



Universidade de Aveiro Departamento de Matemática

2019

**ANA SOFIA DA SILVA
MESQUITA DE MATOS**

**MAGIA OU MATEMÁTICA? TRUQUES E APRENDIZAGENS
NO 3.º CICLO DO ENSINO BÁSICO**



Universidade de Aveiro Departamento de Matemática

2019

**ANA SOFIA DA SILVA
MESQUITA DE MATOS**

**MAGIA OU MATEMÁTICA? TRUQUES E APRENDIZAGENS
NO 3.º CICLO DO ENSINO BÁSICO**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para Professores (2.º ciclo), realizada sob a orientação científica da Professora Doutora Andreia Oliveira Hall, Professora Associada do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, e do Professor Doutor Ricardo Jorge Aparício Gonçalves Pereira, Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

o júri / the jury

presidente / president

Professor Doutor Paolo Vettori

Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro

vogais / examiners committee

Arguente Principal

Professor Doutor Nuno Rafael Oliveira Bastos

Professor Adjunto da Escola Superior de Tecnologia de Viseu

Orientador

Professor Doutor Ricardo Jorge Aparício Gonçalves Pereira

Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro

agradecimentos Ao longo da execução deste trabalho, muitos foram os momentos em que senti necessidade de persistir para superar as dificuldades encontradas e conseguir ir mais além. Um trabalho desta envergadura implica esforço pessoal e uma dedicação constante, ao longo de um período de tempo prolongado, pelo que o apoio direto de orientadores, familiares e amigos é essencial. Deste modo, e porque este percurso não se construiu de forma solitária, pretendo agradecer:

- aos meus orientadores, Prof.^a Andreia Oliveira Hall e Prof. Ricardo Pereira, pela forma como atentamente reviram e orientaram o meu trabalho em cada momento e, sobretudo, pelas inquietações que me causaram constantemente, com as suas novas sugestões, que me permitiram investigar por domínios que até aqui desconhecia e ampliar os meus conhecimentos;
- aos professores Paolo Vettori e Nuno Bastos, pelos comentários pertinentes e enriquecedores que me fizeram na defesa desta dissertação;
- ao João, pela enorme paciência que teve comigo, mesmo quando estive ocupada com “as minhas coisas da Matemática”, pelo incentivo, pelo imenso carinho e por todo o apoio que me deu quando mais precisei;
- à minha família, que me apoiou sempre em todas as decisões e me aconselhou a seguir em frente quando sonhei voltar à universidade e continuar a aprender, num novo mestrado;
- aos colegas do Agrupamento de Escolas de Atouguia da Baileia e aos amigos, em particular à Neusa Branco, que me incentivaram sempre a continuar;
- e, ao Miguel, a quem eu um dia espero contar esta aventura.

palavras-chave

matemática, magia, aprendizagem, ensino básico

resumo

A presente dissertação tem como principal objetivo sistematizar e organizar “truques e ilusões” que professores e alunos podem utilizar numa aula de matemática do ensino básico, não só como motivação extra para o trabalho a desenvolver no âmbito da disciplina, mas principalmente como ponto de partida para a compreensão de conceitos matemáticos que, por trás dos referidos truques, justificam o seu funcionamento, sem qualquer dependência da sorte ou do azar. Os “truques” escolhidos podem ser aplicados em turmas do 3.º ciclo e foram selecionados e explorados tendo em conta o seu interesse pedagógico e os documentos curriculares em vigor, esperando-se que possam ser úteis para outros professores de matemática noutras escolas.

keywords

mathematics, magic, learning, middle school

abstract

The main purpose of this study is to collect and organize “tricks and illusions” that teachers and students may use in a mathematics class in middle school, not only as extra motivation for the work to be carried out within the subject, but also as a starting point for the understanding of the mathematical concepts that lie behind those tricks and show that their effectiveness does not depend on chance. The selected “tricks” can be applied in grades 7th to 9th classes and were selected according to their pedagogical interest, having in mind the portuguese curricula. We hope they may also be useful for mathematics teachers in other schools.

Índice

ÍNDICE	xiii
ÍNDICE DE FIGURAS	xvii
ÍNDICE DE ANEXOS	xxiii
CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	1
1.1. Motivações pessoais	1
1.2. A magia matemática.....	2
1.3. Orientações curriculares para o ensino da matemática no ensino básico	5
1.4. Objetivo da investigação	7
1.5. Organização	7
CAPÍTULO 2 – A MATEMÁTICA POR TRÁS DA MAGIA.....	9
2.1. Números.....	9
2.1.1. Sistemas de numeração e mudanças de base.....	9
a) Sistemas de numeração standard	10
b) Sistemas de numeração não standard – o caso da base negabinária	12
2.1.2. Números de Fibonacci.....	15
2.1.3. Teorema de Zeckendorf e Representação de Zeckendorf....	17
2.1.4. Sucessão negafibonacci – uma sucessão de Fibonacci generalizada	21
2.1.5. Aritmética modular.....	26
2.1.6. Soma dos n primeiros números naturais.....	30
2.2. Geometria.....	34
2.2.1. Paradoxos geométricos	34

a) Princípio da distribuição escondida	34
b) Paradoxos de Curry	36
2.2.2. Teorema de Pick	38
2.2.3. Simetrias	43
2.3. Álgebra e Funções	44
2.3.1. Processos algébricos	44
2.3.2. Funções – algumas noções	44
2.4. Cartas, dados e outros materiais com potencial matemático	45
2.4.1. Cartas	45
a) Princípio do fundo para o topo	46
2.4.2. Dados e outros materiais	53
CAPÍTULO 3 – METODOLOGIA	55
3.1. Problematização	55
3.2. Opções fundamentais	56
CAPÍTULO 4 – TRUQUES, RECREAÇÃO E POTENCIAIS	
APRENDIZAGENS	59
4.1. Truques com fim recreativo	59
4.1.1. Em que dia da semana nasci?	59
4.1.2. Sabor do gelado	66
4.1.3. Em que número pensei? – Base Fibonacci	71
4.1.4. Qual é a minha carta? – Base negafibonacci	73
4.1.5. Qual é a minha carta? – Base negabinária	75
4.2. Truques que podem potenciar aprendizagens de conteúdos programáticos	79
4.2.1. Onde está o erro? – Duas cores	79
4.2.2. Onde está o erro? (-1) vs (+1)	82
4.2.3. Dívidas e ganhos – Potências de base 3	85
4.2.4. Dívidas e ganhos – Base negabinária	95
4.2.5. Dívidas e ganhos – Base negafibonacci	100
4.2.6. O quadrado desaparecido	103
4.2.7. Quantos triângulos apareceram?	108
4.2.8. Mais rápido que a própria sombra	112

4.2.9. O que os meus olhos veem	114
4.2.10. Tenho um palpite!	117
4.2.11. 5-4-3-2-1-1/2 e já sei o teu número!	122
4.2.12. Todos obtiveram o 9	125
4.2.13. O par mistério	129
4.2.14. O par mistério (2).....	132
4.2.15. Sei qual é a tua carta.....	135
4.2.16. Adivinhando raízes cúbicas	138
4.2.17. Adivinhando raízes quadradas	142
4.2.18. O mágico número 73	146
4.2.19. Jogando com três dados	148
4.2.20. Contando até ao rei	152
CAPÍTULO 5 – CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	157
5.1. A importância da magia matemática	157
5.2. O meu percurso ao longo da investigação.....	159
5.3. Reflexão sobre os truques incluídos nesta dissertação	160
5.4. O desafio inicial desvendado	162
5.5. Percursos para futuras investigações	164
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	167
ANEXOS	175

Índice de Figuras

Figura 1– Conteúdos matemáticos por domínio e ano de escolaridade	6
Figura 2 – Representação do número 29 em base binária	11
Figura 3 – Representação do número 12 em base negabinária	13
Figura 4 – Representação do número –30 em base negabinária	14
Figura 5 – Representação de números inteiros em base binária e negabinária	15
Figura 6 – Problema dos Coelhos e Sucessão de Fibonacci.....	16
Figura 7 – Representação do número 15 na base Fibonacci	20
Figura 8 – Sucessão negafibonacci, para $n \leq 2$	21
Figura 9 – Sucessão negafibonacci, para $n \in \mathbb{Z}$	21
Figura 10 – Representação do número 24 na base negafibonacci.....	22
Figura 11 – Divisão dos números inteiros em intervalos.....	23
Figura 12 – Representação de 27 na base negafibonacci.....	24
Figura 13 – Representação de números inteiros na base negafibonacci	25
Figura 14 – Validação de número de documento (Cartão do cidadão).....	29
Figura 15 – Sucessão dos números triangulares.....	31
Figura 16 – Duplicação da 5. ^a figura dos números triangulares	31
Figura 17 – A linha desaparecida – Configuração inicial (Gardner, 1956, p. 115).....	35
Figura 18 – A linha desaparecida – Configuração final (Gardner, 1956, p. 116).....	35
Figura 19 – A cara desaparecida (Gardner, 1956, p. 120).....	35

Figura 20 – Quadrados de Curry.....	36
Figura 21 – Paradoxos de Curry - Quadriláteros sobrepostos.....	36
Figura 22 – “Triângulos” de Curry	37
Figura 23 – Paradoxos de Curry – Pentágonos sobrepostos	38
Figura 24 – Polígono simples cujos vértices têm coordenadas inteiras.....	39
Figura 25 – Triângulo elementar	40
Figura 26 – Polígono e sua triangulação (grafo planar conexo)	41
Figura 27 – Simetrias de um nove de ouros	43
Figura 28 – Princípio do Fundo para o Topo para $n = 8$ e $k = 4$	48
Figura 29 – Princípio do Fundo para o Topo para $n = 8$ e $k = 3$	50
Figura 30 - Princípio do Fundo para o Topo para $n = 8$ e $k = 5$	51
Figura 31 – Princípio do Fundo para o Topo para $n = 8$ e $k = 7$	53
Figura 32 – Calendarização das fases do estudo	58
Figura 33 – Em que dia da semana nasci? – Códigos dos dias da semana	61
Figura 34 – Em que dia da semana nasci? – Códigos dos meses do ano	61
Figura 35 – Em que dia da semana nasci? – Códigos dos anos a partir de 2000	62
Figura 36 – Em que dia da semana nasci? – Origem dos códigos dos anos	64
Figura 37 – Em que dia da semana nasci? – Origem dos códigos dos meses	66
Figura 38 – Sabor do gelado – Exemplo de uma porção de baralho na posse do aluno no início do truque.....	69
Figura 39 – Sabor do gelado – Porção de baralho após a 1. ^a passagem.....	69
Figura 40 – Sabor do gelado – Porção de baralho após a 2. ^a passagem.....	70
Figura 41 – Sabor do gelado – Porção de baralho após a 3. ^a passagem.....	70
Figura 42 – Em que número pensei? – Números inteiros entre 1 e 54.....	72
Figura 43 – Qual é a minha carta? – Cartas com pontuações entre –13 e 13 e naipes copas ou espadas	74

Figura 44 – Qual é a minha carta? – Cartas com pontuações entre -13 e 13 e naipes copas ou espadas	76
Figura 45 – Onde está o erro? – Quadrado inicial – 5×5	80
Figura 46 – Onde está o erro? – Quadrado acrescentado – 6×6	81
Figura 47 – Onde está o erro? – Quadrado final com um cartão modificado – 6×6	81
Figura 48 – Onde está o erro? – Quadrado final com o cartão modificado assinalado – 6×6	82
Figura 49 – Onde está o erro? (-1) vs $(+1)$ – Quadrado inicial – 5×5	83
Figura 50 – Onde está o erro? (-1) vs $(+1)$ – Quadrado acrescentado – 6×6	84
Figura 51 – Onde está o erro? (-1) vs $(+1)$ – Quadrado final com o cartão modificado assinalado – 6×6	84
Figura 52 – Dívidas e ganhos – Valores atribuídos às cartas do naipe de copas (ou de ouros)	86
Figura 53 – Dívidas e ganhos – Valores atribuídos às cartas do naipe de paus (ou de espadas)	87
Figura 54 – Dívidas e ganhos – Cartas do baralho que, em valor absoluto, correspondem a potências de base 3, em ordenação PCEO	89
Figura 55 – Dívidas e ganhos – Valores que se podem obter ao adicionar os valores correspondentes de duas das seis cartas do conjunto inicial	91
Figura 56 – Dívidas e ganhos – Valores que se podem obter ao adicionar os valores correspondentes de três das seis cartas do conjunto inicial	94
Figura 57 – Dívidas e ganhos – Cartas do baralho que correspondem a potências de base -2 , em ordenação PCEO	96
Figura 58 – Dívidas e ganhos – Valores que se podem obter ao adicionar os valores correspondentes de duas de cinco cartas com potências de base -2	98
Figura 59 – Dívidas e ganhos – Valores que se podem obter como soma de potências de base -2 com qualquer número de cartas	99
Figura 60 – Dívidas e ganhos – Cartas do baralho que correspondem a números da sucessão negafibonacci, em ordenação PCEO	100

Figura 61 – Dívidas e ganhos – Valores que se podem obter ao adicionar os valores correspondentes de duas de seis cartas com números da sequência negafibonacci	103
Figura 62 – O quadrado desaparecido – Configuração inicial	105
Figura 63 – O quadrado desaparecido – Configuração final.....	105
Figura 64 – O quadrado desaparecido – Triângulos justapostos.....	106
Figura 65 – Quantos triângulos apareceram? – Polígono com x lados e y pontos no interior	109
Figura 66 – Quantos triângulos apareceram? – Polígono com todos os triângulos desenhados.....	109
Figura 67 – Quantos triângulos apareceram? – Ângulos internos de todos os triângulos	110
Figura 68 – Quantos triângulos apareceram? – Ângulos giros formados em torno dos y pontos interiores	110
Figura 69 – Quantos triângulos apareceram? – Ângulos internos de um polígono com x lados.....	111
Figura 70 – Mais rápido que a própria sombra – Polígono num geoplano ...	113
Figura 71 – O que os meus olhos veem – conjunto de 22 cartas que devem ficar no fundo do baralho	116
Figura 72 – Cubos de números inteiros entre 0 e 10 (inclusive).....	139
Figura 73 – Cubos de números inteiros terminados em 0, entre 0 e 100 (inclusive).....	140
Figura 74 – Algarismo das unidades do cubo de um número inteiro entre 0 e 100	141
Figura 75 – Quadrados de números inteiros entre 0 e 10 (inclusive)	143
Figura 76 – Quadrados de números inteiros terminados em 0, entre 0 e 100 (inclusive).....	143
Figura 77 – Algarismo das unidades do quadrado de um número inteiro entre 0 e 100.....	145
Figura 78 – Jogando com 3 dados – Um exemplo.....	150
Figura 79 – Jogando com 3 dados – Demonstração	151
Figura 80 – Contando até ao rei – Pilhas de cartas (exemplo).....	154

Figura 81 – Contando até ao rei – Primeiras cartas desprezadas (exemplo)	154
Figura 82 – Distribuição dos truques enquadrados por domínio temático e ano de escolaridade	162

Índice de Anexos

Anexo I – Cubos perfeitos entre 0 e 100 (inclusive).....	175
Anexo II – Quadrados perfeitos entre 0 e 100 (inclusive)	177
Anexo III – Percursos possíveis no poema <i>A história infinita do π</i> , de Manuel António Pina	179
Anexo IV – Desafio original, proposto por Martin Gardner.....	184
Anexo V – Percursos possíveis na frase inicial de <i>Alice in Wonderland</i> , de Lewis Carroll	185

A história infinita do π

Julgando o fim a chegar, o π deu de começar a preocupar-se consigo. E um dia fez a bagagem e partiu numa viagem ao fundo do seu umbigo.

Mas o umbigo era mais fundo do que o umbigo do mundo e o π regressou mais baralhado que à partida, de cabeça confundida com cálculos decimais...

Hoje o π , já muito velho, senta os netos nos joelhos e fala-lhes de Alexandria, da China, de Chung Zhi, de Al-Kashi, de Al-Kwarismi, da Casa da Sabedoria.

E dos milhares de milhão de casas onde viveu, na sua aventureira existência desde o dia em que nasceu da estranha relação dum diâmetro e uma circunferência.

Manuel António Pina
Pequeno Livro de Desmatemática
Porto, Assírio e Alvim, 2012, pp. 26-27

Desafio: escolha uma das primeiras treze palavras do primeiro verso deste poema (a negrito) solete essa palavra e conte quantas letras tem. Em seguida, a partir da palavra a seguir à que escolheu, conte esse número de palavras para a direita até chegar a uma nova palavra. Repita o procedimento formando uma cadeia, até encontrar a primeira palavra que pertença ao próximo excerto a negrito, assinalado no final do texto. Que palavra é essa?

Quando finalizar a leitura desta dissertação (ou, quem sabe, ainda antes disso!), descobrirá magia matemática neste poema.

Capítulo 1 – Introdução

No presente capítulo apresento as ideias principais que motivaram a realização deste estudo e descrevo os meus principais objetivos, como investigadora. Uma vez que pretendo construir um trabalho com utilidade prática para outros docentes e futuros docentes, prossigo fazendo uma breve súmula das principais orientações curriculares em vigor para o ensino da matemática que, a par da minha experiência no terreno como docente do ensino básico, norteiam a escolha dos truques que apresento nesta dissertação, bem como a análise que faço de cada um deles.

1.1. Motivações pessoais

Desde que iniciei a minha atividade profissional como docente tenho encontrado muitos alunos para os quais a matemática é um aborrecimento e uma obrigação. Por outro lado, para outros, a matemática é, naturalmente, um desafio e uma oportunidade para descobrir coisas novas. Há, muitas vezes, uma dualidade entre estas duas posições opostas em cada sala de aula, que o professor de matemática deve conseguir gerir.

A ideia de explorar truques de uma verdadeira magia matemática fez-me acreditar que seria possível, não só aproveitá-los para promover o lado recreativo da disciplina, mas principalmente para conseguir chegar, de forma mais eficaz, a estes dois conjuntos de alunos que mantêm sentimentos contraditórios relativamente à mesma. Por um lado, deslumbrar os alunos que mais se procuram distanciar da matemática, captando-lhes a atenção, cativando-os e promovendo uma maior motivação para a descoberta

matemática e a aprendizagem. Por outro lado, manter viva a já existente curiosidade natural do outro grupo de alunos, mantendo a atividade matemática sempre diversificada e pouco rotineira e evitando a sua desmotivação.

Também para mim, a título pessoal, aprender coisas novas constitui uma motivação importante. Penso que, ao longo da vida, é necessário desafiar-mos constantemente e predispor-mos a aprender sempre mais. As novas aprendizagens são sempre importantes, uma vez que permitem desenvolvermos pessoal e profissionalmente. Perceber, em cada truque investigado, qual é o conteúdo matemático subjacente é algo que a mim me diz muito e que me motiva a querer investigar mais. Procurarei evidenciar a existência de truques que podem ser usados apenas de forma recreativa, em cinco ou dez minutos de uma aula, sem qualquer preocupação a não ser a sua parte lúdica, mas também a existência de truques que são suportados por conteúdos matemáticos acessíveis a alunos do ensino básico e a partir dos quais se podem promover aprendizagens previstas no currículo de matemática.

1.2. A magia matemática

A magia matemática (ou matemagia) é um tema aliciante, que tem sido investigado por inúmeros profissionais, em diversos países e, nos últimos anos, também em Portugal.

Figura incontornável no âmbito da matemática recreativa, em particular da magia matemática, o norte-americano Martin Gardner (1914-2010) surge destacado como um dos autores mais relevantes na minha pesquisa bibliográfica sobre o tema, inspirando boa parte do trabalho desenvolvido nesta dissertação e muitos dos trabalhos de mágicos e investigadores de renome. Das referências bibliográficas desta dissertação, fazem parte sete obras deste autor, mas estas representam apenas uma pequena parte do seu enorme legado.

Arthur Benjamin, matemático norte-americano e professor universitário, escreveu também dois livros que se revelaram muito interessantes para mim: *Secrets of mental math: the mathemagician's guide to lightning calculation and*

amazing math tricks (Benjamin & Shermer, 2006) e *The magic of math: solving for x and figuring out why* (Benjamin, 2015).

Nos Estados Unidos da América, assume também grande relevância o trabalho desenvolvido nesta temática pelo matemático e professor universitário irlandês Colm Mulcahy, reconhecido como uma autoridade no que se refere ao domínio de princípios matemáticos e efeitos subjacentes ao funcionamento de inúmeros truques de magia matemática realizados com cartas. O seu livro *Mathematical Card Magic: Fifty-Two New Effects* (Mulcahy, 2013) é uma obra de interesse inegável para quem se debruça sobre esta temática. Além disso, o autor tem publicado materiais diversos em blogues, nomeadamente no jornal *Huffington Post* e na revista *Scientific American*. Os norte-americanos Persi Diaconis e Ron Graham, no seu livro *Magical Mathematics: the mathematical ideas that animate great magic tricks* (Diaconis & Graham, 2011), exploram também os fundamentos matemáticos de diversos truques de matemagia.

Pesquisando sobre o tema numa perspetiva educativa, foi-me possível encontrar diversos artigos/livros sobre magia matemática, com sugestões de truques e tarefas pensadas especificamente para aulas de matemática e conselhos sobre a sua exploração. São exemplo disso:

- os artigos publicados nas revistas do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM): *Mathematics Teaching in the Middle School* e *The mathematics teacher* (Davis & Middlebrooks, 1983; Hermann & Garman, 1984; Shwartzman, 1987; Koirala & Goodwin, 2000; Matthews, 2008);
- o artigo publicado na revista *Mathematics in School*, da associação britânica *The Mathematical Association* (Crawford, 2000);
- o artigo publicado na revista *online* norte-americana *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* (Lim, 2018);
- algumas tarefas produzidas pelo projeto *Computer Science Unplugged*, na Nova Zelândia (Bell, Witten, & Fellows, 1998);
- os trabalhos desenvolvidos pelos ingleses Stephen Froggatt (Froggatt, 2005), Peter McOwan, Matt Parker e Jason Davidson (McOwan & Parker, 2010; Davidson & McOwan, 2011);

- a coletânea de truques da autoria do norte-americano Wade Sherard (Sherard, 1998);
- o livro escrito pela canadiana Linda Colgan (Colgan, 2011);
- o artigo dos norte-americanos Jay Cummings e Morgan Mitchell (Mitchell & Cummings, 2017);
- os artigos publicados em atas de congressos de Educação Matemática, como, por exemplo, a conferência anual do *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Koirala H. P., 2005).

É possível, também, encontrar inúmeras ideias para truques de magia matemática em blogues pessoais, como os do norte-americano John Quintanilla ou do espanhol Fernando Blasco, em vídeos disponíveis no *Youtube*, entre outras fontes eletrónicas. Diversos congressos de matemática recreativa, como o *Recreational Mathematics Colloquium* têm reunido, também, uma vasta gama de materiais com interesse neste domínio.

Em Portugal, tem sido de grande relevância o trabalho desenvolvido no âmbito da Associação Ludus, nomeadamente pela equipa de trabalho do professor Jorge Nuno Silva. Em 2016, foi publicado o livro *Matemagia*, que constitui um material bastante aliciante e completo sobre truques matemáticos diversos (Silva, Freitas, Silva, & Hirth, 2016). Também o projeto Circo Matemático, com núcleos em Lisboa e Aveiro, tem reunido e divulgado diversos truques, em eventos realizados em escolas de diversos pontos do país, no Museu de Ciência e História Natural, entre outros locais. Também têm sido dinamizadas atuações de rua, em que os animadores procuram captar a atenção de quem encontram na sua atividade quotidiana. Na Universidade de Aveiro foi apresentada, em 2016, a dissertação de mestrado de Luísa Marques (Marques, 2016), que conta a história deste projeto e compila muitos dos truques realizados nos eventos do Circo Matemático.

Até ao momento, existem, pelo menos, três outras dissertações de mestrado sobre esta temática, desenvolvidas e defendidas na Universidade de Aveiro. Em 2013, Justina Melo investigou sobre truques de magia matemática que se relacionam com conceitos probabilísticos (Melo, 2013). Em 2015, Ilda Bastos desenvolveu uma dissertação sobre truques matemáticos com números

e Maria Manuela Rodrigues debruçou-se sobre truques matemáticos com cartas (Bastos I. , 2015; Rodrigues, 2015).

Certamente muitos outros autores e trabalhos haverá, ainda, por explorar nesta área, mas torna-se evidente que é um domínio em expansão e com imensas potencialidades.

1.3. Orientações curriculares para o ensino da matemática no ensino básico

A atividade desenvolvida numa sala de aula de matemática é, nos dias que correm, enquadrada pelo documento “Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico – 1.º, 2.º e 3.º ciclos.” (M. E., 2013). Neste documento, é apontada como uma das finalidades do ensino da matemática a estruturação do pensamento, nomeadamente através da *“apreensão e hierarquização de conceitos matemáticos, o estudo sistemático das suas propriedades e a argumentação clara e precisa, própria desta disciplina (p. 4)”*. É sublinhada, também, neste documento, a importância de, no 3.º ciclo, o aluno saber identificar/designar conceitos, reconhecer argumentos, justificar, provar, demonstrar e estender raciocínios a casos mais gerais. De modo integrado, estes desempenhos devem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático, para o desenvolvimento da comunicação oral e escrita, para a resolução de problemas e para a construção de uma visão da matemática como um todo articulado e coerente.

Ao longo do 3.º ciclo estabelece-se a abordagem de cinco domínios temáticos principais: Números e Operações, Geometria e Medida, Funções, Sequências e Sucessões, Álgebra e Organização e Tratamento de Dados. Os conteúdos a abordar, por domínio e ano de escolaridade, encontram-se sintetizados no quadro que se segue:

Domínio / Ano de escolaridade	7.º ano	8.º ano	9.º ano
Números e Operações (NO)	Números racionais Potências de expoente natural e raízes	Dízima Potências de expoente inteiro	Números reais Inequações
Geometria e Medida (GM)	Figuras geométricas Áreas Semelhanças	Teorema de Pitágoras Vetores, translações e isometrias	Circunferência Lugares Geométricos Trigonometria
Funções, Sequências e Sucessões (FSS)	Função linear Sequências	Função afim	Função de proporcionalidade inversa Função quadrática
Álgebra (ALG)	Equações do 1.º grau	Monómios e polinómios Equações do 2.º grau (incompletas) Equações literais Sistemas de equações	Equações do 2.º grau
Organização e Tratamento de Dados (OTD)	Medidas de localização	Diagramas de extremos e quartis	Histogramas Probabilidades

Figura 1– Conteúdos matemáticos por domínio e ano de escolaridade

No corrente ano letivo, e acompanhando a entrada em vigor do Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho, que estabelece o currículo dos ensinos básico e secundário e os princípios orientadores da avaliação das aprendizagens, numa perspetiva de autonomia e flexibilização curricular, entra em vigor também o documento “Aprendizagens Essenciais” para o 7.º ano de escolaridade (M. E., 2018a). Pretende-se, em última análise, que os alunos adquiram os conhecimentos e desenvolvam capacidades e atitudes que contribuam para alcançar as competências previstas no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (M. E., 2018b).

1.4. Objetivo da investigação

O presente trabalho tem como principal objetivo a recolha, organização e sistematização de truques matemáticos que possam ser encarados como “magia matemática”, que um professor possa utilizar em sala de aula com os seus alunos, com:

- (i) o intuito de promover nos mesmos a aprendizagem de novos conteúdos curriculares ou de conteúdos previamente lecionados;
- (ii) uma finalidade meramente lúdica e motivacional, permitindo aos alunos contactar com conteúdos e conceitos interessantes que não fazem diretamente parte do currículo, mas podem ser brevemente abordados, no sentido de despertar a sua curiosidade sobre a matemática que existe para além da escola.

Cada truque será “desmontado”, no sentido de se perceber o conteúdo matemático que o sustenta e, sempre que se justifique, enquadrado do ponto de vista da sua eventual utilidade pedagógica.

1.5. Organização

Esta dissertação inclui, após o capítulo introdutório, um segundo capítulo onde faço a revisão dos principais conteúdos matemáticos necessários à compreensão dos truques que nela são incluídos, nomeadamente os que podem ser menos familiares aos leitores desta dissertação. Este capítulo e a compreensão dos conceitos matemáticos subjacentes enquadram o que se apresenta no quarto capítulo e permite-me, de forma informada, seleccionar o que considero, ou não, pertinente para promover aprendizagens em alunos do ensino básico, tendo em conta as orientações curriculares em vigor. Em seguida, no terceiro capítulo, descrevo a metodologia que utilizo para a elaboração deste trabalho, tendo em conta o objetivo formulado.

No quarto capítulo surge o material que dá título a esta dissertação: a coletânea de truques de magia matemática que me pareceram mais interessantes durante as pesquisas efetuadas. Para cada truque apresento uma descrição da forma como pode ser realizado com os alunos e uma reflexão sobre o seu funcionamento e a matemática que o suporta. Organizo estes truques tendo em conta seu interesse meramente lúdico ou lúdico-didático, promotor de aprendizagens curriculares.

Por fim, no quinto capítulo, estabeleço algumas considerações finais sobre a forma como o trabalho decorreu e as principais aprendizagens que realizei. Procuro ainda sugerir novos caminhos para futuras investigações no âmbito do tema que escolhi.

Capítulo 2 – A matemática por trás da magia

Existe magia sem matemática, mas também existe magia na matemática. Neste capítulo, procuro fazer uma revisão de alguns conceitos matemáticos cuja compreensão pode ser útil ao leitor, no sentido de dominar melhor os truques que serão incluídos neste trabalho e de potenciar uma utilização mais consciente e eficaz dos mesmos, em ambiente de sala de aula, ou até mesmo em ambientes meramente recreativos. A maior parte dos conceitos descritos neste capítulo estão para além dos atuais programas curriculares de matemática, em vigor nos ensinos básico e secundário.

2.1. Números

Boa parte dos truques que se podem realizar numa sala de aula têm por base questões numéricas. Nesta secção abordam-se primeiramente a escrita de números em bases diferentes, incluindo bases negativas, em seguida os números de Fibonacci, o teorema e a representação de Zeckendorf e a sucessão negafibonacci e, por fim, a aritmética modular e algumas considerações sobre a soma dos primeiros n números naturais.

2.1.1. Sistemas de numeração e mudanças de base

De acordo com Glaser (1971), um sistema de numeração é um sistema de representação de números. Existem diversos conjuntos de elementos que

podem servir de base para que essa representação possa ocorrer e de forma única.

a) Sistemas de numeração standard

Os sistemas de numeração são usualmente designados por *sistemas de numeração standard* se seguem a estrutura do sistema indo-árabe que habitualmente utilizamos, atribuindo o papel especial do número 10 a outro número inteiro maior do que 1.

Assim, o autor indica que um *sistema de numeração standard* é caracterizado por ter um determinado número, digamos β , de símbolos básicos, designados por dígitos. Ao número β dá-se o nome de base do sistema de numeração. Esses dígitos podem corresponder a algarismos ou a outros símbolos, quando a base β é um número inteiro maior que nove. Por exemplo: se a base for 2 (base binária), os dígitos são 0 e 1; se a base for 3 (base ternária), os dígitos são 0, 1 e 2; se a base for 8 (base octal), os dígitos são 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7; na base 10 (base decimal), os dígitos são 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. No caso de uma base superior a 9, como a base hexadecimal (base 16), os dígitos são os dez algarismos, de 0 a 9, aos quais se acrescentam seis letras, de A a F.

Representando por a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 um conjunto de $n + 1$ dígitos e β um número inteiro maior do que 1, pode ser escrita, para cada número inteiro m , uma sequência que represente a sua forma expandida (ou forma polinomial):

$$m = a_n\beta^n + a_{n-1}\beta^{n-1} + \dots + a_0\beta^0$$

E logo pode escrever-se a representação de m na base β :

$$m = (a_n a_{n-1} \dots a_0)_{(\beta)}$$

Nesta representação, cada um dos dígitos a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 tem um valor posicional associado à potência de base β do qual é coeficiente. É conveniente que a base que está a ser utilizada seja indicada no final de cada sequência numérica, principalmente se se estiverem a utilizar representações de números em bases distintas.

O sistema de numeração habitualmente utilizado, de base 10, denomina-se por sistema de numeração decimal. Através deste sistema conseguimos representar qualquer número inteiro não negativo. Além disso, para representar números negativos recorremos ao sinal “menos”, antes de cada sequência numérica e para representar dízimas finitas e infinitas recorremos a potências de 10 de expoente negativo.

Por exemplo:

$$\begin{aligned} & -765123,489 = \\ & = -(7 \times 10^5 + 6 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + \\ & \quad + 8 \times 10^{-2} + 9 \times 10^{-3}) \end{aligned}$$

Na área da computação, por exemplo, o sistema de numeração binário é o mais utilizado desde o aparecimento dos primeiros computadores. Neste sistema de base 2, os dígitos 0 e 1 desempenham um papel de extrema importância porque podem representar os estados Ligado/Desligado. As bases octal e hexadecimal são, também, muito utilizadas neste domínio.

Para converter um número inteiro não negativo escrito na base decimal para uma certa base β , basta efetuar divisões inteiras sucessivas desse número e de cada um dos quocientes por β até que o último quociente seja zero e anotar os restos ordenados do fim para o princípio.

Por exemplo, para converter o número 29 em base decimal para uma base binária:

Divisão	Quociente (q)	Resto (r)	$D = 2 \times q + r$
$29 \div 2$	14	1 (5.º algarismo)	$29 = 2 \times 14 + 1$
$14 \div 2$	7	0 (4.º algarismo)	$14 = 2 \times 7 + 0$
$7 \div 2$	3	1 (3.º algarismo)	$7 = 2 \times 3 + 1$
$3 \div 2$	1	1 (2.º algarismo)	$3 = 2 \times 1 + 1$
$1 \div 2$	0	1 (1.º algarismo)	$1 = 2 \times 0 + 1$

$$29 = (11101)_{(2)}$$

porque

$$29 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 16 + 8 + 4 + 1$$

Figura 2 – Representação do número 29 em base binária

Para converter um número escrito na base binária em base decimal basta escrever a forma expandida do número correspondente e calcular o valor da expressão numérica.

b) Sistemas de numeração não standard – o caso da base negabinária

Outros sistemas de numeração, ditos *sistemas de numeração não standard*, podem ter como bases números inteiros negativos, números complexos ou até mesmo números fracionários.

Os sistemas de numeração de base negativa têm como base um número inteiro negativo γ e permitem representar qualquer número inteiro, sem usar o sinal “menos” na sequência de dígitos. Para isso, basta efetuar divisões inteiras sucessivas desse número e de cada um dos quocientes por γ , até que o último quociente seja nulo e anotar os restos ordenados do fim para o princípio.

Qualquer divisão inteira verifica a igualdade fundamental: $D = d \times q + r$, sendo D , d , q e r números inteiros, com $0 \leq r < |d|$ e $d \neq 0$. Quando o dividendo e o divisor são números inteiros positivos, a divisão é simples e rotineira. Em seguida, mostra-se como se pode proceder quando pelo menos um destes dois números é negativo:

- divisão inteira de um número inteiro negativo por um inteiro positivo: por exemplo, se pretendermos dividir -20 por 5 , o quociente será -4 e o resto 0 , uma vez que $-20 = 5 \times (-4) + 0$; de igual modo, em $-8 \div 5$ o quociente é -2 e o resto 2 , uma vez que $-8 = 5 \times (-2) + 2$. Os restos da divisão inteira por 5 podem ser $0, 1, 2, 3$ ou 4 ;
- divisão inteira de um número inteiro positivo por um inteiro negativo: por exemplo, $12 \div (-4)$ tem quociente -3 e resto 0 porque $12 = (-4) \times (-3) + 0$; a divisão de 15 por (-4) tem quociente -3 e resto 3 porque $15 = (-4) \times (-3) + 3$. Os restos da divisão inteira por -4 podem ser $0, 1, 2$ ou 3 ;
- divisão inteira de um número inteiro negativo por outro inteiro negativo: por exemplo $-3 \div (-3)$ tem quociente 1 e resto 0 porque $-3 = (-3) \times 1 + 0$; do mesmo modo, $-1 \div (-3)$ tem quociente 1

e resto 2 porque $-1 = (-3) \times 1 + 2$. Os restos da divisão inteira por -3 podem ser 0, 1 ou 2.

Em qualquer dos casos, os restos são sempre números inteiros não negativos e inferiores ao valor absoluto do divisor.

