Universidade de Aveiro Departamento de Educação e Psicologia
Ano 2021

Telma Eduarda Almeida Chipelo

O Estudo de Isometrias No 2.º Ciclo do Ensino Básico – Desafios de Visualização

Universidade de Aveiro Departamento de Educação e Psicologia
Ano 2021

Telma Eduarda Almeida Chipelo

O Estudo de Isometrias No 2.º Ciclo do Ensino Básico – Desafios de Visualização

Relatório final apresentado à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º Ciclo do Ensino Básico, realizada sob a orientação científica da Doutora Maria Teresa Bixirão Neto, Professora Auxiliar do Departamento de Educação e Psicologia da Universidade de Aveiro.

Dedico este trabalho a uma pessoa muito especial e incansável nesta etapa da minha vida (BJFB).

“Aucun être humain ne peut survivre sans amour et sans tendresse.”
(Catherine Barry, 2013, p. 53)

“*O sentido espacial é o “agarrar” o mundo onde a criança vive, respira e se movimenta.”*
(Freudhental,1973 cit. por Breda et al., 2011, p.9)

o júri

presidente

Doutor Rui Marques Vieira
Professor Associado c/ Agregação, Universidade de Aveiro

Doutora Ana Paula Florêncio Aires
Professora Auxiliar, Universidade de Trás-Os-Montes e Alto Douro

Doutora Maria Teresa Bixirão Neto
Professora Auxiliar, Universidade de Aveiro

agradecimentos

Este percurso só foi possível devido à colaboração de várias pessoas a quem deixo os meus agradecimentos.

À Prof. Doutora Maria Teresa Bixirão Neto, pela partilha de conhecimento, orientação, críticas e sugestões que foram de extrema importância para a conclusão deste trabalho.

À Prof. Cooperante Isabel Baio, por todo o apoio, dedicação, amizade e por ter permitido a implementação deste projeto.

Ao Prof. Cooperante Luís Castro, pela orientação, dedicação e por ter permitido o meu estágio durante 1.º semestre.

Aos alunos, essenciais para este estudo, pelo interesse demostrado e pela ajuda na sua concretização.

À Cátia Simões, minha colega de estágio, pela amizade, motivação, disponibilidade e ajuda.

Aos meus pais, irmãs pelos conselhos, carinho e por assegurar a minha vida em França durante a minha ausência.

A todas as pessoas com quem me cruzei e me incentivaram a continuar, especialmente ao Professor Dr. Rui Vieira, M. Francette Cano e M. Maritxu Ithurralde.

Ao Bruno Barroqueiro, por todo o apoio, motivação e principalmente pela paciência. Sem ele nada seria possível…

palavras-chave Geometria; isometrias no plano; visualização espacial; simetria axial.

resumo

O presente relatório de estágio foi desenvolvido para a obtenção do grau de Mestre em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais do 2.º Ciclo do Ensino Básico. Teve como objetivos promover a visualização espacial, identificar e analisar as principais dificuldades dos alunos em desafios, envolvendo a visualização espacial. Para tal, este estudo pretende dar respostas às seguintes questões de investigação: (i) Quais as dificuldades que surgem em alunos, do 2.º Ciclo do Ensino Básico, quando confrontados com desafios que implicam a visualização espacial? (ii) Como explicar as dificuldades desses alunos nos desafios que envolvem visualização espacial? (iii) Qual o papel do *GeoGebra* na resolução dos desafios?

De forma a dar respostas às questões referidas foram implementados três desafios em sala de aula relacionados com as isometrias no plano. O estudo seguiu uma metodologia de natureza qualitativa. A análise dos dados recolhidos foi realizada, essencialmente, tendo por base a observação participante, as notas de campo, o registo áudio e a recolha documental. O estudo foi concretizado no ano letivo 2020/2021, numa escola básica da região de Aveiro. Os participantes foram os alunos de uma turma do 6.º ano de escolaridade do 2.º Ciclo do Ensino Básico. Os resultados apontam algumas dificuldades relativas à manipulação de figuras mentalmente e graficamente, à incapacidade de recordar/não saber o que é eixo de simetria e as propriedades da simetria axial, à incapacidade de descrever por escrito o procedimento realizado, assim como na utilização de recursos materiais e do *GeoGebra.* Contudo, os desafios e a utilização de *GeoGebra* contribuíram para o desenvolvimento de atitudes favoráveis em relação à Matemática e à geometria, principalmente no que diz respeito às isometrias no plano. Permitiram ainda o desenvolvimento da criatividade e da visualização.

.

keywords Geometry; in-plane isometries; spatial visualization; geometric transformations; symmetry.

abstract This internship report was developed to obtain a Master's degree in Teaching of the 1st Cycle of Basic Education and in Mathematics and Natural Sciences in the 2nd Cycle of Basic Education. Its objectives were to promote spatial visualization, identify and analyze the main difficulties of students in challenges involving spatial visualization. To this end, this study aims to provide answers to the following research questions: (i) What are the difficulties that arise in students from the 2nd Cycle of Basic Education when faced with challenges that imply spatial visualization? (ii) How to explain students' difficulties in the challenges involving spatial visualization? (iii) What is the role of *GeoGebra* in solving the challenges?

In order to provide answers to these questions, three challenges were implemented in the classroom related to isometries in the plane. The study was developed in an action-research context. The analysis of the collected data was, essentially, of a qualitative nature, having been the participant observation, the field notes, the audio recording and the documental collection, the techniques and data collection instruments used. The study was carried out in the 2020/2021 school year in a basic school in the region of Aveiro. The participants were students from a 6th grade class of the 2nd Cycle of Basic Education. The results point out some difficulties related to the manipulation of figures mentally and graphically, the inability to remember/not knowing what the axis of symmetry are and the properties of the axial symmetry, the inability to describe the performed procedure in written form, as well as the use of resources materials and *GeoGebra*. However, the challenges and the use of *GeoGebra* contributed to the development of favorable attitudes towards Mathematics and geometry, especially with regard to isometries in the plane. They also allowed the development of creativity and visualization.

mots clés Géométrie; isométries du plan ; visualisation spatiale; symétrie axiale.

resumé

Ce rapport de stage a été élaboré en vue de l'obtention d'un Master en Enseignement au cycle 2 (CP, CE1, CE2) et 3 (CM2) et en Mathématiques et Sciences Naturelles au sixième. Ses objectifs étaient de favoriser la visualisation spatiale, d'identifier et d'analyser les principales difficultés des étudiants dans les défis impliquant la visualisation spatiale. A cette fin, cette étude vise à apporter des réponses aux questions de recherche suivantes : (i) Quelles sont les difficultés rencontrées par les élèves du sixième face aux défis de la visualisation spatiale ? (ii) Comment expliquer les difficultés de ces élèves dans les défis qui impliquent la visualisation spatiale ? (iii) Quel est le rôle de *GeoGebra* dans la résolution des défis ?

Afin d'apporter des réponses à ces questions, trois défis ont été mis en place en classe liés à l'isométrie du plan. L'étude a suivi une méthodologie qualitative. L'analyse des données collectées a été réalisée essentiellement à partir d'observations participantes, de notes de terrain, d'enregistrements audio et de collecte de documents. L'étude a été réalisée au cours de l'année scolaire 2020/2021, dans un collège de la région d'Aveiro. Les participants étaient des élèves d'une classe sixième. Les résultats mettent en évidence certaines difficultés liées à la manipulation mentale et graphique des figures, l'incapacité à se souvenir/ne pas savoir quel est l'axe de symétrie et les propriétés de la symétrie axiale, l'incapacité à décrire la procédure effectuée par écrit, ainsi que l'utilisation des ressources matérielles et du *GeoGebra*. Cependant, les défis et l'utilisation de *GeoGebra* ont contribué au développement d'attitudes favorables envers les mathématiques et la géométrie, notamment en ce qui concerne les isométries du plan. Ils ont également permis le développement de la créativité et de la visualisation.

Índice

Índice de Figuras

Índice de Tabelas

Lista de Abreviaturas

AE	Aprendizagens Essenciais
CEB	Ciclo do Ensino Básico
EB	Ensino Básico
EOS	Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e da Instrução em Matemática
PPS	Prática Pedagógica Supervisionada
SIE	Seminário de Investigação Educacional
SOE	Seminário de Orientação Educacional
UC	Unidade Curricular
VE	Visualização Espacial

Introdução

O presente relatório de estágio surge no âmbito da articulação das Unidades Curriculares (UC) Prática Pedagógica Supervisionada (PPS) e Seminário de Orientação Educacional (SOE) do Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico (CEB) e Matemática e Ciências Naturais do 2.º CEB. Este relatório desenvolveu-se na Universidade de Aveiro, no Departamento de Educação e Psicologia em articulação com escolas do distrito de Aveiro sob orientação da Professora Doutora Teresa Neto.

A PPS desenvolve-se durante os dois semestres do segundo ano de referido mestrado. Esta é complementada com o Seminário de Investigação Educacional (SIE) que decorre igualmente durante os dois semestres. Desta forma, o foco da investigação e o enquadramento teórico foram desenvolvidos durante o primeiro semestre e a sua implementação decorreu no segundo semestre.

Importa salientar que a PPS tem um papel fundamental no currículo do Mestrado em Ensino do 1.º CEB e Matemática e Ciências Naturais do 2.º CEB, pois é a altura em que o futuro professor assume pela primeira vez as práticas docentes. Este sente pela primeira vez o compromisso com o aluno e sua família, com a comunidade e com a instituição escolar, com a inclusão e democracia, o que implica uma grande responsabilidade e competência para saber fazer o que lhe compete (Linhares, Irineu, Silva, Figueiredo, & Sousa, 2014).

Pertinência e motivações do estudo

A geometria permite desenvolver diversas capacidades, nomeadamente: o pensamento geométrico, a argumentação, o pensamento crítico, a resolução de problemas, a lógica e formulação de conjeturas. Além disso, as isometrias no plano permitem aumentam a perceção geométrica dos alunos, desenvolvendo as habilidades de representação, imaginação e criatividade. Porém, segundo vários autores, a geometria é considerada para muitos alunos como difícil de compreender, devido à reduzida capacidade de Visualização Espacial (VE). Desta forma, torna-se fundamental trabalhar a VE dos alunos com recurso às isometrias no plano (Bastos, 1999; Breda et al., 2011; Figueira, Loureiro, Lobo, Rodrigues, & Almeida, 2007).

Esta é uma temática em que tenho grande interesse e faz parte das Aprendizagens Essenciais (AE) do Ensino Básico. Durante a PPS no 1.º semestre com alunos do primeiro ciclo, observei que esta área da visualização não era muito explorada sendo um facto curioso que motivou este estudo. Desta forma, foram planificadas algumas aulas com o consentimento do professor cooperante para explorar a VE dos alunos. Nestas aulas foram exploradas a simetria de reflexão com recurso a imagens da natureza, figuras geométricas e objetos presentes na sala de aula; a visualização 2D e 3D e a composição e decomposição de figuras geométricas. Assim foi realizado o "Natal Simétrico", em que os alunos decoraram a sala de aula trabalhando a VE usando a simetria axial e de rotação. Foram construídas estrelas, mandalas e *Kirigamis*. Posteriormente ocorreu a criação de um dodecaedro estrelado, composto por pirâmides pentagonais. Cada aluno criou a sua pirâmide e posteriormente todas as pirâmides foram coladas às várias fases do dodecaedro, este foi exposto na biblioteca da escola. Durante estas atividades, os alunos demostraram grande motivação, o que despertou em mim um grande interesse na temática e levou-me a conversar com a professora orientadora iniciando assim as minhas leituras. Um outro motivo que reforçou o meu interesse, prende-se com o facto de a professora cooperante do 2.º semestre referir que os alunos do 6.º ano, geralmente, apresentam grandes dificuldades na aprendizagem das isometrias, algo que eu já tinha percebido aquando das minhas pesquisas. Estes vários motivos levaram-me a realizar este estudo, a fim de tentar compreender quais as dificuldades dos alunos nesta vertente e como podem ser trabalhadas.

Problemática, questões e objetivos do estudo

O presente estudo foi realizado no 2.º Ciclo, numa turma do 6.º ano com 25 alunos, dos quais participaram apenas 24 alunos, visto que um dos alunos faltou regularmente por questões de saúde. O estudo incluiu uma sequência de três desafios relativos às isometrias no plano. Estes desafios, além da disciplina de Matemática, são transversais a outras disciplinas, como à disciplina de Português, de Educação Visual e de Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC). Esta transversalidade torna-se importante, visto que é a partir da articulação de várias componentes que é possível construir novos conhecimentos.

Estes desafios têm como principal objetivo promover a VE através das isometrias no plano. A problemática, de acordo com o referido anteriormente, surgiu com base na revisão da literatura e na conversa com a professora orientadora e com os professores cooperantes. Na **Tabela 1** apresentam-se as questões e os objetivos de investigação identificados.

Tabela 1 - Questões e objetivos de investigação

Questões de investigação	Objetivos
(i). Quais as dificuldades que surgem em alunos do 2.º CEB, quando confrontados com desafios que implicam a visualização espacial? (ii). Como explicar as dificuldades dos alunos nos desafios que envolvem visualização espacial? (iii). Qual o papel do *GeoGebra* na resolução dos desafios.	(i). Promover a visualização espacial numa turma do 6.ºano do 2.º CEB. (ii). Identificar as principais dificuldades dos alunos em desafios que implicam a visualização espacial. (iii). Analisar e interpretar o tipo de erro cometido pelos alunos em desafios que envolvem a visualização espacial. (iv). Integrar as tecnologias digitais na aprendizagem das isometrias de forma a desenvolver a visualização espacial.

De seguida apresenta-se a forma como está organizado o presente relatório de Prática Pedagógica Supervisionada.

Organização do relatório

Quanto à estrutura, este relatório está dividido em quatro capítulos. O capítulo inicial apresenta os pilares teóricos essências para a investigação, enquanto os três seguintes integram a componente do estudo. Por último, constam as referências bibliográficas e os anexos.

O primeiro capítulo é constituído por quatro subcapítulos: (i) a importância da visualização espacial para o desenvolvimento do pensamento geométrico; (ii) desenvolvimento do pensamento geométrico segundo o modelo de Van Hiele; (iii) as isometrias no plano segundo diversas abordagens; (iv) teoria dos registros de representação semiótica e a aprendizagem Matemática.

No segundo capítulo é exposto a caracterização do contexto pedagógico e os participantes do estudo, são ainda apresentadas as opções metodológicas, a calendarização do estudo, bem como as técnicas e instrumentos de recolha de dados.

O terceiro capítulo tem como finalidade a apresentação e análise dos desafios colocados ao grupo em estudo. O último capítulo engloba as considerações finais, principais conclusões e a reflexão pessoal de todo o percurso.

O relatório termina com a apresentação das referências bibliográficas e dos anexos.

Capítulo I - Enquadramento teórico

1.1. A importância da visualização espacial para o desenvolvimento do pensamento geométrico

Apesar de a geometria ser uma área muito importante, ela nem sempre foi relevante nos programas de Matemática. O seu ensino tem sido, por vezes, realizado de forma limitada, sem relacionar os seus conceitos com outros temas da Matemática e sem interligação com o mundo em que vivemos (Gordo, 1993). Por vezes, esta temática é deixada para o final do ano letivo e trabalhada tendo em conta as suas definições, não dando importância à compreensão dos conceitos por parte dos alunos (Breda et al., 2011).

A geometria envolve aspetos fundamentais da Matemática favorecendo o seu desenvolvimento. Promove a realização de investigações e a concretização e validação de conjeturas (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999). Permite ainda desenvolver habilidades de experimentação, argumentação, representação e promove a imaginação e a criatividade. Além disso, esta temática facilita o desenvolvimento do raciocínio e a resolução de problemas de diferentes áreas de conhecimento. A sua compreensão tem implicações em diversas áreas do currículo, como por exemplo no estudo da proporcionalidade e da medida (perímetro, áreas e volume) (Figueira et al., 2007; Nieto & Bairral, 2010; Settimy & Bairral, 2020).

Segundo Figueira et al. (2007) existem muitos professores que não se sentem à vontade com a geometria, dando-lhe pouco importância para o desenvolvimento de competências Matemáticas. Os mesmos autores referem que a geometria é pouco valorizada durante a formação de professores e nos manuais escolares. As investigações de Gomes (2012) e Fernández (2011) reforçam a mesma ideia. Gomes (2012) realizou uma investigação com o objetivo de identificar as dificuldades que os futuros professores do EB têm em relação às isometrias. O estudo teve como foco três isometrias: rotação, reflexão e translação. Os participantes foram 64 alunas de uma turma de 3.º ano de Licenciatura em Educação Básica numa universidade portuguesa. As questões colocadas foram retiradas de manuais escolares do 4.º ano de escolaridade. O autor concluiu que as dificuldades destas futuras professoras foram semelhantes às dificuldades dos alunos. Estas alunas mostraram dificuldades em traçar os eixos de simetria de uma figura geométrica, visto que a maioria apenas traçou os eixos na vertical e na horizontal, não reconhecendo a existência de eixos de simetria na transversal. Assim, as dúvidas surgiram quando o eixo era oblíquo tal como na investigação de Fernández (2011). Quanto à translação, as alunas consideraram que o vetor era o espaço entre cada figura (figura objeto e figura imagem), ou simplesmente não consideraram o vetor. Na rotação, as alunas confundiram rotação com reflexão, assim como a rotação associada a um ângulo raso ou associada a um ângulo reto. Estes resultados demostraram que estas alunas ainda não se encontravam preparadas para lecionar, reforçando a ideia de existência de falhas no sistema de formação de professores. Desta forma torna-se necessário refletir sobre como chamar a atenção dos professores para o ensino da geometria, visto que esta é conjunto de conhecimentos essenciais à compreensão do mundo que nos rodeia (Breda et al., 2011).

Como referido anteriormente, a geometria é considerada por muitos alunos como difícil de compreender, devido à reduzida capacidade de visualização espacial. Os alunos revelam dificuldades ligadas à compreensão de conceitos, à linguagem utilizada nas definições e às propriedades geométricas (Bastos, 1999; Duval, 2012a; Figueira et al., 2007). Certos alunos, quando têm de justificar algo, referem: "Eu entendo, mas não consigo explicar" (Hoffer, 1981, p.12). Deste modo é importante criar tarefas que permitam a aquisição de diferentes habilidades geométricas e o desenvolvimento de uma linguagem adequada ao nível de pensamento geométrico dos alunos.

É importante esclarecer que o conceito de visualização significa o mecanismo mental que possibilita passar de um objeto físico para uma imagem mental. A visualização é a capacidade de criar figuras na mente, em papel ou através das tecnologias, e tem como objetivo comunicar, refletir e desenvolver ideias novas aumentando a compreensão. Desta forma a visualização é um elemento essencial à aprendizagem da Matemática, esta tem um papel importante na compreensão de conceitos e na construção de raciocínios necessários para desenvolver a capacidade de generalização e abstração (Fonseca & Leivas, 2019; Vale, 2012).

Vários autores consideraram que a visualização e a perceção espacial podem ser definidas como um conjunto de capacidades ou habilidades. Importa salientar que, na literatura os termos "visualização", "orientação" e "representação" são considerados habilidades espaciais. Estas são métodos cognitivos que indicam a forma como aprendemos as relações entre objetos. Podem ser definidas como a capacidade de gerar, conservar, recuperar, transformar imagens visuais bem estruturadas, representar informações espaciais não verbais, analisar as relações entre objetos e de os manipulares mentalmente. A habilidade espacial leva a antecipar o aspeto do objeto complexo e a realizar operações mentais em objetos bi e tridimensionais (Duroisin & Demeuse, 2016).

Gutiérrez (2011, pp. 11-12) baseado em trabalhos de Del Grande descreve perceção espacial como um conjunto de sete habilidades de visualização: (i) coordenação motora dos olhos, (ii) identificação visual, (iii) conservação da perceção, (iv) reconhecimento de posições no espaço, (v) reconhecimento de relações espaciais, (vi) discriminação visual e (vii) memória visual.

(i) **Coordenação motora dos olhos**: capacidade de acompanhar o movimento dos objetos com os olhos de forma ágil e eficiente.

(ii) **Identificação visual**: aptidão de reconhecer uma figura fora do seu contexto. Esta capacidade é útil, por exemplo, quando é necessário identificar uma figura composta por várias partes, como nos mosaicos, ou quando existem várias figuras sobrepostas.

(iii) **Conservação da perceção**: é a capacidade de reconhecer que um objeto mantém sua forma mesmo que deixe de ser visto total ou parcialmente.

(iv) **Reconhecimento de posições no espaço**: habilidade de relacionar a posição de um objeto consigo mesmo (o observador) ou com outro objeto, que funciona como um ponto de referência.

(v) **Reconhecimento de relações espaciais:** capacidade que permite identificar corretamente as características das relações entre vários objetos localizados no espaço.

(vi) **Discriminação visual**: é a aptidão de comparar vários objetos e identificar as suas semelhanças e diferenças visuais.

(vii) **Memória visual**: habilidade de recordar as características visuais e posicionais de um conjunto de objetos que estavam à vista, mas já não são visíveis ou sua posição foi alterada.

Gonzato, Blanco, et al., (2011) e Gonzato, Godino, et al. (2011), consideram que a visualização espacial é um conjunto de três capacidades relacionadas com o raciocínio espacial: (i) "ver" o objeto espacial, (ii) analisar as suas transformações e (iii) refletir sobre as suas partes, relações e estrutura dos objetos.

Para o aluno ter um bom controle das suas relações com o espaço, Gonzato, Blanco, et al. (2011, p.101) baseados em trabalhos de Berthelot y Salin, diferenciaram três famílias de atividades no contexto tridimensional: (i) orientação estática do indivíduo e dos objetos; (ii) interpretação de perspetivas de objetos tridimensionais e (iii) orientação do sujeito em espaços reais.

(i) **A Orientação estática do indivíduo e do objeto engloba:** mover, encontrar e comunicar a posição de objetos. Relaciona-se com o problema da orientação corporal, o indivíduo em relação ao objeto e a orientação do objeto (cima-baixo, esquerda-direita, frente-costas).

(ii) A **interpretação de perspetivas de objetos tridimensionais** engloba reconhecer, descrever, construir ou transformar um espaço da vida quotidiana e a representação de objetos bi ou tridimensionais. Nesta estão incluídas atividades ligadas com: mudanças de perspetivas, interpretar perspetivas de objetos e diferentes representações planas de objetos tridimensionais, objetos girando mentalmente, transformar uma representação plana em outra;

(iii) A **orientação do sujeito em espaços reais** engloba o reconhecimento, a descrição, a fabricação ou transformação de objetos e a interpretação e representação de espaços de vida ou deslocamentos. Nesta família estão incluídas tarefas que requerem que o indivíduo compreenda o espaço que o rodeia, a sua localização e orientação no espaço. Exemplos: ler um mapa; ler um plano da cidade, do bairro, da escola; descrever um itinerário verbalmente; identificar um lugar num mapa utilizando coordenadas cartesianas ou polares.

No que diz respeito ao ensino-aprendizagem da geometria, este deve ser realizado tendo em conta: (i) a capacidade de visualização espacial e de verbalização; (ii) a intuição; (iii) e a utilização das capacidades anteriores para a resolução de problemas. (Abrantes et al., 1999). Vários autores defendem que a aprendizagem da geometria deve ser interligada com situações e problemas do quotidiano dos alunos, e que a simetria e as transformações geométricas são fundamentais para a compreensão do mundo que nos rodeia. Estas encontram-se ao alcance do olhar dos alunos fazendo parte do seu quotidiano e do património cultural e natural. Tornando imprescindível a sua exploração nas aulas de Matemática (Bastos, 1999; Figueira et al., 2007; Jorge, Cabrita, Santos, Neto, & Lopes, 2020). Por outro lado Gonzato, Godino, & Neto (2011), baseados em trabalhos de Freudenthal e Guillén, consideram importante iniciar o ensino da geometria pela geometria espacial, por esta ser mais intuitiva e concreta que a geometria no plano e, fazer parte do meio envolvente dos alunos.

Atualmente, existem várias atividades e recursos que o professor pode utilizar com os alunos, para que estes progridam e desenvolvam as suas capacidades de visualização espacial. A utilização de programas de geometria dinâmica no ensino são grandes aliados no desenvolvimento do pensamento geométrico. Do ponto de vista cognitivo, como referiu Duval na entrevista à RPEM

> (…) fascinante é o poder de visualização que eles oferecem em todas as áreas. (…) eles constituem um meio de transformações de todas as representações produzidas na tela. (…)

> eles cumprem uma função de simulação e de modelagem que ultrapassa tudo o que podemos imaginar "mentalmente" ou realizar de modo gráfico-manual.
> (…)
> (…) os softwares permitem (…) explorar as transformações de figuras por simples deslocamento de um "objeto" (ponto, segmento, etc.). Eles não somente preenchem uma função heurística, mas permitem uma abordagem "experimental" de relações e de propriedades geométricas. (Freitas & Rezende, 2013, p. 32)

Assim, Duval considera que atualmente a utilização de softwares no ensino da Matemática é totalmente indispensável. É importante o desenvolvimento da capacidade de visualização com recurso às tecnologias e às representações de figuras geométricas para que os alunos possam, através da experiência, aumentar a sua capacidade de visualização bi e tridimensional (Breda et al., 2011).

No entanto**,** Malfatti et al. (2002), referem que um dos problemas para trabalhar esta área é a falta de recursos para representar lealmente os objetos tridimensionais. Estes autores referem que as projeções que se utilizam representam objetos bidimensionais e alteram ângulos, mudam comprimentos e não deixam identificar pontos que estejam na mesma linha de projeção. Seguindo o mesmo raciocínio, Kaleff et al. (2002) afirma que apesar do surgimento de programas informáticos destinados ao ensino da geometria, as atividades relativas aos sólidos tridimensionais ainda se apresentam numa tela em formato bidimensional. Além disso, essas imagens são apenas virtuais, os alunos não as podem tocar fisicamente. Desta forma é importante trabalhar com objetos e figuras que possibilitem a sua manipulação e exploração.

As tarefas onde se utilizam materiais concretos despertam a atenção e o interesse dos alunos e proporcionam a observação e manipulação de sólidos geométricos verdadeiras. Posteriormente, esses sólidos podem ser comparados com as projeções virtuais. Contudo, importa salientar a dependência da utilização de materiais manipuláveis pode impedir o aluno de chegar a níveis mais elevados de conceptualização. Desta forma o professor, com recurso a materiais manipuláveis e virtuais, deve auxiliar os alunos a criarem imagens mentais até que o material concreto deixa de ser necessário (Kaleff et al., 2002; Vieira, 2010).

1.2. Desenvolvimento do pensamento geométrico segundo o modelo de Van Hiele

O modelo de Van Hiele foi elaborado nos anos 50 pelo casal Van Hiele, Pierre M. Van Hiele e Dina Van Hiele-Geldof, professores de geometria na escola secundária de Montessori na Holanda. Este modelo foi elaborado a partir das suas experiências profissionais e das dificuldades observadas nos seus alunos. O modelo van Hiele descreve a evolução do raciocínio geométrico dos alunos e como o professor pode ajudar a melhorar a qualidade desse raciocínio (Fuys, Geddes, & Tischler, 1988; Gutiérrez & Jaime, 1991). A aprendizagem do aluno, em geometria, realiza-se de forma sequencial e hierárquica. Desta forma, o modelo descreve cinco níveis de raciocínio geométrico dos alunos ao longo da sua formação em Matemática: (i) visual, (ii) análise, (iii) dedução informal, (iv) dedução formal e (v) rigor.

O primeiro nível, chamado de **visual**, começa pelo pensamento não verbal. Neste nível os alunos reconhecem figuras geométricas pela sua aparência visual (Van Hiele, 1999b). Segundo Kaleff et al. (2015), os alunos podem aprender vocabulário geométrico como triângulo ou quadrado mas não sabem explicar as sua propriedades. O aluno pode relacionar as figuras geométricas com objetos do quotidiano como a porta, a janela ou a mesa, dando a seguinte resposta: "É um retângulo porque parece uma caixa" (Van Hiele, 1999b, p. 2).

No segundo nível, denominado de **análise**, os alunos iniciam a compreensão dos conceitos geométricos com base na observação e na experiência e começam a distinguir as propriedades das figuras geométricas. Segundo Gutiérrez & Jaime (1991), o aluno compreende que os objetos são compostos por partes e que têm certas propriedades, porém não reconhecem ligações entre eles. Neste nível uma figura geométrica já não é comparada com um objeto do quotidiano, mas é reconhecida por ter certas características. Por exemplo o triângulo equilátero tem certas propriedades como: três lados, todos os lados iguais, três ângulos iguais, simetria com respeito a uma linha e a um eixo de rotação. Contudo, para o aluno que se encontra neste nível, um triângulo que contém todos os lados iguais não significa que contém ângulos equivalentes, o aluno reconhece que a figura tem certas propriedades, mas não as organiza de forma coerente como refere (Van Hiele, 1999a, p. 311).

No que respeita ao nível de **dedução informal**, os alunos já organizam as propriedades das figuras geométricas de forma lógica e são capazes de formular definições, como por exemplo de quadrado, de retângulo e de triângulos equiláteros. Os estudantes são capazes de dizer que "todos os quadrados são retângulos" e que "a soma das medidas dos ângulos de qualquer triangulo deve ser 180°" (Van Hiele, 1999b, 1999a, p. 311). Como referem Halat (2008) e Domingos (2010), os alunos são capazes de relacionar figuras geométricas, incluir o losango nos quadriláteros e justificar observações realizadas no nível anterior. Segundo Gutiérrez & Jaime, (1991) e Fuys et al. (1988), os alunos neste nível entendem que uma propriedade pode derivar de outra por meio de raciocínio informal. Porém, o aluno que se encontra neste nível ainda não tem um pensamento lógico e formal, não percebe o significado de dedução, não entende o papel dos axiomas e é incapaz de realizar uma demostração (Gutiérrez & Jaime, 1991; Van Hiele, 1999b).

> *No obstante, en este nivel, el significado intrínseco de la deducción, esto es, el rol de los axiomas, definiciones, teoremas y sus inversos no es compreendido.* (Van Hiele, 1999b, p. 2)

> *Comprende los pasos individuales de un razonamiento lógico de forma aislada, pero no compreende el encadeamento de estos pasos ni la estrutura de una demostración. No es capaz de reslizar rezonamientos lógicos formales, ni siente su necesidad. Por esse motivo, tampoco compreende la estrutura axiomática de las Matemáticas.* (Gutiérrez & Jaime, 1991, p. 51)

Adicionalmente, Van Hiele (1999b), afirma que pela sua experiência como docente de geometria, muitas vezes os alunos ainda não chegaram a este nível, levando ao insucesso no estudo da geometria Euclidiana que envolve dedução formal.

No nível de **dedução formal**, os alunos são capazes de provar teoremas de forma dedutiva e criar inter-relações entre eles. Os estudantes estão aptos a realizar raciocínio formal, argumentando de forma a provar porque é que uma afirmação é verdadeira. Desta forma são capazes de justificar declarações em provas formais e entendem o papel dos axiomas e das definições (Fuys et al., 1988; Halat, 2008). Adicionalmente, os estudantes percebem que existem diferentes definições para uma figura geométrica, aceitam que utilizando diferentes vias é possível chegar ao mesmo resultado e podem expor formalmente teoremas que já utilizaram no nível anterior (Gutiérrez & Jaime, 1991).

O último nível é o do **rigor**, o aluno é competente em estabelecer teoremas em diferentes sistemas axiomáticos e em comparar esses sistemas. Sendo capaz de descobrir procedimentos generalizados para resolver categorias de problemas. Os estudantes neste nível são capazes de comparar diferentes sistemas dedutivos e sabem dar informações sobre qualquer figura geométrica (Fuys et al., 1988; Halat, 2008). Para Gutiérrez & Jaime (1991), as características básicas deste nível são a capacidade para analisar e comprovar diferentes geometrias. Os mesmos autores referem que este nível apenas se encontra ao alcance de matemáticos profissionais, não contribuindo sob o ponto de vista prático para modelo de Van Hiele. Adicionalmente, Halat (2008), afirma que este nível é o mais rigoroso de pensamento e que a sua profundidade é semelhante ao de um matemático.

Os alunos não podem chegar a um nível sem ter passado pelo nível anterior, contudo Clements e Battista (1992, cit. por Domingos, 2010) afirmam que os alunos podem estar em diferentes níveis em diferentes temas da geometria. Quando, um aluno passa para o nível seguinte num dos temas da geometria, torna-se mais fácil evoluir também nos outros temas. Segundo Van Hiele (1959;1984, cit. por Fuys et al., 1988), o progresso de um nível para o outro depende dos métodos de ensino usados e não da idade ou maturação biológica, existindo métodos que não permitem a obtenção de níveis de pensamento mais elevados. Assim para ajudar os alunos a chegarem a cada um destes níveis, o casal Van Hiele propôs aos professores uma sequência de cinco fases de aprendizagem do ensino da Geometria: (i) fase de investigação; (ii) orientação guiada; (iii) explicitação; (iv) orientação livre; (v) integração**.** Ao completar a quinta fase os alunos passam para o nível seguinte. Desta forma, para que os alunos passem para o nível seguinte, o professor deve planificar tarefas que cumpram estas cinco fases de aprendizagem tendo em conta os conhecimentos anteriores dos alunos e o nível de raciocínio geométrico.

A **fase de investigação ou informação** inicia-se com o jogo e a exploração de materiais para que os alunos se familiarizem com o trabalho a desenvolver (Van Hiele, 1999b). O professor deve informar os alunos sobre o campo de investigação que vão trabalhar. Esta primeira fase serve para que o professor perceber quais os conhecimentos prévios dos alunos sobre o tema e qual o nível de raciocínio em que se encontram. Os conhecimentos prévios dos alunos devem servir de ponto de partida se foram adequados, e se foram errados, o professor deve iniciar por modificar esses conhecimentos (Gutiérrez & Jaime, 1991).

Na fase de **orientação guiada**, os alunos exploram o campo da investigação através de materiais selecionados pelo professor. É a partir destes materiais que o professor cria tarefas orientadas para a descoberta progressiva dos conceitos e propriedades do tema em estudo. As tarefas devem estar organizadas de forma que os alunos deem respostas específicas e entendam por si os conceitos e as propriedades que o professor quer atingir. Estas devem ser apresentadas de forma gradual, como por exemplo, por meio de um quebra-cabeças ou através de jogos (Gutiérrez & Jaime, 1991; Van Hiele, 1999b).

A **explicitação** é a terceira fase de aprendizagem. Nesta fase, Van Hiele (1999b) declara que o professor deve introduzir os vocabulários e estimular os alunos a usá-los durante as suas conversas e nos trabalhos escritos sobre geometria. Segundo Fuys et al. (1988, p. 13), os alunos são solicitados a expressar os procedimentos, técnicas e terminologias por palavras.

Adicionalmente, Gutiérrez & Jaime (1991) referem que esta fase é fundamentalmente de diálogo entre estudantes com intervenção do professor quando necessário. Afirmam que esta fase tem dois objetivos: (i) conseguir que os alunos aprendam a expressarem-se de forma precisa dentro do seu nível de raciocínio e de acordo com as experiências adquiridas; (ii) fazer com que os alunos reflitam sobre o trabalho desenvolvido, suas dificuldades, soluções encontradas e métodos utilizados. Segundo os mesmos autores, o diálogo entre alunos obriga a organizar as ideias e as expressar com rigor, o que leva ao enriquecimento dos conhecimentos de cada aluno. Este é o momento em que os alunos e o professor trocam ideias de forma a chegar a um consenso. O professor direciona o diálogo de forma a corrigir e apresentar a linguagem específica. Para Gutiérrez & Jaime (1991), esta fase deve ser compreendida como uma dinâmica contínua e realizada no fim de qualquer atividade em qualquer fase. Esta deve estar interligada com as outras quatro fazes.

Na fase de **orientação livre,** Fuys et al. (1988) referem que o aluno aprende ao fazer atividades mais complexas e a encontrar o caminho mais adequado. Segundo Domingos (2010) e Gutiérrez & Jaime (1991), o professor deve criar tarefas de modo a que os alunos apliquem os novos conhecimentos estudados, para que aprofundem os seus conhecimentos. Estas atividades devem ser mais complexas que as da fase de orientação guiada. Segundo os mesmos autores, o objetivo da fase de orientação livre é aprofundar os conhecimentos através da experiência e em relacionar os conhecimentos, a fim de descobrir propriedades ainda não estudadas devido à sua complexidade. Adicionalmente, Domingos (2010) refere que nesta fase o professor deve intervir o mínimo possível deixando os alunos trabalhar de forma autónoma para se apropriarem dos conceitos. Segundo Gutiérrez & Jaime (1991), os alunos só conseguem aprofundar os seus conhecimentos através de tarefas que podem ser resolvidas de diferentes formas ou que tenham diferentes soluções. Desta forma, Van Hiele (1999b), afirma que o professor deve apresentar tarefas que podem ser concluídas de diferentes maneiras, permitindo que os estudantes aprofundem os seus conhecimentos, como por exemplo através da exploração e construção de diferentes formas geométricas com várias peças ou com jogos de pistas.

Durante a fase de **integração**, segundo Fuys et al. (1988), o aluno sintetiza o que estudou, reflete sobre as suas ações e alcança uma visão global da rede de relações formada recentemente. Vários autores afirmam que nesta fase, os alunos devem adquirir uma visão geral dos conceitos, conteúdos e métodos que têm a sua disposição. Devem relacionar os novos conhecimentos com outros que já estudaram anteriormente, a fim de integrarem esses novos conhecimentos na rede de saberes já existente. Desta forma, o professor deve proporcionar compreensões globais através da acumulação, comparação e combinação de factos já conhecidos pelos alunos, sem introduzir conceitos nem propriedades novas (Gutiérrez, 2011; Gutiérrez &

Jaime, 1991). Adicionalmente, Van Hiele (1999b), refere que nesta fase deve ser dada a oportunidade aos estudantes de reunirem o que aprenderam e criarem as suas próprias atividades.

