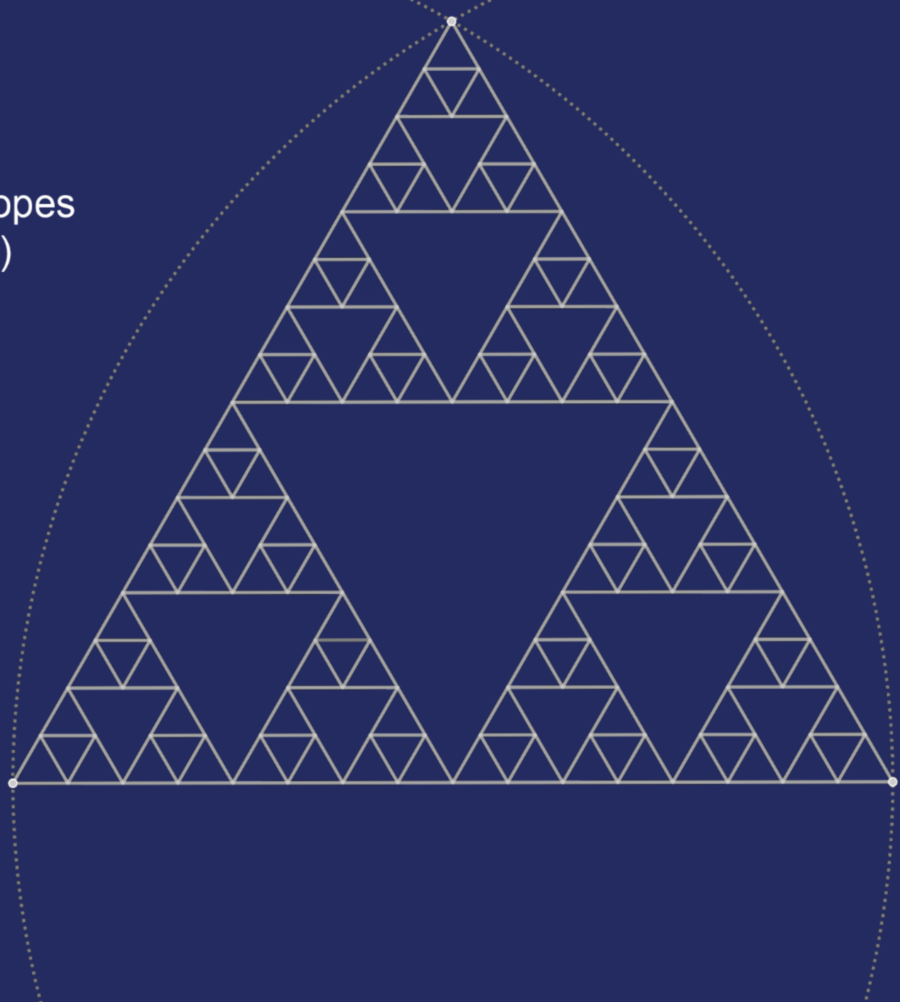
universidade de aveiro theoria poiesis praxis

MATEMÁTICA COM VIDA:

DIFERENTES OLHARES SOBRE A GEOMETRIA

Isabel Cabrita
Vanda Santos
Teresa B. Neto
J. Bernardino Lopes
(coordenadores)



título:
Matemática com vida: diferentes olhares sobre a geometria

coordenadores
Isabel Cabrita
Vanda Santos
Teresa B. Neto
J. Bernardino Lopes

comissão científica
Ana Paula Aires
Cecília Costa
Fátima Regina Jorge
Helena Campos
Isabel Cabrita
J. Bernardino Lopes
Maria Manuel Nascimento
Paula Catarino
Teresa B. Neto
Vanda Santos

editora
UA Editora
Universidade de Aveiro
Serviços de Documentação, Informação Documental e Museologia

1ª edição – dezembro 2020

ISBN: 978-972-789-659-2

DOI: https://doi.org/10.34624/emye-p069

O Encontro cujos textos agora se publicam foi financiado por Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., no âmbito do projeto UIDB/00194/2020 e teve o apoio do Departamento de Educação e Psicologia.

índice

Olhar a Geometria sobre múltiplas perspetivas

Isabel Cabrita
Centro de Investigação Didática e Tecnologia na Formação de Formadores (CIDTFF), Departamento de Educação e Psicologia, Universidade de Aveiro
icabrita@ua.pt
http://orcid.org/0000-0003-0255-7577

Vanda Santos
Centro de Investigação Didática e Tecnologia na Formação de Formadores (CIDTFF), Universidade de Aveiro
vandasantos@ua.pt
https://orcid.org/0000-0002-3953-6123

Teresa Neto
Centro de Investigação Didática e Tecnologia na Formação de Formadores (CIDTFF), Departamento de Educação e Psicologia, Universidade de Aveiro
teresaneto@ua.pt
https://orcid.org/0000-0001-9002-2155

Joaquim Bernardino Lopes
Centro de Investigação Didática e Tecnologia na Formação de Formadores (CIDTFF), Departamento de Física, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
blopes@utad.pt
https://orcid.org/0000-0001-9961-1538

Mathematics is not alien and remote but just a very human exploration of the patterns of the world, one which thrives on play and surprise and beauty.

Indra's Pearls: The Vision of Felix Klein

A visão de Felix Klein está no espírito dos Encontros 'Matemática Com Vida', permitindo uma reflexão sobre a versatilidade e imaginação da Matemática.

Dada a importância da geometria para melhor se ler e interpretar o mundo, nesta 1.ª edição dos referidos Encontros, subordinada ao tema 'Matemática com Vida – Diferentes Olhares Sobre a Geometria', teve lugar de destaque. E olhámos para aquele tema segundo múltiplas perspetivas.

Tal Encontro enquadra-se na vertente 'Labs Convida' da iniciativa maior – 'Labs Com Vida', rentabilizando sinergias do lem@tic – laboratório de Educação em Matemática – e do LabDCT –

Laboratório de Didática de Ciências e Tecnologia, estruturas funcionais do Centro de Investigação Didática e Tecnologia na Formação de Formadores da Universidade de Aveiro (CIDTFF) – https://www.ua.pt/cidtff.

Constitui-se uma forma de marcarmos presença naquele que foi instituído como dia Internacional da Matemática e 'com' os nossos parceiros privilegiados – os professores de Matemática.

O presente livro integra 14 textos de autores que nele intervieram de uma forma muito ativa, quer através de conferências plenárias, quer pela participação no painel 'As aprendizagens essenciais em Geometria a partir de diferentes olhares' quer enquanto dinamizadores de workshops.

As duas conferências plenárias estiveram a cargo de Cecília Costa e Fátima Regina Jorge.

O texto de Cecília Costa permite-nos uma incursão na etnogeometria associada a artefactos tradicionais construídos pelo povo Nyaneka-nkhumbi, do sudoeste de Angola, por povos indígenas de Timor-Leste e por artesãos portugueses. E apresenta-nos propostas de exploração didática das casas de pau-a-pique, de cestaria, de almotolias e de jugos.

Em 'Contextos não formais do meio próximo da escola – um mundo de oportunidades para (re) encontros com a geometria', Fátima Regina Jorge reflete sobre orientações curriculares atuais que respeitam princípios da Educação Matemática Realista e do modelo de pensamento geométrico de van Hiele; discute a importância, para a Matemática, da interação entre contextos formais e não-formais e analisa experiências didáticas proporcionadas por visitas de estudo ou trilhos matemáticos explorados em espaços exteriores à escola.

Em relação ao Painel 'As aprendizagens essenciais em Geometria a partir de diferentes olhares', apresentam-se textos de dois intervenientes no mesmo, embora um deles escrito em co-autoria. Helena Campos foi ouvida por estar ligada à formação de professores enquanto que Joaquim Pinto se pronunciou enquanto professor 'no terreno'.

No texto assinado por Joaquim Pinto e Marisabel Antunes, 'As aprendizagens essenciais de Geometria a partir de dois olhares', os autores começam por contextualizar historicamente o tema, enquanto mote para justificar o aparecimento dos documentos o 'Perfil do aluno à saída da escolaridade obrigatória' e 'Aprendizagens essenciais'. Num registo muito pessoal, terminam com considerações às questões:

- Quais as aprendizagens essenciais a Geometria para o cidadão do século XXI?
- Em que medida estão alinhadas [as aprendizagens essenciais a Geometria] com o Perfil do Aluno à saída do Ensino Básico (EB)?
- Quais as condições e/ou os constrangimentos que as escolas e os professores, em Portugal, enfrentam para a sua consecução [das aprendizagens essenciais a Geometria]?
- A formação (inicial) dá resposta às competências que são necessárias para que os professores do EB explorem a Geometria de forma adequada às exigências de hoje e de amanhã?

Helena Campos apresenta-nos perspetivas atuais e futuras do processo educativo, atendendo aos documentos curriculares em vigor em Portugal e aos que se venham a desenhar em função das 'Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática' do Grupo de Trabalho de Matemática. Termina com algumas considerações acerca da formação inicial e contínua de professores que permita fazer face aos desafios presentes e futuros.

No que concerne aos *workshops*, apresentam-se textos dos 10 que foram dinamizados. Envolveram a exploração de diversas tecnologias – desde ferramentas de desenho, materiais manipuláveis, calculadoras, *softwares* de geometria dinâmica, realidade aumentada, *apllets* e outros recursos disponíveis na Internet – enquanto suporte da resolução de tarefas geométricas que evidenciam conexões quer intra matemática quer entre a geometria e ou outras áreas ou mesmo o dia-a-dia.

O texto de Ana Paula Aires e Cecília Costa foca-se em propostas didáticas que tiram partido de pesquisas na Internet sobre aspetos da História da Geometria. As autoras terminam com uma reflexão sobre o potencial da combinação (im)provável destas duas ferramentas didáticas.

Em Geometria com Vida numa TI-Nspire CX II-T, Marisabel Antunes e Joaquim Pinto exploram diversas funções e potencialidades daquela calculadora gráfica enquanto suporte da resolução de tarefas, designadamente de modelação, focadas na geometria.

Teresa B. Neto explora a resolução de problemas geométricos que envolvem a coordenação e integração de vistas de objetos, a composição e decomposição de um objeto em partes e figuras planas isoparamétricas, enquadrada pelos modelos tetraédrico das competências geométricas e de raciocínio geométrico de Duval e usando materiais como peças em madeira, Polydron e o GeoGebra.

Cecília Costa, a partir de tarefas de investigação, explora que segredos escondem as (três) alturas, as (três) medianas, as (três) mediatrizes e as (três) bissetrizes do triângulo e reflete sobre as conexões intra-matemática que permite estabelecer. Na resolução de algumas delas, recorre-se à técnica origami e ao GeoGebra.

Paula Sofia Nunes, Paulo Martins e Paula Catarino exploram uma calculadora gráfica, o GeoGebra e o Kahoot! enquanto suporte do processo de resolução de tarefas centradas na geometria e medida, inscrito numa lógica de gamificação. E constataram que, apesar de, inicialmente, o Kahoot! ser o software menos conhecido dos formandos, acabou por ser o preferido para apoiar as atividades realizadas.

Em 'Aprendizagem Ativa através do Ambiente Colaborativo para a Geometria', Vanda Santos e Helena Campos exploram o potencial da Plataforma de Geometria na Rede – WGL, designadamente, ao nível da comunicação na resolução conjunta de tarefas geométricas, quer presencial quer virtualmente e tanto de modo síncrono como assíncrono.

Maria Manuel Nascimento e J. Alexandre Martins, em 'Geometria por trás da cortina...', apresentam um conjunto de tarefas centradas nas probabilidades mas cuja resolução mobiliza conhecimento daquela área, apresentando alternativas à abordagem mais usual que envolve os jogos de azar ou o determinismo e cálculo. Para além de material como palhinhas ou esparguete, a resolução das tarefas pode ser apoiada por *applets*.

Em 'Geometria com História e as histórias com Geometria', Helena Campos e Paula Catarino, de uma forma criativa, apelativa e enriquecedora, tiram partido de poemas e histórias infantis para abordar, com recurso à régua e compasso, ao GeoGebra e a pesquisas na *Internet*, aspetos geométricos como os números metálicos de ouro e de prata e o número de plástico.

Fátima Regina Jorge e Fátima Paixão recorrem a um quadro de Manuel Cargaleiro que se constitui o mote para a formulação de questões-problema centradas na pavimentação do plano com quadriláteros e na relação da cor dos objetos com a luz. A sua resolução inscreve-se na metodologia de trabalho experimental e dela resulta uma composição plástica que evidencia conexões entre a geometria, as Ciências e a arte.

Artur Coelho e Magda Pereira defendem a exploração de Ambientes Dinâmicos de Matemática associados à Realidade Aumentada enquanto genuínos mediadores do processo de compreensão de conceitos abstratos que favorece, designadamente, a construção de novas representações quando se enriquece o mundo real com uma camada virtual gerada por computador.

Esperemos que a leitura e exploração das ricas propostas didáticas que os diversos textos encerram possam contribuir para uma abordagem criativa e inovadora da Geometria, que concorra para aprendizagens mais significantes, alinhadas com os documentos curriculares em vigor em Portugal. E espera-se que, muito em breve, tais documentos curriculares fiquem todos alinhados entre si e consonantes com as mais recentes orientações internacionais para o processo educativo a Matemática.

Etnogeometria de artefactos tradicionais: explorações educacionais

Cecília Costa
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
CIDTFF – Centro de Investigação em Didática e Tecnologia na Formação de Formadores
mcosta@utad.pt
ORCID: 0000-0002-9962-562X

Resumo

Vários artefactos construídos artesanalmente pressupõem raciocínio geométrico na sua conceção e execução que importa descobrir, valorizar e aproveitar as suas potencialidades no ensino e aprendizagem da geometria escolar. O trabalho de artesãos envolve conteúdos de geometria do plano e do espaço, semelhantes aos lecionados em níveis do ensino básico português. Os artefactos em si também constituem ponto de partida para pesquisa e análise de cariz geométrico com aplicação didática. Apresentamos diversos estudos sobre a geometria existente em artefactos construídos por povos indígenas de países de África e da América do Sul e por artesãos do nosso país, em especial, da região de Trás-os-Montes e Alto Douro. Refletimos sobre a transposição didática desses conhecimentos para o ensino e a aprendizagem, em sala de aula, de Matemática e apresentamos algumas experiências já realizadas.

Palavras-chave: Etnomatemática; Aprendizagem da Geometria; Estratégias de Ensino; Ensino básico; Artefactos

Introdução

Defendemos que a etnomatemática pode constituir-se como uma estratégia de ensino vantajosa na aprendizagem da matemática no ensino básico (Costa, 2019). As razões desta posição prendem-se com: (i) a possibilidade de criar tarefas em contexto (cultural) de cariz investigativo e exploratório (Ponte, Quaresma, & Branco, 2011) envolvendo conceitos matemáticos deste nível de ensino (MEC, 2018) e que são utilizados por determinados grupos profissionais ou étnicos; (ii) a oportunidade de valorizar e preservar os saberes e saberes fazer da comunidade a que pertencem os alunos e (iii) conhecer e respeitar os saberes e saberes fazer de outros povos.

O conhecimento de estudos etnomatemáticos pode constituir-se como ponto de partida e de inspiração para professores introduzirem em sala de aula tarefas envolvendo a etnomatemática.

Neste texto, apresentamos alguns estudos etnomatemáticos de que somos coautora, destacando conteúdos matemáticos que podem ser abordados a partir dos mesmos. Começamos com uma breve caraterização dos conceitos de etnomatemática e etnogeometria.

1. Etnomatemática e etnogeometria: breve caraterização

O campo da etnomatemática implantou-se com a reflexão e os estudos de Ubiratan D'Ambrósio, ainda que anteriormente outros investigadores se tenham dedicado a estudos de educação matemática em contexto cultural. Ainda assim, a criação desta área, bem como a sua designação e divulgação deve-se a este matemático e educador matemático brasileiro. D'Ambrósio explica o sentido que dá a *etnomatemática* do seguinte modo

> Indivíduos e povos têm, ao longo de suas existências e ao longo da história, criado e desenvolvido instrumentos de reflexão, de observação, instrumentos materiais e intelectuais [que chamo ticas] para explicar, entender, conhecer, aprender para saber e fazer [que chamo matema] como resposta a necessidades de sobrevivência e de transcendência em diferentes ambientes naturais, sociais e culturais [que chamo etnos]. (D' Ambrósio 2001, p. 60)

D'Ambrósio (2001) enquadra esta área do saber e de investigação como uma subárea da história da matemática e da educação matemática, mas também em relação estreita com a antropologia e com as ciências da cognição. Um aspeto incontornável é a dimensão política que a etnomatemática comporta.

Uma caraterização mais instrumental da etnomatemática, no sentido de nos ajudar a identificar aspetos onde possamos atuar, é a que apresentamos de seguida:

> Etnomatemática é a matemática praticada por grupos culturais, tais como comunidades urbanas e rurais, grupos de trabalhadores, crianças de uma certa faixa etária, sociedades indígenas e, tantos outros grupos que se identificam por objectivos e tradições comuns aos grupos. (D'Ambrósio 2001, p. 9).

Noutro continente, Paulus Gerdes (1952-2014) comunga destas ideias, desenvolve-as, também na vertente de investigação, em vários países africanos, em particular em Moçambique, onde se fixa desde os anos sessenta do século XX. Gerdes considera etnomatemática como: "(…) a área de investigação que estuda as multifacetadas relações e interconexões entre ideias matemáticas e outros elementos e constituintes culturais, como a língua, a arte, o artesanato, a construção, a educação." (Gerdes, 2007, p. 156).

Tal como D'Ambrósio, também lhe dá uma formulação mais instrumental: "Etnomatemática é também a área de investigação que estuda os saberes e saberes-fazer matemáticos adquiridos e desenvolvidos na actividade prática, (…) pelos cesteiros, pelos pintores, pelas costureiras (…)" (Gerdes, 2007, p. 156)

A etnogeometria pode ser entendida como a etnomatemática particularizada a conteúdos geométricos. Sugerimos o livro de Gerdes (2013) para uma leitura aprofundada sobre este tema.

2. *Estudos etnomatemáticos sobre artefactos construídos pelo povo Nyaneka-nkhumbi do sudoeste de Angola*

Em Costa, Dias, & Palhares (2019) e Dias (2016), encontra-se o estudo etnomatemático de vários artefactos construídos pelo grupo étnico Nyaneka-nkhumbi localizado no sudoeste de Angola, bem como sugestões da sua aplicação em sala de aula do 1.º ciclo do ensino básico, através de tarefas. Em nossa opinião, várias destas tarefas são passíveis de adaptar aos 2.º e 3.º ciclos do ensino básico.

Selecionamos dois desses artefactos, as casas de pau-a-pique construídas pelos homens do grupo étnico (Dias, Costa, & Palhares, 2015) e os cestos construídos pelas mulheres (Dias, Costa, & Palhares, 2017), que apresentamos e discutimos nas duas próximas secções.

As casas de pau-a-pique

As casas de pau-a-pique (figura 1) são as casas tradicionais dos Nyaneka-nkhumbi, que ainda continuam a ser construídas e utilizadas.

Figura 1 - Casas de pau-a-pique do grupo étnico Nyaneka-nkhumbi (retirada de Dias, 2016, p. 145) e datada de 26-08-2011)

A sua construção obedece a processos que envolvem vários conteúdos de geometria elementar plana e no espaço. A planta da casa (figura 2, à esq.) salvaguarda as divisões adequadas à vida quotidiana da família.

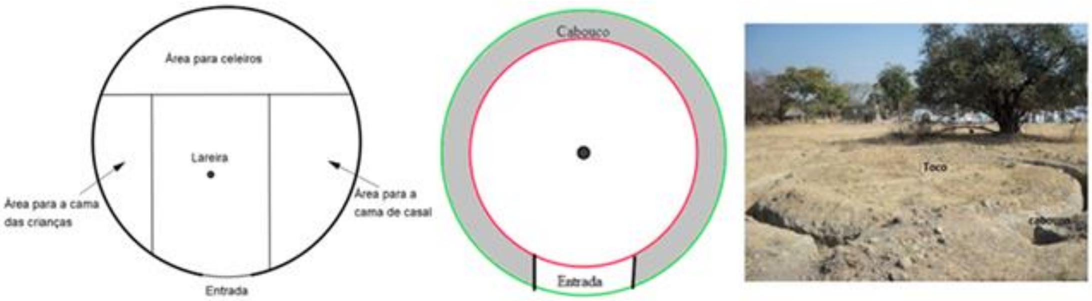


Figura 2 - Esquema da planta de uma casa de pau-a-pique (à esq. e centro) e alicerces (à dir.) (retiradas de Dias, 2016, p. 141 e 144)

A observação destas imagens (figura 2) remete-nos para a possibilidade de tratar temas de geometria elementar plana, como: estudo da circunferência, área e perímetro da circunferência; cálculo de áreas por enquadramento; comparação de áreas, entre outros.

A fase de construção de paredes e cobertura da casa de pau-a-pique (figura 3) remete-nos para a geometria elementar no espaço.

Figura 3 - Fases da construção de uma casa de pau-a-pique (retiradas de Dias, 2016, p. 142 e 143)

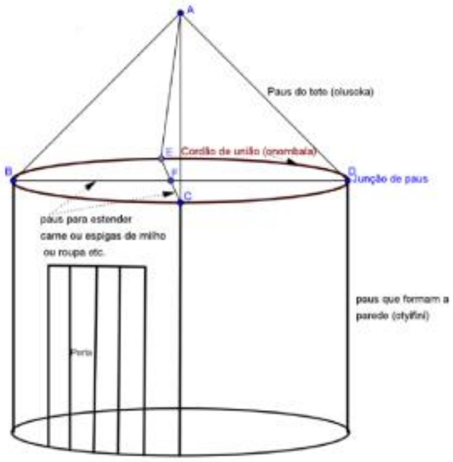
As formas geométricas cilindro e cone são evidentes nos dois blocos que constituem a casa de pau-a-pique. O estudo de volumes, do cilindro e do cone, e sua relação no contexto destas casas, a estimativa do volume da casa tendo em conta a imagem da direita e a altura aproximada do homem são aspetos que podem ser explorados em sala de aula. A área da superfície lateral do cilindro e do cone pode ser abordada tendo em conta a quantidade de material necessário para cobrir os troncos ainda visíveis na imagem da esquerda. O estudo da posição relativa de retas no espaço é outro dos tópicos geométricos que pode ser abordado a partir desta construção.

A finalizar esta subsecção, apresentamos uma das tarefas propostas em (Dias, 2016) elaborada com base nas casas de pau-a-pique do grupo étnico Nyaneka-nkhumbi (figura 4).

Casas de Pau-a-pique

Atividade 4

O professor e os alunos podem observar uma maqueta ou a figura abaixo que representa a casa tradicional dos *Nyaneka-nkhumbi* em construção.



a) Indica as linhas que ligam:
   As junções A e B.
   As junções E e F
   As junções B e D
b) Diz se as linhas são do mesmo tipo ou não? Porquê?
c) Determina o caminho mais curto e o mais longo de B a D sabendo que $\overline{BE} = \overline{ED}$; $\overline{BF} = \overline{FD}$ e $\overline{BE}$ maior que $\overline{BF}$. Porquê?
d) Compara o número de linhas que vai à junção D e o número de linhas que vai à A?
e) Imagina um rato doméstico a percorrer as linhas que vão de B até D, chegará o rato a D sem passar em nenhuma junção? Porquê?

Figura 4 - Tarefa sobre a casa de pau-a-pique do grupo étnico Nyaneka-nkhumbi (retirada de Dias, 2016, p. 407)

Os cestos

Em Dias, Costa e Palhares (2017), encontra-se um estudo detalhado sobre os cestos Nyaneka-nkhumbi. Os cestos são construídos pelas mulheres Nyaneka-nkhumbi para vários fins, por exemplo: guardar cereais e outros bens, colocar comida, recolher sementes, entre outros. Dependendo da finalidade para que são construídos, os tamanhos variam, podendo considerar-se cestos grandes, médios e pequenos. Por exemplo, os cestos para armazenar cereais têm dimensões grandes sendo colocados no local assinalado na figura 2 como área para celeiros. Na figura 5, apresentamos cestos com dimensões e funções variadas.

Figura 5 - Exemplo de cestos com diferentes dimensões do grupo étnico Nyaneka-nkhumbi (retiradas de Dias, Costa, & Palhares, 2017)

O estudo das dimensões dos cestos permite abordar noções como área do círculo e volume de cones truncados, o que pode constituir tarefa de investigação rica pela necessidade de conjugar várias noções geométricas.

A forma de alguns enfeites e de bases dos cestos remete para figuras clássicas como o caracol de Pascal e a espiral de Arquimedes, facilmente reconhecíveis nas imagens da figura 6.

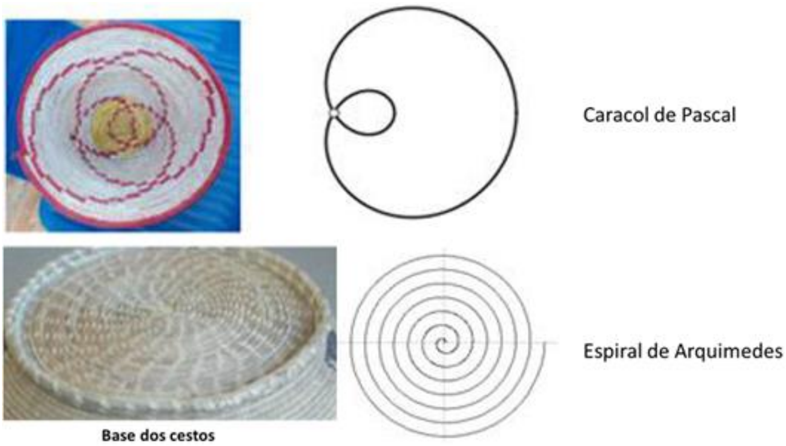


Figura 6 - O caracol de Pascal e a espiral de Arquimedes em cestos do grupo étnico Nyaneka-nkhumbi (retiradas de Dias, Costa, & Palhares, 2017)

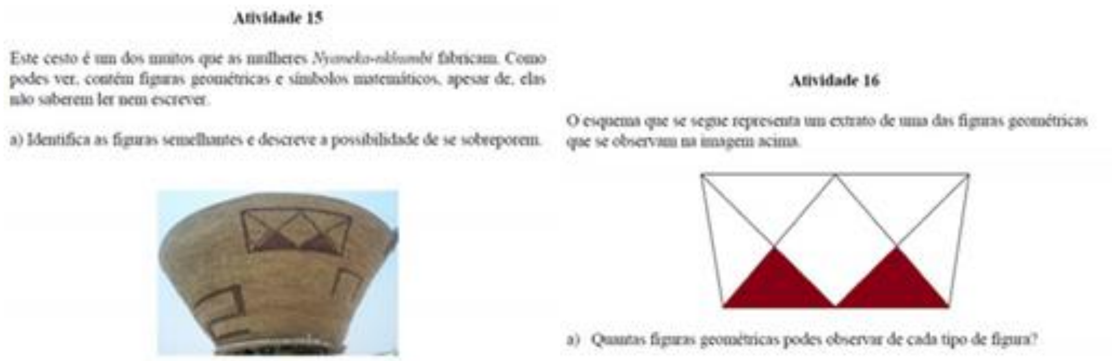
O estudo dos enfeites nos cestos dos Nyaneka-nkhumbi permite abordar figuras geométricas elementares (quadrado, triângulo, trapézio, etc.) como mostra a figura 7.

Figura 7 - Enfeites em cestos do grupo étnico Nyaneka-nkhumbi com destaque para as figuras geométricas (retiradas de Dias, Costa, & Palhares, 2017)

Mas também diversas transformações do plano (translações, simetrias, rotações, etc.). As imagens na figura 8 "falam por si".

Figura 8 - Enfeites em cestos do grupo étnico Nyaneka-nkhumbi com potencial para abordar transformações do plano (retiradas de Dias, Costa, & Palhares, 2017)

A finalizar esta subsecção, apresentamos uma das tarefas propostas em (Dias, 2016) elaborada com base nos cestos do grupo étnico Nyaneka-nkhumbi (figura 9).



Atividade 15

Este cesto é um dos muitos que as mulheres *Nyaneka-nkhumbi* fabricam. Como podes ver, contém figuras geométricas e símbolos matemáticos, apesar de, elas não saberem ler nem escrever.

a) Identifica as figuras semelhantes e descreve a possibilidade de se sobreporem.

Atividade 16

O esquema que se segue representa um extrato de uma das figuras geométricas que se observam na imagem acima.

a) Quantas figuras geométricas podes observar de cada tipo de figura?

Figura 9 - Tarefa sobre cestos do grupo étnico Nyaneka-nkhumbi (retirada de Dias, 2016, p. 412)

3. *Estudo etnomatemático sobre artefactos construídos por povos indígenas de Timor-Leste*

Nesta secção, apresentamos o exemplo de uma tarefa criada e implementada numa turma duma escola do noroeste de Portugal, partindo dos cestos da República Democrática de Timor Leste apresentados na figura 10 (Serra, 2016), que a professora tinha trazido de recordação de uma viagem a este país. Os alunos frequentavam o 11.º ano da área de artes e reagiram de modo muito interessado e empenhado à tarefa, ainda que tenham apresentado dificuldades na apropriação dos conteúdos geométricos.

Figura 10 - Cestos construídos por povos indígenas de Timor-Leste (retirada de Serra, 2016)

A tarefa (Serra, 2016) que foi solicitada aos alunos tinha três partes, a 1.ª e a 3.ª foram realizadas na aula e a 2.ª fora da aula.

Na 1.ª Parte, os alunos tinham de fotografar os cestos apresentados dando atenção aos detalhes da sua construção e da sua ornamentação, desenhá-los (figura 11) e representar, em papel milimétrico, algumas das partes dos cestos que considerassem mais relevantes.

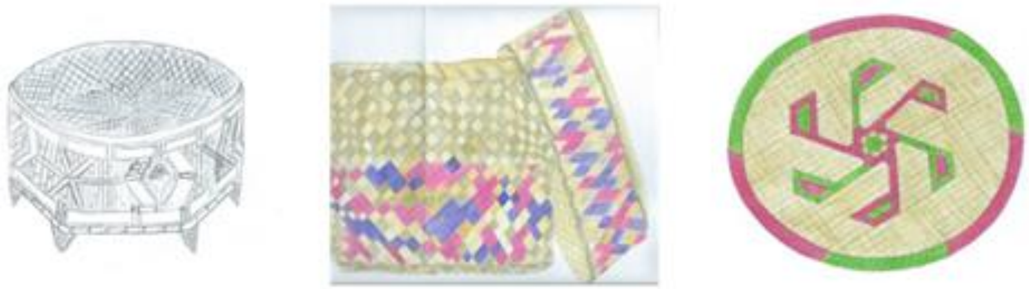


Figura 11 - Alguns dos desenhos elaborados pelos alunos (retirada de Serra, 2016)

Com o apoio das representações elaboradas, os alunos tinham de analisar e identificar as transformações geométricas e outras relações presentes nos cestos (figura 12).

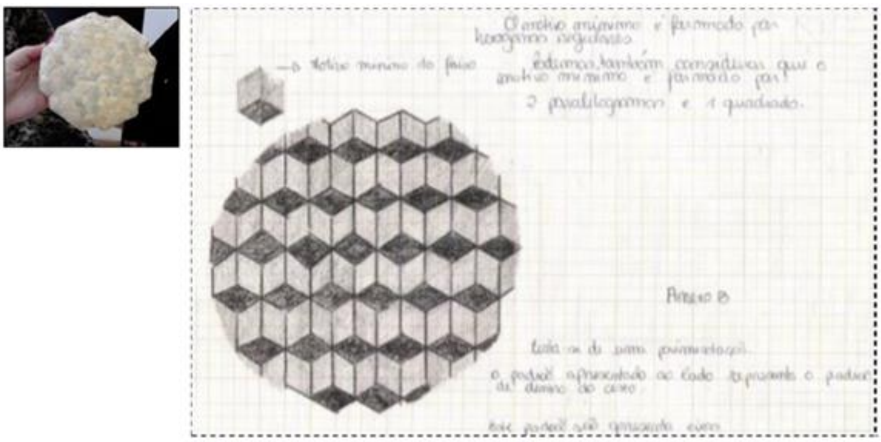


Figura 12 - Exemplo da produção elaborada por um aluno (retirada de Serra, 2016)

A 2.ª Parte consistiu em pesquisar na Internet sobre a cestaria de Timor-Leste e identificar os cestos apresentados (figura 10) indicando, do seu ponto de vista, se são de uso corrente ou se se trata de um *souvenir*. Os alunos tinham de elaborar um relatório do trabalho desenvolvido.

