

**Domingos
Miguel
Ilombo**

**Uma abordagem ao Cálculo das Variações e Teoria de
Controlo Ótimo.**

**Domingos
Miguel
Ilombo**

**Uma abordagem ao Cálculo das Variações e
Teoria de Controlo Ótimo.**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações, Programa de Mestrado em Matemática e Aplicações 2017-2019, realizada sob a orientação científica do Prof. Doutor Ricardo Miguel Moreira de Almeida, Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

À minha estimada esposa,
Madá Ilombo, confidente e incetivadora.

Aos meus filhos,
Ariadne Ilombo e Azael Ilombo, grandes amores.

o júri

Presidente

Prof. Doutor Eugénio Alexandre Miguel Rocha
Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro

Prof. Doutor Nuno Rafael Oliveira Bastos
Professor Adjunto da Escola Superior de Tecnologia de Viseu

Prof. Doutor Ricardo Miguel Moreira de Almeida
Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro (orientador)

Agradecimentos

Ao Eterno e Glorioso Deus, pela bondade e misericórdia.

Ao meu orientador, Professor Doutor Ricardo Miguel Moreira de Almeida, pela amizade e dedicação durante a orientação da presente Dissertação.

À direção do Curso de Mestrado em Matemática e Aplicações, encabeçada pelo Professor Doutor Agostinho Miguel Mendes Agra, pelo apoio incondicional referente às dificuldades surgidas ao longo da formação.

Aos professores com os quais tive contacto durante o plano curricular, em especial a Professora Doutora Natália Martins, pela paciência e os valiosos ensinamentos.

Aos meus colegas da Universidade de Aveiro, Alfredo V. Man. Gomes, Yola F., Ana Martins, Pedro S., Mezonda, J. Jungo, Zinga e Ronnie, pela irmandade.

Aos meus pais, Pedro Ilombo e Margarida Miguel, que sempre souberam que a única forma de conhecer é descobrir, e que fazer descobrir é a única forma de ensinar;

Aos meus irmãos, José, Delfina, Antónica, Ariel e Garcia, e a todos os meus familiares que jamais deixaram de incentivar-me, por menor que fosse a contribuição.

Aos meus consócios, A. Machado, Cárine, Lúcia, Darius, Valdo G., C. Quitumba, Ribeiro, Flox, Jacob, Magas, Leo Dgos, B. Xiri, Correia, Ngola, Félix, Miluta, M. Gaspar, Cabanga, H. Da Silva, Ant. Bravo, Sinclética, Janeth, Jéssica, Arsénio, entre outros, pelo voto de confiança.

Ao INAGBE, pelo apoio financeiro.

À Escola Superior Politécnica de Malanje, em especial, aos distintos professores, Infeliz Coxe, Tomásia João e Manuel Osório, pela distinção e apoio sem restrições.

Ao Gabinete Provincial da Educação de Malanje, pelo apoio incondicional.

Ao Magistério Comandante Cuidado - Malanje, pela decisão positiva.

Aos Membros das Explicações de Matemática Ilombo.

Muito obrigado.

palavras-chave

Cálculo das Variações, equação de Euler-Lagrange, Controlo Ótimo, Método Direto.

resumo

Esta dissertação tem como objetivo principal apresentar uma abordagem sobre o cálculo das variações e teoria de controlo ótimo, sendo duas áreas da Matemática que estão inter-relacionadas e também com outros ramos, como a Física, Engenharia, Dinâmica e Economia. A dissertação está estruturada em dois capítulos. Relativamente ao primeiro, apresentamos o problema fundamental do cálculo das variações, e algumas generalizações como o problema isoperimétrico. No capítulo seguinte, apresentamos o problema básico do controlo ótimo com controlo livre e limitado. Por último, a partir de um ponto de vista numérico, utilizamos o *Software Maple* versão 2018 para resolver problemas de controlo ótimo.

Keywords

Calculus of Variations, Euler-Lagrange equation, Optimal Control, Direct Method.

Abstract

This dissertation has as main objective to present an approach on the calculus of variations and optimal control theory, being two areas of mathematics that are interrelated and also with other branches, such as physics, engineering, dynamics and economics. The dissertation is structured in two chapters. Regarding the first, we present the fundamental problem of the calculus of variations, and some generalizations such as the isoperimetric problem. In the following chapter, we present the basic problem of the optimal control with free and limited control. Lastly, from a numerical view point, we use the Maple Software 2018 version to solve optimal control problems.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Cálculo das Variações	3
2.1	Introdução	3
2.2	Definições Básicas	4
2.3	Lema Fundamental do Cálculo das Variações	6
2.4	Problema Fundamental do Cálculo das Variações	6
2.5	Algumas Generalizações	11
2.5.1	A Equação de Euler-Poisson	11
2.5.2	Funcionais com várias Variáveis Dependentes	15
2.5.3	Condições de Transversalidade	19
2.6	Problema Isoperimétrico	23
2.6.1	Multiplicadores de Lagrange (Única Restrição)	23
2.6.2	Solução de Lagrange	23
3	Controlo Ótimo	29
3.1	Introdução	29
3.2	Definições Básicas	29
3.3	Problema de Lagrange do Controlo Ótimo	30
3.3.1	Princípio do Máximo de Pontryagin	31
3.3.2	Problema do Controlo Ótimo com Controlo Limitado	40
3.4	Método Direto	46
4	Considerações Finais	52
5	Referências Bibliográficas	53

1 Introdução

No decorrer da história da matemática, o homem serviu-se sempre de símbolos apropriados com a finalidade de representar certas situações para satisfazer as suas necessidades. É uma ciência que desempenha um papel muito importante quanto ao desenvolvimento da autonomia intelectual do homem.

A matemática tem como objetivo enunciar perguntas sobre os fenômenos que observamos na natureza e o de elaborar modelos teóricos abstratos que possam ser utilizados pela ciência para representar e estudar o universo que nos rodeia. De facto, a palavra "Matemática" provém do grego *mathema*, que significa conhecer ou buscar. Uma de suas áreas que tem sido objeto de estudo é a otimização.

A origem da otimização, como ciência, remonta à Grécia Antiga. No entanto, a origem dos problemas de otimização é ainda mais antiga, pois desde sempre que o homem tentou encontrar as “melhores soluções” para os problemas à sua volta, de forma a tornar a sua vida fácil. Quase todas as ciências (físicas e sociais) têm formulações em termos de otimização: “os descendentes mais aptos”, “o percurso de menor energia”, “a ação mais rentável”, entre outros [21].

Em matemática, o problema principal da otimização consiste em encontrar o máximo (por exemplo “o lucro máximo”) ou o mínimo (“a energia mínima”) de uma função num certo conjunto, geralmente definido por equações e inequações algébricas.

O cálculo das variações é um ramo da matemática que consiste em solucionar problemas de otimização, que generaliza a teoria de máximos e mínimos do cálculo diferencial para funções cujo domínio é constituído por um conjunto de curvas admissíveis [3, 6, 9, 29, 33]. Geralmente, funcionais são definidos por integrais envolvendo funções e suas derivadas [6].

Relativamente à análise de funções, a atenção do problema do cálculo das variações está na relação entre dois conjuntos numéricos, o independente (t) e o dependente (x). Deste modo, a função L estabelece uma correspondência um para um entre eles, cuja notação é dada por

$$x = L(t).$$

A generalização desse conceito permite que os dois conjuntos não sejam apenas restritos a números reais. E essa nova relação designa-se por funcional. O estudo do cálculo das variações tem como objetivo encontrar os extremos dos funcionais, especificamente na forma de um integral [6, 20].

No que se refere a matemática moderna¹, o cálculo das variações é uma parte da análise funcional e desempenha o mesmo papel que a teoria de máximos e mínimos de funções tem no cálculo elementar [22].

Vários matemáticos se interessaram por estudar e desenvolver o cálculo das variações, mas destaca-se Lagrange², um dos mais notáveis matemáticos do século XVIII. Ressalta-se que o nome Cálculo das Variações foi introduzido por Euler³ no seu trabalho intitulado *Elementa Calculi Variationum*, apresentado à Academia de Berlim em 1756, e publicado em 1766 [14, 15].

O cálculo (clássico) das variações tem muitas aplicações na física, geometria, engenharia, dinâmica, teoria do controlo e economia [1].

O controlo ótimo é uma área multidisciplinar, com raízes no cálculo das variações, na teoria clássica do controlo, nos processos aleatórios, na programação linear e não-linear, nos algoritmos e computadores digitais e na programação dinâmica [2, 8, 36]. Este constitui uma das metodologias que permitem resolver problemas de otimização em espaços de dimensão infinita. A sua importância no estudo de trajetórias aeroespaciais e na robótica é inquestionável [2].

A presente dissertação está estruturada em 2 capítulos, onde no 1º aborda o cálculo das variações e no 2º aborda o controlo ótimo. Inicialmente, apresentamos as condições necessárias de otimalidade do problema do controlo ótimo. Mais adiante, a partir de um ponto de vista numérico, utilizamos o *Software Maple* para resolver alguns problemas de controlo ótimo.

Finalmente, tecemos algumas considerações finais e apresentamos as referências bibliográficas.

¹O Movimento da Matemática Moderna (MMM) foi um movimento internacional do ensino de matemática que surgiu na década de 1960 e se baseava na formalidade e no rigor dos fundamentos da teoria dos conjuntos e da álgebra para o ensino e a aprendizagem de Matemática.

²Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), matemático e astrônomo italiano que fez contribuições significativas para os campos da análise e teoria dos números.

³Leonhard Euler (1701-1783), matemático, físico, astrônomo, lógico e engenheiro suíço que fez descobertas influentes em muitos ramos da matemática, tais como o cálculo infinitesimal e a teoria dos grafos, ao mesmo tempo que fez contribuições pioneiras a vários ramos, como a topologia e a teoria analítica dos números.

2 Cálculo das Variações

2.1 Introdução

Desde a Antiguidade, o homem tem-se preocupado com a determinação de extremos para uma variedade de problemas do ponto de vista geométrico ou físico, mas só com os métodos da análise matemática desenvolvidos nos séculos XVII e XVIII se puderam estudar tais problemas de forma sistemática.

Atualmente, o cálculo diferencial em \mathbb{R}^n permite resolver sem grandes dificuldades inúmeros problemas sobre extremos de funções reais de uma ou mais variáveis independentes. E para funções não diferenciáveis é a álgebra linear que fornece alguns métodos para resolver problemas dessa natureza [14].

Estes problemas podem ser generalizados a funções reais definidas em espaços diferentes de \mathbb{R}^n . E, portanto, esse estudo constitui um novo ramo da análise conhecido por cálculo das variações. Logo a seguir à criação do cálculo infinitesimal, Newton⁴ levantou o problema da forma que devia ter uma superfície de revolução, movendo-se num líquido, ao longo do seu eixo, com a velocidade constante, para que a resistência ao movimento fosse mínima, mais tarde John Bernoulli⁵ em 1696 propôs a determinação da trajetória entre dois pontos dados, para que o tempo do percurso fosse mínimo, depois surgiu o da obtenção das geodésias, linhas de menor comprimento entre dois pontos da Terra, considerada superfície de revolução, e em todos estes casos a função a minimizar era dada por algum integral [14, 40].

Maupertuis⁶ com o seu princípio de menor ação, Euler e Lagrange passaram a deduzir as leis fundamentais da física impondo que fossem mínimos os valores de certos integrais. Hoje, estas matérias estão mais sistematizadas, podendo ser estudadas de forma mais abrangente e abstrata com o recurso a estruturas modernas. Mas nesta dissertação limitaremos-nos apenas em estudar o cálculo das variações no sentido clássico, ou seja, aquele em que se estuda máximos e mínimos de funções (reais) definidas por integrais⁷.

Neste capítulo, apresentamos o problema fundamental do cálculo das variações, algu-

⁴Isaac Newton (1642-1727), matemático inglês, físico, astrônomo, teólogo e autor (descrito em seu próprio dia como um "filósofo natural"), que é amplamente reconhecido como um dos cientistas mais influentes de todos os tempos e uma figura chave na revolução científica.

⁵Johann Bernoulli (1667-1748), matemático suíço e foi um dos muitos matemáticos proeminentes da família Bernoulli.

⁶Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759), matemático francês que executou uma das primeiras medições de um arco de meridiano (na Lapónia).

⁷As soluções podem variar conforme as condições admissíveis.

mas generalizações e o problema isoperimétrico. As principais referências para este capítulo são [1, 7, 6, 14, 20, 31].

2.2 Definições Básicas

Definição 2.1. (Funcional) *Um funcional J é uma regra de correspondência que associa a cada função L numa certa classe Ω , um único número real. O conjunto Ω é chamado domínio do funcional e o conjunto de números reais associados com as funções em Ω é chamado de conjunto imagem do funcional.*

Observação 2.1. *Consideraremos as seguintes notações*

$$x'(t) = \frac{dx}{dt}, \quad L'(x) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad e \quad L'(x') = \frac{\partial L}{\partial x'}.$$

Seguidamente, vamos apresentar alguns exemplos de funcionais.

Exemplo 2.1. *Seja $\Omega = C([0, 1], \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções contínuas de $[0, 1]$ em valores reais. Seja o funcional*

$$J[x] = \int_0^1 x(t) dt,$$

onde $x \in C([0, 1], \mathbb{R})$. Determinaremos o valor do funcional para as funções $x(t) = t^2$ e $x(t) = \sin(\pi t)$.

