Universidade de Aveiro
2021

Susana Cristina Ferreira de Oliveira Bessa

As TIC e o Scratch na abordagem de temas da Matemática no 2.º Ciclo do Ensino Básico

Universidade de Aveiro
2021

Susana Cristina Ferreira de Oliveira Bessa

As TIC e o Scratch na abordagem de temas da Matemática no 2.º Ciclo do Ensino Básico

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática Para Professores, realizada sob a orientação científica do Doutor Alexandre Madeira, Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Vivemos num mundo que já não recompensa as pessoas apenas por aquilo que sabem – o Google sabe tudo – mas por aquilo que conseguem fazer com isso.

Andreas Schleicher, 2016

o júri

presidente

Professora Doutora Andreia Oliveira Hall
Professora Associada da Universidade de Aveiro

Professora Doutora Maribel Santos Miranda Pinto
Professora Adjunta do Instituto Politécnico de Viseu

Professor Doutor Alexandre Leite de Castro Madeira
Professor Auxiliar em Regime Laboral da Universidade de Aveiro (Orientador)

agradecimentos

Apesar do trabalho desenvolvido no âmbito da elaboração desta dissertação ter sido um trabalho individual, outras pessoas se revelaram fundamentais, em diferentes momentos e por diferentes motivos, para que eu conseguisse concluir esta importante etapa de valorização pessoal e profissional. A essas tão importantes pessoas dirijo os meus sinceros agradecimentos:

Ao Doutor Alexandre Madeira, por ter orientado este trabalho, pela disponibilidade manifestada desde o primeiro momento, pela paciência, por me ter incentivado a continuar quando surgiram dificuldades e por todo o apoio prestado.

Ao Professor Doutor Paulo Almeida, por ter orientado, com grande profissionalismo e sabedoria, o trabalho que realizei no âmbito do Seminário de Matemática para Professores e do qual usei um excerto nesta dissertação.

À Doutora Andreia Hall, pelas palavras de incentivo e por me ter concedido esta oportunidade.

Aos Professores Alzira Cascais e Nuno Monteiro que, apesar do trabalho ter tomado um rumo diferente, se mostraram disponíveis para tudo o que viesse a ser necessário da sua parte.

Às minhas filhas, Matilde e Maria Constança, pois foi nelas que encontrei a força e a coragem necessárias para enfrentar o desânimo e, em especial à Matilde, pela compreensão e por aquele silêncio que usava para enfrentar a minha falta de paciência.

Ao Nuno, pela paciência, pelo apoio nos momentos de desânimo e de angústia e por respeitar as minhas decisões.

palavras-chave

Trabalho interdisciplinar, integração das Tecnologias de Informação e Comunicação, pensamento computacional, algoritmo, programação, Scratch, artefactos digitais, critérios de divisibilidade, escalas.

resumo

Atualmente, entre muitos outros desafios, os professores vêem-se confrontados com a necessidade de adotarem novas dinâmicas de ensino e de aprendizagem interdisciplinares e com o constante apelo ao recurso às tecnologias de informação e comunicação para enriquecerem as práticas letivas. Para além destas exigências, desde 2015 que o Ministério da Educação tem vindo a promover iniciativas para a introdução das Ciências da Computação e da Programação de Computadores nas escolas portuguesas, sendo uma das principais finalidades da programação o desenvolvimento do pensamento computacional. Este trabalho propõe um conjunto de guiões para a criação de artefactos digitais em Scratch por alunos do 2.º Ciclo do Ensino Básico, no âmbito de projetos interdisciplinares, integrando a disciplina de TIC com a Matemática, envolvendo os temas «Critérios de divisibilidade» (5.º ano) e «Escalas» (6.º ano). Esta atividade, tendo em vista a diversificação de estratégias de aprendizagem, assume o princípio de que os professores de Matemática e de TIC possam realizar trabalho interdisciplinar com recurso a ambientes de programação amigáveis a estas faixas etárias, como é o caso do Scratch. Estes formalismos representam uma importante ferramenta para o desenvolvimento do pensamento computacional do aluno do Ensino Básico.

keywords

Interdisciplinary work, integration of Information and Communication Technologies, computational thinking, algorithm, programming, Scratch, digital artefacts, divisibility criteria, scales.

abstract

Currently, among other challenges, teachers are faced with the need of the adopting of new interdisciplinary teaching and learning dynamics, with the raise of using information and communication technologies to enrich their teaching practices. Moreover, since 2015 the Portuguese Education Ministry has been promoting initiatives for the introduction of Computer Science and Computer Programming in Portuguese schools, having the purpose of using the programming practice to promote the development of the computational thinking.This work proposes a set of scripts to guide the creation of digital artifacts with Scratch by 2nd Cycle of Basic Education students, in the context of interdisciplinary projects, integrating the discipline of TIC with Mathematics. The working topics are the "Divisibility criteria " (5th year) and "Scales" (6th year).This activity, by diversifying the learning strategies, assumes the principle that the teachers of TIC and Mathematics shall carry on interdisciplinary work using friendly programming languages for this age group as Scratch. These environments represent an important tool for the promotion of the computational thinking in the student.

ÍNDICE GERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

1. INTRODUÇÃO

Atualmente, a escola depara-se com novos desafios decorrentes da revolução digital e da expansão da sociedade e do conhecimento (Cohen & Fradique, 2018, p. 10).

Neste primeiro capítulo introdutório apresentam-se as linhas gerais que nortearam o desenvolvimento deste trabalho, realizado no âmbito do mestrado em Matemática para Professores da Universidade de Aveiro. Inicialmente, apresenta-se o contexto onde são referidos os factos e motivações que estiveram na sua génese. A essa contextualização segue-se a apresentação dos objetivos e alguma revisão de literatura da aplicação das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) no ensino da Matemática. Finalmente, descreve-se a forma com este documento se encontra estruturado.

1.1. Contexto

Cada vez mais a humanidade vive na incerteza do que será o futuro. Como tal, é cada vez mais urgente desenvolver nos alunos competências que lhes permitam questionar, integrar novos conhecimentos, comunicar com eficácia e resolver problemas com os quais se depararão no seu dia a dia, pela sua vida fora (Decreto-Lei n.55/2018, preâmbulo).

Nesse sentido, têm vindo a surgir novos documentos de orientação curricular, segundo os quais esse desenvolvimento de competências, bem como a concretização de aprendizagens pelos alunos, devem ser orientados, essencialmente, por práticas que visem a articulação dos conhecimentos das várias áreas disciplinares. Desses documentos, destaca-se o Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (Martins et al., 2017), considerado atualmente o referencial do sistema educativo.

O Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, homologado pelo Despacho n.º 6478/2017, de 26 de julho, encontra-se "estruturado em princípios, visão, valores e áreas de competências", sendo um documento de referência para a organização de todo o sistema educativo e para o trabalho das escolas, pois contribui para "a convergência e a articulação das decisões inerentes às várias dimensões do desenvolvimento curricular: o planeamento e a realização do ensino e da aprendizagem, bem como a avaliação interna e externa das aprendizagens dos alunos." (Decreto-Lei n.55/2018, artigo 3.º).

Este documento surgiu para ajudar as escolas a responderem à exigência que lhes foi imposta enquanto um dos principais responsáveis pela preparação dos alunos para responderem aos desafios com que se deparam nos tempos que correm. Essa exigência está claramente expressa no já referido Despacho n.º 6478/2017: “À escola, enquanto ambiente propício à aprendizagem e ao desenvolvimento de competências, onde os alunos adquirem as múltiplas literacias que precisam de mobilizar, exige-se uma reconfiguração, a fim de responder às exigências destes tempos de imprevisibilidade e de mudanças aceleradas.” (Despacho n.º 6478/2017, preâmbulo)

Face à complexidade de tal reconfiguração, a qual implica maior autonomia por parte das escolas para um desenvolvimento curricular ajustado a diferentes contextos e necessidades dos alunos, em 2018 o Decreto-lei n.º 55/2018, de 6 de julho veio estabelecer “o currículo dos ensinos básico e secundário, os princípios orientadores da sua conceção, operacionalização e avaliação das aprendizagens” (Decreto-lei n.º 55/2018, artigo 1.º).

Entre muitos outros desafios, o Decreto-lei n.º 55/2018 veio conferir autonomia às escolas para que estas possam “dispor de maior flexibilidade na gestão curricular, com vista à dinamização de trabalho interdisciplinar, de modo a aprofundar, reforçar e enriquecer as Aprendizagens Essenciais;” (Decreto-lei n.º 55/2018, preâmbulo) e uma das exigências que esta autonomia acarreta é a criação de Domínios de autonomia curricular.

De acordo com o ponto 1 do artigo 10.º da Portaria n.º 223-A/2018 de 3 de agosto, (que regulamenta as ofertas educativas do ensino básico, previstas no n.º 2 do artigo 7.º do Decreto-lei n.º 55/2018, de 6 de julho) “Os domínios de autonomia curricular (DAC) constituem uma opção curricular de trabalho interdisciplinar e ou articulação curricular (…)”. No ponto 2 do mesmo artigo regulamenta-se que “O trabalho em DAC tem por base as Aprendizagens Essenciais com vista ao desenvolvimento das áreas de competências inscritas no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória” (Portaria n.º 223-A/2018, artigo 10.º).

Há a salientar que a Portaria n.º 223-A/2018, de 3 de agosto, constitui mais um importante documento de orientação curricular da atualidade a ter em conta.

Apesar de ser urgente a reconfiguração da escola, a complexidade de todas as exigências que, por inerência, são colocadas aos professores, têm levado a que o processo seja mais demorado do que o desejado. Por outro lado, continua a sentir-se alguma resistência por parte dos professores em se envolverem nesse processo, pelo que as práticas usadas continuam a ser, ainda, muito centradas nas especificidades da disciplina de cada um.

Como referem Cohen e Fradique (2018), “é necessária a adoção de novas dinâmicas de ensino e de aprendizagem, interdisciplinares, integradas, relacionadas com o meio envolvente, que venham quebrar as rotinas edificadas e enraizadas associadas a uma gramática escolar vigente há muito tempo nas nossas escolas" (p. 61).

O intuito de contribuir para quebrar essas rotinas, "romper com a estandardização do currículo" (Cohen & Fradique, 2018, p. 15), e corresponder à exigência da dinamização de trabalho interdisciplinar, foi um dos fatores motivacionais que levaram a que se desenvolvesse este trabalho. Outro foi, como referem Cohen e Fradique (2018), o constante apelo à implementação de metodologias promotoras de aprendizagens ativas recorrendo às tecnologias de informação e comunicação – "a tecnologia deve ser integrada, de forma eficaz, no currículo e, consequentemente, nas aulas"; "a tecnologia deverá enriquecer as práticas letivas, de modo a promover aprendizagens significativas, superando a visão meramente instrumental das TIC" (p. 66). E, aliado a este, existiu um terceiro fator motivacional, o qual se prende com a incorporação do pensamento computacional na disciplina de Matemática. De acordo com Wing (2006), o pensamento computacional representa uma atitude e um conjunto de competências universalmente aplicáveis, que todos deveriam ansiar por aprender e utilizar (p. 33). Weintrop et al. (2016), defendem a inclusão do pensamento computacional nas salas de aula de Matemática e Ciências, por considerarem que existe uma relação recíproca, ao nível da aprendizagem, entre pensamento computacional e os domínios da Matemática e das Ciências; por essa inclusão ter em conta a preocupações de chegar a todos os alunos e de se ter professores proficientes e por colocar a educação da Matemática e das Ciências mais de acordo as atuais práticas profissionais nesses campos (Weintrop et al., 2016, p. 143). De um modo geral, "a introdução do pensamento computacional na escola e no currículo constitui um desafio a todos os agentes educativos e em todos os planos do sistema educativo" (Ramos & Espadeiro, 2014, p. 21).

1.2. Objetivos

Face ao anteriormente exposto, assumiu-se como principal objetivo deste trabalho:

– Construir guiões para promover a criação de artefactos digitais em Scratch por alunos do 2.º Ciclo do Ensino Básico, no âmbito de projetos interdisciplinares, integrando a disciplina de TIC e envolvendo os temas matemáticos «Critérios de divisibilidade» (5.º ano) e «Escalas» (6.º ano), com vista à diversificação de estratégias de aprendizagem.

Inicialmente pretendia-se desenvolver um estudo com o objetivo de investigar o impacto de uma abordagem interdisciplinar do tema «Escalas» integrando as disciplinas de Matemática, Educação Visual (EV) e Tecnologias de Investigação e Comunicação (TIC), na construção de conhecimentos relacionados com escalas, com alunos de uma turma do 6.º ano. No entanto, os constrangimentos inerentes à situação pandémica que se tem vivido desde março de 2020, e muito presentes ao longo de todo o ano letivo de 2020/2021, nomeadamente: confinamentos da comunidade escolar, isolamentos profiláticos de turmas inteiras e/ou de alunos e professores e condicionamentos ao nível da utilização de determinados espaços na escola, como por exemplo, de salas específicas, como as salas de TIC, não permitiram que esse estudo se desenvolvesse, perdendo-se a oportunidade de levar a experiência para o campo.

Em virtude dessa situação, e dada a importância e pertinência dos motivos que haviam levado à escolha do tema, optou-se por redefinir objetivos e desenvolver um trabalho de cariz mais teórico, o qual visa, essencialmente, mostrar que é possível um(a) professor(a) de Matemática realizar trabalho interdisciplinar integrando a disciplina de TIC, através do recurso a "guiões, mais abertos ou fechados, atendendo às características do trabalho a desenvolver e ao perfil dos alunos envolvidos" (Cohen & Fradique, 2018, p. 65).

1.3. Adequação da temática escolhida no contexto do 2.º Ciclo

1.3.1. A aplicação das TIC no ensino da Matemática

"A tecnologia deverá enriquecer as práticas letivas, de modo a promover aprendizagens significativas, superando a visão meramente instrumental das TIC."

(Cohen & Fradique, 2018, p. 66)

Atualmente, as tecnologias ocupam um lugar privilegiado na chamada sociedade do conhecimento, sendo os estudantes e os professores seus utilizadores em contextos diversos e com diferentes finalidades. Portanto, "não é possível (nem desejável) que esta influência termine abruptamente à porta da escola. Tal seria aliás, contraproducente e paradoxal face ao papel da própria escola" (Ramos & Espadeiro, 2014, p. 4). De acordo com estes autores, cabe à escola proporcionar aos alunos uma educação que caracterizam como sendo:

> "uma educação moderna e atualizada, incluindo propostas que permitam às crianças e jovens aprender a usar a tecnologia de forma inovadora e criativa, aprender a conhecer e

> a usar as tecnologias, aprender a programar, aprender a ser e a estar informado, aprender a construir novo conhecimento com recurso às tecnologias disponíveis (…) (Ramos & Espadeiro, 2014, p. 5).

Portanto, como referem Monteiro et al. (2019), torna-se necessário explorar como é que se podem integrar na educação, de forma inclusiva, as mais recentes abordagens educativas à tecnologia, entre as quais se encontram a integração do pensamento computacional, da programação e da robótica (p. 742).

Miranda-Pinto e Osório (2016) referem que foi nos anos 80 que "surgiram as primeiras investigações realizadas por Papert, sobre o pensamento computacional" (p. 1566). Usando algumas ideias defendidas por Papert, Miranda-Pinto e Osório (2016) acrescentam que "ao ensinar um computador a «pensar», a criança embarca numa exploração sobre a forma como ela própria pensa. Pensar sobre a forma de pensar faz com que a criança se tornar um verdadeiro epistemólogo, uma experiência que poucos adultos tiveram" (Papert, 1985, as cited in Miranda-Pinto & Osório, 2016).

É importante referir ainda que, de acordo com Papert (1998), qualquer criança estabelece facilmente uma relação com o computador, seja qual for o seu extrato social ou cultural.

Referindo-se ao contacto da criança com a linguagem computacional e citando também Papert, Guerra (2016) acrescenta que esse contacto pode contribuir para atingir níveis de conhecimento complexos de uma forma natural (p.14). "A metáfora do computador como uma entidade que fala uma linguagem Matemática coloca o aprendiz numa nova qualidade de relacionamento com um importante domínio do conhecimento" (Guerra, 2016, Papert, 1998).

Segundo Miranda-Pinto e Osório (2016), estas "ideias sobre aprendizagem da programação" estão na génese de "investigações na comunidade científica, que nos levam a refletir sobre a necessidade de integrar o pensamento computacional, a programação e a robótica nas atividades do dia a dia na educação de infância" (p. 1566), o que mostra que existem experiências realizadas com crianças ainda mais novas do que aquelas que frequentam o Ensino Básico.

Monteiro et al. (2019), referem que os "defensores desta posterior abordagem se baseiam no trabalho de Papert, nomeadamente na sua teoria construtivista. Nesta perspetiva, a tecnologia cria configurações apropriadas e multifacetadas para promover a aprendizagem «pelo fazer». Trata-se de construir conhecimento em vez de transmitir conhecimento" (p. 743).

Para Ramos e Espadeiro (2014), o interesse que o pensamento computacional tem recebido da comunidade científica e educativa "resulta, em boa parte, da chamada de atenção de Jeannete

Wing que, através do texto seminal *Computational Thinking*, escrito em 2006 (…) reintroduziu o conceito e reclamou o seu uso e adopção por todos os cidadãos, incluindo jovens e crianças" (p. 5): "*Computational Thinking represents a universally applicable attitude and skill set everyone, not just computer scientists, would be eager to learn and use"* (Wing, 2016, p. 33).

De acordo com Wing (2006), o pensamento computacional envolve a resolução de problemas, a conceção de sistemas e a compreensão do comportamento humano, baseando-se nos conceitos fundamentais das ciências da computação (p. 33). Este tipo de pensamento é constantemente aplicado na resolução de problemas do mundo real." (Jesus et al., 2016, p .6). Perante a necessidade de se resolver determinado problema, pode-se perguntar quão difícil é resolvê-lo e qual é a melhor forma de o resolver. As ciências da computação assentam em bases teóricas sólidas para responder com precisão a essas questões. Mas, pensar como um *computer scientist* significa mais do que ser capaz de programar um computador. Requer pensamento a múltiplos níveis de abstração, com o objetivo de resolver os problemas de forma eficiente e criativa. (Wing, 2006, pp. 33 e 34).

Shute et al. (2017) apresentam resumidamente os cinco processos cognitivos que, de acordo Wing (2006), o pensamento computacional envolve:

"1. Reformulação de problemas – Reformular um problema num problema solúvel e familiar.

2. Recursão – Construir um sistema de forma incremental, baseando cada iteração na informação da iteração anterior.

3. Decomposição do problema – Dividir o problema em unidades manipuláveis.

4. Abstração – Modelar os aspetos centrais de problemas complexos ou sistemas.

5. Testagem sistemática – Tomar ações propositadas para obter soluções." (Shute et al., 2017, p. 145)

E comparam pensamento computacional e pensamento matemático, tal como se pode observar na figura 1.

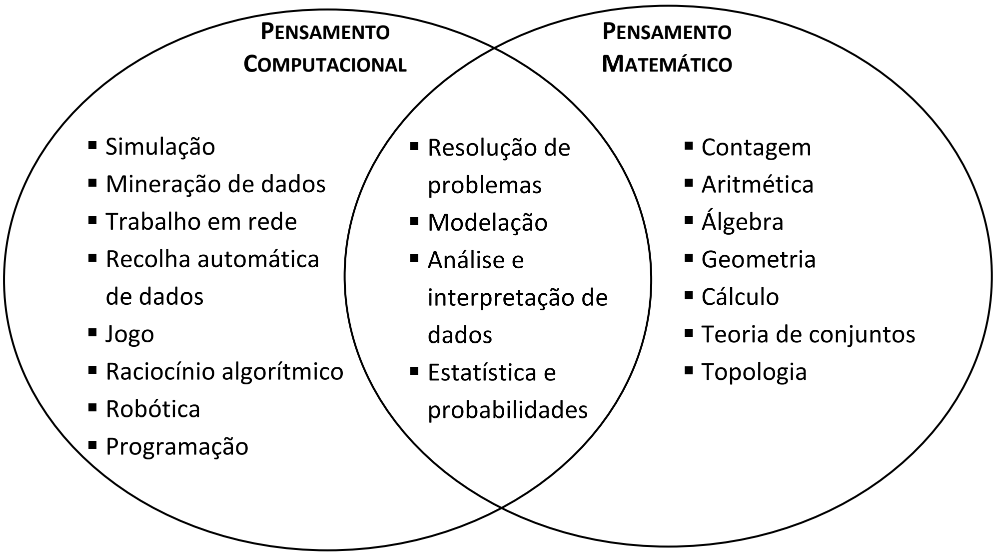


Figura 1 – Similaridades e diferenças entre o pensamento computacional e o pensamento matemático. (Shute et al*.*, 2017, p. 147, adaptado de Sneider *et al*., 2014).

Weintrop et al. (2016), os quais defendem no seu artigo a inclusão do pensamento computacional nas salas de aula de Matemática e Ciências, dizem encontrar três benefícios da incorporação do pensamento computacional nestas disciplinas. De acordo com estes autores, essa incorporação:

1. baseia-se na relação recíproca que existe, ao nível da aprendizagem, entre pensamento computacional e os domínios da Matemática (c. f. figura 1) e das Ciências;
2. aborda as preocupações de chegar a todos os alunos e de se ter professores proficientes;
3. coloca a educação da Matemática e das Ciências mais de acordo as atuais práticas profissionais nesses campos (Weintrop et al., 2016, p. 143)

De facto, existe um paralelismo entre os anteriormente citados cinco processos cognitivos que o pensamento computacional envolve, a comparação que é apresentada na figura 1 entre pensamento computacional e pensamento matemático e uma das principais finalidades que norteiam o ensino da Matemática na escolaridade básica – "Promover a aquisição e desenvolvimento de conhecimento e experiência em Matemática e a capacidade da sua aplicação em contextos matemáticos e não matemáticos" (Direção Geral da Educação [DGE], 2018a, p. 2), de acordo com a qual se pretende que os alunos:

> "compreendam os procedimentos, técnicas, conceitos, propriedades e relações matemáticas, e desenvolvam a capacidade de os utilizar para analisar, interpretar e resolver situações em contextos variados; desenvolvam capacidade de abstração e

> generalização e de compreender e elaborar raciocínios lógicos e outras formas de argumentação matemática; desenvolvam a capacidade de resolver e formular problemas, incluindo os que envolvem áreas matemáticas diferentes e problemas de modelação matemática (…)" (Direção Geral da Educação [DGE], 2018a, p. 2).

Atualmente, os professores deveriam incentivar os alunos do Ensino Básico a «pensar computacionalmente» e promovem atividades para que esses alunos "além de utilizarem ferramentas e ambientes de desenvolvimento de *software* – como o Scratch – e informações diversas, passem a criar com estas ferramentas" (Jesus et al*.,* 2016, p. 7). Wing (2006) defende mesmo que "para ler, escrever e para a aritmética, devemos acrescentar o pensamento computacional à capacidade analítica de cada criança" (p. 33).

A principal finalidade do ambiente Scratch ao qual Jesus et al. (2016) fazem referência é ajudar os jovens a aprender a pensar criativamente, raciocinar sistematicamente e trabalhar em colaboração, sendo, portanto, adequado para facilitar o pensamento computacional. É fácil de usar devido ao seu método de programação por «drag-and-drop», e fornece um ambiente de aprendizagem onde os alunos se envolvem em contextos específicos (Shute et al., 2017, p. 147).

No caso específico da Matemática, o Scratch pode ser utilizado para conceber jogos para desenvolver conceitos matemáticos. Os estudantes podem utilizar, por exemplo, conceitos de medida tais como coordenadas, ângulo e medidas de comprimento. Além disso, facilita a resolução criativa de problemas, o raciocínio lógico, e encoraja a colaboração. (Calder, 2010, p. 9)

No seu artigo, Calder (2010) investiga de que forma o pensamento matemático emerge quando as crianças trabalham com Scratch. Nele descreve como é que os alunos de uma classe do 6.º ano utilizaram o Scratch para conceber uma atividade para alunos do 1.º ano, relacionada com um tema ou um conceito matemático, e mostra como isso facilitou um efetivo processo de resolução de problemas (p. 12).

Calder (2010) verificou que o pensamento dos alunos do 6.º ano evoluiu e o os jogos tornaram-se mais refinados à medida que refletiam sobre o feedback que iam recebendo e que podia ser: feedback visual imediato intrínseco ao programa, à medida que alteravam os seus códigos de programação; feedback de outros alunos do mesmo grupo; feedback e sugestões dos professores e feedback dos outros alunos da turma aquando da apresentação dos projetos uns aos a outros. De acordo com o autor, o pensamento desses alunos evoluiu ao longo do processo de resolução de problemas. Os alunos usaram a lógica e o raciocínio para avaliar e interpretar a situação, antes de redefinirem as suas sub-metas no projeto; fizeram generalizações a partir de uma série de ações e, após reflexão, determinaram o tipo de código que produziu o efeito desejado. Por outro lado, os alunos do 1.º ano usaram o pensamento matemático para fazer as tarefas e jogos que tinham sido programadas para eles (pp. 13 e 14).

Um outro projeto que mostra os benefícios da criação de artefactos em Scratch no desenvolvimento do pensamento matemático é o de Benton et al. (2017). Intitulado *ScratchMaths project*, consistiu em conceber materiais curriculares para apoiar a aprendizagem da Matemática através da programação, por alunos com idades entre os 9 e 11 anos (p. 115). De acordo com este estudo, mais centrado na ação do professor, as atividades matemáticas com recurso ao Scratch permitem aos professores adaptarem o seu estilo de ensino às características individuais dos seus alunos e, ao mesmo tempo, lidar tanto com o conhecimento matemático como com o pensamento computacional (Benton et al., 2017, p. 136).

As conclusões dos estudos apresentados anteriormente permitem, então, constatar que:

> "A introdução de atividades educativas na escola e no currículo (em contextos formais, não formais ou informais) baseadas no pensamento computacional, pode constituir um fator motivacional e uma mais-valia para crianças e jovens, através da adoção de recursos, ferramentas e ambientes computacionais que explorem o potencial de estratégias e que utilizem o pensamento computacional como estímulo à curiosidade, à experimentação, à colaboração e interação social, à resolução de problemas e à aprendizagem de uma linguagem e de uma gramática fundamental no futuro das crianças e dos jovens" (Ramos & Espadeiro, 2014, p. 20).

1.4. Estrutura da dissertação:

O texto desta dissertação estende-se por mais quatro capítulos.

- No capítulo 2, e já no âmbito da interdisciplinaridade com TIC por meio da programação em Scratch, faz-se uma abordagem a conceitos básicos relacionados com Algoritmia e programação, tais como algoritmo; faz-se referência à introdução da programação no Ensino Básico e explica-se o que é o Scratch, quais as principais funcionalidades e a sua gramática.

- No capítulo 3, faz-se uma revisão dos conceitos matemáticos abordados neste trabalho (critérios de divisibilidade, estudados ao nível do 5.º ano, e proporcionalidade direta e escalas, no 6.º ano).
- No Capítulo 4, reflete-se sobre a importância da planificação do trabalho interdisciplinar, fala-se das etapas do estudo (ainda que a experiência não tenha sido levada para o campo e são apresentadas as propostas de guiões, dois para 5.º e outros dois para 6.º ano, para a criação, pelos alunos, de animações em Scratch envolvendo os dois temas matemáticos anteriormente referidos, integrando as disciplinas de Matemática e de TIC. No final deste capítulo apresentam-se os quatro guiões elaborados para esse efeito.
- Por fim, no Capítulo 5, são apresentadas as conclusões e reflexões inerentes ao trabalho realizado, bem como sugestões para futuros projetos.

2. A PROGRAMAÇÃO E O PENSAMENTO COMPUTACIONAL NO 2.º CICLO

"A essência do pensamento computacional é, de facto, pensar em dados, ideias, modelos e soluções para a resolução de problemas"

(Jesus et al., 2016, p. 7).

2.1. Algoritmia e programação – Noções essenciais

As competências computacionais são cada vez mais importantes na resposta aos desafios profissionais e pessoais da sociedade atual e é esperado que essa importância se acentue nos próximos anos, nomeadamente no que diz respeito às competências em termos da algoritmia e da programação de computadores as quais, futuramente, ainda que sem grande complexidade, irão revelar-se essenciais em qualquer emprego (Gomes & Santos 2019, p. 1).

> "Com a massificação dos computadores e dos sistemas operativos inerentes, o raciocínio computacional e a algoritmia deixaram de estar ao alcance de apenas uma minoria de técnicos altamente especializados, passando a fazer parte do quotidiano de um público cada vez mais vasto (de tal forma que, desde 2015, os alunos dos 3.º e 4.º anos de escolaridade das escolas públicas portuguesas desenvolvem aprendizagens de iniciação à programação, num projeto-piloto promovido pela Direção-Geral da Educação)" (Gomes & Santos, 2019, p. 1).

No sentido de preparar os nossos jovens, desde o ensino básico, para este desafio surgiram inúmeras iniciativas de iniciação à programação, não apenas com o objetivo de desenvolverem competências em termos da algoritmia e da programação de computadores, como já foi anteriormente referido, mas também com o objetivo de desenvolver neles a sua criatividade e promover o raciocínio lógico e o pensamento computacional. De referir que, no ano letivo 2017/2018, surgiu também promovida pela Direção-Geral da Educação, a iniciativa "Programação e Robótica no Ensino Básico - Probótica, que veio estender as atividades desenvolvidas no âmbito da programação e robótica aos 2.º e 3.º ciclos do ensino básico. Sobre estas duas iniciativas falar-se-á um pouco mais em pormenor no capítulo 2.

Nas secções seguintes serão apresentadas, de uma forma sucinta, algumas definições relacionadas com a algoritmia e programação.

2.1.1. O que é a Algoritmia

"A algoritmia é uma ciência basilar na área das ciências da computação, e o seu entendimento poderá ser muito relevante no desenvolvimento de competências noutras áreas do conhecimento."

(Vasconcelos & Carvalho, 2005, p. 21)

A Algoritmia é um pilar fundamental das ciências da computação, entenda-se o "conjunto de teorias, regras, práticas, métodos e ferramentas que permitem a análise, a representação e a implementação de processos sistemáticos que descrevem e transformam dados em informação" (Vasconcelos & Carvalho, 2005, p. 21).

No caso particular da Algoritmia, esta "estuda e investiga a sintaxe e a semântica de expressões e instruções simbólicas que, em conjunto com as estruturas de dados que representam entidades do mundo real, permitem a resolução de problemas associados a diferentes domínios" (Jesus et al., 2016, p. 8), tendo por base a lógica matemática e a álgebra linear (Vasconcelos & Carvalho, 2005, p. 21). E como refere Vasconcelos (2015), "o seu entendimento poderá ser muito relevante no desenvolvimento de competências noutras áreas do conhecimento" (p. 8).

A Algoritmia centra-se na forma como são representadas entidades e objetos reais através de estruturas de dados e não na forma como essas entidades e objetos reais são armazenados fisicamente na memória do computador (Jesus et al., 2016, p. 9).

A propósito da Algoritmia e estruturas de dados, Vasconcelos (2015) enumera três passos e dimensões fundamentais na abordagem algorítmica:

"1) Descrever de forma estruturada o problema. Este passo envolve capacidades cognitivas de aquisição (e eliciação) de conhecimento, formação de conceitos, assim como de tarefas de explicitação.

2) Desenvolver e especificar um esquema mental (modelo) para a resolução do problema. Este passo envolve essencialmente tarefas de modelação, representação de dados e raciocínio.

3) Especificar (pseudocódigo e/ou linguagem de programação) a solução. Este passo envolve competências de raciocínio lógico (matemático) e representação (e manipulação) de estruturas de dados." (Vasconcelos, 2015, p.8)

2.1.2. Noção de algoritmo e Programação

"Um programa de computador não existe sem um algoritmo associado e especificado."

(Vasconcelos, 2015, p.8)

Como referem Gomes e Santos (2019), o conceito de algoritmo existe desde a Antiguidade, sendo que há já dois mil anos atrás era usado pelos matemáticos gregos. No entanto, "só a partir de meados do século XX é que a massificação dos computadores e das ciências da computação levou a uma mais ampla divulgação do seu significado, sendo considerado o fundamento de qualquer programa de computador, simples ou complexo" (p. 2).

Como é referido por Jesus et al. (2016) "A noção de algoritmo não é exclusiva das Ciências da Computação e da Programação de computadores" (p.8). Talvez exemplo mais evidente que se possa apresentar para o provar é o dos algoritmos usados para determinar somas, diferenças, produtos e quocientes. No entanto, atualmente a Engenharia de Software e a Programação é um dos campos de aplicação de algoritmos com grande visibilidade.

Ao definir o conceito de algoritmo, Vasconcelos (2015) começa por dizer que: "Um algoritmo é uma representação procedimental da solução de um determinado problema" (p. 10).

Tentando ser um pouco mais esclarecedor, Vasconcelos (2015) acrescenta que "definir um algoritmo para um dado problema significa a definição de uma solução para o problema e especificá-la numa sequência de ações" (p. 10). De referir, ainda, que este autor considera a fase de definição de algoritmos para resolução de problemas como sendo uma fase fundamental no processo de desenvolvimento de um *software* (p. 10).

De um modo mais conciso, Gomes e Santos (2019) definem algoritmo como sendo uma "sequência de instruções inequívocas e exequíveis, executadas eletrónica ou mecanicamente, que permite a resolução de determinado problema ou a realização de determinada tarefa" (p. 2).

Na procura por uma definição mais abrange de algoritmo no âmbito das Ciências da Computação e da Programação de computadores procurou-se saber, por curiosidade, qual a definição que atualmente se encontra num dicionário, optando-se por apresentar aqui a definição de algoritmo disponível em https://www.infopedia.pt/$algoritmo-(informatica), por se considerar abrangente e de fácil entendimento.

Definição 2.1.2.1. ***Algoritmo:***

"Um algoritmo é uma sequência ordenada, definida e finita de ações que visam a solução de um determinado problema computacional. Em suma, o problema contém um conjunto de dados de entrada (input) e o algoritmo, na sequência das ações resolventes, produz os dados de saída (output)". (https://www.infopedia.pt/$algoritmo-(informatica))

No sentido de ilustrar a definição de algoritmo com uma situação do quotidiano, Gomes e Santos (2019) dão como exemplo a necessidade de substituição de uma lâmpada numa habitação, apresentando dois algoritmos distintos com diferentes níveis de abstração; o primeiro mais abstrato; o segundo já mais dirigido, para ser implementado, por exemplo, por um controlador robótico (p. 2).

```
SE a lâmpada não acende ENTÃO:
       Retirar a lâmpada fundida;
       Colocar a lâmpada nova;
FIM DE TAREFA
```

Figura 2 – Algoritmo simples, adotado de forma não consciente,
por um adulto para a substituição de uma lâmpada
(Gomes & Santos, 2007, p. 45)

Facilmente se encontram semelhanças entre as instruções deste algoritmo muito simples apresentado por Gomes e Santos (2007) e aquelas que aparecem nos blocos usados para construir códigos de programação no Scratch, tal como se pode observar na figura 3.