A 3.ª Parte consistiu na apresentação e discussão dos trabalhos realizados.

4. *Estudo etnomatemático sobre artefactos construídos por artesãos portugueses da região de Trás-os-Montes e Alto Douro*

A região de Trás-os-Montes e Alto Douro é caraterística pelas suas vinhas nas escarpas do rio Douro. Nos tempos em que a mecanização era bem menor, várias profissões subsidiárias da agricultura ou, como se dizia, artes, eram o ganha pão de muitos. Referimo-nos a cesteiros, tanoeiros, latoeiros e jugueiros cuja função era construir artefactos necessários a diversas tarefas ligadas à agricultura.

Atualmente, estas profissões estão a cair em desuso e a desaparecer. O estudo etnomatemático de artefactos que constroem não só permite valorizar e preservar aspetos culturais da região, como também possibilita a sua introdução na sala de aula de matemática dando oportunidade aos mais jovens de conhecer esses saberes e saberes-fazer e relacioná-los com conteúdos matemáticos que estudam na escola (Costa, Nascimento, & Catarino, 2017).

Nas próximas subsecções, apresentamos estudos etnomatemáticos relacionados com o trabalho dos tanoeiros, dos latoeiros e dos jugueiros desta região de Portugal.

Artefactos construídos por tanoeiros

Os tanoeiros, na sua arte, têm a particularidade que eles consideram distingui-los de outros artesãos da madeira, que é "trabalharem o redondo". Os pipos, pipas, barris, tonéis e outros vasilhames têm a forma redonda, o que torna a sua construção mais difícil (Costa, Catarino, & Nascimento, 2008a). Para nós, professores de matemática, a esse "redondo" associamos quase imediatamente o número *pi*.

Um dos cálculos mais comuns que o tanoeiro faz é o cálculo da capacidade do barril. Os tanoeiros consideram, intuitivamente, o barril como uma aproximação a um cilindro. Em Costa, Catarino e Nascimento (2011) comparamos a descrição oral do processo empírico para calcular a capacidade de um barril usado pelos tanoeiros que entrevistámos com a forma matemática de calcular o volume de um cilindro e obtivemos, tanto quanto sabemos, uma aproximação desconhecida para $\pi \approx 3{,}025$ – "o pi dos tanoeiros".

Artefactos construídos por latoeiros

Os latoeiros constroem artefactos em lata, muitos dos quais, como dissemos, de utilidade em tarefas agrícolas e outros de uso comum (embora, atualmente, em desuso) como, por exemplo, a almotolia (recipiente para guardar e servir azeite).

Entre as ferramentas usadas pelos latoeiros, encontramos o compasso de pontas secas e a régua não graduada para fazer as marcações na chapa que utilizam, o que, naturalmente, nos fez lembrar os materiais de desenho usado pelos geómetras da antiguidade (Costa, Catarino, & Nascimento, 2008b).

Na figura 13, apresentamos as diferentes etapas da construção de uma almotolia. Destacamos que, neste processo, é notória a passagem do "objeto a duas dimensões" para o "objeto a três dimensões". A almotolia nasce de uma chapa lisa a duas dimensões e, após cortes e arredondamentos, surge a três dimensões com uma forma muito aproximada de um cone.

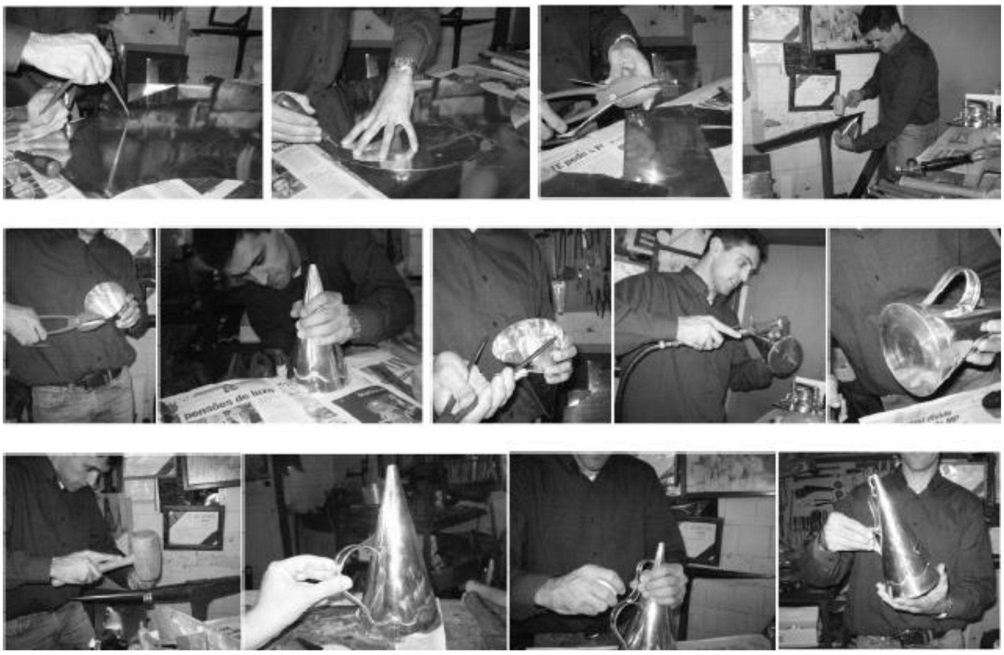


Figura 13 - A construção de uma almotolia em imagens

A construção de uma almotolia em cartolina, com o respetivo cálculo da capacidade, pode ser uma tarefa interessante para alunos do ensino básico.

Artefactos construídos por jugueiros

Os jugueiros são artesãos que constroem jugos – artefactos de madeira usados para unir dois bois quando puxam carroça ou alfaia agrícola. Na figura 14, apresentamos os jugos tradicionais da região de Trás-os-Montes.

Figura 14 - Jugos tradicionais da região de Trás-os-Montes (retirada de Costa, Nascimento, Catarino, & Fernandes, 2011)

Nesta secção, apresentamos o exemplo de uma tarefa criada e implementada numa turma do 9.º ano de escolaridade duma escola do nordeste de Portugal, partindo do jugo tradicional de Vinhais de Ossos (Vila Real). Em Costa et al. (2011), descrevem-se as tarefas feitas com cada um dos três jugos da figura 14.

Na 1.ª fase, o professor Rui Fernandes levou para a sala de aula os jugos e, em pequenos grupos, os alunos efetuaram medições no artefacto de acordo com as instruções (figura 15 à dir.).

Figura 15 - Alunos a efetuar medições no jugo (à esq.) seguindo as instruções dadas (à dir.) (retirada de Costa et al., 2011)

Na 2.ª fase, e com o apoio do software GeoGebra, os alunos procederam a construções que permitiram efetuar um estudo profundo sobre circunferências e simetrias, obtendo resultados de grande beleza (figura 16).

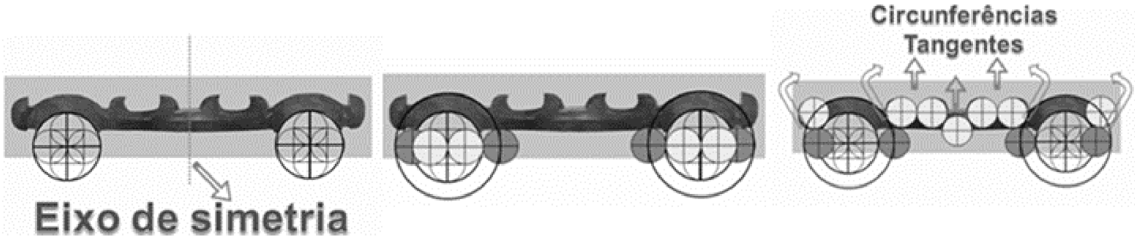


Figura 16 - Produções dos alunos relativas ao jugo de Vinhais de Ossos (Vila Real) (retirada de Costa et al., 2011)

5. Reflexão final

As considerações didáticas que fomos tecendo ao longo das secções anteriores dão pistas aos professores que pretendem experimentar nas suas aulas a etnomatemática como estratégia de ensino e de aprendizagem. A transposição didática dos conhecimentos provenientes da investigação etnomatemática para a sala de aula de Matemática envolve aspetos a ter em consideração que passamos a elencar:

i. selecionar grupos culturais "que se identificam por objectivos e tradições comuns aos grupos." (D'Ambrósio 2001, p. 9) que tenham algum tipo de ligação com os alunos;

ii. escolher desse grupo cultural um ou mais artefactos com potencialidade de proporcionar aprendizagens matemáticas no âmbito dos conteúdos programáticos do ano letivo em causa;

iii. criar tarefa(s) que possibilitem a exploração e trabalho autónomo dos alunos;

iv. promover a apresentação e discussão em grande grupo dos resultados obtidos;

v. proporcionar a apresentação das produções dos alunos à comunidade, se possível ao grupo cultural a que diz respeito o trabalho desenvolvido.

6. Referências

Costa, C. (2019). Ethnomathematics as a teaching strategy in initial teacher's training. *Proceedings of 12th annual International Conference of Education, Research and Innovation (ICERI 2019)*. http://doi. 10.21125/iceri.2019.1722

Costa, C., Catarino, P. & Nascimento, M. M. (2008a). Tanoeiros em Trás-os-Montes e Alto Douro: saberes (etno)matemáticos. In P. Palhares (Coord.). *Etnomatemática Um olhar sobre a Diversidade Cultural e a Aprendizagem Matemática*. (pp. 193-233). Vila Nova de Famalicão: Edições Húmus.

Costa, C., Catarino, P. & Nascimento, M. M. (2008b). Latoeiros em Trás-os-Montes e Alto Douro: saberes (etno)matemáticos. In P. Palhares (Coord.). *Etnomatemática Um olhar sobre a Diversidade Cultural e a Aprendizagem Matemática*. (pp. 235-264) Vila Nova de Famalicão: Edições Húmus.

Costa, C., Catarino, P., & Nascimento, M.M.S. (2011). The alto douro "wine coopers' pi". *Proceedings of the Internacional Conference on New Horizons in Education – INTE2011*(pp. 780-785). Instituto Politécnico da Guarda, Guarda, Portugal.

Costa, C., Dias, D., & Palhares, P. (2019). O grupo étnico Nyaneka-nkhumbi: estudo etnomatemático e sua aplicação à educação matemática. In N. Costa & S. Ambrósio (Coord.). *Nas Raízes do Imbondeiro: Diálogos com a Educação em Contexto Africano* (pp. 79-96). Aveiro: UA Editora.

Costa, C., Nascimento, M., & Catarino, P. (2017). Sinopse dos estudos sobre (etno)saberes matemáticos efetuados no nordeste português e sua aplicação didática. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 10 (1)

Costa, C., Nascimento, M.M.S., Catarino, P. & Fernandes, R. (2011). Trabalhando os jugos em Trás-os-Montes e Alto Douro. *Quadrante*, *19*(1), 93-114.

D' Ambrósio, U. (2001). *Etnomatemática – Elo entre as tradições e a modernidade*. Belo Horizonte: Autêntica.

Dias, D. (2016). *Estudo etnomatemático sobre o grupo étnico Nyaneka-nkhumbi do sudoeste de Angola: Aplicações à Educação Matemática* (Tese de doutoramento não publicada). Universidade do Minho, Braga. Consultado em http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/42586

Dias, D., Costa, C., & Palhares, P. (2015). Sobre as casas tradicionais de pau-a-pique do grupo étnico Nyaneka-nkhumbi do Sudoeste de Angola. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *8* (1):10- 28

Dias, D., Costa, C., & Palhares, P. (2017). Sobre os cestos tradicionais manufaturados pelas mulheres Nyaneka-nkhumbi de Angola. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 10(1)

Gerdes, P. (2007). Etnomatemática – Reflexões sobre matemática e e diversidade cultural. Vila Nova de Famalicão: Edições Húmus.

Gerdes, P. (2013). *Etnogeometria: Cultura e o despertar do pensamento geométrico*. Edições Lulu.

Ministério da Educação e Ciência (2018). *Aprendizagens Essenciais Ensino Básico. Articulação com o Perfil dos Alunos*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência. https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2011). Tarefas de exploração e investigação na aula de Matemática. *Educação Matemática em Foco*, *1*(1), 9-29.

Serra, L. (2016). La cestería como herramienta didáctica para la comprensión de conceptos geometricos. *Revista Sensos-e*.

Contextos não formais do meio próximo da escola – um mundo de oportunidades para (re) encontros com a geometria

Fátima Regina Jorge
Centro de Investigação em Património, Educação e Cultura, Instituto Politécnico de Castelo Branco
Centro de Investigação em Didática e Tecnologia na Formação de Formadores, Universidade de Aveiro

Resumo

A geometria é um domínio curricular genuinamente presente em situações quotidianas, sociais e culturais e que tem um papel central no desenvolvimento de processos cognitivos característicos da atividade matemática. Não obstante, as práticas de ensino tendem a seguir uma abordagem tradicional, pouco exploratória e pobre em conexões, intra e extra-matemáticas, que relegam, com frequência, a geometria e o raciocínio espacial para segundo plano, dando prioridade aos números e operações aritméticas.

A investigação destaca que a educação em contextos não formais, quando articulada com o trabalho em sala de aula, pode favorecer a diversificação das metodologias de ensino, potenciando aprendizagens ativas, significativas, integradas e socializadoras, e, simultaneamente, conduzindo a uma maior motivação e cooperação na realização de atividades. Os resultados da investigação nesta temática têm vindo a evidenciar a relevância educativa de contextos do meio próximo da escola/cidade, nos quais se enquadram, por exemplo, museus, exposições ou elementos do património natural e edificado.

Partindo de orientações curriculares atuais para o ensino da matemática/geometria e ancorados nos princípios da Educação Matemática Realista e no modelo de pensamento geométrico de van Hiele, propomo-nos, com base numa revisão de literatura sobre as problemáticas acima referidas: discutir o papel e o valor da interação da escola com contextos do meio local para o ensino-aprendizagem da matemática; apresentar e analisar experiências didáticas desenvolvidas na interação entre contextos formais e não-formais propiciadas pela participação em visitas de estudo ou em trilhos matemáticos levados a efeito em espaços exteriores à escola.

Palavras-chave: Educação matemática realista; contextos não-formais; trilhos matemáticos; geometria.

Introdução

O Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória constitui um documento de referência para a "organização e gestão curriculares (…) e, ainda, para a definição de estratégias, metodologias e procedimentos pedagógico-didáticos a utilizar na prática letiva" (Martins, Gomes, Brocado, Pedroso, & Carrillo, 2018, pp. 8-9). Um dos seus aspetos marcantes prende-se com a mudança de um paradigma centrado no conhecimento para um paradigma focado no desenvolvimento de competências, de natureza cognitiva e metacognitiva, social e emocional, física e prática. Ora, a adequação da ação educativa ao perfil de competências definido para o final da escolaridade obrigatória implica a introdução de um conjunto de alterações nas práticas pedagógico-didáticas, das quais destacamos a importância de associar os "conteúdos disciplinares a situações e problemas de contextos próximos e familiares ao aluno, incluindo os relacionados com o seu meio sociocultural e geográfico", bem como "do ensino, tanto em sala de aula como fora dela, incluir atividades de observação, questionamento da realidade e integração de saberes e dar oportunidade à cooperação, integração e troca de saberes." (*ibidem*, 2018, p. 31).

À luz destas orientações, de outros documentos curriculares para o ensino da matemática, de perspetivas atuais sobre a didática da matemática, e, em particular, da geometria, tomamos como objetivos: discutir o papel e o valor da interação da escola com contextos do meio local para o ensino-aprendizagem da matemática; apresentar e analisar experiências didáticas desenvolvidas na interação entre contextos formais e não-formais propiciadas pela participação em visitas de estudo ou em trilhos matemáticos levados a efeito em espaços exteriores à escola.

1. Quadro teórico

Os Princípios para a Ação, publicados pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), preconizam que uma educação matemática de elevada qualidade requer um ensino eficaz que proporcione aos alunos "experiências de aprendizagem, individuais e colaborativas, que promovam a sua capacidade para verem o sentido das ideias matemáticas, para raciocinarem matematicamente" (NCTM, 2017, p. 7). Tal perspetiva aponta como meta o desenvolvimento de proficiência matemática do aluno, para a qual confluem cinco aspetos interligados e que devem balizar as práticas de ensino: compreensão de conceitos, fluência em procedimentos, competência em estratégias, adequação de raciocínios e atitudes positivas em relação à matemática" (*ibidem*). Um ensino consistente com estas orientações atende à importância de diversificar as metodologias de ensino e as tarefas a propor aos alunos. Estas últimas devem incluir problemas contextualizados, isto é, situações do quotidiano que os capacitem a mobilizar e a aplicar os conhecimentos em novas situações.

> *"School should focus on preparing pupils to be good adaptive learners and this will require planning for learning which encompasses more of the features of out-of-school knowledge use" (Moffett, 2011, p. 279).*

As Aprendizagens Essenciais em Matemática (AEM) constituem um documentado essencial das atuais orientações curriculares portuguesas. Apresentam conteúdos de conhecimento considerados indispensáveis, relevantes e significativos, as capacidades e atitudes a desenvolver obrigatoriamente por todos os alunos, em cada ano de escolaridade, bem como as ações estratégicas de ensino orientadas para o Perfil dos Alunos (Despachos n.º 6944-A/2018 e 8476-A/2018). No ensino básico, o ensino da matemática deve ser norteado por duas finalidades principais: (a) Promover a aquisição e desenvolvimento de conhecimento e experiência em Matemática e a capacidade da sua aplicação em contextos matemáticos e não matemáticos; (b) desenvolver atitudes positivas face à Matemática; e a capacidade de reconhecer e valorizar o papel cultural e social desta ciência. Para a consecução de tais finalidades, são apresentados, para cada conteúdo e tema, objetivos essenciais de aprendizagem e propostas práticas que estabeleçam condições que podem favorecer o alcance desses objetivos. De modo transversal, recomendam-se práticas de trabalho autónomo, colaborativo e de carácter interdisciplinar.

No que se refere, à geometria, as AEM para o ensino básico estão focadas em conteúdos referentes a localização e orientação espacial, figuras geométricas e transformações geométricas, devendo a ação do professor orientar-se para o desenvolvimento nos alunos de capacidades de visualização espacial, da compreensão de propriedades de figuras geométricas e de transformações geométricas. No ensino secundário relevam-se conteúdos relacionados com geometria analítica e cálculo vetorial, no plano e no espaço. De modo transversal aos três ciclos do ensino básico, aponta-se a importância de criar condições para que os alunos, em experiências individuais e de grupo, tenham oportunidade de explorar, analisar e interpretar situações de contextos variados que favoreçam e apoiem uma aprendizagem matemática com sentido; realizar tarefas de natureza diversificada; reconhecer relações entre as ideias matemáticas em geometria e aplicar essas ideias em outros domínios matemáticos e não matemáticos.

O modelo de pensamento geométrico de van Hiele proporciona uma boa base teórica para organizar um ensino da geometria assente no "desenvolvimento do raciocínio dos alunos e de uma aprendizagem com compreensão de novos conceitos, relações e propriedades geométricas" (Gutiérrez & Santos, 2018, p. 2). De acordo com este modelo, a aprendizagem de qualquer conteúdo geométrico não depende da idade do aluno, mas sim do nível de raciocínio geométrico em que se situa. Tal implica um progresso por cinco níveis sequenciais de pensamento. No nível 0, o aluno reconhece uma figura pela sua aparência visual; no nível 1, as figuras são o conjunto das suas propriedades; no nível 2, o aluno reconhece que uma propriedade decorre logicamente de outra. Os dois últimos níveis estão associados a níveis mais elevados de raciocínio matemático, isto é, o aluno elabora deduções formais (nível 3) e compreende a geometria como um sistema formal (nível 4). Naturalmente, cada nível tem linguagem e símbolos linguísticos próprios, a que o professor deve atender (van Hiele, 1999). Nestes pressupostos, um ensino rico e estimulante da geometria deve começar com atividades com características de jogo, que motivem o aluno e permitam ao professor identificar os conhecimentos prévios do aluno sobre o tema, as atividades devem ser, então, cuidadosamente sequenciadas e, pela sua natureza, favorecerem a expressão, oral e/ou por escrito, dos resultados obtidos e a sua discussão com os pares e com o professor. Importa, por fim, que o professor proponha novas tarefas que requeiram a mobilização de conhecimentos e que dê oportunidade ao aluno de, com o seu apoio, rever e sintetizar o que aprendeu (*ibidem*).

A geometria é um dos domínios da matemática escolar cujo ensino-aprendizagem pode ser enriquecido associando os seus conteúdos a situações e problemas de contextos próximos e familiares ao aluno (nos quais se incluem museus e o património cultural e natural do meio próximo da escola). Esta afirmação é suportada pelos princípios da Educação Matemática Realista (EMR), teoria didática assente em seis princípios-chave, convergentes com o modelo de van Hiele, dos quais destacamos os princípios da realidade, da interação e da reinvenção guiada, considerados por Álsina (2016) os traços mais significativos da EMR. O princípio da realidade valoriza as situações problemáticas da vida quotidiana que ajudem o aluno a atribuir significado aos conhecimentos que constroem/desenvolvem enquanto resolvem os problemas; as estratégias de solução informais relacionadas ao contexto são consideradas como um primeiro passo no processo de aprendizagem. O princípio da reinvenção guiada implica que o professor é um agente proativo na aprendizagem do aluno, permitindo-lhe, sob a sua supervisão, reconstruir o conhecimento matemático. O princípio da interação aponta a importância das interações sociais entre alunos e alunos e professor (Álsina, 2016; Van den Heuvel-Panhuizen, Drijvers, 2014).

Os princípios enunciados fundamentam, na opinião de Álsina (2016), o uso de contextos da vida quotidiana no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Referimo-nos a experiências de aprendizagem estruturadas, que têm lugar fora do ambiente de sala de aula, em contextos não formais, que podem potenciar o desenvolvimento cognitivo, pessoal, emocional e social dos alunos, e, consequentemente, promover aprendizagens contextualizadas, ativas, integradas e significativas (e.g. Alsina, 2016; English, Humble, & Barnes, 2010; Moffett, 2011). Neste âmbito, o recurso a trilhos matemáticos, entendidos como percursos pré-planeados que contemplam uma sequência de paragens em que os participantes são desafiados a responder a questões e a explorar a matemática no meio próximo (English, Humble & Barnes, 2010), tem vindo a ganhar relevo na investigação, nomeadamente pelo potencial de enriquecimento e complementaridade do trabalho desenvolvido na escola, em sala de aula (e.g. Avraamidou, & Roth; Moffett, 2011; Paixão, Jorge, Silveira, & Martins, 2019; Osborne, & Dillon, 2007). As experiências de aprendizagem curricular vivenciadas em contextos não formais (por exemplo, em trilhos ou em visitas de estudo), se bem planeadas, podem favorecer uma atmosfera de exploração e aventura propícias à mobilização de conhecimentos e à comunicação das ideias matemáticas (Richardson, 2004), contribuindo para desenvolver a flexibilidade, a criatividade e capacidades de raciocínio e de resolução de problemas (English, Humble & Barnes, 2010).

A organização de um trilho matemático ou de uma visita de estudo supõe o seu alinhamento com os objetivos curriculares, implicando, numa primeira etapa, escolher o contexto não-formal, identificar os conteúdos a aprender e definir os processos matemáticos a partir dos quais estes serão trabalhados. Numa segunda etapa, a construção de sequências didáticas assentes na valorização da interação ente contextos formais e não formais no ensino e na aprendizagem deve nortear-se por alguns princípios didáticos específicos, esquematizados na figura 1: (i) Integrar a visita na aprendizagem escolar, o que significa assinalar conteúdos e objetivos de aprendizagens que relacionem os dois contextos; (ii) estruturar e articular as tarefas a propor nos dois contextos: tarefas pré-visita (gerar interesse e motivação); tarefas durante a visita (criar pontes com os conteúdos curriculares); tarefas pós-visita (ampliar e sistematizar as aprendizagens); (iii) desenvolver estratégias de ensino adaptadas ao contexto não-formal, o que implica promover estratégias de índole socio-construtivista baseadas no trabalho colaborativo e na participação ativa das crianças (e.g. Morentin & Guisasola, 2014; Paixão & Jorge, 2015).

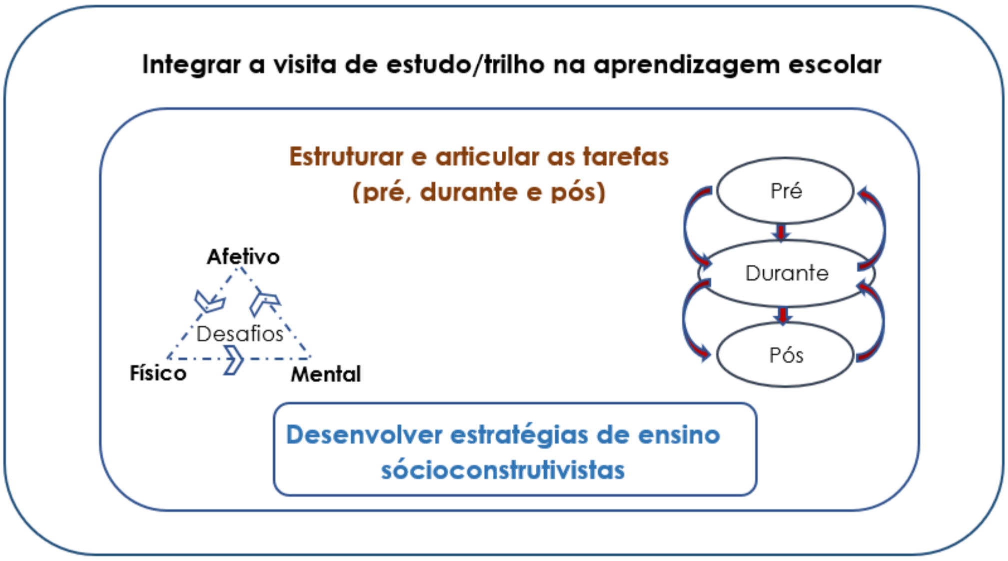


Figura1 - Princípios didáticos para a construção de unidades didáticas na interação entre contexto formal e não-formal

2. Encontros com a geometria em contextos do meio próximo da escola

Ancorados no enquadramento teórico anterior, apresentamos e discutimos cinco experiências didáticas desenvolvidas em unidades curriculares de cursos de mestrados da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Castelo Branco (ESECB).

As duas primeiras situações - “Bons raios te meçam” e “À descoberta da matemática nos caminhos do linho” - envolveram os/as mesmos/as estudantes. Num primeiro momento, participaram numa atividade planeada pelas docentes de Didática da Matemática e das Ciências Naturais, e, num segundo momento, tiveram a oportunidade de planear e implementar um percurso de ação didática dirigido a crianças de salas de 4 e 5 anos de um Centro Infantil da cidade. A terceira – “Modelação matemática de um repuxo em Castelo Branco” – foi desenvolvida por uma professora do 3.º Ciclo do Ensino Básico e Secundário para a Unidade Curricular de Seminário de Didática

Específica do Mestrado em Supervisão e Avaliação Escolar da ESECB[1]. Foi direcionada para alunos de 10.º ano

As duas últimas – "Trilho pela zona histórica de Castelo Branco até ao Museu Cargaleiro" e "Trilho pelo Centro Cívico de Castelo Branco" - foram desenvolvidas em trabalhos de iniciação à investigação para conclusão do Mestrado em Educação Pré-escolar e Ensino do 1º Ciclo do Ensino Básico, seguindo um desenho de investigação-ação. Ambas se dirigiram a alunos do 4.º ano de escolaridade.

O facto de as atividades referidas se desenvolverem na interação entre contextos formais e não formais com vista a promover aprendizagens de índole curricular constitui um traço comum. Para além disso, todas envolvem situações problemáticas contextualizadas e o trabalho em equipa, cooperando e colaborando com os pares.

"Bons raios te meçam"

A atividade "Bons Raios te Meçam", promovida pelo Projeto Matemática no Planeta Terra2013, celebrou em 20 de março de 2017 a chegada do Equinócio da Primavera através da replicação de uma experiência realizada por Eratóstenes há cerca de 2200 anos, que lhe permitiu obter uma estimativa do perímetro da Terra usando sombras e a inclinação dos raios solares. Assim, definiu-se como objetivo da tarefa a obtenção de um valor aproximado do raio equatorial terrestre.

A atividade foi desenvolvida na interação entre a sala de aula e o recinto exterior da ESE, desenvolveu-se ao longo de três dias/aulas e envolveu as duas professoras da UC e 16 estudantes de Didática da Matemática e Ciências Naturais do 1.º ano do Mestrado em Educação Pré-escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico.

Aprendizagens a promover

- Resolver problemas envolvendo uma tarefa prática, observação e registos, confronto de ideias, reflexão crítica e uso consciente de grande rigor e precisão;
- Desenvolver atitudes positivas em relação às ciências e à matemática;
- Problematizar a integração curricular das áreas de matemática e ciências, com intenção didática.
- Compreender o valor dos contextos não formais como recurso no processo de ensino aprendizagem das ciências naturais e da matemática.

Desenvolvimento da atividade

Em sala de aula e no recinto exterior da ESECB, os/as estudantes seguiram rigorosamente o protocolo do projeto ao qual nos associámos[2]. Em sala de aula, começaram por obter as coordenadas geográficas do local da atividade e determinaram, com a maior precisão possível, a distância da sua localização ao ponto no paralelo de latitude igual à declinação do Sol (no dia 20 de março a declinação do Sol é próxima de zero), isto é, a distância ao Equador.

No exterior da ESECB, algum tempo antes do meio dia solar, os/as estudantes começaram por escolher um local com as condições requeridas (plano, horizontal e exposto ao sol) e prepararam o espaço para a atividade, usando materiais de uso comum, tais como um ferro cilíndrico dos usados na construção civil (gnómon), papel de cenário, fita cola, régua com bolha de nível, fio de prumo e régua graduada. Seguindo o guião de atividades, passou-se à realização de medições do comprimento da sombra do gnómon em diferentes momentos e respetivos registo, com vista a identificar a distância mínima (figura 2).

---

[1] Agradecemos à prof.ª Helena Pinho a permissão para divulgar o trabalho.

[2] Disponível em https://www.mat.uc.pt/mpt2013/bons-raios-te-mecam.html.

Figura 2 - Estudantes da ESECB a realizar a atividade "Bons raios te meçam"

De novo em sala de aula, passou-se à realização dos cálculos necessários à obtenção de uma estimativa do perímetro e do raio do planeta Terra e confrontaram-se os resultados com o valor do raio equatorial terrestre.

Por fim, sendo os participantes futuros/as educadores/as organizou-se uma discussão sobre a atividade, encarada do ponto de vista formativo, focando aspetos como o valor da educação em contextos exteriores à escola, a sua articulação com o currículo dos alunos e a interação entre contextos formais e não-formais na aprendizagem das ciências e matemática. Valorizou-se ainda a perspetiva interdisciplinar da atividade (conexões entre matemática e ciências), o facto de esta favorecer o questionamento da realidade e a adoção de metodologias ativas.