- Seja $x(t) = t^2$. Logo,

$$J[x] = \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

- Seja $x(t) = \sin(\pi t)$. Logo,

$$J[x] = \int_0^1 \sin(\pi t) dt = \left[\frac{-\cos(\pi t)}{\pi} \right]_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

Exemplo 2.2. *Seja s o comprimento do arco de uma curva plana x que une dois pontos distintos $A(t_1, x_1)$ e $B(t_2, x_2)$. O comprimento da curva é dado por*

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + x'^2(t)} dt.$$

Definição 2.2. (Espaço Vetorial) Seja \mathbb{X} um conjunto não vazio. Diz-se que \mathbb{X} é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais \mathbb{R} , se cumpre as seguintes propriedades:

1. $x + y = y + x, \forall x, y \in \mathbb{X}$ (comutatividade);
2. $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in \mathbb{X}$ (associatividade);
3. $\exists 0 \in \mathbb{X}$, tal que $0 + x = x + 0 = x$ (existência de elemento neutro);
4. $\forall x \in \mathbb{X}, \exists (-x) \in \mathbb{X}, x + (-x) = 0$ (existência de elemento oposto);
5. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{X}, a(bx) = (ab)x$ (associatividade da multiplicação por escalar);
6. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{X}, (a + b)x = ax + bx$ (distributiva da soma de escalares em relação a um vetor);
7. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{X}, a(x + y)x = ax + ay$ (distributiva de um escalar em relação à soma de vetores);
8. Se 1 é a unidade de \mathbb{R} , então para cada $x \in \mathbb{X}, 1 \cdot (x) = x$. (existência do elemento neutro em \mathbb{X}).

Definição 2.3. (Norma) Seja \mathbb{X} um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{R} . Uma norma em \mathbb{X} é uma aplicação que a cada vetor $x \in \mathbb{X}$ faz corresponder um número real $\|x\|$ com as seguintes propriedades:

1. $\|x\| \geq 0, \forall x \in \mathbb{X}$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{X}$ (propriedade homogênea);
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in \mathbb{X}$ (desigualdade triangular).

Definição 2.4. (Espaço Normado) Chama-se espaço normado a um par $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$, onde \mathbb{X} é um espaço vetorial e $\|\cdot\|$ é uma norma em \mathbb{X} .

Definição 2.5. (Extremo Relativo de um Funcional) Um funcional J com o domínio Ω tem um extremo relativo em \hat{x} se existe um $\epsilon > 0$ tal que, para todas as funções $x \in \Omega$, com $\|x - \hat{x}\| < \epsilon$:

$$J(x) - J(\hat{x}) \geq 0, (\hat{x} \text{ é um minimizante relativo})$$

$$J(x) - J(\hat{x}) \leq 0, (\hat{x} \text{ é um maximizante relativo}).$$

Observação 2.2. Se a desigualdade é satisfeita para todo o $\epsilon > 0$, então $J(\hat{x})$ é um mínimo ou máximo absoluto.

2.3 Lema Fundamental do Cálculo das Variações

A seguir, apresentamos o resultado do Lema Fundamental do Cálculo das Variações que utilizaremos para determinar os candidatos a maximizantes de funcionais.

Lema 2.1. (*Lema Fundamental do Cálculo das Variações [18]*) *Seja $L \in C([a, b], \mathbb{R})$. Se*

$$\int_a^b L(t)h(t)dt = 0,$$

para toda função $h \in C([a, b], \mathbb{R})$ tal que $h(a) = h(b) = 0$, então $L(t) = 0, \forall t \in [a, b]$.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que existe algum $t_0 \in [a, b]$ tal que $L(t_0) \neq 0$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que existe um intervalo $[t_1, t_2] \subseteq [a, b]$ tal que $L(t) > 0, \forall t \in [t_1, t_2]$.

Seja $h(t) = (t - t_1)(t_2 - t)$ para $t \in [t_1, t_2]$ e $h(t) = 0$ se $t \notin [t_1, t_2]$. Então

$$\begin{aligned} \int_a^b L(t)h(t)dt &= \int_a^{t_1} L(t)h(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} L(t)h(t)dt + \int_{t_2}^b L(t)h(t)dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L(t)h(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} L(t)(t - t_1)(t_2 - t)dt > 0, \end{aligned}$$

obtendo assim uma contradição.

Portanto, $L(t) = 0$, para todo o $t \in [a, b]$.

□

Observação 2.3. *Nesta dissertação lidamos, sem perda de generalidade, apenas com problemas de maximização. Isto porque os problemas de minimização são facilmente convertidos em problemas equivalentes de maximização usando a relação*

$$-\min [-J(x)] = \max J(x).$$

2.4 Problema Fundamental do Cálculo das Variações

O problema fundamental do cálculo das variações consiste em encontrar extremos (máximos ou mínimos) do funcional

$$(P) \quad \max J[x] = \int_a^b L(t, x(t), x'(t)) dt, \quad (1)$$

onde $x \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ e satisfaz as seguintes condições de fronteira

$$x(a) = x_1 \text{ e } x(b) = x_2,$$

onde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Observação 2.4. *Algumas vezes, para simplificarmos a notação, utilizaremos L em vez de $L(t, x(t), x'(t))$.*

O resultado a seguir foi baseado em [20].

Teorema 2.1. *Seja J o funcional definido em (1). Se x é maximizante de (1), e $L'(x)$ e $L'(x')$ existem e são contínuas, então x deve satisfazer a equação*

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} = 0, \quad t \in [a, b]. \quad (2)$$

Demonstração. Vamos supor que x é uma solução para o problema (1). Toma-se uma família de funções:

$$\hat{x}(t) = x(t) + \epsilon h(t), \quad (3)$$

onde $|\epsilon| < 1$ e $h \in C([a, b], \mathbb{R})$ anula-se na fronteira:

$$h(a) = h(b) = 0.$$

Como consequência, tem-se que:

$$(x + \epsilon h)(a) = x(a) + \epsilon h(a) = x(a)$$

e

$$(x + \epsilon h)(b) = x(b) + \epsilon h(b) = x(b).$$

Substituindo no funcional (1), definimos

$$j[\epsilon] = \int_a^b L(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) dt \quad (4)$$

onde

$$\hat{x}'(t) = x'(t) + \epsilon h'(t).$$

Observemos que j atinge um máximo em $\epsilon = 0$. Logo,

$$\frac{\partial j}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = 0 \Leftrightarrow \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x} h + \frac{\partial L}{\partial x'} h' \right) dt = 0. \quad (5)$$

Integrando por partes a segunda parcela de (5), obtemos:

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial x'} h' dt = \left[\frac{\partial L}{\partial x'} h \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} h dt = - \int_a^b \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} h dt. \quad (6)$$

Substituindo (6) em (5), obtemos:

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial x} h dt - \int_a^b \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} h dt = 0 \Leftrightarrow \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} \right) h dt = 0. \quad (7)$$

Aplicando o Lema 2.1 em (7) resulta na equação diferencial de **Euler-Lagrange**

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} = 0 \quad (8)$$

com $t \in [a, b]$.

□

Observação 2.5. *A equação de Euler-Lagrange é apenas uma condição necessária para a existência de extremantes de um funcional [6].*

Seguidamente, apresentaremos alguns exemplos de candidatos a maximizantes de funcionais.

Exemplo 2.3. *Consideremos o funcional*

$$J[x] = \int_0^2 (-12tx(t) - x'^2(t)) dt$$

com as condições de fronteira $x(0) = 2$ e $x(2) = 12$. Vamos determinar os candidatos a maximizantes desse funcional. Seja

$$L(t, x(t), x'(t)) = -12tx(t) - x'^2(t).$$

Aplicando a equação de Euler-Lagrange (8), tem-se que:

$$-12t - \frac{d}{dt} (-2x'(t)) = 0 \Leftrightarrow x''(t) = 6t. \quad (9)$$

Logo, integrando sucessivamente (9), obtém-se

$$\hat{x}(t) = t^3 + C_1 t + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Tendo em conta as condições de fronteira, tem-se que:

$$\hat{x}(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2$$

e

$$\hat{x}(2) = 12 \Rightarrow C_1 = 1.$$

Portanto,

$$\hat{x}(t) = t^3 + t + 2,$$

com $t \in [0, 2]$ é o único candidato a maximizante.

Exemplo 2.4. *Consideremos o funcional*

$$J[x] = \int_0^1 (-5tx(t) + x'^2(t)) dt$$

com as condições de fronteira $x(0) = 0$ e $x(1) = 1$. Vamos determinar os candidatos a maximizantes desse funcional. Seja

$$L(t, x(t), x'(t)) = -5tx(t) + x'^2(t).$$

Aplicando a equação de Euler-Lagrange (8), tem-se que:

$$-5t - \frac{d}{dt}(2x'(t)) = 0 \Leftrightarrow x''(t) = -\frac{5}{2}t. \quad (10)$$

Logo, integrando sucessivamente (10), obtém-se

$$\hat{x}(t) = -\frac{5}{12}t^3 + C_1 t + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Tendo em conta as condições de fronteira, tem-se que:

$$\hat{x}(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

e

$$\hat{x}(1) = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{17}{12}.$$

Portanto,

$$\hat{x}(t) = -\frac{5}{12}t^3 + \frac{17}{12}t,$$

com $t \in [0, 1]$ é o único candidato a maximizante.

Exemplo 2.5. *Consideremos o funcional*

$$J[x] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-x^2(t) + x'^2(t)) dt$$

com as condições de fronteira $x(0) = 0$ e $x(\frac{\pi}{2}) = 1$. Vamos determinar os candidatos a maximizantes desse funcional. Seja

$$L(t, x(t), x'(t)) = -x^2(t) + x'^2(t).$$

Aplicando a equação de Euler-Lagrange (8), tem-se que:

$$-2x(t) - \frac{d}{dt}(2x'(t)) = 0 \Leftrightarrow x''(t) + x(t) = 0. \quad (11)$$

Tendo em conta a equação característica:

$$m^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm i,$$

a solução geral de (11) é:

$$\hat{x}(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Tendo em conta as condições de fronteira, tem-se que:

$$\hat{x}(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

e

$$\hat{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow C_2 = 1.$$

Portanto,

$$\hat{x}(t) = \sin(t),$$

com $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ é o único candidato a maximizante.

2.5 Algumas Generalizações

2.5.1 A Equação de Euler-Poisson

O raciocínio utilizado para demonstrar a equação de Euler-Lagrange na Secção 2.4 pode ser generalizado para funcionais que envolvem derivadas de ordem superior. Consideremos o problema da forma

$$(P) \quad \max J[x] = \int_a^b L(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t)) dt, \quad (12)$$

onde $x \in C^m([a, b], \mathbb{R})$. As condições de fronteira são

$$\begin{aligned} x(a) &= x_1, & x(b) &= x_2, \\ x'(a) &= x_1^1, & x'(b) &= x_2^1, \\ x''(a) &= x_1^2, & x''(b) &= x_2^2, \\ & & & \vdots \end{aligned}$$

$$x^{(m-1)}(a) = x_1^{m-1}, \quad x^{(m-1)}(b) = x_2^{m-1}. \quad (13)$$

Na Secção 2.4 apresentámos o conceito de variação da curva ótima:

$$\hat{x}(t) = x(t) + \epsilon h(t),$$

onde h é uma função de classe C^m que satisfaz as condições de fronteira

$$\begin{aligned} h(a) &= 0, & h(b) &= 0, \\ h'(a) &= 0, & h'(b) &= 0, \\ h''(a) &= 0, & h''(b) &= 0, \\ & & & \vdots \end{aligned}$$

$$h^{(m-1)}(a) = 0, \quad h^{(m-1)}(b) = 0. \quad (14)$$

Uma vez que a função auxiliar arbitrária \hat{x} também satisfaz as condições de fronteira do funcional, logo podemos substituir em (12). Assim, definimos

$$j(\epsilon) = \int_a^b L(t, x(t) + \epsilon h(t), x'(t) + \epsilon h'(t), \dots, x^{(m)}(t) + \epsilon h^{(m)}(t)) dt. \quad (15)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial j}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0} = 0 &\Leftrightarrow \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x} h + \frac{\partial L}{\partial x'} h' + \frac{\partial L}{\partial x''} h'' + \dots + \frac{\partial L}{\partial x^{(m)}} h^{(m)} \right) dt = 0 \\ &\Leftrightarrow \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x} h dt + \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x'} h' dt + \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x''} h'' dt + \dots + \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x^{(m)}} h^{(m)} dt = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

A presença de $h^{(m)}$ em (16) indica que deve-se integrar por partes várias vezes.

Especificamente, para terceira parcela de (16), temos

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x''} h''(t) dt &= \left[\frac{\partial L}{\partial x''} h' \right]_a^b - \int_a^b h' \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x''} dt = \left[-h \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x''} \right]_a^b + \int_a^b h \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial x''} dt \\ &= \int_a^b \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial x''} h dt, \end{aligned}$$

onde usamos as condições de fronteira

$$h(a) = h(b) = h'(a) = h'(b) = 0.$$

Notemos que, para a segunda parcela de (16), temos

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial x'} h' dt = - \int_a^b \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} h dt.$$

Repetindo o método apresentado anteriormente, segue-se que

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x} h dt - \int_a^b \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} h dt + \int_a^b \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial x''} h dt - \dots (-1)^m \int_a^b \frac{d^{(m)}}{dt^{(m)}} \frac{\partial L}{\partial x^{(m)}} h dt &= 0. \\ \Leftrightarrow \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial x''} - \dots (-1)^m \frac{d^{(m)}}{dt^{(m)}} \frac{\partial L}{\partial x^{(m)}} \right] h dt &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Aplicando o Lema 2.1 em (17), resulta na **equação de Euler-Poisson**⁸

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial x''} - \dots (-1)^m \frac{d^{(m)}}{dt^{(m)}} \frac{\partial L}{\partial x^{(m)}} = 0. \quad (18)$$

Observação 2.6. A equação de Euler-Poisson é uma equação diferencial ordinária de ordem $2m$ e exige as $2m$ condições de fronteira (14), onde m é a ordem da maior derivada presente no funcional (14).

