Universidade de Aveiro
Ano 2021

MARIA PAULA FLÓRIDO GONZAGA ALVES PEREIRA

À DESCOBERTA DA MATEMÁTICA DOS GUARDA-JOIAS DO MUSA – ISOMETRIAS E SIMETRIAS

2021

Universidade de Aveiro
Ano 2021

MARIA PAULA FLÓRIDO GONZAGA ALVES PEREIRA

À DESCOBERTA DA MATEMÁTICA DOS GUARDA-JOIAS DO MUSA – ISOMETRIAS E SIMETRIAS

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para Professores, realizada sob a orientação científica do Professor Doutor Paolo Vettori, Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

o júri

Presidente	Professora Doutora Andreia Oliveira Hall Professora Associada da Universidade de Aveiro
	Professora Doutora Fernanda Marília Daniel Pires Professora Associada Aposentada da Universidade do Algarve
	Professor Doutor Paolo Vettori Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro (Orientador)

agradecimentos

Ao Professor Doutor Paolo Vettori, que me orientou neste trabalho, pelas suas sugestões, críticas e ensinamentos, bem como, pelas palavras de estímulo e encorajamento com que sempre me apoiou e incentivou.
À Professora Doutora Rita Simões, pela sua amizade e apoio em todos os momentos.
À Professora Doutora Andreia Hall, por todo incentivo dado, desde o primeiro momento.
Às minhas amigas, Elisabete e Marlene, pela amizade, pelo encorajamento dado e pelo carinho demonstrado em todos os momentos, acreditando em mim, mais do que eu…
À minha família, pela paciência que tiveram e por todo o apoio e encorajamento que me deram, mesmo nos momentos mais difíceis.

palavras-chave

MusA, guarda-joias, modelos 3D, GeoGebra, transformações geométricas, isometrias, simetrias.

resumo

Com esta dissertação, pretende-se essencialmente homenagear o Eng.º Joaquim Domingos Capela, numa dimensão artística, na demanda da beleza das formas e dos materiais utilizados assim como o rigor científico da geometria subjacente à construção de guarda-joias sem recurso a qualquer computador e muito menos a qualquer software matemático. Dos inúmeros guarda-joias doados pelo autor ao MusA, foram analisados treze deles, construindo modelos matemáticos 3D através do software de acesso livre GeoGebra. Os guarda-joias trabalhados apresentam as seguintes denominações: *Arte, Baco, Baú, Beatriz Costa, Coroa, Fórum, Harmonia, Medina, Mosaico, Pérola, Solidão, Tapete e Teatro.*

keywords

MusA, jewellery boxes, 3D models, GeoGebra, geometric transformations, isometries, symmetries.

abstract

With this dissertation, we intend essentially to pay homage to the engineer Joaquim Domingos Capela, in an artistic dimension and in the demand of the beauty of the forms and the materials used, as well as to the scientific rigour of the geometry underlying the construction of jewellery boxes without using any computer and much less any mathematical software.

Thirteen of the many jewellery boxes donated by the author to MusA were analysed by building 3D mathematical models using the free software GeoGebra. The jewellery boxess considered have the following denominations: Arte, Baco, Baú, Beatriz Costa, Coroa, Fórum, Harmonia, Medina, Mosaic, Pérola, Solidão, Tapete, and Teatro.

ÍNDICE

PARTE I - Preliminares ... 1
1. Introdução ... 3
2. Biografia do Eng.º Joaquim Domingos Capela ... 5
3. Transformações geométricas e Simetrias ... 9
3.1 Transformações geométricas no plano ... 10
3.2. Homotetias ... 10
3.3. Isometrias ... 11
3.3.1. Translação ... 12
3.3.2. Rotação ... 13
3.3.3. Reflexão ... 14
3.3.4. Reflexão deslizante ... 15
3.4 Transformações geométricas no espaço ... 17
3.5. Simetrias ... 17
3.5.1. Rosáceas ... 17
3.5.2. Frisos ... 19
3.5.3. Padrões ... 22
4. Curvas e superfícies no espaço ... 27
4.1. Mudança de coordenadas ... 27
4.1.1. Coordenadas no plano ... 28
4.1.2. Coordenadas no espaço ... 29
4.2. Curvas parametrizadas ... 30
4.3. Superfícies parametrizadas ... 32
PARTE II – Descrições e modelos de guarda-joias ... 33
5. Guarda-joias cuja abertura se dá por rotação da tampa ... 35
5.1. Tapete / Mat ... 37
5.1.1. Descrição detalhada ... 38
5.1.2. Simetrias na construção e na decoração ... 39
5.1.3. Modelo matemático usando GeoGebra ... 40
5.2. Arte / Art ... 45
5.2.1. Descrição detalhada ... 46
5.2.2. Simetrias na construção e na decoração ... 47
5.2.3. Modelo matemático usando GeoGebra ... 48
5.3. Harmonia / Harmony ... 53
5.3.1 Descrição detalhada ... 54

5.3.2. Simetrias na construção e na decoração 55
5.3.3. Modelo matemático usando GeoGebra 57
5.4. Baco/ Bacchus 61
5.4.1. Descrição detalhada 62
5.4.2. Simetrias na construção e na decoração 63
5.4.3. Modelo matemático usando GeoGebra 64
5.5. Baú/ Trunk 67
5.5.1. Descrição detalhada 68
5.5.2. Simetrias na construção e na decoração 69
5.5.3. Modelo matemático usando GeoGebra 69
6.Guarda-joias cuja abertura se dá por deslizamento 73
6.1. Solidão/ Loneliness 75
6.1.1. Descrição detalhada 76
6.1.2. Simetrias na construção e na decoração 77
6.1.3. Modelo matemático usando o GeoGebra 78
6.2. Beatriz Costa/ Beatriz Costa 81
6.2.1. Descrição detalhada 82
6.2.2. Simetrias na construção e na decoração 83
6.2.3. Modelo matemático usando GeoGebra 84
6.3. Medina/ Medina 87
6.1. Descrição detalhada 88
6.2. Simetrias na construção e na decoração 89
6.3. Modelo matemático usando GeoGebra 90
7.Guarda-joias cuja abertura é livre 91
7.1. Mosaico/ Moisac 93
7.1.1. Descrição detalhada 94
7.1.2. Simetrias na construção e na decoração 96
7.1.3. Modelo matemático usando GeoGebra 97
7.2. Fórum/ Forum 101
7.2.1. Descrição detalhada 102
7.2.2. Simetrias na construção e na decoração 103
7.2.3. Modelo matemático usando GeoGebra 104
7.3. Pérola/ Pearl 107
7.3.1. Descrição detalhada 108
7.2.2. Simetrias na construção 109
7.4. Teatro / Theater 111

7.4.1 Descrição detalhada 112
7.4.2. Simetrias na construção 114
7.5. Coroa / Crown........ 115
7.5.1 Descrição detalhada 116
7.5.2. Simetrias na construção 118
8.GeoGebra: Algumas ideias na resolução de desafios 119
9.Conclusões........ 121
Referências Bibliográficas 123
Links dos modelos GeoGebra........ 124

PARTE I - Preliminares

1. Introdução

Com esta dissertação, pretende-se analisar e construir modelos 3D de alguns dos guarda-joias, que o Eng.º Joaquim Domingos Capela doou à Universidade de Aveiro em 2013. Ao mesmo tempo, é uma ocasião propícia para homenagear aquele que é um nome incontornável da arte de violeiro, nascido a 3 de dezembro de 1934, na freguesia de Anta, Concelho de Espinho, o Eng.º Joaquim Domingos Capela. Autor de cerca de 135 instrumentos musicais de corda (violinos e guitarras) e de cerca de 300 guarda-joias. Focamo-nos na construção e decoração desses guarda-joias, numa dimensão artística, na demanda da beleza das formas e dos materiais utilizados assim como o rigor científico da geometria subjacente à sua construção, sem recurso a qualquer computador e muito menos a qualquer software matemático. Assim, procurou-se "parametrizar" cada guarda-joias num modelo matemático, "manipulável" sob o ponto de vista de modelo a 3D, utilizando um importante recurso para o ensino e para a aprendizagem da Matemática, o GeoGebra.

Para além de objetivo tido como homenagem, paralelamente, objetivamos uma visita virtual e a contribuição para a criação de um catálogo online, em que os guarda-joias são modelos e o «visitante», utilizando o GeoGebra, tenha a possibilidade de poder manipular os objetos, movendo-os, rodando-os, alterando cores, luminosidade, texturas, transparências, visualização no espaço tridimensional, com a possibilidade de abrir e fechar o objeto (neste caso dos guarda-joias), ou seja, criando interatividade. Antevendo esta possibilidade de se criar uma visita virtual, os ambientes digitais oferecem novas oportunidades para envolver o público nos processos do museu através de experiências culturais interativas.

A dissertação aqui apresentada encontra-se organizada em duas partes, cada uma delas dividida em quatro capítulos. Sendo que, na primeira parte se encontra o capítulo 1, relativo à introdução, o capítulo 2, conta com uma descrição detalhada de partes da vida da personalidade/construtor/autor/ artista, Eng.º Joaquim Capela, essenciais para a compreensão desta dissertação, sendo mesmo o seu "motor oculto", e os capítulos 3 e 4 que contextualizam, teoricamente as Simetrias e as Transformações geométricas bem como as parametrizações das Curvas e superfícies no Espaço presentes ao longo de todo o nosso trabalho. Na segunda parte, temos os capítulos 5, 6 e 7, dedicados à descrição dos guarda-joias estudados por tipo de abertura, isto é, iniciamos por descrever os guarda-joias cuja abertura é feita por rotação da tampa relativamente ao cofre, seguindo-se aqueles em que a abertura da tampa se dá por translação em relação ao cofre, separandose totalmente do cofre, finalizando com aqueles cuja tampa se separa livremente e completamente do cofre sem qualquer restrição. Finalizamos com os capítulos 8 e 9. O capítulo 8 dedicado às dificuldades com que nos debatemos no GeoGebra, na modelação dos guarda-joias e forma de as resolver e o capítulo 9 com as conclusões.

2. Biografia do Eng.º Joaquim Domingos Capela

Joaquim Domingos de Sá Ferreira Capela, (Eng.), nasce a 3 de dezembro de 1934, filho Maria de Sá Couto (1909-2001) e do conceituado violeiro (luthier) Domingos Ferreira Capela (1904-1976), famoso e reconhecido a nível nacional e internacional, tendo levado o nome de Portugal aos quatro cantos do mundo, através de uma extensa obra-prima, não só pela qualidade de construção dos seus instrumentos, como pela belíssima sonoridade. A sua arte, felizmente, deixou sementes, expressa em dois dos seus filhos, António e Joaquim Domingos, seus dignos representantes, aprendizes do grande Mestre na sua Oficina em Anta – Espinho (Oliveira2006)

Com apenas sete anos de idade, Joaquim Domingos Capela, começou a ajudar o pai na sua oficina de instrumentos de corda em Anta e, com apenas nove anos, construiu o seu primeiro violino (tamanho de $\frac{1}{4}$, cerca de 47 cm), doado pelo próprio, à Universidade de Aveiro juntamente com outros cordofones construídos por si (Lopes2018).

Em 1945 iniciou a aprendizagem da prática de violino na Tuna Musical de Anta, da qual o seu pai foi um dos fundadores no ano de 1924, colaborando ativamente nas suas apresentações.

Em 1958, já dotado de formação técnica especializada e experiência profissional, ingressou na Universidade do Porto, onde concluiu o curso de Engenharia Mecânica em 1964. Contudo, ao ter conhecimento da atribuição de um prémio monetário considerável ao aluno que tivesse a melhor classificação na admissão ao curso de Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, que seria fundamental para o prosseguimento do seu percurso académico universitário, decidiu frequentar o 3º ano do curso preparatório na Universidade de Coimbra. Desta forma, sabendo que no Porto era o aluno que reunia as melhores condições para receber esse prémio, quis evitar a possibilidade de concorrência desconhecida vinda de Coimbra, onde também eram ministrados cursos preparatórios na Faculdade de Ciências, o que conseguiu com distinção. (Anteriormente à criação dos cursos de engenharia na Universidade de Coimbra, efetuada em 1972, a Faculdade de Ciências apenas ministrava cursos preparatórios para a posterior admissão na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto ou no Instituto Superior Técnico em Lisboa). (Lopes2016)

Nos anos 80 do séc. XX, Maria Hormizinda, sua esposa, surpreendeu-o ao comprar um guarda-joias para uso pessoal. Lamentou-se junto da mesma por não ter tido conhecimento antecipado de tal compra, pois ele próprio teria feito uma caixa de melhor qualidade e sem qualquer custo, ao que a esposa respondeu: então faz.

Decidiu então, construir uma coleção de guarda-joias com madeiras nobres que sobravam da construção da coleção de instrumentos musicais, encrustadas com metais e pedras semipreciosas, enriquecidas tanto na forma como na decoração. Nasce assim o desenho da primeira caixa de tampa abaulada, tipo baú, Nessa altura foram pensadas duas hipóteses para a sua construção, ou em madeira maciça de pau-santo ou por revestimento de uma estrutura em madeira de choupo híbrido, com folha de pau-santo. Foi optada esta solução por ser mais simples e menos trabalhosa.

Surge depois uma segunda caixa com forma semelhante, mas com um arco de tampa mais abatido, revestida agora com folha de madeira de olho-de-perdiz e orlada com madeira de Pernambuco ou pau-brasil (usada nos arcos dos violinos).

Passou a oferecer alguns dos seus guarda-joias em diversificadas cerimónias em vez de adquirir qualquer outro objeto sem qualquer cunho pessoal.

É de salientar que toda esta obra foi um desafio à criatividade, e um sonho, que viria a ser concretizado na construção de cerca de trezentas peças, parte delas nesta coleção, e as restantes oferecidas, embora umas quantas destas tivessem sido sorteadas para angariação de fundos destinados a instituições sociais, com por exemplo a Casa do Gaiato, que o autor muito admira.

A coleção contém duas caixas com a forma cúbica e de iguais dimensões dedicadas a duas grandes artistas: Beatriz Costa e Amália Rodrigues. Ambas conhecidas pessoalmente pelo autor que na sua opinião eram muito diferenciadas pelos seus estados de alma, tão somente, pela alegria e pela tristeza.

A cor da folha de revestimento do guarda-joias dedicada a Beatriz Costa é avermelhado, e em duas das faces foi embutido o seu rosto, de forma muito estilizada; nas outras duas faces estão embutidos dois retângulos em madeira branca, lembrando, assim, os «lençóis da aldeia da roupa branca».

O guarda-joias dedicado a Amália Rodrigues tem duas faces pretas e duas em pau acetinado amarelado. Numa destas faces, a filetes pretos e brancos, de forma criativa, está embutida a letra «S», e na outra um «O», que conjugadas geram a palavra «Só», estado de solidão, termo este muito presente no livro de poemas de Amália Rodrigues.

O guarda-joias «Bíblia», com a forma de livro, é dedicado ao pai do autor, Domingos Ferreira Capela, e foi construída para nela guardar os valores deixados por este célebre luthier: a arte, a inteligência e a humildade.

O «Lanterna», farol de luz, foi inspirado na vivência de criança junto do seu avô materno, que usava tal objeto pela noite, quando ia alimentar o gado.

O desenho do guarda-joias «Euro» foi baseado no símbolo da «Caixa Geral de Depósitos» e aparece na coleção pelo facto do autor ter colaborado nesta instituição.

Na antiga civilização grega elementos como o fogo, a terra, o ar, o cosmos e a água, foram representados simbolicamente por formas poliédricas, respetivamente pelo tetraedro, hexaedro (cubo), octaedro, dodecaedro, icosaedro. Esta curiosa simbologia foi aproveitada pelo autor, para construir cinco caixas prismáticas, duas com base triangular equilátera, uma com base quadrada e duas com base pentagonal, em que as respetivas tampas são aqueles poliedros.

Muitas outras peças da coleção tiveram motivações diversas, como se poderá inferir da coleção de 81 guarda-joias doada pelo autor à Universidade de Aveiro pelo Joaquim Domingos Capela (Eng.º) em dezembro de 2013. Em simultâneo doou também cerca de duas dezenas de instrumentos musicais da sua coleção pessoal (cerca de 135 instrumentos) à Universidade de Aveiro, tendo também doado três dos seus cordofones ao Museu Nacional da Música.

Como curiosidade, em todas as duas peças estão gravadas as suas iniciais JDC.

Para Joaquim Domingos Capela, a melhor amiga do homem é a madeira, a sua matéria-prima. "Nascemos e somos colocados num berço de madeira, crescemos e sentamo-nos num banco de madeira à mesa de madeira. E na última viagem vamos no meio de madeira."

Toda a sua obra foi criada sem auxílio de qualquer computador, como se pode constatar em alguns dos esboços presentes na coleção patente no museu da Universidade de Aveiro (MusA). Ao longo de todo este trabalho, o software GeoGebra, foi um aliado imprescindível e preciosíssimo na construção de alguns destes guarda-joias.

3.Transformações geométricas e Simetrias

Neste capítulo serão abordados os fundamentos teóricos que norteiam esta dissertação, alicerçados, essencialmente, no livro de Eduardo Veloso, “Simetrias e Transformações geométricas – Textos de Geometria para professores” (Veloso2012).

Figura 1: Arte decorativa, um azulejo português, com simetria visível.

“Simetria” é um conceito matemático que também é vantajoso para organizar e classificar algumas figuras da arte decorativa. Na Figura 1, podemos observar um azulejo português, em que a simetria, mesmo ao nível intuitivo, está patente.

Na linguagem corrente, o conceito de simetria está estreitamente relacionado com a reflexão no “espelho”, contudo, no mundo visual que nos rodeia, há figuras com outros tipos de simetrias e até há figuras com mais simetrias do que outras, tal como, um quadrado é “mais simétrico” do que um retângulo.

Matematicamente, as simetrias são transformações geométricas, ou seja, transformações de pontos no espaço, que deixam invariante a figura. Exemplificando, o “espelho” é uma transformação geométrica que transforma a direita na esquerda e vice-versa. O azulejo da Figura 1 tem esta simetria, no entanto, facilmente se observa que também a rotação de 90^0 é uma das simetrias do azulejo.

Reflexões e rotações são exemplos de isometrias, ou seja, transformações geométricas que preservam a distância entre pares de pontos.

As isometrias e as correspondentes simetrias serão analisadas mais detalhadamente nos próximos capítulos. Posteriormente serão introduzidos diferentes tipos de figuras, que admitem simetrias específicas, ou seja, rosáceas, frisos e padrões.

3.1. Transformações geométricas no plano

O estudo das transformações geométricas e das simetrias será, ao longo desta dissertação, limitado ao plano euclidiano, que será designado por $\mathbb{R}^2$. Os seus pontos são designados por letras maiúsculas em itálico e as retas traçadas sobre esse plano por letras minúsculas latinas em itálico.

Uma transformação geométrica, T, associa a cada ponto P de $\mathbb{R}^2$ um e um só ponto P' de $\mathbb{R}^2$ e $P' = T(P)$ será a imagem ou o transformado de P por meio de T, sendo P designado por pré-imagem (ou original, ou objeto). Uma transformação geométrica não é mais, T, que uma função bijetiva definida em $\mathbb{R}^2$, ou seja, uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano.

A composição das transformações geométricas, T_1 e T_2, representa-se por $T_1 \circ T_2$ podendo-se ler T_1 após T_2, isto é, $T_1 \circ T_2\,(P) = T_1(T_2(P))$.

Se denotarmos por I, a isometria identidade, isto é, a isometria que deixa tudo inalterado, , tal que, $I(P)= P$, então verifica-se que, $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$.

Para cada transformação geométrica, existe uma transformação geométrica inversa T^{-1}, tal que se $P' = T(P)$, então $P = T^{-1}(P)$.

As transformações geométricas dizem respeito a todos os pontos do plano e não apenas de uma figura pertencente a esse plano. Apesar disso, para facilitar a leitura, escrever-se-á, com algum abuso de linguagem, a frase “a transformação da figura” em vez da mais correta “a imagem da figura através da transformação aplicada”.

De acordo com o interesse do nosso estudo, focamo-nos nas transformações geométricas que são isometrias, descrevendo na secção seguinte, apenas uma classe de transformações geométricas, não isométricas: as homotetias.

3.2. Homotetias

Definição de homotetia (Veloso, 2012, p.10): dados um ponto O e um número real $k \neq 0$, diz-se homotetia H de centro O e fator k, a transformação geométrica que faz corresponder a cada ponto P do plano o ponto $P' = H(P)$, nas seguintes condições:

- $P' \in OP$;
- $\overline{OP'} = |k|\,\overline{OP}$;
- conforme k é positivo ou negativo, assim P e P' estão do mesmo lado ou em lados contrários relativamente ao ponto O (Figura 2 e 2A).

Assim, se $|k| > 1$ ou $|k| < 1$, a homotetia é uma ampliação ou uma redução; se $k = 1$,a homotetia reduz-se à identidade e, se $k = -1$, a homotetia é uma meia-volta de centro O.

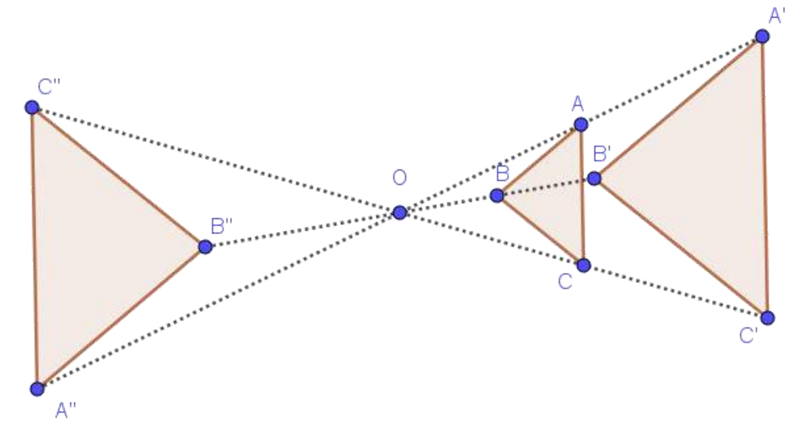


Figura 2: Exemplo de duas homotetias do mesmo triângulo ABC. Para centro O e fator $k = 2$, obtemos o triângulo $A'B'C'$; para o mesmo centro O e fator $k = -2$, obtemos a imagem $A''B''C''$.

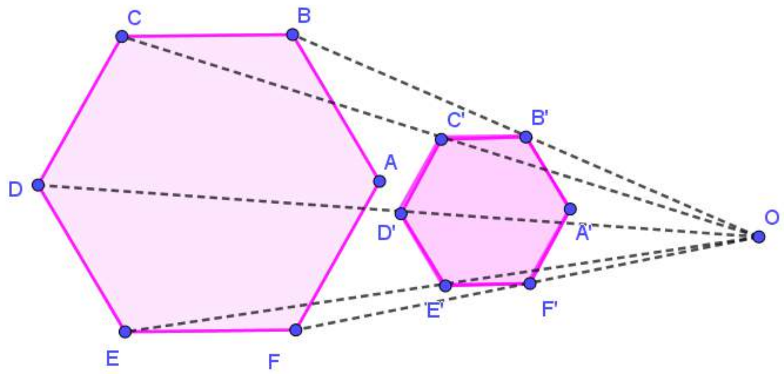


Figura 2A: Exemplo do efeito da homotetia (centro O, redução $k = 0{,}5$)

3.3. Isometrias

Nesta dissertação, e no que concerne às simetrias, o nosso desígnio é a descoberta da matemática nos guarda-joias, doados pelo autor, ao MusA, isto é, encontrar, identificar e analisar, em cada guarda-joias, isometrias, relacionadas com o objeto em si e suas decorações.

Demonstra-se (ver E. Veloso) que qualquer isometria só pode pertencer às quatro classes seguintes:

- As translações consistem numa transformação geométrica em que todos os pontos da figura original se deslocam segundo a mesma direção e o mesmo sentido, e percorrendo a mesma distância;
- Numa rotação a figura inicial vai rodando segundo um ângulo em torno de ponto central, o centro de rotação;
- Numa reflexão, cada ponto da figura original e o correspondente da figura refletida estão sobre uma reta perpendicular ao eixo de reflexão e a igual distância desse eixo;
- As reflexões deslizantes resultam de uma reflexão seguida de uma translação.

3.3.1. Translação

Dados dois pontos A e B quaisquer do plano, o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ é um segmento de reta $[AB]$ com um sentido atribuído (de A para B). O ponto A é dito a origem deste segmento orientado e o ponto B a sua extremidade. Assim, um segmento orientado tem comprimento (ou módulo), direção (a mesma da reta AB) e sentido. Denota-se por vetor $\vec{v}$, a classe de todos os segmentos orientados com a mesma direção, sentido e comprimento. Exemplificando, na Figura 3, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são diferentes, mas representam o mesmo vetor $\vec{v}$. Assim, com mais um abuso notação, escrever-se-á, $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

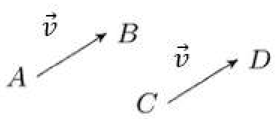
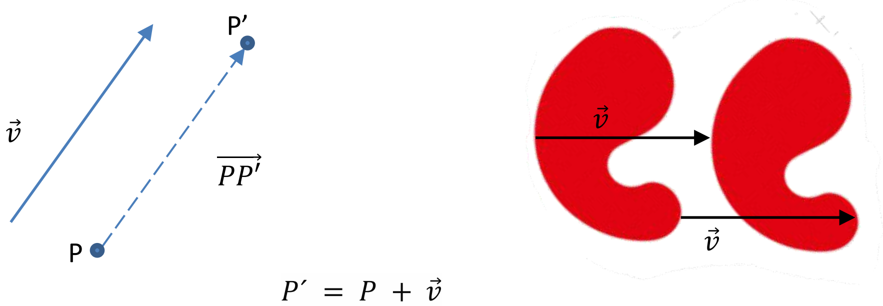


Figura 3: Representação do vetor $\vec{v}$.

Definição de translação (Veloso, 2012, p. 7): Dado um vetor $\vec{v}$, diz-se translação definida por $\vec{v}$, a transformação geométrica $T_{\vec{v}}$ que faz corresponder, a cada ponto P do plano, o ponto P' tal que $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{v}$ (ver Figura 4); se o módulo de $\vec{v}$ é zero, a translação reduz-se à transformação identidade. A translação inversa de $T_{\vec{v}}$ é a translação $T_{\overrightarrow{-v}}$, $[(T_{\vec{v}})^{-1} = T_{\overrightarrow{-v}}]$, em que o vetor -$\vec{v}$ tem módulo e direção de $\vec{v}$, mas sentido oposto.



$$P' = P + \vec{v}$$

Figura 4: Definição de translação

3.3.2. Rotação

Dados três pontos distintos, O, P e P', o ângulo orientado φ é o ângulo definido pelas semirretas $[OP$ e $[OP'$, em que se escolheu $[OP$ como “lado ”origem do ângulo e $[OP'$como “lado “extremidade. Logo, -φ será por definição o ângulo orientado definido pelas semirretas $[OP'$, (“lado “origem) e $[OP$, (“lado” extremidade). Por convenção, define-se o sentido anti-horário, como o sentido positivo, o que permite definir igualdade de ângulos orientados

Definição de rotação (Veloso, 2012, p. 7): Sejam dados um ponto O e um ângulo orientado φ. Diz-se rotação R de centro O e ângulo φ a transformação geométrica que faz corresponder, a cada ponto P do plano, o ponto $P' = R(P)$ nas seguintes condições:

1) $R(O) = O$, isto é, o ponto O é fixo para a rotação R, $R_{0,\varphi}$.

2) Se $P \neq O$,

- o ângulo POP' é igual a φ;
- os segmentos $\overline{OP}$ e $\overline{OP'}$ são iguais (Figura 5).

Figura 5: Exemplo de rotação

Chamamos de meia-volta a uma rotação de $180°$ (ou π radianos). Duas rotações com mesmo centro e ângulos que difiram de um múltiplo inteiro de $360°$ (ou 2π radianos) correspondem à mesma transformação geométrica. Logo, uma rotação em que φ é múltiplo inteiro de $360°$ é a transformação identidade. A rotação inversa de R é a rotação $R_{0,-\varphi}$ de centro O e ângulo $-\varphi$, como se vê na fórmula seguinte, $\left(R_{0,\varphi}\right)^{-1} = R_{0,-\varphi}$.

3.3.3. Reflexão

Definição de reflexão (Veloso, 2012, p.8): Dada uma reta r, diz-se reflexão E de eixo r, a transformação geométrica que faz corresponder a cada ponto P do plano o ponto $P' = E(P)$ que verifica as seguintes condições:

1) se P pertence a r, $P = P'$.

2) se P não pertence a r, a mediatriz do segmento PP' é a reta r.

Mediatriz é o conjunto de pontos que estão à mesma distância de dois pontos dados, neste caso P e P'.

