01	19,71
$s^2_{\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ }$	50,04	0,00	0,00	6,31	0,00	0,00	0,00	1,13
$s^2_{\ \hat{\beta} - \beta\ }$	922,32	0,00	0,24	464,13	0,00	0,00	0,01	61,91

Tabela A.3: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $0bs = 100$.

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	0,47	0,13	0,17	-0,44	0,02	0,01	0,21	0,48
1	-5,37	0,06	0,26	-2,75	-0,01	-0,01	1,02	2,32
-3	1,24	-0,01	-0,07	1,40	-0,03	-0,01	0,27	-0,59
5	-3,10	0,13	0,34	-2,45	-0,01	0,00	0,75	1,53
-5	-0,78	-0,07	-0,25	1,36	-0,01	0,01	-0,34	-0,92
3	8,77	0,29	0,52	3,87	0,03	0,01	1,71	3,02
4	2,75	0,12	0,33	1,33	0,02	0,01	0,33	1,08
-2	-2,72	0,03	0,29	-1,09	0,00	0,01	0,49	1,51
-1	-6,62	0,08	-0,01	-2,87	0,00	0,00	0,97	0,75
-4	0,25	-0,01	-0,09	2,01	0,04	0,01	-0,05	-1,16
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ $	173,87	173,13	173,12	173,38	173,14	173,14	173,49	173,58
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	34,23	10,33	10,18	24,85	10,48	10,49	13,75	14,50
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ ^*$	172,85	173,12	173,10	173,04	173,14	173,14	173,09	173,02
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	15,15	10,25	9,89	13,55	10,48	10,49	9,72	8,40

Tabela A.4: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $0bs = 100$.

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	50,13	0,21	0,36	19,36	0,00	0,00	14,58	10,50
	162,06	0,13	0,36	55,46	0,00	0,00	10,89	8,94
	289,75	0,22	0,92	122,42	0,00	0,00	16,41	27,83
	401,09	0,11	0,57	184,87	0,00	0,00	9,69	16,29
	27,56	0,16	0,58	11,97	0,00	0,00	15,40	15,35
	178,53	0,29	0,74	73,06	0,00	0,00	16,09	17,12
	55,43	0,20	0,64	22,07	0,01	0,00	18,17	20,20
	97,06	0,13	0,40	46,32	0,00	0,00	11,59	12,02
	343,73	0,13	0,74	154,19	0,00	0,00	8,90	21,22
	97,83	0,15	0,67	22,83	0,01	0,00	19,05	19,41
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ $	0,36	0,00	0,00	0,10	0,00	0,00	0,68	0,35
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	760,95	0,07	0,21	278,89	0,01	0,00	46,07	29,14

Tabela A.5: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $0bs = 20$.

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	2,67	0,06	0,19	1,07	0,00	0,00	0,15	0,12
1	2,26	0,03	0,21	1,39	0,00	0,00	0,07	1,92
-3	-3,19	0,00	-0,22	-1,92	-0,01	-0,01	0,00	-3,40
5	-5,13	0,01	-0,12	2,82	0,00	0,00	-0,01	-2,12
-5	-8,52	-0,02	0,15	-1,24	-0,01	0,00	-0,02	3,41
3	10,40	0,03	0,19	-0,84	0,00	0,00	0,02	2,02
4	6,93	0,05	0,19	1,30	0,01	0,00	0,06	2,13
-2	-4,66	-0,03	-0,14	2,19	-0,01	0,00	-0,04	-1,05
-1	-3,07	-0,02	0,09	2,37	0,00	0,00	-0,05	2,27
-4	-0,13	-0,02	-0,07	-1,32	0,00	0,00	-0,01	0,24
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ $	177,21	173,14	173,13	173,26	173,14	173,14	173,13	173,99
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	52,09	10,41	10,39	13,69	10,48	10,48	10,41	17,53
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ ^*$	173,15	173,14	173,12	173,08	173,14	173,14	173,13	173,20
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	14,38	10,41	10,34	8,89	10,48	10,48	10,40	12,65

Tabela A.6: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $0bs = 20$.

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	122,20	0,01	0,15	4,22	0,00	0,00	0,03	27,14
	306,10	0,00	0,11	6,73	0,00	0,00	0,01	19,70
	146,68	0,00	0,08	11,62	0,00	0,00	0,01	12,92
	568,08	0,00	0,11	26,06	0,00	0,00	0,01	19,94
	93,75	0,00	0,06	3,67	0,00	0,00	0,00	15,93
	467,76	0,00	0,04	5,18	0,00	0,00	0,00	23,90
	74,28	0,00	0,07	4,51	0,00	0,00	0,01	15,50
	258,63	0,00	0,22	18,24	0,00	0,00	0,00	28,27
	635,50	0,00	0,19	40,92	0,00	0,00	0,01	23,75
	73,70	0,00	0,10	4,48	0,00	0,00	0,00	23,27
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ $	3,39	0,00	0,00	0,02	0,00	0,00	0,00	0,97
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	239,61	0,00	0,09	17,38	0,00	0,00	0,01	63,18

Tabela A.7: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $0bs = 100$.

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	0,62	0,25	0,28	0,33	0,00	0,00	1,48	0,93
1	-1,60	-0,01	0,05	0,17	-0,01	0,00	-1,10	0,45
-3	-1,20	-0,02	-0,09	-0,84	-0,01	-0,01	-0,30	-0,76
5	0,39	0,11	0,42	1,07	0,01	0,00	0,77	2,66
-5	-2,00	0,03	-0,10	-0,52	-0,01	-0,01	0,85	-0,80
3	8,50	0,17	0,53	1,28	0,04	0,01	-0,29	1,83
4	5,53	0,23	0,61	1,27	0,02	0,01	0,61	2,41
-2	-5,62	-0,08	-0,37	-0,47	-0,01	-0,01	0,13	-1,33
-1	-3,04	-0,13	-0,25	-0,02	0,00	0,00	-1,67	-2,27
-4	-2,85	-0,12	-0,40	-0,22	-0,01	0,00	0,18	-1,62
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ $	173,28	173,12	173,08	173,06	173,14	173,14	173,51	173,22
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	24,91	10,22	9,64	12,40	10,45	10,47	13,92	11,61
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ ^*$	172,83	173,11	173,07	173,01	173,14	173,14	173,09	172,90
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	9,67	10,20	9,54	8,46	10,45	10,47	10,43	6,42

Tabela A.8: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $0bs = 100$.

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	20,34	0,09	0,15	0,84	0,00	0,00	16,03	7,28
	34,88	0,04	0,23	8,66	0,00	0,00	9,26	13,82
	49,84	0,02	0,13	9,62	0,00	0,00	3,22	5,89
	177,16	0,04	0,18	32,94	0,00	0,00	12,62	11,77
	28,19	0,04	0,35	1,82	0,00	0,00	11,59	19,72
	73,19	0,06	0,33	16,42	0,00	0,00	12,04	14,58
	32,78	0,08	0,42	3,17	0,00	0,00	13,91	14,71
	51,81	0,09	0,15	6,36	0,00	0,00	15,14	6,64
	77,23	0,03	0,05	13,71	0,00	0,00	8,90	5,27
	15,35	0,02	0,15	2,66	0,00	0,00	7,01	4,27
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ $	0,04	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,32	0,04
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	33,54	0,02	0,34	14,18	0,00	0,00	24,81	10,30

Tabela A.9: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $\text{obs} = 20$.

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	3,71	4,52	3,57	-1,91	1,00	-0,11	5,82	9,08
1	4,31	2,12	2,81	-3,96	0,26	0,53	2,17	10,95
-3	2,12	-1,41	1,36	8,39	-0,08	-0,11	-2,35	2,74
5	-7,10	1,20	4,72	-13,88	-0,04	0,24	2,24	21,06
-5	-0,68	1,54	0,90	1,21	1,12	0,76	1,00	4,52
3	19,13	5,80	2,94	13,85	3,27	0,80	5,76	-1,71
4	5,26	0,72	-0,68	-1,22	0,39	0,02	1,43	-2,78
-2	-2,57	-1,54	-0,66	-4,05	1,21	-0,15	-1,42	5,29
-1	0,18	2,00	1,20	-11,11	-0,56	0,08	1,32	-1,02
-4	11,91	2,34	-0,09	8,74	1,49	0,42	1,68	-10,01
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ $	182,12	174,49	174,06	175,11	173,38	173,17	174,93	186,48
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	116,43	22,75	21,16	54,84	14,69	11,22	25,44	70,89
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ ^*$	174,01	173,13	173,13	173,25	173,08	173,13	173,12	174,85
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	26,87	11,63	10,17	31,28	11,26	10,66	10,59	26,23

Tabela A.10: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 20$.

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	378,44	36,72	18,38	93,86	8,42	0,89	43,54	117,27
	1016,56	17,42	21,03	169,82	5,48	0,53	27,88	694,78
	1568,62	43,88	66,15	389,58	6,45	0,25	49,09	769,82
	4274,07	36,30	57,03	1182,10	8,00	1,83	53,45	1999,24
	316,86	49,32	23,49	131,78	14,78	3,36	79,53	716,59
	2707,34	73,89	46,16	412,19	12,26	0,64	87,08	487,51
	556,23	65,34	63,05	109,02	19,81	0,85	69,53	357,34
	1098,24	60,68	81,60	315,22	22,72	1,94	89,46	1538,54
	2439,97	24,95	16,92	648,18	6,90	2,65	56,75	698,42
	309,17	13,95	8,10	151,86	7,22	1,90	14,92	154,82
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ $	13,35	0,60	0,53	2,37	0,10	0,01	0,87	205,65
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	1830,59	40,20	57,47	1574,84	22,86	2,67	36,48	3197,36

Tabela A.11: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 100$.

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	1,28	1,74	1,70	-0,85	-0,65	0,05	1,92	3,37
1	-5,14	-2,79	-2,76	-3,29	-1,49	-0,56	-3,75	-7,83
-3	0,71	-0,87	-0,92	3,79	1,58	0,19	-0,38	1,80
5	1,66	4,13	4,77	-1,56	1,09	1,52	2,71	-1,31
-5	-2,24	-1,94	-1,80	-1,25	-1,41	0,08	-2,00	-2,02
3	8,93	6,10	3,98	5,92	3,28	0,44	7,30	9,57
4	3,01	2,78	2,71	0,20	0,45	0,64	1,30	-0,70
-2	-2,80	-1,11	-0,49	-3,09	-1,36	-0,20	-1,03	-4,14
-1	-9,93	-6,74	-5,53	-8,24	-4,82	-0,79	-8,07	-10,71
-4	-1,92	-2,43	-2,62	-0,45	-1,01	-1,33	-0,84	-0,06
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ $	173,84	173,51	173,36	173,42	173,27	173,13	174,03	174,96
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	39,15	17,31	15,79	25,82	15,76	10,38	22,73	40,36
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ ^*$	172,91	172,88	172,89	172,96	172,98	173,05	172,93	173,01
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	13,84	8,74	7,49	14,79	9,95	9,09	11,42	18,20

Tabela A.12: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 100$.

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	22,69	4,84	4,22	14,16	3,25	1,35	8,90	20,75
	151,59	42,45	39,56	55,04	13,22	3,09	92,65	247,86
	173,52	13,13	10,17	87,03	23,76	2,69	34,53	131,65
	408,58	16,34	27,92	205,28	34,30	3,34	36,70	809,99
	16,92	15,76	13,12	18,39	10,95	3,40	25,68	56,15
	302,89	48,74	34,84	89,69	21,95	1,53	70,31	414,91
	48,60	18,29	7,96	33,53	13,83	2,33	32,28	60,02
	114,67	19,91	21,29	41,10	9,12	2,65	46,79	201,29
	301,03	36,83	20,82	127,62	28,92	4,22	43,62	303,34
	61,81	29,89	24,77	24,18	12,21	2,75	51,18	73,41
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ $	0,20	0,14	0,10	0,06	0,03	0,01	0,51	2,02
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	260,95	23,18	11,43	248,36	22,01	2,15	56,54	1022,05

Tabela A.13: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 20$.

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	1,19	1,57	1,44	-0,23	-0,12	-0,03	1,28	1,00
1	-3,71	-2,86	-1,29	-3,04	-0,48	0,00	-3,34	-2,74
-3	-5,36	-2,45	-1,52	1,58	0,30	0,00	-2,94	7,85
5	0,60	-0,42	-1,38	-3,80	-0,84	-0,08	-0,39	-14,75
-5	-0,22	-1,94	-1,68	-0,33	-0,17	0,00	-3,01	-1,25
3	1,93	0,10	2,29	4,17	0,69	0,09	0,06	23,17
4	7,88	3,88	2,14	0,50	0,25	0,04	4,71	0,59
-2	-0,01	-0,48	-2,02	-1,35	-0,29	-0,02	-1,26	-2,92
-1	0,43	-2,37	-2,29	-3,34	-0,72	-0,08	-2,61	-20,54
-4	-2,54	-0,37	-0,37	1,50	0,28	0,06	-1,00	-6,25
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ $	178,29	173,78	173,72	173,24	173,13	173,14	174,02	192,75
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	68,26	17,31	18,35	19,50	11,44	10,51	19,38	99,55
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ ^*$	172,98	172,99	172,95	173,04	173,12	173,14	172,98	173,74
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	9,74	8,94	8,85	13,83	10,76	10,50	8,58	36,65

Tabela A.14: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 20$.

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	108,29	21,20	18,79	0,56	0,14	0,00	24,68	152,77
	424,88	24,09	23,78	55,69	1,12	0,01	36,26	1908,75
	777,81	17,46	35,83	37,01	1,77	0,02	17,76	2587,71
	865,70	6,31	22,80	129,43	4,98	0,03	13,55	3008,15
	127,59	19,28	18,62	0,82	0,16	0,00	22,84	631,46
	1014,21	57,34	78,52	93,54	2,58	0,03	74,91	2122,76
	185,67	13,94	26,36	0,98	0,48	0,02	20,01	851,10
	397,54	22,24	26,86	26,07	1,22	0,00	35,34	539,68
	806,37	18,64	28,25	88,26	3,48	0,03	34,96	2143,63
	433,55	40,73	22,34	30,57	1,51	0,02	49,56	579,60
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ $	6,09	0,17	0,28	0,04	0,00	0,00	0,31	531,21
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	576,97	21,67	43,80	273,84	2,23	0,01	27,89	5958,51

Tabela A.15: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $\text{obs} = 100$.

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	-0,21	0,80	0,34	0,87	0,61	0,07	0,66	-1,05
1	-2,21	-0,39	-0,21	0,68	1,02	0,09	-0,16	-1,87
-3	0,03	-1,92	-1,14	-1,43	-1,73	-0,28	-1,69	1,48
5	-0,12	3,11	2,07	2,84	2,69	0,48	3,89	2,47
-5	-2,44	-2,57	-1,83	-0,76	-0,46	-0,13	-2,72	-0,01
3	7,96	4,68	4,24	-0,37	-1,03	-0,07	6,19	8,58
4	6,88	6,71	5,42	1,75	0,91	0,27	7,74	7,57
-2	-3,65	-1,91	-1,91	0,39	0,85	0,05	-2,09	-3,68
-1	-7,05	-4,14	-3,66	1,40	1,58	0,26	-5,10	-8,14
-4	0,44	-0,29	-0,28	0,03	-0,49	-0,09	-0,50	-0,90
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ $	173,28	173,11	173,04	173,08	173,11	173,12	173,29	173,84
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	29,83	12,85	12,23	13,56	13,11	10,23	16,78	28,06
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ ^*$	172,83	172,82	172,83	173,03	173,09	173,12	172,84	172,90
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	12,21	6,92	7,13	8,40	9,07	10,03	8,03	13,27

Tabela A.16: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $\mathbf{e} \sim N(0, 1)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$.

