Universidade de Aveiro
2021

Maria Lucília Barros Dias

Aprendizagens ativas no domínio das funções reais com recurso a ferramentas digitais

Universidade de Aveiro
2021

Maria Lucília
Barros Dias

Aprendizagens ativas no domínio das funções reais com recurso a ferramentas digitais

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para Professores (2º ciclo), realizada sob a orientação científica do Doutor Nuno Rafael de Oliveira Bastos, Professor Adjunto da Área Científica de Matemática da Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Viseu do Instituto Politécnico de Viseu e da Doutora Maria Paula de Sousa Oliveira, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

“Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse, mas a aquisição, não é a presença, mas o ato de atingir a meta.”

(Gauss- Carl Friedrich)

O júri

presidente

ANDREIA DE OLIVEIRA HALL,
professora Associada da Universidade de Aveiro

MÁRCIO DINIS DO NASCIMENTO DE JESUS,
Professor Adjunto do Instituto Politécnico de Viseu, Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Viseu (Arguente)

MARIA PAULA DE SOUSA OLIVEIRA,
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro (orientadora)

Agradecimentos

A realização desta dissertação não poderia ser ter sido possível sem o apoio e generosidade temporal de várias pessoas que, quer direta, quer indiretamente, muito contribuíram para a concretização deste projeto.

Em particular, gostaria de agradecer:

- À minha orientadora, Doutora Paula de Sousa Oliveira, quer pela disponibilidade, quer pelo apoio e orientação, bem como pelas nossas discussões de ideias e pelas sugestões que foram, indubitavelmente, muito proveitosas nas inúmeras reuniões que tivemos.

- Ao meu orientador, Doutor Nuno Rafael de Oliveira Bastos, pela disponibilidade em todos os momentos, em particular nas muitas reuniões que tivemos, nomeadamente, aquelas em que me facultou as condições para eu aprender a trabalhar com o *Desmos*. Demonstrou um trabalho incansável na preparação, orientação e concretização da unidade didática, disponibilizando muito do seu tempo.

- Ao meu marido, Joaquim, pelo incentivo, compreensão e apoio incondicional ao longo de todo este trabalho.

- Aos meus filhos, Filipe, Madalena e Cláudia, pela motivação e pelo entusiasmo que me incutiram desde o primeiro dia.

- Às minhas amigas, Isabel Trigueiros e Clara Figueiredo, pelo estímulo e incentivo nos momentos mais difíceis, dando-me ânimo para prosseguir.

Palavras-chave Ferramentas Digitais, Ensino, Matemática, Funções, Didática.

Resumo

Esta dissertação tem como objetivo o estudo das funções reais de variável real com recurso a ferramentas digitais. Como professora de Matemática, lecionei no presente ano letivo o 10º ano do Ensino Secundário, o que permitiu aplicar os vários recursos digitais desenvolvidos nesta dissertação como suporte e estímulo para os alunos adquirirem estes conhecimentos de forma mais didática e motivadora.

Para atingir os objetivos foi implementada uma sequência didática que utiliza diversos recursos digitais que promovem uma educação de qualidade e um método de ensino diferenciador para os alunos. O *Google Classroom* foi a plataforma utilizada para centralizar a comunicação entre professor e alunos e vice-versa. Dessa forma, o processo de comunicação tornou-se mais ágil, claro e objetivo.

O *Desmos* foi o software utilizado para fazer a apresentação dos conteúdos programáticos a lecionar, nomeadamente as funções quadráticas, e para a resolução de exercícios interativos de aplicação prática desses conteúdos. Com este recurso os alunos podiam envolver-se mais nas atividades, fazer simulações e obter *feedback* em tempo real o que lhes permitia chegar à solução dos problemas propostos. Posteriormente, com os recursos digitais *Quizizz* e *Google Forms*, foram criados questionários para avaliar as aprendizagens dos alunos. Isto permitiu, quer ao professor quer aos alunos, obter um *feedback* mais objetivo do impacto do uso da sequência didática implementada.

No capítulo 3 desta dissertação apresenta-se um estudo teórico sobre as funções reais de variável real, ilustrado com vários exemplos, como suporte às aplicações desenvolvidas.

O projeto foi concretizado na Escola Secundária Alcaides de Faria, Barcelos, com duas turmas do décimo ano do curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias. Toda a atividade foi desenvolvida durante o segundo e terceiro períodos do ano letivo 2020/2021 em contexto de pandemia COVID-19 com as restrições definidas pela DGS, em grande parte na modalidade de ensino à distância.

No decorrer da atividade, os alunos mantiveram o entusiasmo e a motivação e, analisando os resultados obtidos, pode concluir-se que a sequência didática implementada teve impacto direto e positivo nas aprendizagens dos alunos.

Keywords Digital Tools, Teaching, Mathematics, Functions, Didactics.

Abstract

This dissertation aims to study the real functions of real variable using digital tools. As a Mathematics teacher, I've taught in this school year the 10th grade of the secondary school, which allowed me to apply the various digital resources developed in this dissertation as support and stimulus to acquire this knowledge in a more didactic and motivating way.

To achieve the objectives, a didactic sequence was implemented that uses several digital resources that promote quality education and a differentiating teaching method for students. *Google Classroom* was the platform used to centralize communication between teacher and students and vice versa. Thus, the communication process became more agile, clear and objective.

Desmos was the software used to present the program contents to be teaching, namely the quadratic functions, as well as for the resolution of interactive exercises of practical application of these contents. With this resource, students could become more involved in the activities, do simulations and get real-time feedback that allowed them to come up with the solution of the proposed problems. Later, with the digital resources *Quizizz* and *Google Forms,* questionnaires were created to evaluate students' learning. This allowed both the teacher and the students to obtain more objective feedback on the impact of using the implemented didactic sequence.

Chapter 3 of this dissertation presents a theoretical study on the actual functions of real variable, illustrated with several examples, as support for the applications developed.

The project was carried out at the Alcaides de Faria Secondary School, Barcelos, with two classes of the tenth year of the Scientific-Humanistic course in Science and Technology. All activity was carried out during the second and third terms of the 2020/2021 school year in the context of a COVID-19 pandemic with the restrictions defined by the DGS, largely in the modality of distance learning.

During the activity, the students maintained their enthusiasm and motivation and, analyzing the results obtained, it can be concluded that the didactic sequence implemented had a direct and positive impact on the students' learning.

Conteúdo

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Gráficos

1. Introdução

A presente dissertação de mestrado, sobre o tema “Aprendizagens ativas no domínio das funções reais com recurso a ferramentas digitais”, tem como objetivo a criação, recorrendo a recursos digitais, de uma sequência de atividades didáticas para o ensino de funções lecionadas no Ensino Secundário. Além disso, pretende-se também criar um método de aprendizagem alternativo e didático que cative os alunos e os ajude a compreender alguns conceitos abstratos relacionados com as funções, matéria onde, por vezes, se torna difícil para os alunos assimilar os conceitos devido ao seu grau de abstração.

À medida que o tempo passa e a tecnologia evolui os recursos e ferramentas disponíveis são cada vez mais e mais variados. Além disso, o acesso a estas ferramentas é mais facilitado, quer para o professor, quer para os alunos. Dessa forma, o professor pode adaptar o seu método de ensino tradicional, adicionando algumas ferramentas digitais para cativar os alunos para os conteúdos. Os alunos estão, por norma, mais recetivos a este tipo de ferramentas, pois cresceram numa época de evolução tecnológica e para eles faz todo o sentido operar com o computador, programas, aplicações, vídeos, entre outros. Nos dias de hoje a maioria dos alunos tem computador em casa com acesso à internet e para os que não têm, as escolas dispõem de salas equipadas com computadores com acesso à internet para que esses alunos possam desenvolver os seus trabalhos.

Contudo, o recurso a ferramentas digitais deve ser sempre complementado com uma componente humana por parte do professor. Cada aluno tem um perfil único e específico, então, o professor terá de ser capaz de introduzir para cada perfil as ferramentas necessárias e a forma como elas devem ser utilizadas para ajudar cada aluno.

O tema aqui abordado envolve uma grande diversidade de conceitos sobre as funções reais de variável real, conceitos esses que podemos aplicar (ou agregar) no estudo das funções quadráticas. Ao longo do texto incorporam-se alguns exemplos ilustrativos de modo a permitir que os alunos aprendam e compreendam os conceitos abordados.

2. Enquadramento

Neste capítulo é feita uma contextualização daquilo que se pretende com o desenvolvimento da presente dissertação de mestrado. Primeiro faz-se uma apresentação da evolução histórica do conceito de função. Depois, é feita uma descrição do papel das funções no programa de Matemática do Ensino Secundário. Em seguida, são apresentados alguns exemplos de recursos digitais já existentes e que serão usados na criação da sequência didática que é objeto de trabalho desta dissertação. Por fim, é feita uma apresentação das vantagens e da importância do uso desta metodologia para um melhor aproveitamento e concentração dos alunos.

2.1 A evolução do conceito de função

Atualmente, “Quando pensamos em função, duas coisas vêm à mente: a curva que a representa graficamente e sua expressão analítica.” (Roque, 2012) mas nem sempre foi assim e o conceito de função sofreu uma grande evolução ao longo do tempo.

Antes de se falar da história das funções, é fundamental compreender quando surgiu o conceito de função. Segundo Youschkevitch (1976) o primeiro estado do conceito de função vem da antiguidade. As tabelas babilónicas já continham, de alguma forma, uma ideia de função. Este conceito era usado pelos matemáticos da Babilónia em 2000 A.C. para a realização de diversos cálculos, como por exemplo, calcular quadrados e raízes quadradas.

Mais tarde na Grécia até ao século III D.C, de acordo com Youschkevitch (1976) começaram a ser atribuídas quantidades a símbolos do alfabeto. Aqui surgiram as primeiras noções de igualdade de funções e correspondência de quantidades, embora o conceito não tenha sido desenvolvido muito mais além disto nesta época. Nesta altura o termo “função” ainda não era utilizado.

Com o passar do tempo, chegou-se à Idade Média. Neste período, segundo da Silva Bueno e Viali (2009), “as primeiras ideias relativas à noção de função de uma forma mais geral e abstrata ocorrem no séc. XIV, nas escolas de Filosofia Natural de Oxford e Paris”.

François Viète que não aprofundou muito o conceito de “função”, utilizou algumas representações simbólicas de quantidades nos seus estudos. De acordo com a teoria de Viéte

(Sack, 2016) “é a introdução de inúmeros sinais para operações e relações matemáticas (em primeiro lugar, para adição, subtração, potência e igualdade) e, acima de tudo, sinais para quantidades desconhecidas e parâmetros, que Viète em 1591 denotou por vogais A, E, I,... e consoantes B, G, D,... do alfabeto latino, respetivamente. A importância dessa notação, que, pela primeira vez, possibilitou colocar no papel a forma simbólica de equações algébricas e expressões contendo quantidades desconhecidas e coeficientes arbitrários”. Porém Viète não foi muito além no estudo do conceito de função e havia ainda algumas lacunas para o alcançar. Estas lacunas foram colmatadas ao longo do tempo por vários autores que permitiram gradualmente que se chegasse ao conceito de função da atualidade. Entre esses autores pode referir-se Descartes, Newton, Leibniz, Bernoulli, Euler entre outros.

Dizia Descartes (Youschkevitch, 1976), “pela primeira vez e de forma clara, é sustentado que uma equação em x e y é um meio para introduzir uma dependência entre quantidades variáveis de uma maneira que é possível calcular a partir do valor de uma delas o valor correspondente da outra.”. Com esta relação de quantidades, as funções estenderam-se a outras áreas da Matemática e abriu-se o caminho para o conceito de “função” da atualidade. Este desenvolvimento permitiu aplicar esta relação ao cálculo integral e diferencial desenvolvido por Newton e Leibniz durante o século XVII.

Newton apresentou alguns desenvolvimentos na disciplina de Análise Matemática descrevendo conceptualmente o tempo e os movimentos, definindo o tempo como argumento universal e definindo as variáveis dependentes. Já Leibniz contribuiu com desenvolvimentos para as noções básicas de integração e diferenciação, utilizando pela primeira vez o símbolo de integral “S” em 1675 (Struik, 1969). Segundo refere o autor Youschkevitch (1976), foi num manuscrito de Leibniz de 1673 que surgiu pela primeira vez o termo “função”. Contudo, este termo não integrava a parte analítica, foi mais tarde que Leibniz e Bernoulli, entre 1667 e 1748, introduziram “um termo geral que representasse quantidades arbitrárias dependendo de uma variável à definição do termo função no sentido de uma expressão analítica” (da Silva Bueno & Viali, 2009).

A primeira noção de função surgiu então por volta do século XVIII, afirma o autor Kleiner (1989), acrescentando que este conceito não surgiu mais cedo por existirem falhas em alguns pré-requisitos de álgebra necessários à compreensão do conceito de função. Além disso, este autor diz que existia alguma falta de motivação para definir um conceito abstrato. Mais tarde estas falhas foram colmatadas com alguns acontecimentos importantes como:

extensão do conceito de número para abranger números reais e até mesmo complexos, a criação de uma álgebra simbólica, o estudo do movimento como um problema central da ciência e a junção de álgebra e geometria. Estes conceitos foram essenciais para que surgisse o conceito de função como uma relação entre conjuntos numéricos e como uma expressão analítica. Bernoulli contribuiu com mais avanços para a definição do conceito de função, nomeadamente num artigo em que propõe a letra grega ϕ como notação para a representação de uma função, ainda que escrita sem o auxílio de parêntesis, ou seja, $\phi\ x$. Os parêntesis, assim como a letra f para designar uma função, são atribuídos a Euler, que os utilizou numa publicação de 1740 (da Silva Bueno & Viali, 2009).

Euler, através dos seus contributos, "definiu uma constante como uma quantidade definitiva que assume sempre um e o mesmo valor, uma variável como um valor indeterminado ou universal que compreende todos os valores determinados e uma função de uma variável como uma expressão analítica composta por uma quantidade variável e números ou quantidades constantes" (Ponte, 1992). Além deste contributo, Euler teve um papel fundamental na aplicação do conceito de dependência entre variáveis numa função. Contudo, a distinção entre funções contínuas e descontínuas não estava totalmente clara neste período do tempo. Esta distinção e uma nova evolução do conceito de função surgiram por volta do século XIX com as contribuições de Cauchy (1823) na sua publicação "*Résumé des Leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal - tome premier*".

Já no século XX, segundo Monna (1972), já se teria criado uma definição de função abrangente. Desta forma, o seu conceito foi generalizado fugindo um pouco às definições convencionais que eram bastante mais restritas. Mais tarde, este conceito foi ampliado tornando-se aplicável não só a números, mas também à relação entre elementos de dois conjuntos quaisquer. Ainda de acordo com Monna (1972), por volta do ano 1939 o conceito de função fica claramente definido. O grupo Bourbaki (Bourbaki, 1970), constituído por sete matemáticos franceses, define então uma função da seguinte forma: "Sejam E e F dois conjuntos distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F é dita uma relação funcional em y, ou uma relação funcional de E em F, se, para qualquer que seja x de E, existe um, e somente um, elemento y de F que esteja na relação considerada com x. Denomina-se função a operação que associa a todo elemento de x de E um elemento y de F que se encontra na relação com x; diz-se que y é o valor da função para o elemento x, e que a função é determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais são equivalentes se determinam a mesma função". Este conceito é ainda aplicado e utilizado nos dias de hoje.

2.2 As funções e o programa de Matemática para o Ensino Secundário

O Programa de Matemática A para o ensino secundário tem por base o "Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Secundário" (ME, 2013) que entrou em vigor no ano letivo 2015/2016, tendo sido articulado com o "Perfil dos Alunos à Saída do Escolaridade Obrigatória" (ME, 2017) e com as "Aprendizagens essenciais" (ME, 2018). Este programa é bastante ambicioso e exigente no que diz respeito ao estudo das funções reais de variável real, e tratando-se de um tema estruturante na formação académica dos alunos, é um domínio para o qual se destinam um grande número de aulas. O estudo das funções reais de variável real inicia-se no décimo ano de escolaridade com alguns conceitos a elas associados como a noção de função real de variável real (que vamos designar apenas por função), o domínio, o contradomínio, a injetividade, a sobrejetividade e a restrição de uma função a um conjunto. Define-se a composição de funções e a função inversa e estudam-se algumas propriedades que estão associadas aos respetivos gráficos, como por exemplo a paridade, as simetrias (em relação ao eixo dos yy, à origem do referencial e à bissetriz dos quadrantes ímpares) e as transformações geométricas dos seus gráficos, sendo estas últimas de extrema importância no estudo da função quadrática e da função módulo que se faz também no décimo ano. Este estudo é feito essencialmente com base na análise gráfica. São ainda estudadas as funções definidas por ramos e as funções irracionais simples envolvendo radicais quadráticos e cúbicos, embora de uma forma não muito complexa, pois serão trabalhados e consolidados ao longo dos três anos do Ensino Secundário.

No décimo primeiro ano, o estudo das funções pressupõe já as aprendizagens consolidadas do décimo ano para serem aplicadas na definição de limite, no estudo da continuidade de uma função, no estudo das assíntotas, na noção de derivada e no estudo da monotonia. Neste ano de escolaridade, o estudo é feito com as funções polinomiais, racionais, irracionais e definidas por ramos. Aqui já é exigido cálculo algébrico e não apenas análise gráfica, como por exemplo, para determinar o domínio de uma função para estudar a continuidade ou a existência de assíntotas ao gráfico de uma função ou ainda para estudar a monotonia.

Ao longo dos três anos do Ensino Secundário, o grau de dificuldade e de complexidade, no estudo das funções vai aumentando gradualmente. Pois, embora seja no décimo ano que os alunos adquirem os conceitos básicos, é no décimo segundo ano que estes se tornam mais formais (ME, 2016) e que passam a ter maior relevância ao fazer o estudo de funções mais complexas, como as funções exponencial e logarítmica (função e sua inversa).

No atual programa da disciplina de Matemática A, tal como nos anteriores, dá-se uma grande ênfase ao estudo das funções reais de variável real, tal é a sua importância, quer no ensino secundário, quer no prosseguimento de estudos nos cursos das áreas das engenharias e das tecnologias, entre outras.

De acordo com o “Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória”, "O que distingue o desenvolvimento do atraso é a aprendizagem".

2.3 Exemplos de recursos digitais

Numa época em que os alunos têm múltiplas solicitações, a escola deve responder com atividades mais aliciantes. É por isso fundamental facultar aos alunos ferramentas digitais acessíveis através dos dispositivos que lhes são mais familiares, os telemóveis e computadores. Usando um ambiente familiar aos alunos, estamos a criar um ambiente estimulante e capaz de os envolver, facultando-lhe meios para construírem o seu conhecimento.

Atualmente os professores têm à sua disposição ferramentas digitais muito variadas que promovem as aprendizagens ativas no ensino da Matemática e contribuem para a diferenciação pedagógica, como por exemplo, *Google Forms*, *Quizizz*, *Google Classroom*, *Photomath*, Geogebra, *Desmos*, *Symbolab Math Solver*, Plataforma *Khan Academy*, entre outros. Contudo, o excesso de ferramentas pode dispersar os alunos e desviar o foco da sua utilização, sendo por isso necessário que o professor escolha aquelas que melhor se adequam aos conteúdos a lecionar, aos conhecimentos que os alunos já detêm na sua utilização, à facilidade de comunicação das mesmas e à possibilidade de serem utilizadas, quer no ensino presencial, quer no ensino à distância. Por isso mesmo, neste ano letivo optou-se pela utilização do *Google Classroom*, *Google Forms*, Quizizz e *Desmos*.

2.3.1 *Google Classroom*

O *Google Classroom* é uma plataforma digital gratuita criada pela *Google* (*Google for Education*), desenvolvida para *Blended learning*, uma mistura de ensino à distância e ensino presencial, cujo principal objetivo é a divulgação e construção de materiais em diversos formatos, word, PDF, vídeo e áudio, entre outros, e que podem ser partilhados. Tem uma interface muito simples e intuitiva, podendo ser utilizada numa grande diversidade de dispositivos, telemóveis, tablets ou PC.

A plataforma permite aos professores criar turmas, tarefas, trabalhos, formulários e atribuições diferenciadas para cada aluno ou grupo de alunos, facilitando assim o ensino diferenciado. O agendamento dos trabalhos e tarefas atribuídas facilita a gestão dos momentos de avaliação.

A forma como podem ser organizados os recursos disponibilizados e a interação com outras plataformas como *Desmos* e *Khan Academy*, para além da vertente ecológica associada à economia de papel, são outras das vantagens desta plataforma. O facto de ser online possibilita o acesso em qualquer lugar, desde que haja uma ligação à internet, condições que devem ser asseguradas para todos os alunos garantindo a equidade no acesso às aprendizagens.

Este tipo de plataformas pode ser visto como facilitadores da comunicação professor-aluno permitindo que o professor faça um acompanhamento dos seus alunos no decurso das atividades propostas, e após a correção dos trabalhos ou tarefas os alunos são notificados via email do *feedback* do professor.

Em conclusão, o *Google Classroom* é uma ferramenta digital com grandes potencialidades quer para ser usada no ensino presencial quer no ensino à distância.

2.3.2 *Google Forms*

O *Google Forms* é uma aplicação gratuita da *Googl*e que permite criar formulários online e, à semelhança do *Google Classroom*, tem uma interface simples e intuitiva sendo apenas necessário ter uma conta *Googl*e. A sua partilha é feita através de um link ou através de um email e por isso é necessário ter ligação à internet. É muito útil quer para fazer a avaliação formativa quer a sumativa e, se os formulários forem criados no *Google classroom* (criar trabalho com questionário), as classificações vão diretamente para o *Google Classroom* sendo mais fácil o seu tratamento e análise. Caso o questionário seja criado no Google *Forms*, é produzido um relatório que é armazenado automaticamente no *Google Drive* da conta associada, o qual pode ser manipulado usando o *Google Sheets* (ou exportado para excel).

Na elaboração de um questionário pode criar-se vários tipos de questões: de resposta curta, de escolha múltipla, com caixa de verificação, entre outras. O professor pode incluir a cotação de cada questão, vídeos explicativos e comentários de resposta que podem servir como reforço positivo para os alunos e também pode permitir que os alunos carreguem ficheiros em vários formatos (PDF, vídeo, áudio, desenho, folha de cálculo entre outros) nas suas respostas. Outra das funcionalidades desta ferramenta é a possibilidade de exigir resposta a algumas das questões para que o formulário possa ser submetido.

Na elaboração das perguntas é possível inserir simbologia matemática instalando suplementos gratuitos, como por exemplo o *Hypatia*, o que facilita o trabalho de escrita matemática. Se o objetivo do questionário for a avaliação sumativa, permite apresentar as opções criadas pelo professor de forma aleatória.

Há ainda a salientar que, se o questionário incluir apenas questões de resposta fechada, a correção é automática sendo uma grande vantagem, pois permite economia de tempo e uma análise dos resultados imediata, facilitando bastante o trabalho do professor e a sua atuação face aos resultados. Salienta-se também as vantagens na economia de papel e o facto de tanto poder ser usada no ensino presencial como no ensino à distância.

2.3.3 *Quizizz*

O *Quizizz* é uma ferramenta digital gratuita que permite criar um conjunto de questões para os alunos testarem as aprendizagens de uma forma divertida e motivadora. Pode aceder-se a esta ferramenta através do telemóvel, tablet ou PC, desde que tenha ligação à internet.

No final de cada resposta o aluno sabe de imediato se acertou ou não e são-lhe atribuídos pontos, posicionando-o numa lista com todos os alunos de acordo com a pontuação obtida, funcionando como um jogo.

Para cada "jogo" é possível obter informações detalhadas, em tempo real, que podem ser utilizadas na avaliação formativa ou sumativa. No *Quizizz* são utilizadas estratégias de gamificação para motivar, despertar interesse e proporcionar aos alunos aprender, ao mesmo tempo que jogam. À medida que vão jogando vão conquistando pontos, passam para níveis de desempenho superiores e isso promove a competitividade saudável entre os alunos da turma.

Para criar um *Quizizz* o professor tem disponíveis cinco tipos de questões, Multiple Choice (onde o aluno escolhe apenas uma das opções), Check box (permite escolher mais do que uma opção), Fill-in-the-Blanck (para preencher espaços), Poll (sondagem, é uma questão sem avaliação) e Open-Ended (de resposta aberta). Também pode escolher fazer uma apresentação utilizando Slides e incluir questões do tipo referido acima. Ao elaborar as questões, o professor pode incluir fotografias, áudio, vídeo entre outros. Os *Quizizz* elaborados ficam guardados na conta criada para o efeito e, para os disponibilizar aos alunos, pode fazer-se de duas formas:

- no imediato (numa aula presencial, por exemplo) escolhendo "Start a live quiz" e escolhe-se as definições para a forma como vai ser realizado (se em grupo, individual, em modo de teste, etc).

- agendado (numa aula assíncrona, num trabalho de casa, etc.) escolhendo "Assign homework" onde se define a data limite para a entrega e as definições para a realização.

Nas duas situações anteriores, no final das definições é gerado um endereço eletrónico, um código para ser fornecido aos alunos e um link. Existe também a possibilidade de partilhar o *Quizizz* com o *Google Classroom, Microsoft Teams, Twiter,* entre outros, contudo é mais seguro e menos intrusivo copiar o link e disponibilizá-lo aos alunos no *Google Classroom* por exemplo, acautelando assim a proteção de dados dos alunos.

2.3.4 *Desmos*

O *Desmos* é também uma plataforma digital gratuita bastante apelativa e com uma interface muito intuitiva. Pode aceder-se a esta ferramenta através do telemóvel, tablet ou computador desde que tenham ligação à internet, com exceção das aplicações para dispositivos móveis que não necessitam dessa ligação. "*Desmos* é um software/aplicação de Matemática, dinâmico, que oferece um ambiente virtual para aprender e ensinar matemática" (Silva et al., 2020). Nesta plataforma podem criar-se conjuntos de atividades e tarefas interativas e facilitadoras das aprendizagens na disciplina de Matemática, de modo a torná-las mais significativas e com um elevado potencial motivacional.

De realçar ainda que é possível utilizar atividades já existentes, editá-las e personalizá-las de acordo com os objetivos pretendidos ou criar novas, como se ilustra na Figura 1.

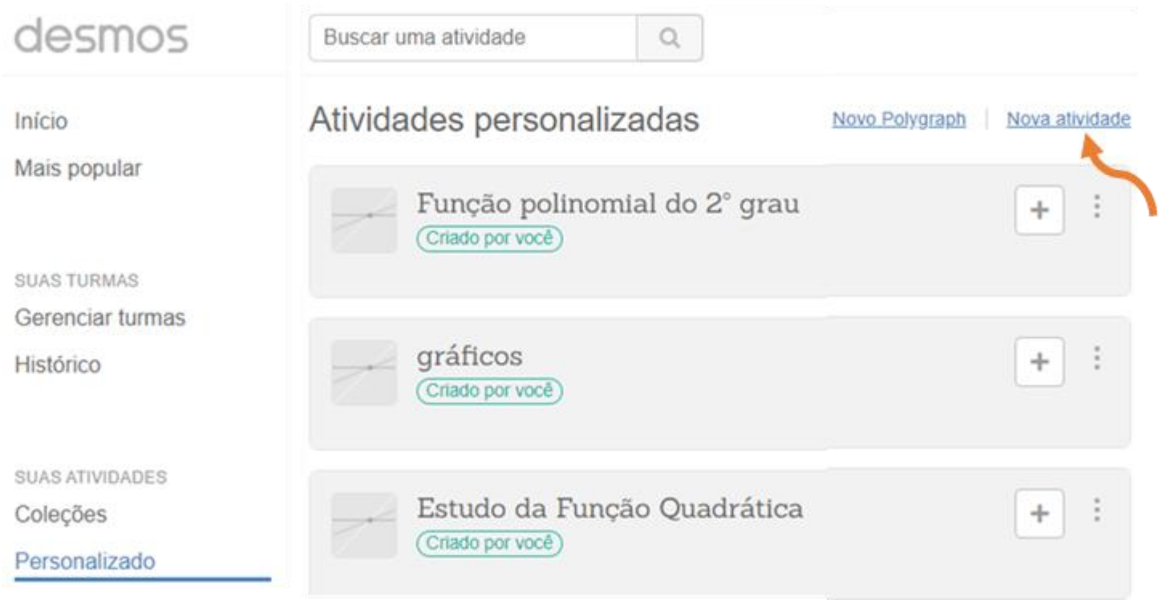


Figura 1 - Criação de uma nova atividade com o Desmos

Cada atividade é constituída por um conjunto de páginas que podem ser inseridas, como ilustrado na Figura 2.

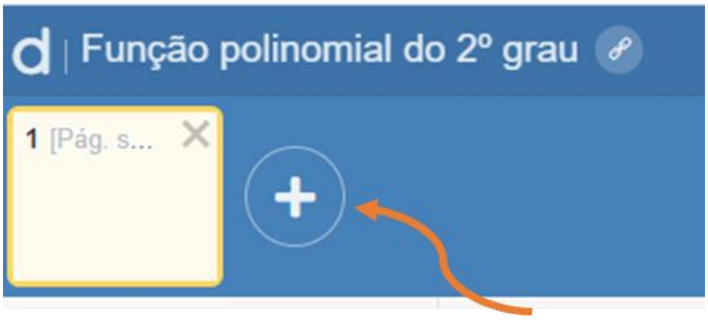


Figura 2 - Criação de páginas nas atividades do Desmos

Na criação das atividades, podem adicionar-se vídeos explicativos, tabelas, gráficos, questões de escolha múltipla, caixas de seleção e desenho, entre outras. Assim, a utilização destas opções permite a diversificação das atividades e a adequação a grupos de alunos com diferentes especificidades. Na Figura 3 pode observar-se a adição de um gráfico a uma atividade e na Figura 4 a adição de uma tabela.

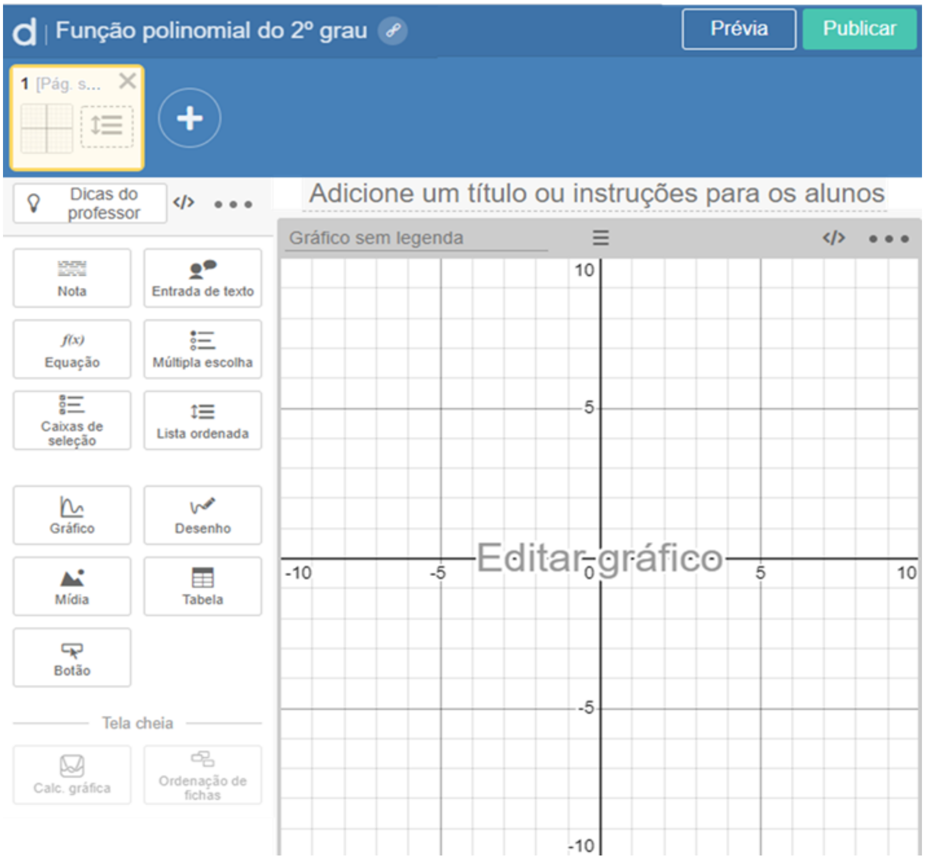


Figura 3 - Adição de um gráfico numa atividade do Desmos

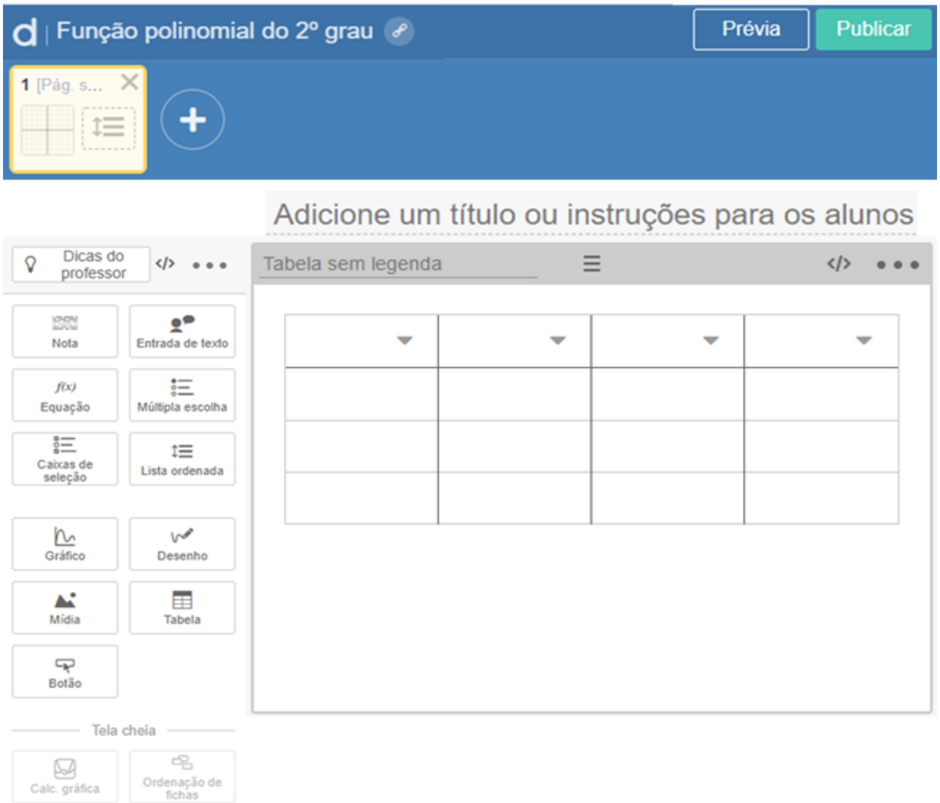


Figura 4 - Adição de uma tabela numa atividade do Desmos

Nesta plataforma podem criar-se turmas enviando aos alunos o código para se inscreverem ou então importar as turmas já criadas no *Google Classroom*, como se ilustra na Figura 5.

Figura 5 - Criação de uma turma no Desmos

Criadas as turmas, faz-se a atribuição das atividades, como se ilustra na Figura 6. Pode também partilhar-se apenas o link para a atividade sem a necessidade de criar turmas.

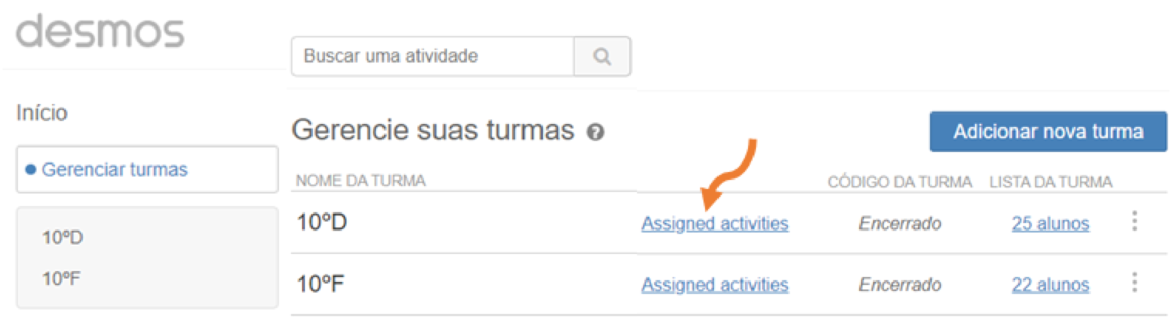


Figura 6 - Atribuição de atividades aos alunos da turma

Na realização das atividades, o professor tem a possibilidade de acompanhar e monitorizar o progresso de cada aluno e da turma no seu global e, a partir daí, adaptar a planificação do trabalho ao grupo em causa. O professor controla no painel apresentado na Figura 7 o ritmo da resolução das atividades, podendo permitir a realização sequencial de atividades ou a navegação livre entre atividades.

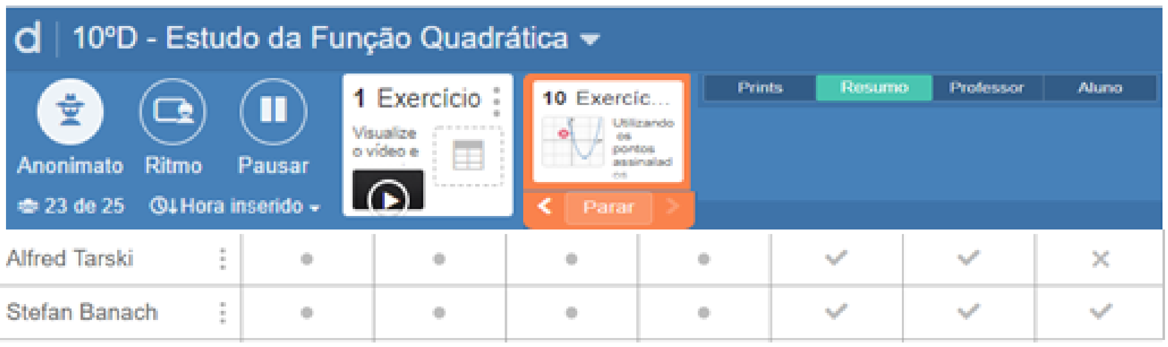


Figura 7 - Painel de controle da realização das atividades no Desmos

Através deste painel pode acompanhar-se o desempenho dos alunos, permitindo ao professor detetar se alguns alunos estão a enfrentar dificuldades ou se conseguem realizar as tarefas autonomamente, intervindo atempadamente. Caso se verifique que a maior parte dos alunos estão com dificuldades em concluir as tarefas, o professor pode fornecer alguma informação adicional e pertinente à compreensão dos conteúdos abordados para prosseguirem as atividades.

Estas funcionalidades fazem do *Desmos* uma ferramenta fundamental para apoiar um ensino diferenciado de acordo com as necessidades individuais de cada aluno. Permite ainda copiar respostas e partilhá-las com a turma para se destacarem aspetos relevantes das respostas ou até para dar o *feedback*, ou ainda mostrar tipos de respostas, certas e/ou erradas, em anonimato, para se poder colocar à discussão na turma.

"*Desmos* é uma ótima maneira de envolver os estudantes a desenvolver habilidade de investigação" (Antunes G., Cambrainha M. 2020).