Figura 6 – Definição de reflexão

Se E é uma reflexão, então E^{-1} é a mesma reflexão, $E^{-1} = E$. A composta de uma reflexão com ela própria é a identidade, ou seja, $E^2 = E \circ E = E \circ E^{-1} = I$.

É de grande importância salientar que a reflexão é uma transformação fundamental, uma vez que qualquer isometria é uma composição de reflexões.

3.3.4. Reflexão deslizante

Uma reflexão deslizante é uma composição de uma translação de vetor $\vec{v} \neq 0$, com uma reflexão numa ordem qualquer. Contudo, dada uma reflexão deslizante, D, prova-se que, existem unicamente um vetor, $\vec{v}$, e uma reta, r, que são paralelos e que satisfazem a relação, escrevemos então, $D_{r,\vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ E_r = E_r \circ T_{\vec{v}}$.

Ou seja, a composição não depende da ordem em que são efetuadas a translação e a reflexão.

Na Figura 7, está representada a reflexão deslizante D, definida pela reta r e pelo vetor $\vec{v}$. O ponto P_1 é o resultado da transformação de P por meio da reflexão E_r e o ponto P' é o resultado da transformação de P_1 por meio da translação, $T_{\vec{v}}$. Do mesmo modo o ponto P_2 é o resultado da transformação de P por meio da translação $T_{\vec{v}}$ e o ponto P' é o resultado da transformação de P_2 por meio de uma reflexão E_r.

Assim P' é o resultado da transformação de P através de uma reflexão deslizante, $D = T_{\vec{v}} \circ E_r$=$E_r \circ T_{\vec{v}}$.

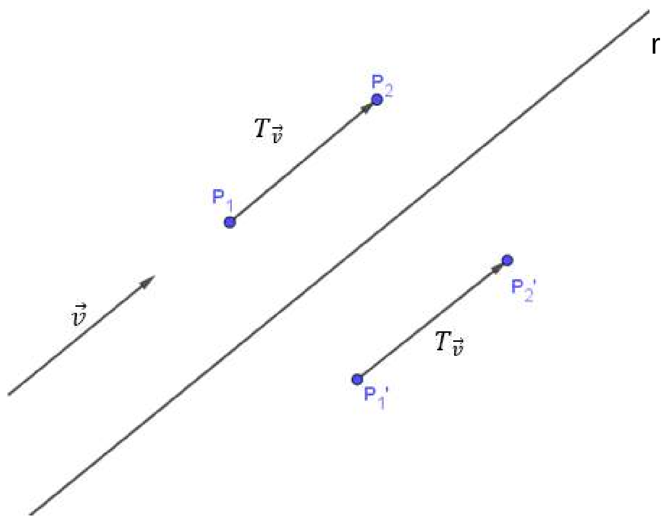


Figura 7: Representação da reflexão deslizante D, definida pela reta r e pelo vetor $\vec{v}$.

Se não houver paralelismo entre vetor ($\vec{v}$) e eixo (r), as duas composições com ordens diferentes, originam resultados diferentes, como pode ser observado no exemplo da Figura 7A. Nesta, mostra-se o efeito da reflexão deslizante com vetor $\vec{v}$ e eixo r, quaisquer, sendo $D = T_{\vec{v}} \circ E_r$, mas $D \neq E_r \circ T_{\vec{v}}$.

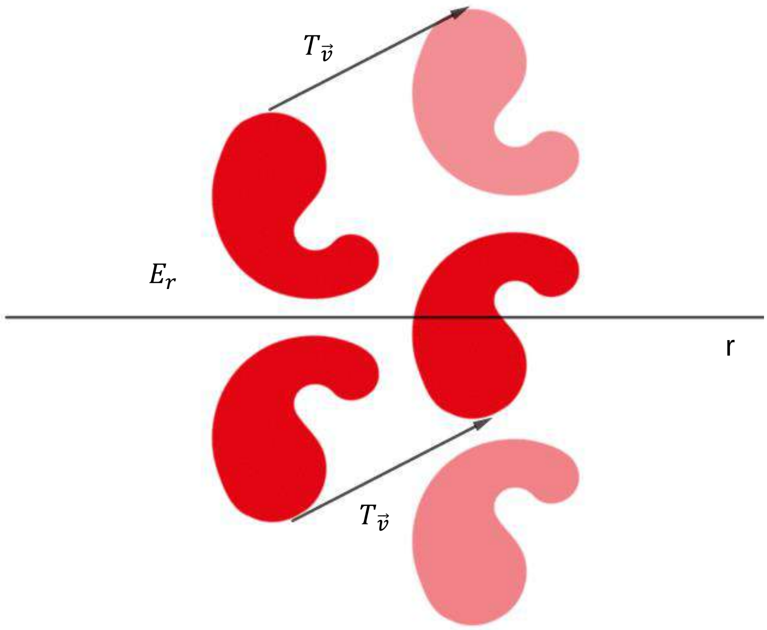


Figura 7A: Exemplo do efeito da reflexão deslizante em que eixo e vetor não são paralelos

De facto,

$$D_{r,\vec{v}} \circ \left(D_{r,\vec{v}}\right)^{-1} = E_r \circ T_{\vec{v}} \circ D_{r,-\vec{v}} = E_r \circ \overbrace{T_{\vec{v}} \circ T_{-\vec{v}}}^{I} \circ E_r = E_r^2 = I$$

$$\left(D_{r,\vec{v}}\right)^{-1} = D_{r,-\vec{v}}$$

3.4 Transformações geométricas no espaço

Todas as transformações que serão consideradas, são de facto, transformações no espaço, mas sempre restritas a um plano π. Em particular, repare-se que no espaço, uma rotação realiza-se em torno de um eixo e uma reflexão é relativa a um plano (“espelho”). Assim, se todos os pontos da figura pertencem ao plano π e as seguintes condições têm de ser satisfeitas:

- para uma homotetia também o cento O pertence ao plano π ;
- para uma translação, o vetor é paralelo ao plano π ;
- para uma rotação de eixo R ou uma reflexão de plano ε, R ou ε são perpendiculares a π e o intersetam no ponto O, centro de rotação “ no plano “π ou, respetivamente, na reta r, eixo da reflexão “no plano”.

3.5. Simetrias

Quando a imagem de uma figura, através de uma isometria diferente da identidade, coincide com a figura original, então a figura tem simetria. Existem quatro tipos de simetria: simetria de reflexão, de rotação, de translação e de reflexão deslizante.

As rosáceas, os frisos e os padrões constituem as três classes de figuras planas com simetria.

3.5.1. Rosáceas

Definição de rosácea (Veloso, 2012, p. 75): diz-se rosácea toda a figura plana cujo conjunto de simetrias é finito. Uma rosácea apresenta as características seguintes:

- só possui simetrias de rotação ou de reflexão;

e, caso haja:

- para todas as simetrias de rotação há um único o centro de rotação, O.
- todos os eixos de simetria de reflexão, passam por O.

Há apenas dois tipos de rosáceas: cíclicas e diedrais. O conjunto de simetrias destas rosáceas, indicam-se respetivamente por C_n e D_n.

Uma rosácea cíclica (C_n) admite apenas n simetrias de rotação distintas. Define-se grau de uma simetria de rotação $R \in C_n$, como o mínimo valor natural, $g \in \mathbb{N}$, tal que R

repetido g vezes, é igual à identidade, isto é, $R^g = I$ .Em particular, existe sempre em C_n uma simetria de rotação R, de grau n, tal que $C_n = \{R^i : i = 0, \dots, n-1\}$ com $R = I$. Geralmente, escolhe-se $R = R_{0, \frac{360}{n}}$.

Na Figura 8 apresentamos uma rosácea cíclica, do tipo, C_6.

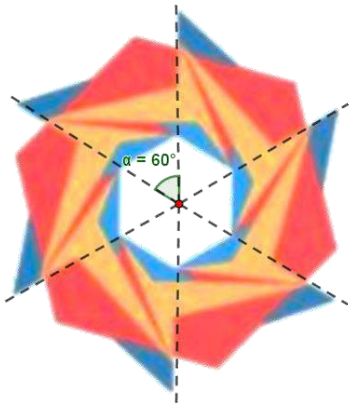


Figura 8: Exemplo de uma Rosácea cíclica

Uma rosácea diz-se diedral (D_n) quando tem pelo menos uma simetria de reflexão. Neste caso terá o mesmo número simetrias de reflexão e de simetrias de rotação. Na Figura 9, trata-se de uma rosácea diedral ,do tipo D_3, com centro de rotação O, a vermelho com simetrias de rotação de $0°, 120°$ e $240°$ com eixos assinalados a azul.

Em particular $D_3 = \{R^0, R^1, R^2, E_a, E_b, E_c\}$, onde $R = R_{0,120°}$, como foi referido anteriormente.

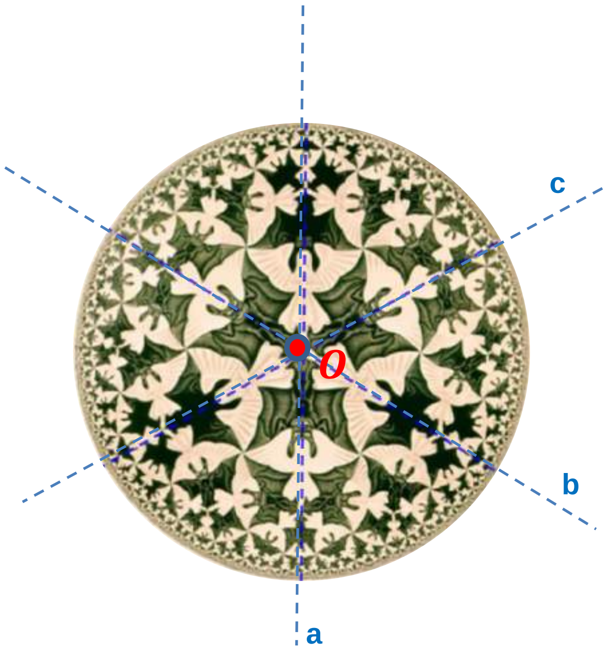


Figura 9: Exemplo de uma Rosácea diedral

3.5.2. Frisos

Definição de friso (Veloso, 2012, p. 75) - Diz-se friso qualquer figura plana cujo conjunto de simetrias verifique a seguinte condição:

- existe uma simetria de translação $\boldsymbol{T}$ (de vetor $\vec{v}$ com módulo $\neq \mathbf{0}$), tal que todas as simetrias de translação da figura são potências de expoente inteiro de $\boldsymbol{T}$.

Daqui resulta que as simetrias de translação de um friso têm uma única direção. Simplificando, vamos supor que essa direção é horizontal e, na prática, todos os frisos que encontraremos estarão "limitados" na direção vertical.

Num friso, além das simetrias sempre presentes de translação, podem existir ainda (e apenas) as seguintes simetrias:

a) de reflexão: com eixos perpendiculares ("verticais") ou paralelos ("horizontais") ao vetor $\vec{v}$.
b) de reflexão deslizante: com eixos paralelos ao vetor $\vec{v}$ e vetor $\vec{u} = \left(\frac{1}{2} + n\right)\vec{v}$ com $n \in \mathbb{Z}$.
c) de rotação: de ângulo 180º (meia volta);

Caso friso admita simetrias de reflexão "horizontal" ou deslizante e/ou de rotação então existe uma reta paralela a $\vec{v}$, o eixo central, que coincide com o eixo da reflexão e/ou contém os infinitos centros de rotação.

Existem apenas sete tipos de frisos que serão representados de forma gráfica a seguir.

I) $[\boldsymbol{T}]$ O primeiro tipo de frisos a considerar será aquele que apresenta apenas simetrias de translação. Por exemplo o da Figura 10, a que chamamos friso do tipo $[T]$, por conter apenas simetrias de translação.

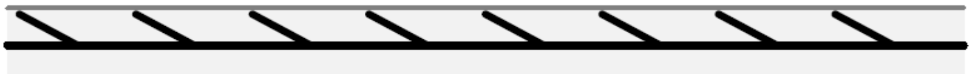


Figura 10 – Friso que apresenta apenas simetria de translação

II) $[\boldsymbol{TV}]$ Simetria de reflexão de eixos verticais $[V]$. Para além das simetrias de translação, apresenta apenas, simetrias de reflexão de eixos verticais em número infinito. Dois eixos consecutivos distam entre si metade do comprimento do vetor que defina a translação de módulo mínimo $\frac{1}{2}|\vec{v}|$, como se pode observar na Figura 11.

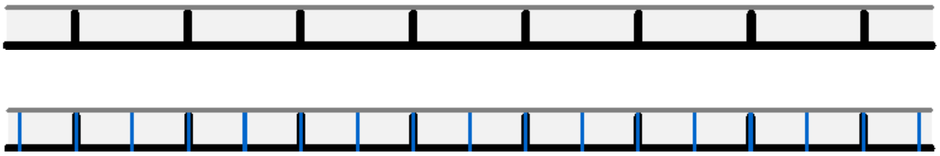


Figura 11 – Friso que apresenta simetria de translação associada a simetria de reflexão de eixos verticais (a azul)

III) $[TH]$ Simetria de reflexão cujo eixo é a reta m $[H]$. Para além das simetrias de translação, o friso apresenta apenas uma simetria de reflexão horizontal, cujo eixo é a reta m central do friso, como pode ser observado na Figura 12. Alguns autores consideram também uma simetria de reflexão deslizante que, no entanto, é trivial, não acrescentado nada de novo ao friso.

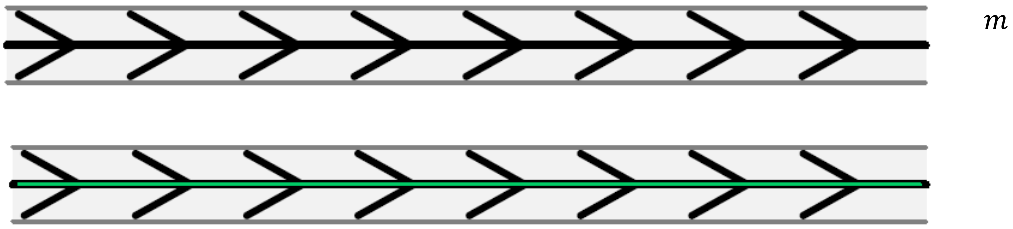


Figura 12 – Friso que apresenta simetria de translação associada a simetria de reflexão de eixos horizontal (a verde)

IV) $[TD]$ Simetria de reflexão deslizante $[D]$. Este tipo de friso admite, além das simetrias de translação, simetrias de reflexão deslizante, em número infinito. O eixo destas simetrias de reflexão deslizante é o eixo central, horizontal, do friso, a reta m. Os vetores que definem as translações destas reflexões deslizantes são metade dos múltiplos ímpares de $\vec{v}$. A Figura 13, ilustra um friso deste tipo $[D]$.

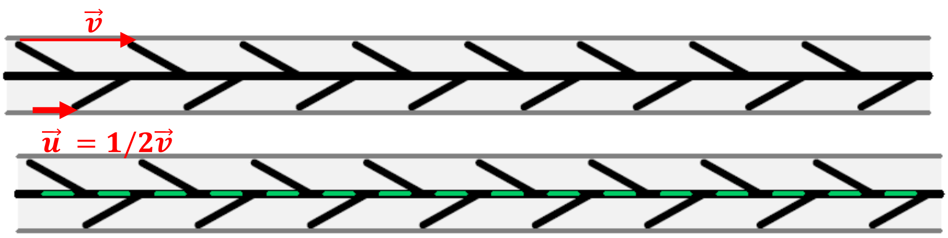


Figura 13 – Friso que apresenta simetria de reflexão deslizante (eixo central a verde).

V) Neste caso, à simetria de translação acrescenta-se a simetria de rotação, obtendo o friso da Figura 14, $[R]$.

$[\boldsymbol{TR}]$

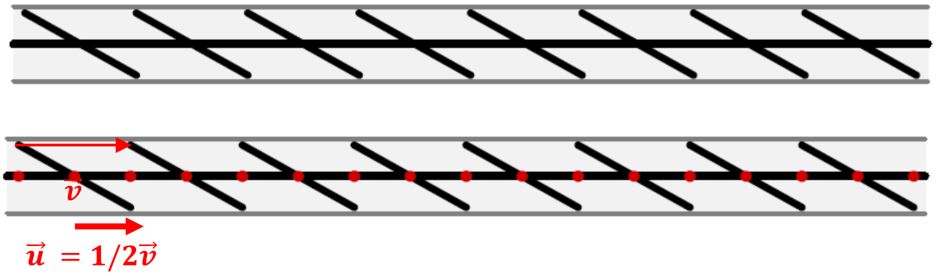


Figura 14 – Friso que apresenta simetria de translação associada a simetria de meia-volta (centros de rotação assinalados a vermelho).

VI) Este tipo de friso conjuga simetrias de translação, simetrias de reflexão de eixos verticais, simetria de meia-volta e simetria de reflexão horizontal $[RVH]$ Ver Figura 15.

$[\boldsymbol{TRVH}]$

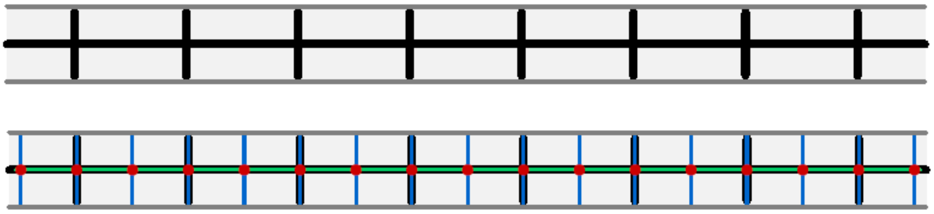


Figura 15 – Friso que apresenta associadas simetria de translação, a simetria de reflexão de eixos verticais, simetria de meia-volta e simetria de reflexão horizontal

VII) Este tipo de friso conjuga simetrias de translação, simetrias de reflexão de eixos verticais, simetria de meia-volta e simetria de reflexão deslizante $[RVD]$ Ver Figura 16.

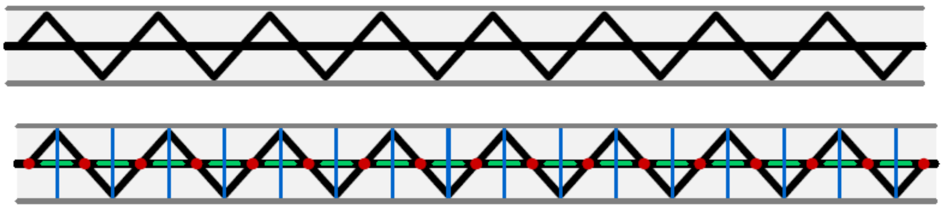


Figura 16 – Friso que apresenta associadas simetria de translação, a simetria de reflexão de eixos verticais, simetria de meia-volta e simetria de reflexão deslizante.

Repare-se que a distância entre eixos verticais e entre centros de rotação é sempre $\frac{1}{2}|\vec{v}|$, mas neste caso, os eixos verticais não passam pelos centros de rotação.

3.5.3. Padrões

Do ponto de vista intuitivo, consideramos padrão a figura que se estende a todo o plano, por uma estrutura padronizada de repetição, nas duas direções. Embora também sejam designados por papéis de parede e padrões periódicos.

Definição de padrões (Veloso, 2012, p. 113): figuras cujas simetrias de translação são composições da forma $T_1^n \circ T_2^m$ (com m e n expoentes inteiros) de duas simetrias de translação T_1 e T_2 com direções diferentes (e em que nenhuma das translações é a identidade).

Existem exatamente dezassete diferentes combinações de simetrias, isto é, dezassete tipos de padrões, que originam as chamadas pavimentações regulares (repetições periódicas de células poligonais que enchem o plano sem sobreposição). Os exemplos apresentados nas páginas seguintes mostram a estrutura dos padrões em relação às simetrias das células. O nome dos padrões é dado pela "notação cristalográfica".

As designações que podem ser usadas como simples nomes, dão mesmo assim algumas indicações:

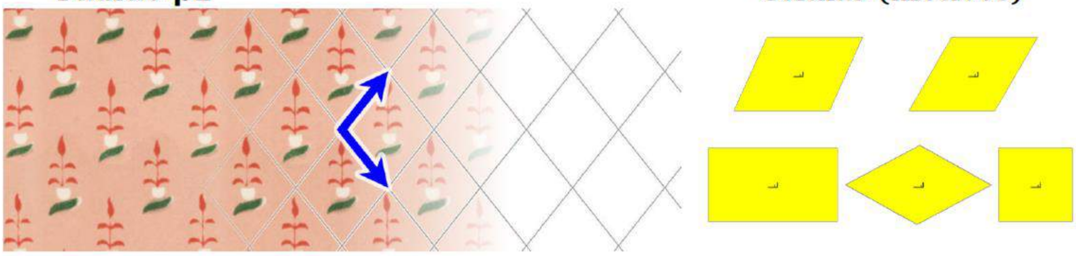
- um $\boldsymbol{m}$ (de mirror) significa que o padrão tem simetrias de reflexão;
- um $\boldsymbol{g}$ (de glide) significa que o padrão tem reflexões deslizantes;
- um algarismo ($\mathbf{1, 2, 3, 4}$ **ou** $\mathbf{6}$) a seguir a $\boldsymbol{p}$, indica o maior grau de simetria de rotação no padrão.

Legenda

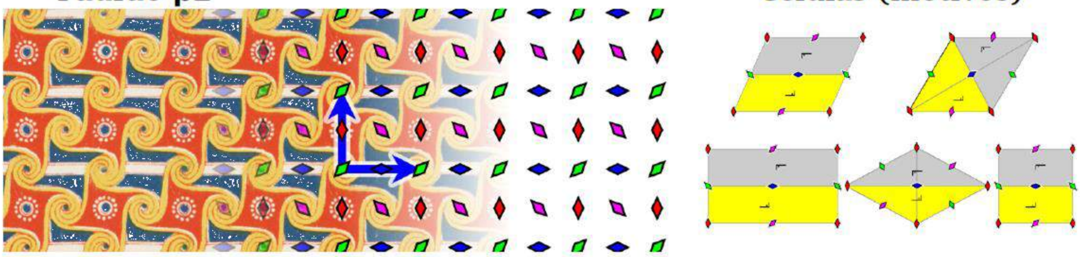
Rotação de 180° | Rotação de 120° | Rotação de 90° | Rotação de 60°

Eixo de reflexão | Eixo de reflexão deslizante

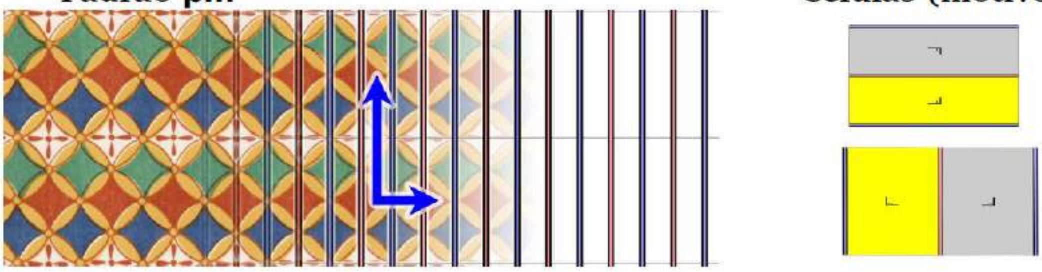
Padrão p1 — **Células (motivos)**



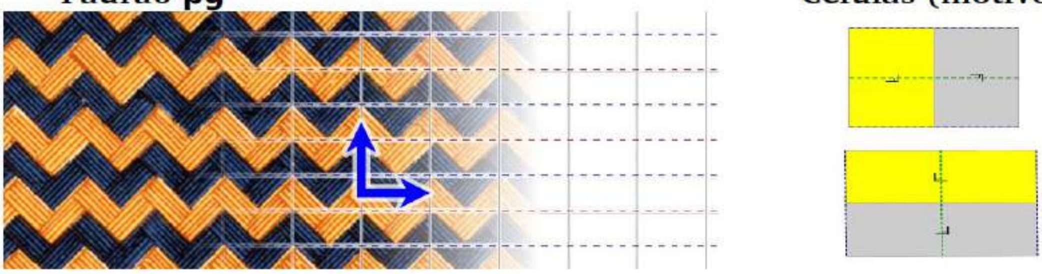
Padrão p2 — **Células (motivos)**



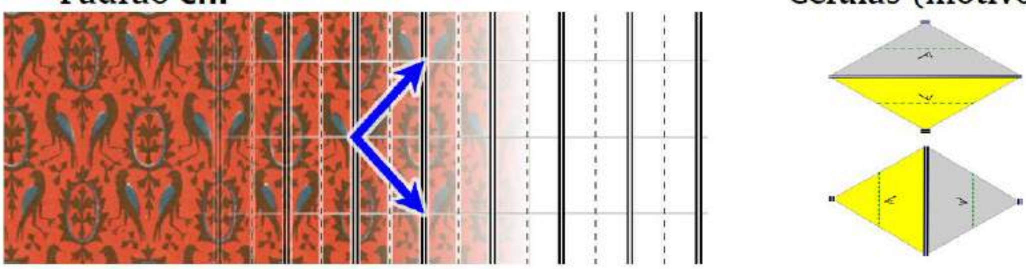
Padrão pm — **Células (motivos)**



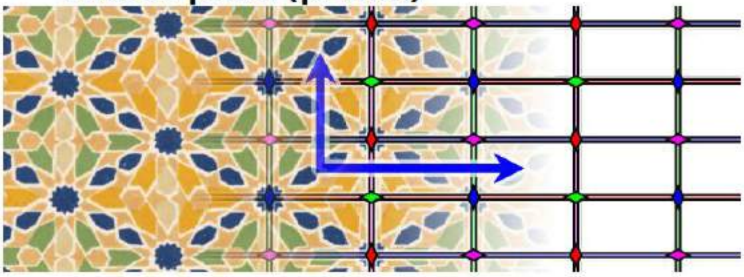
Padrão pg — **Células (motivos)**



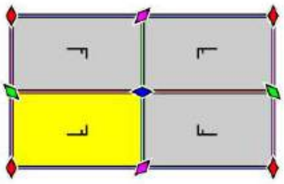
Padrão cm — **Células (motivos)**



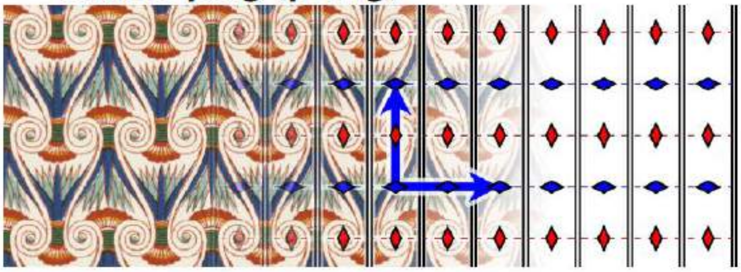
Padrão **pmm (p2mm)**



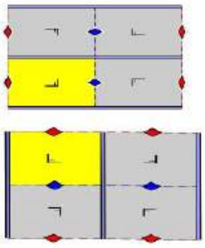
Célula (motivo)



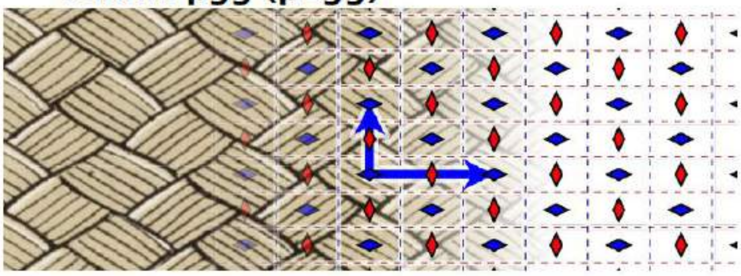
Padrão **pmg (p2mg)**



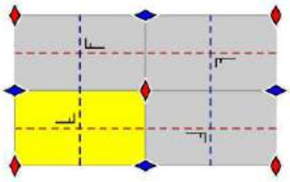
Células (motivos)



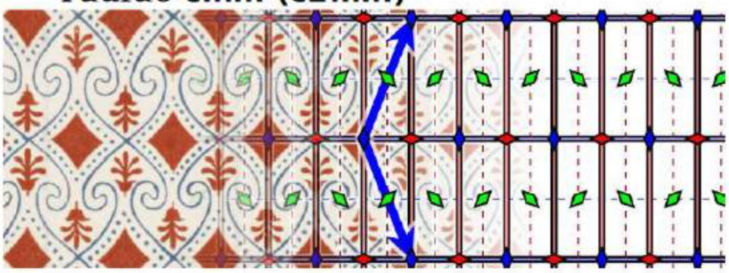
Padrão **pgg (p2gg)**



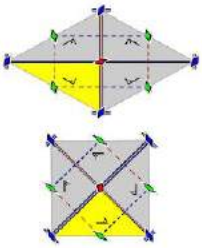
Célula (motivo)