Iremos agora descrever como se podem representar números inteiros no sistema de numeração de base -2 (sistema negabinário). Por exemplo, podemos escrever o número 12 efetuando divisões sucessivas por -2 , com restos inteiros e não negativos, tal como se pode observar na figura seguinte:

Divisão	Quociente (q)	Resto (r)	$D = (-2) \times q + r$
$12 \div (-2)$	-6	0 (5.º algarismo)	$12 = (-2) \times (-6) + 0$
$-6 \div (-2)$	3	0 (4.º algarismo)	$-6 = (-2) \times 3 + 0$
$3 \div (-2)$	-1	1 (3.º algarismo)	$3 = (-2) \times (-1) + 1$
$-1 \div (-2)$	1	1 (2.º algarismo)	$-1 = (-2) \times 1 + 1$
$1 \div (-2)$	0	1 (1.º algarismo)	$1 = (-2) \times 0 + 1$

$$12 = (11100)_{(-2)}$$

porque

$$\begin{aligned} 12 &= 1 \times (-2)^4 + 1 \times (-2)^3 + 1 \times (-2)^2 + 0 \times (-2)^1 + 0 \times (-2)^0 = \\ &= (+16) + (-8) + (+4) \end{aligned}$$

Figura 3 – Representação do número 12 em base negabinária

Analogamente, podemos escrever um número inteiro negativo como -30 em base negabinária da seguinte forma:

Divisão	Quociente (q)	Resto (r)	$D = (-2) \times q + r$
$-30 \div (-2)$	15	0 (6.º algarismo)	$-30 = (-2) \times 15 + 0$
$15 \div (-2)$	-7	1 (5.º algarismo)	$15 = (-2) \times (-7) + 1$
$-7 \div (-2)$	4	1 (4.º algarismo)	$-7 = (-2) \times 4 + 1$
$4 \div (-2)$	-2	0 (3.º algarismo)	$4 = (-2) \times (-2) + 0$
$-2 \div (-2)$	$+1$	0 (2.º algarismo)	$-2 = (-2) \times 1 + 0$
$1 \div (-2)$	0	1 (1.º algarismo)	$1 = (-2) \times 0 + 1$

$$-30 = (100110)_{(-2)}$$

porque

$$\begin{aligned} -30 &= 1 \times (-2)^5 + 0 \times (-2)^4 + 0 \times (-2)^3 + 1 \times (-2)^2 + 1 \times (-2)^1 + 0 \times (-2)^0 = \\ &= (-32) + (+4) + (-2) \end{aligned}$$

Figura 4 – Representação do número -30 em base negabinária

Tal como sucede em todos os sistemas de numeração standard, o zero pode ser representado em base negabinária por um zero. Note-se que, em base negabinária, os números negativos têm um número par de dígitos enquanto os números positivos têm um número ímpar de dígitos (Gardner, 2014). Na figura seguinte, podemos observar a representação de números inteiros negativos entre -13 e 13 (em base decimal) nas bases binária e negabinária:

Base decimal	Base binária	Base negabinária
...
-13	-1101	110111
-12	-1100	110100
-11	-1011	110101
-10	-1010	1010
-9	-1001	1011
-8	-1000	1000
-7	-111	1001
-6	-110	1110
-5	-101	1111
-4	-100	1100
-3	-11	1101
-2	-10	10
-1	-1	11
0	0	0
1	1	1
2	10	110
3	11	111
4	100	100

5	101	101
6	110	11010
7	111	11011
8	1000	11000
9	1001	11001
10	1010	11110
11	1011	11111
12	1100	11100
13	1101	11101
...

Figura 5 – Representação de números inteiros em base binária e negabinária

A conversão noutros sistemas de numeração de base negativa, como a base negaternária (base -3) ou a base negadecimal (base -10), funciona de forma idêntica à conversão em base negabinária.

Em todos os sistemas de numeração mencionados até aqui neste capítulo, o valor posicional de cada dígito está associado a potências consecutivas de uma certa base γ , que constituem os termos de uma progressão geométrica, como acontece na base negabinária: $\gamma^0; \gamma^1; \gamma^2; \gamma^3; \gamma^4; \dots$

No entanto, existem outros sistemas de numeração em que os valores correspondentes à posição de cada dígito não são um múltiplo do valor correspondente ao dígito à sua direita. É o que sucede quando tomamos, por exemplo, os números de Fibonacci como base do sistema de numeração. Esta sequência numérica e a sua possível utilização como suporte para a escrita de números inteiros constituem o principal tema abordado na próxima secção.

2.1.2. Números de Fibonacci

Os números de Fibonacci constituem uma das sucessões mais conhecidas na área de Teoria dos Números. Historicamente atribuída ao matemático italiano Leonardo de Pisa, filho de Bonacci ou Fibonacci (1170 - 1250), esta sucessão surge frequentemente associada ao seguinte problema:

“Um homem colocou um casal de coelhos (recém-nascidos) num local cercado por todos os lados por uma parede. Quantos casais de coelhos podem ser gerados a partir desse casal ao fim de um ano, sabendo que, por mês, cada casal gera um novo casal, que se torna produtivo no segundo mês de vida?” (Carlos, Neto, & Silva, 2007, p. 23)

Este conhecido problema, incluído no livro *Liber Abbaci*, em 1202, tem uma resolução bastante simples, que pode ser compreendida com o auxílio do esquema seguinte:

[illegible]

Legenda: (CC) – Casal de coelhos adultos que procriam neste mês;
CC – Casal de coelhos adultos que ainda não procriam neste mês;
cc – Casal de coelhos bebê.

Figura 6 – Problema dos Coelhos e Sucessão de Fibonacci

Como é possível verificar, no 1.º mês há apenas um casal de coelhos ainda bebês, que no segundo mês passa à fase adulta, mas ainda não procria e que, no 3.º mês, terá a companhia do seu primeiro casal de filhos bebês. No 4.º mês, existem três casais de coelhos: o primeiro casal e o casal de coelhos nascido no 3.º mês, ambos em fase adulta, e mais um casal de coelhos bebês, filhos

do 1.º casal. No 5.º mês há cinco casais de coelhos: os três que já existiam no mês anterior, todos em fase adulta, e dois novos casais de coelhos bebés, uma vez que só os casais com 2 meses ou mais procriam. E o processo continua da mesma forma a partir daí, dando origem à sucessão: $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21, F_9 = 34, F_{10} = 55, \dots$

Esta sucessão pode ser definida, por recorrência, da seguinte forma:

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$$

O termo geral da sucessão de Fibonacci, definida desta forma, pode ser dado por¹:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Os números de Fibonacci surgem em inúmeros contextos na vida real, como, por exemplo, na natureza e na pintura, como se pode observar em Marques (2016).

2.1.3. Teorema de Zeckendorf e Representação de Zeckendorf

O Teorema de Zeckendorf estabelece que “*todo o número inteiro positivo n pode ser escrito, **de forma única**, como soma de números de Fibonacci **distintos e não consecutivos***”.

Denomina-se por representação de Zeckendorf de um número inteiro positivo qualquer n à sequência de Números de Fibonacci distintos e não consecutivos que, quando adicionados, perfazem esse número.

¹ A demonstração subjacente a este resultado pode ser encontrada, por exemplo, em Bastos (2015).

Brown Jr. (1964) é um dos matemáticos que apresenta demonstrações para este teorema, considerando a sucessão $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_2 = 2 \\ U_{n+1} = U_n + U_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$ e argumentando que $U_n = F_{n+1}$, para $n \geq 1$. O autor indica que todo o número inteiro positivo n tem uma e só uma representação na forma

$$n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i U_i$$

onde cada α_i é um número binário (0 ou 1) e $\alpha_i \alpha_{i+1} = 0$, para $i \geq 1$, o que garante que não há números de Fibonacci consecutivos na soma porque se o produto dos índices consecutivos é nulo, conclui-se que ou $\alpha_i = 0$ ou $\alpha_{i+1} = 0$.

A demonstração do Teorema que aqui é apresentada inclui a prova quanto à existência e à unicidade da representação de Zeckendorf para qualquer número inteiro positivo n . A prova é efetuada por indução completa.

Hipótese de indução:

O número inteiro n satisfaz $0 \leq n < U_j$ se e só se $n = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i U_i$,
com $\alpha_i \alpha_{i+1} = 0$ para $i \geq 1$.

Esta afirmação é facilmente verificada para $j = 1$ e $j = 2$:

- no primeiro caso, sendo $j = 1$, só $n = 0$ satisfaz $0 \leq n < U_1$, uma vez que $U_1 = 1$; por outro lado, o somatório é vazio, para i de 1 até $1 - 1 = 0$, pelo que, por convenção, é nulo;
- no segundo caso, $0 \leq n < U_2$ se e só se $n = 0$ ou $n = 1$, uma vez que $U_2 = 2$. Estes são, também, os únicos valores possíveis para $n = \sum_{i=1}^{2-1} \alpha_i U_i = \alpha_1$.

Assim, assumindo que a afirmação é válida para $j = 1, 2, \dots, k$ onde k é um número inteiro maior ou igual a 2, pretende mostrar-se que a afirmação é necessariamente válida para $j = k + 1$, ou seja, a tese de indução é a seguinte:

Tese de indução:

O número inteiro n satisfaz $0 \leq n < U_{k+1}$ se e só se $n = \sum_{i=1}^k \alpha_i U_i$,
com $\alpha_i \alpha_{i+1} = 0$, para $i \geq 1$.

Verificar-se-á, em primeiro lugar, a condição suficiente. Repare-se que, se $0 \leq n < U_k$, por hipótese de indução, $n = \sum_1^{k-1} \alpha_i U_i = \sum_1^k \alpha_i U_i$, com $\alpha_k = 0$, sendo $\alpha_i \alpha_{i+1} = 0$ para $i \geq 1$. Portanto, basta verificar o caso em que $U_k \leq n < U_{k+1}$. Subtraindo U_k , mantêm-se os sentidos das desigualdades:

$$\begin{aligned} U_k - U_k &\leq n - U_k < U_{k+1} - U_k \\ 0 &\leq n - U_k < U_{k-1} \text{ (pela definição de recorrência)} \end{aligned}$$

Novamente pela hipótese de indução, sendo $k \geq 2$, existem coeficientes binários β_i tais que $n - U_k = \sum_1^{k-2} \beta_i U_i$, com $\beta_i \beta_{i+1} = 0$, para $i \geq 1$. Logo $n = \sum_1^{k-2} \beta_i U_i + U_k$.

Assim, os coeficientes da representação de Zeckendorf do número n podem ser $\alpha_i = \beta_i$, para $1 \leq i \leq k-2$, $\alpha_{k-1} = 0$ e $\alpha_k = 1$, ou seja, os coeficientes pretendidos existem realmente.

Para verificar a condição necessária, considere-se $n = \sum_1^k \alpha_i U_i$. Se $\alpha_k = 0$, então $n = \sum_1^{k-1} \alpha_i U_i$ e, por hipótese de indução, $0 \leq n < U_k \leq U_{k+1}$. Se, por outro lado, $\alpha_k = 1$, sendo $0 = \alpha_{k-1} \alpha_k = \alpha_{k-1}$, deduz-se que $n = \sum_1^k \alpha_i U_i = \sum_1^{k-2} \alpha_i U_i + U_k$. Assim, subtraindo e depois voltando a adicionar U_k , tem-se que:

$$\begin{aligned} n - U_k &= \sum_1^{k-2} \alpha_i U_i \\ 0 &\leq n - U_k < U_{k-1} \text{ (pela hipótese de indução)} \\ 0 &\leq U_k \leq n < U_k + U_{k-1} = U_{k+1} \text{ (pela definição de recorrência)} \end{aligned}$$

A prova relativa à unicidade da representação de Zeckendorf é feita por redução ao absurdo. Supondo que existe um inteiro positivo n que possui duas representações de Zeckendorf distintas:

$$n = \sum_1^{\infty} \alpha_i U_i = \sum_1^{\infty} \beta_i U_i$$

com $\alpha_i \alpha_{i+1} = \beta_i \beta_{i+1} = 0$, para $i \geq 1$, seja então k o maior número inteiro i tal que $\alpha_i \neq \beta_i$ e, sem perda de generalidade, sejam $\alpha_k = 1$ e $\beta_k = 0$. Como $\sum_1^k \alpha_i U_i = \sum_1^{k-1} \alpha_i U_i + U_k \geq U_k$ e $0 \leq \sum_1^{k-1} \beta_i U_i < U_k$, que foi demonstrado por indução, temos:

$$U_k \leq \sum_1^k \alpha_i U_i = \sum_1^{k-1} \beta_i U_i < U_k$$

o que é um absurdo. Logo os coeficientes α_i e β_i são necessariamente iguais.

Assim, pode concluir-se que existe uma representação de Zeckendorf para cada número inteiro positivo e essa representação é única.

Para construir a representação de Zeckendorf de um número inteiro positivo qualquer n , deve escolher-se o maior número de Fibonacci inferior ou igual a n , F_{n_1} , e subtrai-lo a n . Em seguida, deve escolher-se o maior número de Fibonacci inferior ou igual a $n - F_{n_1}$, F_{n_2} , subtrair ambos os números e assim sucessivamente, até que se obtenha o número zero. Quando isso acontece, obtém-se a representação de Zeckendorf na forma $n = F_{n_1} + F_{n_2} + \dots + F_{n_k}$, em que n_1, \dots, n_k são os índices dos números de Fibonacci que integram a soma, sendo, portanto, k números inteiros em ordem decrescente,

Tendo por base o Teorema de Zeckendorf, é possível concluir que a sucessão de Fibonacci pode ser usada como base para a escrita de qualquer número inteiro positivo, excluindo o 1.º número de Fibonacci e ordenando os restantes termos da sucessão da direita para a esquerda.

Por exemplo: o número 15 pode ser escrito, na base Fibonacci, deste modo:

$n = 15$							
$F_{n_1} = 13$							
$n - F_{n_1} = 15 - 13 = 2$							
$F_{n_2} = 2$							
$n - F_{n_1} - F_{n_2} = 0$							
Números de Fibonacci de índice maior que 1	(...)	F_7 13	F_6 8	F_5 5	F_4 3	F_3 2	F_2 1
Representação na base Fibonacci		1	0	0	0	1	0

Figura 7 – Representação do número 15 na base Fibonacci

Portanto, $15 = 100010_{(Fib)}$, ou seja, 15 pode ser representado por 100010 em base Fibonacci, uma vez que $15 = F_7 + F_3 = 13 + 2$.

A representação de um número inteiro positivo na base Fibonacci é uma sequência de zeros e uns de comprimento variável onde não há dois uns em posições consecutivas.

2.1.4. Sucessão negafibonacci – uma sucessão de Fibonacci generalizada

A sucessão de Fibonacci anteriormente apresentada pode ser estendida de forma a integrar índices negativos, através da seguinte relação de recorrência

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_{n-2} = F_n - F_{n-1}, \quad n \leq 2 \end{cases}, \text{ obtendo-se a sucessão negafibonacci, ou seja, uma}$$

sucessão de Fibonacci generalizada.

Assim:

- se $n = 2$, $F_{2-2} = F_0 = F_2 - F_1 = 1 - 1 = 0$;
- se $n = 1$, $F_{1-2} = F_{-1} = F_1 - F_0 = 1 - 0 = 1$;
- se $n = 0$, $F_{0-2} = F_{-2} = F_0 - F_{-1} = 0 - 1 = -1$;
- se $n = -1$, $F_{-1-2} = F_{-3} = F_{-1} - F_{-2} = 1 - (-1) = 2$;
- se $n = -2$, $F_{-2-2} = F_{-4} = F_{-2} - F_{-3} = -1 - 2 = -3$;
- *etc.*;

obtendo-se:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \dots & F_{-8} & F_{-7} & F_{-6} & F_{-5} & F_{-4} & F_{-3} & F_{-2} & F_{-1} & F_0 & F_1 & F_2 \\ \dots & -21 & 13 & -8 & 5 & -3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Figura 8 – Sucessão negafibonacci, para $n \leq 2$

Se a estes números acrescentarmos os restantes números de Fibonacci de índice positivo, podemos observar que, em toda a sucessão, cada termo se obtém como soma dos dois termos anteriores:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} \dots & F_{-8} & F_{-7} & F_{-6} & F_{-5} & F_{-4} & F_{-3} & F_{-2} & F_{-1} & F_0 & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 & \dots \\ \dots & -21 & 13 & -8 & 5 & -3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & \dots \end{array}$$

Figura 9 – Sucessão negafibonacci, para $n \in \mathbb{Z}$

Note-se que $F_{-1} = F_1$; $F_{-2} = -F_2$; $F_{-3} = F_3$; $F_{-4} = -F_4$; $F_{-5} = F_5$; $F_{-6} = -F_6$; $F_{-7} = F_7$; $F_{-8} = F_8$ e assim sucessivamente. De uma forma geral, podem definir-se todos os termos da sucessão negafibonacci do seguinte modo:

$$F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n, \text{ para } n \in \mathbb{N} \text{ e } F_0 = 0.$$

De acordo com Knuth (2008), todo o número inteiro pode ser representado como soma de números da sucessão negafibonacci distintos e não consecutivos, ou seja, o Teorema de Zeckendorf, já aqui demonstrado para qualquer $n \in \mathbb{Z}^+$, é extensível a qualquer número n pertencente a \mathbb{Z} .

Por exemplo:

- $10 = F_{-7} + F_{-4} = (+13) + (-3)$;
- $-26 = F_{-1} + F_{-3} + F_{-6} + F_{-8} = (+1) + (+2) + (-8) + (-21)$;
- O zero é representado por um zero em base negafibonacci.

Da mesma forma que se pode escrever qualquer número inteiro positivo em base Fibonacci, é agora possível escrever um número inteiro qualquer usando a base negafibonacci.

Uma representação “do tipo Zeckendorf” com números da sucessão negafibonacci deve obter-se considerando índices apenas negativos, tal como no exemplo seguinte:

	(...)	F_{-9}	F_{-8}	F_{-7}	F_{-6}	F_{-5}	F_{-4}	F_{-3}	F_{-2}	F_{-1}
Números negafibonacci de índices negativos		34	-21	13	-8	5	-3	2	-1	1
Representação na base negafibonacci		1	0	0	1	0	1	0	0	1

Figura 10 – Representação do número 24 na base negafibonacci

Ou seja, $24 = 100101001_{(-Fib)}$ porque $24 = F_{-9} + F_{-6} + F_{-4} + F_{-1} = 34 + (-8) + (-3) + 1$.

Note-se que a representação de um número inteiro qualquer na base negafibonacci é, também, uma sequência de zeros e uns de comprimento variável onde não existem dois uns em posições consecutivas. Resta-nos compreender de que forma podemos, de uma forma rápida, escrever qualquer número inteiro à custa de números negafibonacci. O método prático que podemos usar baseia-se no facto de podermos dividir os números inteiros positivos em intervalos do tipo $[F_{2k} + 1, F_{2k+2}]$, delimitados à custa de números de Fibonacci de índice par,

e os números inteiros negativos em intervalos do tipo $[-F_{2k+1} + 1; -F_{2k-1}]$, delimitados à custa dos simétricos dos números de Fibonacci de índice ímpar:

- se o número n for positivo: procurar o intervalo do tipo $[F_{2k} + 1, F_{2k+2}]$ que contém n e calcular $n - F_{2k+1}$;
- se o número n for negativo: procurar o intervalo do tipo $[-F_{2k+1} + 1, -F_{2k-1}]$ que contém n ; e calcular $n - (-F_{2k})$;
- após cada subtração, repete-se a localização do número obtido num intervalo de um dos dois tipos descritos nos dois pontos anteriores de forma a que o processo continue iterativamente;
- se o número n (ou o novo número obtido após uma subtração) for zero, o processo termina.

...
-34	$-F_9$		
-33			$[-F_9 + 1, -F_7]$
-32			
-31			
-30			
-29			
-28			
-27			
-26			
-25			
-24			
-23			
-22			
-21	$-F_8$		
-20			
-19			
-18			
-17			
-16			
-15			
-14			
-13	$-F_7$		
-12			$[-F_7 + 1, -F_5]$
-11			
-10			
-9			
-8	$-F_6$		
-7			
-6			
-5	$-F_5$		
-4			$[-F_5 + 1, -F_3]$
-3	$-F_4$		
-2	$-F_3$		
-1	$-F_1 = -F_2$		$[-F_3 + 1, -F_1]$
0	F_0		

0	F_0		
1	$F_1 = F_2$		$[F_0 + 1, F_2]$
2	F_3		$[F_2 + 1, F_4]$
3	F_4		
4			$[F_4 + 1, F_6]$
5	F_5		
6			
7			
8	F_6		
9			$[F_6 + 1, F_8]$
10			
11			
12			
13	F_7		
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21	F_8		
...

Figura 11 – Divisão dos números inteiros em intervalos

Por exemplo, como escrever 27 em base negafibonacci?

- $27 \in [F_8 + 1, F_{10}]$, ou seja, $27 \in [21 + 1, 55]$, intervalo que contém $F_9 = F_{-9} = 34$;
- $27 - F_9 = 27 - 34 = -7$;
- $-7 \in [-F_7 + 1, -F_5]$, ou seja, $-7 \in [-13 + 1, -5]$, intervalo que contém $-F_6 = F_{-6} = -8$;
- $-7 - (-8) = +1$;
- $1 \in [F_0 + 1, F_2]$, ou seja, $1 \in [0 + 1, 1]$, intervalo que contém $F_1 = F_{-1} = 1$;
- $1 - F_1 = 1 - 1 = 0$.

Uma vez obtido o valor zero, o processo termina, pelo que:

$$27 = F_{-9} + F_{-6} + F_{-1} = 34 + (-8) + 1$$

	F_{-9}	F_{-8}	F_{-7}	F_{-6}	F_{-5}	F_{-4}	F_{-3}	F_{-2}	F_{-1}
Números negafibonacci de índices negativos	34	-21	13	-8	5	-3	2	-1	1
Representação na base negafibonacci	1	0	0	1	0	0	0	0	1

Figura 12 – Representação de 27 na base negafibonacci

Ou seja, $27 = 100100001_{(-Fib)}$.

Esta conversão pode ser feita muito rápida e comodamente recorrendo a um computador, por exemplo em:

<http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibrep.html#CALCnegind>

A tabela da figura que se segue contém os números inteiros entre -13 e 13 (base decimal) e a sua conversão em base negafibonacci.

Base decimal	Base negafibonacci
...	...
-13	10010101
-12	101010
-11	101000
-10	101001
-9	100010
-8	100000
-7	100001
-6	100100
-5	100101
-4	1010
-3	1000
-2	1001
-1	10
0	0
1	1
2	100
3	101
4	10010
5	10000
6	10001
7	10100
8	10101
9	1001010
10	1001000
11	1001001
12	1000010
13	1000000
...	...

Figura 13 – Representação de números inteiros na base negafibonacci

2.1.5. Aritmética modular

Por trás de diversos truques de magia matemática está a aritmética modular (ou teoria das congruências). De acordo com Gardner (2002), foi Karl Friedrich Gauss que unificou este domínio da teoria de números, conferindo-lhe uma notação própria, que lhe permitiu continuar a evoluir. No seu livro, *Disquisitiones Arithmeticae*, Gauss definiu que:

Dois números a e b são congruentes relativamente a um módulo m (inteiro e não nulo), se a sua diferença for divisível por m .

Pode, de forma equivalente, dizer-se que dois números a e b são congruentes módulo m se dão origem ao mesmo resto, quando são divididos por m (Silva, Freitas, Silva, & Hirth, 2016).

A notação usada por Gauss para simbolizar a congruência, ainda hoje é usada: se a e b são congruentes módulo m , escreve-se $a \equiv b \pmod{m}$.

Sempre que $a \equiv b \pmod{m}$ existe um $q \in \mathbb{Z}$ tal que $a = b + qm$.

Por exemplo, 37 e 51 são congruentes módulo 7, ou seja, $37 \equiv 51 \pmod{7}$ porque $51 - 37 = 14$ e 14 é divisível por 7. Este facto também pode ser compreendido, se observarmos que, ao efetuar a divisão inteira de 37 por 7 e de 51 por 7, se obtém resto 2. Podemos, ainda, escrever $51 = 37 + 2 \times 7$ e afirmar que $37 \equiv 2 \pmod{7}$ e $51 \equiv 2 \pmod{7}$

Em geral, os restos da divisão inteira de números inteiros por m podem ser 0, 1, ..., $m - 1$. A estes valores, dá-se o nome de resíduos.

Assim, numa congruência módulo 2, os números inteiros pares são congruentes com 0 e os números inteiros ímpares são congruentes com 1. Numa congruência módulo 7, os números inteiros podem ser congruentes com 0, 1, 2, 3, 4, 5, ou 6.

Gardner (2002), indica que, na maior parte das culturas, a medição do tempo é efetuada de forma modular: as horas do dia e os meses do ano funcionam usando a aritmética módulo 12; os dias da semana funcionam módulo 7, os séculos funcionam módulo 100. Arthur Benjamin (2015), usa a congruência módulo 7 no truque que permite determinar o dia da semana de um determinado dia do nosso calendário, como veremos adiante, no capítulo 4.

De acordo com Picado (2001) e Buescu (2003), em diversas situações da vida quotidiana, existe também a necessidade de transmitir a outra pessoa algum código ou dado numérico e há sempre a possibilidade de que ocorram erros. Estes erros podem consistir, por exemplo, em erros singulares (substituição involuntária de um algarismo a por b), erros de transposição de algarismos adjacentes (substituição involuntária de uma sequência de algarismos ab por ba), erros aleatórios, etc. Daí que estejam presentes, em diversos contextos, sistemas de deteção de erros que utilizam a aritmética modular, criando algarismos de controlo C , que permitem proceder à deteção de alguns desses tipos de erros.

Para determinar C , na maior parte destes sistemas, é usada uma equação do tipo:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n + C \equiv 0 \pmod{k}$$

É o que acontece, por exemplo, nos seguintes contextos:

- (i) no cartão do cidadão (congruências módulo 10 e módulo 11);

Os números de cartão do cidadão vêm seguidos de quatro caracteres. O primeiro deles é o algarismo de controlo do número de identificação civil e obtém-se através da igualdade acima, com $\{p_1, p_2, \dots, p_8\} \rightarrow \{9, 8, 7, \dots, 2\}$ e $k = 11$. Por exemplo, para o cartão do cidadão com o número 11491350, tem-se:

$$\begin{aligned} 9 \times 1 + 8 \times 1 + 7 \times 4 + 6 \times 9 + 5 \times 1 + 4 \times 3 + 3 \times 5 + 2 \times 0 + C &\equiv 0 \pmod{11} \\ \Leftrightarrow 131 + C &\equiv 0 \pmod{11} \end{aligned}$$

Como C é um algarismo (de 0 a 9) tem-se que $C = 1$.

Mais curioso é o caso do número 11491351 em que:

$$\begin{aligned} 9 \times 1 + 8 \times 1 + 7 \times 4 + 6 \times 9 + 5 \times 1 + 4 \times 3 + 3 \times 5 + 2 \times 1 + C &\equiv 0 \pmod{11} \\ \Leftrightarrow 133 + C &\equiv 0 \pmod{11} \end{aligned}$$

O valor de C deveria ser 10, mas convencionou-se que este caso seria representado (também) pelo algarismo 0, o que consistiu numa limitação deste sistema em particular.

Os caracteres alfanuméricos que se seguem, prendem-se com o número de cartões do cidadão já emitidos com aquele número de identificação civil. Numa primeira via, usa-se a combinação ZZ. Caso o cartão seja furtado, por exemplo, a sua segunda via terá as letras ZY, e assim sucessivamente.

Por fim, o último algarismo é o algarismo de controlo de todo o número de documento. Para efetuar a validação do cartão do cidadão, considera-se o número de documento completo e realizam-se as seguintes operações:

1. Efetuando uma contagem da direita para a esquerda do número do documento, duplicar o valor de cada 2.º elemento, sendo que as letras deverão ser substituídas por números, de acordo com os valores tabelados: Z = 35; Y = 34; X = 33; W = 32; e assim sucessivamente (A. M. A., 2009, pp. 4-5);
2. No caso de o resultado da duplicação ser igual ou superior a 10, subtrair 9 unidades ao seu valor;
3. Somar a totalidade dos valores obtidos;
4. Verificar se o valor obtido é congruente com 0 módulo 10.

No caso concreto do documento 114913510ZZ7, o Z converte-se² em 35, pelo que se calcula:

Número do documento	1	1	4	9	1	3	5	1	0	Z	Z	7
Conversão dos caracteres alfanuméricos	1	1	4	9	1	3	5	1	0	35	35	7

² Para mais informação consultar a tabela constante do documento da autoria da Agência para a modernização administrativa (A. M. A., 2009, pp. 4-5).

Duplicação alternada	<u>2</u>	1	<u>8</u>	9	<u>2</u>	3	<u>10</u>	1	<u>0</u>	35	<u>70</u>	7
Subtração de 9 unidades aos números cuja duplicação resultou em produtos maiores ou iguais a 10	2	1	8	9	2	3	<u>1</u>	1	0	35	<u>61</u>	7

Figura 14 – Validação de número de documento (Cartão do cidadão)

Adicionando os números obtidos, o total será 130. Uma vez que este número é congruente com 0, módulo 10, o documento é válido.

(ii) Códigos de barras

Para determinar o algoritmo de controlo C , em códigos de barras, é usada a seguinte equação:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n + C \equiv 0 \pmod{10}$$

com $\{p_1, p_2, \dots, p_8\} \rightarrow \{1, 3, 1, 3, \dots, 3\}$.

(iii) Notas de Euro

Para determinar o algoritmo de controlo C , em notas de euro, é usada a equação:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n + C \equiv 0 \pmod{9}$$

com $\{p_1, p_2, \dots, p_{10}\} \rightarrow \{1, 1, 1, 1, \dots, 1\}$.

(iv) Número de identificação bancária (NIB)

Para determinar o algarismo de controlo C , no NIB, é usada a equação:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n + C \equiv 0 \pmod{97}$$

com $\{p_1, p_2, \dots, p_{19}\} \rightarrow \{73, 17, 89, 38, 62, 45, 53, 15, 50, 5, 49, 34, 81, 76, 27, 90, 9, 30, 3\}$.

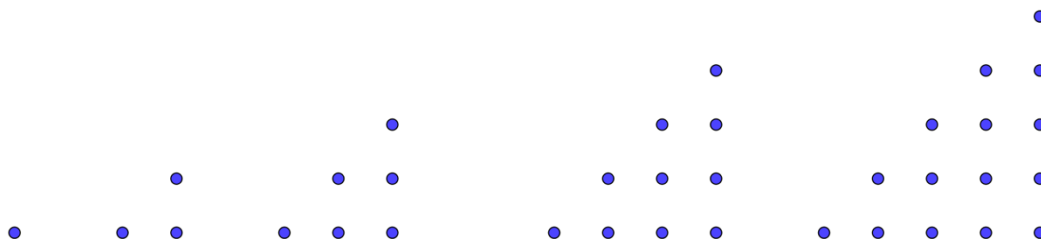
A paridade, pode ser, também, um sistema de deteção de erros, como se verá no capítulo 4, em “Onde está o erro?”.

2.1.6. Soma dos n primeiros números naturais

Um facto conhecido sobre a soma dos n primeiros números naturais é que esta pode ser calculada a partir da fórmula:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

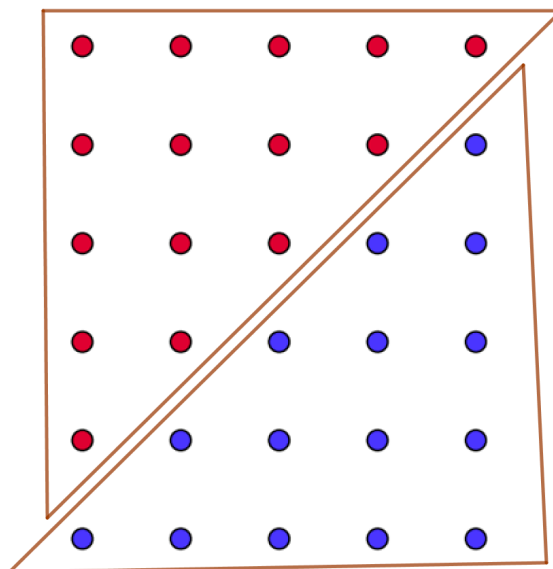
A justificação desta fórmula pode ser dada em termos meramente visuais, tendo em conta que é um termo geral da sucessão dos números triangulares T_n :



Sucessão dos números triangulares	
Ordem	Termo
1	$T_1 = 1$
2	$T_2 = 1 + 2 = 3$
3	$T_3 = 1 + 2 + 3 = 6$
4	$T_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$
5	$T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
...	
n	$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Figura 15 – Sucessão dos números triangulares

Para que se compreenda o termo geral desta sucessão basta observar as figuras correspondentes aos seus termos e compreender que, se cada uma delas for duplicada, forma um retângulo, como se mostra, a título de exemplo, para a 5.^a figura triangular.

Figura 16 – Duplicação da 5.^a figura dos números triangulares

Para o n -ésimo termo, esse retângulo tem n colunas e $n + 1$ linhas, ou seja, tem $n(n + 1)$ pontos. Assim, o triângulo correspondente ao n -ésimo termo

desta sucessão tem $\frac{n(n+1)}{2}$ pontos, sendo este um possível termo geral da sucessão.

Este facto pode facilmente ser demonstrado por indução.

Hipótese de indução:

Supõe-se que é válida a igualdade:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Tese de indução:

Pretende provar-se que é válida a igualdade:

$$1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Verifica-se facilmente que, se $n = 1$, a proposição é válida, uma vez que:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

Por outro lado, $1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$, pela hipótese de indução, pelo que:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Assim, fica demonstrado que:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Duas observações que podem ser úteis para a compreensão do truque “Tenho um palpite!”, no capítulo 4, e que envolvem a igualdade demonstrada têm a ver com os casos particulares em que n é ímpar e em que n é par:

- i. Se n é ímpar, a soma $1 + 2 + \cdots + n$ é sempre um múltiplo de n , ou seja, é congruente com 0 módulo n .
- ii. Se n é par, a soma $1 + 2 + \cdots + n$ é sempre congruente com $\frac{n}{2}$, módulo n .

Estas duas propriedades demonstram-se facilmente:

- i. Suponhamos que n é um número natural ímpar. Sabe-se que:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = n \left(\frac{n+1}{2} \right)$$

Como n é um número ímpar, $n+1$ é um número par. Logo, $\frac{n+1}{2}$ é um número inteiro e, portanto, a soma $1 + 2 + \cdots + n$ é sempre um múltiplo de n , ou seja, é congruente com 0 módulo n .

- ii. Suponhamos, agora, que n é um número natural par.

$$\text{Sabe-se que: } 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = n \left(\frac{n}{2} \right) + \frac{n}{2}.$$

Portanto, quando se divide $1 + 2 + \cdots + n$ por n obtém-se quociente $\frac{n}{2}$ e resto $\frac{n}{2}$ (que são números inteiros, uma vez que n é um número par), ou seja, a soma $1 + 2 + \cdots + n$ é sempre congruente com $\frac{n}{2}$, módulo n .

2.2. Geometria

Diversos truques são sustentados por factos geométricos. Nesta secção abordam-se alguns paradoxos geométricos, o Teorema de Pick para o cálculo de áreas e a noção de simetria de uma figura.

2.2.1. Paradoxos geométricos

Martin Gardner (1956) é um dos autores que aborda este tema, reunindo alguns paradoxos geométricos da autoria de outros mágicos e matemáticos e descrevendo outros inventados por si. A maior parte destes paradoxos tem subjacente um princípio que lhes é comum, que se denomina princípio da distribuição escondida.

a) Princípio da distribuição escondida

Este princípio resulta, essencialmente, do corte de determinadas figuras em partes mais pequenas, da sua reorganização e da obtenção de novas figuras em que, aparentemente, ocorre um desaparecimento misterioso, que parece não deixar rasto. Ao efetuar esta reorganização ocorre uma redistribuição de pequenas porções de segmentos de reta, figuras bidimensionais ou figuras tridimensionais que, na nova organização, formam novos segmentos de reta ou novas figuras bi/tridimensionais, muito semelhantes aos primeiros, dando a ideia de que ocorreu o desaparecimento de um desses elementos iniciais.

Para exemplificar este princípio, o autor menciona diversos paradoxos como o que se segue, em que, num retângulo inicial, são representados 10 segmentos de reta congruentes. Em seguida, o retângulo é dividido em dois triângulos e, após um ligeiro deslocamento de ambos, as diversas porções dos segmentos de reta iniciais que se obtêm, são reagrupadas formando novos segmentos de reta, aparentemente iguais, mas com um comprimento um pouco maior. Cria-se, assim, a ilusão de que os 10 segmentos de reta são, após a deslocação, apenas 9 (iguais aos iniciais), pelo que parece ocorrer um desaparecimento.