Segundo Van Hiele (1999b), ao longo destas cinco fases de aprendizagem o professor tem diferentes papeis: (i) planear tarefas; (ii) dirigir a atenção dos alunos; (iii) introduzir terminologias; (iv) envolver os alunos nas discussões utilizando o vocabulário correto e (v) encorajar os alunos a explicarem e abordarem diferentes formas de resolução de problemas. O professor deve circular pelas cinco fases utilizando diversos materiais, como por exemplo o quebra-cabeças de mosaico que permite o desenvolvimento do pensamento visual e descritivo. Para Van Hiele, só é possível saber que houve compreensão por parte do aluno quando este é colocado perante uma nova situação e consegue resolver o novo problema. Segundo o mesmo autor, os alunos, cujo pensamento geométrico é nutrido cuidadosamente, serão capazes de estudar com sucesso a Matemática Euclidiana. "*Children whose geometric thinking you nurture carefully will be better able to successfully study the kind of mathematics that Euclid created*" (Van Hiele, 1999a, p.316).

1.3. As isometrias no plano segundo diversas abordagens

Segundo o Programa de Matemática a identificação de eixos de simetria em figuras planas deve ocorrer durante o 2.º e 3.º anos do EB. Quanto à aprendizagem das simetrias deve ser incluída durante a abordagem de figuras bidimensionais no decorrer do 3.º e 4.º anos (Bivar, Grosso, Oliveira, & Timóteo, 2012). Este é fundamental no ensino da geometria, visto que esta está presente em tudo o que nos rodeia como na arte (Veloso, Albuquerque, Rocha, Santos, & Serrazina, 2006). Importa referir que o estudo de figuras bi e tridimensionais acompanha os quatro anos do 1.º ciclo do EB (DGE, 2018a, 2018b, 2018c, 2018d). Quanto ao ensino das isometrias (rotação e reflexão), este surge no Programa de Matemática e nas AE do 6.º ano e nas AE do 5.º ano (DGE, 2018e, 2018f). Desta forma é visível a transversalidade do tema durante os primeiros anos do ensino.

O conceito de simetria vem do grego συμμετρικός (symmetrikós) e significa "em harmonia com". Este conceito, para os antigos gregos qualificava objetos comensuráveis, que tornavam o todo harmonioso, bem equilibrado e transmitia a sensação de beleza (C. Costa, Feliciano, & Palmeirim, 2020). Para Vitrúvio, arquiteto romano que viveu no séc. I a.c., simetria é a relação de cada uma das partes com o todo, assim como o corpo humano (Philibert, 2015). Adicionalmente, na opinião de Montesquieu (1757, cit. por Philibert, 2015), a simetria agrada à alma pois alivia e divide o trabalho pela metade. Segundo o mesmo autor, a simetria é um objeto ou um ser dividido em duas partes iguais por um eixo ou um plano, como se cada parte visse o seu reflexo num espelho. Recentemente, a simetria de uma figura é considerada como todo o conjunto de isometrias que transformam essa figura nela própria (Palhares, 2004). Esta “ (…) é a propriedade pela qual um ente exibe partes correspondentes ou congruentes quando submetido a uma determinada operação, mantendo a sua forma sem variação” (Neves & Baptista, 2010, p. 1).

As isometrias são transformações geométricas que “preservam a distância entre pontos, ou seja, se f é uma isometria, P e Q são dois pontos quaisquer, a distância entre esses dois pontos é a mesma que entre os seus transformados, f(P) e f(Q)” (Palhares, 2004, p.337). Existem quatro tipo de isometrias no plano: a translação, a rotação, a reflexão e a reflexão deslizante.

A translação, segundo Palhares (2004, pp. 337-341), é uma deslocação retilínea associada a um vetor. Assim quando é realizada uma translação de uma figura, cada ponto dessa figura é deslocado segundo uma direção, um sentido e um comprimento de um dado vetor. Palhares (2004) descreve três propriedades da translação: (i) existência de elemento nulo; (ii) existência de inverso e (iii) propriedade de fecho. A primeira propriedade diz respeito à associação da translação a um vetor nulo, este transforma todos os pontos em sim mesmo (transformação identidade). A segunda propriedade refere que quando a composição da translação está associada a um vetor qualquer $\vec{u}$ com a translação associada ao vetor $\overrightarrow{-u}$ o resultado é a identidade. Desta forma os pontos não se movem ou deslocam-se no sentido do primeiro vetor e retornam à posição original de acordo com o segundo vetor, isto mostra a existência do inverso na translação. A terceira propriedade refere que a constituição de duas translações compõe uma nova translação. Por exemplo considerando um ponto A e uma translação de vetor $\vec{u}$ e outra de vetor $\vec{v}$. Ao aplicar a translação associada ao vetor $\vec{u}$, o ponto A é transformado no ponto A’. Ao aplicar a translação associada ao vetor $\vec{v}$ o ponto A’ é transformado no ponto A’’. A soma destes dois vetores $\vec{u} + \vec{v}$ transforma o ponto A no ponto A’’.

A rotação é uma transformação na qual uma figura roda em torno de um ponto de acordo com um ângulo no sentido horário ou anti-horário. Esta pode ser observada na natureza por exemplo no girassol (Bauer, 2015; Salles, Roos, Lucion, & Züge, 2012). De acordo com Palhares (2004, p. 342), a rotação é uma isometria que se define por rodar uma figura em torno de um centro de acordo com uma amplitude e direção de forma que a figura fique invariável**.** Desta forma, para obter uma rotação é preciso fixar um ponto em torno do qual a imagem vai rodar. É necessário também determinar a amplitude do ângulo e o seu sentido, sentido direto ou retrógrado. Sentido direto é o sentido anti-horário que usa amplitudes positivas e o sentido retrógrado é o sentido horário e usa as amplitudes negativas. Ao realizar uma rotação de amplitude 0°, 360° ou -360° obtém-se a transformação identidade.

A reflexão, segundo Bauer (2015), acontece quando uma figura é refletida em relação a uma reta, a esta reta chama-se eixo de simetria. A figura refletida é a simétrica da figura original e os pontos correspondentes das duas figuras têm a mesma distância em relação ao eixo. Segundo Palhares (2004, pp. 345-346) considerando uma reta r e um ponto Q paralelo à reta, reflexão é a isometria que transforma o ponto Q no ponto Q', a reta r é o eixo de reflexão e a mediatriz do segmento de reta [QQ'] (Figura 1). Importa referir que qualquer reflexão possuiu uma reflexão inversa, a identidade. Ou seja, se Q' é a reflexão de Q com eixo de reflexão em r, então Q é também reflexão de Q' com eixo em r.

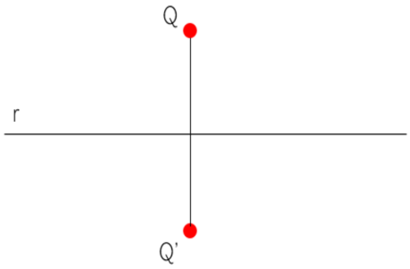


Figura 1 – Isometria de reflexão

Reflexão deslizante, de acordo com Palhares (2004, p. 347), corresponde a uma figura refletida num espelho e que posteriormente é deslocada na direção desse mesmo espelho. Esta isometria é obtida através da reflexão sobre uma reta r seguida de uma translação de ventor $\vec{u}$ com a mesma direção da reta r. Se o vetor for nulo deixa de ser considerada uma reflexão deslizante, mas apenas uma reflexão. Um exemplo de reflexão deslizante são as pegadas humanas caminhando em linha reta.

A reflexão é a simetria mais conhecida pois é observável em várias situações, como no reflexo de uma figura no espelho ou um reflexo na água. Esta é uma lei presente no mundo animal, vegetal e mineral (C. Costa et al., 2020; Salles et al., 2012). Segundo vários autores, enquanto os alunos ainda não tiverem estabelecido a imagem mental de simetria é importante propor atividades que promovam o desenvolvimento de conceitos geométricos de forma a dar-lhes sentido. Desta forma, as atividades devem desenvolver a habilidade de manusear objetos e utilizar diferentes técnicas. Numa fase inicial torna-se indispensável, para a compreensão da simetria de reflexão, a utilização de diferentes materiais como: o papel vegetal, os espelhos e técnica de dobragem e colagem . Os espelhos são um material importante pois criam fascínio nos alunos e possibilitam a visualização e uma imagem inteira sem a ter de completar. Adicionalmente, a exploração de padrões que se repetem permite que o conceito de simetria surja naturalmente (Chaachoua, 2007; C. Costa et al., 2020; Salles et al., 2012; Veloso, Bastos, & Figueirinhas, 2019).

Padrões e frisos

São vários os autores que definem o conceito de padrão. Barbosa (2009, p. 47) refere que "um padrão é todo o arranjo de números ou formas onde são detectadas regularidades passíveis de serem continuadas." Seguindo o mesmo raciocínio, Borralho et al. (2007, p. 1), declaram que o termo padrão "é usado quando nos referimos a uma disposição ou arranjo de números, formas, cores ou sons onde se detectam regularidades". Porém, o termo padrão é muitas vezes usado de forma vaga e pode surgir associado a outros conceitos como regularidade, sequencia, modelo e paradigma (Pimentel & Vale, 2012). Outros autores defendem que os termos padrão e regularidade são complementares. O primeiro identifica a unidade que se repete de acordo com uma transformação, o segundo define-se como o que é comum a vários objetos (Ponte 2009, cit. por Cardoso, 2010). O termo padrão no contexto geométrico, refere-se a um motivo que se repete e pode estar associado a transformações geométricas como as rotações, translações, reflexões e homotetias (Veloso 1998, cit. por Pimentel & Vale, 2012).

Os padrões são importantes no ensino da Matemática pois permitem a exploração, a investigação, a conjetura e a prova. Estes possibilitam ainda a descoberta de relações e permitem que os alunos façam generalizações (Cardoso, 2010).

Vale & Pimentel (2009, cit. por Mamede & Silva, 2015) identificam dois tipos de padrões, os de repetição e os de crescimento. Nos padrões de crescimento cada elemento muda em relação ao anterior de uma forma previsível. Quanto aos padrões de repetição, estes consistem na repetição de um motivo de uma forma cíclica e indefinida. Os padrões de crescimento e de repetição podem ainda ser de natureza numérica ou figurativa/visual. Os padrões figurativos destacam-se no ensino inicial pelo facto de permitirem o pensamento visual, o que conduz ao estabelecimento de relações e de generalizações através do pensamento indutivo (Pimentel & Vale, 2012; Vale, 2012). Os mesmos autores destacam três vantagens do uso de padrões, estes: (i) facilitam a exploração inicial da tarefa, (ii) permitem o aprofundamento de conceitos e conexões entre vários temas da Matemática e (iii) possibilitam a compreensão e proporciona a generalização e explicação (Pimentel & Vale 2013, cit. por Fonseca & Leivas, 2019).

Segundo Vale (2012) ver um padrão é o primeiro passo para a sua exploração. Neste contexto ver não é apenas no sentido de visão, visto que a visualização está relacionada com os raciocínios que são necessários para a resolução de problemas. Assim, os padrões de crescimento e de repetição figurativos são uma boa forma para explorar a capacidade de visualização nos primeiros anos do ensino básico (Fonseca & Leivas, 2019; Vale, 2012).

De entre os padrões de repetição destaca-se o friso. Este é caracterizado por ser cíclico e ter uma largura estreita e constante (Fonseca & Leivas, 2019). Um friso é uma figura geométrica no plano caracterizado por admitir como simetrias um grupo de isometrias que fixam uma reta. As translações que fazem parte do conjunto de isometrias formam um subconjunto periódico e infinito e estão associadas a um vetor que segue uma mesma direção (Carlos & Breda, 2017; Gordillo et al., 2018). O friso é caracterizado pelos seguintes grupos de isometrias no plano: (i) translação, (ii) translação e reflexão deslizante, (iii) translação e reflexão horizontal, (iv) translação e reflexão vertical, (v) translação, reflexão horizonta e reflexão vertical, (vi) translação e rotação e (vii) translação, reflexão deslizante e rotação (Fonseca & Leivas, 2019). Segundo Palhares (2004, pp. 341-342) ao transformar uma figura através da isometria de translação pela aplicação de um vetor $\vec{u}$ ou $\overrightarrow{-u}$ e determinar que não existe uma primeira nem uma última figura, cria-se uma sequência de figuras que se mantém invariáveis perante a aplicação de uma translação ou da sua inversa. Desta forma, o friso é uma figura que se mantém inalterável por efeito de uma translação, este não tem início nem fim.

Alguns autores realizaram investigações relacionadas com a descoberta de padrões e exploração de frisos e suas simetrias em tarefas de sala de aulas. Cardoso (2010) realizou um estudo em que acompanhou professores na sua atividade profissional durante dois anos. Este estudo foi realizado em contexto de um programa de formação numa Escola Superior de Educação. A investigação evidenciou a importância da exploração de padrões no desenvolvimento do pensamento algébrico. Desta forma é visível que os padrões visuais não são apenas um conceito a explorar em geometria, mas uma temática transversal a vários temas da Matemática. Também Amaral & Cabrita (2016) realizaram uma investigação relativa à mesta temática, no entanto foi realizada numa turma mista com 14 alunos do 8.ºano que decorreu ao longo de dez sessões de 90 minutos. Para a realização desta investigação foi criada uma sequência didática que teve como base a interdisciplinaridade entre a Matemática e a educação visual. Em educação visual os alunos construíram frisos e rosáceas com material de desenho, estes foram analisados na aula de Matemática. Em Matemática exploraram as isometrias com recurso ao *GeoGebra*, analisaram vários tipos de frisos e rosáceas cíclicas e dietrais, exploraram frisos e rosáceas e identificaram outras formas de construir frisos e rosáceas utilizando o *GeoGebra*. Durante este estudo foi realizado um questionário inicial e dois testes, um inicial e um final. Com o teste final os autores concluíram que os alunos compreenderam as propriedades das isometrias e que a interdisciplinaridade foi muito apreciada pelos alunos contribuindo para uma visão favorável em relação à geometria e à educação visual. Os autores afirmam ainda que os alunos se mostraram muito interessados e empenhados na resolução das tarefas propostas. Com este estudo é visível a importância da exploração de frisos e rosáceas na aprendizagem das isometrias, assim como da utilização de materiais manipuláveis, da inserção da tecnologia na sala de aula e da interdisciplinaridade.

1.4. Teoria dos registros de representação semiótica e a aprendizagem da Matemática

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, aborda a distinção entre objeto matemático e a sua representação, como estratégia para a aprendizagem de Matemática. Segundo o autor a distinção entre estes dois componentes é essencial para o funcionamento cognitivo do sujeito perante uma situação de ensino. Para o estudo deste funcionamento Duval (2012b) leva em consideração a importância da coordenação dos registros de representação na Matemática.

As representações podem ser mentais ou semióticas. As mentais "… recobrem o conjunto de imagens e, mais globalmente, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado."(Duval, 2012b, p.269). As semióticas "… são produções construídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento" (Duval, 2012b, p.269). As representações semióticas não são apenas uma forma de exteriorização de representações mentais, elas são essenciais à atividade cognitiva do pensamento. Desempenham um papel fundamental para o desenvolvimento das representações mentais, para a realização de diferentes funções cognitivas e para a produções de conhecimento.

> Não é possível, portanto, fingir como se as representações semióticas fossem simplesmente subordinadas às representações mentais, pois o desenvolvimento da segunda depende de uma interiorização da primeira e somente as representações semióticas permitem preencher algumas funções cognitivas essenciais como a de tratamento. (Duval, 2012b, p.270)

Para o autor, a mobilização de vários registros semióticos de representação (figuras, gráficos, linguagem natural, …) é imprescindível para o funcionamento cognitivo do pensamento humano. Na aprendizagem da Matemática, é necessário utilizar diversos registros de representações semiótica para ser possível escolher o registo mais apropriado perante cada situação. A coordenação de vários registros é fundamental para a apreensão conceitual de objetos. Porém, é necessário não confundir o objeto com as suas representações, e é fundamental reconhecer o objeto nas suas diversas representações.

Duval, (2012b) explica o paradoxo cognitivo do pensamento matemático e as dificuldades de aprendizagem da Matemática através de duas operações cognitivas (a *semiose* e a *noesis*) relacionadas com o objeto matemático e com a sua representação. Segundo este autor a "semiose" está associada à apreensão e à produção de uma representação semiótica e a *noesis* à apreensão conceitual do objeto. Estas são inseparáveis e mobilizam diferentes atividades cognitivas que devem ser interligadas.

Segundo o mesmo autor, existem três atividades cognitivas fundamentais ligadas à semiose: a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão. É na união destas três atividades cognitivas que se torna possível a construção do conhecimento matemático, ou seja, a *noesis* em Matemática.

A **formação de uma representação identificável** como uma representação de um registro dado, trata-se, por exemplo da elaboração de um esquema ou o desenho de uma figura geométrica (Duval, 2012b). Para realizar estas representações, é necessário observar e selecionar o conteúdo que se vai representar, seguindo regras internas do sistema semiótico de representação que se está a usar. Por exemplo, para a escrita de um texto é necessário seguir regras gramaticais e para o algoritmo da multiplicação é necessário seguir regras posicionais (Dionizio & Bandt, 2012). Segundo Duval, essas regras têm a função de assegurar as condições de identificação e de reconhecimento da representação e a possibilidade de tratamento.

O **tratamento** de uma representação é a transformação da representação que ocorre no interior do mesmo sistema de representação. Duval, (2012b), refere quatro formas de tratamento: a paráfrase e a inferência (tratamento em língua natural); o cálculo (tratamento das expressões simbólicas); a reconfiguração (tratamento para as figuras geométricas) e a anamorfose (tratamento para toda a representação figural);

A **conversão** de uma representação é a transformação de um registro de representação de um sistema semiótico em outro registro que pertence a outro sistema semiótico, conservando a totalidade ou parte do conteúdo. Duval, (2012b) menciona três formas de conversão: a ilustração de um texto, a tradução de uma língua para outra e a descrição de uma figura, esquema ou gráfico. Esta é um procedimento cognitivamente complexo, onde é necessário compreender de forma global as representações de registros utilizados.

Outros autores tratam a mesma temática e afirmam:

> A complexidade da conversão só será compreendida se os sistemas semióticos forem vistos em sua relação entre conhecimento/representação. Mudar de um registro para outro não significa apenas mudar o tratamento de um objeto; significa também explicar suas propriedades ou seus distintos aspectos. (Ferreira & Santos, 2013, p.186)

Segundo Duval, (2012b) o ensino negligencia a conversão em comparação com as outras duas atividades cognitivas. Geralmente, considera-se que a conversão acontece por si mesma, desde que o aluno seja capaz de formar representações em diversos registros, e que esta não é essencial para compreender os conteúdos representados. Porém, para autor, é na conversão que as mudanças de registro de representação são mais eficazes para a aquisição de conceitos. E é neste processo de conversão que surgem a maioria das dificuldades dos alunos na Matemática. “Estes não reconhecem o mesmo objeto nas representações que são dadas em sistemas semióticos diferentes (…) (Duval, 2012b, p.283). Por exemplo, os alunos conseguem realizar tratamentos em diferentes registros de representação, porem não são capazes de realizar a conversão de um registro para outro. Demostram dificuldades em converter uma expressão decimal de um número em sua expressão fracionária ou, converter uma expressão algébrica na sua representação gráfica e vice-versa (Figura 2).

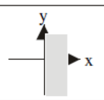
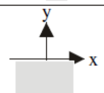
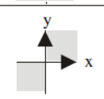
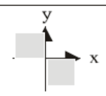
I	II	III
1......o conjunto de pontos que tem uma abscissa positiva	$x > 0$	
2......que tem uma ordenada negativa	$y < 0$	
3......cuja abscissa e ordenada tem o mesmo sinal	$xy > 0$	
4	$xy \leq 0$	

Figura 2 - Exemplo de conversão entre a expressão algébrica de uma relação (coluna II) e sua representação cartesiana (Duval, 2012b, p. 274).

Segundo a teoria de Duval, a compreensão absoluta da Matemática envolve a capacidade de mudar de registros de forma rápida e espontânea. Portanto, para que haja compreensão da Matemática é fundamental a coordenação de pelo menos dois registros de representação (Figura

3). A ausência dessa coordenação torna os conhecimentos adquiridos muito pouco úteis em outras situações.

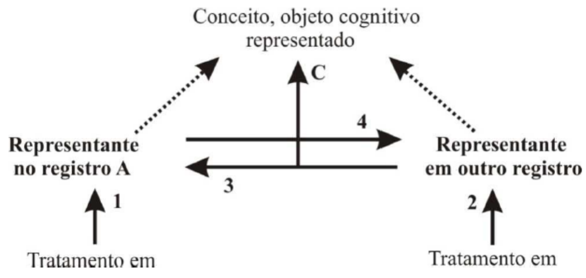


Figura 3 - Hipótese fundamental de aprendizagem (Duval, 2012b, p. 282).

Na figura 3 as setas 1 e 2 representam as transformações internas a um registros, ou seja, o tratamento. As setas 3 e 4 correspondem às transformações externas, mudança de registros de representação, ou seja, às conversões. A seta C representa a coordenação entre dois registros, ou seja, a compreensão absoluta de uma representação. As outras duas setas, aos pontos, refletem a diferença entre representante (conteúdo) e representado (objeto). As dificuldades dos alunos estão relacionadas com as setas 3 e 4 que representam as conversões. Se estes, conseguem facilmente realizar tratamentos em diferentes registros de representações, o mesmo já não se verifica no que toca às conversões de registros de representações semióticos. Duval, (2012b) denomina este fenómeno como: isolamento de registros de representação.

O isolamento de registros de representação encontra-se relacionado com a congruência e não congruência entre representações relativas a dois sistemas semióticos diferentes. Desta forma, Duval, (2012b), indica três critérios necessários para que haja congruência:

> - A possibilidade de uma correspondência "semântica" de elementos significantes: a cada unidade significante simples de uma das representações pode-se associar uma unidade elementar;
> - A univocidade "semântica" terminal: a cada unidade significante elementar da representação de partida, corresponde a uma única unidade significante elementar no registro da representação de chegada;
> - A organização das unidades significantes: as organizações respectivas das unidades significantes de duas representações comparadas, conduzem apreender as unidades em correspondência semântica, segundo a mesma ordem nas duas representações. (Duval, (2012b, p. 283)

Quando existe congruência entre a representação de partida e a de chegada, a conversão é quase intuitiva. Porém, quando não existe congruência, a conversão torna-se mais difícil, e o aluno pode se sentir incapaz e não se lembrar da possibilidade de conversão.

Segundo Ferreira & Santos, (2013, p. 187) a substituição é característica do discurso matemático. Esta "(…) depende da congruência semântica ou não congruência semântica das expressões que serão substituídas…". A cada passo na resolução de um problema a nova expressão substitui a antecedente tendo em conta as regras do registro semiótico utilizado.

Os problemas de Geometria ostentam enorme originalidade em relação aos outros problemas em Matemática. A resolução de tarefas geométricas envolve, por um lado, um raciocínio que implica uma referência axiomática local, e por outro este raciocínio só se desenvolve em registro da língua natural. "Esta forma de raciocínio conduz o desenvolvimento de um tipo de discurso que funciona por substituição (…)", assim, a geometria é "… um intermediário natural e talvez insubstituível entre a língua usual e a língua formalizada" (Duval, 2012a, p. 119). Esta necessita da articulação cognitiva entre dois registros de representação diferentes: a visualização de formas para a representação, e a língua para indicar e deduzir propriedades (Duval, 2005).

Além disso, a resolução de problemas de geometria engloba representações espaciais. Estas originam interpretações independentes, onde a questão da congruência mostra-se pertinente para o estabelecimento da compreensão e apreensão dos conteúdos.

Duval (2012), distingue quatro formas de representação e interpretação fundamentais para analisar as atividades geométricas e as dificuldades dos alunos: (i) apreensão percetiva, (ii) apreensão discursiva, (iii) apreensão operatória e (iv) apreensão sequencial das figuras.

(i) Apreensão percetiva é o reconhecimento visual imediato e automático de formas.

> (…) permite identificar ou reconhecer, imediatamente, uma forma ou um objeto no plano e no espaço. (…) está relacionada com o primeiro olhar e com a interpretação das formas da figura em uma situação geométrica. (Duval 1994, cit. por Pirola, 2012, p. 44)

(ii) Apreensão discursiva é a interpretação dos elementos da figura; relaciona semanticamente as propriedades dos enunciados com a figura, proporcionando a aprendizagem.

> (…) está relacionada com uma denominação, uma legenda ou uma hipótese. (…) essa apreensão "[...] corresponde a uma explicação das propriedades Matemáticas de uma figura, além daquelas indicadas por uma legenda ou pelas hipóteses. Essa explicação é de natureza dedutiva. (Duval 1994, cit. por Pirola, 2012, p. 45)

(iii) **Apreensão operatória** de figuras são as modificações que podem ser realizadas numa figura inicial, podem ser realizadas graficamente ou mentalmente. Duval salienta três modificações: (i) a modificação mereológica, ou seja, a relação da parte e do todo. Em que a figura é dividida em subfiguras e podem ser incluídas em outras figuras; (ii) a modificação ótica em que uma figura é transformada em outra (imagem) podendo ser deformada, aumentada ou diminuída. Esta pode conservar ou alterar a forma inicial; (iii) a modificação posicional em que a figura, preservando o tamanho e a forma, pode ser deslocada e rodada, esta é uma modificação de orientação da figura.

> (…) está relacionada com a capacidade de operar sobre as figuras: manipular, compor, transformar, reconfigurar, comparar objetos geométricos para resolver determinado problema de geometria. (…) centrada nas modificações possíveis de uma figura inicial e nas reorganizações possíveis que estas modificações possibilitam (…). (Duval 1994, cit. por Pirola, 2012, p. 47)

(iv) **Apreensão sequencial das figuras** é solicitada em atividades de construção ou de descrição com o objetivo de reproduzir uma figura.

> Ela trata da ordem de construção de uma figura. Essa ordem não depende apenas de propriedades Matemáticas da figura, mas também das necessidades técnicas das ferramentas utilizadas (régua, compasso e software, por exemplo). (Duval 1994, cit. por Pirola, 2012, p. 47)

Duval, (2012) refere que quando um aluno se encontra perante uma figura qualquer em contexto de uma tarefa Matemática, ele tem duas atitudes contraditórias: a apreensão percetiva de formas, que é imediata e automática, e a interpretação discursiva dos elementos figurais, que é controlada e torna possível a aprendizagem. Geralmente estas duas atitudes encontram-se em conflito. A figura pode apresentar objetos que se destacam e não se encontram referidos no enunciado e objetos que são citados no enunciado, mas não são de fácil perceção. Importa referir que "…quando diferentes traços formam um contorno simples e fechado, eles se destacam como uma figura sobre um fundo"(Duval, 2012, p.121), esta é a lei do fechamento e da continuidade referida pelo autor (Figura 4). Esta lei ajuda a relembrar uma dada figura devido à organização percebida dos traços e impede de ver outras formas.

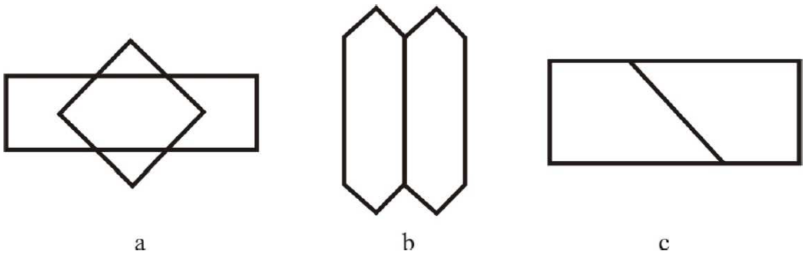
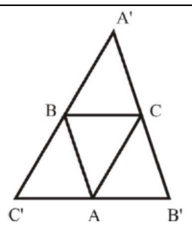
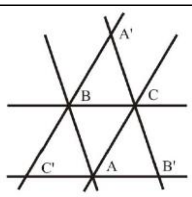
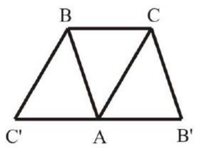


Figura 4 - Exemplos de diferentes organizações preceptivas de figuras (Duval, 2012, p.121).

Segundo Duval, de acordo com as suas pesquisas realizadas com alunos do *troisième* em França (9.º ano de Portugal), os alunos concentram-se na apreensão percetiva e não entendem que uma figura deve ser olhada em função das propriedades e das condições referidas no enunciado. Alguns alunos leem o enunciado e constroem a figura, contudo concentram-se nessa figura e não voltam ao enunciado. Esta é a chamada ausência de atitude de interpretação discursiva da figura. Este autor refere que os enunciados mais compreensíveis para estes alunos são os que são semanticamente congruentes à figura construída **(Tabela 2).**

Tabela 2 - Congruência semântica e não congruência semântica (Duval, 2012a, p. 122).

Figura	Enunciado	Congruência semântica
	A'C' e AC são paralelas; A'B' e AB são paralelas; B'C' e BC são paralelas; Prova que A é meio geométrico de C'B'.	Figura e enunciado semanticamente não congruente
		Figura e enunciado semanticamente congruente.
	ACBC' e AB'CB são paralelogramas. Prova que A é meio geométrico de C'B'.	Figura e enunciado semanticamente congruente.

Contudo esta condição não é suficiente para a resolução de um problema. É necessário ter em atenção à não congruência e congruência entre o tratamento matemático e a apreensão operatória. De facto, uma das dificuldades dos alunos referidas por Duval, está relacionada com as modificações óticas e com a visibilidade de cada aluno.

> (…) Duas figuras congruentes podem parecer uma menor que a outra segundo o sistema de referências escolhido e, inversamente, duas figuras de grandezas diferentes podem apresentar-se como duas figuras congruentes, quando colocadas a uma distância diferente do centro de visão. (Duval, 2012a, p.126)

Segundo Duval (2012a), a apreensão percetiva pode ainda ser subordinada à apreensão discursiva. Como já foi referido, a geometria necessita da articulação entre dois registros de representação diferentes: a visualização e a língua. De facto, uma figura não demostra as suas propriedades apenas a partir dos seus traços e formas, mas sim a partir do que é dito no enunciado. Ao mudar o enunciado, a perceção da mesma figura pode torna a figura diferente. Este fenómeno é denominado por teorização do discurso teórico e a sua compreensão é a base de acesso à demostração.

Capítulo II –Enquadramento metodológico

Este capítulo encontra-se organizado em quatro subcapítulos relativos à metodologia adotada para este estudo. As metodologias são estratégias, tradições ou processos de investigação para a aquisição de conhecimentos. Englobam um conjunto de técnicas, métodos e procedimentos para a realização de uma investigação (Creswell, 2007).

No primeiro subcapítulo são apresentadas as opções metodológicas utilizadas. No segundo subcapítulo são descritas as técnicas e instrumentos de recolha de dados. O terceiro subcapítulo expõe a calendarização da implementação, e por último, mas não menos importante é realizada a caracterização do contexto pedagógico e dos participantes no estudo.

Durante a planificação, organização e implementação do estudo foram utilizados os indicadores de idoneidade didática de processos de ensino. A idoneidade didática compõe um dos cinco grupos do Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e da Instrução em Matemática (EOS), cada um destes grupos permite analisar os processos de ensino e aprendizagem de temas relativos à Matemática (Godino, 2012, p.55).

A idoneidade didática, "(…) constitui uma síntese que visa a identificação tanto de aspetos reveladores de práticas adequadas como de situações que poderão/deverão ser alvo de ajustes em novas implementações (…)" (Nogueira & Neto, 2017, p.144). Assim, durante a PPS foram tidas em conta as dimensões de adequação didática: a <u>adequação epistémica</u> relaciona-se com a adequação dos conteúdos, da linguagem ao público-alvo; a <u>adequação afetiva/emocional</u> encontra-se ligada com a motivação e interesse dos alunos; a <u>adequação cognitiva</u> está associada com a identificação dos conhecimentos prévios e sua reorganização tendo em conta atividades de reforço; a <u>adequação mediacional</u> relaciona-se com os recursos e materiais utilizados para o processo de ensino aprendizagem; a dimensão ecológica encontra-se associada com a adaptação aos documentos orientadores, como as AE, Programa e Metas Curriculares e Planificações da Escola; e a <u>adequação interacional</u> relacionada com a identificação de possíveis duvidas e dificuldades que tenham surgido e perceber se foram ultrapassadas, assim como com a autonomia na aprendizagem e com as iterações professor-aluno e entre alunos (Font, Planas, & Godino, 2010; Nogueira & Neto, 2017).

2.1. Opções metodológicas

Creswell, (2007) refere que existem três abordagens de pesquisa: qualitativa, quantitativa e mista. Segundo o mesmo autor, "a pesquisa qualitativa ocorre em um cenário natural. O pesquisador qualitativo sempre vai ao local (casa, escritório) onde está o participante para conduzir a pesquisa (…)" (p.186). Segundo o mesmo autor, a recolha de dados inclui um leque de materiais como "(…) observações abertas, entrevistas e documentos, (…) sons, e-mails, álbuns de recortes e outras formas emergentes, (…)" (p. 186). Além disso, nesta técnica são usadas diversas estratégias como "(…)narrativas, fenomenologias, etnografias, estudos baseados em teoria ou estudos de teoria embasada na realidade" (p. 35). De um modo geral, "(…) a investigação qualitativa é considerada descritiva (…) os investigadores qualitativos interessam-se sobretudo pelo processo, em detrimento dos resultados ou produtos" (A. P. Costa, Moreira, & Sá, 2021, p.7). O objetivo deste tipo de investigação é "(…) particularizar e compreender os sujeitos e os fenómenos na sua complexidade e singularidade" (A. P. Costa, Moreira, & Sá, 2021, p.47).

Em contraposição, a pesquisa quantitativa é um "(…) instrumento neutro de verificação de uma determinada realidade" (Alves & Azevedo, 2010, p. 51). Segundo o mesmo autor esta"(…) procura controlar o exercício da intuição e da imaginação através da adopção de procedimentos bem delimitados que permitam restringir a ingerência e expressão da subjectividade do investigador (objectividade e neutralidade)" (p. 50). A abordagem quantitativa emprega raciocínios de causa e efeito, redução de variáveis específicas, hipóteses, questões, mensuração, observação e testes de teorias. Além disso, usa estratégias como: experimentos, recolha de dados e instrumentos predefinidos para criar dados estatísticos. O investigador "utiliza um projeto experimental no qual as atitudes são avaliados antes e depois de um tratamento experimental" (Creswell, 2007, p.37).

No que diz respeito à técnica de métodos mistos "(…) os investigadores usam tanto dados quantitativos como qualitativos porque trabalham para oferecer um melhor entendimento de um problema de pesquisa" (Creswell, 2007, p. 29). Estes baseiam os seus argumentos em elementos pragmáticos e pluralistas. A recolha de dados é realizada de forma simultânea ou sequencial e " (…) envolve a obtenção tanto de informações numéricas (por exemplo, em instrumentos) como de informações de texto (por exemplo, em entrevistas), de forma que o banco de dados final represente tanto informações quantitativas como qualitativas (Creswell, 2007, p. 35).

Considerando as três técnicas de investigação descritas, a que mais se adequa a este estudo é a técnica de métodos qualitativos. Como já descrito, o investigador qualitativo vai ao local onde se encontram os participantes no estudo, desta forma, a pesquisa decorreu na sala de aula da turma em questão, onde foram recolhidos os dados de forma direta. A recolha de dado foi realizada através de produções dos alunos, notas de campo e observações realizadas pela investigadora e pela colega da PPS. Esta recolha de dados foi importante para perceber as dificuldades que os alunos tiveram durante as sessões, refletir relativamente ao que a investigadora deve melhorar para o seu futuro profissional e para escolher a direção mais adequada na investigação.

Além disso, este estudo tem algumas características de investigação-ação visto que este envolveu professores numa investigação em sala de aula e a investigadora foi a professora estagiária durante a PPS. Para Pimenta & Franco (2008, p. 31), a investigação-ação tem como características "(…) o caráter participativo, o impulso democrático e o contributo simultâneo para a mudança social e para a ciência social." Esta trata-se de uma "(…) alavanca para as mudanças educativas, para a ressignificação dos processos de ensinar e de aprender e para a emancipação dos sujeitos da prática (…)" (p. 19). É uma forma de investigação proveitosa tanto para o investigador e para a profissão como para a prática educativa. Atualmente, a escola exige que os professores tenham uma capacidade de prever acontecimentos e interpretá-los de forma a encontrar a estratégia mais adequada para os resolver. Além disso, é necessário que os professores sejam conscientes que a sua formação nunca estará acabada. Este processo carece que os professores tenham "(…) uma atitude de investigação na ação e pela ação" (Alarcão, 2001, p. 24). Segundo Fonseca, (2012, p. 21), a investigação-ação tem como objetivo "(…) produzir mudanças nas práticas tento em vista alcançar melhorias de resultados". Ela passa por um conjunto de fases que se desenvolvem de forma progressiva e circular: planificação, ação, observação, reflexão, avaliação e reformulação (Figura 5). Estas " (…) fases podem ser retomadas para servirem de estrutura à planificação, à realização e à validação de um segundo projeto e assim sucessivamente" (Fonseca, 2012, p. 20).