⁸Siméon Denis Poisson (1781-1840), matemático e físico francês. Foi considerado como sucessor de Laplace no estudo da mecânica celeste e da atração de esferóides.

Seguidamente, vamos apresentar alguns exemplos da determinação de candidatos a maximizantes de funcionais com $m = 2$.

Exemplo 2.6. *Consideremos o funcional ([38], pág.84)*

$$J[x] = \int_0^1 [1 + (x''(t))^2] dt$$

com as condições de fronteira

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$$

$$x(1) = 1, \quad x'(1) = 1.$$

Vamos determinar os candidatos a maximizantes desse funcional. Como

$$L(t, x(t), x'(t), x''(t)) = 1 + (x''(t))^2$$

logo, aplicando a equação de Euler-Poisson (18), tem-se que:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial x''} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2}{dt^2} (2x''(t)) = 0 \Leftrightarrow x^{(4)}(t) = 0. \quad (19)$$

Logo, a solução geral de (19) é:

$$\hat{x}(t) = C_1 t^3 + C_2 t^2 + C_3 t + C_4, \quad C_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, 4.$$

Substituindo as condições de fronteira, temos

$$\hat{x}(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$\hat{x}'(0) = 1 \Rightarrow C_3 = 1$$

$$\hat{x}(1) = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0$$

$$\hat{x}'(1) = 1 \Rightarrow 3C_1 + 2C_2 = 0.$$

Logo,

$$C_1 = C_2 = 0.$$

Portanto,

$$\hat{x}(t) = t,$$

com $t \in [0, 1]$ é o único candidato a maximizante.

Exemplo 2.7. Consideremos o funcional

$$J[x] = \int_0^1 [24tx(t) + (x''(t))^2] dt$$

com as condições de fronteira

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, & x'(0) &= 0 \\ x(1) &= 0, & x'(1) &= \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Vamos determinar os candidatos a maximizantes desse funcional. Seja

$$L(t, x(t), x'(t), x''(t)) = 24tx(t) + (x''(t))^2.$$

Aplicando a equação de Euler-Poisson (18), tem-se que:

$$24t + \frac{d^2}{dt^2}(2x''(t)) = 0 \Leftrightarrow x^{(4)}(t) = -12t. \quad (20)$$

Logo, integrando sucessivamente (20), obtém-se:

$$\hat{x}(t) = -\frac{1}{10}t^5 + \frac{1}{6}C_1t^3 + \frac{1}{2}C_2t^2 + C_3t + C_4, \quad C_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (21)$$

Substituindo as condições de fronteira em (21), temos

$$\hat{x}(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$\hat{x}'(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$\hat{x}(1) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}C_1 + C_2 = \frac{1}{5}$$

$$\hat{x}'(1) = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{2}C_1 + C_2 = \frac{3}{5}.$$

Logo,

$$C_1 = \frac{12}{5} \text{ e } C_2 = -\frac{3}{5}.$$

Portanto,

$$\hat{x}(t) = -\frac{1}{10}t^5 + \frac{2}{5}t^3 - \frac{3}{10}t^2,$$

com $t \in [0, 1]$ é o único candidato a maximizante.

2.5.2 Funcionais com várias Variáveis Dependentes

Alguns problemas variacionais envolvem funcionais que dependem de diversas variáveis dependentes. Nesta secção vamos deduzir a equação de Euler-Lagrange para funcionais que dependem de várias variáveis dependentes e uma variável independente. Seja o espaço das funções $\mathbf{q} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ e $q_k \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ para $k = 1, 2, \dots, n$.

Teorema 2.2. *Seja S o conjunto definido por*

$$S = \{\mathbf{q} \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R}^n) : \mathbf{q}(a) = \mathbf{q}_0 \text{ e } \mathbf{q}(b) = \mathbf{q}_1\} \quad (22)$$

e J um funcional da forma

$$J[\mathbf{q}] = \int_a^b L(t, \mathbf{q}, \mathbf{q}') dt, \quad (23)$$

onde L é uma função que tem derivadas parciais contínuas de segunda ordem em relação a q_k e q'_k , para $k = 1, 2, \dots, n$. Se $\mathbf{q} \in S$ é maximizante de J , então

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q'_k} = 0, \quad \forall k = 1, \dots, n. \quad (24)$$

Demonstração. Novamente, podemos representar uma variação $\hat{\mathbf{q}}$ como uma variação,

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \epsilon h,$$

onde $|\epsilon| < 1$ e $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$. Para este caso,

$$H = \{h \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R}^n) : h(a) = h(b) = \mathbf{0}\}.$$

Seja

$$j[\epsilon] = \int_a^b L(t, \mathbf{q} + \epsilon h, \mathbf{q}' + \epsilon h') dt.$$

Como $\mathbf{q} \in S$ é um maximizante de J , $\epsilon = 0$ é um maximizante de para j . Logo, sabemos que $j'(0) = 0$, então

$$\int_a^b \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} h_k + \frac{\partial L}{\partial q'_k} h'_k \right) dt = 0. \quad (25)$$

Consideremos o conjunto de funções H_1 definido por $H_1 = \{(h_1, 0, \dots, 0) \in H\}$. A condição (25) deve ser satisfeita para $h \in H_1$, e para esta escolha a condição (25) reduz-se a

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q_1} h_1 + \frac{\partial L}{\partial q'_1} h'_1 \right) dt = 0. \quad (26)$$

De modo análogo ao que foi feito na Secção 2.4,

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q'_1} = 0.$$

Para as escolhas apropriadas de $h \in H$, podemos deduzir as equações seguintes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q'_1} &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q'_2} &= 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q'_n} &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

□

Observemos que (27) é um sistema de n equações diferenciais de segunda ordem para n funções desconhecidas q_1, q_2, \dots, q_n .

Seguidamente, vamos apresentar alguns exemplos de funcionais que dependem de várias variáveis dependentes e uma variável independente.

Exemplo 2.8. *Consideremos o funcional*

$$J[\mathbf{q}] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (q_1'^2 + q_2'^2 + 2q_1 q_2) dt$$

onde $q_1(0) = 1$, $q_2(0) = -1$, $q_1(\frac{\pi}{2}) = 0$ e $q_2(\frac{\pi}{2}) = 0$. Vamos determinar os candidatos a maximizantes desse funcional. Como

$$L(\mathbf{q}) = q_1'^2 + q_2'^2 + 2q_1 q_2,$$

a equação de Euler-Lagrange (27) para este funcional corresponde ao sistema

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_1'} = 0 \Rightarrow q_2 - \frac{d}{dt}(q_1') = 0 \Leftrightarrow q_2 = \frac{d^2 q_1}{dt^2} \quad (28)$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_2'} = 0 \Rightarrow q_1 - \frac{d}{dt}(q_2') = 0 \Leftrightarrow q_1 = \frac{d^2 q_2}{dt^2}. \quad (29)$$

Substituindo (28) em (29), obtém-se

$$q_1 - \frac{d^4 q_1}{dt^4} = 0.$$

A característica dessa equação diferencial é:

$$m^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm i \vee m = \pm 1.$$

Logo, a solução geral do problema é dado por:

$$\hat{q}_1(t) = C_1 \cosh(t) + C_2 \sinh(t) + C_3 \cos(t) + C_4 \sin(t).$$

Usando (28) tem-se que

$$\hat{q}_2(t) = C_1 \cosh(t) + C_2 \sinh(t) - C_3 \cos(t) - C_4 \sin(t),$$

sendo $C_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, 4$.

Substituindo as condições de fronteira, obtém-se

$$\begin{aligned} \hat{q}_1(0) = 1 &\Rightarrow C_1 + C_3 = 1 \\ \hat{q}_2(0) = -1 &\Rightarrow C_1 - C_3 = -1 \\ \hat{q}_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 &\Rightarrow C_2 + C_4 = 0 \\ \hat{q}_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 &\Rightarrow C_2 - C_4 = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$C_1 = C_2 = C_4 = 0 \text{ e } C_3 = 1.$$

Portanto,

$$\hat{\mathbf{q}}(t) = (\cos(t), -\cos(t))$$

é o único candidato a maximizante.

Exemplo 2.9. Consideremos o funcional

$$J[\mathbf{q}] = \int_0^1 (q_1'^2 + (q_2' - 1)^2 + q_1^2 + q_1 q_2) dt$$

onde $\mathbf{q}(0) = \alpha$ e $\mathbf{q}(1) = \beta$. Vamos determinar os candidatos a maximizantes desse funcional. Como

$$L(\mathbf{q}) = q_1'^2 + (q_2' - 1)^2 + q_1^2 + q_1 q_2. \quad (30)$$

A equação de Euler-Lagrange para (30) corresponde

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_1'} = 0 \Leftrightarrow q_2 + 2q_1 - \frac{d}{dt}(q_1'^2) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 q_1}{dt^2} - q_1 - \frac{1}{2} q_2 = 0 \quad (31)$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_2'} = 0 \Leftrightarrow q_1 - \frac{d}{dt}(q_2' - 1)^2 = 0 \Rightarrow q_1 = 2 \frac{d^2 q_2}{dt^2}. \quad (32)$$

Substituindo (32) em (31), obtém-se

$$2 \frac{d^4 q_2}{dt^4} - 2 \frac{d^2 q_2}{dt^2} - \frac{1}{2} q_2 = 0. \quad (33)$$

A característica da equação diferencial (33) é:

$$2m^4 - 2m^2 - \frac{1}{2} = 0, \quad (34)$$

com as raízes

$$m_1, m_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}} \in \mathbb{R}$$

$$m_3, m_4 = \pm \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \pm im, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Logo, a solução geral de (34) é:

$$\hat{q}_2(t) = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t} + C_3 \cos(mt) + C_4 \sin(mt), \quad C_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, 4$$

onde os coeficientes são determinados pelas condições de fronteira $\hat{\mathbf{q}}(0) = \alpha$ e $\hat{\mathbf{q}}(1) = \beta$.

A função \hat{q}_1 é obtida a partir da dedução de \hat{q}_2 usando a equação (32).

2.5.3 Condições de Transversalidade

Consideremos um funcional J da forma

$$J[x] = \int_a^b L(t, x(t), x'(t)) dt, \quad (35)$$

onde x pertence a $C^2([a, b], \mathbb{R})$ e satisfaz a seguinte condição de fronteira

$$x(a) = x_1 \text{ e } x(b) \text{ é indeterminado.}$$

Do ponto de vista geométrico, as curvas admissíveis começam no mesmo ponto e terminam numa linha vertical.

Teorema 2.3. *Seja $J : C^2([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcional definido em (35). Se J tem um maximizante em $x \in C^2([a, b], \mathbb{R})$, então x satisfaz as equações:*

•

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} = 0,$$

com $t \in [a, b]$;

•

$$\frac{\partial L}{\partial x'}(b, x(b), x'(b)) = 0.$$

Demonstração. Vamos supor que x é um maximizante de J . Toma-se uma família de funções:

$$\hat{x}(t) = x(t) + \epsilon h(t),$$

onde $|\epsilon| < 1$ e $h \in C^2([a, b], \mathbb{R})$. Defina-se

$$j(\epsilon) = \int_a^b L(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) dt.$$

Então,

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x} h + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} h' \right) dt = 0 \\ \Leftrightarrow & \left[\frac{\partial L}{\partial x'} h \right]_a^b + \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} \right) h dt = 0. \end{aligned}$$

Como $x(a)$ é fixo, então $h(a) = 0$. Logo,

$$\frac{\partial L}{\partial x'}(b, x(b)x'(b))h(b) + \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} \right) h dt = 0. \quad (36)$$

A partir da equação (36), vamos supor primeiro que $h(b) = 0$. Então

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} \right) h dt = 0. \quad (37)$$

Como h é arbitrário em $[a, b]$, aplicando o Lema 1.1. à equação (37), resulta na equação diferencial de **Euler-Lagrange**

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} = 0, \quad t \in [a, b]. \quad (38)$$

Vamos supor agora que $h(b) \neq 0$. Pela equação (36), obtém-se a **Condição de Transversalidade**

$$\frac{\partial L}{\partial x'}(b, x(b)x'(b)) = 0. \quad (39)$$

□

Seguidamente, vamos apresentar alguns exemplos de determinação de candidatos a maximizantes de um funcional.