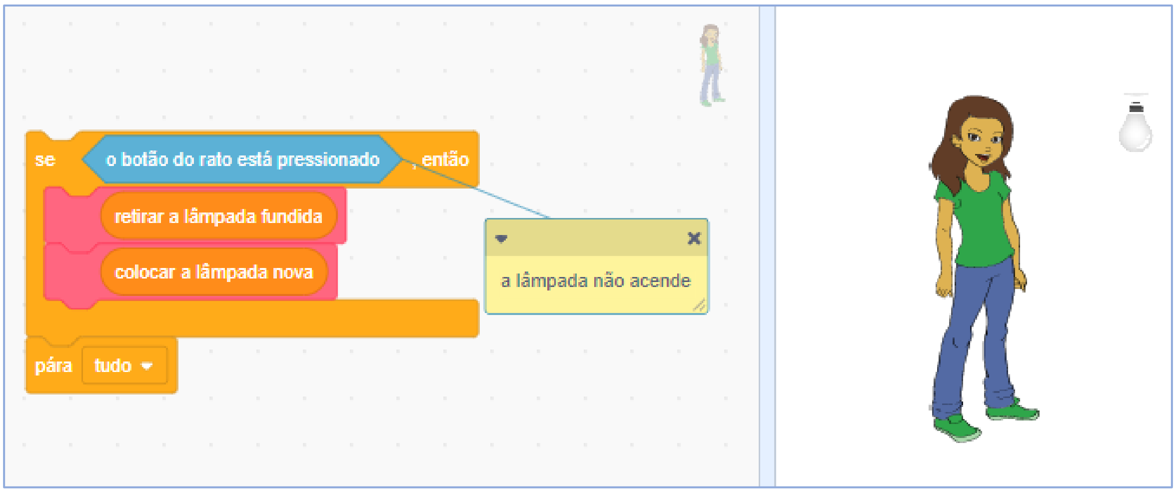


Figura 3 – Exemplos dos chamados blocos de controlo do Scratch
(https://scratch.mit.edu/projects/577975301/editor)

Observe-se, agora, na figura 4, o algoritmo dado por Gomes e Santos (2019) para que alguém sem conhecimento do que é uma escada, a eletricidade e/ou uma lâmpada (um robô, como já foi referido anteriormente) solucionem o mesmo problema.

```
--------------------------
SE a lâmpada não acende ENTÃO:
       MOVER a escada para a posição abaixo da lâmpada;
       REPETIR [as operações abaixo] enquanto a altura for insuficiente:
           SUBIR um degrau;
           ADICIONAR uma unidade ao número de degraus subidos e RETER esta
           informação;
           VERIFICAR altura. Caso seja suficiente, abandonar este ciclo;
       CONTINUAR CICLO DE REPETIÇÃO [enquanto for necessário];
       AGARRAR a lâmpada fundida;
       REPETIR [as operações abaixo] enquanto não conseguir retirar a lâmpada:
              RODAR a lâmpada fundida 10 graus no sentido contrário aos
              ponteiros do relógio;
              VERIFICAR a fixação da lâmpada. Caso esteja solta, abandonar
              este ciclo;
       CONTINUAR CICLO DE REPETIÇÃO [enquanto for necessário];
       POUSAR a lâmpada fundida;
       AGARRAR a lâmpada nova;
       POSICIONAR a lâmpada nova no casquilho;
       REPETIR [as operações abaixo] até detetar que a lâmpada está fixa:
              RODAR a lâmpada fundida 10 graus no sentido dos ponteiros do
              relógio;
              VERIFICAR o aperto da lâmpada. Caso seja suficiente, abandonar
              este ciclo;
       CONTINUAR CICLO DE REPETIÇÃO [enquanto for necessário];
       DESCER o número de degraus da escada que foram subidos [cuja
       informação foi retida em operação anterior];
FIM DE TAREFA
--------------------------
```

Figura 4 – Algoritmo com maior detalhe ao nível das instruções a adotar, por exemplo, por um robô convencional comandado por um computador para substituir a lâmpada
(Gomes & Santos, 2007, p. 45)

Da análise do algoritmo anterior verifica-se, então, que "um algoritmo é constituído por um conjunto de expressões simbólicas que representam acções (escolher, atribuir, etc.), testes de condições (estruturas condicionais) e estruturas de controlo (ciclos na estrutura sequencial do algoritmo) de modo a especificar o problema e respectiva solução" (Vasconcelos & Carvalho, 2005, p. 20).

Portanto, como referem Jesus et al. (2016), "um algoritmo é um procedimento lógico para a resolução de um problema, e deverá conter um número finito de passos e instruções lógicas para especificar um problema e a abordagem (sequência lógica de instruções) para a sua resolução" (p. 5).

Sobre a linguagem utilizada nos algoritmos das figuras 2 e 4 (escrita em português) e tendo-se referido que que o robô em causa seria comandado por um computador, importa referir que ao nível dos programas de computador, houve necessidade de se desenvolverem linguagens de programação, como por exemplo Java, Python, C ou BASIC, que tornassem possível a programação de uma máquina em qualquer parte do mundo independentemente da língua falada quer no país de origem quer no país a que se destina o programa de computador (Gomes & Santos, 2007, p. 45). Mas, tratando-se da construção de *software* por indivíduos que, como referem Jesus et al. (2016), não conhecem as tecnologias de programação que estão na base da construção de *softwares* (p. 13), como será o caso das crianças e jovens do ensino básico, as ferramentas que podem ser usadas foram desenvolvidas de modo a facilitar o processo de criação de jogos ou outro tipo de animações. Atualmente, são utilizadas várias dessas ferramentas de construção de *software* no ensino básico. O Scratch, sobre o qual se falará com pormenor na secção 2.3, por ter sido aquela que se escolheu para a elaboração da proposta dos projetos interdisciplinares integrando a disciplina de TIC, é apenas uma delas. A «ubbu»[1], o «Code Studio»[2] e os «Blockly Games»[3] são outros três exemplos de projetos que, dada a sua simplicidade e eficácia (tal como no Scratch, para criar os códigos de programação basta arrastar e juntar blocos), poderão ser utilizados para a iniciação dos alunos na construção de jogos, simulações e outras animações.

Voltando às linguagens de programação de que se falava no início do parágrafo anterior, Gomes e Santos (2007) referem que é comum recorrer-se ao uso de pseudocódigos para simplificar o processo de aprendizagem da algoritmia e da programação. O pseudocódigo destina-se a ser descodificado por um ser humano, não por um computador ou por uma máquina, não sendo necessária a normalização da linguagem, tal como acontece quando a descodificação tem de ser feita por um computador ou uma máquina (pp. 3 e 4).

De acordo com Vasconcelos e Carvalho (2005), "o termo programa computacional refere-se à representação de um algoritmo numa linguagem de programação" (p. 23).

Entende-se por programação de computadores o processo de implementação de algoritmos para a resolução de problemas (Jesus et al., 2016, p. 9).

Vasconcelos e Carvalho (2005) explicam que tal tarefa de implementação de algoritmos para a resolução de problemas "tem subjacente a inserção de um conjunto de instruções no computador através da conversão das instruções algorítmicas numa determinada linguagem de programação". Portanto, pode considerar-se que, no que diz respeito à linguagem em que foram especificados, não existe uma distinção formal entre um algoritmo e um programa (p. 23). As

[1] https://www.ubbu.io/
[2] https://studio.code.org/courses
[3] https://blockly.games/

diferenças entre um e outro prendem-se com os diferentes níveis de especificação. “A linguagem algorítmica é uma linguagem de alto nível, independentemente da plataforma de implementação (e linguagem de programação) da aplicação em análise” (Jesus et al., 2016, p. 11). E, segundo estes autores, se por um lado a grande mais valia do recurso a uma linguagem de programação é introduzir construtores adicionais facilitadores do processo de especificação, desenvolvimento e manutenção da aplicação de *software*, por outro, o facto dos ambientes de programação terem por base uma linguagem de programação, utilizá-los exige alguma experiência de programação de computadores. Daí a fulcral importância que teve o aparecimento de ambientes como o Scratch (ao qual se fará grande referência na secção 2.3.), com interfaces intuitivas e sem a especificação de extensas linhas de código-fonte numa determinada linguagem de programação (Jesus et al., 2016, p. 15), para a iniciação de crianças e jovens na criação de jogos e outras animações interativas, pois, tal como é referido pelos mesmos autores, não exigem experiência intensiva na área da Programação de Computadores (p. 16).

2.2. A introdução da Programação no ensino básico

“Programming and robotics may offer hope for all children to achieve their full potential and effectively participate in a fully inclusive society.”

(Monteiro et al., 2021, p. 3458)

O Ministério da Educação iniciou em 2015 um projeto-piloto no ensino básico (1.º ciclo) para a introdução das Ciências da Computação e da Programação de Computadores nas escolas portuguesas. Para Jesus et al. (2016) “As Ciências da Computação são e serão a base para muitos projetos e atividades a desenvolver por estudantes e profissionais nas próximas décadas” (p. 3).

De acordo com DGE (2015), a principal finalidade do referido projeto-piloto “é a de que os alunos não só aprendam a programar mas, ao mesmo tempo, aprendam programando” (p. 2). Segundo o mesmo documento, “A programação, para além de desenvolver nos alunos a sua criatividade em ciências da computação, promove uma visão mais alargada dos diferentes usos do computador e contribui para o desenvolvimento do pensamento computacional” (DGE, 2015, p. 2).

No ano letivo 2017/2018 surgiu a iniciativa “Programação e Robótica no Ensino Básico – Probótica -, “(…), inicia-se, neste momento, um novo ciclo de trabalho, onde se procura alargar as atividades desenvolvidas no âmbito da programação e robótica ao 2º e 3º ciclos do ensino básico” (DGE, 2017, p. 4). Com esta outra iniciativa – Probótica – procura-se “contribuir para o desenvolvimento de capacidades e competências-chave transversais ao currículo (…) pretende-se estimular as aprendizagens, tornando-as simultaneamente mais significativas, possibilitando assim que os alunos desenvolvam competências multidisciplinares, nomeadamente as que se encontram referidas nos referenciais de competências do séc. XXI" (DGE, 2017, p. 5).

Jesus et al. (2016) defendem que as Ciências da Computação, mais especificamente a introdução à Algoritmia e Programação de Computadores em níveis educativos básicos, são importantes pois permitem desenvolver e potenciar a aquisição de competências por parte dos alunos para a resolução de problemas do mundo real e, consequentemente, impulsionarem a aprendizagem das disciplinas curriculares, entre outras áreas de aprendizagem do ensino básico (p. 3).

Atualmente, são utilizadas diversas ferramentas de construção de software no ensino básico. Tal como já se referiu anteriormente, o Scratch, a ubbu, o Code Studio e os Blockly Games são quatro exemplos de projetos que, dada a sua simplicidade e eficácia (para criar os códigos de programação basta arrastar e juntar blocos), são amplamente utilizados para a iniciação dos alunos na construção de jogos, simulações e outras animações. O projeto Scratch será apresentado de forma mais completa na secção 2.3. por se tratar daquele que será usado no âmbito do trabalho a realizar, fazendo-se de seguida apenas uma breve referência (essencialmente visual, com recurso a imagens) aos outros três projetos mencionados.

A ubbu foi desenvolvida em Portugal com o objetivo de fazer chegar o ensino da programação às crianças, não só de Portugal, mas também de outros países.

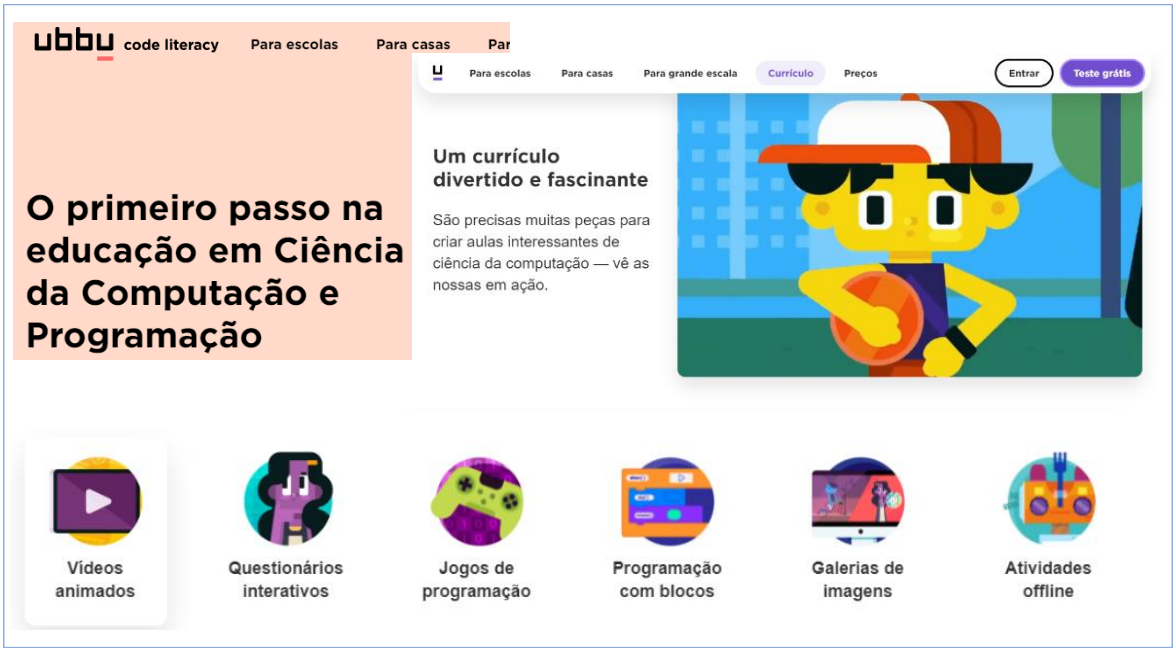


Figura 5 - Site da plataforma da ubbu
(https://www.ubbu.io/#home)

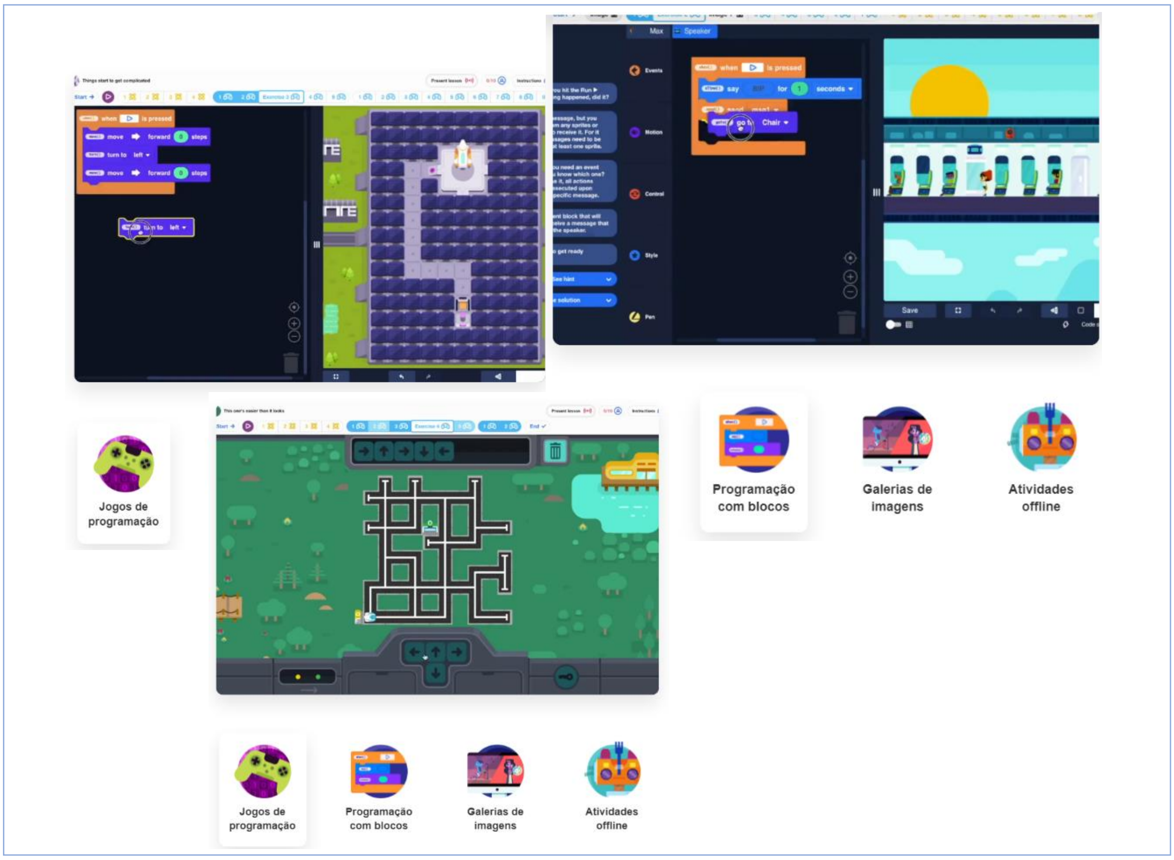


Figura 6 – Exemplos de ambientes de trabalho da ubbu
(https://www.ubbu.io/#home)

O Code Studio é uma plataforma da Code.org (organização sem fins lucrativos dedicada à expansão do acesso à informática nas escolas e aumento da participação de mulheres e minorias sub-representadas). Esta organização disponibiliza o Code Studio gratuitamente, pois defende que a educação da ciência computacional deveria estar disponível para todas as crianças.

Figura 7 – Site da plataforma Code Studio
(https://studio.code.org/courses)

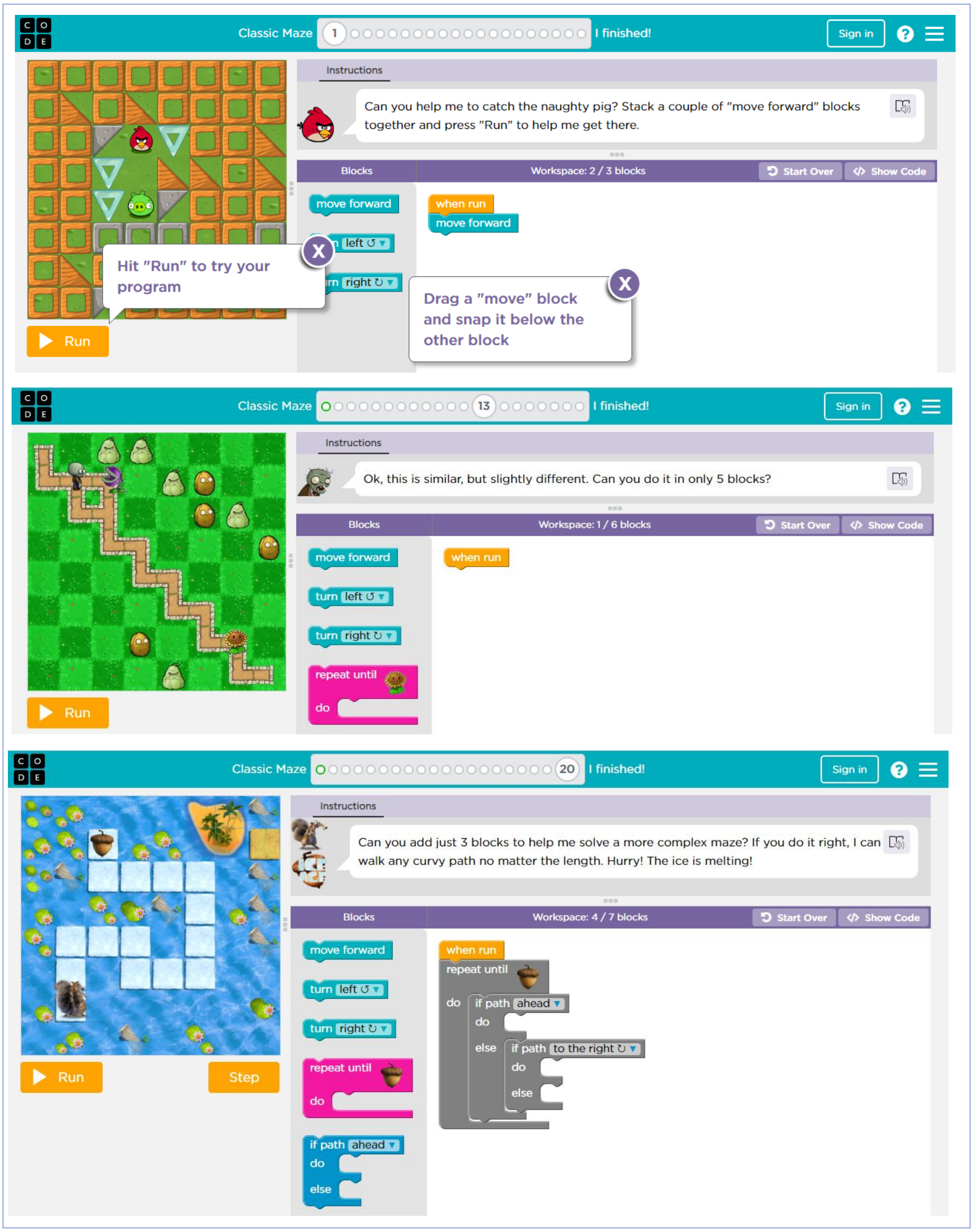


Figura 8 – Exemplos de ambientes de trabalho da plataforma Code Studio (https://studio.code.org/courses)

Os Blockly Games são um conjunto de jogos educativos que ensinam a programar. Esta plataforma da Google destina-se a crianças sem qualquer experiência em programação computacional.

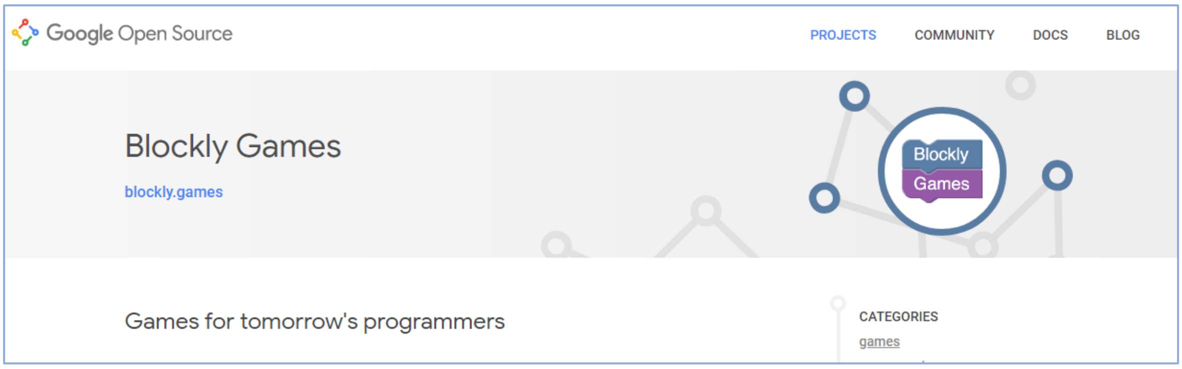


Figura 9 – Site da plataforma Blockly Games
(https://opensource.google/projects/blockly-games)

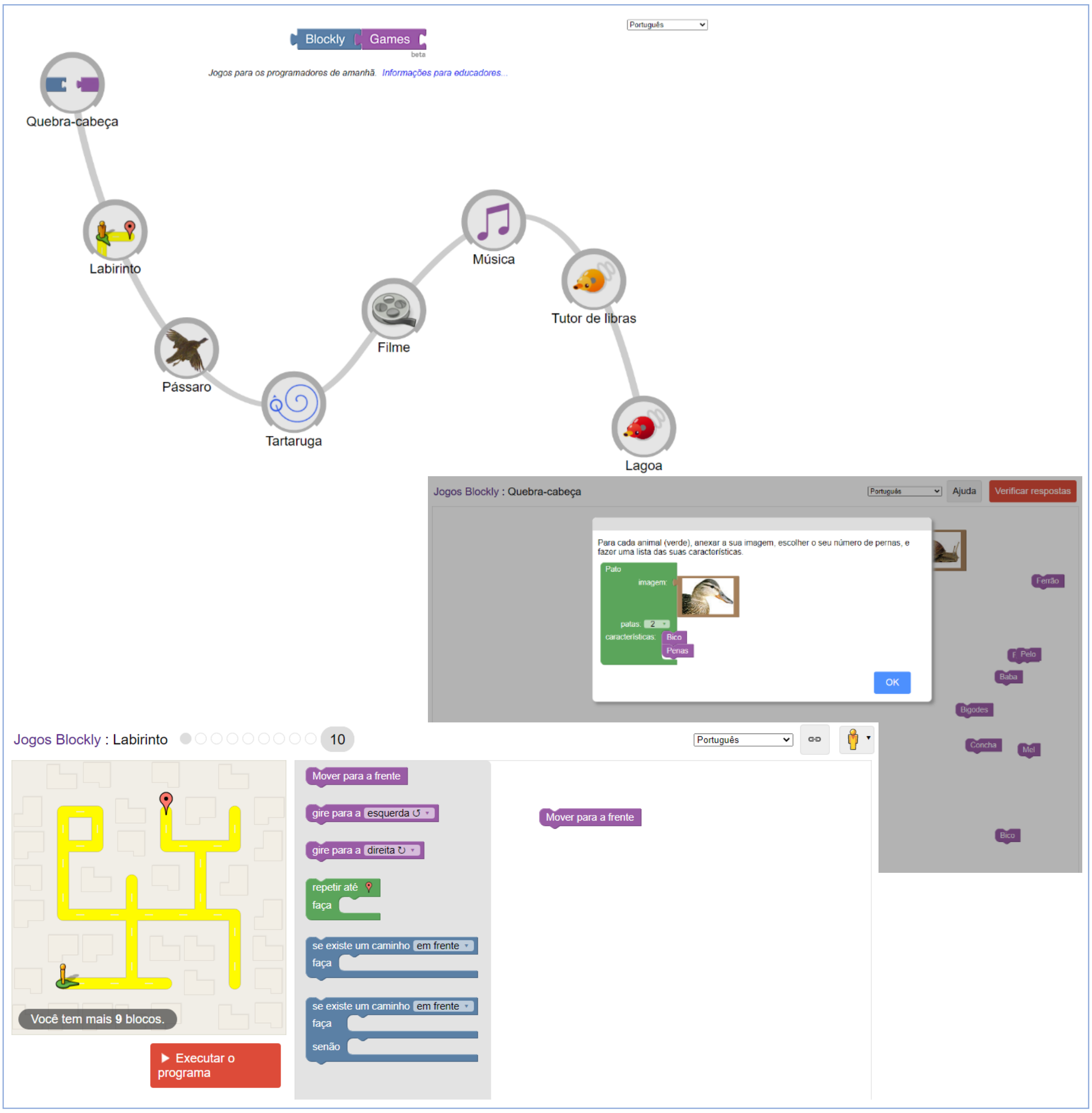


Figura 10 – Exemplos de ambientes de trabalho da plataforma Blockly Games
(https://blockly.games/)

Como referem também Jesus et al. (2016), "Além do projeto-piloto "Iniciação à Programação no 1.º Ciclo do Ensino Básico, que entrou nas escolas no ano letivo 2015/2016, surgiram algumas iniciativas em Portugal para a promoção da área da Programação junto dos mais jovens" (p.24). O "Projeto GEN10S.PT – Programação em Scratch no 5º e 6º anos de escolaridade" é uma dessas iniciativas. De acordo com a informação prestada no sítio oficial do projeto em Portugal, http://genios.org.pt/, este projeto começou por ser implementado em Espanha: "em 2015, a Google.org associou-se à Associação espanhola, *Ayuda en Acción*, para o desenvolvimento do projeto Gen10s que pretende ensinar programação a crianças, promovendo a igualdade de oportunidades na área digital, reduzindo barreiras socioeconómicas e de género". E foi devido aos bons resultados obtidos em Espanha, que a Google.org desafiou um órgão de comunicação social[4] a implementar o projeto em Portugal, "com o intuito de garantir às nossas crianças o acesso às mesmas oportunidades, assegurando que todas as conquistas são baseadas no esforço e mérito, e nunca condicionadas pelo género ou pela situação socioeconómica do seu agregado familiar" (http://genios.org.pt/). A principal finalidade deste projeto é "formar em programação Scratch, 5.000 alunos do 5º e 6º ano, de todo o país, contribuindo para uma nova perceção de tecnologia nas crianças, demonstrando que elas podem não só consumi-la, como também criá-la, através deste software" (http://genios.org.pt/).

2.2.1. A criação de artefactos digitais no 2.º Ciclo do Ensino Básico

Segundo os recentes documentos de orientação curricular, o desenvolvimento de competências, bem como a concretização de aprendizagens significativas pelos alunos "pressupõem tempo para a consolidação e uma gestão integrada do conhecimento, valorizando os saberes disciplinares, mas também o trabalho interdisciplinar (…)" (Decreto-lei n.º 55/2018, preâmbulo). Intento

A pretensão de projetar um trabalho interdisciplinar integrando as disciplinas de Matemática e de TIC baseou-se, essencialmente, na vontade de que os alunos desenvolvessem projetos Scratch, onde aplicassem os conhecimentos adquiridos durante o estudo de temas matemáticos, realizado na disciplina de Matemática, uma vez que tanto o trabalho de carácter interdisciplinar como a criação de artefactos digitais, estão previstos nos documentos curriculares da disciplina de TIC, tal como se mostra de seguida.

[4] SIC Esperança

De acordo com o previsto no documento curricular Aprendizagens Essenciais | Articulação com o perfil dos alunos – 6.º ano | 2.º Ciclo do Ensino Básico | Tecnologias da Informação e Comunicação (2019), está subjacente à disciplina de TIC nos 2.º e 3.º Ciclos:

> “(…) não uma lógica restrita de conteúdos instrumentais ou de aquisição de conceitos, mas sobretudo o desenvolvimento de competências capazes de preparar os jovens para as exigências do século XXI, em sintonia com o estabelecido no PA, nomeadamente nas áreas de competências de “Linguagens e textos”, “Informação e comunicação” e “Raciocínio e resolução de problemas.” ([DGE], 2019, p. 2)

Segundo o referido documento, as Aprendizagens Essenciais de TIC estão organizadas em quatro domínios de trabalho. É referido que os vários domínios não devem ser vistos como estanques, mas como áreas de trabalho que se cruzam, sendo que na sua abordagem didática deverá prevalecer uma lógica de desenvolvimento de desafios, problemas ou projetos. É recomendada a articulação com outras áreas disciplinares, entre outras colaborações a estabelecer dentro da escola ou com outras instituições, nacionais ou internacionais ([DGE], 2019, pp. 2 e 3).

A criação de conteúdos com recurso a aplicações digitais está prevista no quarto domínio: Criar e Inovar. Neste domínio, ao nível dos conhecimentos, capacidades e atitudes, está previsto que, entre outras, o aluno “deve ficar capaz de: (…) Produzir e modificar artefactos digitais criativos, para exprimir ideias, sentimentos e conhecimentos, em ambientes digitais fechados” ([DGE], 2019, p. 8).

No que diz respeito às ações estratégicas de ensino orientadas para o Perfil dos Alunos, são dadas como exemplo: “Fomentar o desenvolvimento de projetos, em articulação com outras áreas disciplinares, serviços e projetos da escola, com a família e com instituições regionais, nacionais ou Internacionais. (…) Proporcionar a criação ou alteração de artefactos digitais diversificados: animações, jogos, narrativas digitais, etc” ([DGE], 2019, p. 8).

Foi neste contexto que se tentou integrar a disciplina de TIC neste trabalho e mostrar que é possível alunos do 2.º Ciclo do Ensino básico produzirem artefactos digitais criativos onde apliquem conhecimentos relacionados com temas estudados na Matemática.

2.3. A tecnologia Scratch

"(…) many young people are very comfortable sending text messages, playing online games, and browsing the Web. But does that really make them fluent with new technologies? Though they interact with digital media all the time, few are able to create their own games, animations, or simulations. It's as if they can «read» but not «write»"

(Resnick et al., 2009, p. 62).

2.3.1. O que é o Scratch?

O Scratch é um dos projetos web que surgiram no final da década de 2000/2010, com o objetivo de promover o interesse e o conhecimento nas áreas da Algoritmia e Programação (Jesus et al., 2016, p. 26). Para estes autores, "o projeto Scratch, desenvolvido no MIT (Massachusetts Institute of Technology), foi percursor desse tipo de iniciativas pelo facto de apresentar de uma forma simples e visual a área das Ciências da Computação e da Programação" (p. 26).

De acordo com informação que consta no site oficial (https://scratch.mit.edu/credits), o Scratch foi desenvolvido pelo grupo de pesquisa Lifelong Kindergarten, liderado pelo Professor Mitchel Resnick, no MIT Media Lab (Massachusetts Institute of Technology). *"Scratch was deeply influenced and inspired by the work of Seymour Papert and Alan Kay"* (Resnick et al., 2009, p. 67).

A construção do projeto Scratch teve início em 2002, mas o Scratch só foi apresentado publicamente em 2007. Desde então, surgiram várias versões do projeto, sendo a mais recente a versão 3.0.

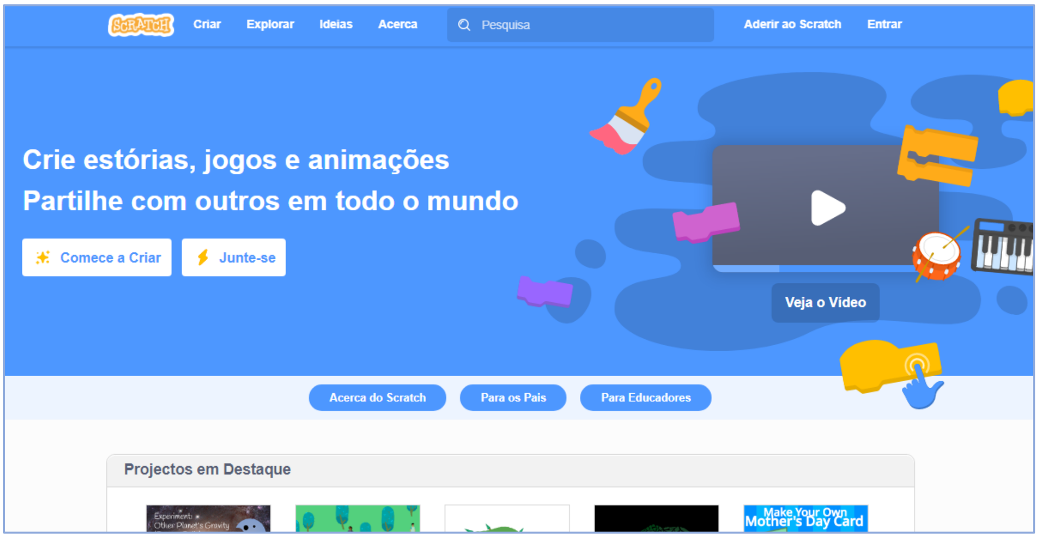


Figura 11 – *Site* do projeto Scratch (https://scratch.mit.edu/)

Segundo alguns dos elementos do grupo de pesquisa Lifelong Kindergarten, o grupo queria desenvolver uma abordagem à programação que fosse apelativa para pessoas que nunca se tinham imaginado programadores. Pretendia-se tornar a programação fácil para todos, independentemente da idade, origem e interesses, e que todos pudessem programar as suas próprias histórias interativas, jogos, animações e simulações, e compartilhar as suas criações uns com os outros. Desde o seu lançamento ao público, em maio de 2007, o Scratch Web site (http://scratch.mit.edu) tornou-se uma comunidade online vibrante, com pessoas compartilhando, discutindo e "remixando" projetos uns dos outros. (Resnick et al. 2009, p. 60).