Para além disto, pode funcionar também como calculadora gráfica digital permitindo a construção de gráficos e a sua exploração neste nível de ensino sem a necessidade de recurso a uma calculadora gráfica convencional.

Em particular neste trabalho, a utilização desta ferramenta no estudo das funções, nomeadamente nas funções quadráticas, constituiu uma mais-valia, tornando-o muito mais intuitivo e atrativo.

2.4 A importância das metodologias digitais alternativas de ensino

Os alunos dos dias de hoje são alunos da era digital, contactam com a tecnologia no seu quotidiano e esta causa-lhes bastante fascínio. Os recursos digitais permitem abordar de forma diferente e motivadora a lecionação dos vários conteúdos, nomeadamente funções onde, tradicionalmente, os alunos apresentam maiores dificuldades. Além dos conteúdos educativos estas metodologias digitais desenvolvem, ainda mais, as competências tecnológicas dos alunos. De acordo com o documento de Aprendizagens Essenciais (ME, 2018) "Desde o início do ensino secundário, a tecnologia deve ser usada de forma crítica e inteligente contribuindo para o desenvolvimento de novas competências associadas à área da programação que, nalguns países, estão já integradas nos programas de Matemática. A tecnologia é uma ferramenta cada vez mais presente na sociedade e no mercado de trabalho e também um recurso essencial no ensino, ajudando os alunos a perceber as ideias matemáticas, a raciocinar, a resolver problemas e a comunicar. Assim, a tecnologia gráfica deve estar presente, quer em contexto de sala de aula, quer em contexto de avaliação externa.". É fundamental adaptar as metodologias de ensino ao perfil dos alunos e é notória uma alteração do perfil do aluno ao longo do tempo com ênfase nos últimos anos em que se deu uma explosão tecnológica.

De acordo com algumas fontes (Panworld Education, 2017) os recursos digitais estão gradualmente a substituir os métodos tradicionais de ensino. A adaptação das salas de aula tem ajudado muito nesta transição e já é notório o recurso a equipamentos onde se utilizam recursos digitais. Por exemplo, o uso do tablet em vez do papel, recorrendo a resolução de exercícios com utilização de funcionalidades que com o método convencional, o papel, não seria possível aceder a elas. O estudo recorrendo a recursos digitais, apresenta algumas vantagens, nomeadamente, tornar os alunos mais motivados, a possibilidade destes recursos serem partilhados com os pais e educadores alargando assim os envolvidos no processo de ensino e a facilidade de partilhar recursos e conhecimentos entre alunos.

O autor Krumsvik (2008) defende que “alfabetização em informática, alfabetização digital e competência digital são todos conceitos que destacam a necessidade de lidar com a tecnologia na nossa era digital.”. Segundo ele, não é apenas necessária uma adaptação do professor, mas também uma adaptação dos conteúdos de forma a enquadrá-los numa componente mais pedagógico-digital em comparação com os métodos de ensino tradicionais. Importa também referir que a utilização de recursos digitais para Krumsvik é essencial para a perceção dos professores sobre a importância das TIC e o alcance que os recursos digitais permitem.

Para Beckmann (2018), para que haja sucesso quer nos estudos quer no trabalho, as pessoas precisam de ter uma formação digital apropriada. O desenvolvimento das tecnologias e recursos digitais está a crescer a um ritmo muito elevado e estão a surgir novas oportunidades de aprendizagem digital. Contudo, independentemente do método de ensino, defende que a educação tem como objetivo habilitar as pessoas para que “se desenvolvam como indivíduos e que participem na vida social, política e económica de forma responsável”. Desta forma salienta que as vantagens dos recursos digitais poderão ser benéficas nesta matéria tendo em conta a sua escalabilidade e facilidade de acesso.

Para Williams (2020) existem muitas vantagens no uso de recursos digitais. A primeira refere-se à possibilidade de gravar aulas, palestras e sessões que permitem aos alunos assistir mais tarde. Esta vantagem é útil quando os níveis de concentração e retenção de conhecimento estão baixos. A segunda vantagem está relacionada com a disponibilidade de recursos. Estes estão sempre disponíveis online e dessa forma os alunos não precisam de se preocupar com os horários de abertura e fecho das bibliotecas. A terceira é essencialmente a rede criada. Através das salas de chat, grupos e fóruns os alunos comunicam em rede e podem tirar dúvidas entre si quer do uso de ferramentas digitais quer dos conteúdos abordados. Outra vantagem é a possibilidade de se realizar estudo autodidata. Este tipo de estudo será útil para alunos que têm dificuldade em assistir às aulas, por exemplo, por motivos profissionais para trabalhadores-estudantes. O estudo autodidata também é um bom complemento ao estudo de sala de aula onde o aluno aprofunda conhecimento nas matérias que não conseguiu reter tão bem. Mais uma vantagem é a quantidade de ferramentas disponíveis de suporte, por exemplo, para comunicação existe o *Slack*, *Zoom*, *Skype*, *Teams* entre outros. Isto permite aos alunos e ao professor utilizarem a ferramenta com funcionalidades que mais os satisfaz em termos de necessidades de comunicação. Outra vantagem dos recursos digitais é o facto de estes estarem disponíveis em várias línguas, facilitando ainda mais a partilha de conteúdos e o alcance. Atualmente, a maioria das ferramentas já dispõe de recursos em várias linguagens e inclusive permitem selecionar a linguagem em que se pretende visualizar os conteúdos. Por fim, é também apontada como vantagem uma componente ambiental. Com o uso de recursos digitais, o número de viagens é reduzido e a quantidade de papel produzida por aluno é significativamente menor. Estes dois fatores contribuem para a redução da pegada ecológica.

A este propósito é de referir, de acordo com O Quadro Europeu de Competência Digital para Cidadãos (DigComp), “Na maioria dos estados-membros, os currículos foram ou estão a ser desenvolvidos de modo a garantir que a geração Jovem seja capaz de participar numa sociedade digital de forma criativa, crítica e produtiva.” e, ainda, de acordo com O Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória "O mundo atual coloca desafios novos à educação. O conhecimento científico e tecnológico desenvolve-se a um ritmo de tal forma intenso que somos confrontados diariamente com um crescimento exponencial de Informação a uma escala global. "

3. Funções reais de variável real

3.1. Noção de função e de função real de variável real

O tema Funções é abordado pela primeira vez no 7º ano de escolaridade onde se introduz o conceito de função, operações com funções, formas de definir uma função através de um diagrama sagital, tabela, gráfico, gráfico cartesiano e expressão analítica e a interpretação destas formas como relações entre variáveis e como correspondências unívocas entre dois conjuntos. A este nível representam-se e interpretam-se graficamente as funções lineares e relaciona-se a representação gráfica com a representação algébrica e reciprocamente. Relativamente às funções lineares, estudam-se como sendo funções de proporcionalidade direta. O estudo das funções lineares será abordado na secção 3.6 onde serão tratadas as funções afins. Este tema, abordado no 7º ano do Ensino Básico, é posteriormente retomado no 10º ano do Ensino Secundário quando se inicia o estudo das funções reais de variável real. Também, ao nível do 7º ano, são ainda abordadas as sucessões como funções de domínio $\mathbb{N}$.

Nesta secção apresenta-se a noção de função e alguns conceitos básicos associados às funções estudadas no 10º ano. Ao longo do capítulo apresentam-se os conteúdos de forma mais aprofundada, com o objetivo de os contextualizar. Contudo, no capítulo 5, aquando da apresentação destes conceitos aos alunos, ter-se-á em conta apenas a articulação com as "Metas Curriculares", as "Aprendizagens Essenciais" e o "O Perfil do Aluno à Saída da Escolaridade Obrigatória".

Nos exemplos que são apresentados nas secções 3.1.2, 3.1.3 e 3.2 por vezes utilizam-se termos e conceitos que, embora sejam do conhecimento informal dos alunos, serão definidos formalmente aquando do estudo das funções reais de variável real, afins e quadráticas.

3.1.1. Noção de função

Antes de definir função real de variável real é importante apresentar o conceito de função e a sua caracterização num sentido mais lato.

A noção de função assenta no conceito de correspondência entre dois conjuntos, A e B.

Definição: Uma **correspondência** do conjunto A (conjunto de partida) para o conjunto B (conjunto de chegada) é um qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times B$, formado pelos pares (a, b) onde a pertence a A e b pertence a B. A correspondência diz-se unívoca se aos elementos de A que estão na correspondência só lhes corresponde um único elemento de B e será biunívoca se, para além de ser unívoca, aos elementos de B que estão na correspondência só lhes corresponder um elemento de A.

Observando a Figura 8 podem verificar-se três correspondências: f, g e h. A correspondência f formada pelos pares $(1,2)$ e $(2,4)$, não é uma função porque existe um elemento de A, elemento 3, que não tem correspondente no conjunto de chegada B. A correspondência g, formada pelos pares $\{(1,2), (1,4), (2,6), (3,8)\}$ não é uma função porque existe um elemento do conjunto A, elemento 1, que tem vários correspondentes em B. A correspondência h, formada pelos pares $\{(1,2), (2,4), (3,6)\}$ é uma função porque a cada elemento do conjunto A corresponde um e um só elemento do conjunto B.

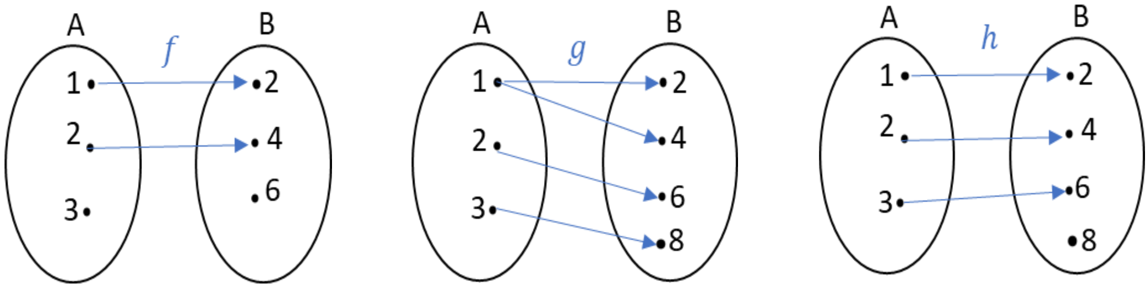


Figura 8 - Correspondência f, g e h entre o conjunto A e o conjunto B

Definição: Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma **função** de A em B é uma correspondência unívoca que a cada elemento $x \in A$ associa um e um só elemento $y \in B$. Sendo f uma função de A em B escreve-se $f: A \longrightarrow B$; ao conjunto A chamamos domínio de f e ao conjunto B conjunto de chegada de f.

O domínio de f representa-se usualmente por D_f e os seus elementos designam-se por objetos.

O subconjunto do conjunto de chegada constituído pelos elementos de B que são imagem de algum x de A (conjunto das imagens) designa-se por contradomínio da função e denota-se por D'_f , CD_f ou $f(A)$.

Uma função fica bem definida se conhecermos o seu domínio, o seu conjunto de chegada e a "lei" que permite determinar a imagem de qualquer elemento do domínio.

Usando como exemplo a função h da figura 1 pode escrever-se:

- $D_h = \{ 1, 2, 3 \}$, ou seja, os elementos 1, 2 e 3 do conjunto A são os objetos da função.

- $D'_h = \{ 2, 4, 6 \} \subseteq B$, ou seja, os elementos 2, 4 e 6 do conjunto B são as imagens dos elementos de A pela função h.

3.1.2. Formas de representar uma função

Como já foi referido na secção 3.1, o estudo das funções inicia-se no 7º ano do Ensino Básico, onde, para além da noção de função, são abordadas algumas formas de a representar, nomeadamente: Diagrama Sagital, Tabela, Gráfico, Gráfico Cartesiano e Expressão Analítica.

Apresentam-se a seguir alguns exemplos de formas de definir uma função.

3.1.2.1. Diagrama sagital ou diagrama de Venn

Seja f a função $f: A \longrightarrow B$, com $A = \{Filipe, Ana, Sofia, Maria\}$ e

$B = \{Porto, Lisboa\}$. Na Figura 9 pode observar-se a representação da função num diagrama sagital ou de Venn.

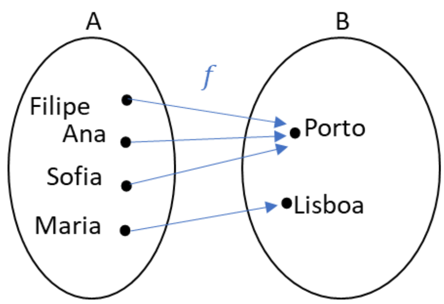


Figura 9 - Diagrama de Venn da função f

3.1.2.2. Tabela

Seja f a função $f: A \longrightarrow B$, com $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$ tal que $f(1) = 2$, $f(2) = 4$ e $f(3) = 6$. A Tabela 1 representa a função f.

Tabela 1 - Representação de uma função por uma tabela.

x	1	2	3
y	2	4	6

Nota: A tabela não fornece toda a informação sobre a função, uma vez que não permite saber o conjunto de chegada.

3.1.2.3. Gráfico

Definição: O **gráfico** de uma função é o conjunto dos pares ordenados (x, y) contido no produto cartesiano A por B $(A \times B)$ com $x \in A$ e $y = f(x) \in B$, sendo x um elemento do domínio e y a sua imagem.

$$G_f = \{(x, y) \in A \times B: y = f(x)\}$$

Utilizando a função f dada como exemplo no diagrama sagital a sua representação através do gráfico é

$$G_f = \{(Filipe, Porto); (Ana, Porto);\ (Sofia, Porto);\ (Maria, Lisboa)\}$$

3.1.2.4. Gráfico Cartesiano

Esta representação utiliza-se quando o domínio e o conjunto de chegada da função são subconjuntos de $\mathbb{R}$. Na Figura 10, encontra-se a representação através de um gráfico cartesiano da função $f: [-1{,}8] \longrightarrow [-2{,}8]$.

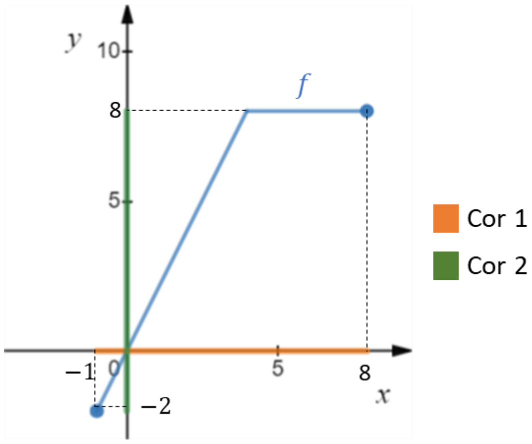


Figura 10 - Gráfico cartesiano da função f

Nesta representação, o domínio é o conjunto das abcissas dos pontos do gráfico assinalado a cor 1 e o contradomínio é o conjunto das ordenadas correspondentes assinalado a cor 2.

Sendo uma sucessão uma função cujo domínio é $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ e o conjunto de chegada é $\mathbb{R}$, pode ser representada através de um gráfico cartesiano. Na Figura 11, encontra-se o gráfico cartesiano representativo da sucessão (a_n) de termo geral $a_n = 2n - 1$,.

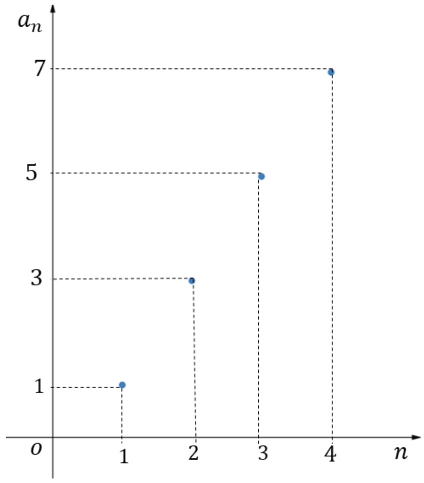


Figura 11 - Gráfico cartesiano da sucessão (a_n)

3.1.2.5. Lei de formação

A lei de formação de uma função f é uma regra que permite determinar a imagem por f de qualquer elemento do domínio, por exemplo, a função que a cada país europeu associa a sua capital ou a função que a cada número associa o seu dobro e que, neste caso, se pode traduzir por $y = 2x$, $f(x) = 2x$ ou usando a notação

$$\begin{array}{rccc} f\colon & A & \longrightarrow & B \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

e que no exemplo apresentado em 3.1.2.2. assumia a forma

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \{1,2,3\} & \longrightarrow & \{2,4,6,8\} \\ & x & \longmapsto & 2x \end{array}$$

Esta forma fornece informação acerca de A e de B e não apenas a sua lei de formação.

Quando o domínio e o contradomínio são subconjuntos de $\mathbb{R}$, a lei de formação designa-se por expressão analítica da função.

3.1.3. Função real de variável real

Definição: Dada uma função f de A em B, diz-se que f é uma **função real de variável real** se o domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$ e o conjunto de chegada é $\mathbb{R}$, isto é, $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}$.

Na Figura 12 pode observar-se uma função f real de variável real e duas funções, g e h, que não são funções reais de variável real.

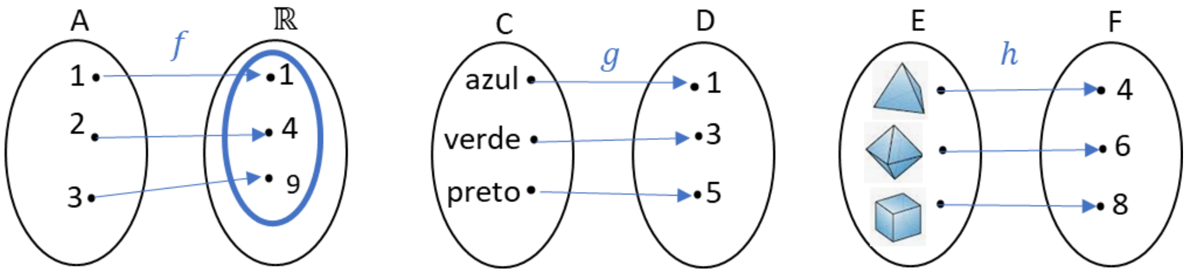


Figura 12 - Diagrama de Venn da função f real de variável real e das funções g e h

A função f é uma função real de variável real porque $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}$.

As funções g e h não são funções reais de variável real porque $C \nsubseteq \mathbb{R}$ e $E \nsubseteq \mathbb{R}$. A designação função real pressupõe que o conjunto de chegada é $\mathbb{R}$ e de variável real pressupõe que o domínio da função é um subconjunto de $\mathbb{R}$.

Em geral, para definir uma função real de variável real são necessários o domínio, o conjunto de chegada e um processo que permita determinar, para todo o elemento de x pertencente ao domínio, D_f, o elemento $f(x)$, que a função f faz corresponder a x. x designa-se por variável independente e o valor y que é imagem de algum x designa-se por variável dependente. A relação que existe entre as variáveis dependente e independente pode ser traduzida por uma expressão designatória $f(x)$, a que chamamos expressão analítica de f.

Assim, para definir uma função real de variável real basta o domínio e a regra de transformação dos objetos em imagens. Por outro lado, se nada for dito acerca do domínio, convencionou-se que será o maior conjunto de números reais para os quais tem significado a expressão analítica $f(x)$ que define a função, isto é, o domínio é constituído por todos os números reais x para os quais $f(x)$ representa um número real.

Portanto, para caracterizar uma função real de variável real f de A em $\mathbb{R}$, é necessário identificar:

- o domínio, o conjunto A.
- uma expressão analítica $f(x)$

Neste caso, a caracterização da função f pode tomar a seguinte forma:

$$\begin{array}{cccc} f: & A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Exemplo 1

A função real de variável real definida por: $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ tem por domínio $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$. Como a função é definida por um quociente, o denominador não pode ser nulo,
$D_f = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$.

Então a função f, pode escrever-se na forma

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}\backslash\{-1,1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{x^2-1} \end{array}$$

Exemplo 2

A função real de variável real definida por $g(x) = \sqrt{x-3}$ tem por domínio o intervalo $[3, +\infty[$ uma vez que uma raiz de índice par só tem significado se o radicando for maior ou igual a zero:

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: x - 3 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 3\} = [3, +\infty[$. Pode escrever-se a função g na forma

$$\begin{array}{cccc} g: & [3, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x-3} \end{array}$$

3.2. Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas

3.2.1. Funções Injetivas

Para melhor ilustrar o conceito de função injetiva é usual utilizar-se funções definidas através de um diagrama de Venn uma vez que a perceção visual permite com mais facilidade a compreensão do conceito. Na Figura 13 estão representadas, por diagramas de Venn, duas funções f e g.

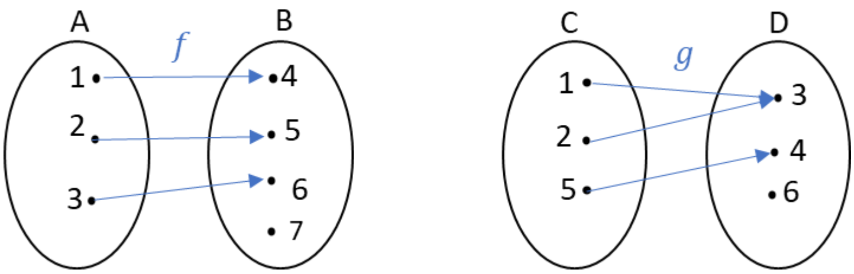


Figura 13 - Diagrama de Venn das funções f e g

Por observação dos diagramas verifica-se que na função f quaisquer dois elementos distintos do domínio têm imagens distintas, por isso dizemos que a função f é injetiva. Relativamente à função g verifica-se que dois objetos distintos, 1 e 2, têm a mesma imagem, 3, por isso dizemos que a função g é não injetiva.

Definição: Dados dois conjuntos A e B, uma função f de A em B diz-se **injetiva** se e somente se quaisquer dois elementos distintos de A têm imagens distintas em B. Simbolicamente escreve-se,

$$\forall\, x_1, x_2 \in A, \qquad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

ou, pela implicação contrarrecíproca[1], se tivermos duas imagens iguais então os correspondentes objetos são iguais e escreve-se $\forall\, x_1, x_2 \in A,\ f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$

[1] Recorde-se que da lógica tem-se a equivalência entre as duas implicações $p \implies q \iff (\sim q \implies \sim p)$.

Exemplo 1

Sendo f e g as funções definidas em $\mathbb{R}$ por: $f(x) = -2x + 3$ e $g(x) = x^2$, pretende-se mostrar que f é injetiva e que g é não injetiva.

Por definição,

$\forall\, x_1, x_2 \in A, \qquad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow -2x_1 + 3 = -2x_2 + 3 \Leftrightarrow -2x_1 = -2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, logo a função é injetiva.

Aplicando agora a definição à função g, tem-se

$\forall\, x_1, x_2 \in A, \qquad g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \vee x_1 = -x_2$$

Logo, g é não injetiva porque objetos distintos, neste caso simétricos, têm a mesma imagem.

Os alunos sentem frequentemente dificuldade na compreensão desta relação. É importante salientar que apesar de $x_1 = x_2 \Rightarrow g(x_1) = g(x_2)$, a implicação recíproca não se verifica, ou seja, $g(x_1) = g(x_2)$ não implica $x_1 = x_2$, já que elementos simétricos podem ter a mesma imagem.

Também pode mostrar-se que uma função é não injetiva através de um contraexemplo. No caso da função g, verifica-se que $-2 \neq 2 \ \wedge \ g(-2) = g(2)$ pois $(-2)^2 = 2^2$. Assim, dois objetos diferentes têm a mesma imagem e pode concluir-se que a função g é não injetiva.

Exemplo 2

Sejam f, g, h e i as funções representadas pelos seus gráficos cartesianos na Figura 14.

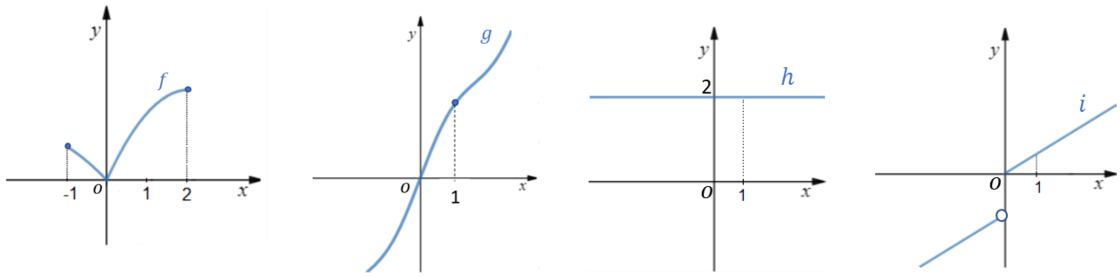


Figura 14 - Gráfico cartesiano das funções f, g, h e i

Pretende-se verificar quais as funções que são não injetivas. Um processo para analisar a injetividade de uma função através do seu gráfico consiste em observar se uma qualquer reta horizontal, $y = b, \forall b \in \mathbb{R}$, interseta o gráfico de f no máximo em um ponto. Se isso acontecer, a função é injetiva, já que qualquer valor da ordenada é imagem, quando muito de um só ponto. Se existir uma reta horizontal $y = c$ que intersete o gráfico em mais do que um ponto, então, a função será não injetiva, já que existem pelo menos dois objetos com a mesma imagem, c.

Por observação do gráfico da função f verifica-se que se se traçar uma reta horizontal de equação $y = b,\ b \in \left]0{,}1\right]$, como por exemplo $b = 0{,}7$, existem dois objetos distintos que têm a mesma imagem, 0.7, logo esta função é não injetiva (ver Figura 15).

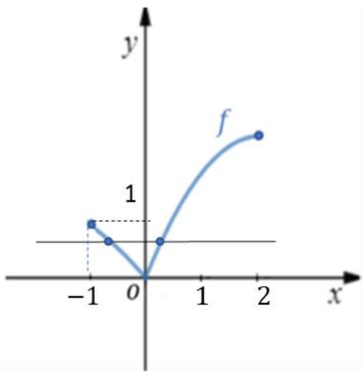


Figura 15 - Gráfico cartesiano da função não injetiva f

Utilizando o mesmo procedimento, pode concluir-se que a função h, também é não injetiva, neste gráfico verifica-se que todos os objetos têm a mesma imagem que é 2, assim $D_h = \mathbb{R}$ e $D'_h = \{2\}$.

As restantes funções são injetivas. No caso da função g qualquer reta horizontal interseta o gráfico apenas num ponto. No caso da função i, todas as retas horizontais intersetam o gráfico de i quando muito num ponto.

3.2.2. Funções Sobrejetivas

Definição: Sejam A e B dois conjuntos e $f: A \longrightarrow B$ uma função. A função f diz-se **sobrejetiva** se e só se para todo o y pertencente a B existir um elemento x pertencente a A tal que $y = f(x)$. Simbolicamente escrevemos $\forall\, y \in\, B,\ \exists\, x \in A : y = f(x)$. Assim, uma função f diz-se sobrejetiva se e somente se o conjunto de chegada de f coincidir com o seu contradomínio, ou seja, $B = D'_f$.

Sejam $f: A \longrightarrow B$ e $g: A \longrightarrow B$ as funções definidas pelos diagramas da Figura 16.

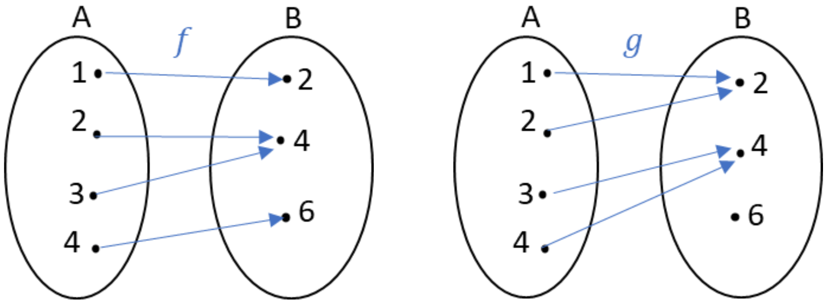


Figura 16 - Diagrama de Venn da função sobrejetiva f e da função não sobrejetiva g

Na representação da função f, qualquer elemento do conjunto B é imagem de, pelo menos, um elemento de A; o conjunto de chegada de f é igual ao contradomínio de f, isto é, $B = D'_f$ e, portanto, a função f é sobrejetiva.

Na representação da função g, o elemento 6 do conjunto B não é imagem de qualquer elemento do conjunto A, verifica-se que o conjunto de chegada de g é diferente do contradomínio de g, $B \neq D'_f$, isto é, $6 \in B\ e \notin D'_g\ 6$ logo a função g é não sobrejetiva.

Exemplo 1

Seja g a função $g: \{0,1,2,3,4\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$, definida analiticamente por $g(x) = 2x$,

$$\begin{array}{rccc} g: & \{0,1,2,3,4\} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & x & \longmapsto & 2x \end{array}$$

Calculando a imagem de cada objeto, $g(0) = 0$, $g(1) = 2$; $g(2) = 4$, $g(3) = 6$ e $g(4) = 8$ verifica-se que $D'_g = \{0, 2, 4, \; 6, 8\} \neq \; \mathbb{N}$ logo a função g é não sobrejetiva porque o contradomínio da função g não coincide com o conjunto de chegada.

Exemplo 2

Na Figura 17 está representado o gráfico cartesiano da função h.

$$h: [-3, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$$

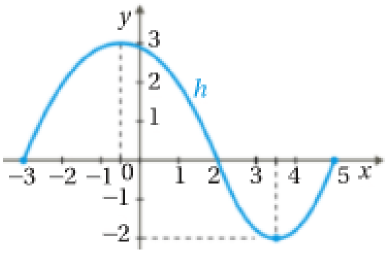


Figura 17 - Exemplo de uma função não sobrejetiva h

Por observação do gráfico da função h conclui-se que $D'_h = [-2, 3] \neq \mathbb{R}$, logo a função h é não sobrejetiva uma vez que o seu contradomínio não coincide com o conjunto de chegada.

Exemplo 3

Dadas as funções f e g, reais de variável real definidas respetivamente por: $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x + 1$ verifica-se que f é não sobrejetiva e que g é sobrejetiva.

Para a função $f(x) = x^2$, sabe-se que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ então o contradomínio de f é $\mathbb{R}_0^+ \neq \mathbb{R}$. Assim, como o contradomínio não coincide com o conjunto de chegada, a função f é não sobrejetiva. Também pode mostrar-se que f é não sobrejetiva utilizando um contraexemplo, isto é, se se identificar um elemento do conjunto de chegada que não é imagem de nenhum elemento do domínio. Nesta função, por exemplo, -4 é um elemento do conjunto de chegada, $\mathbb{R}$, e não existe um elemento do domínio cuja imagem seja -4, pois qualquer número real ao quadrado é sempre um número positivo ou zero.

Para a função $g(x) = 2x + 1$,

$2x + 1 = y \Leftrightarrow 2x = y - 1 \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2}$, a função g é sobrejetiva pois para qualquer $y \in \mathbb{R}$ existe um número real $x \in \mathbb{R}, \left(x = \frac{y-1}{2}\right)$ tal que $y = f(x)$, isto é, todo o elemento do conjunto de chegada é imagem de um elemento do domínio.

Exemplo 4

A função $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cuja representação gráfica se encontra na Figura 18 é não sobrejetiva.

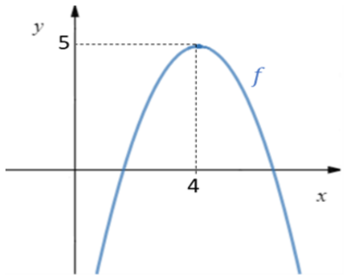


Figura 18 - Exemplo de uma função f não sobrejetiva

Por observação do gráfico da função h pode concluir-se que o seu contradomínio é $D'_h =]-\infty, 5]$ e o conjunto de chegada é o conjunto $\mathbb{R}$, então, como o contradomínio não coincide com o conjunto de chegada, a função h é não sobrejetiva.

Nas funções reais de variável real podem também usar-se retas horizontais para analisar a sobrejetividade. Uma função real de variável real é sobrejetiva se qualquer reta horizontal interseta o gráfico da função em pelo menos um ponto, isto é, qualquer número real é imagem de algum objeto do domínio. Dito de outra forma, uma função real de variável real é sobrejetiva se e só se a equação $y = f(x)$ tem solução em D_f, qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$.

3.2.3. Funções Bijetivas

Definição: Sejam A e B dois conjuntos e $f: A \longrightarrow B$ uma função. A função f diz-se **bijetiva** se for simultaneamente injetiva e sobrejetiva, isto é, se para todo o y pertencente a B existe um e um só elemento x pertencente a A tal que $y = f(x)$. Simbolicamente escreve-se,

$$\forall\, y \in B,\ \exists^1 x \in A : y = f(x)$$

Dizer que uma função é bijetiva é o mesmo que dizer que se verificam simultaneamente as duas condições seguintes:

- Quaisquer dois objetos diferentes têm imagens diferentes.
- Todo o elemento do conjunto de chegada é imagem de pelo menos um objeto do domínio.

As duas afirmações anteriores em simultâneo equivalem a dizer que todo o elemento do conjunto de chegada é imagem de um e um só objeto, ou seja, de um e um só elemento do domínio.

Apresentam-se dois exemplos de funções bijetivas na Figura 19.

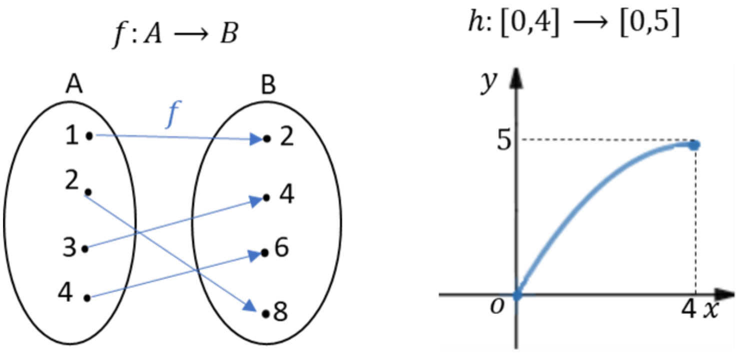


Figura 19 - Representação de duas funções bijetivas f e h

Exemplo 1

Sejam f e g, duas funções reais de variável real, representadas por gráficos cartesianos na Figura 20,

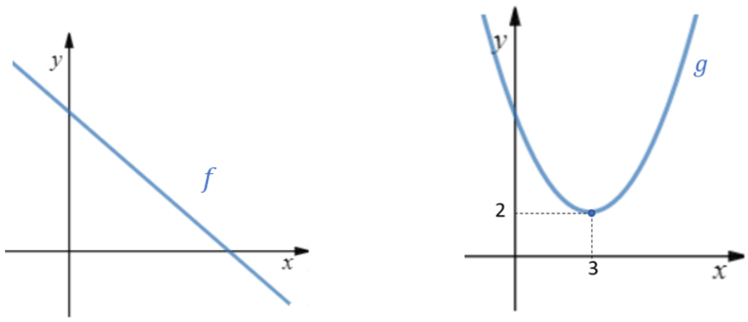


Figura 20 - Gráfico cartesiano das funções f e g

Relativamente à função f, pode observar-se que qualquer reta paralela ao eixo Ox interseta o gráfico de f num único ponto, ou seja, objetos diferentes têm imagens diferentes, logo f é injetiva. Como $D'_f = \mathbb{R}$, coincide com o conjunto de chegada, então f é sobrejetiva. Assim, f é injetiva e sobrejetiva logo é bijetiva.

Relativamente à função g, pode observar-se que há pelo menos uma reta paralela ao eixo Ox que interseta o gráfico de g em mais do que um ponto, ou seja, há objetos diferentes que têm a mesma imagem, logo g é não injetiva. Como $D'_g = [2, +\infty[$, não coincide com o conjunto de chegada, $\mathbb{R}$, então g é não sobrejetiva.

No caso de uma função real de variável real, ela será bijetiva se e só se qualquer reta horizontal interseta o gráfico da função exatamente num ponto. Dito de outra forma, uma função real de variável real é bijetiva se e só se, qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$ a equação $y = f(x)$ tem solução única em D_f.

3.3. Função composta

Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{ 2, 4, 6, 8\}$ e $C = \{1, 3, 5, 7\}$, três conjuntos. Considere-se ainda as funções $f: A \longrightarrow B$, definida por $f(x) = 2x$, e a função $g: B \longrightarrow C$, definida por $g(x) = x - 1$. A aplicação da função f, de A em B, seguida da aplicação da função g, de B em C pode ser esquematizada como se segue na Figura 21.

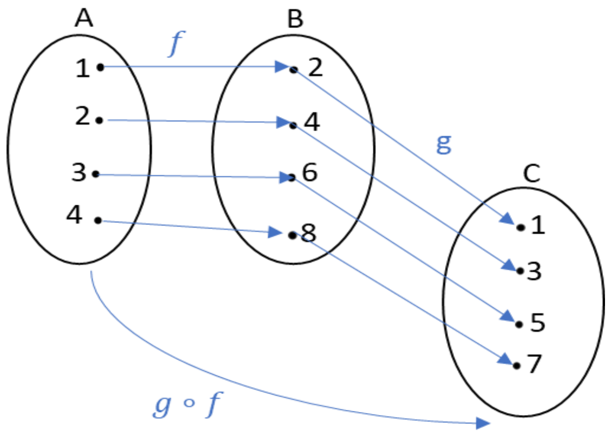


Figura 21 - Diagrama de Venn da função gof

A aplicação sequencial destas duas funções pode ser vista como uma nova função, de A em C, que se designa por função composta de g com f, g após f ou ainda f seguida de g. Simbolicamente representa-se por $g \circ f$.

A segunda designação é bastante usada por indicar a sequência de aplicação das funções.

Neste exemplo, os objetos do domínio da função $g \circ f$ são os objetos do domínio da função f. Estes objetos começam por ser transformados nas suas imagens através de f e, estas, pertencendo ao domínio de g, passam a ser encaradas como objetos desta função, sendo transformadas nas respetivas imagens. Assim, neste caso, o domínio de $g \circ f$ é $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e a imagem de cada um dos seus objetos pode determinar-se da seguinte forma:

$(g \circ f)(1) = g\big(f(1)\big) = g(2) = 1$

$(g \circ f)(2) = g\big(f(2)\big) = g(4) = 3$

$(g \circ f)(3) = g\big(f(3)\big) = g(6) = 5$

$(g \circ f)(4) = g\big(f(4)\big) = g(8) = 7$

Definição: Dadas as funções $f: D_f \longrightarrow A$ e $g: D_g \longrightarrow B$, a **função composta de g com f** ou **g após f** é a função $g \circ f: D_{g\circ f} \longrightarrow B$, tal que $D_{g\circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$ e a sua expressão analítica é, $\forall x \in D_{g\circ f}$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Na Figura 22 apresenta-se esquematicamente a função composta

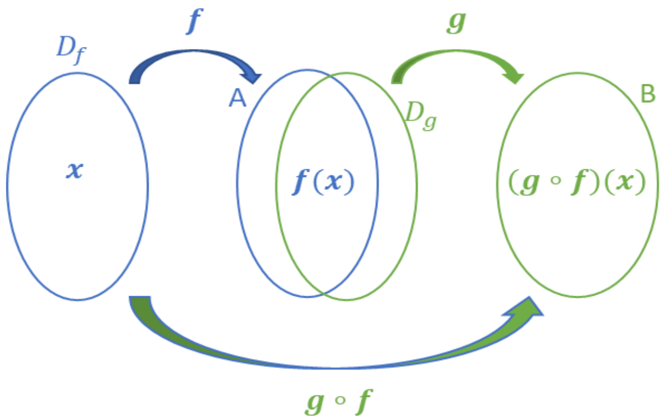


Figura 22 - Representação esquemática da função composta gof

É importante salientar que o domínio da função $g \circ f$ não é necessariamente o domínio da função f (é um seu subconjunto) mas se o contradomínio de f é um subconjunto do domínio de g, $D'_f \subseteq D_g$, isto é, $f(x) \in D_g$, $\forall x \in D_f$ então o domínio da função $g \circ f$ é D_f.