Exemplo 2.10. *Consideremos o funcional*

$$J[x] = \int_0^1 (x'^2(t) + 2x(t)) dt,$$

com as condições $x(0) = 1$ e $x(1)$ indeterminado. Vamos determinar os candidatos a maximizantes desse funcional. Como

$$L(t, x(t), x'(t)) = x'^2(t) + 2x(t),$$

aplicando a equação de Euler-Lagrange (38), tem-se que:

$$2 - \frac{d}{dt} (2x'(t)) = 0 \Rightarrow x''(t) - 1 = 0. \quad (40)$$

A equação característica de (40) é

$$m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Logo, de (40) obtemos:

$$\hat{x}(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Tendo em conta a condição inicial de fronteira,

$$\hat{x}(0) = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1, \quad (41)$$

e a condição transversalidade (39),

$$\frac{\partial L}{\partial x'}(1, x(1)x'(1)) = 0 \Leftrightarrow 2x'(1) = 0 \Rightarrow 2C_1 e - C_2 e^{-1} = 0. \quad (42)$$

Tendo em conta as equações (41) e (42), obtém-se as seguintes raízes

$$C_1 = \frac{1}{e^2 + 1}$$

e

$$C_2 = \frac{e^2}{e^2 + 1}.$$

Portanto,

$$\hat{x}(t) = \frac{e^t + e^{2-t}}{e^2 + 1},$$

com $t \in [0, 1]$ é o único candidato a maximizante.

Exemplo 2.11. *Consideremos o funcional*

$$J[x] = \int_0^1 (x'^2(t) + x^2(t) + 5) dt,$$

com as condições $x(0) = 1$ e $x(1)$ indeterminado. Vamos determinar os candidatos a maximizantes desse funcional. Seja

$$L(t, x(t), x'(t)) = x'^2(t) + x^2(t) + 5.$$

Aplicando a equação de Euler-Lagrange (38), tem-se que:

$$2x(t) - \frac{d}{dt}(2x'(t)) = 0 \Rightarrow x''(t) - x(t) = 0. \quad (43)$$

A equação característica de (43) é

$$m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Logo, de (43) obtemos:

$$\hat{x}(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Tendo em conta a condição inicial de fronteira,

$$\hat{x}(0) = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1, \quad (44)$$

e a condição transversalidade (39),

$$\frac{\partial L}{\partial x'}(1, x(1)x'(1)) = 0 \Rightarrow C_1 e - C_2 e^{-1} = 0. \quad (45)$$

Tendo em conta as equações (44) e (45), obtém-se as seguintes raízes

$$C_1 = \frac{e^{-2}}{e^{-2} + 1}$$

e

$$C_2 = \frac{1}{e^{-2} + 1}.$$

Portanto,

$$\hat{x}(t) = \frac{e^{t-2} + e^{-t}}{e^{-2} + 1},$$

com $t \in [0, 1]$ é o único candidato a maximizante.

2.6 Problema Isoperimétrico

Os problemas variacionais geralmente são acompanhados por uma ou mais restrições. A presença de uma restrição limita ainda mais o espaço em que pesquisamos os extremantes. As restrições podem ser apresentadas de várias maneiras. Por exemplo, os candidatos a extremantes podem satisfazer uma condição algébrica, uma equação diferencial, ou uma desigualdade. Muitas vezes existem diferentes formas de impor a mesma restrição [6]. Nesta secção, apresentamos o problema com restrições isoperimétricas.

2.6.1 Multiplicadores de Lagrange (Única Restrição)

Teorema 2.4. (Regra de Multiplicadores de Lagrange) *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ uma região. Sejam $L : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis. Se L tem um maximizante relativo em $x \in \Omega$ sujeito à condição $f(\cdot) = 0$ e se $\nabla f(x) \neq 0$, então existe um número λ tal que*

$$\nabla(L(x) - \lambda f(x)) = 0. \quad (46)$$

Demonstração. Veja [6, Teorema 4.1.1.].

2.6.2 Solução de Lagrange

Seja J o funcional da forma

$$J[x] = \int_a^b L(t, x(t), x'(t)) dt, \quad (47)$$

onde x pertence a $C^2([a, b], \mathbb{R})$ e satisfaz as seguintes condições de fronteira

$$x(a) = x_1 \text{ e } x(b) = x_2. \quad (48)$$

Consideremos uma restrição isoperimétrica da forma

$$I[x] = \int_a^b f(t, x(t), x'(t)) dt = k \quad (49)$$

onde k é uma constante real estabelecida.

Teorema 2.5. *Suponha-se que J dado por (47) tem um extremo em x sujeito às condições de fronteira (48) e à restrição isoperimétrica (49). Suponha-se também que x não satisfaz*

a equação

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial x'} = 0. \quad (50)$$

Então existe uma constante λ , tal que x satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x'} = 0,$$

onde $F = L - \lambda f$.

Demonstração. Seja

$$\hat{x}(t) = x(t) + \epsilon_1 h_1(t) + \epsilon_2 h_2(t), \quad (51)$$

onde $|\epsilon_1| < 1$, $|\epsilon_2| < 1$, $h_1, h_2 \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ e anulam-se na fronteira:

$$h_1(a) = h_1(b) = h_2(a) = h_2(b) = 0. \quad (52)$$

Consideremos

$$j(\epsilon_1, \epsilon_2) = J[\hat{x}]$$

e

$$i(\epsilon_1, \epsilon_2) = \int_a^b L(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) dt - k.$$

Como x é uma solução do problema, então $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (0, 0)$ é uma solução do seguinte problema: Encontrar os extremantes de j , sujeito à restrição $i(\cdot, \cdot) = 0$. Nota-se que

$$\frac{\partial i}{\partial \epsilon_2}(0, 0) = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x} h_2 + \frac{\partial f}{\partial x'} h_2' \right) dt. \quad (53)$$

Manipulando o segundo termo da expressão (53) e considerando as condições (52), segue-se que

$$\frac{\partial i}{\partial \epsilon_2}(0, 0) = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial x'} \right) h_2 dt. \quad (54)$$

Assumimos que x não satisfaz a equação de (49), então existe uma função h_2 tal que

$$\frac{\partial i}{\partial \epsilon_2}(0, 0) \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Implícita [6, pág. 266 – 267], existe uma função $\epsilon_2(\cdot)$ da classe, definida pela vizinhança de zero, tal que $i(\epsilon_1, \epsilon_2(\epsilon_1)) = 0$. Por hipótese, $(0, 0)$ é extremante j , sujeito à restrição $i(\epsilon_1, \epsilon_2) = 0$. Como $\nabla i(0, 0) \neq (0, 0)$ e pelo Teorema 2.5. existe um número real λ tal que

$$\nabla(j(0, 0) - \lambda i(0, 0)) = (0, 0). \quad (55)$$

Notamos que

$$\frac{\partial j}{\partial \epsilon_1}(0,0) = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} \right) h_1 dt \quad (56)$$

e

$$\frac{\partial i}{\partial \epsilon_1}(0,0) = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial x'} \right) h_1 dt. \quad (57)$$

Logo, de (55) segue-se que

$$\int_a^b \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} \right) - \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial x'} \right) \right] h_1 dt = 0. \quad (58)$$

Como h_1 é arbitrário e aplicando o Lema 1.1. em (54), resulta

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x'} = 0, \quad (59)$$

onde $F = L - \lambda f$.

□

Seguidamente, apresentaremos alguns exemplos de candidatos a maximizantes de problemas isoperimétricos.

Exemplo 2.12. *Consideremos o funcional*

$$J[x] = \int_0^2 x'^2(t) dt \quad (60)$$

sujeito à restrição

$$I[x] = \int_0^2 x(t) dt = -4, \quad (61)$$

com as condições de fronteira $x(0) = 0$ e $x(2) = 1$. Vamos determinar os candidatos a maximizantes desse funcional. Como

$$L(t, x(t), x'(t)) = x'^2(t)$$

e

$$f(t, x(t), x'(t)) = x(t)$$

então

$$F = L - \lambda f = x'^2(t) - \lambda x(t), \quad (62)$$

onde λ é o multiplicador de Lagrange.

Aplicando a equação de Euler-Lagrange (59), tem-se que:

$$-\lambda - \frac{d}{dt}(2x'(t)) = 0 \Rightarrow -\lambda - 2x''(t) = 0 \Leftrightarrow x''(t) = -\frac{\lambda}{2}. \quad (63)$$

Integrando sucessivamente (63), obtemos:

$$\hat{x}(t) = -\frac{\lambda}{4}t^2 + C_1t + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (64)$$

Tendo em conta as condições de fronteira, tem-se que:

$$\hat{x}(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

e

$$\hat{x}(2) = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1 + \lambda}{2}.$$

Logo, de (64) obtemos,

$$\hat{x}(t) = -\frac{\lambda}{4}t^2 + \frac{1 + \lambda}{2}t.$$

De (61) sabemos que

$$I(\hat{x}(t)) = \int_0^2 \left(\frac{\lambda}{4}t^2 + \frac{1 + \lambda}{2}t \right) dt = -4 \Leftrightarrow \left[\frac{\lambda}{12}t^3 + \frac{1 + \lambda}{4}t^2 \right]_0^2 = -4 \Rightarrow \lambda = -3.$$

Portanto,

$$\hat{x}(t) = \frac{3}{4}t^2 - t,$$

com $t \in [0, 2]$ é o único candidato a maximizante.

Exemplo 2.13. *Consideremos o funcional*

$$J[x] = \int_0^1 (t^2 - x'^2(t)) dt \quad (65)$$

sujeito a restrição

$$I[x] = \int_0^1 x^2(t) dt = 2, \quad (66)$$

com as condições de fronteira $x(0) = 0$ e $x(1) = 0$. Vamos determinar os candidatos a maximizantes desse funcional. Como

$$L(t, x(t), x'(t)) = t^2 - x'^2(t)$$

e

$$f(t, x(t), x'(t)) = x^2(t)$$

então

$$F = L - \lambda f = t^2 - x'^2(t) - \lambda x^2(t), \quad (67)$$

onde λ é o multiplicador de Lagrange.

Aplicando a equação de Euler-Lagrange (59), tem-se que:

$$x''(t) - \lambda x(t) = 0. \quad (68)$$

A característica da equação diferencial (68) é:

$$m^2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow m^2 = \lambda.$$

- Se $\lambda > 0$, então

$$m_1, m_2 = \pm\sqrt{\lambda}.$$

Logo, a solução geral de (68) é:

$$\hat{x}(t) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}t} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (69)$$

Tendo em conta as condições de fronteira, tem-se que:

$$\begin{cases} \hat{x}(0) = 0 \\ \hat{x}(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \hat{x}(t) = 0$$

não satisfaz a restrição (66).

- Se $\lambda = 0$, então

$$m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

Logo, a solução geral de (68) é:

$$\hat{x}(t) = C_1 + C_2 t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (70)$$

Tendo em conta as condições de fronteira, tem-se que:

$$\begin{cases} \hat{x}(0) = 0 \\ \hat{x}(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \hat{x}(t) = 0$$

não satisfaz a restrição (66).

- Se $\lambda < 0$, então

$$m = \pm\sqrt{-\lambda}i.$$

Logo, a solução geral de (68) é:

$$\hat{x}(t) = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}t) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (71)$$

Recorrendo as condições de fronteira, tem-se que:

$$\begin{cases} \hat{x}(0) = 0 \\ \hat{x}(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}) = 0. \end{cases}$$

Tendo em conta que

$$\sqrt{-\lambda} = k\pi \Leftrightarrow \lambda = -k^2\pi^2, \quad k \in \mathbb{Z}$$

logo, de (71) obtemos,

$$\hat{x}(t) = C_2 \sin(k\pi t).$$

Por (66) tem-se que

$$\begin{aligned} \int_0^1 (C_2 \sin(k\pi t))^2 dt &= 2, \\ \Leftrightarrow C_2^2 \int_0^1 \sin^2(k\pi t) dt &= 2 \\ \Leftrightarrow C_2^2 \int_0^1 \left(\frac{1 - \cos(2k\pi t)}{2} \right) dt &= 2 \\ \Leftrightarrow C_2^2 \left[\frac{1}{2}t - \frac{\sin(2k\pi t)}{4k\pi} \right]_0^1 &= 2 \\ \Leftrightarrow C_2^2 \cdot 1/2 = 2 &\Leftrightarrow C_2 = \pm 2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\hat{x}(t) = \pm 2 \sin(k\pi t), \quad k \in \mathbb{Z}$$

com $t \in [0, 1]$ é o único candidato a maximizante.

3 Controle Ótimo

3.1 Introdução

A teoria do controle ótimo é um ramo da matemática relativamente novo, e foi desenvolvido com o objetivo de descobrir a trajetória ótima para controlar um sistema dinâmico. Geralmente, o problema do controle ótimo consiste em encontrar funções de controle de modo a otimizar um determinado processo quando sujeito a restrições descritas por equações diferenciais. Apesar dos problemas de controle ótimo terem sido formulados em 1919 [2], foi em finais dos anos cinquenta na antiga União Soviética, em 1956, com a formulação e demonstração do princípio do máximo de *Pontryagin* pelo matemático russo Lev Semenovich Pontryagin (1908 – 1988), e seu grupo, nomeadamente, Vladimir Grigorievich Boltyansky, Revaz Valerianovic Gamkrelidze e Evgenii Mishchenko, que a teoria matemática do controle ótimo teve início [10, 23, 25, 35].

A teoria do controle ótimo é hoje uma área extensa, com vários domínios de aplicabilidade, como em matemática, engenharia, economia e planeamento, ciências sociais, medicina, sistemas ecológicos e físicos. As fontes das mais variadas áreas de aplicação podem ser encontradas em [5, 8, 13, 32].