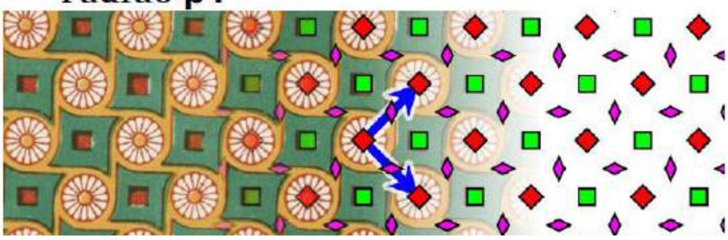
Padrão **cmm (c2mm)**



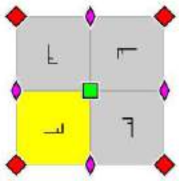
Células (motivos)



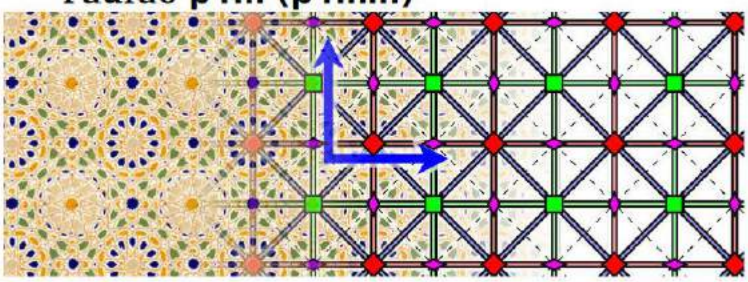
Padrão **p4**



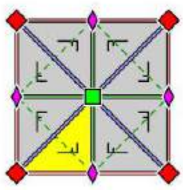
Célula (motivo)



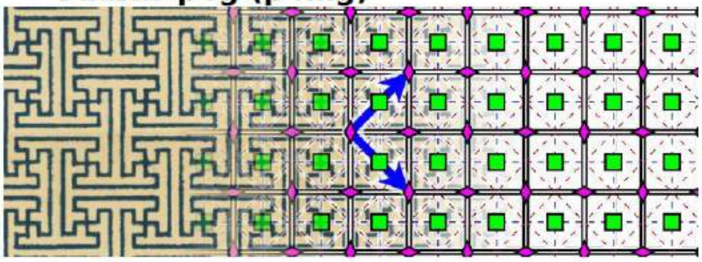
Padrão **p4m (p4mm)**



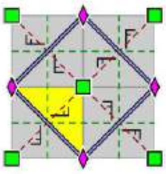
Célula (motivo)



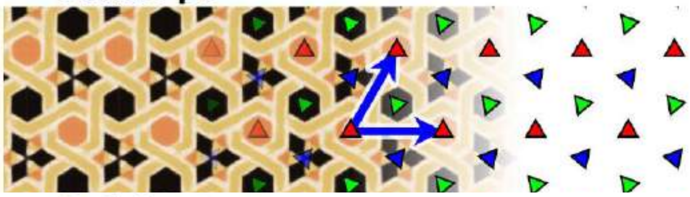
Padrão **p4g (p4mg)**



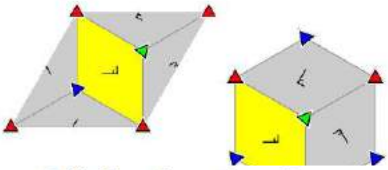
Célula (motivo)



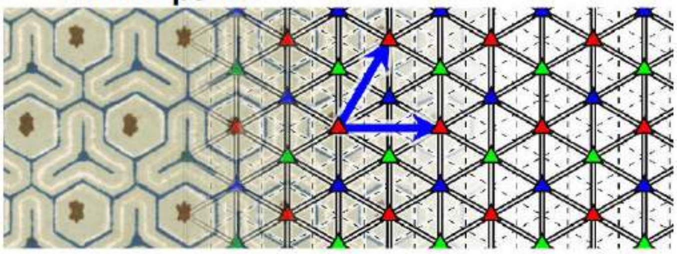
Padrão **p3**



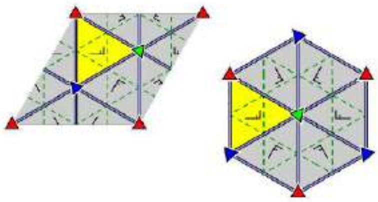
Células (motivos)



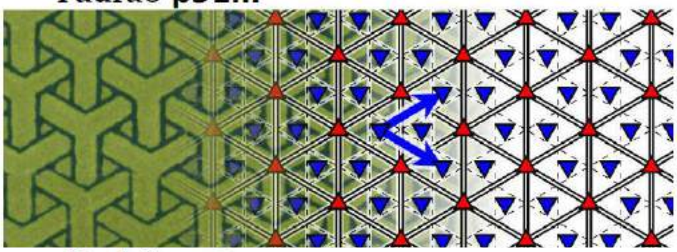
Padrão **p3m1**



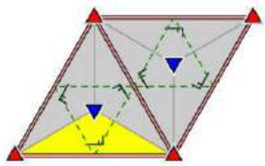
Células (motivos)



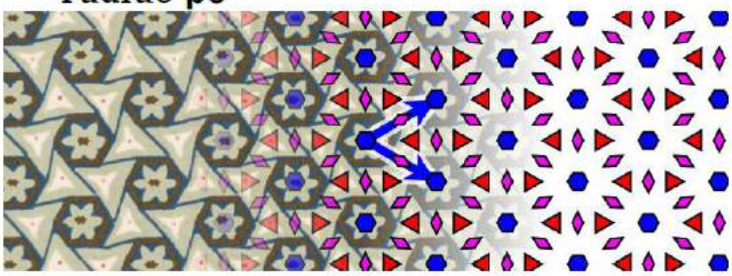
Padrão **p31m**



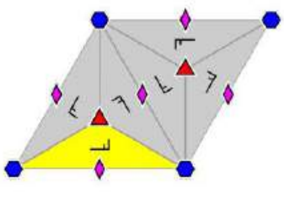
Célula (motivo)



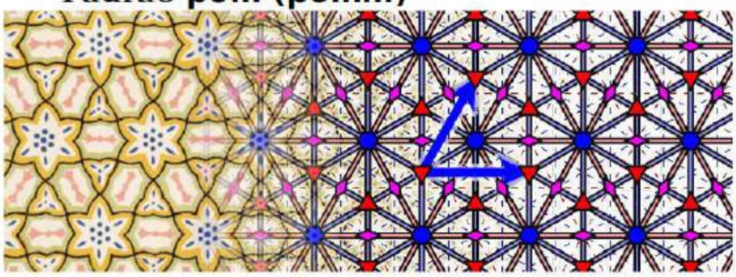
Padrão **p6**



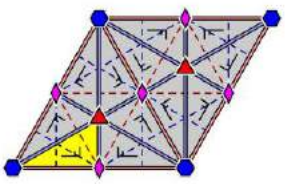
Célula (motivo)



Padrão **p6m (p6mm)**



Célula (motivo)



4. Curvas e superfícies no espaço

Na construção e decoração dos modelos de guarda-joias estudados procedeu-se ao desenho de curvas e de superfícies parametrizadas no GeoGebra. Foram também efetuadas translações, reflexões e rotações de curvas e de superfícies, respeitando a singularidade de cada guarda-joias.

Nesta secção, serão abordados os conceitos teóricos que a norteiam.

Uma parametrização de uma curva é uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3$, enquanto a parametrização de uma superfície é uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$.

Ao longo deste trabalho foram utilizadas coordenadas cartesianas e coordenadas cilíndricas.

4.1. Mudança de coordenadas

A escolha de um sistema de coordenadas, no plano ou no espaço, de acordo com o problema que pretendemos resolver, é um passo fundamental na obtenção da solução do problema.

Os pontos do plano podem ser referenciados usando coordenadas cartesianas, coordenadas polares ou outro tipo de coordenadas. Quando a região apresenta alguma simetria, a representação em pontos das coordenadas polares pode ser vantajosa, como se verá mais à frente nesta dissertação.

No espaço, também há muitos tipos de coordenadas, mas as mais habituais, além das coordenadas cartesianas (x, y, z) são as coordenadas cilíndricas e as coordenadas esféricas.

As coordenadas cilíndricas podem ser úteis em alguns casos, quando as figuras têm simetria em relação a um eixo. Ver Figura 17.

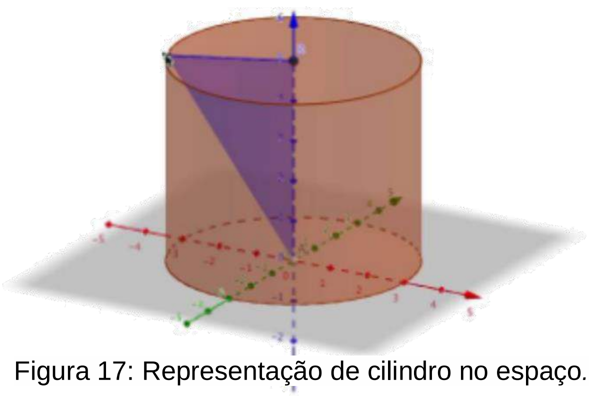


Figura 17: Representação de cilindro no espaço.

4.1.1. Coordenadas no plano

Estas coordenadas são mais úteis do que as coordenadas cartesianas e, como iremos ver, podem poupar muito trabalho de cálculo.

Ao considerarmos um ponto P no plano, podemos projetar o ponto P nos dois eixos e dizemos que as coordenadas cartesianas de P são x_P e y_P: $P(x_P, y_P)$.

As coordenadas polares de um ponto P no plano são, r, que representa a distância do ponto à origem e θ, que é o ângulo formado pelo eixo positivo x e pela semirreta que vai da origem até ao ponto P. No caso especial de $r = 1$, θ é exatamente o ângulo que corresponde ao ponto P no círculo trigonométrico (Carvalho e Descalço, 2016).

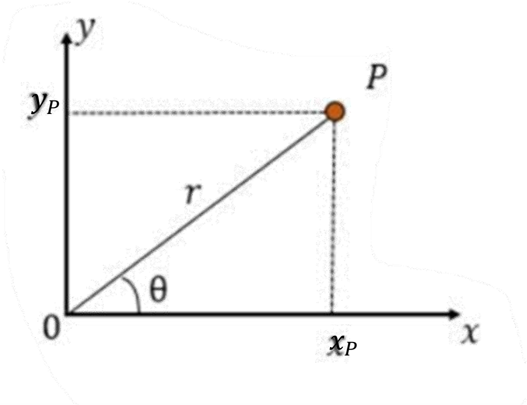


Figura 18 – Representação de r e de θ no plano cartesiano.

Na Figura 18, estão representadas, na mesma figura, as coordenadas cartesianas x_P e y_P de P e as coordenadas polares r e θ de P.

Assim tiramos as seguintes relações:

$$\begin{cases} x = r\,cos(\theta) \\ y = r\,sin(\theta) \end{cases}$$

Um exemplo de um conjunto, cuja descrição fica mais simples em coordenadas polares é o seguinte. Ao considerarmos duas circunferências, com o mesmo centro, uma de raio igual a um ($r = 1$) e outra de raio igual a três ($r = 3$), o conjunto dos pontos (conjunto D) que se encontram entre as duas circunferências e as duas semirretas com ângulos $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{3}$ é ilustrado na Figura 19.

O conjunto desses pontos (conjunto D) descreve-se facilmente, da seguinte forma:

$$D = \left\{\left(r\cos(\theta), r\,sin\,(\theta)\right) : 1 \leq r \leq 3, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\right\}$$

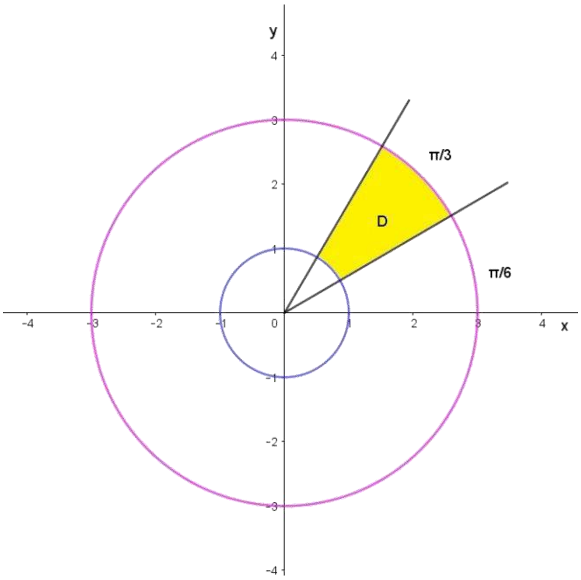


Figura 19 – O conjunto de pontos pertencentes a *D* encontra-se a amarelo

4.1.2. Coordenadas no espaço

As coordenadas cilíndricas, estão relacionadas com as coordenadas polares.

Dado um ponto P de coordenadas (x, y, z), consideramos as coordenadas polares r e θ que correspondem às coordenadas x e y, no plano, e como explicado na secção anterior, dizemos que as coordenadas cilíndricas de P são (r, θ, z).

As coordenadas cilíndricas são mais apropriadas do que as cartesianas para descrever alguns sólidos. Por exemplo, se considerarmos apenas o semicilindro (*E*), ver Figura 20, em que todos os pontos têm coordenadas y não negativas, ou seja, têm coordenadas cartesianas, $x \in [-1,1]$; $y \in \left[0, \sqrt{1 - x^2}\right]$ e $z \in [0, 2]$ e em coordenadas cilíndricas, é descrito como,

$$E = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq 2 \; e \; 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

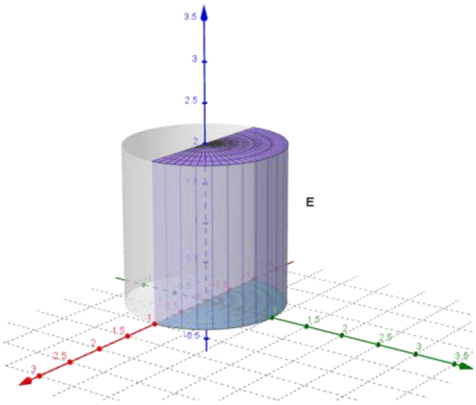


Figura 20: Metade do cilindro, em coordenadas cilíndricas a azul.

4.2. Curvas parametrizadas

Quando nos referimos a curvas, na nossa vida quotidiana, todos temos uma ideia, pelo menos intuitiva, do tipo de objetos de que estamos a falar. Uma reta e uma circunferência, por exemplo, são curvas.

As curvas representadas na Figura 21, são definidas pelas equações $y - 3x = -1$, $x^2 + y^2 = 1$ e $y - \sin x = 0$, respetivamente, que são equações cartesianas da forma $f(x,y) = c$, onde f é uma função de duas variáveis, $x, y, e\ c$ é uma constante. Uma curva plana é um conjunto de pontos, que pode ser representado, na forma:

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\}.$$

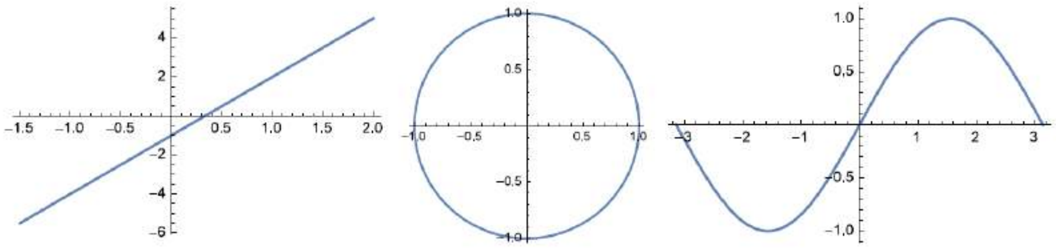


Figura 21: Reta, Circunferência e gráfico da função $y = sin\, x$

Em $\mathbb{R}^3$, uma curva pode ser definida por duas equações (interseção de duas superfícies):

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = c_1 \\ f_2(x,y,z) = c_2 \end{cases}$$

em que, c_1 e c_2 são constantes.

Por exemplo, o eixo dos xx, em $\mathbb{R}^3$, é o conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z = 0\},$$

e o conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 1, z = 2\}$$

é uma circunferência, que resulta da interseção da superfície cilíndrica de equação $x^2 + y^2 = 1$ com o plano de equação $z = 2$.

Uma curva no espaço pode ser representada pelo conjunto de pontos de uma função vetorial $\vec{r}\,(t)$ não constante em todo o seu domínio.

Recorde-se que, dados dois pontos no plano $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, a reta por eles definida pode ser descrita pelas suas equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = a_1 + t(b_1 - a_1) \\ y = a_2 + t(b_2 - a_2) \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

e a circunferência de centro no ponto (c_1, c_2) e raio r é definida pelas equações paramétricas (descrição do movimento circular uniforme, mas a função em si é a circunferência):

$$\begin{cases} x = c_1 + r\cos t \\ y = c_2 + r\sin t \end{cases} \qquad , t \in [0, 2\pi]$$

onde t é chamado o *parâmetro*. Estas equações definem sentidos para as curvas: a reta é traçada no sentido de A para B e a circunferência é descrita no sentido anti-horário, de acordo com o crescimento de t.

Vamos estender esta ideia a qualquer curva.

Definição. Uma *curva parametrizada* é uma função vetorial contínua, de uma variável,

$$\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$t \to \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \qquad (1.1)$$

A variável independente t diz-se o *parâmetro*. O contradomínio da função γ é a curva C, ou seja, é o conjunto

$$C = \{((x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3 : t \in I\}. \qquad (1.2)$$

Cada valor de t determina, portanto, um ponto no contradomínio da função γ. Na linguagem corrente chamamos curva tanto à função γ definida em (1.1) como à sua imagem C definida em (1.2) e, neste caso, a função vetorial γ também se diz uma *parametrização* de C. A mesma curva pode ser contradomínio de curvas parametrizadas diferentes, tal com acontece para funções simples de funções reais de uma função, pense-se, por exemplo, nas funções de expressão x e x^3, diferentes mas com a mesma imagem). Portanto, tal como as funções, podemos ter o mesmo traço gerado por funções diferentes.

Frequentemente, em vez de escrever $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, escreve-se apenas,

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad t \in I \subseteq \mathbb{R} \\ z = z(t) \end{cases}$$

para transmitir que as coordenadas x, y e z são funções de t.

4.3. Superfícies Parametrizadas

Uma superfície, pode ser definida por uma equação do tipo $f(x, y, z) = 0$. Por exemplo, a equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ define uma superfície esférica de raio 1 e centro na origem. No entanto, neste trabalho, é útil a definição de superfícies utilizando parametrizações.

À semelhança do que fizemos para as curvas, vamos definir *superfície parametrizada* distinguindo-a da sua imagem, a superfície geométrica. Uma *superfície parametrizada* é uma função vetorial de duas variáveis.

Definição. *Uma superfície parametrizada* é uma função vetorial contínua

$$\sigma: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \; \sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

O contradomínio da superfície parametrizada, é o que, na linguagem corrente normalmente designamos por superfície. Dizemos, neste caso, que σ é uma parametrização para a superfície S, mas repare-se que pode haver parametrizações diferentes que correspondem à mesma superfície. A posição de cada ponto $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ em S é determinada pelos valores dos parâmetros u e v. Assim, um ponto P_0 de $\mathbb{R}^3$ pertence à superfície S se existem valores dos parâmetros u_0 e v_0 tais que $P_0 = \sigma(u_0, v_0)$.

PARTE II – Descrições e modelos de guarda-joias

Esta segunda parte será dedicada à descrição dos guarda-joias e dos modelos matemáticos aqui trabalhados. Todas as peças são, de cariz utilitário, essencialmente decorativas, servindo, portanto, como guarda-joias, construídos entre a décadas 80 a 90, século XX. Dos inúmeros guarda-joias doados pelo Eng.º Joaquim Domingos Capela à Universidade de Aveiro desde 2013, serão aqui apresentados treze dessa coleção.

Todas as descrições apresentam uma página bilingue, que corresponde à cópia da página destinada a acompanhar cada peça no museu.

As peças foram, todas elas modeladas matematicamente, recorrendo ao software de matemática GeoGebra, usando as suas medidas reais e reproduzindo, o mais fiel possível, o seu interior e o seu exterior.

A construção tridimensional dos guarda-joias, no GeoGebra, é dinâmica e simula a sua abertura.

5. Guarda-joias cuja abertura se dá por rotação da tampa

Neste capítulo, serão apresentados os guarda-joias que têm como característica comum, o facto da abertura se realizar com uma das peças que tem o papel de tampa, isto é, a abertura é feita por rotação da tampa relativamente ao cofre. São eles o *Tapete, Arte, Harmonia, Baco e Baú.*

5.1.Tapete / Mat

MusA-267
1980 (década / *decade*)
12,5 x 8,8 x 3,7 cm
(comp.x largura x altura/ LxWXH)
madeira / *wood*

Este guarda-joias é uma peça manufaturada, construída em madeira, e folheada a pau-santo. O autor designou-a por *Tapete*, dada a riqueza na decoração da sua tampa. A tampa encontra-se ricamente adornada com motivos de elos e cruzes em filetes de buxo e orlada com folha de ébano fazendo lembrar um tapete.

Geometricamente, é constituído por duas partes, cofre e tampa. Juntas correspondem a um sólido que é um paralelepípedo reto (oco) seccionado por um plano paralelo às bases, o que define a tampa e o cofre. Um par de dobradiças em latão, também manufaturadas pelo autor, permitem a abertura do guarda-joias até uma amplitude de 180º. A parte utilitária da peça corresponde ao interior do guarda-joias, que pode ser considerado como um paralelepípedo vazio.

This jewellery box is a handmade piece, made of wood and veneered in rosewood. The author called it "Tapete " (Mat), given the rich decoration of its cover, which is richly decorated with motifs of links and crosses in boxwood fillets and edged with ebony leaf, reminiscent of a carpet.

Geometrically, it consists of two parts, the vault and the lid. Together they correspond to a solid, which is a straight parallelepiped (hollow), sectioned by a plane parallel to the bases, that defines the lid and the vault. A pair of brass hinges, also manufactured by the author, allow the jewellery box to open up to a range of 180º. The useful part of the piece corresponds to the inside of the jewellery box, which can be considered an hollow parallelepiped.

5.1.1. Descrição detalhada

Este guarda-joias, é um paralelepípedo reto (oco), apresentando 12,5 cm de comprimento, 8,8 cm de largura e 3,7 cm de altura. A parte utilitária da peça, revestida a veludo vermelho, corresponde ao interior do guarda-joias, que pode ser considerado como um paralelepípedo vazio, tem 10,5 cm de comprimento, 6,8 cm de largura e 2,7 cm de altura (https://www.geogebra.org/m/c2fzvggg).

O volume do paralelepípedo interior oco, parte utilitária da peça apresenta um valor aproximado de 193 cm^3.

As Figuras 1 e 2 apresentam algumas imagens fotográficas do guarda-joias em diferentes vistas.

Figura 1: Vista exterior superior *Tapete*.

Figura 2: *Tapete* fechado: vista lateral posterior(A) e frontal (B); T*apete* aberto (C).

Na Figura 3 podemos observar a peça modelada matematicamente recorrendo ao software de matemática dinâmica GeoGebra.

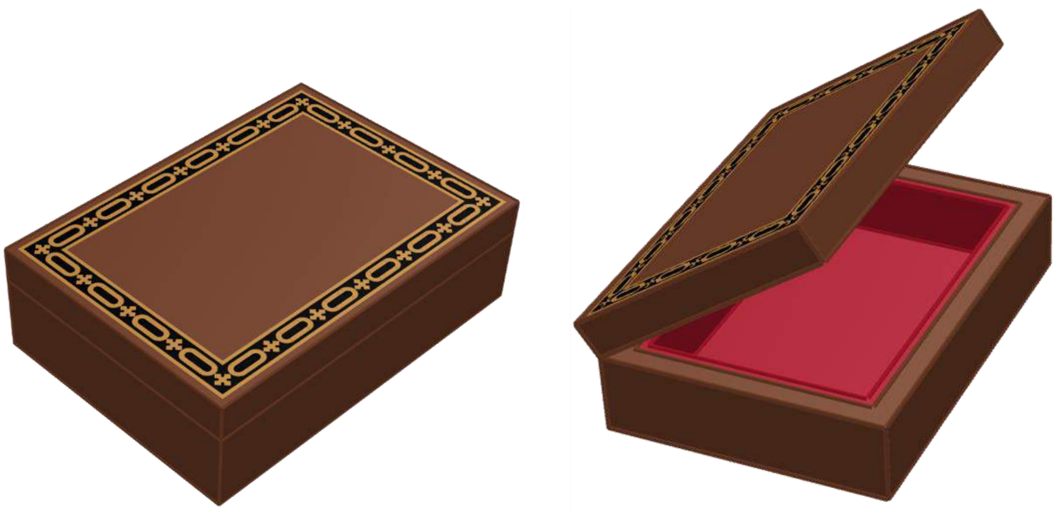


Figura 3: Representação do guarda-joias *Tapete*, usando o GeoGebra

5.1.2. Simetrias na construção e na decoração

Este guarda-joias possui simetria de construção, sendo de referir, simetrias de reflexão e de rotação. Numa vista inferior exterior, ou vista superior exterior apresenta simetrias diedrais do tipo D_2, admitindo dois eixos de reflexão. As faces do *Tapete* (retângulos) são também simetrias diedrais, do tipo D_2.

A nível decorativo o guarda-joias possui estrutura matemática., apresentando uma simetria translacional dos frisos na superfície superior da tampa. Há uma repetição periódica dos motivos ("elo"+"cruz").
Analisando cada parte de friso, reconhecemos diferentes tipos de simetria: simetria de reflexão (eixo vertical e horizontal), simetria de translação ("elo/cruz") e simetria do tipo D_2 (Figura 4).

Figura 4: Simetrias existentes em cada parte de friso

Os motivos apresentam simetria do tipo D_2 e D_4, respetivamente “elo” e “cruz”, centrado no centro das figuras e simetrias de reflexão vertical e horizontal, como pode ser observado na Figura 5.

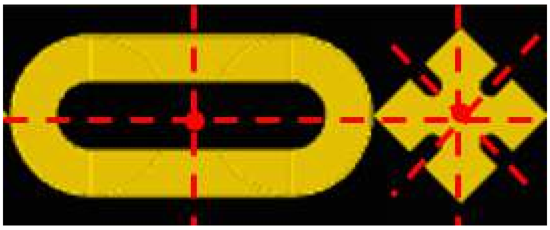


Figura 5: Simetrias nos motivos.

5.1.3. Modelo matemático usando GeoGebra

1. Tampa
   - Níveis na construção

   No GeoGebra, o padrão da tampa é construído por sobreposição, usando níveis (Figura 6).

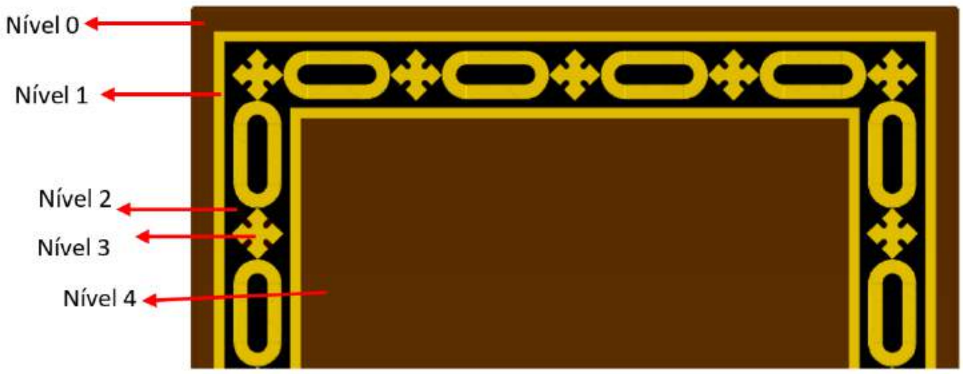


Figura 6: Níveis utilizados na decoração da tampa plana (vista superior).

2. Construção da cruz

Para obter as “cruzes” visíveis quer na parte do friso da tampa, constrói-se uma “cruz”, considerada a “original”, obtendo todas as outras por translações e por rotações, como se pode observar na Figura 7. Esta “cruz” consiste num quadrado ao qual é sobreposto um pequeno círculo e um pequeno retângulo, que por uma sequência de rotações vão criar o efeito de cruz. Na Figura 8 podemos observar uma fotografia da “cruz”, com as cores reais.