Figura 5 - Espiral de ciclos da Investigação-Ação (Fonseca, 2012, p. 21)

Este estudo, como já referido, é de natureza qualitativa e tem características de investigação-ação. Assim, durante a investigação foi dado enfase à planificação das aulas, onde foi realizado uma ficha diagnóstica para averiguar quais os conhecimentos prévios dos alunos em relação ao tema, com o objetivo de planificar a intervenção de acordo com os seus conhecimentos. Foi dado realce também, à implementação/observação e à reflexão e avaliação realizada após cada aula, relativamente ao que poderia ser melhorado numa próxima implementação. No final do estudo, foi realizado um questionário com o objetivo de recolher as opiniões dos alunos relativamente às aulas, aos desafios e à utilização do *GeoGebra*. Apesar da investigação-ação passar também pela fase de reformulação, neste estudo apenas o primeiro desafio foi implementado uma segunda vez, devido ao tempo disponibilizado.

2.2. Calendarização do estudo

Este estudo teve por base três desafios relacionados com as transformações geométricas no plano. Antes da implementação, foi dado a cada aluno um dossiê com alguns recursos essenciais para as aulas. Neste dossiê, os alunos arquivaram todos os trabalhos relativamente ao conteúdo das isometrias. Inicialmente o dossiê continha cindo representações de figuras geométricas impressas (um quadrado, um retângulo, um triângulo escaleno, um triângulo isóscele e um triângulo equilátero); duas réplicas de azulejos impressos e o 1.º desafio relativamente à reflexão axial. Posteriormente os alunos foram arquivando todos os outros materiais cedidos nas aulas, incluindo os desafios e suas correções (Figura 6).

Figura 6 – Materiais constantes do dossiê Isometrias no Plano

Relativamente aos desafios, o primeiro desafio foi realizado no final da primeira aula relativa à reflexão axial (Anexo 1). Este desafio consistiu em colorir o menor número de quadrados possível de uma figura, para que a figura resultante tivesse pelo menos um eixo de simetria.

O segundo desafio foi proposto aos alunos depois de estes já conheceram as três isometrias no plano descritas nas AE (Reflexão axial, reflexão central e rotação). Este consistiu em identificar as isometrias que transformavam o triângulo A nos triângulos B, C, D e E (Anexo 2).

O terceiro desafio, devido à sua maior complexidade, teve de ser desenvolvido em três aulas, uma de 90 minutos, uma de 45 minutos e, aproximadamente 45 minutos de uma aula de 90 minutos. Na primeira aula durante o primeiro momento, foi apresentado o artista gráfico Escher e as suas obras (Anexo 3). Num segundo momento foi proposto aos alunos o 3.º desafio. Este consistiu na realização de uma composição geométrica livre com recurso ao *GeoGebra* e a material de desenho (papel, transferidor, régua, compasso). Foi ainda solicitado aos alunos que descrevessem como realizaram as suas composições geométricas e as apresentassem à turma. Devido às novas regras de utilização da sala de informática causadas pela pandemia do COVID19 e, como a sala de informática não possui um computador individual para cada aluno, nesta primeira aula a turma foi dividida em dois grupos. O primeiro grupo ficou na sala de Matemática, onde cada aluno construiu a sua composição geométrica com recurso ao material de desenho. O segundo grupo dirigiu-se à sala de informática para utilizar o programa de geometria dinâmica, *GeoGebra*. Os alunos foram trocando de sala consoante finalizavam a sua composição no *GeoGebra* e os computadores foram desinfetados a cada passagem. Na segunda aula, foram realizadas as apresentações orais e a afixação das composições geométricas criadas no *GeoGebra*. Durante a terceira aula, decorreram as apresentações orais e a afixação das composições geométricas concebidas com recurso a material de desenho. Na **Tabela 3** é possível visualizar de forma sintetizada a calendarização, o tempo e o que foi realizado em cada aula.

Tabela 3 - Calendarização dos desafios

1.º Desafio (≈ 15’) - reflexão axial	5 de maio 2021
1.ºDesafio (≈ 15’) - correção	19 de maio 2021
2.º Desafio (≈ 45’) - Descobre as isometrias …	31 maio 2021
2.º Desafio (≈ 15’) – correção	9 de junho 2021
3.º Desafio (90’) - composição geométrica das isometrias estudadas (reflexão axial, reflexão central e rotação, utilizando material de desenho e o *GeoGebra*).	16 de junho 2021
3.º Desafio (45’) – apresentação e afixação das composições geométrica realizadas no *GeoGebra*.	18 de junho 2021
3.º Desafio (≈ 45’) **–** apresentação e afixação das composições geométricas realizadas com material de desenho.	21 de junho 2021
1.º Desafio (≈ 15’) - reflexão axial (Repetição)	23 de junho 2021

Antes da realização do 3.º desafio foram lecionadas duas aulas de Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC) (Anexo 4). Estas aulas tiveram como objetivos: (i) aprender a usar o programa *GeoGebra*; (ii) desenvolver a capacidade de visualização; (iii) desenvolver interesse pela Matemática e valorizar o seu papel no desenvolvimento das outras ciências; (iv) desenvolver confiança nas suas capacidades e conhecimentos matemáticos, e a capacidade de analisar o próprio trabalho e regular a sua aprendizagem; (v) explorar as propriedades das isometrias estudadas. Estas duas aulas decorreram consoante o horário estipulado pela escola para as aulas de TIC. Assim, devido às novas regras de utilização da sala de informática causadas pela pandemia do COVID19, a turma foi dividida em dois grupos, um grupo permaneceu na sala de informática durante 45 minutos, enquanto o outro grupo esteve na aula de Educação para a Cidadania. Ao fim de 45 minutos os grupos trocaram de sala e os computadores foram desinfetados. Na **Tabela 4** é possível visualizar de forma sintetizada a calendarização, o tempo e o que foi realizado em cada aula de TIC.

Tabela 4 - Calendarização das aulas de TIC

1.ª Aula de TIC (45’ + 45’) - *GeoGebra* (Peixinho – reflexão axial e reflexão central).	21 de maio 2021
2.ª Aula de TIC (45’ + 45’) - *GeoGebra* (reflexão central e rotação).	28 de maio 2021

2.3. Técnicas e instrumentos de recolha de dados

Ao longo da investigação foram usadas diversas técnicas e instrumentos de recolha de dados de forma a recolher o maior número de evidencias.

A recolha de dados foi realizada durante toda a PPS. Num primeiro momento foi realizada a observação participante e uma ficha diagnóstica para perceber a que nível se encontravam os alunos em relação as isometrias no plano. Estas técnicas tiveram como objetivo, reunir informações para guiar a realização das planificações de aulas e o rumo da investigação. Num segundo momento, utilizou-se a técnica de recolha de documentos, onde foi criado o *portfólio* do investigador. Neste, foram organizadas as planificações e reflexões de cada sessão, assim como os trabalhos realizados pelos alunos e o registo áudio das apresentações orais do 3.º Desafio. No fim da investigação foi colocado novamente o primeiro desafio e algumas questões de opinião relativamente aos desafios, à utilização do *GeoGebra*, e às aulas da professora estagiária. Este teve como objetivo avaliar o impacto das sessões e recolher as opiniões dos alunos relativamente às aulas de professora estagiária e do seu projeto.

Na **Tabela 5** encontram-se as técnicas e os instrumentos de recolha de dados que foram utilizados.

Tabela 5 - Técnicas e instrumentos de recolha de dados

<table>
<tr><th>Técnicas de recolha de dados</th><th colspan="2">Instrumentos de recolha de dados</th></tr>
<tr><td>Observação participante e não participante</td><td>- Notas de campo
- Registo áudio</td><td rowspan="2">Diário do investigador</td></tr>
<tr><td>Recolha documental
(Portfólio do investigador)</td><td>- Planificação das sessões
- Reflexões
- Grelhas de avaliação
- Transcrição de registo áudio
- Análise de conteúdo</td></tr>
</table>

<u>Observação</u>

Segundo Creswell (2007), as observações podem ser participante ou não participantes. O investigador, durante as observações, realiza notas de campo que podem ser não estruturadas ou semiestruturadas recorrendo a algumas questões previamente criadas. Na observação participante o investigador participa nas atividades de recolha de dados e é necessário que tenha capacidade de adaptação a cada situação.

Segundo outros autores:

> A Observação Participante é realizada em contacto directo, frequente e prolongado do investigador, com os actores sociais, nos seus contextos culturais, sendo o próprio investigador instrumento de pesquisa. Requer a necessidade de eliminar deformações subjectivas para que possa haver a compreensão de factos e de interacções entre sujeitos em observação, no seu contexto. (Correia, 2009, p. 31)

A técnica mais utilizada durante a investigação foi a observação participante, contudo, durante algumas seções da minha colega da PPS foi utilizada a observação não participante, o que proporcionou uma perceção diferente. Enquanto a observação participante proporciona que o investigador se misture no grupo a ser observado tendo que realizar a tomada de notas no final da sessão. A participação não participante permite o registo frequente de notas durante a sessão.

Durante a observação foram realizadas notas de campo, registo de áudio e o diário do investigador, este deu origem ao *portfólio* do investigador. As notas de campo, inicialmente foram de índole não estruturada e posteriormente semiestruturada, recorrendo a algumas questões que a investigadora pretendia ver respondidas. Estas foram realizadas principalmente depois de cada sessão de forma individual e em conjunto com a colega de díade. A troca de reflexões entre a investigadora e a colega, que se encontrava numa posição de observação não participante, foi uma mais-valia para a investigação. As notas de campo consistiram em descrições de pontes fortes e fracos de cada sessão e de aspetos a refletir e a mudar numa seguinte intervenção. Estas foram um importante auxiliar para uma análise posterior mais detalhada e criação do *portfólio* do investigador. O *portfólio* do investigador foi criado a partir das notas de campo e de diálogos com a colega da PPS, com a professora cooperante e com a professore orientadora. Este, engloba as planificações das sessões, as reflexões de cada intervenção, a transcrição do registo áudio e a análise de conteúdo.

Recolha documental (*Portfólio* do investigador)

A recolha documental é uma das técnicas de recolha de dados da investigação qualitativa e compreende, por exemplo a recolha de artigos de jornal, relatórios oficiais, registros diários e trabalhos realizados pelos público-alvo (Creswell, 2007).

Esta técnica permitiu reunir todas as planificações, reflexões, trabalhos dos alunos, registo áudio, assim como pesquisas, leituras e análises de documentos que constituíram o diário do investigador. Importa salientar que o registro de áudio foi realizado apenas nas últimas sessões de apresentação das composições geométricas, para que a investigadora pudesse analisar de forma mais detalhada as descrições realizadas por cada aluno. Todos estes documentos passaram por uma análise cuidada com o objetivo de perceber o impacto das sessões implementadas no desenvolvimento das aprendizagens dos alunos e no progresso da professora-estagiária.

2.4. Caracterização do contexto pedagógico e participantes no estudo

Neste subcapítulo são apresentados o Macrocontexto, que diz respeito ao meio envolvente à escola. O Mesocontexto onde é abordado o projeto educativo, a oferta educativa que a escola dispões e o plano de contingência elaborado para esta fase pandémica provocada pela COVID-19. Posteriormente é exibido o Microcontexto, que caracteriza a turma participante no estudo. Para auxiliar nesta caracterização da turma foram utilizados os dados fornecidos pela Professora Cooperante com a devida autorização dos Encarregados de Educação.

Caracterização do meio envolvente à Escola onde foi realizado o estudo (Macrocontexto)

A escola onde foi realizado o estudo pertencente ao distrito de Aveiro. Esta é uma cidade situada na Região Centro, está dividida em 19 município: Águeda, Albergaria-a-Velha, Anadia, Arouca, Aveiro, Castelo de Paiva, Espinho, Estarreja, Ílhavo, Mealhada, Murtosa, Oliveira de Azeméis, Oliveira do Bairro, Ovar, Santa Maria da Feira, São João da Madeira, Sever do Vouga, Vagos e Vale de Cambra.

A cidade de Aveiro é rica em turismo e, tem grandes focos que podem ser alvo de visita por parte dos alunos, ou seja que são de grande interesse cultural e educacional. Destes focos destacamos a arte pública como os painéis azulejares, a Biblioteca Municipal, os Museus de Aveiro como o Museu Arte Nova, o Parque da Cidade entre outros igualmente relevantes.

A nível de estabelecimentos de ensino, este município conta com cinco estabelecimentos de Ensino Superior (Universidade de Aveiro, Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Aveiro, Escola Superior de Saúde da Universidade de Aveiro, Instituto Superior de Ciências da Informação e da Administração e o Instituto de Ciências Religiosas de Aveiro), dois estabelecimentos de Ensino Particular (Colégio D. José I e Colégio Português), sete agrupamentos de escolas (Agrupamento de escolas de Oliveirinha, Agrupamento de Escolas de Aveiro, Agrupamento de Escolas de Eixo, Agrupamento de escolas de Esgueira, Agrupamento de escolas José Estevão, Agrupamento de escolas Dr. Mário Sacramento, e Agrupamento de escolas Rio

Novo do Príncipe, Cacia) e três estabelecimentos de Ensino Profissional e Artístico (Escola Profissional de Aveiro, Escola de Formação Profissional de Turismo de Aveiro e Escola Artística do Conservatório de Música Calouste Gulbenkian de Aveiro).

O município de Aveiro ainda oferece um Serviço de Psicologia e Aconselhamento a toda a comunidade escolar pertencente a este município e integra o PAEMA (Programa de ação educativo – Município de Aveiro). Este tem como principal objetivo definir responsabilidades, objetivos e ações a realizar pela Câmara de Aveiro com foco na vida da Comunidade Educativa.

Caracterização da Escola (Mesocontexto)

A escola em causa acompanha os seus alunos desde o Pré-Escolar até ao final do 3.º Ciclo.

Relativamente aos recursos humanos os alunos que frequentam esta instituição são de um estatuto social médio/alto em termos económicos e, são provenientes, do município de Aveiro e de municípios vizinhos. O corpo docente é composto por 26 colaboradores que são corresponsáveis na tarefa educativa global mediante o Projeto Educativo, a colaboração nas estruturas de orientação educativa e a gestão das competências a adquirir pelos alunos. Os docentes têm a missão de desenvolver uma prática educativa, tendo em conta os princípios da instituição, contribuindo para a realização do aluno enquanto pessoa. Relativamente ao pessoal não docente, este é composto por 12 colaboradores distribuídos da seguinte forma: quatro para a creche e Pré-escolar, quatro para o 1.º, 2.º e 3.º Ciclos, dois que tem como função principal a higienização, um motorista e uma senhora que se encontra na secretaria e também presta serviço de auxiliar. Estes colaboradores têm um papel importante e exemplar junto dos alunos incentivando o respeito pelas regras a fim de criar um bom ambiente escolar. Estes têm também como função apoiar os docentes no exercício da sua atividade.

Os pais/encarregados de educação têm um papel fundamental na educação dos filhos e a obrigação de criarem um ambiente familiar favorável à educação pessoal e social dos alunos. Estes cooperam de forma dinâmica com a instituição através da Associação de Pais representada no Conselho Pedagógico.

Quanto às instalações, a escola é constituída por cinco blocos. O edifício relativo à valência do Pré-escolar é constituído por três salas, um espaço para a psicomotricidade, um bloco de W.C., parque exterior, refeitório, uma sala de informática e uma biblioteca.

Relativamente ao espaço destinado ao EB este é dividido em diferentes edifícios e é constituído por quinze salas devidamente equipadas, um laboratório, cacifos individuais para todos os alunos, três blocos de casas de banho, uma sala de informática com acesso à *internet*, uma biblioteca, um gabinete da direção, um gabinete para atendimento e reuniões, dois gabinetes para os coordenadores, uma sala de estar, uma sala de professores com computadores e acesso à *Internet*, refeitório, um campo de futebol (descoberto), um pavilhão e um salão multifunções com palco. Quanto aos espaços exteriores a escola oferece um campo de jogos, um pavilhão onde se podem realizar diversas atividades, um parque aventura com materiais lúdicos diversificados, parque de jogos para o Pré-Escolar em zona verde.

A escola tem como objetivo acolher e ajudar os alunos a desenvolverem o sentido de responsabilidade, autonomia, sensibilidade e o espírito de vida em comunidade, tendo em conta os parâmetros pedagógicos. Defende os princípios éticos e morais inerentes ao meio social e uma educação para um comportamento livre e responsável pela ação universal tendo por base os valores tradicionais portugueses. Esta instituição tem como missão ajudar os alunos a valorizar a interação, a negar a discriminação, a respeitar as diferenças, a defender a democracia, a respeitar e preservar a Natureza e a ter espírito de iniciativa

No que respeita ao plano Educativo a instituição coloca em destaque a aprendizagem da língua portuguesa e da Matemática. Destaca também a importância do inglês, das ciências humanas e sociais, das ciências físicas e naturais, das tecnologias de informação e comunicação, das artes, das atividades físicas e desportivas e da formação para a cidadania e desenvolvimento.

Relativamente ao plano de contingência, este surgiu devido às recomendações da Direção-Geral de Saúde para proteger a comunidade educativa devido à infeção pelo novo Coronavírus SARS-CoV-2 (COVID-19). O plano encontra-se dividido em várias componentes: coordenação do plano e das ações, prevenção da infeção, plano de higienização, reação em caso de suspeita de infeção e isolamento, ação em caso de isolamento preventivo de algum membro da comunidade educativa e ação em caso de ausência de um número significativo de colaboradores docentes e/ou não docentes.

A coordenação do plano de contingência é da responsabilidade do Diretor sendo substituído, na sua ausência pelo Coordenador do Pré-escolar. Qualquer ação relacionada com o plano deverá ser comunicada ao coordenador que fará a articulação à Unidade de Saúde Pública Direção de Saúde, Direção-Geral dos Estabelecimentos Escolares e com os encarregados de educação. O coordenador é apoiado pelos docentes titulares/diretores de turma. Os coordenadores de ciclo são responsáveis por garantir que as pessoas da sua equipa (pessoal docente, não docente e alunos) cumpram as medidas definidas no plano, tais como: utilizar máscara no acesso e dentro do recinto escolar; higienizar as mãos à entrada e à saída do recinto escolar, com solução antisséptica de base alcoólica; não partilhar objetos nem comida; não entrar no espaço escolar se tiver febre, tosse ou dificuldade respiratória; apenas entrar no espaço escolar no horário definido para as suas atividades letivas e sair logo após o término destas; manter o maior distanciamento físico possível entre as pessoas; lavar frequentemente as mãos com água e sabão durante a permanência no espaço escolar; quando dentro do estabelecimento de ensino, utilizar os circuitos de entrada e saída da sala de aula e de deslocação que foram definidos para cada grupo de pessoas e que são explicados a cada um no primeiro dia de aulas presenciais; dentro da sala de aula, respeitar o maior distanciamento físico possível entre as pessoas (Loureiro, 2020).

Caracterização da turma onde o estudo foi realizado (Microcontexto)

O estudo decorreu numa turma do 6.º ano do 2.º CEB. A turma era constituída por 25 alunos, sendo 12 do género masculino e 13 do género feminino. Nesta turma, cinco alunos faziam parte do quadro de mérito da escola e dois alunos usufruíam de aplicação de medidas universais. Estes dois alunos eram muito calados e aparentavam timidez.

A nível das aprendizagens os alunos revelaram facilidade, contudo existia uma maior facilidade de aprendizagem na disciplina de Ciências Naturais em relação à Matemática. Dos 25 alunos, no final do segundo período, na disciplina de Matemática, cinco alunos terminaram com nível 3, nove com nível 4 e onze alunos com o nível máximo 5. Já na disciplina de Ciências Naturais os resultados foram melhores existindo apenas três alunos com a classificação 3, nove obtiveram 4 e catorze alunos alcançaram o 5. Em geral, a turma, era muito participativa e bem-comportada.

Relativamente à disposição da sala de aula, os alunos encontravam-se em mesas individuais dispostas em 5 filas. As mesas estavam identificadas com uma etiqueta no canto superior direito, fazendo com que os alunos tivessem lugares fixos a uma distância de segurança de cerca de um metro.

A professora definia o trabalho a realizar em cada aula em ambas as disciplinas, contudo era muito sensível às propostas dos alunos e ponderava a realização de algumas. Os alunos trabalhavam de forma individual, partilhando as suas respostas oralmente e, de vez em quando, no quadro, mas sempre com o uso do seu marcador individual. Quando era necessário emprestar algum material este era desinfetado antes e depois de ser usado. É de salientar que em cada sala existia toalhetes e desinfetante, para desinfetar o material e a mesa do professor quando este trocava de sala.

Relativamente às salas de aula, cada turma tinha a sua sala que se encontrava identificada com uma etiqueta colada na porta. As salas tinham muita luz natural, porém devido ao posicionamento das janelas estas tornavam-se muito quentes, sendo necessário fechar ou semifechar os estores e recorrer à luz artificial (Figura 7). Devido ao necessário arejamento da sala, as janelas e as portas encontrava-se sempre entreabertas.

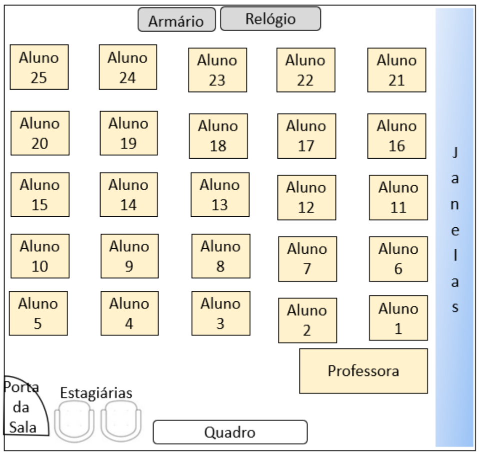


Figura 7 - Sala do 6.º ano

A nível de carga horária, na disciplina de Matemática, a turma contava com dois blocos semanais de 90 minutos e um de 45 minutos. Além disso, ainda usufruía de um apoio semanal, de 45 minutos, a esta disciplina. Já na área das Ciências Naturais, os alunos tinham duas aulas semanais, uma de 90 minutos e a outra de 45 minutos. Quanto aos intervalos, estes eram desfasados devidos às medidas de contingência, para sair da sala eram os docentes que davam a ordem de saída e para reentrar eram as auxiliares que chamavam cada turma. A escola não possuía campainha de entrada e saída devido à existência de várias valências e ao desfasamento dos intervalos. O toque da campainha iria acordar as crianças da creche e do pré-escolar quando estes se encontrassem a dormir.

Capítulo III – Análise e discussão de resultados

Neste capítulo são apresentados os desafios implementados e as suas soluções, bem como as soluções dos alunos e sua análise.

3.1. Apresentação dos desafios e soluções previstas

Neste subcapítulo serão apresentados os três desafios propostos aos alunos durante a investigação.

Importa referir que o termo “desafio” foi usado em vez de “tarefa” ou “atividade”, com o objetivo de criar nos alunos uma maior motivação para a sua resolução. A motivação é fundamental para o ensino-aprendizagem, ela “(…) mobiliza recursos internos e permite que o aluno se envolva de forma mais profunda e empenhada na aprendizagem” (Veríssimo, 2014, p. 73). Quando as tarefas são vistas pelos alunos como aborrecidas e repetidas, estas não estimulam a motivação e o interesse desaparece. Assim, o professor deve aumentar os níveis de interesse dos alunos nas tarefas para estimular a motivação (Veríssimo, 2014).

O primeiro desafio proposto foi relativo à reflexão axial e foi adaptado da tese de doutoramento de Fernández (2011). O segundo desafio é alusivo à reflexão axial, reflexão central e à rotação. Este foi adaptado da Brochura “Geometria e Medida do Ensino Básico” de Breda et al. (2011). O terceiro desafio consistiu em duas composições geométricas, uma com recurso ao software de Geometria Dinâmica *GeoGebra* e a outra com recurso a material de desenho. Este como objetivo estimular a criatividade e autonomia aos alunos.

1.º Desafio – Reflexão axial

O primeiro desafio **(Tabela 6)** foi colocado numa turma do 6.º ano do 2.º Ciclo e teve como objetivos: (i) determinar as principais dificuldades dos alunos para a realização do desafio; (ii) analisar os tipos de erros que os alunos manifestam.

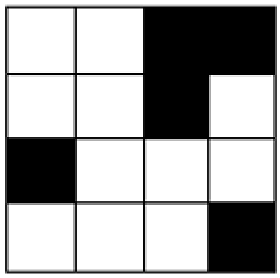
Tabela 6 - 1.º Desafio - reflexão axial

1.º Desafio – Reflexão axial

"Qual é o menor número de quadradinhos que é necessário pintar para que a figura resultante tenha pelo menos um eixo de simetria?"

a) 3 b) 5 c) 1 d) 4 e) 2

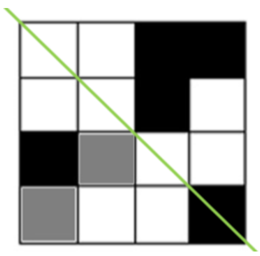
Descreve como procedeste ou pensaste para chegar à tua resposta.



(Fernández, 2011, p.164) traduzido pela investigadora

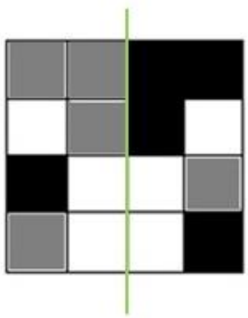
Resolução do desafio

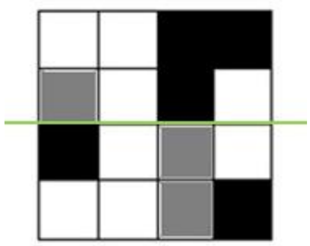
1. Considerar que o quadrado tem quatro eixos de simetria: horizontal, vertical, diagonal direita-esquerda e diagonal esquerda-direita
2. Simetria em relação ao eixo vertical: é necessário pintar cinco quadradinhos.
3. Simetria em relação ao eixo na horizontal: é necessário pintar três quadradinhos.
4. Simetria em relação à diagonal direita-esquerda: é necessário pintar três quadradinhos.
5. Simetria em relação à diagonal esquerda-direita: é necessário pintar dois quadradinhos.
6. Como o enunciado indica que é necessário encontrar o menos números de quadradinhos pintados para que a figura tenha pelo menos um eixo de simetria a resposta correta é o eixo na diagonal esquerda-direita.



Previsão da resolução:

1) Simetria em relação ao eixo na vertical.
2) Simetria em relação ao eixo na horizontal.





Este desafio, segundo Fernández (2011), exige pensar em duas dimensões, tornando-se necessário criar uma imagem mental para o resolver. No entanto não é necessário transformar essa imagem em pensamento.

Apesar da questão pedir uma resposta de identificação de uma das opções, é também solicitado como prova a pintura dos quadradinhos e a descrição de como o aluno procedeu, assim a imagem mental é representada no papel e a resposta é interpretada com base no desenho e a justificação.

A resolução do desafio requer a decomposição em quatro problemas correspondentes a cada um dos eixos de simetria do quadrado. Depois de encontrar os quatro eixos é necessário procurar qual é o menor número de quadrados pintados.

Este desafio exercita as seguintes habilidades: (i) identificação visual e de reconhecimento das relações espaciais, (ii) memória visual e (iii) rotação mental. (i) A habilidade de reconhecimento das relações espaciais é necessária para construir partes simétricas das figuras dadas e em conjunto obter uma figura com pelos menos um eixo de simetria. (ii) A habilidade de memória visual permite recordar a posição que teriam as quadriculas dependendo do eixo de simetria utilizado. (iii) A habilidade de rotação mental está presente quando se imagina o movimento da simetria como efeito de dobrar pelo eixo de simetria a fazer coincidir as partes simétricas. Neste caso, ao realizar a tarefa sem a presença do objeto físico, a ação a realizar é mental e produz-se um movimento dos quadradinhos negros a saírem do plano para coincidir com os novos quadradinhos pintados ou reciprocamente (Fernández, 2011).

(Fernández, 2011), na sua investigação, baseada no EOS, descreveu sete formas diferentes de soluções descritas pelos alunos, denominadas “Configurações cognitivas”. Este autor descreve, cada configuração cognitiva com vários procedimentos e argumentos utilizados pelo grupo em estudo. Na **Tabela 7** encontram-se uma breve descrição das “configurações cognitivas” descritas pelo autor. Estas serão base de comparação com as soluções dos alunos que se obteve neste desafio.

Tabela 7 - Configurações cognitivas (Fernández, 2011, p.275)

Configurações cognitivas
1 – Considerar unicamente como eixo de simetria o eixo na vertical e/ou na horizontal do quadrado exterior.
2 – Considerar como eixos de simetrias os eixos das diagonais esquerda-direita e/oi direita-esquerda do quadrado exterior.
3 – Reprodução da figura constituída por três quadradinho negros para formar uma figura

conexa.
4 – Comprovação exaustiva de casos. É realizado uma comprovação com os quatro eixos de simetria do quadrado.
5 – Considerar que a figura se encontra formada por três partes independentes e selecionar apenas uma para construir uma figura simétrica.
6 – Ideia de regularidade e estabilidade visual.
7 – Considerar que a figura se encontra formada por três partes independentes e atuar em cada uma dessas partes, construindo uma figura simétrica com cada uma das partes.

No que toca à correção do desafio realizada na sala de aula, esta foi realizada da seguinte forma: primeiro foram entregues aos alunos os desafios, já realizados, para que estes encontrassem o erro na solução que deram inicialmente. Seguidamente foram apresentadas as várias soluções dadas pelos alunos e realizada uma discussão no grupo turma. Os alunos explicaram o porquê das soluções apresentadas e depois foi feita a explicação das soluções erradas. Por último foi dado a solução correta e comparada com as resoluções dos alunos que mais próximo se encontravam da resposta correta.

2.º Desafio – Descobre as isometrias que transformam o triângulo A em cada um dos triângulos B, C, D e E.

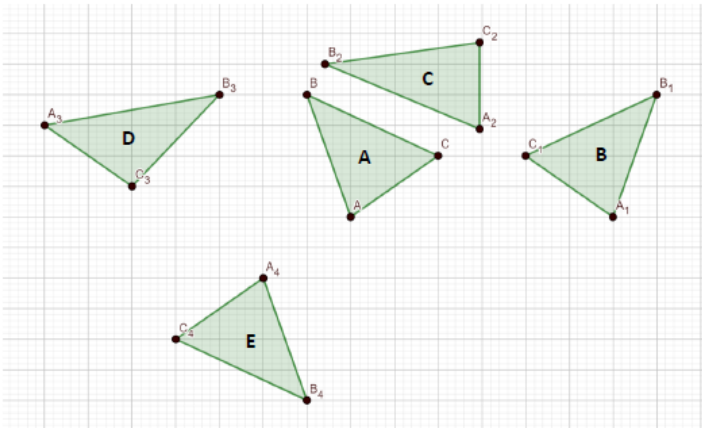
O segundo desafio proposto aos alunos **(Tabela 8)** foi adaptado da Brochura "Geometria e Medida no Ensino Básico" de Breda et al. (2011) e teve como objetivos: (i) determinar as principais dificuldades dos alunos para a realização do desafio; (ii) analisar os tipos de erros que os alunos manifestam; (iii) verificar as estratégias usadas pelos alunos para a resolução do desafio.

Tabela 8 - 2.º Desafio - Descobre as isometrias

2.º Desafio

Descobre as isometrias que transformam o triângulo A em cada um dos triângulos B, C, D e E.

1. Os triângulos B, C, D e E são transformados do triângulo A por isometrias.



1.1. Identifica a isometria (reflexão axial, reflexão central e rotação) que transforma o triângulo A no:
a) triângulo B ____ (se precisares consulta anexo 1).
b) triângulo C ____ (se precisares consulta anexo 2).
c) triângulo D ____ (se precisares consulta anexo 3).
d) triângulo E ____ (se precisares consulta anexo 4).
Atenção: Não apagues nenhuma linha auxiliar (retas, eixos, pontos, segmentos de reta…) que utilizaste durante o teu raciocínio.
1.2. Descreve como procedeste ou pensaste para chegar às tuas respostas.
a)____
b)____
c)____
d)____

Adaptado de: (Breda et al., 2011, p.93)

Resolução do desafio:

1.º Caso: A isometria que transforma o Triângulo [A, B, C] no triângulo [A1, B1, C1] é a reflexão axial de eixo f, visto que f é a mediatriz de [AA_1], [BB_1] e [CC_1] (Figura 8).

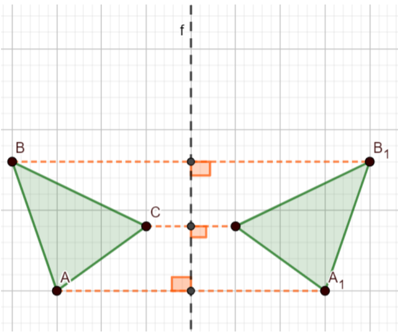


Figura 8 - Reflexão axial.

2.º Caso: A isometria que transforma o triângulo [A, B, C] no triângulo [A'_1, B'_1, C'_1] é uma reflexão central de centro F. Sendo que F é o ponto médio de [AA'_1], [BB'_1] e [CC'_1], A'1 é a imagem de A, B'1 é a imagem de B e C'1 é a imagem de C pela reflexão central de centro F.

Também está correto referir que a isometria presente é uma rotação de amplitude 180º com em centro F (meia volta), visto que, dada uma rotação de centro F e amplitude 180º (em qualquer um dos sentidos, positivo ou negativo), a imagem A'_1 coincide com a imagem de A pela reflexão central de centro F. A reflexão central é um caso particular da rotação (Figura 9).

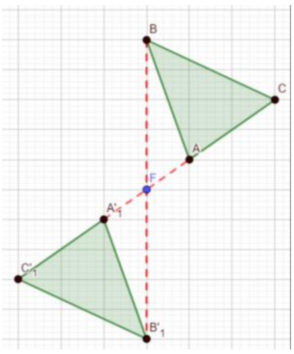


Figura 9 - Reflexão central/rotação de amplitude 180º.

3.º Caso: A isometria que transforma o triângulo A_2 no triângulo D (Figura 10) é uma rotação de centro F e amplitude -90º (sentido horário) ou 270º (sentido anti-horário). Similarmente, a isometria que transforma o triângulo A no triângulo C (Figura 11) é uma rotação de centro F e amplitude 45º (sentido anti-horário) ou -315º (sentido horário). Para obter o centro da rotação é necessário encontrar a interceção das mediatrizes de, por exemplo [B, B_1] e [C, C_1].

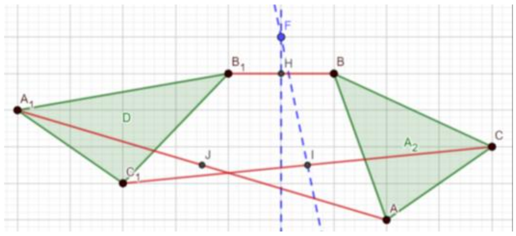


Figura 10 - Rotação do triangulo A_2 com centro em F.

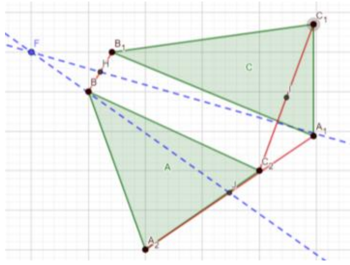


Figura 11 - Rotação do triângulo A com centro em F.

Este desafio exige conhecer e aplicar as propriedades das isometrias presentes assim como criar uma imagem mental.

Apesar da questão pedir uma resposta de identificação da isometria, é também solicitado como prova a descrição do procedimento/pensamento de como o aluno procedeu. Neste desafio foi disponibilizado um anexo para cada alínea, para que os alunos pudessem representar todos os traços que achassem necessários para a sua resolução. Contudo, os alunos podiam utilizar esses anexos ou apenas criar a sua imagem mental.

A resolução deste desafio requer que o aluno se foque na figura inicial e identifique a transformação geométrica utilizada para formá-la em cada uma das suas imagens. Para isso o aluno pode operar de forma gráfica ou mentalmente, criando uma imagem mental e imaginando-a a transformar-se em cada uma das isometrias estudadas. Graficamente, o aluno deve realizar o que está representado nas figuras acima (Figura 8, Figura 9, Figura 10, Figura 11).

Este desafio exercita as seguintes habilidades propostas por Del Grande (1990) referidas no primeiro capítulo: (i) reconhecimento de posições no espaço e (ii) discriminação visual (Gutiérrez, 2011, pp. 11-12). (i) A habilidade de reconhecimento de posições no espaço é necessária para relacionar a posição da figura com a sua imagem. (ii) A habilidade de discriminação visual permite comparar a figura com a sua imagem, identificando as suas semelhanças e diferenças. Além destas duas habilidades exercita também a habilidade de rotação mental, que se encontra presente quando se imagina o movimento da figura, como o efeito de dobrar pelo eixo de simetria e fazer coincidir as partes simétricas ou fazer rodar a imagem em torno do seu centro.

Durante a correção deste segundo desafio, foi realizada a demostração das várias transformações do triângulo A com recurso ao *GeoGebra* e as que suscitaram mais dúvidas, como as rotações foram realizadas no *GeoGebra* e no quadro.

3.º Desafio - Composição geométrica

O terceiro desafio, **(Tabela 9)** foi colocado depois dos alunos já conhecerem as várias transformações geométricas descritas nas AE para o ano em causa, e saberem utilizar o *GeoGebra* de forma que lhes permitisse construir as suas composições. Este teve como objetivos: (i) determinar as principais dificuldades dos alunos para a realização do desafio; (ii) perceber qual o tipo de isometria mais utilizada pelos alunos; (iii) integrar as tecnologias digitais na aprendizagem das isometrias de forma a desenvolver a visualização espacial.