Neste capítulo, começamos por apresentar algumas definições básicas, de seguida, o problema básico de controle ótimo, com controle livre e limitado, e a relação entre o cálculo das variações e o controle ótimo. Por último, do ponto de vista numérico, utilizamos o *Software Maple* para resolver problemas do controle ótimo. Várias abordagens sobre o controle ótimo podem ser consultadas em [26, 27, 37, 38].

As definições básicas a seguir foram baseadas em [3, 14].

3.2 Definições Básicas

Definição 3.1. (*Função Contínua por Partes*) Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo (finito ou infinito). Dizemos que $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua por partes se é contínua em cada $t \in I$, com possível exceção de um número finito de pontos \hat{t} de I , e se

$$x(\hat{t}) = \lim_{t \rightarrow \hat{t}^+} x(t)$$

ou

$$x(\hat{t}) = \lim_{t \rightarrow \hat{t}^-} x(t).$$

Escrevemos $x \in PC[I, \mathbb{R}]$.

Definição 3.2. (Função Diferenciável por Partes) *Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo (finito ou infinito). Seja $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em cada $t \in I$, com a possível exceção de um número finito de pontos de I . Além disso, suponha-se que x' é contínua sempre que estiver definida. Então, dizemos que x é uma função diferenciável por partes. Escrevemos $x \in PC^1[I, \mathbb{R}]$.*

3.3 Problema de Lagrange do Controlo Ótimo

Diferentes formulações do problema matemático do controlo ótimo podem ser construídas [8]: problema de Lagrange do controlo ótimo, problema de Bolza do controlo ótimo, problema de Mayer do controlo ótimo, etc.

No que se segue, iremos considerar a formulação do problema de Lagrange do controlo ótimo.

Formulação do Problema. Seja $t \in \mathbb{R}$, a variável independente. Seja $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$, a função Lagrangeano L está definida em $L \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^{k+n}, \mathbb{R})$. Designemos por dinâmica a função f definida em $f \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^{k+n}, \mathbb{R}^k)$, $\mathbf{x} \in PC^1([a, b], \mathbb{R}^k)$ e $\mathbf{u} \in PC([a, b], \mathbb{R}^n)$ com $k, n \in \mathbb{N}$. O vetor $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ é denominado por controlo e ao vetor $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_k(t)) \in \mathbb{R}^k$, por trajetória do estado.

O problema do controlo ótimo na forma de Lagrange consiste em determinar um par (\mathbf{x}, \mathbf{u}) ⁹ nas condições enunciadas que resolve o funcional integral do tipo

$$(PCO) \quad \max J[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = \int_a^b L(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt, \quad (72)$$

onde o par (\mathbf{x}, \mathbf{u}) deve satisfazer o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\mathbf{x}'(t) = f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \forall t \in [a, b] \quad (73)$$

e a condição de fronteira

$$\mathbf{x}(a) = \mathbf{x}_1,$$

com $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$, fixo.

⁹Ao par (\mathbf{x}, \mathbf{u}) denominaremos por processo de controlo ou apenas processo.

Definição 3.3. O sistema de equações diferenciais ordinárias dado por (73) designa-se por sistema de controlo.

Observação 3.1. Como consequência da Observação 2.4, algumas vezes utilizaremos H em vez de $H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t))$.

3.3.1 Princípio do Máximo de Pontryagin

O resultado central da teoria do controlo ótimo é o princípio do máximo de *Pontryagin* [12, 25, 38], que garante as condições necessárias de otimalidade do problema do controlo ótimo [19]. A ideia base deste princípio consiste em construir uma função especial que depende do controlo e do estado, e é designada Hamiltoniano¹⁰.

Teorema 3.1. (*Princípio do Máximo de Pontryagin para (P_{CO})*) Se (\mathbf{x}, \mathbf{u}) é um par ótimo para o problema (P_{CO}) , então existe $\boldsymbol{\lambda} \in PC^1([a, b], \mathbb{R}^k)$ tal que

1. $\boldsymbol{\lambda}(b) = \mathbf{0}$ (Condição de Transversalidade);
2. $\mathbf{x}'(t) = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t))$ (Sistema de Controlo);
3. $\boldsymbol{\lambda}'(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t))$ (Equação Adjunta);
4. $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) = \mathbf{0}$ (Condição de Otimalidade),

onde $H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) = L(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t)f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ é o Hamiltoniano.

Observação 3.2. O sistema adjunto é formado pelo sistema de controlo e a equação adjunta.

Demonstração. Vamos supor que (\mathbf{x}, \mathbf{u}) é um par ótimo para o problema (P_{CO}) . Consideremos a variação

$$\mathbf{u}^\epsilon(t) = \mathbf{u}(t) + \epsilon \mathbf{h}(t),$$

onde $\mathbf{h}(t) = (h_1(t), \dots, h_n(t)) \in PC([a, b], \mathbb{R}^n)$ e $|\epsilon| < 1$. Logo, $\mathbf{u}^\epsilon \in PC([a, b], \mathbb{R}^n)$. Observemos que

1. $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{u}^\epsilon(t) = \mathbf{u}(t), \quad \forall t \in [a, b];$

¹⁰O Hamiltoniano tem o nome do matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805 – 1865), que criou uma reformulação revolucionária da mecânica newtoniana que agora é chamada de mecânica hamiltoniana, que é importante na física quântica.

$$2. \left. \frac{\partial \mathbf{u}^\epsilon}{\partial \epsilon}(t) \right|_{\epsilon=0} = \mathbf{h}(t), \quad \forall t \in [a, b].$$

Seja \mathbf{x}^ϵ a variável de estado correspondente ao controlo \mathbf{u}^ϵ . Pela formulação do problema (P_{CO}) sabemos que

1. $\frac{\partial \mathbf{x}^\epsilon}{\partial t}(t) = \left(\frac{\partial x_1^\epsilon}{\partial t}(t), \dots, \frac{\partial x_k^\epsilon}{\partial t}(t) \right) = f(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), \mathbf{u}^\epsilon(t));$
2. $\mathbf{x}^\epsilon(a) = \mathbf{x}_1.$

Assim, segue-se que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{x}^\epsilon(t) = \mathbf{x}(t).$$

Seja $\boldsymbol{\lambda} \in PC([a, b], \mathbb{R}^k)$ uma função. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo Integral [30, Teorema 3] obtemos que

$$\int_a^b \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \mathbf{x}^\epsilon(t)) dt = [\boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \mathbf{x}^\epsilon(t)] \Big|_a^b.$$

Portanto,

$$\int_a^b \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \mathbf{x}^\epsilon(t)) dt + [\boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \mathbf{x}^\epsilon(t)] \Big|_b^a = 0.$$

Logo, podemos escrever o funcional (72) do seguinte modo

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}^\epsilon, \mathbf{u}^\epsilon) &= \int_a^b L(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), \mathbf{u}^\epsilon(t)) dt \\ &= \int_a^b L(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), \mathbf{u}^\epsilon(t)) dt + \int_a^b \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \mathbf{x}^\epsilon(t)) dt + [\boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \mathbf{x}^\epsilon(t)] \Big|_b^a \\ &= \int_a^b L(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), \mathbf{u}^\epsilon(t)) dt + \int_a^b (\boldsymbol{\lambda}'(t) \cdot \mathbf{x}^\epsilon(t) + \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot f(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), \mathbf{u}^\epsilon(t))) dt + [\boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \mathbf{x}^\epsilon(t)] \Big|_b^a. \end{aligned}$$

Como o par (\mathbf{x}, \mathbf{u}) é uma solução para o problema (72), então

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\epsilon} J(\mathbf{x}^\epsilon(t), \mathbf{u}^\epsilon(t)) \right|_{\epsilon=0} &= 0 \Leftrightarrow \\ &\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), \mathbf{u}^\epsilon(t)) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}^\epsilon}{\partial \epsilon}(t) + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), \mathbf{u}^\epsilon(t)) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^\epsilon}{\partial \epsilon}(t) \right) \Big|_{\epsilon=0} dt + \\ &+ \int_a^b \left(\boldsymbol{\lambda}'(t) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}^\epsilon}{\partial \epsilon}(t) + \boldsymbol{\lambda}(t) \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), \mathbf{u}^\epsilon(t)) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}^\epsilon}{\partial \epsilon}(t) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), \mathbf{u}^\epsilon(t)) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^\epsilon}{\partial \epsilon}(t) \right] \right) \Big|_{\epsilon=0} dt - \end{aligned}$$

$$-\boldsymbol{\lambda}(b) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}^\epsilon}{\partial \epsilon}(b) \Big|_{\epsilon=0} = 0.$$

Tendo em conta que

$$\frac{\partial \mathbf{u}^\epsilon}{\partial \epsilon}(t) \Big|_{\epsilon=0} = \mathbf{h}(t),$$

então,

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), \mathbf{u}^\epsilon(t)) + \boldsymbol{\lambda}'(t) + \boldsymbol{\lambda}(t) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), \mathbf{u}^\epsilon(t)) \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}^\epsilon}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} dt + \\ & + \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), \mathbf{u}^\epsilon(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), \mathbf{u}^\epsilon(t)) \right) \cdot \mathbf{h}(t) \Big|_{\epsilon=0} dt - \\ & - \boldsymbol{\lambda}(b) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}^\epsilon}{\partial \epsilon}(b) \Big|_{\epsilon=0} = 0. \end{aligned} \quad (74)$$

Vamos supor que a função $\boldsymbol{\lambda}$ satisfaz as seguintes condições:

1. $\boldsymbol{\lambda}'(t) = - \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), \mathbf{u}^\epsilon(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), \mathbf{u}^\epsilon(t)) \right) = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(t, (t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t));$
2. $\boldsymbol{\lambda}(b) = \mathbf{0}.$

Vamos agora provar a Condição de Otimalidade. A partir de equação (74), obtemos

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), \mathbf{u}^\epsilon(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), \mathbf{u}^\epsilon(t)) \right) \cdot \mathbf{h}(t) \Big|_{\epsilon=0} dt = 0. \quad (75)$$

Tendo em conta a equação (75), em particular para

$$\mathbf{h}(t) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), \mathbf{u}^\epsilon(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), \mathbf{u}^\epsilon(t)), \quad (76)$$

e substituindo a expressão (76) em (75), obtemos

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), \mathbf{u}^\epsilon(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), \mathbf{u}^\epsilon(t)) \right)^2 \Big|_{\epsilon=0} dt = 0 \\ & \Leftrightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), \mathbf{u}^\epsilon(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), \mathbf{u}^\epsilon(t)) \right)^2 \Big|_{\epsilon=0} = 0 \\ & \Leftrightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), \mathbf{u}^\epsilon(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), \mathbf{u}^\epsilon(t)) \right) \Big|_{\epsilon=0} = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) = \mathbf{0}, \quad \forall t \in [a, b].$$

Portanto, fica provada a Condição de Otimalidade. □

Teorema 3.2. *Se $\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda} \in C^1([a, b], \mathbb{R}^k)$, $\mathbf{u} \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ e $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ satisfazem o Teorema 3.1, então*

$$\frac{d}{dt}H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) = \frac{\partial H}{\partial t}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)). \quad (77)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) &= \frac{\partial H}{\partial t}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) + \sum_{i=1}^k \frac{\partial H}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t))x'_i(t) + \\ &+ \sum_{i=1}^k \frac{\partial H}{\partial \lambda_i}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t))\lambda'_i(t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial u_i}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t))u'_i(t) \\ &= \frac{\partial H}{\partial t}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) + \sum_{i=1}^k \frac{\partial H}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) \cdot \frac{\partial H}{\partial \lambda_i}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) - \\ &- \sum_{i=1}^k \frac{\partial H}{\partial \lambda_i}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) \cdot \frac{\partial H}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) = \frac{\partial H}{\partial t}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)). \end{aligned}$$

Portanto, fica provada a igualdade (77). □

Exemplo 3.1. *O problema fundamental do cálculo das variações*

$$(P_1) \quad \max J[x] = \int_a^b L(t, x(t), x'(t)) dt, \quad (78)$$

com a condição de fronteira

$$x(a) = x_1$$

é equivalente ao problema de controlo ótimo

$$(P_2) \quad \max J[x, u] = \int_a^b L(t, x(t), u(t)) dt, \quad (79)$$

sujeito a restrição

$$x'(t) = u(t)$$

com a condição de fronteira

$$x(a) = x_1.$$

Vamos determinar a equação de Euler-Lagrange (8) e condição de transversalidade (39) aplicando o Teorema 3.1 para (P_2) . Pelo Teorema 3.1, o Hamiltoniano é dado por

$$H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = L(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)u(t).$$

Segue-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \lambda}(t, x(t), u(t), \lambda(t)) &= x'(t) \Leftrightarrow u(t) = x'(t) \\ -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), u(t), \lambda(t)) &= \lambda'(t) \Leftrightarrow -\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = \lambda'(t) \\ \frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), u(t), \lambda(t)) &= 0 \Leftrightarrow -\frac{\partial L}{\partial u}(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = \lambda(t). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), u(t), \lambda(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial u}(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = 0.$$

Observa-se que

$$\begin{aligned} \lambda(b) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial u}(b, x(b), u(b)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial x'}(b, x(b), x'(b)) = 0. \end{aligned} \tag{80}$$

Exemplo 3.2. Consideremos o funcional

$$(P) \quad \max J[x, u] = \int_0^T (1, 5x^2(t) + 0, 5u^2(t)) dt,$$

sujeito a restrição

$$x'(t) = x(t) + u(t), \tag{81}$$

com as condições de fronteira $x(0)$ fixo e $x(T)$ é livre. Vamos determinar os candidatos a maximizantes desse funcional. A partir do Teorema 3.1, o Hamiltoniano é dado por

$$H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = 1, 5x^2(t) + 0, 5u^2(t) + \lambda(t)(x(t) + u(t))$$

e tendo em conta a condição de otimalidade, obtém-se que

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = 0 \Leftrightarrow u(t) + \lambda(t) = 0. \quad (82)$$

Pelo sistema adjunto, segue-se que

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda}(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = x'(t) \Leftrightarrow u(t) + x(t) = x'(t) \Leftrightarrow u(t) = x'(t) - x(t) \quad (83)$$

e

$$-\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = \lambda'(t) \Leftrightarrow \lambda'(t) = -3x(t) - \lambda(t). \quad (84)$$

Substituindo (82) e (83) em (84), obtemos a seguinte equação

$$x''(t) - 4x(t) = 0. \quad (85)$$

Tendo em conta a equação característica:

$$m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2. \quad (86)$$

A solução geral de (85) é:

$$\hat{x}(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pelas equações (83) e (84), obtemos

$$\hat{\lambda}(t) = -C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{-2t}$$

e temos o candidato ao controlo ótimo

$$\hat{u}(t) = C_1 e^{2t} - 3C_2 e^{-2t}.$$

Pela condição de transversalidade (Teorema 3.1),

$$\hat{\lambda}(T) = 0$$

tem-se que

$$C_2 = \frac{1}{3} C_1 e^{4T}.$$

Portanto,

$$\hat{u}(t) = C_1(e^{2t} - e^{4T-2t}). \quad (87)$$

Se forem conhecidas as condições de fronteira iniciais podemos determinar a constante de integração C_1 .