À descoberta da matemática nos caminhos do linho

Os/As mesmos/as estudantes da atividade anterior foram implicados/as numa experiência formativa, enquadrada nas unidades curriculares de Didática da Matemática e Ciências Naturais e de Didática do Português e Estudo do Meio Social, contemplando o desenvolvimento de sequências didáticas, dirigidas a crianças de 4 e 5 anos, integrando um trilho a realizar no Horto de Amato Lusitano, também localizado no recinto exterior da ESECB. Estiveram também envolvidos seis educadoras de infância e cerca de 140 crianças, com idades entre os 4 e os 5 anos. Tal como preconizado nas orientações curricular para a educação pré-escolar, as tarefas matemáticas a propor às crianças foram desenvolvidas seguindo uma abordagem integrada e globalizante, facilitada pela exploração de um elemento cultural identitário da cidade.

Aprendizagens a promover

- Explorar e operar com formas geométricas e figuras, compondo padrões e obtendo figuras simétricas em relação a um eixo;
- Identificar posições relativas;
- Desenvolver a autoestima, a persistência e a autonomia em lidar com situações que envolvam a Matemática
- Desenvolver a curiosidade científica;

Desenvolvimento da atividade

O tema escolhido, enquadrado no Projeto Educativo de um Centro Infantil da cidade, focou-se no Bordado de Castelo Branco e seus elementos identitários, nomeadamente, o linho como base do bordado, seda, uso de corantes naturais, componentes figurativos com abundantes simetrias, entre outros. Em conformidade com os princípios didáticos enunciados (figura 1), o plano para cada uma das idades incluiu uma sequência de atividades estruturadas em pré-trilho, trilho e pós-trilho.

Na fase pré-trilho, em contexto de sala de atividades do Jardim de Infância, as crianças das salas dos 4 anos construíram coletivamente uma história, tendo como ponto de partida imagens com elementos do Bordado de Castelo Branco, e montaram puzzles com os mesmos motivos-base. Já no

Horto Amato Lusitano, as crianças participaram num trilho que incluiu jogos tradicionais, a exploração de noções topológicas, a continuação de padrões de repetição cujos primeiros termos estavam colocados no solo.

No pós-trilho, no Jardim de Infância, os grupos de 5 anos construíram, em pequenos grupos, um conjunto de seis puzzles Tangram, que depois seriaram em conformidade com "as fases do linho" (figura 3), e criaram cravos, motivo comum no bordado de Castelo Branco, com simetria de reflexão por dobragem e recorte (figura 4).

Figura 3 - Conjunto de tangrans – fases do linho "da semente ao pano do bordado"

Figura 4 - Criação de motivo do bordado de Castelo Branco por reflexão

Da análise das reflexões dos/as estudantes sobressaiu a perceção de que as crianças tiveram experiências de aprendizagem significativas e motivadoras, que o contacto com o meio local estimulou a sua curiosidade e que as atividades promoveram a construção articulada do saber, abordando as diferentes áreas de forma integrada (Martins, Jorge, Paixão, Pais, & Dionísio, 2018).

Modelação matemática de um repuxo em Castelo Branco

A atividade foi planeada para o ensino secundário (10.º ano), integra-se no domínio das funções reais de variável real – funções quadráticas e foi planeada para proporcionar experiências de aprendizagem colaborativa e a oportunidade de os alunos usarem tecnologia gráfica. Foi elaborado um guião norteador do trabalho dos alunos, centrado numa tarefa cuja finalidade remetia para a modelação matemática de uma situação real associada a um elemento artístico/arquitetónico da cidade, um repuxo de água.

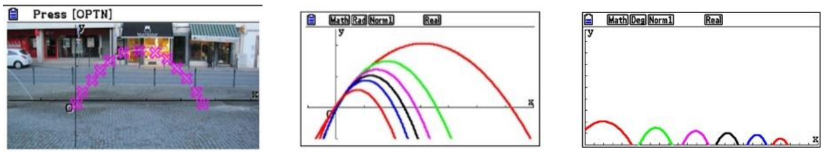
Aprendizagens a promover:

- Relacionar propriedades geométricas dos gráficos com propriedades das respetivas funções.
- Resolver problemas envolvendo a função quadrática e a modelação de fenómenos reais.

Desenvolvimento da atividade

A atividade implicou uma deslocação dos alunos ao centro da cidade (rua da Sé), onde se encontra um repuxo constituído por seis jatos de água. Em contexto não-formal, os alunos são desafiados a fotografar o repuxo e cada um dos jatos, separadamente, e a medir e registar os comprimentos e alturas de cada um dos arcos formados pela água. Posteriormente, em sala de aula, seguindo um guião construído pela professora, os alunos modelam a situação com recurso à calculadora gráfica, o que incluiu o *upload* das fotografias, a regressão de cada uma das curvas e a representação gráfica das seis funções (figura 5).

Para finalizar a atividade, os alunos são desafiados a elaborarem as representações gráficas que se podem visualizar nos repuxos, lado a lado, recriando o sentido do movimento da água, efetuando as transformações necessárias nas expressões analíticas das funções, correspondentes a essas representações gráficas (figura 5).



$$
\begin{aligned}
y_1 &= -0{,}21(-x+5)^2 + 1{,}3(-x+5) + 0{,}04\\
y_2 &= -0{,}48(-x+9{,}4)^2 + 1{,}74(-x+9{,}4) - 0{,}09\\
y_3 &= -0{,}62(-x+13{,}3)^2 + 1{,}78(-x+13{,}3) - 0{,}06\\
y_4 &= -0{,}72(-x+16{,}5)^2 + 1{,}77(-x+16{,}5) - 0{,}06\\
y_5 &= -0{,}84(-x+19{,}5)^2 + 1{,}77(-x+19{,}5) - 0{,}06\\
y_6 &= -0{,}87(-x+21{,}7)^2 + 1{,}32(-x+21{,}7) + 0{,}06
\end{aligned}
$$

Figura 5 - Etapas para a modelação matemática dos seis jatos de água

A metodologia proposta para a atividade inclui a apresentação da temática e dos objetivos da atividade ao grande grupo; deslocação ao local; trabalho em pequeno grupo (em sala de aula) e discussão em plenário.

Trilho pela zona histórica de Castelo Branco

Este trilho, realizado por uma turma de 4.º ano de escolaridade, envolveu quatro paragens em pontos de referência num percurso a pé com início na Escola Básica e fim no Museu Cargaleiro, que visitaram. As tarefas propostas tomaram como ponto de partida o valor do património artístico local para a aprendizagem por questionamento. Em particular, uma das tarefas, propostas após o trilho, em sala de aula, emergiu da análise de um quadro de Manuel Cargaleiro, marcado pela geometrização da tela, e centrou-se na questão-problema: "Todos os polígonos regulares pavimentam o plano?"

Aprendizagens a promover

- Realizar, representar e comparar diferentes itinerários ligando os mesmos pontos (inicial e final) e utilizando pontos de referência;
- Ler e utilizar mapas;
- Construir pavimentações com polígonos, passando da previsão à testagem.
- Conceber e aplicar estratégias na resolução de situações envolvendo propriedades das figuras geométricas no plano.

Desenvolvimento da atividade

As tarefas propostas para os três momentos visaram, intencionalmente, a integração de diferentes áreas curriculares do 1.º Ciclo do Ensino Básico – matemática, ciências naturais e português. Em matemática, foram trabalhos conteúdos relacionados com orientação espacial, relações geométricas, formas geométricas e pavimentações do plano com polígonos regulares (Figs. 6 a 8).

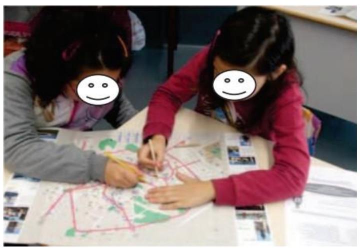
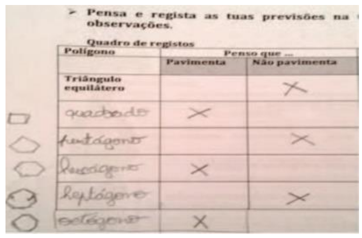


Figura 6 - Traçado de itinerários (pré-trilho)

Figura 7 - Formas geométricas em pórticos (trilho)



➢ Pensa e regista as tuas previsões na
observações.

Quadro de registos

Polígono	Penso que …	
	Pavimenta	Não pavimenta
Triângulo equilátero		X
quadrado	X	
pentágono		X
hexágono	X	
heptágono		X
octógono	X	

Figura 8 - Previsões sobre a possibilidade de polígonos regulares pavimentarem o plano (pós-trilho)

A articulação estabelecida entre os dois contextos, através do envolvimento dos alunos na realização de atividades em três momentos distintos, estimulou os alunos de forma criativa e apelou a diferentes modos de observar e compreender a matemática e as ciências no mundo que os rodeia (Paixão, Jorge & Antunes, 2016).

Trilho pelo Centro Cívico de Castelo Branco

A última experiência didática que aqui apresentamos envolveu uma turma de 4.º ano de escolaridade e incluiu um trilho no centro cívico de Castelo Branco. De acordo com o guião do trilho, este foi organizado em 3 pontos chave – Centro de Cultura Contemporânea de Castelo Branco (CCCCB) e meio envolvente; peças da exposição temporária *Planet Ferrovia Sector IX Via Lusitânea*, do artista Viktor Ferrando, no exterior do CCCCB; interior do CCCCB onde estavam algumas instalações, parte integrante da exposição. As tarefas matemáticas incidiram, essencialmente, em conteúdos relacionados com figuras geométricas (identificação e classificação)

Aprendizagens a promover

- Conhecer o património da cidade, apreciando-o do ponto de vista estético, artístico e matemático;
- Identificar figuras geométricas na arte e na arquitetura.
- Reconhecer propriedades de figuras geométricas;
- Estimar dimensões de objetos/esculturas de grande tamanho.

Desenvolvimento da atividade

O trilho foi organizado em três estações diferentes, e para cada uma delas eram propostas no guião do aluno as atividades a realizar. Na figura 9 apresenta-se parte das atividades matemáticas da estação "CCCCB e meio envolvente" que incluíam responder a questões sobre formas geométricas presentes em elementos das fachadas do edifício, fazer representações em papel quadriculado e identificar, nas representações, ângulos agudos, retos e obtusos.

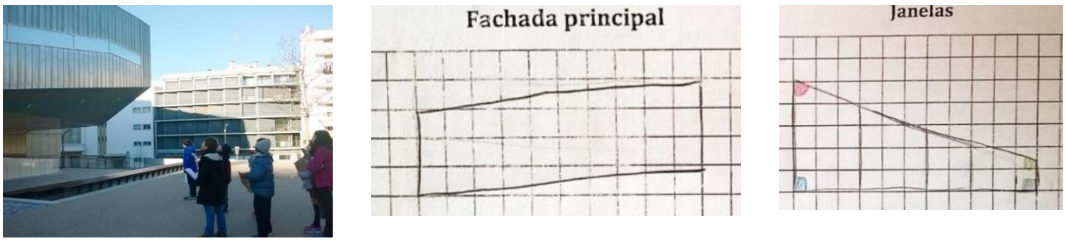


Figura 9 - Representação de elementos geométricos do CCCCB e classificação de ângulos

Outra das estações estava associada à exposição no exterior do edifício, constituída por peças de grandes dimensões, inspiradas em planetas e satélites do Sistema Solar, repletas de simetrias e de muitas outras ideias marcadamente geométricas. Os alunos puderam apreciar e dar resposta a situações relacionadas com a forma e a medida, e também usar a sua imaginação na interpretação das esculturas.

As atividades geométricas realizadas pelos alunos requerem a perceção de figuras inseridas em fundos complexos, identificação de características geométricas de diferentes elementos do património edificado (paredes, janelas) e do tipo de ângulos presentes nesses elementos (Jorge, & Silva, 2016).

3. Considerações finais

Apresentamos alguns exemplos de experiências didáticas desenvolvidas na interação entre contextos formais e não formais em diferentes níveis de ensino, desde a educação pré-escolar ao ensino superior, neste último caso, no âmbito da formação de educadores de infância e professores do 1.º CEB. Seja através da organização de visitas de estudo a locais específicos, seja através do desenvolvimento trilhos, no espaço exterior da ESECB ou na cidade, procurámos evidenciar que são muitos e diversificados os conteúdos matemáticos que podem emergir de contextos exteriores à sala de aula, que é possível construir tarefas contextualizadas e em que se privilegia uma abordagem interdisciplinar (conexões entre geometria e outras áreas do conhecimento e/ou o quotidiano dos alunos), dirigidas a diferentes níveis e ciclos de educação e ensino, em que os alunos se podem envolver cognitiva, física e emocionalmente.

4. Referências

Alsina, A., Novo, M.L., & Moreno, A. (2016). Redescubriendo el entorno con ojos matemáticos: Aprendizaje realista de la geometría en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 5*(1), 1-20.

Avraamidou, L., & Roth, W.-M. (2016). Prologue: Intersections of Formal and Informal Science. Lucy Avraamidou & Wolff-Michael Roth (Eds.), *Intersections of Formal and Informal Science* (pp. xvi-xxv). Routledge.

English, L. D., Humble, S. & Barnes, V. E. (2010). Trailblazers. *Teaching Children Mathematics, 16*(7), 402–412.

Guttiérrez, A., & Santos, L. (2018). Contributos da Investigação sobre o ensino e a aprendizagem da geometria. *Quadrante*, XXVII(2), 1-6.

Jorge, F. R., & Silva, N. (2016). Cidade, Escola e Explorações geométricas - um triângulo de aprendizagem no 1.º Ciclo do Ensino Básico. In M. H. Martinho, R. A Tomás Ferreira, I. Vale, I., & H. Guimarães (Eds.), *Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 229-248). APM (ISBN 978-972-8768-63-8).

Martins, H., Jorge, F. R., Paixão, A., Pais, A., & Dionísio, S. (2018). À descoberta da Matemática nos caminhos do linho. *Educação e Matemática*, 148, 4-6.

Moffett, P. V. (2011). Outdoor mathematics trails: an evaluation of one training partnership. *Education 3-13*, 39(3), 277-287.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM](2017(2014)). *Princípios para a ação. Assegurar a todos o sucesso em Matemática (edição portuguesa).* NCTM.

Martins, G. O., Gomes, C.A, Brocado, J., Pedroso, C.A., Carrillo, J. A., et al. (2018). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Ministério da Educação, Direção-Geral da Educação.

Osborne, J. & Dillon J. (2007). Research on learning in informal contexts: Advancing the field? *International Journal of Science Education*, 29(12): 1441-1445.

Paixão, F., Jorge, F. R. & Antunes, L. (2016). Articulação Ciência-Sociedade através do património artístico local – atividades e recursos didáticos centrados no Museu Cargaleiro. *Indagatio Didactica*, 8(1), 1322-1338.

Paixão, F., Jorge, F. R., Silveira, P. & Martins, H. (2019). Didática e prática em diálogo: contributos para o desenvolvimento profissional na formação inicial. In C. Vasconcelos, R. A. Ferreira, C. Calheiros, A. Cardoso, B. Mota & T. Ribeiro (Eds.), *Educação em Ciências: cruzar caminhos, unir saberes – Livro de Atas* (pp. 301-309). Edições da Universidade do Porto.

Paixão, M. F. & Jorge, F. R. (2012). Explorar espaços físicos e sociais da cidade para a educação científica. In M. J. Martín-Díaz, M. S. Gutiérrez-Julián & M. A. Gómez-Crespo (Coords.), *Actas do VII Seminário Ibérico/III Seminário Ibero-americano CTS no ensino das Ciências "Ciência, Tecnologia e Sociedade no futuro do ensino das ciências"* (pp.1-12). AIA-CTS.

Richardson, Kim (2004). Designing Math Trails for the Elementary School. *Teaching Children Mathematics,* 11, 8–12.

Van den Heuvel-Panhuizen, M, & Drijvers, P. (2014). Realistic Mathematics Education. In S. S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of Mathematics Education (pp. 521-525). Springer.

Van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathema*.

As ‘Aprendizagens essenciais’ de Geometria a partir de dois olhares

Joaquim Pinto
Agrupamento de Escolas da Gafanha da Nazaré
prof.joaquimpinto@gmail.com

Marisabel Antunes
Agrupamento de Escolas de Oliveira do Bairro
prof.marisabelantunes@gmail.com

Resumo

Neste pequeno texto, apresentamos uma breve resenha histórica que visa contextualizar as ‘Aprendizagens essenciais’ e o ‘Perfil do aluno à saída da escolaridade obrigatória’ no ensino atual da Matemática em Portugal. De seguida, respondemos às questões colocadas no Painel “As aprendizagens essenciais em Geometria a partir de diferentes olhares” integrante do Encontro Matemática Com Vida – Diferentes Olhares Sobre a Geometria, dando a nossa opinião pessoal, descrevendo as competências de Geometria que cada cidadão deve possuir ao concluir a escolaridade obrigatória e referindo-nos aos constrangimentos, ou à falta deles, nas escolas onde os professores estão a lecionar.

Palavras-chave: Aprendizagens essenciais; Geometria; Educação Matemática

1. Breve contextualização histórica

Em Portugal, a Lei de Bases do Sistema Educativo (LBSE) (Lei de Bases Do Sistema Educativo - Lei n.º 46/86 de 14 de Outubro, 1986) estabelece uma duração de nove anos de escolaridade básica, que compreende três ciclos – o 1.º, de quatro anos; o 2.º, de dois anos e o 3.º, de três anos. No entanto, a educação básica é perspetivada como uma unidade integral, através de um processo cumulativo de domínio de conhecimentos e capacidades e de estruturação de atitudes (DGEBS, 1991).

Os Programas curriculares são definidos como

> [...] *documentos prescritivos que intencionalmente se fixam num nível de grande generalidade, na convicção, por um lado, de que é forçoso deixar em aberto um vasto campo de possibilidades alternativas de desenvolvimento curricular, a eleger de acordo com as condições concretas do terreno pedagógico e, por outro, de que ninguém melhor dos que os próprios agentes do processo educativo estarão aptos a tomar tais decisões*. (DGEBS, 1991, p. 10)

Apresentam uma estrutura organizativa que fornece as orientações curriculares enquanto diretrizes básicas, essenciais e claras para o ensino de uma área de conhecimento. Idealmente, as diretrizes dos programas curriculares incluem as componentes estruturantes fundamentais, que são:

"finalidades de ensino da disciplina, gerais ou específicas da etapa do currículo considerada; objetivos gerais referentes para cada ciclo; roteiro ou blocos de conteúdos; orientação metodológica; orientações para a avaliação" (DGEBS, 1991, p. 42). Em particular,

> *As finalidades estabelecem os fins últimos da prática educativa da disciplina, definindo o contributo desta para a prossecução das grandes metas educacionais assinaladas ao conjunto do ensino básico.*
> [...] *Os objectivos gerais de ensino-aprendizagem desempenham uma função orientadora mais imediata. Estabelecem as capacidades que se espera que os alunos venham a adquirir, no âmbito de cada área disciplinar, finda a etapa da escolaridade considerada.*
> [...] *Os conteúdos de cada disciplina são selecionados em função dos respectivos objetivos e das exigências epistemológicas da própria área de conhecimento.* [...] *Surgem estruturados num esquema ou linha de desenvolvimento de relativa generalidade, o qual permite, não obstante, avaliar, numa leitura imediata, a sua funcionalidade.*
> [...] *As orientações metodológicas prescrevem a utilização de estratégias e a organização de actividades sem as quais não podem ser concretizados grande parte dos objectivos estabelecidos, nomeadamente os que respeitam ao desenvolvimento de capacidades, atitudes e valores.*
> [...] *A avaliação contém claramente definidos os parâmetros gerais que devem norteá-la no quadro de uma pedagogia de sucesso. Contém as direções, meios e instrumentos específicos para a sua concretização* (DGEBS, 1991).

Após alguns anos durante os quais o Programa de Matemática para o ensino básico (EB) (1990 para o 1.º CEB e 1991 para os 2.º e 3.º CEB) esteve em vigor, houve necessidade de criar um outro Programa. Surge, então, um programa conhecido como Novo Programa de Matemática do Ensino Básico (NPMEB) (DGIDC, 2007), que começou a ser implementado a partir de 2007. Pretendia ir ao encontro do Currículo Nacional do Ensino Básico (DEB, 2001), documento no qual foram introduzidas importantes mudanças curriculares no que diz respeito às finalidades e objetivos de aprendizagem, dando-se grande ênfase à noção de competência matemática (DGIDC, 2007). Este NPMEB, muito bem estruturado, baseado nas competências sintetizadas, mais tarde, por Niss e Højgaard (2011) e também por Rico e Lupiáñez (2008), veio permitir uma melhoria substancial dos resultados dos estudantes portugueses em avaliações matemáticas internacionais, nomeadamente no *Programme for Internacional Student Assessment* (PISA). Os resultados a Literacia Matemática começaram, a partir de 2012, a registar valores acima da média dos observados pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico (OCDE) (Projavi et al., 2013).

A partir de 2013, entra em vigor um Programa e Metas Curriculares Matemática: Ensino Básico (Bivar et al., 2013) muito afastados da realidade da escola. Este programa, que entrou em vigor sem ter sido testado, gerou grande controvérsia, em particular, relativamente à sua dificuldade e extensão, não tendo sido cumprido na totalidade em qualquer escola.

Houve, então, necessidade de serem criadas, pelo Despacho n.º 6944-A/2018, de 19 de julho, as Aprendizagens Essenciais que têm como missão, designadamente, minorar os prejuízos na Educação Matemática que o Programa de 2013 (Bivar et al., 2013) veio provocar e contribuir para o perfil que se espera que todos os estudantes tenham à saída da escolaridade obrigatória.

De seguida, vamos referirmo-nos às Aprendizagens Essenciais e também ao 'Perfil do aluno à saída da escolaridade obrigatória', dissecando o que, em nossa opinião, trouxeram de novo para o ensino da Matemática.

2. As aprendizagens Essenciais e o Perfil do aluno...

O alargamento da escolaridade obrigatória para 12 anos; as taxas elevadas de retenção dos alunos (Conboy, 2011; Fernandes, 2008; Fernandes et al., 2018; Fernandes & Gonçalves, 2018); os fatores socioeconómicos determinantes no sucesso dos alunos (Pereira, 2010; Pinto et al., 2016, 2019); os Programas demasiado extensos e a desmotivação de alunos e professores e um currículo de disciplinas e interdisciplinar favoreceram a elaboração de Perfil do aluno à Saída da Escolaridade obrigatória e das Aprendizagens essenciais e sua articulação.

Pode ler-se, nos documentos oficiais, que a recente reforma curricular em Portugal exige atenção às aprendizagens mínimas e ao Perfil dos alunos para o séc. XXI. Ostenta uma proposta fundamentada em competências que os futuros cidadãos deverão apresentar à saída da escolaridade obrigatória e algumas sugestões para o seu desenvolvimento. Pretende garantir, a todos, o direito à aprendizagem e ao sucesso educativo, pela adequação da ação educativa às especificidades do aluno e da Escola, pela contextualização interdisciplinar dos saberes e pela promoção de aprendizagens ativas e significativas.

No Dec.-Lei nº 55/2018, de 6 de julho Artigo 3.º b), podemos ler que "As Aprendizagens Essenciais são documentos de orientação curricular base na planificação, realização e avaliação do ensino e da aprendizagem, e visam promover o desenvolvimento das áreas de competências inscritas no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória." As Aprendizagens Essenciais são o conjunto comum de conhecimentos a adquirir, identificados como os conteúdos de conhecimento disciplinar estruturado, indispensáveis, articulados concetualmente, relevantes e significativos, bem como as capacidades e atitudes a desenvolver obrigatoriamente por todos os alunos em cada área disciplinar ou disciplina tendo, em regra, por referência o ano de escolaridade ou de formação.

Estes dois documentos visam estabelecer um referencial curricular para preparar cidadãos para a sua vida fora da escola, tornando-os responsáveis, ativos e aptos a responder a desafios do seu dia-a-dia, conforme, designadamente, o referencial teórico do PISA 2012 (OECD, 2013).

As Aprendizagens Essenciais, em conjunto com o Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, estão ligados a uma cultura de escola baseada na autonomia e no trabalho em equipa educativa dos docentes, nomeadamente ao nível dos conselhos de docentes e de turma. Além disso, defende-se que as disciplinas cruzem o que deve ser ensinado, numa lógica de inter ou mesmo transdisciplinaridade, e que as ações estratégicas adequadas sejam concretizadas para que os alunos aprendam melhor e de forma mais significativa.

Na escolaridade básica, o ensino da Matemática, deve ser norteado pelas seguintes finalidades principais:

- Promover a aquisição e desenvolvimento de conhecimento e experiência em Matemática e a capacidade da sua aplicação em contextos matemáticos e não matemáticos.
- Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de reconhecer e valorizar o papel cultural e social desta ciência.

Cabe-nos, a nós, Professores de Matemática, o dever de desenvolver estas competências nos nossos alunos.

Analisamos, de seguida, as perguntas que nos foram colocadas no Painel "As aprendizagens essenciais em Geometria a partir de diferentes olhares" integrante do Encontro Matemática Com Vida – Diferentes Olhares Sobre a Geometria e tecemos algumas considerações pessoais sobre o que cada uma delas encerra.

3. A Geometria e as Aprendizagens Essenciais

As questões que nos propusemos responder apresentadas no referido Painel serão analisadas a seguir.

- Quais as aprendizagens essenciais a Geometria para o cidadão do século XXI?

Aprendizagens Essenciais envolve a tríade – conhecimentos, capacidades e atitudes – que consubstanciam as competências a desenvolver. Visam preparar cidadãos para a sua vida atual e futura e para as rápidas mudanças na vida social, profissional e pessoal, num contexto complexo, imprevisível.

Consideramos como aprendizagens essenciais a Geometria para o cidadão do século XXI as que possibilitem a esse cidadão, após concluir a escolaridade obrigatória, responder com confiança a todos os desafios que, direta ou indiretamente, envolvem a Geometria que o mundo que o rodeia lhe coloca. Por exemplo, apreciar a arte na arquitetura, conseguir orientar-se numa cidade, tirar partido da tecnologia que tem ao seu dispor para resolver os referidos desafios.

- Em que medida estão alinhadas [as aprendizagens essenciais a Geometria] com o Perfil do Aluno à saída do Ensino Básico?

Diremos que o alinhamento com o Perfil do Aluno à saída do Ensino Básico é o possível, uma vez que as Aprendizagens Essenciais a matemática surgiram, em grande medida, para 'remendar' um programa de Matemática (Bivar et al., 2013) que, feito e aplicado à pressa para obedecer a uma agenda política, não podia trazer nada de bom ao ensino da Matemática, como se veio a provar, na prática, que não trouxe.

No documento das Aprendizagens essenciais, podemos ler:

> *A ação do professor no 3.º ciclo deve ser orientada por forma a que, os alunos prossigam no desenvolvimento da capacidade de visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas, alargando-se o estudo de sólidos geométricos e de figuras planas e das grandezas geométricas, bem como das transformações geométricas. Neste ciclo, aprofunda-se o estudo dos triângulos, e quadriláteros e o estudo das figuras e grandezas geométricas é alargado a outras figuras — trapézios, pirâmides, cones, esfera — e com a introdução das fórmulas para o cálculo das áreas ou volumes respetivos. São estudadas as relações de igualdade geométrica e a relação de semelhança, bem como as razões trigonométricas no triângulo retângulo. A noção de demonstração é introduzida a partir do estudo do Teorema de Pitágoras*

- Quais as condições e/ou os constrangimentos que as escolas e os professores, em Portugal, enfrentam para a sua consecução [das aprendizagens essenciais a Geometria]?

As condições nas escolas somos nós, professores, que temos de criar. Consideramos, deste modo que, na generalidade das escolas, os professores têm condições para implementar as Aprendizagens Essenciais. O maior constrangimento prende-se com o facto de, muitas vezes, ser difícil "casar" os vários documentos oficiais – Programa de Matemática, Metas e Aprendizagens Essenciais –, dados à luz por correntes de pensamento matemático e educacional tão diferentes. Assim, consideramos que constituem, para a escola e para os professores, um grande desafio. Mas, como profissionais da Educação Matemática que somos, vamos dando resposta aos desafios que nos são colocados pela frente.

- A formação (inicial) dá resposta às competências que são necessárias para que os professores do EB explorem a Geometria de forma adequada às exigências de hoje e de amanhã?

Quanto à formação inicial, não temos dúvidas que ela dá resposta às exigências de hoje e de amanhã. Sendo juízes em causa própria, procuramos que os futuros professores de Matemática conheçam e reflitam, por um lado, sobre as Aprendizagens Essenciais e o Perfil do Aluno à Saída da Escolaridade Obrigatória e, por outro lado, sobre os documentos que levaram ao aparecimento destes. O que, naturalmente, lhes vai dar a bagagem necessária para que possam entrar no amanhã como se fosse hoje, ao lado dos seus orientadores e supervisores e, posteriormente, ao lado dos seus pares.

4. Referências

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2013). Programa e Metas Curriculares Matemática: Ensino Básico. In *Ministério da Educação e Ciência*.

Conboy, J. (2011). Retention and science performance in Portugal as evidenced by PISA. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *12*, 311–321. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2011.02.040

DEB. (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico - Competências Essenciais*. Ministério da Educação.

DGEBS. (1991). *Ensino Básico 3.º Ciclo - Organização Curricular e Programas: Vol. I*. Ministério da Educação.

DGIDC. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Ministério da Educação.

Fernandes, D. (2008). Algumas reflexões acerca dos saberes dos alunos em Portugal. *Educação & Sociedade*, *29*(102), 275–296. https://doi.org/10.1590/S0101-73302008000100014

Fernandes, D., & Gonçalves, C. (2018). Para compreender o desempenho dos alunos portugueses no PISA, 2000-2015. In M. I. R. Ortigão (Ed.), *Políticas de avaliação, currículo e qualidade: diálogos sobre o PISA* (pp. 39–68). Editora CRV. https://doi.org/10.24824/978854442369.1

Fernandes, D., Neves, C., Tinoca, L., Viseu, S., & Henriques, S. (2018). *Políticas Educativas e desempenho de Portugal no PISA (2000-2015)*. I.E.U.L.

Lei de Bases do Sistema Educativo - Lei n.º 46/86 de 14 de Outubro, 3067 (1986).

Niss, M., & Højgaard, T. (2011). *Competencies and mathematical learning*. IMFUFA.

OECD. (2013). *PISA 2012 assessment and analytical framework: Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy*. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/9789264190511-en

Pereira, M. C. (2010). Desempenho educativo e igualdade de oportunidades em Portugal e na Europa: O papel da escola e a influência da família. *Boletim Económico - Banco de Portugal*, *16*(4), 25–48.

Pinto, J., Neto, T. B., & Silva, J. C. e. (2019). Fatores influenciadores do desempenho de estudantes portugueses, singapurenses, holandeses, espanhóis e brasileiros em Literacia Matemática no PISA: Revisão Integrativa. *Revista de Estudios y Experiencias En Educación*, *18*(37), 41–60. https://doi.org/10.21703/rexe.20191837dapiedade7

Pinto, J., Silva, J. C. e, & Neto, T. B. (2016). Fatores influenciadores dos resultados de matemática de estudantes portugueses e brasileiros no PISA: revisão integrativa. *Ciência & Educação (Bauru)*, *22*(4), 837–853. https://doi.org/10.1590/1516-731320160040002

Projavi, Ferreira, A. S., & Lourenço, V. (2013). *PISA 2012, Portugal - Primeiros resultados*. ProjAVI Grupo de Projeto para Avaliação Internacional de Alunos.

Rico, L., & Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Alianza Editorial.

Perspetivas atuais e futuras

Helena Campos
Departamento de Matemática da Escola de Ciências e Tecnologia da UTAD
Membro integrado do CIDTFF, Universidade de Aveiro
hcampos@utad.pt
ORCID 0000-0003-2767-0998

Resumo

Atualmente, com a definição do Perfil do Aluno à Saída da Escolaridade Obrigatória e com a flexibilidade curricular, abriu-se um caminho para trabalhar os conceitos matemáticos em ambiente de interdisciplinaridade. O impacto dos documentos curriculares na aprendizagem dos alunos dependerá da forma como os professores se apropriarem destes documentos e das suas implicações em termos de mudanças de práticas de ensino. A conceção e planificação de tarefas e materiais que suportam a prática profissional do professor assente na interdisciplinaridade deve desenvolver-se em grupos de trabalho multidisciplinares, sendo fundamental um investimento significativo na formação de professores, quer inicial quer contínua, porque o professor faz, de facto, a diferença na aprendizagem significativa dos alunos.