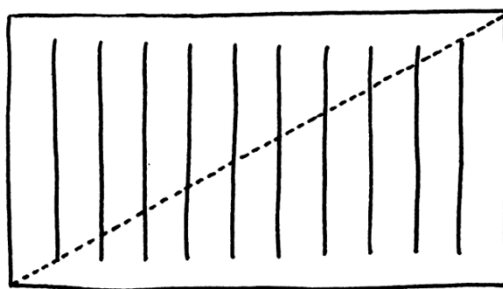


Figura 17 – A linha desaparecida – Configuração inicial (Gardner, 1956, p. 115)

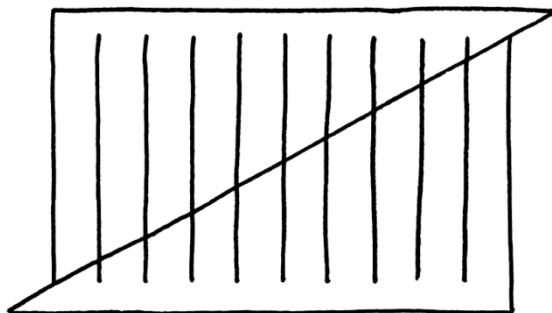


Figura 18 – A linha desaparecida – Configuração final (Gardner, 1956, p. 116)

Um outro exemplo, mas que envolve figuras bidimensionais, ilustra a possibilidade de fazer desaparecer uma face, após o deslocamento das peças resultantes do corte pela linha a tracejado:

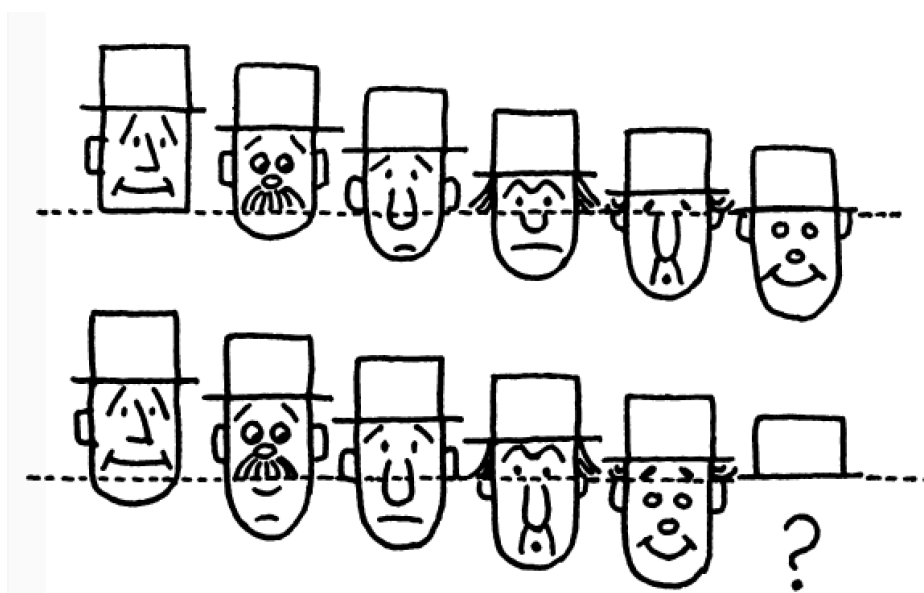


Figura 19 – A cara desaparecida (Gardner, 1956, p. 120)

b) Paradoxos de Curry

Outro tipo de paradoxo envolve o princípio da distribuição escondida e o consequente desaparecimento de uma certa porção de área. O paradoxo de Curry, originalmente inventado por um mágico amador de nome Paul Curry, consiste no corte e na reorganização de partes de uma figura, formando uma figura idêntica à original, mas com um “buraco” no seu interior (Gardner, 1956). As figuras que se seguem, ilustram o que sucede neste paradoxo:

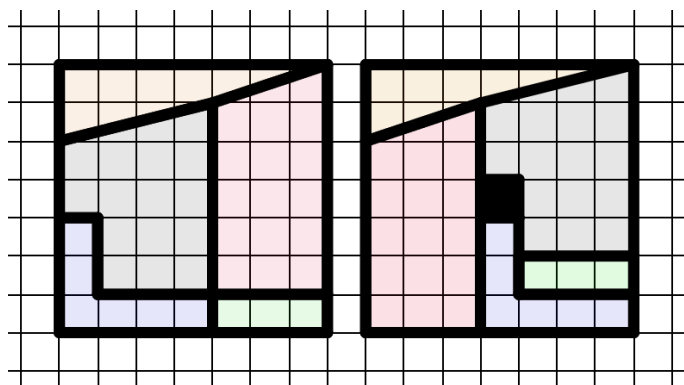


Figura 20 – Quadrados de Curry

Nas figuras anteriores existem, aparentemente, dois triângulos, que na realidade são quadriláteros, uma vez que um dos “segmentos de reta” é, na realidade, uma linha poligonal composta por dois segmentos de reta que têm declives distintos: $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$. Sobrepondo as duas figuras, torna-se mais evidente esta pequena diferença em ambos os quadriláteros:

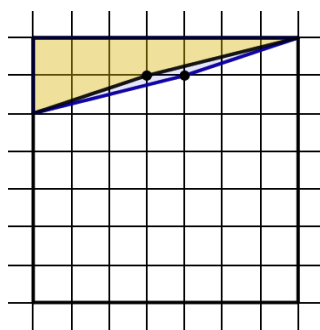


Figura 21 – Paradoxos de Curry - Quadriláteros sobrepostos

A área do quadrilátero maior é de 7,5 unidades de área, enquanto a área do quadrilátero correspondente na outra figura é de 6,5 unidades de área, pelo que a diferença entre ambas é de uma unidade de área, que coincide com a área do “buraco” que se gerou.

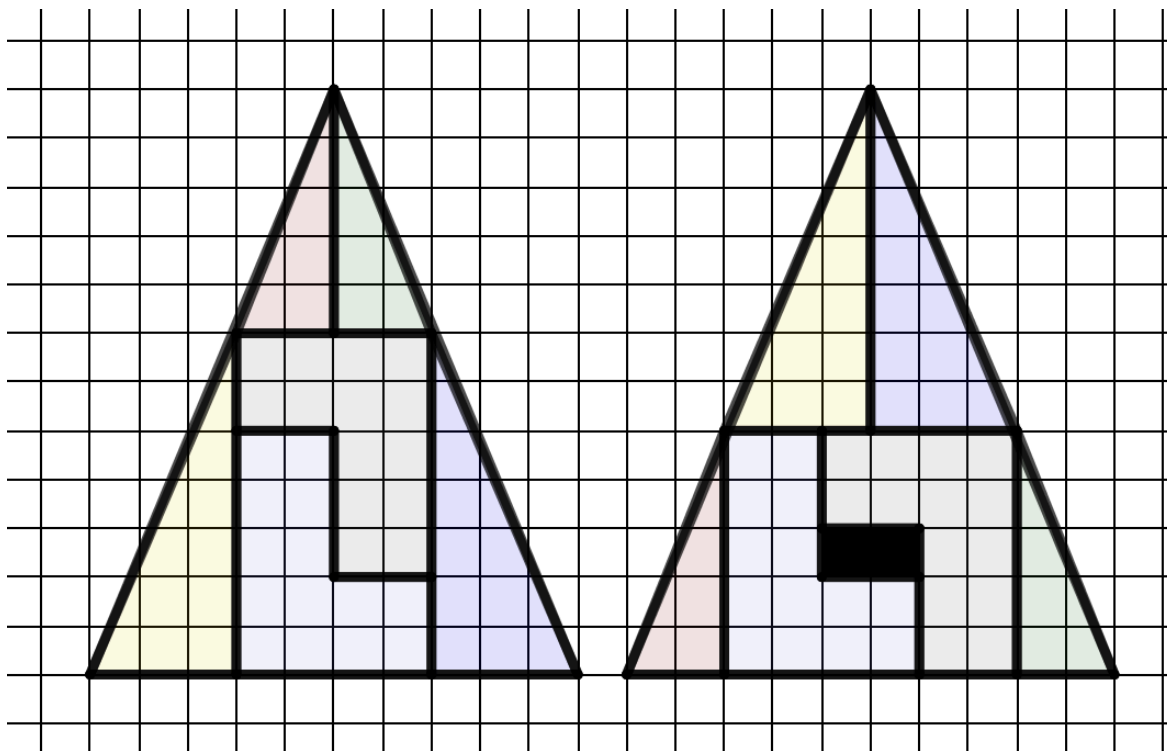


Figura 22 – “Triângulos” de Curry

Na figura anterior, a ilusão volta a ser criada a partir de segmentos de reta diagonais com declives ligeiramente diferentes: $\frac{7}{3}$ e $\frac{5}{2}$, do lado esquerdo (ou $-\frac{7}{3}$ e $-\frac{5}{2}$, do lado direito). Na realidade, o polígono exterior, que parece ser um triângulo, em cada uma das figuras, é um pentágono. Caso sobrepuséssemos as duas figuras, tornar-se-ia perceptível que os pentágonos não são congruentes. A área do pentágono maior é de 61 unidades de área e a do menor é de 59 unidades de área, pelo que a diferença entre ambas é de 2 unidades de área, isto é, a área do “buraco” que surge. Esta situação torna-se mais clara se se observar a figura seguinte:

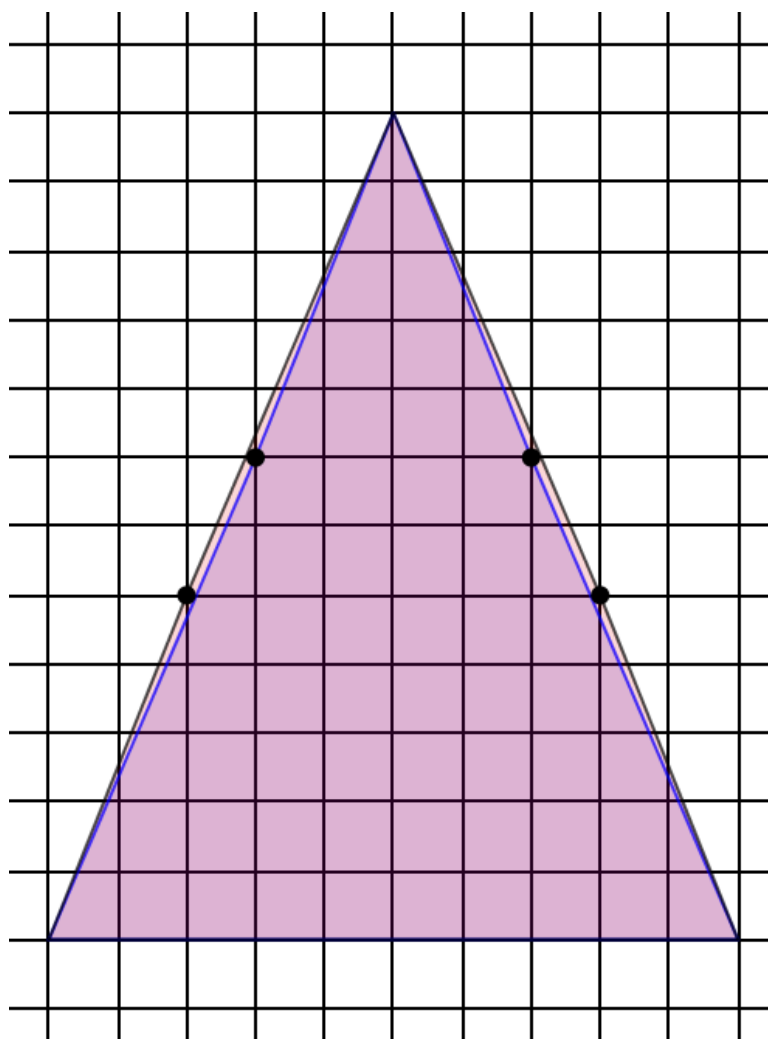


Figura 23 – Paradoxos de Curry – Pentágonos sobrepostos

2.2.2. Teorema de Pick

O Teorema de Pick, demonstrado pela primeira vez pelo matemático austríaco Georg Alexander Pick (1859 – 1942), é uma ferramenta que pode ser bastante útil em Geometria, no cálculo de áreas de polígonos (Fleron, Hotchkiss, Ecke, & von Renesse, 2013). No entanto, para que se compreenda a sua formulação e a sua demonstração, é necessário ter presentes alguns conceitos básicos.

Em Geometria plana, recorrendo a segmentos de reta, é possível construir diferentes tipos de linhas, nomeadamente linhas poligonais. Se as linhas poligonais são fechadas e simples (isto é, se cada dois segmentos de reta não se

intersectarem a não ser nos seus extremos), elas definem regiões do plano no seu interior, a que se dá o nome de polígonos simples.

Quando um polígono simples é construído sobre uma grelha de pontos equidistantes (como é o caso do geoplano), de tal forma que todos os vértices do polígono coincidem com pontos dessa grelha (espaçados entre si de 1 unidade de comprimento), diz-se que os vértices do polígono têm coordenadas inteiras. O Teorema de Pick permite calcular a área de um polígono deste tipo através da fórmula

$$A = i + \frac{f}{2} - 1$$

onde i é o número de pontos no interior do polígono; f é o número de pontos na fronteira do polígono (Varberg, 1985).

Para exemplificar como se pode usar este teorema para calcular a área de um polígono com vértices de coordenadas inteiras, podemos observar o polígono da figura que se segue, construído num geoplano, para o qual $i = 5$ e $f = 8$.

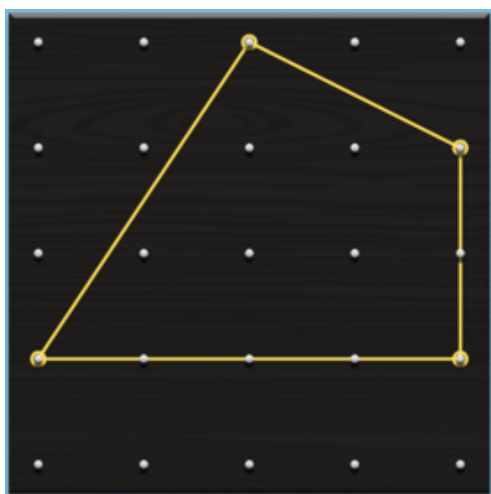


Figura 24 – Polígono simples cujos vértices têm coordenadas inteiras

O Teorema de Pick permite concluir que a área deste polígono é dada por

$$A = i + \frac{f}{2} - 1 = 5 + \frac{8}{2} - 1 = 5 + 4 - 1 = 8$$

ou seja, que o polígono tem 8 unidades de área.

Para demonstrar que o Teorema de Pick é válido, existem diversas possibilidades. A prova explicada em Raman e Öhman (2011) apoia-se em três lemas auxiliares³:

Lema 1: qualquer polígono de coordenadas inteiras pode ser dividido em triângulos elementares (triângulos cujos vértices são pontos da grelha e que não têm quaisquer outros pontos na fronteira nem quaisquer pontos no seu interior).

Note-se que os autores definem triângulo elementar como um triângulo do tipo do que se encontra na figura seguinte (por exemplo):

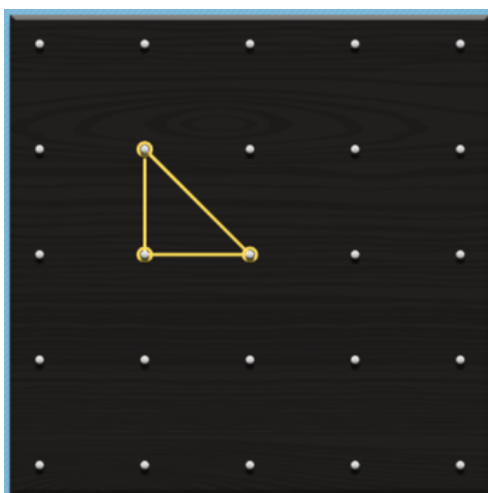


Figura 25 – Triângulo elementar

Para compreender que este Lema é válido, basta imaginar um polígono cujos vértices tenham coordenadas inteiras. Os vértices do polígono estão sobre uma linha poligonal fechada simples. Se o polígono for um triângulo elementar, não é necessário fazer nada. Se não for, basta unir dois vértices da fronteira a um que não esteja ainda ligado, de modo a obter um triângulo elementar e ir repetindo o processo.

³ As demonstrações integrais destes lemas podem ser encontradas, por exemplo, em Vavilov e Ustinov (2017).

Lema 2: a área de qualquer triângulo elementar é $\frac{1}{2}$.

Lema 3: Fórmula de Euler – Num grafo⁴ planar conexo,
 $v - a + fc = 2$, onde v é o número de vértices, a
 é o número de arestas e fc é o número de faces.

Note-se, também, que os autores identificam a possibilidade de interpretar um polígono, após a sua triangulação através de triângulos elementares, como um grafo planar conexo. No seu artigo, apresentam o seguinte exemplo de uma triangulação de um polígono:

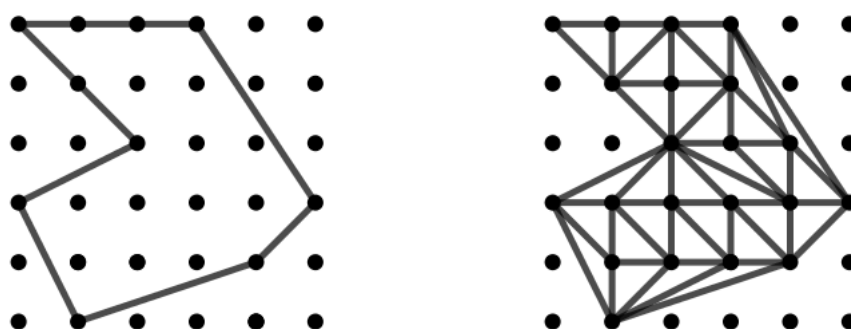


Figura 26 – Polígono e sua triangulação (grafo planar conexo)

Dado um polígono P , pelo Lema 1, é possível dividi-lo em triângulos elementares. Quando se interpreta o polígono após a triangulação como um grafo planar conexo, em que os vértices do grafo são os vértices da triangulação, as arestas do grafo são os lados dos diversos triângulos e as faces são as regiões do plano definidas pelo grafo, sendo uma delas ilimitada (a área exterior ao polígono) e as restantes $fc - 1$ os triângulos no interior do polígono.

Pelo Lema 2, cada triângulo tem área $\frac{1}{2}$ e logo, a área total do polígono é dada por $A = \frac{1}{2}(fc - 1)$ (i).

Pelo Lema 3, $v - a + fc = 2$. Mas os vértices podem estar no interior ou na fronteira do polígono, pelo que $v = i + f$. Logo, conjugando as duas fórmulas:

⁴ A definição de grafo e muitas das suas propriedades pode ser encontrada em Rodrigues (2015). Um grafo diz-se planar se pode ser representado no plano sem o cruzamento de arestas. Um grafo diz-se conexo se todo o par de vértices tiver ligação por um caminho, nesse grafo.

$$(i + f) - a + fc = 2$$

$$\Leftrightarrow (i + f) - 2 = a - fc \quad (\text{ii})$$

Por outro lado, as arestas dividem-se em arestas interiores (a_{int}) e arestas que fazem parte da fronteira (a_{fr}), ou seja, $a = a_{int} + a_{fr} \Leftrightarrow a_{int} = a - a_{fr}$ (iii).

Além disso, o número total de arestas pode ser contado de duas formas distintas. Por um lado $a = 3(fc - 1)$, porque há 3 arestas por triângulo e há $fc - 1$ triângulos. Uma vez que esta contagem inclui as sobrecontagens relativas às arestas interiores que são comuns a dois triângulos adjacentes, podemos dizer que $3(fc - 1) = 2a_{int} + a_{fr}$.

Assim, partindo desta igualdade:

$$3(fc - 1) = 2a_{int} + a_{fr}$$

$$\Leftrightarrow 3fc - 3 = 2a_{int} + a_{fr}$$

$$\Leftrightarrow fc + 2fc - 3 = 2a_{int} + a_{fr}$$

$$\Leftrightarrow fc = -2fc + 3 + 2a_{int} + a_{fr}$$

$$\Leftrightarrow fc = -2fc + 3 + 2(a - a_{fr}) + a_{fr} \quad (\text{iii})$$

$$\Leftrightarrow fc = -2fc + 3 + 2a - 2a_{fr} + a_{fr}$$

$$\Leftrightarrow fc = -2fc + 3 + 2a - a_{fr}$$

$$\Leftrightarrow fc = 2a - 2fc - a_{fr} + 3$$

$$\Leftrightarrow fc = 2(a - fc) - a_{fr} + 3$$

$$\Leftrightarrow fc = 2[(i + f) - 2] - f + 3 \quad (\text{ii})$$

$$\Leftrightarrow fc = 2i + 2f - 4 - f + 3$$

$$\Leftrightarrow fc = 2i + f - 1$$

Voltando ao Lema 2 e à igualdade (i), $A = \frac{1}{2}(fc - 1)$, obtemos:

$$A = \frac{1}{2}(fc - 1) = \frac{1}{2}(2i + f - 1 - 1) = \frac{1}{2}(2i + f - 2) = i + \frac{f}{2} - 1.$$

2.2.3. Simetrias

A visão de Felix Klein sobre a Geometria como “*o estudo das propriedades das figuras, num espaço de quaisquer dimensões, que permanecem invariantes relativamente a um determinado conjunto de transformações previamente definidas*” (Gardner, 1993, p. 87), faz-nos ter presente a importância das transformações geométricas e das simetrias de figuras.

Existem diversos tipos de transformações geométricas como, por exemplo, as isometrias, isto é, transformações geométricas que preservam as distâncias. De entre as isometrias estudadas no ensino básico, contam-se as reflexões, as rotações, as translações e as reflexões deslizantes (M. E., 2013).

A noção de simetria define-se em termos de isometrias. Diz-se que uma figura F tem simetria se existe uma isometria T do plano (diferente da identidade) que a deixa globalmente invariante, isto é, tal que $T(F) = F$. Isto significa que podem alguns pontos da figura ser transformados noutros, mas a figura, como um todo permanece invariante, ou seja a figura transformada é geometricamente igual à figura e ocupa a mesma posição no plano (Bastos R. , 2006; Veloso, 1998). Por exemplo, a figura que se segue, excluindo os nove e respetivos símbolos de ouros que estão por baixo, tem duas simetrias de reflexão (eixo vertical e eixo horizontal que passam pelo centro da carta) e uma simetria de rotação de centro no centro da carta e amplitude 180° (simetria de rotação de grau 2). A carta completa apenas tem simetria de rotação de grau 2.



Figura 27 – Simetrias de um nove de ouros

2.3. Álgebra e Funções

Nesta secção abordam-se brevemente algumas noções e processos, relativos aos temas Álgebra e Funções, que podem intervir na justificação da validade de vários truques de magia matemática.

2.3.1. Processos algébricos

Historicamente, a Álgebra evoluiu desde a resolução de problemas expressos em linguagem natural até uma Álgebra eminentemente simbólica (Matos, 2007; Branco, 2013). No ensino básico pretende-se que se desenvolva, nos alunos, a capacidade de generalizar e representar simbolicamente propriedades e regularidades numéricas; a destreza no uso de incógnitas e variáveis; a capacidade de simplificar expressões algébricas e equações do 1.º e 2.º grau; a resolução de problemas (M. E., 2013). Em geral, o uso de ferramentas algébricas é, para os alunos, algo mais difícil do que um trabalho de carácter meramente aritmético. No entanto, a Álgebra tem um poder muito maior na medida em que permite a justificação de raciocínios e a demonstração, pelo que se deve procurar potenciar o uso de raciocínios algébricos desde os primeiros anos do ensino básico (Ponte, Branco, & Matos, 2009).

2.3.2. Funções – algumas noções

A par da Álgebra, surge um outro tema fundamental no currículo do ensino básico: Funções, Sequências e Sucessões (M. E., 2013). A noção de função, parte integrante deste tema, surge por diversas vezes, em truques de magia matemática. Uma função f , definida num conjunto D e com valores num conjunto E , pode ser interpretada como uma regra que faz corresponder a cada elemento x de D um único elemento de E , que se designa por $f(x)$. O conjunto D é designado por domínio de f e o subconjunto C de E , que é formado pelos elementos $f(x)$, com $x \in D$, é o seu contradomínio. No caso particular em que o domínio da função é o conjunto dos números naturais, a este tipo de correspondência pode dar-

se o nome de sucessão. A um subconjunto finito de uma sucessão dá-se o nome de sequência.

No caso particular em que uma função é afim, admite uma expressão algébrica da forma $f(x) = mx + b$, em que m e b são números reais e o seu gráfico é uma reta não vertical. Uma noção que assume um papel importante no âmbito da função afim é a de declive da reta. Dados dois pontos distintos do gráfico de f , de coordenadas $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, o declive da reta pode ser determinado calculando⁵: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Neste trabalho menciona-se, também a noção de função inversa⁶ de f , que se representa por f^{-1} . Se $f: D \rightarrow E$, então $f^{-1}: E \rightarrow D$ e tem-se que:

- $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$ para todo o $x \in E$
- $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$, para todo o $x \in D$

(Ferreira, 1995; Caraça, 2000)

Estes processos algébricos e estas noções relativas às Funções permitem demonstrar a validade de diversos truques de magia matemática incluídos mais adiante, no capítulo 4.

2.4. Cartas, dados e outros materiais com potencial matemático

Neste subcapítulo estabelecem-se algumas considerações sobre materiais diversos que são, usualmente, utilizados na realização de truques de magia matemática.

2.4.1. Cartas

Desde há muitos anos, os baralhos de cartas constituem uma fonte de inspiração para a realização de jogos e truques. No entanto, de acordo com José

⁵ Note-se que $x_1 \neq x_2$ porque A e B são pontos distintos do gráfico de f .

⁶ Esta noção não faz parte dos conteúdos a abordar no ensino básico.

Paulo Viana, no prefácio do livro *Matemagia* (Silva, Freitas, Silva, & Hirth, 2016) é impossível datar, com exatidão, quando se começaram a usar por diversos povos e civilizações. Estima-se que já fossem utilizados na China, no século IX, e que seguidamente tenham começado a ser usados na Pérsia, na Índia, no Egito e na Europa, a partir do século XIV.

Muitos dos truques que se realizam com cartas têm subjacentes alguns princípios que justificam o seu funcionamento. O princípio do fundo para o topo (Mulcahy, 2013) é um desses princípios.

a) Princípio do fundo para o topo

Imagine-se que um baralho tem n cartas e se pretende colocar sucessivamente cada uma das cartas em cima da mesa, alterando a sua ordem. Se o fizermos com as n cartas, seguramente, invertemos a ordem de todo o baralho. Mas a questão coloca-se sobre o que sucederá caso se coloquem apenas k cartas de entre as n iniciais ($k < n$), uma a uma, por ordem inversa, colocando as restantes $n - k$ cartas em cima, de uma só vez.

O Princípio do fundo para o topo estabelece que, no caso em que $n \leq 2k$, ou seja, $k \geq \frac{n}{2}$, após três transferências reversivas de k cartas num baralho de n cartas, a carta que originalmente se encontra no fundo passa a ser a carta de topo. De uma forma geral, sendo $k < n \leq 2k$, $k, n \in \mathbb{N}$, a ordem inicial das cartas no baralho pode ser dada, do Topo para o Fundo, por:

$$\{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{n-1}, a_n\}$$

Quando se termina a primeira inversão das k primeiras cartas, e o conjunto de cartas restante é colocado por cima, a ordem, de cima para baixo, passa a ser:

$$\{a_{k+1}, \dots, a_{n-1}, a_n, a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1\}$$

Após a segunda vez em que se realiza o procedimento, a sequência de cartas apresenta a seguinte configuração:

$$\{a_{n-k}, a_{n-k-1}, \dots, a_1, a_{n-k+1}, a_{n-k+2}, \dots, a_k, a_n, a_{n-1}, \dots, a_{k+1}\}$$

Por fim, depois da terceira vez em que se realiza o procedimento, obtém-se a seguinte sequência:

$$\{a_n, a_{n-1}, \dots, a_{k+1}, a_k, \dots, a_{n-k+2}, a_{n-k+1}, a_1, \dots, a_{n-k-1}, a_{n-k}\}$$

A carta que inicialmente estava no fundo (a_n) passa a ser a carta de topo.

Este princípio é mais facilmente compreensível se analisarmos alguns exemplos concretos, por exemplo, com $n = 8$ cartas.

i. A figura que se segue ilustra o caso em que $n = 8$ e $k = 4$:

	Ordem inicial	Posição	N.º de cartas
Topo	1	1	k cartas
	2		
	3	$k - 1$	
	4	k	
	5	$k + 1$	<hr/> $n - k$ cartas
	6		
	7	$n - 1$	
Fundo	8	n	

	Após a 1. ^a passagem	Posição	N.º de cartas
Topo	5	$k + 1$	$n - k$ cartas
	6		
	7	$n - 1$	
	8	n	
	4	k	<hr/> k cartas
	3	$k - 1$	
	2		
Fundo	1	1	

	Após a 2. ^a passagem	Posição	N.º de cartas
Topo	4	$n - k$	$n - k$ cartas
	3	$n - k - 1$	
	2		
	1	1	
	8	n	<hr/> k cartas
	7	$n - 1$	
	6		
Fundo	5	$k + 1$	

	Após a 3. ^a passagem	Posição	N.º de cartas
Topo	8	n	$n - k$ cartas
	7	$n - 1$	
	6		
	5	$k + 1$	
	1	1	<hr/> k cartas
	2		
	3		
Fundo	4	$n - k$	

Figura 28 – Princípio do Fundo para o Topo para $n = 8$ e $k = 4$

ii. A figura que se segue ilustra o caso em que $n = 8$ e $k = 3$:

	Ordem inicial	Posição	N.º de cartas
Topo	1	1	k cartas
	2		
	3	k	
	4	$k + 1$	$n - k$ cartas
	5		
	6		
	7	$n - 1$	
Fundo	8	n	

	Após a 1. ^a passagem	Posição	N.º de cartas
Topo	4		$n - k$ cartas
	5		
	6		
	7		
	8	n	
	3		k cartas
	2		
Fundo	1		

	Após a 2. ^a passagem	Posição	N.º de cartas
Topo	7		
	8		
	3		$n - k$ cartas
	2		
	1		
	6		
	5		k cartas
Fundo	4		

	Após a 3. ^a passagem	Posição	N.º de cartas
Topo	2		
	1		
	6		$n - k$ cartas
	5		
	4		
	3		
	8	n	k cartas
	7		
Fundo			

Figura 29 – Princípio do Fundo para o Topo para $n = 8$ e $k = 3$

iii. A figura que se segue ilustra o caso em que $n = 8$ e $k = 5$:

	Ordem inicial	Posição	N.º de cartas
Topo	1	1	
	2		
	3		k cartas
	4	$k - 1$	
	5	k	
	6		
	7	$n - 1$	$n - k$ cartas
	8	n	
Fundo			

	Após a 1. ^a passagem	Posição	N.º de cartas
Topo	6	$k + 1$	$n - k$ cartas
	7		
	8	n	
	5	k	k cartas
	4	$k - 1$	
	3		
	2		
Fundo	1	1	

	Após a 2. ^a passagem	Posição	N.º de cartas
Topo	3	$n - k$	
	2	$n - k - 1$	
	1	1	$n - k$ cartas
	4	$n - k + 1$	
	5		
	8	n	
	7	$n - 1$	k cartas
Fundo	6	$k + 1$	

	Após a 3. ^a passagem	Posição	N.º de cartas
Topo	8	n	
	7	$n - 1$	
	6	$k + 1$	$n - k$ cartas
	5	k	
	4	$n - k + 1$	
	1	1	
	2		k cartas
Fundo	3	$n - k$	

Figura 30 - Princípio do Fundo para o Topo para $n = 8$ e $k = 5$

iv. A figura que se segue ilustra o caso em que $n = 8$ e $k = 7$:

	Ordem inicial	Posição	N.º de cartas
Topo	1	1	k cartas
	2		
	3		
	4		
	5		
	6	$k - 1$	
	7	k	
Fundo	8	n	$n - k$ cartas

	Após a 1.ª passagem	Posição	N.º de cartas
Topo	8	n	$n - k$ cartas
	7	k	k cartas
	6	$k - 1$	
	5		
	4		
	3		
	2		
Fundo	1	1	

	Após a 2.ª passagem	Posição	N.º de cartas
Topo	1	1	$n - k$ cartas
	2		
	3		
	4		
	5		k cartas
	6	$k - 1$	
	7	k	
Fundo	8	n	

	Após a 3. ^a passagem	Posição	N.º de cartas
Topo	8	n	$n - k$ cartas
	7	k	
	6	$k - 1$	
	5		
	4		k cartas
	3		
	2		
Fundo	1	1	

Figura 31 – Princípio do Fundo para o Topo para $n = 8$ e $k = 7$

Nos casos i., iii. e iv., a carta do Fundo (8.^a posição) termina as três passagens no Topo da pilha de cartas. No caso ii., a carta do Fundo (8.^a posição) não termina as três passagens na Topo da pilha uma vez que $8 > 6$ ($n > 2k$). Daí que seja tão importante que se imponha a condição $k < n \leq 2k$ para que tudo funcione como se espera.

2.4.2. Dados e outros materiais

Diaconis e Graham (2011) defendem que há milhares de truques com cartas, mas também com dados, moedas e outros materiais, sendo que muitos desses truques não requerem qualquer truque de prestidigitação, ou seja, não envolvem técnicas secretas de manipulação manual desses materiais. Os truques a que os autores se referem funcionam apenas porque se baseiam em princípios matemáticos.

Os dados são, a par das cartas, os objetos mais populares porque permitem facilmente gerar números aleatórios. Desde o Antigo Egito, o uso de dados, maioritariamente dados cúbicos, em truques de magia e jogos de sorte e azar tem sido uma constante. Gardner (2018) indica que, dos cinco sólidos platônicos,

o cubo apresenta vantagens evidentes: (i) é o mais fácil de fabricar, (ii) as suas seis faces permitem alojar um número razoável de números (por exemplo, 1, 2, 3, 4, 5 e 6) e (iii) roda com facilidade mas não em demasia. No entanto, há sempre a possibilidade de usar dados tetraédricos, octaédricos, dodecaédricos e icosaédricos.

Uma das particularidades mais curiosas em dados cúbicos, na qual se baseiam múltiplos truques, é o facto de a soma das pintas em faces opostas ser sempre igual a 7: $1 + 6 = 7$; $2 + 5 = 7$; $3 + 4 = 7$.

Existem outros materiais com os quais se podem realizar truques de magia matemática, como moedas, berlindes, pedaços de corda ou até mesmo uma simples calculadora (Hermann & Garman, 1984). Basta haver imaginação... e matemática.

Capítulo 3 – Metodologia

Neste capítulo descrevo as principais opções metodológicas que tomei para levar a cabo este estudo.

3.1. Problematização

Perante a diversidade de cenários com que se depara, hoje em dia, nas escolas portuguesas, o professor precisa, constantemente, de ter a capacidade de se atualizar e de diversificar as suas estratégias de ensino. Num momento em que os jovens adolescentes têm à sua disposição um número cada vez maior de solicitações, nomeadamente através da Internet, é cada vez mais difícil chamar a sua atenção e cativá-los para a atividade matemática, que requer persistência e empenho da sua parte. A magia matemática é uma das múltiplas estratégias motivacionais de que o professor se pode munir para enriquecer a forma como planifica e concretiza, no terreno, as aulas de matemática. Por outro lado, a magia matemática pode ser um fator que permita envolver os alunos na disciplina o que é essencial, uma vez que sem envolvimento da sua parte é mais difícil que ocorram aprendizagens significativas.

Desta forma, este trabalho tem como principal objetivo a recolha, organização e sistematização de truques que possam ser encarados como “magia matemática”, verdadeiramente concretizáveis em sala de aula, e que possam servir de ponto de partida para aprendizagens efetivas no âmbito da disciplina.

3.2. Opções fundamentais

Tendo em conta a problematização e o objetivo do estudo, optei por realizar um trabalho de investigação de natureza não empírica, a partir da revisão de conceitos e materiais já publicados no âmbito da magia matemática, organizando-os, refletindo sobre os mesmos e adaptando-os à minha realidade como docente.

Este estudo foi desenvolvido entre setembro de 2018 e junho de 2019. Comecei por, em conjunto com os meus orientadores, definir a temática a abordar. Durante o mês de outubro, fiz uma primeira recolha e sistematização de bibliografia sobre esta temática, nomeadamente através das palavras-chave “magia”, “truque”, “aprendizagem” e “matemática” e procurei esboçar a estrutura do trabalho a desenvolver e estabelecer uma calendarização das diversas tarefas necessárias para a sua consecução. Encontrei obras de autores de referência a nível internacional neste âmbito, de entre os quais destaco Martin Gardner, Colm Mulcahy, Arthur Benjamin e diversos artigos de investigação publicados em conferências e revistas científicas. Também em Portugal, encontrei materiais diversos, que foram muito importantes para me ajudar a situar nesta temática, criados no âmbito da Associação Ludus, da Sociedade Portuguesa de Matemática e da Universidade de Aveiro, nomeadamente dissertações de mestrado. Procurei, ainda, familiarizar-me com o projeto circo matemático.

Tendo em conta o objetivo que defini para a investigação, escrevi o capítulo introdutório, no qual faço um enquadramento da conjuntura educativa em que vivemos em Portugal, no momento em que é escrita esta dissertação. Em seguida, comecei a organizar e descrever os truques que recolhi no capítulo 4, “Truques, recreação e potenciais aprendizagens”. O critério de escolha dos truques teve sempre por base o conteúdo matemático que lhe estava subjacente e que lhe permitia funcionar sem depender da sorte ou do azar, assim como a sua adequabilidade a alunos do 3.º ciclo do ensino básico. Foi minha preocupação que a escolha dos truques incluídos neste trabalho não fosse repetitiva e

pudesse trazer alguma novidade, tendo em conta os trabalhos já publicados, em português, neste âmbito.

Como o nome do capítulo sugere, à medida em que os fui encontrando, comecei por focar truques cujo fim é essencialmente recreativo e motivacional e, em seguida, incluí truques a partir dos quais, enquanto docente, consigo imaginar oportunidades para a construção de tarefas que permitam potenciar aprendizagens curriculares, tendo em conta os documentos curriculares em vigor.

Para a maior parte dos truques que escolhi procurei, mais do que apenas sistematizar, imprimir-lhes uma marca pessoal, quer na forma como os descrevo e justifico, quer no modo como, a partir de alguns truques originais, procurei criar novas versões dos mesmos. Muitas destas novas versões dos truques já existentes são orientadas pela minha experiência como docente e procuram tornar mais evidentes as oportunidades de aprendizagem para alunos do 3.º ciclo como os que leciono neste ano letivo. Para a compreensão plena da matemática existente por trás de cada truque, senti necessidade de voltar à revisão da literatura, procurando os fundamentos matemáticos e essa informação foi essencial para que conseguisse, com maior segurança, diversificar os truques já existentes e acrescentar algo de novo ao que já existia. Por fim, explicitiei, no presente capítulo, as principais opções metodológicas que sustentam este trabalho e estabeleci algumas considerações finais.

De uma forma global, na figura que se segue são visíveis as diversas fases que segui neste estudo:

Ano	Fases do estudo
2018	<p>Escolha do tema, problematização e definição do objetivo da investigação;</p> <p>Recolha bibliográfica sobre magia e matemática;</p> <p>Elaboração da estrutura da dissertação e do capítulo introdutório;</p> <p>Descrição dos primeiros truques selecionados e definição da estrutura a seguir no capítulo 4;</p> <p>Revisão de conceitos sobre os fundamentos matemáticos em que cada truque se baseia e exploração de temáticas que são sugeridas pelos mesmos;</p> <p>Aperfeiçoamento da descrição de cada truque e eventual inclusão de novas versões para os truques já existentes.</p>

2019	<p>Escrita do capítulo 3, descrevendo as opções metodológicas do estudo;</p> <p>Continuação da revisão da literatura sobre magia e matemática;</p> <p>Descrição dos restantes truques a incluir na dissertação;</p> <p>Continuação da recolha bibliográfica e da revisão de conceitos sobre os fundamentos matemáticos e conclusão do capítulo 2;</p> <p>Aperfeiçoamento e ampliação dos restantes truques e conclusão do capítulo 4;</p> <p>Escrita do capítulo 5, incluindo as considerações finais do estudo desenvolvido;</p> <p>Revisão, entrega e defesa da dissertação.</p>
------	--

Figura 32 – Calendarização das fases do estudo

Capítulo 4 – Truques, recreação e potenciais aprendizagens

Neste capítulo descrevo os truques que recolhi, organizei e estudei do ponto de vista matemático e apresento a minha perspetiva sobre a forma como cada um desses truques pode ter relevância como promotor de motivação e/ou novas aprendizagens matemáticas em alunos do 3.º ciclo do ensino básico.