Por exemplo se $T = 1$ e $\hat{x}(0) = 2$, como

$$\hat{x}(t) = C_1 e^{2t} + \frac{1}{3} C_1 e^{4T} e^{-2t}, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

então

$$C_1 + \frac{1}{3} C_1 e^4 = 2 \Leftrightarrow C_1 = \frac{6}{3 + e^4}.$$

De (87) obtemos

$$\hat{u}(t) = \frac{6e^{2t}}{3 + e^4} (1 - e^{4-4t}).$$

Portanto,

$$\hat{x}(t) = \frac{2e^{2t}}{3 + e^4} (3 + e^{4-4t}),$$

com $t \in [0, 1]$ é o único candidato a maximizante.

No exemplo a seguir, vamos estabelecer a relação existente entre o cálculo das variações e o controlo ótimo.

Exemplo 3.3. *Consideremos o funcional*

$$(P) \quad \max J[x, u] = \int_0^2 (x^2(t) + u^2(t)) dt,$$

sujeito a restrição

$$x'(t) = x(t) + u(t), \quad (88)$$

com a condição de fronteira $x(0) = 1$. Vamos determinar os candidatos a maximizantes desse funcional.

1. **Resolução pelo controlo ótimo.** A partir do Teorema 3.1, o Hamiltoniano é dado por

$$H[t, x(t), u(t), \lambda(t)] = x^2(t) + u^2(t) + \lambda(t) (x(t) + u(t))$$

e tendo em conta a condição de otimalidade, obtemos

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = 0 \Leftrightarrow 2u(t) + \lambda(t) = 0 \Leftrightarrow \lambda(t) = -2u(t). \quad (89)$$

Pelo sistema adjunto, segue-se que

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda}(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = x'(t) \Leftrightarrow u(t) + x(t) = x'(t) \Leftrightarrow u(t) = x'(t) - x(t) \quad (90)$$

e

$$-\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = \lambda'(t) \Leftrightarrow \lambda'(t) = -2x(t) - \lambda(t). \quad (91)$$

Substituindo (89) e (90) em (91), obtemos a seguinte equação

$$x''(t) - 2x(t) = 0. \quad (92)$$

Tendo em conta a equação característica:

$$m^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}. \quad (93)$$

A solução geral de (92) é:

$$\hat{x}(t) = C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

De (90),

$$\hat{u}(t) = C_1 e^{\sqrt{2}t}(\sqrt{2} - 1) - C_2 e^{-\sqrt{2}t}(\sqrt{2} + 1). \quad (94)$$

Recorrendo à condição de fronteira,

$$\hat{x}(0) = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1, \quad (95)$$

pela condição de transversalidade (Teorema 3.1) e (94), obtemos que

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}(2) = 0 &\Leftrightarrow -2\hat{u}(2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2}C_1 e^{2\sqrt{2}} - \sqrt{2}C_2 e^{-2\sqrt{2}} = C_1 e^{2\sqrt{2}} + C_2 e^{-2\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (96)$$

A partir das equações (95) e (96), tem-se que

$$C_1 = -\frac{(1 + \sqrt{2})e^{-2\sqrt{2}}}{(1 - \sqrt{2})e^{2\sqrt{2}} - (1 + \sqrt{2})e^{-2\sqrt{2}}}$$

e

$$C_2 = \frac{(1 - \sqrt{2})e^{2\sqrt{2}}}{(1 - \sqrt{2})e^{2\sqrt{2}} - (1 + \sqrt{2})e^{-2\sqrt{2}}}.$$

Logo, de (94), tem-se que

$$\hat{u}(t) = \frac{e^{-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}t}(1 + e^{4\sqrt{2}-2\sqrt{2}t})}{(1 - \sqrt{2})e^{2\sqrt{2}} - (1 + \sqrt{2})e^{-2\sqrt{2}}}.$$

Portanto,

$$\hat{x}(t) = \frac{(1 - \sqrt{2})e^{-\sqrt{2}(t-2)} - (1 + \sqrt{2})e^{\sqrt{2}(t-2)}}{(1 - \sqrt{2})e^{2\sqrt{2}} - (1 + \sqrt{2})e^{-2\sqrt{2}}},$$

com $t \in [0, 2]$, é o único candidato a maximizante.

2. **Resolução pelo Cálculo das Variações.** Como a restrição é dada por $x'(t) = x(t) + u(t)$, logo podemos escrever o integral como uma função de t , $x(t)$ e $x'(t)$:

$$L(t, x(t), x'(t)) = x'^2(t) - 2x(t)x'(t) + 2x^2(t).$$

O problema inicial de controlo ótimo pode ser transformado para o problema equivalente variacional, ou seja,

$$(P_1) \quad \max J[x] = \int_0^2 (x'^2(t) - 2x(t)x'(t) + 2x^2(t)) dt,$$

com a condição de fronteira $x(0) = 1$.

Aplicando a equação de Euler-Lagrange (8), tem-se que:

$$-2x'(t) + 4x(t) - \frac{d}{dt}(2x'(t) - 2x(t)) = 0 \Leftrightarrow x''(t) - 2x(t) = 0. \quad (97)$$

Logo,

$$\hat{x}(t) = C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Tendo em conta a condição de fronteira

$$\hat{x}(0) = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1, \quad (98)$$

pela condição de transversalidade (Teorema 3.1), obtemos que

$$\sqrt{2}C_1 e^{2\sqrt{2}} - \sqrt{2}C_2 e^{-2\sqrt{2}} = C_1 e^{2\sqrt{2}} + C_2 e^{-2\sqrt{2}}. \quad (99)$$

A partir das equações (98) e (99), tem-se que

$$C_1 = -\frac{(1 + \sqrt{2})e^{-2\sqrt{2}}}{(1 - \sqrt{2})e^{2\sqrt{2}} - (1 + \sqrt{2})e^{-2\sqrt{2}}}$$

e

$$C_2 = \frac{(1 - \sqrt{2})e^{2\sqrt{2}}}{(1 - \sqrt{2})e^{2\sqrt{2}} - (1 + \sqrt{2})e^{-2\sqrt{2}}}.$$

Portanto,

$$\hat{x}(t) = \frac{(1 - \sqrt{2})e^{-\sqrt{2}(t-2)} - (1 + \sqrt{2})e^{\sqrt{2}(t-2)}}{(1 - \sqrt{2})e^{2\sqrt{2}} - (1 + \sqrt{2})e^{-2\sqrt{2}}},$$

com $t \in [0, 2]$, é o único candidato a maximizante.

Observação 3.3. *A relação apresentada no Exemplo 3.3 acontece quando é possível explicitar a trajetória da variável estado $u(t)$.*

3.3.2 Problema do Controlo Ótimo com Controlo Limitado

Na Subsecção 3.3.1 apresentámos problemas de controlo ótimo que não têm qualquer restrição nas variáveis de controlo, bem como nas variáveis de estado. Iremos agora apresentar problemas de controlo ótimo cujo controlo é limitado, ou seja, $c_i \leq u_i \leq d_i$, onde $c_i, d_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1 \dots n$. Nesta dissertação estudaremos o problema para $n = 1$.

Formulação do Problema. O problema de controlo ótimo com controlo limitado, para $n = 1$, consiste em determinar um par (\mathbf{x}, u) que resolve o seguinte problema

$$(P_{CO_1}) \quad \max J[\mathbf{x}, u] = \int_a^b L(t, \mathbf{x}(t), u(t)) dt, \quad (100)$$

onde o par (\mathbf{x}, u) deve satisfazer o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\mathbf{x}'(t) = f(t, \mathbf{x}(t), u(t)), \quad \forall t \in [a, b] \quad (101)$$

e as condições de fronteira

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(a) &= \mathbf{x}_1, \\ u(t) &\in U, \quad \forall t \in [a, b] \end{aligned}$$

onde $U = [c, d] \subseteq \mathbb{R}$ e $c < d$.

A condição de otimalidade (P_{CO_1}) é alterada para Condição de Maximalidade.

Teorema 3.3. (*Princípio do Máximo de Pontryagin para (P_{CO_1})* [27]) Se (\mathbf{x}, u) é um par ótimo para o problema (P_{CO_1}) , então existe $\boldsymbol{\lambda} \in PC^1([a, b], \mathbb{R}^k)$ tal que

1. $\boldsymbol{\lambda}(b) = \mathbf{0}$ (Condição de Transversalidade);
2. $\mathbf{x}'(t) = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}(t, \mathbf{x}(t), u(t), \boldsymbol{\lambda}(t))$ (Sistema de Controlo);
3. $\boldsymbol{\lambda}'(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t), u(t), \boldsymbol{\lambda}(t))$ (Equação Adjunta);
4. u é a solução do problema

$$(P_v) \quad \max_{v \in U} L(t, \mathbf{x}(t), v(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot f(t, \mathbf{x}(t), v(t))$$

(Condição de Maximalidade).

Observação 3.4. Novamente, o Hamiltoniano é dado por

$$H(t, \mathbf{x}(t), u(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) = L(t, \mathbf{x}(t), u(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot f(t, \mathbf{x}(t), u(t))$$

e o sistema adjunto é formado pelo sistema de controlo e a equação adjunta.

Demonstração. As primeiras três propriedades do Teorema 3.3 podem ser obtidas de forma análoga ao Teorema 3.1. Assim, mostraremos somente a prova da Condição de Maximalidade. Tal como visto na prova do Teorema 3.1.

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{d\epsilon} J(\mathbf{x}^\epsilon(t), u^\epsilon(t)) \right|_{\epsilon=0} = \\ & = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial u}(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), u(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial u}(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), u(t)) \right) \cdot h(t) \Big|_{\epsilon=0} dt. \end{aligned} \quad (102)$$

Pelo Teorema de Taylor [7, Theorem A.1.2], segue-se que

$$J(\mathbf{x}^\epsilon(t), u^\epsilon(t)) - J(\mathbf{x}(t), u(t)) = \left. \frac{d}{d\epsilon} J(\mathbf{x}^\epsilon(t), u^\epsilon(t)) \right|_{\epsilon=0} + O(\epsilon^2).$$

Como (\mathbf{x}, u) é um par ótimo para o problema (P_{CO_1}) , então temos que

$$J(\mathbf{x}^\epsilon(t), u^\epsilon(t)) - J(\mathbf{x}(t), u(t)) \leq 0. \quad (103)$$

Por (103) podemos escrever (102) do seguinte modo

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{d\epsilon} J(\mathbf{x}^\epsilon(t), u^\epsilon(t)) \right|_{\epsilon=0} + O(\epsilon^2) \\ &= \left(\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial u}(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), u(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial u}(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), u(t)) \right) \cdot h(t) \Big|_{\epsilon=0} dt \right) \epsilon + O(\epsilon^2) \leq 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial u}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial u}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) \right) \epsilon h dt \leq 0. \quad (104)$$

Como (\mathbf{x}, u) é um par ótimo para o problema (P_{CO_1}) , então para todo o $t \in [a, b]$, $u(t) \in \mathbb{R}$ é um ponto ótimo da solução u . Então,

1. Se $u(t) = c$, então $\epsilon h(t) \geq 0$. Assim, para que se verifique a desigualdade (104) devemos ter

$$\frac{\partial L}{\partial u}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial u}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) \leq 0;$$

2. Se $u(t) = d$, então $\epsilon h(t) \leq 0$. Assim, para que se verifique a desigualdade (104) devemos ter

$$\frac{\partial L}{\partial u}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial u}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) \geq 0;$$

3. Se $c < u(t) < d$, então $\epsilon h(t) \leq 0$ ou $\epsilon h(t) \geq 0$. Assim, para que se verifique a desigualdade (104) devemos ter

$$\frac{\partial L}{\partial u}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial u}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) = 0.$$

E as condições podem ser obtidas pela resolução do problema (P_v) , como iremos apresentar. Pelo Teorema de *Fritz-John*¹¹ [28, Teorema 4.2.8], segue-se que

$$\left\{ \begin{array}{l} -w_0 \left(\frac{\partial L}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) \right) + \\ + w_1 \frac{\partial}{\partial v}(v - d) + w_2 \frac{\partial}{\partial v}(c - v) = 0 \\ w_0, w_1, w_2 \geq 0 \quad (\text{n\~ao negatividade}) \\ (w_0, w_1, w_2) \neq (0, 0, 0) \quad (\text{n\~ao trivialidade}) \\ w_1(v - d) = 0 \wedge w_2(c - v) = 0 \quad (\text{complementaridade}) \end{array} \right.$$

¹¹Fritz-John (1910-1994), matemático alemão, especializado em equações diferenciais parciais e problemas mal formulados.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w_0 \left(\frac{\partial L}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) \right) - w_1 + w_2 = 0 \\ w_0, w_1, w_2 \geq 0 \\ (w_0, w_1, w_2) \neq (0, 0, 0) \\ w_1(v - d) = 0 \wedge w_2(c - v) = 0. \end{cases} \quad (105)$$

Se $w_0 = 0$, temos

$$\begin{cases} w_1 = w_2 \\ w_1, w_2 \geq 0 \\ (w_1, w_2) \neq (0, 0) \\ w_1(v - d) = 0 \wedge w_2(c - v) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_1 = w_2 \\ w_1, w_2 \geq 0 \\ (w_1, w_2) \neq (0, 0) \\ v = d \wedge c = v. \end{cases} \quad (106)$$

Logo (106) é uma contradição, uma vez que pela formulação do problema (P_{CO_1}), sabemos que $c < d$.