Palavras-chave: Geometria, Perfil do aluno à saída da escolaridade obrigatória, Aprendizagens Essenciais, Formação de professores.

1. Articulação entre documentos curriculares

Nas Aprendizagens Essenciais (AE) (Roldão et al, 2018), dá-se uma maior importância às experiências educativas de cada aluno, não apenas ligadas a um conjunto de conhecimentos mas sim relacionadas com as competências previstas no Perfil do Aluno à Saída da Escolaridade Obrigatória (PA) (Martins et al, 2017), nomeadamente, o Raciocínio e Resolução de problemas, o Desenvolvimento Pessoal e Autonomia e os Pensamentos Crítico e Criativo.

Abriu-se caminho para trabalhar em interdisciplinaridade, incentivou-se a flexibilidade curricular e a resolução de problemas que modelam a realidade, de preferência em ambientes tecnológicos. A geometria, que muito contribui para a compreensão do mundo que rodeia os alunos, é um campo fértil de atuação.

Por outro lado, as AE (Roldão et al, 2018), conjugadas com o PA (Martins et al, 2017) e com a autonomia que foi dada às escolas para uma gestão flexível do currículo adaptada a cada realidade (Cohen & Fradique, 2018), dão liberdade ao professor para um ensino mais eficaz, promotor de aprendizagens significativas, integradas e de níveis de maior complexidade, interdisciplinares e relevantes.

Neste contexto, a interação entre o professor e os seus alunos não se pode basear, exclusivamente, na transmissão direta de informação, limitando o envolvimento dos alunos em processos que necessitam de mais tempo e mais reflexão (ler, questionar, experimentar, construir, escrever, debater,…), como a observação de regularidades para identificação de padrões, a construção interdisciplinar de percursos ou produtos e o desenvolvimento de projetos. Além disso, mais do que nunca, é necessário investir em dimensões como a motivação para a aprendizagem, a superação de dificuldades de acordo com os diferentes ritmos e a integração das aprendizagens disciplinares, numa perspetiva não compartimentada mas de conjunto.

Na verdade, é imperativo que o sistema educativo desenvolva em cada aluno outras competências chave para o mercado de trabalho, nomeadamente uma visão transdisciplinar dos assuntos, isto é, a capacidade de compreender as questões com as quais de defrontam através de múltiplas perspetivas, e um pensamento computacional, que envolve a capacidade de compreender e sintetizar grandes conjuntos de dados em modelos abstratos, tirando partido, essencialmente, de pensamento convergente (Davies et al, 2011).

No entanto, o impacto de todos estes documentos curriculares nos processos de ensino e de aprendizagem dependerá, principalmente i) da forma como os professores se apropriam destes documentos e das implicações de tal apropriação em termos de mudanças de práticas de ensino e ii) das ações promovidas pelo Ministério da Educação no sentido da criação de condições favoráveis a uma efetiva mudança de práticas. Realmente, sem uma forte motivação, empenho e articulação dos professores e sem a melhoria da qualidade das condições de trabalho será difícil proporcionar aos alunos o desenvolvimento das competências previstas no PA.

2. Como poderá ser o futuro?

A conceção e planificação de tarefas e materiais que suportam a prática profissional do professor assente nos pressupostos da inter ou transdisciplinaridade só poderá ocorrer em grupos de trabalho multidisciplinares, constituídos com esse propósito específico e que resistam ao tempo. Esta é, aliás, uma das recomendações do recentemente criado Grupo de Trabalho de Matemática.

Realmente, este grupo apresentou as Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática (Canavarro et al, 2020), organizadas em quatro domínios: o currículo de Matemática, as dinâmicas de desenvolvimento curricular, a avaliação do desempenho dos alunos e a formação de docentes. Propõe a elaboração de um novo currículo da matemática global e em sintonia com o PA e realça que o desenvolvimento curricular se concretiza com a realização das práticas de ensino e de avaliação mas que se inicia com múltiplas decisões e com a produção de diversos documentos, trabalho que deve ocorrer diariamente e ao longo de cada ano letivo, e não apenas quando há mudanças curriculares. Defendem, ainda, que devem ser proporcionadas pelas escolas condições indispensáveis a um verdadeiro e profícuo trabalho transdisciplinar por parte dos docentes, nomeadamente, a possibilidade de efetivo trabalho colaborativo entre professores tanto da mesma área disciplinar como de outras áreas e apoiado por recursos que contribuam para a realização de práticas curriculares adequadas à Matemática.

Também recomendam uma mudança do paradigma da avaliação dos alunos, transformando-se numa avaliação *para* a aprendizagem e não apenas uma avaliação *das* aprendizagens. Como medida de prevenção de insucesso em Matemática, sustentam medidas de apoio a desenvolver aos primeiros sinais de dificuldades manifestados pelos alunos. Relativamente às provas externas, são de opinião que não devem focar-se, exclusivamente, na avaliação escrita de conhecimentos matemáticos estritos, mas incluir também atitudes e valores, ampliando-se o tempo dedicado à mesma e diversificando-se os modos de avaliar.

3. Formação inicial e contínua de professores

Por outro lado, é fundamental um investimento significativo na formação de professores, quer inicial quer contínua. Ao nível da formação inicial, é fundamental a colaboração entre docentes do Ensino

Superior com diferentes formações. Nomeadamente, a colaboração entre docentes da área da Didática da Matemática e os que lecionam unidades curriculares da área da Matemática, bem como com docentes de outras áreas disciplinares com as quais se podem estabelecer conexões matemáticas. Isso contribuirá para a definição de competências adequadas à futura atividade profissional dos estudantes bem como de conteúdos relevantes e de uma abordagem inovadora, abordagem que deve considerar as ferramentas tecnológicas como recursos para o ensino e a aprendizagem da Geometria.

Os futuros professores devem poder aceder livremente a aplicações disponíveis na *Internet* e *software* de geometria dinâmica, assim como desenvolver competências a nível da modelação. No entanto, não esquecendo os materiais manipuláveis que favoreçam a compreensão de conhecimentos matemáticos e a conexão entre diferentes representações geométricas.

Uma das componentes essenciais na formação inicial é a Prática de Ensino Supervisionada, sendo necessário dar condições adequadas aos docentes que se disponibilizam a ser professores cooperantes, mantendo uma forte ligação entre estes e a instituição do ensino superior.

Ao longo da prática profissional dos professores, a formação contínua torna-se extremamente importante e deve partir de uma reflexão sobre as suas práticas e do pressuposto de que é imprescindível estar sempre disponível para aprender mais e melhor. No caso específico dos que ensinam Matemática, esta formação deve ser alvo, a nível nacional, de um investimento continuado e focado na promoção do sucesso das aprendizagens de todos os alunos em Matemática.

Finalmente e não menos importante, é imprescindível que cada professor veja o seu papel único reconhecido e valorizado pelas políticas educativas e pela sociedade em geral. Ser docente constitui uma profissão deveras complexa, exigindo uma diária e contínua resolução de problemas e gestão de dificuldades, na qual participam os colegas, os alunos, os encarregados de educação e a sociedade em geral. Decorre deste papel do professor uma necessidade permanente de atualização e de aprofundamento.

Sendo assim, e porque o professor faz, de facto, a diferença na aprendizagem significativa dos alunos, devem ser estabelecidas condições que garantam ao docente o reconhecimento efetivo do seu inestimável papel na sociedade, ampliando as motivações pessoais que o levaram a decidir ser professor.

4. Referências

Canavarro, A., Albuquerque, C., Mestre, C., Martins, H., Carvalho e Siva, J. (cood.), Almiro, J., Santos, L., Gabriel, L., Seabra, O. & Correia, P. (2020) *Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em matemática*. Grupo de Trabalho de Matemática. [Despacho n.º 12530/2018]. (https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/recomendacoes_para_a_melhoria_das_aprendizagens_dos_alunos_em_matematica.pdf)

Cohen, A. & Fradique, J. (2018). *Guia da Autonomia e Flexibilidade Curricular*. (1.ª ed.). Raiz editora.

Davies, A., Fidler, D., & Gorbis, M. (2011). *Future work skills 2020*. Institute for the Future for the University of Phoenix Research Institute. (www.iftf.org).

Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carillo, J., Ucha, L., Silva, L., Encarnação, M., Horta, M., Calçada, M., Nery, R., & Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Direção-Geral da Educação, Ministério da Educação.

Roldão, M., Peralta, H., & Martins I. (2018) *Aprendizagens essenciais- Articulação com o perfil dos alunos Matemática*. (http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais).

A História da Matemática e a Internet: a combinação (im)provável para a aprendizagem da Geometria

Ana Paula Aires
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
CIDTFF – Centro de Investigação em Didática e Tecnologia na Formação de Formadores
aaires@utad.pt
ORCID: 0000-0001-8138-3776

Cecília Costa
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
CIDTFF – Centro de Investigação em Didática e Tecnologia na Formação de Formadores
mcosta@utad.pt
ORCID: 0000-0002-9962-562X

Resumo

Este texto, relativo a um *workshop*, tem como objetivo principal sensibilizar para a importância da integração da História da Matemática, em particular a História da Geometria, na aprendizagem da Geometria nos 2.º e 3.º Ciclos do Ensino Básico. São apresentadas propostas de tarefas investigativas, envolvendo aspetos da História da Geometria e pesquisa na *internet*, que os participantes no workshop realizaram em pequenos grupos. Com base nesta experiência propõe-se, ainda, uma reflexão sobre o potencial da conjugação destas duas ferramentas didáticas (a História da Matemática e a *internet*) no envolvimento ativo dos alunos na aprendizagem da Geometria.

Palavras-chave: História da Matemática; Tecnologia no ensino; Aprendizagem da Geometria; Ensino básico (2.º e 3.º ciclos)

Introdução

Há mais de três décadas que historiadores da matemática defendem a relevância da utilização da História da Matemática no ensino da Matemática apontando várias razões para a sua inclusão (Fauvel, 1997; Fauvel & van Maanen, 2000; Fried, 2001; Struik, 1992).

Segundo Fauvel (1997, p. 18) a "História da Matemática deve ser estritamente auxiliar e subordinar-se ao ensino da matemática e só devem ser utilizados os aspetos que ajudem realmente o aluno". O mesmo autor indica algumas formas de a usar, que adaptamos na construção das tarefas propostas adiante: mencionar matemáticos antigos; fazer introduções históricas aos conceitos novos; encorajar os alunos a compreender os problemas históricos dos quais os conceitos que estão a aprender são resposta; apresentar exercícios baseados em textos matemáticos antigos; realizar projetos sobre a atividade matemática no passado; usar exemplos críticos do passado para ilustrar técnicas e métodos; explorar mal entendidos/erros/visões alternativas do passado para ajudar na compreensão e na resolução de dificuldades dos alunos atuais.

Sendo os nossos alunos atuais nativos digitais e a utilização da *internet* uma realidade constante nas suas vidas, então, enquanto professores devemos criar as condições necessárias para que aquela seja integrada como recurso didático na sala de aula. A questão relevante é como o fazer? A *internet* é uma ferramenta muito útil e rápida para a recolha de informação pelo que pode ser um auxiliar precioso em sala de aula para efetuar pesquisas diversas e apoiar os estudantes na construção do conhecimento. Naturalmente, é necessário ensinar os alunos a usar a *internet* de forma a potenciar as suas possibilidades no processo de aprendizagem, numa utilização responsável e segura da mesma.

A proposta que apresentamos neste workshop é conciliar duas ferramentas, a História da Matemática e a *Internet*, a favor da promoção de uma aprendizagem ativa e significativa, articulando vantagens do passado e do presente (Aires & Costa, 2016).

Na primeira secção apresentamos cinco tarefas dirigidas a alunos dos 2.º e 3.º ciclos do ensino básico envolvendo diversos conteúdos de geometria. Na segunda secção tecemos algumas considerações sobre as mesmas, fruto da reflexão feita pelas autoras e discutida com as colegas participantes no workshop.

1. Tarefas de geometria que conciliam a história da matemática e a *internet*

Neste tipo de tarefas, o professor terá um papel de mediador, no sentido de ir verificando o material recolhido pelo aluno, questionando-o acerca da sua veracidade e rigor e explicando detalhes matemáticos em que o aluno apresente dificuldades.

Estas tarefas tanto podem ser realizadas individualmente como a pares ou em pequenos grupos. É conveniente que cada aluno tenha um computador para que possa proceder à pesquisa na *internet*.

Após a resolução de cada questão da tarefa é desejável que o professor dinamize a discussão dos resultados, primeiro com a apresentação por cada grupo das suas descobertas e depois fazendo uma síntese para o grande grupo dos aspetos a reter daquela atividade.

É ainda importante que o professor explique como se fazem citações (entre aspas ou em itálico, indicando devidamente a fonte) e ensine pelo menos uma norma para referenciar as fontes usadas (sugerimos as Normas APA).

Para todas as tarefas sugerimos que seja solicitado ao aluno a indicação dos sites que usar e que escolha sempre, pelo menos, dois sites diferentes para comparar a informação recolhida. Também é desejável, sempre que possível, solicitar ao aluno que explique por palavras suas as descobertas que vai fazendo.

Tarefa 1

Nível de escolaridade: 5.º ou 6.º anos de escolaridade

Tema: Geometria – Poliedros (Prismas e antiprismas)

Objetivos: recordar características de poliedros e alguns tipos de poliedros (prismas; dar exemplos de formas geométricas menos comuns; articular características de poliedros aos quais são atribuídas propriedades diferentes.

Enunciado da tarefa:

1. Relembra, recorrendo à *internet*, o que é um poliedro e pesquisa um pouco da sua história.
2. Desde cedo que os matemáticos se interessaram pelo estudo dos poliedros. Por exemplo, o tópico final dos *Elementos de Euclides* é o estudo dos cinco *sólidos platónicos*. Descobre o que significam as expressões que estão escritas a itálico. Escreve por palavras tuas um pequeno texto a respeito de cada uma.

3. Explica por palavras tuas o que é um prisma (reto). Complementa o teu texto com imagens de prismas diferentes, explicando porque achas que são diferentes.
4. Procura na *internet* imagens de antiprismas, tenta construí-los com recurso ao material didático *Polydron*. Descobre as diferenças e semelhanças entre prismas e antiprismas.
5. Encontra na *internet* imagens de objetos que tenham a forma (aproximada) de antiprismas.
6. Tenta descobrir a “árvore genealógica” dos antiprismas.

Tarefa 2

Nível de escolaridade: 6.º ano de escolaridade

Tema: Geometria – Áreas do quadrado e do círculo

Objetivos: relacionar a área do quadrado com a área do círculo; efetuar a exploração do número pi.

Enunciado da tarefa:

Num canal da televisão portuguesa existiu um programa que se chamava “A Quadratura do Círculo”. Tratava-se de um programa de debate e reflexão política. De onde terá surgido a ideia deste nome para o programa?

1. Descobre o que significa a expressão “A Quadratura do Círculo”. Redige um pequeno texto onde expliques de que se trata.
2. Explora esta expressão, desenhando um círculo com raio de 3cm e pensando como podes desenhar um quadrado que tenha exatamente área igual à desse círculo.
3. Indica algumas das tentativas que foram feitas por matemáticos antigos para resolver esse problema.
4. Porque achas que terão escolhido este nome para o programa televisivo?

Tarefa 3

Nível de escolaridade: 7.º ano de escolaridade

Tema: Geometria – Teorema de Tales

Objetivos: introduzir a noção de teorema; conhecer o teorema de Tales e a sua história; dar exemplos de aplicabilidade do teorema de Tales.

Enunciado da tarefa:

1. O que significa a palavra Teorema? Transcreve a definição que encontrares e indica os sites que usaste. Em seguida explica por palavras tuas o que significa Teorema.
2. 2.Vais conhecer um teorema que se chama de Tales. Que significa Tales e porque é que o teorema se diz de Tales?
3. O teorema de Tales está associado ao cálculo de medidas de pirâmides do Egipto. Procura a história/lenda que está associada a esse cálculo.
4. O que diz o teorema de Tales? Transcreve o enunciado que encontrares e indica os sites que usaste. Em seguida explica por palavras tuas o que significa.
5. Para que serve o teorema de Tales? Encontra exemplos e explica-os.

Tarefa 4

Nível de escolaridade: 8.º ano de escolaridade

Tema: Teorema de Pitágoras e Ternos Pitagóricos

Objetivos: conhecer os ternos pitagóricos e a sua história; relacionar os ternos pitagóricos com o teorema de Pitágoras; calcular ternos pitagóricos.

Enunciado da tarefa:

Problema: encontrar números inteiros *a*, *b* e *c* que possam representar os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo.

1. Completa a tabela da adição dos quadrados perfeitos dos números de 1 a 15.

a) De todas as somas obtidas, assinala com um círculo as que são quadrados perfeitos.

b) Organiza, uma lista dos ternos (grupo de três números) correspondentes aos casos em que a soma de dois quadrados perfeitos é ainda um quadrado perfeito.

c) Recorrendo à *internet*, investiga que nome damos a estes ternos e pesquisa um pouco da sua história.

d) Um terno pitagórico diz-se primitivo quando os elementos que o formam são primos entre si. Caso contrário diz-se terno não-primitivo ou composto. Identifica nos ternos pitagóricos que descobriste os ternos primitivos.

e) Ao longo dos tempos os matemáticos preocuparam-se em encontrar uma fórmula que permita calcular todos os ternos pitagóricos. Investiga, recorrendo à *internet*, quais foram os matemáticos e a respetiva fórmula que descobriram para calcular todos os ternos pitagóricos. Não te esqueças de indicar os sites que usaste.

Nota Final: Nenhuma das fórmulas fornece todos os ternos pitagóricos, e apenas nos "Elementos" de Euclides se encontra uma solução completa para este problema.

Tarefa 5

Nível de escolaridade: 9.º ano de escolaridade

Tema: Axiomatização da Geometria

Objetivos: introduzir vocabulário do método axiomático – axioma; conhecer Euclides, o livro "Elementos" e os axiomas e postulados de Euclides; consolidar a noção de mediatriz de um segmento de reta; conhecer e demonstrar uma proposição sobre paralelismo.

Enunciado da tarefa:

Parte 1

1. O que significam as palavras Axioma e Postulado? Transcreve as definições que encontrares e indica os sites que usaste. Em seguida explica por palavras tuas o que significam e verifica se são sinónimas.
2. Euclides escreveu uma obra importantíssima intitulada "Elementos". Descobre quem foi Euclides, descreve resumidamente o que são os "Elementos" (sugestão: consulta o site https://books.google.pt/books?id=um94A66MDxkC&printsec=frontcover&hl=pt-PT#v=onepage&q&f=false) e investiga porque é que é considerada uma obra tão relevante.
3. O 5.º postulado de Euclides ficou famoso. Descobre porquê. Elabora uma composição onde expliques o que aprendeste sobre este assunto.
4. Vários matemáticos puseram em causa o 5.º postulado e partindo daí conseguiram criar novas geometrias designadas geometrias não-euclidianas. Investiga sobre este assunto e relata o que descobrires por palavras tuas.

Parte 2

1. No site https://books.google.pt/books?id=um94A66MDxkC&printsec=frontcover&hl=pt-PT#v=onepage&q&f=false, procura a p. 106 do livro e lê com atenção o resultado 10. Identifica, justificando, a que lugar geométrico Euclides se está a referir.
2. No site https://books.google.pt/books?id=um94A66MDxkC&printsec=frontcover&hl=pt-PT#v=onepage&q&f=false, procura a p. 121 do livro e lê com atenção o resultado 30. Transcreve-o e reescreve-o usando uma linguagem mais atual. Escreve por palavras tuas a demonstração desse resultado que é feita por Euclides.

3. Reflexão sobre o potencial desta conjugação didática

A tarefa 1 serve para consolidação de alguns conceitos e suas propriedades e de aprendizagem e familiarização com conceitos novos. Recorre-se à *internet* como meio para o aluno encontrar informação que habitualmente é facultada diretamente pelo professor de modo expositivo, no entanto dada a idade dos alunos é essencial que o professor acompanhe as pesquisas que vão sendo feitas de modo a que os alunos não se dispersem. O recurso à história da matemática permite que os alunos se apercebam da evolução que os conceitos vão tendo ao longo do tempo e também de que alguns que eles estão a começar a conhecer já existem há muitos séculos. Exige ao aluno procura, leitura e seleção crítica de informação, bem como a escrita de textos de sua autoria. Nesta tarefa é introduzido um conceito novo – os antiprismas – que não fazendo parte do programa oficial de modo explícito, pode ser usado, com vantagem, para consolidar a aprendizagem dos poliedros.

A tarefa 2 pretende chamar a atenção dos alunos para o facto de expressões usadas no dia a dia terem um significado próprio que é usado, posteriormente, com outros objetivos, o que alerta para a importância de ter conhecimentos vastos para permitir uma melhor interpretação da realidade. É uma tarefa investigativa na qual não se espera que o aluno resolva o problema (sabido ser irresolúvel), mas que o compreenda e aprecie os esforços que foram feitos durante séculos por diversos matemáticos para o resolver. Esta tarefa permite ainda aperfeiçoar a noção de área de figuras geométricas e trabalhar, por exemplo, as áreas por decomposição.

A tarefa 3 é uma tarefa para a aprendizagem de conceitos novos. Recorre-se à *internet* para que o aluno tenha acesso à informação através de um meio que lhe é apelativo, esperando-se que possa contribuir para o seu envolvimento ativo e consequente aprendizagem. Requer do aluno pesquisa, leitura e seleção crítica da informação, bem como a redação de textos da sua lavra.

A tarefa 4 permite ao aluno conhecer mais um conceito matemático - os Ternos Pitagóricos - que vem na sequência do conhecido teorema de Pitágoras que é abordado no Programa de Matemática do 8.º ano. Apesar de não ser um conteúdo presente de forma explícita neste programa pensamos que faz sentido ser trabalhado pois, de alguma forma, completa o estudo do teorema de Pitágoras. Numa primeira fase os alunos constroem ternos de números que verificam uma propriedade específica e, depois são convidados a recorrer à *internet*, para identificarem esses ternos, bem como a sua história. Numa segunda fase, e mais uma vez, com o auxílio da *internet* e da História da Matemática os alunos tentam identificar os matemáticos que encontraram uma fórmula que permite calcular ternos pitagóricos. E aqui os alunos vão perceber que as fórmulas que existem não permitem calcular todos os ternos pitagóricos: A fórmula atribuída aos pitagóricos $m^2+\left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2$ (para m ímpar) que dá o terno pitagórico

$$m,\quad \frac{m^2-1}{2}\ e\ \frac{m^2+1}{2}$$

A fórmula semelhante $(2m)^2+(m^2-1)^2=(m^2+1)^2$ (para m par ou m ímpar) que dá o terno pitagórico $2m,\ m^2-1\ e\ m^2+1$ atribuída a Platão (~ 380 a.C.). E mais uma vez, a História da

Matemática, mostra que nenhuma destas fórmulas fornece todos os ternos pitagóricos, e apenas nos "Elementos" de Euclides (300 a. C.) se encontra uma solução completa para este problema.

A tarefa 5 é uma tarefa extensa que para facilidade de explicação dividimos em duas partes (parte 1, questões de 1 a 3 e parte 2, questões 4 e 5). As questões da parte 1 têm um carácter mais histórico, no sentido de se pretender que o aluno fique a conhecer certos factos da história da matemática, conforme é indicado nas orientações oficiais. Pretende-se que o aluno use a *internet* para recolher informação. Sugere-se a consulta da tradução de Irineu Bicudo dos Elementos de Euclides (Euclides, 2009).de qualidade reconhecida internacionalmente. O solicitado ao aluno pode ser considerado como um pequeno trabalho de projeto sobre as geometrias euclidiana e não-euclidianas. A questão 4 só existe para o caso de a pesquisa do aluno não o levar até às geometrias não-euclidianas. As questões da parte 2 são de tipo diferente. A questão 4 é uma questão para consolidação da aprendizagem, partindo de informação histórica que pode ser encontrada na *internet*, pretende-se que o aluno seja capaz de a identificar e relacionar com o que já sabe. A questão 5 dá espaço para o aluno conhecer um resultado de Euclides, de o compreender e aprender a demonstrar. Todas estas questões exigem a intervenção do professor quer para supervisionar o trabalho do aluno, quer para o ajudar a ultrapassar dificuldades na compreensão da matemática envolvida, por exemplo, as notações e terminologia utilizada.

4. Considerações finais

Após a realização deste workshop importa salientar alguns aspetos que julgamos relevantes.

Este workshop foi pensado e construído tendo como objetivo principal pôr em evidência como é que a História da Matemática, em particular a História da Geometria, explorando as potencialidades da *internet*, pode constituir-se como uma ferramenta didática poderosa e apelativa para a aprendizagem da Geometria nos 2.º e 3.º Ciclos do Ensino Básico. Tendo em vista esse objetivo foram apresentadas tarefas de cariz investigativo, envolvendo aspetos da História da Geometria e pesquisa na *internet*. Foi um workshop muito dinâmico em que os formandos participaram de uma forma muito ativa e com um nível de satisfação elevado no decurso da realização das tarefas propostas. Manifestaram particular interesse na tarefa 1 que envolvia a descoberta dos antiprismas, utilizando o material manipulável *polydron*. Os participantes construíram antiprismas que foram alvo de registo fotográfico, posteriormente enviado para um grupo de *WhatsApp* criado especificamente para o efeito. Este grupo ainda se mantém e, frequentemente, os participantes partilham informações pertinentes relacionadas com o workshop, como por exemplo referências de livros que encontram.

Assim, esperamos ter contribuído, de alguma forma, para que os participantes reconheçam a importância desta temática e que as tarefas apresentadas sirvam de inspiração para recriarem eles próprios as suas tarefas tornando a sua prática letiva, ainda mais motivadora e promotora de uma maior participação dos alunos.

Enquanto educadores, acreditamos que tarefas deste tipo permitem desenvolver nos alunos uma aprendizagem mais significativa, mais contextualizada da matemática, ao mesmo tempo que possibilitam ao professor assumir uma atitude profissional mais dinâmica e atualizada na escola, que se pretende cada vez mais integrada numa sociedade da informação e comunicação.

5. Referências

Aires, A. P., & Costa, C. (2016). A história da Matemática e a *Internet*: dois aliados na aprendizagem da Matemática, *Revista de Ciência Elementar*, *4*(4): 34-35. doi.org/10.24927/rce2016.034.

Catarino, P. & Costa, C. (2013). *Os antiprismas e o seu potencial no ensino: uma proposta de tarefas no âmbito do tema de geometria e medida para o 1.º Ciclo do Ensino Básico*. (Série Didática das Ciências Puras n.º 57). UTAD.

Euclides (2009). *Os Elementos* (Tradução e introdução de Irineu Bicudo). Editora UNESP.

Fauvel, J. (1997). A utilização da História em educação Matemática. In A. Vieira.; E. Veloso. & M. J. Lagarto. (Orgs.). *Relevância da História no Ensino da matemática, Cadernos do GTHEM n.º 1*. (pp. 15-20). GTHEM/APM.

Fauvel, J., & van Maanen, J. (Eds.). (2000). *History in mathematics education-The ICMI study*. Kluwer.

Fried, M. N. (2001). Can mathematics education and history of mathematics coexist? *Science & Education*, 10, 391- 408.

Struik, D. J. (1992). *História Concisa da Matemática* (2ª Edição). Gradiva.

Geometria com Vida numa TI-Nspire CX II-T

Marisabel Antunes
Agrupamento de Escolas de Oliveira do Bairro
prof.marisabelantunes@gmail.com

Joaquim Pinto
Agrupamento de Escolas da Gafanha da Nazaré
prof.joaquimpinto@gmail.com

Resumo

Neste workshop de trabalho foram apresentadas atividades a desenvolver com a tecnologia gráfica Ti-Nspire CX II-T no âmbito da Geometria.
Apresentou-se a tecnologia gráfica Ti-Nspire CX II-T, as suas diversas potencialidades, destacando os vários ambientes que possui e as interações que permite fazer entre esses diferentes ambientes e, consequentemente, as investigações matemáticas no ambiente de Geometria.
Aos participantes foi solicitado a resolução de algumas atividades práticas, de investigação com a tecnologia gráfica Ti-Nspire CX II-T. Atividades criadas pelo grupo de trabalho T^3, da Associação de professores de Matemática (APM), do qual os dois proponentes deste workshop são formadores.

Palavras-chave: Geometria, Tecnologia Gráfica, TI-Nspire, Ensino, Geometria Dinâmica, Modelação, Investigação

Introdução

A tecnologia é uma ferramenta cada vez mais presente na sociedade e no mercado de trabalho e, também, um recurso essencial no ensino, ajudando os alunos a perceber as ideias matemáticas, a raciocinar, a resolver problemas e a comunicar. Assim, a tecnologia gráfica deve estar presente, quer em contexto de sala de aula, quer em contexto de avaliação externa e interna. O uso da tecnologia na matemática proporciona momentos de exploração, de investigação, de criatividade, de raciocínio, desenvolvendo nos alunos competências matemáticas, explanadas nos programas e nas Aprendizagens Essenciais da disciplina e no perfil dos alunos no final da escolaridade.

O tema Geometria foi um mote para a exploração das potencialidades da calculadora TI-Nspire CX II, resolvendo-se atividades, nos seus vários ambientes e ferramentas disponibilizados por esta tecnologia. Este workshop contemplou temas do 3º ciclo e Secundário e as atividades propostas permitiram trabalhar a Geometria em interligação com os outros grandes temas, nomeadamente as funções.

Exemplo de uma Tarefa realizada:

O SALTO DA PULGA

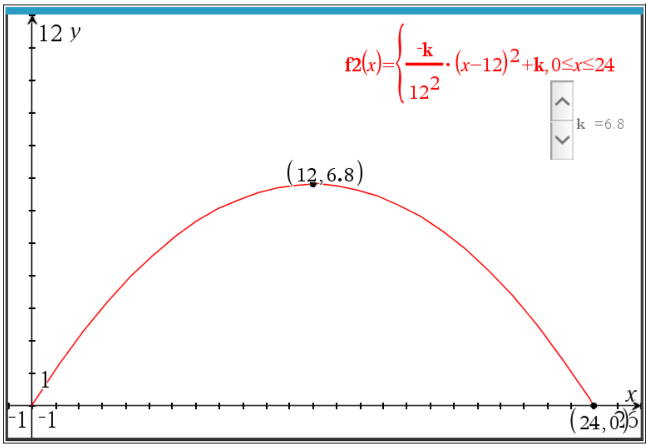
Uma pulga dá um salto em frente, num referencial cartesiano. Inicia o salto a partir da origem e pula de acordo com a equação $y = x - \frac{x^2}{24}$, em que *y* é a altura e x é a distância medida na horizontal, ambas em centímetros.

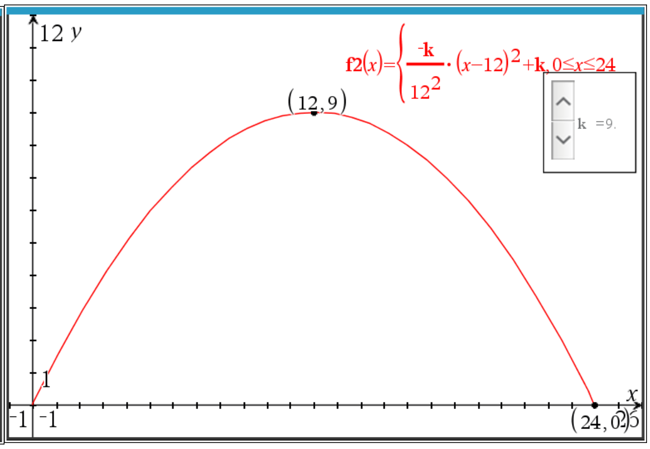
1. A partir do gráfico da função, indica:
   1.1. A que distância cai a pulga.
   1.2. A altura máxima que ela alcança.
2. Sabendo que a pulga inicia sempre os seus saltos a partir da origem, modifica a expressão do salto da pulga, de modo que:
   2.1. Varie a altura do salto, mantendo a distância a que a pulga cai.
   2.2. Varie a distância a que a pulga cai, mantendo a altura do salto.