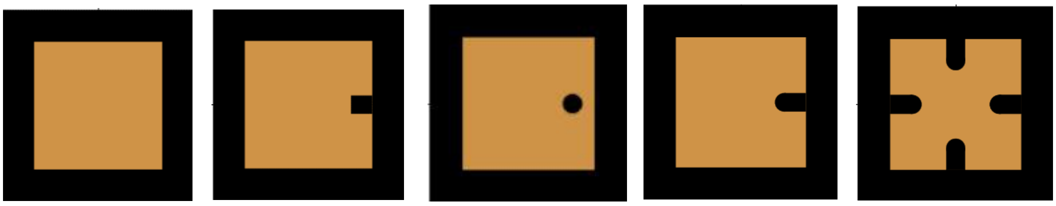


Figura 7: Construção da decoração “cruz” do guarda-joias *Tapete*
(cores aproximadas às reais)

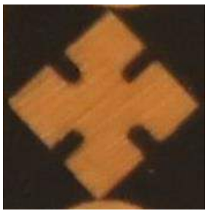
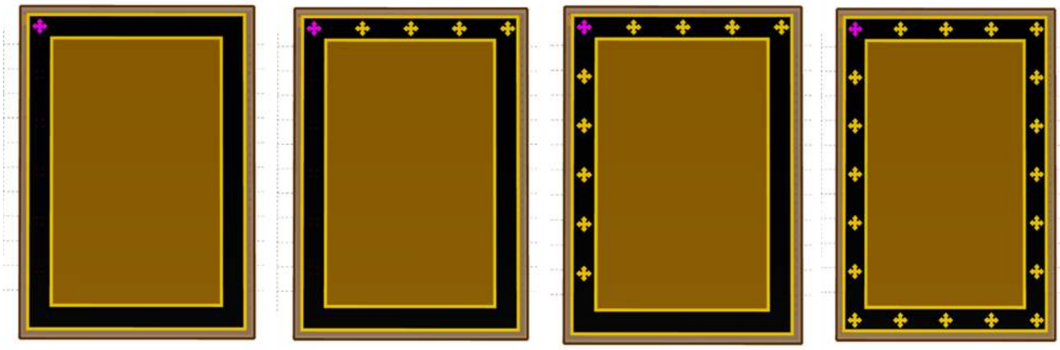


Figura 8: Fotografia com a “cruz” ampliada.

Após a construção de uma “cruz”, são feitas sequências de translações quer no sentido vertical quer no sentido horizontal por forma a completar o friso ao nível deste elemento decorativo (“cruz”, a lilás na Figura 9). De referir que a “cruz” é uma rosácea, com simetria de rotação (grau quatro) e de reflexão com quatro eixos diferentes.



(A) (B) (C) (D)

Figura 9: Construção sequencial da “cruz” decorativa

3. Construção do “elo”

Para a construção do “elo”, foram construídos quatro círculos, iguais dois a dois, e dois retângulos com dimensões diferentes, por forma a criar o efeito de “elo”. A sequência da construção do “elo” decorativo, pode ser observada na Figura 10.

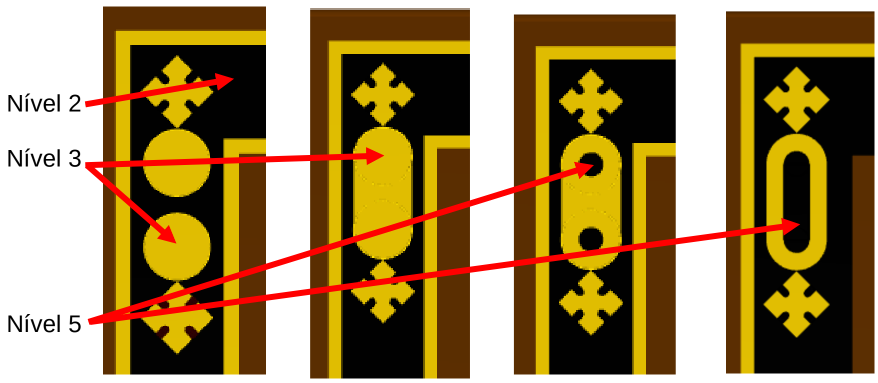


Figura 10: Construção sequencial do “elo” decorativo e respetivas ampliações da área assinalada a vermelho.

4. Construção por repetição de dois lados perpendiculares entre si

- Rotação do “elo”

Com o “elo” construído numa direção, procedemos à sua rotação mediante um eixo vertical que passa pelo centro da “cruz” (ver Figura 11)

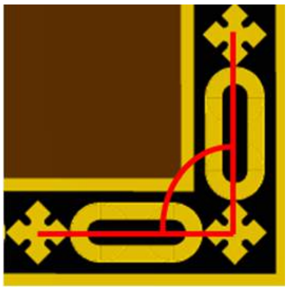


Figura 11: Rotação do “elo”.

- Translação do “elo “nas duas direções

Após a rotação “elo”, segue-se uma sequência de translações deste, garantindo que se encontre em cada uma das quatro partes de um friso (Figura 12).

Figura 12: Sequência de translações do “elo” decorativo.

5. Repetição do “elo “nos quatro lados

Por translação, obtemos a repetição dos “elos” nas partes de um friso (Figura 13).

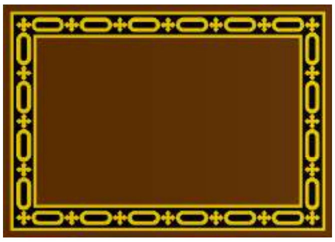


Figura 13: Translação dos “elos” decorativos nas quatro partes de um friso

5.2.Arte / Art

MusA-95
1980 (década / decade)
14,7 x 10 x 5 cm
(comp.x largura x altura/ LxWXH))
madeira / wood

Este guarda-joias é uma peça manufaturada, construída em madeira, folheada a ébano e orlada a mogno. O pau-ferro é usado para folhear as superfícies laterais e a tampa do paralelepípedo. Devido à sua beleza e arte aplicada, o autor designou-a por *Arte*.

Geometricamente, é constituído por duas partes, cofre e tampa. Juntas correspondem a um sólido que é um paralelepípedo reto (oco) seccionado por um plano paralelo às bases, o que determina a tampa e o cofre. Um par de dobradiças em latão, que também foram manufaturadas pelo autor, permitem a abertura do guarda-joias até uma amplitude de 180°. O interior do guarda-joias corresponde à parte utilitária da peça, que pode ser considerada como um paralelepípedo vazio.

This jewellery box is a handmade piece, made of wood, veneered in ebony and edged in mahogany. Ironwood is used to leaf the side surfaces and the lid of the parallelepiped. Due to its beauty and applied art, the author called it "Arte" (Art).

Geometrically, it consists of two parts, the vault and the lid. Together they correspond to a solid which is a rectangular parallelepiped (hollow) sectioned by a plane parallel to the bases, which determines the lid and the vault. A pair of brass hinges, which were also manufactured by the author, allow the jewellery box to be opened to a range of 180°. The interior of the jewellery box corresponds to the useful part of the piece, which can be considered as an hollow parallelepiped.

5.2.1. Descrição detalhada

Esta peça, é um paralelepípedo reto, apresentando 14,7 cm de comprimento, 10 cm de largura e 5 cm de altura. O paralelepípedo reto interior, oco, parte utilitária da peça, revestido a veludo verde-musgo, tem 12,5 cm de comprimento, 7,8 cm de largura e 3,6 cm de altura (https://www.geogebra.org/m/gqwp3evq).

O volume do paralelepípedo interior oco, parte utilitária da peça, apresenta um valor aproximado de 351 cm^3.

As Figuras 1 e 2 apresentam algumas imagens fotográficas do guarda-joias em diferentes vistas.

Figura 1: Vista exterior superior do *Arte*.

(A)

(B)

(C)

(D)

Figura 2: *Arte* fechado: vista lateral posterior(A), frontal (B) e lateral (C); *Arte* aberto(D).

Na Figura 3 podemos observar a peça modelada matematicamente recorrendo ao software de matemática dinâmica GeoGebra.

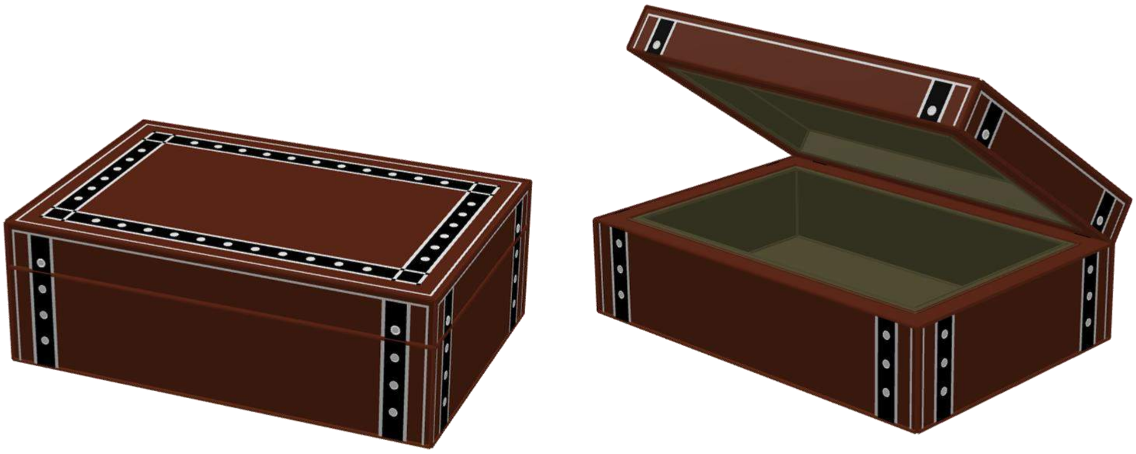


Figura 3: Representação do guarda-joias *Arte*, usando o GeoGebra

5.2.2. Simetrias na construção e na decoração

Este guarda-joias possui simetria de construção, sendo de referir, simetrias de reflexão e de rotação. Numa vista inferior exterior, ou vista superior exterior apresenta simetrias do tipo D_2 admitindo dois eixos de reflexão. As faces do *Arte* (retângulos) são também simetrias do tipo D_2.

A nível decorativo, possui estrutura matemática que foi preciso desvendar. A decoração presente superfície superior da tampa, pode ser interpretada como uma rosácea, com simetria do tipo D_2, ou quatro partes do mesmo friso, pois é de realçar, que há uma repetição periódica das circunferências dentro da parte do objeto que pode ser considerada como parte de um friso. Esta repetição periódica, mantém-se em todas as faces do guarda-joias, exceto na base. Analisando cada parte do friso, reconhecemos diferentes tipos de simetria: simetria de reflexão (eixo vertical e horizontal), simetria de translação e simetria de rotação (Figura 4).

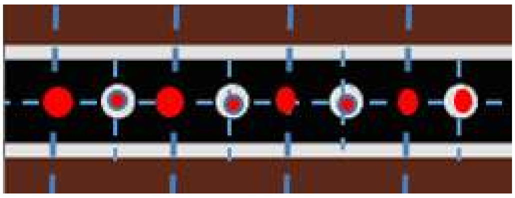


Figura 4: Simetrias existentes em cada parte de friso

À mesma distância, encontramos, onze circunferências na direção do comprimento da superfície superior da tampa (14,7 cm), seis, na direção da largura (10 cm) e cinco na direção da altura do guarda-joias (5 cm).

5.2.3. Modelo matemático usando GeoGebra

1. Tampa e laterais

- Níveis de construção

No GeoGebra, o padrão da tampa e das laterais, é construído usando níveis com sobreposição (Figura 5).

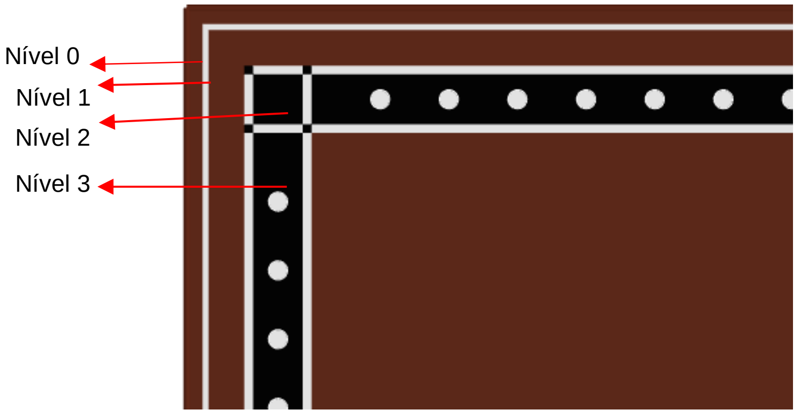


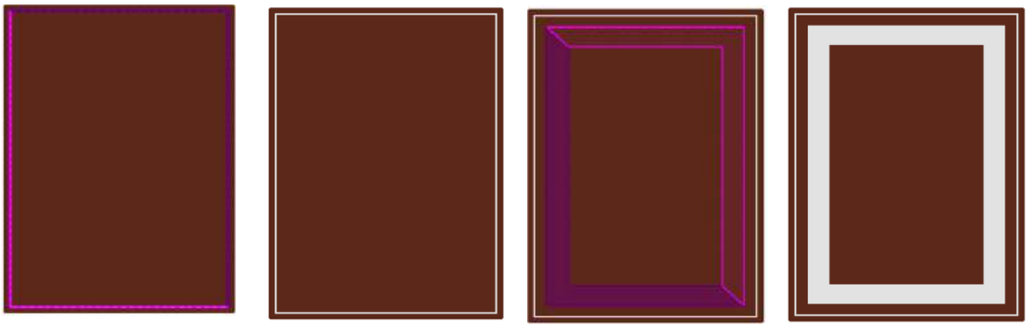
Figura 5: Níveis utilizados na decoração da tampa plana (vista superior).

Relativamente aos níveis de sobreposição na decoração deste guarda-joias, é de referir que, em virtude de termos construído hexágonos, que unidos nos dão a sensação de "abertura", foi possível reduzir o número de níveis que inicialmente seriam necessários (o que pode ser observado na Figura 6B).

2. Construção do friso

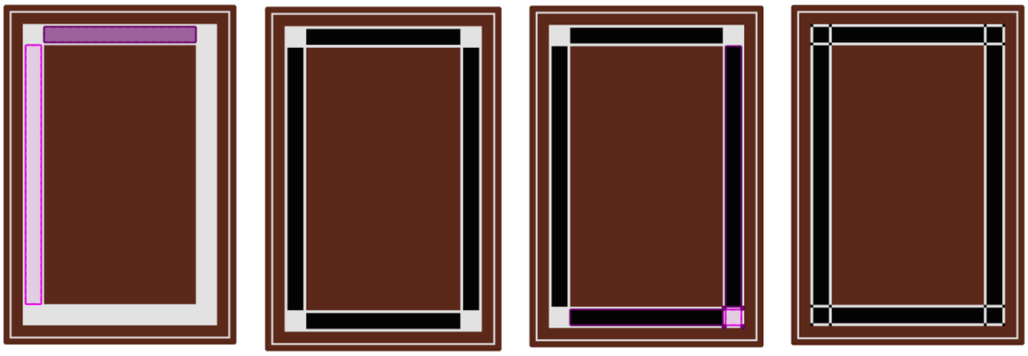
- Retângulos na tampa

Na modelação deste guarda-joias, o friso da tampa é construído por sobreposição de níveis. Iniciamos por construir quatro hexágonos, iguais dois a dois (Figura 6A e B). Os hexágonos de maior dimensão originam o bordo do friso que orla a tampa. Os hexágonos de menor dimensão constituem o bordo do friso decorativo pretendido (Figura 6B). Ainda na tampa, construímos dois retângulos de diferentes dimensões, perpendiculares entre si. Seguidamente faz-se a rotação de ambos (90^0), obtendo assim os quatro retângulos existentes no friso (Figura 6C). Constrói-se então, um quadrado compreendido entre os retângulos de diferentes dimensões. Através de translações e rotações (90^0), este quadrado, considerado o “original”, é repetido nos quatro “cantos” do friso decorativo. Nos vértices deste quadrado decorativo existe um minúsculo quadrado, pormenor, mas que dá à peça um toque de elegância. Este minúsculo quadrado é construído num dos vértices do quadrado original, após sequências de translações e de rotações decoramos toda a tampa da caixa (Figura 6D).



6A **6B**

Figura 6: A e B - Construção dos quatro hexágonos **(nível 1).**



6C **6D**

Figura 6C e 6D: Construção dos retângulos existentes no friso e dos quadrados **(nível 2).**

- Retângulos nas laterais

  Na modelação do friso das faces laterais, iniciamos por construir um octógono, na lateral pertencente à tampa e dois quadriláteros inferiores por forma a originar o bordo que orla o guarda-joias lateralmente (Figura 7).

Figura 7: Construção do friso lateral.

Posteriormente são construídos oito quadriláteros que constituem o bordo do friso decorativo pretendido (Figura 8). Segue-se o mesmo procedimento para a face lateral de menores dimensões. Com estas duas faces decoradas é feita da translação para a face lateral oposta.

Figura 8: Construção do bordo do friso lateral.

3. Construção das circunferências

Para obter as circunferências visíveis na parte do friso da tampa, constrói-se inicialmente uma, considerada a "original", obtendo-se todos as outras por reflexão/rotação e por translações, como se pode observar na Figura 9. Desta forma obtêm-se as circunferências decorativas da tampa quer no sentido vertical quer no sentido horizontal.

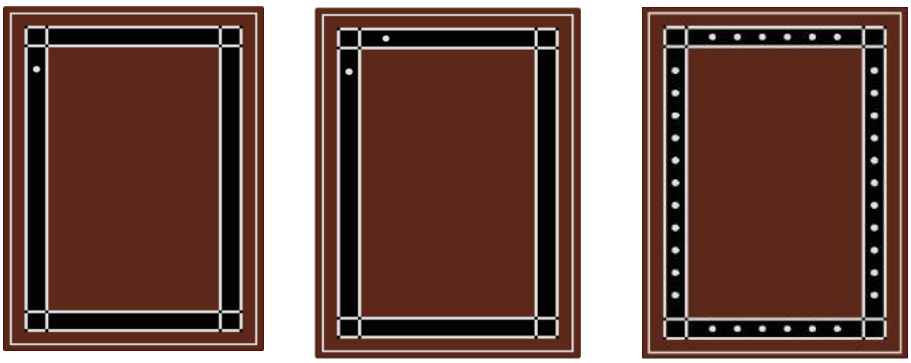


Figura 9: Construção das circunferências do guarda-joias *Arte.*

Para obter as circunferências visíveis na parte do friso das laterais, constrói-se inicialmente uma, considerada a “original”, obtendo-se todos as outras por translações numa face (Figura 10) e por rotações nas restantes faces. Desta forma obtêm-se as circunferências decorativas das quatro faces laterais.

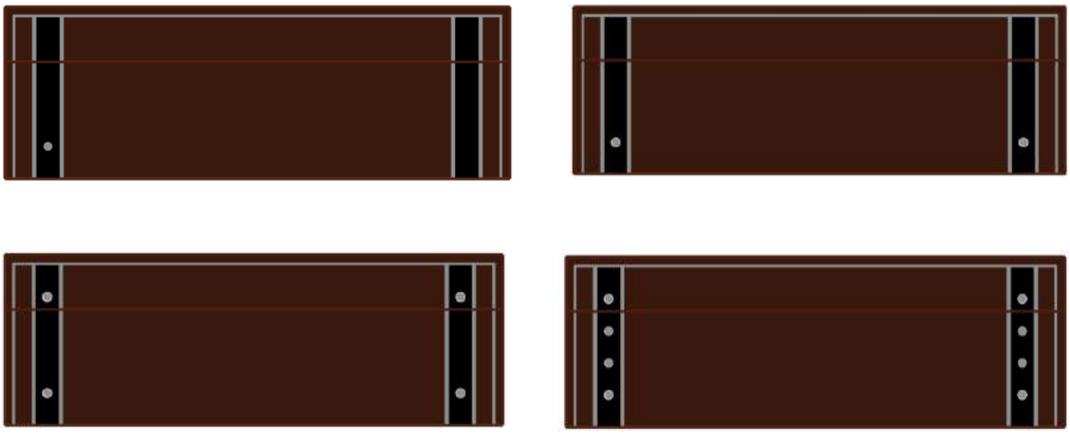


Figura 10: Construção das circunferências do guarda-joias *Arte* nas faces laterais.

5.3. Harmonia / Harmony

MusA-271
1990 (década / decade)
14,9 x 10 x 5,16 cm (comp.x largura x altura/ LxWXH))
madeira / wood

Este guarda-joias é uma peça manufaturada, construída em madeira, folheada e orlada a pau-santo. As superfícies laterais e tampa são decoradas com filetes de buxo.
Devido às proporções da peça e das decorações, ligadas às frequências das notas musicais, o autor designou-a por Harmonia.

Geometricamente, é constituído por duas partes, cofre e tampa. Juntas correspondem a um paralelepípedo reto (oco) seccionado por um plano paralelo às bases, o que define a tampa e o cofre. Entre o cofre e a tampa encontra-se um par de dobradiças, que permitem a abertura do guarda-joias até uma amplitude de 180°. De referir que estas ferragens foram também manufaturadas pelo autor.
A parte utilitária de peça corresponde ao interior vazio, que também tem forma de paralelepípedo reto.

This jewellery box is a handmade piece, made of wood, veneered and edged with rosewood. The side surfaces and the lid are decorated with boxwood fillets. Due to the proportions of the piece and the decorations, associated with the frequencies of musical notes, the author called it "Harmonia" (Harmony).

Geometrically it consists of two parts, the vault and the lid. Together they correspond to a rectangular parallelepiped (hollow) and sectioned by a plane parallel to the bases, which defines the lid and the chest. The useful part of the piece corresponds to the hollow interior, which is also shaped like a rectangular parallelepiped. Between the safe and the lid there is a pair of hinges, which allow the jewellery safe to be opened up to 180°. It should be noted that these fittings were also manufactured by the author.

5.3.1 Descrição detalhada

O *Harmonia*, é um paralelepípedo reto, apresentando 14,9 cm de comprimento, 10 cm de largura e 5,16 cm de altura. O paralelepípedo reto interior, oco, parte utilitária da peça, revestido a veludo verde, tem 12,6 cm de comprimento, 7,7 cm de largura e 3,76 cm de altura (https://www.geogebra.org/m/jpgnzuvk).

O volume do paralelepípedo interior oco, parte utilitária da peça apresenta um valor aproximado de 365 cm^3.

As Figuras 1 e 2 apresentam algumas imagens fotográficas do guarda-joias em diferentes vistas.

Figura 1: Vista exterior superior do *Harmonia*.

(A) (B) (C)

Figura 2: *Harmonia* fechado: vista frontal (A), posterior (B) e lateral (C).

Na Figura 3 podemos observar a peça modelada matematicamente recorrendo ao software de matemática dinâmica GeoGebra.

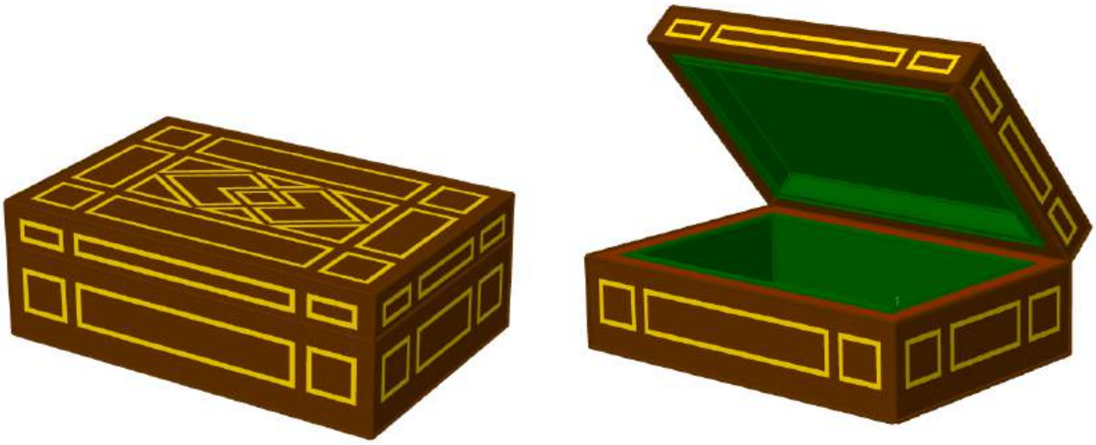


Figura 3: Representação do guarda-joias *Harmonia*, usando o GeoGebra

5.3.2. Simetrias na construção e na decoração

Este guarda-joias possui simetria na construção, sendo de referir, simetrias de reflexão e de rotação. Numa vista inferior exterior, ou vista superior exterior apresenta simetrias do tipo D_2 admitindo dois eixos de reflexão, como pode ser observado na Figura 4. As faces do *Harmonia* (retângulos) são também simetrias do tipo D_2.

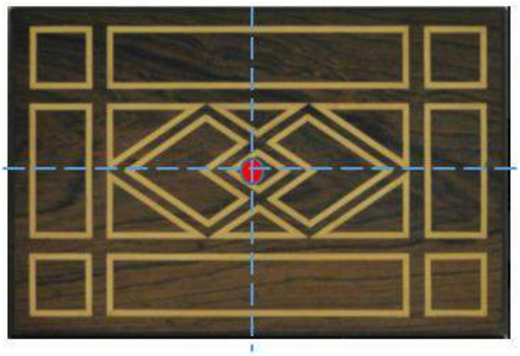


Figura 4: Simetrias do tipo D_2, observável numa vista inferior do *Harmonia*. Centro de rotação de grau 2 assinalado a vermelho e, tracejado a azul, os eixos de reflexão.

A nível decorativo o guarda-joias possui estrutura matemática. A decoração presente na superfície superior da tampa, e nas superfícies laterais, pode ser interpretada como uma rosácea, com simetrias do tipo D_2. Há proporcionalidade, mas não sabemos qual. Proporcionalidade de 3:2 (um intervalo de quinta) e de 9:4 (um intervalo de nona).

Este guarda-joias encerra em si «harmonia musical», ou seja, todas as proporções numéricas existentes na decoração da tampa e das faces laterais desta peça estão diretamente relacionadas com a relação harmónica, como que um diálogo secreto, entre o autor e as suas facetas artísticas (músico e construtor de instrumentos de corda e de guarda-joias). Sob o ponto de vista pitagórico (violino, guitarra), nesta peça está sempre presente a proporção de 3:2. É como se nesta peça estivessem notas musicais escondidas.

Analisando cada uma das faces laterais, reconhecemos diferentes tipos de simetria: simetria de reflexão (eixo vertical e horizontal), simetria de translação e simetria do tipo D_2 (Figura 5).

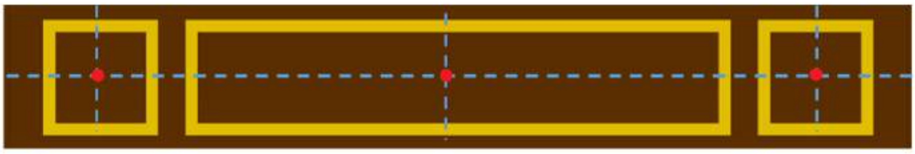


Figura 5: Simetrias existentes em cada face lateral do guarda-joias.

Os losangos decorativos, apresentam simetria de grau 2, o conjunto de losangos tem centro, no centro da figura (a vermelho) e simetrias de reflexão vertical e horizontal, como pode ser observado na Figura 6. Há apenas um verdadeiro losango (o central), os outros dois são o “negativo”.

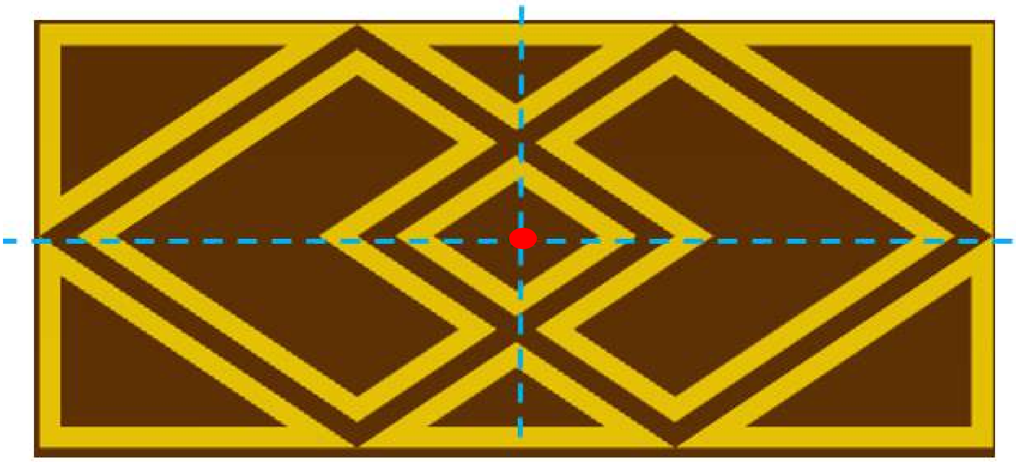


Figura 6: Simetrias dos losangos decorativos.