4.1. Truques com fim recreativo

Os truques que se seguem têm subjacentes conteúdos matemáticos sofisticados para alunos do terceiro ciclo do ensino básico, pelo que a sua utilização em sala de aula pode ser meramente motivacional.

4.1.1. Em que dia da semana nasci?

O truque “Em que dia da semana nasci?” encontra-se descrito em Benjamin e Shermer (2006) e Benjamin (2015) e pode ser bastante impressionante e motivador para quem tiver contacto com ele pela primeira vez.

Instruções para realizar o truque

- o professor pede a todos os alunos de uma turma que, em casa, perguntem aos seus pais em que dia da semana nasceram (se não se lembrarem, podem pesquisar em calendários existentes na Internet) e tragam essa informação para a aula de Matemática seguinte;
- na aula seguinte, o professor pergunta a um aluno voluntário em que data nasceu (dia, mês e ano);
- o professor pede à turma muita concentração e adivinha o dia da semana que corresponde à data de nascimento do aluno;
- em seguida, o professor repete o truque com todos os alunos que pretendam participar.

Segredos por trás do truque

- para datas referentes ao ano 2000 ou posterior (que incluem todos os alunos que frequentam o 3.º ciclo do ensino básico) o professor usa a fórmula:

$$x = \text{Código do mês} + \text{Dia do mês} + \text{Código do ano}$$

- ao valor de x , o professor subtrai o maior múltiplo natural de 7 que lhe seja inferior, obtém o *Código do dia da semana* e adivinha o dia a que corresponde.

O autor identifica os códigos que se seguem:

Dia da semana	Código do dia da semana
Segunda-feira	1
Terça-feira	2
Quarta-feira	3
Quinta-feira	4
Sexta-feira	5
Sábado	6
Domingo	7 ou 0

Figura 33 – Em que dia da semana nasci? – Códigos dos dias da semana

Mês	Código do mês
Janeiro	6 (ou 5, se o ano for bissexto)
Fevereiro	2 (ou 1, se o ano for bissexto)
Março	2
Abril	5
Maio	0
Junho	3
Julho	5
Agosto	1
Setembro	4
Outubro	6
Novembro	2
Dezembro	4

Figura 34 – Em que dia da semana nasci? – Códigos dos meses do ano

Ano	Código do ano
2000	0
2001	1
2002	2
2003	3
2004	5
2005	6
2006	0
2007	1
2008	3
2009	4
2010	5
2011	6
2012	1
2013	2
2014	3
2015	4
2016	6
2017	0
2018	1
2019	2

Figura 35 – Em que dia da semana nasci? – Códigos dos anos a partir de 2000

Parecerá complexo que o professor consiga saber de cor todos os códigos, mas com alunos de uma turma de um determinado ano de escolaridade, a tarefa poderá ser simples:

- os códigos dos dias da semana são bastante simples, dado que a sequência de 1 a 7, se inicia no primeiro dia da semana de trabalho numa escola;

- numa turma de um determinado ano de escolaridade, haverá alunos que, na sua maioria, terão o mesmo ano de nascimento ou que podem contar com algumas retenções. Assim, basta, ao professor, fazer previamente o seu trabalho de casa e verificar quais são os anos de nascimento dos alunos de determinada turma;
- quanto aos códigos dos meses, o professor pode decorar a sequência: 622 503 514 624. Se o professor não pretender decorar esta sequência pode escrevê-la na capa de um caderno que tenha em cima da sua mesa, e observá-la discretamente, porque os alunos não saberão como é que aquele número, com tantos algarismos, poderá estar relacionado com o truque.

Assim, por exemplo, se numa turma do 8.º ano, há alunos nascidos em 2004, 2005 e 2006, o professor deve saber que os códigos relativos a estes anos são, respetivamente, 5, 6 e 0.

Se um aluno indica que a sua data de nascimento é 11 de Novembro de 2004, o professor calcula mentalmente:

$$x = \text{Código do mês} + \text{Dia do mês} + \text{Código do ano} = 2 + 11 + 5 = 18$$

e

$$\text{Código do dia da semana} = 18 - 14 = 4 \text{ (ou seja, } 18 \equiv 4 \pmod{7} \text{)}$$

Portanto, o aluno nasceu numa quinta-feira.

Por que motivo funciona: o papel da matemática

Comecemos por notar que os códigos dos dias da semana foram designados desta forma para ser intuitiva a sua memorização.

Ao ano 2000 foi atribuído o código 0 e, quando o ano não é bissexto, a cada 365 dias, a data do nosso aniversário avança um dia na semana, pelo que se adiciona 1 unidade ao código do ano anterior. Nos anos bissextos, acontecem cenários distintos, consoante se nasce antes ou depois de 29 de fevereiro. Assim, para quem nasceu a partir de março, o dia de aniversário avança dois dias na semana. Por esse motivo, nos anos bissextos, o código aumenta duas

unidades relativamente ao ano anterior e o acerto, relativo a datas de nascimento em janeiro ou fevereiro é feito no código do mês com o decréscimo de uma unidade (ver figura 37). Nesta codificação relativa aos anos, os códigos indicam se o número é congruente com 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 (mod 7):

Ano	1. ^a codificação	Código do ano (mod 7)
2000 (bissexto)	0	0
2001	1	1
2002	2	2
2003	3	3
2004 (bissexto)	5	5
2005	6	6
2006	7	0 ($7 - 7 = 0$)
2007	8	1 ($8 - 7 = 1$)
2008 (bissexto)	10	3 ($10 - 7 = 3$)
2009	11	4 ($11 - 7 = 4$)
2010	12	5 ($12 - 7 = 5$)
2011	13	6 ($13 - 7 = 6$)
2012 (bissexto)	15	1 ($15 - 14 = 1$)
2013	16	2 ($16 - 14 = 2$)
2014	17	3 ($17 - 14 = 3$)
2015	18	4 ($18 - 14 = 4$)
2016 (bissexto)	20	6 ($20 - 14 = 6$)
2017	21	0 ($21 - 21 = 0$)
2018	22	1 ($22 - 21 = 1$)
2019	23	2 ($23 - 21 = 2$)

Figura 36 – Em que dia da semana nasci? – Origem dos códigos dos anos

Para obter os códigos dos meses, partiu-se de uma data específica como referência: 1 de março de 2000, que foi uma quarta-feira. Para que a fórmula permita chegar a este dia da semana, é necessário que se verifique a igualdade:

$$\begin{aligned} \text{Código do mês de Março} + \text{Dia 1} + \text{Código do ano 2000} \\ = \text{Código da quarta-feira} \end{aligned}$$

Ou seja:

$$\begin{aligned} \text{Código do mês de Março} + 1 + 0 &= 3 \\ \Leftrightarrow \text{Código do mês de Março} &= 3 - 1 \\ \Leftrightarrow \text{Código do mês de Março} &= 2 \end{aligned}$$

Em anos não bissextos, como fevereiro tem exatamente 28 dias, os dias da semana coincidem com os dos primeiros 28 dias de março. Por exemplo, 6 de fevereiro de 2019 e 6 de março de 2019 são ambos quartas-feiras. Por isso, em anos não bissextos, fevereiro e março têm o mesmo código (2). Nos anos bissextos desconta-se uma unidade pelo acerto já mencionado anteriormente.

Para os restantes meses o raciocínio é o seguinte: uma vez que março tem 31 dias, os dias da semana do mês seguinte sofrem um avanço de 3 dias e logo o código de abril será $2 + 3 = 5$.

	Mês	1. ^a codificação	Código do mês (mod 7)
	Janeiro (31 dias = 28+3)	-1 ($-1 = 2 - 3$) ou -2, se o ano for bissexto ($-2 = 1 - 3$)	6 ($-1 + 7 = 6$) ou 5, se o ano for bissexto ($-2 + 7 = 5$)
	Fevereiro (28 ou 29 dias)	2 ou 1, se o ano for bissexto	2 ou 1, se o ano for bissexto
Ponto de partida	Março (31 dias = 28+3)	2	2

Abril (30 dias = $28 + 2$)	5 ($5 = 2 + 3$)	5
Maio (31 dias = $28+3$)	7 ($7 = 5 + 2$)	0 ($7 - 7 = 0$)
Junho (30 dias = $28+2$)	10 ($10 = 7 + 3$)	3 ($10 - 7 = 3$)
Julho (31 dias = $28+3$)	12 ($12 = 10 + 2$)	5 ($12 - 7 = 5$)
Agosto (31 dias = $28+3$)	15 ($15 = 12 + 3$)	1 ($15 - 14 = 1$)
Setembro (30 dias = $28+2$)	18 ($18 = 15 + 3$)	4 ($18 - 14 = 4$)
Outubro (31 dias = $28+3$)	20 ($20 = 18 + 2$)	6 ($20 - 14 = 6$)
Novembro (30 dias = $28+2$)	23 ($23 = 20 + 3$)	2 ($23 - 21 = 2$)
Dezembro (31 dias = $28+3$)	25 ($25 = 23 + 2$)	4 ($25 - 21 = 4$)

Figura 37 – Em que dia da semana nasci? – Origem dos códigos dos meses

Embora a aritmética modular, abordada no capítulo 2 desta dissertação, não seja um tema do programa de Matemática no ensino básico, a forma como o truque funciona pode ser explicada aos alunos que se mostrem mais interessados, tendo em conta as tabelas com os códigos já previamente determinados ou, de forma mais aprofundada, verificando que os códigos relativos aos anos e aos meses se obtêm determinando restos de divisões por 7.

4.1.2. Sabor do gelado

Este truque, descrito por Mulcahy (2013), requer o uso de um baralho não preparado e pode ser motivador para alunos que nunca tenham visto truques com cartas.

Instruções para realizar o truque

- perguntar ao aluno qual é o seu sabor de gelado favorito;

- dar ao aluno “cerca de um quarto” de um baralho de cartas, pedir-lhe que o baralhe livremente; a parte restante do baralho é completamente descartada, não voltando a ser utilizada;
- receber as cartas baralhadas pelo aluno e baralhar de novo;
- colocar sobre a mesa uma carta por cada letra da palavra correspondente ao sabor escolhido pelo aluno (por exemplo, “Chocolate”) e juntá-las com uma mão, dizendo: “isto representa uma colher de gelado” e com a outra mão colocar as restantes cartas sobre as primeiras como se fosse “a cobertura”;
- repetir o processo mais duas vezes;
- enfatizar a aleatoriedade, tendo em conta o facto de o baralho ter sido baralhado pelo aluno e de ter sido o próprio a escolher o seu sabor de gelado preferido;
- dizer ao aluno “a carta que está no topo é X”;
- perguntar ao aluno: “alguma vez fizeste magia? Será que tu consegues fazer com que a carta que está no topo seja X?”;
- seja qual for a resposta do aluno, solicitar-lhe que pressione o monte de cartas (a colher e a cobertura) com bastante força e se concentre bem, para conseguir retirá-la, sendo a carta X (inserir aqui a carta correta, já adivinhada pelo professor).

Segredos por trás do truque

- há uma relação entre o número de letras na palavra escolhida (no exemplo, “Chocolate”) e a dimensão da porção do baralho que é realmente dada ao aluno para baralhar (“cerca de um quarto” do baralho, deve significar, na realidade, um número de cartas superior ao número de letras da palavra escolhida, para que possa existir cobertura, mas que não exceda o dobro desse número, para que a cobertura do gelado não seja demasiado grande; os sabores escolhidos mais frequentemente pelos alunos são “Chocolate”, “Bau-nilha”, “Morango”, etc., pelo que umas 12 cartas podem ser um número indicado; o professor só decide quantas cartas dar ao aluno

depois de saber que sabor de gelado este prefere, permitindo-lhe calcular um número adequado.);

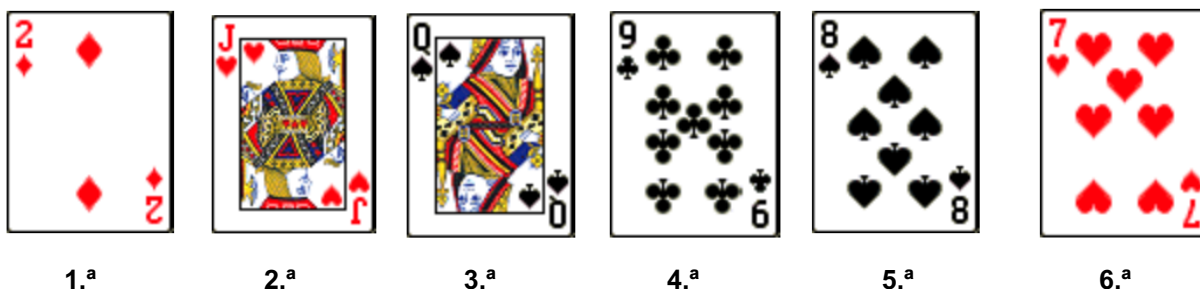
- embora a porção de baralho dada ao aluno não tenha qualquer preparação prévia, o professor tem de conseguir visualizar a carta do fundo, antes de começar a soletrar a palavra correspondente ao sabor escolhido (por exemplo, quando recebe o baralho nas suas mãos e o volta a baralhar, tendo o cuidado de que a carta do fundo não se altere).

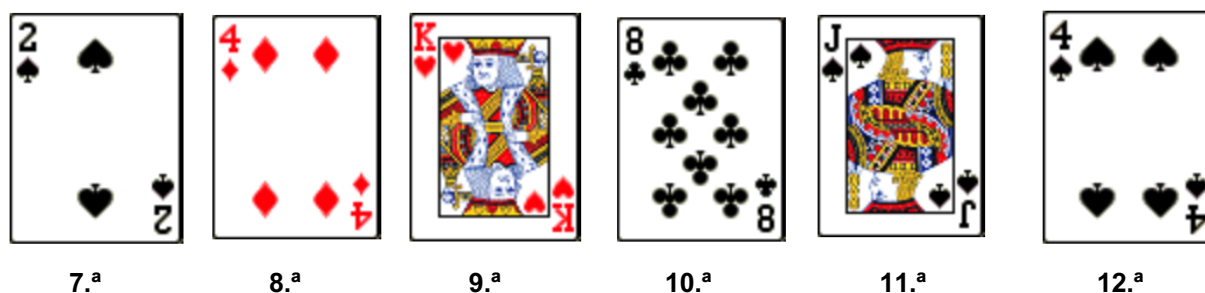
Por que motivo funciona: o papel da matemática

Como não podia deixar de ser, por trás deste truque há matemática. O autor designa a regra que aqui se encontra subjacente como o Princípio do fundo para o topo. O exemplo que se segue pretende ilustrar este princípio com uma porção de um baralho de cartas e um sabor de gelado em concreto, de forma a tornar mais claro o que se passa ao longo de três passagens.

Suponhamos que, inicialmente, o aluno escolhe “Chocolate” como sabor de gelado preferido. O professor deve dar-lhe entre nove e dezoito cartas (inclusive). Imagine-se que escolhe dar ao aluno exatamente 12 cartas. Este baralha as cartas uma primeira vez e entrega-as ao seu professor. Ao baralhar novamente as cartas, o professor deve conseguir espreitar a carta do Fundo, sem que o aluno se aperceba. Imagine-se que, depois de baralhadas duas vezes, as cartas se posicionam numa pilha, pela ordem em que se encontra na figura abaixo e o professor já sabe que a carta do Fundo é o “4 de paus”.

Topo





Fundo

Figura 38 – Sabor do gelado – Exemplo de uma porção de baralho na posse do aluno no início do truque

O truque decorre da seguinte forma:

1.ª passagem: o professor coloca sobre a mesa (viradas para baixo), uma carta por cada letra dessa palavra, da seguinte forma:

Topo



Figura 39 – Sabor do gelado – Porção de baralho após a 1.ª passagem

2.ª passagem: o professor repete o processo descrito uma primeira vez.

Topo

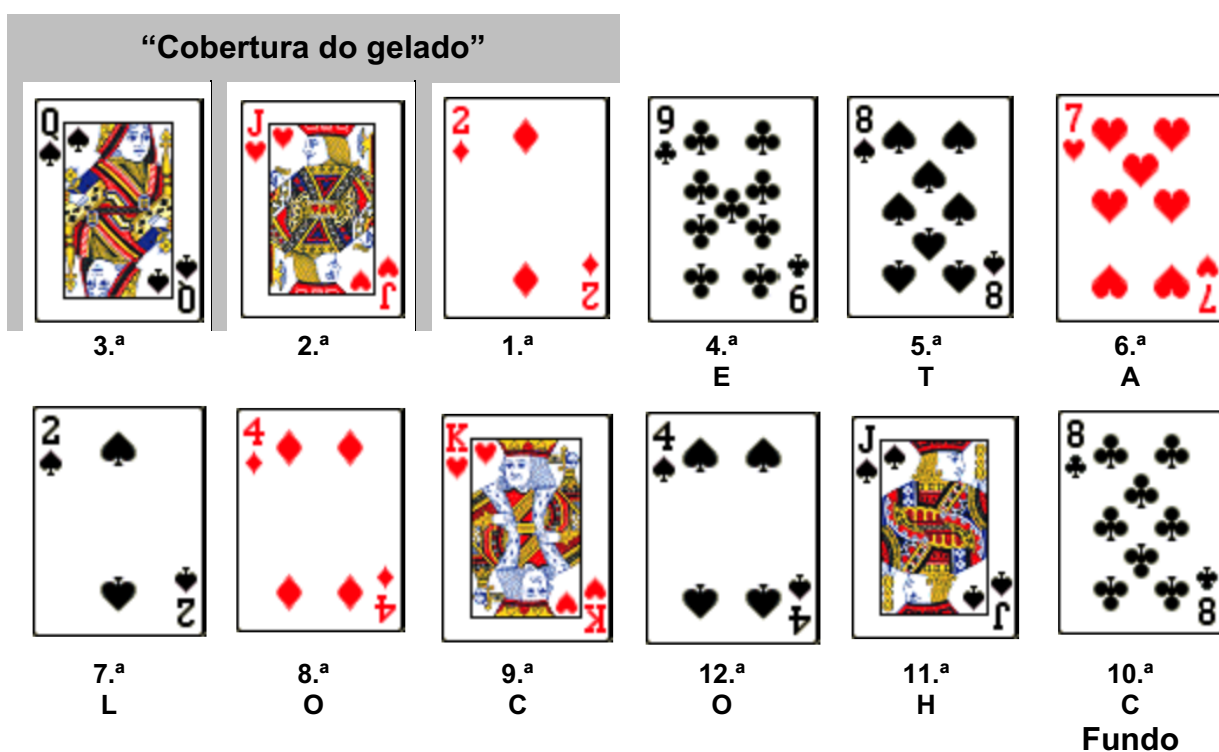


Figura 40 – Sabor do gelado – Porção de baralho após a 2.^a passagem

3.^a passagem: o professor repete o processo descrito uma segunda vez.

Topo

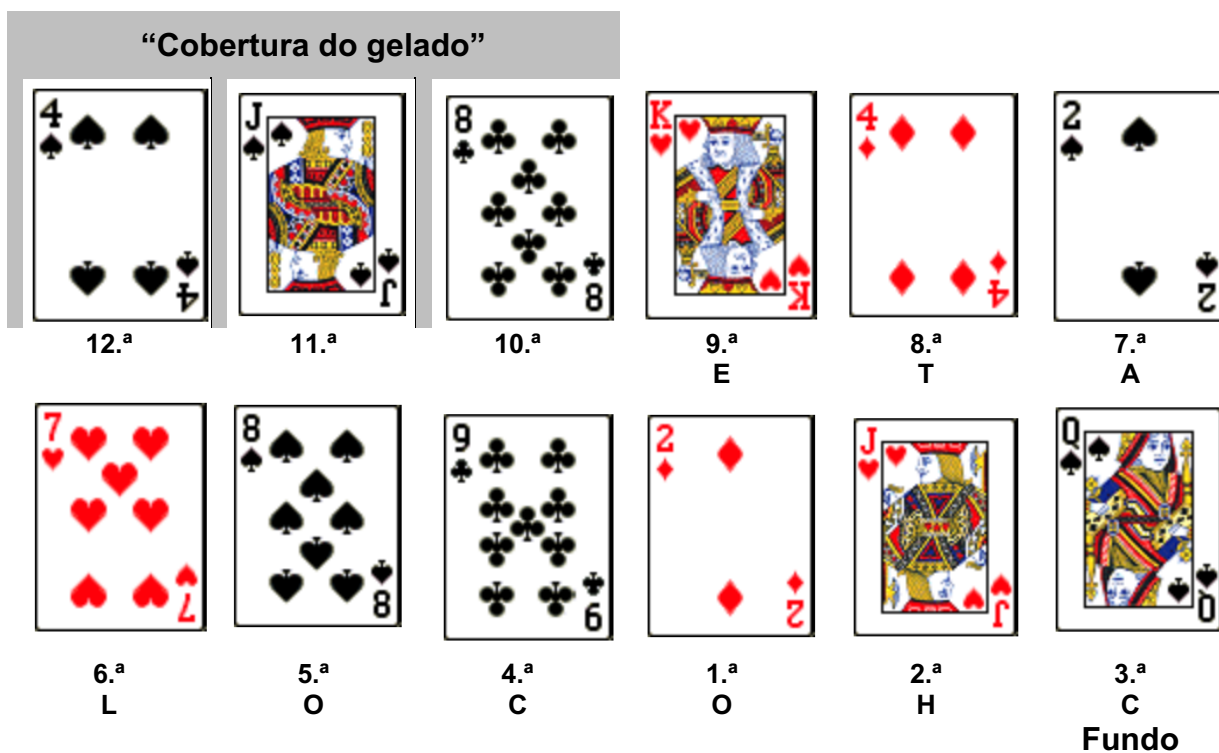


Figura 41 – Sabor do gelado – Porção de baralho após a 3.^a passagem

De uma forma geral, e supondo que a palavra correspondente ao sabor de gelado escolhido tem k letras e que foram dadas ao aluno n cartas, sendo $k < n \leq 2k$, $k, n \in \mathbb{N}$, é possível ter a certeza de que a carta do Fundo passa sempre para o Topo, de acordo com o Princípio do Fundo para o Topo, como se mostrou no capítulo 2.

4.1.3. Em que número pensei? – Base Fibonacci

Este truque baseia-se na informação contida na página pessoal de Ron Knott (2015), mencionada na bibliografia. Para o aplicar em sala de aula, o professor pode utilizar a própria ferramenta disponível nesta página, no ponto “5.3. *Think of a Number Card Generator*” ou pode imprimir previamente cartões com números e projetá-los, enquanto questiona a turma.

Instruções para realizar o truque

- projetar a aplicação online ou mostrar cartões previamente impressos com os números entre 1 e 54 (por exemplo) previamente dispostos pelo professor;
- pedir a cada aluno que pense num número e que mantenha segredo sobre o número em que pensou;
- solicitar ao aluno que indique todas as linhas em que o número em que pensou se encontra;
- pedir ao aluno que se concentre enquanto o professor tenta adivinhar magicamente o número em que ele pensou;
- por fim, o professor deve adivinhar o número e pode repetir com outros alunos da turma que, entretanto, foram pensando no seu próprio número e podem repetir os passos dados pelo primeiro aluno voluntário;
- se o professor quiser utilizar a aplicação online pode até complicar o truque, pedindo aos alunos que definam o tamanho da tabela.

Segredos por trás do truque

- Na página referida, os autores propõem a utilização de tabelas deste tipo:

1. ^a linha	1 4 6 9 12 14 17 19 22 25 27 30 33 35 38 40 43 46 48 51 53
2. ^a linha	2 7 10 15 20 23 28 31 36 41 44 49 54
3. ^a linha	3 4 11 12 16 17 24 25 32 33 37 38 45 46 50 51
4. ^a linha	5 6 7 18 19 20 26 27 28 39 40 41 52 53 54
5. ^a linha	8 9 10 11 12 29 30 31 32 33 42 43 44 45 46
6. ^a linha	13 14 15 16 17 18 19 20 47 48 49 50 51 52 53 54
7. ^a linha	21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33
8. ^a linha	34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54

Figura 42 – Em que número pensei? – Números inteiros entre 1 e 54

- o segredo por trás deste truque tem a ver com a forma como os números são dispostos na tabela, que não é aleatória;
- o professor deve fixar em quais das linhas se encontra o número em que pensou o aluno voluntário e adicionar mentalmente cada um dos seus primeiros números, obtendo o número pretendido.

Por que motivo funciona: o papel da matemática










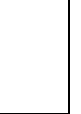













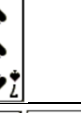









É fácil de compreender que o que está na base deste truque é a sucessão de Fibonacci e a representação de Zeckendorf de números inteiros positivos na base Fibonacci, abordada no capítulo 2. Por exemplo, se um aluno pensou no número 49, este encontra-se nas 2.^a, 6.^a e 8.^a linhas. Assim, calculando $2 + 13 + 34$, o professor pode obter, com rapidez o número 49. Note-se que $49 = F_3 + F_7 + F_9$.

4.1.4. Qual é a minha carta? – Base negafibonacci

O truque “Em que número pensei?” pode, também, ser realizado com cartas, constituindo um novo truque a que podemos chamar “Qual é a minha carta?”. Para o aplicar, o professor pode seguir os passos seguintes:

Instruções para realizar o truque

- dar a um aluno voluntário todas as cartas de dois naipes de um baralho de 52 cartas de cores distintas: por exemplo, as cartas de copas e as cartas de espadas;
- pedir ao aluno que baralhe as 26 cartas que tem consigo como quiser e, em seguida, escolha uma delas ao acaso;
- pedir ao aluno que veja a carta escolhida e a memorize, mantendo-a em segredo;
- eventualmente outros alunos da turma que se voluntariem podem também escolher a sua carta, de entre as que restam, memorizando-as e mantendo-as em segredo;
- projetar a tabela seguinte que contém todas as cartas, de ambos os naipes, algumas delas com repetições e por ordem (aparentemente) aleatória:

1. ^a linha										
2. ^a linha										
3. ^a linha										
4. ^a linha										




















5. ^a linha							
6. ^a linha							
7. ^a linha							

Figura 43 – Qual é a minha carta? – Cartas com pontuações entre -13 e 13 e naipes copas ou espadas

- solicitar ao primeiro aluno que indique todas as linhas em que a sua carta se encontra;
- pedir a todos os alunos que se concentrem enquanto o professor tenta adivinhar magicamente de que carta se trata;
- por fim, o professor adivinha a carta do primeiro aluno;
- o processo é repetido para os restantes alunos voluntários.

Segredos por trás do truque

- para conseguir adivinhar a carta de cada aluno o professor precisa de conhecer a forma como a tabela projetada foi construída;
- o professor deve associar mentalmente o naipe vermelho a números negativos e o naipe preto a números positivos (por exemplo, 9 de espadas = +9; 7 de copas = -7) e atribuir às figuras as seguintes pontuações (valete: 11 ou -11; dama: 12 ou -12; rei: 13 ou -13);
- o professor deve fixar em quais das sete linhas se encontra a carta em que pensou o aluno voluntário e adicionar mentalmente os valores correspondentes às primeiras cartas das linhas indicadas;
- no caso específico em que o aluno indique as linhas números 1, 3, 5 e 7, a soma dará 21 e, se isso acontecer, o professor deve encarar esse valor como um código para a carta “rei de copas”, uma vez que -13 é a única pontuação que não se consegue obter diretamente com apenas estas 7 linhas pois $-13 = (10010101)_{(-Fib)}$.

Por que motivo funciona: o papel da matemática

Na tabela, as cartas encontram-se dispostas de forma a que o primeiro elemento de cada uma 7 linhas seja uma carta de valor associado a um dos primeiros sete termos da sucessão negafibonacci de índice negativo: $F_{-1} = 1$; $F_{-2} = -1$; $F_{-3} = 2$; $F_{-4} = -3$; $F_{-5} = 5$; $F_{-6} = -8$; $F_{-7} = 13$. Uma vez que não existe nenhuma carta com o valor -21 e o número $F_{-8} = -21$ seria necessário para escrever a pontuação -13 na base negafibonacci, surge a necessidade de identificar esta carta de outro modo, como foi explicado na secção anterior.

As cartas foram colocadas nas linhas correspondentes aos números da sucessão negafibonacci associados ao valor 1 na sua decomposição nessa base (ver Figura 13); por exemplo: $11_{(10)} = 1001001_{(-Fib)}$, ou seja, $11 = F_{-1} + F_{-4} + F_{-7} = (+1) + (-3) + (+13)$ e, como tal, a carta “11 de espadas” existe na 1.^a linha, na 4.^a linha e na 7.^a linha.

Quando o aluno indica em que linhas se encontra a sua carta, ao professor basta adicionar mentalmente os valores numéricos associados à primeira carta de cada uma dessas linhas e identificar a carta correspondente à soma obtida: por exemplo, se o aluno indicar as linhas números 1, 4 e 6, o professor calcula: $(+1) + (-3) + (-8) = (-10)$, que corresponde ao dez de copas. Na realidade, o professor calculou $F_{-1} + F_{-4} + F_{-6}$ ou seja, utilizou o facto de $(-10)_{(10)}$ ser igual a $(101001)_{(-Fib)}$.

A exceção reside no caso do rei de copas, que corresponde à seleção das linhas números 1, 3, 5 e 7, em que a soma dos valores correspondentes é $F_{-1} + F_{-3} + F_{-5} + F_{-7} = 1 + 2 + 5 + 13 = 21$, valor que o professor associa como código para o rei de copas.

4.1.5. Qual é a minha carta? – Base negabinária

Uma outra possibilidade de realização do truque “Qual é a minha carta?”, consiste, por exemplo, na utilização de potências de base -2 em vez de números da base negafibonacci.

Instruções para realizar o truque

- o professor solicita a um aluno voluntário que baralhe as cartas de dois naipes de cores distintas (por exemplo, copas e espadas), da forma que entender, e, em seguida, pede-lhe que escolha uma carta aleatoriamente, a veja e memorize, mantendo-a em segredo;
- o professor apresenta uma tabela como a que se segue e pede ao voluntário que indique todas as linhas em que esta se encontra:









































































1. ^a linha	             
2. ^a linha	            
3. ^a linha	              
4. ^a linha	               
5. ^a linha	          
6. ^a linha	  

Figura 44 – Qual é a minha carta? – Cartas com pontuações entre –13 e 13 e naipes copas ou espadas

- o professor procede como no truque “Qual é a minha carta?”, até adivinhar qual é a carta do aluno.

Segredos por trás do truque

- tal como no truque anterior, para conseguir adivinhar a carta de cada aluno o professor precisa de conhecer a forma como a tabela projetada foi construída e associar a cada carta as mesmas pontuações já referidas em 4.1.4.;
- o professor deve fixar em quais das quatro primeiras linhas se encontra a carta em que pensou o aluno voluntário e adicionar mentalmente os valores correspondentes às primeiras cartas das linhas indicadas;
- se o aluno indicar que a carta também está nas quinta ou sexta linhas, o professor deve lembrar-se de lhes associar os valores 16 e -32, adicionando esse valor à soma já obtida no ponto anterior.

Por que motivo funciona: o papel da matemática

Na tabela, os valores associados a cada uma das linhas correspondem aos termos da sucessão $(-2)^n$, para $0 \leq n \leq 5$. Uma vez que qualquer número inteiro pode ser escrito em base negabinária, todas as cartas de valor entre -13 e 13 encontram-se representadas na tabela nas linhas associadas ao valor um, da sua decomposição nessa base (ver Figura 5). Assim, por exemplo: $-13 = (-2)^0 + (-2)^1 + (-2)^2 + (-2)^4 + (-2)^5$, ou seja, $-13 = (110111)_{(-2)}$. Portanto, se o aluno indicar que a sua carta se encontra nas 1.^a, 2.^a, 3.^a, 5.^a e 6.^a linhas, o professor descobre facilmente que a soma dos valores correspondentes a estas linhas é -13 e, logo, que a carta é um rei de copas.

De acordo com Schwartzman (1987), a utilização das bases negabinária e/ou negafibonacci torna mais difícil que os alunos mais perspicazes ou que já tenham visto truques semelhantes anteriormente, nomeadamente truques que envolvem a escrita de números na base 2, consigam descobrir facilmente o modo como funciona este truque, mantendo o deslumbramento por mais algum tempo.

No entanto, para alunos mais interessados, poderá ser interessante que, em algum ponto, o professor acabe por desvendar o mistério, explicando-lhes que nos três truques anteriores basta adicionar os valores das primeiras cartas de cada linha, para determinar a pontuação referente à carta que se pretende descobrir.

4.2. Truques que podem potenciar aprendizagens de conteúdos programáticos

4.2.1. Onde está o erro? – Duas cores

O truque “Onde está o erro?” encontra-se descrito por Bell, Witten e Fellows (1998) e a sua realização em sala de aula pode adequar-se a alunos desde o 1.º ao 3.º ciclo de escolaridade, consoante o grau de sofisticação que o professor queira imprimir-lhe, quando o adaptar à sua realidade.

Originalmente, para a realização deste truque, os autores recomendam a construção, pelos alunos, de cerca de 40 cartas bicolores. Para isso, basta, por exemplo, colar duas cartolinas, uma vermelha e uma branca (ou utilizar uma cartolina que tenha cores distintas em ambas as faces), desenhar e recortar retângulos iguais (que podem ser plastificados, para uma maior durabilidade). Caso assim se pretenda, podem ser colados pedaços de velcro (ou ímanes) nos cartões, em ambos os lados, para que possam ser colados num painel vertical visível por toda a turma, com as cores vermelha ou branca voltadas para cima.

Instruções para realizar o truque

- construir as cartas bicolores e o painel vertical;
- pedir a um ou dois alunos que vá ao painel vertical e coloque os cartões de forma a formar um quadrado 5x5 (por exemplo), colocando à sua vontade cada um deles com a cor pretendida voltada para cima;
- em seguida, o professor deve perguntar se pode acrescentar mais uma linha e uma coluna de cartões, “só para tornar o desafio mais complicado”;
- o professor acrescenta essa linha e essa coluna, colocando “aleatoriamente” (na perspetiva do aluno) alguns cartões com a cor vermelha para cima, e outros com a cor branca para cima, obtendo um quadrado 6x6;

- quando o quadrado maior está completo, o professor vira-se de costas (sem espreitar) e pede aos alunos para inverterem a disposição de um dos 36 cartões do painel (se o cartão escolhido por eles estiver com a cor vermelha para cima, colocam-no com a cor branca para cima e vice-versa);
- por fim, o professor volta-se e adivinha qual dos cartões foi modificado.

Segredos por trás do truque

- o segredo por trás deste truque é bastante simples e reside na linha e na coluna extras que o professor acrescenta ao quadrado inicial construído pelos alunos; a escolha da cor que fica voltada para cima em cada quadrícula, aparentemente aleatória, é pensada pelo professor de forma a que, em cada linha/coluna fique um número ímpar de cartões vermelhos.

Por que motivo funciona: o papel da matemática

Nas figuras seguintes apresentam-se exemplos concretos de quadrados que podem ser construídos para facilitar a compreensão deste truque:

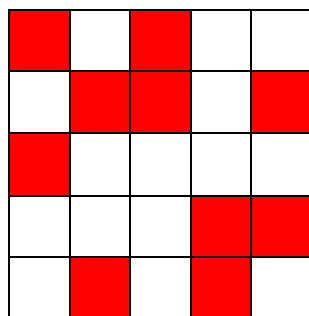


Figura 45 – Onde está o erro? – Quadrado inicial – 5 x 5

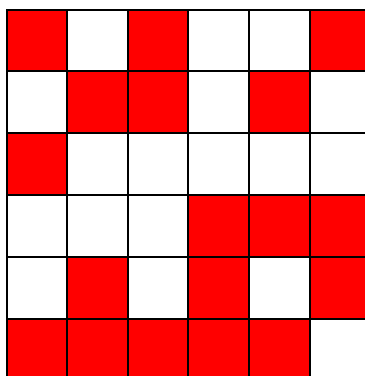


Figura 46 – Onde está o erro? – Quadrado acrescentado – 6 x 6

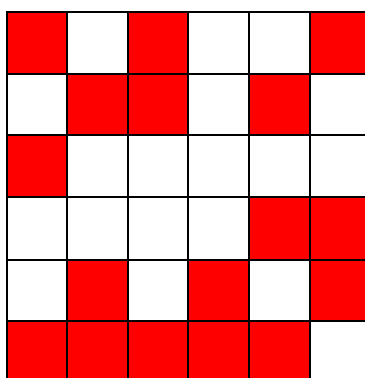


Figura 47 – Onde está o erro? – Quadrado final com um cartão modificado
– 6 x 6

Quando os alunos alteram a disposição de apenas um dos cartões, como lhes foi solicitado, o professor conta o número de cartões vermelhos em cada linha e descobre em qual delas passou a haver um número par de cartões vermelhos. Procedendo de igual modo por colunas, o professor identifica rapidamente a linha e a coluna em que houve a alteração, pelo que identifica o cartão escolhido pelos alunos.