O domínio de $g \circ f$ é o conjunto dos elementos do domínio de f cujas imagens por f fazem parte do domínio de g, isto é, na definição do domínio da função composta $g \circ f$ é necessário excluir os elementos do domínio da função f, cujas imagens através de f não pertençam ao domínio de g.

Na Figura 23 estão representadas as funções $f: A \longrightarrow B$ e $g: C \longrightarrow D$.

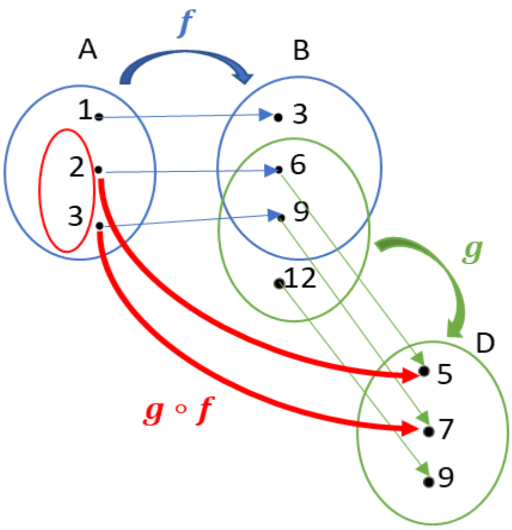


Figura 23 - Representação esquemática do domínio da função composta gof

Verifica-se que $f(1) = 3$ mas $3 \notin D_g$ e como apenas $f(2)$ e $f(3)$ pertencem ao domínio de g, só é possível fazer corresponder os elementos 2 e 3 de A a elementos do conjunto D através da função $g \circ f$. Assim, o domínio de $g \circ f$ é $D_{g \circ f} = \{2, 3\}$.

Exemplo 1

Sendo $f: [-3, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - 3$ e a função g definida pelo gráfico cartesiano, representado na Figura 24, será possível determinar $(g \circ f)(0)$? E $(f \circ g)(0)$?

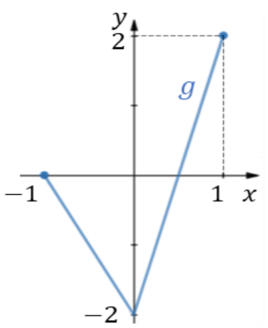


Figura 24 - Gráfico cartesiano da função g

Não é possível determinar $(g \circ f)(0)$ porque $f(0) = -3$ e $-3 \notin D_g$.

Contudo, pode determinar-se $(f \circ g)(0)$ uma vez que $g(0) = -2$ e $-2 \in D_f$, ou seja,

$$(f \circ g)(0) = f\big(g(0)\big) = f(-2) = -5$$

Exemplo 2

Considerem-se as funções $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $h: [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definidas respetivamente por $f(x) = -3x + 1$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = \sqrt{x-1}$.

a) Para determinar o valor da expressão $(f \circ g)(-\sqrt{2}) + (g \circ f)(-1)$,
procede-se da seguinte forma:

$$(f \circ g)(-\sqrt{2}) + (g \circ f)(-1) = f\left(g(-\sqrt{2})\right) + g\big(f(-1)\big)$$

$$= f(2) + g(4) = -5 + 16 = 11$$

b) Para escrever uma expressão analítica da função $h \circ f$ e indicar o respetivo domínio,
procede-se da seguinte forma:

$(h \circ f)(x) = h\big(f(x)\big) = h(-3x + 1) = \sqrt{-3x + 1 - 1} = \sqrt{-3x}$

$D_f = \mathbb{R}$

$D_h = [1, +\infty[$

$D_{h \circ f} = \{x \in \mathbb{R}: (-3x + 1) \in D_h\} =$

$= \{x \in \mathbb{R}: -3x + 1 \geq 1\} =$

$= \{x \in \mathbb{R}: x \leq 0\} =]-\infty, 0]$

A operação composição de funções não é comutativa. A função $g \circ f$ tem a expressão analítica seguinte: $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(-3x + 1) = (-3x + 1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$

Como $D_f = \mathbb{R}$ e $D_g = \mathbb{R}$

O domínio da composta é

$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R}: (-3x + 1) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

A função $f \circ g$ tem a expressão analítica seguinte:

$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2) = -3x^2 + 1$

E domínio $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R}: x^2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

Pode concluir-se que as funções $g \circ f$ e $f \circ g$ são distintas.

Na composição de funções não se verifica a propriedade comutativa como se pode observar com as funções f e g do exemplo 2. Pode até acontecer que exista uma delas e a outra não, como por exemplo $f(x) = -x, x \in \mathbb{R}^+$ e $g(x) = \sqrt{x}, x \in \mathbb{R}_0^+$. A função gof não está definida e a função fog está, como se mostra a seguir,

$D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R}^+ : f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R}^+ : -x \in \mathbb{R}_0^+\}$

se $x \in \mathbb{R}^+$, então $-x \in \mathbb{R}^-$, logo a condição $-x \in \mathbb{R}_0^+$ é uma condição impossível e assim não é possível definir a função gof, como se ilustra na Figura 25.

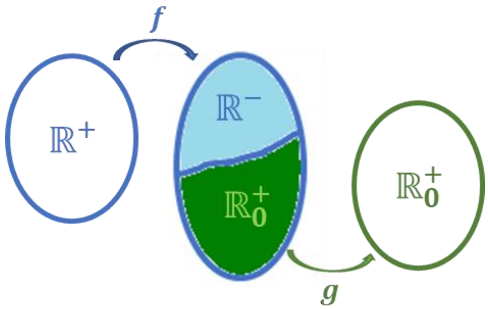


Figura 25 - Representação das funções f e g

$D_{f\circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R}_0^+ : \sqrt{x} \in \mathbb{R}^+\} =]0, +\infty[= \mathbb{R}^+$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = -\sqrt{x}$

No entanto, constata-se que existem algumas funções em que $f \circ g = g \circ f$, nestes casos diz-se que as funções f e g são **permutáveis**. Por exemplo, as funções $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 4x - 3$ e $g(x) = -x + 2$ são permutáveis.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(4x - 3) = -(4x - 3) + 2 = -4x + 5$

e

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x + 2) = 4(-x + 2) - 3 = -4x + 5$

$D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R}: (4x - 3) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

$D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R}: (-x + 2) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

3.4. Função par e função ímpar

Para melhor compreensão destes conceitos é importante e fundamental definir-se conjunto simétrico.

Definição: Um **conjunto** $D \subseteq \mathbb{R}$ diz-se **simétrico** se dado qualquer elemento $x \in D$, o seu simétrico também pertence a D, isto é, $\forall x \in D, -x \in D$.

Os conjuntos $[-2{,}2]$, $]-2,2[$, $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ e $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ são exemplos de conjuntos simétricos.

Pode agora definir-se função par e função ímpar.

Definição: Uma função f definida num conjunto simétrico D diz-se:

- **Par** se $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$
- **Ímpar** se $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$

Saliente-se que há funções, mesmo definidas em conjuntos simétricos, que não são pares nem ímpares ($f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$, para algum $x \in D$), por exemplo a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 + x + 1$, não é par nem ímpar (basta observar que, $f(1) = 3$ e $f(-1) = 1$). Por outro lado, a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2$ é uma função par. O conjunto $\mathbb{R}$ é um conjunto simétrico e quaisquer dois objetos simétricos têm a mesma imagem: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Na Figura 26 encontra-se a representação gráfica da função f.

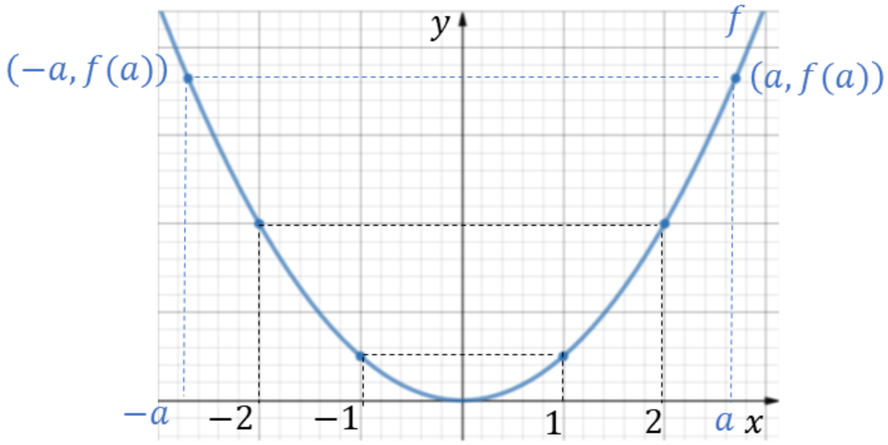


Figura 26 - Gráfico cartesiano de uma função par

A Figura 26 ilustra graficamente o conceito de função par, $\forall a \in D_f, f(-a) = f(a)$, ou seja, $\forall a \in D_f$ os pontos de coordenadas $(a, f(a))$ e $(-a, f(a))$ são pontos do gráfico de f simétricos em relação ao eixo das ordenadas; o eixo oy é a mediatriz do segmento de reta cujos extremos são $(a, f(a))$ e $(-a, f(a))$. Frequentemente traduz-se o conceito de função par, como sendo uma função cujo gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

Uma das características da função par é o valor $f(0)$, desde que $0 \in D_f$, $f(0)$ pode tomar um valor qualquer, uma vez que $0 = -0$. A Figura 27 ilustra um exemplo de uma função descontínua em 0 e par.

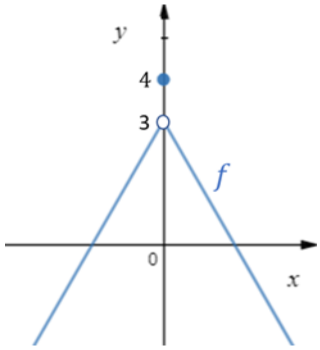


Figura 27 - Representação gráfica de uma função par, f

Exemplo 1

A função f, real de variável real, definida por $f(x) = \begin{cases} x+3 & se \quad x < 0 \\ 4 & se \quad x = 0 \\ -x+3 & se \quad x > 0 \end{cases}$, representada na Figura 27, é par.

Para se exemplificar uma função ímpar pode utilizar-se a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^3$. Usualmente, para os alunos, apresentam-se alguns exemplos de pontos para ilustrar o facto de a função ser ímpar, como $f(-1) = (-1)^3 = -1$ e $f(1) = 1$, $f(-1) = -f(1)$ e $f(-2) = (-2)^3 = -8$ e $f(2) = 8$ logo $f(-2) = -f(2)$, mas complementa-se com a definição: verifica-se que, quaisquer dois objetos simétricos têm imagens simétricas, isto é, se x é um elemento qualquer pertencente a $\mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, logo a função f é ímpar como se ilustra na Figura 28.

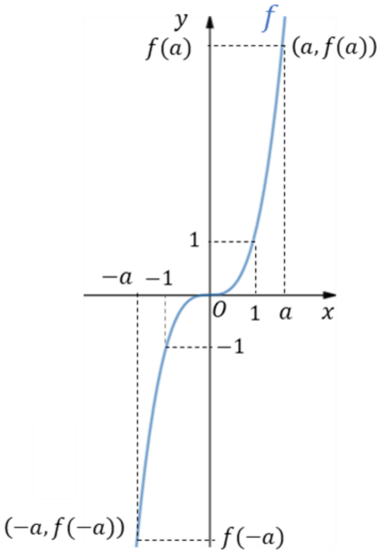


Figura 28 - Gráfico cartesiano de uma função ímpar

O gráfico de uma função ímpar é simétrico relativamente à origem do referencial. Se f é ímpar, então $\forall a \in D_f,\ f(-a) = -f(a)$, ou seja, $\forall a \in D_f$ os pontos de coordenadas $(a, f(a))$ e $(-a, -f(a))$ são pontos do gráfico de f e estes pontos são simétricos em relação à origem do referencial, pois O é o ponto médio do segmento de reta cujos extremos são estes dois pontos. Reciprocamente, se o gráfico de f é simétrico em relativamente à origem O do referencial, os pontos simétricos de abcissa a e $-a$ definem um segmento de reta cujo ponto médio é a origem do referencial, então $f(-a) = -f(a), \forall a \in D_f$, ou seja, f é ímpar.

Assim, pode concluir-se que, dada uma função f num domínio simétrico, f é ímpar se e somente se o respetivo gráfico for simétrico relativamente à origem O do referencial, isto é, se e somente se a imagem do gráfico pela reflexão central de centro O coincidir com o próprio gráfico.

Relativamente à imagem do 0, sendo f uma função ímpar e $0 \in D_f$, $f(0) = 0$, pois caso contrário $f(-0) = f(0) = -f(0)$ não se verifica, como pode observar-se no exemplo da Figura 29.

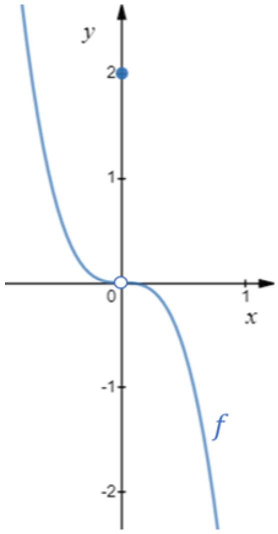


Figura 29 - Gráfico cartesiano de uma função que não é par nem ímpar

Exemplo 2

A função g, real de variável real, definida por$g(x) = \frac{1}{x}$, é ímpar. O seu domínio é o conjunto simétrico $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $g(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -g(x)$, logo a função g é ímpar.

Exemplo 3

Para que os alunos entendam o conceito de função par e ímpar, é frequente ilustrar-se com funções polinomiais de grau dois (quadráticas) e de grau três (cúbicas), pois o facto de ser do segundo grau ou do terceiro não implica necessariamente que seja par ou ímpar respetivamente.

Considerem-se as funções reais de variável real, definidas no respetivo domínio por

$f(x) = (x+3)^2$ e $g(x) = x^3 - 1$

O domínio das funções f e g é o conjunto simétrico, $\mathbb{R}$

$f(x) = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

$f(-x) = (-x+3)^2 = x^2 - 6x + 9 \neq f(x)$, logo a função f não é par.

$-f(x) = -(x+3)^2 = -x^2 - 6x - 9 \neq f(-x)$, logo a função não é ímpar.

A função f não é par nem ímpar.

$g(-x) = (-x)^3 - 1 = -x^3 - 1 \neq g(x)$, g não é par

$-g(x) = -x^3 + 1 \neq g(-x)$, g não é ímpar

$g(-x) \neq -g(x)$, logo a função g não é ímpar.

A função g não é par nem ímpar.

Se f é uma função polinomial que só contém termos de grau par, f é uma função par, se só contém termos de grau ímpar, é ímpar e se f é uma função polinomial de termos de grau par e de grau ímpar, a função não é par nem ímpar como se ilustra nas Figura 30, Figura 31 e Figura 32 com a representação gráfica das funções polinomiais f, g e h definidas analiticamente por $f(x) = 2x^4 - 3x^2$, $g(x) = 2x - x^3$ e $h(x) = x^5 + 2x^4$

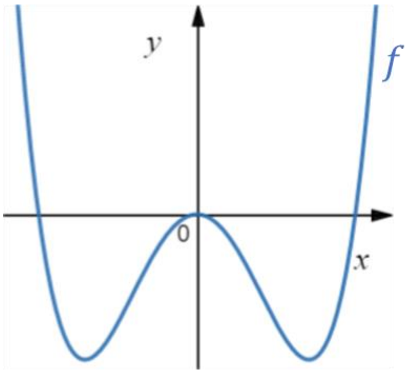


Figura 30 - Função polnomial de termos de grau par

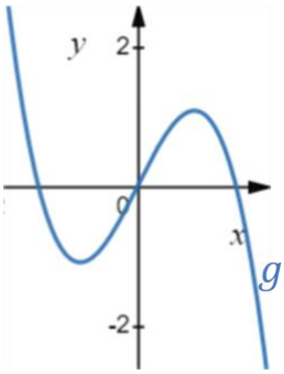


Figura 31 - Função polinomial de termos de grau ímpar

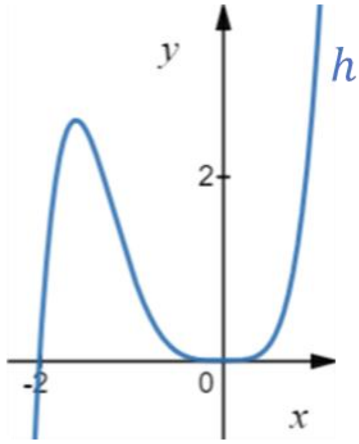


Figura 32 - Função polinomial de termos de grau par e de grau ímpar

Exemplo 4

Um exercício comum neste tópico é a construção de uma extensão par/ímpar de uma função a um domínio simétrico.

Na Figura 33 está representada uma função real de variável real f, definida no intervalo $[-5,0]$.

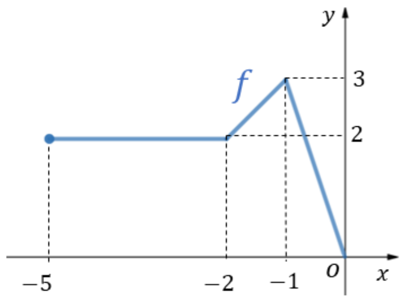


Figura 33 - Representação gráfica da função f

Para o exemplo da função f é possível definir uma extensão que seja uma função par ou uma extensão que seja uma função ímpar bastando para isso construir as imagens $f(x) = f(-x)$ e $f(-x) = -f(x)$ respetivamente.

Seja g a extensão par da função f ao conjunto $[-5,5]$. Como o gráfico da função f é formado por segmentos de reta, basta determinar, para cada segmento, a imagem de dois dos seus pontos, $g(5) = g(-5) = 2$, $g(2) = g(-2) = 2$, $g(1) = g(-1) = 3$, obtendo-se assim a representação gráfica da Figura 34.

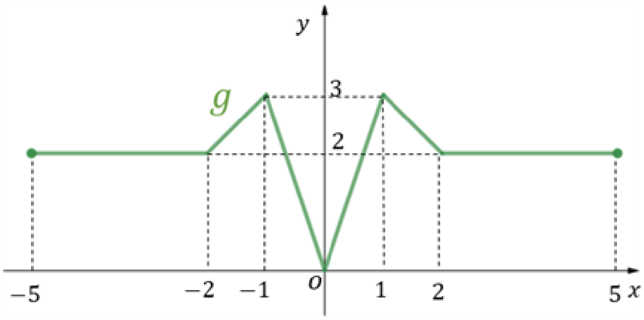


Figura 34 - Representação da função par, g

De forma análoga, sendo h a extensão ímpar da função f ao conjunto $[-5,5]$, determina-se a imagem de dois pontos de cada segmento de reta, $h(5) = -h(-5) = -2$, $h(2) = -h(-2) = -2$, $h(1) = -h(-1) = -3$, obtendo-se a representação gráfica da Figura 35.

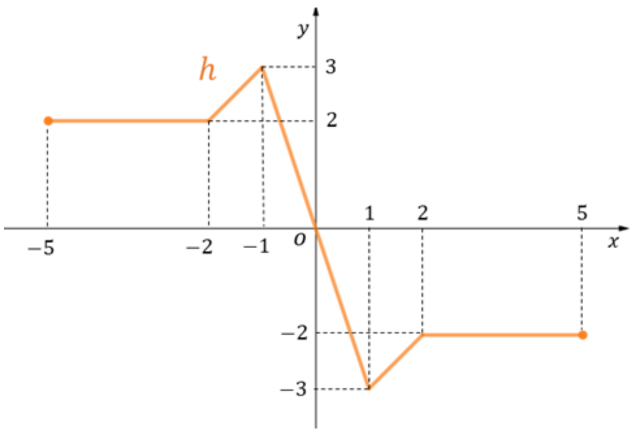


Figura 35 - Representação gráfica da função ímpar, h

No caso de o gráfico da função f não ser constituído por segmentos de reta, pode recorrer-se à simetria axial de eixo oy, para a função par e à reflexão central de centro o, para a função ímpar.

3.5. Função inversa

Por forma a clarificar este conceito é importante ter-se em conta conceitos anteriores sobre funções injetivas, sobrejetivas, composição de funções e a definição de função identidade.

A correspondência estabelecida entre os elementos de dois conjuntos através de uma função tem um sentido. Ao inverter esse sentido pode, ainda, obter-se uma função ou não.

Os diagramas de Venn na Figura 36 apresentam duas funções: $f: A \longrightarrow B$ e $g: B \longrightarrow A$.

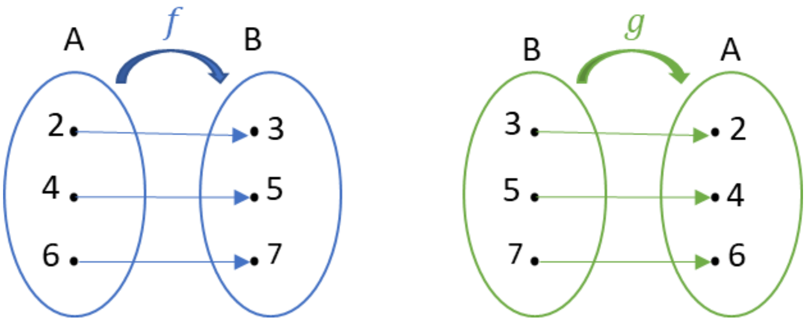


Figura 36 - Diagrama de Venn das funções f e g

Os elementos que se correspondem, através da função f, de A para B, correspondem-se, através da função g, de B para A. Os objetos de uma função passam a ser as imagens da outra, quando esta existe, e vice-versa. Para que essa troca seja possível, há uma condição que tem de estar garantida, a função tem de ser injetiva. Se a função não for injetiva, como a função $h: A \longrightarrow D$ representada no diagrama de Venn na Figura 37,

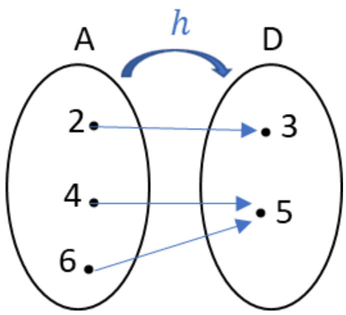


Figura 37 - Diagrama de Venn da função não injetiva h

na correspondência inversa da função $h: A \longrightarrow D$, o elemento 5, do conjunto D, teria duas imagens em A, o que configura uma correspondência que não é uma função. Diz-se que a função h não admite função inversa. Isto ocorre sempre que a função é não injetiva.

Se a função $f: A \longrightarrow B$ é injetiva, mas é não sobrejetiva, como no exemplo que se apresenta a seguir na Figura 38.

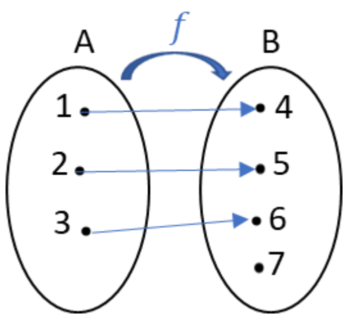


Figura 38 - Diagrama de Venn da função não sobrejetiva f

pode definir-se a correspondência inversa de f considerando a restrição do conjunto de chegada ao contradomínio da função f, como pode observar-se no diagrama de Venn da Figura 39.

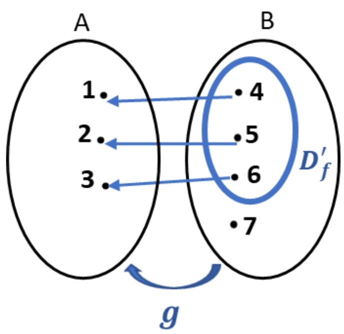


Figura 39 - Representação gráfica da restrição da função g ao contradomínio de f

Calculando: $(g \circ f)(1) = g\big(f(1)\big) = g(4) = 1$

$$(g \circ f)(2) = g\big(f(2)\big) = g(5) = 2$$

$$(g \circ f)(3) = g\big(f(3)\big) = g(6) = 3$$

Obtém-se, esquematicamente o diagrama da Figura 40.

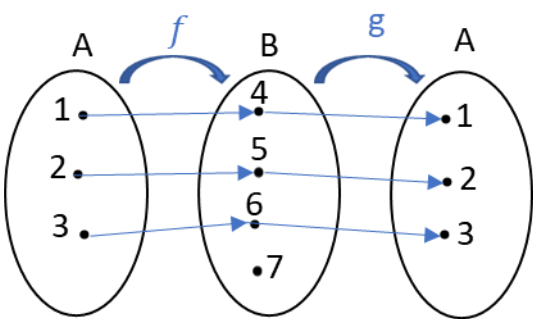


Figura 40 - Diagrama de Venn da função $g \circ f$

Por observação deste diagrama, verifica-se que a função composta $g \circ f$ faz corresponder a cada elemento do domínio o próprio elemento, por isso designa-se função identidade definida no domínio de f.

Definição: Dado um conjunto A, designa-se por **função identidade** em A e representa-se por Id_A à função de A em A , $Id_A: A \longrightarrow A$, tal que $\forall x \in A, Id_A(x) = x$.

Definição: Dada uma função $f: A \longrightarrow B$, injetiva diz-se que f admite **inversa** (ou é invertível) se existe uma função g, definida no contradomínio de f, D'_f, tal que:

$(g \circ f)(x) = x$, $\forall x \in D_f$

$(f \circ g)(y) = y$, $\forall y \in D'_f$

Desta forma pode observar-se que a inversa da função inversa de uma função f injetiva é a própria função, isto é, sendo f uma função injetiva, tem-se que $(f^{-1}(x))^{-1} = f(x)$, como se ilustra na Figura 41, sendo o domínio da função inversa o contradomínio da função f.

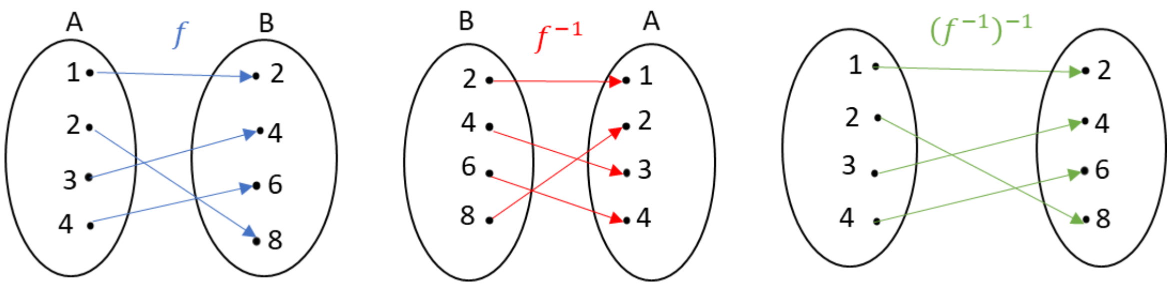


Figura 41 - Diagrama de Venn das funções f, f^{-1}e $(f^{-1})^{-1}$

Seja f uma função injetiva de A em B e $a \in A$ e $b \in B$. A função f admite inversa $f^{-1}: B \longrightarrow A$ tal que:

- $\forall\, a \in A, (f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}\big(f(a)\big) = a$
- $\forall\, b \in B, (f \circ f^{-1})(b) = f\big(f^{-1}(b)\big) = b$

Como $a \in A$, então $f^{-1} \circ f = Id_A$

Como $b \in B$, então, $f \circ f^{-1} = Id_B$

Se a função f for não sobrejetiva, então a função inversa está definida no contradomínio de f.

Estas conclusões podem ser ilustradas no diagrama da Figura 42.

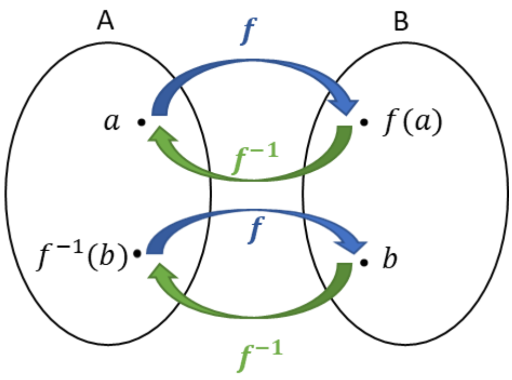


Figura 42 - Esquematização das funções $f \circ f^{-1}$ e $f^{-1} \circ f$

Deve ter-se em atenção que é um erro muito frequente nos alunos confundirem a função inversa, f^{-1}, com a função $\frac{1}{f}$, que é o inverso aritmético de f.

Para caraterizar a função inversa de uma função f, injetiva, deve ter-se em consideração que o domínio de f^{-1} é o contradomínio de f e o contradomínio de f^{-1} é o domínio de f, como se ilustra na Figura 43.

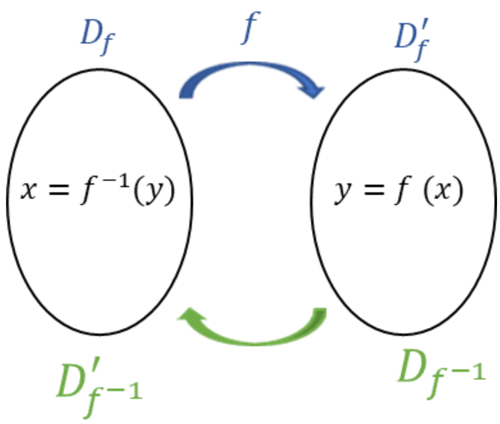


Figura 43 - Representação do domínio e do contradomínio das funções f e f^{-1}

Se a função f é injetiva, para cada elemento $y \in D'_f$ existe um único $x \in D_f$ que satisfaz a relação $y = f(x)$.

Dada a função real de variável real f, injetiva, definida por $f(x) = 2x + 4$, como determinar a expressão analítica da função f^{-1}?

Para determinar a inversa, pretende-se saber, dado y no contradomínio, qual o x do domínio que lhe corresponde, ou seja, resolve-se a equação $f(x) = y$ em ordem a x obtendo-se $x = f^{-1}(y)$.

$f(x) = y \Leftrightarrow 2x + 4 = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{2} - 2$

a expressão analítica da função inversa é $f^{-1}(y) = \frac{y}{2} - 2$, contudo, como é habitual usar-se a letra x para a variável independente, usualmente escreve-se [2] $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - 2$ e pode representar-se na forma:

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x}{2} - 2 \end{array}$$

Representando geometricamente as funções f e f^{-1} no mesmo referencial obtém-se os gráficos cartesianos da Figura 44.

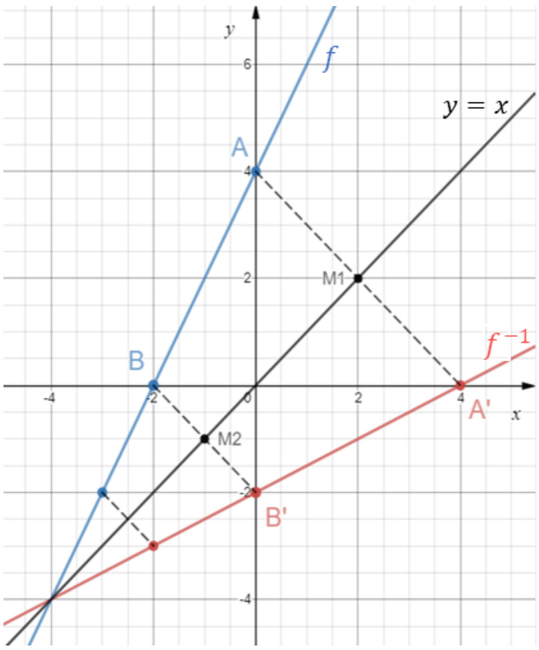


Figura 44 - Representação da função f e da sua inversa

Observando os gráficos, constata-se que o ponto A' pode ser obtido de A e o ponto B' pode ser obtido de B pela reflexão axial de eixo $y = x$. Dado que a imagem de uma reta por uma reflexão axial é uma reta, então, a imagem da reta AB pela reflexão axial de eixo $y = x$

[2] Esta alteração de letras suscita sempre algumas dificuldades nos alunos.

é a reta $A'B'$, ou seja, a imagem do gráfico cartesiano da função f é o gráfico cartesiano da função f^{-1}.

Observe-se que, o par ordenado (a, b) pertence ao gráfico de f^{-1} se e somente se o par ordenado (b, a) pertence ao gráfico de f. Logo, o gráfico de f^{-1} obtém-se do gráfico de f pela reflexão axial de eixo $y = x$, como ilustrado na Figura 45.

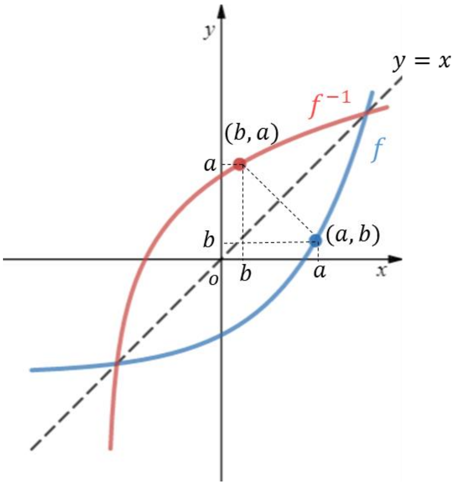


Figura 45 - Simetria dos gráficos da função f e da sua inversa

Os exemplos seguintes podem ser usados para trabalhar o conceito de função inversa e suas propriedades.

Exemplo 1

Seja f a função definida por $f(x) = \frac{1}{x-1}$, com domínio,

$$D_f = \{ x \in \mathbb{R}: x - 1 \neq 0\} = \{ x \in \mathbb{R}: x \neq 1\} = \mathbb{R}\backslash\{1\} .$$

Esta função é injetiva

$$\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{x_1-1} = \frac{1}{x_2-1} \Leftrightarrow x_2 - 1 = x_1 - 1 \Leftrightarrow x_2 = x_1 .$$

Para definir função inversa, deve determinar-se o contradomínio da função, domínio da função inversa. Como x assume qualquer valor real diferente de 1, a expressão $\frac{1}{x-1}$ assume qualquer valor não nulo e portanto $D'_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

A expressão analítica da função inversa obtém-se resolvendo a equação $y = f(x)$ em ordem a x:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = y \Leftrightarrow 1 = y(x-1) \ \wedge x \neq 1$$
$$\Leftrightarrow 1 = yx - y \Leftrightarrow yx = y + 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y}$$

Então $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x}$

$D_{f^{-1}} = \{ x \in \mathbb{R}: x \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{0\} = D'_f$

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\} = D'_{f^{-1}}$

Esquematizando a função inversa tem-se:

$$\begin{array}{llll} f^{-1}: & \mathbb{R}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\backslash\{1\} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x} \end{array}$$

Exemplo 2

Seja g a função definida por $g(x) = \frac{1}{x^2}$, com domínio, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Relativamente à função g, por observação da expressão analítica, pode concluir-se que a função g é não injetiva, pois dois objetos diferentes têm a mesma imagem: $g(-1)$=1 e que $g(1) = 1$, $g(-1) = g(1)$, a função g é não injetiva, pelo que não admite inversa. Contudo se se considerar as restrições h e i, da função g a $\mathbb{R}^+$e a $\mathbb{R}^-$, $h = g|_{\mathbb{R}^+}$ e $i = g|_{\mathbb{R}^-}$, respetivamente podem caraterizar-se as funções h^{-1} e i^{-1},

$h(x) = \frac{1}{x^2}, x \in \mathbb{R}^+$, com contradomínio $\mathbb{R}^+$ é uma função injetiva

e resolvendo a equação $h(x) = y$ em ordem a x,

$h(x) = y \ \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = y \Leftrightarrow \ x^2 = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{y}}{y}$ pois $x \in \mathbb{R}^+$

Assim $h^{-1}(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$,

$$\begin{array}{llll} h^{-1}: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & \dfrac{\sqrt{x}}{x} \end{array}$$

Na Figura 46 encontram-se representadas as funções h e h^{-1}

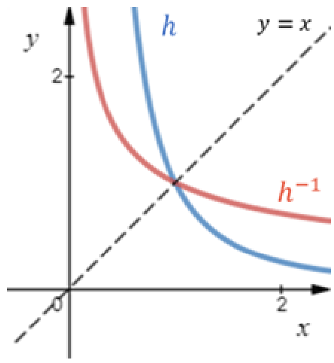


Figura 46 - Representação gráfica das funções h e h^{-1}

$i(x) = \frac{1}{x^2}, x \in \mathbb{R}^-$, com contradomínio $\mathbb{R}^-$ é uma função injetiva e resolvendo a equação $i(x) = y$ em ordem a x,

$i(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = y \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{y}}{y}$ pois $x \in \mathbb{R}^-$

e $i^{-1}(x) = -\frac{\sqrt{x}}{x}$

$$\begin{array}{rccc} i^{-1}: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^- \\ & x & \mapsto & -\frac{\sqrt{x}}{x} \end{array}$$

Na Figura 47 encontram-se representadas as funções i e i^{-1},

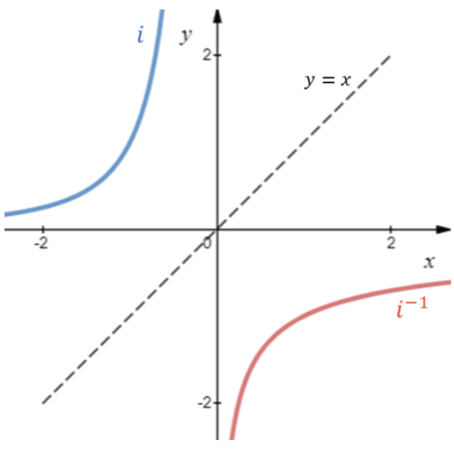


Figura 47 - Representação gráfica das funções i e i^{-1}

Exemplo 3

Usualmente utiliza-se a representação gráfica de uma função para explorar graficamente o conceito de função inversa.

Seja h a função representada graficamente no referencial cartesiano da Figura 48.

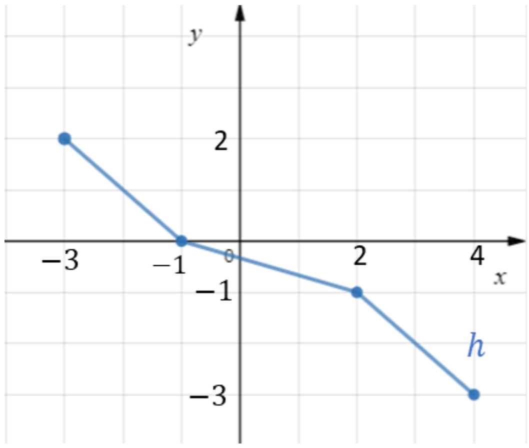


Figura 48 - Gráfico cartesiano da função h

Por observação do gráfico pode constatar-se que $h^{-1}(-3) = 4$ já que $h(4) = -3$. Da mesma forma, $h^{-1}(0) = -1$ dado que $h(-1) = 0$.

