



**Bernardo Xavier  
Nogueira Duarte**

**Polinómios de Zernike: estudo das suas  
propriedades e algumas aplicações**





**Bernardo Xavier  
Nogueira Duarte**

## **Polinómios de Zernike: estudo das suas propriedades e algumas aplicações**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações, realizada sob orientação científica de Maria Manuela Fernandes Rodrigues, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, e co-orientação do Investigador Auxiliar Nelson Felipe Loureiro Vieira.



## **O júri / The jury**

Presidente / President

**Prof. Doutor Eugénio Alexandre Miguel Rocha**

Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro

Vogais / Committee

**Prof. Doutor Milton dos Santos Ferreira**

Professor Adjunto do Instituto Politécnico de Leiria

**Prof. Doutora Maria Manuela Fernandes Rodrigues**

Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro (orientadora)



## Agradecimentos / Acknowledgements

Em primeiro lugar, quero agradecer à minha família por ter sido um grande suporte e apoio em toda a minha vida, em especial foco nos últimos 5 anos. Deram-me sempre todas as condições para ter a melhor educação e liberdade para fazer o percurso que queria.

Em segundo lugar, quero agradecer à professora Maria Manuela Rodrigues e ao professor Nelson Vieira pelas oportunidades que me deram, pelo apoio, pela atenção e pela disponibilidade constante.

Quero agora agradecer aos companheiros que cresceram comigo e, sem saberem, deram-me a mão quando mais precisei, muito antes da minha entrada na universidade e também durante esta caminhada universitária. Com eles aprendi, entre muitas coisas, que a distância não é nada no que toca a amizade. Agradeço ainda a todos os outros que se cruzaram comigo nesta etapa universitária. Foram muitos e todos deixaram a sua marca no meu percurso e fizeram de mim aquilo que sou hoje.

Quero agradecer também à minha família de praxe por ter sido um grande pilar e pelo voto de confiança que depositaram em mim em todas as ocasiões. Marcaram e marcarão sempre o meu percurso académico e a minha vida.

Dos Açores chegou há uns anos uma pessoa que me mudaria para sempre. Foi um dos grandes apoios que tive em muitos momentos e ele sabe que esta amizade será para sempre. Um grande obrigado a um irmão, João Mendonça.

À Beatriz, à Luísa e à Mafalda, obrigado por me mostrarem que não podemos dar nada como certo. Se há uns meses não passávamos de meros colegas, agora são um grande pilar e estarei eternamente grato por tudo o que fizeram por mim. Crescemos juntos e ainda cresceremos muito mais.

Neste meu percurso houve alguém muito especial que me marcou. Ele foi um colega de quarto, um irmão, um pai, um psicólogo, um amigo e todas as outras palavras bonitas e verdadeiras que existem. Ao Papa, devo-lhe tudo aquilo que sou e sei que será para sempre um grande amigo.

Não podia de deixar de agradecer a uma casa que me foi muito especial: a minha residência. Estar a 200km da minha terra, mas encontrar num novo espaço, uma nova casa, uma nova família é algo que não se tem como agradecer. Neste sítio fiz as amizades mais bonitas e verdadeiras que alguma vez terei. Cresci muito, aprendi muito. Neste momento sou aquilo que sou graças àquilo que vivi e conheci dentro daquelas paredes. A todos aqueles que pertencem a esta enorme família que é a residência, o meu enorme e eterno obrigado.





**Palavras-chave**

Polinómios de Zernike, ortogonalidade, modelos óticos, aberrações visuais, representações circulares, funções circulares de Bessel, modelos ótimos, regressão.

**Resumo**

O ser humano é dependente de vários sentidos, sendo um dos mais importantes a visão. Porém, também é um dos sentidos no qual se detetam diversas aberrações. Neste sentido, foi necessário evoluir a tecnologia médica de forma a detetar e corrigir estas mesmas aberrações. Os polinómios de Zernike surgem então como uma das soluções mais eficazes neste passo de desenvolvimento da medicina. Com um excelente desempenho para representar superfícies circulares, os polinómios de Zernike começaram a ser usados para representar modelos do olho e as aberrações do mesmo. Nesta dissertação pretende-se fazer um estudo destes polinómios, bem como as suas propriedades e algumas aplicações. Existe ainda o objetivo de colocar em confronto os Polinómios de Zernike com outro tipo de funções ortogonais, as Funções Circulares de Bessel, avaliando a performance de ambos em diversas representações e ajustes e concluir ainda qual será o melhor em cada representação. Por fim, pretende-se também encontrar uma forma de avaliar modelos ótimos de pontos discretos para modelos de regressão que serão utilizados para determinar o erro quadrático mínimo entre os dados reais e o modelo aproximado de uma expansão truncada dos polinómios de Zernike. Foi ainda desenvolvido algum código no software MATLAB, que se encontra em anexo no final da dissertação.



**Keywords**

Zernike polynomials, orthogonality, optical models, optical aberrations, circular representations, Bessel circular functions, optimum designs, regression.

**Abstract**

The human being is dependent on many of its senses, the eyesight being one of the most important. However, it is also one of the senses in which several aberrations are detected. In this regard, it was necessary to evolve medical technology in order to detect and correct those same aberrations. Zernike polynomials emerge as one of the most effective solutions in this step of medical development. With excellent performance to represent circular surfaces, Zernike polynomials began to be used to represent eye models and its aberrations. This dissertation intends to study those polynomials as well as their properties and some applications. There is also the goal of comparing the Zernike Polynomials with another type of orthogonal functions, the Bessel Circular Functions, evaluating the performance of both in various representations and adjustments and conclude which will be the best in each representation. Finally, it is also intended to find a way to evaluate optimal discrete point models for regression models that will be used to determine the minimum squared error between the actual data and the approximate model of a truncated expansion of Zernike polynomials. MATLAB code was developed and it is presented in the Annexe to this dissertation.



# Conteúdo

|          |                                                                                                  |           |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                                                                                | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Polinómios de Zernike: definições e propriedades</b>                                          | <b>3</b>  |
| 2.1      | Introdução . . . . .                                                                             | 3         |
| 2.2      | Polinómios de Zernike: algumas noções básicas . . . . .                                          | 4         |
| 2.3      | Esquema de índice único . . . . .                                                                | 4         |
| 2.4      | Sistema de coordenadas . . . . .                                                                 | 6         |
| 2.5      | Conversão de polinómios de Zernike de coordenadas polares para coordenadas cartesianas . . . . . | 7         |
| 2.6      | Derivadas dos polinómios de Zernike . . . . .                                                    | 11        |
| 2.6.1    | Derivada parcial em ordem a $\rho$ . . . . .                                                     | 11        |
| 2.6.2    | Derivada parcial em ordem a $r$ . . . . .                                                        | 11        |
| 2.6.3    | Derivada parcial em ordem a $\theta$ . . . . .                                                   | 11        |
| 2.6.4    | Derivada parcial em ordem a $X$ . . . . .                                                        | 12        |
| 2.6.5    | Derivada parcial em ordem a $Y$ . . . . .                                                        | 12        |
| 2.6.6    | Relação entre as derivadas parciais em ordem a $X$ e a $x$ . . . . .                             | 13        |
| 2.6.7    | Relação entre as derivadas parciais em ordem a $Y$ e a $y$ . . . . .                             | 13        |
| 2.6.8    | Derivadas parciais em ordem a $X$ e $Y$ expressas como polinómios Zernike . . . . .              | 13        |
| 2.7      | Reflexões e rotações de Zernike . . . . .                                                        | 14        |
| 2.7.1    | Reflexão e imagem de um ajuste de uma superfície . . . . .                                       | 14        |
| 2.7.2    | Rotação das funções de Zernike . . . . .                                                         | 15        |
| 2.8      | Representação dos polinómios de Zernike . . . . .                                                | 16        |
| 2.8.1    | Representações em $\mathbb{R}^3$ . . . . .                                                       | 16        |
| 2.8.2    | Representações em $\mathbb{R}^2$ . . . . .                                                       | 17        |
| 2.9      | Polinómios de Zernike e algumas aberrações . . . . .                                             | 18        |
| <b>3</b> | <b>Polinómios de Zernike vs Funções de Bessel</b>                                                | <b>21</b> |
| 3.1      | Introdução . . . . .                                                                             | 21        |
| 3.2      | Representação Modal de Superfícies . . . . .                                                     | 23        |
| 3.3      | Representação de superfícies com modelos finitos . . . . .                                       | 28        |
| 3.4      | Superfícies com anéis . . . . .                                                                  | 30        |
| 3.5      | Modelo de olho completo . . . . .                                                                | 33        |
| 3.6      | Discussão . . . . .                                                                              | 35        |
| 3.7      | Conclusão . . . . .                                                                              | 36        |
| <b>4</b> | <b>Modelos ótimos para análise estatística com Polinómios de Zernike</b>                         | <b>37</b> |
| 4.1      | Introdução . . . . .                                                                             | 37        |
| 4.2      | Polinómios de Zernike . . . . .                                                                  | 37        |
| 4.3      | Critério de $\Phi$ -otimalidade . . . . .                                                        | 39        |