No exemplo apresentado, na figura 47 podemos observar rapidamente que existe um número par de cartões vermelhos na 4.^a linha a contar de cima e na 4.^a coluna a contar da esquerda, pelo que é fácil concluir que o quadrado que foi modificado pelos alunos foi o quadrado assinalado com um X na figura abaixo:

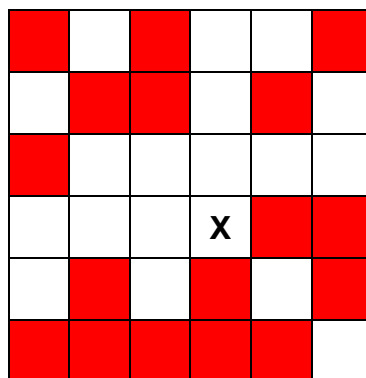


Figura 48 – Onde está o erro? – Quadrado final com o cartão modificado assinalado – 6 x 6

Potenciais aprendizagens

Este truque tem como grande potencialidade a sua simplicidade de execução. É facilmente concretizável em sala de aula e pode ser bastante motivador, principalmente para crianças mais jovens. Esta versão original do truque parece bastante adequada a alunos dos 1.º ao 3.º ciclos, quer pela construção dos materiais, quer pela simplicidade do conceito matemático subjacente: a noção de número par e de número ímpar, ou seja, de ser, ou não, múltiplo de 2. Após a realização do truque, os alunos podem ser levados pelo professor a pensar no modo como este truque funciona e na forma como foi possível acertar sempre no cartão modificado. Depois de perceberem o que se passa por trás deste truque, os próprios alunos podem aprender a fazê-lo uns aos outros e, em casa, aos seus familiares e amigos.

4.2.2. Onde está o erro? (-1) vs (+1)

Em vez de realizar o truque “Onde está o erro?” como na versão original, o professor pode utilizar qualquer outra simbologia binária para decorar os cartões. Uma das possibilidades, com potencialidades mais abrangentes do ponto de vista pedagógico, será fazer a construção de cartões idênticos aos descritos anteriormente, mas pedir aos alunos para desenharem (+1) num dos lados do cartão e (-1) noutro dos lados.

Instruções para realizar o truque

- construir cartões com os números (+1) e (-1) na frente e no verso e o painel vertical;
- pedir a um ou dois alunos que vá ao painel vertical e coloque os cartões de forma a formar um quadrado 5x5 (por exemplo);
- em seguida, o professor deve acrescentar mais uma linha e uma coluna, colocando “aleatoriamente” (na perspectiva do aluno) alguns cartões com o número (-1) para cima, e outros com o número (+1) para cima, obtendo um quadrado 6X6;
- quando o quadrado maior está completo, o professor vira-se de costas (sem espreitar) e pede aos alunos para inverterem a disposição de um dos 36 cartões do painel;
- por fim, o professor volta-se e adivinha que cartão foi modificado.

Segredos por trás do truque

- tal como na versão anterior do truque, o segredo está em acrescentar uma linha e uma coluna ao quadrado inicial, de forma a que, em cada linha/coluna, fique sempre um número ímpar de (-1).

Por que motivo funciona: o papel da matemática

(+1)	(-1)	(+1)	(-1)	(-1)
(-1)	(+1)	(+1)	(-1)	(+1)
(+1)	(-1)	(-1)	(-1)	(-1)
(-1)	(-1)	(-1)	(+1)	(+1)
(-1)	(+1)	(-1)	(+1)	(-1)

Figura 49 – Onde está o erro? (-1) vs (+1) – Quadrado inicial – 5 x 5

(+1)	(-1)	(+1)	(-1)	(-1)	(+1)
(-1)	(+1)	(+1)	(-1)	(+1)	(-1)
(+1)	(-1)	(-1)	(-1)	(-1)	(-1)
(-1)	(-1)	(-1)	(+1)	(+1)	(+1)
(-1)	(+1)	(-1)	(+1)	(-1)	(+1)
(+1)	(+1)	(+1)	(+1)	(+1)	(-1)

Figura 50 – Onde está o erro? (-1) vs (+1) – Quadrado acrescentado – 6 x 6

(+1)	(-1)	(+1)	(-1)	(-1)	(+1)
(-1)	(+1)	(+1)	(-1)	(+1)	(-1)
(+1)	(-1)	(-1)	(-1)	(-1)	(-1)
(-1)	(-1)	(-1)	(-1)	(+1)	(+1)
(-1)	(+1)	(-1)	(+1)	(-1)	(+1)
(+1)	(+1)	(+1)	(+1)	(+1)	(-1)

Figura 51 – Onde está o erro? (-1) vs (+1) – Quadrado final com o cartão modificado assinalado – 6 x 6

Potenciais aprendizagens

A versão deste truque, realizada com (-1) e $(+1)$, pode ser usada com alunos do 3.º ciclo, a partir do 7.º ano de escolaridade, quando se lecionam as potências, desde que o professor explique que calculou o produto dos números em cada linha/coluna. Os alunos podem ser levados a perceber que, sendo $(+1)$ o elemento neutro da multiplicação, o produto em cada linha/coluna depende apenas do número de fatores iguais a (-1) nela existentes. Assim, se o produto em cada linha/coluna era sempre igual a (-1) (Figura 50), passou a ser $(+1)$ na 4.ª linha e na 4.ª coluna (Figura 51), então o número modificado está no cruzamento entre ambas. Pode ser explorada com os alunos, a partir deste truque, a sucessão de termo geral $(-1)^n, n \in \mathbb{N}$, tendo em conta as duas subsucessões constantes de valor $(+1)$ e (-1) , para n par e para n ímpar, respetivamente.

Além disso, com (-1) e $(+1)$ o truque torna-se mais difícil de descortinar, porque é menos provável que os alunos pensem que o professor decorou as cores dos cartões/a posição inicial dos números. A construção dos cartões pode envolver outros problemas interessantes como a determinação do número de elementos necessários para construir um cartão maior (7×7 , 8×8 , 9×9 , etc.) para dificultar o truque “lá em casa”. A noção de quadrado perfeito, também trabalhada no 7.º ano, e até a noção de raiz quadrada, podem ser introduzidas após uma atividade deste tipo, estando os alunos mais envolvidos e motivados na sua aprendizagem.

4.2.3. Dívidas e ganhos – Potências de base 3

O truque que se segue, é uma adaptação de um truque descrito em Mulcahy (2013) e, para a sua realização em sala de aula, deve ser explicada aos alunos a seguinte escala: os valores das cartas vermelhas do baralho representam números negativos (dívidas); os valores das cartas pretas do baralho representam números positivos (ganhos). Assim, para um naipe de copas (ou ouros), é estabelecida a seguinte correspondência:














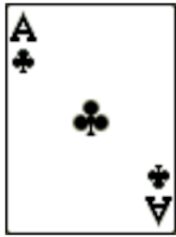
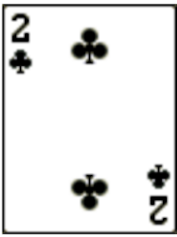
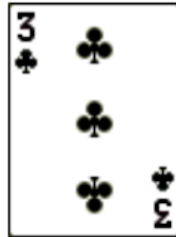
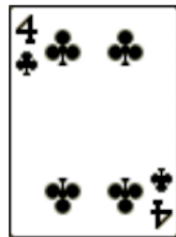
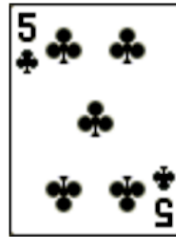
				
Dívida de 1€: -1	Dívida de 2€: -2	Dívida de 3€: -3	Dívida de 4€: -4	Dívida de 5€: -5
				
Dívida de 6€: -6	Dívida de 7€: -7	Dívida de 8€: -8	Dívida de 9€: -9	Dívida de 10€: -10
				
Dívida de 11€: -11	Dívida de 12€: -12	Dívida de 13€: -13		

Figura 52 – Dívidas e ganhos – Valores atribuídos às cartas do naipe de copas (ou de ouros)

Analogamente, para um naipe de paus (ou espadas), é estabelecida a seguinte correspondência:

				
Ganho de 1€: +1	Ganho de 2€: +2	Ganho de 3€: +3	Ganho de 4€: +4	Ganho de 5€: +5

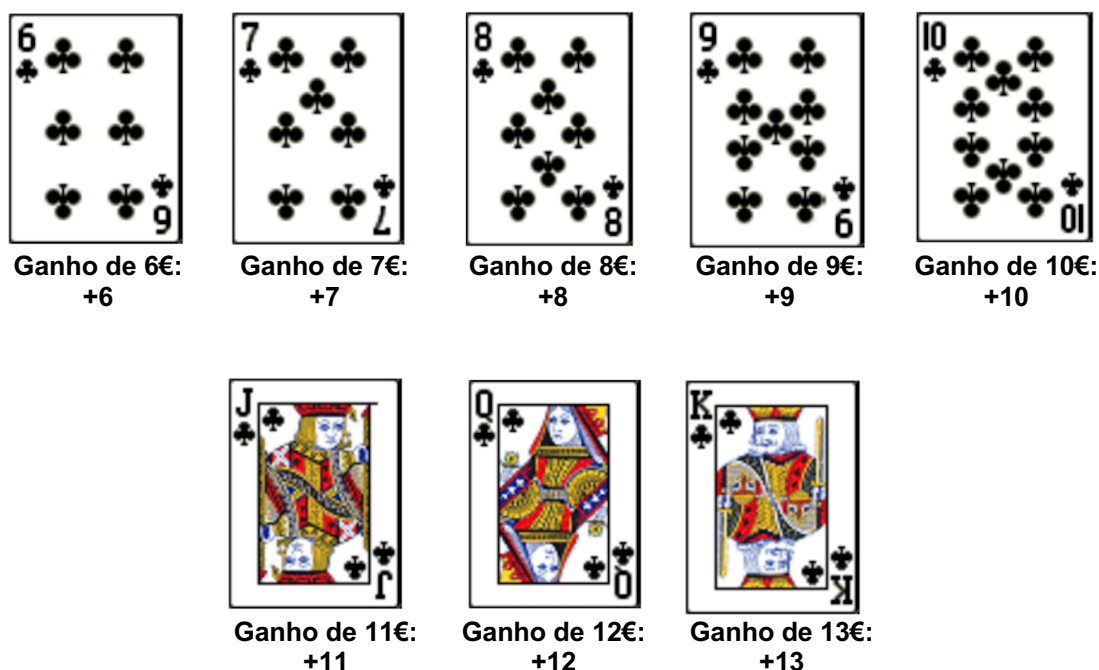


Figura 53 – Dívidas e ganhos – Valores atribuídos às cartas do naipe de paus (ou de espadas)

Instruções para realizar o truque

- o professor deve colocar em cima de uma mesa cinco ou seis cartas, voltadas para baixo, extraídas de um baralho inteiro, previamente baralhado;
- em seguida, deve voltar-se de costas enquanto um aluno baralha as cinco ou seis cartas extraídas;
- outro aluno seleciona e ambos observam, em silêncio, duas ou três destas cartas;
- o professor pede aos alunos que interajam, em surdina, adicionando os valores positivos e/ou negativos associados às cartas que têm em seu poder, tendo em conta a correspondência feita inicialmente entre cada carta e o seu respetivo valor (dívida ou ganho);
- depois de conversarem, os alunos indicam ao professor qual é o valor total dessas duas ou três cartas selecionadas;
- enquanto isso, o professor, de costas voltadas para os alunos invoca os seus poderes mágicos;

- os alunos não informam o professor sobre quantas cartas extraíram nem as mostram ao professor;
- a partir do valor total referido, o professor adivinha quais são as cartas e qual é o seu naipe salientando aos alunos que “selecionaram as cartas que quiseram” e que “nem sabe quantas cartas retiraram”;
- o professor diz, por exemplo: “A minha inspiração mágica diz-me que vocês selecionaram 2 cartas que correspondem a dívidas e uma carta que corresponde a um ganho. Estou certo?”;
- os alunos confirmam a hipótese do professor;
- o professor continua, dizendo: “Mas esperem, há mais: Eu acho que são duas dívidas, uma de -1 e outra de -3 e um ganho de +9. Está certo?”;
- os alunos olham para as cartas que selecionaram e antes que as mostrem ao professor e a toda a turma, o professor acrescenta: “Eu acho mesmo que as cartas que vocês selecionaram aleatoriamente são o “ás de ouros”, o “três de copas” e o “nove de paus”...”;
- os alunos confirmam o palpite do professor.

Segredos por trás do truque

- o baralho de cartas previamente baralhado e que, com jeito, o professor pode continuar a baralhar ligeiramente em frente à turma, deve manter sempre, no topo, as seis cartas escolhidas pelo professor;
- as seis cartas podem as cartas do seguinte conjunto, que estão, em inglês, em “CHaSeD order”: “Clubs”, “Hearts”, “Spades” and “Diamonds”, para que o professor não se esqueça dos naipes que selecionou. Em português, de agora em diante, designarei esta forma de ordenar as cartas pela “ordenação PCEO”. Este conjunto de cartas contém as cartas ás, três e nove (pretos e vermelhos, ou

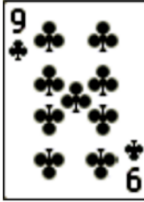
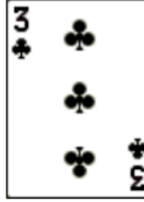
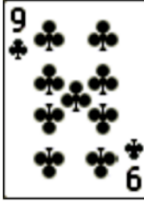

seja, cartas cujo valor absoluto é uma potência da forma 3^n (para $0 \leq n \leq 2, n \in \mathbb{N}_0$), conforme se pode observar na figura abaixo:

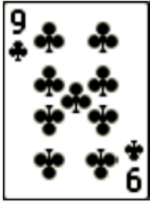

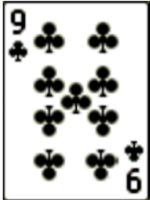

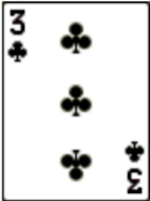

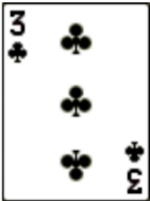




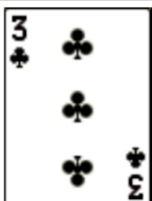
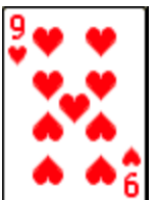
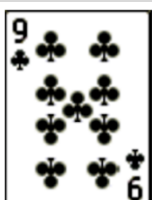




Figura 54 – Dívidas e ganhos – Cartas do baralho que, em valor absoluto, correspondem a potências de base 3, em ordenação PCEO

Por que motivo funciona: o papel da matemática

Para este conjunto de cartas, e se os alunos selecionarem apenas duas das seis cartas em cima da mesa, há 15 resultados possíveis (6C_2):

Valor total	Cálculo	Cartas selecionadas pelos alunos:	
+12	$(+9) + (+3)$		
+10	$(+9) + (+1)$		

+8	$(+9) + (-1)$		
+6	$(+9) + (-3)$		
+4	$(+3) + (+1)$		
+2	$(+3) + (-1)$		
0	$(-1) + (+1)$		
0	$(-3) + (+3)$		
0	$(+9) + (-9)$		
-2	$(-3) + (+1)$		




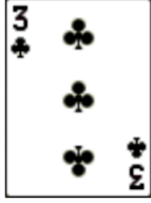






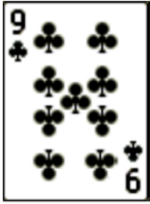


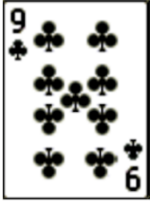

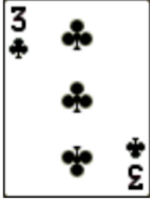
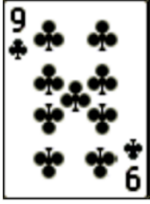


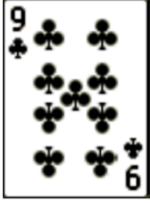
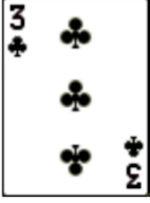

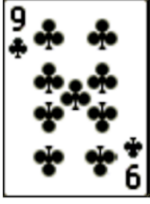


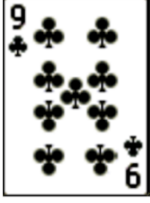


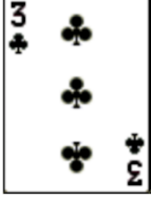



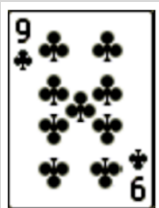





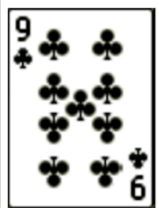





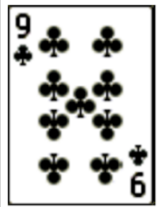





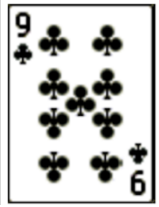

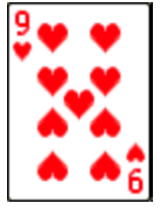
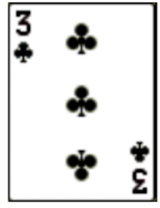

-4	$(-3) + (-1)$		
-6	$(-9) + (+3)$		
-8	$(-9) + (+1)$		
-10	$(-9) + (-1)$		
-12	$(-9) + (-3)$		

Figura 55 – Dívidas e ganhos – Valores que se podem obter ao adicionar os valores correspondentes de duas das seis cartas do conjunto inicial

Os valores provenientes da adição de duas parcelas são todos pares (em valor absoluto) e distintos, à exceção do valor zero. Se for esse o valor obtido, estaremos no único caso em que o professor não terá como adivinhar as cartas seleccionadas, podendo apenas referir que os alunos só podem ter retirado duas cartas iguais, à parte da cor: dois ases, um de ouros e um de espadas, dois noves, um de copas e um de paus ou dois três, um de copas e um de ouros (ver linhas sombreadas na tabela 1).

Para o mesmo conjunto de cartas, e se os alunos seleccionarem três das seis cartas em cima da mesa, há 20 resultados possíveis (6C_3):

Valor total	Cálculo	Cartas seleccionadas pelos alunos:		
+13	$(+9) + (+1) + (+3)$			
+11	$(+9) + (-1) + (+3)$			
+9	$(+9) + (+1) + (-1)$			
+9	$(+9) + (+3) + (-3)$			
+7	$(+9) + (-3) + (+1)$			
+5	$(+9) + (-3) + (-1)$			
+3	$(+3) + (+1) + (-1)$			

+3	$(+3) + (+9) + (-9)$			
+1	$(+1) + (+3) + (-3)$			
+1	$(+1) + (+9) + (-9)$			
-1	$(-1) + (+3) + (-3)$			
-1	$(-1) + (+9) + (-9)$			
-3	$(-3) + (+1) + (-1)$			
-3	$(-3) + (+9) + (-9)$			
-5	$(-9) + (+3) + (+1)$			








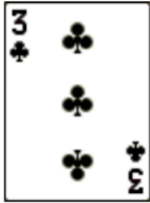







-7	$(-9) + (+3) + (-1)$			
-9	$(-9) + (+1) + (-1)$			
-9	$(-9) + (+3) + (-3)$			
-11	$(-9) + (+1) + (-3)$			
-13	$(-9) + (-1) + (-3)$			

Figura 56 – Dívidas e ganhos – Valores que se podem obter ao adicionar os valores correspondentes de três das seis cartas do conjunto inicial

As somas de três parcelas são todas ímpares (em valor absoluto) e distintas, à exceção das que coincidem com um valor numérico de uma das seis cartas. Assim, temos cenários distintos para o professor:

- se os alunos mencionam um valor coincidente com o valor numérico de uma das seis cartas: +9, +3, +1, -1, -3, -9 o professor poderá dizer “Duas das vossas cartas têm valores simétricos e anulam-se, por isso vamos centrar a nossa atenção apenas na carta diferente que é um nove de copas (por exemplo);

- se os alunos mencionam os valores $+5, +7, +11, +13, -5, -7, -11$, ou -13 é simples obter estes números adicionando a $+9$ ou -9 os valores $+4, +2, -2$, ou -4 , que rapidamente são desdobrados em $+3 + 1, +3 - 1, -3 + 1$ ou $-3 - 1$ e associados às cartas correspondentes.

Possíveis aprendizagens

O truque “Dívidas e Ganhos”, com o referido conjunto de cartas, pode ser realizado com alunos a partir do 7.º ano de escolaridade, no domínio Números e Operações. Na explicação da matemática por trás do truque, à parte do uso de cálculo combinatório, que serve apenas para o professor poder determinar quantas hipóteses distintas há de agrupar duas ou três cartas escolhidas de um conjunto inicial de seis cartas, sem repetição e sem ordem, o conceito matemático subjacente e mais relevante para o aluno é a adição de números inteiros e suas propriedades. Podem ser explorados conceitos como o de número simétrico, salientando os três casos em que se selecionam apenas duas cartas ou os seis casos em que se selecionam três cartas e adicionando os dois números simétricos se obtém o valor zero, permitindo descobrir que o valor da soma é, apenas, o da terceira carta. Pode ser também, neste caso, abordada a propriedade da existência de elemento neutro na adição em \mathbb{Z} .

Caso a exploração venha a ser elaborada no 8.º ano, dentro do mesmo domínio, poderá ainda ser explorado o facto de 1, 3 e 9 serem valores de potências de base 3, uma delas de expoente nulo, e os respetivos simétricos.

4.2.4. Dívidas e ganhos – Base negabinária

O truque “Dívidas e ganhos” pode também ser realizado com outros conjuntos de cartas iniciais. Uma possibilidade será a de selecionar para conjunto de cartas inicial cartas que correspondam a potências de base -2 , ou seja, potências do tipo $(-2)^n$ (para $0 \leq n \leq 4, n \in \mathbb{N}_0$). Para se poder acrescentar a pontuação 16, pode acrescentar-se essa convenção ao baralho inicial, como sendo

a pontuação especial atribuída ao joker preto, conforme se pode observar na figura abaixo:



Figura 57 – Dívidas e ganhos – Cartas do baralho que correspondem a potências de base -2 , em ordenação PCEO

Instruções para realizar o truque

- o professor deve colocar cinco cartas em cima de uma mesa, voltadas para baixo, extraídas de um baralho previamente baralhado;
- em seguida, volta-se de costas enquanto um aluno as baralha;
- outro aluno seleciona e ambos observam, em silêncio, duas destas cartas;
- o professor pede aos alunos que interajam, em surdina, adicionando os valores positivos e/ou negativos associados às cartas que têm em seu poder, tendo em conta a correspondência feita inicialmente entre cada carta e o seu respetivo valor (dívida ou ganho) e estes indicam o valor que obtiverem ao professor;
- o professor procede como no truque original e adivinha as cartas selecionadas pelos alunos.

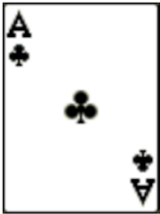







Segredos por trás do truque

- o baralho de cartas previamente baralhado e que, com jeito, o professor pode continuar a baralhar ligeiramente em frente à turma,

deve manter sempre, no topo, as cinco cartas escolhidas pelo professor, em ordem PCEO.

Por que motivo funciona: o papel da matemática

Para este conjunto de cartas, seleccionando duas cartas do conjunto inicial, há 10 resultados possíveis (5C_2), 3 só com cartas pretas, 1 só com cartas vermelhas e 6 com uma carta de cada cor, como se pode observar na figura que se segue:

Valor total	Cálculo	Cartas seleccionadas pelos alunos:	
+5	$(+1) + (+4)$		
+17	$(+1) + (+16)$		
+20	$(+4) + (+16)$		
-10	$(-2) + (-8)$		

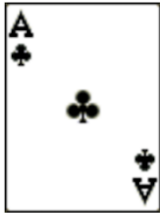

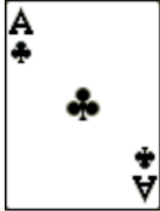









-1	$(+1) + (-2)$		
-7	$(+1) + (-8)$		
+2	$(+4) + (-2)$		
-4	$(+4) + (-8)$		
+14	$(+16) + (-2)$		
+8	$(+16) + (-8)$		

Figura 58 – Dívidas e ganhos – Valores que se podem obter ao adicionar os valores correspondentes de duas de cinco cartas com potências de base -2

Se o professor assim o entender, pode ainda estender este truque e dar a possibilidade aos alunos de escolher qualquer número de cartas, uma vez que qualquer número inteiro se escreve de forma única como soma de potências de base -2 , isto é, numa base negativa (-2), obtendo-se 31 casos distintos:

N.º de cartas	Número na base -2	Valor total
1	00001	1
1	00010	-2
1	00100	4
1	01000	-8
1	10000	16
2	00011	-1
2	00101	5
2	01001	-7
2	10001	17
2	00110	2
2	01010	-10
2	10010	14
2	10100	20
2	00110	-4
2	11000	8
3	00111	3
3	01011	-9
3	10011	15
3	01101	-3
3	10101	21
3	01110	-6
3	10110	18
3	11001	9
3	11010	6
3	11100	12
4	01111	-5
4	10111	19
4	11011	7
4	11101	13
4	11110	10
5	11111	11

Figura 59 – Dívidas e ganhos – Valores que se podem obter como soma de potências de base -2 com qualquer número de cartas

Como se pode observar, as somas obtidas correspondem a todos os números inteiros entre -10 e $+21$, não existindo qualquer soma repetida, o que permite sempre ao professor, recorrendo apenas ao cálculo mental, adivinhar quais e quantas foram as cartas escolhidas pelo aluno. A possibilidade de escrever números em bases negativas, já explorada no capítulo 2, justifica a forma única como cada número se pode escrever à custa de potências de base -2 , exemplificada neste truque.

Possíveis aprendizagens

O truque “Dívidas e Ganhos”, com este conjunto de cartas, pode ser realizado com alunos a partir do 7.º ano de escolaridade, no domínio Números e Operações. Os alunos podem colocar em ação a adição de números inteiros e trabalhar o cálculo de potências de base negativa e o seu sinal consoante a paridade do expoente.













4.2.5. Dívidas e ganhos – Base negafibonacci







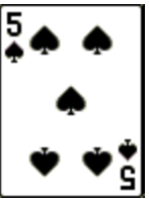

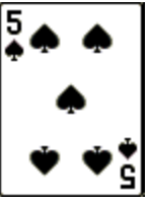

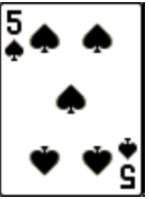

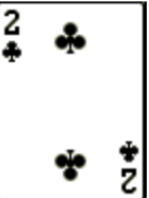

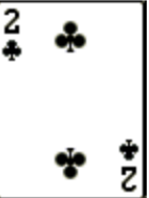

Outra possibilidade será a de selecionar para conjunto de cartas inicial alguns dos termos da sucessão negafibonacci, como se descreve no capítulo 2. Por exemplo, podemos considerar o conjunto de cartas, da figura abaixo, em ordenação PCEO.



Figura 60 – Dívidas e ganhos – Cartas do baralho que correspondem a números da sucessão negafibonacci, em ordenação PCEO

Para este conjunto de cartas, há 15 casos possíveis, para a escolha de duas cartas, como sucedeu no truque inicial. No entanto, agora, 3 dos resultados ocorrem apenas com cartas pretas (ganhos), 3 apenas com cartas vermelhas (dívidas) e 9 com uma carta de cada cor. As somas nunca se repetem, permitindo adivinhar as cartas seleccionadas pelos alunos.

Valor total	Cálculo	Cartas seleccionadas pelos alunos:	
+18	$(+13) + (+5)$		
+15	$(+13) + (+2)$		
+7	$(+5) + (+2)$		
-11	$(-8) + (-3)$		
-9	$(-8) + (-1)$		
-4	$(-3) + (-1)$		

+5	$(+13) + (-8)$		
+10	$(+13) + (-3)$		
+12	$(+13) + (-1)$		
-3	$(+5) + (-8)$		
+2	$(+5) + (-3)$		
+4	$(+5) + (-1)$		
-6	$(+2) + (-8)$		
-1	$(+2) + (-3)$		

+1

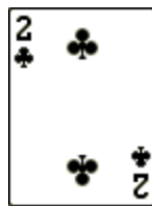
 $(+2) + (-1)$ 

Figura 61 – Dívidas e ganhos – Valores que se podem obter ao adicionar os valores correspondentes de duas de seis cartas com números da sequência negafibonacci

Ao impor a escolha de apenas duas cartas de entre as seis que integram este conjunto, garantimos que as somas são únicas, pelo que é possível ao professor identificar as cartas escolhidas pelos alunos.

O teorema de Zeckendorf indica que qualquer número inteiro positivo pode ser representado de forma única como a soma de números de negafibonacci não consecutivos (se forem consecutivos essa representação deixa de ser única). Como tal, poderíamos pensar em permitir aos alunos escolher mais de duas cartas. No entanto, uma vez que os alunos poderiam escolher números consecutivos, a soma poderia não ser obtida de forma única, pelo que não é uma boa opção.

Possíveis aprendizagens

Com este último conjunto de cartas (ou outros inventados pelo professor) pode ser menos intuitivo adivinhar as cartas escolhidas pelos alunos, mas poderá ser uma boa oportunidade para tomarem contacto com a sequência de Fibonacci generalizada e para explorarem a adição de números inteiros relativos. Pode aplicar-se, no âmbito do domínio Números e Operações, a partir do 7.º ano.

4.2.6. O quadrado desaparecido

O truque “O quadrado perdido” encontra-se descrito em Davidson e McOwan (2011) e Gardner (1956) e baseia-se em factos geométricos.

Instruções para realizar o truque

- o professor apresenta aos alunos uma imagem de um triângulo retângulo construído numa folha quadriculada, cujos catetos medem 5 cm e 13 cm;
- o professor explica que dividiu previamente o triângulo retângulo em quatro peças mais pequenas, que recortou e pintou de cores distintas: vermelha, verde, rosa e azul. As peças encontram-se justapostas no triângulo retângulo inicial preenchendo-o completamente;
- o professor pede aos alunos que se concentrem e fechem os olhos, afirmando que, com a sua força mental, vai conseguir formar o triângulo novamente, apenas movimentando e reorganizando as quatro peças, mas fazendo desaparecer um centímetro quadrado de área.

Segredos por trás do truque

- o truque não tem qualquer segredo, mas requer a preparação prévia dos triângulos, uma vez que as peças inicialmente colocadas sobre o triângulo não o formam realmente, pois as hipotenusas dos triângulos retângulos verde e vermelho não são segmentos de reta paralelos. Há uma pequena diferença no desenho que mostra (de forma quase impercetível) que a área total das quatro peças é mais pequena que a área do triângulo retângulo cujos catetos medem 5 e 13 cm.

Por que motivo funciona: o papel da matemática

Este truque baseia-se no paradoxo de Curry, descrito no capítulo 2, envolvendo o princípio da distribuição escondida e o “desaparecimento” de uma porção de área.

Como é possível observar nas figuras que se seguem, há uma tentativa de construir um triângulo retângulo com área $32,5 \text{ cm}^2$ ($A_{\text{Triângulo Retângulo}} = \frac{5 \times 13}{2} = \frac{65}{2} = 32,5 \text{ cm}^2$), mas a área conjunta das figuras é dada por:

$$A_{\text{Total das 4 peças}} = \frac{8 \times 3}{2} + \frac{5 \times 2}{2} + 7 + 8 = 12 + 5 + 15 = 32 \text{ cm}^2$$

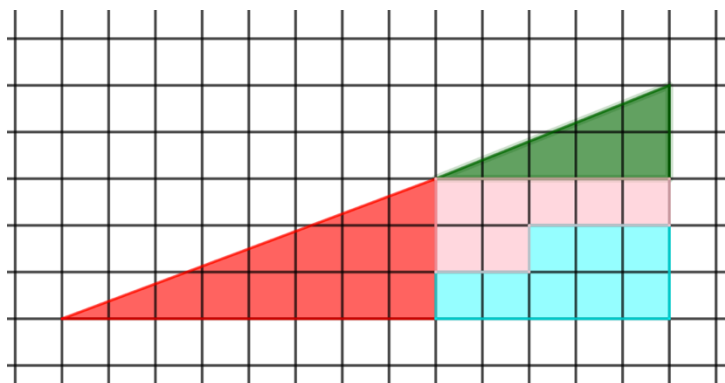


Figura 62 – O quadrado desaparecido – Configuração inicial

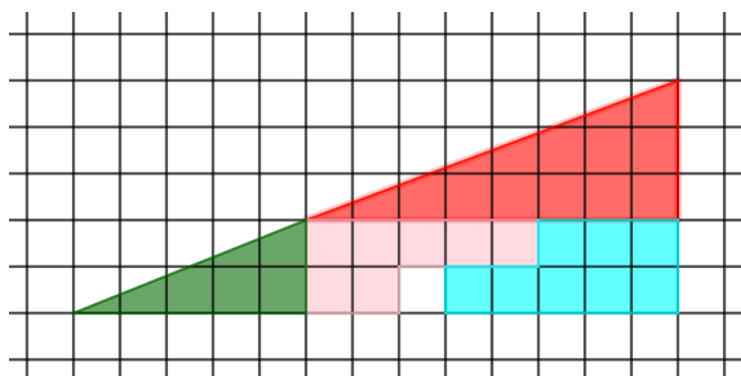


Figura 63 – O quadrado desaparecido – Configuração final

A configuração inicial sugere um triângulo retângulo de catetos 5 e 13 cm, mas na realidade trata-se de um quadrilátero. Se fosse um triângulo com as referidas medidas, ao juntar dois iguais obteríamos um retângulo com dimensões 13 por 5 cm. Na verdade, juntando dois quadriláteros iguais ao inicial obtém-se o seguinte esquema:

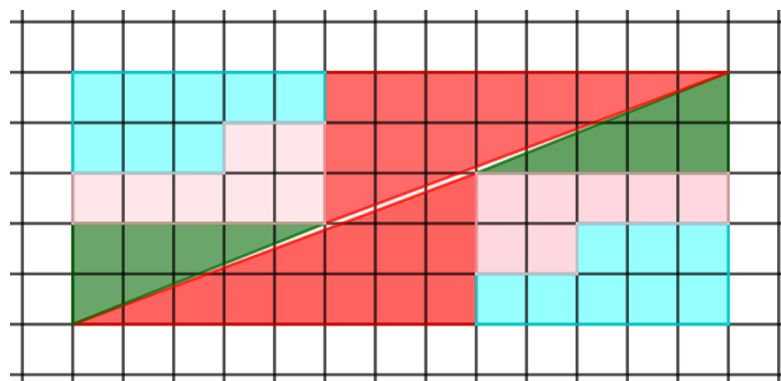


Figura 64 – O quadrado desaparecido – Triângulos justapostos

É possível observar a existência de um pequeno paralelogramo entre os dois quadriláteros, cuja área pode ser calculada do seguinte modo:

$$A_{\text{paralelogramo}} = A_{\text{retângulo}} - 2 \times A_{\text{Total das 4 peças}} =$$

$$= 13 \times 5 - 2 \times 32 = 65 - 64 = 1 \text{ cm}^2$$

É este centímetro quadrado que “desaparece” entre as peças colocadas segundo a configuração final do truque.

Os dois triângulos retângulos menores, embora sejam ambos triângulos retângulos, não são triângulos semelhantes. Basta observar que não têm lados diretamente proporcionais:

$$\frac{8}{5} = 1,6$$

$$\frac{3}{2} = 1,5$$

É, também, possível comprovar que os triângulos não têm, entre si, dois pares de ângulos congruentes:

Amplitudes dos ângulos internos do triângulo verde:

$$\alpha = 90^\circ$$

$$\beta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) \simeq 21,8^\circ$$

$$\gamma = tg^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) \simeq 68,2^\circ$$

Amplitudes dos ângulos internos do triângulo vermelho:

$$\delta = 90^\circ$$

$$\varepsilon = tg^{-1}\left(\frac{8}{3}\right) \simeq 69,4^\circ$$

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{3}{8}\right) \simeq 20,6^\circ$$

É, assim, curioso observar que as hipotenusas dos triângulos vermelho e verde nunca poderiam constituir segmentos de reta colineares e formar a hipotenusa do triângulo de catetos 5 cm e 13 cm, uma vez que os seus declives (m_1 e m_2 , respetivamente) são distintos:

$$m_1 = \frac{3}{8} = 0,375 \text{ e } m_2 = \frac{2}{5} = 0,4$$

Também é interessante constatar que as medidas envolvidas nas peças que constituem este truque geométrico são números de Fibonacci: 1,2,3,5,8,13.

Possíveis aprendizagens

O truque “O quadrado desaparecido” pode ser realizado, com diferentes níveis de aprofundamento, com alunos de diversos anos de escolaridade, no domínio Geometria e Medida. Caso a exploração, por parte dos alunos, tenha em conta apenas o cálculo de áreas de triângulos e quadriláteros e a noção de semelhança de triângulos, este será um truque interessante no 7.º ano. A sequência de Fibonacci, eventualmente já conhecida pelos alunos no âmbito do tópico Sequências, poderá ser revisitada aqui.

Se este truque for explorado com alunos no 8.º ano, a tarefa construída pelo professor poderá, além dos conceitos já mencionados, envolver o aluno no cálculo de declives de segmentos de reta.

No 9.º ano, noções de trigonometria podem ser utilizadas, por exemplo, para descobrir as amplitudes dos ângulos internos dos triângulos retângulos menores.

4.2.7. Quantos triângulos apareceram?

Este truque, descrito por John Quintanilla (2013), envolve conceitos geométricos.