Para fazer a representação gráfica da função h^{-1}, e tendo em conta que o gráfico de h é constituído por segmentos de reta, determina-se as coordenadas de dois dos seus pontos ou faz-se a reflexão axial de eixo $y = x$.

Se os pontos $(-3, 2)$, $(-1, 0)$, $(2, -1)$ e $(4, -3)$ pertencem ao gráfico da função h, os pontos $(2, -3\ )$, $(0, -1\ )$, $(-1{,}2\ )$ e $(-3{,}4\ )$ pertencem ao gráfico da função h^{-1}.

Representando as funções h e h^{-1} no mesmo referencial obtém-se a representação da Figura 49 onde se ilustra também a simetria axial.

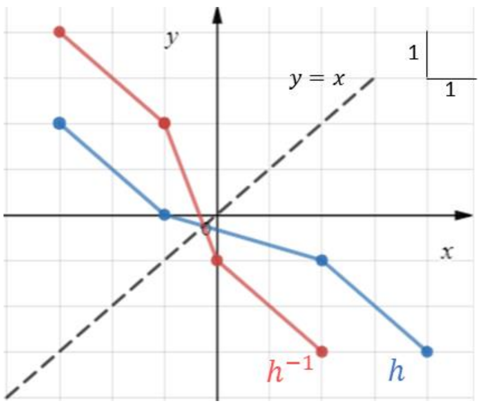


Figura 49 - Representação gráfica da função h e da sua inversa

Exemplo 4

Com este exemplo pretende-se que os alunos compreendam e relacionem os conceitos de função composta e de função inversa em diferentes contextos.

Dadas as funções f e g, injetivas, tais que:

- $f^{-1}(5) = 1$ e $f^{-1}(1) = -1$
- $g(x) = \frac{x+1}{3}$.

Para determinar $(g \circ f)(1)$, é necessário calcular $f(1)$, como $f^{-1}(5) = 1$, $f(1) = 5$ e $(g \circ f)(1) = g\big(f(1)\big) = g(5) = \frac{5+1}{3} = 2$.

Para resolver a equação: $g(x) + f(-1) = (g \circ g^{-1})(x)$, determina-se $f(-1)$ e $(g \circ g^{-1})(x)$.

Aqui pretende-se que os alunos compreendam a relação entre objeto e imagem na função f e na sua inversa, e que identifiquem $(g \circ g^{-1})(x)$, composta da função g com a sua inversa, com a função identidade.

Se $f^{-1}(1) = -1$, $f(-1) = 1$ e $(g \circ g^{-1})(x) = x$, assim,

$$g(x) + f(-1) = (g \circ g^{-1})(x) \Leftrightarrow \frac{x+1}{3} + 1 = x$$

$$\Leftrightarrow x + 1 + 3 = 3x \Leftrightarrow x - 3x = -1 - 3$$

$$\Leftrightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow x = 2$$

3.6. Função afim

A função afim está inserida nas funções polinomiais, ou seja, funções cuja expressão analítica é um polinómio. Neste trabalho serão abordadas apenas as funções polinomiais de grau menor ou igual a dois, uma vez que se adequa aos domínios curriculares do 10º ano do Ensino Secundário.

Definição: Uma função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se **função afim** se existirem números reais a e b tais que $f(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$.

Esta expressão também se designa por forma canónica da função afim. O seu gráfico é uma reta não vertical de equação $y = ax + b$, em que a é o declive e b é a ordenada na origem como se ilustra no exemplo da Figura 50.

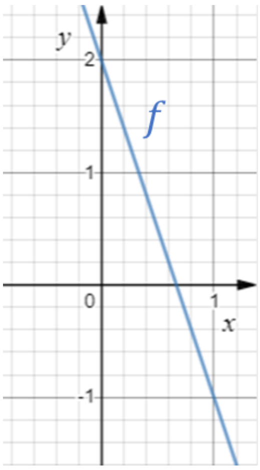


Figura 50 - Gráfico cartesiano de uma função afim f

Se $b = 0$ e $a \neq 0$, obtém-se $f(x) = ax$, diz-se que a função afim f é linear e o seu gráfico é uma reta que passa na origem do referencial, como se exemplifica na Figura 51.

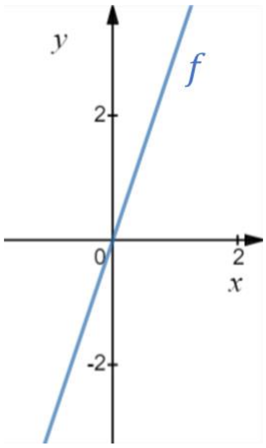


Figura 51 - Exemplo do gráfico cartesiano de um função linear

Constata-se que toda a função linear é uma função ímpar,

$\mathbb{R}$ é um conjunto simétrico, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$

$f(-x) = a(-x) = -ax$ e $-f(x) = -(ax) = -ax$

Se $a = 0$, tem-se $f(x) = b$, diz-se que a função f é uma função constante e o seu gráfico é uma reta paralela ao eixo ox, como pode observar-se no exemplo da Figura 52.

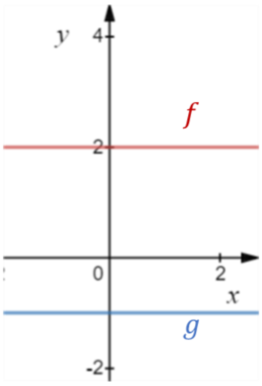


Figura 52 - Exemplos de duas funções constantes

É importante referir que para definir uma função afim é necessário conhecer apenas dois pontos distintos do seu gráfico. Sejam $P\left(x_1, f(x_1)\right)$ e $Q\left(x_2, f(x_2)\right)$ esses dois pontos, então uma equação da reta representativa da função f é $y - f(x_1) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1)$

$\Leftrightarrow y = f(x) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1) + f(x_1)$

Para se estudar algumas caraterísticas da função afim, é necessário previamente definir conceitos como zeros, monotonia, extremos e sinal de uma função.

Definição: Um elemento $x \in D_f$ é **zero** da função f se e só se $f(x) = 0$, isto é, são os elementos do domínio que têm imagem 0.

Como os zeros de uma função são as abcissas dos pontos do gráfico de f da forma $(x, 0)$, correspondem às abcissas dos pontos onde o gráfico da função interseta o eixo Ox, sendo esta uma forma muito prática de os indicar, caso estejam assinalados no respetivo gráfico.

Definição: Sendo f uma função real de variável real e $A \subseteq D_f$, diz-se que

- f **estritamente crescente** em A, se $\forall x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
  (f é crescente em sentido lato se $\forall x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$)

- f **estritamente decrescente** em A, se $\forall x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
  (f decrescente em sentido lato se $\forall x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$)

Toda a função f, real de variável real, estritamente monótona num intervalo $A \subseteq D_f$, é injetiva.

Seja f uma função real de variável real estritamente crescente em A, isto é, $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Sendo $x_1 < x_2$, então $x_1 \neq x_2$

e sendo $f(x_1) < f(x_2)$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$

Assim, $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

De forma análoga se f for estritamente decrescente.

Definição: Seja f uma função real de variável real e a um ponto do seu domínio.

- $f(a)$ diz-se **máximo absoluto** de f se $\forall\, x \in D_f, f(a) \geq f(x)$
- $f(a)$ diz-se **mínimo absoluto** de f se $\forall\, x \in D_f, f(a) \leq f(x)$

Ao valor a chama-se maximizante no primeiro caso e minimizante no segundo.

Aqui é importante referir-se que estes valores, a existirem, podem não ser únicos, isto é, podem existir diferentes valores de a onde o máximo ou mínimo sejam atingidos, como por exemplo, a função polinomial $f(x) = 5x^2 - x^4$ ou as funções trigonométricas seno e cosseno.

Definição: Dada uma função real de variável real f, diz-se que:

- f atinge um **máximo relativo (ou local)** em $a \in D_f$ quando existe uma vizinhança r de a tal que $\forall\, x \in V_r(a) \cap D_f, f(a) \geq f(x)$ e $f(a)$ chama-se máximo relativo de f e a chama-se maximizante de f.
- f atinge um **mínimo relativo (ou local)** em $a \in D_f$ quando existe uma vizinhança r de a tal que $\forall\, x \in V_r(a) \cap D_f, f(a) \leq f(x)$ e $f(a)$ chama-se mínimo relativo de f e a chama-se minimizante de f.

Salienta-se que ao nível do Ensino Secundário as vizinhanças são tratadas na forma,

$$\mathcal{V}_r(a) =]a-, a+r[$$

Algumas propriedades fundamentais da função afim são analisadas no que se segue.

Considere-se uma função afim, $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$

O domínio é $\mathbb{R}$ e o contradomínio é também $\mathbb{R}$, logo a função é sobrejetiva.

Zeros da função: $x = -\frac{b}{a}$

Para determinar os zeros, resolve-se a equação $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

O ponto de coordenadas $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ pertence ao gráfico da função f e $-\frac{b}{a}$ é o único zero da função.

Definição: Dada uma função real de variável real f, diz-se que:

- f é **positiva** em $a \in D_f$ se $f(\,a) > 0$
- f é **negativa** em $a \in D_f$ se $f(\,a) < 0$

Sinal:

Se $a > 0$, f é negativa em $\left]-\infty, -\frac{b}{a}\right[$ e positiva em $\left]-\frac{b}{a}, +\infty\right[$.

Para estudar o sinal também pode resolver-se uma das inequações $f(x) < 0$ ou $f(x) > 0$.

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow ax + b < 0 \Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a},$$

ou seja, f é negativa em $\left]-\infty, -\frac{b}{a}\right[$ e, portanto, f é positiva em $\left]-\frac{b}{a}, +\infty\right[$.

Se $a < 0$, f é negativa em $\left]-\frac{b}{a}, +\infty\right[$ e positiva em $\left]-\infty, -\frac{b}{a}\right[$.

De forma análoga, também pode resolver-se uma das inequações $f(x) < 0$ ou $f(x) > 0$.

Monotonia:

Uma função afim $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$ é uma função estritamente monótona. Se o declive for positivo, $a > 0$, é estritamente crescente, se for negativo, $a < 0$, é estritamente decrescente.

Sejam x_1 e x_2 dois elementos quaisquer pertencentes a $\mathbb{R}$ tais que $x_1 < x_2$.

Se $a > 0$, função f é estritamente crescente pois,

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow ax_1 < ax_2$$
$$\Leftrightarrow ax_1 + b < ax_2 + b$$
$$\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Se $a < 0$, a função f é estritamente decrescente

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow ax_1 > ax_2$$
$$\Leftrightarrow ax_1 + b > ax_2 + b$$
$$\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Nas Figura 53, Figura 54, Figura 55 e Figura 56 encontram-se exemplos da representação gráfica de uma função afim.

Se $a > 0$

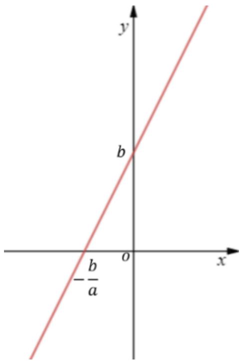


Figura 53 - Gráfico cartesiano de uma função afim com declive positivo e ordenada na origem positiva

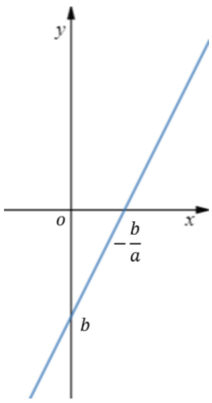


Figura 54 - Gráfico cartesiano de uma função afim com declive positivo e ordenada na origem negativa

Se $a < 0$

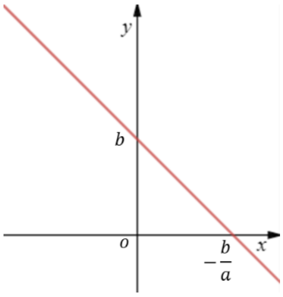


Figura 55 - Gráfico cartesiano de uma função afim com declive negativo e ordenada na origem positiva

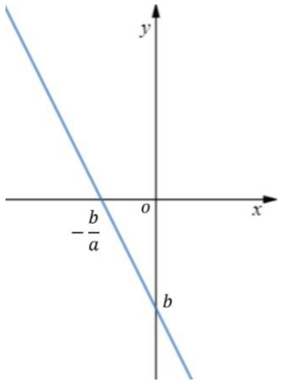


Figura 56 - Gráfico cartesiano de uma função afim com declive negativo e ordenada na origem negativa

Como toda a função estritamente monótona no seu domínio é injetiva, a função afim $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$ é injetiva, e pode concluir-se que também é bijetiva uma vez que já se verificou anteriormente que é sobrejetiva e, consequentemente, admite inversa, sendo a expressão analítica $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$.

É importante referir aqui que nem toda a função injetiva é monótona como se ilustra no exemplo da Figura 57.

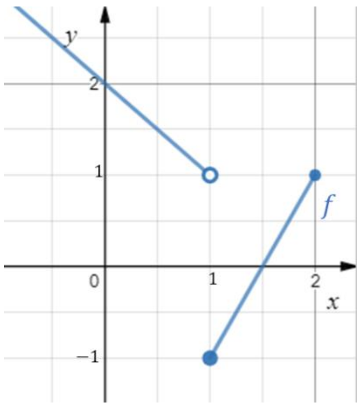


Figura 57 - Representação gráfica de uma função f, injetiva e não monótona

Se $a = 0$, $f(x) = b$, a função é constante, o domínio é $\mathbb{R}$, o contradomínio é o conjunto $D'_f = \{b\}$ logo é não sobrejetiva. Todos os objetos têm a mesma imagem, f é não injetiva. Relativamente ao sinal, f é positiva se $b > 0$ e negativa se $b < 0$. Se $b = 0$, $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, a equação tem um número infinito de soluções e consequentemente um número infinito de zeros.

Exemplo 1

Sendo f e g as funções afins definidas por: $f(x) = -2x + 7$ e $g(x) = 6x + 1$

Pretende-se:

a) estudar a função f quanto à existência de zeros, sinal e monotonia.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 7 = 0 \Leftrightarrow -2x = -7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$

A função tem um zero: $\frac{7}{2}$

Como f é uma função afim, o seu gráfico é uma reta, neste caso de declive negativo, -2, logo a função f é estritamente decrescente como se ilustra na Figura 58.

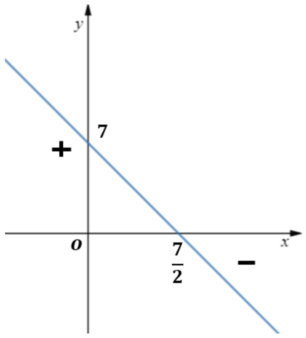


Figura 58 - Gráfico cartesiano de uma função afim estritamente decrescente

Com esta informação e tendo em conta que o zero da função f é $\frac{7}{2}$, conclui-se que a função f é positiva em $\left]-\infty, \frac{7}{2}\right[$ e negativa em $\left]\frac{7}{2}, +\infty\right[$.

b) determinar as coordenadas do ponto de interseção dos gráficos das funções f e g.

Determinar as coordenadas do ponto de interseção dos gráficos equivale a determinar os valores de x para os quais $f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -2x + 7 = 6x + 1 \Leftrightarrow -2x - 6x = 1 - 7$

$\Leftrightarrow -8x = -6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{8} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$

Então $f\left(\frac{3}{4}\right) = g\left(\frac{3}{4}\right)$ como $f\left(\frac{3}{4}\right) = -2 \times \frac{3}{4} + 7 = -\frac{6}{4} + \frac{28}{4} = \frac{22}{4} = \frac{11}{2}$, as coordenadas do ponto de interseção são $\left(\frac{3}{4}, \frac{11}{2}\right)$.

Outro processo para se determinar as coordenadas do ponto de interseção das funções f e g seria resolver o sistema de equações: $\begin{cases} y = -2x + 7 \\ y = 6x + 1 \end{cases}$ ou ainda graficamente.

Exemplo 2

É usual, no estudo da função afim, utilizarem-se famílias de funções afins para determinar valores de parâmetros que verifiquem as condições dadas.

Considere-se a família de funções afins g tais que $g(x) = 2kx - 3x + k + 1$, $k \in \mathbb{R}$.

Pretende-se determinar os possíveis valores de k para os quais a função g é:

a) estritamente crescente,

escreve-se a função g, na forma canónica de uma função afim,

$g(x) = (2k - 3)x + k + 1$

g estritamente crescente se o seu declive for positivo, $2k - 3 > 0 \Leftrightarrow 2k > 3$

$\Leftrightarrow k > \frac{3}{2} \Leftrightarrow k \in \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$

b) uma função linear,

a função g é linear se a ordenada na origem do referencial, b, for zero e o declive, a, for diferente de zero, então $k + 1 = 0 \wedge 2k - 3 \neq 0 \Leftrightarrow k = -1 \wedge k \neq \frac{3}{2}$,

Assim g é linear se $k = -1$.

3.7. Função Quadrática

As funções quadráticas têm uma aplicação muito diversificada, como por exemplo, no estudo da órbita dos planetas, no lançamento de projéteis e em muitas outras situações relacionadas com diversas áreas, como por exemplo, nas telecomunicações, na arquitetura, na engenharia e na indústria.

Estas funções são representadas geometricamente por curvas a que chamamos parábolas e são as propriedades geométricas destas curvas que permitem a sua aplicação a uma grande diversidade de situações. Apresentam-se nas Figura 59 e Figura 60 dois exemplos dessa aplicação na arquitetura e nas telecomunicações, respetivamente.

Figura 59 - Edificio berliner bogen, em Hamburgo (Fonte: https://files.structurae.net/files/photos/2445/dsc_1133.jpg)

Figura 60 - Antena de rastreio de satélites da Agência Espacial Europeia, instalada nos Açores (Fonte:https://bordalo.observador.pt/v2/q:85/c:770:433:nowe:0:0/rs:fill:980/f:webp/plain/https://s3.observador.pt/wp-content/uploads/2016/08/29072246/13273412_770x433_acf_cropped.jpg)

3.7.1. A função quadrática e as cónicas

Para melhor se entender as funções quadráticas, é necessário abordar um pouco de geometria, mais precisamente o que diz respeito ao estudo das cónicas.

As cónicas são figuras geométricas planas obtidas a partir da interseção de um duplo cone de revolução com um plano. Dependendo da inclinação desse plano, obtém-se uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole, que podem observar-se na Figura 61.

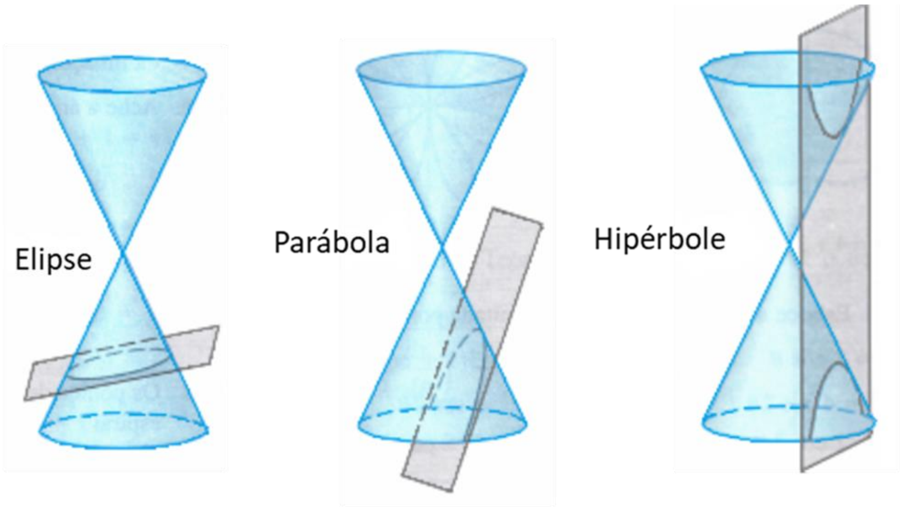


Figura 61 – Interseção de um duplo cone com um plano imagens (retiradas de: Stewart, J. (2006). Cálculo - volume I – Thomson - 5ª edição)

Se o plano for paralelo apenas a uma geratriz, obtém-se uma parábola, como se ilustra na Figura 62.

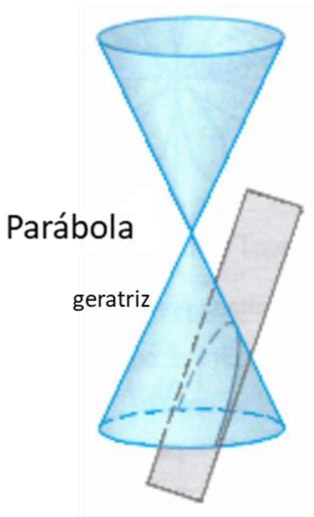


Figura 62 – Plano paralelo a uma geratriz imagem (retirada de: Stewart, J. (2006). Cálculo - volume I - Thomson - 5ª edição)

Definição: Uma **parábola** é o conjunto de pontos do plano cujas distâncias a um ponto F, denominado foco, e a uma reta que não contenha o ponto F, designada diretriz, são iguais.

Na Figura 63 esquematiza-se o conceito de parábola.

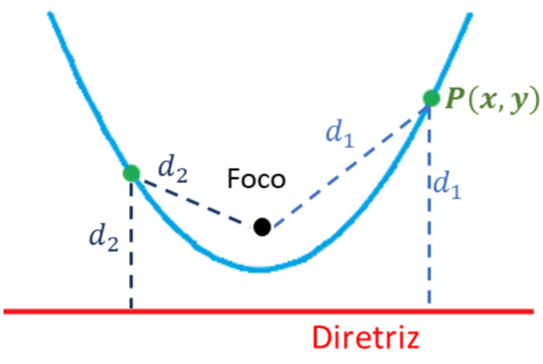


Figura 63 - Representação de uma parábola

O ponto mais próximo da diretriz é designado por vértice da parábola e é o ponto médio do segmento de reta $[FF']$, sendo F'a projeção ortogonal do ponto Fsobre a diretriz. A reta que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz designa-se por eixo de simetria da parábola.

Na Figura 64 ilustram-se estes conceitos para uma parábola cuja diretriz é paralela ao eixo das abcissas.

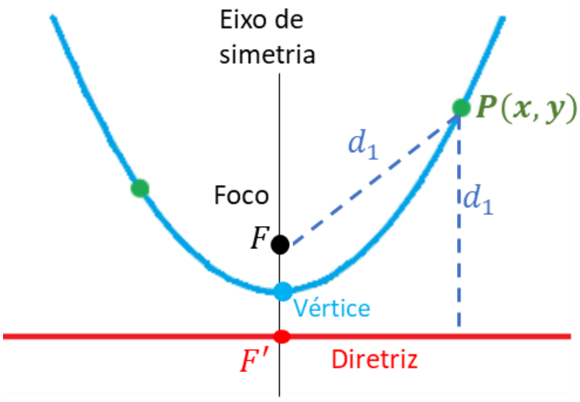


Figura 64 - Vértice e eixo de simetria de um parábola

A palavra foco que se utiliza no estudo das cónicas, nomeadamente na parábola, está relacionada com a ótica e com uma propriedade muito importante que permite a sua utilização nas mais diversificadas áreas inicialmente referidas.

Propriedade: Todo o raio que incide na parábola paralelo ao seu eixo de simetria reflete-se passando pelo foco e vice-versa. Esta propriedade encontra-se ilustrada nas Figura 65 e Figura 66.

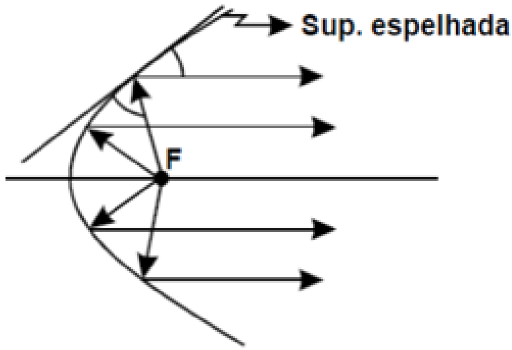


Figura 65 - Secção do farol de um automóvel (Fonte:https://wp.ufpel.edu.br/nucleomatceng/files/2012/07/C%C3%B4nicas-e-Qu%C3%A1dricas.pdf)

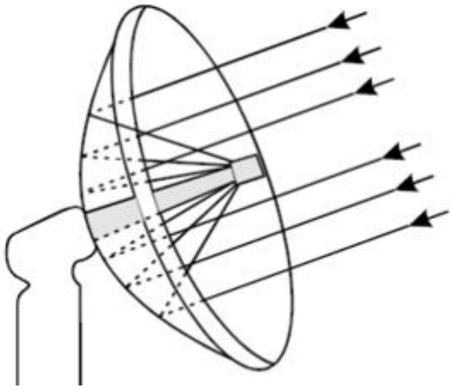


Figura 66 - Antena parabólica (Fonte:https://wp.ufpel.edu.br/nucleomatceng/files/2012/07/C%C3%B4nicas-e-Qu%C3%A1dricas.pdf)

Para definir analiticamente uma parábola, é necessário e suficiente conhecer as coordenadas do foco e a equação da diretriz. Neste estudo, a parábola surge como gráfico da função quadrática, daí que se estude os casos em que a diretriz é paralela ao eixo das abcissas e para simplificar a dedução da equação da parábola para alunos do Ensino Secundário, optou-se por colocar o vértice na origem do referencial, como ilustrado na Figura 67.

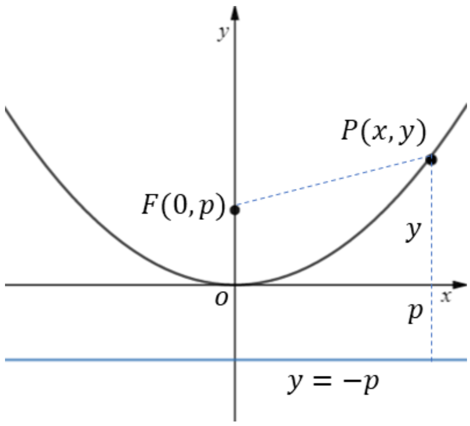


Figura 67 - Parábola com o vértice na origem do referencial

Se o foco for o ponto de coordenadas $F(0,p), p > 0$, a equação da diretriz é $y = -p$, e sendo $P(x,y)$ um ponto qualquer da parábola, a distância do ponto P ao ponto F é $\overline{PF} = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$, a distância do ponto P à diretriz é dada por $|y+p|$ e por definição de parábola tem-se que:

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y+p| \Leftrightarrow x^2 + (y-p)^2 = |y+p|^2 \Leftrightarrow x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4py \Leftrightarrow y = \frac{1}{4p}x^2$$

Escrevendo $a = \frac{1}{4p}$ obtém-se $y = ax^2$,

e conclui-se que quanto maior for $|p|$ maior é a abertura da parábola, ou seja, quanto menor for o valor de $|a|$ maior é a abertura da parábola, como se ilustra na Figura 68,

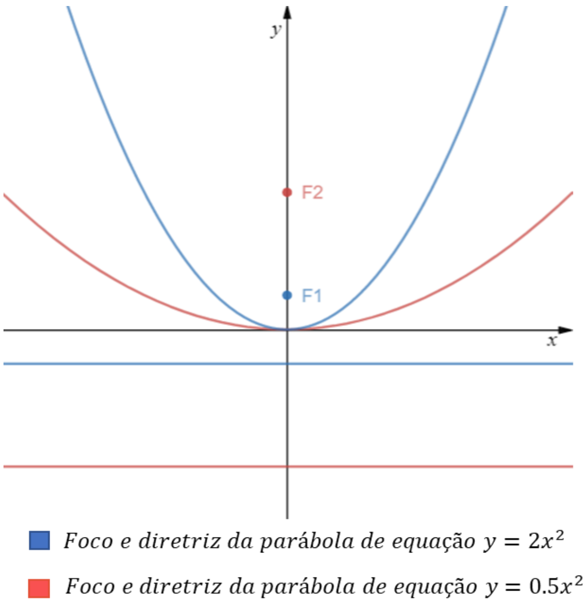


Figura 68 - Abertura das parábolas $y=2x^2$ e $y=0,5x^2$

e a concavidade da parábola está voltada para cima se $a > 0$ e voltada para baixo se $a < 0$, como se encontra representado nas Figura 69 e Figura 70.

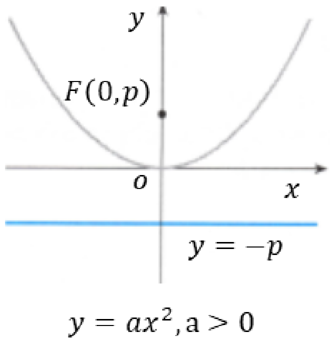


Figura 69 - Parábola com a concavidade voltada para cima

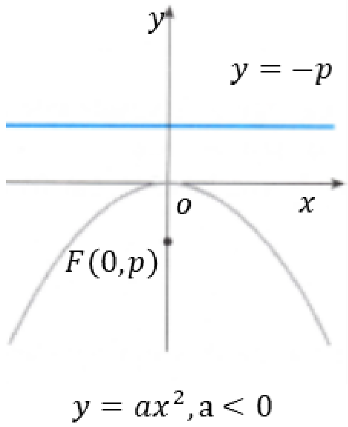


Figura 70 - Parábola com a concavidade voltada para baixo

De forma análoga, colocando o vértice na origem do referencial, a diretriz paralela ao eixo oy e, se o foco for o ponto de coordenadas $F(p, 0)$, a equação da diretriz é $x = -p$, obtendo-se as parábolas representadas nas Figura 71 e Figura 72.

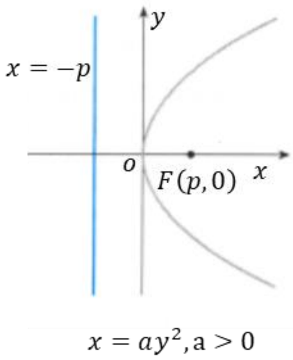
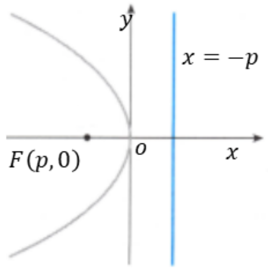


Figura 71 - Parábola de diretriz paralela ao eixo oy e foco de abcissa positiva



$x = ay^2, \mathrm{a} < 0$

Figura 72 - Parábola de diretriz paralela ao eixo oy e foco de abcissa negativa

Por observação destas representações constata-se que as parábolas das Figura 71 e Figura 72 não representam funções reais de variável real pelo que não serão objeto de estudo. Assim, neste trabalho será feito apenas o estudo das parábolas que representam funções reais de variável real, isto é, que são a representação geométrica de uma função quadrática.

Note-se que a parábola da Figura 71 contém a representação de duas funções, $y = \sqrt{x}$, se $y \geq 0$ e $y = -\sqrt{x}$ se $y \leq 0$ e a parábola da Figura 72 a representação das funções $y = \sqrt{-x}$, se $y \geq 0$ e $y = -\sqrt{-x}$, se $y \leq 0$.

Definição: Chama-se **função quadrática** ou polinomial do 2º grau a qualquer função $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cuja expressão analítica pode ser escrita na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Esta expressão também se designa por forma canónica da função quadrática. O gráfico desta função é uma parábola e na Figura 73 encontram-se representadas alguns exemplos de funções quadráticas.

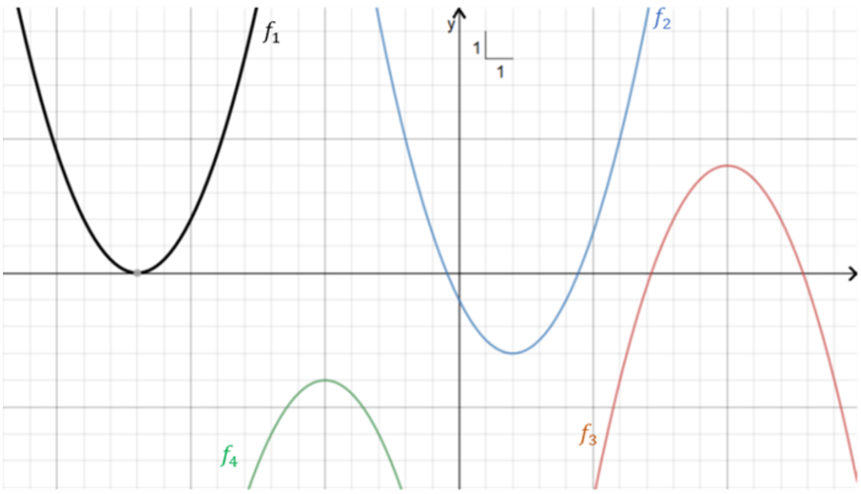


Figura 73 - Exemplos de funções quadráticas

Como a representação gráfica de uma função quadrática é uma parábola, pode concluir-se que:

- nenhuma função quadrática é bijetiva, uma vez que é não injetiva e não sobrejetiva
- o domínio é $\mathbb{R}$
- se $a > 0$, o gráfico da função quadrática tem a concavidade voltada para cima e se $a < 0$, tem a concavidade voltada para baixo.

3.7.2. Formas de escrever a função quadrática

As duas formas mais usuais, neste nível de ensino, de escrever a função quadrática são na forma canónica $f(x) = ax^2 + bx + c$ e na forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$, isto é, dados $a \neq 0$ e $b, c \in \mathbb{R}$, existem $h, k \in \mathbb{R}$ tais que,

$$ax^2 + bx + c = a(x-h)^2 + k$$

Esta igualdade obtém-se através do completamento do quadrado,

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a \times \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$$

e basta fazer $h = -\frac{b}{2a}$ e $k = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Reciprocamente, dados $a \neq 0$ e $h, k \in \mathbb{R}$, existem $b, c \in \mathbb{R}$, tais que

$$a(x-h)^2 + k = ax^2 + bx + c.$$

$$a(x-h)^2 + k = ax^2 - 2ahx + ah^2 + k$$

e basta fazer $b = -2ah$ e $c = ah^2 + k$.

3.7.3. A função $f(x) = ax^2$

Ao nível do décimo ano de escolaridade estuda-se a função quadrática considerando as famílias de funções do tipo $f(x) = ax^2$, $f(x) = a(x-h)^2$, $f(x) = ax^2 + k$ e $f(x) = a(x-h)^2 + k$ com $a \neq 0$ e $h, k \in \mathbb{R}$.

Inicia-se este estudo com a família de funções quadráticas mais simples, ou seja, do tipo

$f(x) = ax^2$, $a \neq 0$. Na Figura 74 encontram-se como exemplos as representações gráficas das funções, $f(x) = 4x^2$ e $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$

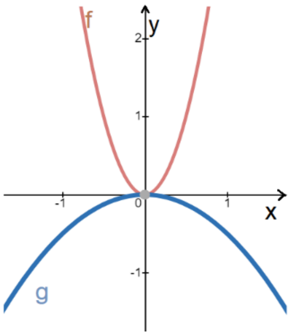


Figura 74 - Representação gráfica de duas funções do tipo $f(x) = ax^2$

As parábolas deste tipo têm o vértice no ponto de coordenadas $V(0,0)$ e o eixo de simetria é a reta de equação x =0. Sendo $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $x = 0$ é o único zero da função.

Relativamente à monotonia, e considerando $a > 0$,

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^-$, se $x_1 < x_2$, $x_1^2 > x_2^2 \Leftrightarrow ax_1^2 > ax_2^2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$,

a função é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$.

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$, se $x_1 < x_2$, $x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow ax_1^2 < ax_2^2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$,

a função é estritamente crescente em $]0, +\infty[$.

$\forall x_1 \in \mathbb{R}^-, \forall x_2 \in \mathbb{R}^+$,

se $|x_1| > x_2$ então $ax_1^2 > ax_2^2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

se $|x_1| < x_2$ então $ax_1^2 < ax_2^2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$,

portanto a função não é monótona no seu domínio.

De forma análoga se se considerar $a < 0$, a função é estritamente crescente em $]-\infty, 0[$ e estritamente decrescente em $]0, +\infty[$, não sendo monótona no seu domínio.

Na Tabela 2 sintetizam-se algumas propriedades destas funções.

Tabela 2 - Propriedades das funções do tipo $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$

	$a > 0$	$a < 0$
Contradomínio	$[0, +\infty[$	$]-\infty, 0]$
Zeros	0 é o único zero	0 é o único zero
Extremos	0 é o mínimo absoluto e o minimizante é 0	0 é o máximo absoluto e o maximizante é 0
Monotonia	Estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ Estritamente crescente em $[0, +\infty[$	Estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ Estritamente decrescente em $[0, +\infty[$
Sinal	Positiva em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$	Negativa em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
Vértice	(0,0)	(0,0)
Eixo de Simetria	$x = 0$	$x = 0$

3.7.4. A função $f(x) = a(x - h)^2$

Funções do tipo $f(x) = a(x-h)^2$, $a \neq 0$ e $h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, na Figura 75 encontram-se como exemplos as funções definidas analiticamente por $f(x) = 3(x-1)^2$ e $g(x) = 3(x+2)^2$ com a> 0

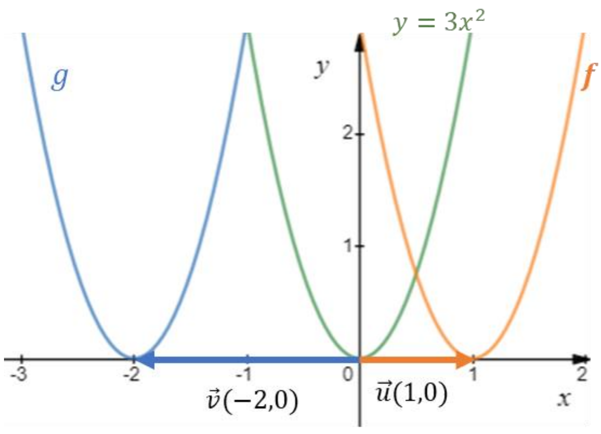


Figura 75 - Gráfico cartesiano de três funções do tipo $f(x) = a(x-h)^2, a > 0$

O gráfico da função f é imagem do gráfico de $y = 3x^2$ pela translação associada ao vetor $\vec{u}(1, 0)$ e o gráfico da função g é imagem do gráfico de $y = 3x^2$ pela translação associada ao vetor $\vec{v}(-2,0)$

Analogamente, se se considerar os exemplos representados na Figura 76 para a < 0, $f(x) = -3(x-1)^2$ e $g(x) = -3(x+2)^2$

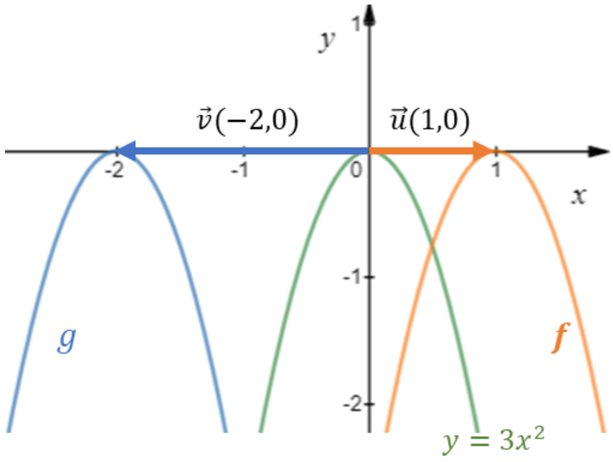


Figura 76 - Gráfico cartesiano de três funções do tipo $f(x) = a(x-h)^2, a < 0$

O gráfico da função f é imagem do gráfico de $y = -3x^2$ pela translação associada ao vetor $\vec{u}(1, 0)$ e o gráfico da função g é imagem do gráfico de $y = -3x^2$ pela translação associada ao vetor $\vec{v}(-2,0)$.