Propostas de resolução

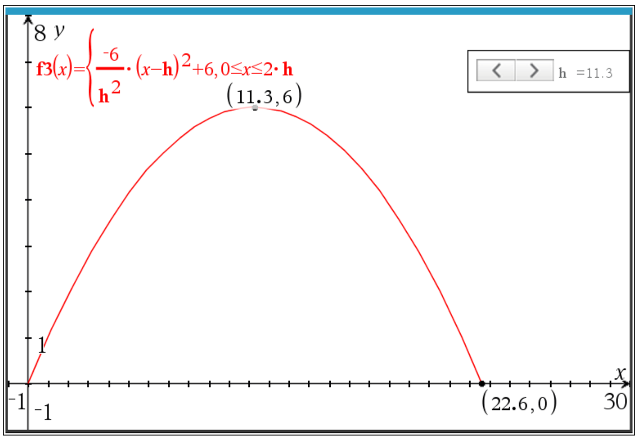
1.1

A pulga cai a uma distância de $24u$.

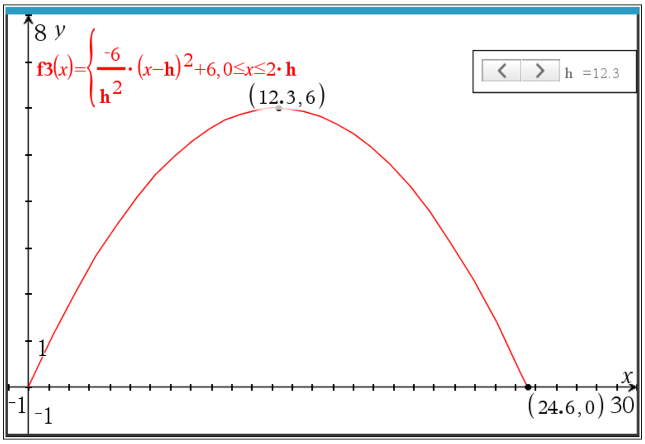




1.2 A pulga salta a uma altura de $6u$.



2.1



$y = -a(x-12)^2 + k,\ a > 0$.

Vértice da parábola: $V = (12, k)$.

Dado que $y(0) = 0$ resulta que

$$-a(0-12)^2 + k = 0 \Leftrightarrow a = \frac{k}{12^2}$$

Assim, $y = -\left(\frac{k}{12^2}\right) \times (x-12)^2 + k$, esta função garante-nos que os zeros da função são $x = 0$ e $x = 24$, variando k alteramos a altura a que a pulga salta sem alterar nem o local de partida nem o local da queda.

2.2

$y = -a(x-h)^2 + 6, a > 0$. Vértice da parábola $V = (h, 6)$. Dado que $y(0) = 0$, resulta que $-a(x-h)^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{6}{h^2}$, ou seja, $y = -\left(\frac{6}{h}\right)^2 \times (x-h)^2 + 6$, esta função garante-nos que a pulga salta da origem mantendo sempre a altura de $6u$.

Conclusões

O workshop contribuiu para a divulgação do uso da calculadora, como ferramenta pedagógica, nas aulas de Matemática, numa prática efetiva e desmistificadora. Foram apresentadas diferentes funções da calculadora e trabalhadas tarefas de geometria dinâmica e de modelação, como a acabada de apresentar. As atividades desenvolvidas proporcionaram momentos de aprendizagem, de discussão e reflexão, que enriqueceram os momentos de trabalho. As atividades práticas poderão ser usadas com os alunos, nas aulas de matemática, na construção do conhecimento. Foi com satisfação que se realizou esta workshop, pois conseguiu-se alcançar os objetivos pretendido

Resolução de Problemas Geométricos

Teresa B. Neto
Centro de Investigação em Didática e Tecnologia na Formação de Formadores - CIDTFF
Universidade de Aveiro

1. Descrição síntese do workshop: objetivos e tópicos abordados

A promoção do raciocínio geométrico, desde os primeiros níveis de ensino, é um objetivo mencionado em vários documentos curriculares (por exemplo, NCTM, 2000). Este importante objetivo implica o desenvolvimento de várias competências, nomeadamente: visualização; operacionalização, representação e argumentação (Kuzniak, Richard & Michael, 2018). A prática efetiva de situações de ensino que permitam trabalhar estas competências representa um desafio para a formação de professores de matemática, considerando que implica o desenho, implementação e avaliação de situações problema específicas. A principal finalidade deste workshop é resolver alguns problemas geométricos, onde a exploração das quatro competências referidas é utilizada como forma de desenvolver a atividade geométrica e de criação de ligações entre diferentes pontos de vista (teóricos e empíricos). Os problemas propostos, envolvem coordenação e integração de vistas de objetos; composição e decomposição de um objeto em partes e figuras planas isoparamétricas.

2. Planificação

Tópicos	Metodologia/Recursos/Materiais
Apresentação do workshop. Competências geométricas. Raciocínio geométrico. Tempo: 45 minutos	Discussão/reflexão sobre: O "Modelo tetraédrico" das competências geométricas; visualização; operacionalização, representação e argumentação (Kuzniak, et al., 2018); O modelo de raciocínio geométrico de Duval (1998): refere três espécies de processos cognitivos que cumprem funções epistemológicas específicas – visualização, construção e raciocínio.
Problemas (parte 1) Coordenação e integração de vistas de objetos; composição e decomposição de um objeto (3D) Tempo: 60 minutos	Resolução dos seguintes problemas – trabalho de grupo: 1) Resolução dos problemas 1, 2 (Anexo); 2) Identificação das competências geométricas envolvidas; 3) enunciar problemas relacionados, cuja solução envolva as competências geométricas referidas, em especial a visualização. Apresentação e discussão dos trabalhos realizados. Materiais: Modelos físicos, Polydron e peças em madeira.

Problemas (parte 2) *Composição e decomposição* de figuras (2D) *em partes* - figuras Iso paramétricas. Tempo: 60 minutos	Resolução dos seguintes problemas – trabalho de grupo: 1) Resolução dos problemas 1, 2 (Anexo); 2) Identificação das competências geométricas envolvidas; 3) enunciar problemas relacionados, cuja solução envolva as competências geométricas referidas, em especial a visualização. Apresentação e discussão dos trabalhos realizados. Materiais/Recursos: GeoGebra

Após a discussão dos processos envolvidos no raciocínio geométrico, bem como o modelo tetraédrico das competências geométricas (Kuzniak, et al., 2018), os participantes foram convidados a resolver um conjunto de problemas com o objetivo de identificar os objetos e processos geométricos colocados em jogo, e reconhecer os diferentes usos da visualização, do raciocínio espacial e da modelação geométrica para resolver problemas.

3. Referências

Apostol, T., & Mnatsakanian, M. (2012). *New Horizons in Geometry*. Mathematical Association of America. doi:10.5948/9781614442103

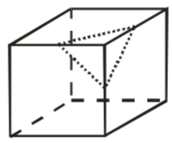
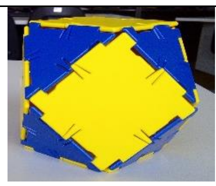
Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V.Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21stCentury*. Kluwer: Dordrecht.

Gonzato, M., Godino, J. D. & Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matememática*, *23*(3), 5-37.

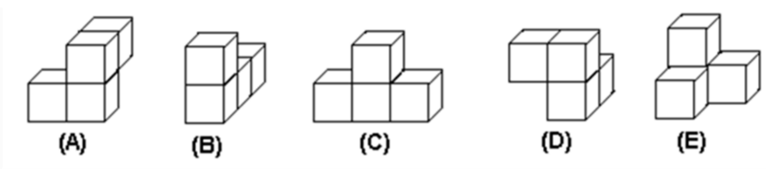
Kuzniak, A., Richard,P. R. & Michael, P. (2018). FROM GEOMETRICAL THINKING TO GEOMETRICAL WORKING COMPETENCIES. In Dreyfus, Artigue, Potari, Prediger, & Kenneth (Eds.), *DEVELOPING RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION - Twenty Years of Communication, Cooperation and Collaboration in Europe* (pp. 01- 20). London, England: Routledge.

Anexo – Problemas Geométricos

Problema 1: Cortam-se todas as esquinas de um cubo de 2 cm de lado, como se indica na figura 1, a uma distância de 1 cm de cada vértice e sobre cada aresta. Quantos vértices tem o sólido obtido?

a) 6 b) 8 c) 12 d) 18 e) 24 1.2. Justifique a sua resposta.	 Figura 1 – Cubo truncado
Materiais/ Recursos: Polydron Solução esperada: c) 12 O corte é feito pelo ponto médio das arestas, o novo sólido terá tantos vértices quantas as arestas do cubo. Como o cubo tem 12 arestas, o novo sólido (cuboctaedro) terá 12 vértices. Poder-se-á recorrer a um modelo físico:	 Figura 2 – Modelo do cubo truncado em Polydron

Problema 2: Forma-se um paralelepípedo retângulo usando 4 peças, cada uma delas formada por 4 cubos (ver a figura da direita). Três das peças vêem-se por completo; a branca só parcialmente. Qual das 5 peças seguintes é a branca?
Justifique a resposta.



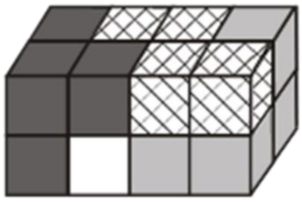
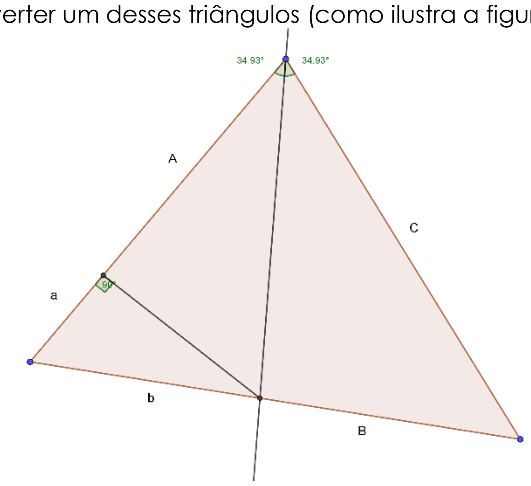
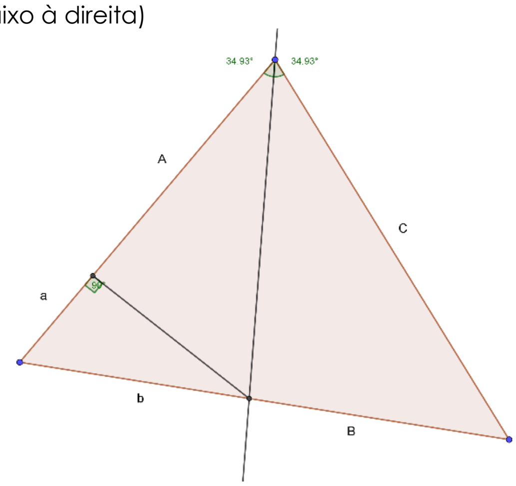


Figura 2 – Pararelepípedo retângulo

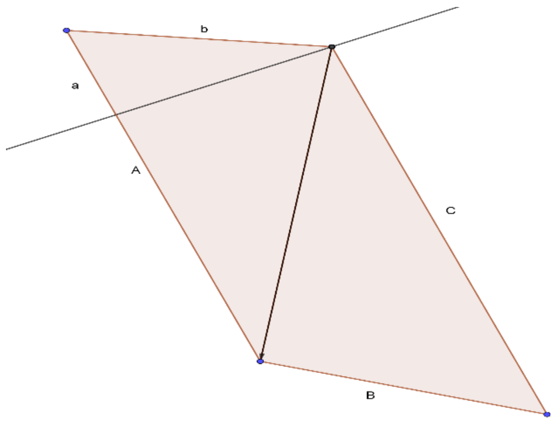
Materiais/Recursos: Peças em madeira
Solução esperada: OPÇÃO (E)
Procedimentos: Observar o paralelepípedo, os cubos pequenos que o formam; observar que a parte superior do retângulo está completamente coberta por peças coloridas e uma delas é tracejada; observar os cubos que vemos na parte inferior – primeira camada (4 em frente e o da esquina traseira direita). Só um deles (dos que estão em frente) é branco; "Visualizar mentalmente" os cubos que não são visíveis na figura; girar 90º a figura da alínea c derrubando-o para frente. Mova-o para caber no paralelepípedo, para comprovar (mentalmente) que é a solução.

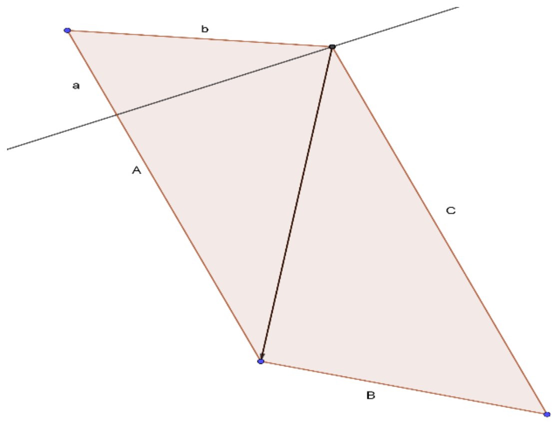
Problema 3: Decomposição de um triângulo qualquer num trapézio com a mesma área e o mesmo perímetro – figuras isoparamétricas.
Materiais/ Recursos: GeoGebra e papel
Possível solução:
1 - Dado um triângulo qualquer:
2 – Marca-se o ângulo bissetor de um dos ângulos internos do triângulo e obtém-se dois triângulos (figura abaixo à esquerda);
3 - Inverter um desses triângulos (como ilustra a figura abaixo à direita)





4 – Decompor o triângulo invertido em dois triângulos retângulos (como mostra a figura a seguir à esquerda):
5 – Inverter o triângulo retângulo mais pequeno e obter um trapézio (ver figura a seguir à direita).
Os polígonos têm os mesmos perímetro e área?
A verificação poderá ser realizada com recurso ao GeoGebra.
Observação: A construção em papel ajudou a identificar as transformações geométricas a realizar no GeoGebra para resolver o problema, ou seja, transformar um triângulo num trapézio isoparamétrico.





Problema 4 (Escolha Múltipla)
Quais as formas de sólidos geométricos que constituem o Torreão? (das seguintes possibilidades seleciona todas as que se aplicam)
Opções:
(A) Cilindro
(B) Prisma hexagonal
(C) Prisma octogonal
(D) Semiesfera
(E) Esfera

Figura 3 – O modelo do Torreão (Ex depósito de água) e a sua decomposição em partes com a forma de sólidos geométricos, http://edupark.web.ua.pt/

Linhas e pontos notáveis do triângulo: que segredos escondem?

Cecília Costa
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
CIDTFF – Centro de Investigação em Didática e Tecnologia na Formação de Formadores
mcosta@utad.pt
ORCID: 0000-0002-9962-562X

Resumo

Este texto, relativo a um workshop, tem como objetivo principal sensibilizar para a potencialidade do estudo das linhas e pontos notáveis do triângulo na aprendizagem da Geometria no 3.º Ciclo do Ensino Básico. Ainda que estes conceitos não façam parte do programa oficial de matemática, podem ser usados com vantagem na realização de tarefas investigativas, recorrendo a diferentes estratégias de ensino e de aprendizagem. A sua abordagem permite a conexão e vários conceitos geométricos abordados neste ciclo de ensino. Os formandos foram desafiados a realizar algumas tarefas e a refletir sobre a aplicabilidade das mesmas nas suas práticas de ensino. A reação dos formandos foi muito positiva.

Palavras-chave: Pontos notáveis do triângulo; Linhas notáveis do triângulo; Aprendizagem da Geometria; Ensino básico (3.º ciclo)

Introdução

O estudo dos triângulos é feito ao longo do ensino básico, em vários anos de escolaridade. Conhecer as linhas e pontos notáveis do triângulo não aparece, explicitamente, nas orientações oficiais para o 3.º ciclo do ensino básico, mas são conceitos passíveis de serem abordados em problemas ou pequenas investigações. O objetivo principal deste workshop é sensibilizar para a potencialidade do estudo destes tópicos.

Neste workshop olhamos para as linhas e pontos notáveis do triângulo segundo diferentes perspetivas possibilitando aos participantes familiarizarem-se com estes conteúdos e com as suas potencialidades educativas através de tarefas. Estas foram realizadas pelos participantes em grupo e discutidas em grande grupo, no sentido de refletir sobre a sua aplicabilidade (direta ou com adequações) em sala de aula de matemática.

O olhar de que falamos usa lentes de matemática, de construção de materiais didáticos manipuláveis, de experimentação de materiais didáticos virtuais, de problemas reais, entre outras.

1. *Olhar* matemático

Dado um polígono convexo com três lados, o bem conhecido triângulo, estudar as suas linhas e pontos notáveis remete para conhecer as (três) alturas, as (três) medianas, as (três) mediatrizes e as (três) bissetrizes, os seus pontos de interseção e as relações entre estes vários elementos geométricos (Fonseca, 2004).

Cada altura do triângulo é o segmento de reta que une na perpendicular um vértice ao lado oposto. O ponto de interseção das alturas do triângulo é o ortocentro.

Cada mediana do triângulo é o segmento de reta que une um vértice ao ponto médio do lado oposto. O ponto de interseção das medianas do triângulo é o baricentro.

Cada mediatriz do triângulo é a mediatriz de cada lado do triângulo. O ponto de interseção das mediatrizes é o circuncentro.

Cada bissetriz do triângulo é a bissetriz de cada ângulo do triângulo. O ponto de interseção das bissetrizes é o incentro.

Prova-se que num triângulo qualquer, o ortocentro, o baricentro e o circuncentro estão sobre uma mesma linha reta, conhecida por Reta de Euler, e que a distância do ortocentro ao baricentro é o dobro da distância do baricentro ao circuncentro.

2. *Olhar* curricular

Nos documentos Aprendizagens Essenciais da Matemática para os 7.º, 8.º e 9.º anos defende-se que os alunos prossigam na compreensão de propriedades de figuras geométricas e aprofunda-se o estudo dos triângulos (Ministério da Educação e Ciência [MEC], 2018). Em particular no 9.º ano de escolaridade, um dos tópicos é identificar e construir lugares geométricos (entre eles, mediatriz e bissetriz) e utilizá-los na resolução de problemas geométricos (MEC, 2018). Neste contexto, e tendo em conta as práticas essenciais de aprendizagem sugeridas em (MEC, 2018), como as a seguir indicadas, existe enquadramento curricular para abordar as linhas e pontos notáveis do triângulo (pelo menos no 9.º ano de escolaridade):

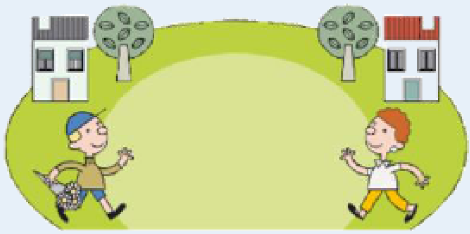
i. Reconhecer relações entre as ideias matemáticas em geometria e aplicar essas ideias noutros domínios matemáticos e não matemáticos.
ii. Resolver problemas que requeiram a aplicação de conhecimentos já aprendidos e apoiem a aprendizagem de novos conhecimentos.
iii. Realizar tarefas de natureza diversificada (projetos, explorações, investigações, resolução de problemas, exercícios, jogos).

3. *Olhar* didático

As considerações tecidas no ponto anterior justificam que para abordar em sala de aula as linhas e pontos notáveis do triângulo será desejável recorrer a problemas e a tarefas de investigação e exploração. Seguimos (Ponte, Quaresma~~,~~ & Branco, 2011, p. 1) ao referirmo-nos a estes tipos de tarefas: "Tal como um problema, uma tarefa de investigação e exploração não é de resolução imediata, requerendo do aluno um esforço de compreensão aprofundado, a formulação de uma estratégia de resolução, a concretização desta estratégia e uma reflexão sobre os resultados obtidos."

Este tipo de tarefas, ainda que mais exigentes, permitem ao aluno desenvolver capacidades e competências de grau mais elevado. Apresentaram-se algumas tarefas aos formandos que as resolveram e refletiram sobre a sua adequação aos seus alunos. Na figura 1 apresentamos a título ilustrativo uma dessas tarefas.

Um encontro traído pela matemática



A Maria e o Manel moram na mesma aldeia e são namorados.

Ambos têm uma arvore nos seus jardins. Um dia, combinaram que se encontrariam no local situado à mesma distância das duas árvores.

Os dois cumpriram o acordo e, à hora marcada, deslocaram-se para o local.

No entanto a Maria zangou-se com o Manel por ele não ter aparecido e o Manel zangou-se porque ele não tinha faltado, ao contrário dela.

Como foi possível ter acontecido esta situação?

Figura 1 – Exemplo de uma tarefa apresentada no workshop (retirada de Silva, 2019, p. 12)

4. *Olhar* através da técnica de origami

O estudo de Bráz (2013) apresenta a construção das linhas notáveis do triângulo e pelas suas interseções os pontos notáveis do triângulo recorrendo a uma folha de papel e a dobragens. Esta técnica permite que os alunos manipulem a folha de papel e através de estratégias relacionadas com propriedades geométricas consigam fazer surgir os vincos na folha de papel (ou apenas no triângulo recortado) que correspondem às alturas, mediatrizes, medianas e bissetrizes do triângulo.

A dobragem e marcação de todas estas linhas no mesmo triângulo permitem ainda perceber a localização (alinhada) do ortocentro, baricentro e circuncentro.

A título ilustrativo incluímos as figuras que permitem obter a mediatriz (figura 2) de um segmento de reta e a bissetriz de um ângulo (figura 3).

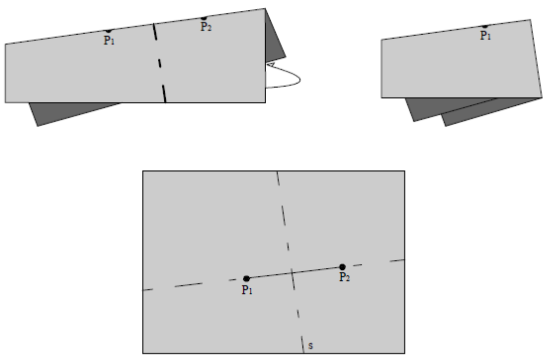


Figura 2 – Dobragens para a obtenção da mediatriz de um segmento de reta (retiradas de Bráz, 2013, p. 31)

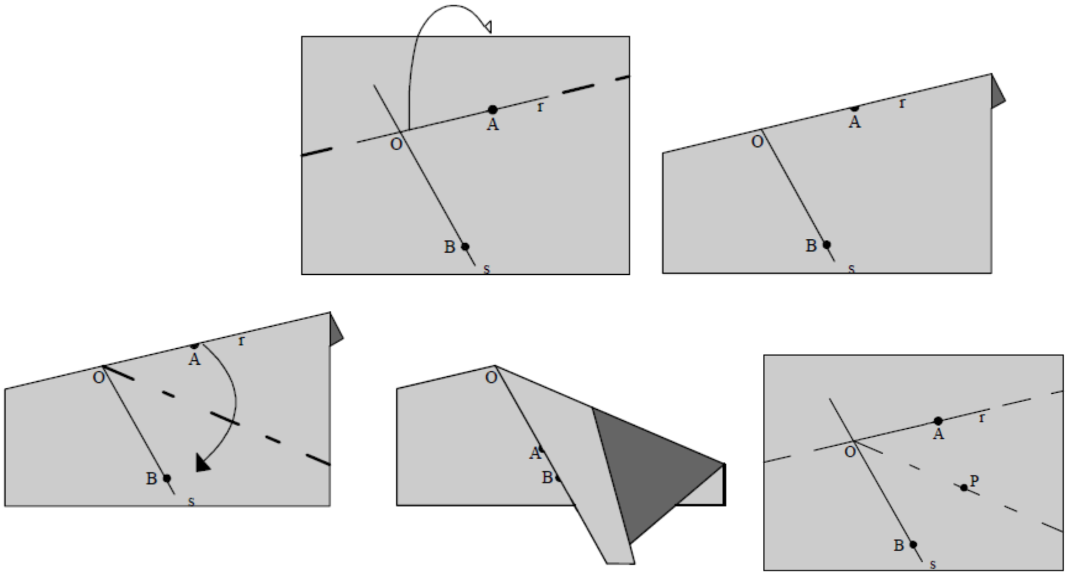


Figura 3 – Dobragens para a obtenção da bissetriz de um ângulo (retiradas de Bráz, 2013, pp. 33-34)

A repetição destes procedimentos para todos os lados e todos os ângulos de um triângulo permite encontrar os respetivos pontos notáveis.

Esta estratégia que usa a manipulação de material (a folha de papel) e a motricidade fina tem vantagens defendidas pelas neurociências que fazem a apologia de que aprendemos pelos sentidos e que a experimentação sensorial é muito importante na aprendizagem de conceitos matemáticos elementares (Mourão-Carvalhal, Costa & Coelho, 2018).

5. *Olhar* através da tecnologia

As tarefas de investigação e exploração a que nos referimos no ponto 3 ganham ainda mais sentido quando utilizamos a tecnologia. Referimo-nos em especial à utilização de software de geometria dinâmica, em particular ao GeoGebra que pelas suas características de gratuitidade e interface amigável, pode ser usado com facilidade pelos alunos desde os primeiros níveis de escolaridade. Constatamos que a maioria das formandas estava familiarizada com este software, ainda que não o usassem para abordar estes assuntos.

No contexto deste workshop, procuramos sensibilizar as formandas para estes aspetos visionando um vídeo disponível na internet. É de referir também a existência de vídeos que pelas potencialidades desse meio tecnológico conseguem mostrar figuras geométricas com movimento que contribuem para uma melhor compreensão dos conceitos.

6. Notas finais

Consideramos que o objetivo principal de sensibilizar as formandas para a potencialidade do estudo das linhas e pontos notáveis do triângulo na aprendizagem da Geometria no 3.º Ciclo do Ensino Básico foi atingido com a diversidade de propostas que foram apresentadas e discutidas em conjunto.

Reconhecemos que é um tema que necessita de ser explorado pelos professores previamente a ser introduzido nas suas aulas, pois contém detalhes de rigor matemático cuja transposição didática tem de ser feita com cuidado.

A finalizar, uma palavra relativa ao envolvimento das formandas no workshop que, por força da pandemia Covid 19, teve de ser dinamizado à distância por videoconferência. Ainda assim, a participação das formandas foi muito positiva e dinâmica, partilhando a resolução das tarefas e reflexões que as mesmas lhes suscitaram.

7. Referências

Bráz, L. (2013). *Uma abordagem didática da geometria dos pontos notáveis de triângulos utilizando origami*. Universidade Federal de Lavras, Brasil.

Mourão-Carvalhal, I., Costa, C., & Coelho, E. (2018). Sabias que a atividade física ajuda a pensar? O contributo do treino motor na aprendizagem da matemática (pp.141-162). In A. M. Abreu & J. Rato (Coord.). *Neuropsicologia do desporto e do movimento humano*. *O que te faltava saber!* Lisboa: Climepsi Editores. ISBN 978-972-796-364-5

Fonseca, L. (2004). Geometria no Plano. In P. Palhares (cood.), *Elementos de Matemática para professores do ensino básico* (251-302). Lisboa: Lidel.

Ministério da Educação e Ciência (2018). *Aprendizagens Essenciais Ensino Básico. Articulação com o Perfil dos Alunos*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência. https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2011). Tarefas de exploração e investigação na aula de Matemática. *Educação Matemática em Foco*, *1*(1), 9-29.

Silva, E. (2019). *Relações entre os pontos notáveis do triângulo e outras construções*. Relatório de Estágio, FCUP, Portugal.

A utilização de Software Educativo no ensino de Geometria e Medida – Tarefas com o uso do Kahoot!, do GeoGebra e da Texas Ti-Nspire

Paula Sofia Nunes
Agrupamento de Escolas de Cabeceiras de Basto
Doutoranda em Didática de Ciências e Tecnologia, UTAD
psofianunes1@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-3262-8180

Paulo Martins
Departamento de Engenharias da Escola de Ciências e Tecnologia da UTAD
Membro integrado do INESC TEC, UTAD
pmartins@utad.pt
https://orcid.org/0000-0002-3040-9080

Paula Maria Machado Cruz Catarino
Departamento de Matemática da Escola de Ciências e Tecnologia da UTAD
Membro colaborador do CIDTFF, Universidade de Aveiro
Membro integrado do CMAT-UTAD, Universidade do Minho
pcatarin@utad.pt
https://orcid.org/0000-0001-6917-5093

Resumo

São vários os Software Educativos utilizados em ambiente de sala de aula para o ensino e a aprendizagem de conteúdos geométricos constituintes do programa de Matemática do Ensino Básico e do Ensino Secundário. Atualmente diversos estudos mostram que o uso deste tipo de recurso tem um papel fundamental nos processos de ensino e de aprendizagem, suscitando nos alunos uma maior motivação para a aprendizagem da Matemática. Além disso, a utilização de Softwares Educativos no ensino de Geometria e Medida é considerada uma excelente ferramenta para o desenvolvimento de tarefas pedagógicas onde é possível trabalhar a aquisição de várias competências. A sua utilização em contexto educativo exige determinados conhecimentos e aptidões que poderão ser adquiridos através da formação. Com este workshop pretendemos dotar os formandos de ferramentas que lhes permitam a utilização do Kahoot!, do GeoGebra e da calculadora gráfica Texas Ti-Nspire e o prosseguimento da sua aprendizagem de forma autónoma. Iremos apresentar um conjunto de tarefas práticas suscetíveis de serem trabalhadas em contexto de sala de aula com o uso destes três tipos de software abordando diversificados conteúdos geométricos.

Palavras-chave: Ensino; Tarefas; Geometria e Medida; Kahoot!; GeoGebra; Texas Ti-Nspire.

Introdução

A utilização de *Software* Educativo (SE) no domínio de Geometria e Medida (GM) possibilita a transformação de uma aula de Matemática num ambiente de investigação, onde os alunos são envolvidos no processo de aprendizagem, através da manipulação, experimentação, observação, formulação de conjeturas, testes e desenvolvimento de explicações para os desafios apresentados. O uso de SE no domínio de GM tornou-se quase imprescindível para a resolução de problemas matemáticos, podendo ser considerados como ferramentas que facilitam a transmissão de conteúdos. Com a sua utilização, o aluno envolve-se no processo cognitivo, através da resolução de tarefas de aprendizagem complexas e do pensamento crítico (Kuzle, 2017).

Os SE possibilitam aos alunos experimentar construções, visualizar figuras, verificar e testar a validade dos teoremas anteriormente abordados e corrigir erros. Permitem também a construção rápida de figuras geométricas sem que os alunos tenham habilidade para o desenho (Xavier et al., 2014). A utilização de ambientes virtuais no ensino, especialmente de softwares gratuitos, poderá provocar transformações dentro sala de aula de Matemática, a qual não só ganhará espaço para a exploração investigativa, crítica e demonstrativa, como também para os cursos de formação de professores, possibilitando o aparecimento de novas práticas pedagógicas (Scheffer et al., 2009).

1. *Kahoot!*, *GeoGebra* e *Texas Ti-Nspire* no ensino de Geometria e Medida

O *Kahoot!* é uma ferramenta que permite ao professor a elaboração de jogos, em diferentes domínios de Matemática, incluindo GM, possibilita a avaliação do desempenho dos alunos, bem como, a comparação dos resultados entre os intervenientes (Sande & Sande, 2018). Proporciona também a gamificação em sala de aula pelas suas características, pois permite: regras claras, *feedback* imediato, pontuação, *rankings*, tempo limitado, reflexão, discussão, inclusão do erro, colaboração e diversão (Silva et al., 2018). A utilização do *Kahoot!* estimula o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa, uma vez que a existência de competição, a música, a presença de elementos dos jogos, provocam o aumento da motivação, um maior envolvimento dos estudantes nas tarefas propostas (Gazotti-Vallin et al., 2017), favorecendo o sucesso académico e consequentemente, um efeito positivo na aprendizagem dos alunos (Correia & Santos, 2017).