|          |                                                                                                   |           |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 4.4      | Momentos de Zernike . . . . .                                                                     | 40        |
| 4.5      | Modelos ótimos para a estimação dos mínimos quadrados no modelo de regressão de Zernike . . . . . | 42        |
| 4.6      | Modelos $D$ -ótimos para estimação dos mínimos quadrados . . . . .                                | 52        |
| 4.7      | Modelos $E$ -ótimos para estimação dos mínimos quadrados . . . . .                                | 55        |
| 4.8      | Conclusão . . . . .                                                                               | 56        |
| <b>A</b> | <b>Anexos</b>                                                                                     | <b>57</b> |
| A.1      | Código para obter os valores dos polinômios de Zernike . . . . .                                  | 57        |
| A.2      | Código para representar a pirâmide dos polinômios de Zernike em $\mathbb{R}^3$ . . . . .          | 61        |
| A.3      | Código para representar um polinômio de Zernike em $\mathbb{R}^3$ . . . . .                       | 61        |
| A.4      | Código para representar a pirâmide dos polinômios de Zernike em $\mathbb{R}^2$ . . . . .          | 62        |
| A.5      | Código para representar um polinômio de Zernike em $\mathbb{R}^2$ . . . . .                       | 62        |
| A.6      | Código para representar uma linha da pirâmide de polinômios de Zernike . . . . .                  | 63        |

# Lista de Tabelas

|     |                                                                                               |   |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| 2.1 | Conversão de duplo índice para índice único até $n = 4$ e o polinômio correspondente. . . . . | 5 |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------|---|





# Lista de Figuras

|      |                                                                                                                                                                                                                                     |    |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1  | Sistema de coordenadas cartesiano e polar aplicado ao olho humano. . . . .                                                                                                                                                          | 6  |
| 2.2  | Representação do polinómio $Z_2^{-2}(\rho, \theta)$ . . . . .                                                                                                                                                                       | 17 |
| 2.3  | Representação em pirâmide dos polinómios de Zernike até $n = 3$ . . . . .                                                                                                                                                           | 17 |
| 2.4  | Representação do polinómio $Z_2^{-2}(\rho, \theta)$ . . . . .                                                                                                                                                                       | 18 |
| 2.5  | Pirâmide de Zernike até $n = 5$ . . . . .                                                                                                                                                                                           | 18 |
| 2.6  | Representação dos polinómios de Zernike de ordem $n = 0$ . . . . .                                                                                                                                                                  | 19 |
| 2.7  | Representação dos polinómios de Zernike de ordem $n = 1$ . . . . .                                                                                                                                                                  | 19 |
| 2.8  | Representação dos polinómios de Zernike de ordem $n = 2$ . . . . .                                                                                                                                                                  | 19 |
| 2.9  | Representação dos polinómios de Zernike de ordem $n = 3$ . . . . .                                                                                                                                                                  | 20 |
| 2.10 | Representação dos polinómios de Zernike de ordem $n = 4$ . . . . .                                                                                                                                                                  | 20 |
| 3.1  | Representação da estrutura do olho e da sua composição. . . . .                                                                                                                                                                     | 22 |
| 3.2  | Representação do envelope superior e inferior de uma onda de seno modulado                                                                                                                                                          | 25 |
| 3.3  | Representação da função radial dos PCZ para $m = 0, n = 0, 2, 4, 6$ . . . . .                                                                                                                                                       | 25 |
| 3.4  | Representação da função de Bessel de primeira espécie para $m = 0, k = 1, 2, 3, 4$ .                                                                                                                                                | 26 |
| 3.5  | Representação da função radial dos PCZ para $m = 1, n = 1, 3, 5, 7$ . . . . .                                                                                                                                                       | 26 |
| 3.6  | Representação da função de Bessel de primeira espécie para $m = 1, k = 1, 2, 3, 4$ .                                                                                                                                                | 27 |
| 3.7  | Dispositivo de discos de Plácido. . . . .                                                                                                                                                                                           | 28 |
| 3.8  | Representação gráfica das FCB. . . . .                                                                                                                                                                                              | 29 |
| 3.9  | Representação de uma Gaussiana com $w^2 = 0.1$ . Em (a) encontra-se a representação gráfica desta função, enquanto que em (b) está representado o gráfico do erro (RMS) de aproximação das FCB e dos PCZ ao longo do disco. . . . . | 30 |
| 3.10 | Representação de uma Gaussiana com $w^2 = 0.5$ . Em (a) encontra-se a representação gráfica desta função, enquanto que em (b) está representado o gráfico do erro (RMS) de aproximação das FCB e dos PCZ ao longo do disco. . . . . | 31 |
| 3.11 | Representação de uma Gaussiana com $w^2 = 15$ . Em (a) encontra-se a representação gráfica desta função, enquanto que em (b) está representado o gráfico do erro (RMS) de aproximação das FCB e dos PCZ ao longo do disco. . . . .  | 31 |
| 3.12 | Representação gráfica de um anel completo (a). Em (b) está representado o gráfico do erro (RMS) de aproximação das FCB e dos PCZ ao longo do disco na superfície de um anel completo. . . . .                                       | 32 |
| 3.13 | Representação gráfica de um anel incompleto (a). Em (b) está representado o gráfico do erro (RMS) de aproximação das FCB e dos PCZ ao longo do disco na superfície de um anel incompleto. . . . .                                   | 33 |
| 3.14 | Representação da estrutura do olho e da sua composição. . . . .                                                                                                                                                                     | 34 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |    |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.15 | Representação gráfica de um modelo do olho completo com a conjugação de duas superfícies (a). Representação em perfil de um corte da representação anterior onde se vê de forma clara a sobreposição das duas superfícies (b). Em (c), (d) e (e) está representado o gráfico do erro (RMS) de aproximação das FCB e dos PCZ ao longo do disco na superfície de um modelo de olho completo, contemplando 4, 5 e 6 modos, respetivamente. . . . . | 35 |
| 4.1  | Modelo com padrão espiral. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 38 |
| 4.2  | Representação de modelos com distribuição uniforme, com $d$ ímpar em (a) e $d$ par em (b). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 52 |

# Capítulo 1

## Introdução

Numa época em que, mais do que nunca, as sensações revelam ter uma importância enorme no dia-a-dia de cada um, torna-se prioritário potenciar essas sensações e corrigir imperfeições que lhes estejam associadas. Dentro deste leque de sensações, há uma que sobressai e que revela ter uma importância acrescida: a visão.

Com o avanço da tecnologia e da medicina surgiu a necessidade de criar formas de detetar e corrigir aberrações óticas. Neste sentido, surgiram os polinómios de Zernike, que são um tipo de polinómios especiais com propriedades que permitem fazer representações de superfícies circulares com o erro muito baixo. Tornaram-se então muito importantes para fazer representações do olho e das aberrações associadas ao mesmo. Nesta dissertação pretende-se estudar esta família de polinómios, percebendo as suas principais propriedades e a importância que têm na resolução de problemas oftálmicos.

No Capítulo 2, apresentar-se-ão os polinómios de Zernike, estudando algumas das suas propriedades e vendo em que medida estes polinómios permitem detetar as aberrações do olho. Ver-se-ão ainda representações de alguns polinómios de Zernike que foram desenvolvidas em MATLAB. No estudo feito neste capítulo, o artigo [43] revelou ser uma boa fonte que serviu de base na escrita do mesmo.