Dada uma função g definida por $g(x) = ax^2$, $a \neq 0$, e uma função f definida por $f(x) = a(x-h)^2$, $a \neq 0$ e $h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, o gráfico de f é imagem do gráfico de g através de uma translação associada ao vetor $\vec{u}(h, 0)$.

As duas representações das Figura 77 e Figura 78 são ilustrativas das funções do tipo $f(x) = a(x-h)^2$, $a \neq 0$ e $h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

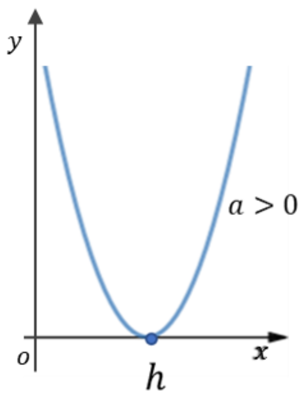


Figura 77 - Esquematização da translação horizontal com a>0 e h>0

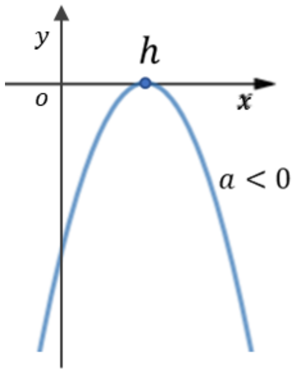


Figura 78 - Esquematização da translação horizontal com a<0 e h>0

As parábolas deste tipo têm o vértice no ponto de coordenadas $V(h, 0)$ e o eixo de simetria é a reta vertical de equação $x = h$. Sendo $f(x) = 0 \Leftrightarrow a(x-h)^2 = 0 \Leftrightarrow x = h$, $x = h$ é o único zero da função.

Na Tabela 3 encontram-se algumas propriedades destas funções.

Tabela 3 - Propriedades das funções do tipo $f(x) = a(x-h)^2$, $a \neq 0$ e $h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

	$a > 0$	$a < 0$
Contradomínio	$[0, +\infty[$	$]-\infty, 0]$
Zeros	h é o único zero	h é o único zero
Extremos	0 é o mínimo absoluto e o minimizante é h	0 é o máximo absoluto e o maximizante é h
Monotonia	Estritamente decrescente em $]-\infty, h]$ Estritamente crescente em $[h, +\infty[$	Estritamente crescente em $]-\infty, h]$ Estritamente decrescente em $[h, +\infty[$
Sinal	Positiva em $\mathbb{R}\backslash\{h\}$	Negativa em $\mathbb{R}\backslash\{h\}$
Vértice	$(h, 0)$	$(h, 0)$
Eixo de Simetria	$x = h$	$x = h$

Nota: Os zeros, os extremos e o vértice deste tipo de funções obtêm-se a partir dos das funções do tipo $y = ax^2$ através de uma translação associada ao vetor $\vec{u}(h, 0)$.

3.7.5. A função $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + k}$

A Figura 79 ilustra duas funções do tipo $f(x) = ax^2 + k$, $a \neq 0$ e $k \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, com $a > 0$, $f(x) = 3x^2 - 1$ e $g(x) = 3x^2 + 2$.

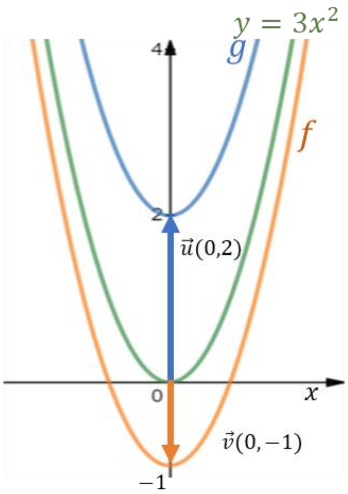


Figura 79 - Gráfico cartesiano de três funções do tipo $f(x) = ax^2 + k,\ a > 0$

O gráfico da função f é imagem do gráfico de $y = 3x^2$ pela translação associada ao vetor $\vec{v}(0,-1)$ e o gráfico da função g é imagem do gráfico de $y = 3x^2$ pela translação associada ao vetor $\vec{u}(0,2)$.

De forma análoga, se se considerar os exemplos da Figura 80 para a< 0, $f(x) = -3x^2 - 1$ e $g(x) = -3x^2 + 2$.

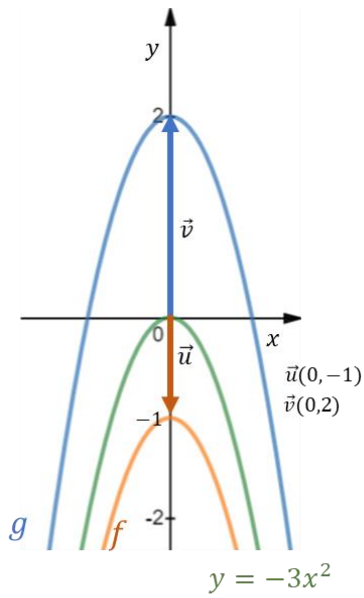


Figura 80 - Gráfico cartesiano de três funções do tipo $f(x) = ax^2 + k,\ a < 0$

Dada uma função $g(x) = ax^2$, $a \neq 0$, e uma função f definida por $f(x) = ax^2 + k, a \neq 0$ e $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, o gráfico de f é imagem do gráfico de g através de uma translação associada ao vetor $\vec{u}(0, k)$.

As parábolas deste tipo têm o vértice no ponto de coordenadas $V(0, k)$ e o eixo de simetria é a reta vertical de equação $x = 0$. Relativamente aos zeros, se a e k têm o mesmo sinal a função não tem zeros, se a e k têm sinais diferentes, a função tem dois zeros:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow ax^2 + k = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{-\frac{k}{a}} \ \vee \ x = -\sqrt{-\frac{k}{a}}$$

Sinal:

Se $a > 0$ e $k > 0$, função é positiva em $\mathbb{R}$.

Se $a > 0$ e $k < 0$, a função é positiva em $\left]-\infty, -\sqrt{-\frac{k}{a}}\right[\cup \left]\sqrt{-\frac{k}{a}}, +\infty\right[$ e é negativa em $\left]-\sqrt{-\frac{k}{a}}, \sqrt{-\frac{k}{a}}\right[$

Se $a < 0$ e $k < 0$, a função é negativa em $\mathbb{R}$.

Se $a < 0$ e $k > 0$, a função é negativa em $\left]-\infty, -\sqrt{-\frac{k}{a}}\right[\cup \left]\sqrt{-\frac{k}{a}}, +\infty\right[$ e é positiva em $\left]\sqrt{-\frac{k}{a}}, \sqrt{-\frac{k}{a}}\right[$

Na Tabela 4 encontram-se algumas das propriedades destas funções.

Tabela 4 - Propriedades das funções do tipo $f(x) = ax^2 + k$, $a \neq 0$ e $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

	$a > 0$	$a < 0$
contradomínio	$[k, +\infty[$	$]-\infty, k]$
Zeros	Se $k > 0$, não tem zeros Se $k < 0$, tem dois zeros	Se $k > 0$, tem dois zeros Se $k < 0$, não tem zeros
Extremos	k é o mínimo absoluto e o minimizante é 0	k é o máximo absoluto e o maximizante é 0
Monotonia	Estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ Estritamente crescente em $[0, +\infty[$	Estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ Estritamente decrescente em $[0, +\infty[$
Vértice	$(0, k)$	$(0, k)$
Eixo de Simetria	$x = 0$	$x = 0$

Nota: Os zeros, os extremos e o vértice deste tipo de funções obtêm-se a partir dos das funções do tipo $y = ax^2$através de uma translação associada ao vetor $\vec{u}(0, k)$.

3.7.6. A função $\boldsymbol{f(x) = a(x-h)^2 + k}$

A Figura 81 ilustra a translação da parábola de equação $y = ax^2$ associada ao vetor $\vec{u}(h, k)$, com a, h e k valores positivos, obtendo-se a função $f(x) = a(x-h)^2 + k,\ a \neq 0$ e $h, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

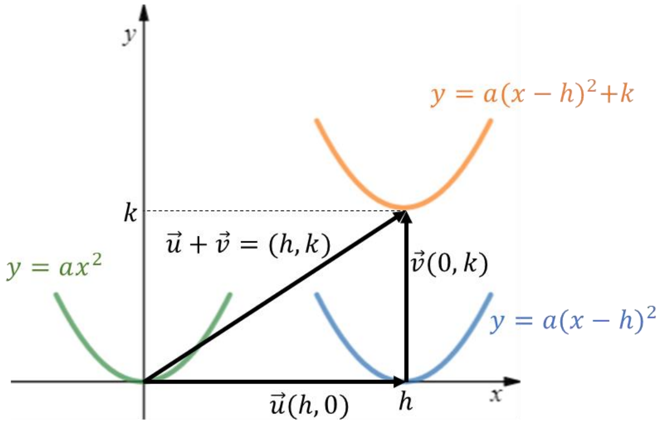


Figura 81 - Esquematização da translação da parábola y=ax² associada ao vetor de coordenadas (h,k)

A Figura 82 ilustra a translação da parábola de equação $y = ax^2$ associada ao vetor $\vec{u} + \vec{v} = (h, k)$, com a e k valores negativos e h um valor positivo.

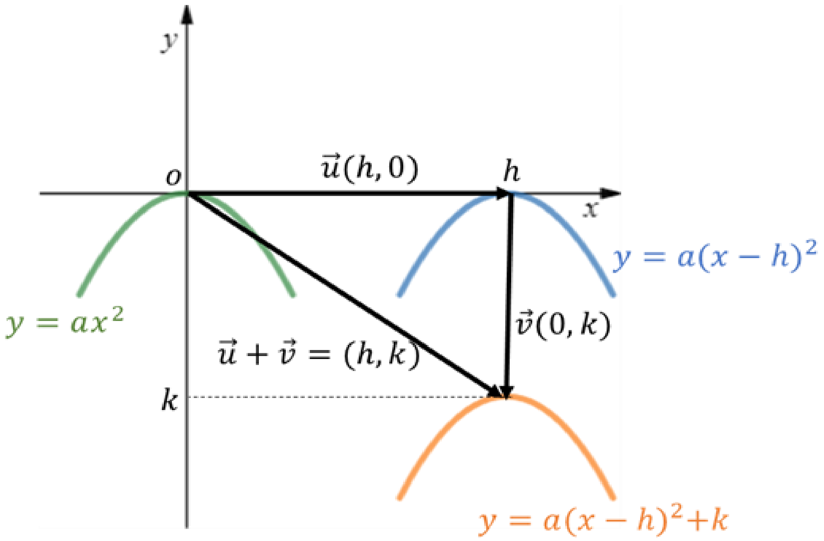


Figura 82 - Esquematização da translação da parábola y=ax² associada ao vetor de coordenadas (h,k)

Dada uma função g definida por $g(x) = ax^2$, $a \neq 0$, e uma função f definida por $f(x) = a(x-h)^2 + k$, $a \neq 0$ e $h, k \in \mathbb{R}$, o gráfico de f é imagem do gráfico de g através de uma translação associada ao vetor $\vec{u} + \vec{v} = (h, k)$.

As parábolas deste tipo têm o vértice no ponto de coordenadas $V(h, k)$ e o eixo de simetria é a reta vertical de equação $x = h$.

Zeros:

Se a e k têm o mesmo sinal a função não tem zeros

Se a e k têm sinais diferentes, a função tem dois zeros: $h + \sqrt{-\frac{k}{a}}$ e $h - \sqrt{-\frac{k}{a}}$

Sinal:

Se $a > 0$ e $k > 0$, função é positiva em $\mathbb{R}$.

Se $a > 0$ e $k < 0$, a função é positiva em $\left]-\infty, \mathrm{h} - \sqrt{-\frac{k}{a}}\right[\cup \left]h + \sqrt{-\frac{k}{a}}, +\infty\right[$ e é negativa em $\left]h - \sqrt{-\frac{k}{a}}, h + \sqrt{-\frac{k}{a}}\right[$

Se $a < 0$ e $k < 0$, a função é negativa em $\mathbb{R}$.

Se $a < 0$ e $k > 0$, a função é negativa em $\left]-\infty, \mathrm{h} - \sqrt{-\frac{k}{a}}\right[\cup \left]h + \sqrt{-\frac{k}{a}}, +\infty\right[$ e é positiva em $\left]h - \sqrt{-\frac{k}{a}}, h + \sqrt{-\frac{k}{a}}\right[$

Na Tabela 5 encontram-se algumas propriedades destas funções.

Tabela 5 - Propriedades das funções do tipo $f(x) = a(x-h)^2 + k, a \neq 0$ e $h, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

	$a > 0$	$\mathrm{a} < 0$
Contradomínio	$[k, +\infty[$	$]-\infty, k]$
Zeros	Se $k > 0$, não tem zeros Se $k < 0$, tem dois zeros	Se $k > 0$, tem dois zeros Se $k < 0$, não tem zeros
Extremos	k é o mínimo absoluto e o minimizante é h	k é o máximo absoluto e o maximizante é h
Monotonia	Estritamente decrescente em $]-\infty, h]$ Estritamente crescente em $[h, +\infty[$	Estritamente crescente em $]-\infty, h]$ Estritamente decrescente em $[h, +\infty[$
Vértice	$(h, k) = (h, f(h))$	
Eixo de Simetria	$x = h$	$x = h$

Nota: Os zeros, os extremos e o vértice deste tipo de funções obtêm-se a partir dos das funções do tipo $y = ax^2$ através de uma translação associada ao vetor $\vec{u}(h, k)$.

Seguem-se alguns exemplos de aplicação prática dos conceitos estudados anteriormente relativos ao estudo da função quadrática e que habitualmente se exploram no ensino secundário.

Exemplo 1

No referencial da Figura 83 estão representadas quatro parábolas, todas com a mesma "abertura", que representam quatro funções quadráticas. Todas as funções representadas são translações ou reflexões deslizantes da função definida analiticamente por $y = 2x^2$.

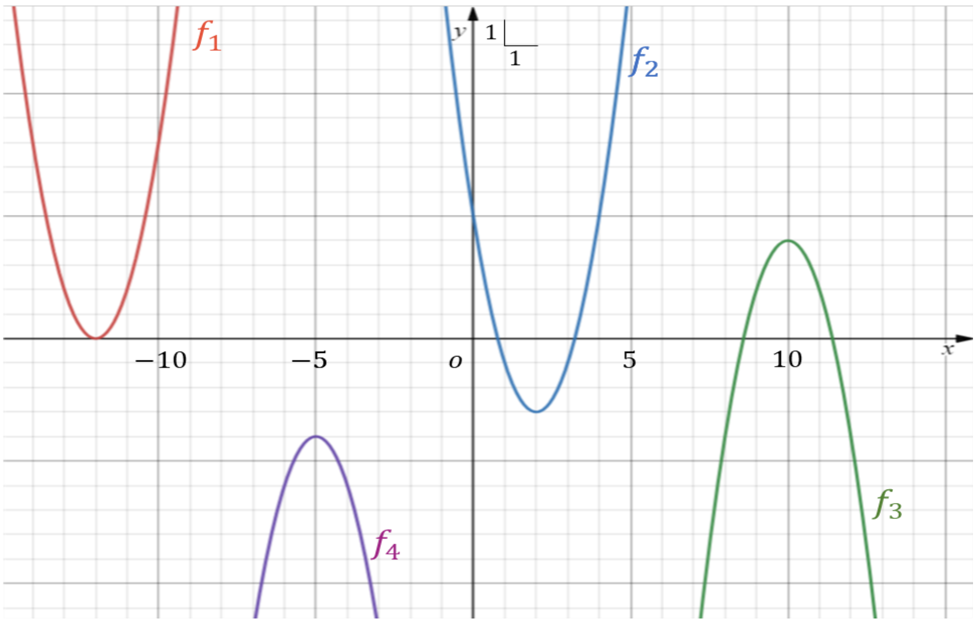


Figura 83 - Gráfico cartesiano de quatro funções quadráticas f_1, f_2, f_3 e f_4

Pretende-se escrever uma expressão analítica que defina cada uma das funções representadas, determinar as coordenadas do vértice e a equação do eixo de simetria da parábola e identificar o contradomínio da função.

A expressão analítica de cada uma das funções $f_i, i = 1, \dots, 4$ é da forma $f_i(x) = 2(x - h_i)^2 + k_i = f(x - h_i) + k_i$, $h_i, k_i \in \mathbb{R}$, as coordenadas do vértice são $V(h_i, k_i)$, a equação do eixo de simetria é a reta vertical $x = h_i$ e o contradomínio é o conjunto $D'_{f_i} = [k_i, +\infty[$, se a concavidade da parábola estiver voltada para cima, e $D'_{f_i} =]-\infty, k_i]$ se estiver voltada para baixo.

Na Tabela 6 são concretizados os parâmetros h_i, k_i para cada uma das funções f_i, com $i = 1, \dots, 4$.

Tabela 6 - Expressão analítica, coordenadas do vértice, contradomínio e equação do eixo de simetria das funções f_1, f_2, f_3 e f_4

	f_1	f_2	f_3	f_4
$f_i(x)$	$2(x+12)^2$	$2(x-2)^2-3$	$-2(x-10)^2+4$	$-2(x+5)^2-4$
Vértice (h_i, k_i)	$(-12{,}0)$	$(2,-3)$	$(10{,}4)$	$(-5,-4)$
Contradomínio	$[0,+\infty[$	$[-3,+\infty[$	$]-\infty,4]$	$]-\infty,-4]$
Eixo de simetria $(x=h_i)$	$x=-12$	$x=2$	$x=10$	$x=-5$

Exemplo 2

É importante que os alunos sejam capazes de escrever a expressão analítica de uma função quadrática, conhecidas as coordenadas de dois dos seus pontos sendo um deles o vértice.

No referencial da Figura 84 estão representadas duas funções quadráticas f e g.

Relativamente a estas funções sabe-se que:

- as coordenadas do vértice das parábolas representativas das funções são números inteiros;
- o ponto $\mathrm{Q}(3,-1)$ pertence ao gráfico da função f e o ponto $\mathrm{P}(-8,-3)$ pertence ao gráfico da função g.

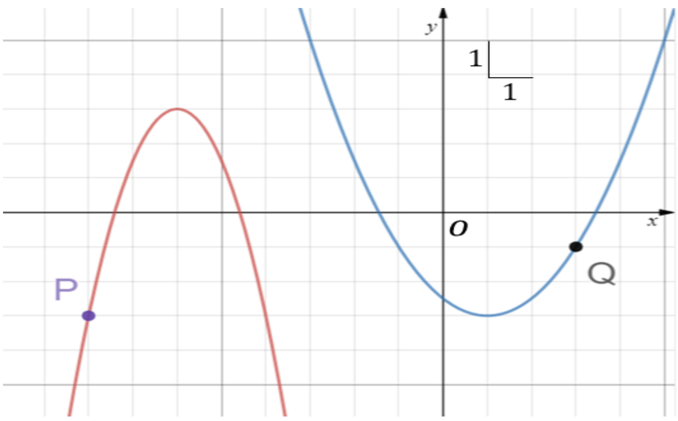


Figura 84 - Gráfico cartesiano de duas funções quadráticas

A expressão analítica da função f é $f(x) = a(x-1)^2 - 3$, pois as coordenadas do vértice são $V(1,-3)$. Como o ponto Q$(3,-1)$ pertence ao gráfico da função f,

$$f(3) = -1$$

$$\Leftrightarrow a(3-1)^2 - 3 = -1$$

$$\Leftrightarrow 4a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

Então $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 3$

De forma análoga, para a função g, as coordenadas do vértice são $V(-6{,}3)$, pode escrever-se $g(x) = a(x+6)^2 + 3$. Como o ponto P$(-8,-3)$ pertence ao gráfico da função g,

$$g(-8) = -3$$

$$\Leftrightarrow a(-8+6)^2 + 3 = -3$$

$$\Leftrightarrow 4a + 3 = -3$$

$$\Leftrightarrow 4a = -6 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2}$$

Então $g(x) = -\frac{3}{2}(x+6)^2 + 3$

3.7.7. A forma canónica da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$

A forma mais comum de apresentar a função quadrática é a forma canónica:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0$$

Na subsecção 3.7.2. vimos que $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$,

que é a forma da função quadrática estudada em 3.7.6., $f(x) = a(x-h)^2 + k$, onde

$$h = -\frac{b}{2a} \; e \; k = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

A quantidade $b^2 - 4ac$ designa-se habitualmente por binómio discriminante e denota-se por Δ.

Pode, então, escrever-se que $k = -\frac{\Delta}{4a}$, e a Tabela 5 pode ser reescrita usando h e k, como definidos acima, o que se apresenta na Tabela 7.

Tabela 7 - Propriedades das funções do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

	$a > 0$	$a < 0$
Contradomínio	$[k, +\infty[=\left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right[$	$]-\infty, k]=\left]-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$
Zeros	Se $\Delta < 0$, não tem zeros Se $\Delta > 0$, tem dois zeros	Se $\Delta > 0$, tem dois zeros Se $\Delta < 0$, não tem zeros
	Se $\Delta = 0$ tem um zero duplo	
Extremos	$-\frac{\Delta}{4a}$ é o mínimo absoluto e o minimizante é $-\frac{b}{2a}$	$-\frac{\Delta}{4a}$ é o máximo absoluto e o maximizante é $-\frac{b}{2a}$
Monotonia	Estritamente decrescente em $]-\infty, -b/2a]$ Estritamente crescente em $[-b/2a, +\infty[$	Estritamente crescente em $]-\infty, -b/2a]$ Estritamente decrescente em $[-b/2a, +\infty[$
Vértice	$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$	
Eixo de Simetria	$x = -\frac{b}{2a}$	

O gráfico da função f é imagem do gráfico da função definida em 3.7.3., $f(x) = ax^2$ através de uma translação associada ao vetor $\vec{u}\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

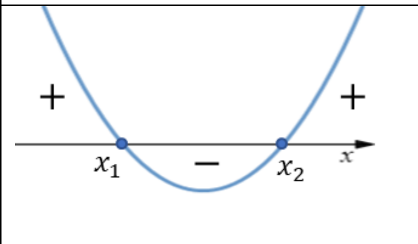
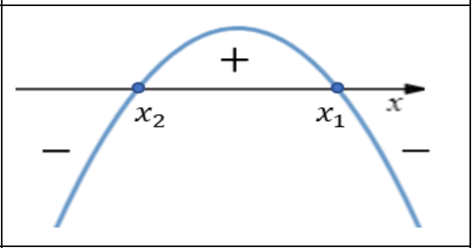
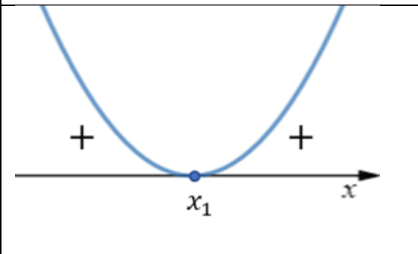
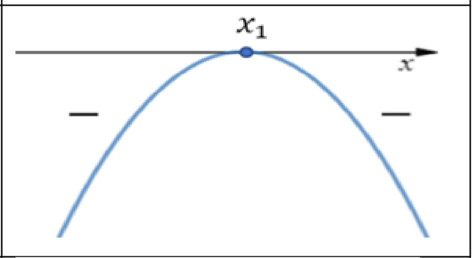
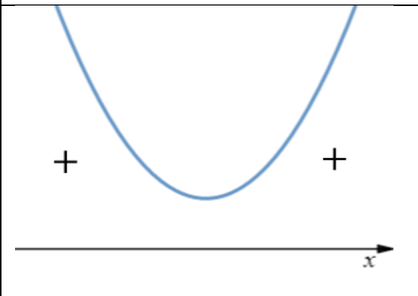
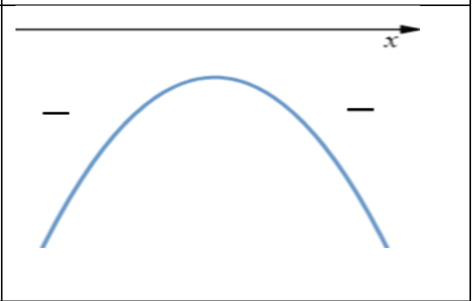
Os zeros da função, como observado na Tabela 7, só existem se $\Delta \geq 0$ e são

$$h + \sqrt{-\frac{k}{a}} = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{\Delta}{4a}} \quad \text{e} \quad h - \sqrt{-\frac{k}{a}} = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{\Delta}{4a}}$$

que no caso de $\Delta = 0$ são iguais.

A informação sobre o número de zeros de uma função quadrática e sobre o sentido da concavidade permitem, de uma forma rápida, fazer o estudo do sinal da função, o que é muito importante para a resolução de inequações do 2º grau. Essas informações encontram-se ilustradas na Tabela 8

Tabela 8 - Sinal da parábola

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$ A função tem dois zeros reais distintos.		
$\Delta = 0$ A função tem um único zero (zero duplo)		
$\Delta < 0$ A função não tem zeros (não interseta o eixo das abcissas)		

Apresentam-se a seguir dois exemplos que habitualmente se utilizam para aplicar os conceitos e propriedades da função quadrática, explorando-os e obrigando os estudantes a refletir e não apenas a mecanizar procedimentos.

Exemplo 3

Seja f uma família de funções, reais de variável real, definida analiticamente por $f_m(x) = -2x^2 + 4x - m, m \in \mathbb{R}$. Pretende-se determinar m de modo a que

1. o contradomínio da função f_m seja $]-\infty, 5]$;
2. a função f tenha dois zeros distintos.

O gráfico representativo de qualquer função da família de funções é uma parábola com a concavidade voltada para baixo, portanto o seu contradomínio é o intervalo $]-\infty, k]$, sendo k a ordenada do vértice da parábola. As coordenadas do vértice são $V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

$-\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2\times(-2)} = -\frac{4}{-4} = 1$ e

$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(1) = -2\times 1 + 4\times 1 - m = -2 + 4 - m = 2 - m$

Tem-se que $V(1, 2-m)$ e o contradomínio é o intervalo $]-\infty, 5]$ se $2 - m = 5$

$$2 - m = 5 \Leftrightarrow -m = 5 - 2 \Leftrightarrow m = -3$$

ou seja, se $m = -3$.

A função tem dois zeros distintos se $\Delta > 0$

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow 4^2 - 4\times(-2)\times(-m) > 0$$
$$\Leftrightarrow 16 - 8m > 0 \Leftrightarrow -8m > -16$$
$$\Leftrightarrow m < 2$$

Assim, a função f_m terá dois zeros distintos se $m \in]-\infty, 2[$.

Exemplo 4

É usual utilizar-se nos exercícios a função quadrática como modelação de situações reais.

Este exemplo trata de um problema de aplicação ao salvamento marítimo.

Nas operações de salvamento, é habitual o lançamento de foguetes para sinalizar a posição. O movimento de um foguete (à semelhança dos projéteis) é dado por uma função quadrática que representa a altura, em metros, do foguete em função do tempo. Sabe-se que para um dado tipo de foguetes esse movimento é descrito pela função
$h(t) = -0{,}5t^2 + 3{,}5t + 4$, sendo t o tempo em segundos, $t \in [0{,}8]$ e $h(0)$ a altura, em metros, a que foi lançado o foguete. A luz do foguete só é útil se a altura do foguete for superior a 7 metros. Pede-se para determinar a altura máxima atingida pelo foguete e o intervalo de tempo em que a luz do foguete é efetivamente útil.

A altura máxima atingida pelo foguete é igual à ordenada do vértice da parábola que representa a função, $V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

$-\frac{b}{2a} = -\frac{3{,}5}{2\times(-0{,}5)} = 3{,}5$

$h(3{,}5) = -0{,}5\times 3{,}5^2 + 3{,}5\times 3{,}5 + 4 = 10{,}125$ então $V(3{,}5; 10{,}125)$

e a altura máxima atingida pelo foguete é $10{,}125\ m$.

Para se determinar a duração da luz útil de um foguete resolve-se a inequação

$h(t) > 7 \Leftrightarrow -0{,}5t^2 + 3{,}5t - 3 > 0$

zeros: $-0{,}5t^2 + 3{,}5t - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-3{,}5 \pm \sqrt{12{,}25-6}}{-1} \Leftrightarrow t = \frac{-3{,}5 \pm \sqrt{6{,}25}}{-1}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-3{,}5 \pm 2{,}5}{-1} \Leftrightarrow \ t = 1 \ \vee \ t = 6$$

Na Figura 85 pode visualizar-se o sinal da função $h(t) - 7$

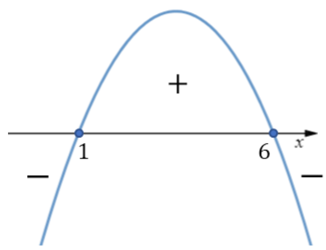


Figura 85 - Sinal da função h(t)-7

por observação do esboço da parábola, $h(t) > 7 \Leftrightarrow t \in]1,6[$, a duração da luz útil do foguete é 5 segundos.

3.7.8. Função quadrática e inversa

Qualquer função quadrática é não sobrejetiva uma vez que o contradomínio é um intervalo da forma $[k, +\infty[$ ou $]-\infty, k]$, $k \in \mathbb{R}$ e é não injetiva, pois se se considerarem dois objetos equidistantes da abcissa do vértice estes têm a mesma imagem por f, como se ilustra na Figura 86.

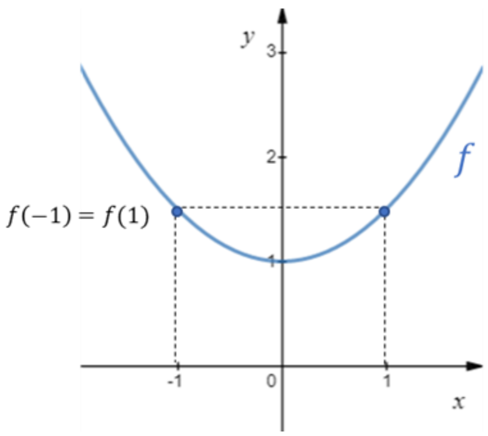


Figura 86 - Representação da função f não injetiva pelo que não admite inversa. Contudo, se se considerar uma restrição do domínio onde a função seja injetiva pode caraterizar-se a função inversa nessa restrição.

Sendo a função f da Figura 86 definida analiticamente por $f(x) = 0{,}5x^2 + 1$ e g a restrição da função f ao intervalo $[0, +\infty[$, g já é uma função injetiva.

$$\begin{array}{llll} g: & [0, +\infty[& \longrightarrow & [1, +\infty[\\ & x & \longmapsto & 0{,}5x^2 + 1 \end{array}$$

Pode então definir-se a função inversa da função g:

$$D_g = D'_{g^{-1}} = [0, +\infty[$$

$$D'_g = D_{g^{-1}} = [1, +\infty[$$

$$g(x) = y \Leftrightarrow 0{,}5x^2 + 1 = y \Leftrightarrow 0{,}5x^2 = y - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2y - 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2y - 2} \ \wedge \ 2y - 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2y - 2} \wedge \ y \geq 1$$

Assim, a função inversa de g é $g^{-1}(x) = \sqrt{2x - 2}$, com $x \geq 1$.

Representando as funções g e g^{-1} no mesmo referencial, na Figura 87 ilustra-se a simetria relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares.

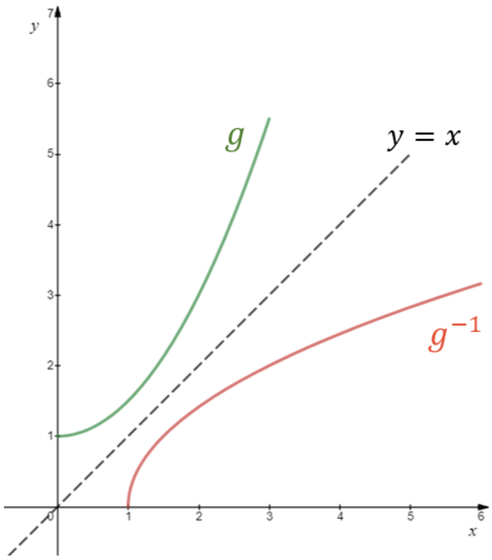


Figura 87 - Representação gráfica da função g e da sua inversa

Da mesma forma, se se considerar a restrição h da função f ao intervalo $]-\infty, 0]$, h é uma função injetiva.

$$\begin{array}{llll} h: &]-\infty, 0] & \longrightarrow & [1, +\infty[\\ & x & \longmapsto & 0{,}5x^2 + 1 \end{array}$$

$$D_h = D'_{h^{-1}} =]-\infty, 0]$$

$$D'_h = D_{h^{-1}} = [1, +\infty[$$

$$g(x) = y \Leftrightarrow 0{,}5x^2 + 1 = y \Leftrightarrow 0{,}5x^2 = y - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2y - 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2y-2} \ \wedge \ 2y - 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{2y-2} \wedge \ y \geq 1$$

Assim a função inversa da função h é $h^{-1}(x) = -\sqrt{2x-2}$, com $x \geq 1$.

De forma análoga, ilustra-se na Figura 88 a simetria dos gráficos das funções h e h^{-1}.

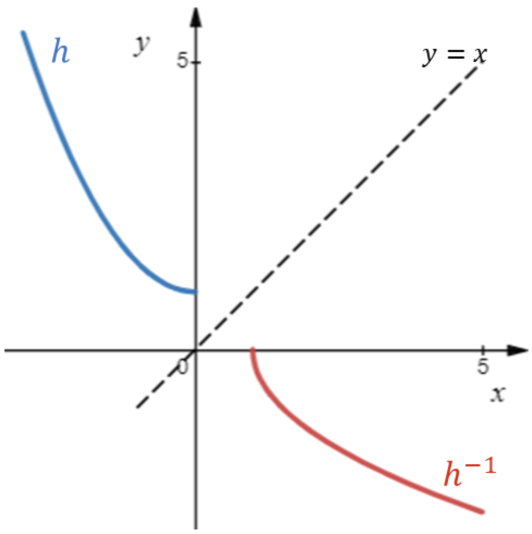


Figura 88 - Representação gráfica da função h e da sua inversa

4. Caracterização do contexto e das turmas

Nesta secção, inicialmente faz-se uma caracterização do ambiente em que os dados foram obtidos. Em seguida, é feita uma caracterização dos alunos e das turmas nas quais este projeto foi desenvolvido. Por fim, apresentam-se os resultados obtidos com a aplicação das atividades descritas no capítulo 5.

4.1. Caracterização do ambiente de recolha de resultados

O ano letivo 2020/2021 foi um ano marcado por várias alterações que afetaram o dia a dia da comunidade escolar devido à pandemia provocada pela Covid-19. Estas alterações resultantes do impacto do Covid-19 em Portugal e em praticamente todos os países tiveram efeitos diretos e indiretos no comportamento, motivação e aproveitamento dos alunos.

Neste ano letivo, o primeiro período decorreu com aulas presenciais, mas, dada a situação pandémica no país, estas tiveram alguns constrangimentos, nomeadamente o uso obrigatório de máscara e o distanciamento social condicionando bastante as atividades letivas e todo o trabalho desenvolvido na sala de aula com os alunos. Sem a possibilidade de realização de trabalhos em grupo ou de pares e a dificuldade de o professor manter um contacto próximo dos alunos.

No segundo período, as aulas iniciaram-se com a implementação do ensino à distância. Através da plataforma *Google Meet* as aulas eram lecionadas em duas modalidades: aulas síncronas e aulas assíncronas. Nas aulas síncronas, os conteúdos foram expostos pelo professor de forma semelhante àquela que se fazia na sala de aula no ensino presencial. Nas aulas assíncronas, os alunos tinham de desenvolver, autonomamente, tarefas e atividades orientadas pelo professor. Este tipo de ensino exigiu uma maior autonomia por parte dos alunos e um esforço acrescido por parte do professor para manter os discentes focados na aula e nas atividades desenvolvidas. No ano letivo anterior, verificaram-se algumas falhas de conexão com a internet, algumas dúvidas sobre a utilização das plataformas e distrações dos intervenientes, este ano, um pouco mais experientes neste novo modelo, professor e alunos já estiveram mais coordenados e capazes de interagir com as plataformas utilizadas. Os alunos foram mais capazes de se concentrar, abstraindo-se das distrações do meio que os rodeava.

No terceiro período, apenas as primeiras duas semanas foram na modalidade de ensino à distância, semelhante aquilo que foi o segundo período. Com a melhoria dos indicadores de avaliação do estado da pandemia, o Governo autorizou o ensino presencial na terceira fase do desconfinamento em abril. Contudo, mantiveram-se os constrangimentos do primeiro período em sala de aula com algumas regras, como o uso de máscara obrigatório e distanciamento social. De forma geral os alunos mostraram-se satisfeitos com o regresso às aulas presenciais. A atividade foi desenvolvida nas duas primeiras semanas do terceiro período no formato de ensino à distância. A avaliação da atividade e recolha do *feedback* dos alunos decorreu já nas aulas presenciais do terceiro período.

4.2. Caracterização dos alunos

Para uma melhor contextualização e enquadramento do trabalho desenvolvido e das metodologias utilizadas, fez-se uma caraterização dos alunos envolvidos, tendo em consideração cinco pontos: o curso, o género, a idade, o número de retenções no ensino básico e as habilitações académicas dos encarregados de educação. Para a recolha dos dados elencados, foram consultadas as fichas biográficas dos alunos, preenchidas no início do ano letivo, onde constam as informações que serão analisados de seguida.

- **Dados relativos ao curso dos alunos**

Neste trabalho participaram os alunos das turmas D e F do décimo ano, do curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias com 25 (vinte e cinco) alunos e do curso Científico-Humanístico de Ciências Socioeconómicas com 22 (vinte e dois) alunos, respetivamente. Significa que a amostra deste estudo é constituída por 47 (quarenta e sete) alunos, conforme consta na Tabela 9 e no Gráfico 1.

Tabela 9 - Distribuição dos alunos por turma e curso

Curso	Turma	Número de alunos
Ciências e Tecnologias	D	25
Ciências Socioeconómicas	F	22
Total		47

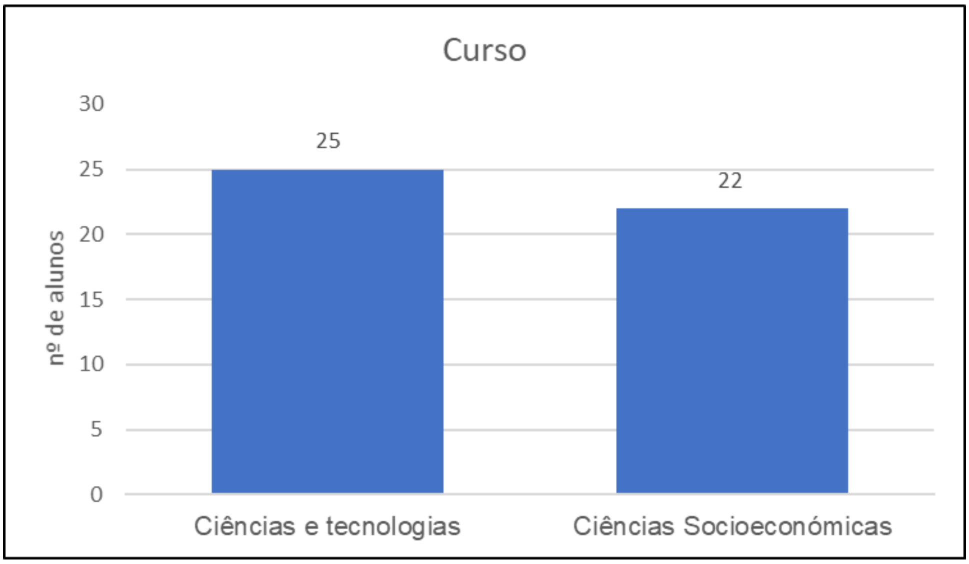


Gráfico 1 - Distribuição dos alunos pelos cursos Científico-Humanísticos

A Tabela 9 faculta informação sobre os cursos, as turmas e o número de alunos objeto de análise neste estudo; o Gráfico 1 reforça a observação da distribuição dos alunos pelos respetivos cursos.