As implicações da utilização do jogo educacional digital com o *Kahoot!* têm vindo a ser estudadas por diversos autores (Gazotti-Vallim et al., 2017; Sande & Sande, 2018; Prá et al., 2017). Esta ferramenta aumenta a motivação, pois a sensação de descoberta, a curiosidade, a fantasia e o desafio não se relacionam apenas com o conteúdo abordado, mas também com o processo de jogar e com a competição. A utilização do *Kahoot!* promove a participação ativa dos alunos e atua como ferramenta facilitadora dos processos de ensino e de aprendizagem, visto que o *feedback* imediato disponibilizado de maneira lúdica, através das respetivas pontuações, estimula-os a refazer as atividades na busca da resposta correta, proporcionando uma aprendizagem significativa (Gazotti-Vallim et al., 2017).

O *GeoGebra* é um SE onde se podem trabalhar representações geométricas no âmbito do domínio GM, mas também tem a capacidade de se conectar com outras áreas da Matemática, como é o caso da Álgebra, do Cálculo e da Aritmética. Wan Salleh e Sulaiman (2013) mencionam que o SE *GeoGebra* ou outros similares devem ser utilizados como ferramenta de ensino pelos professores, pois auxiliam os alunos a adquirir uma sensação intuitiva e visualizar adequadamente o processo matemático, permitindo também a exploração de uma maior variedade de funções e estimulando o estabelecimento de conexões entre representações simbólicas e visuais, contribuindo assim para uma aprendizagem significativa. Caligaris et al. (2015) referem que a utilização e integração das *applets* do *GeoGebra* no ensino de Matemática e as situações daí decorrentes, proporcionam uma metodologia de ensino muito mais eficaz do que a tradicional, pois facilita a aprendizagem dos conceitos fundamentais a transmitir pelos professores.

A calculadora *TI-Nspire* da *Texas* também permite trabalhar nos diferentes domínios de Matemática, incluindo GM. Possibilita a exploração de atividades de modelação, simulação e resolução de problemas, fazendo a ligação das várias representações, que é fundamental para a consolidação dos conhecimentos (Mesquita, 2014).

Canavarro (2000) menciona que a calculadora permite a formulação de hipóteses e conjeturas, uma vez que a rapidez com que executa um dado cálculo permite libertar tempo para essa formulação, além de que aumentando o número de interações com a calculadora de forma sistemática e sequenciada, permite confirmar ou recusar uma determinada conjetura inicial, sendo uma das grandes vantagens desta calculadora.

No entanto, para um professor propor recursos que enriqueçam o processo de aprendizagem dos alunos, torna-se necessário um bom conhecimento do artefacto. Facto que exige um grande trabalho individual e em equipa dos professores, conhecimentos de informática e da calculadora para uma prática instrumental eficaz, estratégias específicas e reflexões profundas (Mesquita, 2014).

2. Tarefas implementadas no workshop

Foi realizado um workshop com catorze professores que lecionam a disciplina de Matemática no Ensino Básico ou Ensino Secundário. Esta formação teve como principal objetivo auxiliar os professores na aquisição de competências necessárias para trabalhar e explorar os SE *Kahoot!*, *GeoGebra* e *Texas Ti-Nspire*. Para tal, foram elaboradas Tarefas práticas com recurso a estes SE no domínio de GM.

Inicialmente foi realizado um inquérito por questionário, para fazer o diagnóstico inicial acerca do conhecimento e utilização dos SE *Kahoot!*, *GeoGebra* e *Texas Ti-Npire* pelos professores participantes. No que diz respeito à formação, metade dos professores possuía Licenciatura (50%), sendo que 36% tinha Mestrado e 14% uma Pós-graduação. Na sua formação inicial, cerca de 57% não teve qualquer formação para utilizar nenhum dos SE referidos neste workshop.

Em relação ao *Kahoot!* cerca de 79% dos formandos não o utiliza na sua prática letiva, 71% dos professores não utiliza a *Texas Ti-Nspire* e 64% utiliza o *GeoGebra* nas suas aulas. Por estes resultados verificamos que os professores estavam mais familiarizados com o *GeoGebra* e poucos conheciam e utilizavam o *Kahoot!* ou *Texas Ti-Nspire*.

Foram criadas duas Tarefas com a utilização do *Kahoot!*. Na Tarefa 1 (Figura1), foi dado a conhecer aos formandos todas as funcionalidades dos comandos do *Kahoot*! com o telemóvel ou *smartphone* – versão aluno.

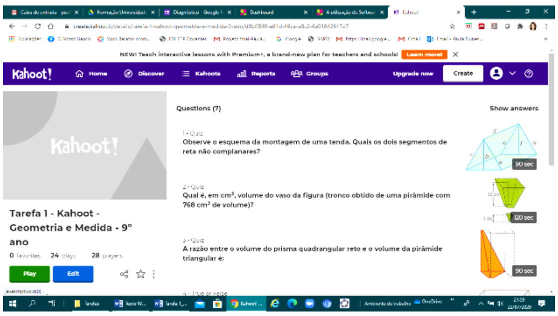


Figura 1 - Tarefa 1-*Kahoot*! versão aluno

Seguidamente, através da elaboração da Tarefa 2, os formandos aprenderam a construir um *Kahoot*! para aplicar aos alunos nas suas aulas-versão professor.

Foram disponibilizadas quatro Tarefas com a utilização do *GeoGebra* no domínio GM. A *Tarefa 1- Ângulo inscrito numa circunferência e ângulo ao centro correspondente*, através da utilização dos vários comandos da barra de ferramentas do *GeoGebra*, tem por objetivo deduzir a propriedade que indica que a amplitude de um ângulo inscrito numa circunferência é metade da amplitude do ângulo ao centro correspondente. O guião da Tarefa 2– *Ângulo inscrito numa semicircunferência,* apresenta duas formas de deduzir esta propriedade com o *GeoGebra*. A Tarefa 3- *Construção do* *pentágono áureo* (Figura 2), foi realizada com os formandos, através da exploração do *GeoGebra* e foi possível deduzir propriedades desta figura geométrica, bem como dos triângulos em que se pode subdividir o pentágono áureo e qual a sua relação com o número de Ouro. Foi ainda possível disponibilizar aos formandos a Tarefa 4-*Construção de um paralelepípedo retangular inscrito numa pirâmide de base quadrangular,* com recurso ao *GeoGebra* 3D e com todos os passos a seguir para a resolução da Tarefa 4.

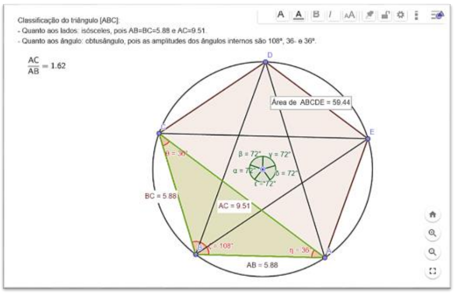


Figura 2 - Pentágono áureo om o *GeoGebra*

No que diz respeito à calculadora gráfica *Texas TI-Nspire*, foram realizadas a Tarefa 1- *Teorema de Pitágoras* e a Tarefa 2- *O incentro e a circunferência inscrita* (Figura 3). Na realização destas Tarefas foram explorados os comandos relativos ao domínio GM.

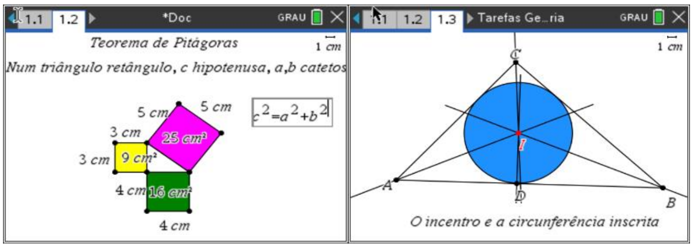


Figura 3 - Tarefas com utilização da *Texas Ti-Nspire*

No fim da realização das Tarefas foi proposto aos formandos um desafio adicional, em que cada um tinha de selecionar uma das três ferramentas apresentadas, fazer o guião e a planificação de uma Tarefa a aplicar em sala de aula, para desenvolver um conteúdo de GM e explicitar as razões da sua escolha.

3. Conclusões

O estudo resultante deste workshop irá prosseguir, no entanto, como conclusões preliminares, verificamos que cerca de 64% dos formandos selecionaram o *Kahoot!* como ferramenta para elaborar uma Tarefa para desenvolver um conteúdo de GM em sala de aula com os seus alunos, 29% escolheram o *GeoGebra* e apenas 7% a *Texas Ti-Nspire*. Concluímos que o *Kahoot!*, sendo a ferramenta inicialmente menos usada e mais desconhecida, foi a que obteve maior aceitação pelos professores.

Algumas das razões referidas pelos professores relativamente à escolha do SE *Kahoot!* em detrimento dos outros dois, foram: a vertente da gamificação é um fator motivador para os alunos; poder utilizar o telemóvel como ferramenta de trabalho com os alunos; o facto de ser o software que nunca tinham trabalhado e por isso, tinham curiosidade em explorar as suas potencialidades; software adequado para ensino à distância, o facto de ser um software prático e de fácil manuseamento por pelos alunos; desperta a curiosidade, a motivação e o interesse nos alunos.

A maioria dos professores que participou nesta formação indicou que os conteúdos aprendidos foram *muito úteis* (71%) ou *úteis (29%)* para o exercício da sua atividade profissional, todos indicaram que pretendem utilizar os conhecimentos adquiridos na sua prática letiva, principalmente, usando o SE *Kahoot!* e o *GeoGebra*.

4. Referências

Caligaris, M. G., Schivo, M. E., & Romiti, M. R. (2015). Calculus & GeoGebra, an interesting partnership. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *174*,1183-1188. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.01.735

Canavarro, A. P. (2000). *Ensino e Aprendizagem da Estatística em Estatística e calculadoras gráficas* (pp. 159-167). SPE, APM e DEEIO/FCUL.

Correia, M., & Santos, R. (2017). *A aprendizagem baseada em jogos online: uma experiência de uso do Kahoot na formação de professores*. In C. Ponte, J. M. Dodero, & M. J. Silva (Eds.), Atas da Conferência, XIX Simpósio Internacional de Informática Educativa/VIII Encontro do CIED–III Encontro Internacional, Lisboa. https://repositorio.ipl.pt/bitstream/10400.21/11890/1/siie-cied_2017_atas.pdf

Gazotti-Vallin, M. A., Gomes, S. T., & Fischer, C. R. (2017). Vivenciando inglês com *Kahoot*. *The ESPecialist*, *38*(1). https://doi.org/10.23925/2318-7115.2017v38i1a11

Kuzle, A. (2017). Delving into the nature of problem-solving processes in a dynamic geometry environment: Different technological effects on cognitive processing. *Technology, Knowledge and Learning*, *22*(1), 37-64. https://www.researchgate.net/deref/https%3A%2F%2Flink.springer.com%2Farticle%2F10.1007%2Fs10758-016-9284-x

Mesquita, J. (2014). *A Utilização da Calculadora Gráfica no Estudo das Funções Trigonométricas* (Tese de Mestrado). Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.

Prá, R., Freitas, T. A., & Araújo A. M. R. de (2017). A análise da ferramenta Kahoot como facilitadora do processo de ensino aprendizagem. *Redin-Revista Educacional Interdisciplinar*, *6*(1).

Sande, Denise, & Sande, Danilo (2018). Uso do *Kahoot* como ferramenta de avaliação e ensino-aprendizagem no ensino de microbiologia industrial. *HOLOS*, *1*,170-179. https://doi.org/10.15628/holos.2018.6300

Scheffer, N., Bressan, J., & Rovani, S. (2009). Possibilidades didáticas de investigação do software gratuito régua e compasso na exploração do triângulo equilátero. *Vivências, 5*(8), 27-36.

Silva, J. B. da, Andrade, M. H., de Oliveira, R. R., Sales, G. L., & Alves, F. R. V. (2018). Tecnologias digitais e metodologias ativas na escola: o contributo do *Kahoot* para gamificar a sala de aula. *Revista Thema*, *15*(2), 780-791. https://doi.org/10.15536/thema.15.2018.780-791.838

Wan Salleh, M., & Sulaiman, H. (2013, April). A survey on the effectiveness of using *GeoGebra* software towards lecturers' conceptual knowledge and procedural mathematics. *AIP Conference Proceedings, 1522*(1), 330-336. https://doi.org/10.1063/1.4801143

Xavier, S. A., Tenório, T., & Tenório, A. (2014). Uma proposta de ensino-aprendizagem das leis dos senos e dos cossenos por meio do software Régua e Compasso. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, *7*(3), 158-190. https://doi.org/10.17921/2176-5634.v7n3

Aprendizagem Ativa através do Ambiente Colaborativo para a Geometria

Vanda Santos
Universidade de Aveiro
Centro de Investigação em Didática e Tecnologia na Formação de Formadores
vandasantos@ua.pt
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3953-6123

Helena Campos
Departamento de Matemática da Escola de Ciências e Tecnologia da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
Centro de Investigação em Didática e Tecnologia na Formação de Formadores
hcampos@utad.pt
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2767-0998

Resumo

Neste *workshop* pretendeu-se articular os objetivos do programa de matemática para os 2.º e 3.º Ciclos do Ensino Básico e das Aprendizagens Essenciais (AE), com um ambiente colaborativo proporcionado pela Plataforma de Geometria na Rede (WGL), visando promover o desenvolvimento de competências inscritas no Perfil dos Alunos à saída da Escolaridade Obrigatória (PA). Na aprendizagem em ambiente colaborativo, com recurso às tecnologias, a comunicação entre alunos é importante para a realização de qualquer tarefa. A dinamização deste workshop permitiu que os professores participantes desenvolvessem competências ao nível da utilização e exploração da plataforma WGL, tanto na sua vertente tecnológica como no domínio de potencialidades didáticas, seja em modo presencial como não presencial (por exemplo: na realização de trabalhos de casa). O *workshop* contribuiu para o conhecimento desta plataforma e que os professores passem a incluir na sua prática letiva, proporcionando um ambiente colaborativo para a geometria nas suas aulas, de modo que organizem a prática letiva, tendo em conta a vertente tecnológica, num contexto de utilização à distância, desenvolvendo estratégias de acompanhamento das aprendizagens essenciais dos seus alunos, tanto de forma síncrona como assíncrona.

No decorrer desta formação os participantes responderam, a um questionário inicial e final e realizaram tarefas que permitem desenvolver em sala de aula e fora de sala de aula, favorecendo desta forma a realização de experiências de desenvolvimento curricular.

Palavras-chave: TIC, Professores em serviço, Formação contínua, Oficina, Geometria.

Introdução

A proposta de formação continua de professores tem sido, nos últimos anos, uma preocupação tanto das políticas educativas, como de investigadores e teóricos da educação (Osamwonyi, 2016;

Birch et al, 2018). Este *workshop* é uma das alternativas para melhorar a qualidade do ensino, pois para além de contribuir para a reflexão e (re)organização da prática pedagógica, assenta nas necessidades e interesses da comunidade escolar (Casanova, 2015).

O uso adequado das tecnologias de informação e comunicação (TIC) no ensino da Matemática, pode contribuir para materializar as diretrizes curriculares dos programas oficiais de matemática (Unesco, 2008). As competências em TIC devem constituir um elemento crucial dos sistemas de formação de professores, integrando uma proposta metodológica flexível que atenda a um público heterogéneo (Unesco, I. C. T., 2008).

Este *workshop* destinou-se a professores que lecionam desde o 5.º ano de escolaridade do Ensino Básico ao 12.º ano de escolaridade do Ensino Secundário, ou seja, dos grupos de docência 230 e 500.

1. Aprendizagem Ativa

Atualmente as teorias de aprendizagem (construtivista e sociointeracionista) enfatizem a necessidade de os alunos serem ativos e responsáveis pela construção do seu conhecimento (Freeman et al., 2014). Zepke e Leach (2010) apresentam propostas de ação para promover a motivação dos alunos, das quais destacamos as seguintes:

- Melhorar a autoconfiança;
- Permitir que os alunos trabalhem com autonomia, desfrutando de relações de aprendizagem com os colegas, sentindo que são capazes de atingir seus próprios objetivos;
- Fomentar a aprendizagem ativa e colaborativa que promova as relações de aprendizagem;
- Proporcionar experiências educacionais desafiadoras, enriquecendo e expandindo suas habilidades acadêmicas;
- Investir numa variedade de serviços de suporte.

Segundo Felder e Brent (2009) a "aprendizagem ativa é qualquer coisa relacionada com o conteúdo da disciplina, que todos os alunos numa aula são chamados a fazer, além de simplesmente assistir, ouvir e fazer anotações" (p. 2).

Ambiente Colaborativo para a Geometria

O Laboratório de Geometria na Rede (em inglês, *Web Geometry Laboratory* (WGL)) é um ambiente na Rede colaborativo de aprendizagem combinada para geometria que incorpora um *software* de geometria dinâmica (DGS), podendo ser usado numa sala de aula ou remotamente. Numa sessão colaborativa do WGL, os utilizadores podem trocar informação geométrica (imagem/construção) e textual, produzindo as construções geométricas de forma colaborativa (Santos, Quaresma, Maric & Campos, 2018).

2. Atividades Desenvolvidas

Com este *workshop* pretendia-se que os participantes desenvolvessem competências ao nível da utilização e exploração da plataforma WGL, planificando uma tarefa a implementar em contexto de sala de aula e outra em contexto de trabalho de casa.

Este workshop iniciou-se com um breve questionário no qual se aferiu o uso das tecnologias, em particular, da ferramenta de geometria dinâmica, dos participantes nas suas aulas. Por um lado, concordam que as tecnologias podem melhorar a aprendizagem dos alunos na sala de aula e realçam a importância de as usar no ensino da matemática. Por outro lado, 40% dos participantes neste workshop utiliza um ambiente de geometria dinâmica apenas para apresentar um conceito ou atividade em sala de aula.

De seguida, apresentou-se o ambiente colaborativo, o Laboratório de Geometria na Rede (WGL) ambiente no qual se iriam desenrolar as atividades, quer individuais quer em grupo. Os participantes acederam à WGL e exploraram-na durante algum tempo para que identificassem o recurso de geometria dinâmica incluído nesta plataforma e se familiarizassem com a sua estrutura. As atividades realizadas em articulação com as aprendizagens essenciais em articulação com o perfil do aluno (Ministério da Educação e Ciência [MEC], 2018; Martins et al., 2017).

Atividade Individual

Como era a primeira vez que trabalhavam no WGL, a primeira atividade teve carater individual, envolvendo o tópico sobre as Isometrias: reflexão (axial e central), rotação (6.° ano de escolaridade), homotetia (7.° ano escolaridade) e translação (8.° ano de escolaridade) (Figura 1). Esta atividade pode ser desenvolvida fora da sala de aula.

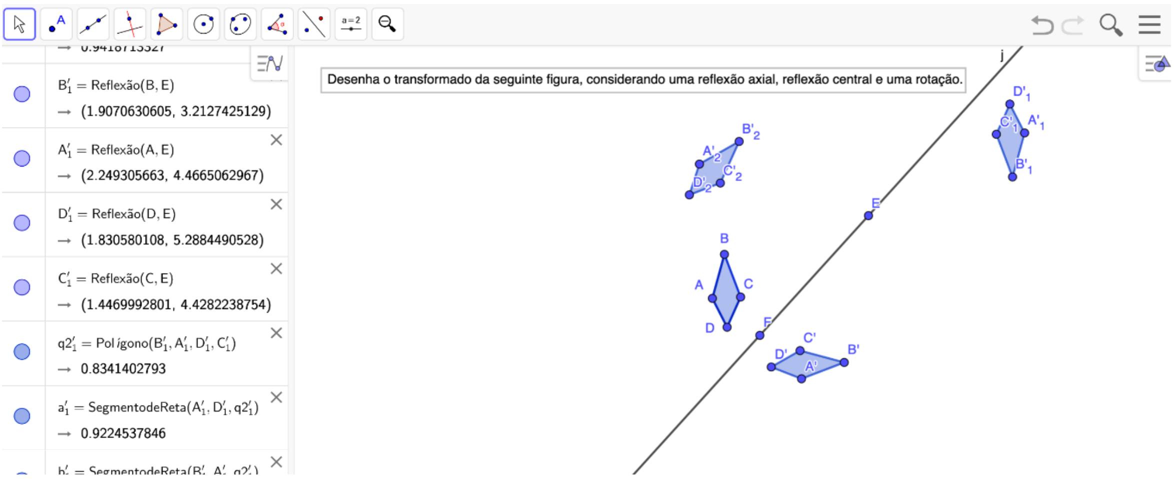


Figura 1 - Atividade individual de uma Professora

Atividade em Grupo

A atividade em grupo decorreu a pares, uma das professoras do grupo de docência 230 e outra do grupo de docência 500. As atividades propostas incidiram sobre os teoremas clássicos da Geometria Euclidiana, nomeadamente, os pontos notáveis de um triângulo - a Reta de Euler e o Teorema de Napoleão.

O primeiro teorema tem o foco nos pontos colineares (Baricentro, Ortocentro e Circuncentro), que são as intersecções das medianas, mediatrizes e as alturas do triângulo.

O segundo teorema diz que se sobre os lados de um triângulo qualquer forem construídos triângulos equiláteros, os ortocentros desses triângulos equiláteros formam igualmente um triângulo equilátero, pretende-se verificar este teorema e uma sua generalização (Figura 2).

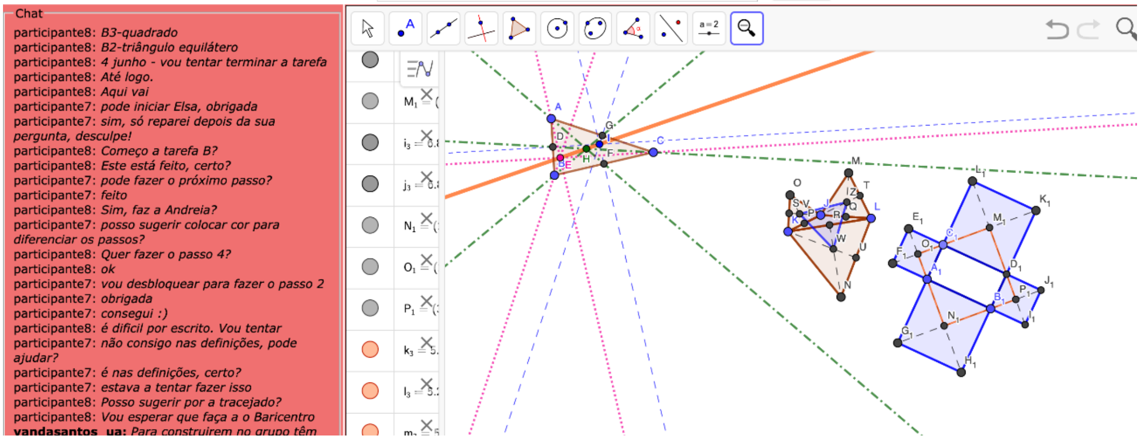


Figura 2 - Atividade de grupo de duas Professoras

No fim da formação implementou-se um breve questionário, no qual se recolheu informação sobre como o *workshop* poderia influenciar a sua prática letiva. No geral as respostas foram positivas relativamente à utilização do que praticaram no *workshop* na sua prática letiva. Algumas formandas afirmaram: "Será interessante aplicar em sala de aula, não só os conteúdos que trouxeram como exemplo, mas também a utilização da própria plataforma colaborativa (que considero ser uma mais valia para o trabalho colaborativo)." e "Em ensino à distância, ... para promover metodologias mais ativas e para os alunos realizar trabalhos em casa."

3. Considerações Finais

Os dados revelam que os professores não se sentem muito à vontade com o uso das tecnologias e da ferramenta de geometria dinâmica, em particular, apenas a utilizam para apresentar conceitos aos seus alunos.

Agradecimentos

Trabalho suportado financeiramente por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., sob o projeto UIDB/00194/2020. A primeira autora também é financiada por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., no âmbito da celebração do contrato-programa previsto nos números 4, 5 e 6 do art. 23.º do D.L. n.º 57/2016, de 29 de agosto, alterado pela Lei n.º 57/2017, de 19 de julho.

4. Referências

Birch, P., Balcon, M. P., Bourgeois, A., Davydovskaia, O., & Tremosa, S. P. (2018). Teaching Careers in Europe: Access, Progression and Support. Eurydice Report. *Education, Audiovisual and Culture Executive Agency, European Commission*.

Casanova, M. P. (2015). A formação contínua de professores: uma leitura do decreto-lei 22/2014. *A Formação Continua na Melhoria da Escola*. Revista do CFAECA, (ISSN 2183-4083), 12-18. http://issuu.com/almadaformarevista/docs/9forma____o.

Freeman, S., Eddy, S. L., McDonough, M., Smith, M. K., Okoroafor, N., Jordt, H. & Wenderoth, M. P. (2014). Active learning increases student performance in science, engineering, and mathematics. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *111*(23), 8410-8415.

Felder, R. M. & Brent, R. (2009). Active learning: An introduction. *ASQ Higher Education brief*, *2*(4), 1-5.

Martins, G. D. O., Gomes, C. A. S., Brocardo, J., Pedroso, J. V., Carrilo, J. L. A., Silva, L. M. U., Encarnaçãp, M.M.G.A., Horta, M.J.V.C., Calçada, M.T.C.S., Nery, R.F.V. & Rodrigues, S. M. C. V. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Lisboa: Ministério da Educação, Direção-Geral da Educação.

Ministério da Educação e Ciência (2018). *Aprendizagens Essenciais Ensino Básico. Articulação com o Perfil dos Alunos*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência. https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico.

Osamwonyi, E. F. (2016). In-Service Education of Teachers: Overview, Problems and the Way Forward. *Journal of Education and Practice*, *7*(26), 83-87.

Santos, V., Quaresma, P., Maric, M. & Campos, H.(2018) , Web Geometry Laboratory: Case Studies in Portugal and Serbia, *Interactive Learning Environments*, (26), (pp.3-21).

Unesco, I. C. T. (2008). Competency standards for teachers: implementation guidelines, version 1.0. *UNESCO2008, Printed in the UK, Forwordp1-5*.

Zepke, N. & Leach, L. (2010). Improving student engagement: Ten proposals for action. *Active Learning in Higher Education*, *11*(3), 167–177. https://doi.org/10.1177/1469787410379680.

Geometria por trás da cortina…

Maria Manuel Nascimento
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
CIDTFF/LabDCT-UTAD, Universidade de Aveiro
mmsn@utad.pt
https://orcid.org/0000-0002-3913-4845

J. Alexandre Martins
Instituto Politécnico da Guarda
UDI/IPG
jasvm@ipg.pt
https://orcid.org/0000-0003-3921-6426

Resumo

A geometria é um dos temas da matemática e, como ela, decisivo para a compreensão do mundo que nos rodeia. Neste mundo e no nosso dia-a-dia também o tema das probabilidades se tem vindo a revelar indispensável e decisivo. Neste *workshop*, pretendeu-se lidar com o que está por trás da cortina da geometria: as probabilidades. Propôs-se uma série de tarefas de probabilidades em que o conhecimento da geometria era indispensável. Esta visão da geometria pode ser implementada nas práticas letivas e ser mais um elemento de motivação envolvendo os professores e os alunos e a sua criatividade!

Palavras-chave: Probabilidade, Geometria, Probabilidade geométrica, Quotidiano, Práticas letivas

Introdução

O conhecimento de probabilidade é essencial na análise, compreensão e interpretação de grande parte dos acontecimentos de natureza aleatória e na tomada de decisões no dia-a-dia, bem como pré-requisito para estudos posteriores de Estatística em quase todas as áreas. Alguns autores (e.g. Kataoka, Rodrigues & Oliveira, 2007), referem que é necessária uma abordagem diferente para o ensino deste tema, não utilizando só os problemas clássicos que envolvem os jogos de azar ou o determinismo e cálculo que é imposto pela tradição matemática, mas trabalhar também com problemas geométricos e usar experiências práticas que possam ser aplicadas nas práticas letivas e que conduzam a um processo de observação e análise da componente de imprevisibilidade intrínseca a essas situações, promovendo a perceção intuitiva do acaso e da incerteza e a utilização, a partir dessas atividades, de métodos matemáticos para o estudo das mesmas. Deste modo, podem desenvolver-se os conceitos probabilísticos e a sua ligação com outros conceitos de matemática como, por exemplo, os da geometria. Em particular a aquisição e construção do conceito de probabilidade devem ser alicerçadas na perceção do acaso, na ideia de experiência aleatória e na noção de probabilidade (Kataoka et al., 2007). Além disso, o desenvolvimento do raciocínio probabilístico deve ser orientado para: possibilitar uma variedade de experiências que permitam observar os fenómenos aleatórios e diferenciá-los dos deterministas; estimular o exprimir predições sobre o comportamento, os resultados e a probabilidade dos acontecimentos; organizar a recolha de dados de experimentação de modo que seja possível comparar as predições com os resultados obtidos; realçar o caráter imprevisível de cada resultado isolado, assim como a variabilidade das pequenas amostras, através da comparação de resultados; ajudar a percecionar a convergência, mediante acumulação de resultados, e comparar a confiabilidade de pequenas e grandes amostras (Batanero & Godino, 2002). Em consonância com essas ideias, neste *workshop* apresentaram-se, aos docentes participantes, práticas pedagógicas nas quais foram propostas atividades, observando e construindo os eventos possíveis, através de experimentação concreta, tendo essencialmente por base o conceito de probabilidade geométrica, em que os elementos aleatórios não são quantidades, mas objetos geométricos, como, por exemplo, os pontos, as linhas e as rotações. Procurou-se, também, nestas atividades realçar a imprevisibilidade, a variabilidade e a convergência, comparando resultados, analisando resultados acumulados e explorando alguns meios tecnológicos disponíveis. Por outro lado, julgamos que esta abordagem contribui para ajudar a superar duas dificuldades pedagógicas no ensino das Probabilidades, nomeadamente a necessidade de quebrar hábitos e procurar novas informações e atividades para desenvolver na sala de aula aquando da inserção desses tópicos no currículo, bem como a formação dos professores em Probabilidade e Estatística, que às vezes é básica e outras vezes é mesmo nula nas questões relacionadas com o ensino desses conceitos específicos.

Deste modo, no palco das probabilidades mostraram-se, por trás das cortinas, atores geométricos, permitindo aos docentes aplicar uma probabilidade viva com olhares diferentes sobre a geometria.

1. Metodologia

Após uma apresentação inicial dos intervenientes fez-se uma pequena introdução ao tema e ao funcionamento pretendido para o *workshop*. Dividiram-se as sete docentes inscritas em dois grupos, um de quatro elementos e outro de três. Com o apoio de uma sequência de slides em PowerPoint fez-se a apresentação do conceito de probabilidade geométrica, que Kataoka e outros autores, (2007, p. 2 *apud* Tunala, 1995), enquadram indicando que

> "*alguns problemas de probabilidade são equivalentes à seleção aleatória de pontos em espaços amostrais representados por figuras geométricas. Nos modelos em questão, a probabilidade de um determinado evento se reduz à relação – ou ao seu limite, caso exista – entre medidas geométricas homogêneas, tais como: comprimento, área ou volume (Tunala, 1995).*"

Em seguida, e para tornar mais concreto o enquadramento anterior, lançou-se o desafio "Divida ao acaso um esparguete em três partes … E agora?... Essas três partes formam um triângulo?", ou seja, em termos matemáticos "Dividindo aleatoriamente um segmento em três partes, qual é a probabilidade de que esses novos segmentos formem um triângulo?" (Moraes, 2014; Kataoka et al., 2007). Depois de alguma discussão apresentou-se o resultado que refere que três segmentos de reta formam um triângulo se e só se, o comprimento de cada lado for menor que a soma dos comprimento dos outros dois. De seguida explorou-se, com base nesse resultado, a resolução que começa por considerar um segmento de reta [AB] de comprimento 1, no qual P e Q são pontos do segmento [AB] onde, [AP], [PQ] e [QB] medem respetivamente x, y e 1-x-y.