Apesar da grande importância dos polinómios de Zernike, existem outras técnicas para solucionar o problema de detetar e corrigir aberrações óticas. As Funções Circulares de Bessel também pertencem à família de funções que são ortogonais no disco unitário e são um bom exemplo de funções usadas na representação de superfícies circulares. Neste sentido, no Capítulo 3 avaliou-se a performance dos polinómios de Zernike vs as Funções Circulares de Bessel de forma a perceber em que situações seria mais vantajoso usar cada um e, de uma forma geral, qual apresenta um melhor comportamento. As ideias e resultados de [47] foram muito importantes, permitindo interpretar esses mesmos resultados e tirar as devidas conclusões.

No Capítulo 4, pretende-se encontrar modelos ótimos que serão usados para os modelos de regressão pelo método dos mínimos quadrados. Modelos ótimos de pontos experimentais permitirão um melhor ajuste da expansão de polinómios de Zernike aos dados, pelo que neste capítulo se pretende encontrar modelos  $\Phi_p$ -ótimos, tendo por base os critérios de otimalidade introduzidos por Kiefer. Este capítulo teve por base o estudo realizado em [10].

Por fim, nos Anexos *A*, foram apresentados os códigos desenvolvidos em MATLAB para representar os vários polinómios de Zernike, bem como as pirâmides dos mesmos.

## Capítulo 2

# Polinómios de Zernike: definições e propriedades

### 2.1 Introdução

Neste capítulo, fazer-se-á uma introdução daquilo que é a base do tema da tese, nomeadamente os polinómios de Zernike. Nesta introdução será feita inicialmente uma pequena nota biográfica sobre Frits Zernike, sendo que, posteriormente, se definirão estes mesmos polinómios. De seguida, estudar-se-ão algumas das propriedades destes polinómios, sendo este estudo uma das partes fulcrais da dissertação. Serão apresentados alguns resultados obtidos via MATLAB e ainda uma das aplicações destes polinómios. As ideias, técnicas e gráficos obtidos tiveram por base o trabalho desenvolvido em [43].

Frits Zernike foi um físico holandês e vencedor do Nobel da Física em 1953. Nascido em Amsterdão, a 16 de Julho de 1888, acabou por estudar química, matemática e física na Universidade de Amsterdão. A paixão por estas áreas veio dos pais, ambos professores de matemática, mas com estudos em física.

Ganhou diversos prémios pelos seus inúmeros projetos, nomeadamente, a opalescência em gases, linhas espectrais e estudos em que descreve de forma eficiente defeitos ou aberrações de sistemas óticos, bem como a representação gráfica destas mesmas aberrações. Foi responsável pelo desenvolvimento de uma família de polinómios ortogonais no círculo unitário. Esta família de polinómios acabou por ser a solução de um problema existente à data sobre o equilíbrio ótimo das várias aberrações de um instrumento ótico. Desde os anos 60 que estes polinómios são muito utilizados em modelos óticos, metrologia ótica e análise de imagens. Estes polinómios ficaram conhecidos como os Polinómios de Zernike e são a base desta dissertação. Em 1953 ganhou o Nobel da Física pela invenção do microscópio de contraste de fase. Este instrumento permite fazer o estudo da estrutura celular interna sem a necessidade de matar as células.

Frits Zernike acabou por falecer, em 1966, no Hospital de Amersfoort, na Holanda, depois de sofrer de uma doença prolongada nos últimos anos da sua vida.

## 2.2 Polinômios de Zernike: algumas noções básicas

Os polinômios de Zernike são, normalmente, definidos em coordenadas polares,  $(\rho, \theta)$ , e dependem de 3 componentes:

- factor de normalização;
- componente radial;
- componente angular.

A componente radial é polinomial, enquanto que a componente angular é sinusoidal.

É útil usar um duplo índice para descrever estas funções, com um índice  $n$ , que descreve a maior potência, ou a ordem do polinômio radial, e um índice  $m$ , que descreve a frequência angular da componente angular. Em geral, os polinômios de Zernike são descritos na forma:

$$Z_n^m(\rho, \theta) = \begin{cases} N_n^m R_n^{|m|}(\rho) \cos(m\theta), & \text{para } m \geq 0 \\ -N_n^m R_n^{|m|}(\rho) \sin(m\theta), & \text{para } m < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $N_n^m$  é o factor de normalização e  $R_n^{|m|}(\rho)$  é dado por:

$$R_n^{|m|} = \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|}{2}} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! \left[ \frac{n+|m|}{2} - s \right]! \left[ \frac{n-|m|}{2} - s \right]!} \rho^{n-2s}. \quad (2.2)$$

Os valores de  $n$  e  $m$  são inteiros com  $n \in \mathbb{N}_0$  e  $n - |m|$  é par e não negativo. Assim, para um dado  $n$ ,  $m$  toma apenas os valores  $-n, -n+2, -n+4, \dots, n$ . Se  $n - |m|$  é ímpar, então  $R_n^m$  é identicamente igual a zero.

Os polinômios de Zernike são ortogonais apenas no círculo unitário, pelo que se revela útil usar coordenadas normalizadas que serão descritas na Secção 2.4. No caso desta família de polinômios o fator de normalização é dado por:

$$N_n^m = \sqrt{\frac{2(n+1)}{1 + \delta_{m0}}} \quad (2.3)$$

onde  $\delta_{m0}$  é o delta de Kronecker, isto é:

$$\delta_{m0} = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases}.$$

## 2.3 Esquema de índice único

**Definição 2.3.1** *É frequente dar-se uso àquilo que se denomina por expansão de Zernike. Esta expansão corresponde a uma função  $f$  descrita na forma*

$$f(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=-n \\ n-|m| \text{ par}}}^n \beta_{(n,m)} Z_n^m(\rho, \theta), \quad \rho \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi[, \quad (2.4)$$

tal que  $\beta_{(n,m)}$  corresponde ao coeficiente associado ao polinômio  $Z_n^m$ .

Por vezes, é útil usar um esquema de índice único para descrever os coeficientes da expansão de Zernike. Este esquema de índice único foi introduzido por Robert Noll, que o descreveu pela primeira vez no artigo [37] de 1976.

Como os polinómios dependem, na verdade, de dois parâmetros,  $n$  e  $m$ , a ordenação pelo esquema de índice único pode fazer-se de forma arbitrária. Esta arbitrariedade leva à necessidade de se considerar um esquema de índice único standard. Para obter este índice único, diga-se  $j$ , é conveniente esquematizar os polinómios em pirâmide.

Assim, o índice único,  $j$ , começa no topo da pirâmide e vai "andando" para baixo, da esquerda para a direita. Para converter o índice único  $j$  para o índice duplo  $n$  e  $m$  e vice-versa, pode-se usar a seguinte relação

$$j = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n+m}{2} \quad (2.5)$$

e

$$n = \left\lceil \frac{-3 + \sqrt{9 + 8j}}{2} \right\rceil, \quad (2.6)$$

$$m = 2j - n(n+2), \quad (2.7)$$

onde  $\lceil \cdot \rceil$  dá o arredondamento superior do argumento.

De seguida apresenta-se uma tabela com a conversão dos índices  $n$  e  $m$  para o respetivo índice  $j$ , bem como o polinómio que lhe está associado.

| $Z_n^m$    | $n$ | $m$ | $j$ | $Z_j$                                       |
|------------|-----|-----|-----|---------------------------------------------|
| $Z_0^0$    | 0   | 0   | 0   | 1                                           |
| $Z_1^{-1}$ | 1   | -1  | 1   | $2\rho \sin \theta$                         |
| $Z_1^1$    | 1   | 1   | 2   | $2\rho \cos \theta$                         |
| $Z_2^{-2}$ | 2   | -2  | 3   | $\sqrt{6}\rho^2 \sin 2\theta$               |
| $Z_2^0$    | 2   | 0   | 4   | $\sqrt{3}(2\rho^2 - 1)$                     |
| $Z_2^2$    | 2   | 2   | 5   | $\sqrt{6}\rho^2 \cos 2\theta$               |
| $Z_3^{-3}$ | 3   | -3  | 6   | $\sqrt{8}\rho^3 \sin 3\theta$               |
| $Z_3^{-1}$ | 3   | -1  | 7   | $\sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho) \sin \theta$     |
| $Z_3^1$    | 3   | 1   | 8   | $\sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho) \cos \theta$     |
| $Z_3^3$    | 3   | 3   | 9   | $\sqrt{8}\rho^3 \cos 3\theta$               |
| $Z_4^{-4}$ | 4   | -4  | 10  | $\sqrt{10}\rho^4 \sin 4\theta$              |
| $Z_4^{-2}$ | 4   | -2  | 11  | $\sqrt{10}(4\rho^4 - 3\rho^2) \sin 2\theta$ |
| $Z_4^0$    | 4   | 0   | 12  | $\sqrt{5}(6\rho^4 - 6\rho^2 + 1)$           |
| $Z_4^2$    | 4   | 2   | 13  | $\sqrt{10}(4\rho^4 - 3\rho^2) \cos 2\theta$ |
| $Z_4^4$    | 4   | 4   | 14  | $\sqrt{10}\rho^4 \cos 4\theta$              |

Tabela 2.1: Conversão de duplo índice para índice único até  $n = 4$  e o polinómio correspondente.