Instruções para realizar o truque

- o professor pede a um aluno voluntário que vá ao quadro e pede-lhe:
“Indica-me um número entre 3 e 10.”
- o aluno dá a sua resposta em voz alta (x);
- o professor continua, dizendo: “Desenha, no quadro, um polígono (convexo) que tenha x lados.”
- o aluno desenha o que o professor lhe pediu;
- o professor pede, em seguida: “Diz-me outro número entre 3 e 10.”;
- o aluno indica o número pedido (y);
- o professor solicita ao aluno: “Desenha y pontos, no interior do polígono.”
- o aluno concretiza a instrução do professor;
- o professor solicita ao aluno: “Agora, eu vou virar-me de costas enquanto tu unes os pontos todos (os vértices do polígono e os pontos que desenhaste) com segmentos de reta, para formares todos os triângulos que conseguires. A única regra que tens de respeitar é que os segmentos de reta só se podem interseccionar em pontos desenhados por ti e nunca formar novos pontos! Quando acabares de desenhar, avisa-me!”;
- o professor volta-se de costas enquanto o aluno desenha e quando este acabar a sua tarefa, o professor pede-lhe que conte quantos triângulos acabaram de surgir e mantenha esse número em segredo;
- o professor pode pedir aos restantes alunos da turma que contem, também, o número de triângulos que surgiram, em silêncio;

- quando os alunos terminam as contagens, o professor adivinha quantos triângulos apareceram na figura.

Segredos por trás do truque

- este truque pode ser realizado solicitando ao aluno números maiores do que 10, sendo que esta limitação surge apenas para facilitar as contagens;
- para adivinhar quantos triângulos há, o professor calcula mentalmente o número T de triângulos, através da expressão

$$T = 2y + x - 2$$

usando os valores de x e y que o aluno escolheu.

Por exemplo, vamos supor que o aluno indicou os números $x = 9$ e $y = 10$ e desenhou o eneágono representado na figura que se segue, com 10 pontos no seu interior:

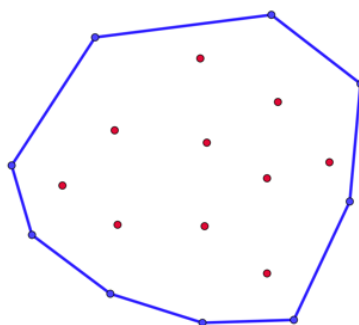


Figura 65 – Quantos triângulos apareceram? – Polígono com x lados e y pontos no interior

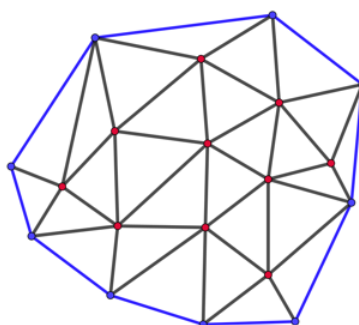


Figura 66 – Quantos triângulos apareceram? – Polígono com todos os triângulos desenhados

Para este caso concreto, surgem 27 triângulos na figura, isto é, o número que se obtém através do cálculo seguinte: $T = 2y + x - 2 = 2 \times 10 + 9 - 2 = 27$

Por que motivo funciona: o papel da matemática

Quando o aluno elabora a construção geométrica da forma como o professor solicitou, podemos estudar as amplitudes dos ângulos internos geradas do seguinte modo:

- por um lado, havendo T triângulos, a amplitude total dos ângulos internos em todos eles é de $180T$; no exemplo anterior, a amplitude total dos ângulos internos dos triângulos seria de $180^\circ \times 27 = 4860^\circ$.

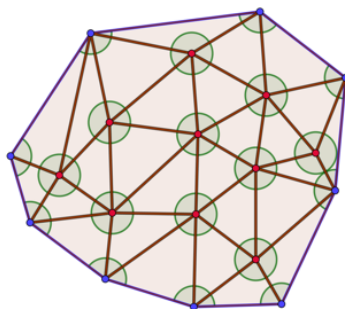


Figura 67 – Quantos triângulos apareceram? – Ângulos internos de todos os triângulos

- por outro lado, em torno de cada um dos y pontos, há y ângulos giros e, logo, a amplitude total desses ângulos é dada por $360y$; no exemplo dado, a soma das amplitudes dos ângulos assinalados na figura seguinte seria de $360^\circ \times 10 = 3600^\circ$;

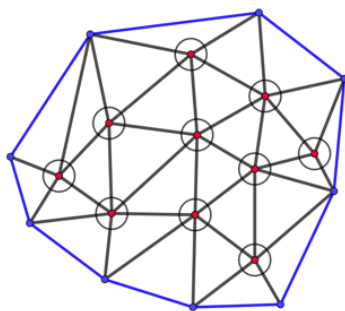


Figura 68 – Quantos triângulos apareceram? – Ângulos giros formados em torno dos y pontos interiores

- sabe-se ainda, que um polígono convexo com x lados tem x ângulos internos, que somam $180(x - 2)$ graus. No exemplo, o eneágono tem $180^\circ \times (9 - 2) = 180^\circ \times 7 = 1260^\circ$;

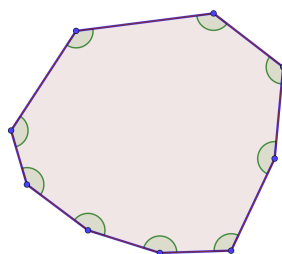


Figura 69 – Quantos triângulos apareceram? – Ângulos internos de um polígono com x lados

Reunindo as informações anteriores, pode concluir-se que:

$$180T = 360y + 180(x - 2)$$

Esta equação é equivalente a:

$$180T = 360y + 180x - 360$$

Dividindo ambos os membros da equação por 180, obtém-se:

$$\frac{180T}{180} = \frac{360y}{180} + \frac{180x}{180} - \frac{360}{180}$$

Ou seja:

$$T = 2y + x - 2$$

Note-se que, no exemplo dado, $4860^\circ = 3600^\circ + 1260^\circ$.

Possíveis aprendizagens

O truque “Quantos triângulos apareceram?” e a explicação do modo como funciona envolve diversos conceitos geométricos abordados no 3.º ciclo do ensino básico: noção de polígono convexo; classificação de ângulos tendo em conta a sua amplitude; soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono convexo com x lados. Além disso, é possível estabelecer uma conexão

com a Álgebra, nomeadamente com o trabalho com equações literais, quando se deduz a fórmula que permite ao professor adivinhar o número de triângulos que vão aparecer. A exploração do truque de forma integral pode ser indicada para turmas dos 8.º e 9.º anos de escolaridade, embora também possa ser aplicada, com menor grau de sofisticação, em turmas do 7.º ano.

4.2.8. Mais rápido que a própria sombra

Este truque inclui a determinação de áreas de polígonos convexos ou não convexos, cujos vértices têm coordenadas inteiras, num certo referencial cartesiano.

Instruções para realizar o truque

- o professor divide a turma em pequenos grupos numerados e distribui um geoplano a cada grupo, pedindo-lhes que, com elásticos, construam um polígono simples, côncavo e com mais de 4 lados; se assim o entender, para facilitar o trabalho dos grupos, o professor pode, também, projetar uma malha quadrangular, disponível em diversos sítios da Internet como <http://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/>, e pedir a um aluno voluntário que vá também ao quadro desenhar um polígono nas condições pedidas;
- o professor desafia os alunos, em cada grupo, a encontrar um processo para calcular a área do polígono que construíram e a calcular a referida área;
- o professor percorre todos os grupos e, “utilizando toda a sua capacidade de concentração e os seus poderes mágicos”, determina rapidamente a área do polígono e escreve-a num papel, com o número do grupo e deixa-o sobre a sua mesa, com a solução voltada para baixo;

- quando os alunos terminam a tarefa, o professor pergunta: “a área do vosso polígono é...”, completando a questão com o valor que escreveu no papel de cada grupo.

Segredos por trás do truque

- o truque funciona para qualquer polígono simples, côncavo ou convexo, construído com elásticos num geoplano, uma vez que os seus vértices localizar-se-ão nos seus pinos; caso seja usada uma malha quadrangular, o professor deve avisar os alunos, durante a construção do polígono, de que os seus vértices devem coincidir com pontos da referida malha; ao pedir aos grupos de alunos que construam um polígono côncavo, com mais de 4 lados, o professor procura garantir, apenas, que os alunos não construam um polígono cuja área é demasiado simples de determinar, como por exemplo um triângulo retângulo ou um paralelogramo, perdendo-se a eficácia do truque;
- para adivinhar, de forma rápida, qual é a área do polígono de cada grupo, o professor conta o número de pontos no interior do polígono, i , e o número de pontos na fronteira, f , e aplica mentalmente a fórmula:

$$A = i + \frac{f}{2} - 1$$

Por exemplo, se um grupo de alunos desenhar o polígono:

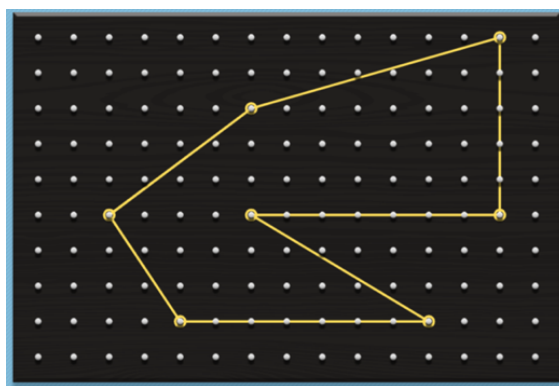


Figura 70 – Mais rápido que a própria sombra – Polígono num geoplano

Para este polígono, o professor conta o número de pontos no interior, $i = 40$, o número de pontos que se situam na sua fronteira, $f = 23$, e calcula:

$$A = i + \frac{f}{2} - 1 = 40 + \frac{23}{2} - 1 = 40 + 11,5 - 1 = 50,5$$

O polígono construído pelos alunos tem 50,5 unidades de área.

Por que motivo funciona: o papel da matemática

Enquanto os alunos usam processos mais morosos para determinar a área de cada polígono, o professor está a usar o Teorema de Pick, já explicado no capítulo 2 desta dissertação.

Possíveis aprendizagens

O truque “Mais rápido do que a própria sombra” pode ser aplicado em turmas do 3.º ciclo, apelando ao cálculo de áreas. É provável que os alunos, a partir do 7.º ano, o façam decompondo cada polígono em triângulos e quadriláteros ou enquadrando o polígono num polígono mais simples, de maior área, subtraindo as áreas dos polígonos excedentes. A fórmula do Teorema de Pick não faz parte das metas curriculares em vigor neste ciclo de escolaridade, mas, dada a sua simplicidade, pode ser usada pelos alunos como uma fórmula extra. Podem ser explorados os conceitos de polígono simples, convexidade e ainda as noções de interior, exterior e fronteira de um polígono.

4.2.9. O que os meus olhos veem

O truque “O que os meus olhos veem” encontra-se descrito por Davidson e McOwan (2011) e está relacionado com noção de simetria, também explorada por Felix Klein (Silva, Freitas, Silva, & Hirth, 2016).

Instruções para realizar o truque

- o professor expande um baralho de cartas em cima da mesa, voltadas para cima, permitindo aos alunos ver que se trata de um baralho de cartas normal;
- em seguida, o professor fecha o baralho e volta a expandi-lo em cima da mesa, mas com todas as cartas voltadas para baixo e percorre o baralho com um dedo desde o fundo até ao topo e pede a um aluno voluntário que lhe diga quando quiser parar;
- em seguida, o aluno retira essa carta, memoriza qual é e volta a inseri-la no baralho;
- o professor e/ou o aluno baralham as cartas;
- o professor adivinha a carta.

Segredos por trás do truque

- para que o truque funcione o professor começa por preparar previamente o baralho colocando no fundo as 22 cartas seguintes, que devem estar baralhadas: ás, 3, 5, 6, 7, 8, e 9 de copas, paus e espadas e o 7 de ouros. As restantes cartas devem ficar no topo do baralho;
- o professor deve orientar as cartas previamente de modo a que fiquem todas do mesmo modo, conforme descrito em seguida. Em cada uma das 22 cartas há alguns símbolos voltados para cima e alguns símbolos voltados para baixo. O professor escolhe, por exemplo, colocar todas as cartas com um número maior de símbolos voltados para cima, como se mostra na figura:

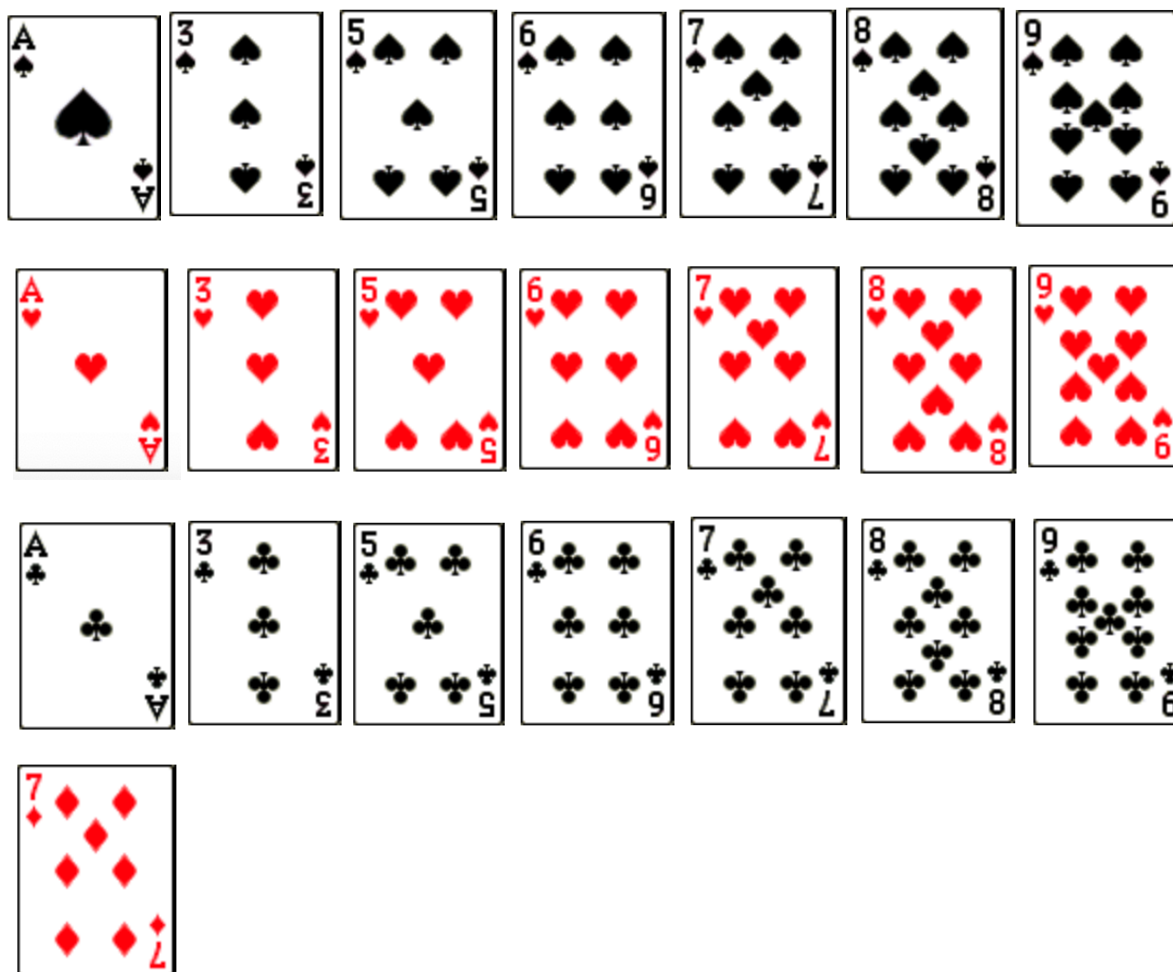


Figura 71 – O que os meus olhos veem – conjunto de 22 cartas que devem ficar no fundo do baralho

- quando o aluno retira a carta, para observar e memorizar o seu valor, o professor recolhe a parte restante do baralho e dá-lhe discretamente uma meia volta (isto é, faz uma rotação de centro no centro da carta e amplitude 180° , mantendo-as voltadas para baixo);
- quando o professor começa a percorrer o baralho com o dedo, do fundo para o topo, deve fazê-lo lentamente e procurar que o aluno peça para parar enquanto ainda está numa das 22 primeiras cartas; se o professor preferir não arriscar, pode dizer aos alunos que vai realizar um truque apenas com uma porção do baralho inteiro e retira previamente as 22 cartas da figura acima, baralhando-as livremente.

Por que motivo funciona: o papel da matemática

Se observarmos as cartas de um baralho normal, verificamos que existem apenas dois tipos de cartas, no que respeita a simetrias: há cartas sem simetria e há cartas com simetria de rotação de grau 2 (simetria de rotação de 180° em torno do centro da carta). Como é possível observar na figura anterior, as 22 cartas do baralho selecionadas são todas as cartas que não têm simetria, pelo que é simples para o professor, depois de dar meia volta ao baralho, identificar qual é a carta que o aluno inseriu e que ficou ao contrário.

Possíveis aprendizagens

A partir das cartas deste baralho, é possível ao professor explorar com os alunos a noção de simetria de uma figura, pelo que a sua exploração é adequada, desde o 2.º ciclo ao 9.º ano de escolaridade, com particular relevância no 8.º ano.

4.2.10. Tenho um palpite!

O truque “Tenho um palpite” tem sido realizado, por diversas vezes, nas atuações do Circo Matemático e, para ser realizado em sala de aula, é necessário que o professor (ou o aluno que aprenda a desempenhar o papel de mágico) tenha um ajudante (por exemplo, um outro aluno da turma), que com ele seja conivente.

Instruções para realizar o truque

- constroem-se cartas iguais em cartolina, numeradas de 1 a 10;
- um aluno voluntário esconde uma das 10 cartas, sem ver qual ela é (de forma a que não possa dar a conhecer a nenhum outro aluno da turma de que carta se trata, nem através das suas expressões faciais);

- o professor e o seu ajudante dividem as restantes cartas entre si, da forma mais equilibrada possível (quatro cartas para um e cinco para o outro, por exemplo);
- o professor e o seu ajudante adicionam os valores das suas cartas, obtendo duas somas parciais;
- o professor calcula mentalmente o resto da divisão da sua soma parcial por 10 e fixa esse número porque vai precisar dele no final;
- o ajudante do professor calcula mentalmente o resto da divisão da sua soma parcial por 10 e diz ao professor: “Tenho um palpite! Eu acho que não é o (inserir aqui o palpite)!”;
- o professor adivinha qual foi a carta escondida pelo aluno.

Segredos por trás do truque

- antes da realização do truque, o professor tem de combinar com o seu ajudante que, quando receber a sua parte das cartas, deve obter a soma parcial dos seus valores, calcular o resto da divisão dessa soma por 10 e dizer ao professor qual foi o resto obtido, inserindo-o na frase como o palpite;
- depois de receber a mensagem, o professor adiciona o palpite do ajudante (o resto) à soma parcial das suas cartas e calcula quantas unidades lhe faltam para chegar a 15 (ou a 5, se a soma for inferior a 5), descobrindo o número retirado pelo aluno.

Consideremos os seguintes exemplos:

A)

- imaginemos que o aluno voluntário retira a carta com o número 7;
- ficam na posse do professor as cartas com os números 1,2,3,4,5,6,8,9 e 10, em ordem aleatória;
- supondo que o professor dá 4 cartas ao ajudante e fica com 5 para si, digamos, por exemplo:

Professor	Ajudante
Cartas 1, 4, 5, 6, 10	Cartas 2, 3, 8 e 9
Soma parcial: 26	Soma parcial: 22
Resto da divisão por 10: 6	Resto da divisão por 10: 2

O ajudante diz: “Tenho um palpite! Eu acho que não é o 2!”

O professor soma 6 com 2, que dá 8 e efetua a subtração $15 - 8 = 7$, obtendo o número escondido pelo aluno.

B)

- imaginemos, agora, que o aluno voluntário retira a carta com o número 2;
- ficam na posse do professor as cartas com os números 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10, em ordem aleatória;
- supondo que o professor dá 4 cartas ao ajudante e fica com 5 para si, digamos, por exemplo:

Professor	Ajudante
Cartas 6, 7, 8, 9, 10	Cartas 1, 3, 4 e 5
Soma parcial: 40	Soma parcial: 13
Resto da divisão por 10: 0	Resto da divisão por 10: 3

O ajudante diz: “Tenho um palpite! Eu acho que não é o 3!”

O professor soma 3 com 0, que dá 3 e efetua a subtração $5 - 3 = 2$, obtendo o número escondido pelo aluno.

Note-se que o truque pode também ser realizado com um número ímpar de cartões, como por exemplo, cartões numerados de 1 a 9. O procedimento é semelhante, mas ao retirar a carta escondida as cartas podem agora ser

divididas igualmente pelo professor e pelo seu ajudante. Além desta diferença, o professor terá, desta vez, que calcular quanto falta para o menor múltiplo de 9 que é maior ou igual à soma dos dois restos calculados. Vejamos um exemplo:

- imaginemos que o aluno voluntário retira a carta com o número 8;
- ficam na posse do professor as cartas com os números 1,2,3,4,5,6,7 e 9, em ordem aleatória;
- supondo que o professor reparte igualmente as 8 cartas restantes, dando 4 ao ajudante e ficando com 4 para si, digamos, por exemplo:

Professor	Ajudante
Cartas 1, 3, 4, 7	Cartas 2, 5, 6 e 9
Soma parcial: 15	Soma parcial: 22
Resto da divisão por 9: 6	Resto da divisão por 9: 4

O ajudante diz: “Tenho um palpite! Eu acho que não é o 4!”

O professor soma 6 com 4, que dá 10 e efetua a subtração $18 - 10 = 8$, obtendo o número escondido pelo aluno.

Por que motivo funciona: o papel da matemática

Tal como foi explicado no capítulo 2, se os cartões estão numerados de 1 a 10, e 10 é um número par, a soma dos 10 primeiros números naturais é sempre congruente com 5, módulo 10 (porque $\frac{10}{2} = 5$).

Assim, ao determinar o resto da divisão de cada uma das somas parciais por 10, o professor e o seu ajudante estão a identificar o número com o qual estas somas são congruentes, módulo 10. Portanto, se designarmos as somas parciais do professor e do ajudante, respetivamente por S_1 e S_2 , teremos:

$S_1 \equiv a \pmod{10}$ e $S_2 \equiv b \pmod{10}$, sendo b o palpite transmitido de forma disfarçada pelo ajudante ao professor.

Por outro lado, a soma dos 10 primeiros números naturais, S , é:

$$S = \frac{10 \times 11}{2} = \frac{110}{2} = 55, \text{ ou seja, } S \equiv 5 \pmod{10}.$$

Mas $S = S_1 + S_2 + X$, sendo X a carta escondida pelo aluno voluntário, ou seja, $X = S - (S_1 + S_2)$.

Se $S_1 \equiv a \pmod{10}$ e $S_2 \equiv b \pmod{10}$, $(S_1 + S_2) \equiv (a + b) \pmod{10}$. Caso $a + b < 5$, o professor deve calcular $X = 5 - (a + b)$. Caso $a + b \geq 5$, deve calcular $X = 15 - (a + b)$.

Se os cartões estão numerados de 1 a 9, e 9 é um número ímpar, a soma dos 10 primeiros números naturais é sempre congruente com 0, módulo 9 (porque a soma é um múltiplo de 9).

Deste modo, teremos:

$S_1 \equiv a \pmod{9}$ e $S_2 \equiv b \pmod{9}$, sendo b o palpite transmitido de forma disfarçada pelo ajudante ao professor.

Por outro lado, a soma dos 9 primeiros números naturais, S , é:

$$S = \frac{9 \times 10}{2} = \frac{90}{2} = 45, \text{ ou seja, } S \equiv 0 \pmod{9}.$$

Voltamos a ter $S = S_1 + S_2 + X$, sendo X a carta escondida pelo aluno voluntário, ou seja, $X = S - (S_1 + S_2)$.

Como $(S_1 + S_2) \equiv (a + b) \pmod{9}$ tem-se que $X = 9 - (a + b)$, se $a + b < 9$ e $X = 18 - (a + b)$, caso $a + b \geq 9$.

Possíveis aprendizagens

O truque pode ser realizado com alunos a partir do 7.º ano de escolaridade, no âmbito do tema “Números e Operações”. Embora os alunos não trabalhem diretamente com aritmética modular, podem aprender a fazer o truque calculando mentalmente restos de divisões de somas por 10. Trata-se de uma oportunidade boa para treinarem o seu cálculo mental.

Se o truque for realizado com um número ímpar de cartões, como por exemplo, cartões numerados de 1 a 9, ao retirar a carta escondida as cartas podem ser divididas igualmente pelo professor e pelo seu ajudante. Após o cálculo das somas parciais, ambos procuram saber quais são os restos da divisão desses números por 9, o que é uma boa oportunidade para ensinar aos alunos a técnica dos “noves fora”, que faz parte das memórias escolares de muitos dos seus familiares. O professor adiciona o resto da divisão da sua soma parcial por 9 ao “palpite” do seu ajudante (o outro resto) e descobre o valor da carta escondida verificando quantas unidades faltam para chegar a 9 ou a 18.

4.2.11. 5-4-3-2-1-1/2 e já sei o teu número!

O truque “ $5 - 4 - 3 - 2 - 1 - \frac{1}{2}$ e já sei o teu número!” faz parte de um estudo desenvolvido por Kien Lim (Lim, 2018) e foi pensado com a finalidade de promover o desenvolvimento de conceitos algébricos.

Instruções para realizar o truque

- o professor pede a um aluno que pense num número secreto e depois siga os passos seguintes:
 - ⇒ adiciona 5 unidades ao teu número;
 - ⇒ multiplica a soma obtida por 4;
 - ⇒ subtrai 3 unidades ao produto obtido;
 - ⇒ divide a resposta anterior por 2;

\Rightarrow adiciona 1 unidade ao quociente;

\Rightarrow adiciona $\frac{1}{2}$.

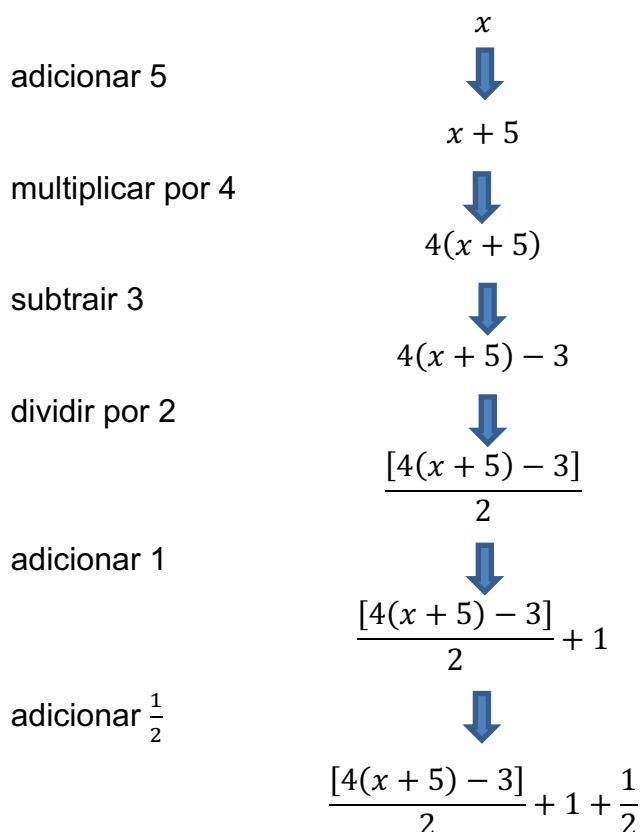
- o professor pergunta a um aluno que número obteve depois de realizar estas 6 operações e adivinha o número inicial em que este pensou.

Segredos por trás do truque

- quando o aluno refere o valor que obteve, o professor subtrai-lhe 10 unidades e divide o resultado por 2, adivinhando o número em que o aluno pensou.

Por que motivo funciona: o papel da matemática

Para a compreensão sobre o modo como funciona este truque, para qualquer número real x , basta recorrer a expressões algébricas que traduzam os diversos passos do truque:



Esta última expressão algébrica pode ser transformada numa expressão algébrica equivalente e mais simplificada:

$$\begin{aligned}
 & \frac{[4(x+5)-3]}{2} + 1 + \frac{1}{2} = \\
 & = \frac{(4x+20-3)}{2} + 1 + \frac{1}{2} = \\
 & = \frac{(4x+17)}{2} + 1 + \frac{1}{2} = \\
 & = 2x + \frac{17}{2} + 1 + \frac{1}{2} = \\
 & = 2x + \frac{18}{2} + 1 = \\
 & = 2x + 9 + 1 = \\
 & = 2x + 10
 \end{aligned}$$

Pode estabelecer-se uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 2x + 10$, na qual cada número em que os alunos pensarem constitui-se como um objeto e cada número obtido após os passos do truque constitui uma imagem.

O professor utiliza a expressão algébrica da função inversa $f^{-1}(x) = \frac{x-10}{2}$ ou $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - 5$. Uma vez que $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = \frac{(2x+10)}{2} - 5 = x + 5 - 5 = x$, conclui-se que o professor consegue sempre obter o número inicial pensado pelo aluno voluntário.

Possíveis aprendizagens

Este truque pode ser realizado pelo professor e pelos alunos recorrendo apenas à aritmética. No entanto, a demonstração do truque e a verdadeira compreensão sobre a forma como funciona é alcançada a partir da Álgebra. Uma vez que a estrutura matemática subjacente a este truque é relativamente simples, alunos a partir do final do 7.º ano podem explorá-lo de uma forma bastante mais completa do que numa abordagem meramente numérica.

Em primeiro lugar, alunos desta faixa etária podem traduzir cada um dos passos do truque recorrendo a expressões algébricas. Trata-se de um processo de generalização e simbolização que deve ser promovido nos alunos desde

cedo. Além disso, estes alunos podem simplificar a expressão algébrica final, que envolve parênteses e denominadores. A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição também está envolvida neste raciocínio, assim como o conceito de expressões algébricas equivalentes.

Se o professor assim o entender, a correspondência entre cada um dos números iniciais pensados pelos alunos e o número final obtido após a realização destes primeiros passos do truque pode ser interpretada como uma função afim, definida por $f(x) = 2x + 10$ e esta função pode ser trabalhada pelos alunos, nas suas diferentes representações (através de tabelas, gráficos, expressões algébricas ou diagramas sagitais).

Outra possibilidade que o professor pode explorar para levar os alunos a ir mais além, é levá-los a descobrir qual é o segredo do truque. Propondo aos alunos a questão adicional “o que faz o professor para descobrir o número de cada aluno?”, os alunos podem chegar, de forma informal, a um processo que permite inverter as operações envolvidas na função (subtrair dez unidades e dividir o resultado por dois). A inversão de uma função através da realização das operações inversas pela ordem inversa é um raciocínio importante que também está presente quando resolvemos formalmente uma equação do 1.º grau.

Uma vez compreendido o modo como este truque funciona, em algumas turmas, o professor pode propor aos alunos que criem os seus próprios truques de magia, semelhantes ao “ $5 - 4 - 3 - 2 - 1 - \frac{1}{2}$ e já sei o teu número!”

4.2.12. Todos obtiveram o 9

O truque “Todos obtiveram o 9” faz parte do mesmo estudo referido no truque anterior (Lim, 2018) e também foi pensado com a finalidade de promover o desenvolvimento de conceitos algébricos.

Instruções para realizar o truque

- o professor pede a todos os alunos de uma turma que pensem num número secreto e depois percorram os passos seguintes:

⇒ adicionem o meu número, que é o 12;

- ⇒ adicionem o número em que o vosso melhor amigo pensou, que é o mesmo que o vosso;
- ⇒ adicionem o número 30;
- ⇒ dividam a soma obtida por 2;
- ⇒ subtraíam o número do vosso melhor amigo;
- ⇒ subtraíam o meu número, que é o 12.
- o professor adivinha que o número obtido é 9.

Segredos por trás do truque

- este truque funciona sempre e não requer qualquer preparação secreta por parte do professor.

Por que motivo funciona: o papel da matemática

Para qualquer número real x , tem-se que:

	x
	↓
adicionar 12	$x + 12$
	↓
adicionar x	$x + 12 + x$
	↓
adicionar 30	$x + 12 + x + 30$
	↓
dividir por 2	$\frac{x + 12 + x + 30}{2}$
	↓
subtrair x	$\frac{x + 12 + x + 30}{2} - x$
	↓
subtrair 12	$\frac{x + 12 + x + 30}{2} - x - 12$

Esta última expressão algébrica, quando simplificada, permite obter o número 9:

$$\begin{aligned}\frac{x + 12 + x + 30}{2} - x - 12 &= \\&= \frac{2x + 42}{2} - x - 12 = \\&= x + 21 - x - 12 = \\&= 9\end{aligned}$$

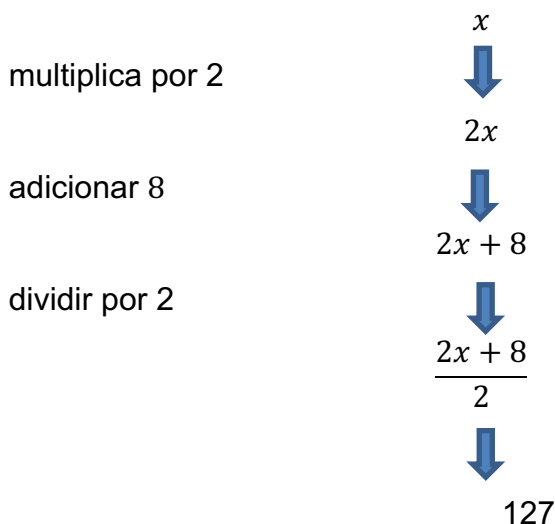
Possíveis aprendizagens

Neste truque, a estrutura matemática subjacente é, também, bastante acessível, pelo que se pode trabalhar a partir do 7.º ano de escolaridade, no âmbito da Álgebra. Mais uma vez os alunos podem colocar em jogo a sua capacidade de generalizar e simbolizar, além de simplificar expressões algébricas.

Será interessante propor aos alunos que criem novas variantes do truque, de forma a que, no final da execução dos passos previstos se obtenha sempre um outro número, previamente sugerido pelo professor. Imagine-se que o desafio consiste em definir um truque que permita sempre obter o número 4, para qualquer valor inicial de x . Cada aluno pode apresentar uma proposta como a que se segue:

“Pensa num número, multiplica-o por 2, adiciona-lhe 8 unidades, divide a soma por 2 e, por fim, subtrai o número em que pensaste.”

Para qualquer número real x , tem-se que:



$$\begin{array}{l}
 x + 4 \\
 \downarrow \\
 \text{subtrair } x \\
 x + 4 - x \\
 \downarrow \\
 4
 \end{array}$$

E se, em vez de 4, o professor pedir para que o resultado final seja sempre um número ímpar, como o 13, uma estratégia poderá ser a que se segue:

“Pensa num número, multiplica-o por 2, adiciona-lhe 26 unidades, divide a soma por 2 e, por fim, subtrai o número em que pensaste.”

Para qualquer número real x , tem-se que:

$$\begin{array}{l}
 x \\
 \downarrow \\
 \text{multiplica por 2} \\
 2x \\
 \downarrow \\
 \text{adicionar 26} \\
 2x + 26 \\
 \downarrow \\
 \text{dividir por 2} \\
 \frac{2x + 26}{2} \\
 \downarrow \\
 x + 13 \\
 \downarrow \\
 \text{subtrair } x \\
 x + 13 - x \\
 \downarrow \\
 13
 \end{array}$$

E as variantes criadas pelos alunos podem ser imensas. Resta, depois, ao professor e à turma, conseguir provar a validade (ou não) dos diversos truques, o que enriquecerá, sem dúvida, o trabalho algébrico desenvolvido na sala de aula (Ponte, Branco, & Matos, 2009).

4.2.13. O par mistério

O truque “O par mistério” encontra-se descrito por Benjamin (2015) e difere dos anteriores truques algébricos uma vez que envolve dois números desconhecidos em vez de um.

Instruções para realizar o truque

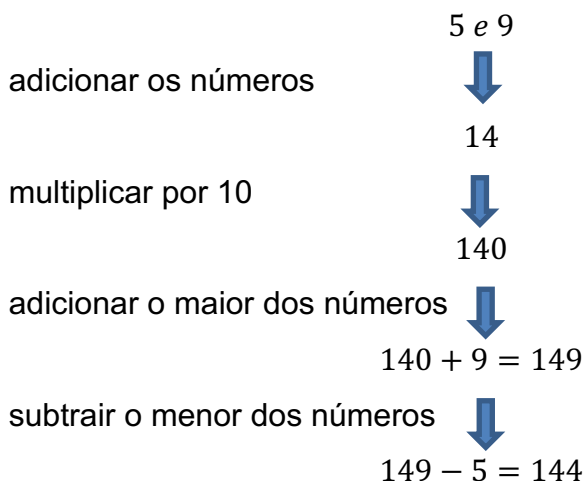
- o professor pede a um aluno voluntário que pense em dois números inteiros entre 1 e 10 e, em seguida, efetue as seguintes operações:
 - ⇒ adicionar os números em que pensou;
 - ⇒ multiplicar o número obtido por 10;
 - ⇒ adicionar o maior dos números em que pensou;
 - ⇒ subtrair o menor dos números em que pensou.
- o professor pede ao aluno que diga que número obteve e adivinha os números originais em que o aluno pensou;
- o truque pode ser repetido com outros alunos da turma.

Segredos por trás do truque

- este truque não requer qualquer preparação secreta por parte do professor;
- para que o professor adivinhe os números em que o aluno pensou basta seguir as seguintes instruções:
 - ⇒ para obter o maior dos números, basta tomar o último algarismo do número obtido pelo aluno depois de realizar todos os passos, adicioná-lo com o número que resta quando esse algarismo é retirado e, em seguida, dividir a soma por 2;
 - ⇒ para obter o menor dos números, basta subtrair ao maior dos números (descoberto no passo anterior) o último algarismo do número obtido pelo aluno.