O conceito "*remixing*", usado por estes autores tem uma razão de ser, pois o próprio nome do projeto, Scratch, "*itself highlights the idea of tinkering, as it comes from the scratching technique used by hip-hop disc jockeys, who tinker with music by spinning vinyl records back and forth with their hands, mixing music clips together in creative ways*" (Resnick et al. 2009, p. 63).

Estes autores, criadores do Scratch, que trabalharam durante largos anos com a Lego Company, referem que ficavam sempre intrigados e inspirados pela maneira como as crianças brincavam e construíam com as peças de Lego, sendo sua pretensão que o processo de programação no Scratch oferecesse uma sensação semelhante à sensação causada nas crianças, pelas brincadeiras e construções com as peças de lego (Resnick et al. 2009, p. 63). "Tal como na estrutura das construções com as peças LEGO a gramática Scratch é baseada na conexão de blocos gráficos que as crianças montam para criar programas" (Lopes e Caixinha, 2010, pp. 8 e 9), o que permite que "os programadores possam ter idades a partir dos 7 anos, aproximadamente, e criem os seus próprios jogos e criações interativas" (Jesus et al., 2016, p. 27). Segundo Lopes e Caixinha (2010):

> "Utilizando uma metáfora teatral, com um palco, onde a criança pode construir vários cenários a partir de bibliotecas de imagens e sons, com personagens e adereços, para figuras humanas e animais, entre outros, podem desenvolver-se histórias; accionar blocos de "movimento", de escala; criar e desenhar novos personagens e colori-los; juntar som, criar novos sons, música, animar os personagens colocando-os em interacção no palco. No final a narrativa criada pode apresentar-se e/ou ser partilhada na Web" (pp. 8 e 9).

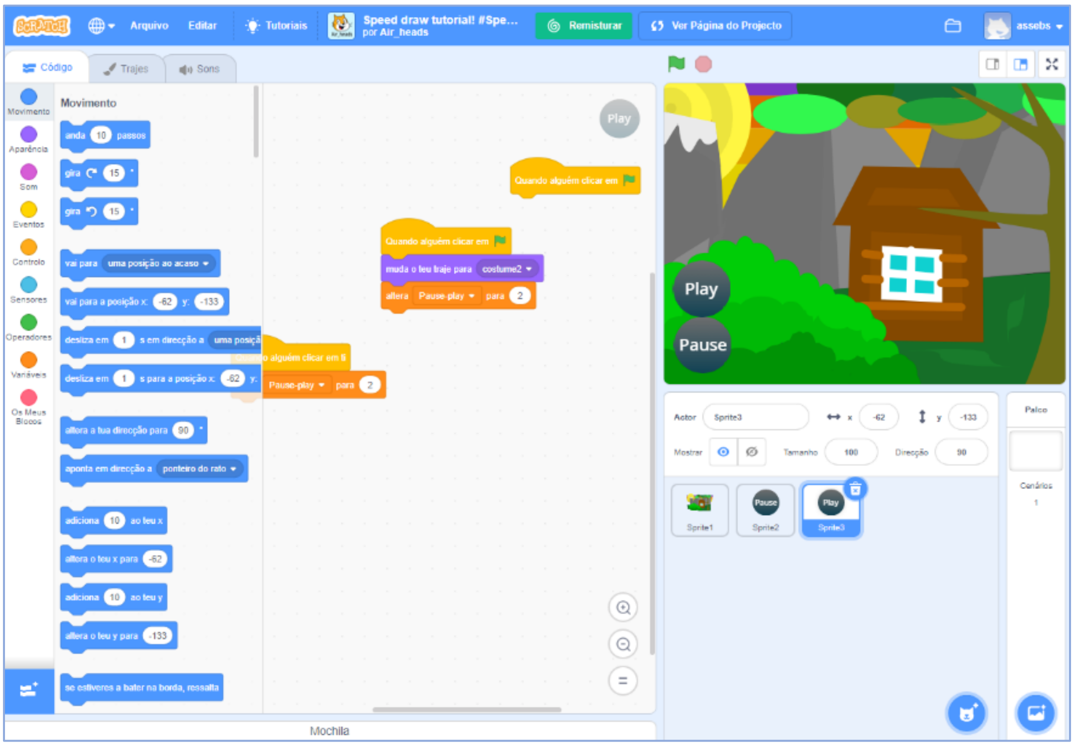


Figura 12 – Etapa da construção de um projeto disponibilizado como Tutorial em https://scratch.mit.edu/projects/519045525/editor/

Oliveira (2019), ao falar das potencialidades do Scratch, refere que:

> "Quando se programa no Scratch, as capacidades ligadas ao raciocínio crítico e ao pensamento sistémico são desenvolvidas através da construção de projetos, pois os jovens necessitam de coordenar o tempo com a manipulação dos diferentes *sprites* permitindo-lhes, ainda, experienciar conceitos tecnológicos e de sistema como a interatividade e o feedback" (p. 32).

A mesma autora é de opinião que "A criação de um projeto em Scratch requer que as crianças e jovens conceptualizem uma ideia e que depois sejam capazes de decompor o problema em ações mais pequenas através da agregação dos blocos de programação" (Oliveira, 2019, p. 32).

A respeito da agregação dos blocos de programação, Jesus et al. (2016), referem que "com o uso do *drag and drop* (pegar e largar), a programação visual simplifica-se e oferece ao utilizador a facilidade e simplicidade da construção de software sem necessitar de especificar linhas de código-fonte associado a uma linguagem de programação" (p. 28). "Os objetos, blocos e código do Scratch são modulares e podem ser facilmente acedidos, lidos e partilhados em comparação com outras linguagens de programação" (Oliveira, 2019, p. 33).

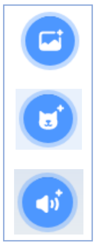
Assim, ao mesmo tempo que cria a estrutura de blocos, o utilizador pode alterar dinamicamente segmentos de código e visualizar em tempo real o resultado das suas ações. Durante este processo de conceptualização e design, o utilizador experimenta, identifica, formula e resolve problemas de forma iterativa. O Scratch promove, também, a criatividade e a curiosidade, pois à medida que surgem novos desafios, o utilizador terá que procurar novas soluções. O ultrapassar dos problemas que surgem durante o processo de conceção e desenvolvimento dos projetos gera no utilizador uma motivação intrínseca que o auxilia a transpor os desafios encontrados. (Oliveira, 2019, p. 33).

Figura 13 – As três principais etapas de um projeto Scratch: Imaginar – Criar – Partilhar
https://resources.scratch.mit.edu/www/guides/en/EducatorGuidesAll.pdf

2.3.2. A gramática Scratch

Tal com já foi referido anteriormente, a gramática Scratch é baseada na agregação de blocos gráficos que se encaixam uns nos outros para criar programas. "No Scratch não há lugar para as sintaxes ou os comandos complexos das tradicionais linguagens de programação. Tal como acontece com as peças Lego, os conectores dos blocos sugerem a forma como estes devem ser agregados" (Oliveira e Lopes, 2010, p. 6).

Um projeto Scratch é composto por um *palco* (*backdrop*, na versão em inglês), por um ou mais objetos animados chamados *atores* (*sprites*) e, se desejável, poderá ter som. Um *ator* é uma imagem bidimensional, que é introduzida numa determinada cena, a decorrer no *palco* escolhido. Um *palco* é uma imagem de fundo que constitui o cenário onde decorre toda a ação do ou dos *atores*. Tanto os *atores* como os *palcos*, podem ser escolhidos a partir de galerias existentes no Scratch, desenhados e/ou pintados no próprio ambiente Scratch ou, ainda, carregados como imagens a partir do dispositivo onde o projeto está a ser realizado. Mediante procedimentos semelhantes, podem, igualmente, ser introduzidos sons nos projetos. Estas várias possibilidades são mostradas assim que se toca no respetivo ícone de introdução:



ícone para seleção e introdução de um *palco*.

ícone para seleção e introdução de *atores* no palco.

ícone para seleção e introdução do som na animação.

Figura 14 – Botões de acesso às funcionalidades que permitem introduzir *palcos*, *atores* e som

Tal como se pode observar na figura 15, estes ícones são facilmente encontrados no ambiente de trabalho do Scratch.

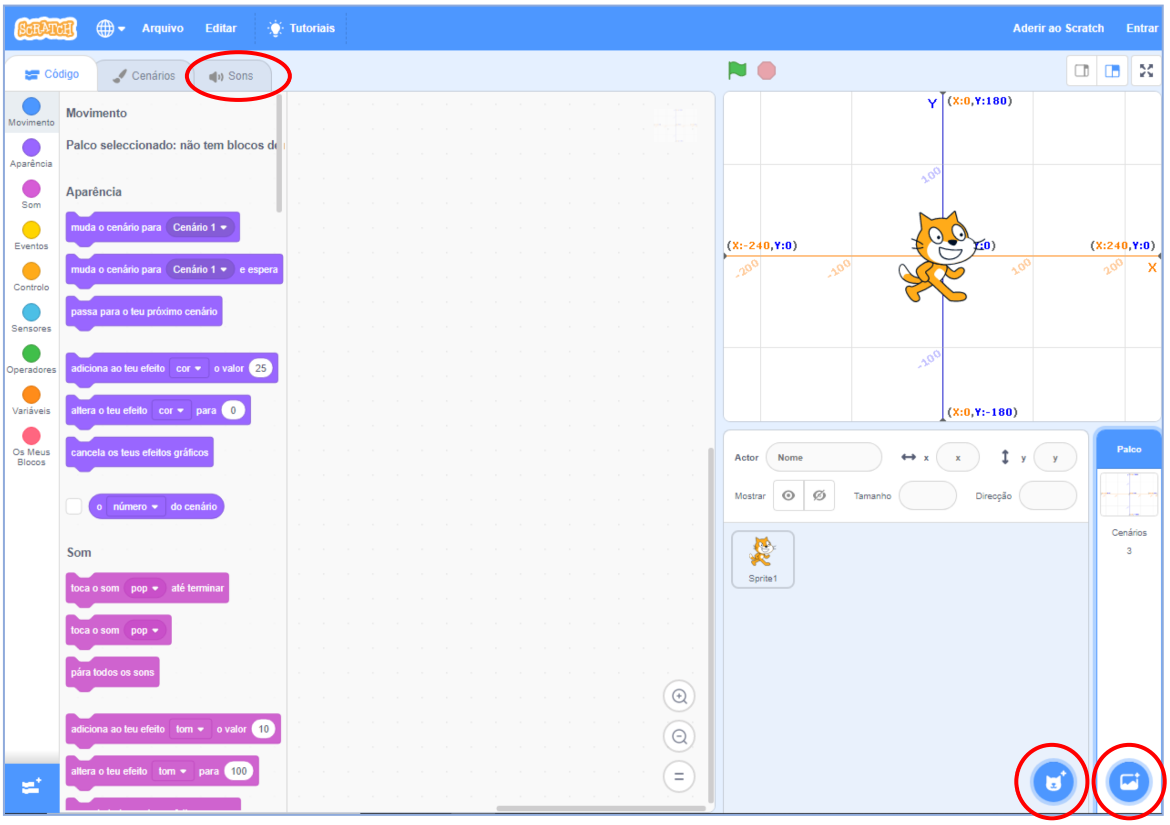


Figura 15 – Ambiente de trabalho inicial do Scratch
https://scratch.mit.edu/projects/editor/?tutorial=getStarted

Quando se inicia um projeto, o Scratch assume sempre como *ator* o gato que se vê na figura 15 e um *palco* em branco. Cabe a quem está a executar o seu projeto mantê-los ou eliminá-los e escolher outros. Num mesmo projeto poderão ser introduzidos vários *atores* e vários *palcos* ou, em alternativa, um mesmo *ator* ou um mesmo *palco* poderá mudar de *traje* ao longo da sua ação.

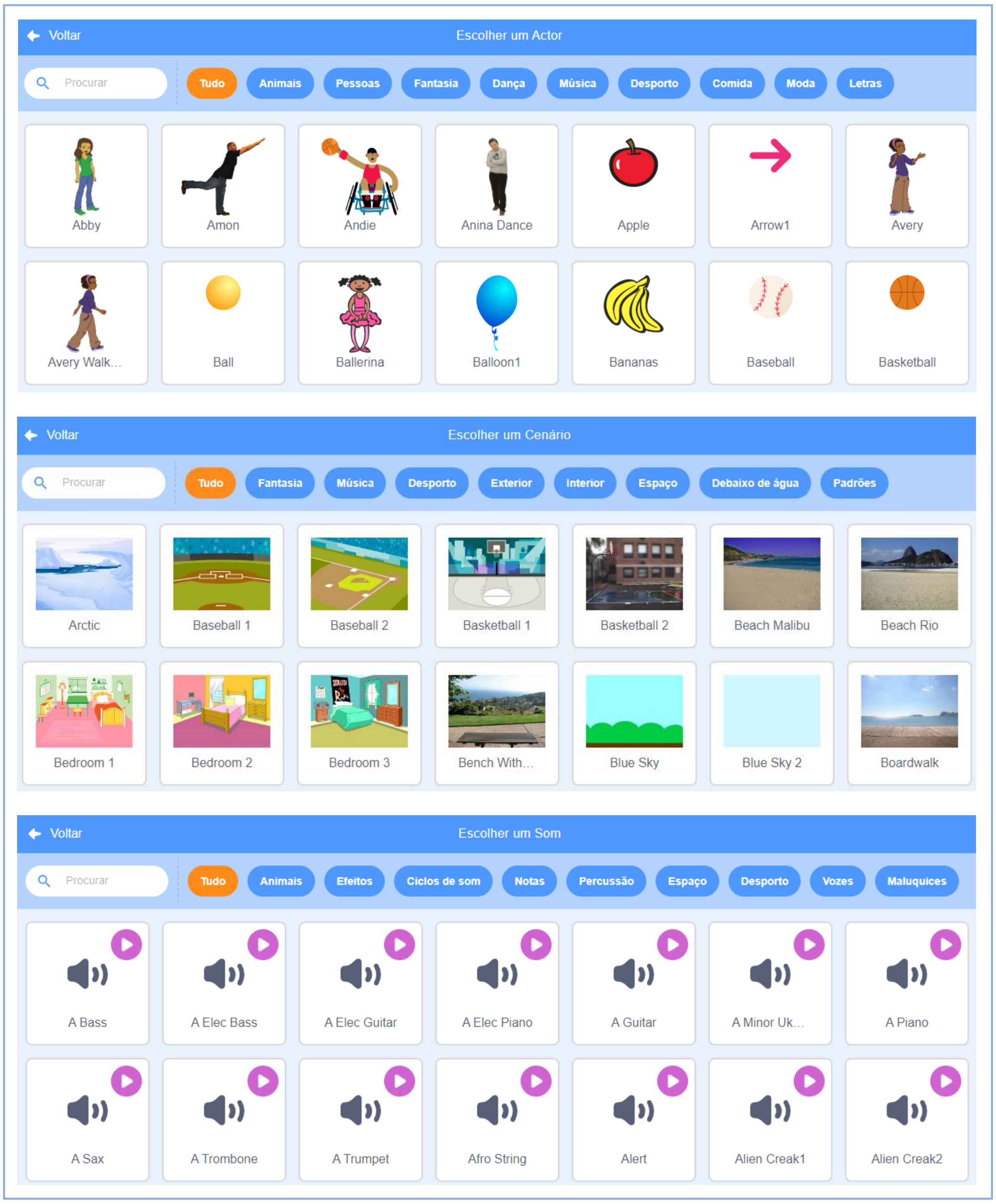


Figura 16 – Galerias de *atores*, *cenários* e sons do Scratch
https://scratch.mit.edu/projects/editor/?tutorial=getStarted

Os comportamentos que cada *ator* irá ter durante o decorrer da sua ação no projeto são criados através da combinação dos blocos visuais que representam instruções. É também possível criar uma combinação de blocos para dar instruções ao *palco*.

Nas figuras 17, 18, 19 e 20 mostra-se a *interface* do ambiente Scratch e os seus componentes de maior relevância.

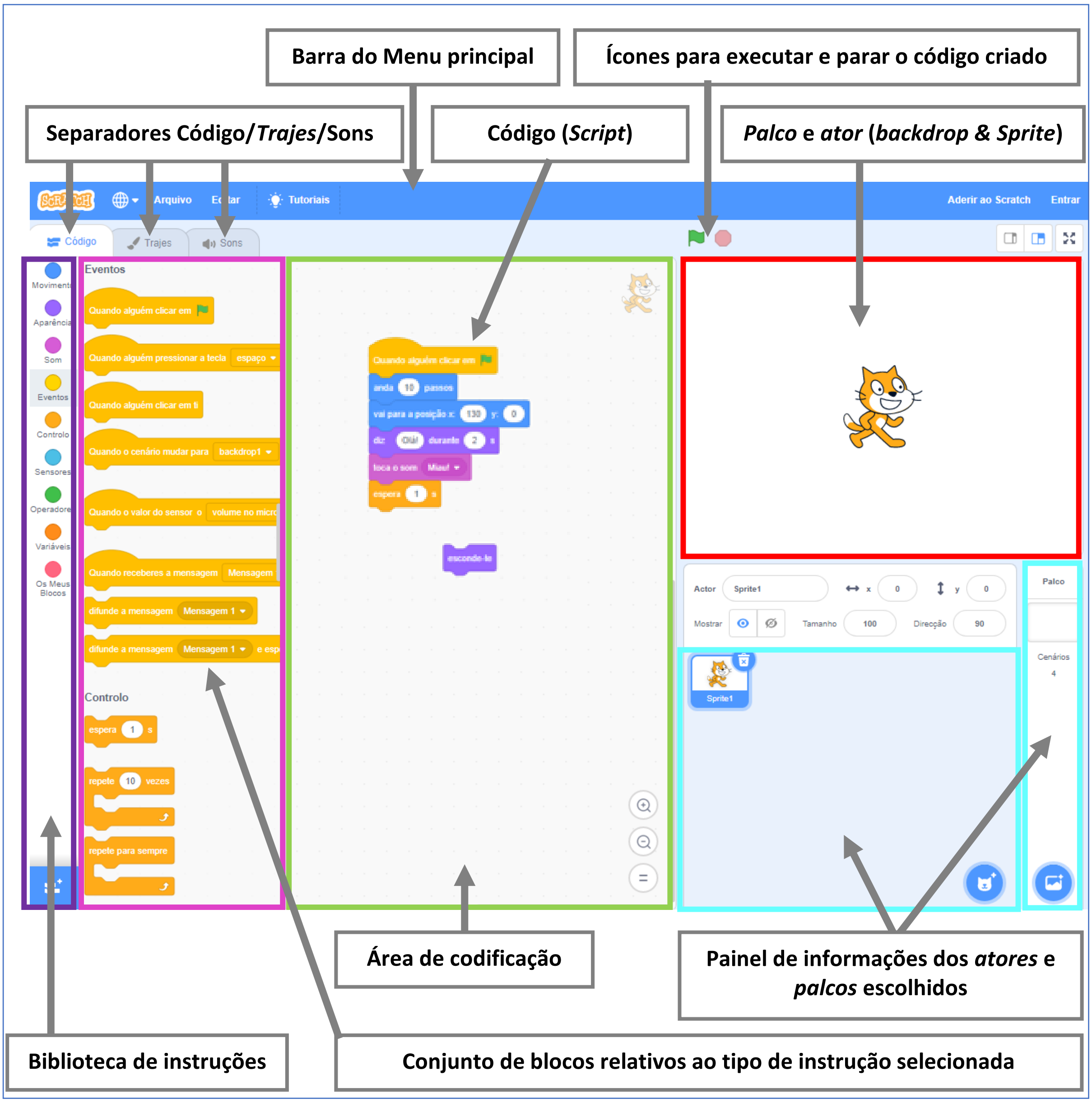


Figura 17 – Scratch: *interface* como utilizador Scratch

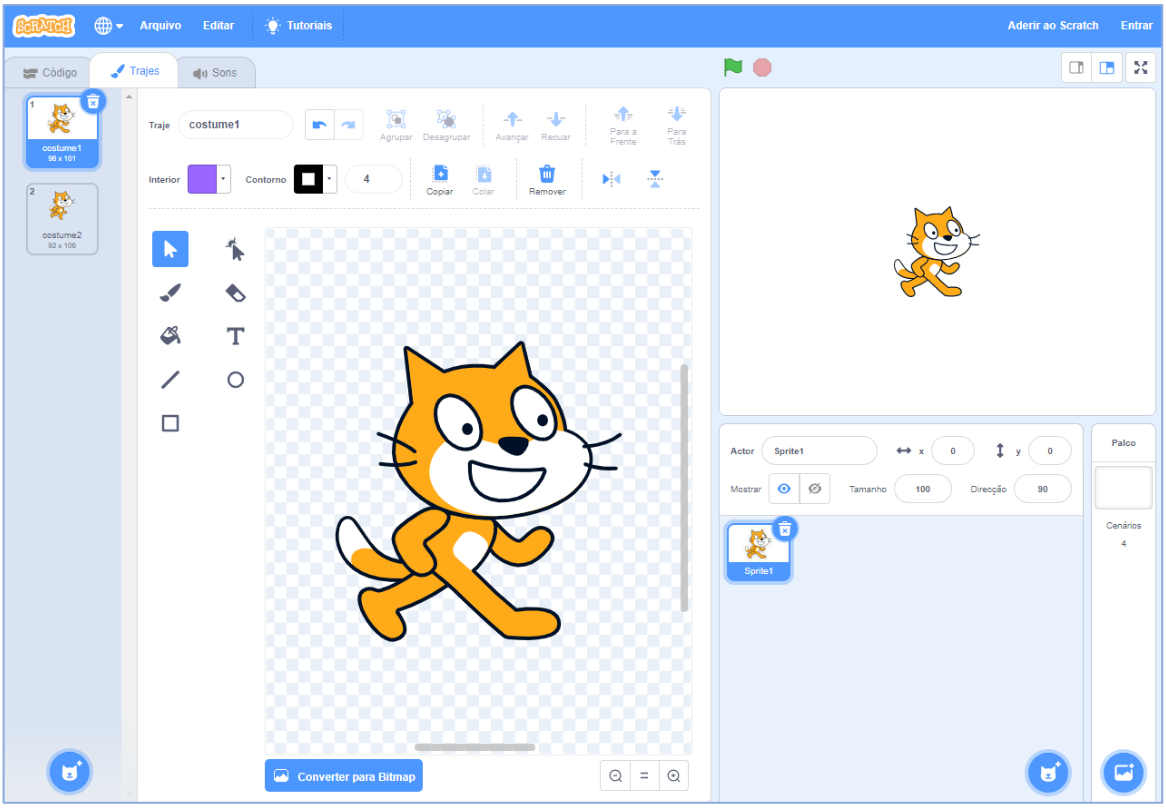


Figura 18 – Funcionalidade *Trajes*
https://scratch.mit.edu/projects/editor/?tutorial=getStarted

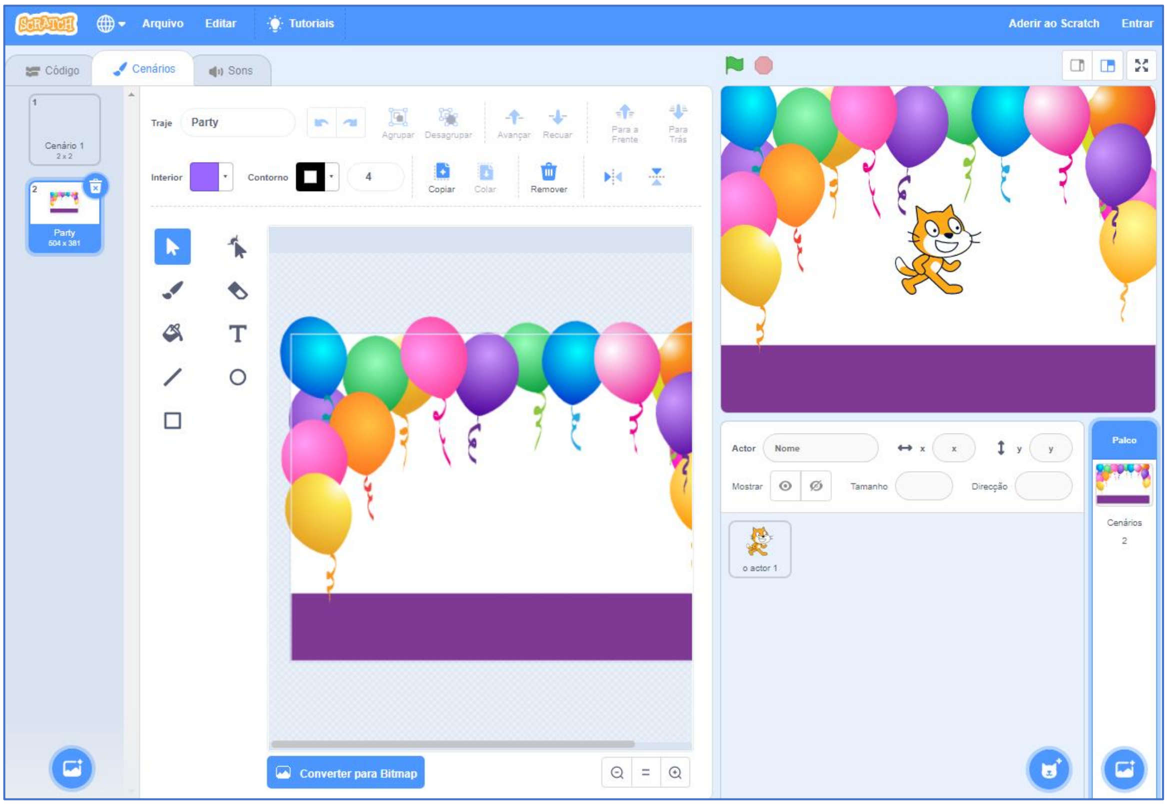


Figura 19 – Funcionalidade *Cenários*
https://scratch.mit.edu/projects/editor/?tutorial=getStarted

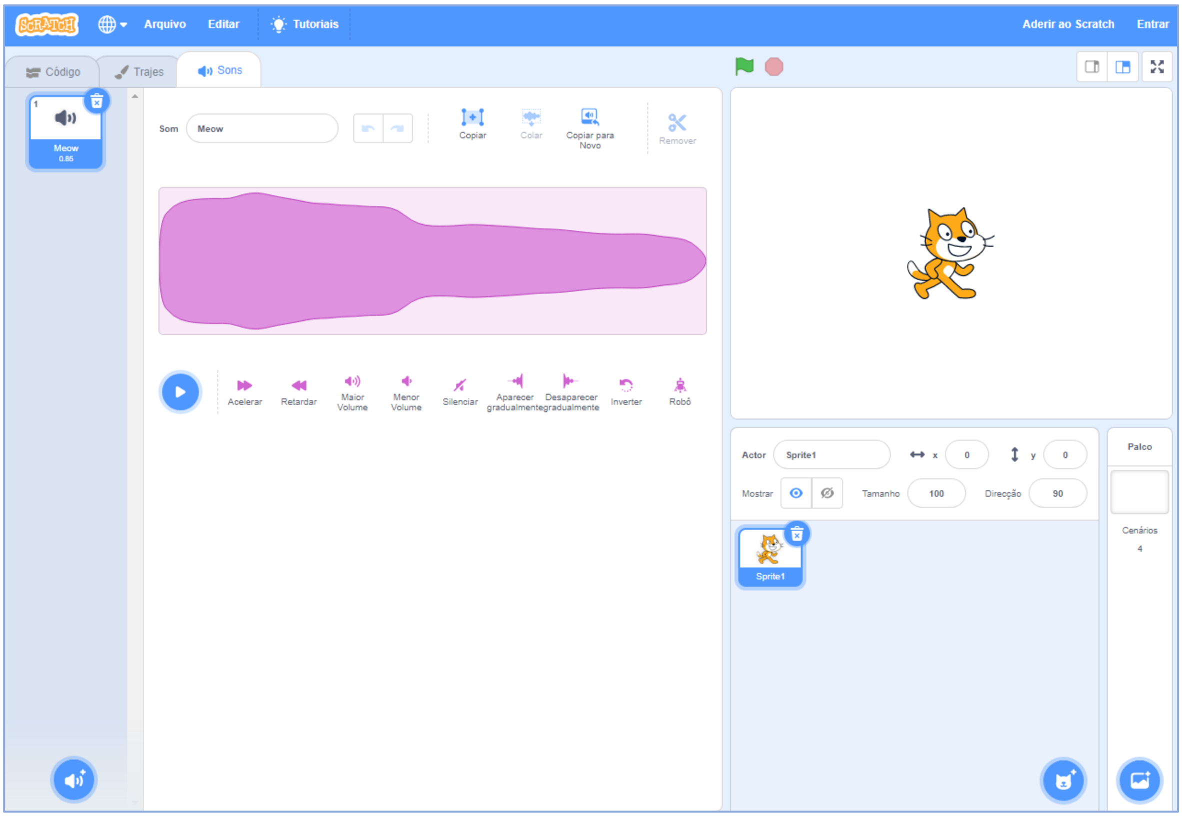


Figura 20 – Funcionalidade Sons
https://scratch.mit.edu/projects/editor/?tutorial=getStarted

Como já foi referido, os comportamentos que cada *ator* irá adotar durante o decorrer da sua ação no projeto são criados através da combinação dos blocos visuais que representam instruções. Dessa combinação resulta um código, que será percorrido assim que se der início à ação do(s) *ator(es)*. Caso se pretenda que ocorram alterações ao nível do *palco* (ou *cenário*), ter-se-á que criar um código distinto para esse efeito. Em relação ao som existe um conjunto de blocos que permitem adicionar efeitos sonoros tanto à ação do(s) *ator(es)* como do *palco*.

Nas figuras 21 a 27 apresentam-se os conjuntos de blocos de comandos existentes e dois exemplos de códigos (um para *atores* e outro para o *palco*). O conjunto de blocos, apresentado na figura 21, mostra que as ações podem ter início quando se clica: na bandeira verde existente sobre o *palco*, numa das teclas do teclado, no *ator*, …

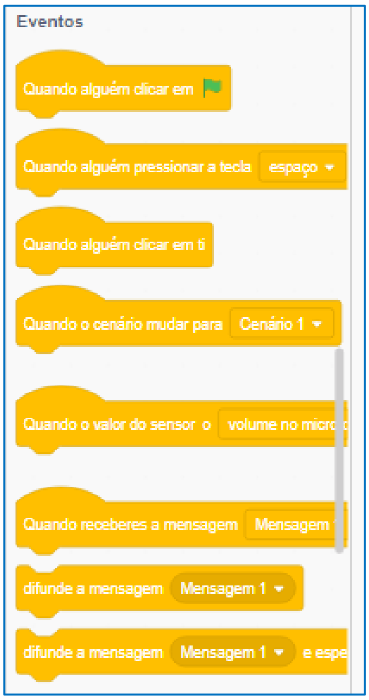


Figura 21 – Blocos para dar início às ações
https://scratch.mit.edu/projects/editor/?tutorial=getStarted

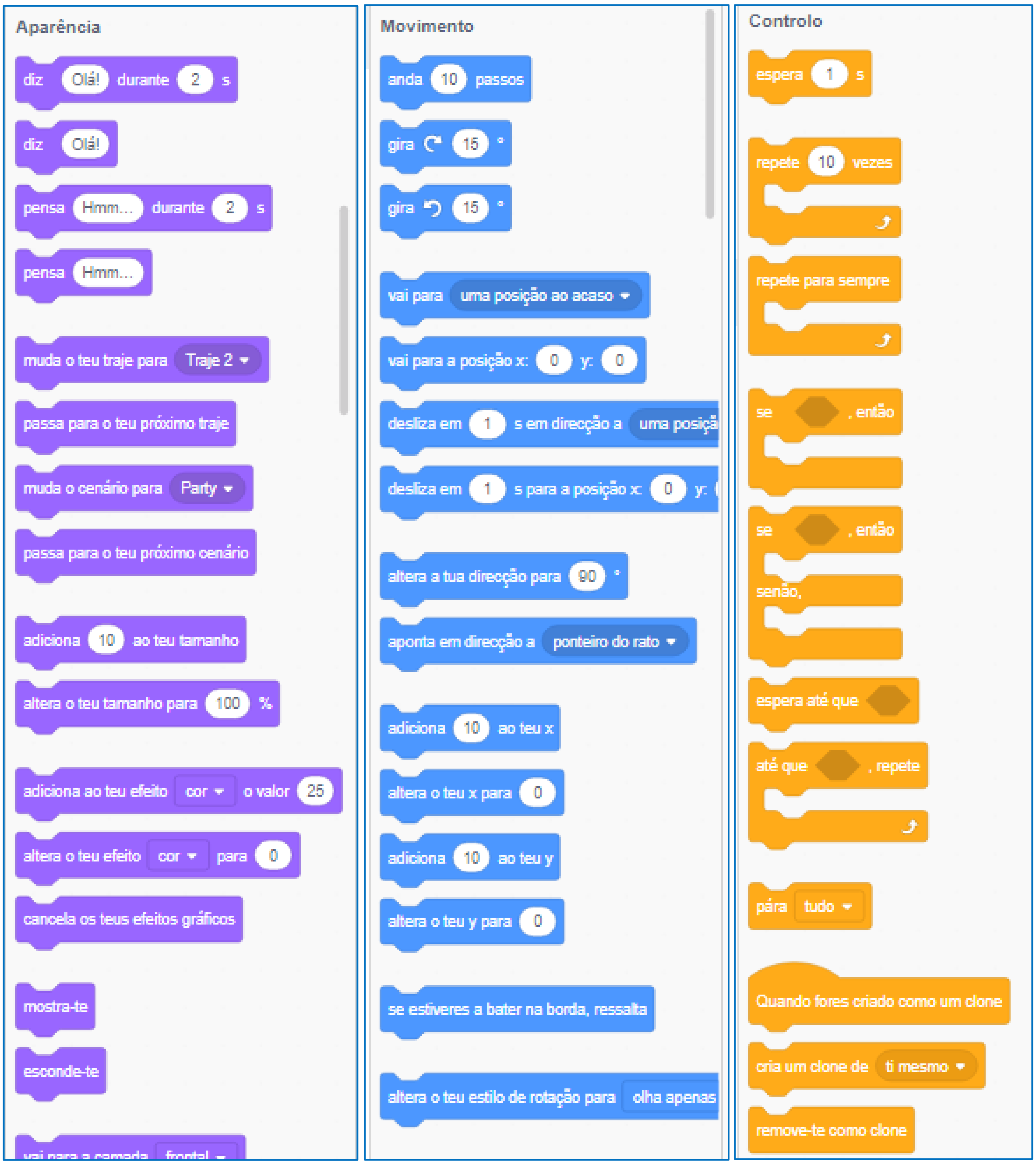


Figura 22 – Conjuntos de blocos de instruções: *Aparência*, *Movimento* e *Controlo*
https://scratch.mit.edu/projects/editor/?tutorial=getStarted

Os blocos de comandos apresentados na figura 22 permitem instruir *atores* e *palcos* a adotar comportamentos que, à partida parecem bastante simples. No entanto, quando combinados com blocos dos conjuntos que se mostram na figura 23, permitem aumentar significativamente quer a quantidade, quer a complexidade das instruções a introduzir num código.