## 2.4 Sistema de coordenadas

Em aplicações científicas, é comum dar-se uso ao sistema de coordenadas convencional, o chamado *right handed coordinate system* ou em português "regra de Fleming". Neste trabalho será usado este sistema. Assim, e atendendo ao contexto, o eixo dos  $zz$  é obtido apontando do olho para fora, enquanto que o eixo dos  $yy$  é obtido pela orientação vertical e o eixo dos  $xx$  pela orientação horizontal, tal como mostra a seguinte figura.

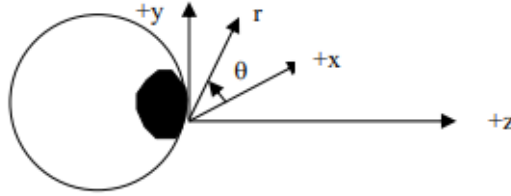


Figura 2.1: Sistema de coordenadas cartesiano e polar aplicado ao olho humano.

Fonte: *Description of Zernike Polynomials*, [43].

Na figura, pode-se ainda observar duas incógnitas que representam as componentes radial e angular,  $r$  e  $\theta$ , respetivamente. Pela definição das coordenadas polares, tem-se que  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$ . Esta definição dá-nos, também, que  $x = r \cos(\theta)$  e  $y = r \sin(\theta)$ , sendo que  $\theta$  segue o sentido anti-horário a partir do eixo das abcissas.

Como foi mencionado anteriormente, os polinômios de Zernike são ortogonais apenas no círculo unitário, pelo que se revela útil usar coordenadas normalizadas para representar funções ou superfícies. As coordenadas polares normalizadas  $(\rho, \theta)$  estão relacionadas com coordenadas polares  $(r, \theta)$  através de

$$\rho = \frac{r}{r_{max}}, \quad (2.8)$$

onde  $0 \leq r \leq r_{max}$  e  $r_{max}$  é a extensão radial máxima da função ou da superfície. Note-se que apenas a componente radial é afetada pela normalização. Também é necessária para algumas situações a descrição dos polinômios de Zernike em coordenadas cartesianas, de preferência normalizadas para que as propriedades de ortogonalidade sejam usufruídas. As coordenadas cartesianas normalizadas  $(X, Y)$  estão relacionadas com as coordenadas cartesianas regulares  $(x, y)$  através de

$$X = \frac{x}{r_{max}} \quad \text{e} \quad Y = \frac{y}{r_{max}} \quad (2.9)$$

onde, mais uma vez,  $r_{max}$  corresponde à extensão radial máxima da função ou da superfície.



## 2.5 Conversão de polinômios de Zernike de coordenadas polares para coordenadas cartesianas

Como os polinômios de Zernike dependem de  $\cos(m\theta)$  e  $\sin(m\theta)$ , verifica-se a seguinte relação em  $\mathbb{C}$ .

$$\begin{aligned} e^{i|m|\theta} &= \cos(|m|\theta) + i \times \sin(|m|\theta) \\ &= \left[ e^{i\theta} \right]^{|m|} \\ &= [\cos \theta + i \times \sin \theta]^{|m|}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Sabendo que  $\rho = r/r_{max}$ , vem então que

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{r_{max}} \\ &= \frac{r \cos(\theta)}{r_{max}} \\ &= \frac{r}{r_{max}} \times \cos(\theta) \\ &= \rho \cos(\theta) \end{aligned}$$

isto é,

$$\cos(\theta) = \frac{X}{\rho}. \quad (2.11)$$

Por outro lado, vem também

$$\begin{aligned} Y &= \frac{y}{r_{max}} \\ &= \frac{r \sin(\theta)}{r_{max}} \\ &= \frac{r}{r_{max}} \times \sin(\theta) \\ &= \rho \sin(\theta) \end{aligned}$$

isto é,

$$\sin(\theta) = \frac{Y}{\rho}. \quad (2.12)$$

Tendo em conta (2.11) e (2.12), a expressão (2.10) pode ser reescrita da seguinte forma

$$[\cos \theta + i \times \sin \theta]^{|m|} = \left[ \frac{X}{\rho} + i \times \frac{Y}{\rho} \right]^{|m|}.$$

Tendo em conta a seguinte expansão binomial

$$\begin{aligned} \left[ \frac{X}{\rho} + i \frac{Y}{\rho} \right]^{|m|} &= \sum_{k=0}^{|m|} \binom{|m|}{k} \left[ \frac{iY}{\rho} \right]^k \left[ \frac{X}{\rho} \right]^{|m|-k} \\ &= \sum_{k=0}^{|m|} \rho^{-k} \rho^{-|m|+k} \binom{|m|}{k} i^k X^{|m|-k} Y^k, \end{aligned}$$

e como  $\cos(|m|\theta)$  corresponde à parte real da expressão anterior e  $\sin(|m|\theta)$  à parte imaginária da mesma, obtém-se

$$\cos(|m|\theta) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ par}}}^{|m|} (-1)^{k/2} \binom{|m|}{k} \rho^{-|m|} X^{|m|-k} Y^k \quad (2.13)$$

$$\sin(|m|\theta) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ímpar}}}^{|m|} (-1)^{(k-1)/2} \binom{|m|}{k} \rho^{-|m|} X^{|m|-k} Y^k. \quad (2.14)$$

Fazendo o rearranjo do índice de somação obtém-se

$$\cos(|m|\theta) = \sum_{k=0}^{|m|/2} (-1)^k \binom{|m|}{2k} \rho^{-|m|} X^{|m|-2k} Y^{2k} \quad (2.15)$$

e

$$\sin(|m|\theta) = \sum_{k=0}^{(|m|-1)/2} (-1)^k \binom{|m|}{2k+1} \rho^{-|m|} X^{|m|-(2k+1)} Y^{2k+1}. \quad (2.16)$$

Tirando partido das equações (2.1) – (2.3), (2.13) – (2.16) e sabendo que  $\rho^2 = X^2 + Y^2$ , tem-se que

Para  $m > 0$

$$\begin{aligned} Z_n^m(X, Y) &= N_n^m R_n^{|m|}(\rho) \cos(m\theta) \\ &= \sqrt{2(n+1)} \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|}{2}} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! \left[ \frac{n+|m|}{2} - s \right]! \left[ \frac{n-|m|}{2} - s \right]!} \rho^{n-2s} \times \sum_{k=0}^{\frac{|m|}{2}} (-1)^k \binom{m}{2k} \rho^{-|m|} X^{|m|-2k} Y^{2k} \\ &= \sqrt{2(n+1)} \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{|m|}{2}} \frac{(-1)^s (-1)^k (n-s)!}{s! \left[ \frac{n+|m|}{2} - s \right]! \left[ \frac{n-|m|}{2} - s \right]!} \rho^{n-2s} \binom{m}{2k} \rho^{-|m|} X^{|m|-2k} Y^{2k} \\ &= \sqrt{2(n+1)} \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{|m|}{2}} \frac{(-1)^{s+k} (n-s)!}{s! \left[ \frac{n+|m|}{2} - s \right]! \left[ \frac{n-|m|}{2} - s \right]!} \rho^{n-2s-|m|} \binom{m}{2k} X^{|m|-2k} Y^{2k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{2(n+1)} \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{|m|}{2}} \frac{(-1)^{s+k} (n-s)!}{s! \left[ \frac{n+|m|}{2} - s \right]! \left[ \frac{n-|m|}{2} - s \right]!} \binom{m}{2k} X^{|m|-2k} Y^{2k} \\
&\quad \times \sum_{j=0}^{\frac{n-|m|}{2}-s} \binom{\frac{n-|m|}{2}-s}{j} X^{n-|m|-2s-2j} Y^{2j} \\
&= \sqrt{2(n+1)} \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{n-|m|}{2}-s} \sum_{k=0}^{\frac{|m|}{2}} \frac{(-1)^{s+k} (n-s)!}{s! \left[ \frac{n+|m|}{2} - s \right]! \left[ \frac{n-|m|}{2} - s \right]!} \binom{\frac{n-|m|}{2}-s}{j} \binom{m}{2k} \\
&\quad \times X^{n-|m|-2s-2j+|m|-2k} Y^{2j+2k} \\
&= \sqrt{2(n+1)} \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{n-|m|}{2}-s} \sum_{k=0}^{\frac{|m|}{2}} \frac{(-1)^{s+k} (n-s)!}{s! \left[ \frac{n+|m|}{2} - s \right]! \left[ \frac{n-|m|}{2} - s \right]!} \binom{\frac{n-|m|}{2}-s}{j} \binom{m}{2k} \\
&\quad \times X^{n-2(s+j+k)} Y^{2(j+k)}. \tag{2.17}
\end{aligned}$$