- **Dados relativos ao género dos alunos**

Dos 47 (quarenta e sete) alunos em estudo, 24 (vinte e quatro) pertencem ao género masculino e 23 (vinte e três) são do género feminino, sendo, por isso, um grupo muito equilibrado no que respeita ao género, conforme mostra a Tabela 10 e o Gráfico 2.

Tabela 10 - Distribuição dos alunos por género

Género	Número de alunos	%
Masculino	24	51,06%
Feminino	23	48,94%

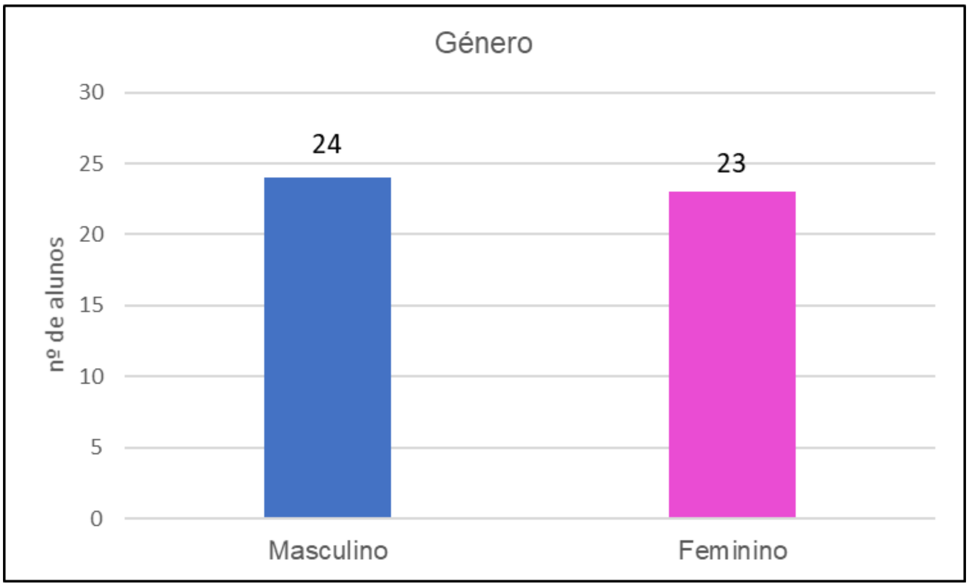


Gráfico 2 - Distribuição dos alunos por género

A Tabela 10 apresenta a distribuição dos alunos segundo o género em que se inserem; o Gráfico 2 demonstra o equilíbrio numérico entre os alunos do género masculino e os alunos do género feminino.

- **Dados relativos à idade dos alunos**

No Gráfico 3 pode observar-se a distribuição da idade dos alunos a 15 de setembro de 2020. Verifica-se que neste grupo de alunos doze têm 14 anos, trinta e quatro têm 15 anos e um tem 16 anos. A idade dos alunos em análise coincide com o expectável para os alunos que frequentam o décimo ano de escolaridade:14 (catorze) – 15 (quinze) anos.

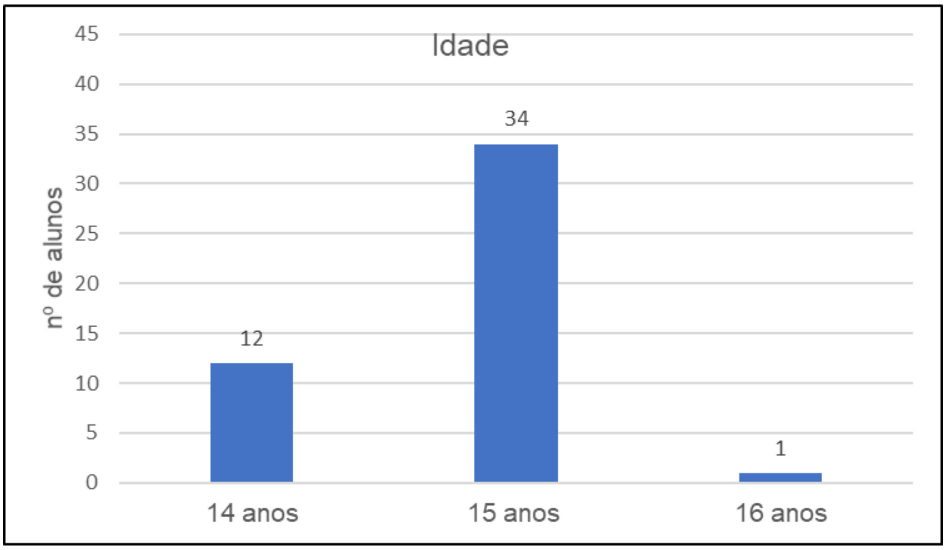


Gráfico 3 - Distribuição da idade dos alunos a 15 de setembro de 2020.

- **Dados relativos ao número de retenções no ensino básico**

O grupo de alunos objeto de estudo não apresenta retenções no seu percurso escolar, como se ilustra no Gráfico 4, e o único aluno com dezasseis anos foi matriculado neste ano de escolaridade ao ser-lhe atribuída a equivalência quando veio do estrangeiro e não por ter sido retido no seu percurso escolar.

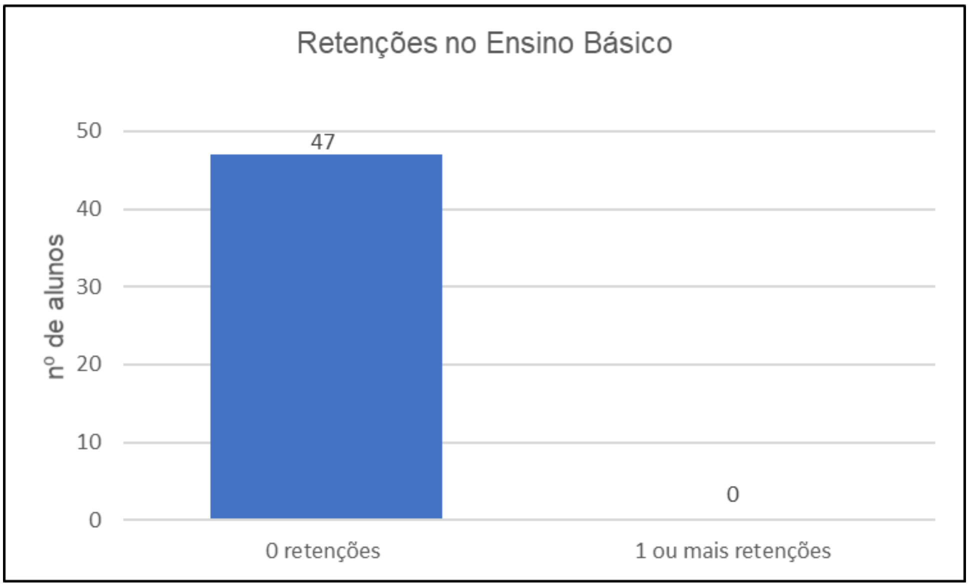


Gráfico 4 - Distribuição do número de retenções no ensino básico.

O Gráfico 4 demonstra que nos 47 (quarenta e sete alunos) alunos desta amostra, nenhum apresenta retenções no ensino básico.

- **Dados relativos às habilitações académicas dos encarregados de educação**

A análise das habilitações académicas dos encarregados de educação é efetuada com base na informação dos Gráfico 5 e Gráfico 6 que se apresentam de seguida.

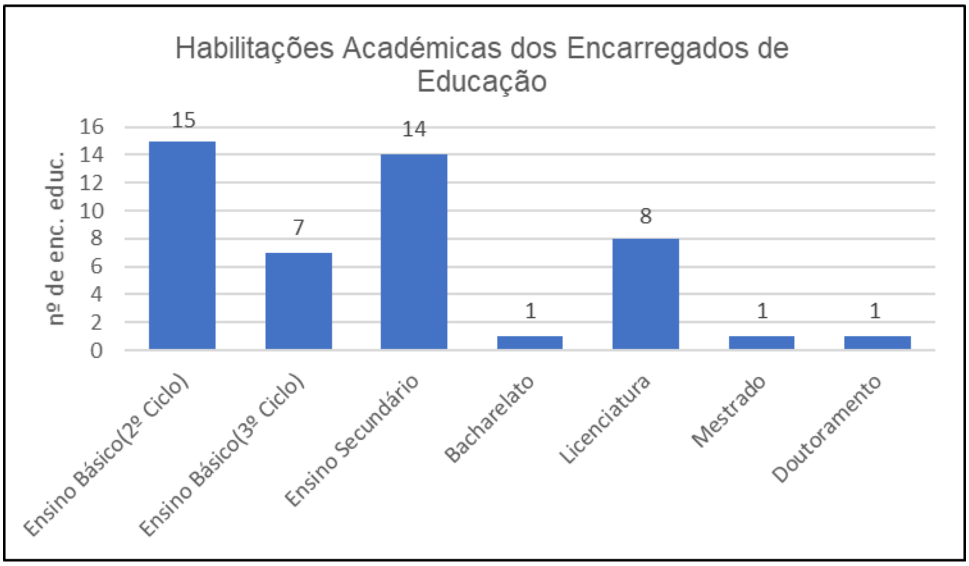


Gráfico 5 - Distribuição das habilitações académicas dos encarregados de educação.

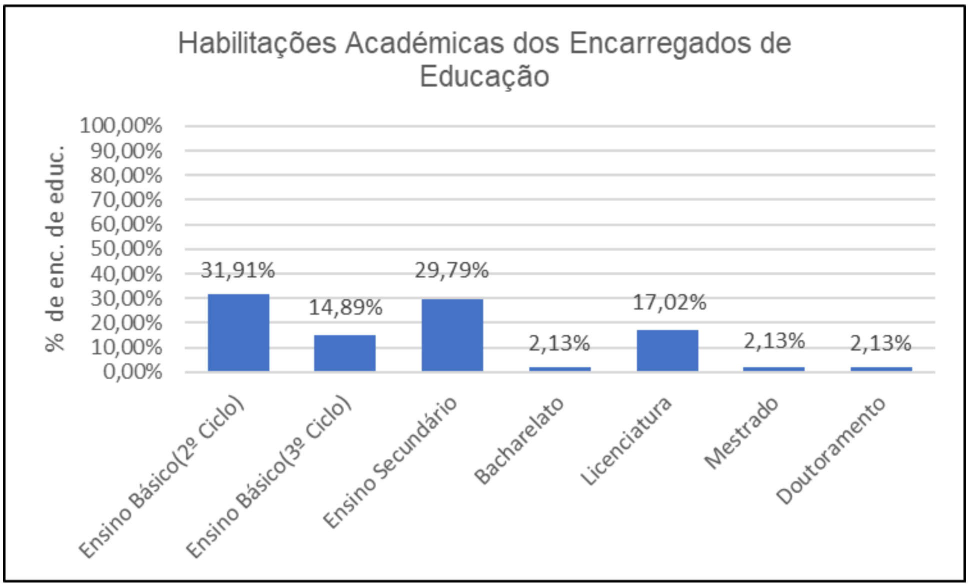


Gráfico 6 - Distribuição das habilitações académicas dos encarregados de educação em percentagem.

Nos Gráfico 5 e Gráfico 6 constata-se que existe um número elevado de encarregados de educação (quinze) com o 2º ciclo do ensino básico, o que corresponde a cerca de 31,91% e, se se considerar todo o ensino básico, 2º ciclo e 3º ciclo, temos vinte e dois encarregados de educação, o que corresponde a uma percentagem de 46,8%. Também pode observar-se que mais de 75% dos encarregados de educação (76,59%) não possuem mais que o ensino secundário. Temos apenas 23,40% de encarregados de educação com o ensino superior.

5. Sequência didática utilizada

Associar o ensino das funções reais de variável real às ferramentas digitais, confere aos conteúdos lecionados uma componente mais prática e mais atrativa, captando o interesse dos alunos para aulas mais dinâmicas, onde eles passam a ter um papel central na construção do seu próprio conhecimento. Cria-se, assim, um ambiente mais propício e facilitador das aprendizagens ativas e mais significativas. A Figura 89 ilustra as ferramentas digitais utilizadas.

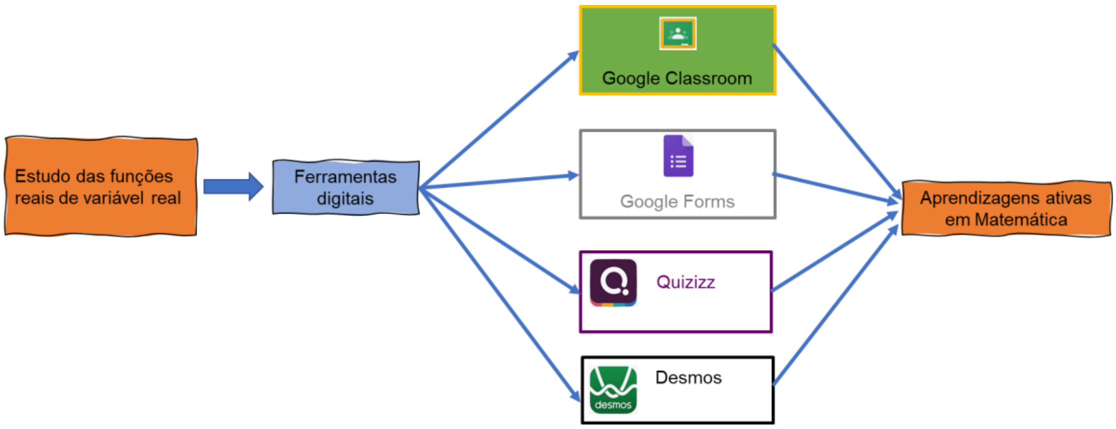


Figura 89 - Esquematização das ferramentas digitais utilizadas

Desta forma, os alunos participam na construção e análise das atividades tirando conclusões sobre as propriedades das funções e as suas caraterísticas conferindo-lhes um papel mais ativo.

Para o estudo da função quadrática construiu-se uma sequência de atividades didáticas com recurso à ferramenta *Desmos*, elaboraram-se dois questionários, um com recurso à ferramenta *Quizizz* e outro no *Google Forms*.

A sequência didática foi construída para a lecionação da função quadrática, contudo, na abordagem do tema das funções reais de variável real, utilizaram-se todos os conteúdos, conceitos e definições que constam do capítulo 3. Os exemplos utilizados disponibilizaram-se aos alunos como exercícios de aplicação, tendo-se elaborado uma ficha de trabalho com todos esses exercícios e respetiva resolução.

5.1. *Google Classroom*

Estas turmas tinham, no ano letivo anterior, um email para onde os professores enviavam os materiais. No entanto, muitas vezes havia dificuldades de vária índole, ou porque um aluno lera o email e o apagara, ou porque se encontrava nas mensagens já lidas e os outros alunos não se aperceberam do que lá foi colocado, ou porque os professores colocaram materiais quase em simultâneo criando alguma confusão para os alunos. Por isso, no início deste ano letivo, escolheu-se o *Google Classroom* para ferramenta de trabalho para a organização e comunicação dos materiais e dos trabalhos. Assim, no início do ano, criaram-se, no *Google Classroom*, duas turmas. Constatou-se as suas potencialidades, visto que resolvia estes constrangimentos, tendo um "espaço" dedicado, exclusivamente, à disciplina de Matemática A. Como todos os alunos têm um email institucional, foi fácil convidar os alunos para constituir as turmas no *Google Classroom*. Cada vez que são colocados materiais, os alunos recebem logo a notificação, por isso, sabem, sem dúvida, que há trabalho a realizar. Além disso, o professor tem a informação sobre a realização ou não dos trabalhos e da sua conclusão.

O Google *Classroom* é, de facto, uma ferramenta muito útil que melhora a comunicação com os alunos, permitindo colocar os materiais disponibilizados por tópicos, facultando uma melhor organização e sistematização. Além disso, esta ferramenta permite que todos os materiais colocados estejam disponíveis para todos, alunos e professores. Por exemplo, se um aluno tiver mais dificuldades nas funções, basta ir a esse tópico consultar os materiais disponíveis e fazer *download* para poder utilizar *offline*. Outra das funcionalidades é permitir corrigir os trabalhos, comentar a resolução e enviar o *feedback* aos alunos.

Na Figura 90 apresentam-se as turmas criadas.

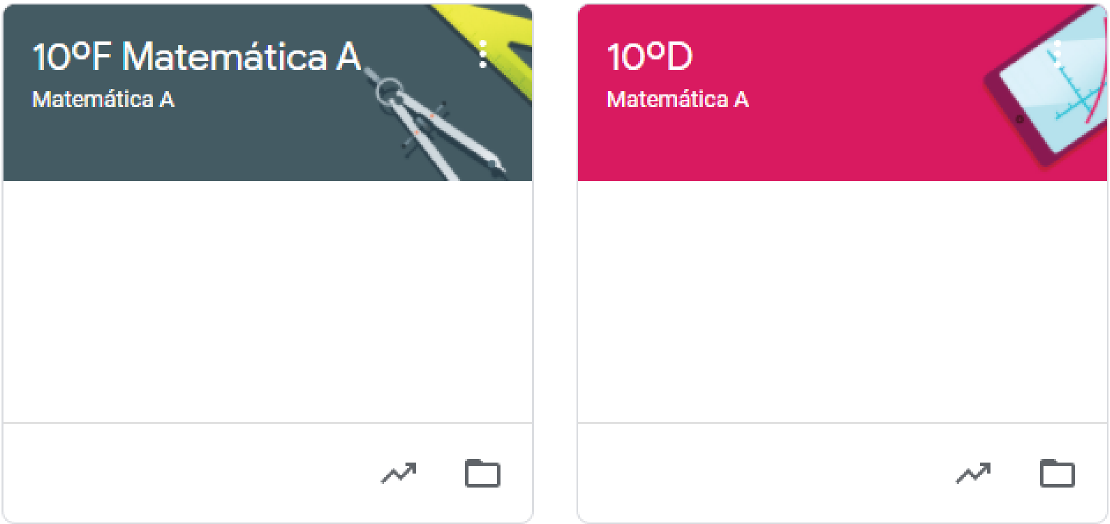


Figura 90 - Turmas criadas no Google Classroom

Depois de criadas as turmas no *Google Classroom*, facilmente se pode criar turmas noutras plataformas, como por exemplo, no *Desmos* e aí atribuir as atividades.

No mural foram criados os diferentes tópicos, um para cada tema a ser abordado no 10ºano, e na Figura 91 pode observar-se o tópico criado para o tema das Funções Reais de Variável.

Figura 91 – Tópico criado para as Funções Reais de Variável Real

Esta ferramenta foi muito importante para a interação com os alunos ao longo do ano, mas foi fundamental no ensino à distância, permitindo uma relação de maior proximidade entre os alunos e o professor. Os alunos sentiram-se acompanhados e apoiados aumentando a sua motivação para o estudo e para as aulas online.

5.2. *Desmos*

5.2.1. *Desmos* – Descrição da atividade

O estudo da função quadrática iniciou-se com um breve enquadramento, onde foi referida a sua utilização em diversas áreas com a apresentação de alguns exemplos. Fez-se uma abordagem da sua relação com a geometria, nomeadamente no estudo das cónicas, seguindo-se a sua definição. Ao nível do 10ºano o estudo desta função faz-se considerando as famílias de funções $f(x) = ax^2$, $f(x) = a(x-h)^2$, $f(x) = ax^2 + k$ e $f(x) = a(x-h)^2 + k$ com $a, h, k \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

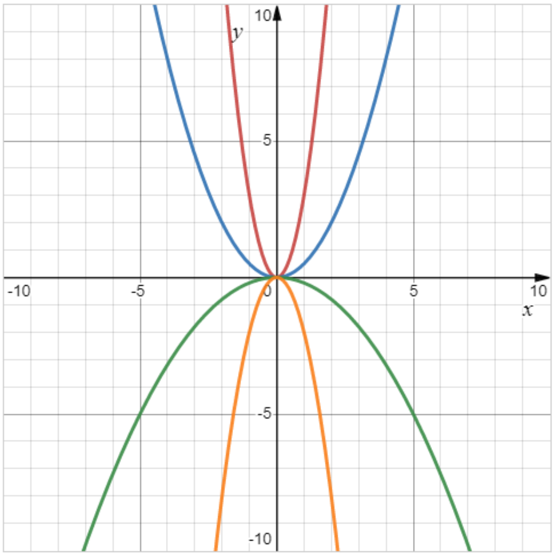
Assim, para o estudo da função quadrática, construíram-se dez atividades com o *Desmos* para se estudar cada uma destas famílias e para que os alunos, a partir dos gráficos, fossem capazes de compreender a relação entre elas, nomeadamente, as translações verticais e horizontais, e a partir daí estudar a abertura, o domínio, contradomínio, injetividade, paridade, zeros, monotonia, extremos, eixo de simetria e coordenadas do vértice da parábola representativa do gráfico da função. A realização destas atividades online foi sempre acompanhada com registos das mesmas em suporte de papel, com o preenchimento de uma ficha orientadora para que os alunos ficassem com todo o seu trabalho documentado e não apenas na plataforma. Essa ficha de registos irá em anexo. A visualização e partilha dessas atividades pode ser feita através do link:

https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/600af3f8d0ba130d4194fedc?lang=pt-BR

De seguida apresentam-se exemplos representativos das atividades desenvolvidas.

Na Figura 92 apresenta-se a primeira atividade realizada com os alunos. Com esta atividade pretende-se relacionar a abertura de uma parábola e o valor absoluto de $\boldsymbol{a}$. Na primeira tabela, o aluno escreve o valor absoluto de $\boldsymbol{a}$ para cada uma das funções dadas. Com esse valor, e observando cada uma das parábolas representadas no gráfico com diferentes cores, é possível estabelecer uma relação entre o valor absoluto de $\boldsymbol{a}$ e a abertura da parábola. Por fim, na segunda tabela, o aluno completa-a com uma frase de forma a obter uma proposição verdadeira que é a conclusão que se pretende obter com a realização desta atividade, neste caso "Quanto maior $|a|$ menor a abertura da parábola" ou "Quanto menor $|a|$ maior a abertura da parábola".

Relação entre o valor absoluto de a e a abertura da parábola



	função	|a|
vermelho	$f(x) = 3x^2$	
azul	$g(x) = 0.5x^2$	
verde	$h(x) = -0.2x^2$	
laranja	$i(x) = -2x^2$	

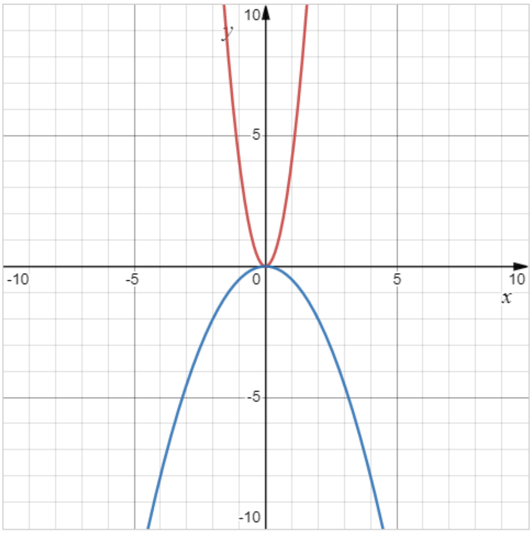
Conclusão:
preencha a 2ª e 4ª colunas com "maior" ou "menor"

Quanto		|a|		abertura da parábola

Figura 92 - Atividade para o estudo da abertura da parábola

Com a segunda atividade, Figura 93, inicia-se o estudo de algumas propriedades da função quadrática com vértice na origem do referencial e eixo de simetria a reta vertical de equação $x = 0$. Os alunos, por observação dos gráficos, preenchem as duas colunas, considerando as duas situações: a parábola com a concavidade voltada para cima e com a concavidade voltada para baixo.

Estudo das funções do tipo $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$



	funções
vermelho	$f(x) = 4x^2$
azul	$g(x) = -\frac{1}{2}x^2$

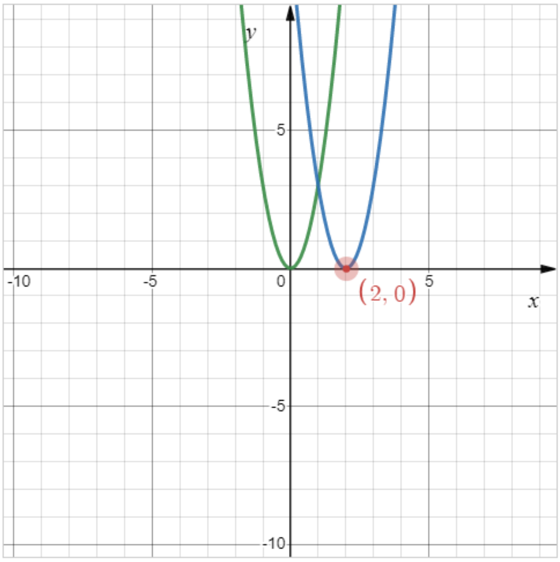
Conclusões

	a>0	a<0
Sentido da concavidade		
Domínio		
Contradomínio		
zeros		
Extremos		
Sinal		
Monotonia		
Vértice		
Paridade		
Eixo de simetria		

Figura 93 - Atividade para o estudo das funções do tipo $f(x) = ax^2$

A atividade da Figura 94 permite aos alunos representar a translação horizontal da parábola estudada na atividade anterior, deslocando o ponto assinalado a cor vermelha na horizontal e de acordo com os valores de h sugeridos na coluna da esquerda para posteriormente escreverem a expressão analítica de cada uma das funções e as coordenadas do vetor associado a cada translação. Como conclusão pretende-se que os alunos compreendam que o gráfico das funções do tipo $f(x) = a(x-h)^2$, $a \neq 0$ e $h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, obtém-se a partir do gráfico das funções do tipo $f(x) = ax^2, a \neq 0$ através de uma translação horizontal associada ao vetor de coordenadas $\vec{u}(h, 0)$.

Funções do tipo $f(x) = a(x-h)^2$, $a \neq 0$ e $h \in IR$



A função representada a cor verde é $y = 3x^2$

Valores de h	f(x)=3(x-h)^2	vetor associado à translação horizontal
-4		
-1		
2		
3		

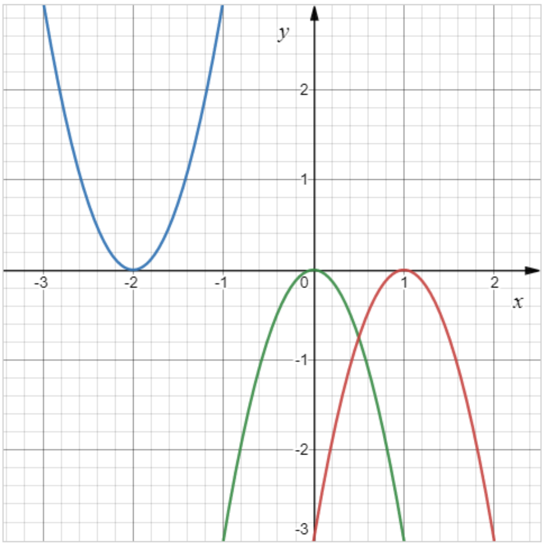
Conclusão

Compartilhar com turma

Figura 94 - Translação horizontal de uma parábola

Na atividade da Figura 95 pretende-se que os alunos, compreendendo a translação horizontal realizada na atividade anterior e as propriedades das funções do tipo $f(x) = ax^2, a \neq 0$, sejam capazes de estudar algumas das propriedades destas funções preenchendo as duas colunas da segunda tabela.

Estudo das funções do tipo $f(x) = a(x-h)^2$, $a \neq 0$ e $h \in IR$



	funções
verde	$f(x) = -3x^2$
vermelho	$g(x) = -3(x-1)^2$
azul	$h(x) = 3(x+2)^2$

Conclusões

	a>0	a<0
Sentido da concavidade		
Domínio		
Contradomínio		
zeros		
Extremos		
Sinal		
Monotonia		
Vértice		
Paridade		
Eixo de simetria		

Figura 95 - Atividade para o estudo das funções do tipo $f(x) = a(x-h)^2$

De forma análoga à atividade da Figura 94, na Figura 96 apresenta-se a translação vertical. Deslocando o ponto assinalado a cor vermelha na vertical, e de acordo com os valores de k sugeridos na coluna da esquerda, é possível a visualização das diferentes parábolas e assim fazer o preenchimento das duas colunas relacionando o gráfico destas funções com o gráfico das funções do tipo $f(x) = ax^2, a \neq 0$.

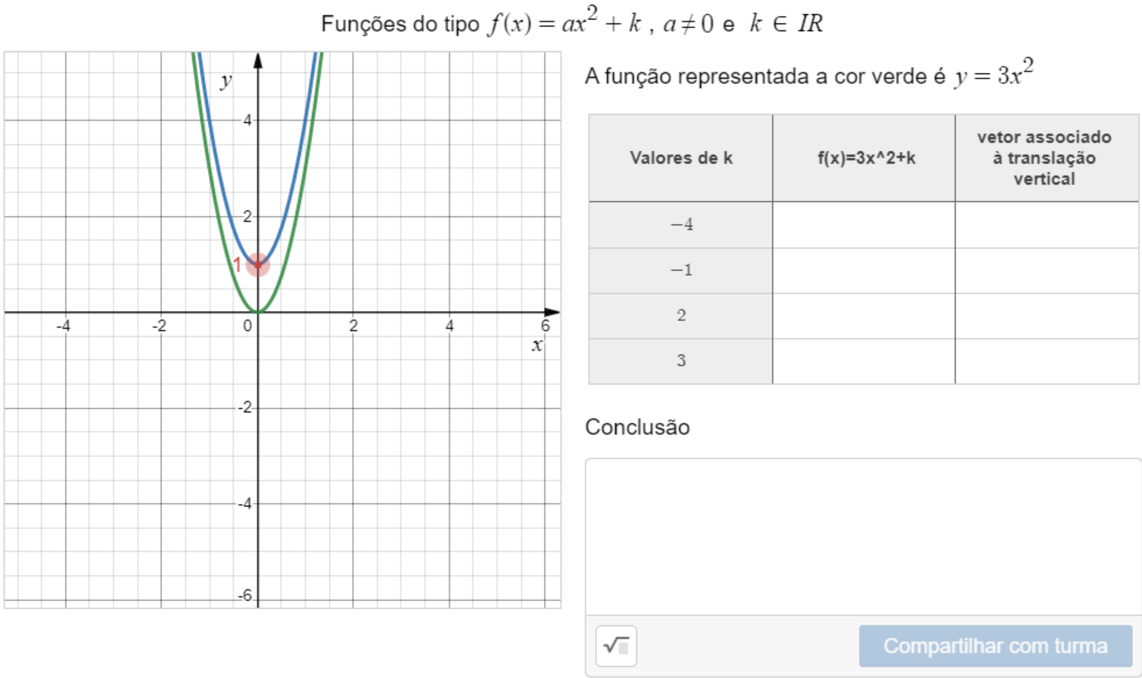
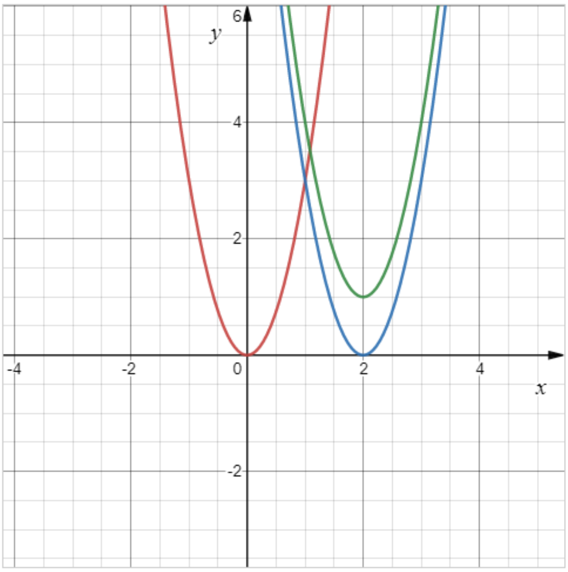


Figura 96 - Atividade para o estudo das funções do tipo $f(x) = ax^2 + k$

Estudadas as translações horizontais e verticais da parábola nas atividades anteriores, na atividade da Figura 97 faz-se o estudo das propriedades das funções do tipo $f(x) = a(x - h)^2 + k, a, h\ e\ k \in \mathbb{R}\ e\ a \neq 0$ tendo em conta que a parábola representativa destas funções é uma translação da parábola de equação $y = ax^2$ associada ao vetor $\vec{u}(h, k)$ e que os zeros, os extremos e o vértice deste tipo de funções obtêm-se a partir dos das funções do tipo $y = ax^2$ através dessa translação.

Estudo das funções do tipo $f(x) = a(x-h)^2 + k$, $a \neq 0$ e $k,h \in IR$



	funções
vermelho	$f(x) = 3x^2$
azul	$f_1(x) = 3(x-2)^2$
verde	$f_2(x) = 3(x-2)^2 + 1$

Conclusões

	a>0	a<0
Sentido da concavidade		
Domínio		
Contradomínio		
Zeros		
Sinal		
Monotonia		
Vértice		
Paridade		
Eixo de simetria		

Figura 97 - Atividade para o estudo das funções do tipo $f(x) = a(x-h)^2 + k$

Estas atividades foram atribuídas às turmas criadas no *Desmos*, 10ºD e 10ºF, e realizadas ainda na modalidade de ensino à distância, pelo que a utilização desta ferramenta foi fundamental, uma vez que está muito para além qualquer simulador de uma calculadora gráfica como já foi referido na secção 2.3.4.

Ao iniciar as atividades, através do painel de controle, optou-se por impor o ritmo para estudar função a função com todos os alunos em simultâneo e só se avançava para a atividade seguinte quando todos terminassem a anterior. A resolução foi acompanhada com a explicitação de dúvidas que iam surgindo para que todos acompanhassem. Fez-se também a monotorização das resoluções de cada aluno para detetar dificuldades ou esclarecer alguns conceitos necessários.

Para complementar e consolidar as aprendizagens relativas aos conceitos presentes no estudo da função quadrática, elaboraram-se treze propostas de atividades/exercícios com o objetivo de se apresentarem situações para que os conteúdos estudados fossem aplicados e que conduzissem os alunos a observar e a definir uma estratégia conducente à resolução dos problemas. Disponibiliza-se aqui o link de acesso a esses exercícios para uma melhor visualização:

https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/601030addfe7aa0cd178f65a?lang=pt-BR .

Todos os exercícios davam *feedback* ao aluno, permitindo a sua autocorreção. Se a resposta estivesse errada, o aluno teria que refletir sobre a sua resolução, analisá-la e, por si próprio, delinear uma estratégia conducente à resposta correta. Este *feedback* imediato é muito importante porque também confere aos exercícios uma forma lúdica e leva a que os alunos reflitam sobre a sua resolução tendo um papel potenciador das aprendizagens.

Na sequência dos exercícios teve-se em consideração o aumento do grau de dificuldade permitindo assim que os alunos ficassem mais motivados à medida que concretizavam cada uma das atividades.

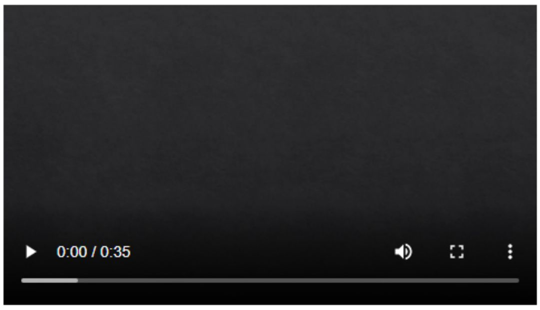
Na realização destes exercícios, deu-se a possibilidade a cada aluno de seguir o seu ritmo e utilizou-se o painel de controle para verificar se os alunos resolviam corretamente, se estavam com dificuldades na utilização da ferramenta ou se necessitavam de ajuda nos conceitos. Também se utilizou para verificar se todos cumpriam as atividades.

Apresentam-se a seguir alguns exemplos representativos dos exercícios criados de aplicação dos conteúdos utilizando o *Desmos*.

Na Figura 98 apresenta-se o exercício com o qual se pretende que os alunos identifiquem as coordenadas do vértice da parábola representativa da função quadrática quando está escrita na forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$, $a, h, k \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, após visualizarem um vídeo explicativo. Nesta figura pode ainda observar-se o *feedback* que é dado aos alunos na tabela para a resolução.

Exercício 1

Visualize o vídeo e preencha a tabela

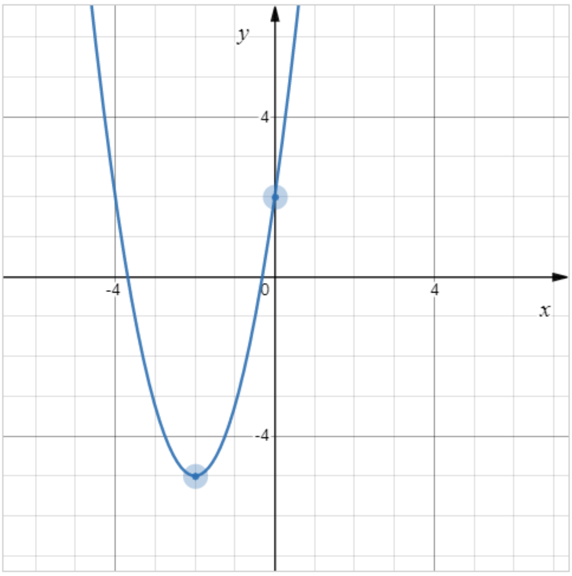


Função	vértice
$f_1(x) = -(x-2)^2$	$-(2{,}0)$ ✗
$f_2(x) = -4x^2 - 3$	$(0,-3)$ ✓
$f_3(x) = -x^2$	
$f_4(x) = -(x+1)^2$	
$f_5(x) = 5(x-2)^2 + 7$	
$f_6(x) = -\sqrt{3}\,(x+6)^2 - \sqrt{2}$	
$f_7(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}$	

Figura 98 - Exercício 1 com vídeo

No exercício da Figura 99 pretende-se que os alunos sejam capazes de representar graficamente uma parábola conhecidas as coordenadas do seu vértice, determinando as coordenadas de outro dos seus pontos e identificando o sentido da concavidade. O aluno teria que mover os dois pontos assinalados de forma a obter a representação correta e, no final, fazer a verificação da resposta.