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	27,99	9,47	6,94	3,69	1,73	0,10	17,85	29,86
	97,33	15,81	10,67	7,93	8,32	0,33	35,54	69,08
	114,54	11,86	12,33	11,72	13,45	0,53	23,48	108,92
	368,81	29,48	24,09	54,52	38,40	1,72	57,81	192,58
	30,21	19,40	15,75	2,27	0,73	0,06	24,91	54,33
	129,99	10,08	14,58	10,14	11,88	0,50	19,50	86,51
	12,63	4,95	5,26	3,27	1,58	0,09	7,82	26,36
	36,42	9,05	9,41	6,63	6,50	0,39	21,38	63,73
	158,33	14,41	9,48	19,73	16,53	0,69	27,43	82,03
	14,88	1,95	3,87	3,52	2,50	0,19	4,79	31,91
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ $	0,04	0,02	0,02	0,00	0,00	0,00	0,05	0,15
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	250,51	9,25	13,62	10,09	12,05	0,42	23,45	134,28

Tabela A.17: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 20$.

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	13612,37	-0,01	0,00	6406,77	0,01	0,00	-0,02	0,08
1	-4401,18	0,01	0,24	-2072,76	0,00	0,00	-0,02	2,16
-3	9378,26	-0,02	0,14	4412,27	0,00	0,00	-0,05	1,31
5	522,56	0,02	-0,38	247,77	0,00	0,00	0,03	-2,28
-5	-16948,90	-0,06	-0,27	-7975,26	-0,02	-0,01	-0,12	-1,12
3	1871,16	0,00	0,21	876,61	-0,01	0,00	0,01	1,05
4	8926,88	-0,01	-0,01	4200,68	0,01	0,00	-0,04	0,13
-2	18148,42	-0,01	-0,05	8542,14	-0,01	0,00	-0,01	-0,40
-1	27024,33	-0,02	-0,24	12712,72	-0,02	-0,01	-0,05	-1,66
-4	13410,27	0,02	-0,08	6308,72	0,00	0,00	0,02	-0,85
$\ \hat{y} - y\ $	183,71	173,07	173,09	174,94	173,08	173,08	173,07	173,49
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	108807,14	10,45	10,53	53822,66	10,47	10,49	10,42	13,76
$\ \hat{y} - y\ *$	174,02	173,07	173,08	173,02	173,08	173,08	173,07	173,16
$\ \hat{\beta} - \beta\ *$	43621,66	10,45	10,45	20524,79	10,47	10,49	10,42	11,11

Tabela A.18: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 20$.

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	1650020689,90	0,00	0,15	496661024,52	0,00	0,00	0,00	12,50
	172168051,62	0,01	0,13	51843755,74	0,00	0,00	0,01	10,39
	782656507,71	0,00	0,12	235513089,46	0,00	0,00	0,01	8,63
	2439138,32	0,00	0,38	734416,11	0,00	0,00	0,01	13,79
	2552520416,29	0,01	0,26	768200077,89	0,00	0,00	0,03	17,57
	30940850,47	0,00	0,33	9286607,82	0,00	0,00	0,01	12,68
	707201256,51	0,01	0,14	212889059,24	0,00	0,00	0,02	4,36
	2931451759,95	0,00	0,27	882593245,08	0,00	0,00	0,00	15,42
	6493076120,99	0,00	0,13	1954184383,02	0,00	0,00	0,01	7,86
	1599372560,14	0,00	0,12	481440190,29	0,00	0,00	0,01	8,97
$\ \hat{y} - y\ $	19,06	0,00	0,00	1,38	0,00	0,00	0,00	0,63
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	6985704051,61	0,00	0,35	2617734100,84	0,00	0,00	0,01	46,24

Tabela A.19: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 100$.

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	1963,80	0,21	0,19	588,99	0,00	0,01	1,90	0,88
1	-634,44	0,03	0,09	-190,72	0,00	0,00	0,62	0,47
-3	1346,90	-0,13	-0,35	402,96	-0,05	-0,02	-0,01	-1,68
5	81,42	0,33	0,70	25,54	0,06	0,02	2,06	2,57
-5	-2443,89	-0,09	0,12	-732,71	-0,03	-0,01	-0,11	1,01
3	270,67	0,05	0,05	80,77	0,02	0,00	0,09	-0,40
4	1291,71	0,03	0,23	388,17	0,06	0,02	-0,54	0,30
-2	2615,92	0,10	0,25	784,81	-0,01	0,00	1,21	2,18
-1	3892,52	0,15	0,19	1168,00	0,00	0,00	1,77	1,61
-4	1928,53	-0,21	-0,04	578,65	-0,02	0,00	-1,79	-0,15
$\ \hat{y} - y\ $	173,64	173,06	173,06	173,21	173,07	173,08	173,39	173,53
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	41645,18	10,21	10,20	23219,29	10,39	10,46	13,55	14,92
$\ \hat{y} - y\ ^*$	172,88	173,06	173,05	172,93	173,07	173,08	173,03	173,05
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	6285,39	10,14	10,04	1885,42	10,39	10,46	9,67	10,48

Tabela A.20: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $Obs = 100$.

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	202828103,87	0,16	0,30	77618362,51	0,00	0,00	12,86	17,39
	21211232,65	0,15	0,71	8113176,71	0,00	0,00	11,13	14,20
	96171361,55	0,24	0,16	36779062,10	0,00	0,00	17,32	10,68
	303314,75	0,09	0,39	116990,32	0,01	0,00	10,28	18,78
	313562015,30	0,14	0,05	120015404,48	0,00	0,00	16,98	8,98
	3806014,64	0,20	0,58	1451129,53	0,01	0,00	18,75	26,33
	86951602,90	0,12	0,21	33269278,52	0,00	0,00	10,86	6,45
	360227632,30	0,07	0,36	137874600,96	0,00	0,00	8,85	11,12
	797927677,88	0,17	0,38	305343259,53	0,00	0,00	13,80	14,52
	196391593,37	0,20	0,33	75145514,63	0,00	0,00	14,35	17,93
$\ \hat{y} - y\ $	0,22	0,00	0,00	0,07	0,00	0,00	0,41	0,28
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	384566052,24	0,02	0,27	260146332,18	0,00	0,00	45,22	33,65

Tabela A.21: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $Obs = 20$.

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	-9584,90	-0,02	-0,05	-354,56	-0,01	0,00	0,01	-0,20
1	3098,98	-0,02	-0,05	115,04	0,00	0,00	-0,10	-1,00
-3	-6599,73	-0,04	-0,06	-244,62	0,00	0,00	-0,09	0,09
5	-364,78	0,04	0,16	-12,20	0,01	0,01	0,11	1,69
-5	11906,75	-0,04	-0,14	439,79	0,00	0,00	-0,09	-1,84
3	-1303,41	0,03	0,04	-47,05	0,00	0,00	0,04	0,43
4	-6264,09	-0,02	-0,04	-231,22	0,01	0,00	-0,06	-0,83
-2	-12764,34	0,03	-0,15	-470,98	0,00	0,00	0,07	-2,11
-1	-19003,28	-0,02	0,05	-701,48	0,00	0,00	-0,08	0,08
-4	-9431,93	-0,01	0,04	-350,05	0,00	0,00	0,01	1,36
$\ \hat{y} - y\ $	177,06	173,07	173,07	173,22	173,08	173,08	173,07	173,37
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	134468,19	10,44	10,36	11333,22	10,48	10,48	10,41	13,03
$\ \hat{y} - y\ *$	173,27	173,07	173,07	172,99	173,08	173,08	173,07	173,05
$\ \hat{\beta} - \beta\ *$	30674,01	10,44	10,34	1133,52	10,48	10,48	10,40	9,95

Tabela A.22: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $Obs = 20$.

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	1941317953,31	0,00	0,07	63069708,65	0,00	0,00	0,01	11,81
	202851898,16	0,00	0,05	6595888,40	0,00	0,00	0,03	11,38
	920402756,81	0,00	0,04	29898605,24	0,00	0,00	0,03	10,96
	2885394,99	0,00	0,02	92099,98	0,00	0,00	0,03	7,03
	3001169652,58	0,00	0,03	97451110,39	0,00	0,00	0,02	9,38
	36366030,51	0,00	0,03	1176933,49	0,00	0,00	0,01	9,43
	831660538,03	0,00	0,03	27026831,46	0,00	0,00	0,04	3,34
	3449608302,85	0,00	0,05	111985150,64	0,00	0,00	0,00	7,74
	7638081835,56	0,00	0,04	247993081,59	0,00	0,00	0,01	10,33
	1880785212,99	0,00	0,05	61107413,10	0,00	0,00	0,02	12,56
$\ \hat{y} - y\ $	5,29	0,00	0,00	0,20	0,00	0,00	0,00	0,26
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	2764330836,77	0,00	0,04	519239693,04	0,00	0,00	0,01	23,20

Tabela A.23: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $Obs = 100$.

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	3951,60	0,02	0,04	-470,39	0,00	0,00	-0,46	-0,83
1	-1274,07	-0,03	-0,07	152,43	0,00	0,00	-0,94	-1,12
-3	2715,87	-0,19	-0,26	-324,76	-0,01	0,00	-1,21	-0,82
5	157,94	0,12	0,44	-17,30	0,01	0,01	-0,53	2,14
-5	-4912,69	-0,28	-0,31	585,45	-0,01	0,00	-2,99	-2,33
3	544,43	0,18	0,29	-64,20	0,00	0,00	1,35	1,55
4	2587,24	-0,10	0,07	-308,02	0,01	0,01	-2,35	-0,50
-2	5262,16	0,03	0,07	-627,90	0,00	0,00	0,62	0,21
-1	7829,01	-0,12	-0,06	-934,60	-0,01	0,00	-1,28	0,15
-4	3883,89	-0,08	-0,29	-463,79	-0,01	-0,01	-0,70	-2,13
$\ \hat{y} - y\ $	173,30	173,06	173,04	173,04	173,08	173,08	173,69	173,40
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	26088,79	10,21	9,91	5521,06	10,47	10,48	13,56	12,73
$\ \hat{y} - y\ ^*$	172,87	173,06	173,04	173,02	173,08	173,08	173,17	172,99
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	12642,34	10,20	9,85	1508,44	10,47	10,48	10,42	8,04

Tabela A.24: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $Obs = 100$.

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	65057298,74	0,03	0,05	5336552,42	0,00	0,00	11,55	12,60
	6792377,56	0,07	0,15	557529,36	0,00	0,00	18,57	15,53
	30835771,83	0,06	0,35	2530465,01	0,00	0,00	13,04	20,16
	95541,65	0,04	0,13	7966,52	0,00	0,00	15,58	10,48
	100647130,48	0,02	0,04	8253649,62	0,00	0,00	10,65	5,91
	1219949,62	0,03	0,13	99874,83	0,00	0,00	9,32	10,95
	27861499,90	0,02	0,19	2286192,31	0,00	0,00	8,48	8,55
	115621048,16	0,04	0,08	9482742,42	0,00	0,00	10,18	11,76
	256059682,51	0,02	0,13	20999230,38	0,00	0,00	9,73	12,76
	63050693,56	0,05	0,11	5170524,33	0,00	0,00	12,68	8,19
$\ \hat{y} - y\ $	0,04	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,69	0,36
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	146444777,17	0,05	0,18	26517997,97	0,00	0,00	44,46	19,46

Tabela A.25: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $Obs = 20$.

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	-1975,14	0,41	-0,60	3480,72	1,28	0,56	1,20	-10,56
1	652,49	5,13	3,88	-1121,21	1,17	0,43	5,05	14,55
-3	-1364,42	-0,50	-2,10	2395,14	0,39	0,25	0,82	-12,78
5	-69,69	4,86	4,45	137,00	0,98	0,61	5,94	11,19
-5	2458,98	0,83	0,48	-4325,64	0,77	-0,31	0,76	5,55
3	-275,63	-2,58	-1,57	473,60	-0,79	-0,64	-3,25	0,17
4	-1300,12	0,77	0,65	2275,15	-0,60	-0,02	0,61	3,14
-2	-2636,32	-1,02	-2,62	4634,11	0,21	0,10	-1,05	-6,63
-1	-3915,13	1,53	-0,60	6905,57	-0,30	-0,35	1,12	-17,40
-4	-1943,49	0,64	-0,34	3425,13	0,60	-0,37	-0,21	-7,02
$\ \hat{y} - y\ $	182,29	174,70	174,23	176,26	173,58	173,11	175,27	185,29
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	160028,52	23,20	21,74	94346,67	15,84	10,76	26,54	68,17
$\ \hat{y} - y\ *$	174,11	173,24	173,04	173,31	173,12	173,06	173,30	173,58
$\ \hat{\beta} - \beta\ *$	6329,60	11,41	9,61	11141,37	11,11	10,08	11,66	29,92

Tabela A.26: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $Obs = 20$.

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	3936547438,23	27,17	33,60	1233549259,69	12,69	2,48	24,25	1764,36
	411122927,55	37,53	51,08	128934093,97	19,33	0,94	60,09	1319,28
	1867357780,80	22,85	22,80	585245778,21	16,55	1,13	49,65	400,44
	5830700,04	41,28	33,82	1830869,15	15,41	3,20	41,69	300,47
	6086630100,32	39,16	30,65	1907495097,13	15,50	2,18	48,55	314,75
	73825485,12	91,44	43,15	23097130,93	21,85	1,30	114,74	301,37
	1686532634,23	41,07	47,56	528506648,91	8,57	1,60	64,80	309,12
	6992379360,66	48,45	53,95	2191028949,69	22,28	1,58	64,35	520,44
	15485554263,36	32,13	32,07	4854121744,53	7,15	0,75	37,30	3099,98
	3814353934,12	39,96	63,76	1195491148,81	12,85	0,37	81,06	1242,91
$\ \hat{y} - y\ $	23,49	0,63	0,69	7,47	0,35	0,01	0,80	349,84
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	14791071587,83	13,27	32,16	3872137593,14	24,86	1,56	17,99	5820,85

Tabela A.27: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $Obs = 100$.

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	1791,41	-0,84	-2,03	-6261,34	-0,83	0,68	0,23	-10,21
1	-581,37	-2,48	-1,30	2024,53	0,68	-0,33	-3,17	0,72
-3	1234,47	0,43	-0,58	-4313,19	-0,89	0,03	0,90	-5,36
5	77,29	7,41	5,65	-237,21	4,15	1,08	7,56	6,58
-5	-2234,53	-5,13	-2,66	7782,14	-3,30	-0,97	-4,95	4,46
3	249,84	4,73	4,21	-855,97	0,88	0,61	7,63	6,87
4	1177,63	3,74	2,18	-4096,96	1,20	0,28	5,49	0,10
-2	2387,39	-1,93	-3,01	-8346,98	-0,61	-0,55	-2,94	-16,94
-1	3552,06	-2,26	-3,33	-12420,79	0,18	-0,35	-3,34	-20,56
-4	1760,46	-2,98	-2,70	-6166,31	-3,07	-0,91	-2,37	-9,41
$\ \hat{y} - y\ $	173,93	173,67	173,43	173,30	173,20	173,07	174,35	174,83
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	46393,15	16,28	15,70	29834,98	11,59	9,95	21,25	48,95
$\ \hat{y} - y\ ^*$	172,95	172,95	172,91	172,88	172,88	172,99	173,06	173,12
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	5738,78	6,59	6,79	20050,43	5,72	8,71	8,66	30,20

Tabela A.28: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $Obs = 100$.