Por exemplo:

Imagine-se que o aluno pensou nos números 5 (menor número) e 9 (maior número). Ao percorrer todos os passos, o aluno obtém o número 144 porque:



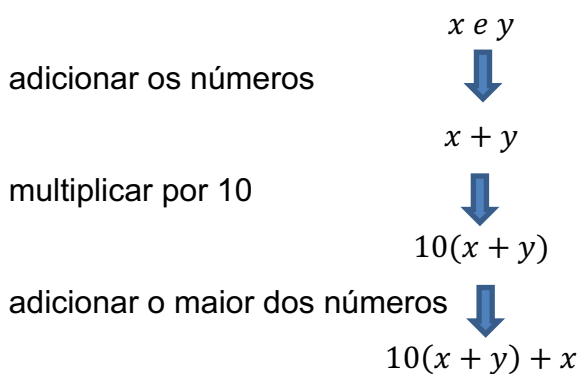
Ao revelar o número 144 ao professor, este procede do seguinte modo:

$$\Rightarrow \frac{4+14}{2} = 9 \text{ (maior dos números);}$$

$$\Rightarrow 9 - 4 = 5 \text{ (menor dos números).}$$

Por que motivo funciona: o papel da matemática

Tomando dois números inteiros entre 1 e 10, quaisquer, que podem ser designados, sem perda de generalidade, por x (maior dos números) e y (menor dos números), o truque “O par mistério” envolve as seguintes operações:



subtrair o menor dos números



$$10(x + y) + x - y$$

Se x e y forem dois números inteiros quaisquer, entre 1 e 10, $x - y$ é um número entre:

$$1 \leq x \leq 10$$

$$1 \leq y \leq 10$$

$$-10 \leq -y \leq -1$$

Logo:

$$1 - 10 \leq x - y \leq 10 - 1$$

$$-9 \leq x - y \leq 9$$

Como assumimos que x designa o maior dos números e y designa o menor dos números, temos que:

$$0 \leq x - y \leq 9$$

Além disso, $10(x + y)$ é um número terminado em 0 que tem o seguinte enquadramento:

$$2 \leq x + y \leq 20$$

$$20 \leq 10(x + y) \leq 200$$

Assim, $10(x + y) + x - y$ tem, como último algarismo, $x - y$ e, como número que resta após a retirada do último algarismo $\frac{10(x+y)+x-y-(x-y)}{10}$, ou seja, $x + y$.

Deste modo, o professor consegue sempre adivinhar os dois números porque efetua as seguintes operações:

$$\Rightarrow \frac{x-y+x+y}{2} = \frac{2x}{2} = x \text{ (maior dos números);}$$

$$\Rightarrow x - (x - y) = x - x + y = y \text{ (menor dos números).}$$

[Note-se que, para x e y números inteiros entre 1 e 10, $x > x - y$, pelo que $x - (x - y)$ é sempre um número positivo.]

Possíveis aprendizagens

Este truque pode ser realizado com alunos de todo o 3.º ciclo do ensino básico, mas, do meu ponto de vista, a sua exploração será mais interessante no 9.º ano. Além da simbolização e da generalização, a explicitação do modo como o truque funciona pode envolver a noção de enquadramento, assim como as propriedades da relação de ordem " \leq ", que são abordadas neste ano de escolaridade. Esta poderá ser, também, mais uma oportunidade para os alunos trabalharem com expressões algébricas e a sua simplificação.

4.2.14. O par mistério (2)

Podemos aplicar o truque "O par mistério" de uma forma mais ampla, gerando maior estupefação junto dos alunos.

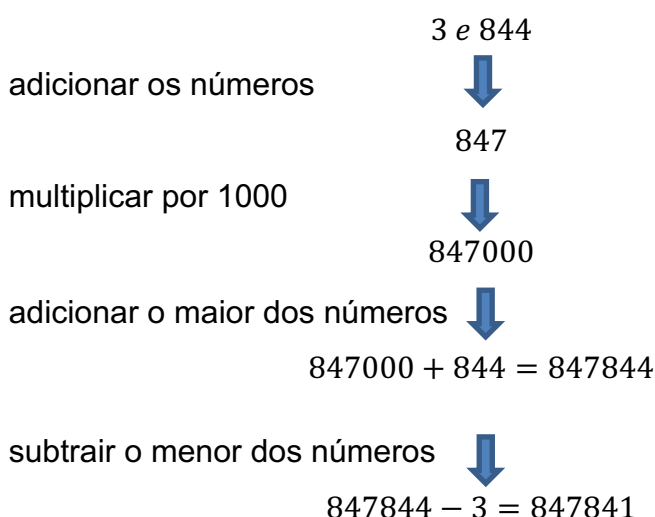
Instruções para realizar o truque

- o professor pede a um aluno voluntário que pense em dois números inteiros entre 1 e 1000 e, em seguida, efetue as seguintes operações:
 - ⇒ adicionar os números em que pensou;
 - ⇒ multiplicar o número obtido por 1000;
 - ⇒ adicionar o maior dos números em que pensou;
 - ⇒ subtrair o menor dos números em que pensou.
- o professor pede ao aluno que diga que número obteve e adivinha os números originais em que o aluno pensou;
- o truque pode ser repetido com outros alunos da turma.

Segredos por trás do truque

- este truque funciona de forma semelhante ao truque original, embora possa originar cálculos mais difíceis de efetuar mentalmente;
- para que o professor adivinhe os números em que o aluno pensou basta seguir as seguintes instruções:
 - ⇒ para obter o maior dos números, basta tomar os três últimos algarismos do número obtido pelo aluno depois de realizar todos os passos, adicioná-lo com o número que resta quando esses algarismos são retirados e, em seguida, dividir a soma por 2;
 - ⇒ para obter o menor dos números, basta subtrair os dois números: o que se obteve no ponto anterior e o número composto pelos três últimos algarismos do número obtido pelo aluno.

Por exemplo: imagine-se que o aluno pensou nos números 3 (menor número) e 844 (maior número). Ao percorrer todos os passos, o aluno obtém o número 847841 porque:



Então, o professor extrai os últimos três algarismos do número revelado pelo aluno, obtendo 841 e o número restante 847. Deste modo:

$$\Rightarrow \frac{841+847}{2} = \frac{1688}{2} = 844 \text{ (maior dos números);}$$

$$\Rightarrow 844 - 841 = 3 \text{ (menor dos números).}$$

Por que motivo funciona: o papel da matemática

Tomando, agora, dois números inteiros entre 1 e 1000, quaisquer, que podem ser designados, sem perda de generalidade, por x (maior dos números) e y (menor dos números), o truque “O par mistério (2)” permite obter o número

$$1000(x + y) + x - y$$

Se x e y forem dois números inteiros quaisquer, entre 1 e 1000, $x - y$ é um número entre 0 e 999, como se pode concluir seguindo passos análogos aos descritos no truque original.

Como $1000(x + y)$ é um número terminado em 000, $1000(x + y) + x - y$ tem, como últimos três algarismos, $x - y$ e, como número que resta após a retirada dos últimos algarismos $x + y$ (ou seja, $\frac{1000(x+y)+x-y-(x-y)}{1000} = x + y$).

Tal como no truque original, para adivinhar os números em questão basta ao professor calcular:

$$\Rightarrow \frac{x-y+x+y}{2} = \frac{2x}{2} = x \text{ (maior dos números);}$$

$$\Rightarrow x - (x - y) = x - x + y = y \text{ (menor dos números).}$$

Possíveis aprendizagens

Este truque pode ser realizado com alunos do 9.º ano, mantendo as mesmas potencialidades descritas na versão original do truque.

4.2.15. Sei qual é a tua carta

O truque que se segue é uma adaptação de um truque descrito por Sherard (1998), aliando o raciocínio usual de “pensar num número” com o uso de um baralho de cartas. Para facilitar a realização do truque o aluno pode usar a calculadora.

Instruções para realizar o truque

- o professor solicita a um aluno voluntário que baralhe um baralho de 52 cartas e selecione uma carta ao acaso, fixa-a e mostra-a a toda a turma, mantendo segredo em relação ao professor;
- o aluno deve conhecer a pontuação habitual das cartas (valete: 11; dama: 12; rei: 13);
- o professor pede ao aluno que efetue uma das seguintes operações, consoante a carta for de paus, copas, espadas ou ouros (PCEO); nota: para facilitar, estas regras podem ser previamente escritas ou projetadas no quadro:
 - ⇒ se a carta é de copas, adiciona 13 pontos à sua pontuação;
 - ⇒ se a carta é de espadas, adiciona 26 pontos à sua pontuação;
 - ⇒ se a carta é de ouros, adiciona 39 pontos à sua pontuação.
- em seguida, o professor solicita ao aluno: multiplica a pontuação que obtiveste por um número que a exceda em seis unidades;
- soma 19 unidades ao produto obtido;
- o professor pergunta ao aluno qual foi o seu resultado final e, em seguida, adivinha qual foi a carta retirada pelo aluno do baralho (pontuação e naipe).

Segredos por trás do truque

- quando o aluno indica qual é o número obtido, o professor subtrai 10 unidades a esse número e obtém um quadrado perfeito;

- em seguida, o professor extrai a raiz quadrada desse número e subtrai 3 unidades ao resultado obtido;
- se o número estiver entre 1 e 13, a carta será de paus, se estiver entre 14 e 26, será de copas, se estive entre 27 e 39 será de espadas e se estiver entre 40 e 52, será de ouros.

Em seguida, apresenta-se um exemplo do que pode acontecer neste truque. Suponhamos que, depois de baralhar, o aluno retira o rei de ouros. A pontuação desta carta é 13. Uma vez que a carta é de ouros, o aluno soma-lhe 39 unidades e obtém o número 52.

As operações que o aluno efetua em seguida são:

- $52 \times (52 + 6) = 52 \times 58 = 3016$
- $3016 + 19 = 3035$

Então o professor calcula: $3035 - 10 = 3025$; $\sqrt{3025} = 55$ (o professor pode pretender usar também a calculadora, ou pode, para impressionar mais os alunos, recorrer mentalmente à estratégia do truque “Adivinhando raízes quadradas”, descrita nesta dissertação, na secção 4.2.17.). Por fim, $55 - 3 = 52 = \text{resultado final}$.

Como $52 \equiv 13 \pmod{4}$, o professor sabe que é um rei e como $40 \leq \text{resultado final} \leq 52$, conclui imediatamente que a carta é de ouros.

Por que motivo funciona: o papel da matemática

Quando o aluno retira uma carta ao acaso de um baralho de 52 cartas e realiza os procedimentos descritos nas instruções deste truque, sabemos que vai obter um número inteiro entre 1 e 52 (existe uma bijeção entre cada uma das cartas e cada um destes números). Designando por n o número inteiro obtido, as operações a realizar em seguida são:

$$n \times (n + 6) + 19 = n^2 + 6n + 19$$

Esta expressão algébrica é equivalente a $(n + 3)^2 + 10$.

Assim, se r for o resultado final obtido pelo aluno:

$$\begin{aligned}(n + 3)^2 + 10 &= r \\ \Leftrightarrow (n + 3)^2 &= r - 10\end{aligned}$$

Portanto, $\sqrt{(n + 3)^2} = \sqrt{|r - 10|}$, para $n + 3 \geq 0$, ou seja, $n \geq -3$. Como n é um número inteiro entre 1 e 52, este truque funciona para qualquer n obtido pelo aluno. Além disso, $|r - 10|$ é sempre igual, neste truque, a $r - 10$, uma vez que $r > 10$, para qualquer n entre 1 e 52 (o valor mínimo que r toma surge quando o aluno retira um ás de paus e é igual a $1 \times 7 + 19 = 26$).

Portanto, para este truque, tem-se que:

$$\begin{aligned}\sqrt{(n + 3)^2} &= \sqrt{r - 10} \\ \Leftrightarrow n + 3 &= \sqrt{r - 10} \\ \Leftrightarrow n &= \sqrt{r - 10} - 3\end{aligned}$$

Possíveis aprendizagens

Este truque pode ser aplicado a qualquer aluno a partir do 7.º ano. No entanto, a exploração do truque do ponto de vista algébrico é mais adequada ao 9.º ano. A representação do valor obtido pelo aluno pode contribuir para a utilização dos processos algébricos de generalização e simbolização. A tradução do enunciado do truque por uma expressão algébrica do 2.º grau é outro aspeto que se proporciona. Se o professor quiser utilizar um exemplo de um aluno, pode ser uma oportunidade rica para os alunos resolverem uma equação do 2.º grau, com recurso à fórmula resolvente ou começando por completar o quadrado do binómio (ambos os métodos estão previstos nas atuais metas de aprendizagem para o 9.º ano de escolaridade (M. E., 2013)).

No exemplo dado, o aluno obteve o número 3035. A equação a resolver pela turma poderá ser:

$$n^2 + 6n + 19 = 3035$$

Começando por completar o quadrado do binómio:

$$\begin{aligned}
 n^2 + 6n + 19 &= 3035 \\
 \Leftrightarrow n^2 + 6n + 9 + 10 &= 3035 \\
 \Leftrightarrow (n + 3)^2 + 10 &= 3035 \\
 \Leftrightarrow (n + 3)^2 &= 3035 - 10 \\
 \Leftrightarrow (n + 3)^2 &= 3025 \\
 \Leftrightarrow n + 3 = \sqrt{3025} \vee n + 3 &= -\sqrt{3025} \\
 \Leftrightarrow n + 3 = 55 \vee n + 3 &= -55 \\
 \Leftrightarrow n = 55 - 3 \vee n &= -55 - 3 \\
 \Leftrightarrow n = 52 \vee n &= -58
 \end{aligned}$$

Como $1 \leq n \leq 52$, a solução da equação é $n = 52$.

A resolução da equação por este método permite ao aluno compreender perfeitamente as operações “secretas” realizadas pelo professor para descobrir o valor de n : subtrair 10 unidades ao resultado obtido, em seguida, extrair a raiz quadrada e, por fim, subtrair 3 unidades.

A equação pode, também, ser resolvida pela fórmula resolvente permitindo obter o mesmo conjunto-solução, embora seja mais difícil para o aluno, a partir deste método de resolução compreender realmente o modo como o truque funciona.

Destaca-se, por fim, que o truque original descrito por Sherard (1998) não envolve cartas. Para garantir que $n \geq -3$, o mágico solicita ao voluntário que pense num número inteiro positivo.

4.2.16. Adivinhando raízes cúbicas

O truque que se segue encontra-se descrito por Benjamin e Shermer (2006) e envolve cálculo mental e regularidades numéricas.

Instruções para realizar o truque

- o professor pede a um aluno voluntário que pense num número inteiro entre 0 e 100 (inclusive) e o eleve ao cubo (pode usar a calculadora, se necessitar);
- em seguida, o professor pede ao aluno que diga a toda a turma que número obteve;
- mediante o número que o aluno indica, o professor adivinha mentalmente e de forma rápida em que número o aluno pensou;
- o truque pode ser repetido, depois, com outros alunos da turma.

Segredos por trás do truque

- para poder determinar, com rapidez, em que número pensou o aluno, o professor precisa de conhecer de cor os cubos dos números inteiros entre 0 e 10 (inclusive) e recordar que, ao multiplicar por 10 cada um desses números inteiros, o seu cubo é um número terminado em 000 (já que $10^3 = 1000$):

n	n^3
0	0
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
6	216
7	343
8	512
9	729
10	1000

Figura 72 – Cubos de números inteiros entre 0 e 10 (inclusive)

$10n$	$1000n^3$
0	0
10	1000
20	8000
30	27000
40	64000
50	125000
60	216000
70	343000
80	512000
90	729000
100	1000000

Figura 73 – Cubos de números inteiros terminados em 0, entre 0 e 100 (inclusive)

- para determinar o algarismo das dezenas do número em que o aluno pensou, o professor deve enquadrar o número mencionado pelo aluno entre dois cubos perfeitos: por exemplo, 493039 é um número que se situa entre 343000 e 512000, ou seja, entre 70^3 e 80^3 . Logo, o algarismo das dezenas será um 7. Note-se que, para ser mais rápido a fazer o enquadramento, o professor pode apenas concentrar a sua atenção nos primeiros três algarismos, observando que 493 está situado entre 343 e 512;
- para determinar o algarismo das unidades, o professor pode concentrar-se apenas no algarismo das unidades do resultado: no exemplo mencionado (493039), uma vez que termina em 9, o algarismo das unidades será um 9 (como 9^3);
- assim, o número em que o aluno pensou foi o 79.

Por que motivo funciona: o papel da matemática

Dados dois números positivos, a e b , tais que $a < b$, sabe-se que $a^3 < b^3$, dada a monotonia da operação que consiste em elevar números positivos ao

cubo. Assim, é sempre possível enquadrar o cubo de um número c^3 entre a^3 e b^3 e daí concluir que $a < c < b$. Por este motivo, tomando como referência um cubo de um número entre 0 e 100, é sempre possível determinar o algarismo das dezenas desse número.

Por outro lado, analisando a tabela no Anexo I, é possível identificar regularidades numéricas nos cubos perfeitos nela incluídos. O algarismo das unidades do cubo perfeito de um número inteiro terminado em 8 é um número cujo algarismo das unidades é o 2, tal como sucede com o cubo de 8: 512. Por exemplo, os cubos de 8, 18, 28, 38, 48 e assim sucessivamente, são todos números terminados em 2. A tabela seguinte, resume as diversas possibilidades para o algarismo das unidades de n , quando se conhece o algarismo das unidades de n^3 :

Algarismos das unidades	
n	n^3
0	0
1	1
2	8
3	7
4	4
5	5
6	6
7	3
8	2
9	9

Figura 74 – Algarismo das unidades do cubo de um número inteiro entre 0 e 100

Repare-se que não há quaisquer repetições nos algarismos da 2.^a coluna da tabela, pelo que o algarismo das unidades de n é, fácil e inequivocamente, identificável.

Possíveis aprendizagens

Este truque é apropriado para alunos do 7.º ano, a propósito dos conceitos de potências e raiz cúbica. A noção de cubo perfeito e as propriedades das raízes cúbicas podem ser aprofundadas a propósito da realização do truque, assim como as capacidades de identificação de regularidades numéricas e de estimação. A extração da raiz cúbica, como operação inversa de elevar ao cubo, terá certamente, um papel importante na compreensão do funcionamento do truque.

4.2.17. Adivinhando raízes quadradas

De forma idêntica ao truque anterior, pode pensar-se: é possível aplicar o mesmo raciocínio para determinar mentalmente raízes quadradas de quadrados perfeitos? Benjamin e Shermer (2006) propõem que o truque se realize do modo que se descreve em seguida.

Instruções para realizar o truque

- o professor pede a um aluno voluntário que pense num número inteiro entre 0 e 100 (inclusive) e o eleve ao quadrado (pode usar a calculadora, se necessitar);
- em seguida, o professor pede ao aluno que diga a toda a turma que número obteve;
- mediante o número que o aluno indica, o professor adivinha mentalmente em que número o aluno pensou;
- o truque pode ser repetido, depois, com outros alunos da turma.

Segredos por trás do truque

- De forma análoga ao truque anterior, o professor necessita conhecer de cor os quadrados dos números inteiros entre 0 e 10 (inclusive) e recordar que, ao multiplicar por 10 cada um desses números inteiros, obtém um número terminado em 00 (já que $10^2 = 100$):

n	n^2
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100

Figura 75 – Quadrados de números inteiros entre 0 e 10 (inclusive)

$10n$	$100n^2$
0	0
10	100
20	400
30	900
40	1600
50	2500
60	3600
70	4900
80	6400
90	8100
100	10000

Figura 76 – Quadrados de números inteiros terminados em 0, entre 0 e 100 (inclusive)

- para determinar o algarismo das dezenas do número em que o aluno pensou, basta o professor observar o número de centenas correspondente ao número que o aluno lhe fornece e enquadrá-lo entre dois quadrados perfeitos: por exemplo, em 7396 há 73 centenas, e 73 é um número situado entre 64 e 81, ou seja, entre 8^2 e 9^2 . Logo, o algarismo das dezenas será um 8;
- para determinar o algarismo das unidades, há agora duas possibilidades, ao contrário do que sucedia no truque anterior, uma vez que os números terminados em 6 podem provir do quadrado de um número terminado em 4 ou 6;
- assim, o número em que o aluno pensou poderá ser o 84 ou o 86;
- o professor deve, então, calcular o valor de $85^2 = 7225$. Como $7396 > 7225$ conclui-se que $n^2 > 85^2$, pelo que $n > 85$, ou seja, neste caso, $n = 86$.

Note-se que pode parecer pouco evidente como calcular o quadrado de um número de dois algarismos, mas a tarefa torna-se mais simples se se proceder do seguinte modo:

$$85^2 = 80 \times 90 + 25 = 7200 + 25 = 7225$$

Esta propriedade é sempre válida e a sua demonstração algébrica é simples, para qualquer número inteiro n :

$$(n - 5)(n + 5) + 25 = n^2 - 25 + 25 = n^2$$

Por que motivo funciona: o papel da matemática

À semelhança do que sucede quando elevamos dois números positivos ao cubo, sabe-se, também, que dados dois números positivos, a e b , tais que $a < b$, $a^2 < b^2$. Portanto, se $a^2 < c^2 < b^2$ conclui-se que $a < c < b$. Por este motivo, tomando como referência o quadrado de um número entre 0 e 100, é sempre possível determinar o algarismo das dezenas desse número.

No entanto, analisando a tabela no Anexo II, as regularidades que se encontram nos quadrados perfeitos não são tão deterministas como sucede nos cubos perfeitos. O algarismo das unidades do quadrado perfeito de um número inteiro terminado em 9 é um número cujo algarismo das unidades pode ser o 3 ou o 7, por exemplo. A tabela seguinte, resume as diversas possibilidades para o algarismo das unidades de n , quando se conhece o algarismo das unidades de n^2 :

Algarismos das unidades	
n	n^2
0	0
1	1
2	4
3	9
4	6
5	5
6	6
7	9
8	4
9	1

Figura 77 – Algarismo das unidades do quadrado de um número inteiro entre 0 e 100

Na 2.^a coluna da tabela, há repetições antes e depois do algarismo 5: um quadrado perfeito terminado em 1, pode ser originado por um número inteiro terminado em 1 ou 9; se for terminado em 4, pode ser originado por um número inteiro terminado em 2 ou 8; se for terminado em 9, pode ser originado por um número inteiro terminado em 3 ou 7 e, por fim, se terminar em 6, pode ser originado por um número inteiro terminado em 4 ou 6.

Assim, como há esta aparente simetria em relação ao número que termina em 5, é uma boa estratégia conhecer o quadrado desse número. O cálculo desse quadrado é simples, se se usar o truque explicado na secção anterior.

Possíveis aprendizagens

Este truque também é apropriado para alunos a partir do 7.º ano, a propósito dos conceitos de potências e raiz quadrada. Envolve a noção de quadrado perfeito, propriedades das raízes quadradas e extração da raiz quadrada como operação inversa de elevar ao quadrado. Se for explorado no 8.º ano, também poderá ser analisada a questão do quadrado de um número inteiro terminado em 5, cuja demonstração pode levar à simplificação de expressões algébricas e até à exploração do caso notável da multiplicação (diferença de quadrados).

4.2.18. O mágico número 73

O truque numérico “O mágico número 73” surge descrito por Colgan (2011) e Froggatt (2005) e requer o recurso a uma calculadora.

Instruções para realizar o truque

- O professor começa por escrever o número 73 num pedaço de papel, dobra-o em 4 e coloca-o em cima da sua mesa;
- em seguida, pede a um aluno da turma, que usando a sua calculadora, introduza um número de 4 algarismos e o repita, obtendo um número de 8 algarismos – por exemplo: 98749874;
- o professor pede ao aluno que verifique se o número que escreveu é divisível por 137;
- se for divisível por 137 (e vai ser!), o professor pede ao aluno que divida o número que obteve, após a divisão, pelo número original que escolheu, com 4 algarismos;
- o professor diz ao aluno que sabe qual foi o resultado que ele obteve e mostra o pedaço de papel onde tinha escrito previamente o número 73.

Segredos por trás do truque

- Este procedimento resulta sempre, permitindo chegar ao número 73, seja qual for o número inicial de 4 algarismos que o aluno escolha.

Por que motivo funciona: o papel da matemática

Seja $abcd$ o número de 4 algarismos escolhido pelo aluno. Sabe-se que o número introduzido na calculadora será $abcdabcd$. Quando se multiplicam os números primos 137 e 73 obtém-se 10001. Multiplicando qualquer número de 4 algarismos $abcd$ por 10001, obtém-se $abcdabcd$, uma vez que $abcd \times 10000 = abcd0000$ e $abcd \times 1 = abcd$. Portanto:

$$\begin{aligned}
 abcd \times 137 \times 73 &= \\
 &= abcd \times 10001 = \\
 &= abcd \times (10000 + 1) = \\
 &= abcd \times 10000 + abcd \times 1 = \\
 &= abcd0000 + abcd = \\
 &= abcdabcd
 \end{aligned}$$

Salienta-se, ainda, a possibilidade de os alunos efetuarem esta multiplicação usando o algoritmo tradicional, caso seja considerado proveitoso, para tornar mais visível qual o resultado da operação $abcd \times 10001$:

					a	b	c	d
				\times	1	0	0	0
					0	0	0	1
					<hr/>			
					a	b	c	d
					0	0	0	0
					0	0	0	0
					0	0	0	0
					0	0	0	0
					<hr/>			
				+	a	b	c	d
					a	b	c	d
					<hr/>			
					a	b	c	d

Uma vez que $abcdabcd = abcd \times 10001 = abcd \times 137 \times 73$, concluímos que $abcdabcd \div 137 = abcd \times 73$, ou seja, $abcdabcd$ é sempre divisível por 137. O número que se obtém, após a divisão, é $abcd \times 73$ e logo, ao ser dividido por $abcd$ permite obter o número mágico 73.

Possíveis aprendizagens

Este truque pode ser realizado a partir do 7.º ano, envolvendo conceitos do domínio Números e Operações: noção de divisibilidade e de número primo. É, também, possível a exploração do truque do ponto de vista algébrico. A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição tem aqui um papel importante.

É possível fazer um truque análogo, com um número em que se repetem três algarismos, formando a sequência $abcabca$, bastando multiplicar abc por 1001 (Bastos I. , 2015). Os próprios alunos podem construir um truque nesse sentido, bastando que decomponham 1001 em fatores primos e compreendam que $1001 = 7 \times 11 \times 13$. Este poderá ser, do ponto de vista pedagógico, um desafio interessante a propor aos alunos.

4.2.19. Jogando com três dados

Este truque é atribuído a Claude Gaspar Bachet e data de 1612 (Gardner, 2018).

Instruções para realizar o truque

- um aluno voluntário lança três dados sobre uma mesa e soma as três pontuações obtidas (face voltada para cima);
- um segundo aluno escolhe aleatoriamente dois dos três dados (despreza o terceiro dado) e soma ao valor obtido pelo aluno anterior a soma das pontuações nas faces que ficaram voltadas para baixo nesses dois dados;

- em seguida, o segundo aluno volta a lançar os dois dados que escolheu e adiciona as pontuações obtidas (face voltada para cima) ao valor que obteve no passo anterior;
- um terceiro aluno escolhe, aleatoriamente, um dos dois dados ainda em jogo e adiciona, à soma anterior, o valor da face voltada para baixo;
- por fim, o terceiro aluno lança de novo o dado sobran­te e adiciona a pontuação obtida (face voltada para cima) à soma obtida no ponto anterior;
- o professor enfatiza que cada um dos três alunos lançou os dados livremente e que os segundo e terceiro alunos escolheram, aleatoriamente, os dados que iriam continuar em jogo;
- o professor adivinha o valor final obtido depois de realizados os procedimentos dos três alunos;
- o truque pode ser repetido com quaisquer outros três alunos da turma.

Segredos por trás do truque

- para adivinhar o valor que se obtém basta, ao professor, adicionar 21 às pontuações visíveis nos três dados (o último dado em jogo e os dados que foram desprezados durante o processo).

Em seguida, mostra-se um exemplo do que pode acontecer:

1.º aluno – Lançamento de 3 dados
(Faces voltadas para cima)



1.º aluno – adiciona as pontuações

$$3 + 4 + 1 = 8$$

2.º aluno – escolhe dois dos três dados (por exemplo, o primeiro e o terceiro, e adiciona os valores das faces voltadas para baixo: 4 e 6, respectivamente)

$$8 + 4 + 6 = 18$$

O segundo dado, com o número 4, é desprezado e recuperado no final.

2.º aluno – Lança os dois dados recolhidos por si.



2.º Aluno – adiciona as pontuações à soma anterior

$$18 + 6 + 2 = 26$$

3.º aluno – escolhe um dos dois dados (por exemplo, o segundo, e adiciona o valor da face voltada para baixo: 5)

$$26 + 5 = 31$$

O primeiro dado, com o número 6, é desprezado e recuperado no final.

3.º aluno – lança novamente o dado que escolheu



3.º aluno - adiciona a pontuação obtida à soma anterior

$$31 + 4 = 35$$

O professor calcula $21 + 4 + 6 + 4 = 35$ e adivinha a soma final obtida pelos alunos.

Figura 78 – Jogando com 3 dados – Um exemplo

Por que motivo funciona: o papel da matemática

Uma vez que, num dado cúbico como os que usamos habitualmente, a soma das pintas das faces opostas é sempre 7, percorrer os passos que se seguem:

1.º aluno – Lançamento de 3 dados (Faces voltadas para cima)

Pontuações: x , y e z

1.º aluno – adiciona as pontuações

$$x + y + z$$

2.º aluno – escolhe dois dos três dados (por exemplo e sem perda de generalidade, o primeiro e o segundo, e adiciona os valores das faces voltadas para baixo: $7 - x$ e $7 - y$, respectivamente)

$$x + y + z + (7 - x) + (7 - y) = 14 + z$$

O dado com a pontuação z é desprezado e recuperado no final.

2.º aluno – Lança os dois dados escolhidos por si.

r e s

2.º Aluno – adiciona as pontuações à soma anterior

$$14 + z + r + s$$

3.º aluno – escolhe um dos dois dados (por exemplo e sem perda de generalidade, o primeiro, e adiciona o valor da face voltada para baixo: $7 - r$)

$$14 + z + r + s + (7 - r) = 21 + z + s$$

O dado com o número s é desprezado e recuperado no final.

3.º aluno – lança novamente o dado que escolheu

t

3.º aluno - adiciona a pontuação obtida à soma anterior

$$21 + z + s + t$$

O professor calcula $21 + z + s + t$ e adivinha a soma final obtida pelos alunos.

Figura 79 – Jogando com 3 dados – Demonstração

Possíveis aprendizagens

Este truque pode ser explorado com alunos a partir do 7.º ano, aliando os domínios Números e Operações e Álgebra. A compreensão do modo como funciona pode proporcionar oportunidades para a representação de quantidades desconhecidas usando expressões algébricas e a adição de termos semelhantes na sua simplificação.

4.2.20. Contando até ao rei

O truque “Contando até ao rei” surge descrito por Matthews (2008) e Mitchell e Cummings (2017) e é realizado com um baralho de 52 cartas.

Instruções para realizar o truque

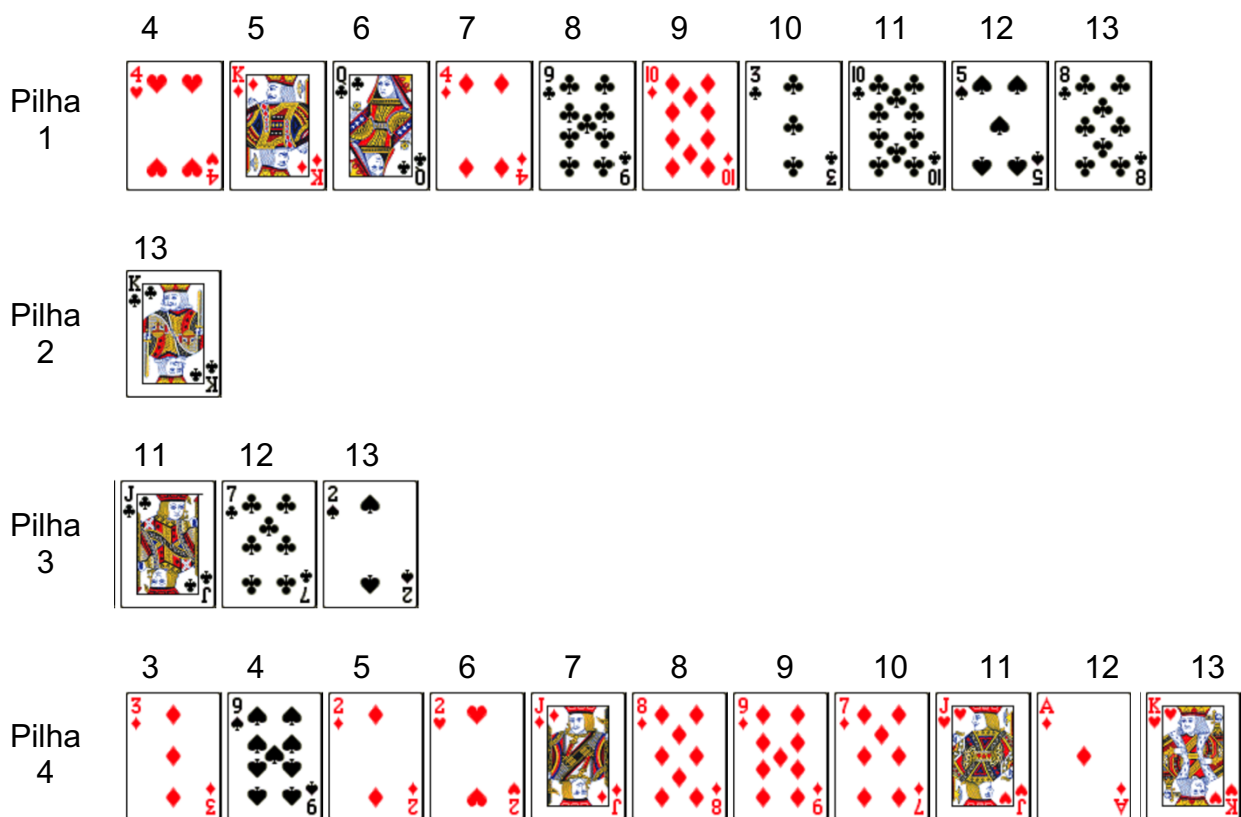
- baralham-se as cartas de um baralho de 52 cartas;
- volta-se a primeira carta (carta do topo) e indica-se qual é o seu valor e coloca-se a carta no início de uma nova pilha com a face voltada para baixo;
- em seguida, passam-se as cartas seguintes para cima dessa carta, com a face voltada para baixo, e vai-se continuando a contagem a partir do número da carta inicial, de um em um, até se obter o valor correspondente ao rei (13). Por exemplo, se a carta voltada no ponto anterior foi um 7 de copas, contamos as cartas seguintes, dizendo “8, 9, 10, valete, dama, rei”, independente do valor que elas tenham; quando se atinge o valor 13, a nova pilha tem sete cartas, sendo o 7 de copas a carta do fundo; note-se que, neste truque, se usa a pontuação habitual para a dama, o valete e o rei;
- repete-se o processo, formando diversas pilhas, contando até à pontuação do rei;
- se já não houver, no baralho, cartas suficientes para chegar a 13 e formar uma nova pilha completa, desprezam-se essas cartas que restam;
- o professor volta-se de costas e pede a um aluno voluntário que baralhe as diversas pilhas formadas;
- posteriormente, o aluno escolhe três das pilhas formadas pelo professor (sem que o professor veja quais são), deixando-as intactas e passa ao professor todas as restantes pilhas de cartas; estas cartas são também desprezadas pelo professor;

- o professor pede ao aluno que veja quais são as cartas de fundo de duas das três pilhas que escolheu e que revele o seu valor a toda a turma (incluindo o professor);
- em seguida, o aluno mostra a carta de fundo da terceira pilha a toda a turma, mas não ao professor;
- o professor conta todas as cartas que foram desprezadas desde o início e adivinha a carta de fundo da terceira pilha.

Segredos por trás do truque

- para que o professor adivinhe qual é a carta de fundo da terceira pilha (z), deve calcular: $z = N - 10 - x - y$, onde N é o número total de cartas desprezadas desde o início, x e y são os valores das cartas de fundo das duas pilhas que o aluno escolheu e que o aluno lhe revelou a si e à restante turma;

Por exemplo:



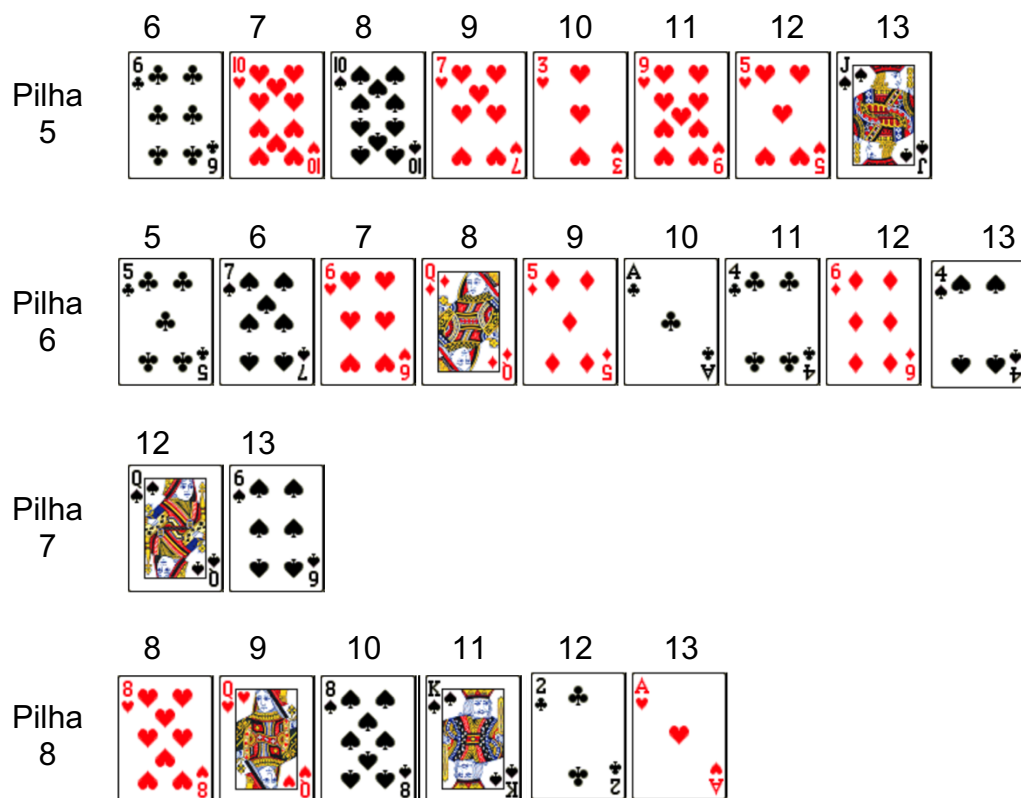


Figura 80 – Contando até ao rei – Pilhas de cartas (exemplo)

As duas cartas do baralho que se seguem já não são suficientes para formar uma pilha completa e são, imediatamente, desprezadas:

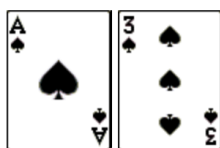


Figura 81 – Contando até ao rei – Primeiras cartas desprezadas (exemplo)

Vamos supor que o aluno escolhe as pilhas 3, 4 e 6. As cartas das pilhas 1, 2, 5, 7 e 8 são, também, desprezadas. Assim, o monte de cartas desprezadas fica com um total de 29 cartas, uma vez que $2 + 10 + 1 + 8 + 2 + 6 = 29$.