Tabela 9 - 3.º Desafio - Composição geométrica

3.º Desafio - Composição geométrica

Maurits Cornelis Escher nascido em 1898 na holanda foi um artista gráfico e muito famoso pelos seus trabalhos de ilusão de ótica. Escher apoiou-se na cultura árabe quando esteve em Espanha em contacto com obras construídas pelos mouros.

Imagina que és um artista gráfico….

1. Utilizando as isometrias estudadas. Constrói uma composição geométrica para realizar a decoração de uma das paredes do corredor da tua escola.
2. Descreve os passos que seguiste para realizares a tua composição e quais as isometrias que utilizaste.
3. Apresenta a tua composição geométrica à turma.

O terceiro desafio teve como motivação a decoração de uma das paredes da escola e algumas obras do artista gráfico *Maurits Cornelis Escher.* Durante a apresentação de algumas obras deste artista foi chamado a atenção dos alunos para a existência de outra isometria, a translação. Embora esta só apareça nas AE do 7.º ano, é importante os alunos tomarem conhecimento da sua existência. Este desafio consistiu na realização de uma composição geométrica livre com recurso ao *Geogebra* e a material de desenho (papel, transferidor, régua, compasso), proporcionando a criatividade e a articulação dos conteúdos de Matemática, de TIC e de Educação Visual. Foi ainda solicitado aos alunos, numa apresentação oral, para que descrevessem quais as isometrias utilizadas na realização das suas composições geométricas. Durante as apresentações foi reservado tempo para que os colegas identificassem outras isometrias existentes e não referidas pelo autor do trabalho.

Para a realização deste desafio a turma foi dividida em dois grupos. O primeiro grupo ficou na sala de Matemática, onde cada aluno construiu a sua composição geométrica com recurso ao material de desenho. O segundo grupo dirigiu-se à sala de informática para utilizar o *Geogebra*. Ao fim de 45 minutos, os grupos trocaram de salas. Nesta aula contei com o apoio da professora cooperante e da minha colega de díade durante o tempo em que foi necessário circular entre as duas salas.

Importa salientar que a utilização de programas de geometria dinâmica no ensino são grandes aliados no desenvolvimento do pensamento geométrico. Do ponto de vista cognitivo, segundo Duval (2013) na entrevista à RPEM, estes programas permitem explorar as transformações de figuras relacionando as suas propriedades. Além disso, eles são capazes de realizar simulações que vão além de tudo o que podemos imaginar ou representar graficamente no papel. A sua utilização no ensino da Matemática é totalmente indispensável, pois estes permitem desenvolver a capacidade de visualização dos alunos (Breda et al., 2011; Freitas & Rezende, 2013).

Este desafio exige conhecer e aplicar as propriedades das isometrias com o objetivo de criar a composição. Além de ser necessário criar uma imagem inicial e reproduzi-la com recurso às isometrias estudadas, é também solicitado a descrição dos vários passos realizados e quais as isometrias utilizadas.

A sua resolução requer que o aluno, num primeiro momento, crie uma imagem mental para a representar. Posteriormente, exige que o aluno aplique a essa imagem as transformações geométricas que considere necessário para criar a sua composição geométrica. Para finalizar, requer ainda que o aluno descreva, de forma ordenada, como realizou a sua construção e quais as transformações geométricas que utilizou.

Este desafio exercita as seguintes habilidades propostas por Del Grande (1990) referidas no primeiro capítulo: (i) Coordenação motora dos olhos; (ii) identificação visual; (iii) Conservação da perceção; (iv) reconhecimento de posições do espaço; (v) reconhecimento de relações espaciais e (vi) discriminação visual (Gutiérrez, 2011, pp. 11-12). (i) A habilidade de coordenação motora dos olhos é necessária para acompanhar o movimento do objeto quando aplicada uma transformação geométrica. (ii) A habilidade de identificação visual permite, durante as apresentações orais dos trabalhos, reconhecer a figura inicial quando existem figuras sobrepostas. (iii) A capacidade de perceção é necessária para reconhecer a figura inicial mesmo quando esta deixa de ser visível total ou parcialmente. (iv) A habilidade de reconhecimento de posições no espaço permite relacionar a posição da figura com a sua imagem. (v) A aptidão de reconhecimento de relações espaciais permite identificar as relações entre a figura e as suas imagens. (vi) A habilidade de discriminação visual é necessária para comparar a figura com a sua imagem, identificando as suas semelhanças e diferenças.

Neste desafio não houve correção, apenas apresentação oral dos trabalhos e sua afixação na sala de aula.

3.2. Análise das soluções dos alunos

Neste subcapítulo são analisadas as resoluções de cada um dos desafios. Para a sua análise é utilizado o enquadramento teórico apresentado no primeiro capítulo.

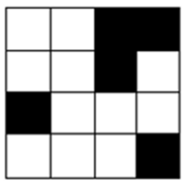
1.º Desafio – Reflexão axial

1.º Desafio – Reflexão axial

"Qual é o menor número de quadradinhos que é necessário pintar para que a figura resultante tenha pelo menos um eixo de simetria?"

a) 3 b) 5 c) 1 d) 4 e) 2

Descreve como procedeste ou pensaste para chegar à tua resposta.



(Fernández, 2011, p.164) traduzido investigadora

Análise das respostas dadas

A resposta a), que corresponde a pintar 3 quadrados, foi a que a maioria dos alunos escolheram. Os alunos demostraram diferentes formas de pintar apenas 3 quadradinho, contudo esta não é a resposta correta. Na **Tabela 10** é possível observar a frequência absoluta e a percentagem de respostas dos alunos.

Tabela 10 – Frequência absoluta e a percentagem de respostas

Opções	Frequência	Percentagem
c) 1	0	0%
e) 2	0	0%
a) 3	16	66,67%
d) 4	0	0%
b) 5	8	33,33%
Total	**24**	**100,00%**

Este desafio mostrou-se muito difícil para os alunos, visto que nenhum conseguiu chegar à resposta correta.

Ao analisar as respostas foi detetado que os alunos usaram diferentes eixos de simetria. A maioria optou pelo eixo na vertical (42%), 33% na horizontal e apenas 25% dos alunos traçaram o eixo da diagonal esquerda-direita. Nenhum aluno traçou na diagonal direita-esquerda. Na **Tabela 11** é visível a percentagem associada a cada uma das opções escolhidas.

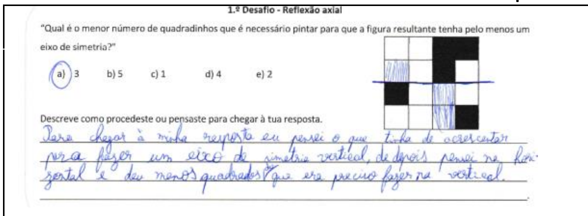
Tabela 11 – Frequência absoluta e percentagem das opções do eixo de simetria

Eixo de simetria	Frequência	Percentagem
Vertical	10	41,67%
Horizontal	8	33,33%
Diagonal: Esquerda-direita	6	25,00%
Total	24	100,00%

Após analisar a descrição da linha de pensamento de cada aluno, verificou-se que as respostas dos alunos encontram-se inseridas nas várias "configurações cognitivas" descritas por Fernández (2011) para este desafio.

Dos alunos que marcaram o eixo na horizontal: cinco alunos pensaram em primeiro lugar no eixo na vertical e só depois na horizontal. Três alunos pensaram em primeiro lugar no eixo na vertical, em segundo na horizontal e em terceiro tentaram as diagonais. Contudo, estes três alunos não conseguiram encontrar simetria traçando os eixos das diagonais. Assim optaram por traçar o eixo na horizontal, pois neste era necessário pintar um menor número de quadrados em comparação com o eixo na vertical. Foi possível observar que um aluno recorreu à técnica de dobragem do papel para encontrar o eixo. A **Tabela 12** mostra um exemplo de resposta com eixo na horizontal.

Tabela 12 - Exemplo de resposta com eixo na horizontal

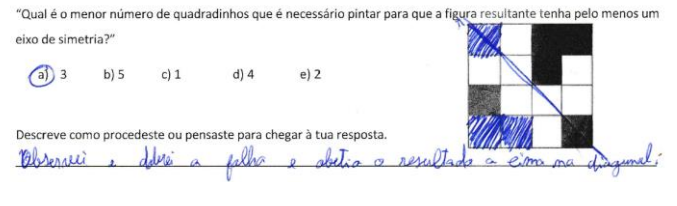
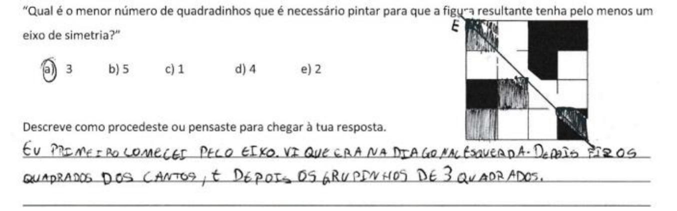
<table>
<tr><td rowspan="2">
1.º Desafio - Reflexão axial
"Qual é o menor número de quadradinhos que é necessário pintar para que a figura resultante tenha pelo menos um eixo de simetria?"
a) 3 b) 5 c) 1 d) 4 e) 2
Descreve como procedeste ou pensaste para chegar à tua resposta.
Para chegar à minha resposta eu pensei o que tinha de acrescentar pra fazer um eixo de simetria vertical, de depois pensei na horizontal e deu menos quadrados que era preciso fazer na vertical.</td><td>Transcrição da resposta:</td></tr>
<tr><td>"Para chegar à minha resposta eu pensei o que tinha de acrescentar para fazer um eixo de simetria vertical, depois pensei na horizontal e deu menos quadradinhos do que era preciso fazer na vertical."</td></tr>
</table>

Este tipo de resposta por parte dos alunos demostra que não consideraram as diagonais do quadrado, apenas consideram o eixo na vertical e horizontal, para de seguida verificar em qual dos eixos é necessário pintar o menor número de quadradinhos. Desta forma, esta resposta encontra-se situada na primeira configuração cognitiva de Fernández (2011, p. 276). Esta indica que o aluno considera unicamente como eixo de simetria o eixo na vertical e/ou na horizontal do quadrado exterior, e escolhe o eixo que tem de colorir o menor número de quadrados.

Dos alunos que traçaram o eixo na diagonal: sete alunos traçaram na diagonal esquerda-direita e um aluno referiu ter pensado nas duas diagonais. Destes alunos nenhum conseguiu pintar os quadradinhos corretos para obter uma imagem simétrica. Estes sete alunos pintaram o primeiro quadradinho que se situa no canto superior esquerdo, porém este quadradinho não era necessário pintar com o eixo de simetria na diagonal esquerda-direita. Quando questionados relativamente ao que os levou a colorir esse quadradinho, não foram capazes de explicar.

Apenas um aluno esteve muito próximo da resposta correta ao desafio, contudo este também pintou o quadrinho do canto superior esquerdo e também não conseguiu explicar como pensou para o ter colorido. Estes alunos admitem terem apenas pensado na diagonal e terem recorrido à técnica de dobragem do papel. Na **Tabela 13** é possível ver dois exemplos de respostas dos alunos.

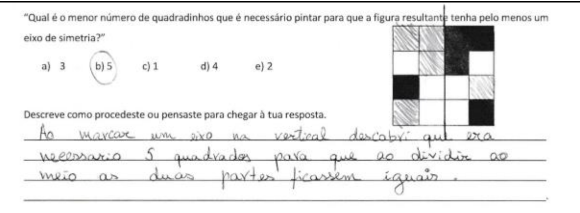
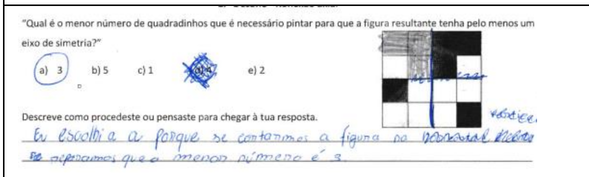
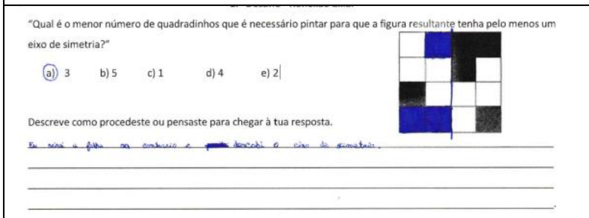
Tabela 13 - Exemplo de respostas com eixo da diagonal.

	Transcrição da resposta:
	"Observei e dobrei a folha e obtive o resultado acima na diagonal."
	"Eu primeiro comecei pelo eixo. Vi que era na diagonal esquerda. Depois fiz os quadrados dos cantos, e depois os grupinhos de três quadrados."

Em ambas as repostas, os alunos referem terem considerado apenas a diagonal esquerda-direita. Estes alunos reparam que o eixo traçado é a diagonal do quadrado preto que se situa do canto inferior direito. Contudo, na primeira resposta é visível que o aluno não conseguiu colorir os quadradinhos corretos, mesmo depois de ter dobrado a folha. Na segunda resposta o aluno coloriu corretamente dois quadrados, porém coloriu também o quadradinho do canto superior esquerdo. Segundo Fernández (2011, p.283), estes alunos associam a identificação de simetria com regularidade ou estabilidade visual. Isto indica que têm uma conceção de eixo de simetria como uma separação que deixa os dois lados com a mesma quantidade. Assim reproduzem de um lado da figura o que existe no outro, e geralmente não tem atenção às equidistâncias relativamente ao eixo.

Dez dos alunos traçaram o eixo da vertical: oito destes alunos conseguiram formar uma imagem simétrica tendo como referência o eixo na vertical. Estes alunos afirmaram terem apenas pensado em encontrar uma forma de criar uma imagem simétrica, o que revela a não exploração do desafio em procurar o menor número possível de quadradinhos pintados. Um aluno referiu ter recorrido à técnica de virar a folha em outra posição para poder melhor visualizar. A **Tabela 14** apresenta um exemplo de resposta.

Tabela 14 - Exemplo de resposta com eixo na vertical.

	Transcrição da resposta:
 "Qual é o menor número de quadradinhos que é necessário pintar para que a figura resultante tenha pelo menos um eixo de simetria?" a) 3 b) 5 c) 1 d) 4 e) 2 Descreve como procedeste ou pensaste para chegar à tua resposta. Ao marcar um eixo na vertical descobri que era necessário 5 quadrados para que ao dividir ao meio as duas partes ficassem iguais.	"Ao marcar um eixo na vertical descobri que eram necessários 5 quadrados para que ao dividir ao meio as duas partes ficassem iguais".
 "Qual é o menor número de quadradinhos que é necessário pintar para que a figura resultante tenha pelo menos um eixo de simetria?" a) 3 b) 5 c) 1 d) 4 e) 2 Descreve como procedeste ou pensaste para chegar à tua resposta. vertice. Eu escolhi a, a porque se cortarmos a figura na vertical reparamos que o menor número é 3	"Eu escolhi a, a porque se cortarmos a figura na vertical reparamos que o menor número é 3."
 "Qual é o menor número de quadradinhos que é necessário pintar para que a figura resultante tenha pelo menos um eixo de simetria?" a) 3 b) 5 c) 1 d) 4 e) 2 Descreve como procedeste ou pensaste para chegar à tua resposta.	"Eu virei a folha ao contrário e descobri o eixo de simetria."

Na primeira resposta verifica-se que o aluno apenas considerou o eixo de simetria na vertical e coloriu o número mínimo de quadradinhos necessários para que a figura tivesse simetria. Este procedimento indica que o aluno apenas considera como eixo de simetria o eixo na vertical do quadrado exterior, não levando em consideração os outros eixos do quadrado (Fernández, 2011).

No que respeita à segunda resposta, o aluno considerou que a figura é constituída por três partes independentes e selecionou uma das partes para formar uma figura simétrica (Fernández, 2011). Esta resposta pode estar relacionada com a lei de fechamento referida em Duval (2012a), esta lei refere que quando vários traços diferentes formam um contorno fechado destacam-se como uma figura. Este pode ter sido o motivo para que este aluno apenas considera-se essa figura, pois ela destacou-se em relação aos outros dois quadradinhos.

Na terceira resposta o aluno associou a simetria à ideia de regularidade e estabilidade visual. O que indica que tem uma conceção de eixo de simetria como uma separação que deixa os dois lados com a mesma quantidade. Reproduzindo de um lado da figura o que existe no outro, sem ter em consideração as equidistâncias relativamente ao eixo (Fernández, 2011).

Nestes desafios os **principais erros** dos alunos encontram-se relacionados com a capacidade de recordar o que é um eixo de simetria ou, simplesmente não saber aplicar corretamente as propriedades da simetria axial, nomeadamente a equidistância e perpendicularidade ao eixo. Adicionalmente os alunos não reconhecem e/ou não consideraram todos os eixos de simetria do quadrado, em particular as diagonais.

Segundo Duval (2012a), geralmente os alunos concentram-se na apreensão percetiva e não entendem que a figura deve ser olhada tendo em conta as suas propriedades e o enunciado. Desta forma, os alunos leem o enunciado e constroem a figura e não voltam a olhar para o enunciado. Neste desafio, verificou-se que alguns alunos apenas procuraram contruir uma figura simétrica e não tiveram em atenção que o enunciado pedia para coloria o menor número possível de quadrinhos. Além disso, não consideraram todos os eixos de simetria do quadrado exterior antes de consideraram uma resposta como correta. Este facto pode estar ligado com um conflito semiótico, na medida que o aluno pode ter compreendido que teria de encontrar <u>pelo menos um eixo</u> de simetria na figura, em vez de compreender que tinha de procurar <u>o eixo</u> onde era possível pintar o menos número de quadradinhos. É visível ainda, a dificuldade relacionada com a apreensão operacional de figuras, visto que demostraram dificuldade em manipular e reconfigurar mentalmente e graficamente a figura de forma a encontrar a solução.

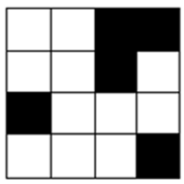
Repetição do 1.º Desafio

1.º Desafio – Reflexão axial

"Qual é o menor número de quadradinhos que é necessário pintar para que a figura resultante tenha pelo menos um eixo de simetria?"

a) 3 b) 5 c) 1 d) 4 e) 2

Descreve como procedeste ou pensaste para chegar à tua resposta.



(Fernández, 2011, p.164) traduzido investigadora

Este desafio foi proposto uma segunda vez aos mesmos alunos a 23 de junho, depois da implementação dos três desafios e das aulas no *GeoGebra*. Importa referir que a correção do desafio foi realizada no dia 19 de maio.

As respostas dos alunos, nesta segunda vez, foram diferentes. A resposta e), que corresponde a pintar 2 quadrados, foi a que a maioria dos alunos escolheram em contraposição à resposta a) dada na primeira vez. A resposta correta era realmente pintar os dois quadrados, contudo um aluno pintou os dois quadrados errados. Desta forma, dos 18 alunos que pintaram apenas dois quadrados, 17 alunos acertaram, confrontando assim, a ausência de respostas corretas da primeira vez. Apenas 6 alunos continuaram a colorir 3 quadrados e um aluno pintou 5 quadrados. Na **Tabela 15** é possível observar a frequência absoluta e a percentagem de respostas dos alunos a cada opção de resposta.

Tabela 15 - Frequência absoluta e a percentagem de respostas (repetição do 1.ºDesafio)

Opções	Frequência	Percentagem
1	0	0%
2	18	72%
3	6	24,00%
4	0	0%
5	1	4,00%
Total	25	100,00%

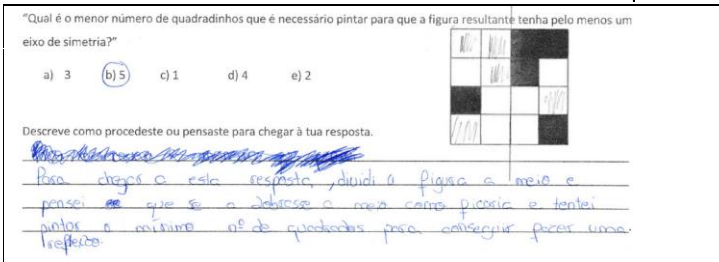
Para melhor comparação das respostas dos alunos é apresentado, novamente, abaixo a tabela correspondente aos resultados da implementação do desafio pela primeira vez.

Tabela 10 – Frequência absoluta e a percentagem de respostas

Opções	**Frequência**	**Percentagem**
c) 1	0	0%
e) 2	0	0%
a) 3	16	66,67%
d) 4	0	0%
b) 5	8	33,33%
Total	**24**	**100,00%**

É necessário referir que o aluno que pintou 5 quadrados (Aluno A) não esteve presente quando o desafio foi colocado pela primeira vez, nem durante a sua correção. Aliás, este aluno esteve ausente na maioria das aulas relativas a este conteúdo. Porém, o Aluno A foi capaz de formar uma figura simétrica em relação ao eixo na vertical (ver **Tabela 16**).

Tabela 16 - Resposta do Aluno A

	Transcrição da resposta:
	“Para chegar a esta resposta, dividi a figura a meio e pensei que se a dobrasse a meio como ficaria e tentei pintar o mínimo nº de quadrados para conseguir fazer uma reflexão.”

"Qual é o menor número de quadradinhos que é necessário pintar para que a figura resultante tenha pelo menos um eixo de simetria?"

a) 3 b) 5 c) 1 d) 4 e) 2

Descreve como procedeste ou pensaste para chegar à tua resposta.

Para chegar a esta resposta, dividi a figura a meio e pensei que se a dobrasse a meio como ficaria e tentei pintar o mínimo nº de quadrados para conseguir fazer uma reflexão

Nesta resposta verifica-se que o Aluno A apenas considerou o eixo de simetria na vertical e coloriu o número mínimo de quadradinhos necessários para que a figura tivesse simetria. Este procedimento indica que o aluno considera unicamente como eixo de simetria o eixo na vertical, não considerando os restantes. Esta resposta é similar às respostas dadas pelos alunos na primeira vez que realizaram o desafio.

Quanto aos eixos de simetria, também é possível observar diferenças em comparação com a primeira vez que o desafio foi colocado. A maioria dos alunos optou por traçar o eixo de simetria na diagonal esquerda-direita, enquanto que na primeira vez maioria traçou o eixo na vertical. Verifica-se também que apenas um aluno traçou na vertical, um aluno na horizontal e três alunos traçaram na diagonal direita-esquerda. A diagonal direita-esquerda da primeira vez não foi considerada pelos alunos. Na **Tabela 17** é visível a percentagem associada a cada uma das opções escolhidas.

Tabela 17 - Frequência absoluta e percentagem das opções do eixo de simetria (repetição do 1.º Desafio)

Eixo de simetria	Frequência	Percentagem
Vertical	1	4%
Horizontal	1	4%
Diagonal: Direita-esquerda	3	12%
Diagonal: Esquerda-direita	20	80%
Total	25	100%

Para melhor comparação das respostas dos alunos é apresentado, novamente, abaixo a tabela correspondente aos resultados da implementação do desafio pela primeira vez.

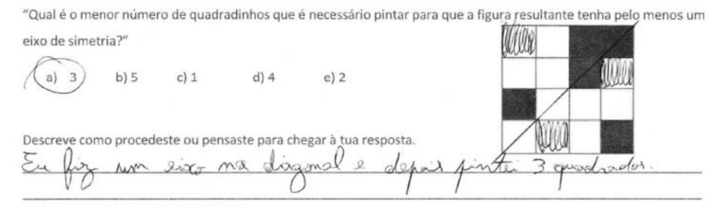
Tabela 11 – Frequência absoluta e percentagem das opções do eixo de simetria

Eixo de simetria	Frequência	Percentagem
Vertical	10	41,67%
Horizontal	8	33,33%
Diagonal: Esquerda-direita	6	25,00%
Total	24	100,00%

Seguidamente são apresentados e analisados, alguns exemplos de respostas dadas pelos alunos na segunda vez que o desafio foi colocado.

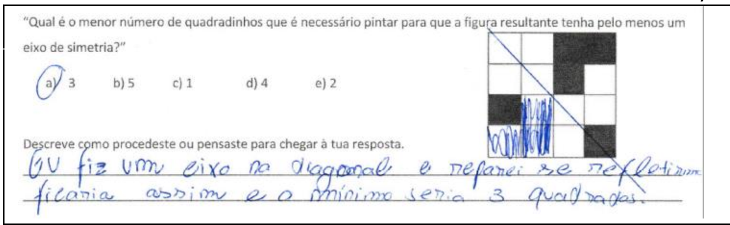
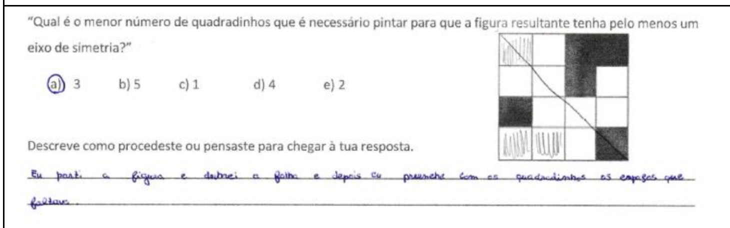
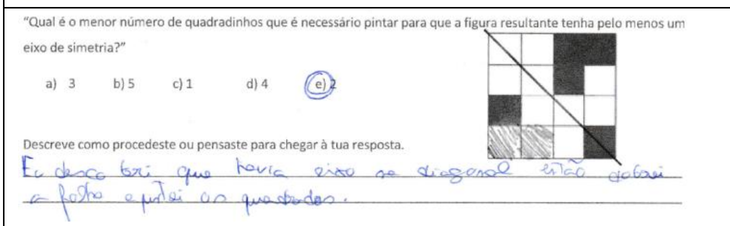
Na **Tabela 18** é apresentado um exemplo de resposta dos alunos com eixo de simetria na diagonal direita-esquerda. Nesta resposta é visível que estes alunos consideraram apenas uma diagonal do quadrado exterior, pintando os quadrados necessários para obter uma figura simétrica.

Tabela 18 – Exemplo de respostas com eixo na diagonal direita-esquerda (Repetição do 1.º Desafio).

 “Qual é o menor número de quadradinhos que é necessário pintar para que a figura resultante tenha pelo menos um eixo de simetria?” a) 3 b) 5 c) 1 d) 4 e) 2 Descreve como procedeste ou pensaste para chegar à tua resposta. Eu fiz um eixo na diagonal e depois pintei 3 quadrados.	Transcrição da resposta:
	“Eu fiz um eixo na diagonal e depois pintei 3 quadrados.”

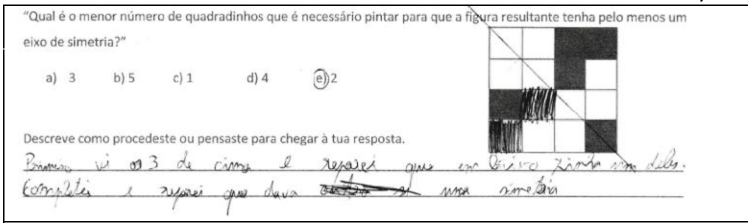
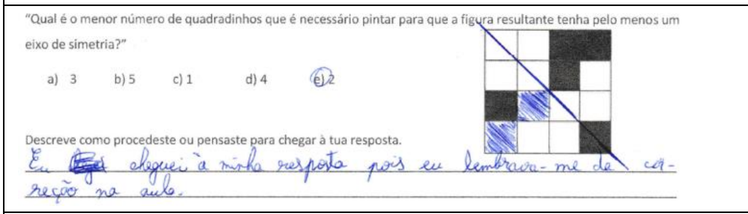
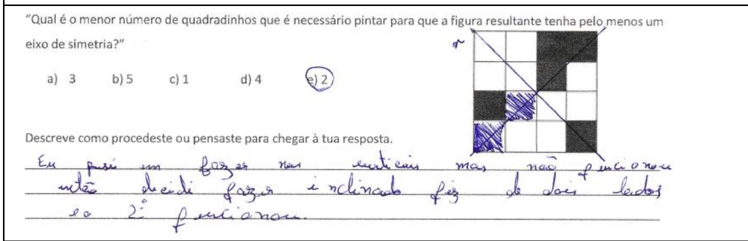
Na **Tabela 19** são exibidas três respostas com soluções erradas com eixo na diagonal esquerda-direita. Nestas respostas, verifica-se que os alunos coloriram os quadrados no canto inferior esquerdo de forma errada. Na segunda resposta o aluno coloriu o quadrado no canto superior esquerdo, o que não era necessário fazer quando o eixo de situa no diagonal esquerda-direita. Estas respostas evidenciam que estes alunos ainda associam a identificação de simetria com regularidade ou estabilidade visual e necessitam de dobrar o papel para melhor visualizar.

Tabela 19 - Exemplo de respostas erradas com eixo na diagonal esquerda-direita (Repetição do 1.º Desafio).

 “Qual é o menor número de quadradinhos que é necessário pintar para que a figura resultante tenha pelo menos um eixo de simetria?” a) 3 b) 5 c) 1 d) 4 e) 2 Descreve como procedeste ou pensaste para chegar à tua resposta. Eu fiz um eixo na diagonal e reparei se refletirmos ficaria assim e o mínimo seria 3 quadrados.	Transcrição da resposta:
	“Eu fiz um eixo na diagonal e reparei se refletirmos ficaria assim e o mínimo seria 3 quadrados.”
 “Qual é o menor número de quadradinhos que é necessário pintar para que a figura resultante tenha pelo menos um eixo de simetria?” a) 3 b) 5 c) 1 d) 4 e) 2 Descreve como procedeste ou pensaste para chegar à tua resposta. Eu parti a figura e dobrei a folha e depois eu preenchi com os quadradinhos os espaços que faltava.	“Eu parti a figura e dobrei a folha e depois eu preenchi com os quadradinhos os espaços que faltava.”
 “Qual é o menor número de quadradinhos que é necessário pintar para que a figura resultante tenha pelo menos um eixo de simetria?” a) 3 b) 5 c) 1 d) 4 e) 2 Descreve como procedeste ou pensaste para chegar à tua resposta. Eu descobri que havia eixo na diagonal então dobrei a folha e pintei os quadrados.	“Eu descobri que havia eixo na diagonal então dobrei a folha e pintei os quadrados.”

A **Tabela 20** expõe alguns exemplos de respostas de alunos que conseguiram chegar à solução correta. Segundo Fernández (2011, p. 281), este tipo de respostas evidenciam uma comprovação exaustiva de casos. Em que os alunos realizam a comprovação com os quatro eixos de simetria do quadrado exterior.

Tabela 20 - Exemplo de respostas corretas com eixo na diagonal esquerda-direita (Repetição do 1.º Desafio).

	Transcrição da resposta:
	"Primeiro vi os 3 de cima e reparei que em baixo tinha um deles. Completei e reparei que dava numa simetria."
	"Eu cheguei à minha resposta pois eu lembrava-me da correção."
	"Eu pensei em fazer nas verticais, mas não funcionou então decidi fazer inclinado fiz de dois lados e o 2.º funcionou."

Porém, embora os alunos tenham chegado à solução correta, quando descrevem a forma que pensaram não referem terem pensados em todos os eixos de simetria. Na primeira resposta o aluno refere apenas ter olhado para os três quadrados negros no canto superior direito e repeti-os no canto inferior esquerdo, e só depois verificou que já tinha a simetria esperada. Na segunda resposta, o aluno refere ter conseguido realizar corretamente o desafio por se recordar da correção realizada na aula. A terceira resposta é a que mais se aproxima da comprovação exaustiva de casos, contudo o aluno não referiu ter considerado o eixo na horizontal. Mas referiu ter considerados "as verticais". Depois de questionar o aluno relativamente "às verticais", este referiu que queria dizer eixo vertical e horizontal.

Com a repetição do desafio verifica-se uma diferença relevante nos resultados obtidos. Os alunos passaram a considerar a diagonal direita-esquerda, o que não se verificou da primeira vez. Além disso, a maioria optou por traçar o eixo numa das diagonais em confrontação com a vertical/horizontal da primeira vez que foi colocado o desafio. Contudo, não é possível referir que os resultados estão relacionados com uma melhoria da perceção visual dos alunos, ou de uma melhor compreensão do enunciado, visto que o desafio foi corrigido na aula e alguns alunos podem ter sido capazes de chegar à solução correta por se recordarem da correção, como foi referido por um dos alunos.

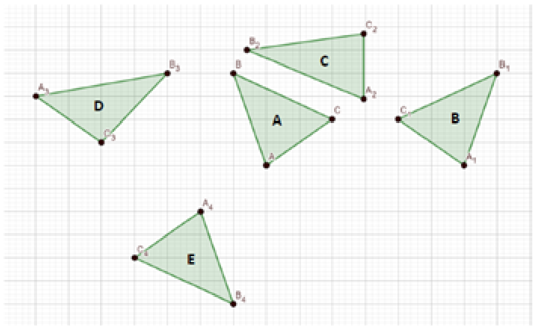
2.º Desafio - Descobre as isometrias que transformam o triângulo A em cada um dos triângulos B, C, D, e E.

Tabela 7 - 2.º Desafio - Descobre as isometrias

2.º Desafio

Descobre as isometrias que transformam o triângulo A em cada um dos triângulos B, C, D e E.

1. Os triângulos B, C, D e E são transformados do triângulo A por isometrias.



1.1. Identifica a isometria (reflexão axial, reflexão central e rotação) que transforma o triângulo A no:

a) triângulo B ______________________________ (se precisares consulta anexo 1).

b) triângulo C ______________________________ (se precisares consulta anexo 2).

c) triângulo D ______________________________ (se precisares consulta anexo 3).

d) triângulo E ______________________________ (se precisares consulta anexo 4).

Atenção: Não apagues nenhuma linha auxiliar (retas, eixos, pontos, segmentos de reta...) que utilizaste durante o teu raciocínio.

1.2. Descreve como procedeste ou pensaste para chegar às tuas respostas.

a)______________________________

b)______________________________

c)______________________________

d)______________________________

Adaptado de: (Breda et al., 2011, p.93)

Análise das respostas dadas

Observando a **Tabela 21**, verifica-se que:

Na alínea a) a maioria dos alunos referiu ser uma reflexão axial, porém um aluno afirmou ser uma reflexão central. Desta forma, vinte e três alunos acertaram nesta alínea.

Na alínea b) a maioria dos alunos acertou na solução. Porém dois alunos referiram tratar-se de uma reflexão axial e quatro alunos disseram ser uma reflexão central. Dos alunos que acertaram, apenas dois alunos mencionaram que seria possível ser uma rotação em qualquer dos sentidos. Contudo, os que colocaram apenas um sentido para a rotação também foi considerado certo, visto que não era pedido o sentido nem a amplitude de rotação. Assim, dezoito alunos acertaram nesta alínea.

A alínea c) foi das que maior número de alunos acertou. Apenas um aluno referiu ser uma reflexão axial e outro uma reflexão central. Dos alunos que acertaram, três alunos referiram ser possível rotação nos dois sentidos. Porém, e como referido acima, foi considerado certo todos os que referiram tratar-se de uma rotação, pois não era pedido o sentido nem a amplitude da rotação. Deste modo vinte e dois alunos acertaram nesta alínea.

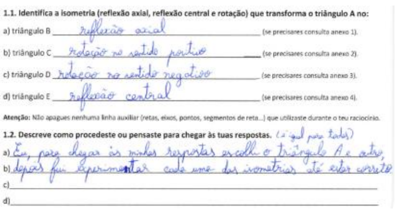
A alínea d) foi que a que obteve o maior número de respostas corretas, visto que a maioria dos alunos referiram ser uma reflexão central e um aluno referiu tratar-se de uma rotação. As duas repostas estão corretas, visto que a reflexão central é um caso particular da rotação (rotação de amplitude 180º). Houve apenas uma resposta errada, um aluno referiu ser uma reflexão axial. Assim, vinte e três alunos acertaram nesta alínea.

Tabela 21 - Respostas dos alunos a cada uma das alíneas.

	Alínea a)	Alínea b)	Alínea c)	Alínea d)
Reflexão axial	**23**	2	1	1
Reflexão central	1	4	1	**22**
Rotação (-)	0	**4**	**13**	0
Rotação (+)	0	**8**	**1**	**1**
Rotação (+/-)	0	**2**	**3**	0
Rotação	0	**4**	**5**	0
Recorreu aos anexos	5	5	2	3
Acertaram	**23**	**18**	**22**	**23**
Usaram a imagem inicial	16			

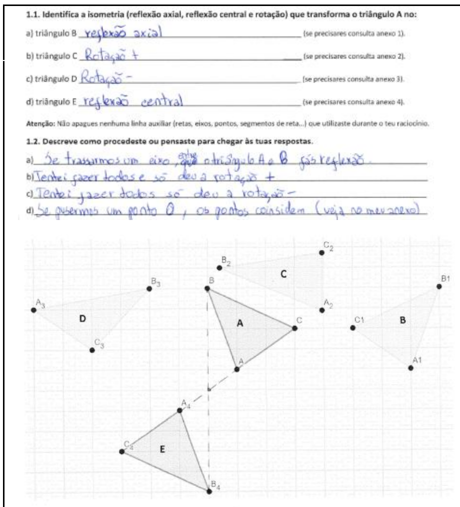
Após analisar a descrição da linha de pensamento de cada aluno, verificou-se que a maioria dos alunos usou a imagem mental e a dobragem e rotação da folha de papel. A **Tabela 22** apresenta um exemplo de respostas de alunos que referiram ter realizado uma análise exaustiva de cada uma das isometrias estudadas antes de considerar uma como correta. Estes alunos usaram apenas a imagem mental para responder às questões.