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	266439788,31	43,28	54,94	113225648,44	15,25	2,49	81,69	1046,13
	27796865,23	23,21	15,75	11828877,74	12,44	2,91	27,98	54,19
	126241261,81	24,29	10,25	53688048,27	13,75	1,25	23,32	302,58
	392432,33	12,16	10,16	166955,52	7,38	2,65	34,07	60,61
	411648209,46	27,40	29,08	174993308,90	7,67	2,99	42,51	717,33
	4994373,09	24,21	11,73	2120545,17	16,27	2,68	35,67	62,22
	114012415,96	25,08	24,28	48492094,64	6,59	1,48	52,63	267,12
	473210166,25	16,15	21,40	201207478,86	12,87	3,13	30,74	1423,83
	1047831905,36	13,78	32,64	445526529,23	3,33	0,21	39,60	3062,22
	258008494,55	18,80	33,45	109713545,64	13,33	5,70	45,64	856,20
$\ \hat{y} - y\ $	0,16	0,08	0,03	0,05	0,03	0,01	0,66	1,62
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	611185232,58	6,97	43,25	672856559,09	7,14	2,37	37,25	6368,06

Tabela A.29: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $0bs = 20$.

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	14047,19	2,22	2,20	2803,82	0,18	0,06	2,06	4,49
1	-4537,71	-0,91	0,24	-904,63	0,30	0,06	-2,05	4,04
-3	9673,99	0,70	0,22	1929,75	-0,09	0,01	1,46	1,82
5	544,24	2,53	4,05	108,19	-0,12	-0,03	4,47	8,75
-5	-17463,67	-2,12	-2,51	-3486,40	-0,18	-0,01	-2,41	-6,83
3	1921,45	-2,17	-2,19	382,90	-0,36	-0,11	-2,97	-3,13
4	9195,57	1,80	2,13	1835,55	0,11	0,00	1,64	3,81
-2	18717,44	-0,61	1,49	3737,12	0,03	0,06	0,06	9,39
-1	27847,11	-1,82	-3,48	5559,51	-0,11	-0,07	-2,96	-10,98
-4	13813,13	-2,32	-1,84	2758,69	-0,14	0,00	-1,97	-6,33
$\ \hat{y} - y\ $	177,03	173,74	173,56	173,25	173,09	173,08	174,25	180,90
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	91114,53	16,68	15,50	8984,21	10,52	10,53	21,27	47,21
$\ \hat{y} - y\ ^*$	173,41	173,00	172,97	173,04	173,07	173,08	173,03	173,70
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	44962,43	8,30	8,46	8975,99	10,38	10,52	9,47	18,12

Tabela A.30: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 20$.

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	837368884,21	11,11	12,01	33145459,11	0,17	0,02	21,29	231,02
	87254838,03	42,35	22,53	3451263,90	0,41	0,01	74,57	236,23
	396833516,59	21,79	20,04	15707141,16	0,10	0,01	43,49	102,85
	1246196,60	35,01	32,54	49550,03	0,24	0,01	71,64	431,90
	1294492699,31	14,50	10,11	51244303,30	1,23	0,00	15,49	87,99
	15672515,75	20,86	11,60	618198,48	0,52	0,09	23,02	102,47
	358625870,50	14,44	10,18	14204577,30	0,05	0,00	20,80	325,91
	1487511462,81	12,55	19,35	58894738,63	0,06	0,03	24,50	291,24
	3293115250,80	21,68	13,24	130357511,76	0,09	0,02	40,13	123,21
	810865896,86	24,39	29,81	32092320,56	0,26	0,00	44,82	358,63
$\ \hat{y} - y\ $	4,48	0,17	0,13	0,11	0,00	0,00	0,26	47,34
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	2302750670,85	9,42	12,63	339617429,42	0,21	0,03	16,88	391,17

Tabela A.31: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $0bs = 100$.

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	1770,09	3,06	3,03	2840,45	0,19	0,10	2,67	13,23
1	-568,21	2,26	1,79	-917,11	0,29	0,13	1,74	-4,36
-3	1213,72	-2,52	-1,92	1955,02	-0,21	-0,01	-2,91	5,63
5	74,67	5,55	4,95	110,62	0,91	0,35	6,83	7,71
-5	-2199,87	-3,04	-3,35	-3532,79	-0,78	-0,36	-3,02	-14,60
3	245,10	3,26	2,93	389,56	0,38	0,07	3,16	2,43
4	1160,02	3,37	3,63	1859,70	0,40	0,25	4,76	12,22
-2	2354,81	-0,09	0,61	3785,60	0,08	-0,02	-0,01	11,52
-1	3501,47	-2,15	-0,51	5632,38	-0,33	-0,30	-2,07	14,54
-4	1735,37	-2,94	-2,29	2793,78	-0,75	-0,15	-3,65	5,33
$\ \hat{y} - y\ $	173,36	173,19	173,13	173,01	173,02	173,05	173,41	174,48
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	37064,06	10,60	10,77	10508,84	9,38	10,02	13,47	44,37
$\ \hat{y} - y\ ^*$	172,87	172,86	172,85	172,95	173,00	173,05	172,87	172,96
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	5656,43	3,69	3,96	9093,49	9,02	9,92	3,76	30,13

Tabela A.32: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim N(0, 1)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 100$.

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	191667076,64	10,62	6,42	22900791,46	0,34	0,09	18,50	822,38
	20006333,87	18,10	12,07	2388780,76	0,61	0,08	23,17	296,98
	90863260,13	13,74	13,56	10851269,32	0,91	0,35	26,66	788,23
	286093,42	6,04	4,15	34112,32	0,85	0,32	11,52	14,57
	296341352,62	9,81	20,77	35403380,15	1,32	0,48	19,76	1579,76
	3591600,95	8,60	4,55	429509,72	0,55	0,21	15,76	35,57
	82100089,13	12,11	16,48	9810366,22	0,83	0,18	21,02	440,41
	340464453,63	10,12	15,76	40689683,52	0,38	0,11	23,09	1173,20
	754035479,95	2,62	9,00	90098250,89	0,96	0,43	3,20	2373,23
	185655824,78	12,00	10,64	22171653,17	0,88	0,16	13,10	861,48
$s^2_{\ \hat{y} - y\ }$	0,04	0,03	0,01	0,00	0,00	0,00	0,06	5,94
$s^2_{\ \hat{\beta} - \beta\ }$	623261972,93	4,97	13,16	207033642,80	0,92	0,44	8,42	7325,00

A.2 Erros t-Student

Tabela A.33: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 20$

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	-6,64	-0,20	-0,17	7,12	0,00	0,00	-1,41	-1,23
1	25,32	0,41	0,46	4,41	0,01	0,00	3,34	3,36
-3	7,24	0,07	0,12	-6,47	0,00	0,00	2,33	2,30
5	22,47	0,29	0,36	20,57	0,02	0,01	2,89	2,83
-5	-0,37	0,45	0,52	-5,47	0,00	0,00	2,74	2,87
3	7,57	0,44	0,52	-2,49	0,02	0,01	0,99	1,34
4	14,38	-0,49	-0,47	4,55	-0,01	0,00	-1,87	-2,02
-2	19,60	-0,13	-0,21	8,66	0,01	0,00	-1,58	-1,46
-1	10,42	0,45	0,46	6,49	0,01	0,01	2,96	3,24
-4	-17,79	0,00	-0,06	-10,65	-0,01	-0,01	-0,11	-0,24
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ $	324,74	302,36	302,36	304,74	302,34	302,34	303,17	303,14
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	202,85	11,19	11,17	69,84	10,47	10,48	22,73	22,46
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ ^*$	304,88	302,34	302,34	302,41	302,34	302,34	302,41	302,41
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	44,87	10,71	10,67	23,17	10,47	10,48	13,39	13,50

Tabela A.34: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 20$

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	2241,84	0,53	0,62	80,62	0,00	0,00	25,47	26,49
	4172,33	0,74	0,90	542,43	0,00	0,00	29,67	27,06
	5732,83	2,19	2,22	894,73	0,00	0,00	50,45	49,78
	15046,20	0,47	0,49	1673,05	0,00	0,00	20,01	19,90
	2799,82	1,07	1,12	160,60	0,00	0,00	42,21	40,24
	7592,56	1,51	1,53	1133,52	0,00	0,00	53,39	48,60
	1253,11	1,52	1,65	124,71	0,00	0,00	39,73	40,22
	4287,52	1,14	1,36	651,96	0,00	0,00	44,28	43,46
	9781,21	0,95	0,89	701,58	0,00	0,00	36,23	30,20
	1498,31	1,36	1,20	494,97	0,00	0,00	45,18	44,08
$s^2_{\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ }$	608,73	0,00	0,00	2,27	0,00	0,00	0,33	0,34
$s^2_{\ \hat{\beta} - \beta\ }$	15270,38	1,11	1,05	2116,68	0,00	0,00	49,31	47,64

Tabela A.35: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 100$

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	8,60	1,41	1,41	4,12	-0,02	-0,10	1,56	1,59
1	16,38	-1,30	-1,28	7,98	0,04	0,01	-2,05	-2,02
-3	-14,24	1,01	1,03	-4,76	0,00	0,15	1,48	1,47
5	33,70	0,79	0,79	16,10	0,02	-0,10	0,95	0,94
-5	-10,22	-0,18	-0,26	-7,27	-0,08	-0,16	-0,46	-0,47
3	-13,81	1,44	1,41	-6,38	0,09	0,30	1,67	1,66
4	2,19	-0,03	-0,01	0,75	0,02	0,08	-0,53	-0,51
-2	4,18	-0,07	-0,11	2,76	-0,06	-0,23	-0,20	-0,21
-1	12,23	0,99	0,98	7,06	-0,04	-0,07	1,75	1,76
-4	-13,34	-1,14	-1,24	-6,33	-0,09	-0,03	-1,57	-1,59
$\ \hat{y} - y\ $	304,01	302,41	302,40	302,80	302,33	302,33	302,51	302,51
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	60,44	12,26	12,22	34,76	10,37	10,43	14,65	14,60
$\ \hat{y} - y\ ^*$	302,38	302,29	302,28	302,20	302,33	302,33	302,28	302,28
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	42,94	9,86	9,79	19,40	10,36	10,35	10,27	10,25

Tabela A.36: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 100$

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	112,25	7,51	7,79	43,92	0,03	0,16	12,72	12,68
	218,37	5,66	5,84	69,57	0,04	0,09	11,76	11,59
	405,53	4,69	4,63	138,64	0,03	0,29	7,42	7,35
	710,75	5,10	5,05	436,37	0,02	0,25	9,99	9,92
	88,41	4,43	4,58	71,51	0,03	0,20	11,33	11,15
	207,27	10,43	10,68	146,24	0,04	0,42	18,58	18,63
	86,64	5,52	5,43	15,73	0,04	0,12	13,23	13,13
	252,42	6,02	6,21	84,27	0,02	0,20	15,46	15,42
	501,68	2,29	2,24	201,46	0,02	0,06	6,14	6,12
	34,12	4,47	4,02	45,12	0,02	0,07	8,46	8,30
$s^2_{\ \hat{y}-y\ }$	0,37	0,01	0,01	0,04	0,00	0,00	0,02	0,02
$s^2_{\ \hat{\beta}-\beta\ }$	807,81	3,05	2,91	420,97	0,01	0,21	6,16	6,03

Tabela A.37: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $Obs = 20$

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	-9,03	-0,51	-0,56	-0,31	0,00	0,00	-3,47	-3,32
1	7,57	-0,09	0,04	2,33	0,00	0,00	0,19	0,41
-3	3,87	-0,19	-0,10	0,04	0,00	0,00	-0,16	0,07
5	-14,76	-0,45	-0,43	-0,04	0,00	0,00	-1,70	-1,85
-5	-1,20	0,04	-0,12	-2,38	-0,01	-0,01	0,10	-0,21
3	6,26	-0,05	-0,12	-0,89	0,01	0,01	-1,38	-1,48
4	-3,27	-0,13	-0,02	0,14	0,00	0,00	-0,59	-0,27
-2	-0,28	0,04	-0,07	0,93	0,00	0,00	0,10	0,04
-1	-6,45	0,10	0,06	-2,76	-0,01	0,00	-1,39	-1,11
-4	4,12	0,44	0,51	0,21	0,01	0,00	3,35	3,23
$\ \hat{y} - y\ $	311,65	302,38	302,38	302,54	302,34	302,34	303,46	303,31
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	130,97	11,35	11,31	17,50	10,48	10,48	22,95	21,78
$\ \hat{y} - y\ ^*$	303,08	302,36	302,36	302,35	302,34	302,34	302,59	302,57
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	27,9094	11,0444	10,9661	10,3968	10,4840	10,4829	14,4361	14,2390

Tabela A.38: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $Obs = 20$

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	411,99	0,41	0,62	11,81	0,00	0,00	20,52	18,12
	2155,92	0,77	0,66	27,64	0,00	0,00	47,93	37,65
	1774,99	1,38	1,60	18,46	0,00	0,00	46,56	42,92
	5467,51	0,84	1,01	41,67	0,00	0,00	22,84	19,12
	727,51	0,56	0,48	25,27	0,00	0,00	23,61	16,64
	3086,30	0,34	0,34	51,59	0,00	0,00	19,72	17,05
	696,04	0,87	0,93	10,73	0,00	0,00	43,74	36,36
	1305,30	0,89	1,04	12,06	0,00	0,00	43,60	36,54
	2770,81	1,22	1,49	58,46	0,00	0,00	55,12	50,30
	132,97	0,17	0,23	6,71	0,00	0,00	12,96	10,99
$s^2_{\ \hat{y} - y\ }$	4,19	0,00	0,00	0,08	0,00	0,00	0,53	0,35
$s^2_{\ \hat{\beta} - \beta\ }$	2154,24	0,54	0,81	66,23	0,00	0,00	18,35	14,15

Tabela A.39: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	1,58	-0,18	-0,13	-0,09	0,00	-0,02	-0,27	-0,26
1	-0,58	-0,38	-0,42	-1,25	0,00	-0,02	-0,66	-0,67
-3	2,73	0,99	1,01	1,89	0,05	0,07	1,13	1,13
5	6,08	-0,25	-0,20	-0,96	0,01	0,00	-0,12	-0,11
-5	-1,92	-0,39	-0,32	-0,63	-0,01	0,01	-0,22	-0,19
3	7,18	0,42	0,45	2,54	0,03	0,03	0,78	0,78
4	-3,72	-0,29	-0,29	-0,24	-0,03	-0,01	-0,35	-0,35
-2	-5,73	-1,47	-1,48	-1,87	-0,04	-0,03	-1,80	-1,79
-1	1,69	1,95	1,99	-1,11	0,03	0,01	2,41	2,42
-4	-2,33	0,11	0,12	-0,27	0,05	0,05	0,03	0,03
$\ \hat{y} - y\ $	303,14	302,40	302,40	302,32	302,34	302,34	302,45	302,45
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	41,95	12,53	12,52	13,14	10,52	10,53	13,55	13,53
$\ \hat{y} - y\ ^*$	302,26	302,32	302,32	302,27	302,34	302,34	302,32	302,32
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	12,13	11,06	11,07	10,96	10,51	10,53	11,22	11,22