Sendo x , y e z as cartas de fundo das três pilhas seleccionadas pelo aluno e supondo que, destas três pilhas, o aluno revelou à turma e ao professor as cartas de fundo das pilhas 3 e 4: $x = 11$ e $y = 3$. Então, secretamente, o professor calcula

$$z = N - 10 - x - y = 29 - 10 - 11 - 3 = 5$$

E obtém a carta de fundo da pilha secreta: o 5.

Por que motivo funciona: o papel da matemática

Dada a forma como se constroem as pilhas, em cada uma delas é possível observar que a pontuação da carta que fica no fundo de cada pilha, adicionada ao número de cartas nessa pilha dá sempre 14. No exemplo anterior: Pilha 1: $4 + 10 = 14$; Pilha 2: $13 + 1 = 14$; Pilha 3: $11 + 3 = 14$; Pilha 4: $3 + 11 = 14$; Pilha 5: $6 + 8 = 14$; Pilha 6: $5 + 9 = 14$; Pilha 7: $12 + 2 = 14$; Pilha 8: $8 + 6 = 14$.

De uma forma geral, se a pilha começa com uma carta de valor x , como se contam cartas até 13, a pilha ficará com a carta do fundo de cada pilha e as restantes cartas que completam a pilha serão $13 - x$, perfazendo um total de

$$13 - x + 1 \text{ cartas}$$

e é por isso que as somas anteriores permitem obter sempre o número 14:

$$x + 13 - x + 1 = 14$$

Assim, podemos supor que x , y e z são as cartas do fundo das 3 pilhas escolhidas pelo aluno e que essas pilhas têm, respetivamente A , B e C cartas. Como $x + A = y + B = z + C = 14$, sabe-se que:

$$x + y + z + A + B + C = 14 + 14 + 14 = 42$$

$$\text{Logo, } A + B + C = 42 - (x + y + z) \text{ (i)}$$

Mas $52 - (A + B + C)$ representa o número total de cartas que foram desprezadas, pelo que $52 - (A + B + C) = N$, ou seja, $A + B + C = 52 - N$ (ii)

Então, de (i) e (ii) conclui-se que:

$$\begin{aligned}42 - (x + y + z) &= 52 - N \\ \Leftrightarrow 42 - 52 + N &= x + y + z \\ \Leftrightarrow -10 + N &= x + y + z \\ \Leftrightarrow N - x - y - z &= 10 \\ \Leftrightarrow -N + x + y + z &= -10\end{aligned}$$

Portanto, $z = N - 10 - x - y$. Quando o aluno revela os valores de x e y , o professor facilmente determina o valor de z .

Possíveis aprendizagens

Este truque pode ser explorado com alunos a partir do 8.º ano, no âmbito da Álgebra. Uma exploração cuidadosamente preparada por parte do professor pode proporcionar aos alunos o trabalho com polinómios e equações literais, nomeadamente através da manipulação da fórmula $z = N - 10 - x - y$, para vários exemplos criados na turma.

Capítulo 5 – Considerações finais

Por fim, neste ponto do trabalho, faço uma reflexão final sobre o que outros investigadores e matemáticos partilham connosco sobre as suas experiências, reflito sobre o que aprendi com este estudo e a forma como as novas aprendizagens realizadas no âmbito deste mestrado influenciam o meu modo de estar como docente, analiso e organizo os truques que selecionei de acordo com os domínios temáticos em que se integram e os seus possíveis destinatários e traço novos percursos possíveis para futuras investigações.

5.1. A importância da magia matemática

No prefácio do livro *Matemagia* (Silva, Freitas, Silva, & Hirth, 2016), pode ler-se:

“Pode pensar-se, e essa é uma ideia bastante comum, que a Matemática (coisa séria!) não liga bem com a Magia ou com o ilusionismo (que apenas pretendem divertir). Falso (...). A ligação Magia-Matemática pode ser intrigante, entusiasmante e espetacular”.

José Paulo Viana (p.13)

Na mesma linha de raciocínio, Arthur Benjamin (2015) considera que, embora a matemática seja uma disciplina séria, ela não tem de ser sempre ensinada de forma austera. Enquanto professor de matemática, este autor confessa a sua incapacidade em resistir ao uso de truques de magia, poemas, canções ou piadas que possam ser recursos para tornar as suas aulas mais apelativas.

Gardner (1992) refere que é tão difícil definir matemática recreativa como definir a poesia, mas considera que, seja lá ela o que for, a matemática recreativa será sempre a melhor forma de prender a atenção dos alunos para a aprendizagem da matemática elementar, uma vez que, quase sem esforço, pode levá-los a contactar com ideias matemáticas significativas. De acordo com Mitchell e Cummings (2017) a matemática recreativa compreende o uso de puzzles, jogos, enigmas e outras atividades que têm por trás factos matemáticos. Em particular, compreende o uso de truques de magia, sustentados por princípios matemáticos.

Para McOwan e Parker (2010), a magia matemática pode causar perplexidade, entretenimento e, sobretudo, gosto pela atividade matemática. A matemática é encarada pelos autores como a verdadeira magia. Cada pessoa que com ela contacta pode querer aprender mais magia, mas certamente, a determinada altura quererá também aprender mais matemática, para poder ir mais longe.

Crawford (2000), defende que “não há nada melhor para um professor de matemática do que ter os seus alunos desejosos por descobrir por que motivo um determinado resultado particular é verdadeiro. Este desejo torna os alunos mais recetivos a conteúdos mais exigentes como, por exemplo, as provas algébricas e torna-os também mais motivados para a aprendizagem na disciplina.” (p. 29). Também em Koirala e Goodwin (2000) é possível encontrar evidências de que o uso da magia matemática motivou para a aprendizagem os alunos participantes, em particular os que habitualmente tinham piores desempenhos na disciplina de matemática. Por este motivo, consideram que, se a matemagia pode promover uma melhoria substancial na atitude dos alunos e no seu desempenho em matemática (em particular no domínio da Álgebra), então ela deve ser usada de forma mais consistente nas salas de aula.

Todas as ideias destes autores, decorrentes dos seus trabalhos de investigação, reforçam as ideias que muitas vezes veiculamos baseadas apenas no senso comum e é com base nelas, que eu própria, cada vez mais me fui deixando cativar por esta temática. Ao longo desta investigação, passei a olhar para os momentos de magia matemática na sala de aula como momentos mais importantes, comparativamente com o que pensava até aqui e espero poder vir a integrá-los com maior frequência na minha prática profissional.

5.2. O meu percurso ao longo da investigação

Certamente que, se começou a ler esta dissertação pelo seu início (página xxv), terá lido o desafio que lhe propus a propósito do poema *A história infinita do π* , de Manuel António Pina, e terá sentido curiosidade em descobrir, por si próprio, a palavra pedida. Se não conhecia este tipo de desafio, arrisco-me a dizer que, como eu, não terá conseguido esperar pelo final deste trabalho ou pelo momento em que encontre a sua solução e terá, de imediato, desencadeado estratégias no sentido de descobrir a resposta pedida. O encantamento fundamental da magia matemática é este: é ser geradora de uma vontade e de uma motivação muito fortes que levam cada um de nós a desencadear atividade matemática. A vontade (quase) obsessiva de compreender cada truque e de perceber como se justifica o seu funcionamento desperta não só em alunos jovens, como também em adultos (Gardner, 1992). Foi isso que me aconteceu a mim, quando comecei a investigar e a ler sobre este tema. Conhecia alguns truques e problemas de algibeira, mas nunca me imaginei a desenvolver um trabalho desta envergadura nesta área. Aos poucos, fui-me deixando envolver e cada vez mais me parece uma área de investigação interessante e pertinente.

Defini como objetivo principal desta investigação a recolha, organização e sistematização de truques que pudessem ser encarados como “magia matemática”, concretizáveis em sala de aula, e que pudessem, eventualmente, servir de ponto de partida para aprendizagens efetivas no âmbito da disciplina. A descoberta destes truques fez-me, como eventualmente sucede a muitos alunos, partir em busca de mais conhecimento matemático e aprendi muitas coisas que desconhecia, com cada um deles. Destaco como aprendizagens mais significativas que efetuei, além de aspetos históricos e culturais relacionados com os materiais mais usados neste âmbito (cartas e dados), o aprofundamento de temas matemáticos que conhecia apenas de forma superficial: a possibilidade de generalizar a sucessão de Fibonacci e o Teorema de Zeckendorf; a existência de sistemas de numeração *não standard*, nomeadamente a possível utilização de números inteiros negativos como bases; as diversas aplicações da aritmética

modular em truques de magia matemática; os paradoxos geométricos, como o paradoxo de Curry; o Teorema de Pick e a sua justificação; entre outros.

Enquanto professora de matemática que sou, considero-me mais enriquecida, na medida em que o conhecimento científico me proporciona novos recursos para produzir novas tarefas para propor aos meus alunos, quer apenas com fins motivacionais, quer com objetivos pedagógicos bem definidos e com intenções específicas de lhes proporcionar a aprendizagem de conteúdos curriculares.

No prefácio do livro “*The magic of math: solving for x and figuring out why*” (Benjamin, 2015) refere-se que muitos mágicos consideram que nunca devem revelar os segredos dos seus truques. No entanto, enaltece-se o facto de este autor, nos dar a conhecer os segredos dos entusiasmantes truques que nos ensinou, alguns deles que intrigaram matemáticos durante milénios. Partilho esta visão sobre os truques de magia matemática na sala de aula. É importante criar deslumbramento, expectativa e incerteza, mas a compreensão do modo como cada truque funciona é, do meu ponto de vista, um ponto essencial para a realização de aprendizagens matemáticas significativas.

Sendo certo que os truques que encontrei e selecionei podem ser realizados em múltiplos contextos e para múltiplas audiências, destaco que, quando os escrevi neste trabalho, tive sempre em mente a minha sala de aula e a forma como considero que os mesmos podem ser operacionalizados nesse contexto. Espero, deste modo, proporcionar a outros docentes e futuros docentes alguma proximidade relativamente àquilo que é a minha experiência e visão e a possibilidade de cada um deles adaptar estes truques à sua própria realidade profissional.

5.3. Reflexão sobre os truques incluídos nesta dissertação

Nesta dissertação incluí cinco truques que, dada a complexidade da matemática que lhes está subjacente, me pareceram ter um potencial eminentemente recreativo e motivacional para alunos do 3.º ciclo do ensino básico, podendo ser aplicados no momento em que o docente sentir ser oportuno. Alguns deles podem proporcionar experiências matemáticas ricas, que podem estimular

a curiosidade dos alunos pela matemática extra-escolar. Testei alguns deles, de forma informal com os meus próprios alunos e posso assegurar que a motivação foi evidente.

Incluí também vinte truques que, do meu ponto de vista, podem potenciar a aprendizagem de conteúdos curriculares. A tabela da figura seguinte sintetiza os domínios temáticos em que integrei cada truque e o ano de escolaridade em que o mesmo se pode/deve realizar, tendo em conta a minha perspetiva sobre os documentos curriculares em vigor. Trata-se apenas de uma tabela orientadora e organizadora. Cada professor pode (e deve) formar as suas próprias opiniões sobre o modo como pode aproveitar algum dos truques apresentados, no âmbito da sua realidade profissional.

<i>Domínio</i>	NO			GM			ALG e FSS		
Ano de escolaridade	7.º	8.º	9.º	7.º	8.º	9.º	7.º	8.º	9.º
Onde está o erro? – Duas cores	x	x	x						
Onde está o erro? (-1) vs (+1)	x	x	x						
Dívidas e ganhos – Potências de base 3	x	x	x						
Dívidas e ganhos – Base negabinária	x	x	x						
Dívidas e ganhos – Base negafibonacci	x	x	x						
O quadrado desaparecido				x	x	x			
Quantos triângulos apareceram?				x	x	x		x	x
Mais rápido que a própria sombra				x	x	x			
O que os meus olhos veem				x	x	x			
Tenho um palpite!	x	x	x						
5-4-3-2-1-1/2 e já sei o teu número!	x	x	x				x	x	x
Todos obtiveram o 9	x	x	x				x	x	x
O par mistério	x	x	x						x
O par mistério (2)	x	x	x						x
Sei qual é a tua carta	x	x	x						x
Adivinhando raízes cúbicas	x	x	x						

Adivinhando raízes quadradas	x	x	x					x	x
O mágico número 73	x	x	x						
Jogando com 3 dados	x	x	x				x	x	x
Contando até ao rei								x	x

Figura 82 – Distribuição dos truques enquadrados por domínio temático e ano de escolaridade

Saliento que, uma vez que não há mágicos (nem professores) que queiram ver os seus truques falhar perante as suas audiências, a maior parte dos truques apresentados nesta dissertação tem por base (apenas) factos numéricos, geométricos ou algébricos, no sentido de não dependerem da sorte ou do azar, associados à noção de probabilidade.

5.4. O desafio inicial desvendado

Talvez o menos importante neste trabalho, relativamente ao desafio que lhe propus na página xxiii desta dissertação, seja a sua solução (a palavra “*nasceu*”), a que, provavelmente, até já chegou, de forma autónoma. No entanto, neste trabalho, este desafio já cumpriu o seu papel, se captou a sua atenção. Este pequeno apontamento inicial recreativo é uma adaptação que fiz de um desafio que encontrei num livro de Martin Gardner, a propósito da frase inicial escrita por Lewis Carroll, na sua obra *Alice in Wonderland*, que pode consultar nos Anexos IV e V e cuja solução é a palavra “*sister*”⁷ (Gardner & Sinclair, 2009). Este desafio com o qual contactei inicialmente pôs-me a pensar e fez-me querer aprender mais.

⁷ Para compreender com mais pormenor o modo como, em ambos os desafios, se podem obter as soluções respetivas, basta que siga os percursos possíveis que os diversos leitores podem seguir, a partir de cada uma das palavras iniciais, nos Anexos III a V. Estes percursos podem, também, ser obtidos de forma automática em <http://www.praestigiator.com/?kruskalcount> da autoria de Mariano Tomatis, para diferentes excertos de textos, sendo utilizado o método de análise de caminhos de Kruskal (no original “*Automatical analysis of Kruskal paths*”).

No início, pensei que este fenómeno só aconteceria naquela frase específica. Ao aperceber-me de que também acontece noutras frases ou pequenos textos, surgiram-me diversas questões:

- A convergência dos diversos percursos que se podem efetuar em cada frase ou texto será apenas uma coincidência?
- Este tipo de raciocínio funcionará noutros contextos?
- O que poderá justificar este fenómeno?

Na realidade, a convergência de diversos percursos para uma só palavra (ou para um número reduzido de palavras) não é meramente uma coincidência e existe, também, noutros contextos. Martin Kruskal, inventou um truque de cartas em que se usa este processo de contagem. Neste truque, um mágico forma uma fila, da esquerda para a direita, com as cartas de um baralho, voltadas para baixo e atribui um valor às cartas que incluem figuras (por exemplo, o valor 1). O voluntário escolhe aleatoriamente uma das dez primeiras cartas à esquerda, no baralho estendido. O valor da carta escolhida indica quantas cartas devem ser contadas para a direita e qual é a nova carta em que deverá ocorrer uma paragem, para que se repita o procedimento. O processo continua até que se chegue a uma carta cujo valor não permita nova deslocação, sem que se exceda o final da fila de cartas. Kruskal mostrou que um mágico consegue, com elevada probabilidade, adivinhar qual é a carta do baralho a que o voluntário chegará, após realizar a referida contagem, bastando, para isso, efetuar o mesmo processo com base numa carta à sua escolha. Este é um truque em que, ao contrário do que sucede nos restantes truques incluídos nesta dissertação, a probabilidade desempenha um papel importante, não sendo completamente certo que funcione sempre. No entanto, sabe-se que a probabilidade de sucesso varia consoante as condições iniciais que se definem para o truque, sendo possível realizá-lo em diferentes versões, alterando o número total de cartas do baralho que são usadas, o número de cartas do conjunto inicial do qual o voluntário seleciona a carta inicial do seu percurso ou até do valor atribuído às figuras. Uma vez que, na maior parte das versões, a probabilidade de sucesso está acima de 80%, é

razoavelmente “segura” a sua realização perante uma audiência⁸. Como não poderia deixar de ser, existe matemática que explica estes fenómenos e existe motivação que desencadeia surpresa, deslumbramento e aprendizagem. É este tipo de motivação, capaz de potenciar aprendizagens nos alunos (curriculares ou não curriculares), que me parece pertinente que exista sempre numa aula de matemática.

5.5. Percursos para futuras investigações

Diz-me a experiência pessoal que a elaboração de uma dissertação de mestrado com uma duração temporal limitada a um ano, período em que acumulamos a experiência de estudantes com a nossa vida profissional como docentes, é difícil conseguir aprofundar devidamente uma temática e, com base nesse aprofundamento, construir materiais para concretizar num contexto real (como uma sala de aula), recolher dados empíricos, refletir e escrever sobre eles. Daí que, perante o objetivo que defini, tenha optado por realizar um estudo sem recolha sistemática de dados empíricos. No entanto, considero que esta investigação pode ser expandida em duas direções distintas, mas não mutuamente exclusivas:

- i. embora já tenham sido realizadas algumas dissertações sobre esta temática em Portugal, existem ainda muitos truques por explorar e material suficiente para desenvolver novas versões sobre os mesmos, tendo em conta os objetivos e interesses de cada investigador/professor;
- ii. será interessante construir tarefas baseadas nestes e noutros truques já estudados destinadas a alunos de um determinado ano de escolaridade e realizar um estudo empírico em que se analisem as

⁸ Matematicamente, o princípio de Kruskal encontra-se relacionado com o conceito de cadeias de Markov e envolve o cálculo de probabilidades que fogem ao âmbito desta dissertação, mas o leitor pode encontrar mais informação em Lagarias, Rains e Vanderbei (2009) e em Melo (2013).

atitudes e os desempenhos dos alunos e se compreenda a forma como os truques lhes podem proporcionar novas aprendizagens matemáticas.

Deixo em aberto estas sugestões para investigações futuras e termino esta dissertação com a questão que lhe dá o título: “Magia ou Matemática?” Para mim, a melhor resposta a esta questão é “um pouco de ambas”, porque, sem matemática, este tipo de magia não aconteceria e, com o recurso a este tipo de truques, a matemática pode tornar-se verdadeiramente mágica.

Referências bibliográficas

- A. M. A. (2009). *Validação de número de documento do cartão de cidadão*.
Obtido em outubro de 2018, de Autenticação.gov.pt:
<http://www.autenticacao.gov.pt/documents/10179/11463/Validação+de+Número+de+Documento+do+Cartão+de+Cidadão/0dbc446b-3718-41e5-b982-551a72f8b8a8?version=1.0>
- Bastos, I. (2015). *Magia Matemática com Números (Dissertação de Mestrado, Universidade de Aveiro)*. Obtido em outubro de 2018, de
<http://hdl.handle.net/10773/16822>
- Bastos, R. (2006). Notas sobre o Ensino da Geometria do Grupo de Trabalho de Geometria da APM – Simetria. *Educação e Matemática*, 88, 9-11.
- Bell, T., Witten, I., & Fellows, M. (1998). *Computer Science Unplugged: Off-line activities and games for all ages*. Obtido de
<http://classic.csunplugged.org/wp-content/uploads/2015/01/unplugged-book-v1.pdf>
- Benjamin, A. (2015). *The magic of math: solving for x and figuring out why*. Nova Iorque: Basic Books.
- Benjamin, A., & Shermer, M. (2006). *Secrets of mental math: the mathemagician's guide to lightning calculation and amazing math tricks*. Nova Iorque: Three Rivers Press.
- Branco, N. (2013). *O desenvolvimento do pensamento algébrico na formação inicial de professores nos primeiros anos (Dissertação de Doutoramento, Universidade de Lisboa)*. Obtido em outubro de 2018, de
<http://hdl.handle.net/10451/8860>

- Brown Jr., J. (1964). Zeckendorf's theorem and some applications. *Fibonacci Quarterly*, 2, 163-168.
- Buescu, J. (2003). *Da Falsificação de Euros aos Pequenos Mundos*. Lisboa: Gradiva.
- Caraça, B. (2000). *Conceitos fundamentais de matemática*. Lisboa: Gradiva.
- Carlos, P., Neto, J., & Silva, J. N. (2007). *Sucessão de Fibonacci + 'Missing Square'*. *Jogos com História*. Lisboa: Edimpresa.
- Colgan, L. (2011). *Mathemagic!: Number tricks*. Toronto: Kids Can Press Ltd.
- Crawford, D. (2000). Mathematics and Magic: the case for card tricks. *Mathematics in School*, 29-30.
- Davidson, J., & McOwan, P. (2011). *Maths Made Magic - A handbook of magical mathematical tricks for you to learn*. Londres: Queen Mary University of London and University of Warwick.
- Davis, E., & Middlebrooks, E. (1983). Algebra and a super card trick. *The mathematics teacher*, 76, 326-328.
- Diaconis, P., & Graham, R. (2011). *Magical Mathematics: the mathematical ideas that animate great magic tricks*. Princeton: Princeton University Press.
- Ferreira, J. C. (1995). *Introdução à Análise Matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Fleron, J. F., Hotchkiss, P. K., Ecke, V., & von Renesse, C. (2013). *Discovering the Art of Mathematics: mathematical inquiry in the liberal arts - Patterns*. Obtido em outubro de 2018, de <http://www.artofmathematics.org/sites/default/files/books/patternsbook-2018-06-01-www.pdf>
- Froggatt, S. (2005). *Mathemagic: 25 Tricks for Teachers. A manual for minor miracles for magically-minded mathematicians*. Obtido em dezembro de 2018, de <https://web.northeastern.edu/seigen/11Magic/Teaching/Mathemagic.pdf>
- Gardner, M. (1956). *Mathematics, Magic and Mystery*. Nova Iorque: Dover Publications, Inc.
- Gardner, M. (1992). *Mathematical Circus*. Washington: Mathematical Association of America.
- Gardner, M. (1993). *Ah, apanhei-te!* Lisboa: Gradiva.

- Gardner, M. (2002). *As últimas recreações*. Lisboa: Gradiva.
- Gardner, M. (2014). *The Magic and Mystery of Numbers*. Nova Iorque: Scientific American Editors.
- Gardner, M. (2018). *Festival mágico matemático*. Madrid: Alianza editorial.
- Gardner, M., & Sinclair, J. (2009). *Mental magic: surefire tricks to amaze your friends*. Nova Iorque: Dover Publications, Inc.
- Glaser, A. (1971). History of Binary and Other Nondecimal Numeration. Southampton, PA: Tomash Publishers.
- Hermann, J., & Garman, B. (1984). The calculator, math magic, and algebra. *The Mathematics Teacher*, 77 (6), 448-450.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. Em D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). Nova Iorque: Macmillan.
- Knott, R. (9 de agosto de 2015). *Using the Fibonacci numbers to represent whole numbers*. Obtido em dezembro de 2018, de <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibrep.html#CALC3>
- Knuth, D. (2008). Negafibonacci Numbers and the Hyperbolic Plane. *Conferência apresentada no Annual Meeting of the Mathematical Association of America*. San Jose, CA.
- Koirala, H. P. (2005). The effect of mathemagic on the algebraic knowledge and skills of low-performing high school students. Em H. L. Chick, & J. L. Vincent (Ed.), *Proceedings of the 29th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 209-216). Melbourne: University of Melbourne.
- Koirala, H., & Goodwin, P. (2000). Teaching algebra in the middle grades using mathmagic. *Mathematics teaching in middle school*, 5, 562-566.
- Lagarias, J. C., Rains, E., & Vanderbei, R. J. (2009). The Kruskal Count. Em S. Brams, W. V. Gehrlein, & F. S. Roberts, *The mathematics of preference, choice, and order. Essays in honor of Peter J. Fishburn* (pp. 371-391). Berlim: Springer-Verlag. Obtido em outubro de 2018, de https://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0110/0110143v1.pdf
- Lim, K. H. (2018). Using math magic to reinforce algebraic concepts: an exploratory study. *International Journal of Mathematical Education in*

- Science and Technology*, 1-19. Obtido em outubro de 2018, de <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1537450>
- M. E. (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico - 1.º, 2.º e 3.º ciclos*. Obtido em outubro de 2018, de http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/EBasico/Matematica/mat_documento_orientador_ensino_basico.pdf
- M. E. (2018a). *Aprendizagens Essenciais de Matemática - 7.º ano de escolaridade*. Obtido em outubro de 2018, de http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/ae_3oc_matematica.pdf
- M. E. (2018b). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Obtido em outubro de 2018, de http://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/perfil_dos_alunos.pdf
- Marques, L. (2016). *Circo matemático (Dissertação de Mestrado, Universidade de Aveiro)*. Obtido em outubro de 2018, de <http://hdl.handle.net/10773/22185>
- Matos, A. (2007). *Explorando relações funcionais no 8º ano: um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico (Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa)*. Obtido em outubro de 2018, de <http://hdl.handle.net/10451/1228>
- Matthews, M. E. (2008). Selecting and using mathematics tricks in the classroom. *The mathematics teacher*, 102, 98-101.
- Matthews, M. E. (2008). Selecting and using mathematics tricks in the classroom. *Math teacher*, 102, 98-101.
- McOwan, P., & Parker, M. (2010). *The manual of mathematical magic*. Obtido em outubro de 2018, de http://www.mathematicalmagic.com/docs/mathsmagic_full.pdf
- Melo, J. (2013). *Probabilidades e magia matemática (Dissertação de Mestrado, Universidade de Aveiro)*. Obtido em outubro de 2018, de <http://hdl.handle.net/10773/13320>
- Mitchell, M., & Cummings, J. (2017). *When and how to use math based tricks in the classroom*. Obtido em outubro de 2018, de http://webpages.csus.edu/Jay.Cummings/Mitchell_McNair.pdf

- Mulcahy, C. (2013). *Mathematical Card Magic: Fifty-Two New Effects*. Boca Raton: CRC Press /Taylor & Francis.
- Picado, J. (2001). A álgebra dos sistemas de identificação: da aritmética modular aos grupos diedrais. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, 44, 39-73. Obtido em dezembro de 2018, de <http://www.mat.uc.pt/~picado/SistIdent/isbn2.pdf>
- Pina, M. A., & Proença, P. (2012). *Pequeno Livro de Desmatemática*. Porto: Assírio e Alvim.
- Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: DG/DC. Obtido em outubro de 2018, de <http://hdl.handle.net/10451/7105>
- Quintanilla, J. (26 de junho de 2013). *Geometric magic trick*. Obtido em outubro de 2018, de Mean green math: explaining the "whys" of mathematics: <https://meangreenmath.com/2013/06/26/geometrical-magic-trick/>
- Raman, M., & Öhman, L.-D. (2011). Two beautiful proofs of Pick's Theorem. *Proceedings of the Seventh Conference of European Research in Mathematics Education*, (pp. 9-13). Rzeszow, Polónia.
- Rodrigues, M. (2015). *Magia matemática com cartas (Dissertação de Mestrado, Universidade de Aveiro)*. Obtido em outubro de 2018, de <http://hdl.handle.net/10773/16864>
- Schwartzman, S. (1987). Variations on a well-known trick. *The mathematics teacher*, 80, 586-590.
- Sherard, W. (1998). *Mathemagic in the classroom*. Portland: J. Weston Walsh, Publisher.
- Silva, A., Freitas, P., Silva, J. N., & Hirth, T. (2016). *Matemagia*. Lisboa: Associação Ludus.
- Varberg, D. (1985). Pick's Theorem Revisited. *The American Mathematical Monthly*, 92(8), 584-587. Obtido em dezembro de 2018, de https://www.jstor.org/stable/2323172?read-now=1&googleloggedin=true&socuid=18142c81-83ce-446f-9f55-b55452e168b5&socplat=email#page_scan_tab_contents
- Vavilov, V., & Ustinov, A. (2017). *Two Famous Formulas (Part I)*. Obtido em outubro de 2018, de http://cms.math.ca/crux/v43/n2/public_Vavilov_43_2.pdf

Veloso, E. (1998). *Geometria. Temas actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Sítios na Internet com interesse:

Associação Ludus

- <http://ludicum.org/>
- <https://circomatematico.wordpress.com/>

Geoplano

- <http://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/>

Gerador de cartas e dados aleatório

- <https://www.random.org/playing-cards/>
- <https://www.random.org/dice/>

Números de Fibonacci e representação de Zeckendorf

- <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fib.html>
- <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibmaths.html>
- <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibrep.html>
- http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number#Recognizing_Fibonacci_numbers
- http://en.wikipedia.org/wiki/Zeckendorf%27s_theorem#Representation_with_negafibonacci_numbers
- http://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Zeckendorf_representation

Percursos de Kruskal

- <http://www.praestigiator.com/?kruskalcount>

Sistemas de numeração

- <http://www.mathsisfun.com/numbers/bases.html>
- http://en.wikipedia.org/wiki/Non-standard_positional_numeral_systems#Negative_base
- http://en.wikipedia.org/wiki/Negative_base

Truques diversos de magia matemática

- <http://www.martin-gardner.org/>
- <http://www.arthurbenjamin.info>
- <http://www.bradleyfields.com/site/shows.php>
- <http://www.mathematicalmagic.com/index.html>
- <http://fblasco.net/>
- <https://meangreenmath.com/>
- <http://cardcolm.org/>
- <http://mathematics-in-europe.eu/?cat=19>

Sistemas de codificação com algoritmos de controlo e aritmética modular

- http://www.atractor.pt/mat/alg_controlo/sist_mod_texto.html
- <https://www.pcmanias.com/controlo-de-erros-no-cartao-do-cidadao/>
- http://mat.absolutamente.net/c_bi.html

Anexos

Anexo I – Cubos perfeitos entre 0 e 100 (inclusive)

n	n^3	n	n^3	n	n^3
0	0	10	1000	60	216000
1	1	11	1331	61	226981
2	8	12	1728	62	238328
3	27	13	2197	63	250047
4	64	14	2744	64	262144
5	125	15	3375	65	274625
6	216	16	4096	66	287496
7	343	17	4913	67	300763
8	512	18	5832	68	314432
9	729	19	6859	69	328509
		20	8000	70	343000
		21	9261	71	357911
		22	10648	72	373248
		23	12167	73	389017
		24	13824	74	405224
		25	15625	75	421875
		26	17576	76	438976
		27	19683	77	456533
		28	21952	78	474552
		29	24389	79	493039

n	n^3	n	n^3	n	n^3
		30	27000	80	512000
		31	29791	81	531441
		32	32768	82	551368
		33	35937	83	571787
		34	39304	84	592704
		35	42875	85	614125
		36	46656	86	636056
		37	50653	87	658503
		38	54872	88	681472
		39	59319	89	704969
		40	64000	90	729000
		41	68921	91	753571
		42	74088	92	778688
		43	79507	93	804357
		44	85184	94	830584
		45	91125	95	857375
		46	97336	96	884736
		47	103823	97	912673
		48	110592	98	941192
		49	117649	99	970299
		50	125000	100	1000000
		51	132651		
		52	140608		
		53	148877		
		54	157464		
		55	166375		
		56	175616		
		57	185193		
		58	195112		
		59	205379		

Anexo II – Quadrados perfeitos entre 0 e 100 (inclusive)

n	n^2	n	n^2	n	n^2
0	0	10	100	60	3600
1	1	11	121	61	3721
2	4	12	144	62	3844
3	9	13	169	63	3969
4	16	14	196	64	4096
5	25	15	225	65	4225
6	36	16	256	66	4356
7	49	17	289	67	4489
8	64	18	324	68	4624
9	81	19	361	69	4761
		20	400	70	4900
		21	441	71	5041
		22	484	72	5184
		23	529	73	5329
		24	576	74	5476
		25	625	75	5625
		26	676	76	5776
		27	729	77	5929
		28	784	78	6084
		29	841	79	6241

n	n^2	n	n^2	n	n^2
		30	900	80	6400
		31	961	81	6561
		32	1024	82	6724
		33	1089	83	6889
		34	1156	84	7056
		35	1225	85	7225
		36	1296	86	7396
		37	1369	87	7569
		38	1444	88	7744
		39	1521	89	7921
		40	1600	90	8100
		41	1681	91	8281
		42	1764	92	8464
		43	1849	93	8649
		44	1936	94	8836
		45	2025	95	9025
		46	2116	96	9216
		47	2209	97	9409
		48	2304	98	9604
		49	2401	99	9801
		50	2500	100	10000
		51	2601		
		52	2704		
		53	2809		
		54	2916		
		55	3025		
		56	3136		
		57	3249		
		58	3364		
		59	3481		

Anexo III – Percursos possíveis no poema *A história infinita do π* , de Manuel António Pina

Poema		Palavra de partida (P) e palavras incluídas no percurso onde ocorrem paragens (X)												
Palavra	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Julgando	8	P												
o	1		P											
fim	3		X	P										
a	1				P									
chegar	6				X	P								
o	1		X	X			P							
π	1		X	X			X	P						
deu	3		X	X			X	X	P					
de	2	X								P				
começar	7										P			
a	1	X	X	X	X	X	X	X	X	X		P		
preocupar-se	11	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X	P	
consigo	7													P
E	1													
um	2													
dia	3													
fez	3										X			
a	1													

bagagem	7													
e	1										X			X
partiu	6										X			X
numa	4													
viagem	6	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X	X	
ao	2													
fundo	5													
do	2													
seu	3										X			X
umbigo	6													
Mas	3	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X	X	
o	1										X			X
umbigo	6										X			X
era	3	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X	X	
mais	4													
fundo	5													
do	2	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X	X	
que	3													
o	1	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
umbigo	6	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
do	2													
mundo	5													
e	1													
o	1													

π	1													
regressou	9	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
mais	4													
baralhado	9													
que	3													
à	1													
partida	7													
de	2													
cabeça	6													
confundida	10													
com	3	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
cálculos	8													
decimais	8													
Hoje	4	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
o	1													
π	1													
já	2													
muito	5	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
velho	5													
senta	5													
os	2													
netos	5													
nos	3	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
joelhos	7													

e	1													
fala-lhes	8	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
de	2													
Alexandria	10													
da	2													
China	5													
de	2													
Chung	5													
Zhi	3													
de	2	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Al-Kashi	7													
de	2	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Al-Kwarismi	10													
da	2	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Casa	4													
da	2	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Sabedoria	9													
E	1	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
dos	3	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
milhares	8													
de	2													
milhão	6	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
de	2													
casas	5													

onde	4													
viveu	5													
na	2													
sua	3	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
aventurosa	10													
existência	10													
desde	5	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
o	1													
dia	3													
em	2													
que	3													
nasceu	6	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
da	2													
estranha	8													
relação	7													
dum	3													
diâmetro	8													
e	1													
uma	3													
circunferência	14													

Legenda:

P – Palavra de partida X – Palavra onde ocorre uma paragem

Anexo IV – Desafio original, proposto por Martin Gardner

“Alice was beginning to get very tired of sitting by her sister on the bank, and of having nothing to do: once or twice she had peeped into the book her sister was reading.”

Lewis Carroll
Alice in Wonderland
(Gardner & Sinclair, 2009, p. 7)

Desafio: escolha uma das primeiras doze palavras desta frase (assinaladas a negrito), solete essa palavra e conte quantas letras tem. Em seguida, a partir da palavra a seguir à que escolheu, conte esse número de palavras para a direita até chegar a uma nova palavra. Repita o procedimento formando uma cadeia, até chegar ao fim da frase. Em que palavra terminou?

Anexo V – Percursos possíveis na frase inicial de *Alice in Wonderland*, de Lewis Carroll

Frase		Palavra de partida (P) e palavras incluídas no percurso onde ocorrem paragens (X)											
Palavra	N.º de letras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Alice	5	P											
was	3		P										
beginning	9			P									
to	2				P								
get	3		X			P							
very	4	X			X		P						
tired	5							P					
of	2		X			X			P				
sitting	7									P			
by	2	X	X		X	X	X		X		P		
her	3											P	
sister	6	X	X	X	X	X	X	X	X		X		P
on	2												
the	3											X	
bank	4												
and	3									X			
of	2											X	

having	6	X	X	X	X	X	X	X	X		X		X
nothing	7									X		X	
to	2												
do	2												
once	4												
or	2												
twice	5	X	X	X	X	X	X	X	X		X		X
she	3											X	
had	3									X			
peeped	6												
into	4											X	
the	3	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X
book	4												
her	3												
sister	6	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
was	3												
reading	7												

Legenda:

P – Palavra de partida X – Palavra onde ocorre uma paragem