Para  $m < 0$

Para  $m < 0$ , como  $\sin(m\theta) = \sin(-|m|\theta) = -\sin(|m|\theta)$ , então, utilizando (2.16), tem-se que

$$\begin{aligned}
&Z_n^m(X, Y) \\
&= -N_n^m R_n^{|m|}(\rho) \sin(m\theta) \\
&= \sqrt{2(n+1)} \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|}{2}} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! \left[ \frac{n+|m|}{2} - s \right]! \left[ \frac{n-|m|}{2} - s \right]!} \rho^{n-2s} \\
&\quad \times \sum_{k=0}^{\frac{|m|-1}{2}} (-1)^k \binom{m}{2k+1} \rho^{-|m|} X^{|m|-2k-1} Y^{2k+1} \\
&= \sqrt{2(n+1)} \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{|m|-1}{2}} \frac{(-1)^s (-1)^k (n-s)!}{s! \left[ \frac{n+|m|}{2} - s \right]! \left[ \frac{n-|m|}{2} - s \right]!} \rho^{n-2s} \binom{m}{2k+1} \\
&\quad \times \rho^{-|m|} X^{|m|-2k-1} Y^{2k+1} \\
&= \sqrt{2(n+1)} \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{|m|-1}{2}} \frac{(-1)^{s+k} (n-s)!}{s! \left[ \frac{n+|m|}{2} - s \right]! \left[ \frac{n-|m|}{2} - s \right]!} \rho^{n-2s-|m|} \binom{m}{2k+1} \\
&\quad \times X^{|m|-2k-1} Y^{2k+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{2(n+1)} \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{|m|-1}{2}} \frac{(-1)^{s+k}(n-s)!}{s! \left[ \frac{n+|m|}{2} - s \right]! \left[ \frac{n-|m|}{2} - s \right]!} \binom{m}{2k+1} X^{|m|-2k-1} Y^{2k+1} \\
&\quad \times \sum_{j=0}^{\frac{n-|m|}{2}-s} \binom{\frac{n-|m|}{2}-s}{j} X^{n-|m|-2s-2j} Y^{2j} \\
&= \sqrt{2(n+1)} \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{n-|m|}{2}-s} \sum_{k=0}^{\frac{|m|-1}{2}} \frac{(-1)^{s+k}(n-s)!}{s! \left[ \frac{n+|m|}{2} - s \right]! \left[ \frac{n-|m|}{2} - s \right]!} \binom{\frac{n-|m|}{2}-s}{j} \binom{m}{2k+1} \\
&\quad \times X^{n-|m|-2s-2j+|m|-2k-1} Y^{2j+2k+1} \\
&= \sqrt{2(n+1)} \times \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{n-|m|}{2}-s} \sum_{k=0}^{\frac{|m|-1}{2}} \frac{(-1)^{s+k}(n-s)!}{s! \left[ \frac{n+|m|}{2} - s \right]! \left[ \frac{n-|m|}{2} - s \right]!} \binom{\frac{n-|m|}{2}-s}{j} \binom{m}{2k+1} \\
&\quad \times X^{n-2(s+j+k)-1} Y^{2(j+k)+1}. \tag{2.18}
\end{aligned}$$

Para  $m = 0$

$$\begin{aligned}
&Z_n^0(X, Y) \\
&= -N_n^0 R_n^{[0]}(\rho) \cos(0\theta) \\
&= \sqrt{n+1} \sqrt{\frac{2(n+1)}{1+1}} \sum_{s=0}^{\frac{n-|0|}{2}} \frac{(-1)^s(n-s)!}{s! \left[ \frac{n+|0|}{2} - s \right]! \left[ \frac{n-|0|}{2} - s \right]!} \rho^{n-2s} \times 1 \\
&= \sqrt{n+1} \sum_{s=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^s(n-s)!}{s! \left[ \frac{n}{2} - s \right]! \left[ \frac{n}{2} - s \right]!} \rho^{n-2s} \\
&= \sqrt{n+1} \sum_{s=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^s(n-s)!}{s! \left[ \frac{n}{2} - s \right]! \left[ \frac{n}{2} - s \right]!} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-s} \binom{\frac{n}{2}-s}{j} X^{n-2s-2j} Y^{2j} \\
&= \sqrt{n+1} \sum_{s=0}^{\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-s} \frac{(-1)^s(n-s)!}{s! \left[ \frac{n}{2} - s \right]! \left[ \frac{n}{2} - s \right]!} \binom{\frac{n}{2}-s}{j} X^{n-2s-2j} Y^{2j} \\
&= \sqrt{n+1} \sum_{s=0}^{\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-s} \frac{(-1)^s(n-s)!}{s! \left[ \frac{n}{2} - s \right]! \left[ \frac{n}{2} - s \right]!} \binom{\frac{n}{2}-s}{j} X^{n-2(s+j)} Y^{2j}. \tag{2.19}
\end{aligned}$$

## 2.6 Derivadas dos polinómios de Zernike

### 2.6.1 Derivada parcial em ordem a $\rho$

A partir das equações (2.1) e (2.2), facilmente se deduz que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(Z_n^m(\rho, \theta))}{\partial \rho} &= \begin{cases} \frac{\partial(N_n^m(R_n^{|m|}(\rho)) \cos(m\theta))}{\partial \rho} & , \text{ para } m \geq 0 \\ \frac{\partial(-N_n^m(R_n^{|m|}(\rho)) \sin(m\theta))}{\partial \rho} & , \text{ para } m < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} N_n^m \frac{\partial(R_n^{|m|}(\rho))}{\partial \rho} \cos(m\theta) & , \text{ para } m \geq 0 \\ -N_n^m \frac{\partial(R_n^{|m|}(\rho))}{\partial \rho} \sin(m\theta) & , \text{ para } m < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.20)$$

e

$$\frac{\partial(R_n^{|m|}(\rho))}{\partial \rho} = \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|}{2}} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! \left[ \frac{n+|m|}{2} - s \right]! \left[ \frac{n-|m|}{2} - s \right]!} (n-2s) \rho^{n-2s-1}. \quad (2.21)$$

### 2.6.2 Derivada parcial em ordem a $r$

Para calcular a derivada em ordem a  $r$ , recorre-se à regra da cadeia, isto é,

$$\frac{\partial(Z_n^m(r, \theta))}{\partial r} = \frac{\partial(Z_n^m(\rho, \theta))}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial r}. \quad (2.22)$$

Uma vez que  $\rho = \frac{r}{r_{max}}$ , conclui-se que  $\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{1}{r_{max}}$ , pelo que (2.22) é equivalente a

$$\frac{\partial(Z_n^m(r, \theta))}{\partial r} = \frac{1}{r_{max}} \frac{\partial(Z_n^m(\rho, \theta))}{\partial \rho}. \quad (2.23)$$

### 2.6.3 Derivada parcial em ordem a $\theta$

Partindo de (2.1) aplica-se a derivada parcial em ordem a  $\theta$ , obtendo-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial(Z_n^m(\rho, \theta))}{\partial \theta} &= \begin{cases} \frac{\partial(N_n^m R_n^{|m|}(\rho) \cos(m\theta))}{\partial \theta} & , m \geq 0 \\ \frac{\partial(-N_n^m R_n^{|m|}(\rho) \sin(m\theta))}{\partial \theta} & , m < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} N_n^m R_n^{|m|}(\rho) \frac{(\partial \cos(m\theta))}{\partial \theta} & , m \geq 0 \\ -N_n^m R_n^{|m|}(\rho) \frac{(\partial \sin(m\theta))}{\partial \theta} & , m < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -m N_n^m R_n^{|m|}(\rho) \sin(m\theta) & , m \geq 0 \\ -m N_n^m R_n^{|m|}(\rho) \cos(m\theta) & , m < 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