Tabela A.40: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	14,78	4,85	4,80	0,43	0,00	0,00	8,05	7,99
	161,16	6,27	6,37	6,76	0,01	0,00	10,04	10,05
	253,73	1,97	1,95	5,82	0,04	0,04	3,19	3,19
	657,33	3,15	3,32	28,12	0,00	0,00	4,50	4,51
	68,62	5,82	5,55	2,54	0,00	0,00	9,33	9,08
	223,86	6,91	6,71	9,30	0,00	0,00	10,79	10,70
	103,22	2,93	2,93	3,24	0,01	0,00	4,91	4,92
	87,15	3,06	3,10	7,35	0,01	0,00	6,46	6,45
	246,42	4,20	4,18	8,77	0,01	0,00	5,77	5,75
	96,95	1,52	1,47	1,83	0,02	0,02	2,07	2,04
$s^2_{\ \hat{y}-y\ }$	0,15	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01
$s^2_{\ \hat{\beta}-\beta\ }$	300,65	6,03	6,20	21,55	0,02	0,02	7,42	7,52

Tabela A.41: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $Obs = 20$

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	-2,29	3,28	3,80	6,70	1,45	0,22	17,07	12,40
1	-9,88	2,73	3,87	15,11	0,06	-0,05	23,64	38,67
-3	12,28	-0,29	2,21	-20,30	-2,65	-0,77	16,04	18,44
5	-25,08	-4,02	-4,05	13,71	1,08	0,07	-21,04	-23,56
-5	2,63	-2,77	-0,67	4,76	2,43	0,13	-24,01	-19,65
3	13,34	-0,21	-3,49	-10,04	1,01	0,11	-15,69	-27,18
4	-6,40	-0,86	-4,04	6,06	-0,90	0,10	-15,44	-26,19
-2	-21,10	-5,42	-5,92	-1,42	-2,42	-0,52	-20,23	-31,34
-1	-4,33	4,96	2,72	21,95	1,61	0,44	16,68	9,74
-4	-3,75	-1,19	-2,44	-10,09	-2,19	-0,40	17,07	8,34
$\ \hat{y} - y\ $	320,08	304,14	303,90	306,55	302,57	302,33	341,86	353,92
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	179,85	31,06	29,84	82,42	16,19	10,33	92,55	139,51
$\ \hat{y} - y\ ^*$	302,70	302,33	302,42	302,88	302,30	302,32	308,16	311,13
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	43,87	13,68	16,66	37,81	10,50	10,03	62,91	77,26

Tabela A.42: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $Obs = 20$

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	745,70	31,39	42,65	161,46	2,98	0,13	3087,43	4162,88
	3487,74	90,20	67,86	830,41	15,22	0,65	3057,85	3681,66
	3461,20	125,15	99,93	586,91	7,26	0,55	3222,60	3687,63
	11238,27	62,98	57,65	1797,34	20,12	0,22	3000,86	3521,83
	601,14	125,77	109,78	261,85	14,80	1,11	3169,70	4357,49
	5145,97	96,75	91,31	638,55	22,68	0,31	3253,45	3984,64
	1963,70	105,89	85,52	265,64	27,15	1,05	3245,80	3733,64
	1964,40	130,13	79,57	643,94	11,48	0,67	3042,58	3434,00
	6369,57	192,36	143,52	1843,56	38,44	1,65	3303,30	4521,63
	925,38	101,45	87,96	113,32	16,79	0,57	3173,38	4049,38
$s^2_{\ \hat{y} - y\ }$	121,46	6,67	5,39	10,31	0,04	0,00	12041,61	13560,87
$s^2_{\ \hat{\beta} - \beta\ }$	5482,07	284,62	253,01	1780,23	25,01	0,82	26948,31	25640,10

Tabela A.43: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $Obs = 100$

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	2,29	-11,48	-11,60	0,80	-1,01	0,43	-35,98	-35,85
1	1,19	-4,14	-4,42	0,99	4,63	4,94	-13,21	-12,90
-3	2,66	6,60	5,99	3,17	0,54	-3,45	12,48	12,32
5	4,03	10,11	10,21	-0,91	2,47	6,66	31,77	33,14
-5	-5,47	-8,93	-8,88	-4,71	-3,43	-3,69	-46,99	-46,71
3	4,41	4,74	5,61	3,10	-1,91	-6,00	9,83	11,72
4	-2,43	-17,72	-18,37	-0,93	1,21	1,37	-73,81	-72,57
-2	-3,78	-6,51	-5,92	-1,36	0,52	1,18	-9,97	-10,10
-1	3,79	17,19	18,77	0,68	4,81	6,74	51,65	53,78
-4	-4,50	-15,74	-14,52	-0,73	-4,05	-3,31	-65,22	-65,23
$\ \hat{y} - y\ $	303,99	316,85	316,68	302,69	302,99	302,79	478,34	479,59
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	57,63	87,17	86,21	28,69	23,30	26,74	341,40	343,79
$\ \hat{y} - y\ ^*$	302,19	304,77	304,98	302,24	302,29	302,29	338,54	338,45
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	10,15	36,13	36,89	10,62	10,75	13,46	130,56	130,94

Tabela A.44: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $Obs = 100$

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	76,00	399,48	384,40	17,73	43,56	69,18	11616,93	11294,01
	268,06	1082,56	1113,25	51,09	102,75	60,63	10802,45	11334,51
	408,17	409,32	377,47	53,88	33,48	197,49	9417,86	9672,29
	1352,41	442,92	557,16	317,23	66,17	360,06	10425,93	11023,03
	183,01	881,78	819,98	23,99	26,55	69,13	10952,97	11317,80
	625,13	1036,31	872,71	153,81	52,99	161,44	14106,03	14288,74
	185,52	1061,50	903,64	43,05	26,14	20,87	12292,04	12447,97
	205,84	360,07	366,58	25,60	12,27	66,33	10493,72	11218,82
	426,54	773,41	767,96	87,01	59,68	135,12	7541,48	7744,97
	179,52	683,26	684,60	59,04	59,83	68,98	6123,34	6254,75
$s^2_{\ \hat{y}-y\ }$	0,78	97,74	102,33	0,08	0,50	0,62	2873,04	3559,34
$s^2_{\ \hat{\beta}-\beta\ }$	692,44	837,57	776,80	121,94	56,25	675,49	4263,41	5550,88

Tabela A.45: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 20$

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	1,14	-2,12	-2,78	-0,09	0,04	-0,10	5,74	-0,88
1	8,35	2,83	1,75	1,03	0,29	0,25	14,23	10,00
-3	2,93	2,42	1,31	-0,15	-0,08	0,09	24,69	18,65
5	15,85	-1,64	0,74	0,59	0,29	0,10	-23,29	-7,48
-5	-12,04	-3,49	-1,30	-0,19	-0,09	0,04	6,56	8,71
3	-13,30	-3,57	-4,06	-0,83	-0,25	-0,12	-19,88	-21,62
4	1,41	-0,32	0,79	0,19	0,05	-0,03	-16,73	-10,35
-2	14,21	0,75	-1,21	0,59	-0,02	-0,06	-7,82	-13,17
-1	4,44	-1,33	-0,19	-0,06	0,13	0,09	-8,06	0,89
-4	-6,79	-0,95	0,25	0,19	0,02	-0,03	-14,33	-9,89
$\ \hat{y} - y\ $	309,03	303,18	303,28	302,37	302,34	302,34	355,29	348,56
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	124,30	21,48	23,15	11,20	10,82	10,56	93,96	119,50
$\ \hat{y} - y\ ^*$	302,91	302,43	302,43	302,35	302,33	302,34	306,68	304,82
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	28,80	13,22	12,38	10,46	10,33	10,51	55,08	43,32

Tabela A.46: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 20$

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	231,87	24,39	19,21	0,11	0,11	0,06	3681,27	2407,40
	978,64	55,38	74,49	3,64	2,27	0,32	2836,40	3132,15
	3023,15	47,60	31,18	0,74	0,78	0,05	2828,47	1521,94
	5322,08	24,63	36,93	4,23	2,43	0,06	2893,02	1576,18
	706,20	51,81	53,96	1,60	0,52	0,12	3361,66	1828,73
	1652,55	27,09	52,36	2,02	1,14	0,05	2563,83	3291,20
	772,91	41,91	14,94	0,22	0,13	0,01	2769,81	1151,19
	1047,06	31,99	29,30	2,62	0,53	0,10	3700,47	2427,65
	3534,42	43,42	88,31	1,75	2,90	0,15	3778,72	4331,15
	784,31	28,61	49,17	2,78	0,41	0,04	2881,24	2355,14
$s^2_{\ \hat{y} - y\ }$	9,85	0,78	0,64	0,01	0,00	0,00	16222,34	7139,09
$s^2_{\ \hat{\beta} - \beta\ }$	3432,87	90,18	67,39	3,67	0,72	0,08	25499,87	11619,99

Tabela A.47: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $\mathbf{e} \sim t(3)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	2,87	1,36	0,69	-0,07	-0,11	-0,25	-14,24	-16,09
1	-0,08	-2,52	-2,97	0,41	0,21	-0,57	29,62	28,16
-3	-1,92	4,94	6,73	0,42	0,55	1,09	24,15	25,56
5	10,27	-2,32	-5,14	1,17	0,59	-0,97	-6,32	-6,67
-5	-7,09	-17,38	-15,77	-0,16	-0,25	-0,18	-41,97	-40,25
3	-6,66	-2,07	1,20	-0,39	0,02	0,93	-9,38	-8,44
4	2,85	3,18	2,83	-0,21	0,15	-0,27	-12,37	-13,13
-2	-0,49	-6,54	-9,66	-0,28	-0,27	-0,68	-14,34	-18,10
-1	3,93	13,67	11,75	0,63	-0,12	-0,93	57,46	53,42
-4	-4,46	-6,12	-4,72	-0,11	-0,20	0,35	-16,43	-16,21
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ $	303,18	306,83	306,66	302,35	302,33	302,33	381,00	379,26
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	39,77	51,49	51,45	11,61	10,39	12,10	219,09	216,45
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ ^*$	302,24	302,86	302,80	302,32	302,32	302,33	313,53	313,15
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	12,51	23,44	23,61	10,22	10,08	11,24	86,37	83,99

Tabela A.48: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $\mathbf{e} \sim t(3)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	48,81	174,33	135,87	0,11	0,08	0,56	3335,28	2920,43
	186,29	319,80	370,49	3,55	0,81	4,57	5270,54	5965,77
	248,95	135,91	204,01	0,55	2,32	6,74	3371,79	3721,04
	654,10	198,52	68,26	18,77	2,12	12,08	1976,94	1461,78
	40,81	231,50	225,60	0,36	0,31	0,14	4879,18	4620,56
	193,72	252,08	239,35	7,05	0,01	6,74	5005,88	4805,90
	77,36	414,54	406,40	0,52	0,10	0,45	8264,69	8128,79
	195,37	232,74	237,47	0,99	0,61	2,60	5312,04	4765,37
	301,12	105,09	90,99	4,49	0,04	8,71	1522,48	1405,51
	43,30	212,76	282,61	1,17	0,23	0,96	5376,19	5428,94
$s^2_{\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ }$	0,33	4,52	3,62	0,00	0,00	0,00	1720,08	1520,24
$s^2_{\ \hat{\beta} - \beta\ }$	564,69	175,24	171,73	7,20	0,17	23,45	3774,24	3425,39

Tabela A.49: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 20$

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	-4071,66	0,04	0,36	-3067,20	0,00	0,00	0,98	2,14
1	1317,23	0,06	-0,23	993,24	0,00	-0,01	1,03	-0,56
-3	-2823,61	-0,25	-0,60	-2124,36	-0,02	0,00	-1,48	-2,70
5	-134,95	0,62	0,73	-111,71	0,02	0,01	2,60	2,68
-5	5081,73	0,35	0,62	3825,33	0,01	0,00	0,43	1,48
3	-558,37	-0,43	-0,13	-417,73	0,00	0,00	-1,84	-0,59
4	-2661,95	0,20	0,63	-2005,14	0,02	0,00	1,17	2,33
-2	-5457,80	-0,40	-0,40	-4101,67	-0,01	-0,01	-1,73	-1,30
-1	-8087,13	0,68	0,64	-6103,80	0,03	0,01	2,72	2,32
-4	-4000,38	0,60	0,49	-3026,95	-0,01	0,00	2,20	1,81
$\ \hat{y} - y\ $	319,79	302,40	302,40	305,20	302,36	302,36	303,61	303,60
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	193579,81	11,11	10,91	76289,47	10,47	10,48	21,02	21,30
$\ \hat{y} - y\ *$	304,72	302,37	302,36	302,49	302,36	302,36	302,42	302,39
$\ \hat{\beta} - \beta\ *$	13066,07	10,62	10,31	9848,51	10,47	10,48	11,06	10,53

Tabela A.50: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 20$

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	8599959170,60	1,92	2,50	816582930,53	0,00	0,00	48,34	55,08
	897813243,09	1,71	2,04	85314156,38	0,00	0,00	44,02	53,94
	4078730369,51	0,45	0,75	387262340,74	0,00	0,00	23,75	23,61
	12863489,83	1,77	2,15	1206999,24	0,00	0,00	52,76	51,46
	13302939650,19	1,24	1,53	1263089649,59	0,00	0,00	39,12	43,04
	161401029,53	0,60	1,04	15306709,35	0,00	0,00	29,05	37,77
	3684666679,92	1,21	1,95	350017633,89	0,00	0,00	32,65	37,37
	15279330320,81	1,03	0,75	1450938332,76	0,00	0,00	37,41	29,94
	33848347943,39	1,61	1,34	3214248275,50	0,00	0,00	42,19	35,46
	8333337079,81	1,33	1,61	790839591,72	0,00	0,00	35,60	37,61
$s^2_{\ \hat{y} - y\ }$	102,01	0,01	0,01	4,04	0,00	0,00	1,69	1,65
$s^2_{\ \hat{\beta} - \beta\ }$	50896968273,12	2,29	2,99	2651717297,69	0,00	0,00	65,29	62,32

Tabela A.51: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 100$

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	7695,57	-0,82	-0,71	2336,58	-0,05	-0,04	-1,09	-1,04
1	-2490,70	-0,80	-0,86	-755,80	0,02	0,01	-1,02	-1,09
-3	5295,43	-0,27	-0,29	1609,54	-0,01	0,05	-0,46	-0,47
5	304,70	0,96	0,94	93,58	-0,01	-0,01	1,28	1,25
-5	-9573,70	0,64	0,63	-2910,09	-0,05	-0,04	0,95	0,95
3	1057,01	-0,11	-0,11	322,35	-0,09	-0,05	-0,16	-0,18
4	5046,23	0,25	0,16	1533,76	0,02	-0,02	0,41	0,35
-2	10254,18	1,74	1,66	3115,17	-0,09	-0,06	2,30	2,26
-1	15264,55	0,07	-0,01	4636,31	-0,09	-0,08	-0,03	-0,08
-4	7575,06	0,56	0,65	2300,21	0,05	0,05	0,82	0,88
$\ \hat{y} - y\ $	303,82	302,50	302,50	302,60	302,36	302,36	302,58	302,58
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	95677,66	13,74	13,75	36441,85	10,50	10,52	15,29	15,24
$\ \hat{y} - y\ ^*$	302,32	302,37	302,37	302,24	302,36	302,36	302,38	302,38
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	24643,99	11,25	11,26	7486,23	10,48	10,51	11,62	11,64

Tabela A.52: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 100$

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	1104994863,61	3,91	3,84	250097381,57	0,04	0,02	6,08	6,05
	115552228,57	8,49	8,44	26159782,37	0,04	0,02	13,20	12,62
	524139521,21	5,41	5,62	118679666,34	0,06	0,04	8,13	8,16
	1638540,59	8,96	8,79	372094,46	0,03	0,00	13,98	13,96
	1708557694,51	7,35	8,01	386701067,41	0,03	0,01	10,17	10,17
	20738774,39	9,94	10,16	4694729,47	0,02	0,02	16,22	16,06
	473555120,69	5,42	5,35	107163891,26	0,05	0,02	8,49	8,42
	1962994777,08	5,02	5,13	444342927,49	0,03	0,01	9,93	10,00
	4346805875,16	6,15	5,40	983963871,18	0,05	0,06	9,52	8,84
	1070008617,96	5,14	4,94	242312218,36	0,05	0,03	7,88	7,69
$s^2_{\ \hat{y} - y\ }$	0,95	0,01	0,01	0,08	0,00	0,00	0,01	0,01
$s^2_{\ \hat{\beta} - \beta\ }$	2782097765,05	3,60	3,58	1292522692,30	0,06	0,04	4,92	5,11