Exercício 2



Utilizando os pontos assinalados desenhe a parábola representativa da função $f(x) = -2(x-3)^2 + 4$

Verificar

Figura 99 - Exercício 2

Na Figura 100 pode observar-se a resolução do exercício da Figura 99 com o *feedback* que é dado aos alunos.

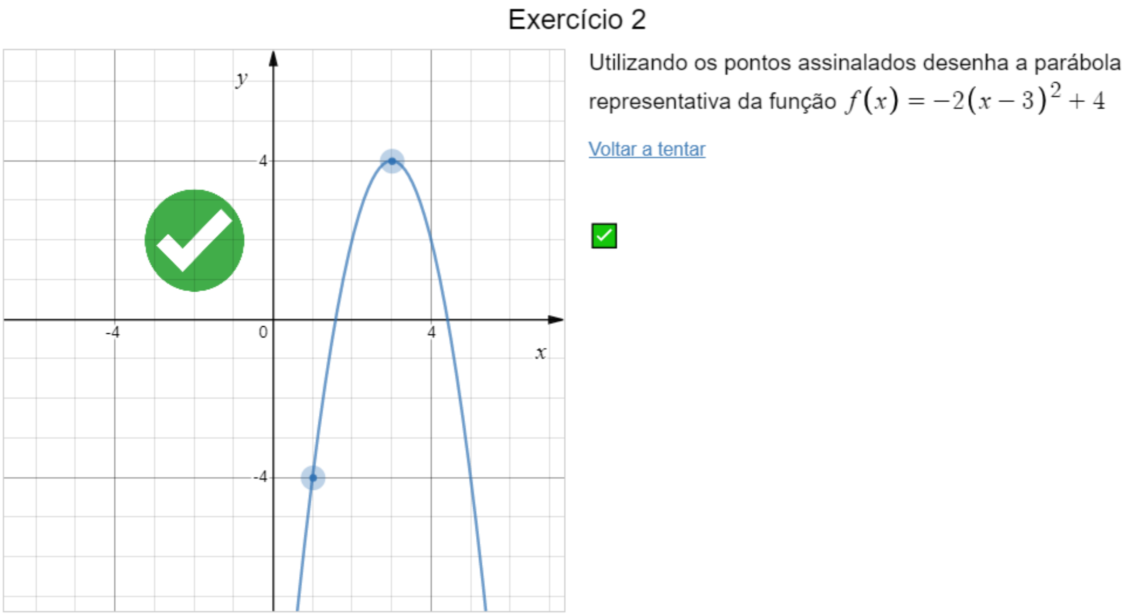


Figura 100 - Exercício2 com o feedback ao aluno

No exercício da Figura 101 os alunos devem identificar as coordenadas do vértice e representar graficamente a função f como translação da função $y = 3x^2$ associada ao vetor $\vec{u}(h,k)$. Os alunos deslocam o ponto assinalado (vértice) de forma a que o gráfico represente corretamente a função $f(x) = 3(x+2)^2 - 4$ e, no final, fazem a verificação da resposta.

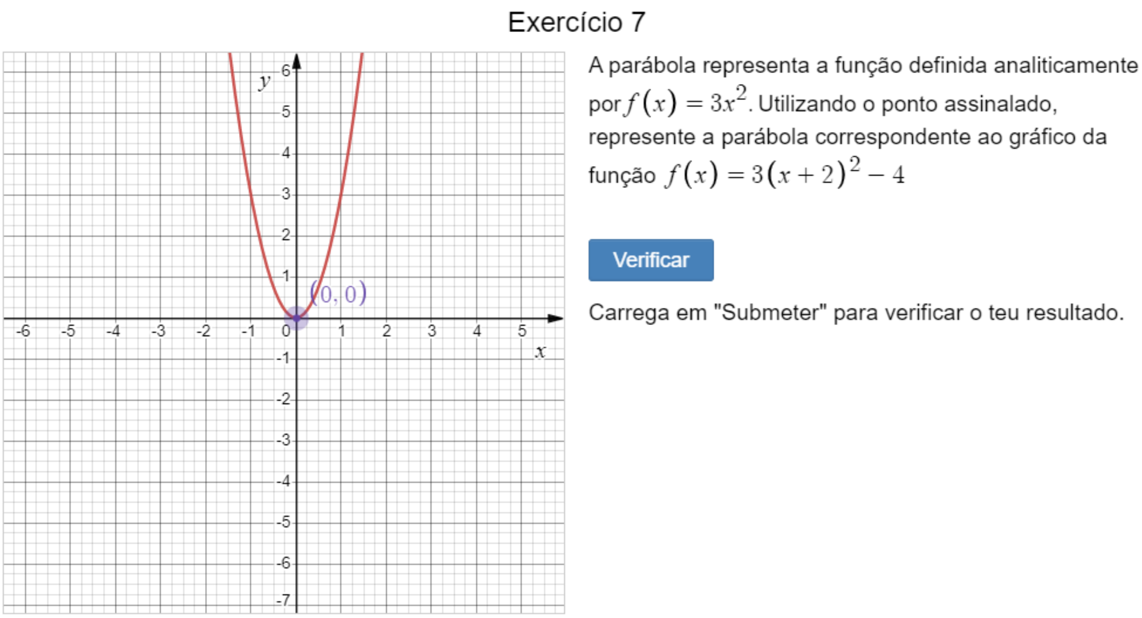


Figura 101 - Exercício 7

Com o exercício da Figura 102 pretende-se que os alunos sejam capazes de identificar as coordenadas do vértice da forma $(h, 0)$ ou $(0, k)$ de cada uma das parábolas e, a partir da representação gráfica a cor vermelha da função $f(x) = x^2$, escrever a expressão analítica de cada uma das funções representadas pelas diferentes cores.

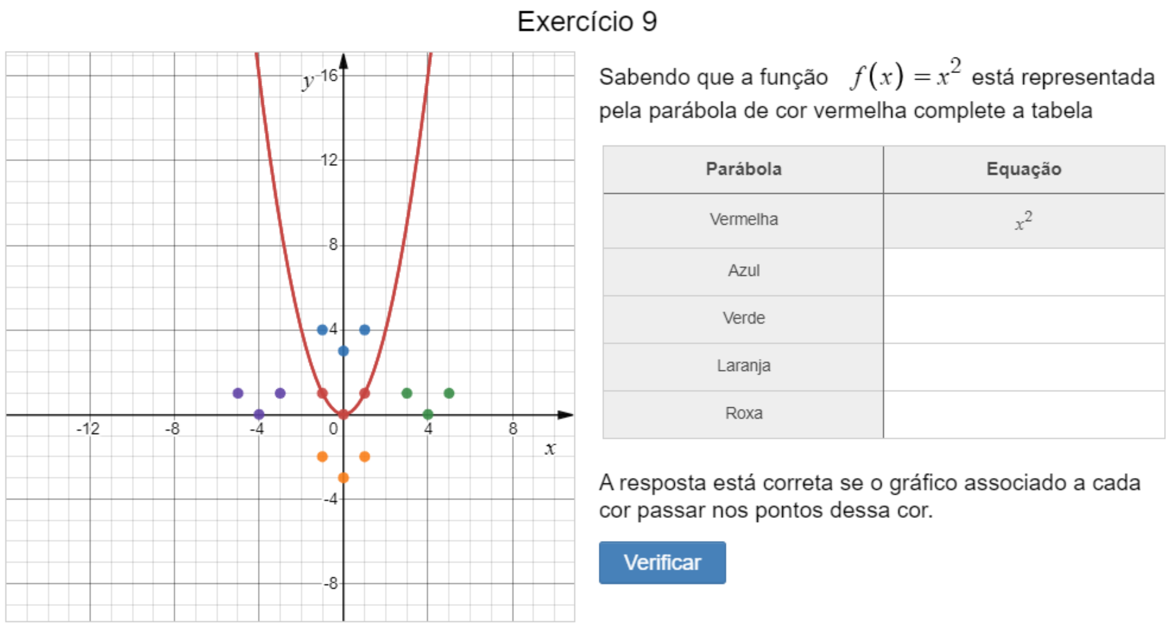
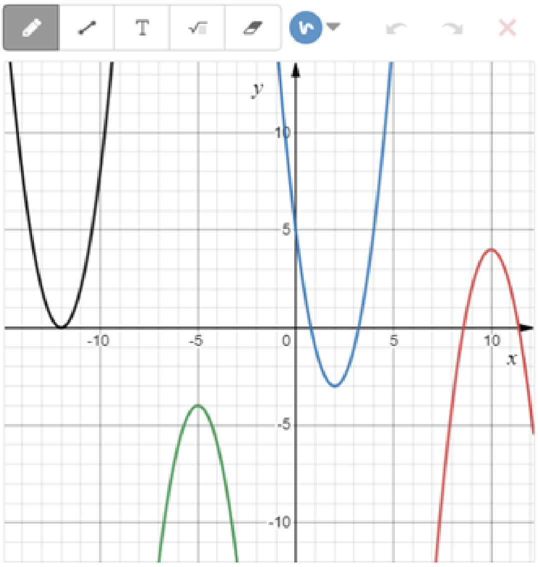


Figura 102 - Exercício 9

No estudo da função quadrática é importante que os alunos sejam capazes de, sabendo o valor de a, escrever a expressão analítica de uma função. Para isso é necessário identificar as coordenadas do vértice da parábola representativa dessa função que são da forma (h, k), o que se aplica no exercício da Figura 103.

Exercício 10



No referencial estão representadas quatro parábolas todas com a mesma abertura que representam quatro funções quadráticas. Todos os gráficos representados são translações do gráfico da função definida por $f(x) = 2x^2$.

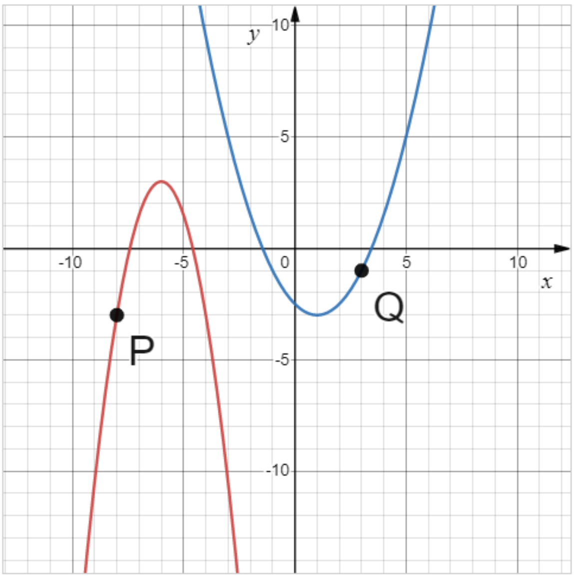
Complete a tabela seguinte:

cor	função	expressão analítica
preta	f_1	
azul	f_2	
vermelha	f_3	
verde	f_4	

Figura 103 - Exercício 10

No exercício da Figura 104, os alunos para além de identificarem as coordenadas do vértice, têm que determinar, analiticamente, o valor de a para escreverem a expressão analítica de cada uma das funções representadas.

Exercício 12



No referencial encontram-se representadas as funções quadráticas f e g. A parábola a cor azul representa a função f e a de cor vermelha a função g. O ponto Q pertence ao gráfico da função f e o ponto P ao gráfico da função g. Complete a tabela:

Função	Expressão analítica da função
f	
g	

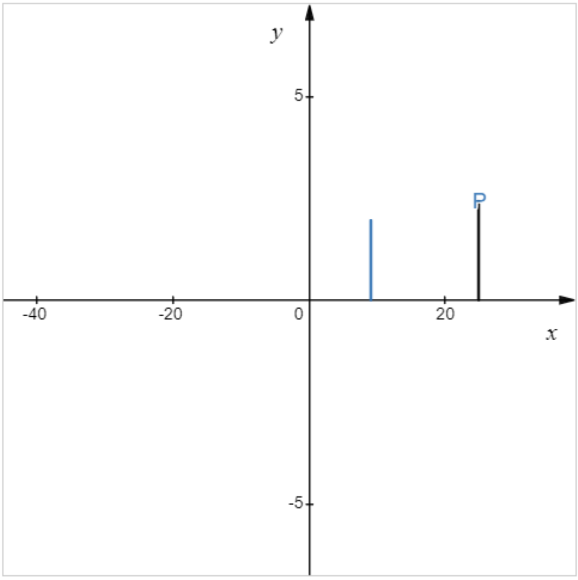
Explique a sua resposta

Enviar

Figura 104 - Exercício 12

O último exercício da sequência, apresentado na Figura 105, tem como objetivo a análise e a reflexão sobre os diferentes valores a atribuir ao parâmetro B de modo a representar uma parábola que obedeça às restrições apresentadas. Para cada valor atribuído, uma bola é lançada e o aluno, observando a sua trajetória, vai analisando esse valor até conseguir concretizar o golo.

Exercício 13



Num jogo de futebol, vai ser marcado um livre, a 25 metros da baliza. A barreira está à distância regulamentar de 9,15 metros da bola. O plano da trajetória da bola é perpendicular à linha de golo. A bola pode não passar a barreira ou pode passar por cima dela. Se passar por cima da barreira, a bola segue na direção da baliza, fora do alcance do guarda-redes. Admita que só pode acontecer uma das quatro situações seguintes:

- a bola não passa a barreira;
- a bola sai por cima da barra da baliza;
- a bola bate na barra da baliza;
- a bola entra na baliza.

Na barreira, o jogador mais alto tem 1,95 metros de altura.
A barra da baliza está a 2,44 metros do chão.
Admita que, depois de rematada, a bola descreve um arco, de tal modo que a sua altura, relativamente ao solo, medida em metros, é dada por ,
$f(x) = 0{,}32x - Bx^2$, sendo x a distância, em metros, da projeção da bola no solo ao local onde ela é rematada .
Qual o valor do parâmetro B para que seja golo?
Justifique a sua resposta.

Enviar

Figura 105 - Exercício 13

Na Figura 106 pode observar-se a resolução do exercício da Figura 105.

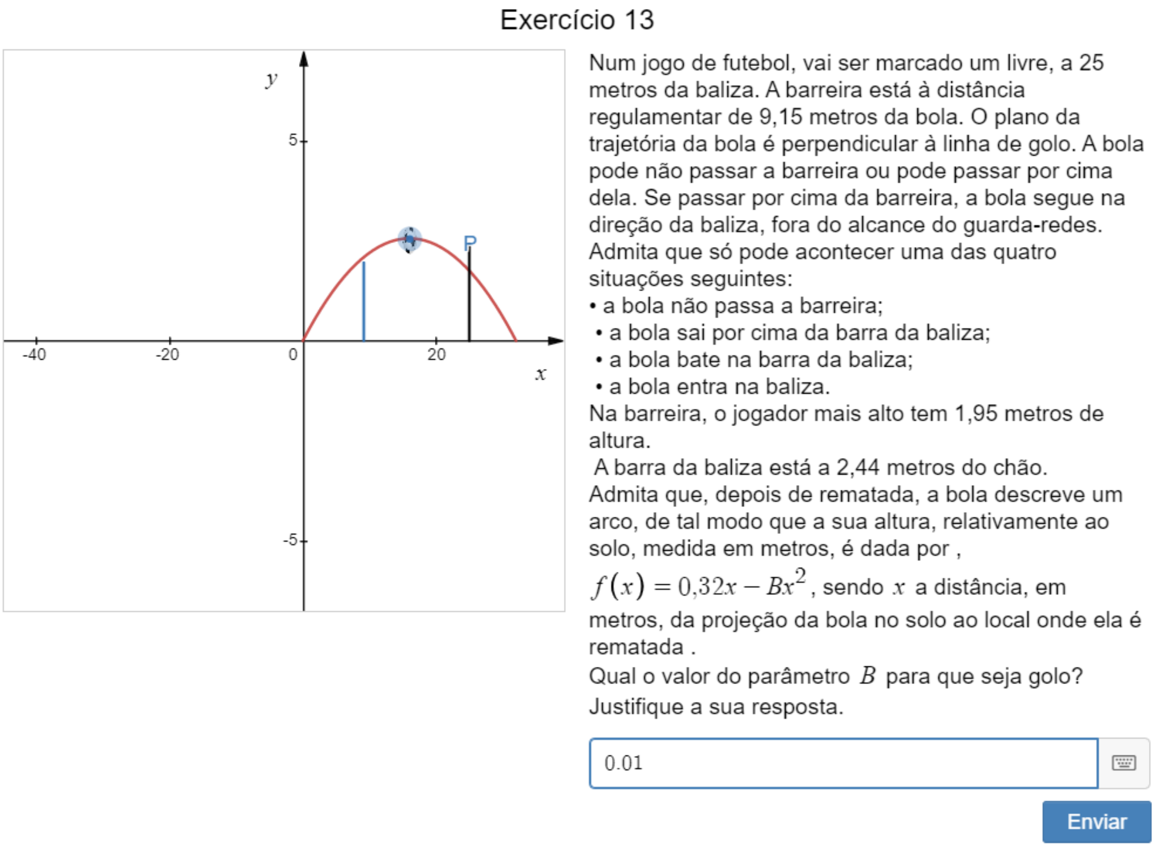


Figura 106 - Exercício 13 resolvido

Estes exercícios permitiram que os alunos aplicassem e praticassem os conceitos lecionados com o acompanhamento simultâneo do professor e, apesar de a realização destas atividades ter sido o primeiro contacto que tiveram com a ferramenta *Desmos*, eles aderiram com entusiasmo.

5.2.2. *Desmos* – Avaliação e análise dos resultados da atividade

A utilização desta ferramenta foi determinante para o ensino e aprendizagem da função quadrática uma vez que a sua lecionação ocorreu no ensino à distância e os alunos não tinham ainda a calculadora gráfica nem qualquer simulador nos seus computadores.

Para uma melhor perceção da utilização desta ferramenta, fez-se um questionário aos alunos utilizando o *Google Forms*, com cinco questões para recolher as suas opiniões.

Em relação à questão número 1 da Figura 107, a grande maioria dos alunos, 95,4%, considerou a utilização da ferramenta *Desmos* fácil ou muito fácil e apenas 4,7% considerou ter sido difícil. Este facto prende-se com as dificuldades que estes alunos apresentavam relativamente à utilização do computador.

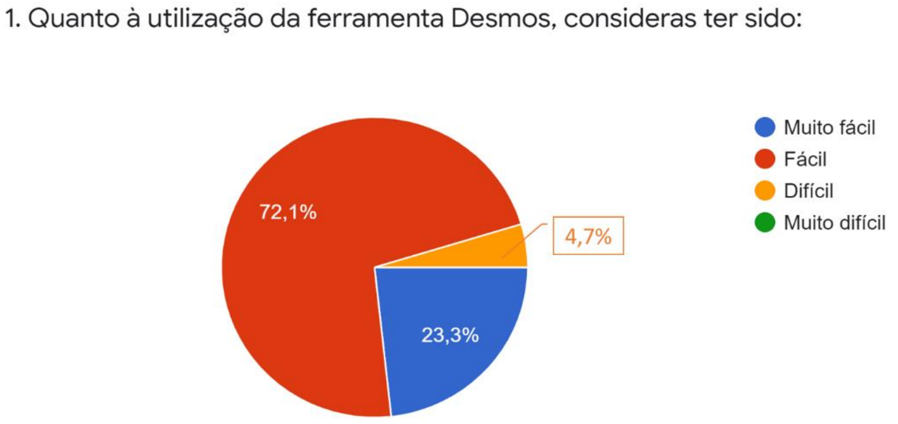


Figura 107 - Questão número 1 do questionário sobre a utilização da ferramenta Desmos

Em relação à questão número 2 da Figura 108, que diz respeito às vantagens na utilização desta ferramenta, 76,7% dos alunos destacaram o facto de ser facilitadora da aprendizagem no estudo das funções, seguindo-se 74,4% que consideraram o ambiente dinâmico e atrativo bem como o *feedback* dado nas respostas dos exercícios. A interatividade foi referida por 58,1% dos alunos e o ser motivadora por 44,2%. Pode concluir-se que a esmagadora maioria dos alunos vê grandes vantagens na sua utilização.

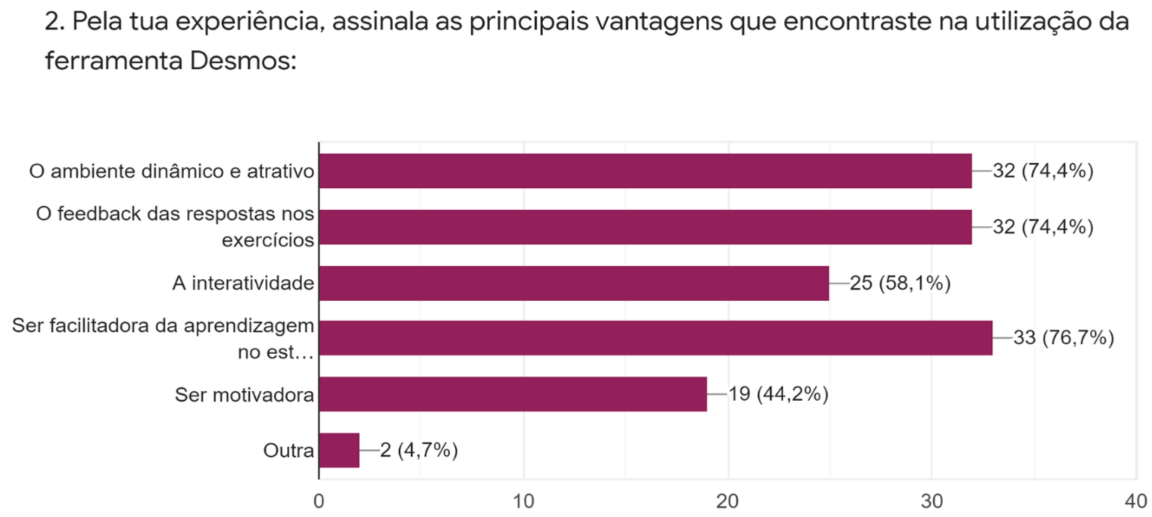


Figura 108 - Questão número 2 do questionário sobre a utilização da ferramenta Desmos

Em relação à questão número 3 da Figura 109, e relativamente à afirmação «A ferramenta *Desmos* facilitou a aprendizagem da função quadrática.» 90,7% referiu que concordava ou concordava totolmente e apenas 2,3% referiu que discordava. Assim, pode dizer-se que a utilização desta ferramente é facilitadora da aprendizagem desta função.

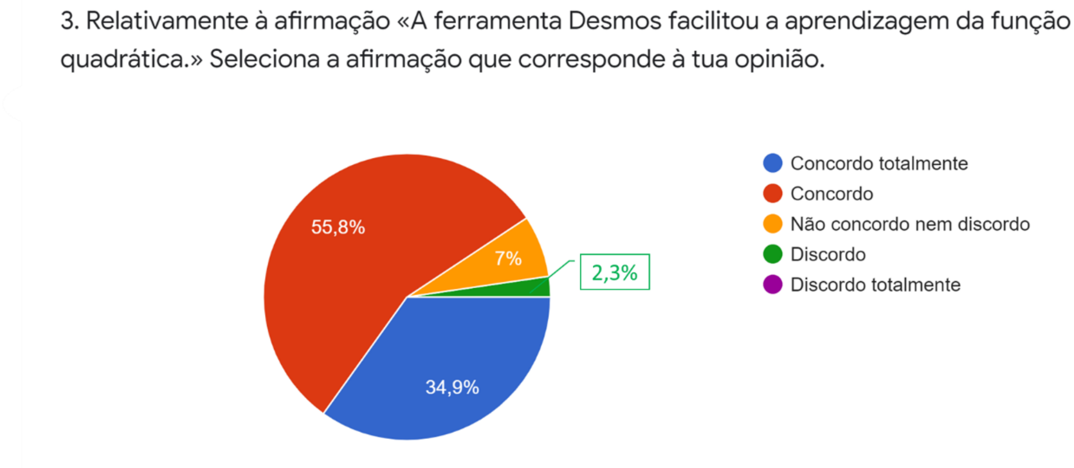


Figura 109 - Questão número 3 do questionário sobre a utilização da ferramenta Desmos

Em relação à questão número 4 da Figura 110, verifica-se que 74,4% dos alunos referiu que o uso desta ferramenta lhes aumentou o entusiasmo com o uso das tecnologias, o que evidencia grande aptência pelo recurso a novas ferramentas de aprendizagem na Matemática. Por outro lado, a percentagem de 74,4% de respostas em "conheceram uma forma diferente/interessante de aprender Matemática" evidencia a curiosidade dos alunos em aprender através de ferramentas diversificadas. No entanto, não devemos desconsiderar que as outras quatro opiniões (ultrapassar dificuldades, aumentar a autonomia, aumentar a interação com o professor e conferir um papel mais ativo ao aluno) se situam entre os 37,2% e os 41,9%, pois também são consideradas importantes pelos alunos para o sucesso das suas aprendizagens.

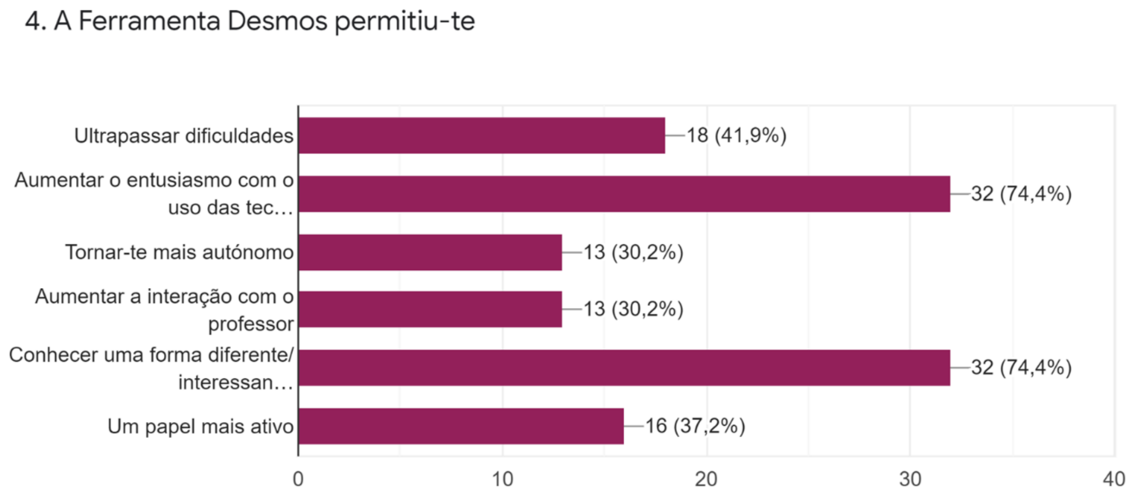


Figura 110 - Questão número 4 do questionário sobre a utilização da ferramenta Desmos

Na questão número 5 da Figura 111, que diz respeito à avaliação da eficácia da utilização desta ferramenta nas atividades desenvolvidas, a grande maioria, 81,4%, considerou ter sido excelente ou muito bom, 16,3% considerou que foi bom e apenas 4,7% considerou suficiente. De destacar que nenhum aluno a considerou insuficiente. O que exprime o agrado dos alunos pela utilização desta ferramenta e que esta teve um impacto muito positivo na aprendizagem da função quadrática.

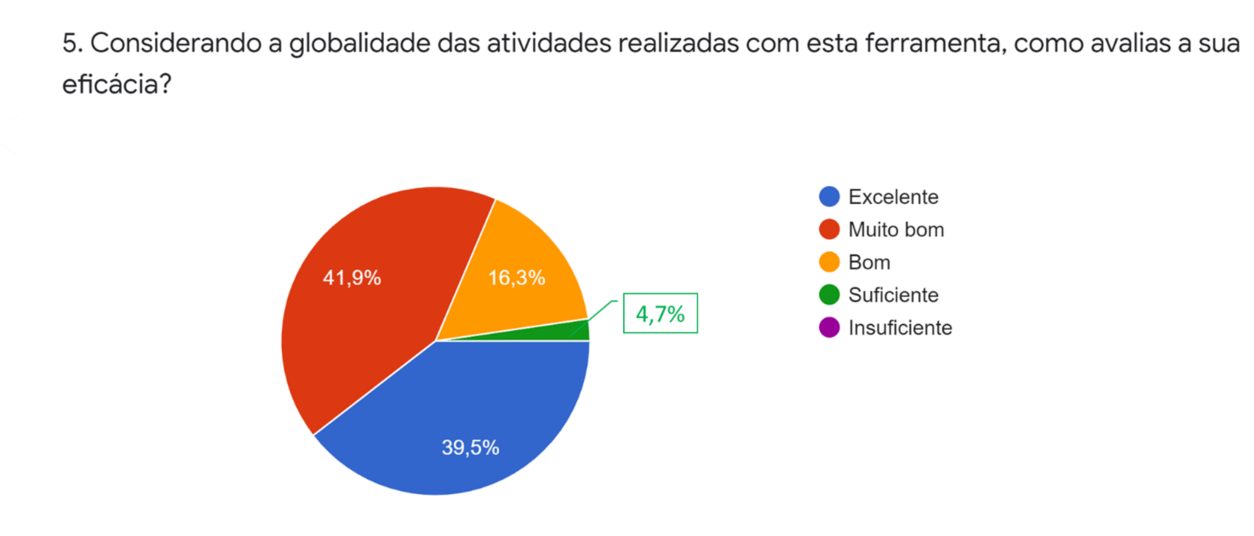


Figura 111 - Questão número 5 do questionário sobre a utilização da ferramenta Desmos

5.3. *Google Forms*

Nesta secção faz-se a apresentação das atividades realizadas com recurso ao questionário do *Google Forms* para avaliar os conteúdos lecionados com as atividades do *Desmos*.

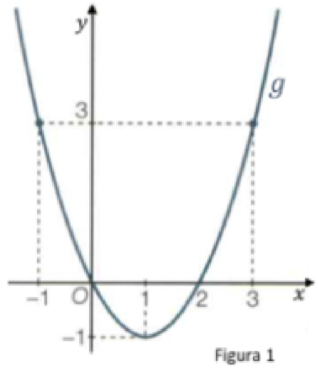
5.3.1. *Google Forms* – Descrição da atividade

Com esta ferramenta elaborou-se um questionário com questões de várias tipologias para avaliar as aprendizagens adquiridas sobre a função quadrática, algumas das suas propriedades mais importantes e o cálculo analítico.

Na questão da Figura 112 pretendia-se que o aluno, para além de ser capaz de escrever a expressão analítica da função quadrática na forma $f(x) = a(x-h)^2 + k, a, h, k \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, fosse capaz de desenvolver o quadrado do binómio e obter a função na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

1.

Considere a função real de variável real g, representada graficamente, no referencial xoy, que se encontra na figura 1.



1.1.

Mostre que a função g pode ser definida analiticamente por $g(x) = x^2 - 2x$.

Adicionar ficheiro

Figura 112 - Questão número 1.1 do questionário do Google Forms

Na questão da Figura 113 pretendia-se que fossem aplicados os conceitos de função par, função injetiva, função inversa, restrição de uma função a um intervalo, eixo de simetria e a relação entre o número de zeros de uma função quadrática e o sinal do binómio discriminante.

1.2. Por observação do gráfico da função g pode afirmar-se que:

- [ ] O eixo de simetria da parábola é a reta de equação x=1
- [ ] A função g é par
- [ ] A função g admite inversa na restrição ao intervalo [-1, 0]
- [ ] A função g é injetiva
- [ ] $\Delta > 0$

Figura 113 - Questão número 1.2 do questionário do Google Forms

Com a questão da Figura 114 pretendia-se que o aluno identificasse o máximo da função quadrática como sendo a ordenada do vértice da parábola representativa da função.

2. Determine o máximo da função real de variável real f definida analiticamente por:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$$

Adicionar ficheiro

Figura 114 - Questão número 2 do questionário do Google Forms

Na questão da Figura 115 pretendia-se que o aluno identificasse o sentido da concavidade da parábola representativa da função quadrática e concluisse que o seu contradomínio é um intervalo da forma $]-\infty, k]$, sendo k a ordenada do vértice.

3.

Seja f uma família de funções, reais de variável real, definida analiticamente por $f(x) = -2x^2 + 4x - m,\ m \in \mathbb{R}$. O valor de m para o qual o contradomínio da função é o intervalo $]-\infty, 5]$ é.

- 3
- 2
- 5
- _ 3

Figura 115 - Questão número 3 do questionário do Google Forms

Na questão da Figura 116 pretendia-se que o aluno, além de identificar o sentido da concavidade da parábola representativa da função, determinasse os seus zeros.

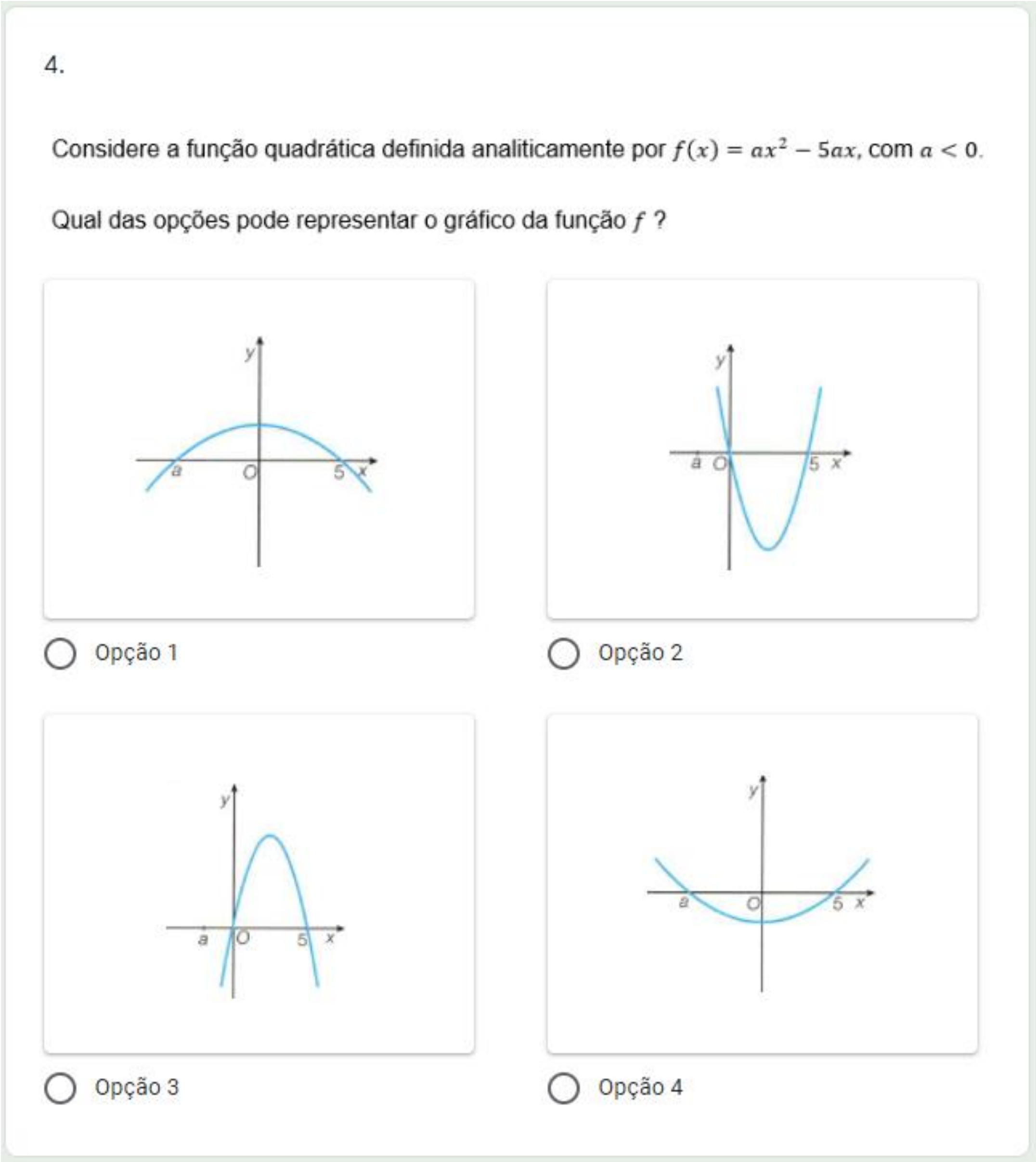


Figura 116 - Questão número 4 do questionário do Google Forms

5.3.2. *Google Forms* - Avaliação e análise dos resultados da atividade

Nas questões 1.1 e 2. os alunos não apresentaram dificuldades em escrever a expressão analítica da função, na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ conhecidas as coordenadas do seu vértice e de um dos seus pontos, nem a determinar as coordenadas do vértice e indicar o máximo, tendo ocorrido apenas algumas falhas ocasionais no cálculo aritmético, como erro ocasional de sinais.

No Gráfico 7 relativo à questão 1.2. pode verificar-se que apenas um aluno não respondeu acertadamente à primeira e quinta afirmações e apresentaram algumas dificuldades em identificar a terceira afirmação uma vez que esta envolve três conceitos: conceito de restrição de uma função a um intervalo, função injetiva e inversa.

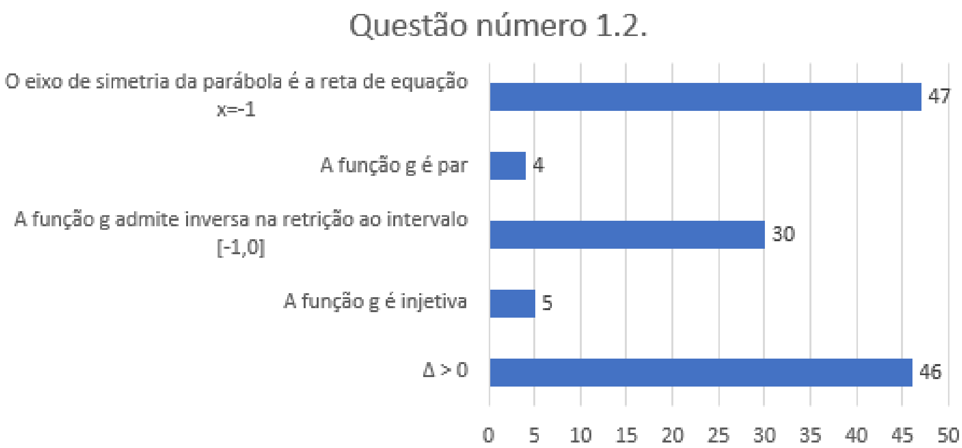


Gráfico 7 - Questão número 1.2. do questionário do Google Forms

Na questão número 3, e pela leitura do Gráfico 8, 68,2% dos alunos indicou a opção correta, contudo, como se trata de uma questão de escolha múltipla qualquer erro de sinais ou cálculo condiciona a escolha.