### 2.6.4 Derivada parcial em ordem a $X$

A partir de (2.17), (2.18) e (2.19), resulta que

Para  $m > 0$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Z_n^m(X, Y)}{\partial X} \\ &= \sqrt{2(n+1)} \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{n-|m|}{2}-s} \sum_{k=0}^{\frac{|m|}{2}} \frac{(-1)^{s+k}(n-s)!}{s! \left[ \frac{n+|m|}{2} - s \right]! \left[ \frac{n-|m|}{2} - s \right]!} \binom{\frac{n-|m|}{2} - s}{j} \binom{m}{2k} \\ & \quad \times (n - 2(s+j+k)) X^{n-2(s+j+k)-1} Y^{2(j+k)}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Para  $m < 0$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Z_n^m(X, Y)}{\partial X} \\ &= \sqrt{2(n+1)} \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{n-|m|}{2}-s} \sum_{k=0}^{\frac{|m|-1}{2}} \frac{(-1)^{s+k}(n-s)!}{s! \left[ \frac{n+|m|}{2} - s \right]! \left[ \frac{n-|m|}{2} - s \right]!} \binom{\frac{n-|m|}{2} - s}{j} \binom{m}{2k+1} \\ & \quad \times (n - 2(s+j+k) - 1) X^{n-2(s+j+k)-2} Y^{2(j+k)+1}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Para  $m = 0$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Z_n^0(X, Y)}{\partial X} \\ &= \sqrt{n+1} \sum_{s=0}^{\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-s} \frac{(-1)^s(n-s)!}{s! \left[ \frac{n}{2} - s \right]! \left[ \frac{n}{2} - s \right]!} \binom{\frac{n}{2} - s}{j} (n - 2(s+j)) X^{n-2(s+j)-1} Y^{2j}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

### 2.6.5 Derivada parcial em ordem a $Y$

A partir de (2.17), (2.18) e (2.19), obtém-se

Para  $m > 0$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Z_n^m(X, Y)}{\partial Y} \\ &= \sqrt{2(n+1)} \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{n-|m|}{2}-s} \sum_{k=0}^{\frac{|m|}{2}} \frac{(-1)^{s+k}(n-s)!}{s! \left[ \frac{n+|m|}{2} - s \right]! \left[ \frac{n-|m|}{2} - s \right]!} \binom{\frac{n-|m|}{2} - s}{j} \binom{m}{2k} \\ & \quad \times (2(j+k)) X^{n-2(s+j+k)} Y^{2(j+k)-1}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Para  $m < 0$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Z_n^m(X, Y)}{\partial Y} \\ &= \sqrt{2(n+1)} \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{n-|m|}{2}-s} \sum_{k=0}^{\frac{|m|-1}{2}} \frac{(-1)^{s+k} (n-s)!}{s! \left[ \frac{n+|m|}{2} - s \right]! \left[ \frac{n-|m|}{2} - s \right]!} \binom{\frac{n-|m|}{2} - s}{j} \binom{m}{2k+1} \\ & \quad \times (2(j+k)+1) X^{n-2(s+j+k)-1} Y^{2(j+k)}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Para  $m = 0$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Z_n^0(X, Y)}{\partial Y} \\ &= \sqrt{n+1} \sum_{s=0}^{\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-s} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! \left[ \frac{n}{2} - s \right]! \left[ \frac{n}{2} - s \right]!} \binom{\frac{n}{2} - s}{j} 2j X^{n-2(s+j)} Y^{2j-1}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

### 2.6.6 Relação entre as derivadas parciais em ordem a $X$ e a $x$

Recorrendo à regra da cadeia para calcular a derivada parcial de  $Z_n^m(x, y)$  em ordem a  $x$ , resulta

$$\frac{\partial(Z_n^m(x, y))}{\partial x} = \frac{\partial(Z_n^m(X, Y))}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x}. \quad (2.31)$$

Como  $X = \frac{x}{r_{max}}$  então  $\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{1}{r_{max}}$ . Assim,

$$\frac{\partial(Z_n^m(x, y))}{\partial x} = \frac{1}{r_{max}} \frac{\partial(Z_n^m(X, Y))}{\partial X}. \quad (2.32)$$

### 2.6.7 Relação entre as derivadas parciais em ordem a $Y$ e a $y$

Fazendo uso da regra da cadeia, obtém-se

$$\frac{\partial(Z_n^m(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial(Z_n^m(X, Y))}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial y}. \quad (2.33)$$

Como  $Y = \frac{y}{r_{max}}$  então  $\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{1}{r_{max}}$ . Desta forma conclui-se que

$$\frac{\partial(Z_n^m(x, y))}{\partial y} = \frac{1}{r_{max}} \frac{\partial(Z_n^m(X, Y))}{\partial Y}. \quad (2.34)$$

### 2.6.8 Derivadas parciais em ordem a $X$ e $Y$ expressas como polinómios Zernike

As equações seguintes dão-nos as relações entre polinómios de Zernike e as suas primeiras derivadas. Estas expressões são modificações das expressões de Charlie Campbell para o caso

não-normalizado (ver [8]).

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial Z_n^m(X, Y)}{\partial X} \\
&= \sqrt{(1 + \delta_{m0})(n + 1)} \left[ \sum_{n'=|m|+1}^{n-1} \sqrt{(n' + 1)} Z_{n'}^{\frac{m}{|m|}(|m|+1)}(X, Y) + (1 - \delta_{m0})(1 - \delta_{m,-1}) \right. \\
&\quad \left. \times \sqrt{(1 + \delta_{m1})} \sum_{n'=|m|-1}^{n-1} \sqrt{(n' + 1)} Z_{n'}^{\frac{m}{|m|}(|m|-1)}(X, Y) \right] \quad (2.35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial Z_n^m(X, Y)}{\partial Y} \\
&= \sqrt{(1 + \delta_{m0})(n + 1)} \frac{m}{|m|} \left[ \sum_{n'=|m|+1}^{n-1} \sqrt{(n' + 1)} Z_{n'}^{-\frac{m}{|m|}(|m|+1)}(X, Y) - (1 - \delta_{m0})(1 - \delta_{m1}) \right. \\
&\quad \left. \times \sqrt{(1 + \delta_{m,-1})} \sum_{n'=|m|-1}^{n-1} \sqrt{(n' + 1)} Z_{n'}^{-\frac{m}{|m|}(|m|-1)}(X, Y) \right]. \quad (2.36)
\end{aligned}$$

De notar, mais uma vez, que

$$\delta_{ab} = \begin{cases} 1, & \text{se } a = b \\ 0, & \text{se } a \neq b \end{cases}.$$

## 2.7 Reflexões e rotações de Zernike

### 2.7.1 Reflexão e imagem de um ajuste de uma superfície

**Definição 2.7.1** *Denominam-se por padrões de Zernike às representações gráficas de cada um dos polinómios de Zernike.*

Com o objectivo de rodar os padrões de Zernike sobre o eixo dos  $Y$ 's, os valores de  $X$  nas equações (2.17), (2.18) e (2.19) passam a  $(-X)$ . Esta reflexão revela-se útil para comparar frentes de onda do olho direito e esquerdo.

Para os casos em que  $m \geq 0$ , se  $X$  passa a  $(-X)$ , aparece o fator  $(-1)^{n-2(s+j+k)}$ , ou seja

$$(-X)^{n-2(s+j+k)} = (-1)^{n-2(s+j+k)} X^{n-2(s+j+k)}.$$

Assim, se  $n$  for par e sendo o expoente do fator mencionado  $h$ , então  $h$  é par e, portanto, vem que

$$(-1)^{n-2(s+j+k)} X^{n-2(s+j+k)} = (-1)^h X^{n-2(s+j+k)} = X^{n-2(s+j+k)}$$

o que implica que  $Z_n^m(-X, Y) = Z_n^m(X, Y)$ .