Tabela A.53: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 20$

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	-13041,46	-0,57	-0,65	-450,92	0,00	0,00	-5,08	-4,62
1	4209,00	-0,27	-0,21	144,88	0,00	0,00	-2,67	-2,24
-3	-8976,15	-0,24	-0,38	-312,41	0,00	0,00	-1,32	-2,05
5	-492,44	0,05	-0,12	-16,21	0,00	0,00	0,91	0,38
-5	16207,21	-0,24	-0,27	563,61	0,00	0,00	-2,27	-2,31
3	-1789,30	-0,53	-0,49	-63,33	-0,01	0,00	-1,06	-1,15
4	-8538,40	0,04	-0,04	-296,58	-0,01	0,00	-0,50	-0,52
-2	-17390,10	0,10	0,21	-603,75	-0,01	-0,01	1,72	2,21
-1	-25862,46	-0,03	-0,10	-897,69	0,00	0,00	-2,71	-2,57
-4	-12840,34	-0,27	-0,23	-445,21	0,00	-0,01	1,61	1,47
$\ \hat{y} - y\ $	314,16	302,37	302,37	302,51	302,36	302,36	303,63	303,23
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	245249,84	10,84	10,94	10325,39	10,49	10,49	22,79	20,49
$\ \hat{y} - y\ *$	302,67	302,35	302,35	302,38	302,36	302,36	302,46	302,46
$\ \hat{\beta} - \beta\ *$	41755,93	10,51	10,60	1449,45	10,49	10,49	13,25	13,10

Tabela A.54: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 20$

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	9770064561,11	0,28	0,42	39223584,82	0,00	0,00	14,40	11,88
	1019417045,56	0,98	1,14	4085504,58	0,00	0,00	37,51	29,73
	4632303981,97	0,76	0,49	18623287,93	0,00	0,00	43,75	27,32
	14520683,51	1,26	1,01	57928,02	0,00	0,00	57,18	37,87
	15106684737,06	0,38	0,46	60740374,59	0,00	0,00	28,85	18,06
	183563657,49	0,91	1,01	739081,97	0,00	0,00	45,29	38,04
	4186917410,14	0,69	0,82	16831471,53	0,00	0,00	41,78	30,96
	17365985910,38	1,04	1,02	69821097,55	0,00	0,00	49,13	25,80
	38451673473,51	0,22	0,26	154474678,80	0,00	0,00	22,65	19,31
	9468987577,84	0,79	1,14	38048355,98	0,00	0,00	28,28	24,48
$s^2_{\ \hat{y} - y\ }$	114,98	0,00	0,00	0,16	0,00	0,00	1,38	0,66
$s^2_{\ \hat{\beta} - \beta\ }$	41796193485,64	0,37	0,40	298132548,03	0,00	0,00	25,02	15,25

Tabela A.55: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	7054,80	-0,16	-0,11	-504,54	-0,15	-0,17	-0,24	-0,21
1	-2281,37	-1,32	-1,37	162,95	0,05	0,06	-1,52	-1,54
-3	4850,20	-1,39	-1,45	-348,39	-0,12	-0,14	-1,84	-1,85
5	278,30	1,12	1,08	-19,86	-0,01	-0,03	1,40	1,38
-5	-8769,35	0,10	0,05	627,98	0,17	0,21	0,10	0,09
3	967,54	-0,56	-0,55	-69,33	-0,04	-0,04	-0,72	-0,72
4	4617,18	-0,04	-0,05	-330,62	-0,07	-0,10	0,02	0,00
-2	9389,06	1,04	0,97	-674,36	-0,17	-0,20	1,23	1,19
-1	13975,85	-0,18	-0,22	-1003,04	-0,27	-0,30	-0,13	-0,15
-4	6929,92	-0,47	-0,45	-498,35	-0,16	-0,20	-0,60	-0,58
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ $	302,94	302,42	302,42	302,36	302,36	302,36	302,48	302,48
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	55489,57	11,89	11,87	3785,99	10,54	10,57	12,83	12,81
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ ^{*}$	302,34	302,34	302,33	302,34	302,36	302,36	302,33	302,33
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^{*}$	22566,09	10,25	10,22	1618,99	10,49	10,51	10,21	10,20

Tabela A.56: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	339733497,15	3,79	3,77	3068861,28	0,11	0,12	5,24	5,11
	35465183,64	3,03	3,06	320490,99	0,01	0,02	3,94	3,91
	161151728,64	2,00	2,00	1458203,02	0,05	0,06	3,17	3,10
	505241,27	5,48	5,32	4662,19	0,00	0,00	9,31	9,13
	525167557,16	1,47	1,53	4748925,91	0,17	0,19	2,51	2,52
	6371296,86	5,13	5,21	57733,09	0,00	0,00	8,08	8,05
	145554953,02	2,25	2,38	1316257,29	0,05	0,05	5,22	5,25
	603585869,37	6,17	6,22	5464503,14	0,20	0,25	10,25	10,21
	1336445338,09	3,94	3,76	12096267,68	0,42	0,49	6,69	6,56
	329091892,92	4,80	5,12	2981090,59	0,10	0,12	8,95	8,97
$s^2_{\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ }$	0,17	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01
$s^2_{\ \hat{\beta} - \beta\ }$	913209026,92	1,69	1,88	19804384,47	0,03	0,05	2,99	2,96

Tabela A.57: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 20$

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	1261,88	-5,09	-3,62	-1730,40	-2,68	-0,28	-19,42	-15,56
1	-403,01	-3,32	-2,82	557,11	0,72	0,30	-21,55	-17,19
-3	868,50	-1,76	-2,42	-1194,43	-0,79	-0,09	8,05	-0,13
5	45,53	0,79	0,23	-63,84	1,53	0,72	-16,27	-10,20
-5	-1583,97	-6,10	-5,24	2149,31	-1,79	-0,49	-27,25	-37,55
3	182,94	4,28	4,38	-232,07	-1,06	-0,01	25,92	19,70
4	806,68	-6,15	-4,75	-1133,36	-0,43	-0,41	-29,52	-24,48
-2	1667,91	-1,35	1,07	-2306,60	-2,22	-0,46	14,74	21,64
-1	2515,45	3,26	2,79	-3423,00	2,86	0,19	-10,10	-10,44
-4	1215,22	-1,01	-3,49	-1702,77	-0,72	0,31	10,33	-6,80
$\ \hat{y} - y\ $	327,23	304,90	304,84	304,96	302,66	302,38	365,68	377,45
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	308013,72	34,30	33,81	133724,12	16,12	10,97	114,29	147,73
$\ \hat{y} - y\ ^*$	304,96	302,70	302,60	302,39	302,35	302,34	316,96	317,21
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	4035,98	14,89	13,11	5534,59	10,54	10,18	65,23	60,69

Tabela A.58: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 20$

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	13855955849,37	54,96	72,23	3135588330,18	18,39	1,11	3207,85	4142,59
	1448293112,25	82,49	117,71	327561896,25	23,62	1,60	3307,66	4307,45
	6568163701,59	218,26	174,46	1487459920,30	13,97	2,22	4253,10	5729,35
	20726392,13	190,20	172,77	4643431,58	31,80	1,89	3453,10	3864,70
	21420588144,65	147,06	141,37	4848063807,40	17,81	2,53	4415,04	4902,60
	259556759,66	152,35	135,80	58919696,79	22,52	4,41	3159,87	4206,24
	5938350791,29	57,75	67,06	1343318365,85	14,68	3,21	2867,81	3633,19
	24618634561,16	92,51	104,03	5570956275,61	15,20	1,22	4209,48	4256,73
	54513599358,14	95,28	74,88	12336323686,90	10,23	1,18	3638,77	3799,46
	13431059420,40	86,65	128,45	3037855957,28	6,69	0,21	3728,07	5414,43
$s^2_{\ \hat{y} - y\ }$	840,82	5,22	5,17	3,28	0,10	0,00	23005,30	23059,05
$s^2_{\ \hat{\beta} - \beta\ }$	47218763289,18	222,68	217,77	14299181729,52	26,12	2,88	27433,29	26115,68

Tabela A.59: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 100$

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	-1154,82	13,47	13,79	3494,80	3,69	0,86	26,42	27,08
1	371,03	-13,84	-13,11	-1129,23	-3,78	-2,05	-49,01	-49,45
-3	-804,22	-20,96	-21,00	2402,86	-1,82	-1,66	-72,30	-72,35
5	-34,64	4,13	3,88	137,77	2,81	1,56	3,59	3,64
-5	1435,82	-10,42	-9,75	-4345,55	-1,62	-1,05	-44,28	-44,73
3	-160,81	-14,94	-14,41	476,82	-2,79	-1,84	-50,28	-50,45
4	-758,24	-3,06	-4,86	2286,41	0,43	0,23	6,16	5,43
-2	-1555,36	1,20	0,56	4652,20	1,70	0,29	1,97	0,77
-1	-2308,12	7,56	7,75	6923,22	3,31	2,01	22,11	21,60
-4	-1148,97	0,31	0,58	3434,01	-2,59	-1,91	0,49	-0,49
$\ \hat{y} - y\ $	303,90	314,13	313,87	302,65	302,88	302,61	414,07	415,17
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	69083,72	77,57	76,32	33072,85	19,06	15,02	258,82	259,92
$\ \hat{y} - y\ ^*$	302,50	305,07	305,12	302,27	302,36	302,33	333,29	333,63
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	3721,44	34,33	34,23	11179,60	11,13	9,81	113,40	113,81

Tabela A.60: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 100$

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	691274962,44	639,76	606,62	160339254,46	32,33	16,12	6855,83	6860,09
	72136978,57	216,84	221,08	16775073,52	46,81	24,36	3313,64	3433,49
	327825373,62	200,99	191,91	76053781,16	26,26	8,33	1899,74	1885,37
	1032045,20	671,29	678,01	239724,48	19,52	15,59	4509,94	4611,88
	1068657738,39	352,26	348,80	247910309,04	37,24	22,59	5272,46	5429,68
	12955204,53	378,16	349,31	3001114,43	30,67	10,82	4288,62	4257,20
	296142183,71	545,87	574,26	68685946,76	24,53	10,42	6840,54	6951,07
	1228111425,19	849,07	788,61	285032162,53	21,02	6,37	9370,72	9358,40
	2719251775,25	740,26	731,44	631042453,98	16,47	5,56	11447,26	11625,69
	669677959,33	680,94	664,09	155390822,57	60,95	35,16	6815,96	6859,02
$s^2_{\ \hat{y} - y\ }$	0,31	28,35	29,17	0,08	0,40	0,07	3599,70	3742,92
$s^2_{\ \hat{\beta} - \beta\ }$	2328353944,53	436,47	501,54	675640573,69	76,20	25,76	6487,95	6666,32

Tabela A.61: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 20$

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	-24213,88	-1,78	-1,27	406,10	-0,19	-0,01	9,74	11,56
1	7820,16	0,24	-0,43	-130,31	0,11	0,08	-9,33	-9,86
-3	-16663,94	0,10	-0,73	279,04	-0,03	-0,02	7,85	3,68
5	-925,35	3,69	2,33	16,48	0,30	0,04	24,07	23,91
-5	30088,45	-1,86	-1,84	-506,05	-0,60	-0,08	10,84	9,82
3	-3323,60	-0,98	-2,35	55,36	0,01	-0,05	-15,64	-18,06
4	-15842,50	-1,05	-0,67	266,51	0,48	0,05	-19,57	-18,92
-2	-32271,87	-3,29	-1,95	540,96	-0,32	-0,01	-18,10	-17,89
-1	-48006,58	1,57	0,24	804,53	-0,23	-0,05	21,94	14,55
-4	-23818,15	1,53	1,73	399,84	0,11	0,05	-12,84	-1,10
$\ \hat{y} - y\ $	310,64	303,30	303,17	302,39	302,35	302,36	345,30	351,49
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	135002,53	22,11	21,25	2172,45	10,04	10,44	102,45	127,05
$\ \hat{y} - y\ ^*$	303,19	302,36	302,36	302,32	302,34	302,36	306,74	306,02
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	77503,47	10,79	10,95	1299,89	9,88	10,43	51,63	47,99

Tabela A.62: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 20$

	$s_{\hat{\beta}_{bOLS}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{bGME}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{bW-GME}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{mOLS}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{mGME}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{mW-GME}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{nGME}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{nW-GME}}^2$
	2428632549,33	33,25	30,67	1855420,81	0,21	0,00	3111,90	2887,31
	253116682,55	88,92	102,15	191740,82	0,13	0,03	3267,37	3671,66
	1151044147,80	27,72	43,40	876614,24	0,29	0,05	3588,21	4022,15
	3591330,80	38,92	37,64	2994,05	0,23	0,01	2983,93	3048,63
	3755810520,84	40,41	33,61	2876391,34	0,75	0,04	3178,82	3699,17
	45563096,31	42,49	36,08	34547,84	0,51	0,01	3078,27	3219,20
	1039844926,43	41,09	19,76	798826,63	0,65	0,07	2832,35	2523,32
	4314758418,09	33,07	36,57	3293235,36	0,39	0,00	2881,04	3153,33
	9551092502,12	28,79	25,41	7283953,04	0,19	0,02	2670,70	2788,74
	2351925457,14	59,73	65,62	1798893,01	0,49	0,01	3186,80	4399,97
$s_{\ \hat{y} - y\ }^2$	59,50	0,52	1,00	0,01	0,00	0,00	10479,56	8925,84
$s_{\ \hat{\beta} - \beta\ }^2$	12676484209,33	61,81	99,08	15982798,08	0,59	0,07	22948,92	19574,14

Tabela A.63: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 100$

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	-162,11	7,65	8,66	172,17	0,67	1,29	31,93	35,53
1	51,27	-9,57	-9,88	-55,93	0,28	-0,43	-42,10	-38,93
-3	-113,81	-9,60	-9,56	118,45	-0,05	0,74	-45,76	-46,41
5	-1,52	3,15	2,35	7,25	0,42	0,37	18,66	18,70
-5	202,85	4,56	4,21	-213,88	-0,36	-1,34	-6,78	-10,82
3	-22,94	-6,20	-6,15	23,40	0,21	0,24	-16,37	-17,70
4	-103,23	8,52	8,64	113,31	0,42	0,61	43,50	46,37
-2	-216,51	13,75	14,95	230,49	0,71	1,60	65,10	68,44
-1	-324,00	11,05	13,33	341,39	1,13	2,74	43,55	47,12
-4	-166,62	-9,25	-7,81	168,95	0,00	0,73	-37,40	-34,66
$\ \hat{y} - y\ $	303,25	307,98	307,95	302,39	302,36	302,36	395,04	396,35
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	45676,85	55,23	56,39	10954,65	10,81	12,48	240,71	246,11
$\ \hat{y} - y\ ^*$	302,30	303,35	303,41	302,35	302,35	302,35	322,56	322,45
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	523,39	28,43	30,17	551,49	10,10	10,95	119,62	123,56

Tabela A.64: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim t(3)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 100$