Tabela 22 - Análise exaustiva com representação mental

	Transcrição
 1.1. Identifica a isometria (reflexão axial, reflexão central e rotação) que transforma o triângulo A no: a) triângulo B reflexão axial (se precisares consulta anexo 1). b) triângulo C rotação no sentido positivo (se precisares consulta anexo 2). c) triângulo D rotação no sentido negativo (se precisares consulta anexo 3). d) triângulo E reflexão central (se precisares consulta anexo 4). Atenção: Não apagues nenhuma linha auxiliar (retas, eixos, pontos, segmentos de reta...) que utilizaste durante o teu raciocínio. 1.2. Descreve como procedeste ou pensaste para chegar às tuas respostas. (é igual para todas) a) Eu, para chegar às minhas respostas escolhi o triângulo A e outro, b) depois fui experimentar cada uma das isometrias até estar correto c) d)	1.1. a) Reflexão axial; b) Rotação no sentido positivo; c) Rotação no sentido negativo; d) Reflexão central. 1.2. (é igual para todas). Eu, para chegar às minhas respostas escolhi o triângulo A e outro, depois fui experimentando cada uma das isometrias até estar correto.

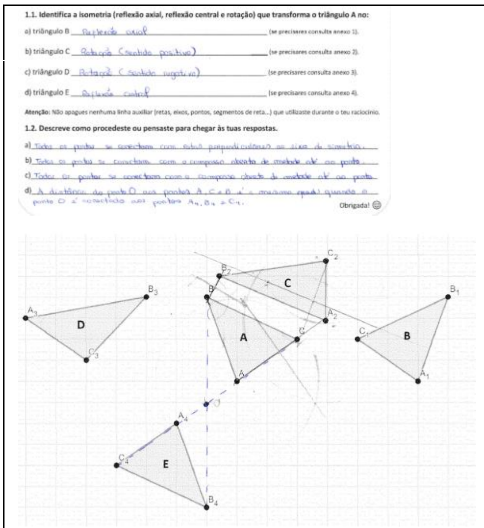
Na **Tabela 23** é exibida um exemplo de resposta, em que o aluno realiza uma análise exaustiva para responder às alíneas b e c. No entanto, nas alíneas a e d, o aluno descreve a existência de um eixo na reflexão axial e de um ponto central na reflexão central representando-o graficamente. Neste tipo de respostas os alunos usaram a representação gráfica e mental.

Tabela 23 - Representação gráfica e mental

	Transcrição
	1.1. a) Reflexão axial; b) Rotação +; c) Rotação -; d) Reflexão central. 1.2. a) Se traçarmos um eixo entre o triângulo A e B faz reflexão; b) tentei fazer todas e só deu a rotação +; c) tentei fazer todas só deu a rotação -; d) se pusermos um ponto O, os pontos coincidem (veja o meu anexo).

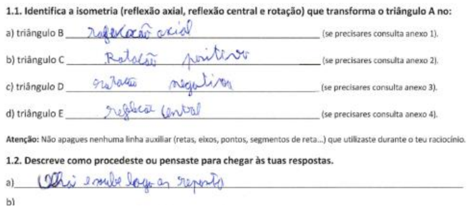
A **Tabela 24** apresenta um exemplo de resposta em que o aluno justifica as suas soluções recorrendo a algumas propriedades de cada isometria (perpendicularidade e equidistância dos pontos), e à representação gráfica.

Tabela 24 - Representação Gráfica

	Transcrição
	1.1. a) Reflexão axial; b) Rotação (sentido positivo); c) Rotação (sentido negativo); d) Reflexão central. 1.2. a)Todos os pontos se conectam com retas perpendiculares ao eixos de simetria; b)Todos os pontos se conectam com o compasso aberto a metade até ao ponto; c) Todos os pontos se conectam com o compasso aberto a metade até ao ponto; d) A distância do ponto O aos pontos A,C e B é a mesma quando o ponto O é conectado aos pontos A_4, B_4 e C_4.

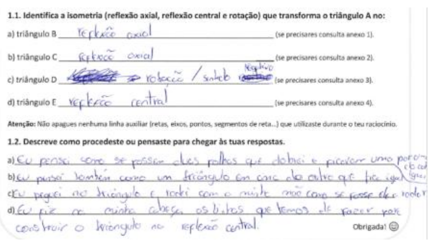
Na **Tabela 25** é apresentada a resposta de um aluno que usou apenas imagem mental. O aluno justificou as suas soluções com o facto de ter utilizado o *GeoGebra* em aulas anteriores e este o ajudar na sua visualização.

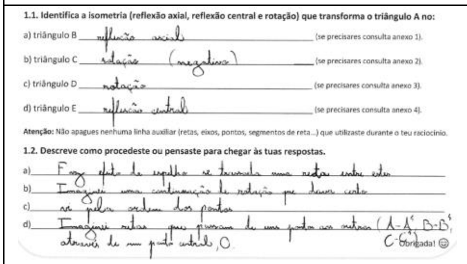
Tabela 25 - Representação mental (*GeoGebra*)

	Transcrição
 1.1. Identifica a isometria (reflexão axial, reflexão central e rotação) que transforma o triângulo A no: a) triângulo B reflexão axial (se precisares consulta anexo 1). b) triângulo C Rotação positivo (se precisares consulta anexo 2). c) triângulo D rotação negativo (se precisares consulta anexo 3). d) triângulo E reflexão central (se precisares consulta anexo 4). Atenção: Não apagues nenhuma linha auxiliar (retas, eixos, pontos, segmentos de reta...) que utilizaste durante o teu raciocínio. 1.2. Descreve como procedeste ou pensaste para chegar às tuas respostas. a) Olhei e soube logo as respostas b)	1.1. a) Reflexão axial; b) Rotação positivo; c) Rotação negativo; d) Reflexão central. 1.2. a) Olhei e soube logo as respostas. Oralmente este aluno referiu que a utilização do *GeoGebra*, nas aulas anteriores, o ajudou a melhor visualizar as isometrias. "Parece que tenho o *GeoGebra* na cabeça."

A **Tabela 26** apresenta dois exemplos de resposta em que os alunos referem que de forma imaginária dobraram a folha, imaginaram o reflexo de espelho, um triângulo a coincidir com o outro, e representaram mentalmente os traços que acharam necessário para realizar uma reflexão central. Na primeira resposta o aluno refere ter usado a mão para o auxiliar na visualização da rotação do triângulo. Contudo errou na alínea b. Neste tipo de resposta os alunos consideram as isometrias como figuras que têm de ser iguais, visualizando mentalmente a representação do papel a dobrar e do reflexo de espelho.

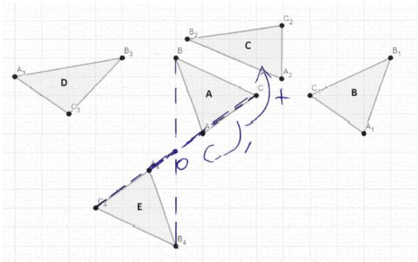
Tabela 26 - Representação mental (material manipulável)

	Transcrição
 1.1. Identifica a isometria (reflexão axial, reflexão central e rotação) que transforma o triângulo A no: a) triângulo B reflexão axial (se precisares consulta anexo 1). b) triângulo C reflexão axial (se precisares consulta anexo 2). c) triângulo D rotação / sentido negativo (se precisares consulta anexo 3). d) triângulo E reflexão central (se precisares consulta anexo 4). Atenção: Não apagues nenhuma linha auxiliar (retas, eixos, pontos, segmentos de reta...) que utilizaste durante o teu raciocínio. 1.2. Descreve como procedeste ou pensaste para chegar às tuas respostas. a) Eu pensei como se fossem duas folhas que dobrei e ficavam uma por cima da outra b) Eu pensei também como um triângulo em cima do outro que fica igual c) Eu peguei no triângulo e rodei com a minha mão como se fosse ele a rodar d) Eu fiz na minha cabeça as linhas que temos de fazer para construir o triângulo na reflexão central. Obrigada! ☺	1.1. a) Reflexão axial; b) Reflexão axial; c) Rotação/sentido negativo; d) Reflexão central. 1.2. a) Eu pensei como se fossem duas folhas que dobrei e ficavam uma em cima da outra; b) Eu pensei também como um triângulo em cima do outro que fica igual; c) Eu peguei no triângulo e rodei com a minha mão como se fosse ele a rodar; d) Eu fiz na minha cabeça as linhas que temos que fazer para construir o triângulo na reflexão

	central.
 1.1. Identifica a isometria (reflexão axial, reflexão central e rotação) que transforma o triângulo A no: a) triângulo B reflexão axial (se precisares consulta anexo 1). b) triângulo C rotação (negativo) (se precisares consulta anexo 2). c) triângulo D rotação (se precisares consulta anexo 3). d) triângulo E reflexão central (se precisares consulta anexo 4). Atenção: Não apagues nenhuma linha auxiliar (retas, eixos, pontos, segmentos de reta...) que utilizaste durante o teu raciocínio. 1.2. Descreve como procedeste ou pensaste para chegar às tuas respostas. Obrigada!	1.1. a) Reflexão axial; b) Rotação (negativo); c) Rotação; d) Reflexão central. 1.2. a) Faz efeito espelho se traçada uma reta entre estes; b) Imaginei uma continuação de rotação que dava certo; c)vi pela ordem dos pontos; d) Imaginei retas que passam de uns pontos para os outros (A-A_4,B-B_4, C-C_4) através de um ponto central, O.

Na **Tabela 27** é apresentada uma resposta em que o aluno refere que a isometria que transforma o triangulo A no triangulo C e D é uma rotação e que pode ser realizado em ambos os sentidos. Neste tipo de resposta os alunos usaram a imagem mental e gráfica. Estes consideram que uma isometria transforma uma figura noutra igual.

Tabela 27 - Representação mental e gráfica

	Transcrição
 1.1. Identifica a isometria (reflexão axial, reflexão central e rotação) que transforma o triângulo A no: a) triângulo B reflexão axial b) triângulo C rotação (nos dois sentidos) c) triângulo D rotação (nos dois sentidos) d) triângulo E reflexão central. Atenção: Não apagues nenhuma linha auxiliar (retas, eixos, pontos, segmentos de reta...) que utilizaste durante o teu raciocínio. 1.2. Descreve como procedeste ou pensaste para chegar às tuas respostas. 	1.1. a) Reflexão axial; b) Rotação (nos dois sentidos); c) Rotação (nos dois sentidos); d) Reflexão central. 1.2. a) Como os pontos estão alinhados é uma reflexão axial; b) Se eu rodar a figura A nos dois sentidos para a figura C vai ficar igual; c) Se eu rodar a figura A nos dois sentidos para a figura D vai ficar igual; d) Se eu fizer uma reflexão central a partir do centro O resulta.

Este desafio mostrou-se bastante acessível para estes alunos, a maioria conseguiu completar o desafio com sucesso. Porém, quando estavam perante uma rotação indicavam se esta era no sentido positivo ou negativo sem colocar as amplitudes. Apenas dois alunos foram capazes de referir que era possível rodar em ambos os sentidos dependendo das amplitudes dos ângulos de rotação.

As dificuldades surgiram principalmente na questão 1.2 onde foi pedido para descrever como procederam para chegar às respostas. Esta dificuldade, segundo Duval (2005), encontra-se relacionada com o facto da geometria necessitar de uma articulação cognitiva entre dois registros de representação semiótica diferentes: a visualização e a língua. Alguns alunos foram capazes de identificar corretamente a isometria que transformava a figura A em cada uma das suas imagens. Porém, a descrição do processo de resolução tornou-se uma tarefa difícil, demostrando que os alunos sentiram menos dificuldades nas transformações internas a um registro (tratamento), e maiores dificuldades na conversão de um registro de representação semiótico em outro registro pertencente a outro sistema semiótico (Duval, 2012b). Durante a resolução do desafio a maioria dos alunos referiram que conseguiam identificar as isometrias presentes, mas não sabiam como explicar. Quando essa dificuldade surgia, a investigadora dirigia-se ao aluno em questão e pedia para que explicasse oralmente o que tinha feito. Esta abordagem possibilitou verificar que os alunos demostraram dificuldade em colocar por escrito o que já tinham expressado oralmente (Duval, 2012a).

Outra dificuldade observada prendeu-se com o facto de os alunos referirem que os triângulos não tinham as mesmas dimensões. Esta primeira perceção de que os triângulos não seriam congruentes, encontra-se relacionada com a apreensão operatória de figuras mais propriamente com as modificações óticas e com a visibilidade de cada aluno. De facto, duas figuras congruentes podem parecer diferentes quanto às suas dimensões quando se encontram a uma distância diferente do centro de visão (Duval, 2012a).

Análise do 3.º Desafio

3.º Desafio - Composição geométrica

Maurits Cornelis Escher nascido em 1898 na holanda foi um artista gráfico e muito famoso pelos seus trabalhos de ilusão de ótica. Escher apoiou-se na cultura árabe quando esteve em Espanha em contacto com obras construídas pelos mouros.

Imagina que és um artista gráfico….

1. Utilizando as isometrias estudadas. Constrói uma composição geométrica para realizar a decoração de uma das paredes do corredor da tua escola.
2. Descreve os passos que seguiste para realizares a tua composição e quais as isometrias que utilizaste.
3. Apresenta a tua composição geométrica à turma.

Durante as apresentações, os alunos foram questionados relativamente às isometrias presentes em cada composição apresentada. Assim, foi possível verificar que a maioria dos alunos compreendeu as propriedades das isometrias. Estes foram capazes de identificar as isometrias utilizadas pelos colegas durante a construção das composições e, argumentar a presença de outras isometrias. Depois de apresentarem os seus trabalhos, estes foram afixados na sala de aula. Na **Figura 12** e **Figura 13** são apresentadas as composições geométricas dos alunos.

Figura 12 - Composições Geométrica com recurso a material de desenho.

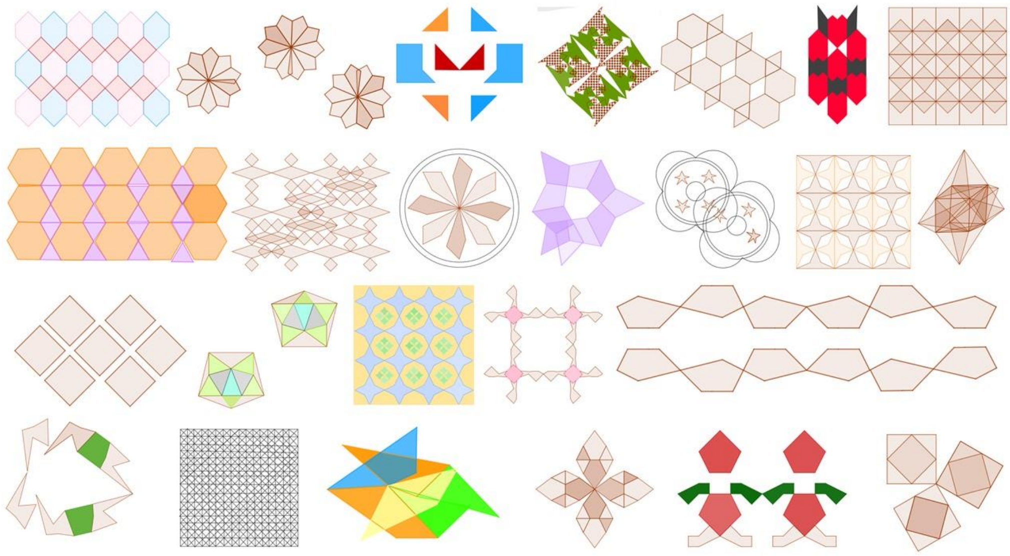


Figura 13 - Composições Geométricas com recurso ao *GeoGebra*.

Quanto às dificuldades sentidas na sala de informática, alguns alunos demostraram dificuldades em iniciar o seu trabalho por falta de ideias e, por já não se recordarem de certos comandos do *GeoGebra* sendo necessário relembrar. Na sala de Matemática, as dificuldades prenderam-se igualmente com a falta de ideias/criatividade para iniciar o trabalho, porém depois desta dificuldade ultrapassada, o trabalho decorreu mais facilmente. Durante a apresentação foi visível que dois alunos não usaram as isometrias, apenas usaram polígonos e retas sem nenhum critério e, um aluno tentou recriar uma obra de *Escher*. Este aluno demostrou muito talento, contudo não desenvolveu o trabalho de acordo com o enunciado. Os alunos também demostraram dificuldades em relação à descrição do que realizaram. Estes durante a realização do desafio não foram registando no papel os vários passos, o que se refletiu na apresentação oral. A maioria já não se lembrava do que tinha feito e apresentaram dificuldade na utilização do vocabulário correto (ver **Tabela 28)**.

Tabela 28 - Apresentações orais (excertos)

Composição no *GeoGebra* Ver **Figura 13:** penúltima figura da 3.ª linha.	**Composição em Papel** Ver **Figura 12:** última figura da 2.ª linha.
(…) Prof: E tu Aluno A como fizeste? Alunos: Oh…. Tão lindo!... Aluno A: Eu…eu fiz uma rotação ali, e…. ah e depois fiz reflexões axiais daquele lado.	(…) Prof: Então… o que fizeste? Alunos: Que lindo…. o que é isso? Aluno A: É um sapo. Prof: Olhem… vamos ouvir o Aluno A, têm de

Prof: Então usas-te as rotações e a reflexão axial, não é? Aluno A: Sim. Prof: É vocês conseguem ver mais algumas isometrias neste trabalho? Aluno B: Eu consigo ver reflexão axial no centro. Prof: No centro onde? Aluno B: Ali ao alto. Outros alunos: Na vertical…… Aluno A: Ah… sim…na vertical, como se tivesse aí um espelho. Prof: Então tu estás a ver uma reflexão axial com eixo na vertical, não é? Aluno A: Sim… é isso. E também há do outro lado… na…. na horizontal. Prof: Muito bem, é verdade também existe uma reflexão axial com eixo na horizontal. (…)	estar em silêncio! Aluno A: Só pensei num sapo e usei o transferidor. Prof: E qual a isometria que usaste? Aluno A: Não foi nenhuma que nós demos nas aulas. Prof: Então qual foi? Aluno A: Já não me lembro. Prof: Olha, tu escreveste aqui no papel, queres vir ler? Aluno A: Ah… sim... é a translação. Prof: Pois nós falamos dela quando foram apresentadas as obras de *Escher*, mas não a exploramos porque agora só se dá no 7.º ano. (…)

No que toca à dimensão afetiva/emocional, os alunos demostram-se interessados e empenhados. Durante a divisão da turma em dois grupos, criou-se alguma discussão relativamente a qual dos grupos iria primeiro para a sala de informática. Ambos os grupos queriam ir em primeiro lugar, este desentendimento acabou por ser resolvido de forma democrática. Este episódio demostra o entusiasmo dos alunos na utilização do programa *GeoGebra*. Durante a apresentação das composições também foi notório o interesse dos alunos, embora tenha existido algum barulho, esta agitação demostrou o entusiasmo que os alunos tiveram sempre que viam uma composição de um colega.

Como ponto menos positivo no decorrer da implementação deste desafio, saliento a falta de tempo referida pelos alunos para completar as suas composições com o material de desenho e, também no *GeoGebra*. Como ponto positivo, refiro o entusiasmo dos alunos. Estes afirmaram que gostaram da aula visto que foi dinâmica e divertida e que proporcionou a realização de algo criativo. Disseram igualmente que a construção no *GeoGebra* é bem mais fácil que no papel e que a sua utilização durante as aulas, os ajudou a compreender as isometrias e a melhorar a visualização. Estas afirmações foram ao encontro do que refere Lemke et al., (2016, p. 612), “na visão dos alunos, o *GeoGebra* torna a Matemática tangível, dinâmica, interativa, divertida, acessível, disponível e torna a Matemática mais fácil de se aprender”.

Capítulo IV – Conclusões

Neste capítulo são apresentadas as considerações finais, as principais conclusões onde se tenta responder às questões de investigação e uma reflexão pessoal relativa ao percurso durante toda a PPS.

4.1. Considerações finais

Neste subcapítulo serão apresentadas as várias etapas do estudo e uma análise tendo em conta os indicadores de idoneidade didática.

Inicialmente identificou-se uma problemática e definiu-se a temática da investigação. Seguidamente foram elaborados os objetivos e as questões de investigação. Desta forma, as questões a que se pretendeu dar resposta foram as seguintes: (i) Quais as dificuldades que surgem em alunos do 2.º CEB, quando confrontados com desafios que implicam a visualização espacial? (ii) Como explicar as dificuldades dos alunos nos desafios que envolvem visualização espacial? (iii) Qual o papel do *GeoGebra* na resolução dos desafios? Estas questões tinham como objetivos: (i). Promover a visualização espacial numa turma do 6.ºano do 2.º CEB; (ii). Identificar as principais dificuldades dos alunos em desafios que implicam a visualização espacial; (iii). Analisar e interpretar o tipo de erro cometido pelos alunos em desafios que envolvem a visualização espacial; (iii). Integrar as tecnologias digitais na aprendizagem das isometrias de forma a desenvolver a visualização espacial.

Para dar resposta às questões e antes do início da temática das isometrias no plano, foi realizado uma ficha diagnóstico para averiguar quais os conhecimentos prévios dos alunos em relação ao tema. Tendo em conta estes dados, a literatura, as AE para o 6.º ano de escolaridade, as observações e as reuniões com a professora orientadora e cooperante, foram selecionados três desafios que foram considerados acessíveis e ao mesmo tempo desafiantes para os alunos. Os desafios decorreram em contexto de sala de aula durante a aula de Matemática. Porém, foram necessárias duas aulas de TIC para aprender a explorar o *GeoGebra*. O último desafio desenvolveu-se em dois momentos, que decorreram ao mesmo tempo em salas diferente, um momento na sala de TIC e outro na sala de Matemática. O primeiro desafio foi colocado uma segunda vez e por último foi realizado um questionário com o objetivo de recolher as opiniões dos alunos relativamente às aulas, aos desafios e à utilização do *GeoGebra*.

O estudo desenvolveu-se em contexto de investigação-ação. A análise dos dados recolhidos foi, essencialmente, de natureza qualitativa. Tendo sido a observação participante, as notas de campo, o registo áudio e a recolha documental, as técnicas e instrumentos de recolha de dados utilizadas. Os participantes do estudo foram 25 alunos de uma turma do 6.º ano, dos quais apenas estiveram presentes 24 alunos.

Relativamente à adequação didática, ao nível da idoneidade epistémica durante a planificação foi tida em conta as definições dos conceitos a explorar como: isometrias, simetrias, rotação, reflexão axial e central. No que concerne à adequação cognitiva, relativamente aos conhecimentos prévios, os alunos já tinham dado no ano anterior o conceito de simetria e de eixo de simetria, contudo na ficha diagnostica a maioria demostrou alguma dificuldade em encontrar simetrias numa figura e a traçar eixos de simetria. Desta forma, foi realizada uma revisão destes conceitos antes de avançar. Na adequação afetiva, foi tido o cuidado de motivar os alunos para a temática. Assim, foram usados materiais como representações de azulejos e de figuras geométricas impressas, azulejos verdadeiros, objetos da sala de aula e a integração dos recursos digitais. Os desafios também serviram como motivação, visto que os alunos todas as aulas questionavam quando é que iriam realizar outro desafio. Relativamente à adequação interacional, todos os alunos participaram no estudo, à exceção de um aluno que por motivos de saúde apenas realizou a repetição do 1.º desafio. Os alunos com mais dificuldades em Matemática também participaram ativamente e pediam para partilhar as suas soluções com o grupo. Ao nível da adequação mediacional, os alunos tiveram todos os materiais necessários à sua disposição. Além da utilização dos computadores usando o *GeoGebra*, foi ainda criado, pela professora estagiária, um dossiê que continha diversos recursos a serem utilizados durante as aulas e onde os alunos podiam arquivar os seus trabalhos. Houve ainda uma aula, não referida neste estudo, em que os alunos usaram os seus telemóveis para realizar um *Kahot!.* Por último, foi tida em conta a adequação ecológica. Os desafios e outras atividades colocadas relativas às isometrias no plano integram o tema da “Geometria e Medida” e o tópico “figuras planas e sólidos geométricos” na AE do 6.º ano do 2.ºCEB.

4.2. Principais Conclusões

Após a recolha e análise de dados realizada e a sua articulação com a revisão da literatura que suporta o seguinte estudo, tentou-se responder às questões de investigação.

Q1: Quais as dificuldades que surgem em desafios que implicam a visualização espacial?

As dificuldades encontram-se ligadas com a incapacidade de recordar ou simplesmente não saber aplicar corretamente as propriedades das isometrias estudas. Além disso, relativamente ao primeiro desafio, alguns alunos não reconheceram e/ou não consideraram todos os eixos de simetria do quadrado, em particular as diagonais. Desta forma as dificuldades estão relacionadas com a manipulação de figuras mentalmente e graficamente, assim como com a apresentação por escrito do procedimento realizado para chegar à solução.

No decorrer do segundo desafio a dificuldade inicial prendeu-se com o facto dos alunos referirem que os triângulos não tinham as mesmas dimensões, porém este mostrou-se um desafio bastante acessível para estes alunos. As maiores dificuldades surgiram na questão 1.2, onde foi pedido para descrever como procederam para chegar às respostas. Alguns alunos foram capazes de identificar corretamente a isometria que transformava a figura A em cada uma das suas imagens. Porém, a descrição do processo de resolução tornou-se uma tarefa difícil. Durante a resolução do desafio a maioria dos alunos conseguiram identificar as isometrias presentes e explicar oralmente como fizeram, no entanto não sabiam colorar por escrito o que já tinham expressado oralmente (Duval, 2012a).

Concernente ao terceiro desafio, as dificuldades sentidas encontram-se ligadas à utilização dos recursos materiais, como o transferidor, o compasso e *GeoGebra*, por já não se recordarem de certos comandos e à falta de ideias/criatividade para iniciar o trabalho. Durante a apresentação foi visível que, dois alunos não usaram as isometrias, apenas usaram polígonos e retas sem nenhum critério e, um aluno tentou recriar uma obra de Escher. Similarmente ao segundo desafio, as maiores dificuldades prenderam-se com o registo escrito dos passos que realizaram na construção da composição. A maioria doa alunos não realizou o registo, o que se refletiu nas apresentações orais. A maioria já não se lembrava do que tinha feito e apresentaram dificuldade na utilização do vocabulário correto.

Q2: Como explicar as dificuldades dos alunos nos desafios que envolvem visualização espacial?

As dificuldades podem ser relacionadas com as habilidades de perceção espacial particular de cada indivíduo, nomeadamente a identificação visual, discriminação visual e reconhecimento de relações espaciais (Gutiérrez, 2011). Contudo, foram observadas dificuldades ligadas com a apreensão apreensiva e discursiva, relacionadas com o abandono do enunciado e concentração apenas na figura, assim como a dificuldade de descrever a forma como se chegou à solução.

Durante o segundo desafio, os alunos referiram a existência de triângulos que não eram congruentes, pois pareciam uns maiores e outros menores. Esta dificuldade relaciona-se com as modificações óticas e com a visibilidade de cada aluno. Duas figuras congruentes podem parecer diferentes quanto às suas dimensões quando se encontram a uma distância diferente do centro de visão (Duval, 2012a).

É importante salientar também a apreensão operatória e sequencial de figuras que explicam as dificuldades em manipular e reconfigurar figuras mentalmente e graficamente e da dificuldade de utilizar alguns recursos materiais como o compasso e o *GeoGebra*, verificadas no terceiro desafio. Quanto à compreensão dos enunciados esta pode estar relacionada com os conflitos semióticos, na medida que o aluno compreende o enunciado de uma forma diferente do que realmente é pedido. O facto de a geometria necessitar de uma articulação cognitiva entre dois registros de representação semiótica diferentes: a visualização e a língua pode explicar a dificuldade em descrever a forma como pensaram ou os passos que seguiram (Duval, 2012b).

Q3: Qual o papel do GeoGebra na resolução dos desafios?

A utilização deste recurso teve em conta, como referem vários autores, que geralmente os alunos revelam dificuldades ligadas à compreensão de conceitos, à linguagem utilizada nas definições e às propriedades geométricas (Bastos, 1999; Duval, 2012a; Figueira et al., 2007). E como refere Breda et al. (2011) é importante o desenvolvimento da capacidade de visualização com recurso às tecnologias e às representações de figuras geométricas, para que os alunos possam aumentar a sua capacidade de visualização bi e tridimensional.

Durante a sua utilização foi notória a admiração e interesse dos alunos por este programa. Passo a citar alguns comentários e questões dos alunos: "Isto é divertido", "Isto era bom para os testes", "Oh, professora! Vou pedir ao meu pai para pôr no meu computador", "É preciso pagar para instalar?”. Importa referir que estes comentários ocorreram durante o primeiro contacto com o Software. Durante as aulas, onde os alunos tiveram oportunidade de explorar o *GeoGebra*, estes afirmaram que gostaram das aulas, que foram dinâmicas e divertidas e, que estas proporcionaram a realização de algo criativo. Saliento um dos comentários durante uma aula de TIC: “Eu queria ficar na aula de TIC o dia todo”. Desta forma é possível afirmar que um dos papeis da utilização do *GeoGebra* nas aulas de Matemática é a motivação e o interesse por parte dos alunos o que naturalmente permite uma melhor aprendizagem.

Durante a implementação do segundo desafio alguns alunos referiram que a utilização do *GeoGebra* realizada anteriormente, os ajudou a compreender as isometrias estudadas e a resolver mais facilmente este desafio. Estas afirmações foram ao encontro do que refere (Lemke et al. (2016, p.612), “na visão dos alunos, o *GeoGebra* torna a Matemática tangível, dinâmica, interativa, divertida, acessível, disponível e torna a Matemática mais fácil de se aprender”.

No questionário final, na questão relativa à importância do *GeoGebra* para a aprendizagem das isometrias, a maioria dos alunos referiu que este foi uma mais-valia, visto que: (i) ajudou a compreender as amplitudes e o sentido de rotação, (ii) auxiliou na compreensão das isometrias, (iii) ajudou a superar dificuldades na rotação e a (iv) comparar o que realizaram em papel com o resultado do *GeoGebra*. No entanto, um aluno referiu ser necessário realizar as isometrias no papel e utilizar materiais concretos.

Desta forma, o papel do *GeoGebra* nos desafios prendeu-se com o facto de que este proporcionou um ambiente favorável à aprendizagem e à superação de dificuldades. Este permitiu explorar as isometrias relacionando as suas propriedades. Desta forma a utilização do *GeoGebra* enriqueceu a aprendizagem permitindo desenvolver a capacidade de visualização dos alunos.

Relativamente ao questionário de opinião, a maioria dos alunos consideraram que o 2.º desafio foi o mais fácil e o 3.º desafio o mais difícil. A seguir são apresentadas algumas opiniões dos alunos relativamente aos desafios e às aulas da professora estagiária.

- “O mais fácil foi o 3.º porque para mim foi divertido e foi o que precisei de mais criatividade. O 2.º foi o mais difícil porque foi o mais exigente e o que foi necessária uma maior visualização.”
- “Achei o 2.º mais fácil pois acho que consegui fazer o exercício rapidamente sem ter de ver as imagens facilitadoras que vinham de seguida. Achei o 3.º mais difícil pois necessitava de muitas medições e precisão para conseguir fazer as isometrias e demorou muito a pintar.”

- "O mais fácil foi o 2.º desafio porque não tive dificuldade. O mais difícil doi o 3.º desafio porque tive algumas dificuldades a fazer no papel."
- O 3.º foi considerado mais fácil e o 2.º mais difícil. "Porque já percebi muito bem as partes de desenhar e ainda tenho um pouco de dificuldade em só visualizar."
- "Acho que no geral foram muito boas as suas aulas e foram mais divertidas pois atribuíste-nos desafios diferenciados."
- "Eu gostei das aulas e dos desafios, foram engraçados e divertidos, se calhar eu até gostaria de ter mais."

4.3. Reflexão pessoal

O presente relatório reflete alguns momentos da PPS. Durante a implementação e a realização deste relatório compreendi que é importante trabalhar o pensamento geométrico dos alunos o mais cedo possível, para que estes consigam ter sucesso não só na geometria, mas na matemática em geral. A utilização de recursos digitais (*GeoGebra),* motivam os alunos, enriquecem a aprendizagem e podem através das simulações auxiliar na demostração de conceitos. Todavia, as imagens são apenas virtuais e os alunos não as podem manipular. Por outro lado, as utilizações de materiais concretos também despertam a atenção e o interesse e permitem a manipulação. Contudo, os alunos não podem criar dependência nos materiais concretos pois é necessário que consigam chegar à abstração. Desta forma, o professor deve utilizar recursos digitais e materiais manipuláveis para auxiliar os alunos numa fase inicial, depois estes devem deixar de ser necessários. O professor deve também, planificar com cuidado as aulas, conseguir cativar a atenção e o interesse dos alunos envolvendo-os em discussões utilizando vocabulário correto. Além disso, deve incentivar os alunos a utilizar e explicar diferentes abordagens para resolver o mesmo exercício (Breda et al., 2011; Duval, 2012b; Freitas & Rezende, 2013; Kaleff et al., 2002).

Quanto ao meu desenvolvimento pessoal e profissional, a PPS foi um grande desafio. No início tinha alguns receios de não conseguir estar à altura e por esse motivo tentei me preparar da melhor forma possível. A realização deste relatório final de estágio, permitiu-me desenvolver conhecimentos teóricos relativos às capacidades de visualização espacial e como as desenvolver nos alunos. Além disso, possibilitou a aquisição de aptidões de investigação e reflexão das práticas educativas. Relativamente ao contexto onde foi realizado o estudo, tanto o pessoal docente como não docente foram muito acessíveis, especialmente a professora cooperante e a professora de

TIC. Estas foram uma mais-valia para que este trabalho pudesse ser realizado, tornaram o ambiente favorável para poder realizar um bom trabalho junto dos alunos. Assim como a orientadora da Universidade de Aveiro, Doutora Teresa Neto, que entre reuniões e aulas observadas ajudou-me a superar os meus receios e dificuldades. Ambos os contextos que tive a oportunidade de conhecer durante este ano letivo, foram acolhedores e recetivos a novas propostas, permitindo um evidente desenvolvimento das minhas capacidades profissionais e sociais.

Finalizo este relatório, ciente que a minha formação nunca estará acabada. Ser professor é um constante desafio e por sua vez uma constante procura de aprendizagem. Aprendi que é muito importante conhecer o contexto, os recursos disponíveis, a turma e cada aluno com que se trabalha. Cada aluno é um ser individual, com uma história, uma personalidade e um ritmo diferente de aprendizagem. Desta forma, é necessário uma constantemente adaptação das estratégias para captar a atenção e a compreensão dos alunos numa perspetiva individual e coletiva. Ser professor implica estar em constante procura de "novas formas de trabalhar em equipa, de assumir riscos, de ser pró-ativo, de utilizar as novas ferramentas tecnológicas, de identificar necessidades próprias de formação e possibilidades de complemento de formação"(Tavares & Alarcão, 2001, p. 103).

Referências Bibliográfica

Para gerar as referências Bibliográficas foi usado o software *Mendeley* e as usadas as Normas APA 6th.

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. (Ministério da Educação. Departamento de Educação Básica, Ed.). Lisboa.

Alarcão, I. (2001). A Escola Reflexiva. In *Escola Reflexiva e Nova Racionalidade*. Porto Alegre: Artmed.

Alves, M. G., & Azevedo, N. R. (2010). *Investigar em educação, Desafios da Contrução de Conhecimento e da Formação de Instigadores num Campo Multi-eferenciado*. (S. A. VÁRZEA DA RAINHA IMPRESSORES, Ed.). Óbidos. Retrieved from https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/28587292/v_c3_a1rios_2010.pdf?1348820237=&response-content-disposition=inline%3B+filename%3DInvestigar_em_educacao_desafios_da_const.pdf&Expires=1626268157&Signature=dslSaa0Ych~SfihB2xB~2KQ9YsBmC4ep2R2oOGgNdU4HI5nYSaE

Amaral, M. E., & Cabrita, I. (2016). Matemática e Educação Visual – Uma Parceria Favorável à Apropriação das Isometrias. In *5.º Congresso Ibero-Americano em Investigação Qualitativa* (Vol. 1, pp. 1252–1261). Retrieved from https://proceedings.ciaiq.org/index.php/ciaiq2016/article/view/726

Barbosa, A. C. C. (2009). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico. Instituto de estudos da criança*. U. Minho.

Bastos, R. (1999). Geometria no Currículo e Pensamento Matemático. *Educação e Matemática*, *52*, 1–2. Retrieved from https://em.apm.pt/index.php/em/issue/view/54

Bauer, D. M. B. (2015). O ESTUDO DA SIMETRIA DE REFLEXÃO ATRAVÉS DAS MÍDIAS DIGITAIS. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Retrieved from http://hdl.handle.net/10183/134076

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2012). Programa e Metas Curriculares. Matemática. Ensino Básico. *Ministério Da Educação e Da Ciência*, 1–118. Retrieved from https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/programa_matematica_basico.pdf

Borralho, A., Cabrita, I., Palhares, P., & Vale, I. (2007). Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. *Vale, I., Pimentel, T., Barbosa, A. Fonseca, L. & Canavarro, P. (Orgs.). Números e Álgebra*, 193–211.

Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, H., & Oliveira, P. (2011). Geometria e medida no ensino básico. *Lisboa. Ministério Da Educação, Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular*. Retrieved from https://www.researchgate.net/profile/Luis_Menezes/publication/270051243_Geometria_e_medida_no_ensino_bsico/links/549f3f8a0cf257a635fe73b3.pdf

Cardoso, M. T. P. (2010). *O conhecimento matemático e didáctico, com incidência no pensamento algébrico, de professores do primeiro ciclo do ensino básico: que relações com um programa de formação contínua?* Universidade do Minho. Retrieved from http://hdl.handle.net/1822/10989

Carlos, L., & Breda, A. N. A. (2017). Simetrias nas Cercaduras das Fachadas de Azulejos de Aveiro, usando o GeoGebra. *Revista Do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo.*, *6*(2), 81–92.

Chaachoua, Y. (2007). APPRENTISSAGE DE LA SYMÉTRIE ORTHOGONALE EN FIN DE CYCLE 3 À L ’

AIDE D ' UN LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE La symétrie orthogonale dans l ' enseignement primaire Analyse des difficultés des élèves pour l ' apprentissage de la symétrie orthogonale. *Grand*, 61–83. Retrieved from https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/

Correia, M. da C. B. (2009). A observação participante enquanto técnica de investigação. *Pensar Enfermagem*, *13*, 30–36. Retrieved from https://comum.rcaap.pt/bitstream/10400.26/23968/1/2009_13_2_30-36.pdf

Costa, A. P., Moreira, A., & Sá, P. (2021). *Metodologias de Investigação análise*. (Universidade de Aveiro, Ed.) (1ª, Vol. 3). Aveiro. Retrieved from https://doi.org/10.34624/dws9-6j98

Costa, C., Feliciano, R., & Palmeirim, S. (2020). *Arte e matemática simetria* (Gulbenkian). Lisboa: Museu Calouste Gulbenkian. Retrieved from https://gulbenkian.pt/descobrir/publication/arte-e-matematica-simetria/

Creswell, J. W. (2007). *Projeto de Pesquisa, Métodos qualitativo, quantitativo e misto*. (Artmed, Ed.) (2.ª). Porti Alegre.

DGE. Aprendizagens Essenciais 1.ºAno de Matemática (2018). Retrieved from https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico

DGE. Aprendizagens Essenciais 2.º Ano de Matemática (2018). Retrieved from https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico

DGE. Aprendizagens Essenciais do 3.ºAno de Matemática (2018). Retrieved from https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico

DGE. Aprendizagens Essenciais do 4.º Ano de Matemática (2018). Retrieved from https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/1_ciclo/matematica_1c_4a_ff_18dejulho_rev.pdf

DGE. Aprendizagens Essenciais do 5.º Ano de Matemática (2018). Retrieved from https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico

DGE. Aprendizagens Essenciais do 6.º Ano de Matemática (2018). Retrieved from https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico

Dionizio, F. A. Q., & Bandt, C. F. (2012). O caminho percorrido pela semiótica e a importância dos registros de representação semiótica para a aprendizagem da Matemática. *IX ANPEDSUL - Seminário de Pesquisa Em Educação Da Região Sul*.

Domingos, J. (2010). *UM ESTUDO SOBRE POLÍGONOS A PARTIR DOS PRINCÍPIOS DE VAN HIELE*. UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO. Retrieved from https://repositorio.ufes.br/handle/10/2268

Duroisin, N., & Demeuse, M. (2016). Le développement de l' habileté de visualisation spatiale en mathématiques chez les élèves âgés de 8 à 14 ans. *Petit X*, *102*, 5–25. Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/312219310_Le_developpement_de_l'habilete_de_visualisation_spatiale_en_mathematiques_chez_les_eleves_ages_de_8_a_14_ans

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, *10*, 5–53.

Duval, R. (2012a). Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruencia, 118–138. Retrieved from https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p118

Duval, R. (2012b). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento., 266–297. Retrieved from http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266

Fernández, T. (2011). *Una Aproximación Ontosemiótica a la visualización y el Razonamiento Estacial*. Retrieved from http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/pages/tesisdoctorales.html

Ferreira, F. A., & Santos, C. A. B. dos. (2013). Uma reflexão teórica acerca do papel dos registros de representação semiótica em atividades de demonstrações matemáticas em Geometria Euclidiana A theoretical reflection on the role of semiotic registers representation activities in mathematical. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *8*(2), 177–193.

https://doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n2p177

Figueira, C., Loureiro, C., Lobo, E., Rodrigues, M. P., & Almeida, P. (2007). *Visualização e Geomatria nos primeiros anos*. Lisboa. Retrieved from https://1library.org/

Fonseca, J. A. da, & Leivas, J. C. P. (2019, August). Padrões em contextos visuais e/ou figurativos: um estudo a partir das provas da OBMEP. *Portal de Periódicos Udesc*, 60–79. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.5965/2357724X07132019060

Fonseca, K. H. O. da. (2012). Investigação-Ação: Uma Metologia Para Prática e Reflexão Docente. *Revista Onis Ciência*, *1*, 16–31. Retrieved from https://revistaonisciencia.com/wp-content/uploads/2020/02/2ED02-ARTIGO-KARLA.pdf

Font, V., Planas, N., & Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(2008), 1–18. Retrieved from https://www.ugr.es/~jgodino/eos/modelo_anadida_25junio09.pdf

Freitas, J. L. M. de, & Rezende, V. (2013). ENTREVISTA: RAYMOND DUVAL E A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, *2*, 9–34. Retrieved from http://rpem.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/963/pdf_122

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education*, *3*. https://doi.org/https://doi.org/10.2307/749957

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en didáctica de la matemática. *XVI Simposio de La SEIEM. Seminario de Investigación.*, 49–68. Retrieved from http://www.ugr.es/~jgodino/eos/origen_EOS_Baeza_2012.pdf

Gomes, A. (2012). Transformações Geométricas: Conhecimentos e Dificuldades de Futuros Professores. In A. de P. de Matemática (Ed.) (pp. 233–243). Universidade do Minho. Retrieved from http://hdl.handle.net/1822/20835

Gonzato, M., Blanco, M. F., & Godino, J. D. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Números. Revista de Didáctica de Las Matemáticas*, *77*, 99–117. Retrieved from http://www.sinewton.org/numeros/

Gonzato, M., Godino, J. D., & Neto, T. (2011, December). Evaluación de conocimientos didácticomatemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemática*, 5–37. Retrieved from https://ria.ua.pt/handle/10773/7655

Gordillo, M. M., Martins, I. P., Galbarte, J. C. G., García, L. E. F., Tenreiro-Vieira, C., Vieira, R. M., … Amaral, E. (2018). *Ciencia Cordial - Un Desafío Educativo*. (Catarata, Ed.).

Gordo, M. de F. P. C. M. (1993). *A Visualização Espacial e a Aprendizagem da Matemática*. Universidade Nova de Lisboa. Retrieved from https://run.unl.pt/bitstream/10362/278/1/gordo_1993.pdf

Gutiérrez, Á. (2011). Reflexiones Sobre La Enseñanza De La Geometría En Los Niveles De Primaria Y Secundaria. In P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 3–14). Colombia: Universidad Pedagógica Nacional. Retrieved from www.uv.es/Angel.Gutierrez

Gutiérrez, Á., & Jaime, A. (1991). El modelo de razonamiento de Van Hiele. *Educación Matemática*, *3*, 49–65. Retrieved from https://www.revista-educacion-matematica.org.mx/revista/

Halat, E. (2008). In-Service Middle and High School Mathematics Teachers : Geometric Reasoning Stages and Gender. *The Mathematics Educator*, *18*(1), 8–14. Retrieved from https://openjournals.libs.uga.edu/tme/article/view/1918

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *National Council of Teachers of Mathematics*, *74*(1), 11–18. Retrieved from https://pubs.nctm.org/view/journals/mt/74/1/article-p11.xml

Jorge, F. R., Cabrita, I., Santos, V., Neto, T. B., & Lopes, J. B. (2020). Contextos não formais do meio próximo da escola – um mundo de oportunidades para (re) encontros com a geometria. In

U. Editora (Ed.), *Matemática com vida: diferentes olhares sobre a geometria* (1ª, pp. 22–32). Aveiro. https://doi.org/https://doi.org/10.34624/emye-p069

Kaleff, A. M., Henriques, A. de S., Rei, D. M., & Figueiredo, L. G. (2015). Desenvolvimento do Pensamento Geométrico – O Modelo de Van Hiele. *Bolema - Boletim de Educação Matemática*, *9*(10), 21–30. Retrieved from https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10671

Kaleff, A. M., Sá, L. A., & Toledo, M. I. M. de. (2002). Criando, vendo e entendendo sólidos de revolução. *Boletim Gepem*, *40*, 35–54.

Lemke, R., Feuser Silveira, R., & Siple, I. Z. (2016). GeoGebra: uma tendência no Ensino de Matemática. *Colóquio Luso-Brasileiro de Educação - COLBEDUCA*, 607–619. Retrieved from file:///C:/Users/teach/Downloads/8413-Texto do artigo-27867-1-10-20161109.pdf

Linhares, P. C. A., Irineu, T. H. da S., Silva, J. N. da, Figueiredo, J. P. de, & Sousa, T. P. de. (2014). A IMPORTÂNCIA DA ESCOLA, ALUNO, ESTÁGIO SUPERVISIONADO E TODO O PROCESSO EDUCACIONAL NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR. *NUPEAT–IESA–UFG*, *4*, 115–127. https://doi.org/10.5216/teri.v4i2.35258

Loureiro, J. M. L. (2020). Plano de Contingência - Colégio Português.

Malfatti, S. M., Engers, E. M. B., Ribas, J. F., Nunes, M. A. S. N., & Francisco, D. J. (2002). LOGO3D–Uma Ferramenta Auxiliar no Aprendizado da Geometria Espacial. *XIII SBIE - Simpósio Brasileiro de Informática Na Educação*, *1*(1), 562–565. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.5753/cbie.sbie.2002.562-565

Mamede, E., & Silva, J. (2015). Explorando padrões no 6.º ano do ensino básico. *Saber & Educar*, (20), 160–173. https://doi.org/10.17346/se.vol20.181

Neves, P. C. P. das, & Baptista, D. V. de F. e L. A. (2010). EIXO QUINÁRIO: UM ELEMENTO DE SIMETRIA PRESENTE EM MOLÉCULAS E QUASI-CRISTAIS - UM EXPERIMENTO DIDÁTICO EM CRISTALOGRAFIA. *Quim. Nova*, *33*(9), 1977–1979. https://doi.org/https://doi.org/10.1590/S0100-40422010000900028.

Nieto, R. Z., & Bairral, M. A. (2010). Um Ambiente Virtual para o Trabalho com Poliedros Estrelados. *X Encontro Nacional de Ediucação Matemática*, 1–8. Retrieved from https://docplayer.com.br/55218627-Um-ambiente-virtual-para-o-trabalho-com-poliedros-estrelados.html

Nogueira, I. C., & Neto, T. B. (2017). Indicadores de idoneidade didática em contexto de formação inicial de professores : o caso da Ana. *Atas Do XXVIII SIEM*, (July 2018).

Pedro Palhares. (2004). *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico*. (Lider, Ed.) (1.ª).

Philibert, J. (2015). La symétrie dans la nature, dans la science et dans l'art. Retrieved from https://www.terreetocean.fr/a-laquaforum-la-symetrie-dans-la-nature-les-arts-et-les-sciences/

Pimenta, S. G., & Franco, M. A. S. (2008). *Pesquisa em educação, Possibilidades investigativas/formativas da pesquisa-ação - Vol.2*. (Edições Loyola, Ed.). São Paulo. Retrieved from https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/52547713/2008pesquisaEmEducacaovIIAbr2008.pdf?1491675129=&response-content-disposition=inline%3B+filename%3DALMEIDA_Maria_ _de_GHANEM_Elie_BICC.pdf&Expires=1626282467&Signature=NtYVDkd9um0XAnOfC8x2rZAmFYfLK6wLd90

Pimentel, T., & Vale, I. (2012). Os padrões e o raciocínio indutivo em matemática. *Quadrante*, *XXI*, 29–50.

Pirola, D. L. (2012). *Aprendizagem em Geometria nas Séries Iniciais: Uma proposta pela integração entre as apreensões em Geometria e as Capacidades de Percepção Visual*. *RI UFSC*. Universidade Federal de Santa Catarina. Retrieved from https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/96199

Salles, E. B. De, Roos, L. T. W., Lucion, P., & Züge, V. (2012). Arte e matemática: o ensino de simetria é magia. In *IV Jornada Nacional de Educação Matemática*. Universidade de Passo Fundo. Retrieved from https://docplayer.com.br/34741042-Arte-e-matematica-o-ensino-de-simetria-e-magia.html

Settimy, T. F., & Bairral, M. (2020). Visualização em Sala de Aula: Revelando Descobertas de Estudantes do Sexto Ano do Ensino Fundamental. *Jornal Internacional de Estudos Em Educação Matemática*, *12*(3), 258–267. https://doi.org/10.17921/2176-5634.2019v12n3p258-267

Tavares, J., & Alarcão, I. (2001). Paradigmas de Formação e Investigação no Ensino Superior para o Terceiro Milênio. In *Escola Reflexiva e Nova Racionalidade*. Porto Alegre: Artmed.

Vale, I. (2012). As tarefas de padrões na aula de matemática: um desafio para professores e alunos. *Interacções*, *8*(20), 181–207. https://doi.org/10.25755/int.493

Van Hiele, P. (1999a). Begin with Play. *Teaching Children Mathematics*, *5*(6), 310–316. Retrieved from https://doi.org/10.5951/TCM.5.6.0310

Van Hiele, P. (1999b). Desarrollando El Pensamiento Geométrico a Través De Actividades Que Comienzan Como Un Juego, 1–9. Retrieved from http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2016/03/Desarrollando-la-geometria-por-Van-Hiele.pdf

Veloso, E., Albuquerque, C., Rocha, I., Santos, L., & Serrazina, L. (2006). *A Matemática na Formação Inicial de Professores*. (Associação de Professores de Matemática, Ed.).

Veloso, E., Bastos, R., & Figueirinhas, S. (2019). Isometrias e Simetria com materiais manipuláveis. *Educação e Matemática*, 23–128.

Veríssimo, L. (2014). Motivar os alunos, motivar os professores: Faces de uma mesma moeda. In U. Católoca (Ed.), *Melhorar a Escola* (pp. 73–90). Porto.

Vieira, C. R. (2010). *REINVENTANDO A GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM ENVOLVENDO MATERIAIS CONCRETOS, SOFTWARES DE GEOMETRIA DINÂMICA E A TEORIA DE VAN HIELE. Vanguardia latinoamericana, Tomo VI*. U. Federal de Ouro Preto. Retrieved from http://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/3252

Anexo 1

➢ *Planificação de Matemática do dia 5 de maio 2021*

<table>
<tr><td colspan="2">Planificação de 5 de maio 2021</td></tr>
<tr><td>Estagiária: Telma Chipelo</td><td>Professora Cooperante: Professora I.</td></tr>
<tr><td>Área disciplinar: Matemática</td><td>Professora orientadora da UA: Dr. T.</td></tr>
<tr><td>Ano de Escolaridade: 6.º</td><td>Duração da aula: 90 minutos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Enquadramento da aula (tendo como referências as Aprendizagens Essenciais)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Domínio: Geometria e Medida</td></tr>
<tr><td colspan="2">AE: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes:
(i) Identificar e construir o transformado de uma dada figura através de isometrias (reflexão axial) e reconhecer simetrias de reflexão em figuras, em contextos matemáticos e não matemáticos, descrevendo os resultados obtidos; (ii) desenvolver a capacidade de visualização e construir explicações e justificações matemáticas e raciocínios lógicos, incluindo o recurso a exemplos e contraexemplos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descritores do perfil dos alunos: Conhecedor/sabedor/culto/informado; Participativo/colaborador.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nota: Além dos objetivos específicos do 6.º ano, incluem-se os seguintes (comuns aos 2 anos de escolaridade do 2.º ciclo). No que se refere aos temas e conteúdos de aprendizagem, a ação do professor no 2.º ciclo deve ser orientada por forma a que, relativamente à <u>geometria e medida</u> os alunos prossigam no desenvolvimento da capacidade de visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas, alargando-se o estudo de sólidos geométricos e de figuras planas e o estudo das grandezas geométricas e das isometrias do plano. Neste ciclo, nas isometrias dá-se especial atenção à reflexão e à rotação.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos:</td></tr>
<tr><td colspan="2">(i)Identificar, dada uma reta r e um ponto M não pertencente a r, a «imagem de M pela reflexão axial de eixo r» como o ponto M’ tal que r é mediatriz do segmento [MM’] e identificar a imagem de um ponto de r pela reflexão axial de eixo r como o próprio ponto; (ii) Designar, quando esta simplificação de linguagem não for ambígua, «reflexão axial» por «reflexão»; (iii) Saber, dada uma reta r, dois pontos A e B e as respetivas imagens A’ e B’ pela reflexão de eixo r , que são iguais os comprimentos dos segmentos [AB] e [A’B’] e designar, neste contexto, a reflexão como uma «isometria»; (iv) Reconhecer, dada uma reta r, três pontos A, O e B e as respetivas imagens A’, O’ e B’ pela reflexão de eixo r, que são iguais os ângulos AOB e A’O’B’; (v) Identificar uma reta r como «eixo</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">de simetria» de uma dada figura plana quando as imagens dos pontos da figura pela reflexão de eixo r formam a mesma figura.</td></tr>
<tr><td>Pré-requisitos:</td><td colspan="2">Estratégias:</td></tr>
<tr><td>Critérios de igualdade de triângulos (LLL, LAL; ALA); construção de triângulos; utilizar o compasso e o transferidor.</td><td colspan="2">Exposição dialogada com auxílio do programa de geometria dinâmica GeoGebra, do manual, do quadro branco, de imagens impressas e da apresentação em PowerPoint; realização de exercícios.</td></tr>
<tr><td>Organização da sala de aula:</td><td colspan="2">Trabalho extra-aula:</td></tr>
<tr><td>Organização condicionada pelas linhas orientadoras da DGS.</td><td colspan="2">Página 14 – atividade inicial; página 15 - exercício 2; página 17 – exercício 4,5 e 6.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Desenvolvimento da aula</td><td>Tempo previsto</td></tr>
<tr><td colspan="2">Os alunos entram na sala de aula, sentam-se nos seus lugares e retiram o material para a disciplina.
Abertura da lição e escrita do sumário no quadro.
Lição nº 134 e 135 05/05/2021

<u>Sumário:</u>
Eixos de simetria. Simetria de reflexão.
Reflexão axial, imagem de um ponto.
Propriedades da reflexão axial, exploração com o GeoGebra.
Resolução de exercícios do manual.
1.º desafio – Reflexão axial.
Os alunos registam o sumário no caderno diário.</td><td>10’</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Depois do sumário registado os alunos ouvem a explicação da professora-estagiária:

<u>Prof. Estagiária</u>:
• Hoje vamos continuar com o capítulo das isometrias e vamos falar sobre a reflexão axial e o eixo de simetria. Alguns de vocês já ouviram falar nestes conceitos, e outro estão a ouvir pela primeira vez.</td><td>5’</td></tr>
</table>

• *Para quem já ouviu falar em isometria ou talvez simetria de uma figura o que pensam que isso é? Onde podemos observar a simetria à nossa volta?* (é expectável que os alunos refiram o facto da reflexão num espelho e que podemos ver nos azulejos das casas) *Prof. Estagiária:* • *Então podemos ver a simetria em quase tudo que nos rodeia: nos azulejos, na calçada, em obras de arte, monumentos, casas, na natureza e no nosso próprio corpo.* Mostrar alguns azulejos verdadeiros.	
2. Seguidamente são projetadas algumas réplicas de azulejos. *Prof. Estagiária:* • *Olhando para estas imagens acham que elas são simétricas? Porquê?* (é expectável que os alunos digam que sim porque é possível dividir as imagens em duas partes idênticas) *Prof. Estagiária:* • *Vamos investigar se realmente essas imagens são simétricas. Para isso abram a vossa capa das isometrias e retirem a primeira imagem que está projetada. Agora vocês têm de a dobrar ao meio de forma a verificar se as duas partes coincidem. Podem ter de dobrar de diferentes formas: vertical, horizontal e pelas diagonais. Sempre que as figuras sejam coincidentes dos dois lados tracem uma reta pelo sítio da dobra. Quando descobrirem todas as formas possíveis de dobrar a figura contém quantas retas é que traçaram e registem na parte de trás da imagem.* *Prof. Estagiária:* • *Então já sabem quantas vezes é possível dobrar essa figura de forma que ambas as partes coincidam?* (é expectável que os alunos digam que podem dobrar duas vezes pelas diagonais.) *Prof. Estagiária:* • *As duas diagonais que vocês traçaram nessa réplica de azulejo são chamadas de eixos de simetria da figura. Este divide a figura em duas partes iguais e quando a figura é dobrada por esse eixo todos os pontos dessas figuram são coincidentes.*	15’

- *Agora no vosso caderno diário, a seguir ao sumário escrevam como título “reflexão axial” e a seguir escrevam a seguinte definição que se encontra projetada:*

> *“Quando a reflexão numa reta L faz parte do grupo de simetrias de uma dada figura dizemos que essa possui simetria axial e que L é um eixo de simetria dessa figura.”* (Breda et al., 2011)

Prof. Estagiária:

- *Retirem da vossa capa das isometrias a réplica de azulejo seguinte que se encontra projetada. Da mesma forma que fizeram com a anterior encontrem os eixos de simetria da figura.*

(é expectável que os alunos refiram que tem quatro eixos de simetria)

Prof. Estagiária:

- *Agora apenas olhando para a terceira figura projetada encontrem os eixos de simetria.*

(é expectável que os alunos consigam encontram um eixo)

3. Visualização de um pequeno vídeo relativo à reflexão axial.

Prof. Estagiária:

- *Vamos ver um pequeno vídeo onde é possível ver como é realizada a reflexão de um azulejo de forma a pavimentar uma parede.*
- *Vamos ver com atenção que a reflexão é realizada em relação a uma dada reta e pode ser realizada em vários sentidos (direita, esquerda, cima e baixo).*

Prof. Estagiária:

- *Quantos eixos de simetria tem um quadrado? E um retângulo? E um triângulo equilátero? E se for um triângulo escaleno?*

10’

A professora estagiária desenha no quadro cada uma das figuras que vai referindo (figura 3).

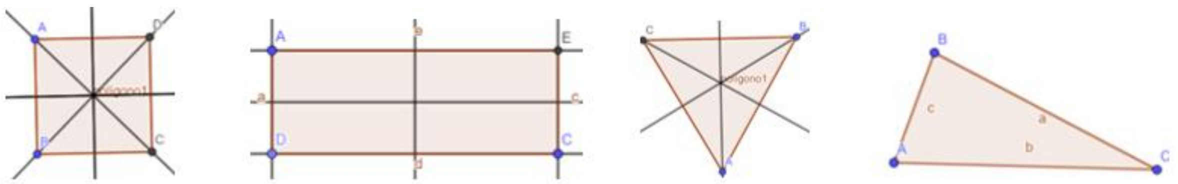


Figura 3 - Figuras geométricas e os eixos de simetria

(é expectável que os alunos refiram que o quadrado tem quatro eixos de simetria, o retângulo quatro ou dois eixos de simetria, o triângulo equilátero três eixos e o escaleno nenhum)

<table>
<tr><td>

<u>*Prof. Estagiária:*</u>

- *Quando temos um polígono regular o número de eixos de simetria é igual ao número de lados. Passem para o caderno o que eu acabei de escrever no quadro.*

</td><td></td></tr>
<tr><td>

4. A <u>prof. estagiária</u> explica:

- *Agora vamos ver como é que podemos realizar uma reflexão axial de uma figura. Para isso temos de saber o que é a reflexão axial e as suas propriedades.*
- *Abram o manual na página 15 e vamos ler o que diz o livro relativamente à reflexão axial:*

"Dada uma reta "e" e um ponto A não pertencente a "e", a imagem de A pela reflexão axial de eixo "e", ou simplesmente reflexão de eixo "e", é o ponto A' tal que "e" é a mediatriz do segmento de reta [AA']. A imagem de um ponto de "e" é o próprio ponto."

A professora estagiária desenha no quadro a figura 4, para melhor explicar aos alunos a definição de reflexão axial que se encontra no livro.

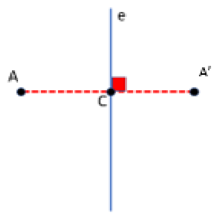


Figura 4 - Imagem A' do ponto A pela reflexão axial de eixo e

Realização do exercício 1 da página 15 oralmente.

<u>*Prof. Estagiária*</u>:

- *Na página 16 temos as propriedades da uma reflexão axial vamos ler:*

"Uma reflexão axial transforma um segmento de reta noutro com o mesmo comprimento.

Uma reflexão axial transforma um ângulo noutro com a mesma amplitude."

</td><td>10'</td></tr>
<tr><td>

5. *Utilização do programa de geometria dinâmica GeoGebra.*

<u>*Prof. Estagiária*</u>:

- *Agora vamos observar e verificar as propriedades que estão no manual, para isso vamos usar o programa de geometria dinâmica GeoGebra (figura 5).*

</td><td>15'</td></tr>
</table>

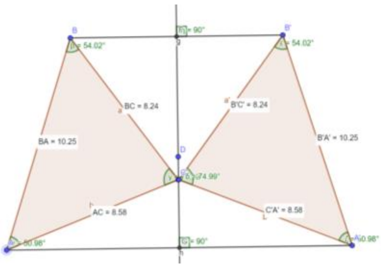


Figura 5 – Exemplo de uma reflexão axial usando o programa de geometria dinâmica GeoGebra.

6. *Realização do 1º desafio (Anexo 1.2).*	20'

7. Caso os alunos consigam realizar o desafio mais cedo que o previsto:

   - Projeção de imagens de monumentos, da natureza e corpo humano para identificarem o eixo de simetria.

   - Curiosidade relativa ao motivo das letras das ambulâncias e bombeiros encontrarem-se escritas ao contrário.

   - Exercício páginas 14, 15, 17 exercício 4, 5 e 6 e página 19 exercício 1 e 2.

Recursos/materiais:

• 1 Computador;	• Material de escrita (para cada aluno);
• Apresentação em PowerPoint (Anexo 1.1);	• réguas, compassos, cadernos diários (1 por aluno);
• Programa de geometria dinâmica GeoGebra;	• 25 imagens impressas;
• 1 projetor da sala de aula;	• 25 exemplares impressos do primeiro desafio (Anexo 1.2).
• 1 quadro branco e marcadores para o quadro;	
• 25 manuais do aluno;	

Instrumento de Registo/Monotorização das Aprendizagens/Avaliação:

Do professor: grelha de classificação (Anexo 1.3).

Referências bibliográficas

Anache, C. (2020). 11 monumentos mais famosos do mundo: históricos e culturais.

Atractor. (2016). CARIMBANDO O PLANO 1. Retrieved April 30, 2021, from https://www.atractor.pt/mat/filmes/filme7.html

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2012). Programa e Metas Curriculares. Matemática. Ensino Básico. Ministério Da Educação e Da Ciência, 1–118. Retrieved from https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/programa_matematica_basico.pdf

Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, H., & Oliveira, P. (2011). Geometria e medida no ensino básico. Lisboa. Ministério Da Educação, Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular. Retrieved from https://www.researchgate.net/profile/Luis_Menezes/publication/270051243_Geometria_e_medida_no_ensino_bsico/links/549f3f8a0cf257a635fe73b3.pdf

Canabarro, A. (2015). Você Sabe Por Que Veículos De Emergência Tem Seus Nomes Escritos Ao Contrário? Retrieved April 30, 2021, from https://www.tricurioso.com/2015/09/15/voce-sabe-por-que-veiculos-de-emergencia-tem-seus-nomes-escritos-ao-contrario/

DGE. Aprendizagens Essenciais do 6.o Ano de Matemática (2018). Retrieved from https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico

Fernández, T. (2011). Una Aproximación Ontosemiótica a la visualización y el Razonamiento Estacial. Retrieved from http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/pages/tesisdoctorales.html

Jader, M. (2019). Azulejos em Aveiro: Não é só fachada, é Arte. Litoral Magazine. Retrieved from https://litoralmagazine.com/azulejos-em-aveiro-nao-e-so-fachada-e-arte/

Junior, L. de S. (2018). Fenômeno Morpho. Retrieved from https://www3.unicentro.br/petfisica/2018/06/29/fenomeno-morpho/

Kurhan. (2021). Beautiful young woman face. Dental health. Retrieved April 30, 2021, from https://www.shutterstock.com/pt/image-photo/beautiful-young-woman-face-dental-health-120156700

Maria Augusta Ferreira Neves, L. F. (2019). Máximo 6.o ano. (P. Editora, Ed.) (1.a).

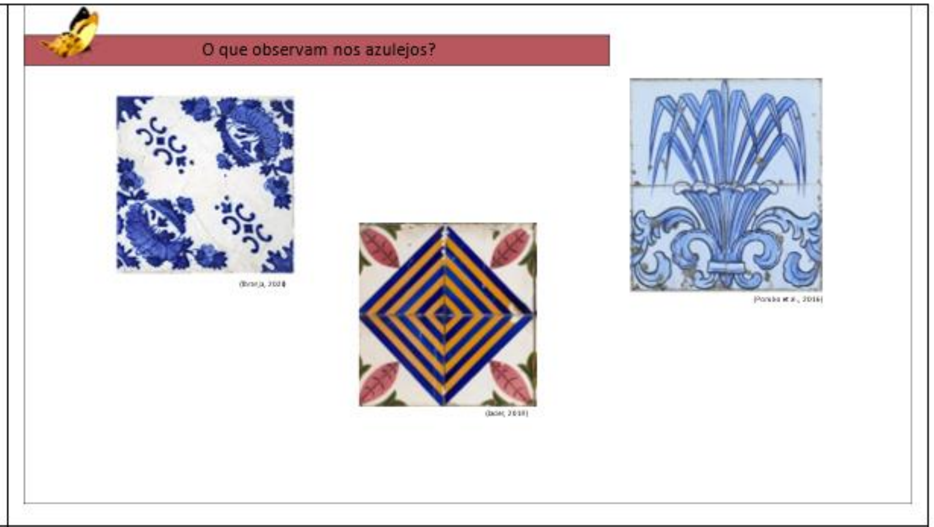
Pombo, L., Marques, M., Afonso, L., Cruz, I., Oliveira, S., Dias, P., … Nistal, M. L. (2016). EduPARK. Retrieved December 11, 2020, from http://edupark.web.ua.pt/mobile_app

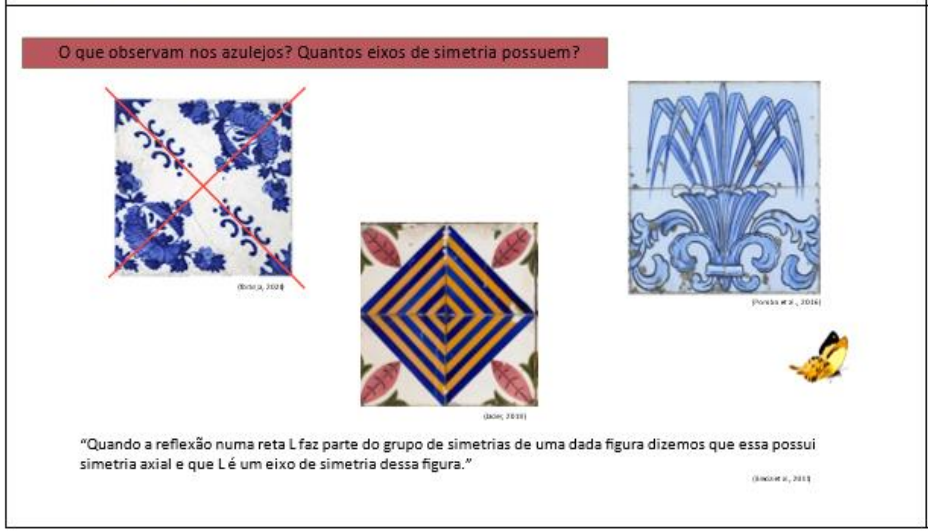
SÁ, P. (2020). Porque é que os nomes “Ambulância” e “Bombeiros” são escritos ao contrário nos veículos de emergência? Retrieved April 30, 2021, from https://www.soscuriosidades.com/ambulancia-bombeiros-escritos-ao-contrario/

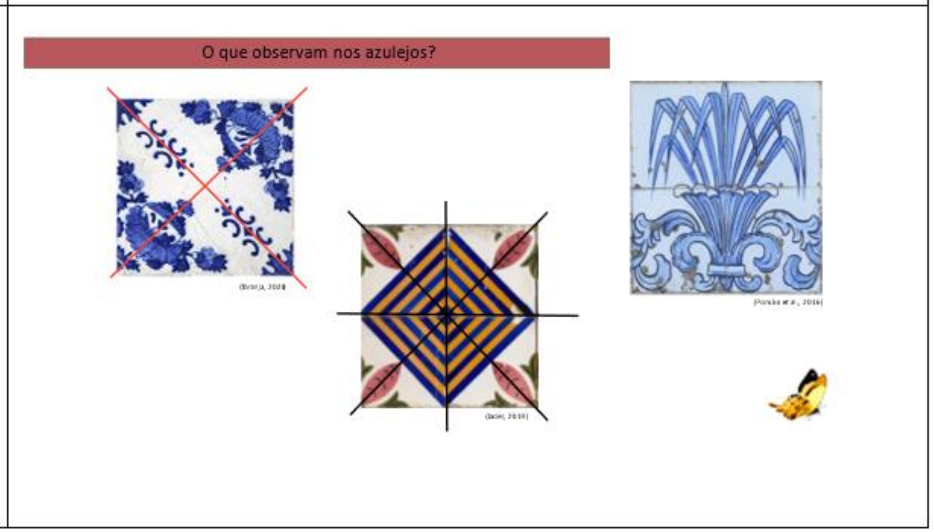
Toranja. (2020). Toranja. Retrieved May 1, 2021, from https://toranja.com/produto/azulejo-portugues-verse-mockup-bimbys/

VivaDecoraPro. (2019). Confira 4 tipos de simetria e veja belos exemplos na arquitetura. Retrieved December 7, 2020, from https://www.vivadecora.com.br/pro/curiosidades/simetria/

Anexo 1.1 - Apresentação PowerPoint







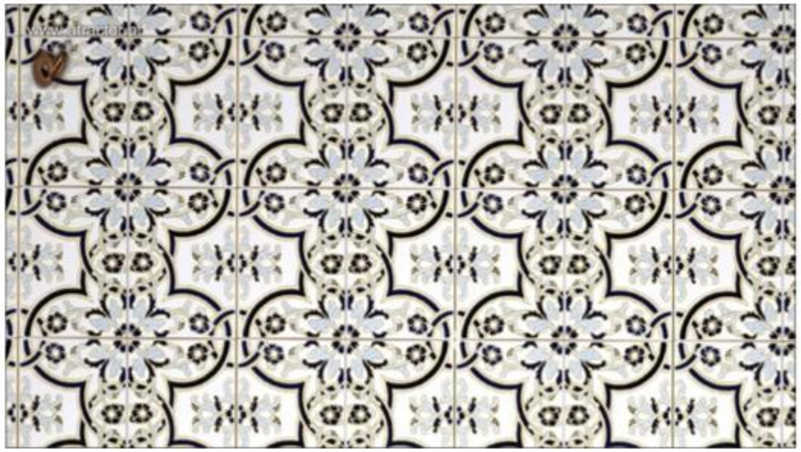
O que observam nos azulejos? Quantos eixos de simetria?

O que observam nos azulejos? Quantos eixos de simetria possuem?

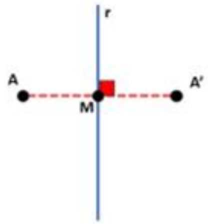
2 eixos de simetria

4 eixos de simetria

1 eixos de simetria



Reflexão Axial: imagem de um ponto

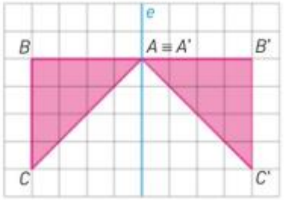


Dada uma reta r e um ponto A não pertencente a r, a imagem de A pela reflexão axial de eixo r, ou simplesmente reflexão de eixo r, é o ponto A' tal que r é a mediatriz do segmento de reta [AA']. A imagem de um ponto de r é o próprio ponto.

M é o ponto médio do segmento de reta [AA']

$$\overline{AM} = \overline{A'M}$$

Reflexão Axial: propriedades



Uma reflexão axial:

- transforma um segmento de reta noutro com o mesmo comprimento;
- transforma um ângulo noutro com a mesma amplitude;
- mantém a distância entre pontos.

Assim a reflexão axial é uma isometria.

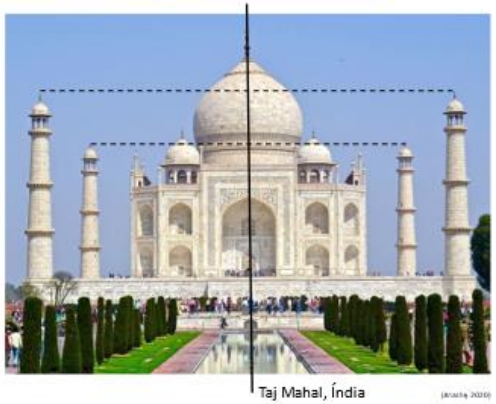
O que observam nesta imagem?

Taj Mahal, Índia

O que observam nesta imagem?

Taj Mahal, Índia

O que observam nesta imagem?



Taj Mahal, Índia

O que observam nesta imagem?

O que observam nesta imagem?

O que observam nesta imagem?

Parque Infante Dom Pedro- Parque da Cidade de Aveiro

O que observam nesta imagem?