Logo, cada par ordenado (x, y) está associado a uma única forma de dividir o segmento de reta, [AB]: $x > 0, y > 0 \text{ e } x + y < 1$. Adotando posteriormente um sistema de eixos coordenados, surge que o conjunto de pares ordenados que cumprem as condições acima formam o $\Delta[ORL]$ (Figura 1). Ora, relembrando que três segmentos formam um triângulo se e só se, o comprimento de cada lado for menor que a soma dos comprimentos dos outros dois, tem-se que $\overline{AP} = x < \frac{1}{2}$, $\overline{PQ} = y < \frac{1}{2}$ e $\overline{QB} = 1 - x - y < 1/2$ pelo que se tem também que x + y $> 1/2$. Assim, representando essas três condições no mesmo sistema cartesiano da figura do triângulo anterior, obtém-se a região HJN em que os pontos H, J e N são os pontos médios dos lados do $\Delta\,[HJN]$ (Figura 1). Sendo T o acontecimento para o qual os três segmentos formam o triângulo, a probabilidade pedida é igual a P(T)= $\mathrm{A}_{\Delta[HJN]}/\mathrm{A}_{\Delta[ORL]} = 1/4$.

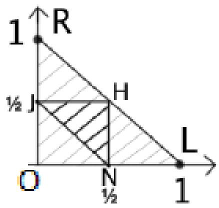


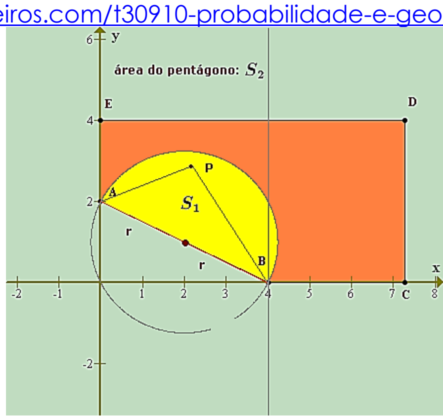
Figura 1 – Δ[HJN] e Δ[ORL]

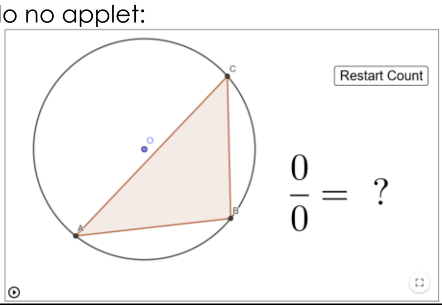
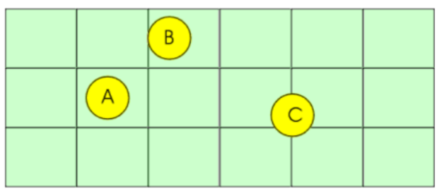
Após a análise deste problema de partida foi entregue um documento com um exemplo de problema resolvido, seis questões e, ainda, perspetivas de outros trabalhos com probabilidade geométrica.

2. Atividades e sua descrição

As atividades propostas, a sua descrição, bem como outras propostas possíveis foram resumidas na Tabela 1.

Tabela 1 – Resumo dos problemas propostos neste *workshop*

Problema	Proposta de resolução/outras questões
1: Considere no plano cartesiano um pentágono $[ABCDE]$ de vértices A (0, 2) B (4, 0) C $(2pi + 1, 0)$ D $(2pi + 1, 4)$ E (0, 4). Escolhendo ao acaso um ponto P no interior desse pentágono, qual é a probabilidade de que a medida do ângulo $A\hat{P}B$ seja a de um triângulo obtuso?	https://pir2.forumeiros.com/t30910-probabilidade-e-geometria-plana  Todos os pontos sobre a circunferência farão com $[AB]$ um $A\hat{P}B = 90°$. Fora do círculo os ângulos serão agudos e dentro dele serão obtusos. A probabilidade é igual à razão entre as áreas do semicírculo e do pentágono: $S_1 = {}^{5\pi}/_{2}$ e $S_2 = 8\pi$, pelo que ${}^{S_1}/_{S_1} = {}^{5}/_{16}$
2: Dividindo ao acaso um segmento em três partes, qual é a probabilidade de que esses novos segmentos formem um triângulo?	(Educação e Matemática, N.º 46, Jan/Fev. de 1998) Usaram-se pedaços de esparguete (ou palhinhas) de comprimento **c** e uma cartolina em que foi desenhado um conjunto de linhas paralelas e equidistantes entre si de **2c**. A experiência proposta e realizada pelos dois grupos foi a de lançar os pedaços de palhinhas sobre a cartolina e verificar quantas intersectavam uma das linhas da cartolina, numa versão do problema da agulha de

	Buffon (Coutinho, 2005; Moraes, 2014). Repetiu-se a experiência várias vezes e registaram-se os resultados numa tabela. Com os resultados de cada grupo e com os resultados acumulados determinaram-se as probabilidades. Também se abordou a obtenção de uma aproximação do valor de π com esta experiência. Usaram-se *applets* para realizar mais simulações e exemplificar este problema: e.g. https://mste.illinois.edu/activity/buffon/ http://www.shodor.org/interactivate/activities/Buffon/
3: Uma pessoa procura, com os olhos tapados, atingir um alvo circular com 40 cm de raio tendo no centro um disco de 10 cm de raio. Se acerta o alvo, qual a é probabilidade de ter atingido o disco central? 4: E se for agora um quadrado de 10 cm de lado (l), colocado num interior de um quadrado de lado 20 cm (L), qual a probabilidade de se atingir o quadrado menor?	(Kataoka, Rodrigues, & Oliveira, 2007) Determinação geométrica da probabilidade: $$P_{G_1} = \frac{\text{Área do círculo menor}}{\text{Área do círculo maior}} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{10^2}{40^2} = 0{,}0625 = 6{,}25\%$$ $$P_{G_2} = \frac{\text{Área do quadrado menor}}{\text{Área do quadrado maior}} = \frac{l^2}{L^2} = \frac{10^2}{20^2} = 0{,}25 = 25\%$$ Determinação frequencista da probabilidade. Por exemplo: 1 – Dividir o grupo em duas equipes, sendo que uma realizará a atividade referente à primeira pergunta, e a outra correspondente à segunda pergunta. 2 – Cada participante receberá 5 dardos para lançar e registrará o número de sucessos que obtiver na Tabela 1. 3 – Calcular a probabilidade individual $P_F = \frac{k}{n}$ e coletiva para cada uma das perguntas. 4 – Analisar e discutir os resultados obtidos: os valores das probabilidades frequencistas P_{F_1} e P_{G_2} e geométricas P_{G_1} e P_{G_2}.
5: Três pontos são colocados ao acaso num círculo. Qual é a probabilidade de que o centro do círculo esteja contido no triângulo definido por esses três pontos?	Nesta questão apelou-se aos esboços e cálculos, mas também à animação do *applet* *https://www.geogebra.org/m/cjuuhufb* Um exemplo obtido no applet: 
6: Problema semelhante ao da agulha de Buffon, mas tendo por base uma pavimentação de polígonos regulares através do jogo do lançamento de discos.	https://www.dm.ufscar.br/hp/hp153/hp153002/hp153002.html Em um plano pavimentado com quadrados de lado l é lançado aleatoriamente um disco de diâmetro d. Qual a probabilidade de o disco, depois de pousar no plano, não intersectar e nem tangenciar os lados de quadrado algum?  Na figura, A é um evento favorável, e B e C são eventos desfavoráveis. Alternativa: Neste problema do jogo do lançamento de considerar pavimentações de outros tipos para o piso em que podem ser lançados os discos.

Para todas as questões trabalhadas neste *workshop* dinamizou-se uma discussão no grande grupo sobre a aplicação e adequação didática ao contexto de aula e ao nível de ensino. Além disso, ainda se apresentaram perspetivas de outros trabalhos com probabilidade geométrica (Ritter & Bulegon, 2016), com *applets* associados à probabilidade geométrica (e.g. https://www.geogebra.org/m/BYJtavUB) e também sobre a geometria e a estatística (Martins, Estrada, & Nascimento, 2014).

3. Conclusões

Como Batanero e Godino (2002), neste *workshop* implementaram-se estratégias de experimentação concreta envolvendo geometria. Deste modo as participantes envolveram-se no uso do raciocínio probabilístico, face à variedade de experiências apresentadas e que permitiram observar os fenómenos aleatórios e diferenciá-los dos deterministas. Além disso, as participantes foram estimuladas prever o comportamento, os resultados e a probabilidade dos acontecimentos. Assim, permitiu-se a organização da recolha de dados de experimentação de modo que fosse possível comparar as previsões com os resultados obtidos. Realça-se o caráter imprevisível de cada resultado isolado, assim como a variabilidade das pequenas amostras e das amostras grandes, através da comparação de resultados. Deste modo, exemplificou-se de como se podem ajudar os alunos a percecionar a convergência, mediante acumulação de resultados, bem como comparar a confiabilidade de amostras de tamanhos diferentes (grandes e pequenas).

Esperamos que esta abordagem tenha contribuído para ajudar a quebrar hábitos e a procurar novas informações e atividades para desenvolver na sala de aula aquando da inserção dos tópicos de probabilidade e geometria no currículo – isto é, reforçar a formação dos professores em Probabilidade e Estatística.

Usou-se uma probabilidade viva com olhares diferentes sobre a geometria no palco das probabilidades, mostrando-se, por trás das cortinas, alguns dos atores geométricos.

4. Referências

Batanero, C., & Godino, J. (2002). *Estocástica y su didáctica para maestros: Proyecto Edumat-Maestros*. Universidade de Granada, Espanha.

Coutinho, C. (2005). Probabilidade geométrica: um contexto para a modelização e a simulação de situações aleatórias com Cabri. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, *7* (2). https://www.geogebra.org/m/BYJtavUB

Martins, J. A., Estrada, A., & Nascimento, M. M. (2014). Do you need to see it to believe it? Let's see statistics and geometry dynamically together! *European Journal of Science and Mathematics Education*, 2 (1), 39 - 52.

Moraes, J. (2014). Probabilidade geométrica e aplicações. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia: Brasil. http://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/4028

Ritter, D., & Bulegon, A. M. (2016). Uma revisão de literatura sobre estudos relativos à Probabilidade Geométrica. *VIDYA*, 36 (2): 581-597. https://www.researchgate.net/publication/311510755_UMA_REVISAO_DE_LITERATURA_SOBRE_ESTUDOS_RELATIVOS_A_PROBABILIDADE_GEOMETRICA

Kataoka, V. Y., Rodrigues, A., & Oliveira, M. S. (2007). Utilização do conceito de Probabilidade Geométrica como Recurso Didático no Ensino de Estatística. Encontro Nacional de Educação Matemática, IX, 2007, Belo Horizonte. *Anais eletrônicos IX ENEM*. Belo Horizonte: Brasil.

Geometria com História e as histórias com Geometria

Helena Campos
Departamento de Matemática da Escola de Ciências e Tecnologia da UTAD
Membro integrado do CIDTFF, Universidade de Aveiro
hcampos@utad.pt
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2767-0998

Paula Catarino
Departamento de Matemática da Escola de Ciências e Tecnologia da UTAD
Membro colaborador do CIDTFF, Universidade de Aveiro
Membro integrado do CMAT-UTAD, Universidade do Minho
pcatarin@utad.pt
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6917-5093

Resumo

A matemática é considerada como uma ciência do raciocínio lógico, cujas manifestações são bem visíveis no dia a dia de todos os indivíduos. Em contexto escolar reduzir a aprendizagem de conceitos matemáticos à mera resolução de exercícios retira o desafio inerente a uma aula e conduz à desmotivação dos alunos. Consideramos que deve ser dada relevância à Geometria com História e às histórias com Geometria, complementando a aprendizagem e motivando os alunos. O professor deve elaborar e implementar estratégias que incluam atividades criativas, apelativas e enriquecedoras com as quais o aluno sinta prazer em aprender. Através destas atividades o aluno gostará mais dos conteúdos matemáticos, pois terá uma perspetiva mais prática e lúdica e não uma ideia tão teórica e complexa, como, por vezes, é sentida por muitos. Neste workshop pretendíamos articular os objetivos do programa de Matemática para os 2.º e 3.º ciclos do Ensino Básico e das Aprendizagens Essenciais, com a criação de histórias, ou a adaptação de histórias conhecidas, que contenham conteúdos geométricos visando promover o desenvolvimento das áreas de competências inscritas no Perfil dos Alunos à saída da Escolaridade Obrigatória. A dinamização deste workshop permitiu aos professores desenvolverem competências ao nível da criação, utilização e exploração de histórias com geometria em tarefas que possam incluir na sua prática letiva. No decorrer desta formação será planificada uma tarefa a desenvolver em sala de aula favorecendo desta forma a realização de experiências de ensino.

Palavras-chave: Geometria, histórias infantis, História da Geometria, Formação contínua

Introdução

Os conhecimentos adquiridos, as capacidades, as atitudes e os valores, são aspetos chave no processo de aprendizagem e, consequentemente, no sucesso da realização de tarefas (Tabile & Jacometo, 2017). Estas tarefas, devem, por sua vez, ser pensadas e adequadas a cada aluno, possíveis de resolver, mas desafiantes (Menezes, 1999).

Uma aprendizagem da matemática baseada na memorização de estratégias de resolução de problemas e aplicação de algoritmos em momentos de avaliação não desperta o interesse dos alunos em participar nas atividades letivas (Bartz, Meneghetti, & Poffal, 2016). Acreditamos na necessidade de investir em novas metodologias de ensino, que atribuam o devido valor à contextualização e à transdisciplinaridade, proporcionando uma aprendizagem de conceitos matemáticos mais significativa, eliminando as barreiras existentes entre as áreas disciplinares (Vaideanu, 2006).

As aprendizagens não são feitas apenas na escola, mas esta tem que proporcionar aos alunos outros conhecimentos, experiências adequadas e enriquecedoras em todas as áreas, desenvolvendo as competências de expressão na língua materna (Campos, Teixeira & Catarino, 2016).

As crianças desenvolvem gosto pelas histórias, pela leitura, pelos livros se, desde os primeiros anos, lhes for proporcionado o contacto com esta realidade, cabendo aos pais e aos professores essa responsabilidade (Mata, 2008; Ramos & Silva, 2009). Detentora de um hábito de leitura, conseguirá com mais facilidade expressar-se e, consequentemente, conseguirá que a sua escrita seja melhor (Campos & Oliveira, 2019).

Desta forma o aluno satisfaz a sua curiosidade (Dias & Neves, 2012), retira o que de bom apresenta, adquire valores (Dias & Neves, 2012; Ferreira & Rosa, 2015) como o de liberdade, verdade, justiça, amizade, solidariedade, lealdade, generosidade, entre outros (Souza & Bernardino, 2011) e, cumpre os deveres cívicos, a partir da participação ativa na sociedade (Campos & Oliveira, 2019). Para que esta tal ocorra, o aluno observa e pensa sobre o que poderá estar escrito, despertando interesses e construindo conhecimentos (Moreira, 2005).

De facto, contar e recontar histórias constituem-se como atividades prazerosas, agradáveis, gerando muitas reflexões e partilhas, possibilitando que o aluno vá mais além do que é esperado (Mata, 2008).

Neste workshop fomentou-se a leitura e a análise de histórias com conteúdos geométricos visando, posteriormente em ambiente de sala de aula, promover o desenvolvimento das áreas de competências inscritas no Perfil dos Alunos à saída da Escolaridade Obrigatória (Martins et al., 2017)

Consideramos que este workshop permitiu aos professores participantes desenvolverem competências ao nível da criação, utilização e exploração de histórias com geometria em tarefas que possam incluir na sua prática letiva e que constituem uma aprendizagem mais significativa e ativa por parte dos alunos.

1. Aprendizagem Ativa

Tarefas Desenvolvidas

Este *workshop* iniciou-se com a leitura e análise do poema *António e as Estrelas* (Saraiva, 2019), que apresentamos no Anexo 1. A inclusão de uma bandeira neste poema serviu de mote para apresentar a primeira tarefa:

1. *A bandeira Nacional: dourada ou prateada?*

Imediatamente se estabeleceu um debate entre os participantes que se questionavam sobre os números de ouro e de prata, servindo para uma busca na *internet* sobre a definição destes dois números metálicos, assim como, sobre os Matemáticos: *Quem foi John Pell? Quem foi Leonardo de Pisa (Fibonacc)i?*

Posteriormente, procederam aos cálculos para responder à questão inicial, concluindo que a bandeira nacional portuguesa (ver Figura 1) é, aproximadamente, dourada. De facto, efetuando o quociente entre o valor da medida de comprimento e o da medida de largura (medidas oficiais) obtém-se 1, 61803399, isto é, o valor do número de ouro.

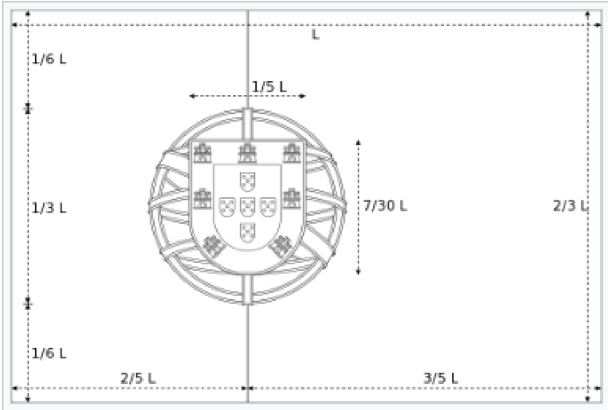


Figura 2 - Medidas da bandeira nacional portuguesa (Diário do Governo n.º 150 de 30 de junho de 1911)

De seguida, passou-se a uma tarefa de construção rigorosa com régua e compasso.

2. *Construção rigorosa de um retângulo de ouro a partir de um quadrado.*

Nesta tarefa, os formandos conseguiram de forma tradicional com materiais manipuláveis (régua e compasso), mas também através do software GeoGebra construir um retângulo de ouro de forma rigorosa, partindo de um quadrado com medida de lado igual a uma qualquer medida previamente escolhida. De forma quase imediata, optaram também por proceder a esse cálculo de forma analítica, utilizando, para tal, o teorema de Pitágoras.

De forma análoga, usando procedimentos semelhantes à tarefa anterior, facilmente passaram à tarefa seguinte.

3. *Construção rigorosa de um retângulo de prata a partir de um quadrado.*

Finda esta tarefa, distribuíram-se pelos participantes a história ϕ-Caching (Rodrigues, Gomes & Novo, 2015) que serviu de motivação para a tarefa seguinte:

4. *Adaptar parte da história para ser implementada em contexto de sala de aula.*

Evidentemente que a criatividade fluiu entre os professores/formandos tendo se obtido ideias muito interessantes e adaptadas a diferentes níveis de ensino. Seguiu-se um debate entre todos no qual se analisou a viabilidade das diferentes propostas.

Após este grupo de tarefas lançou-se mais um desafio aos participantes, a leitura e a análise de novo poema *No meu grande coração* (Saraiva, 2019), que apresentamos no Anexo 2. Refira-se que todas as ilustrações deste poema foram elaboradas com as figuras do *Tangram*, algo que suscitou o interesse por parte das professoras/formandas para a sua adaptação a outros níveis de ensino. A par com o poema inicial, foi realçado a criatividade e facilidade de escrita de poemas destinados a crianças demonstrado pela autora.

Mais uma vez um poema serviu de motivação para uma nova tarefa:

5. *Construção rigorosa da sequência de Padovan a partir de um triângulo equilátero.*

Evidentemente que as primeiras questões que se levantaram foram: *Quem foi Padovan? De que sequência estamos a falar?* Após uma pequena pesquisa na *internet*, surgiu a dúvida sobre o que era o número de plástico. Todas estas questões foram sendo respondidas com a ajuda atempada das formadoras. Seguiu-se a construção desta sequência por caminhos diferenciados consoante a experiência de cada um dos participantes.

Mais uma vez e como culminar deste *workshop* propôs-se aos participantes a conclusão da última tarefa que encerra um dos principais objetivos desta formação:

6. *Adaptar/criar a história para ser implementada em contexto de sala de aula.*

Com o decorrer deste *workshop* os participantes foram apresentando histórias mais criativas e adaptadas a diferentes conteúdos e contextos.

2. Conclusões

Pretende-se que em Matemática se desenvolvam competências de resolução de problemas, de raciocínio matemático e de trabalho com situações da vida real, bem como o pensamento crítico, dando oportunidades diversificadas a todos os alunos para que se sintam confortáveis na abordagem a problemas cuja resolução requeira Matemática (Canavarro et al, 2020). Para que tal seja alcançado a formação contínua terá que ser uma aposta muito forte e focada no sucesso das aprendizagens de todos os alunos em matemática tendo em conta o Perfil dos Alunos à saída da Escolaridade Obrigatória (Martins et al., 2017).

Consideramos que este *workshop* constituiu uma experiência positiva pois valorizou o trabalho colaborativo entre pares e reconhecendo-o como essencial para o desenvolvimento profissional dos docentes que ensinam Matemática. Além disso, foi privilegiado a construção de recursos que podem ser implementados em sala de aula.

Evidentemente que o ideal seria organizar uma nova formação, na qual fosse possível a sua concretização e consequente análise das aprendizagens matemáticas dos alunos. Ideia que está de acordo com as *Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em matemática* (Canavarro et al., 2020) que preconiza "uma estratégia nacional que envolva as Instituições do Ensino Superior e os Centros de Formação no desenvolvimento articulado, relativamente a conteúdos e estratégias, da formação contínua dos profissionais dos diversos níveis educativos" (p.304).

Agradecimentos: "Trabalho suportado financeiramente por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., sob o projeto UIDB/00194/2020".

3. Referências

Bartz, M., Meneghetti, C. & Poffal, C. (2016). Uma abordagem interdisciplinar no Ensino da Matemática. In A. Kessler, B. Rodriguez, C. Meneghetti, C. Mathias, D. Freitas, D. Bastos, M. Souza, R. Bodart, R. Magarinus, V. Fonseca (Orgs.), *Anais do 2.º Simpósio da formação do professor de Matemática da Região Sul* (pp.34-35). Universidade Federal do Rio Grande.

Campos, H. & Oliveira, S. (2019). Writing to Learn: From Stories Written by Children to Mathematical Contents. In L. Gómez Chova, A. López Martínez, I. Candel Torres (Eds.), EDULEARN19 Proceedings of *11th International Conference on Education and New Learning Technologies* (pp.10098-10107), IATED Academy.

Campos, H., Teixeira, E., & Catarino, P. (2016). Matemática e literatura para a infância. Uma proposta interdisciplinar na sala de aula. In C. Mesquita, M. Pires & R. Lopes (Eds.), Atas do 1.º Encontro Internacional de Formação na Docência (pp. 378-384), Escola Superior de Educação de Bragança.

Canavarro, A., Albuquerque, C., Mestre, C., Martins, H., Carvalho e Siva, J. (cood.), Almiro, J., Santos, L., Gabriel, L., Seabra, O. & Correia, P. (2020) Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em matemática. Grupo de Trabalho de Matemática. [Despacho n.º 12530/2018]. *(https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/recomendacoes_para_a_melhoria_das_aprendizagens_dos_alunos_em_matematica.pdf).*

Dias, C. A. & Neves, I. (2012). A importância de contar histórias. In C. Silva, M. Martins, & J. Cavalcanti (Coord.), *Ler em família, Ler na escola, Ler na biblioteca: Boas práticas*. (pp.37-41) Escola Superior de Educação de Paula Frassinetti.

Ferreira, C. S. & Rosa, M. (2015). Literatura Infantil e a Construção de Valores Morais. In R. Verastegui (Coord.), *Anais da XVI Semana da Educação e VI Simpósio de Pesquisa e Pós-Graduação em Educação "Desafios atuais para a Educação"* (pp.429-441, Universidade Estadual de Londrina.

Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carillo, J., Silva, L., Encarnação, M., Horta, M., Calçada, M., Nery, R., & Rodrigues, S. (2017). Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória. Direção-Geral da Educação, Ministério da Educação.

Mata, L. (2008). *A Descoberta da Escrita. Textos de Apoio para Educadores de Infância.* Ministério da Educação e Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Menezes, L. (1999). Matemática, Linguagem e Comunicação. Millenium. 20, 1-20.

Moreira, J. (2005). Literatura Infantil e Matemática juntas: uma parceria em favor da educação desafiadora. *Terra e Cultura*. *41*, 80-90.

Ramos, A. & Silva, S. (2009). *Ler para Crescer.* Gulbenkian, Casa da Leitura.

Rodrigues, C. Gomes, H. & Novo, S. (2015) In L. Menezes, C. Rodrigues, L. Ferraz & A. Martins (2015). *Histórias com…matemática III.* Escola Superior de Educação de Viseu, Instituto politécnico de Viseu.

Saraiva, D. (2019) *Matemática Poética – uma proposta para a aprendizagem da matemática*, Relatório de Prática de Ensino Supervisionada em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico, elaborado para a obtenção do grau de mestre na Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real, UTAD, Portugal.

Souza, L. & Bernardino, A. (2011). A Contação de Histórias como Estratégia Pedagógica na Educação Infantil e Ensino Fundamental. *Educere et Educare, Revista de Educação*. 6(12), 235-249.

Tabile, A. & Jacometo, M. (2017). Fatores Influenciadores no Processo de Aprendizagem: um estudo de caso. *Revista Psicopedagogia. 34*(103), 75-86.

Vaideanu, G. (2006). A interdisciplinaridade no ensino: esboço de síntese. In O. Pombo, H. M. Guimarães & T. Levy (Orgs.), *Interdisciplinaridade: antologia* (pp. 161-176). Campo das Letras.

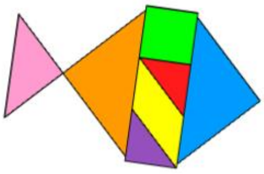
Anexo 1

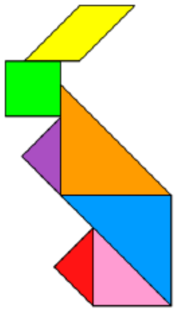
António e as Estrelas
Lá no alto, no topo do mastro
No cimo da m**on**tanha
A b**an**deira reclamava a noite **in**teira,
Dormir não era com ela:
"Só quero br**in**cadeira!"
O seu grande sonho
"Cantar, balançar, ondular
Pelo mundo,
sem parar um segundo"
O **An**tónio, com uma **in**sónia prof**un**da
Contava estrelas, à janela,
Qu**an**do reparou na bandeira, feita s**en**tinela
E tão tagarela.

Sentindo-se observada
A b**an**deira ficou a**in**da mais corada.
E o seu tom verde, cor da esper**an**ça,
Envergonhado.
E à luz do luar, a esfera armilar,
que lhe p**in**tava o c**en**tro,
brilhava como ouro.
O **An**tónio, ao olhar, deixou-se **en**c**an**tar
Como pr**ín**cipe a c**on**templar o seu tesouro.
Desp**in**do-se da sua timidez,
A b**an**deira c**on**tou até três
E perg**un**tou:
Porque olhas para mim assim
Tão c**on**c**en**trado?
O António, atónito
Nem sabia o que resp**on**der
“Uma b**an**deira a fazer perg**un**tas
Estarei a **en**doidecer?”
Não resp**on**des? – resm**un**gou aquele ret**ân**gulo de pano
A d**an**çar com o v**en**to.
“Resp**on**do, resp**on**do” – resp**on**deu o rapaz
Com o olhar sempre at**en**to.
Estava **en**tretido a c**on**tar estrelas de c**in**co em c**in**co
Quando reparei que te movim**en**tavas com t**an**to af**in**co.
És muito l**in**da. Estup**en**da.
A bandeira s**en**tiu-se uma d**on**zela
Afinal, era tão bela
Tão singela,
E era ela
Que repres**en**tava as cores de Portugal.

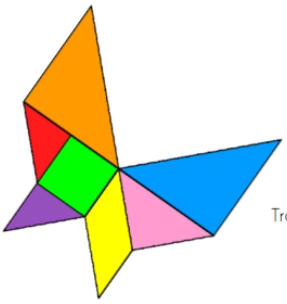
Anexo 2

com tanta agitação
fico confuso e envergonhado
e o barco transforma-se num *peixe*
num peixe pouco ajuizado





e quando fico assustado,
o peixe
transforma-se num *coelho*
que se esconde em todo o lado



Mas de repente, fico contente
E o pássaro que virou gato,
Que virou pato, que virou barco
Que virou peixe, que virou coelho…
Transforma-se numa borboleta encantada
A esvoaçar,
pelo ar
Muito animada

Sou assim,
uma criança cheia de muitas emoções
Cada qual com o seu valor
Aprendo a lidar com todas elas
Pois sou educado com muito amor

A arte como ponte para a aprendizagem por questionamento e o estabelecimento de conexões entre a geometria e as ciências

Fátima Regina Jorge
Centro de Investigação em Património, Educação e Cultura, Instituto Politécnico de Castelo Branco
Centro de Investigação em Didática e Tecnologia na Formação de Formadores, Universidade de Aveiro

Fátima Paixão
Instituto Politécnico de Castelo Branco
Centro de Investigação em Didática e Tecnologia na Formação de Formadores, Universidade de Aveiro

Resumo

O recurso ao património artístico local proporciona um novo foco de atenção para o desenvolvimento de tarefas em que o questionamento constitua o ponto de partida para a atividade do aluno e cuja resolução envolva desafio mental, físico e afetivo, favorecendo a compreensão concetual e a integração das áreas curriculares. Neste pressuposto, a exploração de tarefas de investigação através da metodologia de trabalho experimental permite desenvolver conhecimentos e mobilizar capacidades processuais básicas como prever, planear, testar as previsões, observar, registar, argumentar, elaborar conclusões.... Tal impõe a identificação prévia de um contexto a explorar que favoreça a formulação de questões-problema. A oficina de formação contínua que aqui se apresenta desenvolve-se a partir da análise de um dos quadros de Manuel Cargaleiro marcado pela geometrização da tela e pela profusão de cores que a luz transforma. Da chuva de ideias desencadeada pela apreciação da obra e seus efeitos estéticos resultam várias questões-problema. Apresentam-se duas, uma centrada na pavimentação do plano com quadriláteros e a outra na relação da cor dos objetos com a luz. A obtenção de resposta às duas questões, percorrendo as várias etapas do trabalho experimental, culmina com a obtenção de uma composição plástica que releva as conexões da matemática com as ciências e a arte.

Palavras-chave: Formação contínua; Transversalidade Curricular; Trabalho Experimental; Contextos Não-formais; Património artístico local

Introdução

A génese da oficina de formação contínua foi uma atividade realizada após uma visita de estudo ao Museu Cargaleiro, em Castelo Branco, e que fez parte de um estudo, com um desenho de investigação-ação, desenvolvido na prática de ensino supervisionada em 1.º Ciclo do Ensino Básico, numa turma de 4.º ano de escolaridade. O facto de a atividade ter sido avaliada de forma muito positiva pelos participantes (Paixão, Jorge, & Antunes, 2016) e ter sobressaído o seu valor para a concretização de práticas de ensino em que o questionamento da realidade e a integração de saberes estão presentes, levou à sua transposição para a formação de educadores e professores.

A oficina está focada na realização de uma atividade de trabalho experimental, integrando ciências naturais e matemática, tomando como contexto uma obra do artista plástico Manuel Cargaleiro. Neste artigo, apresentamos, em traços gerais, as várias etapas da atividade cujos conteúdos se centram na pavimentação do plano com figuras poligonais e em fenómenos da interação da luz com a matéria, evidenciando as cores.

1. Quadro teórico

O elevado valor da interação entre contextos de educação formal e não-formal que a investigação tem vindo a evidenciar concorre com as orientações curriculares atuais e com as recomendações para as práticas pedagógico-didáticas expressas no Perfil do Aluno no Final da Escolaridade Obrigatória (Oliveira Martins, Gomes, Brocado, Pedroso, & Carrillo, 2018, p. 31), das quais se destacam:

- *abordar os conteúdos de cada área do saber, associando-os a situações e problemas presentes no quotidiano da vida do aluno ou presentes no meio sociocultural e geográfico em que se insere, recorrendo a materiais e recursos diversificados;*
- *organizar o ensino (…) prevendo intencionalmente, na sala de aula ou fora dela, atividades de observação, questionamento da realidade e integração de saberes*.