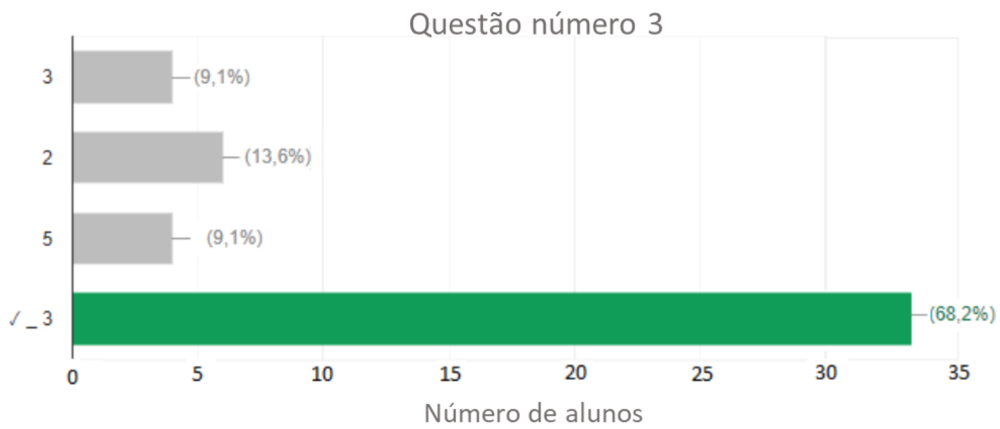


Gráfico 8 – Questão número 3 do questionário do Google Forms

Na Figura 117 apresenta-se um exemplo de resolução da questão número 3 de um aluno, que ao errar o sinal da abcissa do vértice, não respondeu corretamente. Estas situações são também importantes para se compreender que, a resposta errada à questão não se ficou a dever à compreensão dos conceitos.

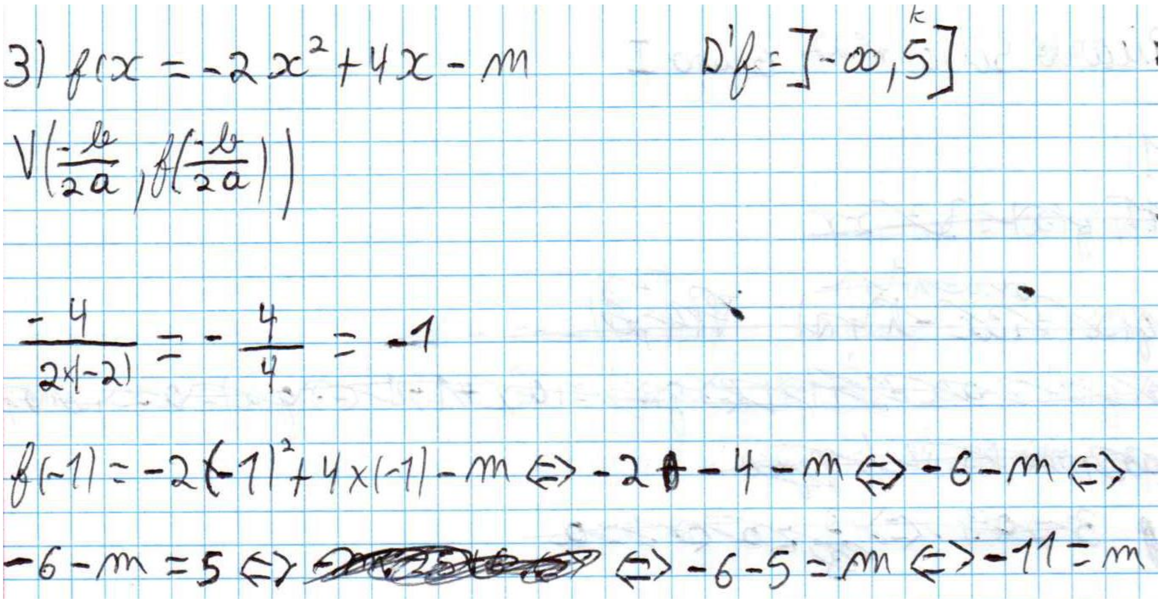


Figura 117 – Resolução de um aluno da questão número 3

Pela observação do Gráfico 9 verifica-se que 69,6% dos alunos respondeu corretamente a esta questão, contudo, tal como na questão 3, alguns alunos cometeram erros nas regras operatórias, neste caso na resolução de uma equação do primeiro grau, o que os conduziu a uma resposta errada.

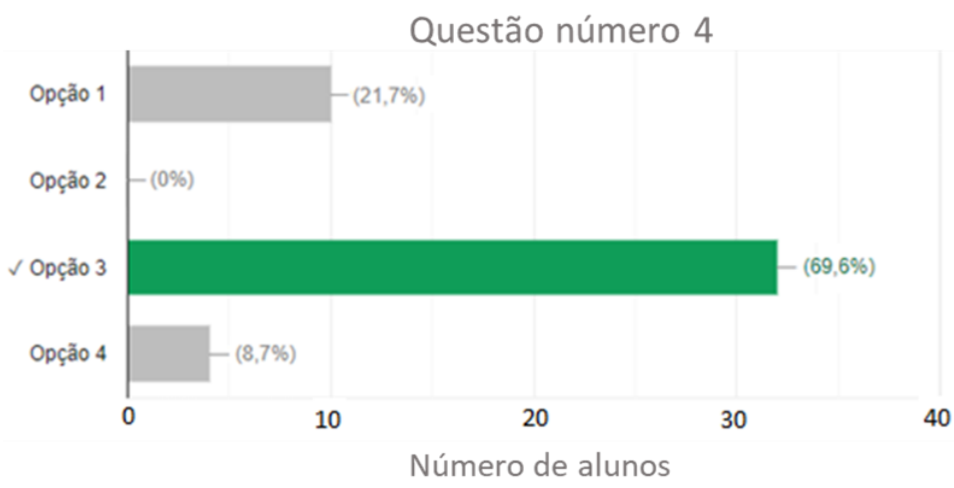


Gráfico 9 - Questão número 4 do questionário do Google Forms

Na Figura 118 pode observar-se um exemplo de resolução de um aluno da questão número 4 que, ao determinar os zeros da função, não respeitou as regras operatórias o que o conduziu a uma resposta errada.

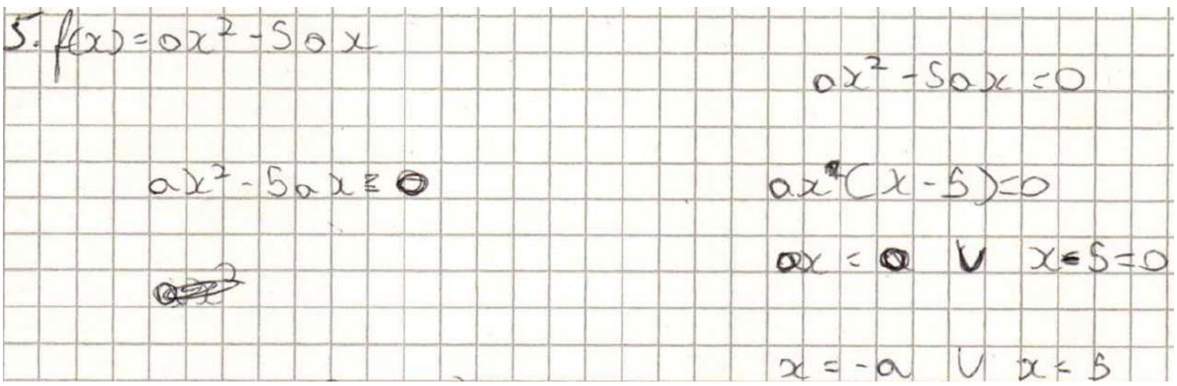


Figura 118 - Resolução de um aluno da questão número 4

5.4. *Quizizz*

Nesta secção faz-se uma apresentação do trabalho realizado com os alunos usando o *Quizizz* e, em seguida, apresentam-se os resultados obtidos e a respetiva análise.

5.4.1. *Quizizz* – Descrição da atividade

Com recurso a esta ferramenta elaborou-se um questionário com seis questões relativas ao estudo da função quadrática. Nestas questões procurou abordar-se a maior parte das propriedades estudadas assim como relacioná-las entre si.

Na questão da Figura 119 pretendia-se que os alunos, de uma forma rápida e por observação do gráfico, fossem capazes de indicar a expressão analítica de uma função quadrática conhecidas as coordenadas do vértice da parábola representativa da função.

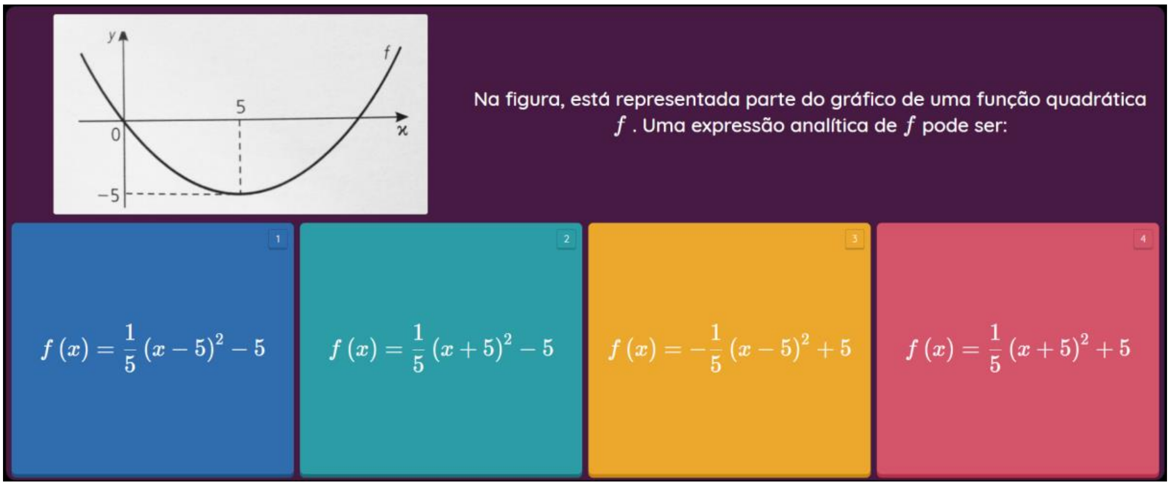


Figura 119 - Questão número 1 do questionário

Na questão da Figura 120 pretendia-se que os alunos relacionassem os vários conceitos estudados relativos à função quadrática como sentido da concavidade, paridade, zeros e extremos.

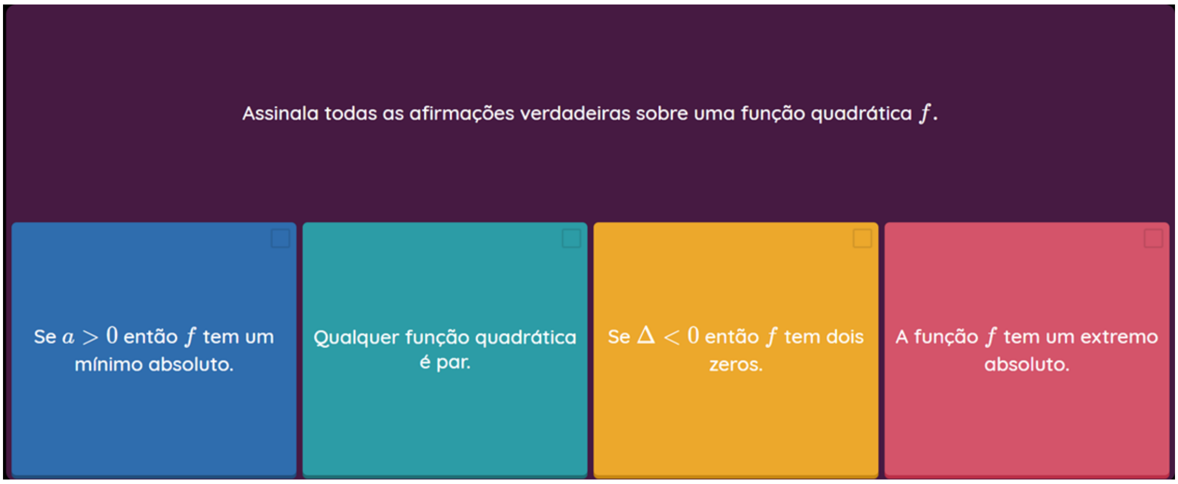


Figura 120 - Questão número 2 do questionário

Com a terceira questão, Figura 121, pretendia-se que os alunos fossem capazes de escrever uma expressão analítica de uma função quadrática conhecidas as coordenadas do seu vértice e as coordenadas de outro dos seus pontos.

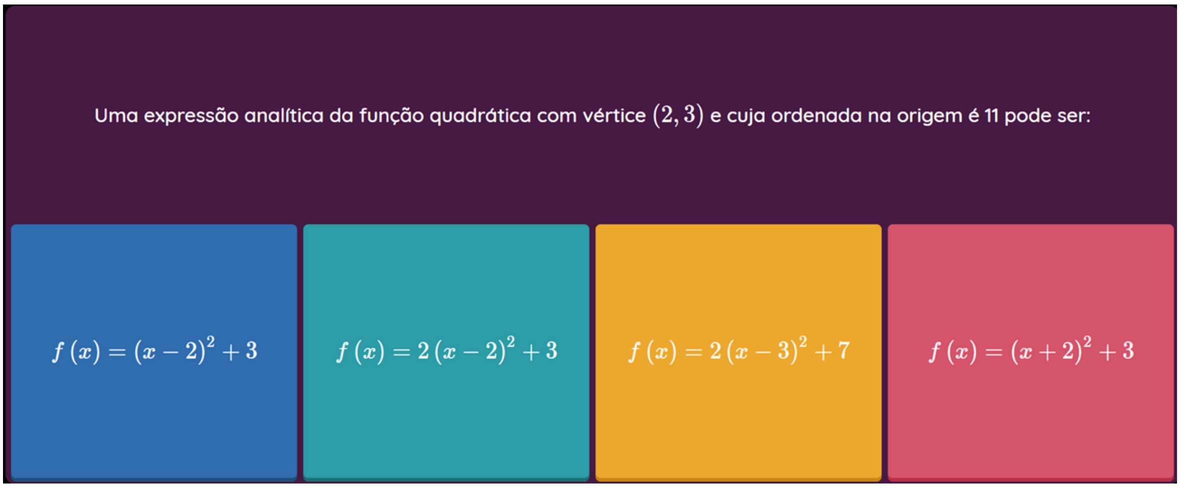


Figura 121 - Questão número 3 do questionário

Na questão da Figura 122 pretendia-se que os alunos fossem capazes de determinar as coordenadas do vértice da parábola quando esta está escrita na forma,
$f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

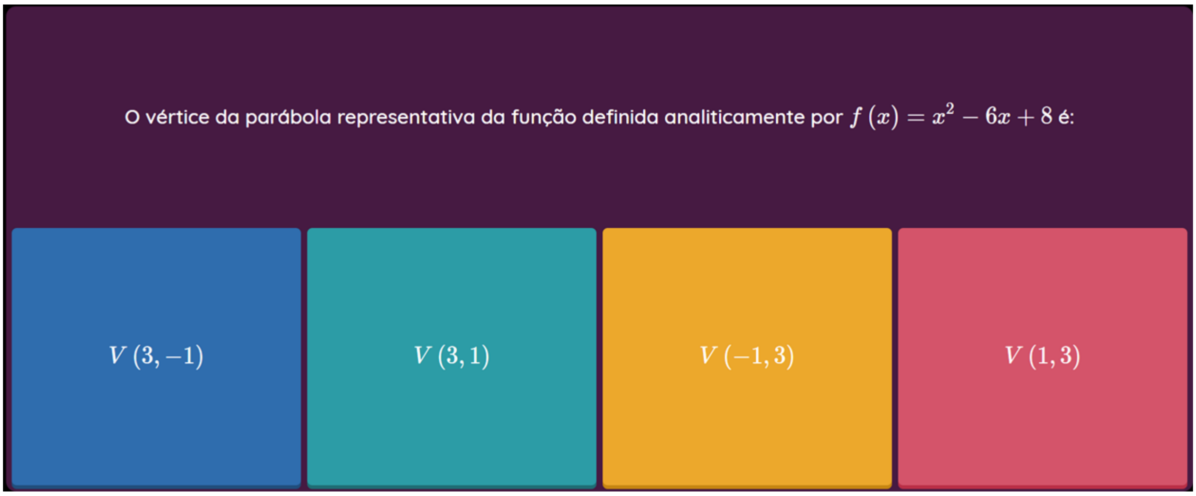


Figura 122 - Questão número 4 do questionário

Com a questão da Figura 123 pretendia-se relacionar o sentido da concavidade com os extremos e a simetria relativamente à reta vertical de equação $x = -1$.

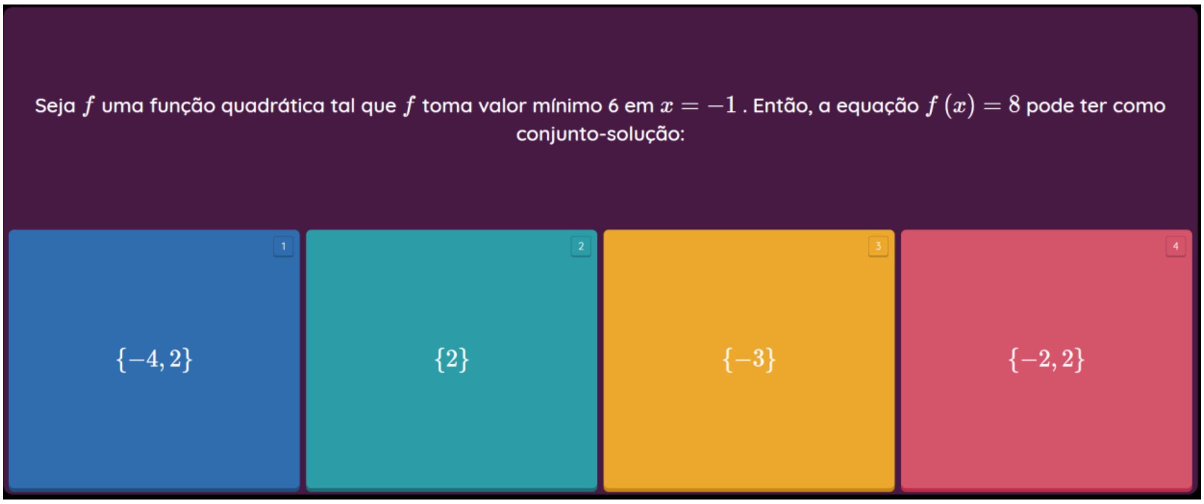


Figura 123 - Questão número 5 do questionário

Com a questão da Figura 124, pretendia-se relacionar o sentido da concavidade, o sinal e o contradomínio da parábola representativa de uma função quadrática.

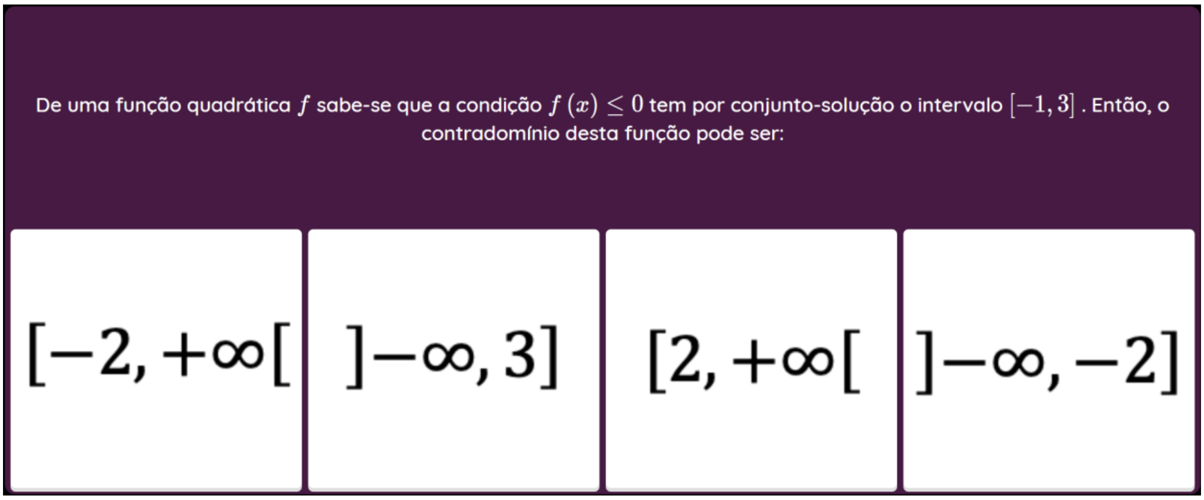


Figura 124 - Questão número 6 do questionário

5.4.2. *Quizizz* – Avaliação e análise dos resultados da atividade

A utilização desta ferramenta permitiu, de uma forma lúdica, avaliar, no final da unidade didática, as aprendizagens de conceitos e conteúdos lecionados. Nesta atividade os alunos mostraram-se bastante motivados e entusiasmados.

A grande maioria dos alunos, 89%, respondeu acertadamente a três ou mais questões, o que pode observar-se no Gráfico 10.

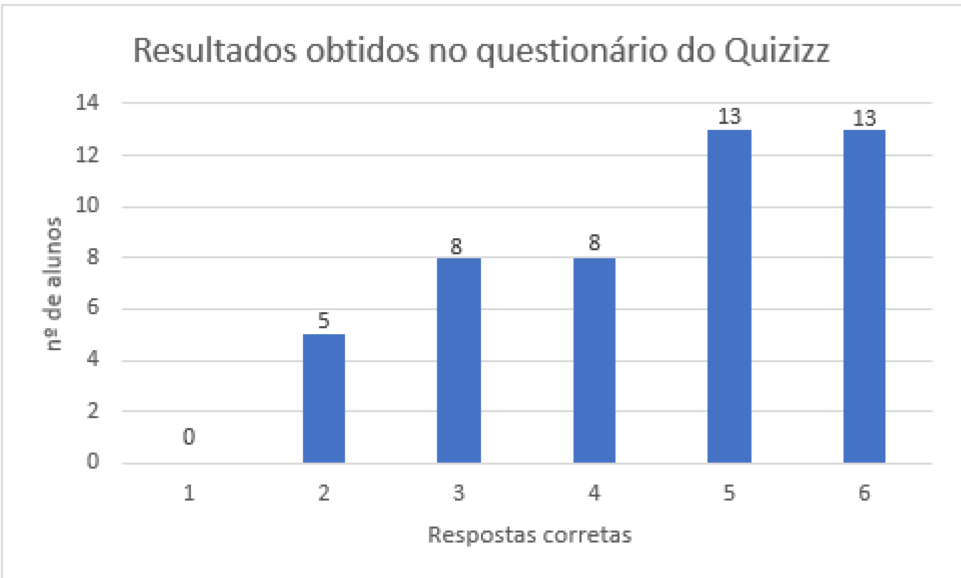


Gráfico 10 - Resultados obtidos no questionário do Quizizz

Nas questões das Figura 119, Figura 121 e Figura 122 os alunos não apresentaram dificuldades uma vez que o conceito de vértice e a sua relação com a expressão analítica da função foram bem compreendidos e consolidados com as atividades realizados com o *Desmos*.

As questões onde revelaram mais dificuldades foram aquelas que envolvem um maior número de conceitos, pois, embora a compreensão dos conceitos em si estivesse bem consolidada, era necessário relacioná-los entre si, o que exige uma maior reflexão e capacidade de abstração.

As questões das Figura 123 e Figura 124 foram aquelas em que os alunos apresentaram mais dificuldades. Na questão da Figura 123 era necessário relacionar as coordenadas do vértice com a equação do eixo de simetria e o extremo. Os alunos identificaram as coordenadas do vértice e o eixo de simetria, mas a dificuldade foi compreender que objetos simétricos relativamente à abcissa do vértice têm a mesma imagem.

Relativamente à questão da Figura 124, a dificuldade foi relacionar o sinal da função quadrática e o sentido da concavidade com o contradomínio.

A parte lúdica destes questionários, aliada a alguma imaturidade, características desta faixa etária, leva a que alguns alunos tenham a tendência para se precipitarem nas respostas a fim de serem os primeiros a terminar, o que às vezes acaba por prejudicar o seu desempenho.

6. Conclusões

6.1. Conclusões gerais

Foi com uma grande motivação e dedicação que iniciei este projeto, num ano atípico em contexto de pandemia e foram muitos os desafios que surgiram ao longo do seu desenvolvimento. A criação de uma sequência didática com recurso a ferramentas digitais para auxiliar o ensino das funções no 10º ano foi muito aliciante e construtiva, quer para a minha formação pessoal, quer para o apoio aos alunos no período de ensino à distância e para os manter motivados. Por outro lado, as restrições da pandemia atrasaram um pouco a recolha de resultados e a implementação de algumas partes do projeto.

O recurso ao *Google Classroom*, *Google Forms*, *Quizizz* e *Desmos* constituiu uma mais-valia para cativar a atenção e a motivação dos alunos, para os envolver na utilização destas ferramentas e contribuiu para os dotar de competências digitais. Relativamente ao *Google Classroom,* dada a sua eficácia na comunicação entre professor e alunos, será a ferramenta de eleição que irei continuar a utilizar para esse efeito.

A utilização do *Desmos* foi também uma mais-valia, uma vez que o estudo da função quadrática foi feito durante o ensino à distância. A sua lecionação com recurso a esta tecnologia permitiu definir o ritmo da realização das tarefas adequado a cada aluno. Os alunos mostraram-se entusiasmados na utilização duma ferramenta que nunca tinham utilizado e, de acordo com os resultados obtidos, a maioria dos alunos considerou a sua eficácia muito boa ou excelente.

De uma forma global a realização deste projeto contribuiu, sem dúvida, para melhorar os métodos de ensino alternativos, motivar mais os alunos para os conteúdos e consequentemente melhorar os resultados de avaliação e manuseamento de ferramentas digitais. Para o professor foi também um desafio que no final, tendo em conta os resultados obtidos e o *feedback* dos alunos, se pode concluir que foi de encontro aos objetivos propostos.

6.2. Trabalho Futuro

Terminado este projeto, podem indicar-se algumas aplicações futuras a implementar. O trabalho desenvolvido no capítulo 3 poderá ser utilizado para o estudo autónomo quer de alunos quer de professores.

A unidade didática aqui desenvolvida pode servir de ponto de partida ou como exemplo para a criação de outras unidades didáticas para o estudo das funções reais de variável real, uma vez que este tema abrange um grande número de conceitos onde os alunos, de uma forma geral, apresentam grandes dificuldades.

O projeto poderia ser alargado a mais alunos, permitindo melhorar os resultados e aumentar a motivação no estudo das funções, uma vez que demonstraram muito interesse e entusiasmo na utilização do *Desmos*, em particular no *feedback* dado na resolução de exercícios.

7. Bibliografia

Antunes, G., & Cambrainha, M. (2020). Modelos de exploração matemática na plataforma *Desmos*: Ensinar e aprender num ambiente virtual de aprendizagem (ANPMat (ed.)). IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática.

Beckmann, K. (2018). The importance of digital education. https://www.merckgroup.com/en/the-future-transformation/digital_education.html

Bourbaki, N. (1970). Elements of mathematics - Theory of Sets. Springer.

Cauchy, A.-L. (1823). Résumé des Leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal - tome premier. Ellipses.

Carlos Andrade, Paula Pinto Pereira, P. P. (2015). Novo Ípsilon - volume III (1a edição). Raiz Editora.

D. J. Struik. (1969). A Source Book in Mathematics. Harvard Univ. Press.

Daniela Raposo, L. G. (2015). Expoente 10 - Matemática A volume II (A. Editors (ed.); 1a edição).

Dobre, G. (2019). Usar ou não Google Forms na sua empresa? DataScope. https://mydatascope.com/blog/pt/usar-google-forms-ou-nao-decida-com-esse-artigo/

Duarte, J. S. (2015). Exame - Preparação para o Exame Final Nacional Matemática A 10o ano (Porto Editora (ed.)).

Helena Magro, V. M. (n.d.). Tutorial Quizizz. Q U I Z I Z Z V S K A H O O T. http://www.cfpor.pt/moodle30/pluginfile.php/1810/mod_resource/content/1/Tutorial_Quizizz.pdf

James Stewart. (2006). Cálculo - Volume I (Thomson (ed.); 5a edição).

James Stewart. (2008). Cáculo - Volume II (5a edição). CenGaGe Learning

Kleiner, I. (1989). Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. The College Mathematics Journal, 20(4), 282-300.

Krumsvik, R. J. (2008). Situated learning and teachers' digital competence. Education and Information Technologies, 13(4), 279-290.

Margarida Lucas e António Moreira. (2018). Quadro Europeu de Competência Digital para Educadores. Universidade de Aveiro. https://area.dge.mec.pt/download/DigCompEdu_2018.pdf

Maria Neves, Luís Guerreiro, A. S. (2015). Máximo 10 - Matemática A 10o ano parte 2 (P. Editora (ed.)).

Mathematics Journal, 20(4), 282. https://doi.org/10.2307/2686848

Ministério da Educação (2013). Programa e Metas Curriculares Matemática A. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/programa_metas_curriculares_matematica_a_secundario.pdf

Ministério da Educação (2016). Orientações de gestão curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática A. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Secundario/Metas/documentoorientador-ensino_secundario.pdf

Ministério da Educação (2017). Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/perfil_dos_alunos.pdf

Ministério da Educação (2018). Aprendizagens essenciais - articulação com o perfil dos alunos. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/10_matematica_a.pdf

Monna, A. (1972). The Concept of Function in the 19th and 20th Centuries, in Particular with Regard to the Discussions between Baire, Borel and Lebesgue. Archive for History of Exact Sciences, 9(1), 57-84.

Panworld Education (2017). Benefits of digital learning over traditional education methods. http://www.panworldeducation.com/2017/03/23/benefits-of-digital-learning-over-traditional-education-methods/

Ponte, J. P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. The Mathematics Educator, 3-8.

Roque, T. (2012). A História da Matemática. Zahar.

Sack, H. (2016). Francois Viète and the Foundations of Algebra. SciHi. http://scihi.org/francois-viete-algebra/

Silva Bueno, R. W., & Viali, L. (2009). A construção histórica do conceito de função. Educação Matemática em Revista, 1(10), 37-47.

Silva, D., Monteiro, P., & Acioly, V. (2020). Estudo do movimento uniforme subsidiado pela plataforma Desmos: uma proposta pedagógica. Revista Educação Pública, 20(19).

Struik, D. J. (1969). A Source Book in Mathematics. Harvard Univ. Press.

UNICAMP (Ed.). (2004). Introdução à História da Matemática.

Williams, V. S. (2020). 10 benefits of digital learning.

Winicius, R. (2015). A Construção Histórica do Conceito de Função. January 2009. https://www.kaplanpathways.com/about/news/10-benefits-of-digital-learning/

Youschkevitch, A. P. (1976). The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century. Archive for History of Exact Sciences, 16(1), 37-85.

8. Anexo A

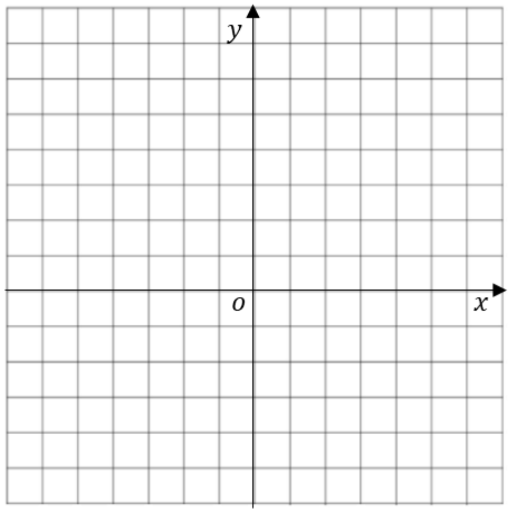
8.1 Ficha da função quadrática

Estudo da função Quadrática

1º Família de funções

$$f(x) = ax^2, \text{a} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Introduza na calculadora gráfica digital as funções seguintes e represente-as no referencial cartesiano da figura



- $f_1(x) = x^2, f_2(x) = \frac{1}{2}x^2$, e $f_3(x) = 4x^2$
- $f_4(x) = -\frac{1}{2}x^2$ e $f_5(x) = -4x^2$

Completa a tabela:

Função	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
$\lvert a \rvert$					

Após analisar as várias parábolas representativas das funções complete a tabela:

$a > 0$	Domínio: Contradomínio:	Zeros:	Extremos:	Monotonia Crescente: Decrescente:	Sinal Positiva em	Vértice	Eixo de Simetria
$a < 0$	Domínio: Contradomínio:	Zeros:	Extremos:	Monotonia Crescente: Decrescente:	Sinal Negativa em	Vértice	Eixo de Simetria

Conclusões:

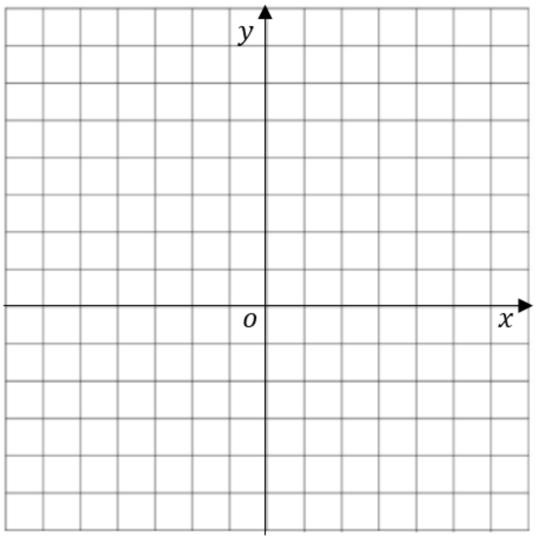
- O eixo de simetria deste tipo de funções é a reta de equação ______ e o vértice o ponto de coordenadas_______.
- O valor absoluto de $\boldsymbol{a}$ influencia a abertura da parábola. Quanto maior for o valor absoluto de $\boldsymbol{a}$, ________ é a abertura da parábola.

2º Família de funções

$f(x) = a(x-h)^2, a \neq 0$ e $h \in \mathbb{R}$

Introduza na calculadora gráfica digital as funções seguintes e represente-as no referencial cartesiano da figura

- $f(x) = 3x^2$, $g(x) = 3(x-1)^2$ e $h(x) = 3(x+2)^2$
- $i(x) = -3(x-1)^2$ e $j(x) = -3(x+2)^2$



Após analisar as várias parábolas representativas das funções e comparando-as com o gráfico da função $f(x) = 3x^2$, complete a tabela:

$a > 0$	Domínio: Contradomínio:	Zeros:	Extremos:	Monotonia Crescente: Decrescente:	Sinal	Vértice	Eixo de Simetria
$a < 0$	Domínio: Contradomínio:	Zeros:	Extremos:	Monotonia Crescente: Decrescente:	Sinal	Vértice	Eixo de Simetria

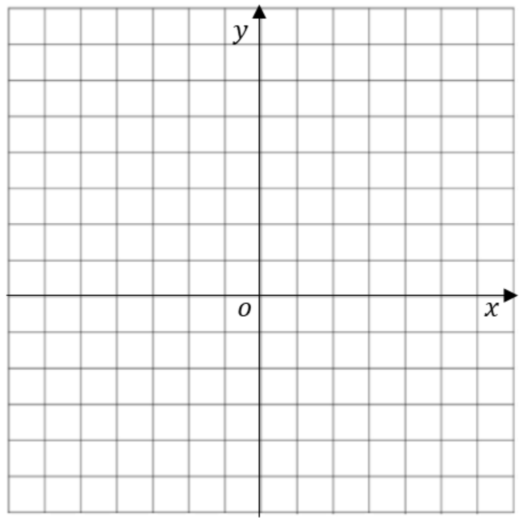
Conclusões:

- O eixo de simetria deste tipo de funções é a reta de equação ______________ e o vértice o ponto de coordenadas __________.
- Assim, generalizando, dada uma função g definida por $g(x) = ax^2$, $a \neq 0$, e uma função f definida por $f(x) = a(x-h)^2$, $a \neq 0$ e $h \in \mathbb{R}$, o gráfico de f é imagem do gráfico de g através de uma translação associada ao vetor $\vec{u}(h, 0)$.
  - Se $h > 0$, o deslocamento do gráfico faz-se para ________________
  - Se $h < 0$, o deslocamento do gráfico faz-se para _______________

3º Família de funções $f(x) = ax^2 + k$, $a \neq 0$ e $k \in \mathbb{R}$

Introduza na calculadora gráfica digital as funções seguintes e represente-as no referencial cartesiano da figura

- $f(x) = 3x^2$, $g(x) = 3x^2 - 1$ e $h(x) = 3x^2 + 2$
- $i(x) = -3x^2 - 1$ e $j(x) = -3x^2 + 2$



Após analisar as várias parábolas representativas das funções e comparando-as com o gráfico da função $f(x) = 3x^2$, complete a tabela:

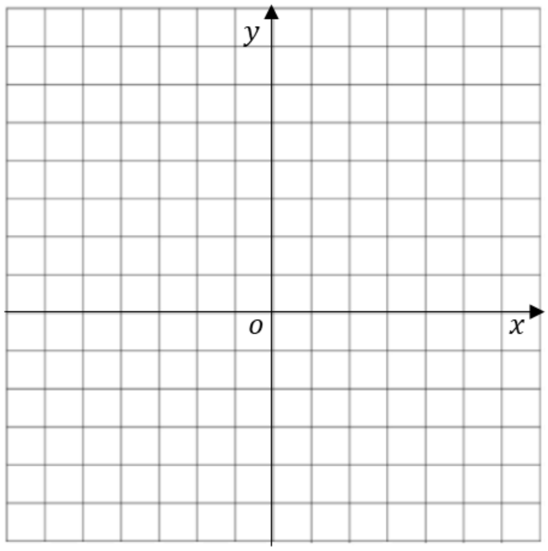
$a > 0$	Domínio: Contradomínio:	Extremos:	Monotonia Crescente: Decrescente:	Vértice	Eixo de Simetria
$a < 0$	Domínio: Contradomínio:	Extremos:	Monotonia Crescente: Decrescente:	Vértice	Eixo de Simetria

Conclusões:

- O eixo de simetria deste tipo de funções é a reta de equação __________ e o vértice o ponto de coordenadas _________.
- Assim, generalizando, dada uma função $g(x) = ax^2$, $a \neq 0$, e uma função f definida por
  $f(x) = ax^2 + k, a \neq 0$ e $k \in \mathbb{R}$, o gráfico de f é imagem do gráfico de g através de uma translação associada ao vetor $\vec{u}(0, k)$.
  - Se $k > 0$, o deslocamento do gráfico faz-se para ______________
  - Se $k < 0$, o deslocamento do gráfico faz-se para _______________

4º Família de funções $f(x) = a(x-h)^2 + k,\ a \neq 0$ e $h, k \in \mathbb{R}$

Introduza na calculadora gráfica digital as funções seguintes e represente-as no referencial cartesiano da figura



- $f(x) = 3x^2$, $g(x) = 3(x-1)^2 + 2$ e $h(x) = 3(x+2)^2 - 1$
- $i(x) = -3(x-1)^2 - 2$ e $j(x) = -3(x+2)^2 + 1$

Após analisar as várias parábolas representativas das funções e comparando-as com o gráfico da função $f(x) = 3x^2$, complete a tabela:

$a > 0$	Domínio: Contradomínio:	Extremos:	Monotonia Crescente: Decrescente:	Vértice	Eixo de Simetria
$a < 0$	Domínio: Contradomínio:	Extremos:	Monotonia Crescente: Decrescente:	Vértice	Eixo de Simetria

Conclusões:

- O eixo de simetria deste tipo de funções é a reta de equação ________e o vértice o ponto de coordenadas _______.
- Assim, dada uma função g definida por $g(x) = ax^2$, $a \neq 0$, e uma função f definida por $f(x) = a(x-h)^2 + k,\ a \neq 0$ e $h, k \in \mathbb{R}$, o gráfico de f é imagem do gráfico de g através de uma translação associada ao vetor $\vec{u}(h, k)$.