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	270218476,86	163,30	148,71	34451133,37	3,45	5,51	3964,73	4295,05
	28255289,99	475,07	491,19	3598556,90	0,47	1,48	7163,40	7058,80
	128223618,57	108,75	117,80	16334820,26	0,78	3,22	3047,10	3200,23
	401520,58	155,21	132,82	51166,10	1,44	0,58	4761,87	4516,62
	417861832,99	375,14	381,69	53244450,28	2,52	8,55	3923,47	4383,13
	5070997,54	269,75	233,38	647992,75	0,78	0,47	5379,06	5469,58
	115748802,06	219,98	242,91	14758843,78	1,06	2,36	4832,47	5251,47
	480003251,18	148,32	217,63	61215254,38	1,98	9,65	2685,09	3294,76
	1063251628,39	224,22	208,45	135516166,03	2,76	22,57	6146,53	6090,90
	261796193,87	288,41	285,63	33376323,61	0,95	6,54	3805,18	3816,97
$s^2_{\ \hat{y} - y\ }$	0,28	5,58	4,78	0,00	0,00	0,00	889,73	836,38
$s^2_{\ \hat{\beta} - \beta\ }$	684730705,15	185,52	190,48	233494577,49	1,41	25,14	2076,82	2073,78

A.3 Erros Cauchy

Tabela A.65: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $\mathbf{e} \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, $G = 10$, Obs = 20

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	364,79	-0,23	-0,22	-4,61	0,00	0,02	-0,69	-0,69
1	-325,31	-1,23	-1,14	-20,34	0,00	-0,01	-1,75	-1,74
-3	-799,59	-0,67	-0,64	15,45	0,00	-0,04	-1,13	-1,13
5	-947,80	-0,76	-0,75	-62,42	-0,03	-0,10	-1,08	-1,08
-5	633,96	-1,06	-1,06	4,36	0,00	-0,06	-1,93	-1,92
3	1485,33	0,64	0,67	101,31	0,02	0,14	0,98	0,98
4	-608,39	-1,23	-1,25	-35,91	-0,01	-0,09	-1,71	-1,72
-2	221,17	0,31	0,29	-16,38	-0,02	0,08	0,49	0,49
-1	106,98	0,66	0,64	-42,05	0,00	-0,10	1,09	1,09
-4	610,31	1,10	1,08	39,23	0,02	0,00	1,33	1,33
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ $	804289,77	804271,03	804271,03	804270,67	804271,01	804271,01	804271,03	804271,03
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	7807,18	14,10	14,07	492,17	10,50	10,52	16,56	16,55
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ *$	804263,76	804271,03	804271,03	804270,63	804271,01	804271,01	804271,03	804271,03
$\ \hat{\beta} - \beta\ *$	2280,33	11,45	11,42	143,15	10,50	10,49	11,85	11,85

Tabela A.66: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $\mathbf{e} \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-10, 10]$, $G = 10$, Obs = 20

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	1232873,10	3,34	3,28	13966,33	0,00	0,00	8,16	8,13
	10082920,60	6,26	6,38	13140,81	0,00	0,00	10,60	10,59
	4717028,53	8,60	8,66	47805,14	0,00	0,01	22,51	22,42
	27086725,10	7,00	7,03	128952,95	0,01	0,04	13,89	13,89
	1223940,26	3,90	3,87	7577,86	0,00	0,03	11,31	11,30
	23461673,99	10,81	10,86	37027,44	0,00	0,15	17,38	17,35
	2416407,51	9,30	9,13	16249,99	0,00	0,07	17,38	17,25
	7246113,69	7,84	8,09	23821,16	0,01	0,15	12,95	12,95
	30949990,58	7,85	7,67	48471,41	0,00	0,09	15,47	15,46
	14387391,31	8,11	8,10	7255,12	0,00	0,01	12,51	12,50
$s^2_{\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ }$	1364,85	0,01	0,01	4,28	0,00	0,00	0,01	0,01
$s^2_{\ \hat{\beta} - \beta\ }$	67052963,99	5,31	5,39	122533,91	0,00	0,00	8,41	8,45

Tabela A.67: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, Obs = 100

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	189,84	-0,60	-0,60	-5,31	-0,30	-0,30	-0,61	-0,60
1	1335,15	0,81	0,81	13,13	0,17	0,17	0,81	0,81
-3	-1326,23	0,80	0,80	13,02	0,41	0,41	0,80	0,80
5	2197,85	0,80	0,80	6,27	1,42	1,42	0,81	0,81
-5	69,26	0,20	0,20	1,24	-0,08	-0,08	0,20	0,20
3	-1361,85	-0,40	-0,40	6,03	0,03	0,03	-0,40	-0,40
4	779,22	0,60	0,60	21,02	1,01	1,01	0,60	0,60
-2	567,66	-0,79	-0,79	17,71	-0,07	-0,07	-0,79	-0,79
-1	1610,22	0,40	0,40	24,10	-0,21	-0,21	0,40	0,40
-4	731,43	0,80	0,80	0,31	0,28	0,28	0,80	0,80
$\ \hat{y} - y\ $	804279,44	804271,01	804271,01	804270,97	804271,01	804271,01	804271,01	804271,01
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	5561,96	13,84	13,84	267,47	10,88	10,88	13,84	13,84
$\ \hat{y} - y\ ^*$	804272,21	804271,01	804271,01	804270,96	804271,01	804271,01	804271,01	804271,01
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	3782,26	10,75	10,75	42,82	9,75	9,75	10,74	10,74

Tabela A.68: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, Obs = 100

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	564370,23	10,44	10,44	1841,73	0,76	0,76	10,41	10,41
	8709625,00	14,46	14,46	8528,53	3,36	3,37	14,43	14,43
	8094936,78	5,76	5,76	15093,57	2,51	2,51	5,75	5,75
	22775304,49	3,36	3,36	25321,03	3,58	3,58	3,36	3,36
	224685,24	5,16	5,16	5021,46	1,50	1,51	5,18	5,18
	12319053,15	10,24	10,24	16421,24	1,61	1,61	10,24	10,24
	1589459,18	13,64	13,64	1787,35	4,80	4,80	13,62	13,62
	2360360,26	10,50	10,50	6172,06	5,22	5,22	10,48	10,48
	10939045,85	5,44	5,44	10509,88	0,89	0,89	5,42	5,42
	2202576,71	2,56	2,56	3621,36	1,86	1,86	2,56	2,56
$s^2_{\ \hat{y} - y\ }$	813,42	0,01	0,01	0,15	0,00	0,00	0,01	0,01
$s^2_{\ \hat{\beta} - \beta\ }$	53149521,97	5,45	5,45	24610,66	2,69	2,70	5,48	5,48

Tabela A.69: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 20$

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	-215,98	-0,65	-0,72	2,46	0,00	0,00	-1,01	-1,02
1	-282,20	1,35	1,32	8,27	0,01	0,00	1,70	1,70
-3	332,08	0,65	0,62	-2,64	-0,01	0,00	1,02	1,01
5	-660,57	-0,58	-0,58	3,82	0,00	-0,01	-0,64	-0,64
-5	107,12	0,02	0,03	-5,70	0,00	0,00	0,08	0,08
3	277,78	0,05	0,06	0,85	0,00	0,00	0,27	0,27
4	-277,90	0,95	0,96	1,08	0,00	0,00	1,63	1,63
-2	-54,65	-0,25	-0,26	-7,29	0,00	-0,01	-0,31	-0,31
-1	-750,75	-0,05	-0,03	5,01	0,01	0,00	-0,12	-0,12
-4	-112,73	-0,05	-0,05	6,34	0,00	0,00	-0,11	-0,11
$\ \hat{y} - y\ $	804276,08	804270,99	804270,99	804270,90	804271,01	804271,01	804270,99	804270,99
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	3246,65	12,18	12,16	46,15	10,48	10,49	13,66	13,65
$\ \hat{y} - y\ ^*$	804272,56	804270,99	804270,99	804270,90	804271,01	804271,01	804270,99	804270,99
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	1194,67	10,69	10,69	15,46	10,48	10,49	10,73	10,73

Tabela A.70: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 20$

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	358288,84	3,61	3,56	66,82	0,00	0,00	8,74	8,71
	308487,93	6,10	6,03	514,85	0,00	0,00	12,15	12,11
	1100115,01	2,40	2,23	614,73	0,00	0,00	4,57	4,52
	5444285,94	3,04	2,97	1334,30	0,00	0,00	6,22	6,21
	255662,50	2,93	2,89	105,49	0,00	0,00	5,86	5,85
	1846520,55	3,93	4,01	263,73	0,00	0,00	9,10	9,10
	989993,00	6,63	6,63	215,38	0,00	0,00	14,39	14,37
	336329,47	2,47	2,43	433,51	0,00	0,00	4,53	4,51
	5293951,43	1,91	1,93	962,36	0,00	0,00	3,32	3,32
	1654719,49	2,63	2,64	447,98	0,00	0,00	4,46	4,45
$s^2_{\ \hat{y} - y\ }$	193,74	0,00	0,00	0,07	0,00	0,00	0,00	0,00
$s^2_{\ \hat{\beta} - \beta\ }$	8474887,025	1,72	1,79	3068,58	0,00	0,00	1,90	1,92

Tabela A.71: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	-7210,93	-0,40	-0,40	1,01	0,07	0,07	-0,41	-0,41
1	-3096,60	-0,80	-0,80	-3,45	0,12	0,12	-0,81	-0,81
-3	3646,67	0,10	0,10	-6,14	-0,14	-0,14	0,09	0,09
5	-26103,13	1,30	1,30	-3,64	0,20	0,20	1,30	1,30
-5	3812,41	1,23	1,23	6,74	-0,03	-0,03	1,23	1,23
3	21241,85	-0,50	-0,50	10,05	-0,09	-0,09	-0,50	-0,50
4	4299,94	0,30	0,30	8,29	0,00	0,00	0,30	0,30
-2	-21014,37	-0,70	-0,70	-1,76	0,06	0,06	-0,70	-0,70
-1	-12246,69	1,27	1,27	-3,44	0,16	0,16	1,26	1,26
-4	3093,89	1,08	1,08	7,26	-0,02	-0,02	1,08	1,08
$\ \hat{y} - y\ $	806919,33	804271,03	804271,03	804270,84	804271,01	804271,01	804271,03	804271,03
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	44481,86	13,10	13,10	39,40	10,46	10,46	13,10	13,10
$\ \hat{y} - y\ ^*$	804137,35	804271,03	804271,03	804270,83	804271,01	804271,01	804271,03	804271,03
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	42915,80	11,39	11,39	21,07	10,37	10,37	11,39	11,39

Tabela A.72: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	477986536,02	3,04	3,04	9,69	0,02	0,02	3,10	3,10
	83568330,46	3,16	3,16	58,44	0,17	0,17	3,12	3,12
	118962652,84	5,69	5,69	345,15	0,11	0,11	5,70	5,70
	6157581639,78	3,21	3,21	421,57	0,39	0,39	3,19	3,19
	126714832,26	4,22	4,22	288,62	0,00	0,00	4,22	4,22
	4086228032,01	2,65	2,65	1090,88	0,12	0,12	2,64	2,64
	157813894,58	6,21	6,21	918,15	0,01	0,01	6,17	6,17
	3995069460,32	2,41	2,41	15,37	0,26	0,26	2,39	2,39
	1356821066,07	9,17	9,17	207,41	0,81	0,81	9,18	9,18
	85711073,18	4,01	4,01	801,40	0,10	0,10	3,97	3,97
$s^2_{\ \hat{y} - y\ }$	63039811,64	0,00	0,00	0,33	0,00	0,00	0,00	0,00
$s^2_{\ \hat{\beta} - \beta\ }$	16509587581,29	1,75	1,75	3048,39	0,06	0,06	1,75	1,75

Tabela A.73: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $Obs = 20$

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	-230,45	-10,60	-9,28	-18,57	-0,07	-0,82	-11,18	-11,13
1	393,13	-1,19	-0,88	-0,78	0,36	-0,20	-9,48	-8,66
-3	-615,21	2,59	3,09	5,83	0,21	-0,50	7,28	7,01
5	-239,80	-3,34	-3,34	-2,77	-1,46	-1,11	5,96	5,52
-5	152,81	-10,16	-10,59	-9,19	-2,93	-1,23	17,54	16,13
3	-318,28	11,26	9,01	4,95	-0,56	0,72	4,99	5,07
4	595,86	-2,98	-4,37	-2,97	-2,14	-1,78	-6,07	-6,30
-2	145,57	-10,76	-12,42	-34,09	-0,96	-2,39	-2,74	-3,53
-1	235,19	-27,86	-28,31	-33,29	-1,28	-0,58	-68,32	-67,80
-4	-933,06	0,50	0,45	8,25	-2,31	-1,03	5,14	4,83
$\ \hat{y} - y\ $	804266,08	804270,91	804270,93	804270,82	804271,01	804270,99	804271,32	804271,30
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	5087,95	131,86	135,29	289,24	16,08	14,32	295,25	293,38
$\ \hat{y} - y\ ^*$	804256,08	804270,89	804270,91	804270,79	804271,01	804270,99	804271,24	804271,22
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	1435,85	35,02	35,35	53,45	10,74	10,72	74,96	73,93

Tabela A.74: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $Obs = 20$

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	258283,99	2214,40	2346,68	3587,48	8,04	9,19	14848,75	14765,95
	2066634,30	728,38	754,54	13809,92	8,32	8,25	2628,83	2527,18
	4170199,74	3988,80	4271,24	23396,20	28,34	14,74	14430,13	14348,79
	8730414,93	2314,21	2482,20	21293,12	31,41	12,71	9554,32	9479,14
	2902049,97	1839,53	1787,93	3465,10	11,97	2,03	11643,52	11072,19
	6613179,43	2335,67	2544,13	16589,06	17,62	16,25	11194,85	11277,95
	1942089,11	980,18	1162,71	8001,70	23,63	11,02	3884,47	3911,51
	2538603,53	699,80	652,00	7495,86	9,88	46,56	6386,09	6382,90
	7577337,09	694,56	750,35	11154,55	19,95	10,14	5221,69	5118,89
	3042063,04	1129,97	1109,19	3551,98	8,91	1,29	4428,64	4351,33
$s^2_{\ \hat{y} - y\ }$	523,67	0,75	0,79	1,16	0,01	0,01	3,13	3,11
$s^2_{\ \hat{\beta} - \beta\ }$	16015253,28	765,03	806,85	31539,58	25,00	42,14	2667,39	2630,23

Tabela A.75: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 100$

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	-11416,76	-47,05	-47,05	8,78	-8,85	-8,85	-46,11	-46,14
1	-12856,46	-41,54	-41,54	59,07	-1,15	-1,15	-42,25	-42,30
-3	12009,18	-18,23	-18,23	-84,68	-22,56	-22,56	-19,00	-18,96
5	-55312,32	36,00	36,00	121,82	26,56	26,56	35,01	35,13
-5	1710,56	-3,27	-3,27	9,70	15,25	15,25	-3,18	-3,11
3	46062,38	23,43	23,66	-65,80	-5,03	-5,02	24,07	24,34
4	17277,67	-23,81	-23,81	17,58	0,44	0,44	-23,55	-23,65
-2	-43162,90	-12,71	-12,71	39,83	1,30	1,30	-13,62	-13,69
-1	-31083,72	11,32	11,32	99,14	15,54	15,54	13,12	13,18
-4	-405,26	-21,71	-21,71	-25,25	-19,06	-19,07	-21,10	-21,05
$\ \hat{y} - y\ $	817068,19	804271,23	804271,23	804271,01	804270,94	804270,94	804271,22	804271,22
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	95540,28	225,51	225,53	309,14	138,16	138,17	225,06	225,10
$\ \hat{y} - y\ ^*$	804790,92	804271,20	804271,20	804270,99	804270,93	804270,93	804271,18	804271,18
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	93551,86	84,75	84,81	202,73	44,36	44,36	84,70	84,89