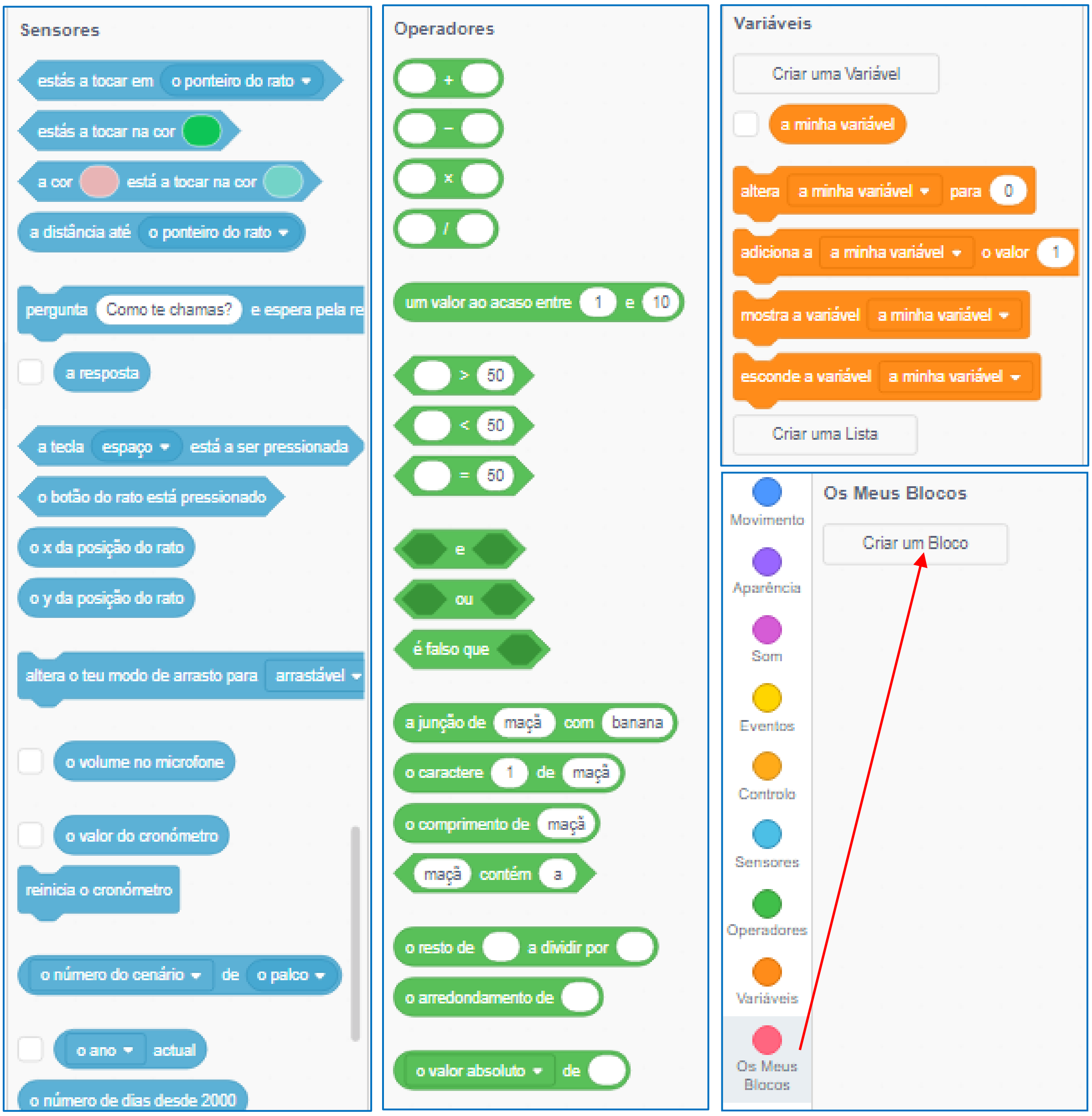


Figura 23 – Conjuntos de blocos de instruções: *Sensores*, *Operadores*, *Variáveis* e *Criar outros*
https://scratch.mit.edu/projects/editor/?tutorial=getStarted

Como se pode ver, a forma que os blocos dos conjuntos dos *Sensores*, dos *Operadores* e também das *Variáveis*, permitem encaixá-los nos blocos dos conjuntos da *Aparência*, *Movimento* e *Controlo*. As *variáveis* terão que ser criadas de acordo com as instruções que se pretendem programar. Há, ainda, a possibilidade de se criarem outros blocos que venham a ser necessários. O novo bloco poderá ter uma entrada numérica ou textual, uma entrada booleana, uma etiqueta, ou ainda uma combinação de duas ou três dessas entradas, tal com se mostra nas figuras 24 e 25.

Figura 24 – Funcionalidade *Criar um Bloco*
https://scratch.mit.edu/projects/editor/?tutorial=getStarted

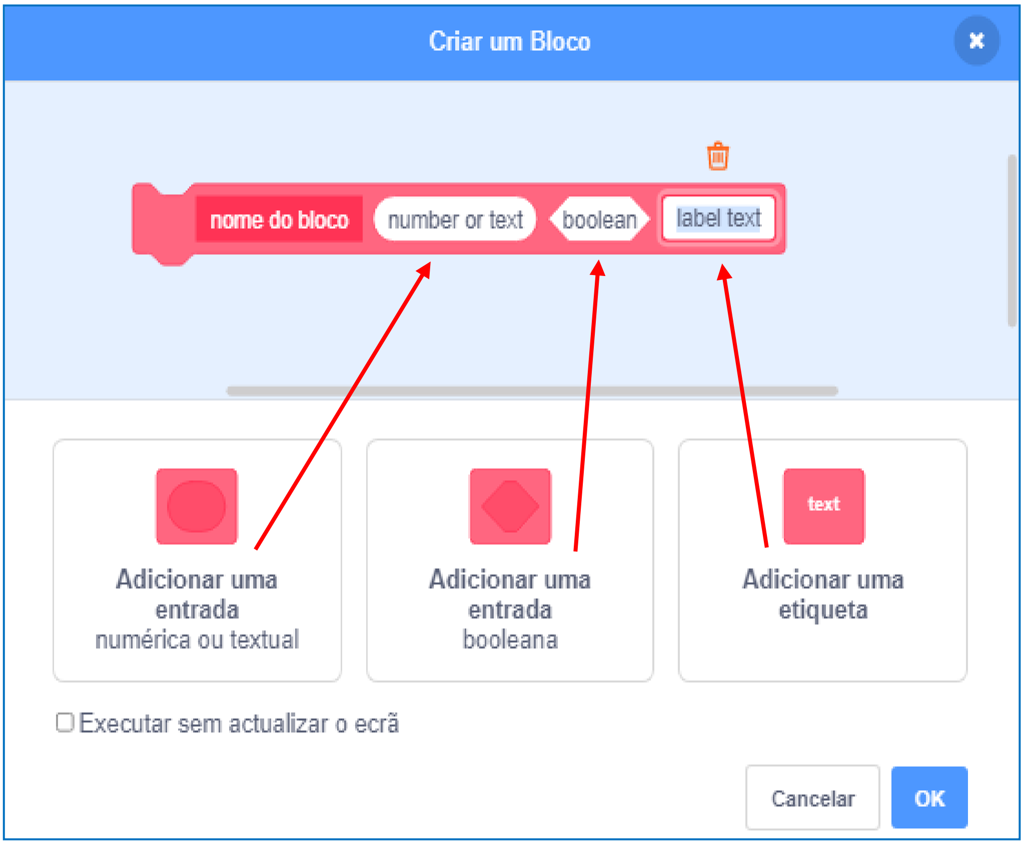


Figura 25 – Introdução de entradas num novo bloco
https://scratch.mit.edu/projects/editor/?tutorial=getStarted

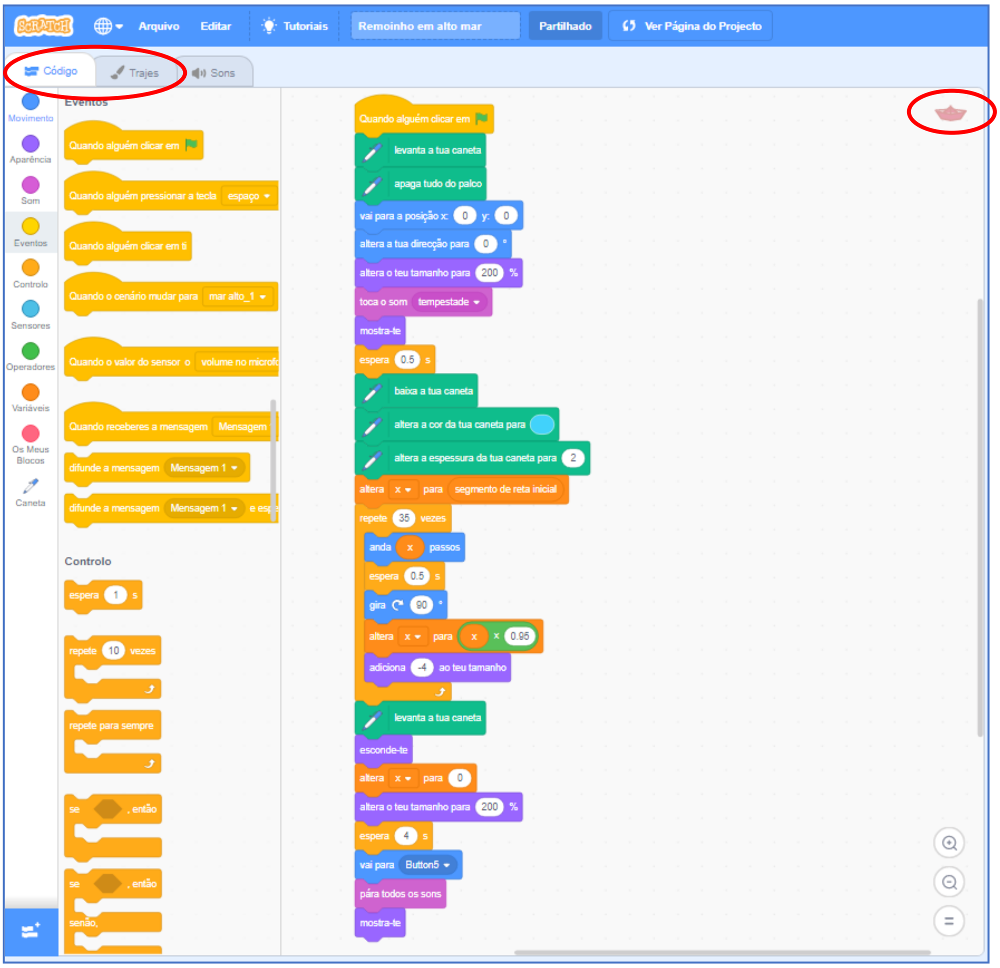


Figura 26 – Código de um *ator* de um projeto Scratch
https://scratch.mit.edu/projects/520042486/editor

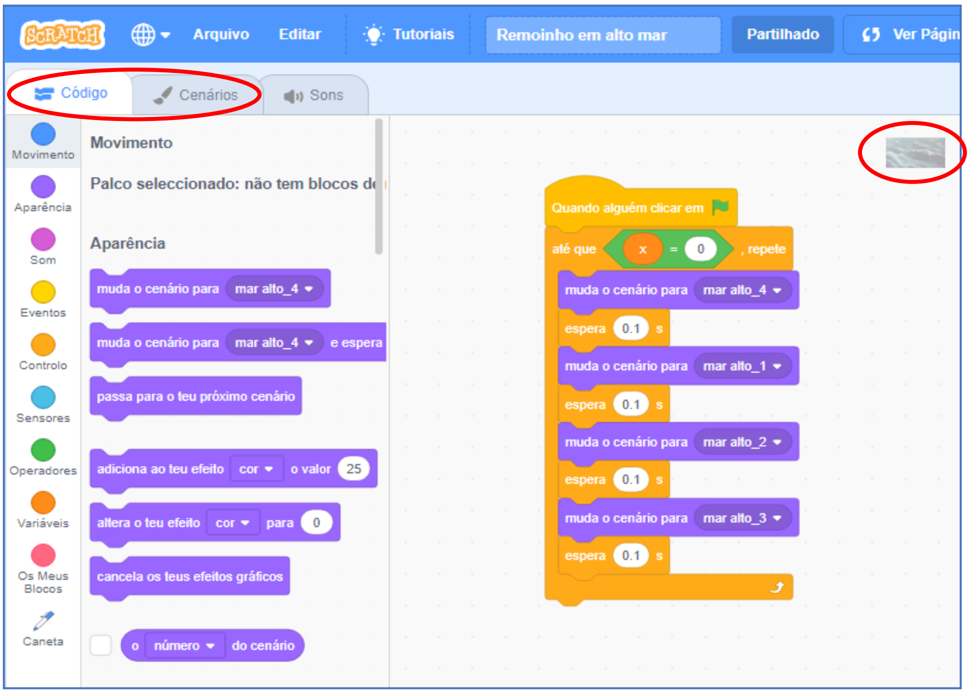


Figura 27 – Código de um *palco* ou *cenário* do mesmo projeto Scratch
https://scratch.mit.edu/projects/520042486/editor

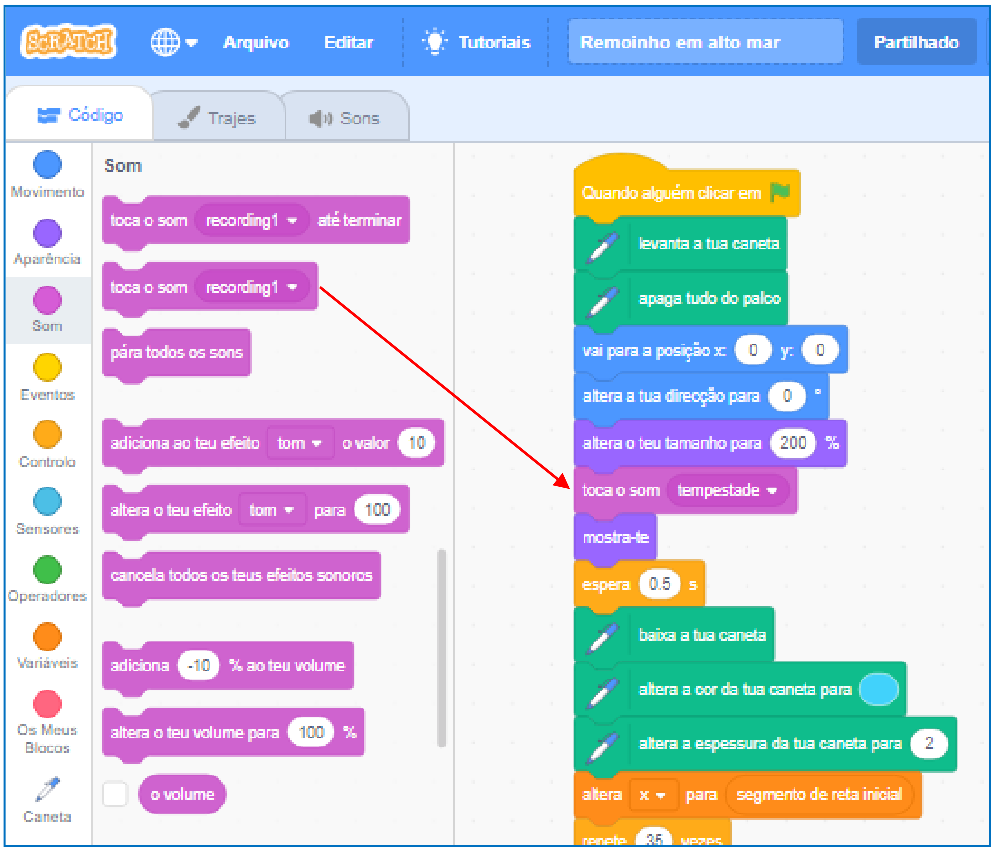
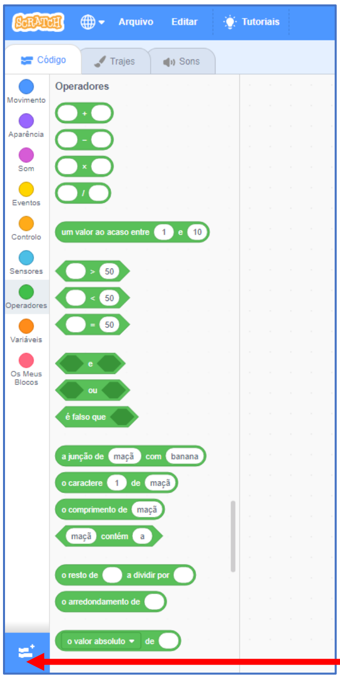


Figura 28 – Blocos para introduzir e comandar os sons
https://scratch.mit.edu/projects/520042486/editor

Como se pode observar no código da figura 28, uma das ações que um ator poderá realizar é desenhar no *palco*, tal como se de uma caneta se tratasse. Para tal, é necessário ativar uma funcionalidade do Scratch designada por *Caneta*.



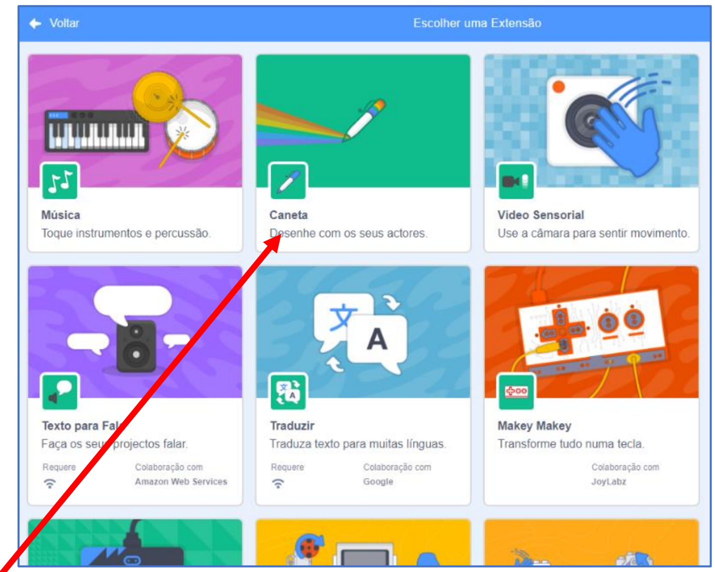


Figura 29 – Funcionalidade "Caneta"
https://scratch.mit.edu/projects/editor/?tutorial=getStarted

Passos a executar para ativar a extensão *Caneta*

Ao clicar no ícone situado no canto inferior esquerdo do ambiente de trabalho, abre-se um separador onde é possível escolher uma extensão a acrescentar ao Scratch. Selecionando a *Caneta*, irão surgir os códigos para instruir um *ator* a executar desenhos no *palco*.

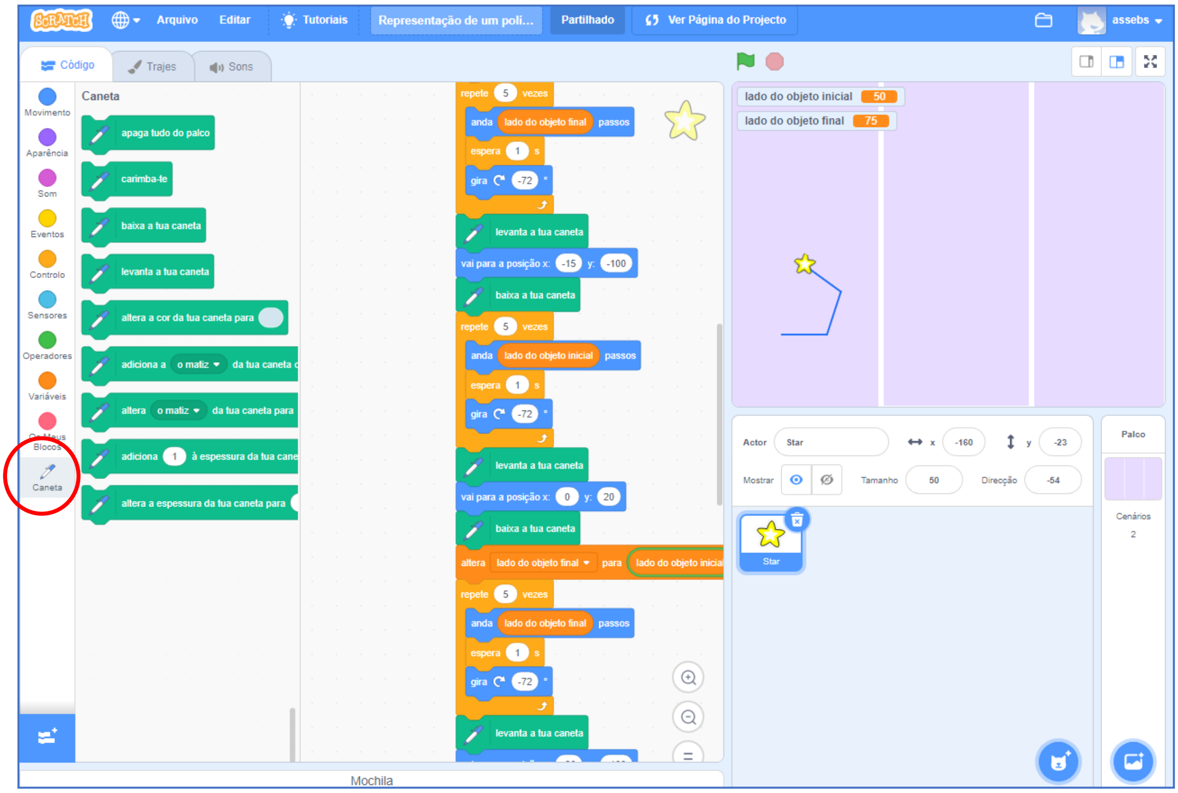


Figura 30 – Construção de polígonos com recurso à Caneta
https://scratch.mit.edu/projects/533993625/editor

3. DOIS TÓPICOS DA MATEMÁTICA A TRABALHAR EM INTERDISCIPLINARIDADE COM TIC

A escolha dos temas «Critérios de Divisibilidade» e «Escalas» não foi uma escolha aleatória. O primeiro é de extrema utilidade na abordagem de outros temas matemáticos, como por exemplo aquando do estudo da decomposição de números compostos em fatores primos, ou do estudo dos números racionais, nomeadamente na simplificação de frações/fração irredutível. Já o segundo, não se tratando de um tema tão presente em outros temas matemáticos como acontece com os critérios de divisibilidade, a sua aplicação tem grande relevância em contextos não matemáticos, como é o caso das disciplinas de Educação Visual e História e Geografia de Portugal, no 2.º Ciclo, e de Geografia, no 3.º Ciclo, ou, saindo do contexto académico, em áreas como por exemplo a arquitetura e a cartografia.

3.1. Critérios de divisibilidade – Conceitos gerais

Este subcapítulo faz parte do trabalho sobre critérios de divisibilidade (Bessa, 2021) realizado no âmbito do Seminário de Matemática Para Professores I, o qual decorreu no primeiro semestre deste curso de Mestrado em Matemática Para Professores, sob orientação do Professor Doutor Paulo José Fernandes Almeida (Bessa, 2021, pp. 4-19).

Apesar desse trabalho não se enquadrar no conjunto dos trabalhos ou artigos académicos passíveis de serem publicados, a animação que foi elaborada como suporte à sua apresentação e defesa encontra-se disponível em https://prezi.com/view/8BIja9zM5YYXqmU252Wt/.

De acordo com o Programa de Matemática para o Ensino Básico (em vigor até 6 de julho de 2021), é no âmbito do estudo do conjunto dos Números Naturais que, no 2.º Ciclo do Ensino Básico, "(…) são apresentadas noções básicas de divisibilidade, explorando-se o Algoritmo de Euclides no 5.º ano e o Teorema Fundamental da Aritmética, que dele pode ser deduzido, no 6.º ano" (Bivar et al., 2013, p. 14).

Em julho de 2018 foi publicado, pela Direção Geral da Educação, o documento curricular Aprendizagens Essenciais | Articulação com o perfil dos alunos – 5.º ano | 2.º Ciclo | Matemática, sendo estas aprendizagens essenciais orientadas para fomentar nos alunos aprendizagens efetivas e significativas. De acordo com este documento, o anteriormente referido Teorema Fundamental da Aritmética passou a ser abordado, também, no 5.º ano. Encontramos essa referência dentro do Conteúdo de Aprendizagem "Números Naturais", nos objetivos essenciais de aprendizagem - "Identificar números primos e números compostos e decompor um número em fatores primos" (Direção Geral da Educação [DGE], 2018a, p. 8).

Quanto aos critérios de divisibilidade, a referência a este tema encontra-se explícita nas Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico (também em vigor até 6 de julho de 2021), no Domínio "Números e Operações", Subdomínio "Números Naturais", Objetivo Geral "Conhecer e aplicar propriedades dos divisores", descritor "Saber os critérios de divisibilidade por 3, 4 e por 9" (Bivar et al., 2012, p. 29).

De referir que já no 3.º ano do 1.º Ciclo é feita a abordagem aos critérios de divisibilidade por 2, 5 e por 10. A este nível, encontram-se também definidos nas referidas Metas Curriculares, os seguintes descritores: "Reconhecer os múltiplos de 2, 5 e 10 por inspeção do algarismo das unidades"; "Utilizar corretamente as expressões «divisor de» e «divisível por»; "Reconhecer que um número natural é divisor de outro se o segundo for múltiplo do primeiro (e vice-versa)" e "Reconhecer que um número natural é divisor de outro se o resto da divisão do segundo pelo primeiro for igual a zero" (Bivar et al., 2012, p. 16).

Portanto, ao nível do 2.º Ciclo é comum fazer-se primeiro a revisão dos critérios de divisibilidade por 2, 5 e por 10 e só depois introduzir os critérios de divisibilidade por 3, 4 e por 9.

Apesar de, ao nível do anteriormente referido Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico, os critérios de divisibilidade se encontrarem integrados no Subdomínio "Números Naturais" (Bivar et al., 2012, p. 29), as questões relacionadas com o conceito de divisibilidade são inerentes à possibilidade da divisão inteira no conjunto dos números inteiros. Como tal, neste trabalho estudaram-se os critérios de divisibilidade para números inteiros.

Para uma melhor compreensão dos critérios de divisibilidade é importante ter presente um pequeno conjunto de definições e teoremas relativos a conceitos diretamente relacionados com a divisibilidade no conjunto dos números inteiros (secção 3.1.1.). Além desses, é intrínseca ao estudo dos critérios de divisibilidade a noção de congruência modular que se encontrará depois, na secção 3.1.2.

3.1.1. A divisibilidade no conjunto dos números inteiros

"Divisors, multiples, and prime and composite numbers are concepts that have been known and studied at least since the time of Euclid, about 350 B.C."

(Niven et al., 1991, p. 4)

No que diz respeito à divisibilidade de números inteiros, é importante começar por apresentar um pequeno conjunto de definições e teoremas, essenciais para o estudo dos critérios de divisibilidade. De referir que a elaboração desta secção, baseia-se em Niven et al. (1991).

Como será expectável, os primeiros conceitos a definir serão os estritamente relacionados com o conceito de divisibilidade e o próprio conceito de divisibilidade.

Definição 3.1.1.1. *Dado $a \in \mathbb{N}$, diz-se que m é **múltiplo** de a se existir um inteiro k, tal que $m = ka$, e escreve-se $m = \dot{a}$.*
<u>Exemplo:</u> Os múltiplos de 7 obtêm-se multiplicando 7 por qualquer número $k \in \mathbb{Z}$.

$$\{7k:\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -14, -7, 0,\ 7, 14, \dots\}$$

Definição 3.1.1.2. *Dados os inteiros a e d $(d \neq 0)$, diz-se que d é **divisor** de a, se a é múltiplo de d, ou seja, se $a = kd$, para algum inteiro k.*
<u>Exemplo:</u> 7 é divisor de $42 \Leftrightarrow 42$ é múltiplo de 7.

Definição 3.1.1.3. *Sejam a e b dois inteiros. Se $a \neq 0$ e existir um inteiro c tal que $b = ac$, dizemos que a divide b, e escrevemos $a|b$. Se a não divide b, escrevemos $a \nmid b$.*

Esta é a definição de **divisibilidade**. Se $a|b$, diz-se também que a é divisor de b, que b é múltiplo de a ou ainda que b é divisível por a.

O teorema que se segue apresenta propriedades de grande relevância no estudo da divisibilidade.

Teorema 3.1.1.4. Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}, a, b$ não nulos:

(1) $a|a$ (reflexibilidade);

(2) Se $a|b$ então $a|bc$ para qualquer inteiro c;

(3) Se $a|b$ e $b|c$ então $a|c$ (transitividade);

(4) Se $a|b$ e $a|c$ então $a|(bx + cy)$ para quaisquer inteiros x e y;

(5) Se $a|b$ e $b|a$ então $a = \pm b$;

(6) Se $a|b$, $a > 0,\ b > 0,$ então $a \leq b$;

(7) Se $m \neq 0, a|b$ se e só se $ma|mb$.

Apresenta-se de seguida, a título exemplificativo, as demonstrações das propriedades (4) e (5).

(4) Se $a|b$ e $a|c$ então existem b_1, $c_1 \in \mathbb{Z}$ tais que $b = b_1a$ e $c = c_1a$.

Dada uma combinação linear de b e c, $bx + cy$, em que x e $y \in \mathbb{Z}$, então:

$bx + cy = (b_1a)\,x + (c_1a)\,y = a(b_1\,x) + a(c_1y) = a(b_1\,x + c_1y)$

pelo que $bx + cy$ é múltiplo de a, ou seja, $a|(bx + cy)$

(5) Como $a|b$ e $b|a$, existem a_1, $b_1 \in \mathbb{Z}$ tais que $b = a_1a$ e $a = b_1b$.

Assim, $a = b_1b = b_1a_1a$.

Como b_1 e $a_1 \in \mathbb{Z}$, então $a = b_1a_1a$.

Como $a \neq 0$, tem-se $b_1a_1 = 1$.

Como $b_1,\ a_1 \in \mathbb{Z}$, $b_1 = a_1 = 1$ ou $b_1 = a_1 = -1$

Se $b_1 = a_1 = 1$ então $a = b$ ou se $b_1 = a_1 = -1$ conclui-se que $a = -b$.

É evidente que não se pode falar em divisibilidade sem se fazer referência à **divisão euclidiana** e à possibilidade de se efetuar a divisão inteira no conjunto dos números inteiros.

O teorema seguinte faz referência ao chamado **algoritmo da divisão** (um algoritmo é um procedimento ou método matemático usado para obter um resultado).

Teorema 3.1.1.5. *Dados dois inteiros quaisquer, a e b, com $a > 0$, existe um único inteiro q e um único inteiro r, tal que $b = qa + r$ e $0 \leq r < a$. Se $a \nmid b$, então r satisfaz as desigualdades mais fortes $0 < r < a$.*

(q e r são chamados, respetivamente, quociente e resto da divisão euclidiana de b por a.)

Como sabemos, dados dois números naturais, a e b, nem sempre b é múltiplo de a. b será múltiplo de a se, e somente se, $r = 0$.

$$a|b \Leftrightarrow r = 0$$

3.1.2. Congruência modular

"A congruence is nothing more than a statement about divisibility.
However, it is more than a convenient notation."
(Niven et al., 1991, p. 47)

O desenvolvimento desta secção tem por base Niven et al. (1991), Smith e Martins (2009) e também Fonseca e Almada (2013).

Definição 3.1.2.1. *Se um inteiro m, diferente de zero, divide a diferença $a - b$, diz-se que a é congruente com b modulo m e escreve-se*

$$a \equiv b(mod\ m)$$

Também se pode dizer que, se a e b são números inteiros e $m > 0$, dizemos que a é congruente com b módulo m se a e b têm o mesmo resto na divisão inteira por m.

Exemplo:

$23 \equiv 8(mod5)$

5 divide 23-8

23 e 8 têm ambos resto 3 na divisão por 5

$$\begin{array}{r|l} 23 & 5 \\ \hline \mathbf{3} & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 5 \\ \hline \mathbf{3} & 1 \end{array}$$

Teorema 3.1.2.2.

Se a, b e $c, d \in \mathbb{Z}$, então:

(1) $a \equiv a\ (mod\ n)$ (reflexibilidade)

(2) Se $a \equiv b\ (mod\ n)$, *então* $b \equiv a\ (mod\ n)$ (simetria)

(3) Se $a \equiv b\ (mod\ n)$ e $b \equiv c\ (mod\ n)$, *então* $a \equiv c\ (mod\ n)$ (transitividade)

(4) Se $a \equiv b\ (mod\ n)$ e $c \equiv d\ (mod\ n)$,
então $a + c \equiv b + d\ (mod\ n)$ *e* $ac \equiv bd\ (mod\ n)$.

(5) Se $a \equiv b\ (mod\ n)$, então $ac \equiv bc\ (mod\ n)$ e $a + c \equiv b + c\ (mod\ n)$

(6) Se $a \equiv b\ (mod\ n)$, *então* $a^k \equiv b^k (mod\ n), \forall k \in \mathbb{N}$.

Exemplo: Apresenta-se, de seguida, um exemplo para propriedade (3).

$23 \equiv 8\ (mod5)\ e\ 8 \equiv 43\ (mod5) \Rightarrow 23 \equiv 43\ (mod5)$

Como sabemos, $5|(23-8)$, $5|(8-43)$ e $5|(23-43)$.

Nota: Tendo em conta a definição 3.1.2.1., dizer que $a \equiv b(mod\ n)$ é equivalente a dizer que n é um divisor de $a - b$.

Exemplo: Apresenta-se, também, um exemplo para a propriedade (4).