5.3.3. Modelo matemático usando GeoGebra

1.Tampa

- Níveis na construção

No GeoGebra, o padrão da tampa é construído por etapas, usando níveis, com sobreposição (Figura 7).

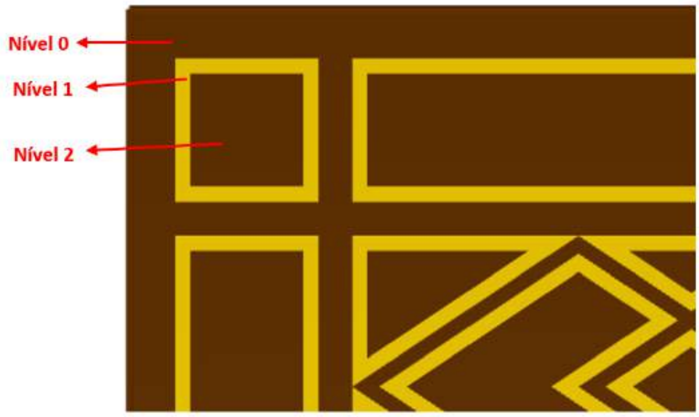


Figura 7: Níveis utilizados na decoração da tampa plana (vista superior).

2. Construção do “quadrado”

- Tampa e Superfícies laterais

Para obter os “quadrados” visíveis na tampa, constrói-se um “quadrado”, considerado o “original”, obtendo todos os outros por translações e por rotações, como se pode observar na Figura 8. Este “quadrado” consiste num quadrado ao qual é sobreposto outro menor, de cor diferente.

Figura 8: Construção sequencial da decoração “quadrado” na tampa.

Uma vez obtidos os “quadrados” da tampa, obtêm-se os quadrados de cada uma das superfícies laterais por rotação, em relação a um eixo paralelo à aresta horizontal na direção do comprimento, seguindo-se uma sequencia de translações e de rotações, por forma a decorar as quatro superfícies laterais. Ver Figura 9.

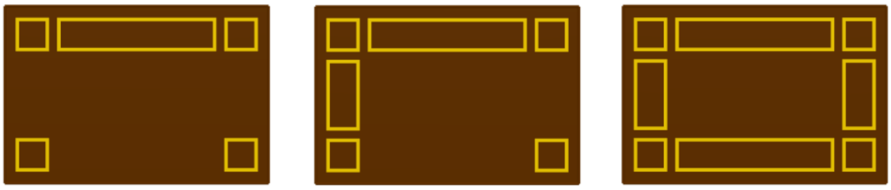


Figura 9: Decoração das superfícies laterais.

3.Construção dos "retângulos"

- Tampa e superfícies laterais

Para obter os "retângulos" visíveis na tampa, constroem-se cinco "retângulos" (dois na superfície horizontal da tampa e três na superfície vertical da tampa), considerados os "originais", obtendo os outros por translações e por rotações, como se pode observar na Figura 10 e 11, respetivamente. Estes "retângulos" consistem num retângulo ao qual é sobreposto outro menor, de cor diferente.

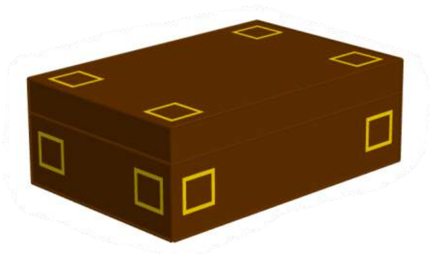


Figura 10: Construção sequencial dos "retângulos" decorativos na superfície horizontal da tampa.

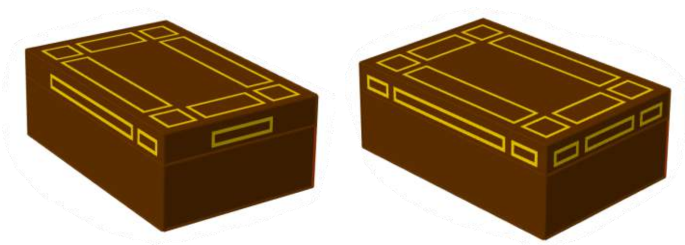


Figura 11: Construção sequencial dos "retângulos" decorativos na superfície vertical da tampa.

Uma vez obtidos os "retângulos" da tampa, obtêm-se os retângulos de cada uma das superfícies laterais do cofre, por rotação, em relação a um eixo paralelo às arestas horizontais na direção do comprimento e da largura, respetivamente, seguida de translação, por forma a decorar as quatro superfícies laterais do cofre. Ver Figura 12.

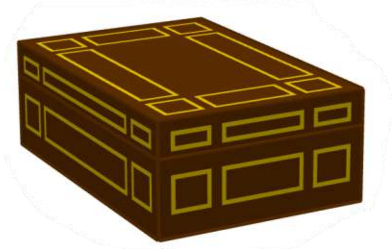


Figura 12: Obtenção dos retângulos das superfícies laterias do cofre por rotação.

4.Construção dos triângulos e dos losangos

- Triângulos retângulos

Para obter os "triângulos retângulos" visíveis na tampa, constrói-se um triângulo retângulo, considerado o "original", obtendo os outros por translação e por reflexão, como se pode observar na Figura 13. Estes "triângulos retângulos" consistem num triângulo retângulo ao qual é sobreposto outro menor, de cor diferente.

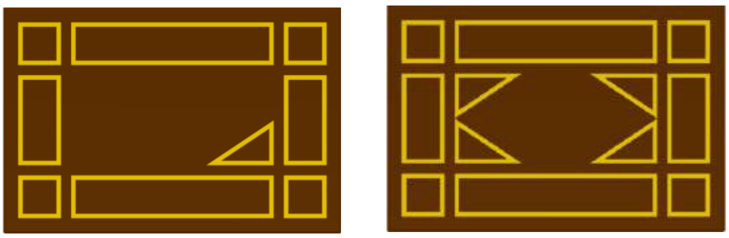


Figura 13: Construção sequencial dos "triângulos retângulos" decorativos.

- Triângulos e losangos

No centro da tampa, constrói-se um losango, ao qual é sobreposto outro menor, de cor diferente. Posteriormente, no vértice de cada triângulo retângulo, inicia-se a construção de um triângulo isósceles, ao qual é sobreposto outro, menor, de cor diferente. Faz-se a reflexão deste triângulo isósceles (Figura 14).

Figura 14: Construção do losango central e dos triângulos isósceles.

Constrói-se dois polígonos hexagonais amarelos, com níveis diferentes, cuja reflexão origina a tampa do guarda-joias *Harmonia* (ver Figura 15).

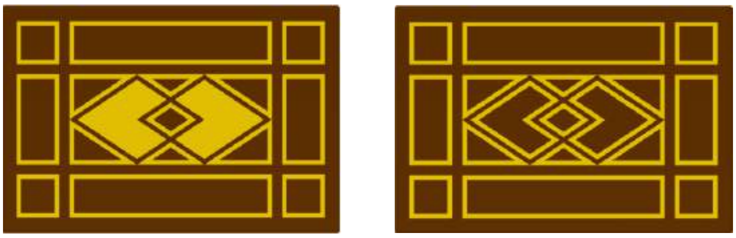


Figura 15: Finalização da tampa.

5.4.Baco/ Bacchus

MusA-268
Sem data/ no date
13,2 x 10,3 x 6,3 cm
(comp.x largura x altura/ LxWXH))
madeira / wood

Este guarda-joias é uma peça manufaturada, construída em madeira, folheada a ébano e orlada com mogno, destacando as suas arestas. Na decoração da tampa foi utilizado folha de pau-santo, faia e pau-rosa. O autor designou este guarda-joias de *Baco*.

Geometricamente, é constituído por duas partes, cofre e tampa. Juntas correspondem a um sólido que é um paralelepípedo reto (oco) seccionado por um plano paralelo às bases determinando a tampa e o cofre. Entre o cofre e a tampa encontra-se um par de dobradiças, permitindo a abertura do guarda-joias até uma amplitude de 180°. De referir que estas ferragens, em latão, foram também manufaturadas pelo autor.
A parte utilitária do guarda-joias equivale ao interior vazio da peça, que pode ser idealizado como um paralelepípedo.

This jewellery box is a handmade piece, made of wood, veneered in ebony and edged with mahogany, highlighting its edges. The decoration on the lid is made in rosewood beech and pau-rosa leaves. The author called this box "Baco" (Bacchus).

Geometrically, it consists of two parts, the chest and the lid. Together they correspond to a solid which is a rectangular (hollow) parallelepiped sectioned by a plane parallel to the bases, which determines the lid and the vault. Between the vault and the lid there is a pair of hinges, allowing the opening of the jewellery box to 180°. It should be noted that these brass fittings were also manufactured by the author. The useful part of the jewellery box is the hollow interior of the piece, which is also a parallelepiped.

5.4.1. Descrição detalhada

Este guarda-joias, é um paralelepípedo reto, apresentando 13,2 cm de comprimento, 10,3 cm de largura e 6,3 cm de altura. O paralelepípedo reto interior, oco, parte utilitária da peça, revestido a veludo azul, tem 10,8 cm de comprimento, 7,9 cm de largura e 4,7 cm de altura (https://www.geogebra.org/m/cy54nedy).

O volume do paralelepípedo interior oco, parte utilitária da peça apresenta um valor aproximado de 401 cm^3.

As Figuras 1 e 2 apresentam algumas imagens fotográficas do guarda-joias em diferentes vistas.

Figura 1: Vista exterior superior do *Baco*.

(A)

(B)

Figura 2: *Baco* fechado: vista lateral frontal (A) e posterior (B);
Baco aberto: vista superior (C).

Na Figura 3 podemos observar a peça modelada matematicamente recorrendo ao software de matemática dinâmica GeoGebra.

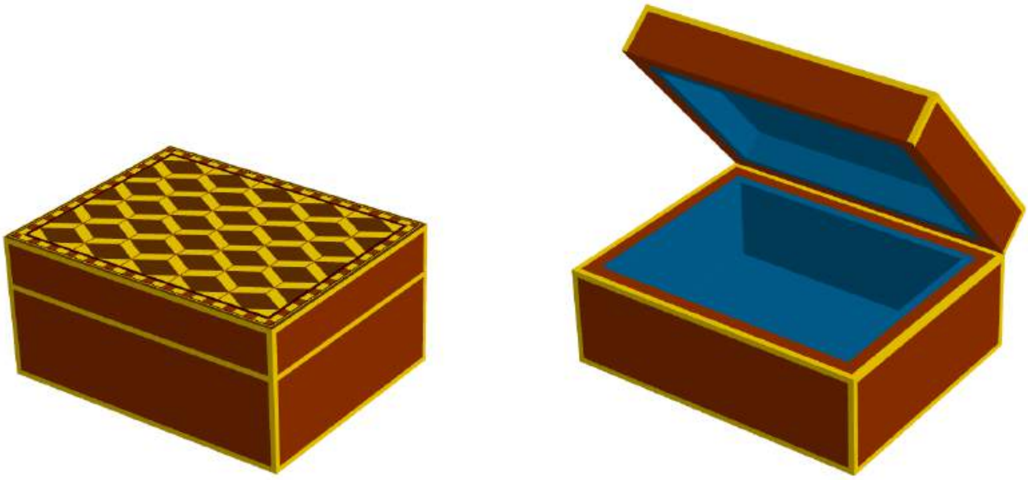


Figura 3: Representação do guarda-joias *Baco*, usando o GeoGebra

5.4.2. Simetrias na construção e na decoração

Este guarda-joias possui simetria de construção, sendo de referir, simetrias de reflexão e de rotação. Numa vista inferior exterior, ou vista superior exterior apresenta simetrias do tipo D_2 admitindo dois eixos de reflexão. As faces do *Baco* (retângulos) são também simetrias do tipo D_2.

A nível decorativo o guarda-joias possui estrutura matemática. A decoração presente na superfície superior da tampa, friso de retângulos separados por duas cores, com simetrias do tipo D_2, ou quatro partes de friso. É de realçar que a distância entre os retângulos decorativos quer na vertical, quer na horizontal se mantêm. Analisando cada parte de friso, reconhecemos diferentes tipos de simetria: simetria de reflexão (eixo vertical e horizontal), simetria de translação e simetria do tipo D_2 (Figura 4).

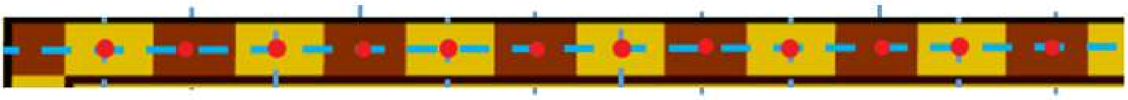


Figura 4: Simetrias existentes em cada parte de friso

5.4.3. Modelo matemático usando GeoGebra

1. Tampa

- Níveis na construção

No GeoGebra, o friso e o padrão da tampa são construídos por etapas, usando níveis, com sobreposição (Figura 5).

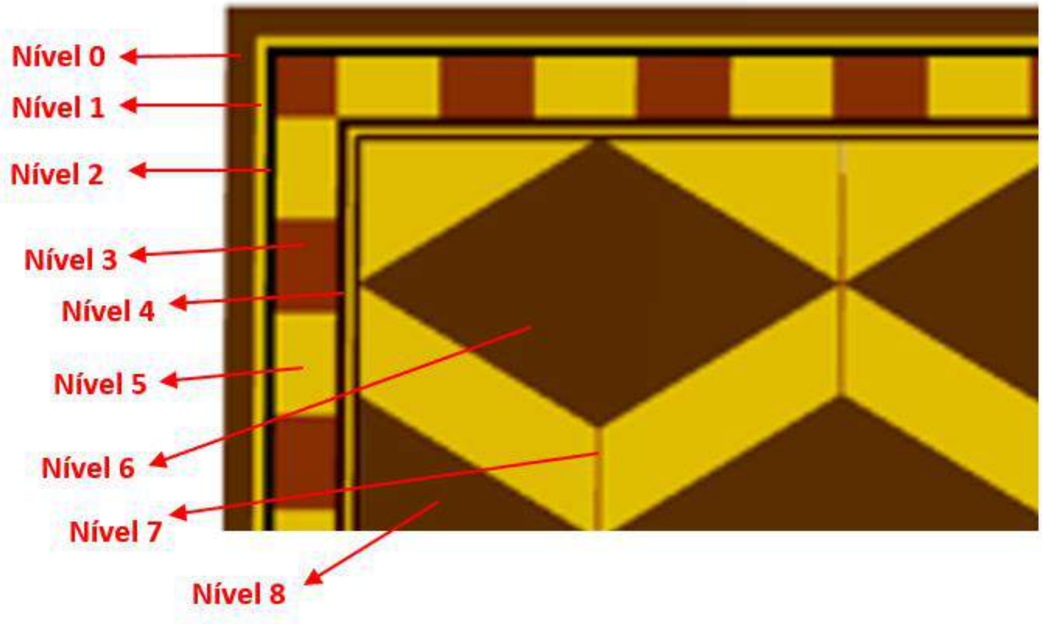


Figura 5: Níveis utilizados na decoração da superfície superior da tampa.

- Construção do friso

Para obter os "retângulos" visíveis na parte do friso da tampa, constrói-se um considerado o "original", obtendo todos os outros por translações e por rotações, como se pode observar na Figura 6. De referir que cada retângulo tem simetria do tipo D_2.

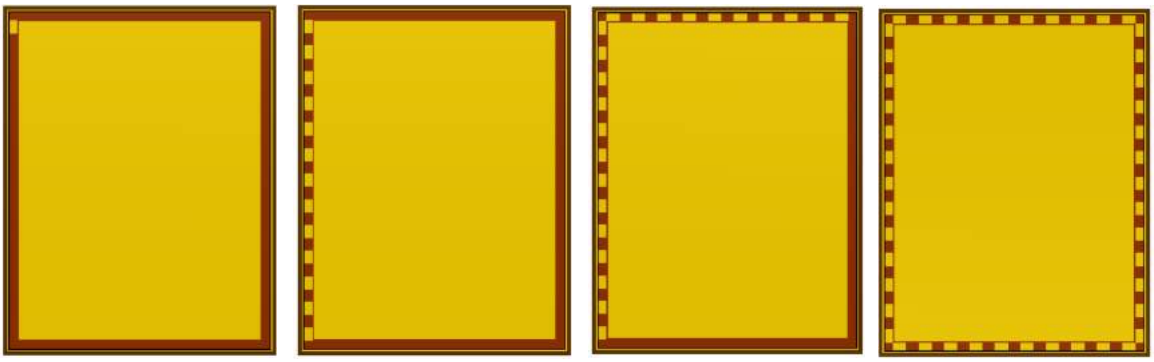


Figura 6: Construção sequencial do friso

- Construção do padrão: Losangos

Iniciamos a construção deste padrão, inserindo um losango, que por sucessivas translações e reflexões, vai preenchendo parte do padrão da tampa (Figura 7).

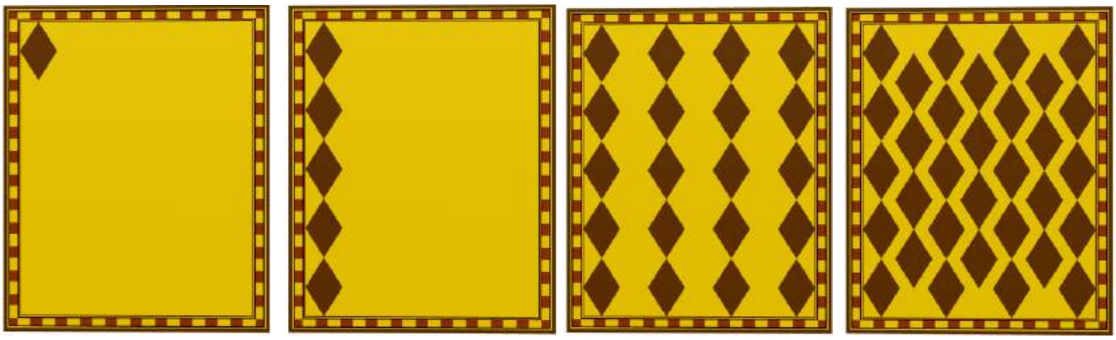


Figura 7: Construção sequencial do padrão existente na tampa do *Baco*.

- Construção do padrão: Triângulos

Construímos um triângulo, considerado o "original" e os restantes são obtidos por translações deste (Figura 8).

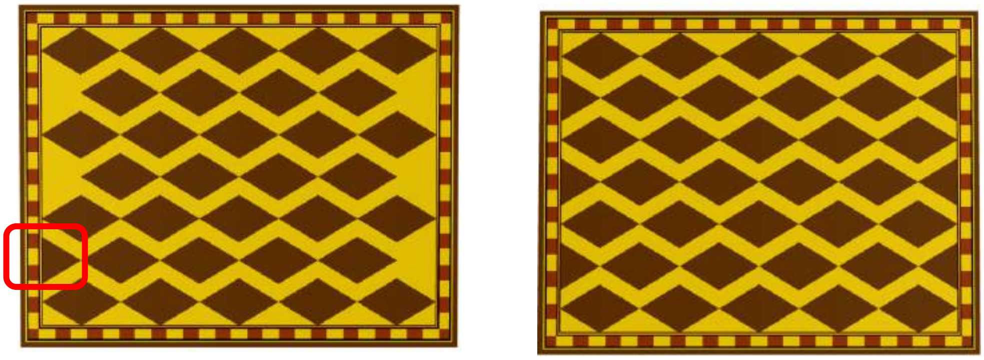


Figura 8: Construção sequencial dos triângulos existentes no padrão da tampa do *Baco*.

- Efeito "ilusão"

    Neste padrão, existente na tampa, é particularmente interessante a ilusão de paralelepípedos em forma de "degraus" que o nosso cérebro capta. As próprias nervuras do folheado da madeira, valorizam essa ilusão. De referir, que quando a peça é vista ao longe, o padrão central existente é interpretado pelo nosso cérebro como simples losangos.

Para criar este efeito-ilusão, que faz com que o nosso cérebro percecione paralelepípedos em vez de losangos, inserimos pequenos segmentos de reta, que por sucessivas translações vão criar o efeito pretendido (Figura 9).

Figura 9: Sequência de translações dos "segmentos de reta" decorativos.

5.5.Baú/ Trunk

MusA-286
1980 (década / decade)
15,4 x 8,5 x 9,85/10,25 cm
(comp.x largura x altura/ LxWXH))
madeira / wood

Este guarda-joias é uma peça manufaturada, construída em madeira, folheada a pau-rosa. Na decoração, este guarda-joias é orlado com fios de buxo e cinta de pau-rosa.
Devido à sua forma, o autor designou-o por *Baú*.

Geometricamente, é constituído por duas partes, cofre e tampa, ocas no interior, que exteriormente têm a forma de um paralelepípedo reto e, respetivamente, de um semicilindro. O plano que separa cofre e tampa contém o eixo do semicilindro e é paralelo à base do paralelepípedo. O interior vazio da união destes dois sólidos constitui a parte utilitária da peça. Entre o cofre e a tampa encontra-se um par de dobradiças em latão, paralelas ao eixo do semicilindro, também manufaturadas pelo autor, permitindo a abertura do guarda-joias até uma amplitude de 180°.
Como curiosidade, foi o primeiro guarda-joias a ser desenhado pelo artista.

This jewellery box is a handmade piece, made of wood and veneered in rosewood. In the decoration, this jewellery box is edged with boxwood threads and rosewood strap. Due to its shape, the author called it "Baú" (Trunk).

Geometrically, it consists of two parts, the vault and the lid, both hollow on the inside, and on the outside shaped like a rectangular parallelepiped and respectively of a semi-cylinder. The plane separating the vault and lid contains the axis of the semi-cylinder and is parallel to the base of the parallelepiped. The hollow interior of the union of these two solids constitutes the useful part of the piece. Between the safe and the lid is a pair of brass hinges, parallel to the axis of the semi-cylinder, also manufactured by the author, allowing the jewellery box to open up to 180°.
As a curiosity, this was the first jewellery box to be designed by the artist.

5.5.1. Descrição detalhada

O cofre é constituído por dois paralelepípedos retos: um exterior, apresentando 15,4 cm de comprimento, 8,5 cm de largura e de altura 6 cm e outro, interior, oco, com 12,6 cm de comprimento, 7,7 cm de largura e 5,5 cm de altura. A tampa é constituída por dois semicilindros: um exterior, apresentando 15,4 cm de comprimento, 8,5 cm de diâmetros e 4,25 cm de altura e outro interior, oco, com 12,6 cm de comprimento, 7,7 cm de diâmetro e 3,15 cm de altura (https://www.geogebra.org/m/xzu97rvd).

O volume do paralelepípedo interior oco, parte utilitária da peça, apresenta um valor aproximado de 827 cm^3.

As Figuras 1 e 2 apresentam algumas imagens fotográficas do guarda-joias em diferentes vistas.

(A)

(B)

Figura 1: Vista exterior frontal(A) e inferior (B) do *Baú*.

(A)

(B)

(C)

Figura 2: *Baú* fechado: vista posterior(A) e lateral (B); *Baú* aberto (C).

Na Figura 3 podemos observar a peça modelada matematicamente recorrendo ao software de matemática dinâmica GeoGebra.

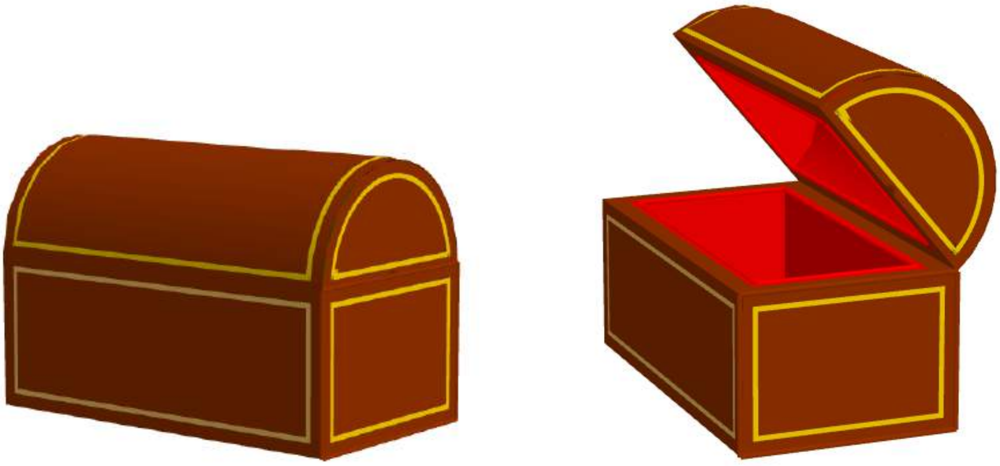


Figura 3: Representação do guarda-joias *Baú*, usando o GeoGebra

5.5.2. Simetrias na construção e na decoração

Este guarda-joias possui simetria de construção, sendo de referir, simetrias de reflexão e de rotação. Numa vista inferior exterior apresenta simetria do tipo D_2, admitindo dois eixos de reflexão. As faces laterais do *Baú* (retângulos) apresentam simetrias do tipo D_2.

A nível decorativo, possui uma "tira" amarela, ao longo da tampa e nas suas faces laterais cuja distância ao bordo da peça é sempre constante.

5.5.3. Modelo matemático usando GeoGebra

1.Tampa e laterais

- Níveis de construção

  No GeoGebra, a decoração da tampa e das laterais, é construída, usando níveis com sobreposição (Figura 4).

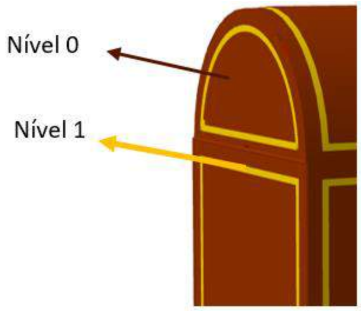


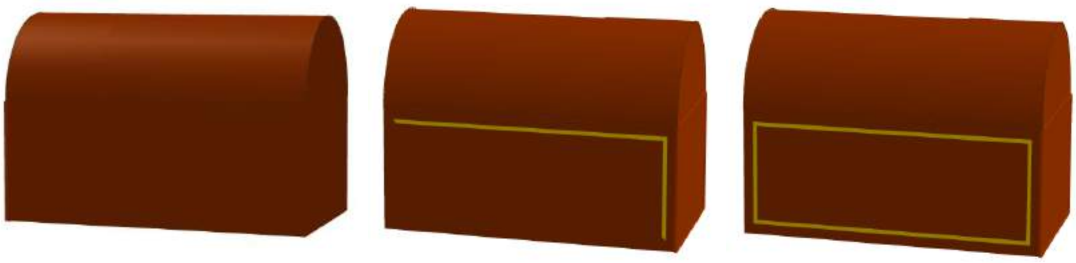
Figura 4: Níveis utilizados na decoração do *Baú*.

2. Construção da decoração

- Tampa e laterais

Na modelação deste guarda-joias, a “tira” amarela decorativa, existente quer na tampa quer, nas laterais do mesmo, é construído usando níveis de sobreposição diferentes.

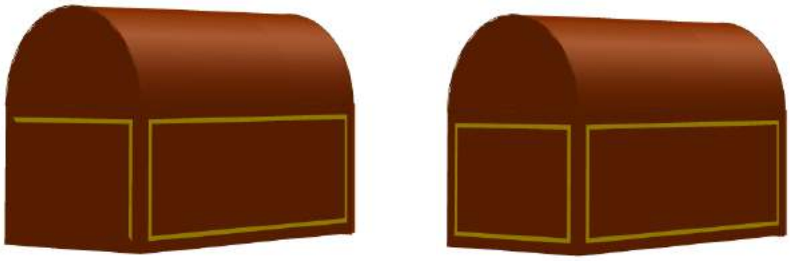
Após a construção do “modelo” (Figura 5A) com a cor base “castanho”, construímos, na superfície lateral frontal, dois hexágonos “amarelos”, que unidos vão gerar o a “tira” amarela dessa superfície (Figura 5B e 5C). Por translação, desses hexágonos, decoramos a superfície lateral oposta.



(A) (B) (C)

Figura 5: “Modelo” do guarda-joias B*aú* (A); Construção sequencial dos hexágonos (B e C).

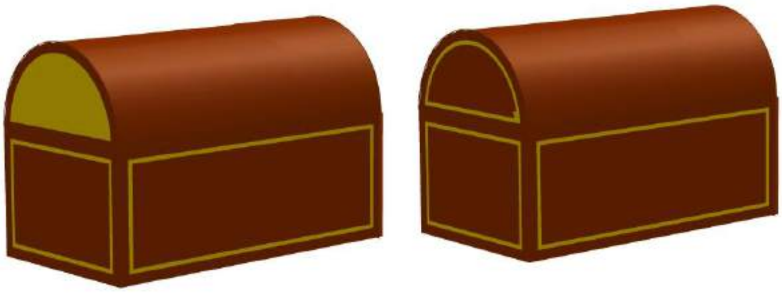
De forma análoga, são construídos hexágonos unidos na superfície lateral contígua, os quais, por translação serão assim aplicados na superfície lateral oposta (Figura 6A e 6B).