Tabela A.76: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 100$

	$s_{\hat{\beta}_{bOLS}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{bGME}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{bW-GME}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{mOLS}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{mGME}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{mW-GME}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{nGME}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{nW-GME}}^2$
	1182182347,88	4577,98	4578,04	3916,99	1108,45	1108,50	4527,42	4517,28
	1441171192,63	5550,74	5550,79	11175,82	999,77	999,60	5516,44	5524,35
	1220498167,41	5975,29	5975,46	17435,85	2520,15	2520,97	5876,29	5882,12
	27933507112,61	1103,90	1103,89	24457,37	335,02	335,06	1214,38	1215,20
	26680394,04	8037,07	8037,10	1191,65	1639,34	1639,04	8081,88	8086,49
	19133757640,45	4580,36	4579,66	12405,32	2803,21	2803,53	4514,58	4504,84
	2616978485,01	6762,11	6762,82	2230,22	2415,82	2416,48	6750,70	6740,35
	16618717920,04	3260,33	3260,19	9935,25	1460,87	1461,00	3269,73	3279,20
	8876370941,05	1813,86	1813,87	17137,30	3777,30	3777,38	1799,53	1795,10
	2828059,52	3004,76	3004,67	2093,67	809,89	809,87	2949,19	2943,41
$s_{\ \hat{y} - y\ }^2$	1472201877,17	1,70	1,70	1,17	0,74	0,74	1,68	1,68
$s_{\ \hat{\beta} - \beta\ }^2$	78676696363,98	993,35	993,39	47509,76	748,48	748,42	1021,66	1022,90

Tabela A.77: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $\mathbf{e} \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 20$

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	948,85	-2,94	-2,85	6,67	-0,06	0,00	-7,79	-8,06
1	1523,00	-10,09	-9,61	5,92	-0,17	-0,01	-30,77	-30,19
-3	-605,82	-5,61	-5,62	-13,56	0,23	0,01	-15,58	-15,60
5	2701,38	8,70	7,81	24,11	-0,33	-0,01	22,42	21,85
-5	420,83	-7,93	-8,70	2,19	0,06	0,01	-11,77	-12,80
3	-1708,04	-2,22	-3,43	-10,28	0,23	0,01	-5,46	-6,19
4	170,70	1,29	1,96	-1,42	-0,10	-0,01	18,87	18,70
-2	1217,21	-4,11	-4,86	5,37	-0,17	-0,01	-5,88	-6,11
-1	2399,17	10,55	10,25	15,29	-0,21	-0,01	11,22	10,50
-4	612,16	13,88	13,37	-13,44	0,09	0,00	44,52	43,70
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ $	804318,62	804271,11	804271,09	804271,06	804271,01	804271,01	804271,24	804271,23
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	6505,53	78,92	78,79	52,46	11,08	10,52	194,14	192,51
$\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ *$	804294,99	804271,10	804271,09	804271,06	804271,01	804271,01	804271,21	804271,20
$\ \hat{\beta} - \beta\ *$	4648,72	25,86	25,43	34,48	10,74	10,50	66,51	65,59

Tabela A.78: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $\mathbf{e} \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $\mathbf{z}_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 20$

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	3907750,66	476,71	459,91	193,45	0,14	0,01	2617,51	2577,41
	13854311,42	755,24	727,84	1224,63	0,94	0,05	4007,58	3948,23
	1947340,32	894,41	958,41	876,12	1,70	0,09	5910,26	5908,61
	37864219,25	463,37	441,09	1996,78	3,84	0,20	2378,25	2373,64
	1867212,89	520,07	489,70	102,16	0,07	0,00	4985,73	4688,18
	13887087,33	630,70	588,35	233,72	1,91	0,10	3142,58	3117,20
	3646516,00	627,73	638,91	13,99	0,22	0,01	3517,86	3450,39
	6390399,28	449,26	508,13	873,58	0,76	0,03	2161,34	2166,79
	27842293,74	660,71	685,43	847,70	1,79	0,10	3549,36	3549,76
	3380782,52	524,88	527,36	687,25	0,29	0,01	3477,14	3397,69
$s^2_{\ \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\ }$	10370,59	0,28	0,28	0,02	0,00	0,00	1,54	1,54
$s^2_{\ \hat{\beta} - \beta\ }$	93876620,10	443,78	463,31	5486,33	4,06	0,09	2481,21	2420,69

Tabela A.79: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 100$

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	-8366,98	-16,76	-16,75	-0,21	0,12	0,12	-17,56	-17,68
1	-3298,50	-2,73	-2,61	-1,19	-1,04	-1,04	-3,23	-3,30
-3	3323,69	-4,28	-4,30	1,02	0,40	0,40	-3,80	-3,98
5	-35400,18	8,79	9,03	0,27	-1,38	-1,38	9,08	9,26
-5	2212,14	-13,71	-13,79	1,16	-0,75	-0,75	-12,59	-12,64
3	25416,70	34,04	33,93	5,62	1,44	1,43	34,65	34,56
4	6697,64	-23,64	-23,66	0,54	-0,31	-0,31	-23,31	-23,20
-2	-19530,77	23,86	23,64	0,23	-0,13	-0,13	24,39	24,14
-1	-19056,92	13,70	13,62	-5,35	-0,53	-0,53	14,51	14,41
-4	2077,08	-0,87	-0,80	-2,74	-0,23	-0,23	-0,77	-0,66
$\ \hat{y} - y\ $	808036,62	804271,23	804271,23	804270,98	804271,01	804271,01	804271,23	804271,23
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	55171,34	134,45	134,39	31,16	19,95	19,95	134,91	134,82
$\ \hat{y} - y\ ^*$	804167,42	804271,21	804271,21	804270,98	804271,01	804271,01	804271,22	804271,22
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	52819,77	55,50	55,34	11,42	10,82	10,81	56,30	56,13

Tabela A.80: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 10$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 100$

	$s_{\hat{\beta}_{bOLS}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{bGME}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{bW-GME}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{mOLS}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{mGME}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{mW-GME}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{nGME}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{nW-GME}}^2$
	607861604,90	916,03	908,47	22,46	4,88	4,88	879,69	869,49
	86266656,62	1600,83	1599,69	105,99	29,04	29,05	1500,27	1493,02
	98720683,88	1516,15	1499,83	231,53	73,49	73,49	1508,29	1481,34
	10988250183,44	969,70	980,09	394,27	169,76	169,77	944,11	955,94
	31412754,72	3178,87	3163,94	63,80	4,90	4,90	3237,45	3227,31
	5777240860,18	2077,93	2087,91	218,01	92,34	92,35	2095,54	2092,70
	402527966,29	1322,94	1322,96	97,80	10,30	10,30	1313,96	1329,33
	3602118493,95	2046,13	2068,40	107,04	32,52	32,52	2128,94	2152,43
	3191359899,42	1688,92	1689,70	152,75	81,99	81,99	1685,45	1690,33
	38543577,94	390,65	389,56	70,39	3,76	3,76	408,49	403,18
$s_{\ \hat{y} - y\ }^2$	127257672,02	1,41	1,41	0,00	0,00	0,00	1,40	1,40
$s_{\ \hat{\beta} - \beta\ }^2$	24570354179,15	712,00	711,60	623,38	222,06	222,09	671,48	669,48

Tabela A.81: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 20$

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	4400710,57	0,30	0,38	23096,97	0,02	0,18	0,34	0,37
1	-1421798,58	-0,38	-0,35	-7440,84	0,00	0,07	-0,38	-0,37
-3	3030286,76	-1,18	-1,18	15845,31	-0,01	0,02	-1,54	-1,55
5	169009,68	0,45	0,43	870,21	-0,01	0,04	0,52	0,52
-5	-5472076,41	-0,58	-0,61	-28699,20	-0,03	-0,31	-0,55	-0,55
3	603681,30	2,41	2,46	3164,32	0,02	0,12	3,04	3,06
4	2880001,09	-1,52	-1,56	15089,51	-0,02	-0,15	-2,01	-2,00
-2	5866019,00	0,43	0,36	30715,03	-0,01	-0,13	0,66	0,65
-1	8729342,85	0,92	0,91	45744,02	-0,03	-0,18	1,40	1,39
-4	4331064,16	-0,72	-0,68	22715,82	0,01	0,00	-0,94	-0,94
$\ \hat{y} - y\ $	804281,71	804270,93	804270,93	804270,92	804270,94	804270,94	804270,92	804270,92
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	18425545,05	13,07	13,12	816608,77	10,47	10,37	15,16	15,13
$\ \hat{y} - y\ ^*$	804262,33	804270,93	804270,93	804270,84	804270,94	804270,94	804270,92	804270,92
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	14091527,33	9,97	9,97	73850,75	10,47	10,28	10,25	10,23

Tabela A.82: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 20$

	$s_{\hat{\beta}_{bOLS}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{bGME}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{bW-GME}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{mOLS}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{mGME}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{mW-GME}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{nGME}}^2$	$s_{\hat{\beta}_{nW-GME}}^2$
	59249609448040,50	6,63	6,49	134170634901,70	0,00	0,28	12,35	12,21
	6184730320275,40	5,58	5,75	14031552391,12	0,00	0,04	9,40	9,45
	28098042083666,80	6,86	6,87	63682712035,68	0,00	0,01	14,23	14,17
	87703163210,35	10,68	11,16	197178348,96	0,00	0,02	18,61	18,57
	91621868546834,90	10,35	10,55	207632814793,45	0,01	0,88	15,13	15,10
	1114742645894,70	9,21	8,92	2508323846,80	0,00	0,15	14,81	14,56
	25380297826027,60	8,15	8,41	57516347468,26	0,00	0,20	12,03	11,90
	105285401539574,00	4,59	4,82	238586300320,84	0,00	0,15	8,05	8,14
	233151842830698,00	3,60	3,63	528420361757,56	0,01	0,30	6,66	6,65
	57404563184811,60	10,06	10,15	130042306276,83	0,00	0,00	18,56	18,56
$s_{\ \hat{y} - y\ }^2$	189,75	0,00	0,00	1,18	0,00	0,00	0,00	0,00
$s_{\ \hat{\beta} - \beta\ }^2$	466649233636089,00	4,20	4,16	715392573861,88	0,01	0,14	5,20	5,04

Tabela A.83: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 100$

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	355719,14	1,40	1,40	43937,45	0,49	0,49	1,40	1,40
1	-115189,20	-0,20	-0,20	-14172,27	-0,41	-0,41	-0,20	-0,20
-3	244821,50	2,00	2,00	30244,51	0,24	0,24	2,00	2,00
5	13621,95	-0,20	-0,20	1698,90	-0,25	-0,25	-0,20	-0,20
-5	-442165,49	0,80	0,80	-54618,17	-0,31	-0,31	0,80	0,80
3	48939,62	-0,40	-0,40	6025,01	-0,16	-0,16	-0,40	-0,40
4	233204,51	1,80	1,80	28765,20	0,49	0,49	1,80	1,80
-2	474115,16	-0,60	-0,60	58568,28	-0,10	-0,10	-0,60	-0,60
-1	705729,20	-1,80	-1,80	87114,87	-0,68	-0,68	-1,80	-1,80
-4	350345,92	-0,60	-0,60	43251,20	0,18	0,18	-0,60	-0,60
$\ \hat{y} - y\ $	804273,47	804270,97	804270,97	804270,72	804270,95	804270,95	804270,97	804270,97
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	3960459,12	13,56	13,56	544287,19	10,94	10,94	13,56	13,56
$\ \hat{y} - y\ ^*$	804272,27	804270,97	804270,97	804270,70	804270,95	804270,95	804270,97	804270,97
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	1139209,54	10,86	10,86	140661,72	10,38	10,38	10,86	10,86

Tabela A.84: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 100$

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	2499761566778,26	3,24	3,24	43293458293,80	1,51	1,51	3,24	3,24
	261315299170,54	6,76	6,76	4522448648,17	1,79	1,79	6,76	6,76
	1185045022014,28	8,00	8,00	20537633476,44	1,94	1,94	8,00	8,00
	3696466555,25	5,96	5,96	64342114,49	1,58	1,58	5,96	5,96
	3863500936965,54	5,76	5,76	66931507124,03	1,36	1,36	5,76	5,76
	46847733252,49	20,64	20,64	812039007,63	1,57	1,57	20,64	20,64
	1070270565903,20	3,56	3,56	18544150279,90	0,65	0,65	3,56	3,56
	4440567709445,53	4,84	4,84	76906185160,31	0,51	0,51	4,84	4,84
	9833364616441,75	8,36	8,36	170335558422,52	2,18	2,18	8,36	8,36
	2420522897246,66	8,84	8,84	41926322399,83	0,98	0,98	8,84	8,84
$s^2_{\ \hat{y} - y\ }$	32,92	0,00	0,00	0,20	0,00	0,00	0,00	0,00
$s^2_{\ \hat{\beta} - \beta\ }$	11237454770012,20	9,98	9,98	167410820560,02	2,17	2,17	9,98	9,98

Tabela A.85: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $Obs = 20$

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	154181874,15	-0,45	-0,36	1183,03	0,02	0,02	-0,55	-0,46
1	-49808539,54	0,23	0,17	-384,19	-0,01	-0,01	0,45	0,36
-3	106146842,95	-0,87	-0,79	812,36	0,01	0,02	-1,57	-1,45
5	5976051,94	0,71	0,78	56,17	0,00	0,01	0,80	0,91
-5	-191735555,13	-0,50	-0,42	-1473,03	-0,02	-0,03	-0,77	-0,70
3	21112421,51	0,66	0,76	163,80	0,00	0,00	1,01	1,10
4	100920508,44	-0,53	-0,59	769,77	0,01	0,02	-0,79	-0,85
-2	205528634,61	1,16	1,09	1575,04	0,02	0,03	1,77	1,60
-1	305845715,60	-0,87	-0,83	2357,33	0,03	0,05	-1,44	-1,31
-4	151780318,90	-0,03	-0,05	1165,54	0,02	0,02	-0,03	-0,11
$\ \hat{y} - y\ $	837892,48	804270,92	804270,92	804270,88	804270,94	804270,94	804270,91	804270,91
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	498229663,96	11,49	11,46	53777,20	10,49	10,49	13,26	13,15
$\ \hat{y} - y\ ^*$	807559,14	804270,92	804270,92	804270,88	804270,94	804270,94	804270,91	804270,91
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	493730593,87	10,07	10,06	3794,02	10,49	10,49	10,07	9,97

Tabela A.86: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $Obs = 20$

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	215726000726265000,00	3,86	3,87	904764568,09	0,00	0,00	7,05	7,18
	22513188371889500,00	2,24	2,34	94484382,54	0,00	0,00	6,65	7,00
	102240724214206000,00	3,27	3,24	428271574,26	0,00	0,00	8,99	8,94
	323817426711619,00	5,12	4,96	1383352,14	0,00	0,00	11,85	11,31
	333606827106102000,00	3,28	3,51	1398253074,19	0,01	0,01	6,94	7,34
	4044735996588840,00	3,00	3,04	16851181,47	0,00	0,00	7,59	7,48
	92424138597504700,00	1,42	1,39	387286636,52	0,00	0,00	4,10	4,38
	383319584751868000,00	4,34	3,84	1607171837,28	0,01	0,01	11,99	10,11
	848845443803662000,00	3,56	3,45	3560499903,52	0,01	0,01	9,83	9,24
	209053047887969000,00	1,75	1,83	876378946,90	0,00	0,00	4,84	5,13
$s^2_{\ \hat{y} - y\ }$	10120064267,84	0,00	0,00	0,09	0,00	0,00	0,00	0,00
$s^2_{\ \hat{\beta} - \beta\ }$	2207634610147400000,00	1,38	1,34	6397753220,72	0,00	0,00	5,42	4,70