$25 \equiv 11(mod7)$ e $46 \equiv 18(mod7) \Rightarrow 25 \times 46 \equiv 11 \times 18(mod7)$, ou seja,

$1150 \equiv 198(mod7)$

Como se mostra a seguir, $7|(1150-198)$:

1150 – 198 = 952 e

$$\begin{array}{r|l} 952 & 7 \\ \hline 25 & 136 \\ 42 & \\ 0 & \end{array}$$

Por apresentar as propriedades 1, 2 e 3 anteriormente referidas no teorema 3.1.2.2., a relação de congruência é uma relação de equivalência, que é compatível com as operações adição e multiplicação.

Definição 3.1.2.3. *Se considerarmos todos os números inteiros que têm o mesmo resto que a na divisão inteira por n, com a e n números inteiros e n positivo, temos a* ***classe de congruência*** *módulo n de a, que se representa por* $[a]_{\equiv(mod n)}$.

Considerando $[a]_{\equiv(mod n)}$ e $[b]_{\equiv(mod n)}$, verifica-se que

$$[a]_{\equiv(mod n)} = [b]_{\equiv(mod n)} \text{se, e só se, } a \equiv b(mod n\ ).$$

Exemplo: $[3]_{\equiv(mod 7)}$=$[-4]_{\equiv(mod 7)=}$ $[10]_{\equiv(mod 7)}$

$[3]_{\equiv(mod 7)} = \{\dots, -4, 3, 10, 17, 24, \dots\}$. Isto é, $[3]_{\equiv(mod 7)}$ corresponde ao conjunto de todos os inteiros que têm resto 3 na divisão por 7.

Considerando o resto (r) da divisão inteira de a por n, verifica-se que

$$[a]_{\equiv(mod n)} = [r]_{\equiv(mod n)}$$

Exemplo: $[80]_{\equiv(mod 7)}$ = $[3]_{\equiv(mod 7)}$

E uma vez que na divisão inteira por n os restos possíveis são números inteiros de 0 a $n-1$, então existem n *classes de congruência módulo* n.

Exemplo: *Classes de congruência módulo 6*:

$$[0]_{\equiv(mod 6)}, [1]_{\equiv(mod 6)}, [2]_{\equiv(mod 6)}, [3]_{\equiv(mod 6)}, [4]_{\equiv(mod 6)}, [5]_{\equiv(mod 6)}$$

Anteriormente já se falou da compatibilidade da relação de congruência com as operações adição e multiplicação. Essa compatibilidade permite que:

$$[a]_{\equiv(mod n)} + [b]_{\equiv(mod n)} = [a+b]_{\equiv(mod n)}$$

$$\text{e } [a]_{\equiv(mod n)} \times [b]_{\equiv(mod n)} = [ab]_{\equiv(mod n)}.$$

3.1.3. Critérios de Divisibilidade Diretos

"Dado um inteiro positivo n, chama-se critério de divisibilidade por n a qualquer proposição que permite calcular, mediante um processo rápido e eficaz, o resto da divisão por n de um inteiro positivo dada a sua representação decimal."

(Smith & Martins, 2009, p. 90)

Quando a questão dos critérios de divisibilidade é abordada com alunos com nove ou dez anos de idade, é-lhes incutida a noção de que esses critérios são usados para se verificar se um determinado número é divisível por outro de uma forma rápida, e o enunciado de cada critério a aprender é-lhes apresentado recorrendo-se a uma linguagem bastante simples:

- Um número é **divisível por 2** se e só se for par, ou seja, se o algarismo das unidades for 0, 2, 4, 6 ou 8;

- Um número é **divisível por 5** se e só se o algarismo das unidades for 0 ou 5;

- Um número é **divisível por 10** se e só se o algarismo das unidades for zero;

- Um número é **divisível por 3** se e só se a soma dos seus algarismos for divisível por 3;

- Um número é **divisível por 4** se e só se o número formado pelos seus dois últimos algarismos for divisível por 4;

- Um número é **divisível por 9** se e só se a soma dos seus algarismos for divisível por 9.

A título de curiosidade, aborda-se também o critério de divisibilidade por 6: um número é **divisível por 6** se e só é divisível por 2 e por 3 simultaneamente.

De seguida será demonstrado por que razão assim acontece para estes casos.

O desenvolvimento desta secção baseia-se em Smith e Martins (2009) e Hall (2019).

Os critérios de divisibilidade por $2, 3, 4, 5, 9, 10$, podem ser enunciados de uma forma mais completa do que aquela que se aprende atualmente no 2.º Ciclo do Ensino Básico, referida anteriormente. Este outro enunciado permite-nos dizer qual é o resto da divisão de um número por cada um destes divisores. É necessário referir que no critério de divisibilidade por 6, também mencionado anteriormente, tal não se verifica.

3.1.3.1. Critérios de divisibilidade por 2, 5 e 10

Os critérios de divisibilidade por $2, 5$ e 10 são muito simples e semelhantes entre si. Em qualquer um destes casos é a partir do algarismo das unidades que concluímos se um número é divisível ou não por $2, 5$ e 10.

Para se fazer a dedução e chegar aos enunciados destes critérios de divisibilidade, é preciso conhecer a representação decimal do número a.

Se considerarmos $a_0, a_1, \dots, a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $a_n \neq 0$,

$$a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0.$$

Este número inteiro positivo, com $n+1$ algarismos, representa-se por $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$.

Considere-se, então, $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$. Vamos mostrar que, para averiguar se um número é divisível por $2, 5$ e 10 necessitamos de atender apenas ao algarismo das unidades.

✓ Critérios de divisibilidade por 2

Se $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1} \times 10 + a_0 = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1} \times 5 \times 2 + a_0 = \dot{2} + a_0$

Verifica-se que $a \equiv a_0 (mod\ 2)$

Então, a é divisível por 2 se e só se a_0 for divisível por 2, portanto, de acordo com a **definição 3.1.1.3.**, a_0 terá que ser múltiplo de 2.

Como $a_0 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, tendo em conta a **definição 3.1.1.1.**, desses, apenas $0, 2, 4, 6, 8$ são múltiplos de 2.

Conclui-se, então, que:

- ✓ a é múltiplo de 2, se e só se a_0 for $0, 2, 4, 6, 8$, isto é, se e só se o algarismo das unidades for par;
- ✓ uma vez que $a \equiv a_0 (mod\ 2)$, a e a_0 têm o mesmo resto (r) na divisão por 2, o que, atendendo ao **teorema 3.1.1.5.**, se traduz em:

  $r = 0$, se a_0 for par;

  $r = 1$, se a_0 for ímpar.

Portanto,

a é divisível por 2, se e só se é par, e dá resto 1 na divisão por 2 se e só se é ímpar.

<u>Exemplo:</u> Considerem-se os números 345678 e 876543.

$$\boxed{345678 = 34567 \times \mathbf{10} + 8 = 34567 \times \mathbf{5} \times \mathbf{2} + 8 = \dot{\mathbf{2}} + 8}$$

Verifica-se que $345678 \equiv 8 (mod\ 2)$

Então, 345678 é divisível por 2 porque 8 é divisível por 2; o 8 é múltiplo de 2.

Conclui-se, então, que:

- ✓ 345678 é múltiplo de 2, porque 8 (o algarismo das unidades) é par;
- ✓ 345678 e 8 têm o mesmo resto (r) na divisão por 2, neste caso $r = 0$.

Portanto, 345678 é divisível por 2 pois é par.

$$\boxed{876543 = 87654 \times \mathbf{10} + 3 = 876543 \times \mathbf{5} \times \mathbf{2} + 3 = \dot{\mathbf{2}} + 3}$$

Verifica-se que $876543 \equiv 3(mod\ 2)$

Então, 876543 não é divisível por 2 porque 3 não é divisível por 2; o 3 não é múltiplo de 2.

Conclui-se, então, que:

- ✓ 876543 não é múltiplo de 2, porque 3 (o algarismo das unidades) é ímpar;
- ✓ 876543 e 3 têm o mesmo resto (r) na divisão por 2, neste caso $r = 1$.

Portanto, 876543 não é divisível por 2 pois é ímpar.

✓ Critérios de divisibilidade por 5

Se $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1} \times 10 + a_0 = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1} \times 2 \times 5 + a_0 = \dot{5} + a_0$

Verifica-se que $a \equiv a_0(mod\ 5)$

Então, a é divisível por 5 se e só se a_0 for divisível por 5, portanto, de acordo com a **definição 3.1.1.3.**, a_0 terá que ser múltiplo de 5.

Como $a_0 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, tendo em conta a **definição 3.1.1.1.**, desses, apenas $0\ e\ 5$ são múltiplos de 5.

Conclui-se, então, que:

- ✓ a é múltiplo de 5, se e só se a_0 for $0\ ou\ 5$;
- ✓ uma vez que $a \equiv a_0(mod\ 5)$, a e a_0 têm o mesmo resto (r) na divisão por 5, o que, atendendo ao **teorema 3.1.1.5.**, se traduz em:

  $r = 0$, se a_0 for $0\ ou\ 5$;

  $r = 1$, se a_0 for $1\ ou\ 6$;

  $r = 2$, se a_0 for $2\ ou\ 7$;

  $r = 3$, se a_0 for $3\ ou\ 8$;

  $r = 4$, se a_0 for $4\ ou\ 9$;

Portanto:

a é divisível por 5, se e só se o algarismo das unidades for $0\ ou\ 5$, e o resto da divisão de a por 5 é igual ao resto da divisão do algarismo das unidades por 5.

Exemplo: Considerem-se os números 912340, 912345 e 912347

$$\boxed{912340 = 91234 \times \mathbf{10} + \mathbf{0} = 91234 \times \mathbf{2} \times \mathbf{5} + 0 = \dot{\mathbf{5}} + 0}$$

e

$$\boxed{912345 = 91234 \times \mathbf{10} + \mathbf{5} = 91234 \times \mathbf{2} \times \mathbf{5} + 5 = \dot{\mathbf{5}} + 5}$$

Verifica-se que $912345 \equiv 0(mod\ 5)$ e $912345 \equiv 5(mod\ 5)$

Então, 912340 e 912345 são ambos divisíveis por 5 porque tanto 0 como 5 são divisíveis por 5; o 0 e o 5 são múltiplos de 5.

Conclui-se, então, que:

- ✓ 912340 é múltiplo de 5, porque 0 (o algarismo das unidades) é múltiplo de 5;
- ✓ 912340 e 0 têm o mesmo resto (r) na divisão por 5, neste caso $r = 0$;

e que

- ✓ 912345 é múltiplo de 5, porque 5 (o algarismo das unidades) é múltiplo de 5;
- ✓ 912345 e 5 têm o mesmo resto (r) na divisão por 5, neste caso $r = 0$.

Portanto, 912340 e 912345 são divisíveis por 5 pois o algarismo das unidades de cada um é $0\ ou\ 5$.

Falta, ainda, ver o número 912347:

$$\boxed{912347 = 91234 \times \mathbf{10} + \mathbf{7} = 91234 \times \mathbf{2} \times \mathbf{5} + 7 = \dot{\mathbf{5}} + 7}$$

Verifica-se que $912347 \equiv 7(mod\ 5)$

Então, 912347 não é divisível por 5 porque 7 não é divisível por 5; o 7 não é múltiplo de 5.

Conclui-se, então, que:

- ✓ 912347 não é múltiplo de 5, porque 7 (algarismo das unidades) não é múltiplo de 5;
- ✓ 912347 e 7 têm o mesmo resto (r) na divisão por 5, neste caso $r = 2$.

Portanto, 912347 não é divisível por 5 pois o algarismo das unidades não é $0\ ou\ 5$.

✓ Critérios de divisibilidade por 10

$$a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1} \times 10 + a_0 = \dot{10} + a_0$$

Verifica-se que $a \equiv a_0(mod\ 10)$

Então, a é divisível por 10 se e só se a_0 for divisível por 10, portanto, de acordo com a **definição 3.1.1.3.**, a_0 terá que ser múltiplo de 10.

Como $a_0 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, tendo em conta a **definição 3.1.1.1.**, desses, apenas 0 é múltiplo de 10.

Conclui-se, então, que:

- ✓ a é múltiplo de 10, se e só se a_0 for 0;

- ✓ uma vez que $a \equiv a_0(mod\ 10)$, a e a_0 têm o mesmo resto (r) na divisão por 10, o que, atendendo ao **teorema 3.1.1.5.**, se traduz em dez restos possíveis $(0 \leq r < 10)$, ou seja, o resto da divisão de a por 10 é a_0 (o algarismo das unidades).

Portanto,

a é divisível por 10, se e só se o algarismo das unidades for 0, e o resto da divisão de a por 10 é o algarismo das unidades.

Exemplo: Considerem-se os números 567890 e 567894.

$$\boxed{567890 = 567890 \times \mathbf{10} + 0 = \dot{\mathbf{10}} + 0}$$

Verifica-se que $567890 \equiv 0(mod\ 10)$

Então, 567890 é divisível por 10 porque 0 é divisível por 10; o 0 é múltiplo de 10.

Conclui-se, então, que:

- ✓ 567890 é múltiplo de 10, porque 0 (o algarismo das unidades) é múltiplo de 10;
- ✓ 567890 e 0 têm o mesmo resto (r) na divisão por 10, neste caso $r = 0$.

Portanto, 567890 é divisível por 10 pois o algarismo das unidades é 0.

$$\boxed{567894 = 567894 \times \mathbf{10} + 4 = \dot{\mathbf{10}} + 4}$$

Verifica-se que $567894 \equiv 4(mod\ 10)$

Então, 567894 não é divisível por 10 porque 4 não é divisível por 10; o 4 não é múltiplo de 10.

Conclui-se, então, que:

- ✓ 567894 não é múltiplo de 10, porque 4 (o algarismo das unidades) não é múltiplo de 10;
- ✓ 567894 e 4 têm o mesmo resto (r) na divisão por 10, neste caso $r = 4$.

Portanto, 567894 não é divisível por 10 pois o algarismo das unidades não é 0.

3.1.3.2. Critérios de divisibilidade por 4

Para averiguar se um número é divisível por 4 não basta analisar o algarismo das unidades, tal como se faz para averiguar a divisibilidade por $2, 5\ e\ 10$.

Considere-se, tal como na subseção anterior, $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$.

Se $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2} \times 100 + a_1 \times 10 + a_0 =$

$$= \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2} \times 100 + a_1(8+2) + a_0 =$$

$$= \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2} \times 100 + a_1 \times 8 + (a_1 \times 2 + a_0) =$$

$$= \dot{\mathbf{4}} + \boxed{(a_1 \times 2 + a_0)}$$

Soma do algarismo das unidades com o dobro do algarismo das dezenas.

Verifica-se que $a \equiv a_1 \times 2 + a_0 \ (mod\ 4)$.

Então, a é divisível por 4 se e só se $a_1 \times 2 + a_0$ for divisível por 4, portanto, de acordo com a **definição 3.1.1.3.**, $a_1 \times 2 + a_0$ terá que ser múltiplo de 4.

Conclui-se, então, que:

- ✓ a é múltiplo de 4, se e só se $a_1 \times 2 + a_0$ for múltiplo de 4;
- ✓ uma vez que $a \equiv a_1 \times 2 + a_0 \ (mod\ 4)$, a e $a_1 \times 2 + a_0$ têm o mesmo resto (r) na divisão por 4, o que, atendendo ao **teorema 3.1.1.5.**, se traduz em: $0 \leq r < 4$

Portanto,

a é divisível por 4, se e só se a soma do algarismo das unidades com o dobro do das dezenas também o for, e o resto da divisão de a por 4 é igual ao resto da divisão por 4 da soma do algarismo das unidades com o dobro do das dezenas.

Nota: Se, por outro lado, se considerar:

$$a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} =$$

$$= \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2} \times 100 + \overline{a_1 a_0} =$$

$$= \dot{\mathbf{4}} + \overline{a_1 a_0}$$

Verifica-se que $a \equiv \overline{a_1 a_0} \ (mod\ 4)$.

Pelo que:

a é divisível por 4, se e só se $\overline{a_1 a_0}$ (o número formado pelos seus dois últimos algarismos) também for divisível por 4, e o resto da divisão de a por 4 é igual ao resto da divisão por 4 de $\overline{a_1 a_0}$.

<u>Exemplo:</u> Considerem-se os números 123592 e 123594.

$$123592 = 1235 \times \mathbf{100} + 9 \times 10 \ + 2 = 1235 \times \mathbf{100} + 9 \times (8 + 2) \ + 2 =$$
$$= 1235 \times \mathbf{100} + 9 \times 8 \ + (9 \times 2 + 2) = \dot{\mathbf{4}} + (9 \times 2 + 2)$$

Verifica-se que $123592 \equiv (9 \times 2 + 2) \ (mod \ 4)$.

Então, 123592 é divisível por 4 porque $9 \times 2 + 2$ é divisível por 4; $9 \times 2 + 2$ é múltiplo de 4.

Conclui-se, então, que:

- ✓ 123592 é múltiplo de 4, porque $9 \times 2 + 2$ é múltiplo de 4;
- ✓ 123592 e $9 \times 2 + 2$ têm o mesmo resto (r) na divisão por 4, neste caso $r = 0$.

Portanto, 123592 é divisível por 4 pois a soma do algarismo das unidades com o dobro do algarismo das dezenas é divisível por 4.

Por outro lado, se:

$$123592 = 1235 \times \mathbf{100} + 92 = \dot{\mathbf{4}} + 92$$

Verifica-se que $123592 \equiv 92 \ (mod \ 4)$.

Portanto, 123592 é divisível por 4 pois 92 (o número formado pelos seus dois últimos algarismos) é divisível por 4.

$$123594 = 1235 \times \mathbf{100} + 9 \times 10 \ + 4 = 1235 \times \mathbf{100} + 9 \times (8 + 2) \ + 4 =$$
$$= 1235 \times \mathbf{100} + 9 \times 8 \ + (9 \times 2 + 4) = \dot{\mathbf{4}} + (9 \times 2 + 4)$$

Verifica-se que $123594 \equiv (9 \times 2 + 4) \ (mod \ 4)$.

Então, 123594 não é divisível por 4 porque $9 \times 2 + 4$ não é divisível por 4; $9 \times 2 + 4$ não é múltiplo de 4.

Conclui-se, então, que:

- ✓ 123594 não é múltiplo de 4, porque $9 \times 2 + 4$ não é múltiplo de 4;
- ✓ 123594 e $9 \times 2 + 4$ têm o mesmo resto (r) na divisão por 4, neste caso $r = 2$.

Portanto, 123594 não é divisível por 4 pois a soma do algarismo das unidades com o dobro do algarismo das dezenas não é divisível por 4.

Por outro lado, se:

$$123594 = 1235 \times \mathbf{100} + 94 = \dot{\mathbf{4}} + 94$$

Verifica-se que $123594 \equiv 94 \ (mod \ 4)$.

Portanto, 123594 não é divisível por 4 pois 94 (o número formado pelos seus dois últimos algarismos) não é divisível por 4, e o resto da divisão de 123594 por 4 é igual ao resto da divisão de 94 por 4, neste caso $r = 2$.

3.1.3.3. Critérios de divisibilidade por 3 e 9

Averiguar se um número é divisível por 3 e por 9 requer critérios diferentes dos anteriores, no sentido em que já não se analisa apenas o algarismo das unidades ou os algarismos das dezenas e das unidades, mas sim todos os algarismos que constituem o número.

Para se fazer a dedução e chegar aos enunciados destes critérios de divisibilidade, vai usar-se novamente a representação decimal do número a, tal como referido no início da subsecção 3.1.3.1., mas agora em notação expandida:

$$a = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \dots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0.$$

✓ Critérios de divisibilidade por 3

Se $a = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \dots + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$

Como $10 \equiv 1 (mod\ 3)$, então, pela **propriedade 6 do teorema 3.1.2.2.**,

$10^k \equiv 1 (mod\ 3)$.

Pelo que podemos escrever:

$$a = a_n(10^n - 1 + 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1 + 1) + \cdots + a_3(999 + 1) + a_2(99 + 1) + a_1(9 + 1) + a_0 =$$

$$= a_n + a_n(10^n - 1) + a_{n-1} + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + \cdots + a_3 + a_3 999 + a_2 + a_2 99 + a_1 + a_1 9 + a_0 =$$

$$= [a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + \cdots + a_3 999 + a_2 99 + a_1 9]$$
$$+ (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 + a_0) =$$

$$= \dot{\mathbf{3}} + \underbrace{\boxed{(a_n + a_{n-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 + a_0)}}_{\text{Soma dos algarismos de } a.}$$

Verifica-se que $a \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 (mod\ 3)$.

Então, a é divisível por 3 se e só se a soma dos seus algarismos for divisível por 3, portanto, de acordo com a **definição 3.1.1.3.**, $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ terá que ser múltiplo de 3.

Conclui-se, então, que:

- ✓ a é múltiplo de 3, se e só se $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ for múltiplo de 3,
- ✓ uma vez que $a \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 (mod\ 3)$,

a e $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ têm o mesmo resto (r) na divisão por 3, o que, atendendo ao **teorema 3.1.1.5.**, se traduz em: $0 \leq r < 3$

Portanto,

a é divisível por 3, se e só se a soma dos seus algarismos também o for, e o resto da divisão de a por 3 é igual ao resto da divisão por 3 da soma dos seus algarismos.

<u>Exemplo:</u> Considerem-se os números 76542 e 76541.

$$\boxed{76542 = 7 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 4 \times 10 + 2 =}$$

Como $10 \equiv 1(mod\ 3)$ e $10^k \equiv 1(mod\ 3)$,

$$\begin{aligned} 76542 &= 7 \times (9999 + 1) + 6 \times (999 + 1) + 5 \times (99 + 1) + 4 \times (9 + 1) + 2 = \\ &= 7 + 7 \times 9999 + 6 + 6 \times 999 + 5 + 5 \times 99 + 4 + 4 \times 9 + 2 = \\ &= (7 \times 9999 + 6 \times 999 + 5 \times 99 + 4 \times 9) + (7 + 6 + 5 + 4 + 2) = \\ &= \dot{\mathbf{3}} + (7 + 6 + 5 + 4 + 2) \end{aligned}$$

Verifica-se que $76542 \equiv (7 + 6 + 5 + 4 + 2)\ (mod\ 3)$.

Então, 76542 é divisível por 3 porque $7 + 6 + 5 + 4 + 2$ é divisível por 3; $7 + 6 + 5 + 4 + 2$ é múltiplo de 3.

Conclui-se, então, que:

- ✓ 76542 é múltiplo de 3, porque $7 + 6 + 5 + 4 + 2$ é múltiplo de 3;
- ✓ 76542 e $7 + 6 + 5 + 4 + 2$ têm o mesmo resto (r) na divisão por 3, neste caso $r = 0$.

Portanto, 76542 é divisível por 3 pois a soma dos seus algarismos é divisível por 3.

$$\boxed{76541 = 7 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 4 \times 10 + 1 =}$$

Como $10 \equiv 1(mod\ 3)$ e $10^k \equiv 1(mod\ 3)$,

$$\begin{aligned} 76541 &= 7 \times (9999 + 1) + 6 \times (999 + 1) + 5 \times (99 + 1) + 4 \times (9 + 1) + 1 = \\ &= 7 + 7 \times 9999 + 6 + 6 \times 999 + 5 + 5 \times 99 + 4 + 4 \times 9 + 1 = \\ &= (7 \times 9999 + 6 \times 999 + 5 \times 99 + 4 \times 9) + (7 + 6 + 5 + 4 + 1) = \\ &= \dot{\mathbf{3}} + (7 + 6 + 5 + 4 + 1) \end{aligned}$$

Verifica-se que $76541 \equiv (7 + 6 + 5 + 4 + 1)\ (mod\ 3)$.

Então, 76541 não é divisível por 3 porque $7 + 6 + 5 + 4 + 1$ não é divisível por 3; $7 + 6 + 5 + 4 + 1$ não é múltiplo de 3.

Conclui-se, então, que:

- ✓ 76541 não é múltiplo de 3, porque $7+6+5+4+1$ não é múltiplo de 3;
- ✓ 76541 e $7+6+5+4+1$ têm o mesmo resto (r) na divisão por 3, neste caso $r = 2$.

Portanto, 76541 não é divisível por 3 pois a soma dos seus algarismos não é divisível por 3.

✓ Critérios de divisibilidade por 9

Se $a = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$

Como $10 \equiv 1(mod\ 9)$, então, pela **propriedade 6 do teorema 3.1.2.2.**,

$10^k \equiv 1(mod\ 9)$. Pelo que podemos escrever:

$$a = a_n(10^n - 1 + 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1 + 1) + \cdots + a_3(999+1) + a_2(99+1) + a_1(9+1) + a_0 =$$

$$= a_n + a_n(10^n - 1) + a_{n-1} + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + \cdots + a_3 + a_3 999 + a_2 + a_2 99 + a_1 + a_1 9 + a_0 =$$

$$= [a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + \cdots + a_3 999 + a_2 99 + a_1 9] + (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 + a_0) =$$

$$= \dot{\mathbf{9}} + \underbrace{\boxed{(a_n + a_{n-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 + a_0)}}_{\text{Soma dos algarismos de } a.}$$

Verifica-se que $a \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 (mod\ 9)$.

Então, a é divisível por 9 se e só se a soma dos seus algarismos for divisível por 9, portanto, de acordo com a **definição 3.1.1.3.**, $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ terá que ser múltiplo de 9.

Conclui-se, então, que:

- ✓ a é múltiplo de 9, se e só se $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ for múltiplo de 9,
- ✓ uma vez que $a \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 (mod\ 9)$,
  a e $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ têm o mesmo resto (r) na divisão por 9, o que, atendendo ao **teorema 3.1.1.5.**, se traduz em: $0 \leq r < 9$

Portanto,

a é divisível por 9, se e só se a soma dos seus algarismos também o for, e o resto da divisão de a por 9 é igual ao resto da divisão por 9 da soma dos seus algarismos.

<u>Exemplo:</u> Considerem-se os números 65430 e 65436.

$$\boxed{65430 = 6 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 3 \times 10 + 0 =}$$

Como $10 \equiv 1(mod\ 9)$ e $10^k \equiv 1(mod\ 9)$,

$$\begin{aligned} 65430 &= 6 \times (9999 + 1) + 5 \times (999 + 1) + 4 \times (99 + 1) + 3 \times (9 + 1) + 0 = \\ &= 6 + 6 \times 9999 + 5 + 5 \times 999 + 4 + 4 \times 99 + 3 + 3 \times 9 + 0 = \\ &= (6 \times 9999 + 5 \times 999 + 4 \times 99 + 3 \times 9) + (6 + 5 + 4 + 3 + 0) = \\ &= \dot{\mathbf{9}} + (6 + 5 + 4 + 3 + 0) \end{aligned}$$

Verifica-se que $65430 \equiv (6 + 5 + 4 + 3 + 0)\ (mod\ 9)$.

Então, 65430 é divisível por 9 porque $6 + 5 + 4 + 3 + 0$ é divisível por 9; $6 + 5 + 4 + 3 + 0$ é múltiplo de 9.

Conclui-se, então, que:

- ✓ 65430 é múltiplo de 9, porque $6 + 5 + 4 + 3 + 0$ é múltiplo de 9;
- ✓ 65430 e $6 + 5 + 4 + 3 + 0$ têm o mesmo resto (r) na divisão por 9, neste caso $r = 0$.

Portanto, 65430 é divisível por 9 pois a soma dos seus algarismos é divisível por 9.

$$\boxed{65436 = 6 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 3 \times 10 + 6 =}$$

Como $10 \equiv 1(mod\ 9)$ e $10^k \equiv 1(mod\ 9)$,

$$\begin{aligned} 65436 &= 6 \times (9999 + 1) + 5 \times (999 + 1) + 4 \times (99 + 1) + 3 \times (9 + 1) + 6 = \\ &= 6 + 6 \times 9999 + 5 + 5 \times 999 + 4 + 4 \times 99 + 3 + 3 \times 9 + 6 = \\ &= (6 \times 9999 + 5 \times 999 + 4 \times 99 + 3 \times 9) + (6 + 5 + 4 + 3 + 6) = \\ &= \dot{\mathbf{9}} + (6 + 5 + 4 + 3 + 6) \end{aligned}$$

Verifica-se que $65436 \equiv (6 + 5 + 4 + 3 + 6)\ (mod\ 9)$.

Então, 65436 não é divisível por 9 porque $6 + 5 + 4 + 3 + 6$ não é divisível por 9; $6 + 5 + 4 + 3 + 6$ não é múltiplo de 9.

Conclui-se, então, que:

- ✓ 65436 não é múltiplo de 9, porque $6 + 5 + 4 + 3 + 6$ não é múltiplo de 9;
- ✓ 65436 e $6 + 5 + 4 + 3 + 6$ têm o mesmo resto (r) na divisão por 9, neste caso $r = 6$.

Portanto, 65436 não é divisível por 9 pois a soma dos seus algarismos não é divisível por 9.

Ao concluir esta subsecção, deixa-se aqui a definição do conceito $ordem\ de\ n\ módulo\ p$, à qual se recorreu na explanação dos critérios de divisibilidade diretos por 3 e por 9.

- ✓ Sejam n e p tais que $m.d.c.(n,p) = 1$. Define-se $ordem\ de\ n\ módulo\ p$ como sendo o menor inteiro positivo, digamos k, para o qual $n^k \equiv 1\ (mod\ p)$ e escreve-se $ord_p(n)$.

  Apresentam-se como exemplos as ordens de $10\ módulo\ os\ primos\ com\ dez$ usados nesta subsecção.

Exemplo:

- Sabe-se que $ord_3(10) = 1$ e $ord_9(10) = 1$, isto é $10^1 \equiv 1(mod\ 3)$ e $10^1 \equiv 1\ (mod\ 9)$, o que se usou anteriormente, nos critérios de divisibilidade por 3 e 9.

3.2. Proporcionalidade direta e escalas – Conceitos Gerais

A Proporcionalidade Direta é um dos subdomínios da Álgebra que, de acordo com o Programa de Matemática para o Ensino Básico (em vigor até 6 de julho de 2021), deve ser estudado no 2.º Ciclo, mais concretamente, no 6.º ano. Como referem Bivar et al (2013) no anteriormente referido Programa de Matemática, “Os alunos deverão, à entrada do 3.º ciclo, (…) tratar situações que envolvam proporcionalidade direta entre grandezas" (p. 14).

Para além do estudo de todos os conceitos inerentes à proporcionalidade direta: razão; proporção; extremos, meios e termos de uma proporção; propriedades; grandezas diretamente proporcionais e constante de proporcionalidade direta, está também previsto o estudo de escalas e, ainda, a resolução de problemas envolvendo a noção de proporcionalidade direta entre grandezas mutuamente dependentes (Bivar et al., 2013, p. 18).

Nas Metas Curriculares Para o Ensino Básico de Matemática (também em vigor até 6 de julho de 2021), a importância do estudo das escalas aparece reforçada no descritor 7, do objetivo geral 4 (relacionar grandezas diretamente proporcionais), do subdomínio Proporcionalidade Direta, dentro do domínio da Álgebra, o qual consiste em “saber que existe proporcionalidade direta entre distâncias reais e distâncias em mapas e utilizar corretamente o termo «escala»” (Bivar et al., 2012, p. 45).

À semelhança do que aconteceu para o 5.º ano, em julho de 2018 foi igualmente publicado, pela Direção Geral da Educação, o documento curricular Aprendizagens Essenciais | Articulação com o perfil dos alunos – 6.º ano | 2.º Ciclo | Matemática. Neste documento está previsto, ao nível das práticas essenciais de aprendizagem, que os professores criem "condições de aprendizagem para que os alunos, em experiências individuais e de grupo, tenham oportunidade de: (…) resolver e formular problemas de proporcionalidade direta envolvendo, nomeadamente, escalas e percentagens" (Direção Geral da Educação [DGE], 2018b, p. 12).

Verifica-se, então, que dentro do Domínio da Álgebra, o estudo do conceito de escala continua a ser considerado relevante na formação dos alunos do 2.º ciclo.

De acordo com Bivar et al. (2013), a estudo da proporcionalidade direta pelos alunos do 6.º ano deve ter em conta as seguintes noções e conceitos: "noção de grandezas diretamente proporcionais e de constante de proporcionalidade direta; proporções; extremos, meios e termos de uma proporção; propriedades; regra de três simples; escalas em mapas" (p. 18).

Apesar de no conjunto dos conceitos referidos anteriormente não ser feita referência ao conceito de razão, pois este é um conceito estudado no ano anterior, é comum, quando se inicia o estudo da proporcionalidade direta no 6.º ano, fazer-se uma revisão consistente desse conceito pois, como se mostrará ao longo deste capítulo, o conceito de razão está na génese das proporções, das grandezas diretamente proporcionais e, portanto, da proporcionalidade direta.

3.2.1. Razão

Na tentativa de localizar o aparecimento do conceito de razão na História da Matemática, Almeida (2015) refere, a propósito dos conceitos de razão e proporção, que estes conceitos:

> "(…) são encontrados nos livros V e VI dos Elementos de Euclides que datam aproximadamente 300 anos antes de Cristo, embora essa teoria tenha sido atribuída a Eudoxo de Cnido que nasceu 408 antes de Cristo e foi discípulo de Platão, e ainda, muito antes disso, uma intrigante razão conhecida como áurea foi aplicada em grandes construções como as pirâmides do Egipto e o Partenon na Grécia" (p. 12).

A razão áurea a que Almeida (2015) faz referência esteve, posteriormente, presente em trabalhos de Fibonacci, Da Vinci e de outros matemáticos, pintores e arquitetos sendo que, a descoberta de que essa razão era expressa por formas encontradas na natureza, lhe deram o título de razão divina (Almeida, 2015, p. 12).

Como refere Gomes (2011), "O termo razão surge em variados contextos e com múltiplos significados: pode relacionar-se com a faculdade de estabelecer um raciocínio e, por isso, se diz que o Homem é um animal dotado de razão, racional" (p. 29). É por isso que é comum usarmos, no nosso discurso diário, expressões como “tens razão” ou “não tens razão” quando queremos mostrar que concordamos, ou não, com a opinião de alguém.

Ainda segundo Gomes (2011), o termo razão “também aparece ligado à comparação de termos de uma sucessão através de duas operações: a subtração e a divisão” (p.29). Considerando-se as sucessões em que se verifica que a diferença entre dois termos consecutivos é constante, ou aquelas em que o quociente entre dois termos consecutivos é igualmente constante, essas sucessões constituem progressões geométricas, de razão igual ao valor da respetiva diferença ou quociente.

Mas o conceito de razão aparece “em particular, como quociente entre duas grandezas e, como tal, surge nas mais variadas áreas da Matemática, como a Geometria, a Medida, a Aritmética e a Álgebra” (Gomes, 2011, p. 29).

Portanto, como o estudo que se pretende fazer está dentro do domínio da Álgebra, é com este último significado que o conceito de razão será usado ao longo deste trabalho.