Se, por outro lado,  $n$  é ímpar, então  $h$  é ímpar, obtendo-se assim

$$(-1)^{n-2(s+j+k)} X^{n-2(s+j+k)} = (-1)^h X^{n-2(s+j+k)} = -X^{n-2(s+j+k)}$$

pelo que  $Z_n^m(-X, Y) = -Z_n^m(X, Y)$ .

Para os casos em que  $m < 0$ , se  $X$  passa a  $(-X)$ , aparece o fator  $(-1)^{n-2(s+j+k)-1}$ , ou seja,

$$(-X)^{n-2(s+j+k)-1} = (-1)^{n-2(s+j+k)-1} X^{n-2(s+j+k)-1}.$$

Se  $n$  for par e sendo o expoente do fator mencionado  $h$ , então  $h$  é ímpar e, portanto, vem que

$$(-1)^{n-2(s+j+k)-1} X^{n-2(s+j+k)-1} = (-1)^h X^{n-2(s+j+k)-1} = -X^{n-2(s+j+k)-1}$$

o que implica que  $Z_n^m(-X, Y) = -Z_n^m(X, Y)$ .

Se, por outro lado,  $n$  é ímpar, então  $h$  é par, obtendo-se assim

$$(-1)^{n-2(s+j+k)-1} X^{n-2(s+j+k)-1} = (-1)^h X^{n-2(s+j+k)-1} = X^{n-2(s+j+k)-1}$$

pelo que  $Z_n^m(-X, Y) = Z_n^m(X, Y)$ .

Assim, conclui-se que

$$Z_n^m(-X, Y) = \begin{cases} Z_n^m(X, Y) & , \text{ se } m \geq 0 \text{ e } n \text{ par ou } m < 0 \text{ e } n \text{ ímpar} \\ -Z_n^m(X, Y) & , \text{ se } m \geq 0 \text{ e } n \text{ ímpar ou } m < 0 \text{ e } n \text{ par} \end{cases}. \quad (2.37)$$

### 2.7.2 Rotação das funções de Zernike

Com o objetivo de se fazer uma rotação dos polinômios de Zernike, através de um ângulo  $\theta_0$ , substitui-se  $\theta$  por  $\theta - \theta_0$  na equação (2.1), obtendo-se

$$Z_n^m(\rho, \theta - \theta_0) = \begin{cases} N_n^m R_n^{|m|}(\rho) \cos(m(\theta - \theta_0)), & \text{para } m \geq 0 \\ -N_n^m R_n^{|m|}(\rho) \sin(m(\theta - \theta_0)), & \text{para } m < 0 \end{cases}. \quad (2.38)$$

O resultado de uma rotação de pares de polinômios com  $n$  igual, mesma frequência angular,  $\theta$ , e mesma magnitude e sinais opostos,  $m$ , pode ser escrito sob a forma de uma expansão linear, tendo assim que

$$\begin{aligned} & a_{n,|m|} Z_n^{|m|}(\rho, \theta - \theta_0) + a_{n,-|m|} Z_n^{-|m|}(\rho, \theta - \theta_0) \\ &= a_{n,|m|} N_n^m R_n^{|m|}(\rho) \cos(|m|(\theta - \theta_0)) - a_{n,-|m|} N_n^m R_n^{|m|}(\rho) \sin(|m|(\theta - \theta_0)) \\ &= a_{n,|m|} N_n^m R_n^{|m|}(\rho) \cos(|m|\theta - |m|\theta_0) - a_{n,-|m|} N_n^m R_n^{|m|}(\rho) \sin(|m|\theta - |m|\theta_0) \\ &= a_{n,|m|} N_n^m R_n^{|m|}(\rho) [\cos(|m|\theta) \cos(|m|\theta_0) + \sin(|m|\theta) \sin(|m|\theta_0)] \\ &\quad - a_{n,-|m|} N_n^m R_n^{|m|}(\rho) [\sin(|m|\theta) \cos(|m|\theta_0) - \sin(|m|\theta_0) \cos(|m|\theta)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{n,|m|} N_n^m R_n^{|m|}(\rho) \cos(|m|\theta) \cos(|m|\theta_0) + a_{n,|m|} N_n^m R_n^{|m|}(\rho) \sin(|m|\theta) \sin(|m|\theta_0) \\
&\quad - a_{n,-|m|} N_n^m R_n^{|m|}(\rho) \sin(|m|\theta) \cos(|m|\theta_0) + a_{n,-|m|} N_n^m R_n^{|m|}(\rho) \sin(|m|\theta) \cos(|m|\theta_0) \\
&= [a_{n,|m|} \cos(|m|\theta_0) + a_{n,-|m|} \sin(|m|\theta_0)] N_n^m R_n^{|m|}(\rho) \cos(|m|\theta) \\
&\quad + [a_{n,|m|} \sin(|m|\theta_0) - a_{n,-|m|} \cos(|m|\theta_0)] N_n^m R_n^{|m|}(\rho) \sin(|m|\theta). \tag{2.39}
\end{aligned}$$

Assim, os polinômios podem sofrer uma rotação modificando os coeficientes de tal forma que

$$\begin{aligned}
b_{n,|m|} &= [a_{n,|m|} \cos(|m|\theta_0) + a_{n,-|m|} \sin(|m|\theta_0)] \\
b_{n,-|m|} &= [a_{n,|m|} \sin(|m|\theta_0) - a_{n,-|m|} \cos(|m|\theta_0)] \tag{2.40}
\end{aligned}$$

onde os  $b$ 's são os coeficientes da expansão para os polinômios que sofreram rotação.

Assim, os polinômios que sofrem uma rotação podem ser descritos na forma

$$a_{n,|m|} Z_n^{|m|}(\rho, \theta - \theta_0) + a_{n,-|m|} Z_n^{-|m|}(\rho, \theta - \theta_0) = b_{n,|m|} Z_n^m(\rho, \theta) + b_{n,-|m|} Z_n^{-|m|}(\rho, \theta) \tag{2.41}$$

sendo que os  $b$ 's já foram dados por (2.40).

## 2.8 Representação dos polinômios de Zernike

Os polinômios de Zernike são polinômios ortogonais no círculo unitário. Tendo isso em conta e sabendo que estes polinômios também são conhecidos pela sua representação em forma de pirâmide, decidiu-se fazer esta mesma representação, tanto em  $\mathbb{R}^2$  como em  $\mathbb{R}^3$ . Assim, neste capítulo são explicados alguns dos passos e funções utilizadas no código desenvolvido. Estas representações foram feitas com recurso ao software MATLAB. Nesta fase, já se pode ver representado o que foi visto no subcapítulo 2.3. O código utilizado está em anexo.

### 2.8.1 Representações em $\mathbb{R}^3$

Começa-se por relembrar que os polinômios de Zernike são funções reais de variáveis reais que podem ser representados em  $\mathbb{R}^3$ , pelo que primeiramente vão ser representados alguns polinômios em  $\mathbb{R}^3$ .

Numa primeira fase, fez-se, a título de exemplo, a representação do polinômio correspondente a  $Z_2^{-2}(\rho, \theta)$ . Para fazer esta representação, começou-se por criar uma grelha de 10000 pontos, fruto da combinação de 100 raios e 100 ângulos diferentes. Estes pontos estão contidos no plano  $xOy$ . De seguida, utilizou-se uma função (ver anexo (A.1)) que, a partir de um dado  $n$ , de um dado  $m$  e da grelha de ângulos e raios anterior, retorna uma grelha com os valores correspondentes no polinômio de Zernike. No final, faz-se a representação da superfície, tendo em conta os pontos da grelha inicial e os valores correspondentes calculados da grelha anterior. Obteve-se então o seguinte resultado.

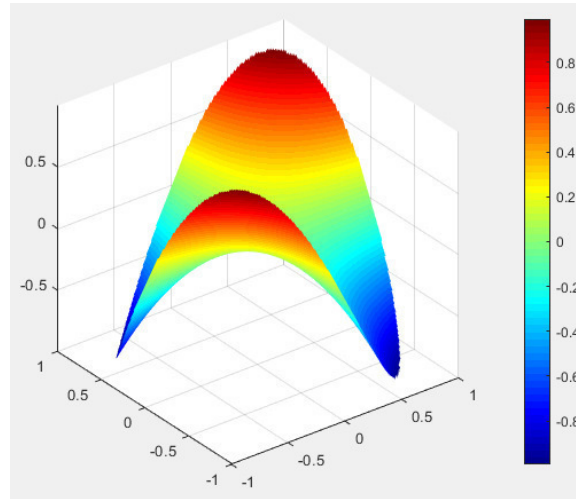


Figura 2.2: Representação do polinómio  $Z_2^{-2}(\rho, \theta)$ .