(A) (B)

Figura 6: Construção sequencial dos hexágonos na superfície lateral
de menores dimensões (B e C).

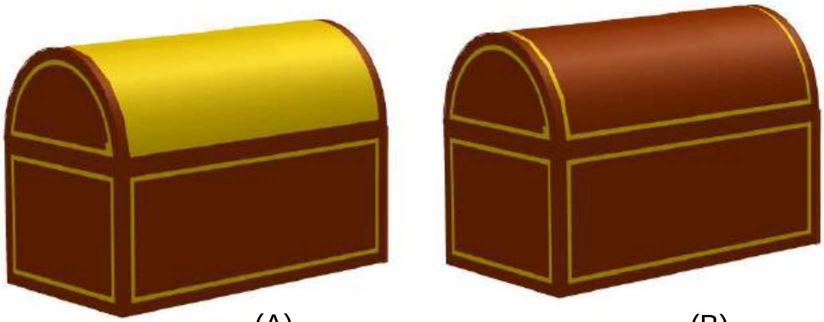
Para construção desta decoração nas superfícies laterais da tampa, constrói-se não um semicírculo, mas um segmento circular (amarelo), considerando a circunferência como uma parte definida por uma corda. Procedemos da mesma forma sobrepondo outro de cor castanha. Por translação, esta decoração é colocada na superfície lateral oposta da tampa (Figura 7A e 7B).



(A) (B)

Figura 7: Construção sequencial do "friso" na superfície lateral da tampa (A e B).

Por último e, de forma similar, é construído decoração da tampa. Assim, é construído uma parte de uma superfície cilíndrica de cor "amarela", à qual sobrepomos outra, de cor "castanha" por forma a que apenas fique visível a referida "tira" amarela (Figura 8A e 8B).



(A) (B)

Figura 8: Construção sequencial da decoração na tampa (A e B).

6.Guarda-joias cuja abertura se dá por deslizamento

Neste capítulo, serão apresentados os guarda-joias que têm como característica comum, o facto da abertura se realizar por deslizamento, há uma translação de uma das partes que permite a abertura da peça, embora a tampa se separe totalmente do cofre. São eles o *Solidão, Beatriz Costa* e *Medina*.

6.1.Solidão/ Loneliness

MusA-291
1990 (década / decade)
6 x 6 x 6 cm
(comp.x largura x altura/ LxWxH))
madeira / wood

Este guarda-joias é uma peça manufaturada, construída em madeira, folheada a olho-de-perdiz no cofre interior e na tampa com ébano e pau-cetim, decorada com filetes de ébano/sicómero. O autor designou-a por Solidão, pois a decoração da caixa retrata de forma simbólica a palavra “Só” conotada com a “Rainha do Fado”, Amália Rodrigues (1920-1999).

Geometricamente, é constituído por duas partes, cofre e tampa (ocos); o cofre, prisma quadrangular reto, encaixa na tampa e, juntos originam um cubo. Quando o guarda-joias é aberto, a tampa separa-se totalmente do cofre. A parte utilitária da peça corresponde ao interior vazio do cofre, que tem também a forma de um prisma quadrangular reto. Na decoração da tampa cúbica, encontramos, em faces contíguas, representações geométrico-artísticas das letras “S” e “O” que conjugadas dão a origem à palavra “Só”.

This jewellery case is a handmade piece, made of wood, veneered on the inside with bird´s eye and on the lid with ebony and satinwood, decorated with ebony/sicomer fillets. The author called it "Solidão" (Loneliness), as the decoration of the box symbolically portrays the word "Lonely", associated with the "Queen of Fado", Amália Rodrigues (1920-1999).

Geometrically, it is made up of two parts, the vault and the lid (both hollow); the vault, a straight square prism /square cuboid, fits into the lid and together they form a cube. When the jewellery box is opened, the lid separates completely from the vault. The useful part of the piece corresponds to the hollow interior of the vault, which has also the shape of a straight square prism /square cuboid. In the decoration of the cubic lid, we find, on adjacent faces, geometric-artistic representations of the letters "S" and "O" which, when combined, create the word "SÓ" (Alone).

6.1.1. Descrição detalhada

A decoração do guarda-joias, com as representações geométrico-artísticas das letras "S" e "O" que conjugadas dão a origem à palavra "Só", estão relacionadas com os termos, tristeza e solidão, muito presentes no livro de poemas de Amália Rodrigues, conhecida pessoalmente pelo autor (https://www.geogebra.org/m/fdyfddu6).

O *Solidão*, é um cubo, apresenta 6 cm de lado. O cofre, subdivide-se em 3 prismas quadrangulares retos: um exterior, outro interior, oco, parte utilitária da peça, que apresenta 4,4 cm de comprimento, 4,4 cm de largura e 5 cm de altura e a base com 5 cm de comprimento, 5 cm de largura e 0,5 cm de altura. A tampa, subdivide-se em dois prismas quadrangulares retos, um maior, cubo, apresenta de lado 6 cm, outro menor, oco (encaixe), com 5,4 cm de comprimento, 5,4 cm de largura e 5,7 cm de altura.

O volume do prisma quadrangular interior oco, parte utilitária da peça, apresenta um valor aproximado de 97 cm^3.

As Figuras 1 e 2 são algumas imagens fotográficas do guarda-joias.

Figura 1: Vista exterior superior(A) e inferior (B) do *Solidão.*

Figura 2: Vista lateral do *Solidão* com tampa aberta.

A excelência na decoração da tampa, faz jus ao seu nome. A combinação destas madeiras nobres confere ao guarda-joias um ar elegante e contemporâneo. As tonalidades destas duas madeiras e a forma como foram combinadas destacam a sua geometria e reforçam a sua beleza.

A nível decorativo, possui apenas duas faces contíguas decoradas objetivando a leitura da palavra “Só” (Solidão). O “S” encontra-se estilizado através de uma superfície definida por duas curvas entre uma sequência de “tirinhas” horizontais à direita e verticais à esquerda. Na outra face temos o “O” também estilizado através de um jogo de contrastes de superfícies de cores diferentes entre e fundo da face e um” O” preto contornado por “tirinhas”. A distância entre todas as “tirinhas”, em todas as direções e em todas as faces, é constante. À esquerda do “O” aparecem dois retângulos com a aresta maior paralela à aresta vertical do cubo.

Na Figura 3 podemos observar a peça modelada matematicamente recorrendo ao software de matemática dinâmica GeoGebra.

.

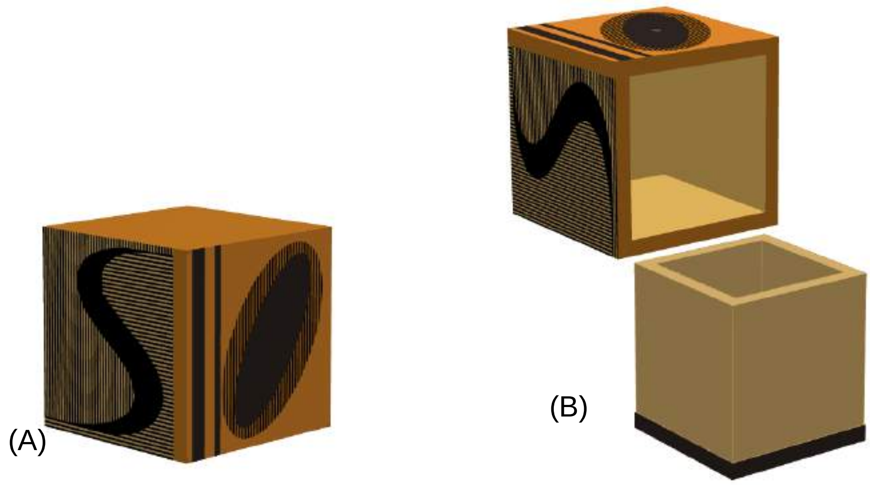


Figura 3: Representação do guarda-joias *Solidão*, usando o GeoGebra.

6.1.2. Simetrias na construção e na decoração

Este guarda-joias possui simetria de construção, sendo de referir, simetrias de reflexão e de rotação. Apresentando simetrias do tipo D_4, nas vistas superior e inferior do guarda-joias, apresentado simetrias do tipo D_2 nas faces laterais do cofre e D_4 nas faces laterais da tampa.

A nível decorativo possui simetria na representação geométrico-artística da letra "O" do tipo D_2, com rotação de 30^0 relativamente à vertical. Simetria na forma, mas não nos elementos decorativos, devido à existência das "tirinhas" (ver Figura 4).

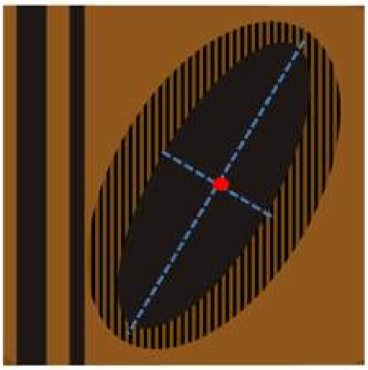


Figura 4 : Simetria do tipo D_2 no "O" da face lateral da tampa do Solidão.

6.1.3. Modelo matemático usando o GeoGebra

Para a construção do "O" foi necessária a utilização de coordenadas polares (ver capítulo 6), para que fosse feito a "abertura", onde se visualiza a "zona escura" do "O". Assim, para construir o "O", começou-se por criar o efeito das "tirinhas", partindo de uma sequência de translações numa superfície retangular (nível 1), posteriormente, construiu-se uma elipse (nível 1), finalizando com a construção de um quadrado com uma "abertura" no meio (nível 2), por forma a seja apenas visível o contorno do "O". Desta forma obteve-se o efeito pretendido (ver Figura 5).

Figura 5: Construção do "O" por sobreposição de diferentes superfícies.

Para a construção do “S”, foram utilizadas as curvas de Bézier, no entanto, não é possível explicar facilmente qual a estrutura dos níveis, uma vez que, foi preciso sobrepor superfícies iguais, mas com parametrizações diferentes (ver capítulo 4), pois uma única superfície por falha do programa, deixa “aberturas”. Assim, foi indispensável utilizar um truque, não pela forma do objeto, mas por falha do programa, para obter um “S” cheio e não com falhas. Na figura 6, pode observar-se, a vermelho, que na parte superior direita do “S” uma “tirinha” entra no “S”, o que não é um erro nosso, mas do programa.

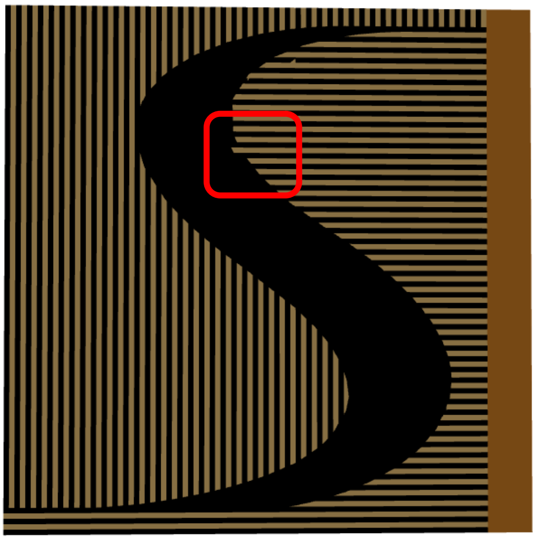


Figura 6: Falha detetada no programa assinalada a vermelho

6.2.Beatriz Costa/ Beatriz Costa

MusA-10
1990 (década / decade)
6 x 6 x 6 cm
(comp.x largura x altura/ LxWXH))
madeira / wood

Este guarda-joias é uma peça manufaturada, construída em madeira, folheada a olho-de-perdiz no cofre interior e na tampa com sicómero tingido de vermelho. O ébano e o pau-rosa foram utilizados para folhear as superfícies laterais e a tampa do guarda-joias. Na decoração, os fios de buxo e cinta de pau-rosa foram usados para orlar esta peça. O autor designou-a por *Beatriz Costa* (1907-1996), pois o design da caixa retrata de uma forma estilizada a atriz carismática.

Geometricamente, é constituído por duas partes, cofre e tampa (ocos); o cofre, que é um prisma quadrangular reto, encaixa na tampa e, juntos, formam um cubo. Quando o guarda-joias é aberto, a tampa separa-se completamente do cofre.

This jewellery box is a handmade piece, made of wood, veneered with bird´s eye on the inner vault, and on the lid with red-dyed sycamore. Ebony and rosewood were used to leaf the side surfaces and the lid of the jewellery box. In the decoration, boxwood threads and rosewood strap was used to edge this piece.
The author called it "Beatriz Costa", as the design of the box portrays the charismatic actress of the same name (1907-1996), in a stylised way.

Geometrically, it consists of two parts, the vault and the lid (both hollow); the vault, which is a straight square prism /square cuboid , fits into the lid and together they form a cube. The lid separates completely from the vault when the jewellery box is opened. The useful part of the piece corresponds to the hollow interior of the vault, which is also in the shape of a straight square prism /square cuboid.

6.2.1. Descrição detalhada

O *Beatriz Costa* é um cubo, que apresenta 6 cm de lado. A parte utilitária da peça corresponde ao interior vazio do cofre, que também tem a forma de um prisma quadrangular reto com 4,8 cm de comprimento, 4,6 cm de largura e 4,95 cm de altura, que se encontra sobre um prisma quadrangular reto com 5,2 cm de comprimento, 4,9 cm de largura e 0,55 cm de altura. A tampa, em madeira, apresenta duas espessuras diferentes no seu interior, sendo de 0,4 cm em dois lados e em altura e de 0,7 cm nos outros dois, encaixando no cofre (https://www.geogebra.org/m/zmdsmyht).

O volume da parte utilitária da peça, é de aproximadamente 109 cm^3.

As Figuras 1 e 2 apresentam algumas imagens fotográficas do guarda-joias.

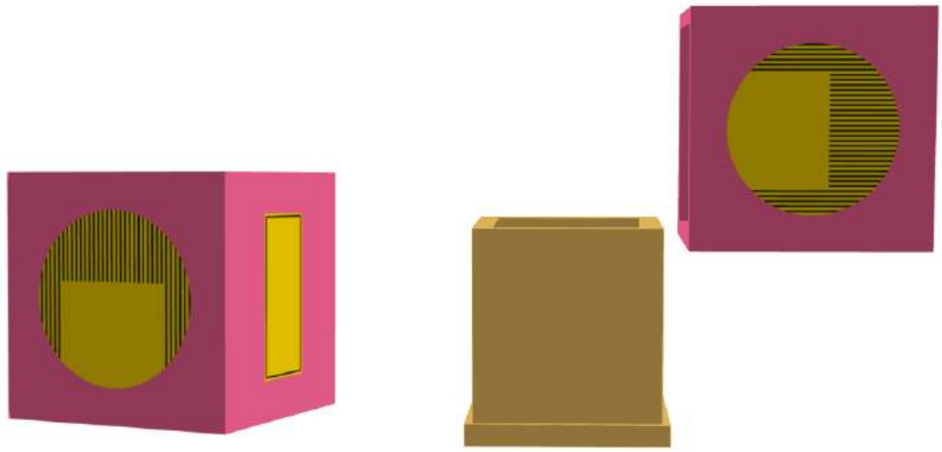
Figura 1: Cofre e tampa do *Beatriz Costa.*

(A)

(B)

Figura 2: vistas laterais da tampa (A) e interior do cofre e da tampa, respetivamente (B).

Na Figura 3 podemos observar a peça modelada matematicamente recorrendo ao software de matemática dinâmica GeoGebra.



(A) (B)

Figura 3: Representação do guarda-joias *Beatriz Costa*, fechado (A) e aberto (B), usando o GeoGebra.

Na Figura 4, podemos observar, uma secção vertical deste guarda-joias sem tampa.

Figura 4: Representação, usando o GeoGebra, de uma secção vertical sem tampa.

6.2.2. Simetrias na construção e na decoração

Este guarda-joias tem, por construção, simetrias de reflexão e de rotação. Numa vista inferior exterior, ou vista superior exterior apresenta simetrias do tipo D_4, com simetrias de rotação de grau 4 e admite quatro eixos de reflexão.

As faces do *Beatriz Costa* (quadrados) são também simetrias do tipo D_4.

A nível decorativo, há simetria de reflexão vertical e uma rosácea diedral do tipo D_1 (rosto estilizado da atriz), embora no detalhe do cabelo haja uma pequena assimetria entre o lado direito e o lado esquerdo. É ainda de referir que o rosto tem centro no centro de simetria do quadrado.

Nas outras duas faces opostas os três retângulos sobrepostos com cores diferentes pretendem fazer uma alusão, aos lençóis do filme “Aldeia da roupa branca”. Nestas faces há simetria do tipo D_2.

6.2.3. Modelo matemático usando GeoGebra

Para a construção do rosto estilizado de Beatriz Costa foi necessária a utilização de coordenadas polares (ver capítulo 6), para que fosse feita a “abertura”, onde se visualiza os cabelos e a face. Assim, começou-se por criar o efeito das “tirinhas”, partindo de uma sequência de translações numa superfície retangular (nível 2), posteriormente, sobrepôs-se um retângulo (nível 3), finalizando com a construção de um quadrado com uma “abertura” no meio (nível 0), por forma a seja apenas visível o rosto da atriz. Desta forma obteve-se o efeito pretendido (ver Figura 5). Por rotação de 180^0, obtém-se o rosto na face oposta.

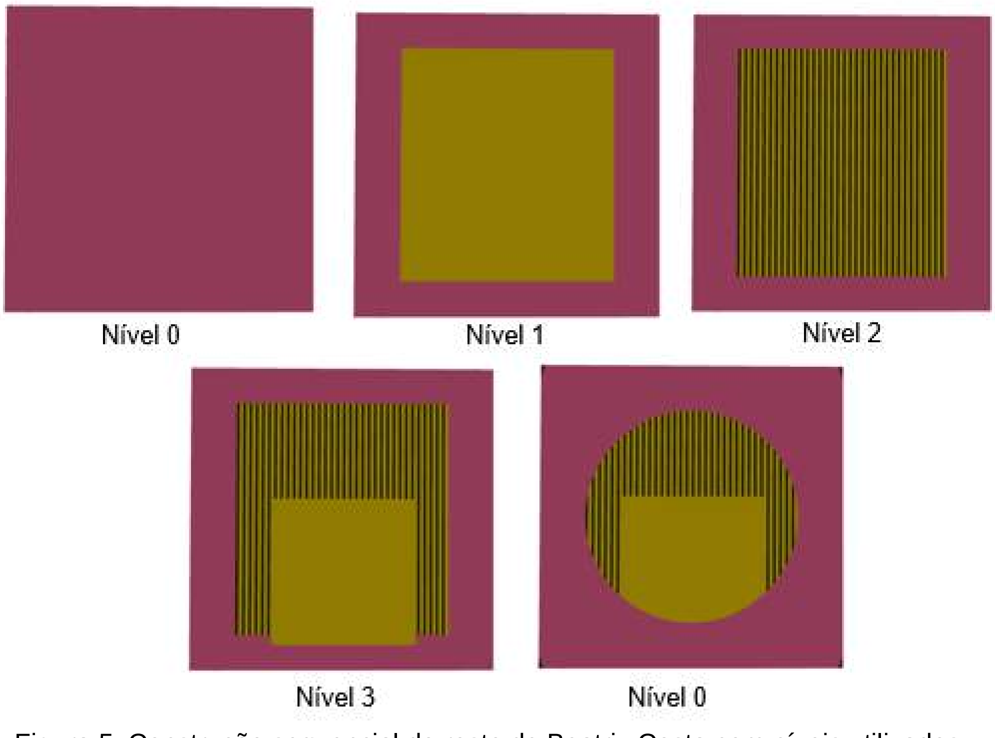


Figura 5: Construção sequencial do rosto de Beatriz Costa com níveis utilizados.

Para a construção dos retângulos na outra face, procedeu-se à construção de três retângulos sobrepostos com níveis diferentes, como pode ser observado na Figura 6. Por rotação de 180^0, obtêm-se os retângulos na face oposta.

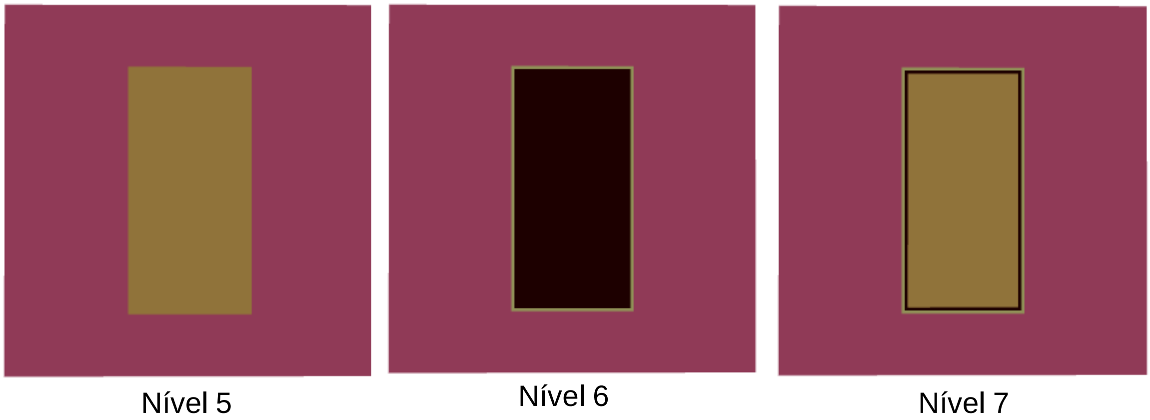


Figura 6: Construção sequencial dos retângulos com níveis utilizados.

6.3.Medina/ Medina

MusA-293
1990 (década / decade)
8,1 x 8,1 x 9,75 cm
(comp.x largura x altura/ LxWXH))
madeira / wood

Este guarda-joias é uma peça manufaturada, construída em madeira, folheada a olho-de-perdiz com tampa verticalmente deslizante, folheada a pau-cetim e orlada com madeira de Pernambuco (pau-Brasil). O autor designou-o por *Medina*, porque foi o que a sua forma lhe fez lembrar.

Geometricamente, é constituído por duas partes, cofre e tampa. Juntas formam um sólido que, sem ter em conta as decorações, é um prisma quadrangular reto, tal como o cofre e a tampa. Em cada face lateral da tampa (oca, aberta inferiormente), foi recortado um arco redondo; as arestas (inclusive as dos arcos) são decoradas com "colunas" em pau-Brasil, apresentando quatro pequenos cubos nas suas interseções, que correspondem aos vértices superiores da tampa. Quando o guarda-joias é aberto, por deslizamento vertical, a tampa separa-se completamente do cofre; a parte utilitária da peça, que também tem a forma de um prisma quadrangular reto, é o interior vazio do cofre (aberto superiormente).

This jewellery box is a handmade piece, made of wood, veneered in bird´s eye with a vertically sliding lid, leafed with satinwood and edged with Pernambuco wood (pau-Brasil). The author called it "Medina", because that is what its shape reminded him of.

Geometrically, it consists of two parts, the vault and the lid. Together they form a solid which, without taking the decorations into account, is a straight square prism /square cuboid, just like the vault and the lid. On each lateral face of the lid (hollow, open at the bottom), a round arch has been cut out; the edges (including those of the arches) are decorated with "columns" in Pernambuco wood (pau-Brasil), featuring four small cubes at their intersections, which match the upper vertices of the lid. When the jewellery box is opened, by sliding vertically, the lid separtes completely from the vault; the useful part of the piece, which is also shaped as a straight square prism /square cuboid, is the hollow interior of the vault (opened from the top)

6.3.1. Descrição detalhada

O *Medina*, prisma quadrangular reto, de base quadrada, apresenta 8,1 cm de lado e 9,75 cm de altura (com decorações). O prisma quadrangular interior, oco, parte utilitária da peça, tem como medida do lado 5,5 cm e 7,4 cm de altura. (https://www.geogebra.org/m/watvja2n).

O volume do prisma quadrangular interior oco, parte utilitária da peça, apresenta um valor aproximado de 224 cm^3.

A peça apresenta quatro vistas laterais iguais, que correspondem a retângulos. Uma vista superior e outra inferior que são quadrados.

As Figuras 1 e 2 apresentam algumas imagens fotográficas do guarda-joias.

Figura 1: Vista exterior superior do *Medina.*

(A) (B)

Figura 2: Vista lateral do *Medina,* cofre (A) e tampa (B).

Na Figura 3 podemos observar a peça modelada matematicamente recorrendo ao software de matemática dinâmica GeoGebra.

(A) (B)

Figura 3: Representação do guarda-joias "*Medina*", fechado (A) e aberto (B), usando o GeoGebra.

Na Figura 4, podemos observar, uma secção vertical deste guarda-joias sem tampa.

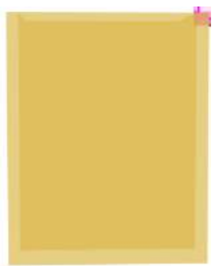


Figura 4: Representação, usando o GeoGebra, de uma secção vertical do M*edina* sem tampa (A) e com tampa (B).

6.3.2. Simetrias na construção e na decoração

Este guarda-joias tem, por construção, simetrias de reflexão e de rotação. Numa vista inferior exterior, ou vista superior exterior apresenta simetrias do tipo D_4, com simetrias de rotação de grau 4 e admite quatro eixos de reflexão, como pode ser observado na Figura 5. As faces do cofre do *Medina* (retângulos) apresentam simetrias do tipo D_2.

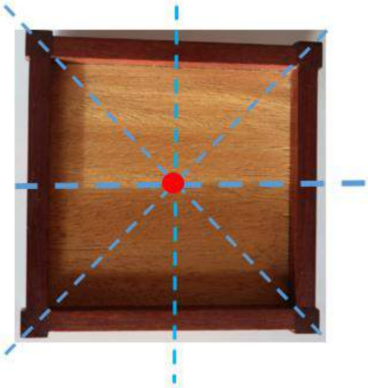


Figura 5: Simetria do tipo D_4, observável numa vista superior do *Medina.*

A tampa foi construída por simetria rotacional através de uma rotação de apenas um quarto da construção (sequência de rotações), obtendo-se desta forma a simetria pretendida.

A nível decorativo, poder-se-á dizer que as decorações aumentam o tamanho deste guarda-joias, devido às “aberturas” dos arcos e às “colunas” que são acrescentadas em todas as arestas verticais. As duas peças, tampa e cofre tem o mesmo conjunto de simetrias, do ponto de vista de cima para baixo, no entanto, devido à decoração da peça, a tampa tem simetria de reflexão vertical, enquanto que o cofre apesenta simetria do tipo D_2.

6.3.3. Modelo matemático usando GeoGebra

Neste caso, poder-se-á falar da geometria dos arcos, tratando-se de um arco redondo, com raio de 2,6 cm e altura de 7,4 cm

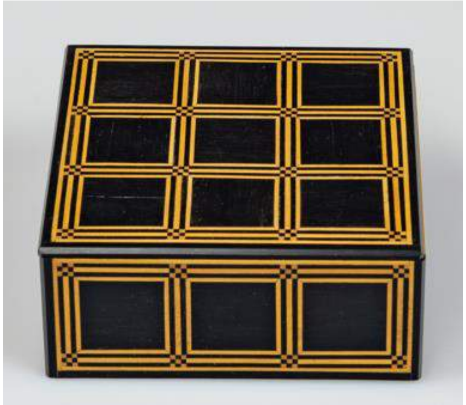
Para construir a parte de cima do arco, foram utilizadas coordenadas polares para preencher a “abertura” entre o retângulo e o arco (ver Figura 6).

Figura 6: Preenchimento do arco com coordenadas polares

7.Guarda-joias cuja abertura é livre

Neste capítulo, serão descritos os guarda-joias cujo movimento de abertura se dá sem qualquer restrição a não ser a de desbloquear a peça de encaixe da tampa. Nestes, tampa separa-se totalmente do cofre sem isometrias. Falamos do *Mosaico, Fórum, Pérola, Teatro* e *Coroa.*

7.1.Mosaico/ Moisac



MusA-275
1980 (década / decade)
9,2 x 9,2 x 3,9 cm
(comp.x largura x altura/ LxWxH)
madeira / wood

Este guarda-joias é uma peça manufaturada, construída em madeira e folheada a ébano. A tampa e as superfícies laterais são decoradas com filetes de ébano e de buxo.
Devido ao desenho gráfico que faz lembrar um mosaico, o autor designou-a por *Mosaico*.

Geometricamente, é constituído por duas partes, cofre e tampa, que formam um prisma quadrangular reto (oco). O próprio cofre é um prisma quadrangular reto (oco e aberto superiormente) e o seu interior vazio, que tem a mesma forma, constitui a parte utilitária de peça. A tampa corresponde à base superior e, quando o guarda-joias é aberto, separa-se completamente do cofre. Na sua parte inferior, foi acrescentado um prisma quadrangular reto, mais pequeno, com a função de encaixe.