Parque Infante Dom Pedro- Parque da Cidade de Aveiro

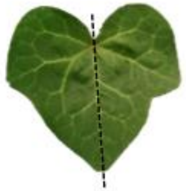
O que observam nesta imagem?

(Kumar, 2021)

(Kumar, 2018)

O que observam nesta imagem?

(Kumar, 2021)



(Kumar, 2018)

Porque é que os nomes Ambulância e Bombeiros são escritos ao contrário nos veículos de emergência?

(Sá, 2020)

(Carabano, 2018)

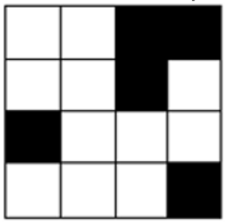
(Carabano, 2018)

Anexo 1.2 – Desafio Simetria Axial

Nome do aluno/a:		**Data:**
Estagiária: Telma Chipelo	**Professora Cooperante:** Prof. I.	**Orientadora UA:** Dr. T.

1.º Desafio - Reflexão axial

"Qual é o menor número de quadradinhos que é necessário pintar para que a figura resultante tenha pelo menos um eixo de simetria?"



a) 3 b) 5 c) 1 d) 4 e) 2

Descreve como procedeste ou pensaste para chegar à tua resposta.

____

____

____

____.

Obrigada! 😊

Nome do aluno/a:		**Data:**
Estagiária: Telma Chipelo	**Professora Cooperante:** Prof. I.	**Orientadora UA:** Dr. T.

1.º Desafio - Reflexão axial

"Qual é o menor número de quadradinhos que é necessário pintar para que a figura resultante tenha pelo menos um eixo de simetria?"

a) 3 b) 5 c) 1 d) 4 e) 2

Descreve como procedeste ou pensaste para chegar à tua resposta.

____

____

____

____.

Obrigada! 😊

Anexo 1.3 – Grelha de Classificação

Alunos		Conhecimentos		Capacidades	Atitudes		
		Definição e propriedades da reflexão axial.	Identificar eixos de simetria de uma figura plana.	Comunica o trabalho que aprendeu.	Respeita as ideias dos outros.	Participa nas atividades propostas.	Procura superar as dificuldades.
1	Aluno A						
2	Aluno B						
3	Aluno C						
4	Aluno D						
5	Aluno E						
6	Aluno F						
7	Aluno G						
8	Aluno H						
9	Aluno I						
10	Aluno J						
11	Aluno K						
12	Aluno L						
13	Aluno M						
14	Aluno N						
15	Aluno O						
16	Aluno P						

17	Aluno Q						
18	Aluno R						
19	Aluno S						
20	Aluno T						
21	Aluno U						
22	Aluno V						
23	Aluno W						
24	Aluno X						
25	Aluno Y						

Legenda: Muito Bom (5); Bom (4); Satisfaz (3); Insuficiente (2)

Observações:

Anexo 2

➢ Planificação de Matemática do dia 31 de maio 2021

Planificação de 31 de maio 2021	
Estagiária: Telma Chipelo	**Professora Cooperante:** Professora I.
Área disciplinar: Matemática	**Professora orientadora da UA:** Dr.T.
Ano de Escolaridade: 6.º	**Duração da aula:** 90 minutos
Enquadramento da aula (tendo como referências as Aprendizagens Essenciais)	
Domínio: Geometria e Medida	
AE: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes: (i). Identificar o transformado de uma dada figura através de isometrias (reflexão axial, central e rotação); (ii) desenvolver a capacidade de visualização e construção de explicações e justificações matemáticas e raciocínios lógicos; (iii) Desenvolver confiança nas suas capacidades e conhecimentos matemáticos.	
Descritores do perfil dos alunos: Conhecedor/sabedor/culto/informado; Participativo/colaborador.	
Nota: Além dos objetivos específicos do 6.º ano, incluem-se os seguintes objetivos (comuns aos 2 anos de escolaridade do 2.º ciclo). No que se refere aos temas e conteúdos de aprendizagem, a ação do professor no 2.º ciclo deve ser orientada por forma a que, relativamente à <u>geometria e medida,</u> os alunos prossigam no desenvolvimento da capacidade de visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas, alargando-se o estudo de sólidos geométricos e de figuras planas e o estudo das grandezas geométricas e das isometrias do plano. Neste ciclo, nas isometrias dá-se especial atenção à reflexão e à rotação.	
Objetivos:	
(i) Identificar, dada uma reta r e um ponto M não pertencente a r, a «imagem de M pela reflexão axial de eixo r» como o ponto M' tal que r é mediatriz do segmento [MM'] e identificar a imagem de um ponto de r pela reflexão axial de eixo r como o próprio ponto. (ii) Saber, dada uma reta r, dois pontos A e B e as respetivas imagens A' e B' pela reflexão de eixo r, que são iguais os comprimentos dos segmentos [AB] e [A'B'] e designar, neste contexto, a reflexão como uma «isometria». (iii) Identificar uma reta r como «eixo de simetria» de uma dada figura plana quando as imagens dos pontos da figura pela reflexão de eixo r formam a mesma figura. (iv) Identificar imagens de figuras geométricas planas por reflexão axial, reflexão central e rotação. (v) Reconhecer, dado um ponto O e as imagens A' e B' de dois pontos A e B pela reflexão central de centro O que são iguais os comprimentos dos segmentos [AB] e [A'B'] e designar, neste contexto, a reflexão central como uma «isometria». (vi) Designar, dados dois pontos O e M e um ângulo *a*, um ponto M' por «imagem do ponto M por uma rotação de centro O e ângulo *a*» quando os segmentos [OM] e [OM'] têm o mesmo comprimento e os ângulos *a* e MOM' a mesma amplitude. (vii) Reconhecer, dados dois pontos O e M e um ângulo *a* (não nulo, não raso e não giro), que existem exatamente duas imagens do ponto M por rotações de centro O e ângulo *a* e distingui-las experimentalmente por referência	

<table>
<tr><td colspan="3">ao sentido do movimento dos ponteiros do relógio, designando uma das rotações por «rotação de sentido positivo» (ou «contrário ao dos ponteiros do relógio») e a outra por «rotação de sentido negativo» (ou «no sentido dos ponteiros do relógio»). (viii) Reconhecer, dados dois pontos O e M, que existe uma única imagem do ponto M por rotação de centro O e ângulo raso, que coincide com a imagem de M pela reflexão central de centro O e designá-la por imagem de M por «meia-volta em torno de O». (ix) Reconhecer que a (única) imagem de um ponto M por uma rotação de ângulo nulo ou giro é o próprio ponto M.</td></tr>
<tr><td>Pré-requisitos:</td><td colspan="2">Estratégias:</td></tr>
<tr><td>Saber o que é o transformado de uma figura por ação de isometrias. Reconhecer e distinguir o transformado de uma figura pela reflexão axial, reflexão central e rotação.</td><td colspan="2">Exposição dialogada com auxílio do manual, do quadro branco, realização de exercícios.</td></tr>
<tr><td>Organização da sala de aula:</td><td colspan="2">Trabalho extra-aula:</td></tr>
<tr><td>Organização condicionada pelas linhas orientadoras da DGS. Mesas individuais para cada aluno.</td><td colspan="2">Ficha 24 do caderno de atividades.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Desenvolvimento da aula</td><td>Tempo previsto</td></tr>
<tr><td colspan="2">Os alunos entram na sala de aula, sentam-se nos seus lugares e retiram o material para a disciplina.
Abertura da lição e escrita do sumário no quadro.
Lição nº 150 e 151 31/05/2021

<u>Sumário:</u>
Correção da ficha 23.
Resolução de exercícios das páginas 32 e 33.
Resolução da ficha: 2º Desafio.

Os alunos registam o sumário no caderno diário.</td><td>10’</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Correção da ficha 23 e resolução de exercício das páginas 32 e 33 pela Professora Cooperante.</td><td>35'</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. 2.º Desafio
<u>Prof. Estagiária</u>
• Agora proponho a resolução do 2.º desafio.
• Neste desafio vocês têm de identificar qual a isometria que transformou cada um destes triângulos.</td><td>45’</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">

- *A figura inicial é o triângulo A e todos os outros são imagens do triângulo A por ação de uma isometria. É essa isometria que vocês têm de identificar.*
- *Para cada uma das alíneas, existe um anexo que podem consultar para vos ajudar a visualizar.*
- *O que vocês têm de dizer é, por exemplo, se o triângulo B é transformado do triângulo A pela isometria de reflexão axial, reflexão central ou por uma rotação.*
- *Depois devem explicar a forma como pensaram para chegar à vossa resposta.*
- *Este é um desafio individual, fechem os livros, eu vou distribuir.*

A professora estagiária distribui o desafio e circula pela sala de aula para auxiliar os alunos em eventuais dúvidas de interpretação.

</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Recursos/materiais:</td></tr>
<tr><td>• 25 manuais do aluno e cadernos diários (1 por aluno);
• 1 quadro branco e marcadores para o quadro;</td><td colspan="2">• Material de escrita (para cada aluno);
• 25 fichas do 2.º desafio impressas (Anexo 2.1).</td></tr>
<tr><td colspan="3">Instrumento de Registo/Monotorização das Aprendizagens/Avaliação:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Do professor: Checklist (Anexo 2.2).</td></tr>
</table>

Referências bibliográficas

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2012). Programa e Metas Curriculares. Matemática. Ensino Básico. *Ministério Da Educação e Da Ciência*, 1–118. Retrieved from https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/programa_matematica_basico.pdf

Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, H., & Oliveira, P. (2011). Geometria e medida no ensino básico. *Lisboa. Ministério Da Educação, Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular*. Retrieved from https://www.researchgate.net/profile/Luis_Menezes/publication/270051243_Geometria_e_medida_no_ensino_bsico/links/549f3f8a0cf257a635fe73b3.pdf

DGE. Aprendizagens Essenciais do 6.º Ano de Matemática (2018). Retrieved from https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico

Fernández, T. (2011). *Una Aproximación Ontosemiótica a la visualización y el Razonamiento Estacial*. Retrieved from http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/pages/tesisdoctorales.html

Maria Augusta Ferreira Neves, L. F. (2019). *Máximo 6.º ano*. (P. Editora, Ed.) (1.ª).

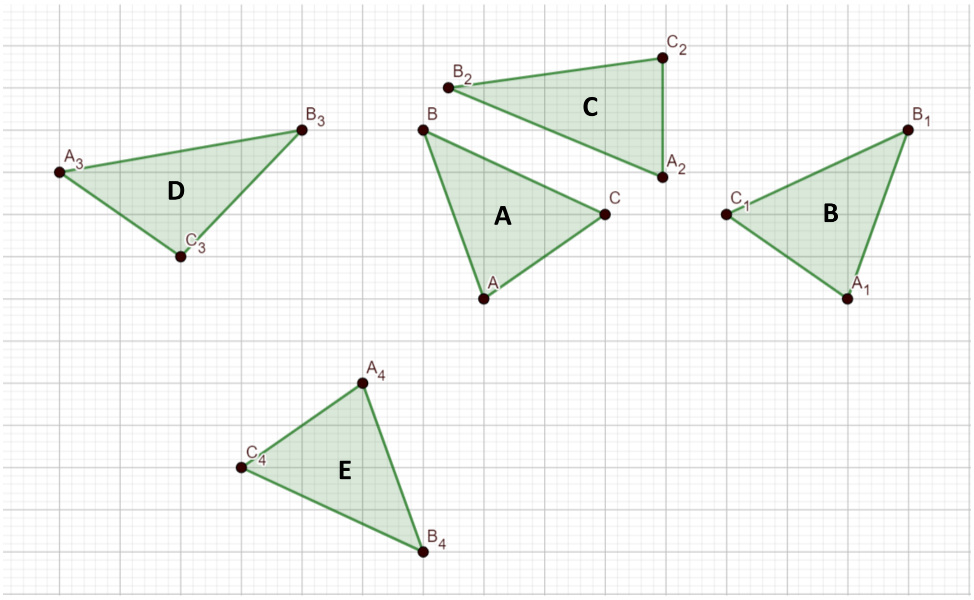
Anexo 2.1

Nome:		Data:
Estagiária: Telma Chipelo	**Professora Cooperante:** Professora I.	**6.º ano**

2.º Desafio

Descobre as isometrias que transformam triângulo A em cada uma das suas imagens

1. Os triângulos B, C, D e E são transformados do triângulo A por isometrias.



1.1. Identifica a isometria (reflexão axial, reflexão central e rotação) que transforma o triângulo A no:

a) triângulo B ____ (se precisares consulta anexo 2.1.1).

b) triângulo C ____ (se precisares consulta anexo 2.1.2).

c) triângulo D ____ (se precisares consulta anexo 2.1.3).

d) triângulo E ____ (se precisares consulta anexo 2.1.4).

Atenção: Não apagues nenhuma linha auxiliar (retas, eixos, pontos, segmentos de reta…) que utilizaste durante o teu raciocínio.

1.2. Descreve como procedeste ou pensaste para chegar às tuas respostas.

a)____

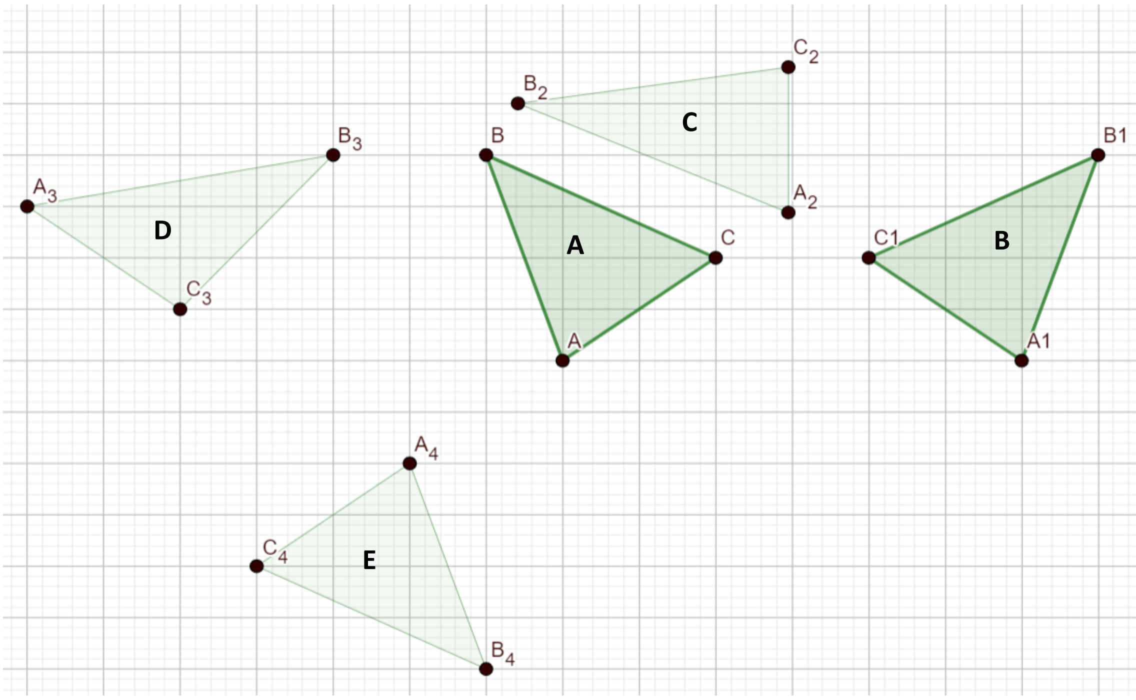
b)____

c)____

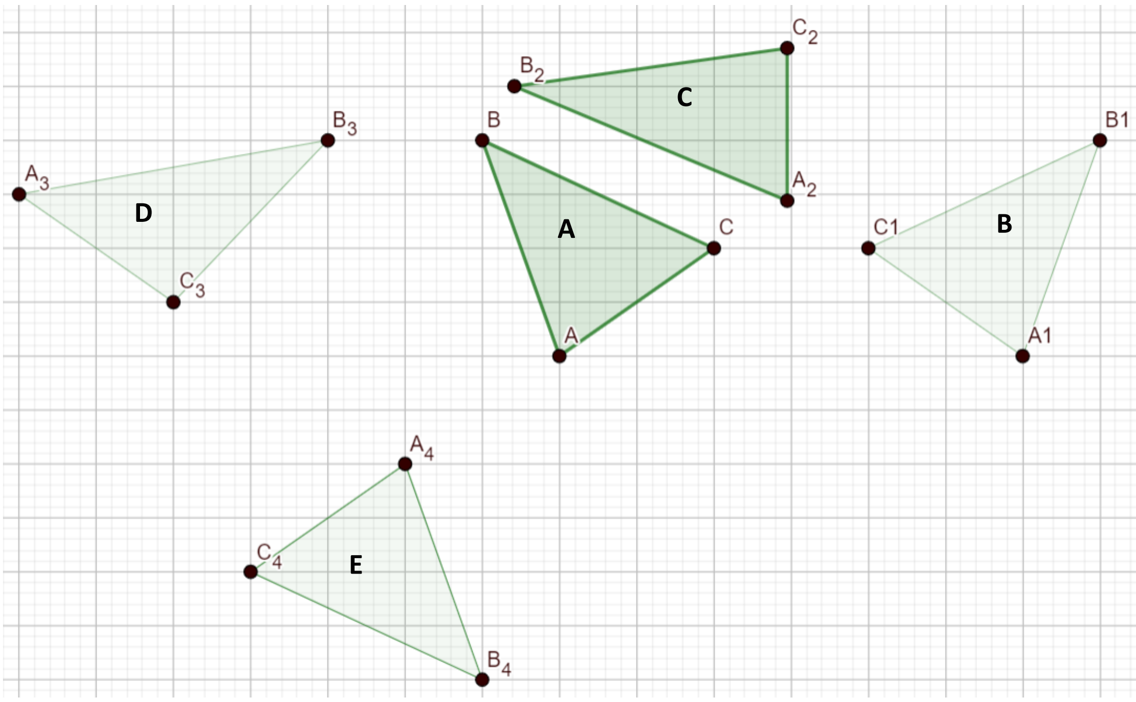
d)____

Obrigada!

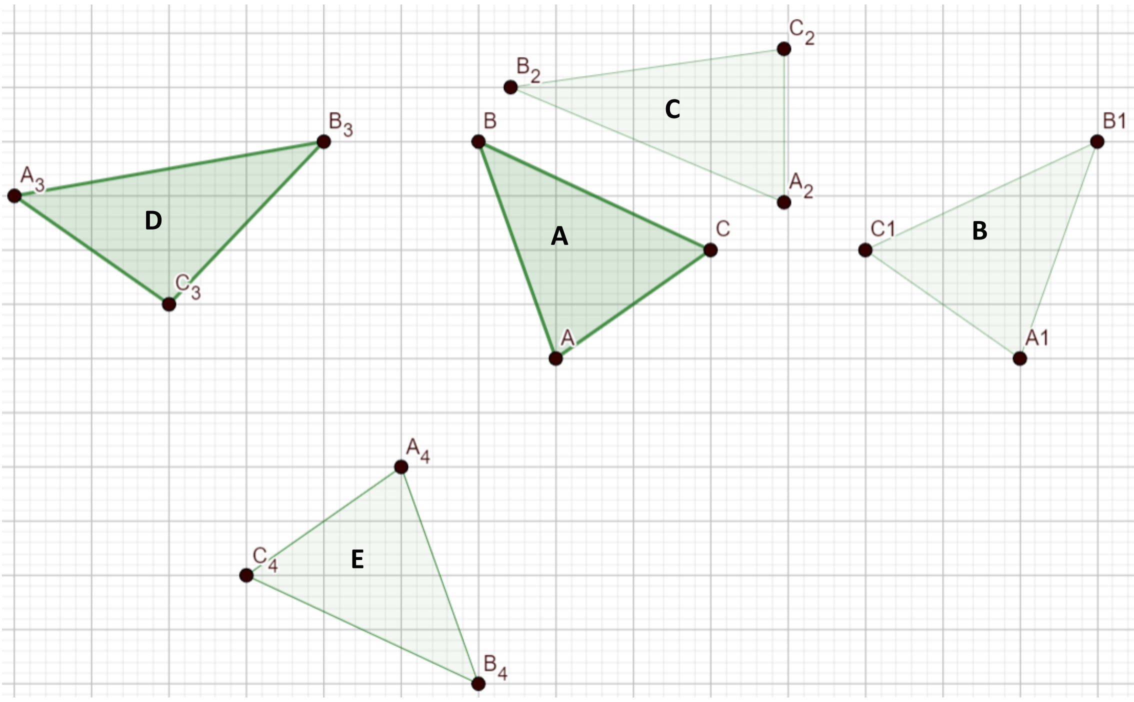
Anexo 2.1.1



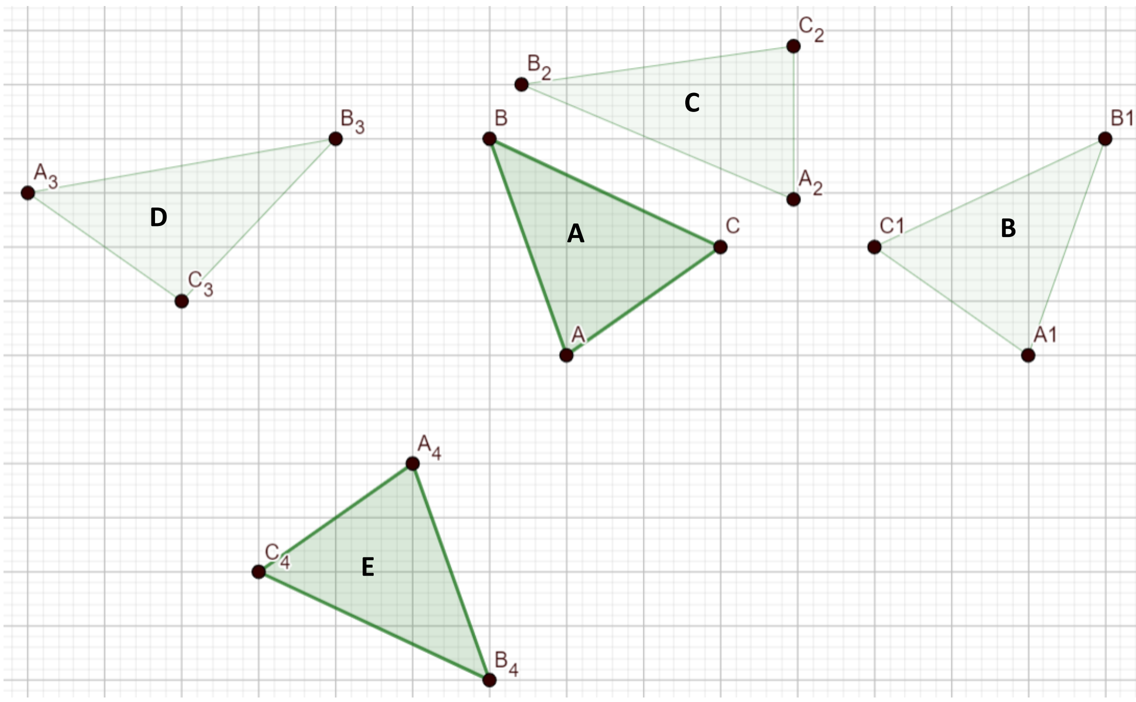
Anexo 2.1.2



Anexo 2.1.3



Anexo 2.1.4



Anexo 2.2 - Checklist

Alunos		Participação	Atenção	Interesse	Identifica a isometria que transformou uma figura na sua imagem.	Desenha o transformado de uma figura pela reflexão central.
1	Aluno A					
2	Aluno B					
3	Aluno C					
4	Aluno D					
5	Aluno E					
6	Aluno F					
7	Aluno G					
8	Aluno H					
9	Aluno I					
10	Aluno J					
11	Aluno K					
12	Aluno L					
13	Aluno M					
14	Aluno N					
15	Aluno O					
16	Aluno P					
17	Aluno Q					
18	Aluno R					
19	Aluno S					
20	Aluno T					
21	Aluno U					
22	Aluno V					
23	Aluno W					
24	Aluno X					
25	Aluno Y					

Legenda: Sim (S); Não (N); Realiza, mas com algumas dificuldades (+/-).

Anexo 3

➢ *Planificação de Matemática do dia 16 de junho 2021*

Planificação de 16 de junho 2021	
Estagiária: Telma Chipelo	**Professora Cooperante:** Professora I.
Área disciplinar: Matemática	**Professora orientadora da UA:** Dr. T.
Ano de Escolaridade: 6.º	**Duração da aula:** 90 minutos
Enquadramento da aula (tendo como referência as Aprendizagens Essenciais)	
Domínio: Geometria e Medida	
AE: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes: (i). Identificar o transformado de uma dada figura através de isometrias (reflexão axial, central e rotação) e reconhecer simetrias de rotação e de reflexão em figuras, em contextos matemáticos e não matemáticos, prevendo e descrevendo os resultados obtidos.; (ii) desenvolver a capacidade de visualização e construção de explicações e justificações matemáticas e raciocínios lógicos; (iii) Desenvolver confiança nas suas capacidades e conhecimentos matemáticos.	
Descritores do perfil dos alunos: Conhecedor/sabedor/culto/informado; Participativo/colaborador.	
Nota: Além dos objetivos específicos do 6.º ano, incluem-se os seguintes objetivos (comuns aos 2 anos de escolaridade do 2.º ciclo). No que se refere aos temas e conteúdos de aprendizagem, a ação do professor no 2.º ciclo deve ser orientada por forma a que, relativamente à <u>geometria e medida,</u> os alunos prossigam no desenvolvimento da capacidade de visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas, alargando-se o estudo de sólidos geométricos e de figuras planas e o estudo das grandezas geométricas e das isometrias do plano. Neste ciclo, nas isometrias dá-se especial atenção à reflexão e à rotação.	
Objetivos:	
(i). Construir imagens de figuras geométricas planas por reflexão central, reflexão axial e rotação utilizando régua e compasso; (ii) construir imagens de figuras geométricas planas por rotação utilizando régua e transferidor; (iii) identificar simetrias de rotação e de reflexão em figuras dadas; (iv) resolver problemas envolvendo as propriedades das isometrias utilizando raciocínio dedutivo; (v) resolver problemas envolvendo figuras com simetrias de rotação e de reflexão axial.	
Pré-requisitos:	**Estratégias:**
Saber o que é o transformado de uma figura por ação de isometrias. Reconhecer e distinguir o transformado de uma figura pela reflexão axial, reflexão central e	Exposição dialogada de uma apresentação em PowerPoint. Realização de uma composição geométrica utilizando material de desenho e uma

rotação. Saber realizar o transformado de uma figura utilizando régua, compasso, transferidor e o GeoGebra.	composição geométrica utilizando o programa de geometria dinâmica GeoGebra individualmente.

Organização da sala de aula:
Organização condicionada pelas linhas orientadoras da DGS. Para que cada aluno tenha acesso a um computador de forma individual a turma é dividida em dois grupos, um grupo permanece na sala de TIC, enquanto o outro encontra-se na aula de Matemática. Ao fim de 30 minutos os grupos trocam de sala e os computadores são desinfetados.

Desenvolvimento da aula	**Tempo previsto**
Os alunos entram na sala de aula, sentam-se nos seus lugares e retiram o material para a disciplina. Abertura da lição e escrita do sumário no quadro. Lição nº 162 e 163 16/06/2021 <u>Sumário:</u> Apresentação de algumas obras de Escher. Realização do 3.º desafio - composição geométrica utilizando material de desenho e o GeoGebra. Os alunos registam o sumário no caderno diário.	10’
1. Apresentação do artista Escher e algumas das suas obras. <u>*Prof. Estagiária*</u> • *Maurits Cornelis Escher nasceu a 17 de junho de 1898, na Holanda e foi um artista gráfico muito famoso pelos seus trabalhos de ilusão de ótica.* • *Desde criança que se mostrou muito criativo e interessado por tudo o que o rodeava.* • *Em 1922, Escher viajou por Espanha e visitou o palácio Alhambra na região da Andaluzia, na cidade de Granada.* • *Mas foi numa segunda visita a esta palácio em 1936 que a sua decoração interior, tornou-se numa fonte de inspiração para as suas obras, especialmente as relacionadas com o tema das pavimentações do plano.* Projeção das seguintes imagens do interior do palácio:	35'

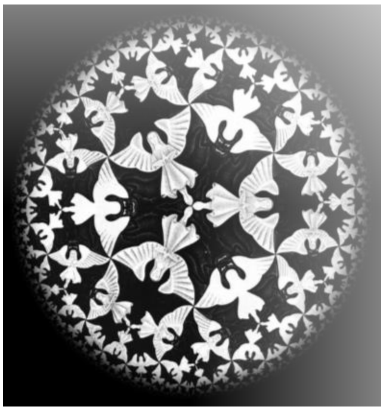
  

(Arteround, 2016)

<u>*Prof. Estagiária*</u>

- *Escher procurou desenvolver outras formas de pavimentação do plano.*
- *Tendo como base as formas geométricas e procurando outras figuras, essencialmente não geométricas, que lhe permitisse obter os mesmos resultados.*
- *Utilizou motivos diferentes como animais, insetos, figuras humanas, …*
- *Através das suas pavimentações, ele consegue exemplificar as transformações do plano: translações, rotações e reflexões tornando-as mais simples aos nossos olhos.*
- *Estas duas imagens são exemplos das obras deste artista.*

(Wilder, n.d.)



(Maceio, 2014)

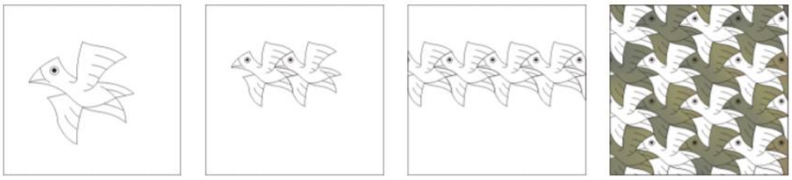
<u>*Prof. Estagiária*</u>

- *Conseguem identificar algumas isometrias nestas obras? Quais?*

(É expectável que os alunos identifiquem a rotação nas duas obras e alguns alunos podem referir a reflexão na segunda obra.)

<u>*Prof. Estagiária*</u>

- *Vamos ver como é que Escher criava as suas obras.*
- *Reparem nesta imagem.*



(Sampaio, 2006)

- *Aqui ele usou um pássaro e utilizando a isometria de translação ele criou então a sua obra.*
- *Esta isometria não foi falada aqui nas aulas, pois vocês só vão falar nela no próximo ano.*
- *Contudo esta consiste:*

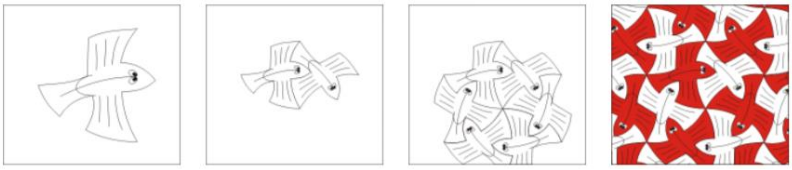
"Numa deslocação retilínea de um ponto ou de uma figura associada a um vetor."

"Deslocando esse ponto ou figura, na direção, sentido e comprimento correspondente ao vetor."

(Palhares, 2004)

Prof. Estagiária

- *Agora olhem para esta imagem..*

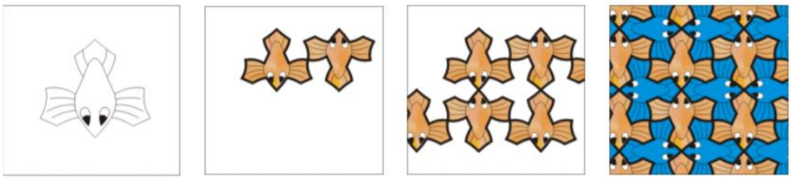


(Sampaio, 2006)

- *Esta obra foi criada a partir de um peixe utilizando qual isometria?*

(É expectável que os alunos refiram a isometria de rotação.)

- *Vamos ver outra imagem.*



(Sampaio, 2006)

- *Esta também foi realizada a partir de um peixe, contudo aqui já não foi usada a rotação.*
- *Qual foi a isometria utilizada?*

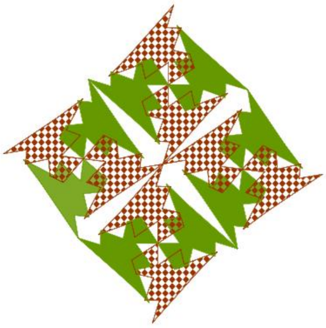
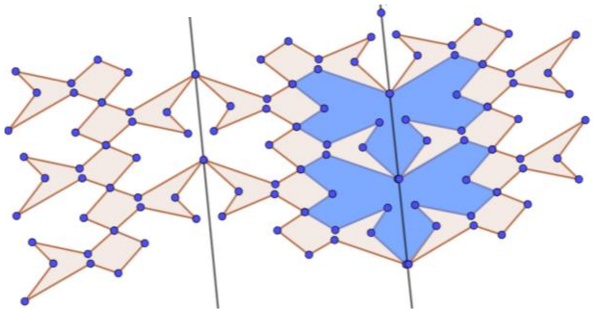
(É expectável que os alunos refiram a isometria de reflexão central e axial.)

Prof. Estagiária

- *Vamos ver um pequeno vídeo que reforça a forma como Escher realizava as suas obras.*

<table>
<tr>
<td>

- *Agora vou mostrar duas composições de isometrias realizadas por mim no GeoGebra.*
- *Ora vejam.*

- *Eu na primeira imagem usei rotações de 90º reflexões axiais, e na segunda imagem usei a reflexão central e a reflexão axial.*

</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>

2. 3.º Desafio – composição geométrica

<u>*Prof. Estagiária*</u>

- *Agora que já vimos o que é uma composição geométrica vamos realizar o 3.º desafio.*
- *Neste 3.º desafio vocês vão imaginar que são artistas gráficos e vão criar uma composição geométrica com um motivo a vosso gosto.*
- *Não quero que façam igual a mim nem ao Escher, agora vocês são os artistas e têm de ser criativos.*
- *Têm de usar pelo menos duas isometrias diferentes.*
- *Para isso a turma vai ser dividida em dois grupos.*
- *Vamos fazer com os grupos que têm na aula de TIC e Educação para a Cidadania.*
- *O primeiro grupo vem comigo para a sala de TIC e vai realizar uma composição geométrica no GeoGeobra.*
- *O segundo grupo fica na sala a realizar a composição geométrica recorrendo a material de desenho, não se esqueçam que têm de colorir.*
- *Depois trocamos os grupos.*

A professora estagiária distribui o desafio e dirige-se com o primeiro grupo para a sala de informática. O primeiro grupo fica na sala de matemática com a Professora Cooperante.

</td>
<td>30’
+
30’</td>
</tr>
</table>

A professora Estagiária vai circulando entre as duas salas para esclarecimento de algumas dúvidas que possam surgir.	

Recursos/materiais:	
• Projetor da sala de aula • Material de escrita (para cada aluno); • Apresentação em PowerPoint (Anexo 3.1);	• Régua, compasso, transferidos e lápis de cor (para cada aluno); • Um computador por aluno; • 25 fichas do 3.º desafio impressas (Anexo 3.2).
Instrumento de Registo/Monotorização das Aprendizagens/Avaliação:	
Do professor: Checklist (Anexo 3.3).	

Referências bibliográficas

Amaral, M. E., & Cabrita, I. (2017). UMA ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR PARA A APROPRIAÇÃO DAS ISOMETRIAS Un enfoque interdisciplinario para la apropiación de isometrías An interdisciplinary approach to the appropriation of isometries. Campo Abierto, 36(1), 109–136.

Amaral, M. E. G. de O. (2015). Isometrias – Uma abordagem interdisciplinar no 8o ano de escolaridade.

Arteround. (2016). Aspettando la mostra di Milano: Escher e l'Alhambra. Retrieved June 14, 2021, from https://artearound.wordpress.com/2016/06/22/aspettando-la-mostra-di-milano-escher-e-lalhambra/

Duval, R. (2012). Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruencia, 118–138. Retrieved from https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p118

Freitas, J. L. M. de, & Rezende, V. (2013). ENTREVISTA: RAYMOND DUVAL E A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA. Revista Paranaense de Educação Matemática, 2, 9–34. Retrieved from http://rpem.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/963/pdf_122

Lana, J. S. (n.d.). Arte medieval cristã e islâmica. Retrieved June 14, 2021, from https://br.pinterest.com/pin/810085051695840772/

Maceio. (2014). ESCHER. Retrieved June 14, 2021, from https://estampalovers.wordpress.com/tag/escher/

Pedro Palhares. (2004). Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico. (Lider, Ed.) (1.a).

Sampaio, P. (2006). Concepções de infinito dos alunos do ensino secundário : contributo da webquest Escher e a procura do infinito. Universidade do Minho. Retrieved from file:///C:/Users/teach/Downloads/Concepesdeinfinitodosalunosdoensinosecundrio-contributodawebquest.pdf

Wilder, L. (n.d.). Books: The Lucifer Effect. Retrieved June 14, 2021, from https://www.pinterest.fr/pin/213358101066520039/

Anexo 3.1

MAURITS CORNELIUS ESCHER

- Maurits Cornelis Escher nasceu a 17 de junho de 1898, na Holanda. Foi um artista gráfico, muito famoso pelos seus trabalhos de ilusão de ótica. Desde criança que se mostrou muito criativo e interessado por tudo o que rodeava.

- Em 1922, Escher viajou por Espanha e visitou o palácio Alhambra na região da Andaluzia, na cidade de Granada.

(Sampaio, 2006)

(Lena, n.d.)