Segundo Triches (2020), “A razão é utilizada para comparar duas grandezas, esta comparação é feita através do quociente entre as grandezas” (p. 175). Ou seja:

Definição 3.2.1.1. *Sendo a e b duas grandezas, a* ***razão*** *de a para b é $a \div b$ ou $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$.*

Na representação de uma razão por um quociente ou por uma fração, tal como é indicado anteriormente, a a chama-se $antecedente$ e a b chama-se $consequente$.

<u>Exemplo 1:</u> Numa turma com 25 alunos, 15 são raparigas e 10 são rapazes. A razão entre o número de raparigas e o número de rapazes, nessa turma, é 3:2 ou $\frac{3}{2}$, que lê três para dois. Na forma decimal é 1,5 e, na forma de percentagem, 150%.

De acordo com Rich (1993), existem quatro princípios gerais das razões (p. 192):

1. Para encontrar razões entre quantidades, as quantidades devem estar expressas na mesma unidade.

<u>Exemplo 2:</u> Para encontrar a razão de 30 minutos para 1 hora, tem-se que transformar 1 hora em 60 minutos.

2. Uma razão é um número abstrato, ou seja, um número sem unidade de medida.

<u>Exemplo 3:</u> A razão de 30 minutos para 1 hora (60 minutos) pode representar-se por 30:60. As unidades de tempo não surgem indicadas na razão.

3. Uma razão deve ser simplificada.

Exemplo 4: $30{:}60 = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$.

4. As razões de três ou mais quantidades podem ser expressas como uma razão contínua.

Exemplo 5: A razão de 10 minutos para 30 minutos para 60 minutos representa-se por $10{:}\,30{:}\,60$ e é a combinação de três razões: $10{:}\,30, 30{:}\,60\ e\ 10{:}\,60$.

Apesar de, ao nível do 2.º Ciclo do Ensino Básico, ser comum aplicar-se com regularidade o pressuposto no 1.º princípio geral enunciado por Rich (1993), para estabelecer a razão entre duas quantidades ou duas grandezas, estas não têm que estar expressas, obrigatoriamente, na mesma unidade. Como refere Gomes (2011): “Podemos, no entanto, considerar o conceito de razão num sentido mais amplo, incluindo comparações envolvendo grandezas de natureza diferente, expressas naturalmente em diferentes unidades. Normalmente, são usados para designar essas comparações termos como rácio, taxa ou índice” (p. 32).

Ultimamente, devido à situação pandémica vivida em todo o mundo, causada pelo SARS-CoV-2, o novo coronavírus que foi detetado na China, no final de 2019, e que rapidamente chegou aos outros países, esses termos (rácio, taxa ou índice) têm sido amplamente utilizados quer por representantes políticos, quer pela comunicação social. Apresenta-se de seguida, como exemplo, a Taxa de Incidência Comulativa.

Exemplo 6: Taxa de Incidência Cumulativa a 14 dias de infeção por SARS-CoV-2/COVID-19: de acordo com o Relatório de Situação nº 328, de 24 de janeiro de 2021, emitido pelo Direção Geral da Saúde (DGS), esta taxa obtém-se pelo quociente entre o número de novos casos confirmados em determinada data e a população residente estimada. É feita por concelho e, habitualmente é expressa em número de casos por 100 000 habitantes.
(https://covid19.min-saude.pt/wp-content/uploads/2021/01/328_DGS_boletim_20210124.pdf)

$$Taxa\ de\ Incidência\ Cumulativa = \frac{número\ de\ novos\ casos}{\text{população residente estimada}}.$$

No relatório da DGS referido anteriormente, é dado com exemplo o seguinte caso: “Nos 14 dias anteriores ao dia de análise, 50 casos de infeção por SARS-CoV-2/ COVID-19 foram atribuídos a um determinado concelho, com uma população residente de 150 000 habitantes. Incidência cumulativa a 14 dias = (50/150 000) x 100 000 = 33,3 casos por 100 000 hab.”
(https://covid19.min-saude.pt/wp-content/uploads/2021/01/328_DGS_boletim_20210124.pdf)

Além desta, e apesar do conceito de razão ser considerado um conceito elementar, existem inúmeras outras situações do dia a dia em que se utilizam razões. Apresentam-se, de seguida, outros exemplos.

Exemplo 7: Velocidade média – obtém-se pelo quociente entre uma distância percorrida (d) e o tempo gasto para a percorrer (t). É expressa em quilómetros por hora (km/h).

$$V = \frac{d}{t}.$$

Exemplo 8: Densidade corporal ou Índice de Massa Corporal (IMC) – obtém-se pelo quociente entre a massa do corpo, em quilos (kg), e o quadrado da altura, em metros (m). É expressa em quilogramas por metro quadrado (kg/m^2).

$$IMC = \frac{massa}{(altura)^2}.$$

Exemplo 9: Densidade demográfica ou populacional – obtém-se pelo quociente entre o número de habitantes e a área da região onde habitam. É habitualmente expressa em habitantes por quilómetro quadrado.

$$densidade\ demográfica = \frac{número\ de\ habitantes}{área}$$

Exemplo 10: Percentagem – obtém-se pelo quociente entre o número de unidades de algo (n) e um termo de comparação previamente estabelecido, que é 100, portanto:

$$n\% = \frac{n}{100}$$

Exemplo 11: Escala – obtém-se pelo quociente entre a dimensão na representação (mapa, desenho, planta ou maquete, por exemplo) e a correspondente dimensão real, expressas na mesma unidade de medida, usualmente o centímetro.

$$Escala = \frac{dimensão\ na\ representação}{dimensão\ real}$$

Sobre as escalas falar-se-á mais em pormenor na secção 3.2.5., por este ser um dos conceitos a tratar no âmbito do trabalho a realizar.

No que diz respeito à equivalência de razões, de acordo com Almeida (2015), tem-se que:

Definição 3.2.1.2. *Duas **razões** são **equivalentes** se representam o mesmo quociente, isto é, sejam os números racionais não nulos, a, b, c e d, e sendo a razão $\frac{a}{b} = q$, temos que a razão $\frac{c}{d}$ será equivalente a $\frac{a}{b}$ se, e somente se, $\frac{c}{d} = q$* (p. 20).

Segundo o mesmo autor, para representar as razões equivalentes indicadas, utiliza-se o símbolo de equivalência, obtendo-se a seguinte representação: $\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d}$ e, em consequência do princípio de equivalência, tem-se ainda que: se $\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d}$, então existe um número real m tal que $c = m \times a$ e $d = m \times b$.

Portanto, para obter razões equivalentes basta multiplicar ou dividir ambos os termos de uma dada razão pelo mesmo número.

<u>Exemplo 12:</u> Todas as razões em que se verifique que o consequente é o dobro do antecedente são razões equivalentes pois o quociente que representam é sempre o mesmo: $0{,}5$.
Portanto, tem-se, por exemplo, que $\frac{3}{6} \equiv \frac{9}{18}$. Neste caso concreto, observa-se ainda que multiplicando ambos os termos da razão $\frac{3}{6}$ por 3 obtém-se a razão $\frac{9}{18}$. Mas, se em vez de multiplicar, dividíssemos ambos os seus termos por 3 obter-se-ia a razão $\frac{1}{2}$, a qual representa mesmo quociente: $0{,}5$.

Almeida (2015) refere também que "Considerando a propriedade da Tricotomia dos números reais para duas razões reais $\frac{a}{b} = q$ e $\frac{c}{d} = r$, temos que apenas uma das seguintes relações é válida: ou $q = r$ (são equivalentes), ou $q > r$, ou $q < r$" (p. 20).

Portanto, não se tratando de duas razões equivalentes ($q > r$ ou $q < r$) o princípio de equivalência será utilizado para as comparar: se $q > r$ então $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$; se $q < r$ então $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

No entanto, a comparação de razões pode fazer-se também por outro processo, mais comum entre os alunos do 6.º ano. Se as razões tiverem o mesmo consequente ($b = d$), a comparação é imediata e resume-se à comparação dos antecedentes (é maior aquela que tem maior antecedente); caso as razões não tenham o mesmo consequente ($b \neq d$), então terão que se obter razões equivalentes às dadas, com igual consequente.

<u>Exemplo 13:</u> Considerando-se as razões $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$, verifica-se que os consequentes são iguais, portanto será maior aquela que tiver maior antecedente, pelo que $\frac{1}{4} < \frac{3}{4}$.

<u>Exemplo 14:</u> Considerando-se as razões $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$, verifica-se que os consequentes não são iguais, portanto é necessário obter razões equivalentes às dadas com o mesmo consequente. Para tal, ter-se-á que procurar para consequente um número que seja simultaneamente múltiplo de 3 e de 5, por exemplo, 15. Então, como $3 \times 5 = 15$ e $5 \times 3 = 15$ multiplicam-se ambos os termos de $\frac{2}{3}$ por 5 e multiplicam-se ambos os termos de $\frac{4}{5}$ por 3, obtendo-se as razões $\frac{10}{15}$ e $\frac{12}{15}$. Como $\frac{10}{15} < \frac{12}{15}$ então $\frac{2}{3} < \frac{4}{5}$.

3.2.2. Proporção

De acordo com o previsto nas Metas Curriculares de Matemática Para o Ensino Básico em vigor até 6 de julho de 2021, pretende-se que os alunos do 6.º ano sejam capazes de "Identificar uma proporção como uma igualdade entre duas razões não nulas e utilizar corretamente os termos «extremos», «meios» e «termos» de uma proporção" e, também, "Reconhecer que numa proporção o produto dos meios é igual ao produto dos extremos" (Bivar et al., 2012, p. 45).

Está ainda previsto que que os alunos sejam capazes de "determinar o termo em falta numa dada proporção utilizando a regra de três simples ou outro processo de cálculo" (Bivar et al., 2012, p. 45).

Tanto Gomes (2011) como Rich (1993) dão-nos a seguinte definição de proporção:

Definição 3.2.2.1. *Uma **proporção** é uma igualdade entre duas razões* (p. 34 e p. 335).

Triches (2020) usa a expressão "igualdade ou equivalência" entre duas razões (p.178). Ou seja, se se verificar que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $(com\ b,\ d \neq 0)$, o que também se pode representar por $a{:}b = c{:}d$, diz-se que $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ ou $a{:}b$ e $c{:}d$ formam uma proporção e que a, b, c, d estão em proporção.

Em linguagem natural, diz-se que $a\ está\ para\ b\ assim\ como\ c\ está\ para\ d$. A a e d chamam-se $extremos$ da proporção e b e c são os $meios$ da proporção.

Representar as razões que constituem a proporção na forma de quocientes facilita a identificação dos meios e dos extremos da proporção:

$$a{:}b\ =\ c{:}d$$

Extremos Meios

<u>Exemplo 15:</u> Para confecionar biscoitos seguindo uma determinada receita, usam-se entre outros ingredientes, 125 g de margarina e 400 g de farinha. Se se pretender fazer um maior número de

biscoitos do que aquele que a receita original permite fazer, ter-se-á que aumentar a quantidade de cada um dos ingredientes a usar. No entanto, para se manter o sabor e a consistência é necessário respeitar a proporção existente entre os ingredientes. Portanto, se 125 g de margarina estão para 400 g de farinha, usando-se, por exemplo, 250 g de margarina será necessário usar 800g de farinha. Então $\frac{125}{400} e \ \frac{250}{800}$ formam uma proporção: $\frac{125}{400} = \frac{250}{800}$. Nesta proporção, 125 e 800 são os extremos e 400 e 250 são os meios.

Relativamente aos termos de uma proporção, verifica-se, de acordo com Gomes (2011), que:

Propriedade 3.2.2.2. *Numa proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. (p.34) Ou seja:* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow bc = ad$. *Esta é a* ***propriedade fundamental das proporções****.*

Por sua vez, Rich (1993) refere-se a esta propriedade como sendo uma regra e recorre à representação das razões na forma de quocientes para a enunciar: “Proporcion rule: $If\ a{:}b = c{:}d,\ \ ad = \ bc$” (p. 335).

Demonstração: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ad}{bd} = \frac{cb}{db} \Leftrightarrow ad = bc$

<u>Exemplo 16:</u> Se se considerar a proporção formada no exemplo anterior, $\frac{125}{400} = \frac{250}{800}$ ou $125{:}\,400 = 250{:}\,800$ usando a propriedade fundamental das proporções mostra-se que, de facto, se tem uma proporção pois $400 \times 250 = 125 \times 800$.

Gomes (2011) refere que: “Se numa proporção um dos termos é desconhecido, chama-se-lhe o quarto proporcional (não tem necessariamente de ser o quarto termo)” (p. 37).

Ou seja: $\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \Leftrightarrow ax = bc \Leftrightarrow x = \frac{bc}{a}$.

<u>Exemplo 17:</u> Voltando à situação apresentada no exemplo 15, e considerando agora que se pretende usar apenas 100 g de margarina, qual será a quantidade de farinha necessária? Sabe-se já que para 125 g de margarina seriam necessários 400 g de farinha, portanto ao construir-se a proporção, surge um termo desconhecido, correspondente à quantidade de farinha a usar agora, o qual se representa seguidamente por x:

$$\frac{125}{400} = \frac{100}{x}$$

Para determinar x basta recorrer à propriedade fundamental das proporções:

$$\frac{125}{400} = \frac{100}{x} \Leftrightarrow 125x = 400 \times 100 \Leftrightarrow x = \frac{400 \times 100}{125} = 320$$

Portanto, para 100 g de margarina serão necessários 320 g de farinha.

Relativamente a estas situações, em que um dos termos da proporção é uma incógnita, o termos desconhecido pode ser determinado utilizando diferentes processos de cálculo.

Almeida (2015), refere que "A propriedade fundamental das proporções representa o algoritmo popularmente denominado multiplicação cruzada" (p. 34). De um modo muitos simples, este algoritmo consiste na multiplicação dos termos localizados na "diagonal que não contém a incógnita, e em seguida, dividir o resultado obtido pelo valor apresentado na diagonal que contém a incógnita" (Almeida, 2015, p. 34).

<u>Exemplo 18:</u> Resolução da situação apresentada no exemplo anterior recorrendo ao chamado algoritmo da multiplicação cruzada:

$$\frac{125}{400} = \frac{100}{x}$$

$$x = (400 \times 100) : 125 = 40\,000 : 125 = 320$$

Portanto, mais uma vez que verifica que, para 100 g de margarina serão necessários 320 g de farinha.

Segundo Gomes (2011), é o conceito de quarto proporcional "que está na base da chamada regra de três simples" (p. 37). Este é também um dos processos de cálculo que, tal como já foi referido anteriormente, os alunos do 6.º ano deverão ser capazes de utilizar para determinar o termo em falta numa dada proporção.

Almeida (2015), refere que a regra de três simples consiste numa aplicação "dos conceitos: equivalência entre razões, proporção e propriedade fundamental das proporções. A denominação regra de três é justificada pelo fato dos problemas (…) representarem proporções onde três dos quatro termos são conhecidos e um é desconhecido e representado por uma incógnita" (p. 38).

Para se aplicar a regra de três simples na resolução de problemas envolvendo proporcionalidade direta, é usual recorrer-se a um esquema que estabelece a correspondência entre os diferentes termos das razões envolvidas.

<u>Exemplo 19:</u> Resolvendo a situação apresentada no exemplo 17 recorrendo à regra de três simples, a correspondência entre as diferentes quantidades dos dois ingredientes, margarina e farinha, poderá ser representada usando-se o seguinte esquema:

Margarina (g)		Farinha (g)
125	————————	400
100	————————	x

Para determinar x recorre-se à multiplicação cruzada, determina-se o produto de 100 por 400 e, de seguida, divide-se o valor obtido por 125. Ou seja:

$$x = (100 \times 400) : 125 = 40\,000 : 125 = 320$$

Portanto, tal como já se tinha mostrado nos exemplos anteriores, para 100 g de margarina serão necessários 320 g de farinha.

3.2.3. Grandezas diretamente proporcionais e Constante de proporcionalidade

No que diz respeito a grandezas diretamente proporcionais e, de acordo com o previsto nas Metas Curriculares de Matemática Para o Ensino Básico, em vigor até 6 de julho de 2021, pretende-se que os alunos do 6.º ano sejam capazes de "Identificar uma grandeza como «diretamente proporcional» a outra quando dela depende de tal forma que, fixadas unidades, ao multiplicar a medida da segunda por um dado número positivo, a medida da primeira fica também multiplicada por esse número" (Bivar et al., 2012, p. 45).

Quanto à constante de proporcionalidade, pretende-se que os alunos sejam capazes de "Reconhecer que uma grandeza é diretamente proporcional a outra da qual depende quando, fixadas unidades, o quociente entre a medida da primeira e a medida da segunda é constante e utilizar corretamente o termo «constante de proporcionalidade»" (Bivar et al., 2012, p. 45).

Ainda a respeito da constante de proporcionalidade, os alunos terão também que ser capazes de "Reconhecer que se uma grandeza é diretamente proporcional a outra então a segunda é diretamente proporcional à primeira e as constantes de proporcionalidade são inversas uma da outra" (Bivar et al., 2012, p. 45).

Apesar de ao nível do 6º ano não se abordar diretamente o conceito de variável, importa começar por apresentar uma definição para este conceito, pois ele começa a ser usado, ainda que não explicitamente, por altura do estudo das grandezas diretamente proporcionais.

Definição 3.2.3.1. *Em álgebra, uma **variável** é uma letra que poder representar qualquer número de um conjunto de números em discussão, quando esse conjunto contém mais do que um número*. (Rich, 1993, p. 318)

Exemplo 20: Considerando-se $y = 3x$, e recorrendo a uma tabela para organizar os valores de y em função dos valores atribuídos a x, temos:

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
y	3	6	9	12	15	18

Definição 3.2.3.2. *Uma **constante** é uma qualquer letra ou número que possui um valor fixo que não se altera durante a discussão* (Rich, 1993, p. 318).

Portanto, e segundo o mesmo autor, 5 e π são constantes.

Importa referir que, nas definições e exemplos que se seguem, as letras x e y representam variáveis e a letra c representa uma constante. É igualmente importante referir também que no estudo de grandezas diretamente proporcionais realizado ao nível do 6.º ano (2.º Ciclo do Ensino Básico), consideram-se apenas situações em que a constante de proporcionalidade é um número positivo.

Definição 3.2.3.3. *Duas **grandezas** são **diretamente proporcionais** quando a razão entre elas é constante* (Gomes, 2011, p. 42).

Ou seja, dadas duas grandezas, a grandeza x e a grandeza y, estas são diretamente proporcionais se $\frac{y}{x} = c$. A c chama-se **constante de proporcionalidade**.

Pode dizer-se, também, que uma grandeza x é diretamente proporcional a uma grandeza y se existir um número c, diferente de zero, tal que $y = cx$ (função linear).

Verifica-se, ainda, que: se $y = cx$ ou $\frac{y}{x} = c$ então:

(1) x e y variam diretamente entre si; ou seja, x varia diretamente como y, e y varia diretamente como x.

(2) x e y são diretamente proporcionais entre si; ou seja, $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1}$ pois x varia de x_1 para x_2 e y varia de y_1 para y_2" (Rich, 1993, p.320).

Nota: Se uma grandeza é diretamente proporcional a outra e a segunda é proporcional à primeira, como é referido em (1), então as constantes de proporcionalidade são inversas uma da outra, tal como se mostra no exemplo a seguir apresentado.

<u>Exemplo 21:</u> Na tabela seguinte relacionam-se os valores de duas grandezas, A e B.

A	**1**	**2**	**3**	**4**
B	0,2	0,4	0,6	0,8

Como $\frac{0,2}{1} = \frac{0,4}{2} = \frac{0,6}{3} = \frac{0,8}{4} = 0,2$ verifica-se que a razão entre a grandeza B e a grandeza A é constante, pois é sempre igual a 0,2. Portanto, a grandeza B é diretamente proporcional à grandeza A e 0,2 é a constante de proporcionalidade.

Por outro lado, considerando a razão entre a grandeza A e a grandeza B, verifica-se que o quociente obtido é igualmente constante: $\frac{1}{0,2} = \frac{2}{0,4} = \frac{3}{0,6} = \frac{4}{0,8} = 5$. Neste caso, a constante de proporcionalidade é 5, que é o inverso de $0,2$.

Ainda a respeito de duas grandezas diretamente proporcionais, Gomes (2011) refere que: "Verifica-se que aumentando/diminuindo uma das grandezas a outra aumenta/diminui na mesma proporção" (p. 42), o que Rich (1993) traduz por duas regras relativas à multiplicação e divisão das variáveis x e y:

– Se x and y variam diretamente entre si e um valor de x ou y é multiplicado por um número, então, o valor correspondente do outro é multiplicado pelo mesmo número (p. 320).

<u>Exemplo 22:</u>

		$\times 2$		$\times 2$		$\times 2$	
$\boldsymbol{x}$	**2**		**4**		**8**		**16**
$\boldsymbol{y}$	0,5		1		2		4
		$\times 2$		$\times 2$		$\times 2$	

– Se x and y variam diretamente entre si e um valor de x ou y é dividido por um número, então, o valor correspondente do outro é dividido pelo mesmo número (p. 320).

<u>Exemplo 23:</u>

		$\div 2$		$\div 2$		$\div 2$	
$\boldsymbol{x}$	**600**		**300**		**150**		**75**
$\boldsymbol{y}$	200		100		50		25
		$\div 2$		$\div 2$		$\div 2$	

3.2.4. Proporcionalidade direta e função linear

Apesar de o conceito de função linear apenas ser abordado no 3.º ciclo do ensino básico, ao nível do 7.º ano, uma vez que anteriormente se fez referência à apresentação do conceito de proporcionalidade direta com uma função linear ($y = cx$) apresenta-se, de seguida, uma definição de função de proporcionalidade direta e respetivo exemplo.

<u>**Definição 3.2.4.1.**</u> *Dada uma grandeza Y diretamente proporcional a outra X, fixadas unidades, designa-se função de proporcionalidade direta f a função que associa à medida m da segunda a correspondente medida $y = f(m)$ da primeira. Para todo o número positivo x, $f(xm) = xf(m)$* (Neves e Silva, 2019), p. 109).

Os autores anteriormente referidos utilizam a seguinte tabela para ilustrar a definição de função de proporcionalidade direta apresentada.

$\times 2$

Medida $\boldsymbol{X}$ (objeto)	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{x \times m}$
Medida $\boldsymbol{Y}$ (imagem por $\boldsymbol{f}$)	$f(m)$	$f(x \times m) = x \times f(m)$

$\times 2$

Ou seja, ainda segundo Neves e Silva (2019), "Como $f(x \times m) = x \times f(m)$, para $m = 1$, tem-se $f(x) = xf(1)$. Fazendo $a = f(1)$, vem $f(x) = ax$" (p. 109).
Nota: Quando existe proporcionalidade direta entre duas grandezas, o gráfico que une os pontos correspondentes é uma reta que contém a origem do referencial.

<u>Exemplo 24:</u> Considerando-se que as grandezas indicadas na tabela seguinte são diretamente proporcionais, pretende-se determinar os valores em falta.

$\boldsymbol{q}$ (quantidade de maçãs, em kg)	**0,5**	**1**	**1,5**	**2**
$\boldsymbol{c}$ $(\boldsymbol{q})$ (custo, em euros)	?	2	?	?

Como $c(1) \ = 1{,}30$, então:

- $c(1 \times 0{,}5) = 0{,}5 \times c(1) = 0{,}5 \times 2 = 1$
- $c(1 \times 1{,}5) = 1{,}5 \times c(1) = 1{,}5 \times 2 = 3$
- $c(1 \times 2) = 2 \times c(1) = 2 \times 2 = 4$

Portanto, ter-se-á:

$\boldsymbol{q}$ (quantidade de maçãs, em kg)	**0,5**	**1**	**1,5**	**2**
$\boldsymbol{c}$ $(\boldsymbol{q})$ (custo, em euros)	1	2	3	4

e, graficamente:

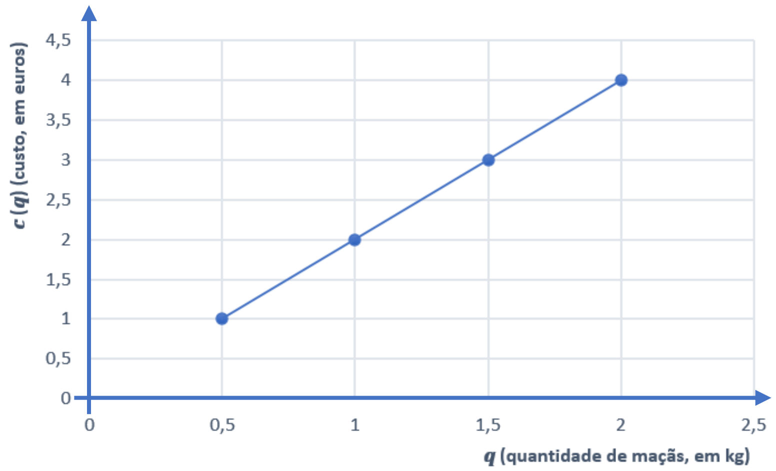


Figura 31 – Gráfico correspondente à situação de proporcionalidade direta entre o custo, em €, e a quantidade de maçãs, em Kg

3.2.5. A proporcionalidade direta nas escalas

Tal como foi referido no início do capítulo 3, o conceito de escala é um dos conceitos que os alunos do 6.º ano estudam dentro do subdomínio da proporcionalidade direta. De acordo com o previsto nas já anteriormente referidas Metas Curriculares de Matemática Para o Ensino Básico, pretende-se que os alunos do 6.º ano sejam capazes de "Saber que existe proporcionalidade direta entre distâncias reais e distâncias em mapas e utilizar corretamente o termo «escala»" (Bivar et al., 2012, p. 45).

Mas, essencialmente, este conceito surge inerente à resolução de problemas de proporcionalidade direta, tal como previsto no documento curricular Aprendizagens Essenciais | Articulação com o perfil dos alunos – 6.º ano | 2.º Ciclo | Matemática, segundo o qual está previsto que os professores criem "condições de aprendizagem para que os alunos, em experiências individuais e de grupo, tenham oportunidade de: (…) resolver e formular problemas de proporcionalidade direta envolvendo, nomeadamente, escalas e percentagens" (Direção Geral da Educação [DGE], 2018, p. 12).

O conceito de escala apareceu já referido em 3.2.1. (exemplo 11), como sendo um exemplo de uma razão de uso frequente em diversas situações do quotidiano. Relembrando o que já foi anteriormente referido no exemplo 11, uma escala obtém-se pelo quociente entre a dimensão na representação (mapa, desenho, planta ou maquete, por exemplo) e a correspondente dimensão real, expressas na mesma unidade de medida, usualmente o centímetro.

$$Escala = \frac{dimensão\ na\ representação}{dimensão\ real}$$

3.2.5.1. Escalas em mapas

Quando se pretende fazer uma representação parcial ou total da Terra, ou seja, fazer um mapa, tenha a região a representar maior ou menor dimensão, não é possível fazê-lo à escala real. Portanto, para o fazer é necessário recorrer a escalas que convertem a dimensão real para a dimensão de representação. Dias (2007) apresenta a seguinte definição de **mapa** (ou carta):

Definição 3.2.5.1.1. ***Mapa (ou carta):*** *Representação gráfica, geralmente plana, de toda ou parte da superfície da Terra ou do Universo e de fenómenos, concretos ou abstratos, aí localizados* (p. 27).

De acordo com a mesma autora, as expressões mapa e carta são consideradas sinónimas, no entanto a primeira é mais conhecida pelas pessoas em geral, enquanto a segunda é utilizada, essencialmente, pelos produtores de mapas.

Definição 3.2.5.1.2. *A **escala do mapa** é a "razão entre distâncias no mapa e distâncias correspondentes na Terra. Indica a redução a que a Terra (isto é, o seu modelo) é sujeita na sua representação plana* (Dias, 2007, p. 43).

Fernandes (2008) acrescenta ainda que "sendo um quociente, que em termos numéricos é representável por uma fracção, quanto menor é o denominador, maior é a escala, ou seja, menos vezes a realidade é reduzida e, portanto, maior pode ser a quantidade e a qualidade da informação representada" (p. 23). A respeito de mapas a grande, média ou pequena escala, Dias (2007) apresenta os seguintes os exemplos:

"- Mapa de escala grande: 1:25 000 ou maior (podendo considerar-se ainda escalas muito grandes as de certas plantas urbanas, por exemplo 1:2500);

- Mapa de escala média: 1:50 000 a 1:100 000;

- Mapa de escala pequena: 1:250 000 ou menor (geralmente abaixo de 1:7 500 000 são considerados mapas de escala muito pequena)" (p. 43).

Portanto, os mapas de grande escala apresentam maior pormenor, pois a realidade foi pouco reduzida. Representam pequenas áreas, como por exemplo, concelhos, cidades ou bairros. Os mapas de pequena escala apresentam pouco pormenor, pois a realidade foi muito reduzida. Representam grandes áreas, como por exemplo continentes ou o mundo.

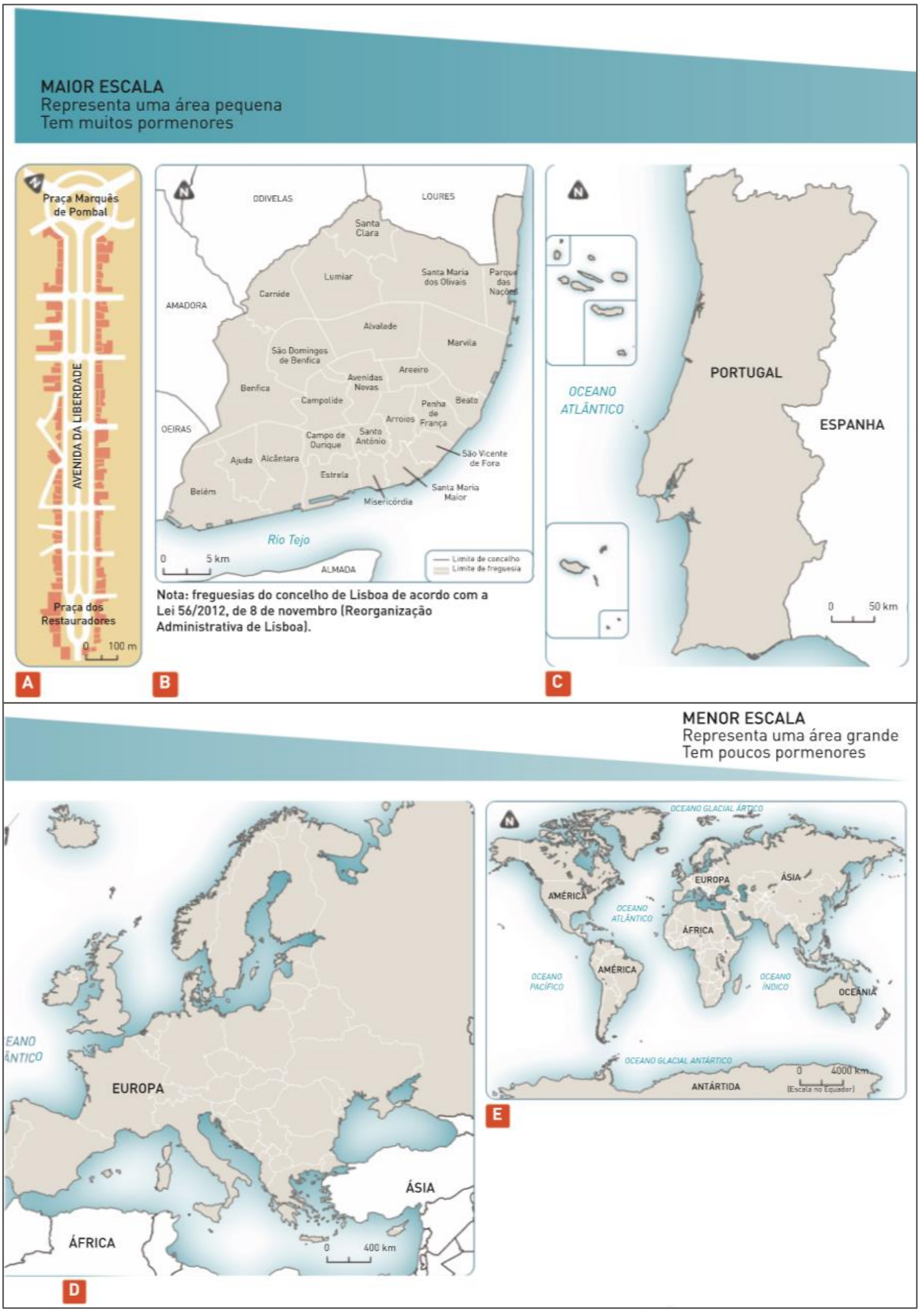


Figura 32 – Exemplos da variação da representação do espaço com a escala: extrato da planta de Lisboa (A), mapa do concelho de Lisboa (B), mapa de Portugal (C), mapa da Europa (D) e mapa do mundo(E). (Gomes et al, 2019, pp. 28 e 29)

Nos mapas podem encontrar-se diferentes tipos de escalas. Fernandes (2008), refere que existem dois tipos de escalas, a escala numérica e a escala gráfica.

Definição 3.2.5.1.3. ***Escala numérica:*** *traduz-se por meio de uma fração, sendo o numerador a unidade e o denominador o número de vezes em que a realidade é reduzida, ou seja, 1:25 000 significa que 1 centímetro (cm) no mapa corresponde a 25 000 centímetros na realidade* (Fernandes,2008, p. 23).

Definição 3.2.5.1.4. ***Escala gráfica****: consiste na expressão da escala através de um segmento de recta graduado em unidades de comprimento (utilizam-se escalas gráficas simples, compostas e múltiplas) (*Fernandes,2008, p. 23).

De acordo com Dias (2007), a escala gráfica pode ser simples composta ou múltipla. A escala gráfica simples consiste num único segmento de reta, a escala gráfica composta apresenta um talão e escala principal, e a escala gráfica múltipla é um conjunto de vários segmentos de reta (pp. 45 e 46).