This jewellery box is a handmade piece, made of wood and veneered with ebony. The lid and the side surfaces are decorated with ebony and boxwood fillets. Due to the graphic design, which is reminiscent of a mosaic, the author called it "Mosaico" (Mosaic).

Geometrically, it consists of two parts, the vault and the lid, which form a straight square prism /square cuboid (hollow). The chest itself is a straight square prism /square cuboid (hollow and open at the top) and its hollow interior, which has the same shape, constitutes the useful part of the piece. The lid corresponds to the upper base of the piece and, when the jewellery box is opened, it separates completely from the vault. In its lower part, a smaller straight square prism / square cuboid was added, to work as a fitting.

7.1.1. Descrição detalhada

O *Mosaico*, prisma quadrangular reto, de base quadrada, apresenta 9,2 cm de lado e 3,9 cm de altura. O prisma quadrangular interior, oco, parte utilitária da peça, tem como medida do lado 8,2 cm e 3,4 cm de altura. A tampa, subdivide-se em dois prismas quadrangulares retos, um maior, que apresenta de lado 9,2 cm e de altura 0,5 cm, outro menor (encaixe), com o lado de 8,2 cm e de altura 0,3 cm. A parte inferior do guarda-joias é também um prisma quadrangular reto, de base quadrada e com 8,2 cm de lado e 0,5 cm de altura (https://www.geogebra.org/m/yfsxfasv).

O volume do prisma quadrangular interior oco, parte utilitária da peça, é calculado sem descurar o prisma quadrangular reto, encaixe da tampa, pelo que apresenta um valor aproximado de 175 cm^3.

A peça apresenta quatro vistas laterais iguais, que correspondem a retângulos. Uma vista superior e outra inferior que são quadrados.

As Figuras 1 e 2 apresentam algumas imagens fotográficas do guarda-joias.

Figura 1: Vista exterior superior do *Mosaico.*

(A)

(B)

Figura 2: Vista lateral com tampa aberta(A) e interior (B) do *Mosaico*.

A excelência na decoração da tampa e faces laterais, faz jus ao seu nome. A combinação das madeiras nobres confere ao guarda-joias um ar elegante e contemporâneo. As tonalidades destas duas madeiras e a forma como foram combinadas destacam a sua geometria e reforçam a sua beleza.

Na Figura 3 podemos observar a peça modelada matematicamente recorrendo ao software de matemática dinâmica GeoGebra.

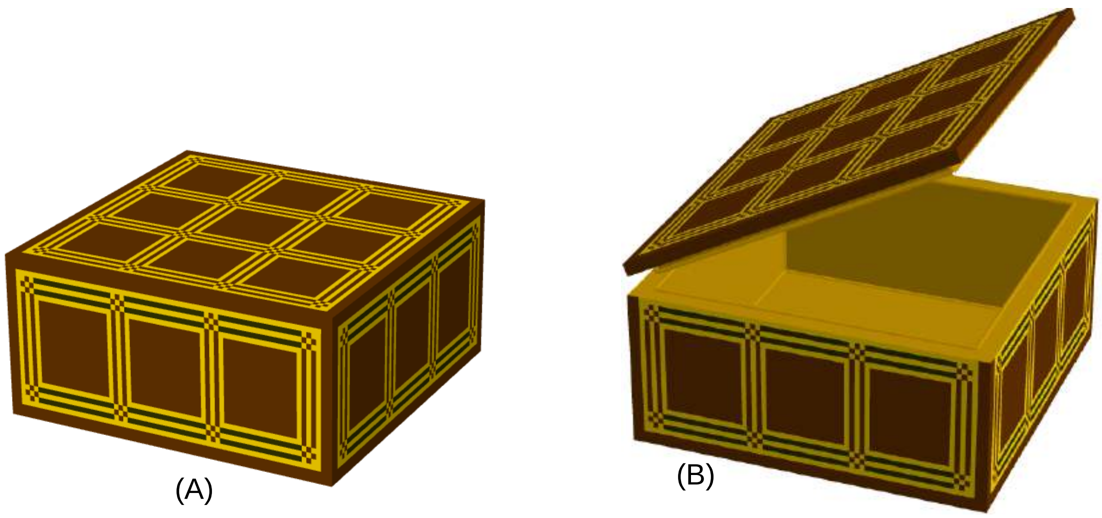


Figura 3: Representação do guarda-joias “*Mosaico*”, fechado (A) e aberto (B), usando o GeoGebra.

Na Figura 4, podemos observar, secção vertical do mosaico com e sem tampa.

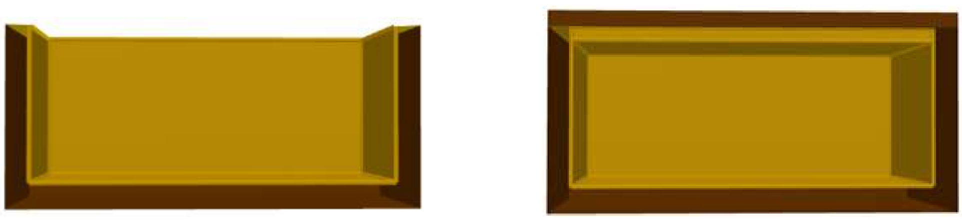


Figura 4: Representação, usando o GeoGebra, de uma secção vertical do *Mosaico* sem tampa e com tampa, respetivamente.

7.1.2. Simetrias na construção e na decoração

Este guarda-joias tem simetria de construção, sendo de referir, simetrias de reflexão e de rotação. Numa vista inferior exterior, ou vista superior exterior apresenta simetrias do tipo D_4 simetria de rotação de grau 4 e admite quatro eixos de reflexão.

As faces do Mosaico (retângulos) apresentam simetria do tipo D_2.

A nível decorativo o objeto possui estrutura matemática. A base superior e a superfície lateral podem ser consideradas simetrias do tipo D_4 do tipo D_2, respetivamente. Dado que a distância entre os centros dos quadrados decorativos se mantêm, quer na tampa, quer nas superfícies laterais, é possível interpretar a decoração como parte de um padrão, na tampa, e como parte de um friso, nas superfícies laterais (apresenta três tipos de simetria: vertical, horizontal e de rotação).

Na Figura 5, podemos observar os centros de rotação de grau 2, de grau 4 e ainda os eixos de reflexão. Os restantes são obtidos por translação. Célula e motivo também se encontram assinalados. A reflexão deslizante também existe, como pode ser observado na Figura 6 a cor de rosa.

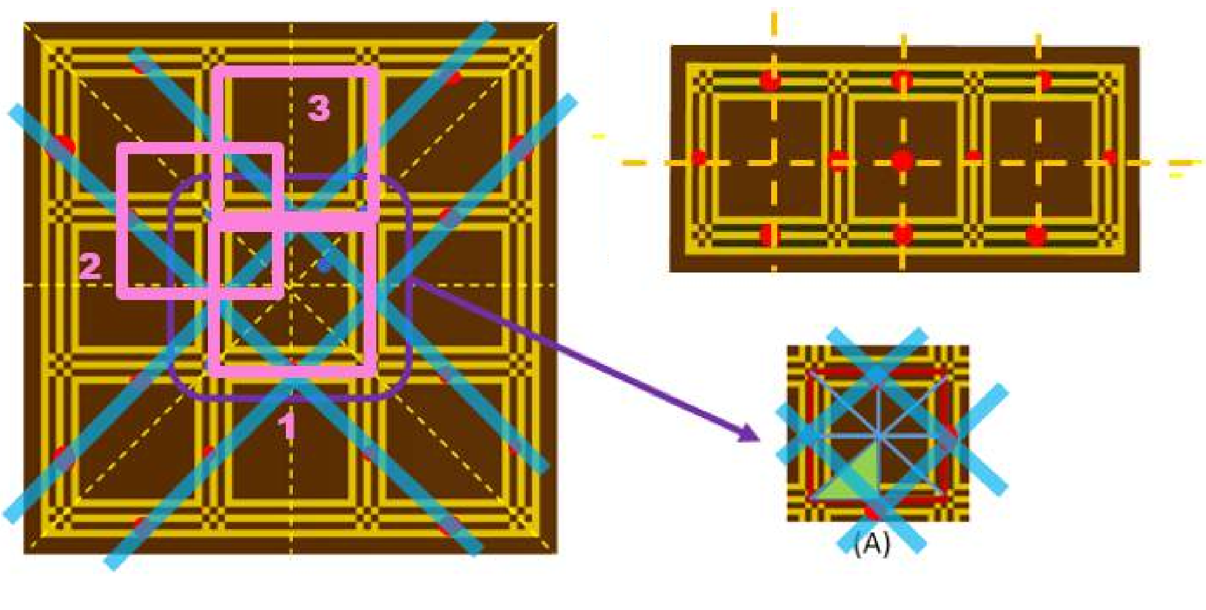


Figura 5: Centro de rotação de grau 2 assinalados a vermelho, centro de rotação de grau 4 a azul e eixos de reflexão a tracejado. Em (A) célula assinalada a vermelho e motivo a verde. Reflexão deslizante a cor de rosa.

7.1.3. Modelo matemático usando GeoGebra

1.Tampa

- Níveis na construção

No GeoGebra, o padrão da tampa é construído por etapas, usando níveis, com sobreposição (Figura 6).

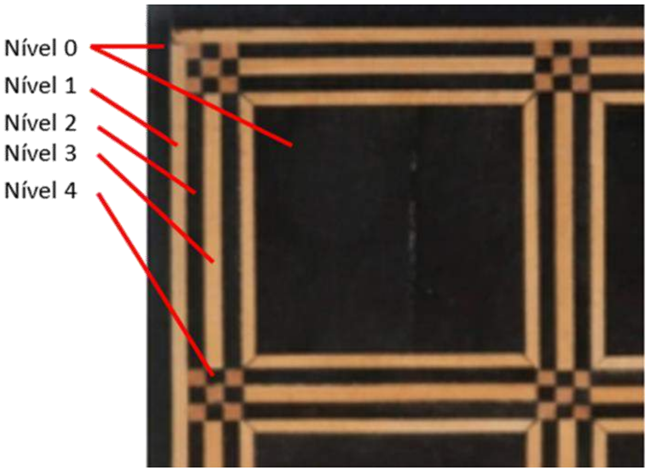


Figura 6: Níveis utilizados na decoração da tampa plana (vista superior)

Inicialmente construímos três retângulos, sobrepostos, tal como se pode observar pela Figura 7. Segue-se uma sequência de translações, por forma a obter o primeiro grupo de quatro retângulos decorativos. Com este grupo é feita uma reflexão, obtendo-se um segundo grupo de quatro retângulos, perpendiculares ao grupo anterior.

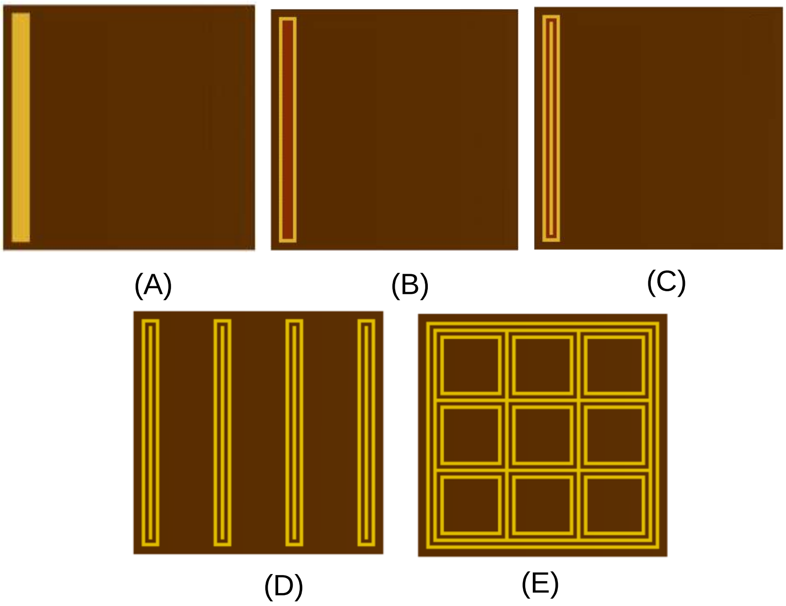
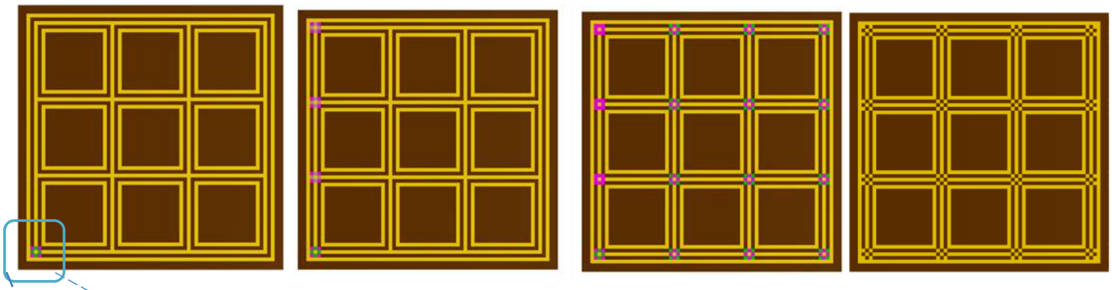
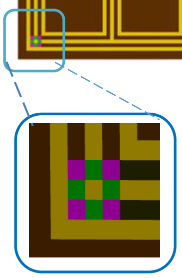


Figura 7: Construção sequencial de parte da decoração da tampa.

Para obter os “quadradinhos” visíveis no padrão da tampa, constroem-se os “quadradinhos” considerados o “original”, obtendo todas os outros por translação e reflexão (Figura 8).

(A) (B) (C) (D)

Figura 8: Construção sequencial das “quadradinhos” decorativos: translação.

2. Superfícies laterais

Ao nível da decoração das superfícies laterais do *Mosaico*, os retângulos horizontais foram obtidos por uma sequência de rotações do retângulo “original” da tampa. Os retângulos verticais, perpendiculares aos primeiros, foram construídos de raiz. O procedimento de construção, é o mesmo referido para a tampa, isto é, o retângulo é obtido por sobreposição de três retângulos. Segue-se uma sequência de translações e uma rotação de 90^0, por forma a obter os retângulos verticais nas quatro superfícies laterais. Esta sequência de construções pode ser observada na Figura 9.

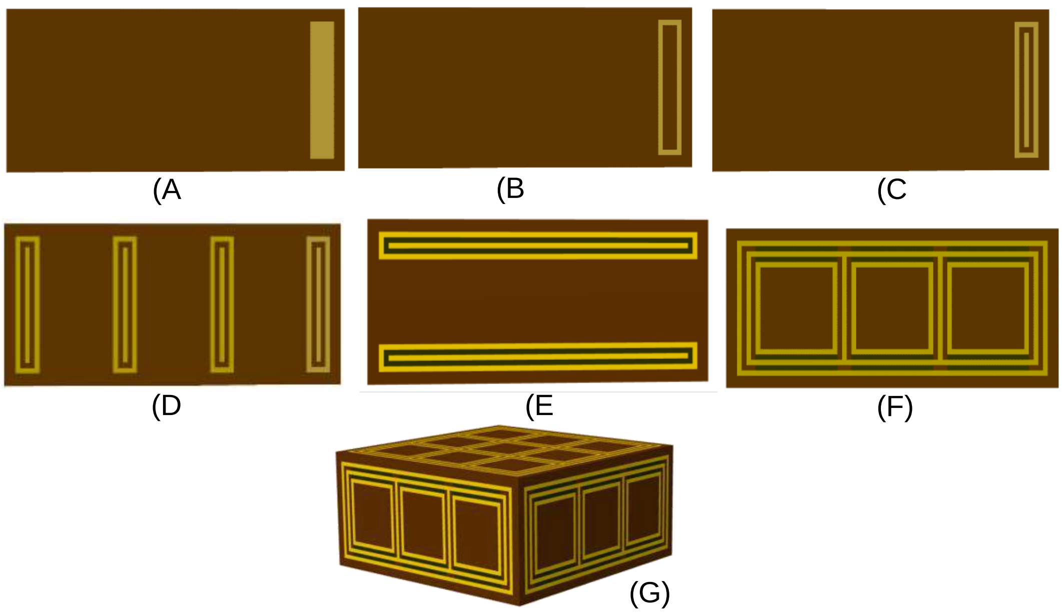


Figura 10: Construção sequencial de parte do friso decorativo da superfície lateral.

Para obter as “cruzes” das superfícies laterais, faz-se uma rotação da “cruz” original da tampa, obtendo-a na superfície lateral, seguem-se translações da mesma e rotações para as outras superfícies laterais, como se pode observar na Figura 10.

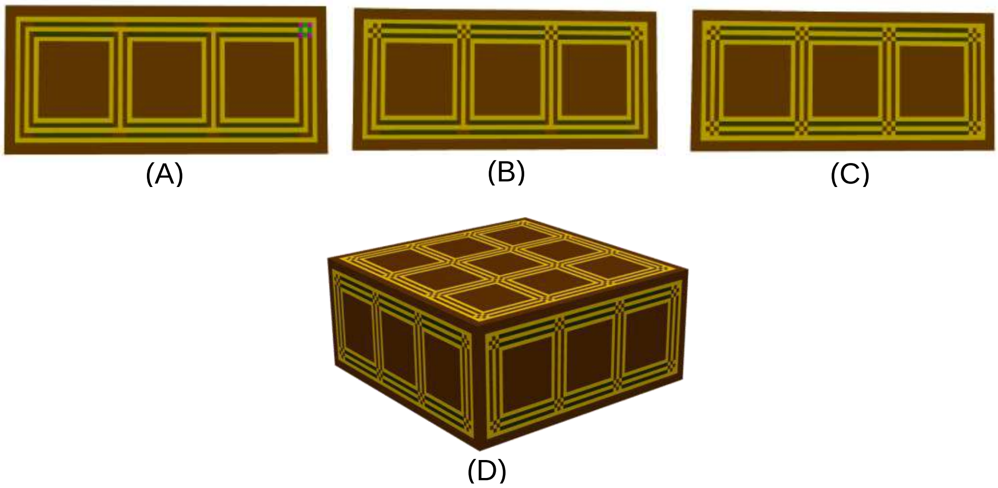


Figura 10: Construção sequencial das “cruzes” do friso decorativo da superfície lateral.

Concluindo, para procedermos no GeoGebra à decoração do *Mosaico* foram aplicadas três tipos de simetrias: translações, reflexões e rotações.

7.2.Fórum/ Fórum

MusA-303
1980 (década / decade)
10,8 x 5,5 cm (diâmetro x altura / $\varnothing \times H$)
madeira / wood

Este guarda-joias é uma peça manufaturada, construída em madeira, folheada a pau-santo e pau-rosa. A tampa é folheada com tiras radiais de pau-santo e pau-cetim.
O autor designou-o por *Fórum*.

Geometricamente, é constituído por duas partes, cofre e tampa, que formam um prisma octogonal reto (oco). A sua base superior corresponde à tampa, composta por dois prismas octogonais retos, um superior, maior, e outro inferior, menor, com a função de encaixe. A tampa separa-se completamente do cofre quando o guarda-joias é aberto.
O interior vazio, com forma semelhante ao guarda-joias, é a parte utilitária da peça. A nível decorativo, possui uma rosácea na tampa e um motivo que se mantém inalterado nas oito faces laterais do cofre, isto é, seis retângulos com cores diferentes, sobrepostos por forma a produzir o efeito final que é um retângulo com várias molduras.

This jewellery box is a handmade piece, made of wood, veneered with rosewood and pau-rosa . The lid is veneered with radial strips of rosewood and satinwood. The author called it "Fórum" (Forum).

Geometrically, it consists of two parts, the vault and the lid, which form a right octagonal (hollow) prism. Its upper base corresponds to the lid, which is made up of two right octagonal prisms, the upper onelarger, and the lower smaller, that together work as a fitting. The lid separates completely from the chest when the jewellery box is opened. The hollow interior, similar in shape to the jewellery box, is the useful part of the piece. In decorative terms, it has a rosette on the lid and a motif which remains unchanged on the eight lateral faces of the vault, i.e., six rectangles of different colours, superimposed in order to produce the final effect, of a rectangle with several frames.

7.2.1. Descrição detalhada

O *Fórum*, prisma octogonal reto, apresenta 5,4 cm de lado e 5,5 cm de altura. O prisma octogonal interior, oco, parte utilitária da peça, tem como medida do lado 4,6 cm e 4,5 cm de altura. A tampa, subdivide-se em dois prismas octogonais retos, um maior, que apresenta de lado 5,4 cm e de altura 0,6 cm, outro menor (encaixe), com o lado de 3,8 cm e de altura 0,3 cm. A parte inferior do guarda-joias é também um prisma octogonal reto, apresenta 4,47 cm de lado e 0,4 cm de altura (https://www.geogebra.org/m/qgvekrkj).

O volume do prisma octogonal interior oco, parte utilitária da peça, é calculado sem descurar o prisma octogonal reto, encaixe da tampa, pelo que apresenta um valor aproximado de 295 cm^3.

As Figuras 1 e 2 apresentam algumas imagens fotográficas do guarda-joias.

Figura 1: Vista exterior superior do *Fórum.*

Relativamente à figura 1, uma reflexão daria a mesma figura com cores invertidas, a que se chama anti simetria.

(A) (B)

Figura 2: Vista superior da tampa (A) e vista lateral (B) do *Fórum*.

Na Figura 3 podemos observar a peça modelada matematicamente recorrendo ao software de matemática dinâmica GeoGebra.

Figura 3: Representação do guarda-joias *Fórum* fechado (A) e aberto (B), usando o GeoGebra.

Na modelação da peça, foram usadas as suas medidas reais e reproduziu-se, o mais fiel possível, o seu interior e o seu exterior. Na Figura 4, podemos observar, uma secção vertical deste guarda-joias com tampa e uma secção vertical da tampa (superior e inferior).

Figura 4: Representação, usando o GeoGebra, de uma secção vertical do *Mosaico* sem tampa (A) e com tampa (B).

7.2.2. Simetrias na construção e na decoração

Este guarda-joias tem simetria de construção, sendo de referir, simetrias de reflexão e de rotação. Numa vista inferior exterior, ou vista superior exterior apresenta de grau 8 e admite oito eixos de reflexão.

Relativamente às superfícies laterais do *Fórum, dado que são* retângulos, são simetrias do tipo D_2.

Ao nível decorativo, possui uma rosácea na tampa e nas oito faces laterais um motivo que se mantém inalterado: seis retângulos sobrepostos com cores e níveis diferentes por forma a produzir o efeito final que é um retângulo com cinco “molduras”.

Os diferentes octógonos decorativos da tampa, são reduções por homotetias do octógono maior relativamente ao centro da caixa, tendo sido aplicadas diferentes cores, e diferentes níveis, a fim de produzir o efeito final.

7.2.3. Modelo matemático usando GeoGebra

1.Tampa e laterais

- Níveis na construção

No GeoGebra, o padrão da tampa e das laterais é construído por etapas, usando níveis, com sobreposição (Figura 5 e 6).

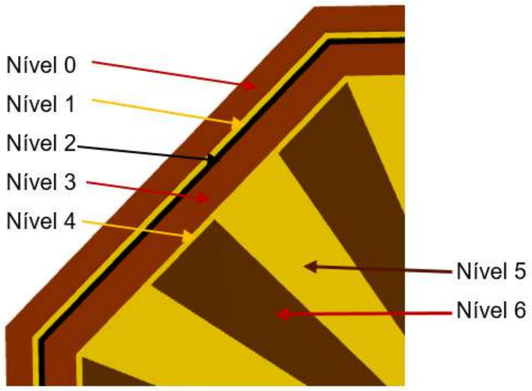


Figura 5: Níveis utilizados na decoração da tampa plana (vista superior)

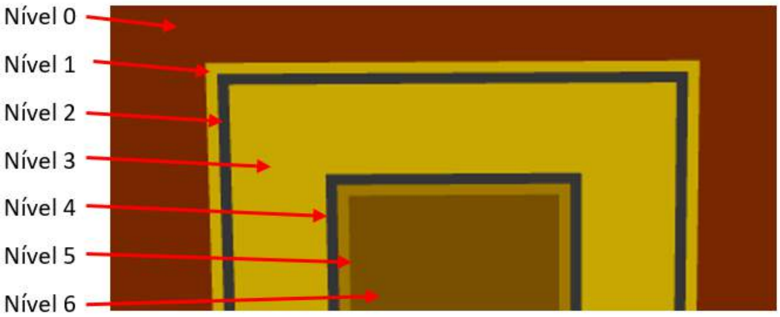


Figura 6: Níveis utilizados na decoração das superfícies laterais.

2. Construção do "friso" e da rosácea da tampa

Na modelação deste guarda-joias, o "friso" da tampa é construído por sobreposição de níveis. Iniciámos por construir seis octógonos, por homotetias do primeiro $(r < 1)$. O octógono de maior origina o bordo que orla a tampa. Os restantes cinco octógonos constituem parte da decoração pretendida que servirá de bordo decorativo da rosácea da tampa (Figura 7)

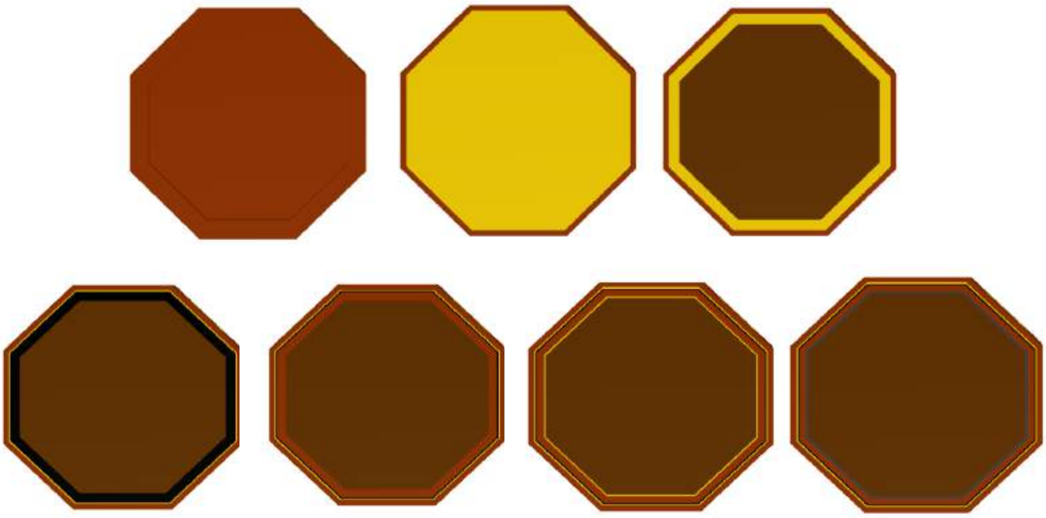


Figura 7: Sequência da construção dos octógonos decorativos da tampa.

A rosácea presente na tampa é então construída, tendo como centro, o centro do guarda-joias, enquadrada no octógono de menor dimensão (Figura 8). A partir dos dois triângulos de cores diferentes, é obtida a rosácea por rotação de grau 8 (45º).

Figura 8: Sequência da construção da rosácea decorativa da tampa.

3.Construção dos retângulos das faces laterais

Nas oito faces laterais deste guarda-joias, há um motivo que se mantém inalterado, isto é, cinco retângulos com cores diferentes, sobrepostos por forma a produzir o efeito final que é um retângulo com várias molduras. Essa sequência de construção pode ser observada na Figura 9.

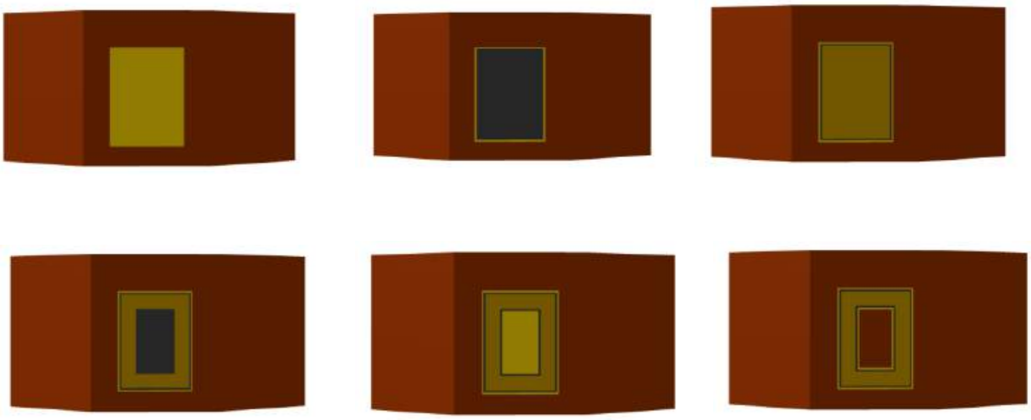


Figura 9: Sequência de construção do retângulo com várias molduras.