(Arteround, 2016)

Foi numa segunda visita a este palácio em 1936 que a sua decoração interior, se tornou fonte de inspiração para as suas obras, especialmente as relacionadas com o tema das pavimentações do plano.

(Sampaio, 2006)

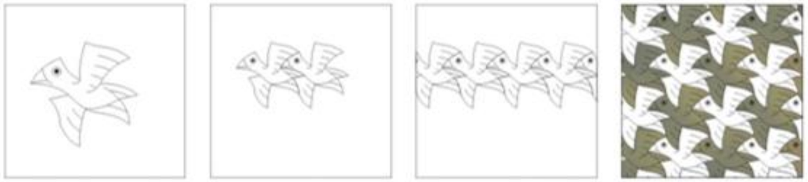
- Escher procurou desenvolver outras formas de pavimentação do plano. Tendo como base as formas geométricas e procurando outras figuras, essencialmente não geométricas, que lhe permitisse obter os mesmos resultados.

- Utilizou motivos diferentes como animais, insetos, figuras humanas, …

- Através das suas pavimentações, ele consegue exemplificar as transformações do plano: translações, rotações e reflexões tornando -as mais simples aos nossos olhos.

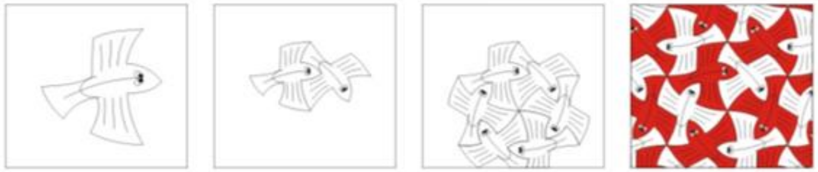
(Sampaio, 2006)

Pavimentação composta por translações de pássaros



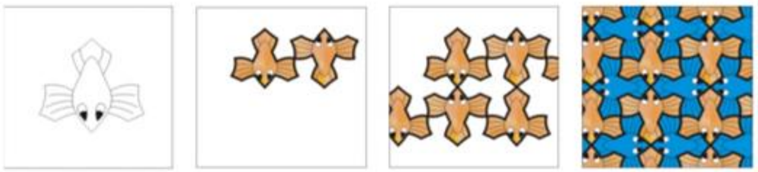
(Sampaio, 2006)

Pavimentação composta por rotações de peixes

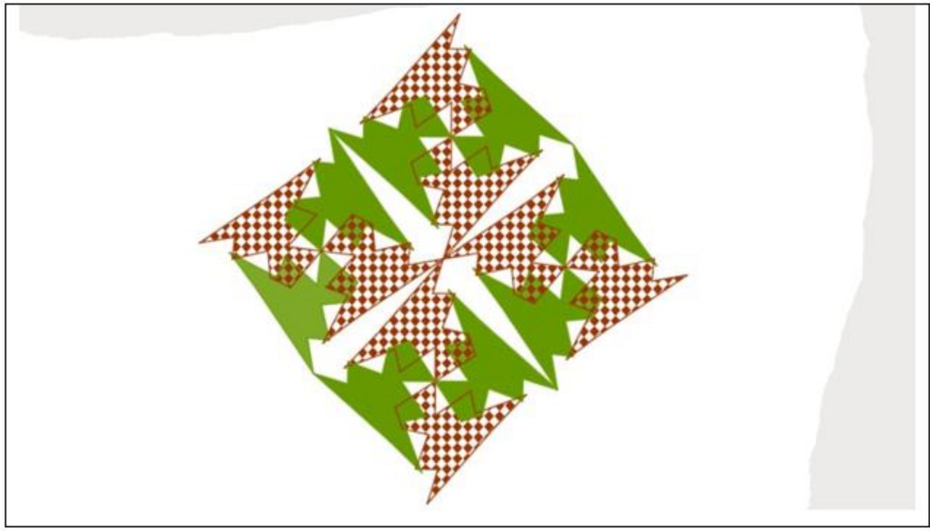


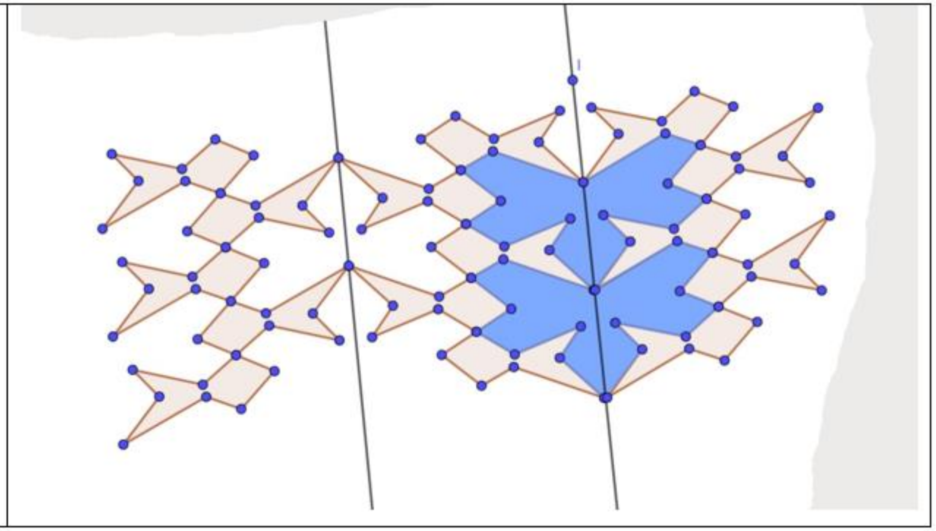
(Sampaio, 2006)

Pavimentação composta por reflexões de peixes



(Sampaio, 2006)





Anexo 3.2

Nome:		**Data:**
Estagiária: Telma Chipelo	**Professora Cooperante:** Professora I.	**6.º ano**

3.º Desafio - Composição geométrica

Maurits Cornelis Escher nascido em 1898 na Holanda foi um artista gráfico muito famoso pelos seus trabalhos de ilusão de ótica. Escher apoiou-se na cultura árabe quando esteve em Espanha em contacto com obras construídas pelos mouros.

Imagina que és um artista gráfico….

1. Utilizando as isometrias estudadas. Constrói uma composição geométrica para realizar a decoração de uma das paredes do corredor da tua escola.
2. Descreve os passos que seguiste para realizares a tua composição e quais as isometrias que utilizaste.
3. Apresenta a tua composição geométrica à turma.

Obrigada! 😊

Descreve a tua composição realizada …

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

Bom Trabalho! 😊

Anexo 3.3 – Checklist

Alunos		Participação	Atenção	Interesse	Constrói uma composição geométrica utilizando o material de desenho adequado.	Constrói uma composição geométrica utilizando o *Geogebra.*	Descreve o seu raciocínio e as isometrias utilizadas na construção da sua composição.
1.	Aluno A						
2	Aluno B						
3	Aluno C						
4	Aluno D						
5	Aluno E						
6	Aluno F						
7	Aluno G						
8	Aluno H						
9	Aluno I						
10	Aluno J						
11	Aluno K						
12	Aluno L						
13	Aluno M						
14	Aluno N						
15	Aluno O						
16	Aluno P						
17	Aluno Q						
18	Aluno R						
19	Aluno S						
20	Aluno T						
21	Aluno U						
22	Aluno V						
23	Aluno W						
24	Aluno X						
25	Aluno Y						

Legenda: Sim (S); Não (N); Realiza, mas com algumas dificuldades (+/-).

Anexo 4

➢ *Planificação de TIC interdisciplinaridade com Matemática do dia 21 de maio 2021*

<table>
<tr><th colspan="2">Planificação de 21 de maio 2021</th></tr>
<tr><td>Estagiária: Telma Chipelo</td><td>Professoras Cooperantes: Professora I.
Professora de TIC: Professora D.</td></tr>
<tr><td>Área disciplinar: TIC interdisciplinaridade com Matemática</td><td>Professora orientadora da UA: Dr. T.</td></tr>
<tr><td>Ano de Escolaridade: 6.º</td><td>Duração da aula: 45 minutos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Enquadramento da aula (tendo como referências as Aprendizagens Essenciais)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tecnologias de Informação e da Comunicação (TIC)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Domínio: Investigar e pesquisar; criar e inovar</td></tr>
<tr><td colspan="2">AE: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes:
(i) Utilizar o computador e outros dispositivos digitais como ferramentas de apoio ao processo de investigação e pesquisa; (ii) Reconhecer as potencialidades de aplicações digitais; (iii) Produzir e modificar artefactos digitais criativos, para exprimir ideias, sentimentos e conhecimentos, em ambientes digitais fechados.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descritores do perfil dos alunos: Participativo/colaborador; Responsável/autónomo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nota: No que se refere aos temas e conteúdos de aprendizagens, a ação do professor no 2.º ciclo deve ser orientada por forma a que, relativamente a <u>Investigar e pesquisar</u> os alunos sejam munidos de múltiplas literacias para que fiquem aptos a continuar a aprendizagem ao longo da vida. Relativamente a <u>criar e inovar,</u> o professor tem o papel de orientar, por forma a que os alunos sejam capazes de criar conteúdos com recursos a aplicações digitais adequadas a cada situação. No global, neste ciclo, é importante que o professor promova a articulação com outras áreas disciplinares.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos: (i) atividades de trabalho articulado com a matemática.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Matemática</td></tr>
<tr><td colspan="2">Domínio: Geometria e Medida</td></tr>
<tr><td colspan="2">AE: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes:
(i) Identificar e construir o transformado de uma dada figura através de isometrias (reflexão axial) e reconhecer simetrias de reflexão em figuras, em contextos matemáticos e não matemáticos, descrevendo os resultados obtidos; (ii) Desenvolver a capacidade de visualização e construir explicações e justificações matemáticas e raciocínios lógicos, incluindo o recurso a exemplos e contraexemplos; (iii) Desenvolver interesse pela Matemática e valorizar o seu papel no desenvolvimento das outras ciências e domínios da atividade humana e social; (iv)</td></tr>
</table>

Desenvolver confiança nas suas capacidades e conhecimentos matemáticos, e a capacidade de analisar o próprio trabalho e regular a sua aprendizagem.
Descritores do perfil dos alunos: Conhecedor/sabedor/culto/informado; Participativo/colaborador.
Nota: Além dos objetivos específicos do 6.º ano, incluem-se os seguintes (comuns aos 2 anos de escolaridade do 2.º ciclo). No que se refere aos temas e conteúdos de aprendizagem, a ação do professor no 2.º ciclo deve ser orientada por forma a que, relativamente à geometria e medida, os alunos prossigam no desenvolvimento da capacidade de visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas, alargando-se o estudo de sólidos geométricos e de figuras planas e o estudo das grandezas geométricas e das isometrias do plano. Neste ciclo, nas isometrias, é dado especial atenção à reflexão e à rotação. Deve-se ainda criar as condições para que os alunos tenham oportunidade de utilizar materiais manipuláveis, tecnologia digital interativa e programas computacionais específicos na exploração de propriedades de figuras planas e de sólidos geométricos.
Objetivos:
(i)Identificar, dada uma reta r e um ponto M não pertencente a r, a «imagem de M pela reflexão axial de eixo r» como o ponto M’ tal que r é mediatriz do segmento [MM’] e identificar a imagem de um ponto de r pela reflexão axial de eixo r como o próprio ponto; (ii) Designar, quando esta simplificação de linguagem não for ambígua, «reflexão axial» por «reflexão»; (iii) Saber, dada uma reta r, dois pontos A e B e as respetivas imagens A’ e B’ pela reflexão de eixo r , que são iguais os comprimentos dos segmentos [AB] e [A’B’] e designar, neste contexto, a reflexão como uma «isometria»; (iv) Reconhecer, dada uma reta r, três pontos A, O e B e as respetivas imagens A’, O’ e B’ pela reflexão de eixo r, que são iguais os ângulos AOB e A’O’B’; (v) Identificar uma reta r como «eixo de simetria» de uma dada figura plana quando as imagens dos pontos da figura pela reflexão de eixo r formam a mesma figura; (vi) Construir imagens de figuras geométricas planas por reflexão central, utilizando régua e compasso.

Pré-requisitos:	**Estratégias:**
Saber o que é uma reflexão axial e as suas propriedades. Ser capaz de desenhar o transformado de uma imagem pela reflexão de eixo r. Possuir uma literacia digital generalizada básica.	Exposição dialogada com o auxílio do projetor, e do programa de geometria dinâmica *GeoGebra*. Exploração do *GeoGebra* individualmente pelos alunos e realização de exercícios no *GeoGebra*.

Organização da sala de aula:
Organização condicionada pelas linhas orientadoras da DGS. Para que cada aluno tenha acesso a um computador de forma individual, a turma é dividida em dois grupos, um grupo permanece na sala de TIC durante 45 minutos,

Desenvolvimento da aula	Tempo previsto
enquanto o outro encontra-se na aula de Educação para a Cidadania. Ao fim de 45 minutos os grupos trocam de sala e os computadores são desinfetados.	
Trabalho extra-aula: Exploração do programa de geometria dinâmica em casa.	
Desenvolvimento da aula	**Tempo previsto**
Os alunos entram na sala de aula, sentam-se nos seus lugares e retiram o material para a disciplina. Abertura da lição e escrita do sumário no quadro. Lição nº ____ 21/05/2021 <u>Sumário:</u> Exploração do programa de Geometria Dinâmica *GeoGebra* Transformado de uma figura pela reflexão axial de eixo r no *GeoGebra*. Rotação de uma figura no sentido positivo e negativo no *GeoGebra* Os alunos registam o sumário no caderno diário.	10’
1. Explicação e demostração de como funciona o programa e realização de um exercício de reflexão de eixo na vertical. <u>*Prof. Estagiária*</u> • *Hoje vamos ver como trabalhar com o GeoGebra.* • *Vocês lembram-se que tivemos uma aula de matemática em que eu mostrei as propriedades da reflexão axial no GeoGebra?* (É expectável que os alunos se recordem, visto que estavam muito entusiasmados com o programa.) <u>*Prof. Estagiária*</u> • *Eu vou fazer a reflexão axial de algumas imagens e vocês tem de estar com muita atenção, pois a seguir serão vocês a realizar a mesma coisa.* • *Primeiro quero que estejam todos a ouvir e a ver, depois vão poder experimentar.* Realizar o que se encontra nas figuras 1.	5’

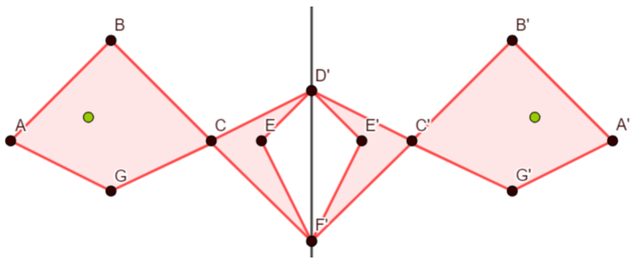
<table>
<tr><td>

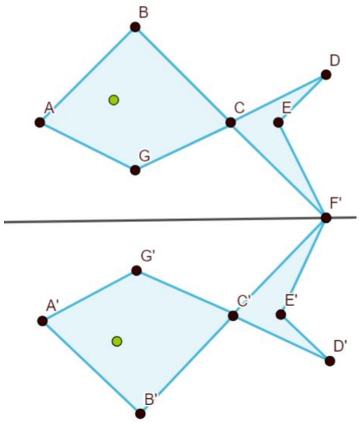
Figura 1- Reflexão axial de eixo na vertical do peixinho</td><td></td></tr>
<tr><td>2. Realização do exercício por parte dos alunos.
A professora estagiária vai circulando pela sala para apoiar os alunos nas possíveis dúvidas que possam surgir.</td><td>5’</td></tr>
<tr><td>3. Demostração pela professora do exercício de reflexão de eixo na horizontal.
<u>Prof. Estagiária</u>
• Agora olhem todos para aqui novamente.
• Com o mesmo peixinho vamos realizar a reflexão segundo um eixo na horizontal.


Figura 2- Reflexão axial de eixo na horizontal do peixinho e mudança de cor.</td><td>5’</td></tr>
<tr><td>4. Realização do exercício por parte dos alunos.
A professora estagiária vai circulando pela sala para apoiar os alunos nas possíveis dúvidas que possam surgir.</td><td>5’</td></tr>
<tr><td>5. Demostração pela professora do exercício de reflexão de eixo na diagonal.
<u>Prof. Estagiária</u>
• Olhem todos para aqui novamente.
• Com o mesmo peixinho vamos realizar a reflexão segundo um eixo na diagonal.</td><td>5’</td></tr>
</table>

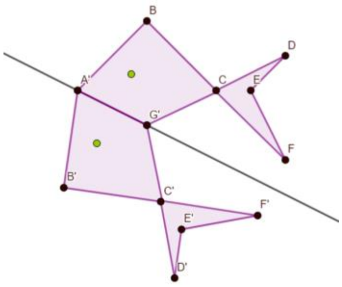


Figura 3- Reflexão axial de eixo na diagonal do peixinho e mudança de cor.

6. Realização do exercício por parte dos alunos.

A professora estagiária vai circulando pela sala para apoiar os alunos nas possíveis dúvidas que possam surgir.

5’

7. Dar a conhecer a reflexão central

<u>*Prof. Estagiária*</u>

- *Olhem todos para aqui novamente.*
- *Agora com a mesma imagem vou realizar uma outra isometria.*
- *A reflexão central que vamos dar a seguir. Esta em vez de refletir segundo um eixo, vamos refletir segundo um ponto.*
- *Neste caso vamos fazer uma reflexão central de centro B.*

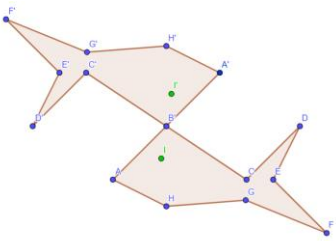


Figura 4- Reflexão central do peixinho.

5’

Nota: Se ainda sobrar tempo os alunos realizam a reflexão central nos seus computadores.

Recursos/materiais:

• 1 Computador por aluno; • 1 projetor da sala aula;	• 1 quadro branco e marcadores para o quadro; • Material de escrita (para cada aluno);

Instrumento de Registo/Monotorização das Aprendizagens/Avaliação:

Do professor: Checklist (Anexo 4.1).

Referências bibliográficas

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2012). Programa e Metas Curriculares. Matemática. Ensino Básico. Ministério Da Educação e Da Ciência, 1–118. Retrieved from https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/programa_matematica_basico.pdf

Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, H., & Oliveira, P. (2011). Geometria e medida no ensino básico. Lisboa. Ministério Da Educação, Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular. Retrieved from https://www.researchgate.net/profile/Luis_Menezes/publication/270051243_Geometria_e_medida_no_ensino_bsico/links/549f3f8a0cf257a635fe73b3.pdf

DGE. Aprendizagens Essenciais do 6.o Ano de Tecnologia de Informação e Comunicação (2018). Retrieved from http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/2_ciclo/6_tic.pdf

DGE. Aprendizagens Essenciais do 6.o Ano de Matemática (2018). Retrieved from https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico

Maria Augusta Ferreira Neves, L. F. (2019). Máximo 6.o ano. (P. Editora, Ed.) (1.a).

Anexo 4.1 – Checklist

Alunos		Participação	Atenção	Interesse	Utiliza corretamente o computador	Desenha o transformado de uma figura pela reflexão de eixo r no *GeoGebra*
1	Aluno A					
2	Aluno B					
3	Aluno C					
4	Aluno D					
5	Aluno E					
6	Aluno F					
7	Aluno G					
8	Aluno H					
9	Aluno I					
10	Aluno J					
11	Aluno K					
12	Aluno L					
13	Aluno M					
14	Aluno N					
15	Aluno O					
16	Aluno P					
17	Aluno Q					
18	Aluno R					
19	Aluno S					
20	Aluno T					
21	Aluno U					
22	Aluno V					
23	Aluno W					
24	Aluno X					
25	Aluno Y					

Legenda: Sim (S); Não (N); Realiza, mas com algumas dificuldades (+/-).

➢ *Planificação de TIC interdisciplinaridade com Matemática do dia 28 de maio 2021*

Planificação de 28 de maio 2021	
Estagiária: Telma Chipelo	**Professora Cooperante:** Professora I. **Professora de TIC:** Professora D.
Área disciplinar: TIC interdisciplinaridade com Matemática	**Professora orientadora da UA:** Dr. T.
Ano de Escolaridade: 6.º	**Duração da aula:** 45 minutos + 45 minutos
Enquadramento da aula (tendo como referências as Aprendizagens Essenciais)	
Tecnologias de Informação e da Comunicação (TIC)	
Domínio: Investigar e pesquisar; criar e inovar	
AE: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes: (i) Utilizar o computador e outros dispositivos digitais como ferramentas de apoio ao processo de investigação e pesquisa; (ii) Reconhecer as potencialidades de aplicações digitais; (iii) Produzir e modificar artefactos digitais criativos, para exprimir ideias, sentimentos e conhecimentos, em ambientes digitais fechados.	
Descritores do perfil dos alunos: Participativo/colaborador; Responsável/autónomo.	
Nota: No que se refere aos temas e conteúdos de aprendizagens, a ação do professor no 2.º ciclo deve ser orientada por forma a que, relativamente a <u>Investigar e pesquisar</u> os alunos sejam munidos de múltiplas literacias para que fiquem aptos a continuar a aprendizagem ao longo da vida. Relativamente a <u>criar e inovar,</u> o professor tem o papel de orientar, por forma a que os alunos sejam capazes de criar conteúdos com recursos a aplicações digitais adequadas a cada situação. No global, neste ciclo, é importante que o professor promova a articulação com outras áreas disciplinares.	
Objetivos: (i) atividades de trabalho articulado com a matemática.	
Matemática	
Domínio: Geometria e Medida	
AE: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes: (i) Identificar e construir o transformado de uma dada figura através de isometrias (reflexão central e rotação); (ii) Desenvolver a capacidade de visualização; (iii) Desenvolver interesse pela Matemática e valorizar o seu papel no desenvolvimento das outras ciências e domínios da atividade humana e social; (iv) Desenvolver confiança nas suas capacidades e conhecimentos matemáticos.	
Descritores do perfil dos alunos: Conhecedor/sabedor/culto/informado; Participativo/colaborador.	
Nota: Além dos objetivos específicos do 6.º ano, incluem-se os seguintes (comuns aos 2 anos de escolaridade do 2.º ciclo). No que se refere aos temas e conteúdos de aprendizagem, a ação do professor no 2.º ciclo deve ser orientada por forma a que, relativamente à <u>geometria e medida,</u> os alunos prossigam no desenvolvimento da	

capacidade de visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas, alargando-se o estudo de sólidos geométricos e de figuras planas e o estudo das grandezas geométricas e das isometrias do plano. Neste ciclo, nas isometrias, é dado especial atenção à reflexão e à rotação. Deve-se ainda criar as condições para que os alunos tenham oportunidade de utilizar materiais manipuláveis, tecnologia digital interativa e programas computacionais específicos na exploração de propriedades de figuras planas e de sólidos geométricos.

Objetivos:

(i) Designar, dados dois pontos O e M, o ponto M' por «imagem do ponto M pela reflexão central de centro O» quando O for o ponto médio do segmento [MM'] e identificar a imagem de O pela reflexão central de centro O como o próprio ponto O; (II) Reconhecer, dado um ponto O e as imagens A' e B' de dois pontos A e B pela reflexão central de centro O , que são iguais os comprimentos dos segmentos [AB] e [A'B'] e designar, neste contexto, a reflexão central como uma «isometria»; (iii) Reconhecer, dado um ponto O e as imagens A', B' e C' de três pontos A, B e C pela reflexão central de centro O, que são iguais os ângulos ABC e A'B'C'; (iv) Designar, dados dois pontos O e M e um ângulo *α*, um ponto M' por «imagem do ponto M por uma rotação de centro O e ângulo *α*» quando os segmentos [OM] e [OM'] têm o mesmo comprimento e os ângulos *α* e MOM' a mesma amplitude. (v) Reconhecer, dados dois pontos O e M e um ângulo *α* (não nulo, não raso e não giro), que existem exatamente duas imagens do ponto M por rotações de centro O e ângulo *α* e distingui-las experimentalmente por referência ao sentido do movimento dos ponteiros do relógio, designando uma das rotações por «rotação de sentido positivo» (ou «contrário ao dos ponteiros do relógio») e a outra por «rotação de sentido negativo» (ou «no sentido dos ponteiros do relógio»). (vi) Reconhecer, dados dois pontos O e M, que existe uma única imagem do ponto M por rotação de centro O e ângulo raso, que coincide com a imagem de M pela reflexão central de centro O e designá-la por imagem de M por «meia-volta em torno de O». (vii) Reconhecer que a (única) imagem de um ponto M por uma rotação de ângulo nulo ou giro é o próprio ponto M.

Pré-requisitos:	**Estratégias:**
Saber o que é uma reflexão central e rotação e as suas propriedades. Ser capaz de desenhar o transformado de uma imagem pela reflexão central em relação a um ponto e a rotação com diversas amplitudes. Possuir uma literacia digital generalizada básica.	Exposição dialogada com o auxílio do projetor, e do programa de geometria dinâmica *GeoGebra*. Exploração do *GeoGebra* individualmente pelos alunos e realização de exercícios no *GeoGebra*.

Organização da sala de aula:

Organização condicionada pelas linhas orientadoras da DGS. Para que cada aluno tenha acesso a um computador de forma individual, a turma é dividida em dois grupos, um grupo permanece na sala de TIC durante 45 minutos,

enquanto o outro encontra-se na aula de Educação para a Cidadania. Ao fim de 45 minutos os grupos trocam de sala e os computadores são desinfetados.	
Trabalho extra-aula: Exploração do programa de geometria dinâmica em casa.	
Desenvolvimento da aula	**Tempo previsto**
Os alunos entram na sala de aula, sentam-se nos seus lugares e retiram o material para a disciplina. Abertura da lição e escrita do sumário no quadro. Lição nº ____ 28/05/2021 <u>Sumário:</u> Exploração do programa de Geometria Dinâmica *GeoGebra* Transformado de uma figura pela reflexão central do ponto p no *GeoGebra.* Transformação de uma figura pela rotação de uma figura no sentido positivo e negativo, com amplitude de 45°, 90°, 180° e 360° no *GeoGebra* Os alunos registam o sumário no caderno diário.	3’
1. Demostração de como realizar a transformação de uma figura pela reflexão central em relação a um ponto p. <u>*Prof. Estagiária*</u> • *Hoje vamos trabalhar novamente com o GeoGebra.* • *Na última aula construímos uma figura (peixinho) e depois realizamos a reflexão axial dessa figura em relação a um eixo na vertical, horizontal e diagonal.* • *Hoje vamos iniciar por construir um polígono irregular à vossa escolha e realizar a reflexão central dessa figura em relação a um ponto p.* • *Seguidamente vamos aplicar a essa mesma figura a isometria de rotação e amplitude 45°, 90°, 180°, 360 ° e de amplitude -45°, -90°,180° e -360°.* • *Então vamos começar, estejam todos com atenção a olhar para a projeção.* Criar um qualquer polígono irregular e realizar a reflexão central em relação ao ponto J.	2’

<table>
<tr>
<td>

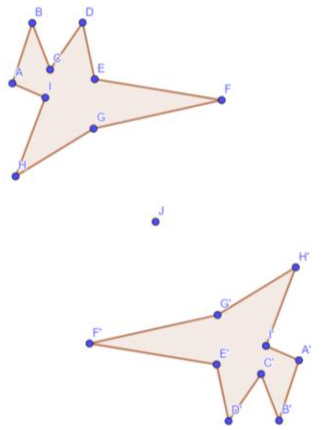


Figura 1 - Reflexão central em relação a um ponto J.

Relembrar aos alunos as **propriedades e definição da reflexão central**.

Uma reflexão central:

(i) transformar um segmento de reta noutro com o mesmo comprimento.
(ii) transforma um ângulo noutro com a mesma amplitude.

A reflexão central é uma isometria.

Definição de reflexão central:

Sendo J o ponto médio de [AA'], A' é a imagem de A pela reflexão central de centro J. A imagem de centro J é o próprio ponto J.

</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>

2. Realização do exercício por parte dos alunos.

A professora estagiária vai circulando pela sala para apoiar os alunos nas possíveis dúvidas que possam surgir.

</td>
<td>6'</td>
</tr>
<tr>
<td>

3. Demostração da rotação com amplitude **45° e depois com - 45**°

<u>*Prof. Estagiária*</u>

- *Agora olhem todos para aqui novamente.*
- *Vamos fazer a rotação do mesmo polígono em relação a um ponto.*
- *Vamos fazer com amplitude* **45° e depois com - 45°.**

</td>
<td>*2'*</td>
</tr>
</table>

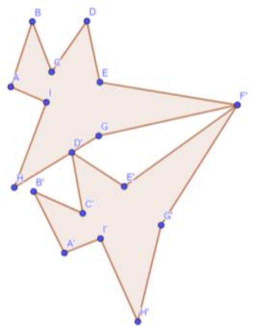


Figura 2 - Rotação em relação ao ponto F, com amplitude de 45°

Prof. Estagiária

- *Vamos criar um segundo polígono igual ao primeiro e vamos realizar a rotação em relação ao ponto F e com amplitude **- 45°***

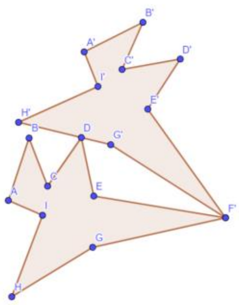


Figura 3 - Rotação em relação ao ponto F, com amplitude de -45°

Prof. Estagiária

- *Reparem na diferença de realizar a rotação com uma amplitude no sentido horário e no sentido anti-horário.*

Relembrar aos alunos as **propriedades e definição da rotação**.

Dada uma rotação de centro F e amplitude a:

(iii) Um segmento de reta transforma-se noutro com o mesmo comprimento.
(iv) Um ângulo transforma-se noutro com a mesma amplitude.

A rotação mantém a distância entre pontos, sendo uma isometria.

Definição de rotação:

Dados dois pontos F e G e um ângulo *a*, o ponto G' é a imagem do ponto G por uma rotação de centro F e ângulo *a* quando os segmentos [FG] e [FG'] têm o mesmo comprimento e os ângulos *a* e GFG' têm a mesma amplitude.

<table>
<tr>
<td>

4. Realização do exercício por parte dos alunos.

A professora estagiária vai circulando pela sala para apoiar os alunos nas possíveis dúvidas que possam surgir.

</td>
<td>6’</td>
</tr>
<tr>
<td>

5. Demostração da rotação com amplitude **90° e depois com -90°**

<u>*Prof. Estagiária*</u>

- *Agora olhem todos para aqui novamente.*
- *Vamos fazer a rotação do mesmo polígono em relação a um ponto.*
- *Vamos fazer com amplitude* **90° e depois com -90**°.

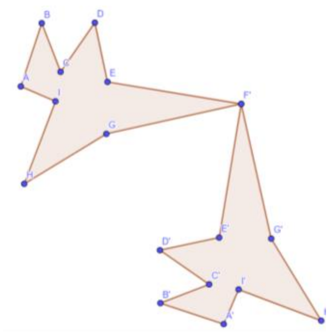


Figura 4 - Rotação em relação ao ponto F, com amplitude de 90°

<u>*Prof. Estagiária*</u>

- *Vamos criar um segundo polígono igual ao primeiro e vamos realizar a rotação em relação ao ponto F e com amplitude **- 90°***

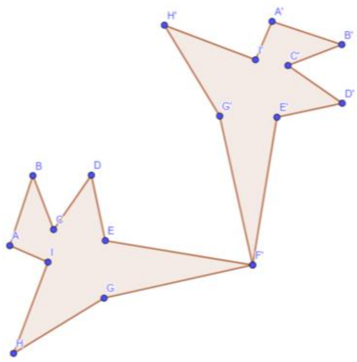
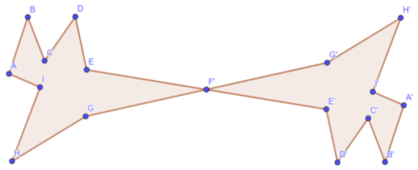
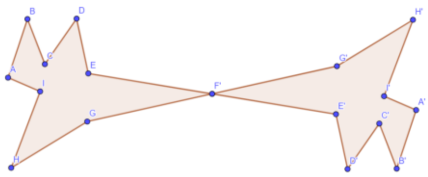


Figura 5 - Rotação em relação ao ponto F, com amplitude de -90°

<u>*Prof. Estagiária*</u>

- *Reparem na diferença de realizar a rotação com uma amplitude no sentido horário e no sentido anti-horário.*

</td>
<td>2’</td>
</tr>
</table>

6. Realização do exercício por parte dos alunos. A professora estagiária vai circulando pela sala para apoiar os alunos nas possíveis dúvidas que possam surgir.	6’
7. Demostração da rotação com amplitude **180° e depois com -180°.** *<u>Prof. Estagiária</u>* • *Agora olhem todos para aqui novamente.* • *Vamos fazer a rotação do mesmo polígono em relação a um ponto.* • *Vamos fazer com amplitude* **180° e depois com -180°**  *Figura 6 - Rotação em relação ao ponto F, com amplitude de 180°* *<u>Prof. Estagiária</u>* • *Vamos criar um segundo polígono igual ao primeiro e vamos realizar a rotação em relação ao ponto F e com amplitude* ***- 180°***  *Figura 7 - Rotação em relação ao ponto F, com amplitude de -180°* *<u>Prof. Estagiária</u>* • *Reparem que nesta situação não existe diferença em realizar a rotação com uma amplitude no sentido horário e no sentido anti-horário.*	2’
8. Realização do exercício por parte dos alunos. A professora estagiária vai circulando pela sala para apoiar os alunos nas possíveis dúvidas que possam surgir.	6´

9. Demostração da rotação com amplitude **360° e depois com -360°.**

<u>*Prof. Estagiária*</u>

- *Agora olhem todos para aqui novamente.*
- *Vamos fazer a rotação do mesmo polígono em relação a um ponto.*
- *Vamos fazer com amplitude* **360° e depois com -360°**

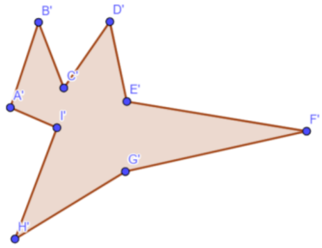


Figura 8 - Rotação em relação ao ponto F, com amplitude de 360°

<u>*Prof. Estagiária*</u>

- *Vamos criar um segundo polígono igual ao primeiro e vamos realizar a rotação em relação ao ponto F e com amplitude **– 360°***

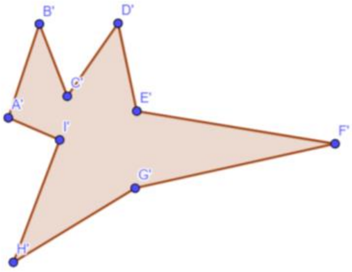


Figura 9 - Rotação em relação ao ponto F, com amplitude de -360°

<u>*Prof. Estagiária*</u>

- *Reparem que nesta situação não existe diferença em realizar a rotação com uma amplitude no sentido horário e no sentido anti-horário, visto que a figura e a sua imagem são coincidentes.*

2’

10. Realização do exercício por parte dos alunos.

A professora estagiária vai circulando pela sala para apoiar os alunos nas possíveis dúvidas que possam surgir.

6’

Recursos/materiais:	
• 1 Computador por aluno; • 1 projetor da sala aula;	• 1 quadro branco e marcadores para o quadro; • Material de escrita (para cada aluno);

Instrumento de Registo/Monotorização das Aprendizagens/Avaliação do professor: Checklist (Anexo 4.2).

Referências bibliográficas

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2012). Programa e Metas Curriculares. Matemática. Ensino Básico. *Ministério Da Educação e Da Ciência*, 1–118. Retrieved from https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/programa_matematica_basico.pdf

Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, H., & Oliveira, P. (2011). Geometria e medida no ensino básico. *Lisboa. Ministério Da Educação, Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular*. Retrieved from https://www.researchgate.net/profile/Luis_Menezes/publication/270051243_Geometria_e_medida_no_ensino_bsico/links/549f3f8a0cf257a635fe73b3.pdf

DGE. Aprendizagens Essenciais do 6.º Ano de Tecnologia de Informação e Comunicação (2018). Retrieved from http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/2_ciclo/6_tic.pdf

DGE. Aprendizagens Essenciais do 6.º Ano de Matemática (2018). Retrieved from https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico

Fernández, T. (2011). *Una Aproximación Ontosemiótica a la visualización y el Razonamiento Estacial*. Retrieved from http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/pages/tesisdoctorales.html

Maria Augusta Ferreira Neves, L. F. (2019). *Máximo 6.º ano*. (P. Editora, Ed.) (1.ª).

Anexo 4.2 – Checklist

Alunos		Participação	Atenção	Interesse	Utiliza corretamente o computador	Desenha o transformado de uma figura pela reflexão central no *GeoGebra*	Desenha o transformado de uma figura pela rotação no *GeoGebra*
1	Aluno A						
2	Aluno B						
3	Aluno C						
4	Aluno D						
5	Aluno E						
6	Aluno F						
7	Aluno G						
8	Aluno H						
9	Aluno I						
10	Aluno J						
11	Aluno K						
12	Aluno L						
13	Aluno M						
14	Aluno N						
15	Aluno O						
16	Aluno P						
17	Aluno Q						
18	Aluno R						
19	Aluno S						
20	Aluno T						
21	Aluno U						
22	Aluno V						
23	Aluno W						
24	Aluno X						
25	Aluno Y						

Legenda: Sim (S); Não (N); Realiza, mas com algumas dificuldades (+/-).