Portanto, $w_0 \neq 0$. Sejam

$$w'_1 = \frac{w_1}{w_0} \quad \text{e} \quad w'_2 = \frac{w_2}{w_0}. \quad (107)$$

Tendo em conta as condições (107), o sistema (105) é equivalente a

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) - w'_1 + w'_2 = 0 \\ w'_1, w'_2 \geq 0 \\ w'_1(v - d) = 0 \wedge w'_2(c - v) = 0. \end{cases}$$

Quando $v = c$, tem-se que

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) = -w'_2 \leq 0 \\ w'_2 \geq 0 \\ w'_1 = 0 \end{cases}$$

e, portanto obtemos a condição 1. Quando $v = d$, tem-se que

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) = w'_1 \geq 0 \\ w'_1 \geq 0 \\ w'_2 = 0 \end{cases}$$

e, portanto obtemos a condição 2.

Finalmente, quando $c < v < d$, tem-se que

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) = 0 \\ w'_1 = w'_2 = 0 \end{cases}$$

e, portanto obtemos a condição 3.

Iremos agora provar que, se as 3 condições 1, 2, 3, anteriores são verdadeiras, então é possível encontrar os multiplicadores w_0 , w_1 e w_2 , que satisfaçam o sistema (105). Consideremos a primeira condição, ou seja, suponhamos que $u(t) = c$. Logo, tem-se que

$$\begin{cases} w_0 \left(\frac{\partial L}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) \right) - w_1 + w_2 = 0 \\ w_0, w_1, w_2 \geq 0 \\ (w_0, w_1, w_2) \neq (0, 0, 0) \\ w_1(v - d) = 0 \wedge w_2(c - v) = 0 \\ v = c \\ \frac{\partial L}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_0 \left(\frac{\partial L}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) \right) = -w_2 \\ w_1 = 0 \\ w_0, w_2 \geq 0 \\ (w_0, w_2) \neq (0, 0) \\ \frac{\partial L}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) \leq 0. \end{cases} \quad (108)$$

Se

$$\frac{\partial L}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) = 0,$$

obtemos que

$$\begin{cases} w_1 = w_2 = 0 \\ w_0 \geq 0 \\ w_0 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_1 = w_2 = 0 \\ w_0 > 0. \end{cases}$$

Por outro lado, se

$$\frac{\partial L}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) < 0,$$

então escolhemos w_0 e w_2 tais que $w_0, w_2 > 0$. Esta escolha satisfaz a primeira equação

do sistema (108).

A partir da segunda condição, ou seja, $u(t) = d$, tem-se que

$$\begin{cases} w_0 \left(\frac{\partial L}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) \right) - w_1 + w_2 = 0 \\ w_0, w_1, w_2 \geq 0 \\ (w_0, w_1, w_2) \neq (0, 0, 0) \\ w_1(v - d) = 0 \wedge w_2(c - v) = 0 \\ v = d \\ \frac{\partial L}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w_0 \left(\frac{\partial L}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) \right) = w_1 \\ w_2 = 0 \\ w_0, w_1 \geq 0 \\ (w_0, w_1) \neq (0, 0) \\ \frac{\partial L}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) \geq 0. \end{cases} \quad (109)$$

Se

$$\frac{\partial L}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) = 0,$$

obtemos que

$$\begin{cases} w_1 = w_2 = 0 \\ w_0 \geq 0 \\ w_0 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_1 = w_2 = 0 \\ w_0 > 0. \end{cases}$$

Por outro lado, se

$$\frac{\partial L}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) > 0,$$

então escolhemos w_0 e w_1 tais que $w_0, w_1 > 0$. Esta escolha satisfaz a primeira equação do sistema (109).

A partir da terceira condição, ou seja, suponhamos que $c < u(t) < d$, tem-se que

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0 \left(\frac{\partial L}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) \right) - w_1 + w_2 = 0 \\ w_0, w_1, w_2 \geq 0 \\ (w_0, w_1, w_2) \neq (0, 0, 0) \\ w_1(v - d) = 0 \wedge w_2(c - v) = 0 \\ c < v < d \\ \frac{\partial L}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} w_1 = w_2 = 0 \\ w_0 > 0. \end{array} \right.$$

Logo, as 3 condições 1, 2, 3, são equivalentes ao sistema (105). Portanto, fica provada a quarta condição do Teorema 3.3.

□

3.4 Método Direto

Os métodos para resolver problemas de controlo ótimo podem ser divididos em duas partes: diretos e indiretos.

O método indireto envolve a resolução do problema de valor de fronteira (PVF) formada pelas condições de otimalidade de primeira ordem. Para vários problemas, isso não pode ser feito analiticamente, de modo que as equações são discretizadas de alguma forma e resolvidas numericamente. Por esta razão, o método indireto é também por vezes referido como "*optimize then discretize*". Atualmente, os métodos mais usados para resolver o (PVF) formado pelas condições de otimalidade são os chamados algoritmos gradiente. De forma genérica, estes e alguns dos outros métodos discutidos aqui podem ser encontrados em [34].

A teoria das aproximações fornece condições sob as quais as soluções para uma série de problemas de controlo ótimo discreto são cada vez mais precisas e que convergem para a solução do problema original [11].

O problema de Lagrange do controlo ótimo usa aproximações de diferenças finitas para derivadas e é também denominado método das diferenças finitas. Para simplificar, iremos considerar o problema com uma dimensão. A ideia deste método é que, em vez de

considerar os valores de um funcional

$$J[x, u] = \int_a^b L(t, x(t), u(t)) dt, \quad (110)$$

onde o par (x, u) deve satisfazer o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad \forall t \in [a, b] \quad (111)$$

e a condição de fronteira

$$x(a) = \alpha$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

Consideremos $n \in \mathbb{N}$ e definimos

$$h = \frac{b-a}{n} > 0.$$

Para $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, sejam $t_i = a + ih$, $x_i = x(t_i)$ e $u_i = u(t_i)$. Então, para o par ótimo (x, u) , iremos encontrar uma aproximação numérica, dada por

$$(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ e } (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n).$$

O problema que maximiza o funcional (110) é substituído pelo seguinte

$$(P_{MDCO_1}) \quad \max \sum_{i=1}^n hL(t_i, x_i, u_i),$$

ou, de modo equivalente

$$(P_{MDCO_1}) \quad \max \sum_{i=1}^n L(t_i, x_i, u_i).$$

A equação diferencial (111) é substituída por

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{h} = f(t_i, x_i, u_i).$$

Em conclusão, o problema de controle ótimo é aproximado por:

$$(P_{MDCO_1}) \quad \max \sum_{i=1}^n L(t_i, x_i, u_i),$$

tal que

$$x(t_i) = x(t_{i-1}) + hf(t_i, x_i, u_i)$$

e

$$x_0 = \alpha.$$

Seguidamente, vamos apresentar alguns exemplos do método direto para problemas sem restrições na variável de controlo. A resolução dos mesmos será feita com recurso ao *Software Maple*.

Exemplo 3.4. *Consideremos o funcional*

$$J[x, u] = \int_0^1 (1, 5x^2(t) + 0, 5u^2(t)) dt,$$

sujeito a restrição

$$x'(t) = x(t) + u(t), \tag{112}$$

com a condição de fronteira $x(0) = 2$. A partir do Exemplo 3.2 sabemos que a solução exata é

$$\hat{x}(t) = \frac{2e^{2t}}{3 + e^4} (3 + e^{4-4t}),$$

$$\hat{u}(t) = \frac{6e^{2t}}{3 + e^4} (1 - e^{4-4t}).$$

Na Figura 1, as variáveis de estado \hat{x} e de controlo \hat{u} estão representados para $n = 10$. Na Figura 2 estão representados para $n = 20$ e, na Figura 3 por $n = 500$. É evidente que, quanto maior o n , a aproximação dos valores \hat{x} e \hat{u} convergem para a solução exata.

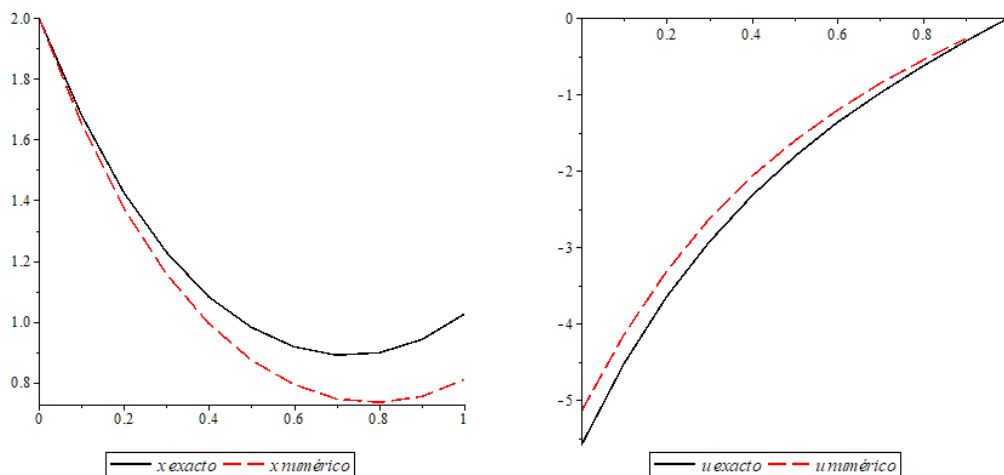


Figura 1: Solução exata e aproximada para n=10

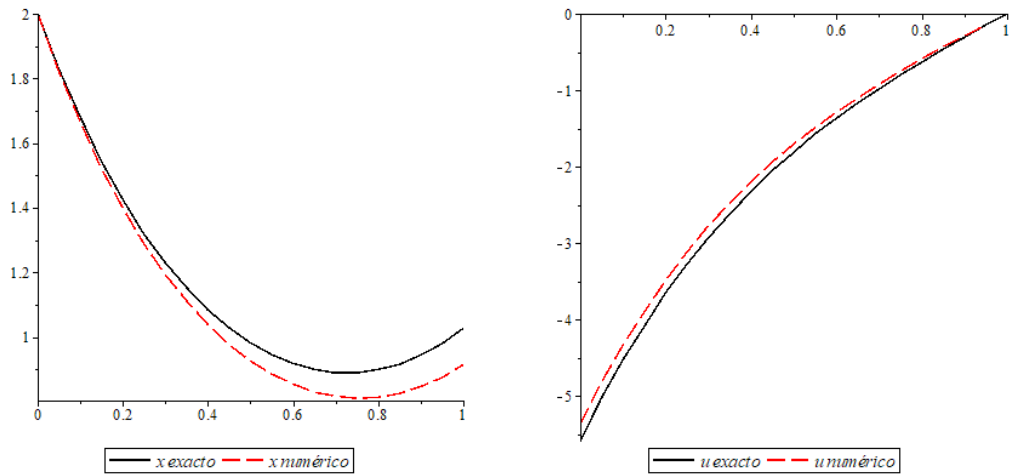


Figura 2: Solução exata e aproximada para $n=20$

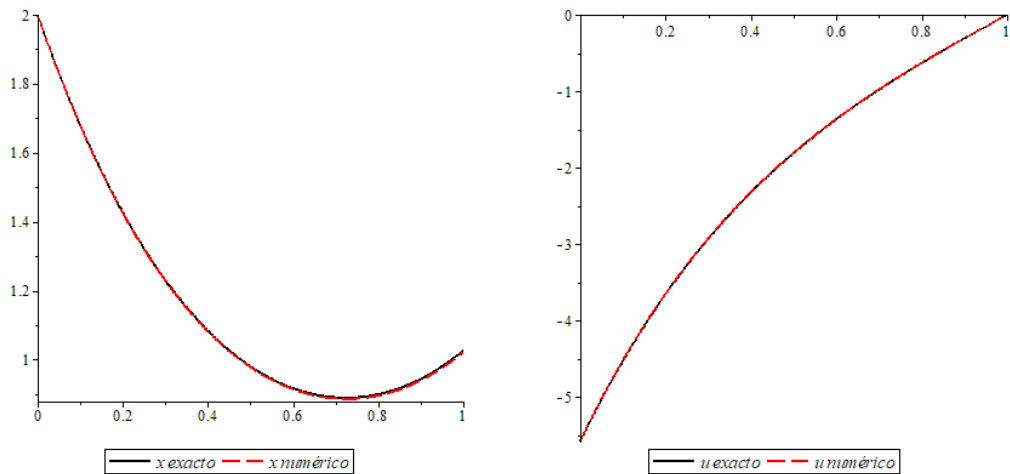


Figura 3: Solução exata e aproximada para $n=500$

Exemplo 3.5. Consideremos o funcional

$$J[x, u] = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2(t) + u^2(t)) dt,$$

sujeito a restrição

$$x'(t) = -x(t) + u(t),$$

com a condição de fronteira $x(0) = 1$.