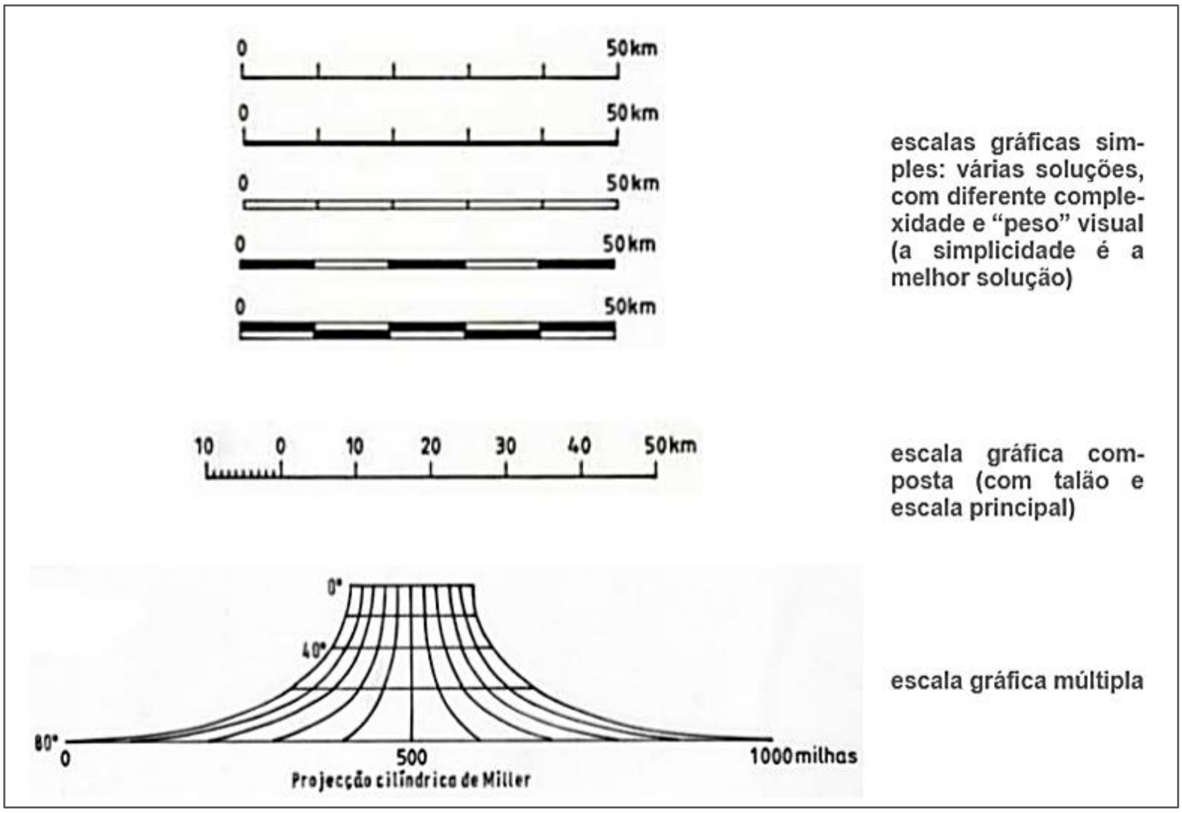


Figura 33 – Tipos de escalas gráficas e soluções com utilização e eficácia diferentes
(Dias, 2007, p. 45)

Dias (2007) considera ainda um terceiro tipo de escala, a escala verbal:

Definição 3.2.5.1.5. ***Escala verbal****: indica, por exemplo, «1 centímetro representa 5km»”* (p. 45).

3.2.5.2. Escalas em desenhos, plantas ou maquetes

Embora o mais frequente, quando se fala em escala, é associar o conceito a mapas, a sua utilização é muito mais abrangente. Tal como a Terra, os continentes, os países e demais regiões do planeta, existem animais, plantas, edifícios, meios de transporte, peças, e tantos e tantos outros objetos, que não podem ser representados usando as suas dimensões reais por serem demasiado grandes. Por outro lado, existem objetos demasiado pequenos que, ao serem representados nas suas dimensões reais, muitos dos seus detalhes não poderiam ser representados. Portanto, quando os objetos a representar são demasiado grandes ou demasiado pequenos, é necessário reduzir ou ampliar.

Neste contexto, a definição de escala adquire uma dimensão mais abrangente, não se cingindo apenas a fazer referência a um objeto específico, como no caso da definição da escala de um mapa, mas podendo ser utilizada de forma generalizada em diversas situações de representação de diversos objetos, podendo aplicar-se tanto em situações de desenho como, por exemplo, na construção de maquetes.

Definição 3.2.5.2.1. ***Escala*** *- relação entre a dimensão do* ***objeto representado no papel*** *e a dimensão real ou física do mesmo (*Gonçalves et al., 2011).

Portanto, se se considerar não a representação no papel, mas, por exemplo a representação numa maquete, a definição apresentada aplicar-se-á igualmente. A relação entre a dimensão no papel e a dimensão real poderá traduzir-se, então, numa redução ou numa ampliação do objeto em causa.

Definição 3.2.5.2.2. ***Escala*** *de redução – quando a dimensão do objeto no desenho é menor que a sua dimensão real. Escala* $1{:}X$ *com* $X > 1$ (Gonçalves e Pinto, 2006, p. 45).

Definição 3.2.5.2.3. ***Escala*** *de ampliação – quando a dimensão do objeto no desenho é maior que a sua dimensão real. Escala* $X{:}1$ *com* $X > 1$ (Gonçalves e Pinto, 2006, p. 45).

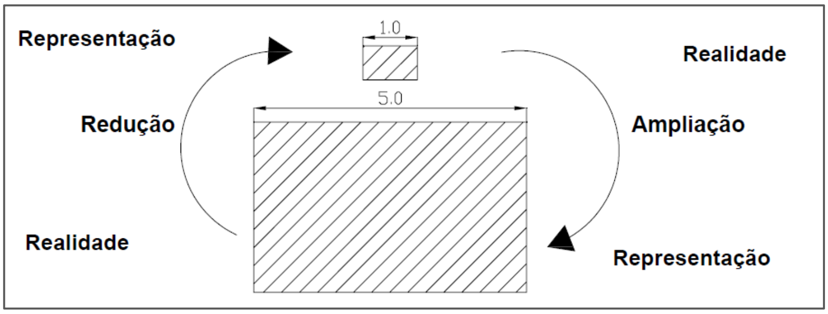


Figura 34 – Esquematização de uma redução/ampliação da realidade
(Gonçalves e Pinto, 2006, p. 45)

De acordo com os autores referidos anteriormente, a "realidade pode ser (ainda) representada em *tamanho natural*, à escala 1: 1."

Tipo de escala	Escalas recomendadas		
Ampliação	20:1	50:1	100:1
	2:1	5:1	10:1
Real	1:1		
Redução	1:2	1:5	1:10
	1:20	1:50	1:100
	1:200	1:500	1:1000
	1:2000	1:5000	1:10000

Figura 35 – Escalas recomendadas pela Norma NP EN ISO 5455:2002
(Gonçalves et al., 2011)

No estudo das escalas pelos os alunos do 6.º ano do Ensino Básico, na disciplina de Matemática, é comum abordarem-se tanto escalas de mapas, como de desenhos, plantas ou maquetes.

4. PROPOSTA PEDAGÓGICA

"A tecnologia deve ser integrada, de forma eficaz, no currículo e, consequentemente, nas aulas."
(Cohen & Fradique, 2018, p. 66)

Tal como foi referido no capítulo 1, a vontade de procurar corresponder à exigência da dinamização de trabalho interdisciplinar, aliada ao constante apelo à implementação de metodologias promotoras de aprendizagens ativas recorrendo às tecnologias de informação e comunicação e, ainda, a incorporação do pensamento computacional na disciplina de Matemática, foram os principais fatores motivacionais que levaram a que se desenvolvesse este trabalho.

Neste capítulo é feita uma breve abordagem às etapas do projeto interdisciplinar no âmbito do qual os guiões construídos poderão ser utilizados, sendo de seguida apresentados esses guiões.

4.1. Etapas do projeto interdisciplinar

De acordo com Cohen e Fradique (2018), a realização de projetos interdisciplinares começa com a sua conceção e planificação (p. 65). A planificação é "o momento em que os professores tomam decisões que, em última análise, têm um forte impacto nas oportunidades que os alunos têm para aprender" (Serrazina, 2017, p. 9). De acordo com a mesma autora, cabe ao professor "encontrar um modelo de planificação que vá para além do esquema burocrático de preenchimento de uma grelha e que corresponda a uma efetiva preparação das aulas, que faça sentido para os professores (Serrazina, 2017, p. 11). Assim sendo, a implementação de um projeto interdisciplinar integrando a disciplina de TIC, similar ao que se previa desenvolver, mas que, pelo motivo já referido no capítulo 1, não se concretizou, terá que ser devidamente pensado e muito bem planificado, pois terá que ir ao encontro do previsto nas Aprendizagens Essenciais para o Ensino Básico tanto da disciplina de Matemática como de TIC.

Apresentam-se, de seguida, alguns aspetos importantes a ter em consideração no momento da planificação de projetos similares.

O primeiro diz respeito à necessidade de existir uma sincronia temporal no que concerne à abordagem dos conteúdos ou temas previstos nas planificações curriculares de ambas as disciplinas, sobre os conhecimentos que os alunos necessitarão de aplicar aquando do desenvolvimento do projeto, de modo a agilizar a sua implementação. Assim sendo, é importante que estes projetos de caris interdisciplinar sejam pensados e planificados logo na fase de preparação do arranque do ano letivo, aquando da realização das planificações das disciplinas envolvidas, caso contrário corre-se o risco de ter que proceder a reformulações desses documentos durante o decurso do ano letivo, o que, dada a sequencialidade de alguns conteúdos e/ou temas de certas disciplinas, nem sempre é fácil de se fazer.

A este respeito há a acrescentar, ainda, que dada a flexibilidade curricular, a sequência com que os temas e/ou conteúdos de aprendizagem, previstos nas aprendizagens essenciais de cada disciplina, são introduzidas na respetiva planificação pode variar de escola para escola. É, pois, impossível definir uma agenda absoluta relativa ao momento do ano letivo mais indicado para a implementação de um projeto interdisciplinar integrando a disciplina de TIC para, recorrendo aos guiões que são propostos no subcapítulo 4.2., se aplicarem os critérios de divisibilidade (no 5.º ano) ou as escalas (no 6.º ano).

Outro aspeto a ter em atenção é o número de tempos letivos de cada uma das disciplinas, previstos no horário semanal dos alunos. No que diz respeito à disciplina de Matemática, de acordo com o plano organizacional de cada agrupamento de escolas, esta acaba por ocupar sempre entre quatro a cinco tempos letivos do horário semanal dos alunos. No entanto, o reduzido número de tempos letivos atualmente concedidos à disciplina de TIC, bem como a periodicidade adotada (semanal ou quinzenal; anual ou semestral), podem trazer dificuldades à planificação do projeto. Há agrupamentos de escolas em que, de acordo com o seu plano organizacional, a disciplina de TIC ocorre semanalmente, mas, para se assegurar que os alunos tenham dois tempos letivos de TIC consecutivos por semana, convertem-na numa disciplina semestral. Noutros agrupamentos opta-se por manter a disciplina anual, com periodicidade semanal, sendo que os alunos apenas têm contemplado no seu horário semanal um tempo letivo de TIC. De acordo com o plano organizacional do agrupamento de escolas em que se pretendia desenvolver o projeto, TIC era uma disciplina anual, mas com periodicidade quinzenal, dada a opção de os alunos terem dois tempos letivos de TIC consecutivos. Ou seja, os alunos desse agrupamento de escolas, tinham TIC semana sim, semana não, verificando-se, portanto, uma grande disparidade entre a carga horária semanal da disciplina de Matemática e a da disciplina de TIC. Esta era uma dificuldade que se teria que ultrapassar uma vez que, dado o tema da Matemática escolhido, não fazia sentido iniciar o projeto numa semana e dar-lhe continuidade passados quinze dias. Na altura, pensou-se numa solução para que o projeto fosse exequível, que seria a realização de trabalho de coadjuvância, de modo a que os professores das duas disciplinas, no mesmo espaço físico, efetivassem a dimensão interdisciplinar (Cohen & Fradique, 2018, p. 65).

Face ao exposto, há a acrescentar que, quando se pensou a realização de um projeto interdisciplinar integrando a disciplina de TIC, consideraram-se as seguintes etapas:

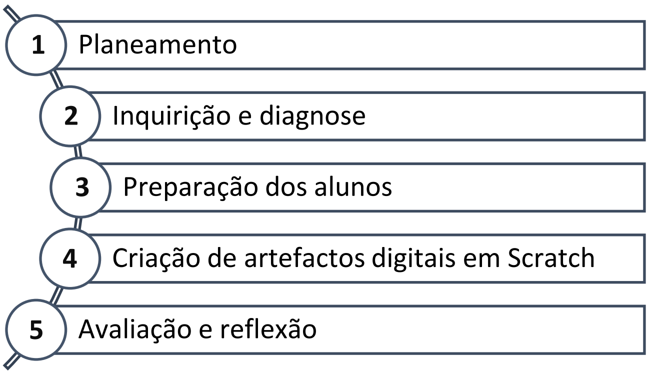


Figura 36 – Etapas a considerar

A primeira etapa, planeamento, consiste na conceção e planificação do projeto interdisciplinar pelos professores das disciplinas envolvidas (se possível, logo na fase de preparação do arranque do ano letivo e tendo em conta as Aprendizagens Essenciais para o Ensino Básico de cada uma das disciplinas) e na elaboração de questionários, de uma sequência de tarefas e dos instrumentos de avaliação/reflexão a realizar pelos alunos.

Na segunda etapa, inquirição e diagnose, compreende o levantamento de preferências e opiniões dos alunos sobre aspetos da disciplina de Matemática, e outros que se considerem relevantes, e a diagnose dos conhecimentos prévios dos alunos sobre o tema matemático escolhido e sobre o Scratch. A decorrer em duas aulas de Matemática, mediante orientação do(a) professor(a) da disciplina, com recurso aos instrumentos elaborados para esses fins.

A terceira etapa, preparação dos alunos, prende-se com o estudo, pelos alunos, do tema matemático em causa em duas aulas de Matemática, sob orientação do(a) professor(a) da disciplina, com recurso às tarefas elaboradas para o efeito.

Na quarta etapa, criação de artefactos digitais em Scratch, os alunos desenvolvem as suas animações em Scratch aplicando os conhecimentos matemáticos sobre o tema em causa, com recurso aos guiões elaborados para esse efeito e sob orientação dos professores das duas disciplinas – trabalho de coadjuvância. A decorrer na sala de TIC, tanto nos tempos letivos correspondentes às aulas de TIC como de Matemática (ter-se-á que ter em atenção a carga horária semanal da disciplina de TIC).

Finalmente, a quinta etapa, consiste na avaliação e reflexão das aprendizagens e capacidades desenvolvidas pelos alunos. A decorrer em duas aulas de Matemática, com recurso aos instrumentos elaborados para esse fim.

No caso do projeto interdisciplinar que se pretendia desenvolver, estava-se ainda a pensar em qual seria a melhor forma para o operacionalizar quando, devido aos constrangimentos inerentes à situação pandémica já referidos no capítulo 1, deixaram de existir condições para a sua implementação.

4.2. Proposta de Guiões de Projetos Scratch

"Aquando da dinamização de projetos interdisciplinares, o professor deverá assumir funções de mediação, de orientação, de responsabilização, de incentivo. Deverá fornecer guiões, mais abertos ou fechados, atendendo às características do trabalho a desenvolver e ao perfil dos alunos envolvidos."

(Cohen & Fradique, 2018, p. 65).

Para orientar os alunos na realização dos projetos Scratch pretendidos, envolvendo conhecimentos adquiridos em Matemática, foram elaborados quatro guiões – dois destinam-se a alunos de 5.º ano e, os outros dois, a alunos do 6.º ano, de acordo com o ano de escolaridade em que os temas «Critérios de divisibilidade» e «Escalas» são tratados.

Pretendia-se que à data de entrega deste trabalho, os alunos do 6.º ano tivessem realizado os dois projetos, para que pudesse ser feita a análise da sua aplicação, principalmente no que diz respeito ao recurso a este tipo de projetos na abordagem interdisciplinar do tema «Escalas». No entanto, como já se referiu anteriormente, os constrangimentos inerentes à situação pandémica que se tem vivido desde março de 2020, e muito presentes ao longo de todo o ano letivo de 2020/2021, nomeadamente: confinamentos da comunidade escolar, isolamentos profiláticos de turmas inteiras e/ou de alunos e professores e condicionamentos ao nível da utilização de determinados espaços na escola, como por exemplo, de salas específicas, como as salas de TIC, não permitiram que tal acontecesse.

Nas páginas seguintes apresentam-se os quatro guiões elaborados com o intuito de cumprir o objetivo deste trabalho após a redefinição dos objetivos que o norteavam. Com eles, pretende-se, como também já foi dito anteriormente, mostrar que é possível um(a) professor(a) de Matemática dinamizar projetos interdisciplinares integrando a disciplina de TIC, através da cedência aos alunos de "guiões, mais abertos ou fechados, atendendo às características do trabalho a desenvolver e ao perfil dos alunos envolvidos" (Cohen & Fradique, 2018, p. 65).

✓ Aplicação dos critérios de divisibilidade por 2, por 5, por 10 e por 9

O primeiro projeto - **Divisibilidade por 2, por 5 e por 10** - irá permitir aos alunos do 5.º ano aperfeiçoarem a sua capacidade de programar em Scratch, aplicando os conhecimentos sobre os critérios de divisibilidade por 2, por 5 e por 10, estudados em na disciplina de Matemática. Por se destinar a alunos mais novos, e porque poderá tratar-se de um dos primeiros projetos que esses alunos realizam em Scratch, é pouco exigente no que diz respeito à criação de *variáveis* e/ou à utilização dos *operadores* matemáticos que fazem parte dos blocos existentes no Scratch. De forma muito resumida, os alunos terão que utilizar os blocos de comandos para criar um código para que um *ator* selecione o respetivo esconderijo. A animação implica a introdução de vários *atores* no *palco*, ao *traje* dos quais os alunos terão que acrescentar um número que seja divisível por 2, por 5 ou simultaneamente divisível por 2 e por 5, tendo que existir números que satisfaçam os três casos. Quanto aos esconderijos, estes terão também que sofrer alterações ao nível do *traje*. Neste caso, os alunos terão que acrescentar-lhes um pequeno texto que se adeque aos números que atribui aos outros conjunto de *atores*. Seria importante que, uma vez que existem vários *atores* com papéis idênticos, os alunos tivessem curiosidade em procurar descobrir como fazer para duplicar *atores* e códigos. Até porque é possível duplicar um *ator* já programado e fazer apenas os ajustes necessários ao *traje* do *ator* ou ao próprio código de instruções.

Figura 37 – Fase final do projeto Divisibilidade por 2, por 5 e por 10
https://scratch.mit.edu/projects/573653584/editor

O segundo projeto - **Divisibilidade por 9** – irá permitir aos alunos do 5.º ano já é um pouco mais exigente no que diz respeito à criação de *variáveis* e/ou à utilização dos *operadores* matemáticos que fazem parte dos blocos existentes no Scratch. Os alunos terão que criar mais do que uma *variável* e recorrer a *operadores* matemáticos, pois no critério de divisibilidade por 9 é necessário efetuar a soma de algarismos. Pretende-se que o aluno crie uma animação em que um *ator* estabeleça um diálogo com o utilizador, de modo a conseguir obter respostas, que corresponderão a números ou algarismos, de modo a conseguir que o seu *ator*, como que por magia, diga rapidamente se determinado número é ou não divisível por 9.

Figura 38 – Fase final do projeto Divisibilidade por 9
https://scratch.mit.edu/projects/569741539/editor/

✓ Aplicação de escalas de redução e ampliação

O terceiro projeto – **Redução e ampliação de um polígono regular** – irá permitir aos alunos do 6.º ano descobrir como reproduzir à escala uma figura no Scratch pois, utilizando os comandos disponibilizados, os alunos terão de criar um código que programe o comportamento de um *ator* Scratch, para que este execute a construção de um polígono regular à sua escolha; a reprodução desse polígono mantendo as dimensões reais (escala de 1:1); uma redução do polígono inicial (escala 1:2) e, ainda, uma ampliação do polígono inicial (escala 1,5:1).

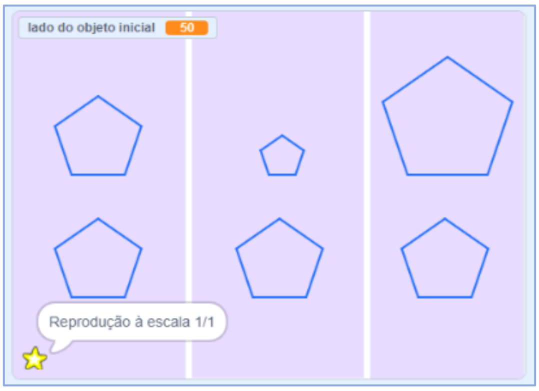


Figura 39 – Fase final do projeto Redução e ampliação de um polígono regular
https://scratch.mit.edu/projects/533993625/editor

O quarto projeto – **Remoinho em alto mar** – começa por desafiar os alunos do 6.º ano a criarem o *ator* a programar. Esse *ator* é um barco, o qual terá que ser reproduzido no ambiente de desenho do Scratch, sendo que o fundo do painel de desenho do Scratch é quadriculado. Ultrapassado esse desafio inicial, na fase seguinte deste segundo projeto os alunos terão que elaborar um código que programe o barco a descrever segmentos de reta com diferentes direções e diferentes medidas de comprimento, mantendo constante a razão de redução, de modo a criar um efeito de remoinho que levará a que o barco afunde.

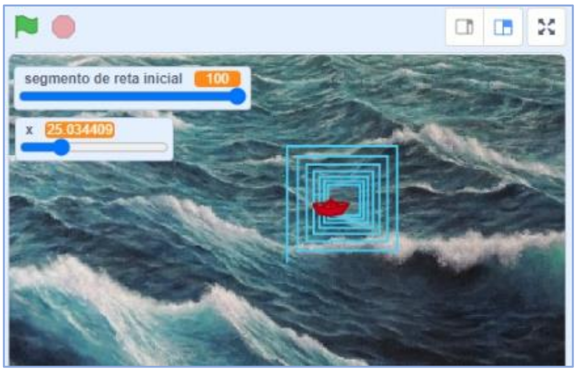


Figura 40 – Fase final do projeto Remoinho em alto mar
https://scratch.mit.edu/projects/533993625/editor

Nas páginas seguintes encontram-se os quatro guiões, na forma como poderão ser facultados aos alunos, para que estes executem os projetos anteriormente descritos. A sua construção baseou-se nos guiões elaborados por Torres e Figueiredo (s. d.), no âmbito do Projeto GEN10S.PT, embora sejam notórias algumas diferenças entre o formato de uns e de outros. Enquanto Torres e Figueiredo indicam nos seus guiões os objetivos e o material necessário seguido do conjunto das instruções dirigidas aos alunos, achou-se mais pertinente não fazer referência ao material necessário, pois subentende-se que se terá que usar sempre computador com ligação à *internet*, e colocar no seu lugar a referência ao(s) conteúdo(s) matemático(s) abordado(s). Segue-se o conjunto de blocos em destaque em cada projeto, uma referência a um aspeto considerado relevante para o projeto em causa e o conjunto das instruções, dividido em etapas.

Projeto 1 – DIVISIBILIDADE POR 2, POR 5 E POR 10

Objetivos:

→ Criar, utilizando comandos do conjunto de blocos, uma animação onde sejam introduzidos vários atores cujo movimento se faça por arrastamento e na qual sejam aplicados os critérios de divisibilidade por 2, por 5 e por 10.

→ Utilizar os blocos dos sensores e dos operadores nas instruções a dar aos atores.

→ Duplicar atores e/ou respetivos códigos para agilizar o processo de criação de códigos semelhantes para vários atores.

Conteúdos abordados:

→ Critérios de divisibilidade por 2, por 5 e por 10.

→ Noção de coordenada.

Conjuntos de blocos em destaque:

Neste projeto terás que inserir vários atores num único palco: o título da animação; uma legenda com algumas orientações para o jogador; os atores que irão ser animados e que terão de se esconder e outros três que funcionarão como os esconderijos (figura 1).

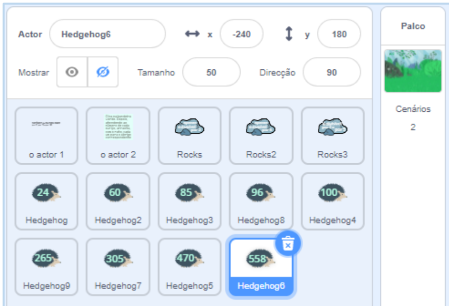


Figura 1

1ª Etapa do projeto – escolher um animal, um esconderijo e o palco onde decorre a ação

1. Acede à categoria dos animais da galeria de atores e seleciona um à tua escolha (figuras 2 e 3).

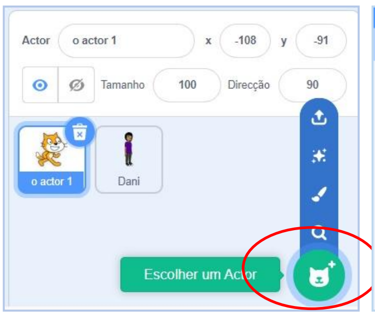


Figura 2

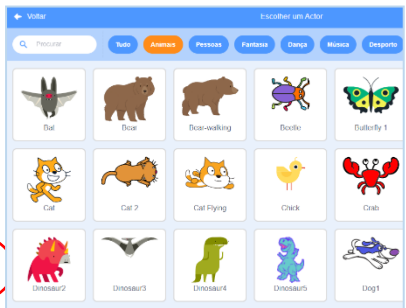


Figura 3

Figura 4

2. Acede à galeria dos cenários (figura 4) e escolhe um ambiente que se adeque ao animal escolhido.

Figura 5

3. Acede novamente à galeria dos atores (figura 2) e escolhe um outro que possa funcionar como esconderijo para o animal que escolheste (figura 5).

2ª Etapa do projeto – acrescentar números e texto e duplicar os atores as vezes necessárias

1. Acrescenta ao traje do teu animal um número que esteja de acordo com os objetivos deste projeto (figura 6).
2. Acrescenta ao traje do esconderijo uma indicação que sirva de orientação ao animal que se vai esconder, de acordo com os números que terás de atribuir aos vários animais (figura 7).

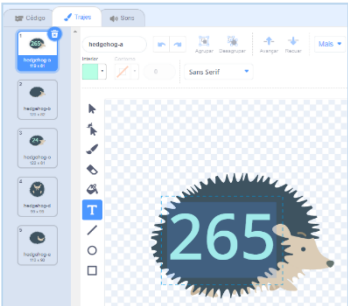


Figura 6

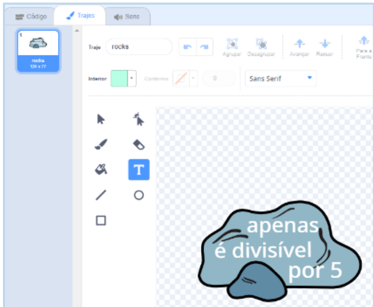


Figura 7

3. Duplica o ator que faz de esconderijo duas vezes (figuras 8, 9 e 10).

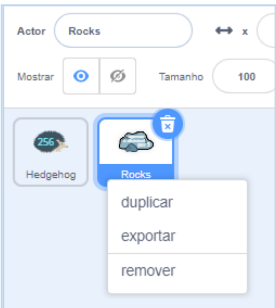


Figura 8

Figura 9

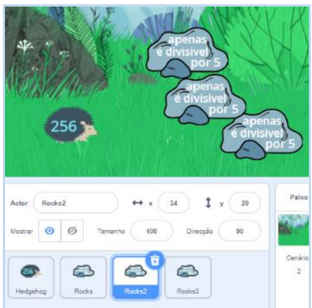


Figura 10

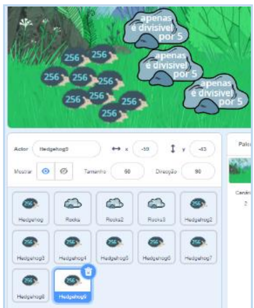


Figura 11

4. Duplica o animal que escolheste tantas vezes quantas as que quiseres - tem atenção ao espaço disponível no cenário; terás que ter pelo menos 9 animais (figura 11).
5. Altera os números dos trajes dos animais duplicados e o texto dos trajes dos esconderijos 2 e 3.

   Nota: Continua a escolher números e indicações que estejam de acordo com os objetivos do projeto.

6. Distribui os animais e os esconderijos pelo cenário como preferires.

3ª Etapa do projeto – criar o código que permite que os animais estejam nas suas posições iniciais sempre que se inicia o jogo

1. Utilizando todos comandos que considerares necessários, cria um pequeno código que permita aos teus animais retomarem as suas posições iniciais sempre que se inicia o jogo (figura 12).

Figura 12

2. Testa o código criado até ao momento.

4ª Etapa do projeto – criar o código que permite ao animal 1 ser arrastado para o seu esconderijo

1. Utilizando todos comandos que considerares necessários, cria um código que permita ao teu animal 1 ser arrastado pelo o jogador com o rato do computador até ao esconderijo correto (figura 13).

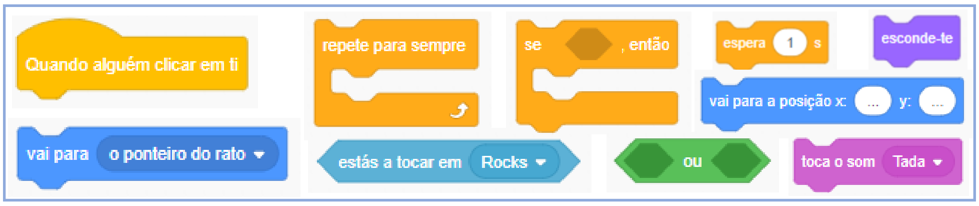


Figura 13

2. Introduz no código um som para quando o animal é arrastado para o esconderijo correto e outro som para quando o esconderijo escolhido não é o correto (figuras 14 e 15).

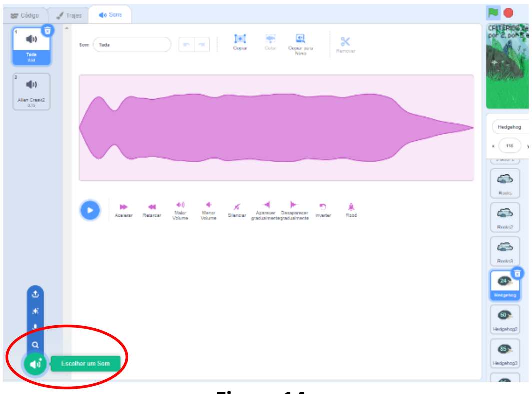


Figura 14

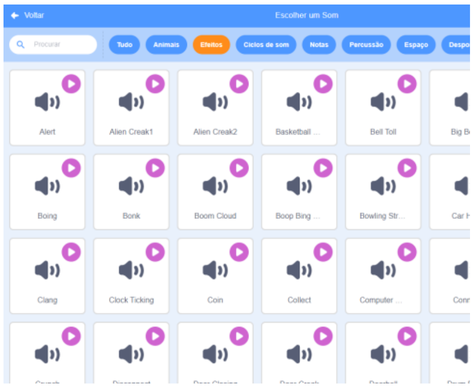


Figura 15

3. Testa o teu código. Se Estiver a funcionar como pretendido podes avançar para a próxima etapa.

5ª Etapa do projeto – copiar os códigos do animal 1 para os outros animais e fazer as alterações necessárias

1. Copia o código criado para o 1º animal e cola-o em cada um dos outros animais.
   <u>Nota:</u> Basta Clicares sobre o código que queres copiar e arrastá-lo para cima do ator que pretendes que tenha o mesmo código ou um código semelhante. Depois é só fazer as alterações necessárias.

2. Experimenta o código antes de continuares.

6ª Etapa do projeto – acrescentar o título da animação e algumas orientações para os utilizadores

1. Acrescenta um título à tua animação e algumas orientações para os utilizadores (figura 16).
   Nota: Para inserir texto terás que recorrer à ferramenta "pintar" um ator.

2. Testa novamente o teu programa. Se tudo estiver a funcionar como o pretendido, o teu projeto está concluído!

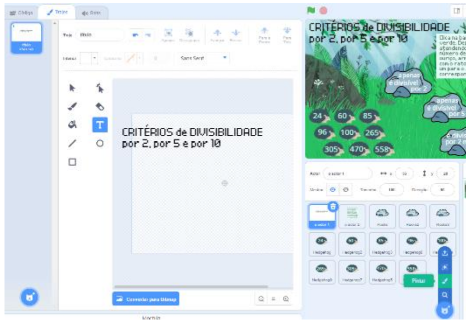


Figura 16

O projeto que serviu de base à elaboração deste guião e a partir do qual foram captadas as imagens que o ilustram pode ser encontrado em https://scratch.mit.edu/projects/573653584/editor

Projeto 2 – DIVISIBILIDADE POR 9

Objetivos:

→ Criar, utilizando comandos do conjunto de blocos, uma animação à base de perguntas e respostas, que promova a interação entre um ator e um jogador e na qual seja aplicado o critério de divisibilidade por 9, para que o ator averigue se um número de quatro algarismo indicado pelo jogador é ou não divisível por 9.

→ Utilizar os blocos das variáveis e dos operadores para dar as instruções ao ator sobre a conclusão final a transmitir ao jogador.

Conteúdo abordado:

→ Critério de divisibilidade por 9.

Conjuntos de blocos em destaque:

Neste projeto terás que escolher o ator e o palco onde ele estará a executar as instruções dadas. Para o fazeres terás que aceder às galerias de atores e de cenários, clicando nos ícones em destaque nas figura 1 e 2.

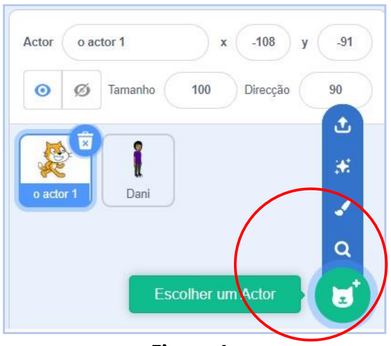


Figura 1

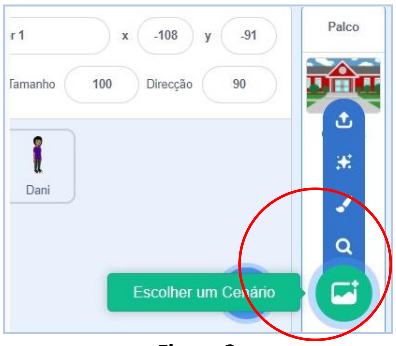


Figura 2

1ª Etapa do projeto – inserir o ator e definir o palco onde decorre a ação

1. Acede à galeria de atores (figura 1) e seleciona aquele que preferires.

   Nota: Se o teu ator tiver mais do que um traje poderás depois combiná-los a teu gosto para introduzir ideia de movimento.

2. Acede à galeria dos cenários (figura 2) e escolhe um ambiente que se adeque ao teu ator.

2ª Etapa do projeto – dar instruções ao ator para comunicar com o jogador

1. Utilizando todos comandos que considerares necessários, cria um código que permita ao teu ator estabelecer uma conversa inicial com o jogador, cumprimentando-o e explicando-lhe o jogo (figuras 3 e 4).

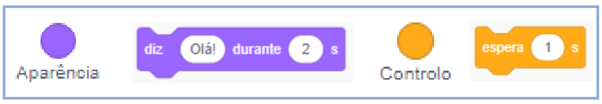


Figura 3

Figura 4

Nota: O objetivo é que, no final do jogo, o teu ator diga ao jogador se determinado número de quatro algarismos por ele escolhido é ou não divisível por 9.