Na perspetiva de que a educação em contextos exteriores à escola (não-formais) deve estar articulada com os currículos escolares, o património cultural e natural do meio próximo da escola oferece múltiplas oportunidades de envolver os alunos na atividade de "fazer matemática/ciência", pois é rico em situações capazes de gerar a curiosidade dos alunos, fomentar boas questões e proporcionar aprendizagens, simultaneamente, cognitivas, procedimentais e afetivas (e.g. Avraamidou, & Roth, 2016; Paixão, & Jorge, 2012). Assim, é imprescindível que a formação de professores, inicial ou contínua, implique os profissionais em atividades que interrelacionem os contextos formais e não formais e que permitam analisar o seu papel no estabelecimento de conexões entre diferentes áreas de conhecimento e entre a matemática/ciência e o quotidiano (e.g. Kisiel, 2013; Skayia, Avraamidou, & Evagorou, 2019). Destacamos, em particular, o valor do envolvimento dos professores/futuros professores na organização de visitas de estudo, desenvolvidas em três fases articuladas - pré-visita, visita, pós-visita – e em que são intencionalmente planeadas atividades interrelacionadas e que conectem as aprendizagens a desenvolver em contexto formal e em contexto não-formal (e.g. Morentin & Guisasola, 2014).

Nos pressupostos anteriores, vários autores destacam o valor da aprendizagem por questionamento, associada a tarefas que propiciem o envolvimento em processos investigativos, nomeadamente em que prevaleça uma metodologia de trabalho experimental, de cariz investigativo, na senda da aprendizagem por questionamento (e.g. Allevato, & Vieira, 2016; Paixão, & Jorge, 2017). Tal metodologia deve envolver os sujeitos em situações em que estes possam manipular objetos e materiais, questionando, observando e tirando conclusões por si próprios e, em simultâneo, favorecer o estabelecimento de ligações entre o "mundo real dos objetos, materiais e acontecimentos e o desenvolvimento de pensamento científico abstrato" (Abrahams, Millar, Whitehouse, Reiss, & Amos, 2011, p. 1). Importa, ainda, que o desenvolvimento de tais tarefas atenda, de forma equilibrada, às componentes concetual («minds-on»), procedimental («hands on») e afetiva («heart-on»), pois a investigação tem revelado uma sobrevalorização dos procedimentos em detrimento das outras duas componentes (Millar, 2010).

2. A Ação de formação

Tarefas práticas de cariz investigativo implicam identificar um contexto, formular uma questão-problema que conduza ao envolvimento numa metodologia que implica controlo de variáveis, fazer previsões e testá-las com vista a obter resposta à questão-problema e a construir uma conclusão sustentada em evidências.

O contexto de educação não-formal – Museu Cargaleiro

O Museu Cargaleiro, situado na zona antiga de Castelo Branco, expõe várias obras representativas da produção artística do ceramista e pintor Manuel Cargaleiro, com um potencial didático assinalável. A obsessão pela cor e pela luz e a geometrização das telas constituem o ponto de partida da oficina e da atividade que assenta no potencial de obras de arte, tendencialmente abstratas, com vista a alcançar a integração curricular entre matemática, ciências e arte e a aprendizagem por questionamento.

Das inúmeras obras artísticas patentes no Museu, a atividade parte da observação e análise dos efeitos estéticos da obra *Carreaux Diamants*, um quadro a óleo sobre tela de 1986 (figura 1).

Figura 1 - *Carreaux Diamants* em selo comemorativo "Artistas Portugueses – Manuel Cargaleiro"[3]

Formulação da questão-problema

A ação desenvolve-se desafiando os professores a partilhar ideias geradas pela observação da pintura e, posteriormente, a gerar/formular questões-problemas com interesse didático para os seus alunos. De entre as muitas questões-problema passíveis de emergir da discussão, o foco deste artigo incide numa atividade integrando ciências, matemática e arte, com objetivos de aprendizagem associados à compreensão de fenómenos da interação da luz com a matéria, evidenciando as cores, e a compreensão da noção de pavimentação do plano com figuras poligonais.

Assim, o ponto de partida são duas questões-problema que se interrelacionam, tal como acontece no quadro de Cargaleiro com a cobertura da tela com figuras geométricas e a sua coloração através de um jogo de cores que sugere a existências de pontos de luz, contrastando com zonas sombrias:

- Qualquer quadrilátero pavimenta o plano?

- Existe relação entre a cor de um objeto e a luz?

A partir destas questões definem-se os objetivos da atividade (Tabela 1).

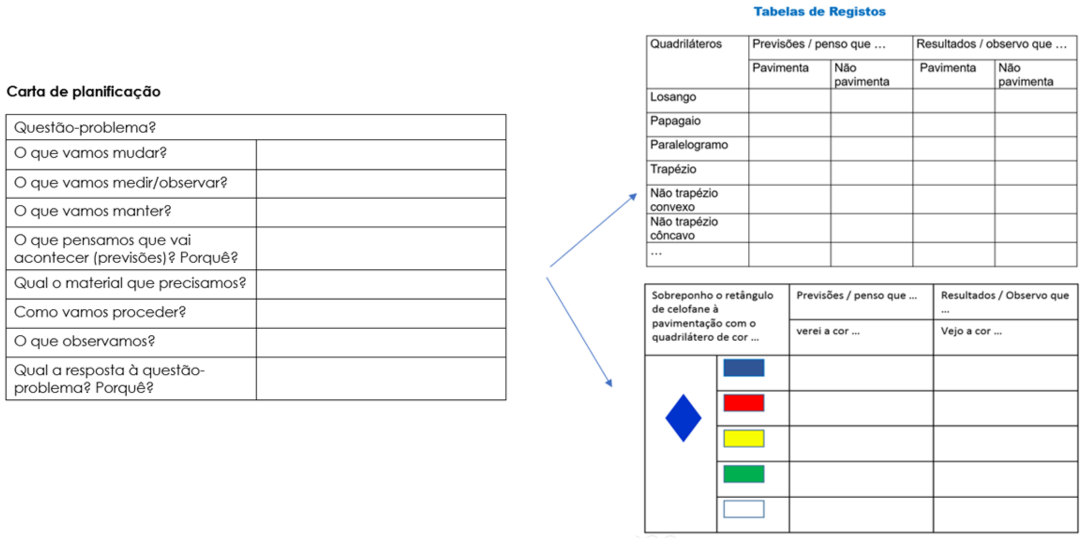
Tabela 1. Objetivos da atividade

Objetivos gerais	**Objetivos específicos**
- Desenvolver conhecimentos científicos; - Utilizar processos básicos de trabalho prático (prever, planificar, testar, observar, argumentar, registar, elaborar conclusões ...).	-Compreender conceitos e propriedades geométricas, associadas à noção de pavimentação do plano; - Compreender fenómenos associados à interação da luz com a matéria, evidenciando as cores.

[3] Acessível em: https://image.slidesharecdn.com/bfd020p-150829095707-lva1-app6892/95/bfd020-p-9-638.jpg?cb=1440842439

Planificação e tabelas de registos

Seguem-se outras etapas associadas à metodologia de trabalho experimental de índole investigativo com vista, em primeiro lugar, a planificar a atividade. Deste modo, os formandos são desafiados a dar resposta a um conjunto de perguntas que fazem parte da chamada carta de planificação que inclui a identificação de variáveis, os materiais necessários, a formulação de previsões e respetiva justificação. A carta de planificação é complementada com tabelas de registo de previsões e resultados observados (Figura 2).



Carta de planificação

Questão-problema?	
O que vamos mudar?	
O que vamos medir/observar?	
O que vamos manter?	
O que pensamos que vai acontecer (previsões)? Porquê?	
Qual o material que precisamos?	
Como vamos proceder?	
O que observamos?	
Qual a resposta à questão-problema? Porquê?	

Tabelas de Registos

Quadriláteros	Previsões / penso que …		Resultados / observo que …	
	Pavimenta	Não pavimenta	Pavimenta	Não pavimenta
Losango				
Papagaio				
Paralelogramo				
Trapézio				
Não trapézio convexo				
Não trapézio côncavo				
…				

Sobreponho o retângulo de celofane à pavimentação com o quadrilátero de cor …		Previsões / penso que …	Resultados / Observo que …
		verei a cor …	Vejo a cor …

Figura 2 - Carta de planificação e tabelas de registo (adaptadas de Martins et al., 2007)

Na figura 3 esquematiza-se a planificação geral da atividade.

Figura 3 - Plano da atividade de trabalho experimental

Observação de resultados e resposta às questões-problema

Usando cópias de um determinado tipo de quadrilátero, construído em papel colorido, explora-se a possibilidade de este pavimentar o plano. Como os polígonos estão construídos em material opaco, a pavimentação será depois usada para responder à segunda questão-problema, daí resultando como produto final da atividade uma composição plástica, como a que se ilustra na figura 4.

Figura 4 - Produção plástica a partir de uma pavimentação com trapézios escalenos verdes

Por fim, os participantes confrontam as suas previsões com os resultados observados e respondem à segunda questão da carta de planificação, apresentando os argumentos que sustentam essa resposta.

3. Considerações finais

Conclui-se que qualquer quadrilátero pavimenta o plano, pois, sendo a pavimentação monoédrica, em cada vértice da pavimentação convergem os quatro ângulos internos do quadrilátero. Sendo a soma dos ângulos internos de um quadrilátero igual a 360º, então, o plano pode ser preenchido, sem falhas nem sobreposições com qualquer quadrilátero. No que respeita à relação entre a cor de um objeto e a luz, quando usamos filtros transparentes (papel celofane), coloridos ou incolor, constata-se que a perceção que temos da cor do objeto pode alterar-se quando o filtro é colorido relativamente à perceção que temos quando sobre ele incide luz branca (e.g. luz solar). De facto, a cor de um objeto resulta da cor da luz que este absorve e, desse modo, a cor refletida não a inclui. A cor que vemos depende da cor do objeto quando iluminado com luz branca e da cor da luz que o ilumina.

4. Referências

Allevato, N, & Vieira, G. (2016). Do ensino através da resolução de problemas abertos às investigações matemáticas: possibilidades para a aprendizagem. *Quadrante*, 1, 114-131.

Avraamidou, L., & Roth, W.-M. (2016). Prologue: Intersections of Formal and Informal Science. Lucy Avraamidou & Wolff-Michael Roth (Eds.), *Intersections of Formal and Informal Science* (pp. xvi-xxv). New York: Routledge.

Kisiel, J. (2013). Introducing Future Teachers to Science Beyond the Classroom. *Journal of Science Teacher Education*, 24(1), 67-91.

Martins, I., Veiga, L., Teixeira, F., Tenreiro-Vieira, C., Vieira, R., Rodrigues, A., & Couceiro, F. (2007). *Educação em Ciências e Ensino Experimental* (2.ª edição). Lisboa: Ministério da Educação e Ciência, DGIDC.

Millar, R. (2010). *Analysing practical science activities to assess and improve their effectiveness.* Hatfield: Association for Science Education, University of York.

Morentin, M., & Guisasola, J. (2014). La visita a un museo de ciencias en la formación inicial del profesorado de Educación Primaria. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 11(3), 364-380.

Oliveira Martins, G., Gomes, C.A, Brocado, J., Pedroso, C.A., Carrillo, J. A., et al. (2018). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Lisboa: Ministério da Educação, Direção-Geral da Educação.

Paixão, M. F. & Jorge, F. R. (2012). Explorar espaços físicos e sociais da cidade para a educação científica. In M. J. Martín-Díaz, M. S. Gutiérrez-Julián & M. A. Gómez-Crespo (Coords.), Actas do VII Seminário Ibérico/III Seminário Ibero-americano CTS no ensino das Ciências "Ciência, Tecnologia e Sociedade no futuro do ensino das ciências" (pp.1-12). Madrid: AIA-CTS.

Paixão, F. & Jorge, F. R. (2017). Formação inicial de professores através do recurso ao património artístico local relevando o trabalho experimental. *Enseñanza de las Ciencias*, N.º Extraordinario,1623-1629.

Paixão, F., Jorge, F., & Antunes, L. (2016). Articulação Ciência-Sociedade através do património artístico local: atividades e recursos didáticos centrados no Museu Cargaleiro. *Indagatio Didactica*, 8(1), 1322-1338.

Skayia A., Avraamidou, L., & Evagorou, M. (2019). How preservice teachers develop their personal philosophies about science teaching: The role of informal science approaches. *Journal of Research in Science, Mathematics and Technology Education*, 2(2), 71-84.

Aprender Geometria pela exploração Digital do mundo Real

Artur Coelho
CIDTFF – Universidade de Aveiro
Agrupamento de Escolas de Almeida
artur.coelhol@ua.pt
ORCID ID 0000-0001-8807-9339

Magda Pereira
Agrupamento de Escolas de Almeida
magda.pereira@agrupamentodealmeida.net

Resumo

Na aula de matemática, a grande maioria dos professores pretende que os alunos interajam, façam acompanhar as suas perceções e consciencializações por representações matemáticas com significado e as partilhem através de palavras, ações e registos. Espera-se que estas representações, por sua vez, originem novas perceções e consciencializações, partilhadas por novas representações matemáticas e novas ações e, inerentemente, novos significados matemáticos. E assim por diante gerando-se um ciclo de aprendizagem crescente. As Tecnologias Digitais podem assumir-se como um meio de contribuir para favorecer a compreensão dos conceitos mais abstratos através de oportunidades de mediação significantes na conjetura, na explicação, na verificação e na prova. Na aprendizagem da geometria, uma parte dos significados pode ser construída a partir da experiência dos alunos em Ambientes de Matemática Dinâmica [AMD] associados à Realidade Aumentada [RA], conduzindo-os à construção de novas representações em contextos geométricos genéricos e estruturados, nomeadamente, quando enriquecemos o mundo real observado pelo aluno com informação adicional contextualizada resultante de uma camada virtual gerada por computador. Neste âmbito é possível e desejável propor tarefas significantes aos alunos que desempenhem, por si, um papel mediador no ensino e na aprendizagem da geometria.

Palavras-chave: Aprendizagem; Geometria; Realidade Aumentada; AMD; GeoGebra

Introdução

A democratização na utilização de *smartphones* com elevadas capacidades de processamento abriu novas oportunidades, tornando a Realidade Aumentada [RA] verdadeiramente móvel e acessível a alunos e professores.

A utilização de Ambientes de Matemática Dinâmica [AMD], conjugados com Realidade Aumentada, potencia a sensação de presença e a interatividade percecionada pelos alunos, tendo os objetos dinâmicos diferentes ângulos de visualização em contraponto com os suportes tradicionais, onde permanecem estáticos resultando em conceitos de difícil abstração (Bhagat & Chang, 2015).

Surgem, assim, oportunidades para construir ambientes de aprendizagem ricos, catalisadores do raciocínio matemático, do pensamento crítico e da criatividade. Esta abordagem deve permitir trabalhar de modo interativo, aprofundar e dar sentido a conceitos e procedimentos e usá-los na resolução de problemas e tomada de decisões (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2014).

A experiência geométrica com tarefas abertas que conjugam AMDs, RA e mediação do professor permite a preparação dos alunos para um trabalho matemático profundo, porque se tornam explícitas novas representações desconhecidas, evoluindo-se gradualmente em construção e estruturação de significados e facilitando os próprios processos cognitivos, como o de aprendizagem e o de resolução de problemas.

Decorrente do Encontro Matemática com Vida – Diferentes Olhares Sobre a Geometria, organizado pela Universidade de Aveiro, analisamos uma tarefa representativa da utilização do binómio RA-GeoGebra na exploração digital de conceitos matemáticos e na construção gradual de significados, desde a exploração de objetos do mundo real em contextos geométricos concretos até contextos algébricos genéricos e estruturados.

1. Modelação matemática do "mundo real": a via digital

Construir ambientes de aprendizagem capazes de desenvolver eficazmente o potencial de cada aluno, carece de mudanças na forma de comunicar, interagir e explorar o mundo (Coelho & Cabrita, 2017). Se a Tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática, constatam-se, simultaneamente, formas mais úteis de utilizar o computador na sala de aula, optando-se por estratégias que estimulem a autonomia e participação ativa dos alunos no seu processo de aprendizagem, a partir de tarefas exploratórias com recurso à tecnologia (NCTM, 2014). Neste âmbito, na aula de matemática uma tarefa deve ser usada como um meio de realizar algo e, complementarmente, como um instrumento de mediação para alcançar um objetivo didático do professor (Clarke et al., 2014).

Nas tarefas abertas que apelam à experimentação e à gradual estruturação de significados, incentivando os alunos ao livre uso de esquemas digitais, tabelas, gráficos, linguagem natural e à relação entre tais representações, os alunos podem ser induzidos a recuperar significados que vão construindo ao longo da resolução e construir significados que estruturem e sintetizem os anteriores, dando especial ênfase às ideias que vão comunicando neste processo (Pereira, 2016).

No contexto educativo é essencial ter em conta as potencialidades do uso dos recursos tecnológicos, em particular para a simulação, de forma a explorar ideias matemáticas e testar conjeturas sobre relações matemáticas associadas ao conceito, utilizando modelos visuais que ajudem o aluno no seu aprofundamento e fomentem o raciocínio matemático (NCTM, 2014). A utilização da RA em contexto educativo tem gerado um grande interesse pois são-lhe reconhecidas potencialidades ao nível da imersão, da interação, da visualização e da contextualização das aprendizagens, promovendo, simultaneamente, um entendimento da natureza transversal e estruturada dos conceitos. É uma tecnologia que permite que a informação ou imagens virtuais geradas por computador sejam integradas em visualizações, diretas ou indiretas, do mundo real em tempo real (Azuma, 1997). Na RA, o mundo real é ampliado com informações e imagens produzidas pelo software, que regista a posição, oclusão e interação dos objetos virtuais, criando a ilusão de uma única realidade. Ao seu enorme potencial associa-se a facilidade na exploração de resoluções alternativas – o que se constitui um catalisador de criatividade matemática (Coelho & Cabrita, 2017).

Através da tecnologia digital o mundo real pode ser trazido para a sala de aula (Pierce & Stacey, 2011). Dentro dos AMDs, o GeoGebra afirma-se como alternativa gratuita e com grande versatilidade. Este *software* pode ser instalado num computador, *tablet* ou *smartphone* e integra, nesta última plataforma, um módulo de RA. Se um dos objetivos principais da matemática é modelar problemas do "mundo real" e fazer conexões entre este e o mundo matemático, então o GeoGebra em conjugação com a RA, podem ser de grande valia.

2. Caso Prático: a taça de cereais

Esta tarefa centra-se na exploração de parâmetros que configuram um paraboloide. Numa primeira fase é fornecida aos alunos uma taça de cereais – objeto real (3D) mais ou menos parabólica, solicitando-se a medição da sua altura com uma régua (ver figura seguinte).

Figura 1- Taça de cereais com o registo do parâmetro altura

A determinação de pelo menos uma dimensão de forma experimental (com uma régua sobre o objeto), como a altura ou um comprimento, permitirá aos alunos a exploração dos parâmetros mais complexos no software e, mais tarde, conduzi-los-á à construção do modelo matemático correspondente.

Apesar da aplicação *Gráfico GeoGebra 3D* (GeoGebra para dispositivos Android[4]) permitir a construção dos modelos tridimensionais, recomenda-se, por questões de simplicidade e eficiência, construir modelos genéricos (paralelepípedos, cilindros, cones, paraboloides, …) no GeoGebra para PC e guardá-los na plataforma GeoGebra. Assim, sincronizando a APP do *smartphone*, podemos aceder facilmente a estes recursos centrando a ação na manipulação dos parâmetros que aproximem o nosso modelo ao objeto real aquando da utilização do *smartphone*. Neste caso preparamos previamente um paraboloide que é gerado pela rotação da curva f(x) em torno do eixo Ox. O ângulo de rotação é dado por uma variação do parâmetro *a* num determinado intervalo, ou seja, pela manipulação do ***seletor a*** no dispositivo móvel (ver Figura 2).

Numa segunda fase do raciocínio, os alunos fixam um valor do parâmetro e trabalham com as variáveis dependente e independente da função. Deste modo, para a = 6,28 radianos, resulta um paraboloide dado pela função $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} + 1$ no domínio [0,8]. Os valores do domínio decorrem da medição experimental da "altura" efetuada inicialmente (ver figura seguinte).

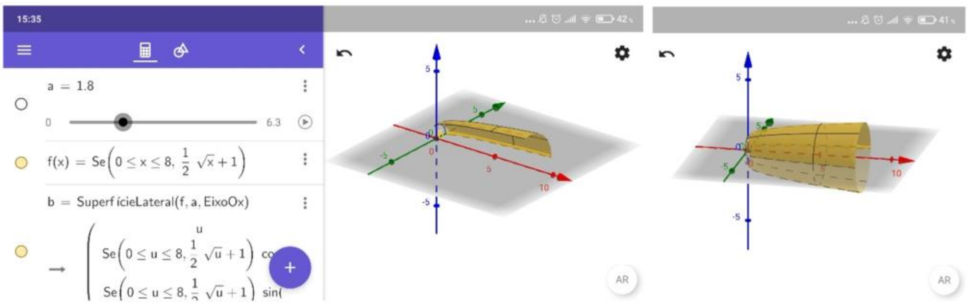


Figura 2 - Manipulação "limitada" do *seletor* ***a*** na aplicação móvel

[4] Em IOS encontra-se sob a designação *GeoGebra Augmented Reality*

Se o dispositivo permitir, aparece na aplicação, um ícone no canto inferior direito que depois de pressionado coloca o GeoGebra em modo RA. Neste momento devemos movimentar lentamente o dispositivo de forma a que a aplicação detete a superfície sobre a qual colocaremos o modelo matemático selecionado. Se este passo for bem-sucedido, visualizamos uma malha triangular azul e um retículo quadrado que indica o sítio exato onde será colocado o modelo "no mundo real" (tocar no retículo).

Como conhecemos a altura do objeto (8 cm), por sobreposição, podemos ajustar o zoom da aplicação para fazer corresponder com a "altura" do modelo (8 cm definidos pelo domínio da função). Como podemos observar na Figura 3, apesar de se conseguir uma sobreposição correta da "altura", a "excentricidade" do paraboloide dista muito do objeto real. E aqui começa a exploração dos parâmetros da equação.

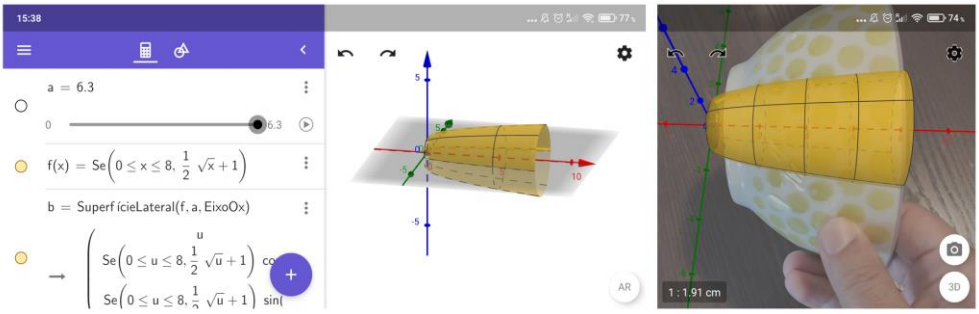


Figura 3 - Sobreposição e ajuste do paraboloide com o objeto real na aplicação móvel

Se o domínio da função definir a "altura" do paraboloide, o parâmetro que antecede a raiz quadrada modela a sua "excentricidade". Alteremos, por exemplo, este valor para 4 de modo a que $f(x) = 4\sqrt{x} + 1$. Observe-se o resultado e compare-se com a taça de cereais (ver Figura 4).

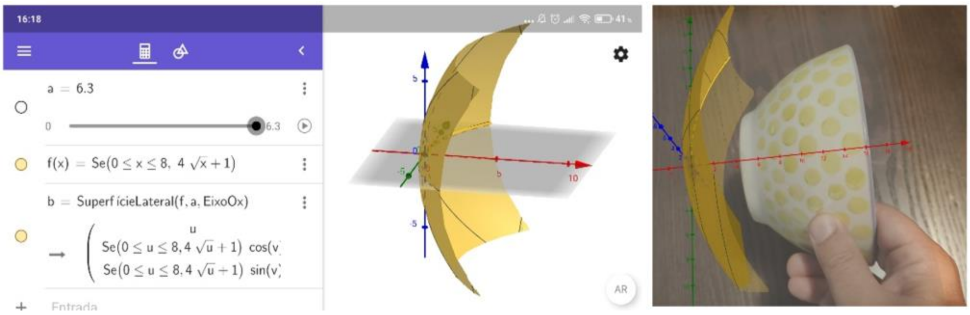


Figura 4 - Aumento para o valor 4 do fator que antecede a raiz

Através de experimentações sucessivas mediadas pelo professor, os alunos constroem o seguinte significado matemático: quando o valor do parâmetro é aproximadamente 2 o modelo matemático aproxima-se do objeto real (ver Figura 5).

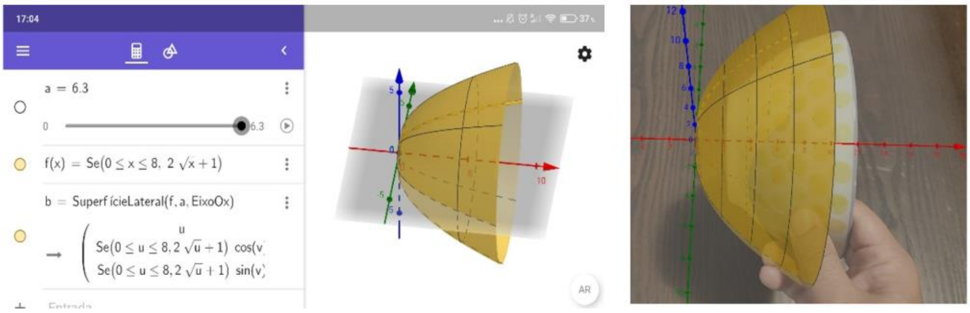


Figura 5 - aumento para o valor 2 do fator que antecede a raiz

A resolução de tarefas usando o binómio RA-GeoGebra promove, no raciocínio matemático dos alunos, o gradual desenvolvimento do sentido de símbolo algébrico e induz à construção do conceito de parâmetro, por viabilizar diferentes representações associadas à variável dependente e independente das funções, quando fixados os valores do parâmetro. Explorações análogas podem ser feitas com prismas, pirâmides, cilindros ou cones, dependendo dos conceitos e das aprendizagens que o professor intenciona mediar.

3. Conclusões

As possibilidades abertas na aprendizagem da Matemática pela convergência entre o GeoGebra e a Realidade Aumentada permitem encarar problemas complexos, onde as relações espaciais podem ser melhor entendidas através de um trabalho direto num ambiente 3D, com "manipulação" dos objetos de estudo contextualizados no "mundo real", em tempo real.

A abordagem aqui descrita constitui-se num novo sistema de representações, que permite ao aluno modelar matematicamente a realidade, partindo de contextos concretos, viabilizando a perceção das relações matemáticas envolvidas na situação, e obtendo relações matemáticas genéricas e estruturadas.

A utilização destas tecnologias proporciona também excelentes oportunidades para o desenvolvimento da literacia digital dos professores e dos alunos, fundamental para enfrentar com êxito a complexidade societal que vivemos.

4. Referências

Azuma, R. T. (1997). A survey of augmented reality. In *Presence: Teleoperators and Virtual Environments*. https://doi.org/10.1162/pres.1997.6.4.355

Bhagat, K. K., & Chang, C. Y. (2015). Incorporating GeoGebra into geometry learning-A lesson from India. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *11*(1), 77–86. https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1307a

Clarke, D., Strømskag, H., Johnson, H. L., Bikner-Ahsbahs, A., & Gardner, K. (2014). Mathematical Tasks And The Student. *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* , 1–30.

Coelho, A., & Cabrita, I. (2017). Creativity Enhanced by Technological Mediation in Exploratory Mathematical Contexts. In Ó. Mealha, M. Divitini, & M. Rehm (Eds.), *Citizen, Territory and Technologies: Smart Learning Contexts and Practices* (pp. 19–30). https://doi.org/10.1007/978-3-319-61322-2

NCTM. (2014). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*. National Council of Teachers of Mathematics.

Pereira, M. (2016). *Um Método de Ensino com Tarefas para Mediar Significados em Matemática*. Universidade da Beira Interior.

Pierce, R., & Stacey, K. (2011). Using Dynamic Geometry to Bring the Real World Into the Classroom. In *Model-Centered Learning*. https://doi.org/10.1007/978-94-6091-618-2_4

Isabel Cabrita é Professora Associada no Departamento de Educação e Psicologia da Universidade de Aveiro (UA). É doutorada em Didática (Matemática e tecnologias digitais); membro do Centro de Investigação Didática e Tecnologia na Formação de formadores (CIDTFF); coordenadora do lem@tic – laboratório de Educação em matemática e do Centro de Competência TIC da UA (ccTIC-UA); diretora do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.CEB/Ens. Sec. e membro da direção do Programa Doutoral em Multimédia em Educaçãoe do Mestrado em Educação e Formação; assessora Editorial da Revista Indagatio Didactica. Tem diversas publicações, principalmente, na área da educação em matemática e tecnologias digitais e coordenou(a)/participou(a) diversos projetos de I&D e programas de formaçãoinicial, pós-graduada e contínua de professores. (http://orcid.org/0000-0003-0255-7577)

Vanda Santos é investigadora doutorada da Universidade de Aveiro, desde 2019. É membro integrado do Centro de Investigação Didática e Tecnologia na Formação de formadores (CIDTFF) da Universidade de Aveiro e membro colaborador do Centro de Informática e Sistemas da Universidade de Coimbra (CISUC). Integra o lem@tic – laboratório de Educação em Matemática.É revisora do jornal científico Education and Information Technologies e Technology, Knowledge and Learning. Participou na candidatura de vários projetos científicos à FCT, um H2020 e ao projeto Open Education Challenge.
Atualmente é docente de Unidades Curriculares da área de Didática da Matemática e anteriormente lecionou várias Unidades Curriculares de Matemática, em diversos Institutos Politécnicos como Assistente e na Universidade Timor Lorosa'e de Timor-Leste como Professora Convidada.As suas principais áreas de investigação são ciência da computação, geometria computacional, software matemático, tecnologias educativas e educação. (https://orcid.org/0000-0002-3953-6123)

Teresa Bixirão Neto é doutorada (Doutoramento Europeu) em Didática e Formação pela Universidade de Aveiro, sendo atualmente professora auxiliar do Departamento de Educação e Psicologia, da Universidade de Aveiro, e membro do Centro de Investigação em Didática e Tecnologia na Formação de Formadores - CIDTFF. Desde 1996, tem estado envolvida em projetos de Cooperação para o Desenvolvimento dos Países da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa (CPLP).No âmbito da investigação, tem colaborado no desenvolvimento de projetos com o Departamento de Didática da Matemática da Universidade de Granada, Espanha. Os principais interesses de investigação prendem-se com a formação de professores, com especial enfoque na área do raciocínio algébrico e do raciocínio geométrico. (https://orcid.org/0000-0001-9002-2155)

J. Bernardino Lopes é Professor Associado com Agregação e Diretor do Doutoramento em Didática de Ciências e Tecnologia da UTAD. É investigador do CIDTFF onde coordena o LabDCT.
É editor da revista científica APEduC Journal. É membro da Comissão Editorial e referee em revistas científicas JCR.
Faz investigação em Educação em Ciência e Tecnologia. Interessa-se por filosofia, religião, arte e história. Tem livros de ficção publicados.
(https://orcid.org/0000-0001-9961-1538)

FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia

dep universidade de aveiro departamento de educação e psicologia

cidtff centro de investigação Didática e Tecnologia na Formação de Formadores

LabDCT

lem@tic