Tendo em conta [39], a solução exata do problema é

$$\hat{x}(t) = \cosh(\sqrt{2}t) + \alpha \sinh(\sqrt{2}t),$$

$$\hat{u}(t) = (1 + \sqrt{2}\alpha) \cosh(\sqrt{2}t) + (\sqrt{2} + \alpha) \sinh(\sqrt{2}t),$$

onde

$$\alpha = -\frac{\cosh(\sqrt{2}) + \sqrt{2} \sinh(\sqrt{2})}{\sqrt{2} \cosh(\sqrt{2}) + \sinh(\sqrt{2})}.$$

Na Figura 4, as variáveis de estado \hat{x} e de controlo \hat{u} estão representados para $n = 5$. Na Figura 5 estão representados para $n = 15$ e, na Figura 6 para $n = 150$.

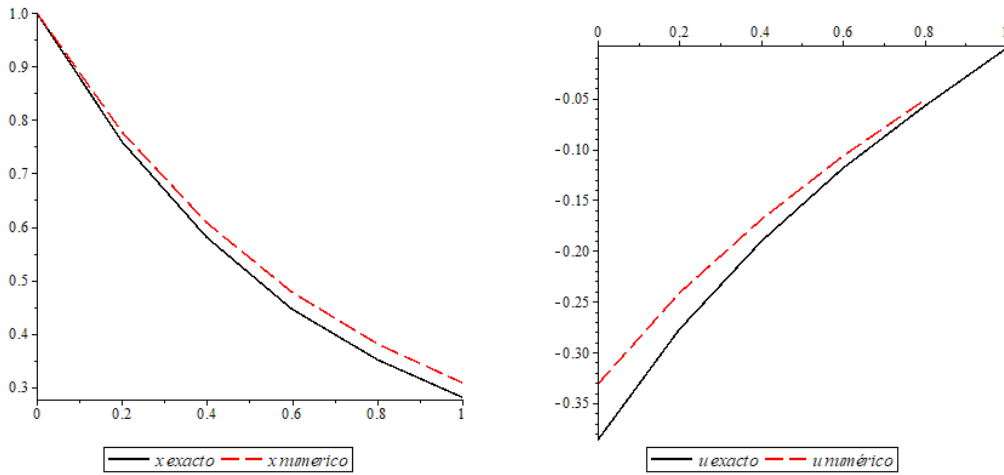


Figura 4: Solução exata e aproximada para n=5.

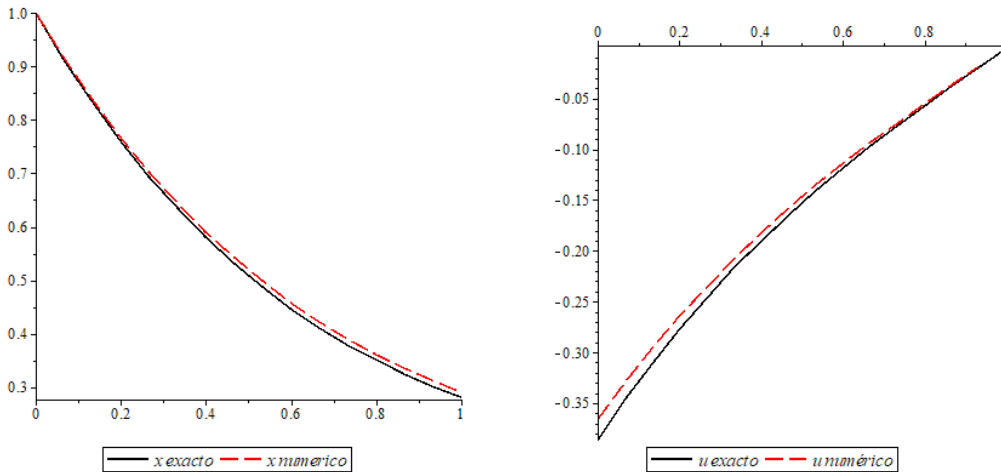


Figura 5: Solução exata e aproximada para n=15.

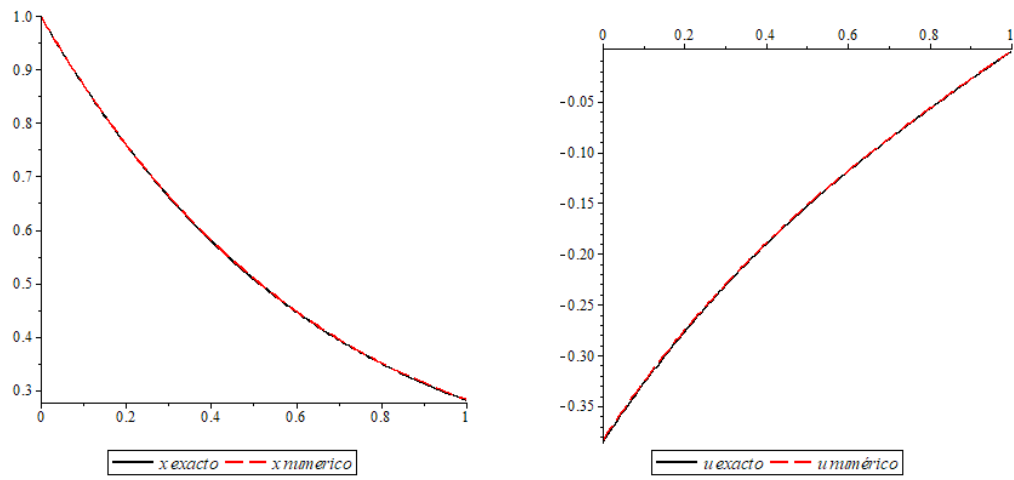


Figura 6: Solução exata e aproximada para $n=150$.

4 Considerações Finais

Nesta dissertação apresentámos uma abordagem sobre o cálculo das variações e teoria de controlo ótimo, sendo duas áreas distintas da Matemática que estão inter-relacionadas. Deste modo, foi estruturada em dois capítulos. Relativamente ao primeiro, tratámos do cálculo das variações. Apresentámos que o mesmo tem como objetivo encontrar os maximizantes dos funcionais, especificamente na forma de um integral e, neste sentido, é considerado um ramo da otimização.

Quanto aos problemas e as técnicas do cálculo das variações, estes, diferem acentuadamente daqueles que envolvem os maximizantes de funções de várias variáveis devido à natureza do domínio da quantidade a ser otimizada.

Dos vários problemas existentes nesta área, restringimo-nos ao problema clássico de fronteiras fixas, equações de Euler-Lagrange generalizadas, equação de Euler-Lagrange para funcionais que dependem de várias variáveis dependentes e uma variável independente, condições de transversalidade e problemas com alguns tipos de restrições.

Várias abordagens sobre as condições suficientes para extremos de funcionais podem ser consultadas em [17, 24].

Finalmente, no último capítulo, tratámos do controlo ótimo. Deste, apresentámos a relação entre o cálculo das variações e o controlo ótimo. Seguidamente, a partir de um ponto de vista numérico, apresentámos alguns exemplos de problemas sem restrições na variável de controlo recorrendo o método direto.

5 Referências Bibliográficas

Referências

- [1] A. B. Malinoswska e N. Martins, "*Generalized transversality conditions for the Hahn quantum variational calculus*", *Optimization*, **62**, no. (3), (2013), 323-344.
- [2] A. E. Bryson Jr., *Optimal Control - 1950 to 1985*, IEEE Control Systems, 1996.
- [3] A. P. P. Lemos, *Introduction to Optimal Control Theory and its Aplicattion to Diabetes*, Dissertação Mestrado, Universidade de Aveiro, 2015.
- [4] A. P. X. Flores, *Calculo Variacional: aspectos teóricos e aplicações*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2011.
- [5] B. David, *Optimal Control Theory*, Springer-Verlag, New York, 1974.
- [6] B. van Brunt, *The calculus of Variations*, Universitext, Springer, New Zealand, 2004.
- [7] C. Emílio, *Optimización dinamica*, Pearson Educación, 2001, 26–33.
- [8] D. F. M. Torres, *Regularidade dos Minimizantes no Cálculo das Variações e Controlo Ótimo*, Dissertação de Doutorado, Universidade de Aveiro, 2002.
- [9] D. K. Hughes, "*Variational and optimal control problems with delayed argument*", *J. Optim., Theory Appl.*, **2**, no. (1), (1968), 1-14.
- [10] E. B. Lee e L. Markus, *Foundations of optimal control theory*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1967.
- [11] E. Polak, *On the use of consistent approximations in the solution of semi-infinite optimization and optimal control problems Math*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [12] E. R. Pinch, *Optimal Control and the Calculus of Variations*, Oxford University, Springer- New York, 1993.
- [13] F. H. Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1983.
- [14] F.R. Dias Agudo, Vol. III, *Análise Real*, Escolar Editora, Lisboa, 1992.

- [15] G. H. Heine, *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*, Springer Science and Business Media, New York, 2012.
- [16] G. Smirnov e V. Bushenkov, *Curso de Otimização: Programação Matemática, Cálculo de Variações, Controlo Ótimo*, Escolar Editora, Lisboa, 2005.
- [17] H. Sagan, *Introduction to the Calculus of Variations*, McGraw-Hill Book Company, EUA, 1969.
- [18] J. D. Logan, *Applied Mathematics*, A contemporary approach, IV Edição, John Wiley & Sons, Lincoln, 2013.
- [19] J. Mack e A. Strauss, *Introduction to Optimal Control Theory*, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [20] K. Louis, *Applied Calculus of Variations for Engineers*, CRC Press, New York, 2009.
- [21] L. Bandeira, F. Coelho e N. Franco, *Introdução à Matemática: Álgebra, Análise e Otimização*, Lidel-Edições Técnicas, Lisboa, 2016.
- [22] L. C. Young, *Lectures on the calculus of variations and optimal control theory*, Chelsea Publishing Co., New York, 1980.
- [23] L. D. Berkovitz, *Optimal control theory*, New York, 1974.
- [24] L. Elsgolts, *Differential Equations and the Calculus of Variations*, MIR, Moscovo, 1970.
- [25] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze e E. F. Mishchenko, *The mathematical theory of optimal processes*, Interscience Publishers John Wiley & Sons, London, 1962.
- [26] M. Athans e P. L. Falb, *Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [27] M. I. Kamien e N. L. Schwartz, *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, Second Edition, Elsevier, Amsterdam, 1991.
- [28] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali e C. M. Shetty, *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, Third Edition, Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2006.

- [29] N. Martins e D. F. M. Torres, "*Necessary optimality conditions for higher-order infinite horizon variational problems on time scales*", J. Optim., Theory Appl., **155**, no. (2), (2012), 453–476.
- [30] P. Rocha, *Cálculo I*, Universidade de Aveiro Campus Universitário de Santiago, 5^a edição, Aveiro, 1999.
- [31] R. Almeida, *Teorema do Ponto fixo de Banach: Algumas generalidades e aplicações*, Dissertação de Mestrado, Porto, 2001.
- [32] R. Brockett, *New issues in the mathematics of Control*, In Mathematics unlimited, Springer, Berlin, 2001.
- [33] R. Courant e D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, Interscience Publishers, New York, 1953.
- [34] R. Pytlak, *Numerical Methods for Optimal Control Problems with State Constraints*, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [35] R. V. Gamkrelidze, "*The mathematical work of L. S. Pontryagin*", J. Math., Sci. (New York), **100**, no. (5), (2000), 2447–2457.
- [36] R. W. H. Sargent, "*Optimal control*", J. Comput. Appl. Math., **124**, no. (1-2), (2000), 361–371.
- [37] S. Anita, V. Arnautu e V. Capasso, *An Introduction to Optimal Control. Problems in Life Sciences and Economics, From Mathematical Models to Numerical Simulation with MATLAB*, Birkhäuser, New York, 2010.
- [38] S. Gueorgui e B. Vladimir, *Curso de Otimização: Programação Matemática, Cálculo de Variações, Controlo Ótimo*, Escolar Editora, 2005.
- [39] T. Akbarian e M. Keyanpour, "*A New Approach to the Numerical Solution of Fractional Order Optimal Control Problems*", Appl. and Appl. Math.: An International Journal, **8**, no. (2), (2013), 523–534.
- [40] T. Rüdiger, *Euler and the Calculus of Variations*, In Bradley, Robert E., Sandifer, C. Edward. Leonhard Euler: Life, Work and Legacy. Elsevier, 2007.