2. Depois de introduzires todos os balões de fala que considerares necessários, testa o programa e verifica se a animação funciona como pretendes.

Figura 6

3. Introduz no diálogo as perguntas para as quais pretendas obter respostas ao longo do jogo (figuras 5 e 6).

Figura 5

4. Cria as variáveis que permitam ao programa registar as respostas que serão introduzidas pelo jogador durante o jogo. Mantém esta variável visível (figuras 7 e 8).

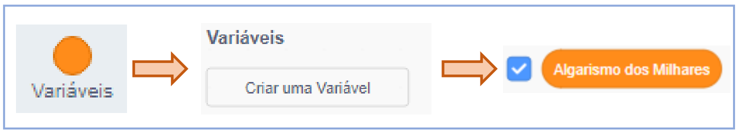


Figura 7

Figura 8

5. Testa, novamente, o código criado até ao momento.

3ª Etapa do projeto – introduzir no código o algoritmo para verificar a divisibilidade por 9

1. Cria a(s) variável(eis) que permitam ao programa concluir se o número a introduzir pelo jogador será ou não divisível por 9. Mantém esta variável oculta (figura 9).

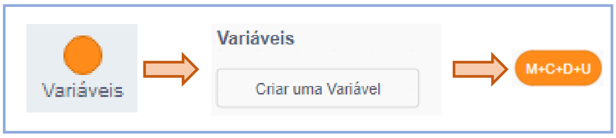


Figura 9

2. Dá instruções ao teu ator para que este diga ao jogador se o número de quatro algarismo por ele escolhido é ou não divisível por 9 (figura 10).

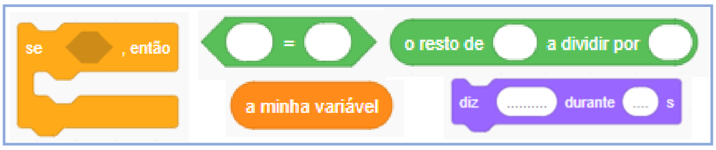


Figura 10

Figura 11

3. Experimenta, mais uma vez a tua animação e verifica se o algoritmo criado está a gerar a resposta correta (figura 11).

4. Finaliza a conversa entre o teu ator e o jogador (poderás propor ao jogador que volte a jogar usando outro número).

Figura 12

5. Testa o teu programa. Se tudo estiver a funcionar como o pretendido, o teu projeto está concluído!

O projeto que serviu de base à elaboração deste guião e a partir do qual foram captadas as imagens que o ilustram pode ser encontrado
https://scratch.mit.edu/projects/569741539/editor

Projeto 3 – REDUÇÃO E AMPLIAÇÃO DE UM POLÍGONO REGULAR

Objetivos:

→ Desenhar um polígono regular, uma redução e uma ampliação desse polígono, utilizando comandos do conjunto de blocos;

→ Utilizar os blocos das variáveis e dos operadores para a construção de um qualquer polígono regular e para comandar o desenho das respetivas redução e ampliação.

Conteúdos abordados:

→ Polígonos regulares;

→ Ângulo interno e ângulo externo de um polígono convexo;

→ Razão/Escala.

Conjuntos de blocos em destaque:

Este projeto está dividido em 3 etapas, sendo necessário que, para cada uma delas utilizes apenas um terço do palco, tal como se exemplifica na figura apresentada à direita. Em cada uma das etapas, o teu ator deverá começar por ser posicionado próximo do limite inferior do palco.

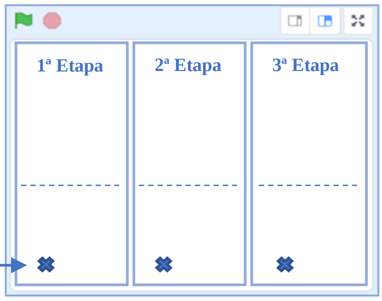


Figura 1

1ª Etapa do projeto – desenhar um polígono regular e reproduzi-lo à escala 1:1

1. Divide o teu palco em três partes (figura 2) e caracteriza-o a teu gosto.

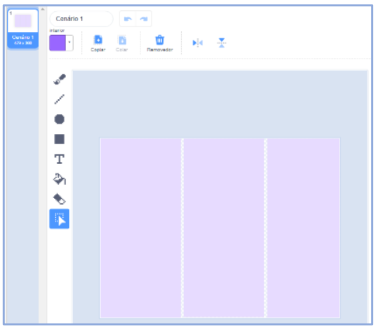


Figura 2

2. Escolhe um ator.

3. Ativa os blocos da caneta.

4. Utilizando todos comandos que considerares necessários, cria o código que permitirá ao teu ator desenhar um polígono regular à tua escolha, na parte inferior do espaço do palco destinado à 1ª etapa (figuras 3 e 4).

   Nota: Terás que basear-te no projeto que realizaste em TIC, sobre a construção d e polígonos. Será necessário criares uma variável para definires a medida de comprimento do lado a atribuir ao teu polígono inicial (figura 5).

Figura 3

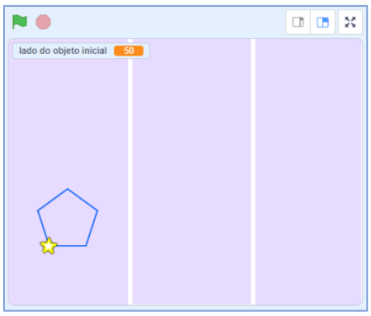


Figura 4

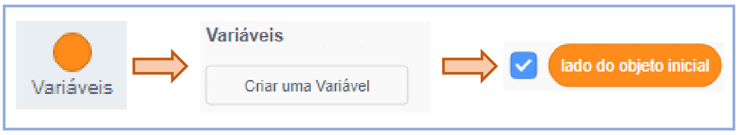


Figura 5

5. Testa o teu programa e verifica se o polígono é corretamente construído pelo teu ator.

6. Continua o código, de modo a que o teu ator represente o polígono à escala de 1:1, na parte superior do espaço do palco destinado a esta etapa (figura 6).

   Será necessário criares uma nova variável (figura 7) e recorreres aos operadores (figura 8) para definires a medida de comprimento do lado a atribuir ao teu polígono final.

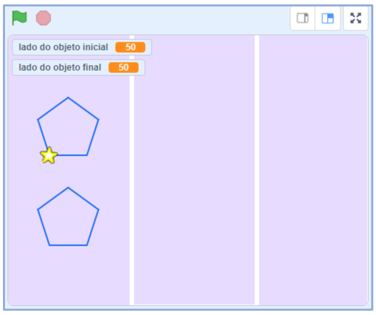


Figura 6

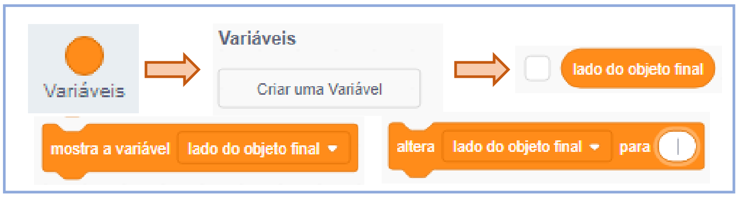


Figura 7

Figura 8

7. Testa novamente o teu programa antes de passares à etapa seguinte.

2ª Etapa do projeto – reproduzir o polígono na razão de 1:2 (redução)

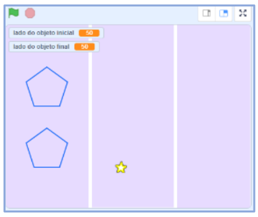


Figura 9

1. Envia o teu ator para as coordenadas onde pretendes que ele inicie a 2ª etapa (figura 9).

2. Reproduz parte do código já criado, de modo a que o teu ator volte a desenhar o polígono inicial na parte inferior do espaço do palco destinado à 2ª etapa (figura 10).

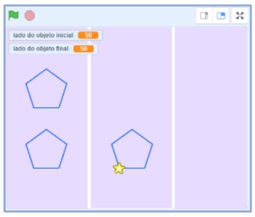


Figura 10

3. Testa o teu programa e verifica se o polígono é corretamente construído pelo teu ator.

4. Continua o código, de modo a que o teu ator represente o polígono à escala de 1:2, na parte superior do espaço do palco destinado a esta etapa (figura 11).

   <u>Nota:</u> Apenas terás que reproduzir os comandos dados no ponto 6 da 1ª etapa e fazer as alterações necessárias ao nível dos operadores.

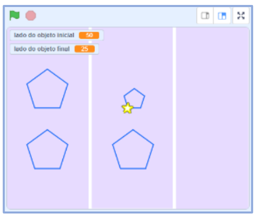


Figura 11

5. Testa novamente o teu programa antes de passares à etapa seguinte.

3ª Etapa do projeto – reproduzir o polígono na razão de 1,5:1 (ampliação)

1. Envia o teu ator para as coordenadas onde pretendes que ele inicie a 3ª etapa (figura 12).
2. Reproduz parte do código já criado, de modo a que o teu ator volte a desenhar o polígono inicial, na parte inferior do espaço do palco destinado à 3ª etapa (figura 13).
3. Testa o teu programa e verifica se o polígono é corretamente construído pelo teu ator.
4. Continua o código, de modo a que o teu ator represente o polígono à escala de 1:1,5, na parte superior do espaço do palco destinado a esta etapa (figura 14).
5. Testa novamente o teu programa.

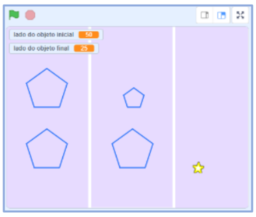


Figura 12

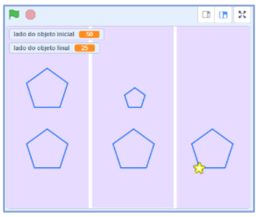


Figura 13

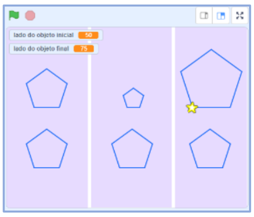


Figura 14

6. Posiciona o teu ator na 1ª parte do palco e dá-lhe instruções para que ele diga a que escala construiu o polígono final (figura 15).
7. Repete o procedimento anterior para as outras etapas (figuras 16 e 17).

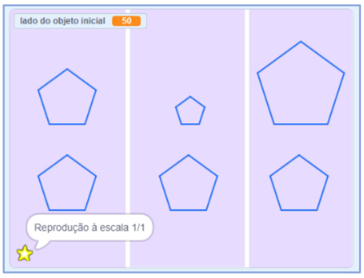


Figura 15

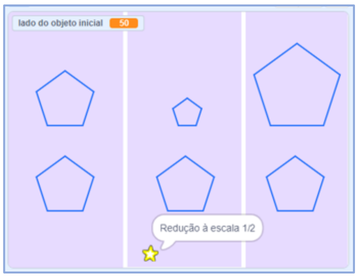


Figura 16

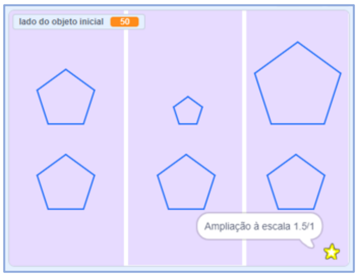


Figura 17

8. Testa o teu programa. Se tudo estiver a funcionar como o pretendido, o teu projeto está concluído!

O projeto que serviu de base à elaboração deste guião e a partir do qual foram captadas as imagens que o ilustram pode ser encontrado em https://scratch.mit.edu/projects/533993625/editor/

Projeto 4 - REMOINHO EM ALTO MAR

Objetivos:

→ Simular um remoinho utilizando comandos do conjunto de blocos;

→ Desenhar um ator no ambiente de desenho do Scratch;

→ Utilizar os blocos das variáveis e dos operadores para instruir o ator a traçar sucessivos segmentos de reta, mantendo a razão de redução, de modo a simular um remoinho que leve a que o ator se afunde;

→ Introdução de som num projeto Scratch.

Conteúdos abordados:

→ Desenho de uma figura recorrendo ao método da quadrícula;

→ Coordenadas de um referencial;

→ Razão/Escala.

Conjuntos de blocos em destaque:

Neste projeto terás que desenhar o ator que estará no palco a executar as instruções dadas. Esse ator é o barco que desenhaste em EV, o qual terás que reproduzir no ambiente de desenho do Scratch recorrendo, mais uma vez, ao método da quadrícula. Para acederes ao ambiente de desenho de um ator terás que clicar no ícone em destaque na figura 1.

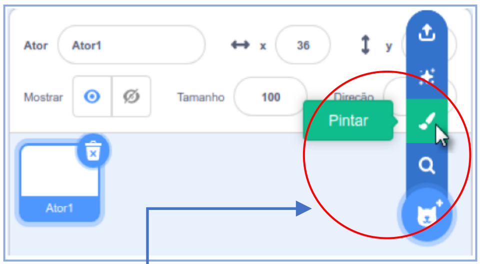


Figura 1

1ª Etapa do projeto – desenhar o ator recorrendo ao método da quadrícula

1. Acede ao ambiente de desenho dos trajes e desenha o barco.
   Nota: Deverás iniciar a tua construção de modo a que o ponto central da base do barco fique localizado no centro do painel do desenho (figura 2).
2. Pinta o teu ator a teu gosto (figura 3).
3. Escolhe um cenário que se adeque ao ambiente que se pretende reproduzir.

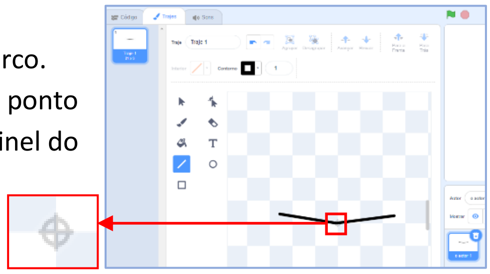


Figura 2

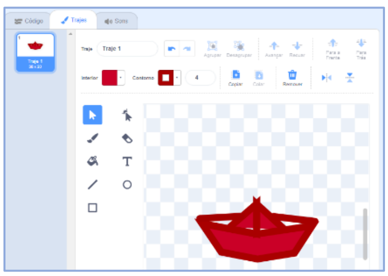


Figura 3

2ª Etapa do projeto – instruir o barco para descrever o remoinho

1. Ativa os blocos da caneta.
2. Utilizando todos comandos que considerares necessários, cria o código que permitirá ao teu ator desenhar um segmento de reta com uma medida de comprimento à tua escolha, a partir do ponto de coordenadas (0, 0) do palco.

Será necessário criares uma nova variável (figuras 4 e 5) para definires a medida de comprimento a atribuir ao segmento de reta inicial.

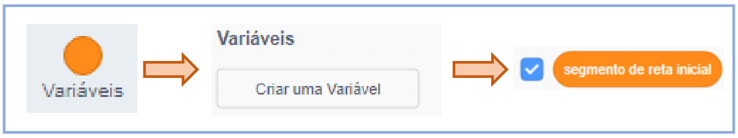


Figura 4

Figura 5

3. Testa o programa e verifica se o barco desenha o segmento de reta inicial tal como se pretende.
4. Dá instruções ao teu ator para que desenhe um outro segmento de reta, ligeiramente menor do que o anterior e com direção diferente da direção do segmento de reta inicial (figuras 6 e 7).
   Terás que criar uma outra variável que te permita instruir o teu ator a desenhar um segmento de reta com medida de comprimento inferior à do anterior e recorrer aos operadores para definires essa medida (figura 8).

Figura 6

Figura 7

Figura 8

5. Testa o teu programa antes de avançares e verifica o barco está a atuar como pretendido.

6. Continua o teu código de modo a que o barco desenhe tantos segmentos de reta quantos achares necessários para criares o efeito de um remoinho (figuras 9, 11, 13 e 15).
   <u>Nota:</u> Sempre que pretendas repetir determinado comportamento do teu ator, podes recorrer a comandos de controlo de movimentos (figura 10).

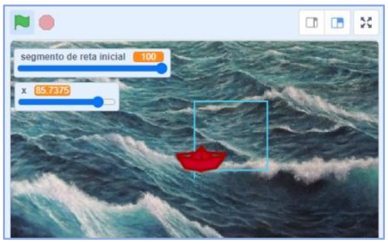


Figura 9

Figura 10

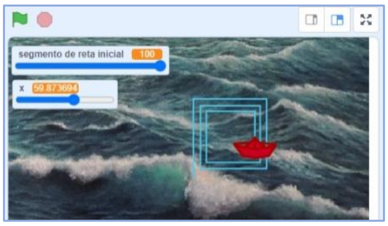


Figura 11

7. Testa novamente o teu programa.

8. Introduz no teu código uma instrução (figura 12) para que o tamanho do barco vá diminuindo à medida que vai descrevendo o remoinho, até desaparecer (figuras 9, 11, 13 e 15).

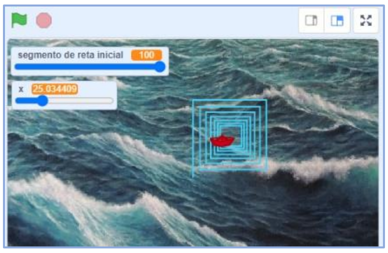


Figura 13

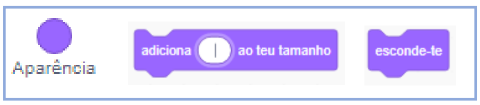


Figura 12

9. Introduz no teu código todos os comandos que considerares necessários para que a ação do barco seja acompanhada de um ou de vários sons.

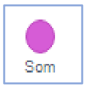


Figura 14

Figura 15

10. Testa o teu programa e verifica quais os comandos que terão que ser acrescentados para que, no final, o barco se mostre novamente, aparecendo junto ao limite inferior do palco (figura 16).

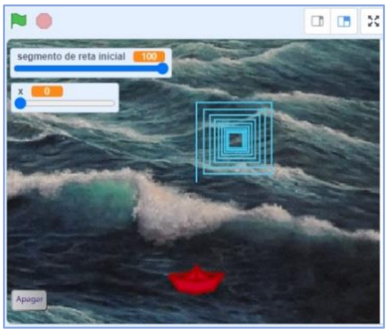


Figura 16

11. Testa o teu programa. Se tudo estiver a funcionar como o pretendido, o teu projeto está concluído!

O projeto que serviu de base à elaboração deste guião e a partir do qual foram captadas as imagens que o ilustram pode ser encontrado em https://scratch.mit.edu/projects/520042486/editor

5. CONCLUSÃO

Atualmente, as tecnologias ocupam um lugar privilegiado na chamada sociedade do conhecimento, sendo os estudantes e os professores seus utilizadores em contextos diversos e com diferentes finalidades. Portanto, "não é possível (nem desejável) que esta influência termine abruptamente à porta da escola. Tal seria aliás, contraproducente e paradoxal face ao papel da própria escola" (Ramos & Espadeiro, 2014, p. 4). A tecnologia deve ser integrada no currículo e, consequentemente nas aulas, pois pode melhorar o processo de ensino-aprendizagem (Cohen & Fradique, 2018, p. 66). Uma outra forma de integração da tecnologia nas aulas é a adoção de dinâmicas de ensino-aprendizagem interdisciplinares integrando a disciplina de TIC. Ao fazê-lo, corresponde-se, simultaneamente, a uma exigência presente nos documentos de orientação curricular da atualidade – a "dinamização de trabalho interdisciplinar, de modo a aprofundar, reforçar e enriquecer as Aprendizagens Essenciais" (Decreto-lei n.º 55/2018, preâmbulo) – e ao desafio da inclusão do pensamento computacional nas salas de aula – mediante o recurso a ambientes de programação como o Scratch.

Relembra-se que o objetivo deste trabalho foi construir guiões para promover a criação de artefactos digitais em Scratch por alunos do 2.º Ciclo do Ensino Básico, no âmbito de projetos interdisciplinares, integrando a disciplina de TIC e envolvendo os temas matemáticos «Critérios de divisibilidade» (5.º ano) e «Escalas» (6.º ano), com vista à diversificação de estratégias de aprendizagem. Com ele pretendeu-se mostrar que é possível os professores de Matemática e de TIC realizarem trabalho interdisciplinar com recurso a ambientes de programação disponibilizados *online* gratuitamente, como é o caso do Scratch, os quais são importantes ferramentas para a promoção do desenvolvimento do pensamento computacional.

Como já foi referido anteriormente, não foi possível levar a experiência para o campo devido aos constrangimentos inerentes à situação pandémica que se tem vivido desde março de 2020, e muito presentes ao longo de todo o ano letivo de 2020/2021 (confinamentos da comunidade escolar, isolamentos profiláticos de turmas inteiras e/ou de alunos e professores e condicionamentos ao nível da utilização de determinados espaços na escola, como por exemplo, de salas específicas, como as salas de TIC). Apesar de não ter sido possível retirar as conclusões e reflexões pretendidas, considera-se que a proposta de guiões para o desenvolvimento de projetos Scratch, por alunos do Ensino Básico, é uma mais valia para os processos de ensino e aprendizagem. Esses projetos permitem estimular a curiosidade dos alunos e explorar as potencialidades do pensamento computacional. Por outro lado, esses guiões foram construídos de modo a permitir que os alunos progridam "de uma fase mais elementar, criando projetos simples, para uma fase mais avançada, criando projetos inovadores, ou seja, possam explorar e consolidar as dimensões-chave do pensamento computacional, de maior poder computacional e com mais profundidade" (Ramos & Espadeiro, 2014, p. 22).

Sugestões para futuros projetos:

Considerando-se que o objetivo deste projeto – construir guiões para promover a criação de artefactos digitais em Scratch por alunos do 2.º Ciclo do Ensino Básico, no âmbito de projetos interdisciplinares, integrando a disciplina de TIC e envolvendo os temas matemáticos «Critérios de divisibilidade» (5.º ano) e «Escalas» (6.º ano), com vista à diversificação de estratégias de aprendizagem – foi alcançado, este projeto de mestrado abre uma agenda de trabalho futuro que passará por:

- levar para o campo a experiência. Como já foi atrás discutido, ao contrário do que se tinha inicialmente planeado, o contexto pandémico não nos permitiu experimentar estes guiões em contexto de sala de aula. Contudo, é a nossa intenção executar esta atividade já durante este ano letivo. Pretendemos que a experiência seja monitorizada por um pequeno questionário a resolver pelos alunos no final das sessões, que incida sobre os mesmos tópicos analisados na fase de inquirição e diagnose do método. Desta forma, teremos material comparativo de suporte à análise real do impacto desta ação na consolidação dos conceitos matemáticos abordados nos guiões. Acreditamos que este material seja relevante para suportar uma reflexão mais aprofundada sobre o impacto desta experiência nas aprendizagens dos alunos de 6.º ano.
- estender estes guiões a outros tópicos da Matemática, como sendo a implementação de algum guião à volta do Algoritmo de Euclides ou do Crivo de Eratóstenes. Por serem métodos de natureza intrinsecamente algorítmica, estes exercícios desafiam os limites da aprendizagem do Scratch como linguagem de programação. Por serem um pouco mais complexos, os guiões poderão ter de passar, não pela construção do programa, mas pela sua "desconstrução": entregando o programa já implementado ao aluno, espera-se que ele o explore, tendo em vista a sua compreensão.

Num ponto de vista mais global, sugere-se direcionar a atenção para os professores e desenvolverem-se projetos em que se investigue o nível de preparação dos professores de Matemática do 2.º Ciclo para:

- incluírem o recurso a ambientes de programação, como o Scratch, nas suas aulas.
- adotarem dinâmicas de ensino e de aprendizagem interdisciplinares integrando ambientes de programação como o Scratch.
- incorporarem o pensamento computacional na disciplina de Matemática.

BIBILOGRAFIA

Almeida, R. (2015). *Razão e proporção para além da sala de aula* [Master's thesis, Universidade Federal de Juiz de Fora]. Repositório Institucional da Universidade de Juiz de fora. https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/168

Benton, L., Hoyles, C., Kalas, I., & Noss, R. (2017). Bridging primary programming and mathematics: Some findings of design research in England. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *3(2),* 115–138. https://link.springer.com/article/10.1007/s40751-017-0028-x

Bessa, S. (2021). *Critérios de Divisibilidade: Os que se aprendem no 2º Ciclo do Ensino Básico e outros*. Sob orientação de Paulo Almeida. Seminário I – Mestrado em Matemática para Professores. Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., Timóteo, M. C. (2013). *Programa de Matemática Ensino Básico*, Ministério da Educação e Ciência. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/programa_matematica_basico.pdf

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., Timóteo, M. C. (2012). *Metas Curriculares Ensino Básico Matemática*, Ministério da Educação e Ciência. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/programa_matematica_basico.pdf

Calder, N. (2010). Using Scratch: An integrated problem-solving approach to mathematical thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom, 15(4),* 9–14. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ906680.pdf

Cohen, A. C. & Fradique, J. (2018). *Guia da autonomia e Flexibilidade Curricular* (1ª edição). Raiz Editora.

Dias, M. H. (2007), *Cartografia Temática: Programa,* Centro de Estudos Geográficos, Área de Investigação de Geo-Ecologia. Edição: Centro de Estudos Geográficos da Universidade de Lisboa. https://issuu.com/luisbaltazar4/docs/cartografia_tem__tica_programa_mari

Direção Geral da Educação [DGE]. (2015). *Iniciação à Programação no 1º Ciclo do Ensino Básico - Linhas Orientadoras Gerais*. Ministério da Educação e Ciência. https://www.erte.dge.mec.pt/iniciacao-programacao-no-1o-ciclo-do-ensino-basico

Direção Geral da Educação [DGE]. (2017). *Probótica Programação e Robótica no Ensino Básico - Linhas Orientadoras*. Ministério da Educação e Ciência. https://erte.dge.mec.pt/sites/default/files/probotica_-_linhas_orientadoras_2017.pdf

Direção Geral da Educação [DGE]. (2018a). *Aprendizagens Essenciais/Articulação com o Perfil dos Alunos, 5.º Ano/2.º Ciclo do Ensino Básico*, *Matemática.* Ministério da Educação e Ciência. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/2_ciclo/5_matematica_18julho_rev.pdf

Direção Geral da Educação [DGE]. (2018b). *Aprendizagens Essenciais/Articulação com o Perfil dos Alunos, 6.º Ano/2.º Ciclo do Ensino Básico*, *Matemática.* Ministério da Educação e Ciência. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/2_ciclo/6_matematica_18julho_rev.pdf

Direção Geral da Educação [DGE] (2019). *Aprendizagens Essenciais/Articulação com o Perfil dos Alunos, 6.º Ano/2.º Ciclo do Ensino Básico*, *Tecnologias da Informação e Comunicação*. Ministério da Educação e Ciência. http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/2_ciclo/6_tic_2019.pdf

Fernandes, M. G. (2008). *Cartografia programa, conteúdos e métodos de ensino.* Departamento de Geografia da Faculdade de Letras da Universidade do Porto. https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/18024/2/Cartografia1CicloPrograma000065855.pdf

Fonseca, A., Almada, T., Números inteiros: Alguns critérios de divisibilidade, *Gazeta de Matemática nº 170*, 36-45, Sociedade Portuguesa de Matemática, 2013. http://gazeta.spm.pt/get?gid=170

Gomes, A. (2011). Razões e proporções. In P. Palhares, A. Gomes, & Elza A. (Eds.), *Complementos de Matemática para Professores do Ensino Básico* (pp. 29-44). LIDEL.

Gomes, A., Boto, A. S., Lopes, A., Pinho, H. (2019). *Fazer Geografia 3.0. A Terra: estudos e representações. Geografia 7º Ano*. Porto Editora. https://www.escolavirtual.pt/e-manuais/

Gomes, A., Santos, J. (2019). *Algoritmia, Programação e Robótica com a TI-Nspire CX II-T Guia passo a passo* (1ª edição). FCA – Editora de Informática, Lda.

Gonçalves, A. C., Dias, A. B., Sousa, A. Guimarães, R. C. (2011). *Desenho Técnico Assistido Por Computador – Apontamentos Teóricos,* Departamento de Engenharia Rural da Universidade de Évora. http://hdl.handle.net/10174/4786

Gonçalves, L., Pinto, N. (2006) *Desenho Técnico*, Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria.

Guerra, L. (2016). *Exploração de situações de aprendizagem da matemática através do Scratch* [Master's thesis, Universidade de Lisboa]. Repositório da Universidade de Lisboa. http://hdl.handle.net/10451/29664

Hall, A. (2019). *Teoria dos números e aplicações* (Notas), Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

Jesus, C., Vasconcelos, J. B., Lima, R. (2016). *Scratch e Kodu. Iniciação à Programação no Ensino Básico.* FCA – Editora de Informática, Lda.

Lopes, M. C. O., Caixinha, H. (2010, julho). *Scratch'ando com o sapo", a communication and ludicity strategy for education: the co-construction of tutorials for kids.sapo.pt.* [Conference Paper]. Open Conference Systems, IAMCR 2010: Communication and Citizenship, Braga. (PDF) "Scratch'ando com o sapo": a communication and ludicity strategy for education: the coconstruction of tutorials for kids.sapo.pt (researchgate.net)

Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carrillo, J., Silva, L., Encarnação, M., Horta, M., Calçada, M., Nery, R., Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Ministério da Educação/Direção Geral da Educação. https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/perfil_dos_alunos.pdf

Miranda-Pinto, M., Osório, A. J. (2016, dezembro). *As TIC em contexto de educação de infância: atividades sobre pensamento computacional e programação*, [Conference Paper]. XIII CONGRESSO SPCE - Fronteiras, diálogos e transições na educação, pp. 1565–1571. https://www.researchgate.net/publication/315584092

Monteiro, A. F., Miranda-Pinto, M., Osório, A. J., Araújo, C. (2019, novembro) *Curricular integration of computational thinking, programming and robotics in basic education: a proposal for teacher training,* [Conference Paper], ICERI 2019 Proceedings, vol. 1, pp. 742–749. https://www.researchgate.net/publication/338104931

Monteiro, A. F., Miranda-Pinto, M., Osório, A. J., Araújo, C. (2021, março) *Coding as Literacy: Case Studies at Pre-Primary and Elementary School*, [Conference Paper]. INTED2021 Proceedings, pp. 3458-3464. https://www.researchgate.net/publication/350043130

Neves, M. A. F., Silva, A. P. (2019). *Matemática 7º ano, Parte 1*. Porto Editora. https://www.escolavirtual.pt/e-manuais/

Niven, I., Zuckerman, H. S., Montgomery, H. L. (1991). *An Introduction to the Theory of Numbers*, Fifth Edition, John Wiley & Sons.

Oliveira, A. P. S. (2019). *Scratch na Infância: uma experienciação de crianças dos 4 aos 6 anos.* [Doctoral dissertation, Universidade de Aveiro]. RIA - Repositório Institucional da Universidade de Aveiro. http://hdl.handle.net/10773/27057

Oliveira, A. P., Lopes, C. (2010). *Scratch na infância: estudo de impactos da experienciação lúdica e co-participativa de crianças de 6 anos.* II Congresso Internacional Comunication 3.0. Universidade de Salamanca. Outubro de 2010. https://campus.usal.es/~comunicacion3punto0/comunicaciones/020.pdf

Papert, S. (1998). *A família em rede.* Relógio D` Água.

Porto Editora (2021) – *algoritmo (informática)* na Infopédia. Porto Editora. https://www.infopedia.pt/$algoritmo-(informatica)

Ramos, J., Espadeiro, R. (2014). Os futuros professores e os professores do futuro. Os desafios da introdução ao pensamento computacional na escola, no currículo e na aprendizagem. *Revista EFT*: http://eft.educom.pt

Resnick, M., Maloney, J., Monroy-Hernández, A., Rusk, N., Eastmond, E., Brennan, K., Millner, A., Rosenbaum, E., Silver, J., Silverman, B., Kafai, Y. (2009). *Scratch: Programming for All. Communications of the ACM*. November 2009, vol. 52, N.º 11. https://web.media.mit.edu/~mres/papers/Scratch-CACM-final.pdf

Rich, B, revised by Philip A. Schmidt (1993). *Schaum's Outline of Theory and Problems of Elementary Algebra* (2nd ed.). McGRAW-HILL

Serrazina, L. (2017), *Planificação do ensino e aprendizagem da Matemática*, Escola Superior de Educação de Lisboa UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa. https://www.researchgate.net/publication/319879388_Planicacao_do_ensino_e_aprendizagem_da_Matematica_1_Lurdes_Serrazina

Shute, V., Sun, C., Asbell-Clarke, J. (2017). Demystifying computational thinking. *Educacional Research Review*, 22, páginas 142-158. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2017.09.003

Smith, P. M., Martins, P. M. (2009) *Matemática Discreta*, Departamento de Matemática da Universidade do Minho. http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/12563

Torres, J., Figueiredo, M. (s. d.) *GEN10S Portugal, Fichas Guia do Professor.* Centro de competências TIC da Escola Superior de Educação do Instituo Politécnico de Setúbal.

Triches, F., Lima, H. G. (2020). *Pré-cálculo Um Livro Colaborativo* (pp. 175-181). UFRGS (Universidade Federal do Rio Grande do Sul) https://www.ufrgs.br/reamat/PreCalculo/livro/livro.pdf

Vasconcelos, J. (2015). *Algoritmia e Estruturas de Dados – Programação nas Linguagens C e Java* (1ª edição). FCA – Editora de Informática, Lda.

Vasconcelos, J., Carvalho, J. (2005). *Python Algoritmia e Programação Web* (1ª edição). Centro Atlântico, Lda.

Weintrop, D., Beheshti, E., Horn, M., Orton, K., Jona, K., Trouille, L., & Wilensky, U. (2016). *Defining computational thinking for mathematics and science classrooms.* Journal of Science Education and Technology, 25, 127–147. https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10956-015-9581-5

Wing, J. M. (2006, Março). *Computational thinking.* Communications of the ACM. Vol. 49, N.º 3), pp 33 e 35. https://www.cs.cmu.edu/~15110-s13/Wing06-ct.pdf

Legislação:

Decreto-Lei n.55/2018 do Ministério da Educação e Ciência (2018). Diário da República: I Série, n.º 129. https://data.dre.pt/eli/dec-lei/55/2018/07/06/p/dre/pt/html

Despacho n.º 6478/2017 da Educação - Gabinete do Secretário de Estado da Educação (2017). Diário da República: II Série, n.º 143. https://dre.pt/application/conteudo/107752620

Portaria n.º 223-A/2018 do Ministério da Educação e Ciência (2018). Diário da República: I Série, 1º Suplemento, n.º 149. https://data.dre.pt/eli/port/223-a/2018/08/03/p/dre/pt/html

Sítios oficiais:

Blockly Games. (2021). https://opensource.google/projects/blockly-games

Code Studio. (2021). https://studio.code.org/courses

Ministério da Saúde. (2021). https://covid19.min-saude.pt/

Projeto GEN10s Portugal. (2021). Projeto GEN10S Portugal http://genios.org.pt/

Scratch.mit. (2021). http://scratch.mit.edu

Ubbu. (2021). https://www.ubbu.io/#home