Tabela A.87: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $Obs = 100$

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	37960164,85	0,30	0,30	-283,19	-0,03	-0,03	0,29	0,29
1	-12264102,83	-0,40	-0,40	94,24	-0,01	-0,01	-0,41	-0,41
-3	26135338,77	-0,15	-0,15	-202,72	-0,05	-0,05	-0,16	-0,16
5	1471981,22	0,50	0,50	-11,84	0,07	0,07	0,50	0,50
-5	-47203817,31	1,20	1,20	364,87	0,14	0,13	1,19	1,19
3	5196423,02	0,00	0,00	-34,09	-0,06	-0,06	-0,01	-0,01
4	24847501,33	-0,97	-0,97	-185,90	-0,07	-0,07	-0,97	-0,97
-2	50602005,47	0,30	0,30	-384,55	-0,08	-0,08	0,32	0,32
-1	75289460,00	0,07	0,07	-576,00	-0,09	-0,09	0,05	0,05
-4	37362303,65	-0,20	-0,20	-291,65	-0,04	-0,04	-0,20	-0,20
$\ \hat{y} - y\ $	806215,20	804270,94	804270,94	804270,95	804270,94	804270,94	804270,94	804270,94
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	123549997,74	12,94	12,94	38200,42	10,64	10,64	12,95	12,95
$\ \hat{y} - y\ ^*$	804288,02	804270,94	804270,94	804270,95	804270,94	804270,94	804270,94	804270,94
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	121549224,35	11,23	11,23	929,59	10,52	10,52	11,24	11,24

Tabela A.88: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-10, 10]$, $G = 20$, $Obs = 100$

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	11991082753145000,00	4,01	4,01	398618687,25	0,22	0,22	4,02	4,02
	1251582669174420,00	5,44	5,44	41678620,21	0,03	0,03	5,44	5,44
	5684016591700520,00	4,28	4,28	189384194,57	0,12	0,12	4,29	4,29
	18044309476347,80	5,85	5,85	597042,77	0,05	0,05	5,82	5,82
	18542212604368500,00	3,36	3,36	617348862,21	0,43	0,43	3,41	3,41
	224699928112416,00	6,00	6,00	7456055,19	0,03	0,03	5,99	5,99
	5137666686969350,00	2,21	2,21	170833133,04	0,15	0,15	2,23	2,23
	21308004501253800,00	3,21	3,21	708996337,68	0,41	0,41	3,26	3,26
	47170456761620300,00	4,91	4,91	1571023725,39	0,90	0,90	4,96	4,96
	11616398168422400,00	4,56	4,56	386570364,18	0,21	0,21	4,55	4,55
$s^2_{\ \hat{y} - y\ }$	34024461,57	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
$s^2_{\ \hat{\beta} - \beta\ }$	122453776972950000,00	2,45	2,45	2634098952,85	0,03	0,03	2,47	2,47

Tabela A.89: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 20$

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	-211233,02	2,17	1,72	9901,66	0,25	0,61	-13,07	-11,76
1	68028,76	4,71	5,00	-3224,38	3,71	0,92	9,70	12,29
-3	-145392,88	0,69	-0,52	6834,61	-2,09	-0,75	-8,22	-9,20
5	-8013,01	16,73	16,90	349,61	0,89	-0,03	36,07	34,71
-5	262476,65	6,43	5,89	-12305,00	-0,75	-1,12	9,65	9,12
3	-29266,49	1,24	1,59	1343,05	-1,09	0,39	25,21	22,49
4	-138178,83	18,58	18,50	6481,35	-1,46	0,40	39,40	39,02
-2	-281859,29	-18,52	-18,07	13182,50	-2,04	-1,34	-22,96	-22,10
-1	-419096,61	-1,61	-0,32	19616,26	-0,76	0,13	-14,72	-14,09
-4	-207962,59	-15,02	-17,74	9741,55	3,01	1,83	-46,36	-45,87
$\ \hat{y} - y\ $	804275,04	804271,06	804271,05	804271,31	804270,92	804270,94	804271,07	804271,06
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	6984823,10	116,09	115,91	487157,74	21,45	11,75	265,34	260,49
$\ \hat{y} - y\ ^*$	804273,12	804271,05	804271,04	804271,27	804270,92	804270,94	804271,01	804271,00
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	676483,39	30,10	30,70	31685,39	11,91	10,14	75,36	73,29

Tabela A.90: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 20$

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
7104744771865,75	1695,07	1642,69	41922810844,78	30,49	6,53	11196,55	10762,81	
741996081292,69	1123,40	969,51	4376332010,54	30,88	2,67	8843,55	7931,40	
3368999138469,98	1608,17	1781,43	19881502138,49	28,87	1,84	7271,69	7282,95	
10565343676,41	1949,83	1972,41	61707898,05	30,56	5,36	8557,00	7999,72	
10985989862491,00	1510,01	1560,32	64802150925,81	39,60	2,85	5276,75	5255,77	
133301004451,37	1376,91	1220,48	787937225,22	42,77	1,56	9057,18	8102,58	
3044764402655,37	1195,69	1197,17	17961943438,79	35,51	1,48	4754,71	4817,35	
12626002196653,10	1145,14	1198,75	74479738342,28	42,34	4,51	3146,54	3103,63	
27955722512353,70	1000,29	1044,47	164885817799,94	64,46	5,61	3198,99	3229,69	
6884181762417,32	976,30	1012,23	40606287131,30	21,33	7,00	6487,45	6308,83	
$s^2_{\ \hat{y} - y\ }$	97,32	0,14	0,16	0,50	0,00	0,00	0,72	0,73
$s^2_{\ \hat{\beta} - \beta\ }$	24526143148549,20	1010,46	1106,96	193447530582,91	48,42	4,19	3062,91	2312,09

Tabela A.91: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 100$

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	-1003826,75	-7,65	-7,04	9732,36	-19,88	-19,53	-8,85	-8,48
1	324675,62	-39,56	-39,13	-3154,95	-10,12	-10,15	-40,91	-39,98
-3	-691483,32	-17,83	-18,88	6679,72	-6,18	-5,37	-19,52	-20,01
5	-38426,60	33,37	32,71	393,64	11,50	10,86	33,93	33,32
-5	1249091,92	-6,36	-5,70	-12076,52	18,32	19,14	-5,94	-5,05
3	-137156,10	23,36	22,81	1324,42	11,76	10,67	21,99	21,66
4	-657852,14	19,72	18,51	6363,48	5,03	2,08	18,15	17,88
-2	-1338991,30	-26,18	-25,58	12929,60	-23,46	-22,93	-25,44	-25,37
-1	-1992094,21	-14,36	-13,71	19263,28	-21,53	-18,03	-14,26	-13,98
-4	-988524,93	22,25	22,12	9574,82	2,03	2,68	22,61	22,39
$\ \hat{y} - y\ $	804278,29	804270,94	804270,93	804270,93	804271,01	804271,01	804270,92	804270,92
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	7771232,94	196,80	197,01	417367,82	106,57	107,76	198,21	197,33
$\ \hat{y} - y\ ^*$	804273,85	804270,91	804270,90	804270,91	804271,01	804271,00	804270,89	804270,89
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	3216059,63	69,85	68,67	31103,91	46,85	45,23	70,56	69,52

Tabela A.92: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 10$, $\text{Obs} = 100$

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
17004943421879,60	5661,69	5746,46	30462183771,36	1139,39	1186,09	5612,98	5654,27	
1778536600106,01	2259,63	2237,85	3183537454,47	514,98	528,47	2532,84	2447,17	
8066156977697,78	4505,81	4518,82	14437222967,86	654,59	616,09	4785,77	4676,78	
25063615481,96	3278,32	3264,86	44909476,65	1116,53	1075,34	3492,98	3458,56	
26306498460013,10	5272,68	5135,03	47062271804,96	2212,68	2160,33	5277,79	5111,05	
319147062780,14	2268,75	2275,17	572172207,12	737,36	702,80	2258,52	2265,30	
7295006269288,22	3983,11	4188,13	13043889841,04	912,72	887,75	3918,95	3964,29	
30231650831236,10	1107,11	1164,33	54096857995,32	595,48	648,17	1064,48	1077,00	
66932779464773,40	2545,93	2588,52	119805140004,98	586,40	973,38	2504,61	2517,74	
16480794514079,80	3469,18	3483,68	29492542495,52	2039,99	1977,64	3448,16	3486,07	
$s^2_{\ \hat{y}-y\ }$	244,19	0,54	0,56	0,12	0,01	0,01	0,56	0,56
$s^2_{\ \hat{\beta}-\beta\ }$	124391555289468,00	501,71	503,95	138972287062,27	1347,46	1189,36	587,08	551,37

Tabela A.93: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 20$

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	184671836,26	0,98	0,99	-16972,56	1,34	1,54	3,25	3,21
1	-59662338,01	-12,30	-13,28	5488,19	-0,43	-0,50	-23,77	-24,02
-3	127183635,04	-2,68	-2,51	-11693,05	0,92	1,06	0,37	0,40
5	7157781,94	1,76	2,24	-648,87	0,05	0,06	-7,15	-6,86
-5	-229649728,83	-1,06	-2,01	21106,76	-1,67	-1,92	8,72	8,08
3	25293279,95	10,40	9,24	-2324,11	0,18	0,21	26,86	26,09
4	120875340,03	2,55	3,66	-11115,00	0,88	1,01	5,39	5,55
-2	246249322,56	10,55	9,78	-22628,87	1,78	2,06	28,82	28,25
-1	366346681,79	-2,64	-3,79	-33666,33	2,66	3,06	-1,74	-2,06
-4	181739694,06	16,60	18,00	-16706,28	1,32	1,52	33,77	33,84
$\ \hat{y} - y\ $	869226,97	804270,89	804270,89	804270,94	804270,94	804270,94	804270,93	804270,93
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	597840024,33	88,56	89,99	54361,45	12,96	13,21	199,86	198,30
$\ \hat{y} - y\ ^*$	812340,93	804270,88	804270,88	804270,94	804270,94	804270,94	804270,89	804270,89
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	591403182,85	29,08	29,85	54354,20	11,28	11,53	62,53	61,92

Tabela A.94: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $Obs = 20$

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
309105936381198000,00	849,74	855,25	1577572422,09	5,96	5,77	4650,11	4631,72	
32263103040017800,00	887,00	978,77	164604155,95	0,62	0,60	4808,32	4733,31	
146610915828671000,00	907,13	997,53	747793431,93	2,82	2,74	5479,18	5400,11	
464347493758885,00	274,51	264,27	2348110,31	0,01	0,01	1425,30	1370,22	
478010862439758000,00	606,79	635,83	2439239622,64	9,21	8,93	3287,09	3282,82	
5798280815559480,00	1191,58	1227,64	29574357,09	0,11	0,11	5067,23	5019,23	
132429051157688000,00	617,36	590,29	675952049,20	2,55	2,47	4163,30	4054,74	
549611004195084000,00	1115,07	1139,68	2802658109,53	10,58	10,26	4633,69	4542,22	
1216439276049880000,00	428,74	418,83	6207161145,25	23,43	22,71	1558,59	1531,78	
299367832071463000,00	705,96	702,87	1527774820,17	5,77	5,59	3199,64	3115,14	
$s^2_{\ \hat{y} - y\ }$	37967129590,97	0,12	0,12	0,05	0,00	0,00	0,46	0,45
$s^2_{\ \hat{\beta} - \beta\ }$	3162445639463850000,00	587,01	603,30	16173890162,35	20,36	17,77	2239,49	2194,15

Tabela A.95: Estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1, do erro de precisão 2, do erro de predição 1 e do erro de predição 2, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$

β	$\hat{\beta}_{bOLS}$	$\hat{\beta}_{bGME}$	$\hat{\beta}_{bW-GME}$	$\hat{\beta}_{mOLS}$	$\hat{\beta}_{mGME}$	$\hat{\beta}_{mW-GME}$	$\hat{\beta}_{nGME}$	$\hat{\beta}_{nW-GME}$
2	33834779,27	-13,72	-13,70	22999,22	-1,27	-1,38	-15,85	-15,76
1	-10929301,66	-13,33	-13,33	-7428,73	0,21	0,25	-15,29	-15,29
-3	23296247,97	-6,32	-7,08	15831,43	3,83	3,76	-7,13	-7,84
5	1313923,00	-25,32	-25,33	896,00	0,43	0,43	-25,16	-25,21
-5	-42072636,93	-19,26	-19,35	-28598,94	-3,92	-3,79	-19,37	-19,37
3	4634710,52	6,94	6,98	3160,59	0,47	0,45	6,04	6,01
4	22147469,53	-1,89	-1,86	15054,65	-2,38	-2,45	-2,96	-2,89
-2	45105020,27	-0,52	-0,59	30651,94	-0,63	-0,77	0,92	0,95
-1	67114920,89	5,83	5,90	45620,57	2,81	2,60	5,22	5,17
-4	33301341,06	15,98	15,84	22625,55	1,25	1,15	16,18	16,12
$\ \hat{y} - y\ $	805998,01	804271,02	804271,02	804270,83	804270,95	804270,95	804271,00	804271,00
$\ \hat{\beta} - \beta\ $	116093776,13	138,41	138,70	134750,24	29,62	29,79	139,90	140,18
$\ \hat{y} - y\ ^*$	804272,43	804271,00	804271,00	804270,83	804270,95	804270,95	804270,99	804270,98
$\ \hat{\beta} - \beta\ ^*$	108344985,84	45,65	45,69	73639,60	13,08	13,00	47,22	47,23

Tabela A.96: Variância das estimativas dos coeficientes de regressão linear, do erro de precisão 1 e do erro de predição 1, quando aplicados os métodos de agregação considerados com os diferentes estimadores abordados.

Cenário: $e \sim C(0, 2)$, $C = 20000$, $z_k = [-200, 200]$, $G = 20$, $\text{Obs} = 100$

	$s^2_{\hat{\beta}_{bOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{bW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mOLS}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{mW-GME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nGME}}$	$s^2_{\hat{\beta}_{nW-GME}}$
	10923549242097900,00	891,35	892,63	4070248224,45	85,18	85,31	815,39	814,08
	1139902540689460,00	2109,28	2109,21	425505204,94	19,84	19,86	2263,18	2263,78
	5178585641225630,00	2065,27	2143,73	1930861676,22	52,76	53,54	2156,64	2232,29
	16468625106494,20	1651,19	1653,29	6010613,42	21,25	21,26	1630,64	1624,69
	16890239009681000,00	1131,63	1122,52	6295722821,41	136,15	137,81	1166,55	1166,24
	204953029805021,00	2612,03	2612,76	76466932,34	8,19	8,21	2734,78	2735,36
	4680663694837110,00	2100,39	2104,32	1745305240,72	84,95	84,79	2092,80	2100,05
	19413198457366200,00	2466,86	2465,83	7237809838,98	165,46	165,98	2548,74	2546,02
	42981788892318800,00	981,35	981,55	16022152073,25	298,95	301,72	971,51	972,46
	10582016259049900,00	1583,77	1580,71	3945259396,72	102,60	103,25	1540,71	1543,48
$s^2_{\ \hat{y} - y\ }$	26673517,30	0,22	0,22	0,04	0,00	0,00	0,23	0,23
$s^2_{\ \hat{\beta} - \beta\ }$	110272236493875000,00	519,74	516,47	29020506091,00	269,39	263,11	578,94	578,08

Apêndice B