Através de uma sequência de rotações, este "retângulo com várias molduras" passa a decorar as oito faces laterais do cofre (Figura 10).

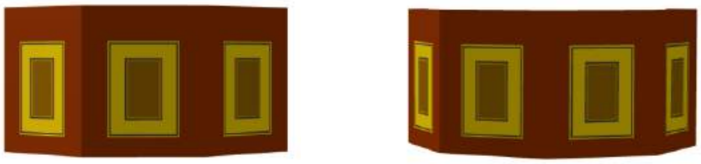


Figura 10: Vista de três faces e de quatro faces, respetivamente.

7.3.Pérola/ Pearl

MusA-299
1980 (década / decade)
4,4 x 4,4 x 2,85 cm (comp.x largura x altura/ LxWXH))
madeira / wood

Este guarda-joias é uma peça manufaturada, construída em madeira, folheada, toda ela, a madrepérola. Devido à sua beleza e aos materiais utilizados, o autor designou-a por *Pérola*.

Geometricamente, é constituído por duas partes, cofre e tampa, ambas ocas e abertas superiormente e, respetivamente, inferiormente. Juntos formam um sólido, que pode ser descrito como um prisma quadrangular reto encimado por um tronco de pirâmide, cuja base coincide com a base do prisma. O cofre e a tampa são definidos pela secção realizada por um plano paralelo às bases, que corta o prisma um pouco abaixo da sua base superior. O interior do guarda-joias, que é a parte utilitária da peça, é constituída pelos interiores do cofre e da tampe e tem forma semelhante à do exterior. Quando o guarda-joias é aberto, a tampa separa-se completamente do cofre.

This jewellery box is a handmade piece, made of wood, totally veneered in mother-of-pearl. Due to its beauty and the materials used, the author called it "Pérola" (Pearl).

Geometrically, it consists of two parts, the vault and the lid, both hollow and open at the top and bottom respectively. Together they form a solid, which can be described as a straight square prism/square cuboid topped by a pyramid trunk, whose base coincides with the base of the prism. The vault and the lid are defined by the section made by a plane parallel to the bases, which cuts the prism a little below its upper base.
The inside of the jewellery box, which is the useful part of the piece, is made by the insides of the vault, and of the lid, and is similar in shape to the exterior. When the jewellery box is opened, the lid separates completely from the vault.

7.3.1. Descrição detalhada

O cofre do *Pérola*, prisma quadrangular reto, de base quadrada, apresenta 4,4 cm de lado e 2,85 cm de altura. O prisma quadrangular interior, oco, parte utilitária da peça, tem como medida do lado 3,6 cm e 1,55 cm de altura. A tampa, subdivide-se em dois troncos de pirâmides quadrangulares retos, um maior, que apresenta de lado 4,4 cm e de altura 1,15 cm, outro menor, com o lado de 3,9 cm e de altura 0,7 cm. A parte inferior do guarda-joias é também um prisma quadrangular reto, de base quadrada e com 4,4 cm de lado e 0,7 cm de altura (https://www.geogebra.org/m/kdzgepxk).

O volume do prisma quadrangular interior oco e do tronco de pirâmide quadrangular interior oco, constituem a parte utilitária da peça, apresentando um valor aproximado de 7 cm^3.

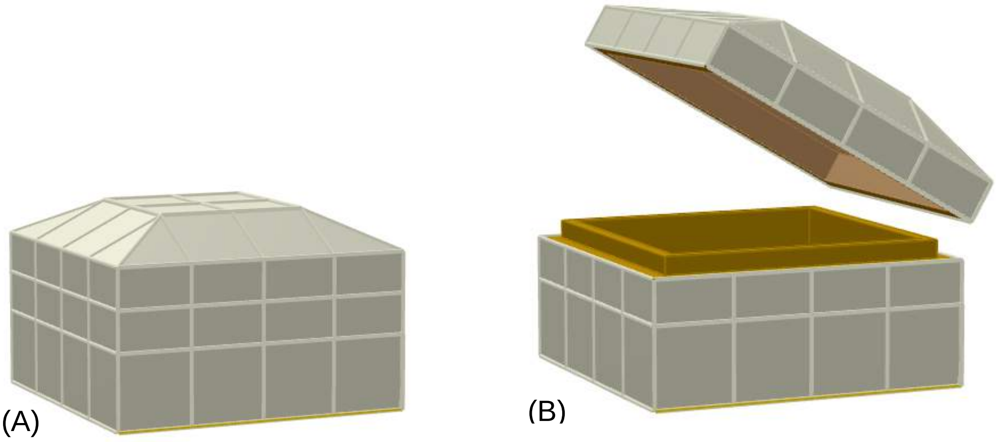
A peça apresenta quatro vistas laterais iguais, que correspondem trapézios.

A Figuras 1 apresenta algumas imagens fotográficas do guarda-joias.

Figura 2: Vista do cofre aberto e Interior da tampa cofre, respetivamente.

A excelência na decoração da tampa e faces laterais, faz jus ao seu nome. A madrepérola reflete frequências diferentes da luz de acordo com a forma como é iluminada, de modo que pode apresentar cores variadas. Esse efeito é bastante agradável à vista.

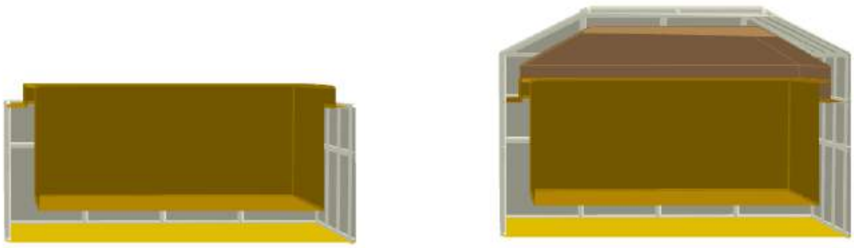
Na Figura 3 podemos observar a peça modelada matematicamente recorrendo ao software de matemática dinâmica GeoGebra.



(A) (B)

Figura 3: Representação do guarda-joias “*Pérola*”, fechado (A) e aberto (B), usando o GeoGebra.

Na Figura 4, podemos observar, uma secção vertical deste guarda-joias com tampa e sem tampa.



(A) (B)

Figura 4: Representação, usando o GeoGebra, de uma secção vertical do *Pérola* sem tampa (A) e com tampa (B).

7.3.2. Simetrias na construção

Este guarda-joias tem simetria de construção, sendo de referir, simetrias de reflexão e de rotação. Numa vista inferior exterior, ou vista superior exterior apresenta simetrias do tipo D_4 e admite quatro eixos de reflexão. As faces do Pérola (retângulos) apresentam simetria do tipo D_2.

7.4.Teatro / Theater

MusA-322
1980 (década / decade)
7,1 x 7,4 cm (diâmetro x altura / ∅ x H)
madeira / wood

Este guarda-joias é uma peça manufaturada, construída em madeira, folheada a olho-de-perdiz e envolvido por nove nervuras verticais e tampa em ébano. Por relembrar a estrutura dos teatros gregos, o autor designou-a de *Teatro*.

Geometricamente, é constituído por duas partes, cofre e tampa. Juntas formam um cilindro (oco), cuja base superior, com um pequeno encaixe, corresponde à tampa. Quando o guarda-joias é aberto, a tampa separa-se totalmente do cofre. Nove prismas quadrangulares equidistantes uns dos outros decoram exteriormente este guarda-joias. A parte utilitária deste guarda-joias corresponde ao interior vazio da peça, que tem também forma cilíndrica.

This jewellery box is a handmade piece, made of wood, veneered in bird´s eye and surrounded by nine vertical ridges with an ebony lid. Reminiscent of the structure of Greek theatres, the author called it "Teatro" (Theatre).

Geometrically, it consists of two parts, the vault and the lid. Together they form a (hollow) cylinder, whose upper base, with a small recess, corresponds to the lid. When the jewellery box is opened, the lid separates completely from the vault. Nine square prisms equidistant from each other decorate the exterior of this jewellery box.
The useful part of this jewellery box corresponds to the hollow inside of the piece, which is also cylindrical in shape.
.

7.4.1 Descrição detalhada

O *Teatro*, cilindro reto, apresenta 6,7 cm de diâmetro e 7,4 cm de altura. O cilindro interior, oco, parte utilitária da peça, tem 5,7 cm de diâmetro e 6,6 cm de altura. A tampa, subdivide-se em dois cilindros retos, com a mesma altura de 0,4 cm, mas com diâmetros distintos, um exterior, com 6,7 cm e outro interior, que encaixa no cofre e apresenta 5,7 cm. Os nove prismas quadrangulares que envolvem o cofre têm 0,5 cm de comprimento, 0,2 cm de largura e 7 cm de altura (https://www.geogebra.org/m/werr44k5).

O volume do cilindro interior oco, parte utilitária da peça, é calculado sem descurar o cilindro reto, encaixe da tampa, pelo que apresenta um valor aproximado de 168 cm^3.

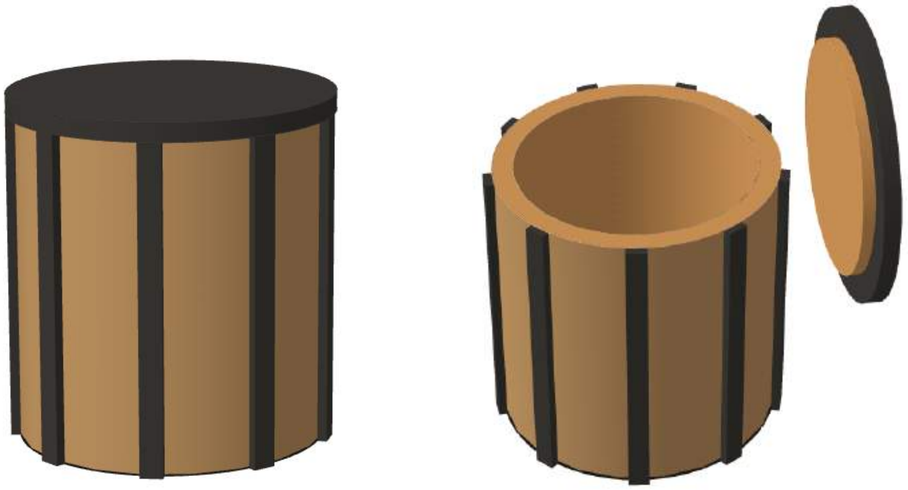
As Figuras 2 e 3 apresentam algumas imagens fotográficas do exterior e do interior do guarda-joias.

(A` (B` (C` (D`

Figura 2: Imagens fotográficas do guarda-joias *Teatro*. Vista (A), superior lateral, (B), lateral, (C) Vista superior sem tampa, (D) vista superior da tampa.

Figura 3: Imagem fotográfica do guarda-joias *Teatro* aberto.

Na Figura 3 podemos observar a peça modelada matematicamente recorrendo ao software de matemática dinâmica GeoGebra.



(A) (B)

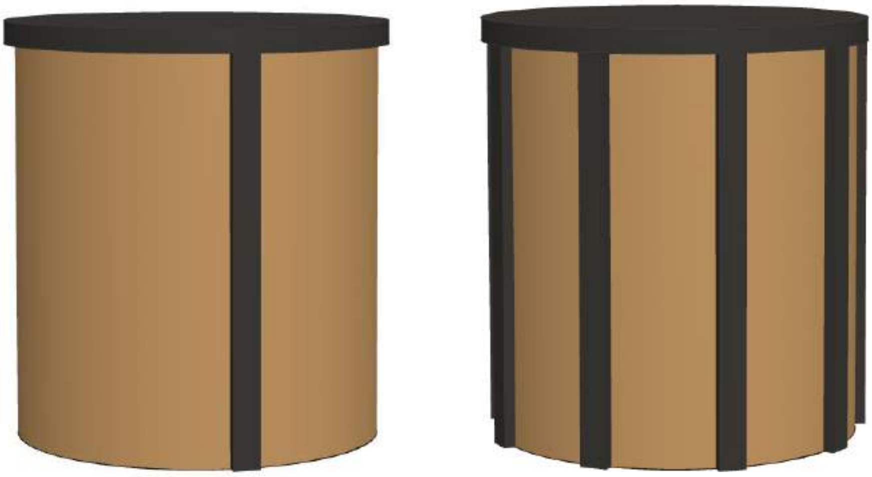
Figura 4: Representação do guarda-joias *Teatro*, fechado (A) e aberto (B), usando o GeoGebra.

Na Figura 5 podemos observar, o guarda-joias transparente, que nos permite observar com clareza o encaixe de parte da tampa (cilindro de menor diâmetro) que encaixa perfeitamente no cilindro interior oco.

Figura 5: Representação da guarda-joias transparente, usando o GeoGebra, para visualizar o encaixe da tampa.

7.4.2. Simetrias na construção

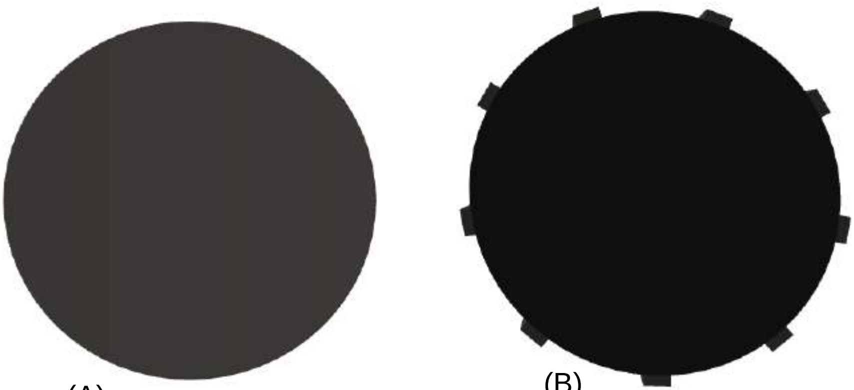
Este guarda-joias tem simetria de construção. O *Teatro* possui estrutura matemática, dado que na sua estrutura mais exterior, os nove prismas quadrangulares são obtidos por repetição do mesmo objeto com uma sequência de rotações de ângulos crescentes múltiplos de 40º, como pode ser observado na Figura 6.



(A) (B)

Figura 6: Fase inicial (A) e fase final (B) da construção primas quadrangulares obtidos por uma sequência de 9 rotações.

Quando observamos esta peça numa vista inferior, ou num corte horizontal, visualizamos, de imediato, uma rosácea com simetria de rotação de grau nove. Numa vista superior apresenta um círculo, isto é, possui simetrias de um círculo (Figura 7).



(A) (B)

Figura 7: Vista exterior superior(A) e inferior (B) do *Teatro*

7.5.Coroa / Crown

MusA-314
1980 (década / decade)
8,8 x 9,58 cm (diâmetro x altura / ∅ x H)
madeira / wood

Este guarda-joias é uma peça manufaturada, construída em madeira, folheada a olho-de-perdiz e orlada com madeira de faia, com uma pega de pau-santo.
O autor designou-a por Coroa, devido à forma da pega na tampa.

Geometricamente, é constituída por duas partes, cofre e tampa. Juntas formam um cilindro (oco), cuja base superior, com um pequeno encaixe, corresponde à tampa. Quando o guarda-joias é aberto, a tampa separa-se completamente do cofre. A pega da tampa, é uma coroa circular, apoiada em quatro pinos (cilindros de pequena dimensão).
A parte utilitária deste guarda-joias é o interior vazio da peça, que também tem forma cilíndrica.

This jewellery box is a handmade piece, made of wood, veneered in bird´s eye and edged with beech wood, with a handle made of rosewood. The author called it "Coroa" (Crown), due to the shape of the handle on the lid.

Geometrically, it consists of two parts, the vault and the lid. Together they form a (hollow) cylinder, whose upper base, with a small recess, corresponds to the lid. When the jewellery box is opened, the lid separates completely from the vault. The handle on the lid is shaped as a circular crown supported by four pins (small cylinders).
The useful part of this jewellery box is the hollow inside of the piece, which is also cylindrical in shape.

7.5.1 Descrição detalhada

O *Coroa*, cilindro reto, apresenta 8,8 cm de diâmetro e 9,58 cm de altura. O cilindro interior, oco, parte utilitária da peça, tem 7,6 cm de diâmetro e 7,7 cm de altura. A tampa, constituída por seis cilindros, quatro da pega e dois cilindros retos, com a mesma altura de 0,4 cm, mas com diâmetros distintos, um exterior, com 7,7 cm e outro interior, que encaixa no cofre e apresenta 7,5 cm. Os quatro cilindros que se encontram na tampa e que suportam a coroa têm 0,96 cm de diâmetro e 0,8 cm de altura. A coroa tem de diâmetro maior 6,8 cm, diâmetro menor, 3,9 cm e de altura 0,28 cm (https://www.geogebra.org/m/rrep8uck).

O volume do cilindro interior oco, parte utilitária da peça, é calculado sem descurar o cilindro reto, encaixe da tampa, pelo que apresenta um valor aproximado de 332 cm^3.

A Figura 2 contém algumas imagens fotográficas do exterior e do interior do guarda-joias.

(B (C

Figura 2: Imagens fotográficas do guarda-joias *Coroa*. (A) Vista do guarda-joias aberto, (B) Vista superior sem tampa, (C) vista superior da tampa.

Na Figura 3 podemos observar a peça modelada matematicamente recorrendo ao software de matemática dinâmica GeoGebra.

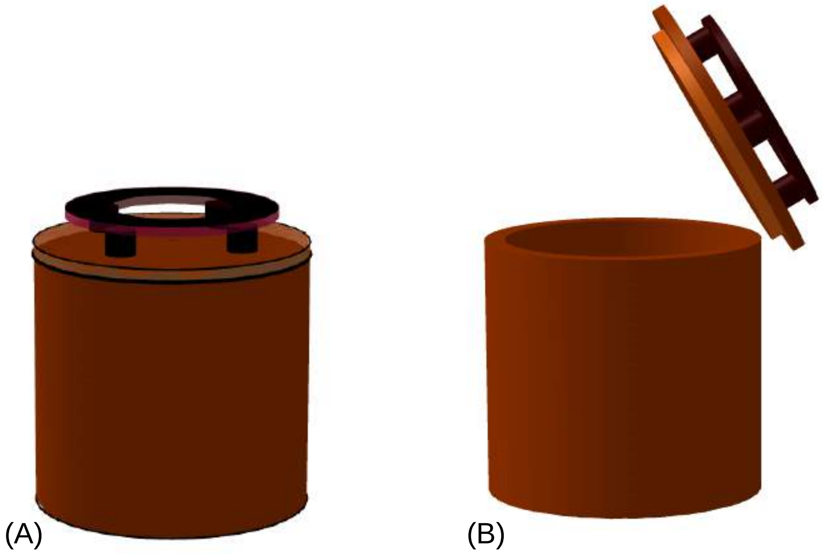


Figura 3: Representação do guarda-joias *Coroa*, fechado (A) e aberto (B), usando o GeoGebra.

Na modelação da peça, foram usadas as suas medidas reais e reproduziu-se, o mais fiel possível, o seu interior, o seu exterior e os prismas quadrangulares que o rodeiam. Na Figura 4 podemos observar, o guarda-joias transparente, que nos permite observar com clareza o encaixe de parte da tampa (cilindro de menor diâmetro) que encaixa perfeitamente no cilindro interior oco.

Figura 4: Representação da guarda-joias transparente, usando o GeoGebra, para visualizar o encaixe da tampa.

7.5.2. Simetrias na construção

Este guarda-joias possui simetria de construção, sendo de referir na tampa, os quatro cilindros exteriores que suportam a coroa apresentam uma simetria de grau 4. Esta peça é um cilindro com simetria rotacional, mas a tampa faz com que a simetria seja de grau 4. Quando observamos esta peça numa vista superior, ou numa vista inferior, visualizamos, de imediato, círculos, isto é, parece possuir simetrias de um círculo (Figura 5), no entanto a coroa (pega da tampa) é suportada por quatro pinos,

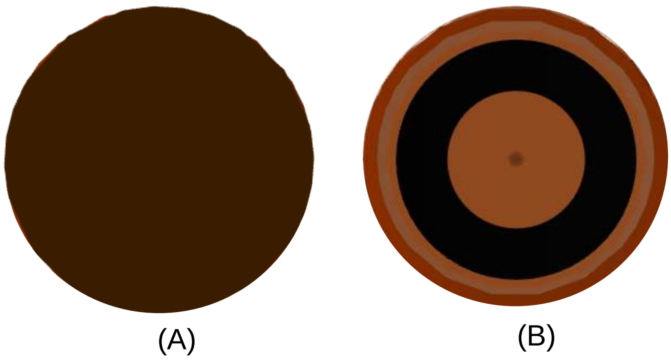


Figura 5: Vista exterior inferior (A) e superior (B) do *Coroa*

8. GeoGebra: Algumas ideias na resolução de desafios

Ao longo de todo este trabalho fomo-nos debatendo com variadíssimos desafios, os quais, na maior parte dos casos, fomos dando solução.

Enumeremos alguns deles:

- Na fase da construção dos sólidos geométricos, a transparência ou a opacidade dos objetos permite-nos fazer opções sobre que superfícies visíveis ou não visíveis, dependendo do objeto em estudo. Quando estamos perante uma caixa e pretendemos ver apenas a parte interior da caixa e não todos os elementos necessários e indispensáveis à construção da caixa, selecionamos todos os objetos e em "Propriedades dos objetos" consideramos todos invisíveis, isto é, só ficarão visíveis aqueles que realmente pretendermos tornar visíveis.

- Situações tivemos, em que, num mesmo plano, tínhamos duas superfícies contíguas de cores diferentes. Para que não houvesse qualquer "quebra" entre ambas, optamos por considerar de espessura zero, os segmentos de reta que as limitam, obtendo desta forma, o efeito visual pretendido;

- A iluminação de objetos no GeoGebra é uma limitação à qual não pudemos fugir, dado que no software existente não nos é permitido iluminar um objeto de outra direção que não seja a definida pelo próprio programa, pelo que, muitas das vezes, optamos por colocar as superfícies pretendidas na "zona iluminada", isto é, vista superior e vista frontal (definida pelo software);

- Na decoração de todos os guarda-joias debatemo-nos com situações em que os diferentes motivos decorativos bem como as cores selecionadas se misturavam, dando um resultado final bastante diferente do pretendido. No entanto, esse desafio foi sendo contornado através da utilização de diferentes camadas (Propriedades dos objetos/Avançado/camadas). Assim, quando pretendemos decorar objetos com diferentes cores, subdividimos a decoração por camadas por forma a que a última cor visível tenha sempre um nível superior à cor sobre a qual se sobrepõe. É de referir que quando se pretendem fazer rotações ou translações, como GeoGebra realiza isometrias de grupos de objetos, é preciso formar grupos de elementos com a mesma cor, mesmo nível, etc.

- Sólidos houve, em que, por motivos decorativos, existiu a necessidade de serem criadas aberturas em superfícies, para que diferentes decorações, em diferentes camadas, ficassem visíveis. Uma vez que o GeoGebra não prevê esta possibilidade para superfícies poligonais ou elipses, foi preciso construir regiões com aberturas usando superfícies paramétricas (em coordenadas polares). Veja-se, por exemplo, o rosto do guarda-joias *Beatriz Costa*;

- No caso do guarda-joias *Solidão*, foi obtida a representação geométrico-artística da letra "S" foi obtida através de curvas de Bézier (curva polinomial expressa como a interpolação cúbica entre alguns pontos representativos, chamados de pontos de controle, utilizada em diversas aplicações gráficas, desenvolvida em 1962 pelo Engenheiro Pierre Bézier);

- Em alguns casos, nas superfícies paramétricas apareceram pequenas regiões sem cor: para ultrapassar essa falha do GeoGebra, foram sobrepostas superfícies (iguais) com diferentes parametrizações, tal como explicado no Capítulo 4.

- Na janela 3D, o GeoGebra não permite controlar os movimentos pelos chamados seletores, tal como acontece na janela 2D. Assim, para todas as animações foram criados "interruptores", com a função ativar as animações pretendidas (caso dos movimentos de abertura e fecho doa guarda-joias ou tornar transparentes os objetos, como no caso do *Teatro*). Na maioria dos casos são esferas que se encontram do lado de fora dos guarda-joias.

9. Conclusões

O GeoGebra possui um elevado potencial de exploração. Potencial esse que foi sendo explorado à medida que os guarda-joias eram analisados e introduzidos neste software. Uma aprendizagem contínua e sempre crescente.

Todo o trabalho de modelação realizado ao longo desta dissertação de mestrado, realizou-me de uma forma pessoal e profissional, permitindo a mobilização de aprendizagens como elemento facilitador das aprendizagens nos alunos.

Perante as dificuldades de aprendizagem em geometria apresentadas pelos alunos, surge a necessidade de se explorarem metodologias de ensino que favoreçam o processo de ensino e de aprendizagem. Neste contexto, a utilização do GeoGebra tornou-se um desafio, uma vez que aprendi a utilizá-lo autonomamente e também porque o apliquei, ao mesmo tempo, no contexto de sala de aula. O facto deste software apresentar um conjunto de comandos de construção muito diretos e simples de aceder, tornou facilitada a abordagem/exploração que fiz do mesmo, bem como, a sua explicitação aos alunos. Permite também que os alunos visualizem, sobre diferentes perspetivas, diversas noções geométricas, o que o torna, instantaneamente no nosso melhor aliado. O impacto visual é de tal forma poderoso, que gera nos alunos um grande entusiasmo, fomentando, o download da APP no smartphone e mais tarde nos seus computadores.

No entanto, o facto dos programas de Matemática atuais serem muito extensos, não nos permite a exploração deste elevado potencial do GeoGebra, razão pela qual, me encontro a preparar um projeto na escola, exclusivamente com o GeoGebra, para poder explorar com os alunos todo esse potencial, promovendo tarefas estimulantes e enriquecedoras de exploração pela descoberta, tal como as tarefas proporcionadas pela exploração do GeoGebra, realizadas pelos próprios alunos, permitindo que estes observem, analisem, relacionem e construam figuras e sólidos geométricos, através da manipulação dos mesmos, conduzindo à identificação de evidências relativas ao benefício da utilização deste software. É por permitir esta noção de espacialidade, que considero imprescindível o trabalho com o software GeoGebra que, ao ultrapassar as dificuldades percetuais dos alunos, facilita a sua aprendizagem.

O Pensamento Computacional e o Currículo da Matemática são já uma tendência internacional, que Portugal acompanhará integrando a computação no ensino da Matemática (projetos STEAM).

Referências bibliográficas

Carvalho,P. e Descalço,L. *Cálculo Integral a várias variáveis – O essencial* Sílabas & Desafios, Unipessoal Lda, (2016)

Lopes,S. *Descobrir a geometria na coleção de Guarda-joias Eng.º Joaquim Capela* GaleRIA. Blogs UA. https://blogs.ua.pt/galeria/?p=5488 ,(2018, May 7).

Lopes,S. *A história dos guarda-joias, segundo Joaquim Domingos Capela*, https://issuu.com/susanalopes26/docs/pequena_hist__ria_de_guarda-j__ias_, (2016,May 2,)

M. Hohenwarter, *GeoGebra,* https://www.geogebra.org/, (2001)

Oliveira, S. 4 fev 2006 Hoje vai falar-se de instrumentos de corda na Casa da Música Jornal Público

Veloso,E. *Simetria e Transformações geométricas. Textos de Geometria para professores*. Lisboa: APM, (2012).

Lista de guarda-joias e links para o modelo 3D

Nome	Secção	Ref. MusA	App GeoGebra
Arte	5.2	MusA-095	https://www.geogebra.org/m/gqwp3evq
Baco	5.4	MusA-268	https://www.geogebra.org/m/cy54nedy
Baú	5.5	MusA-286	https://www.geogebra.org/m/xzu97rvd
Beatriz Costa	6.2	MusA-010	https://www.geogebra.org/m/zmdsmyht
Coroa	7.5	MusA-314	https://www.geogebra.org/m/rrep8uck
Fórum	7.2	MusA-303	https://www.geogebra.org/m/qgvekrkj
Harmonia	5.3	MusA-271	https://www.geogebra.org/m/jpgnzuvk
Medina	6.3	MusA-292	https://www.geogebra.org/m/watvja2n
Mosaico	7.1	MusA-275	https://www.geogebra.org/m/yfsxfasv
Pérola	7.3	MusA-299	https://www.geogebra.org/m/kdzgepxk
Solidão	6.1	MusA-291	https://www.geogebra.org/m/fdyfddu6
Tapete	5.1	MusA-267	https://www.geogebra.org/m/c2fzvggg
Teatro	7.4	MusA-322	https://www.geogebra.org/m/werr44k5