Numa segunda fase, fez-se a representação da pirâmide dos polinómios de Zernike em  $\mathbb{R}^3$  até  $n = 3$ . A única diferença para o código anterior é que se teve de encontrar uma forma de representar em grelha cada um dos polinómios em  $\mathbb{R}^3$ . Obteve-se também o seguinte resultado.

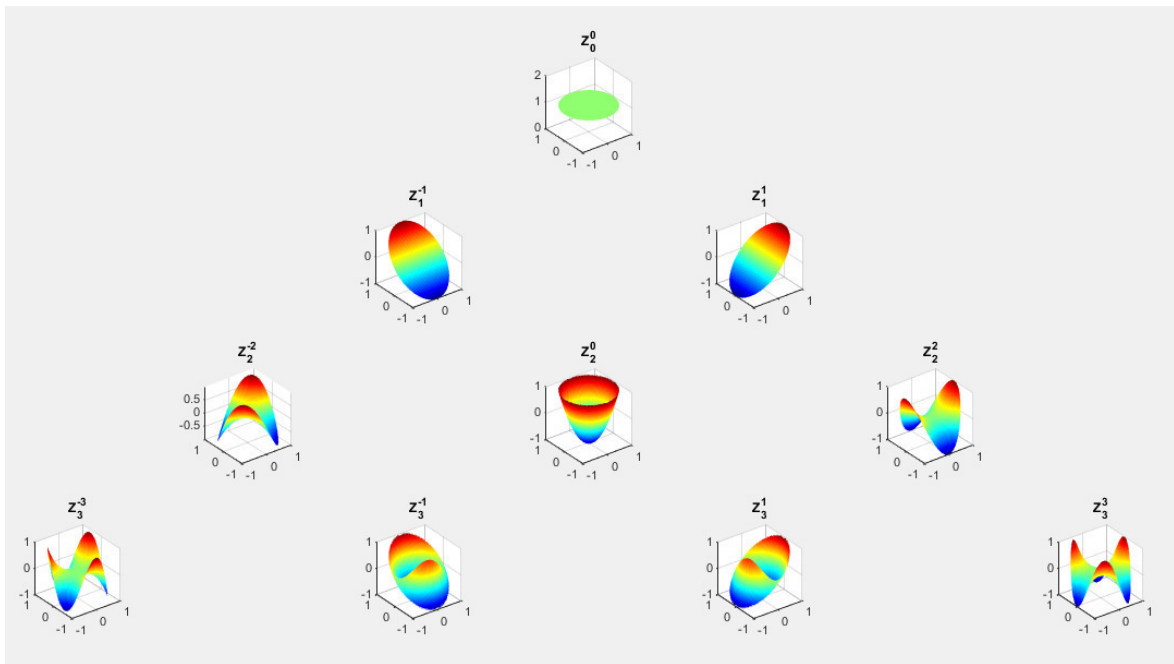


Figura 2.3: Representação em pirâmide dos polinómios de Zernike até  $n = 3$ .

### 2.8.2 Representações em $\mathbb{R}^2$

Neste subcapítulo, mostrar-se-ão os mesmos resultados do subcapítulo anterior, porém numa representação em  $\mathbb{R}^2$ , através da projeção no plano  $xOy$  dos pontos que são calculados na última grelha. Neste sentido, o código é muito semelhante, diferindo apenas na parte final, em que não se representam os polinómios de Zernike em  $\mathbb{R}^3$ , mas sim a sua projeção, através do comando `pcolor(X,Y,Z)`.

Em primeiro lugar, e tal como anteriormente, far-se-á a representação apenas do polinómio correspondente a  $Z_2^{-2}(\rho, \theta)$ . Obteve-se então o resultado.

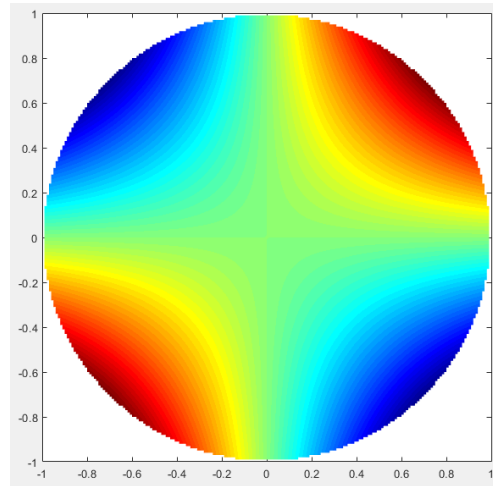


Figura 2.4: Representação do polinómio  $Z_2^{-2}(\rho, \theta)$ .

De seguida, fez-se então a representação da pirâmide dos polinómios de Zernike, desta vez até  $n = 5$ .

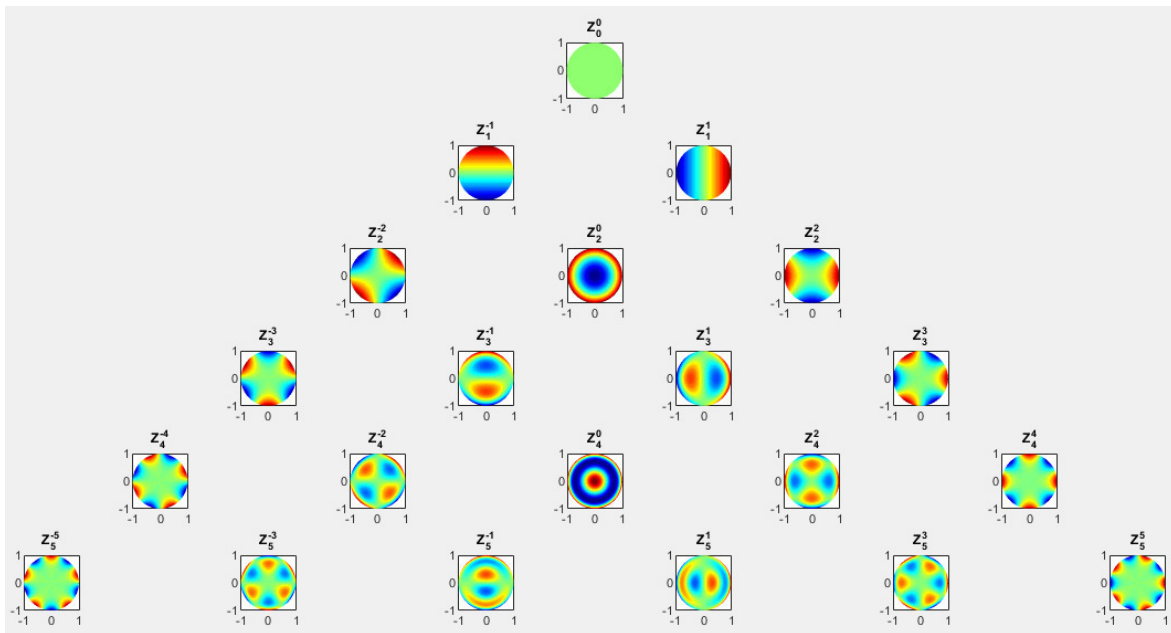


Figura 2.5: Pirâmide de Zernike até  $n = 5$ .

## 2.9 Polinómios de Zernike e algumas aberrações

**Definição 2.9.1** *Denomina-se por modo de Zernike um polinómio de Zernike. Um grupo de modos de Zernike é um conjunto de polinómios de Zernike.*

Os polinómios de Zernike, por serem representados no círculo unitário, têm uma forte aplicação no que diz respeito à representação do olho, de partes do olho e das aberrações do mesmo. Neste sentido, vários especialistas estudaram estes polinómios e as diversas aberrações, pelo que se chegou à conclusão que cada modo ou grupo de modos de Zernike estava associado a uma aberração diferente. Assim, os polinómios de Zernike são também muito utilizados para corrigir estes problemas, através de lentes de contacto, óculos ou métodos cirúrgicos. De seguida, explica-se então qual é a aberração associada a cada modo até à ordem  $n = 4$ . O código utilizado pode ser consultado no anexo (A.6).

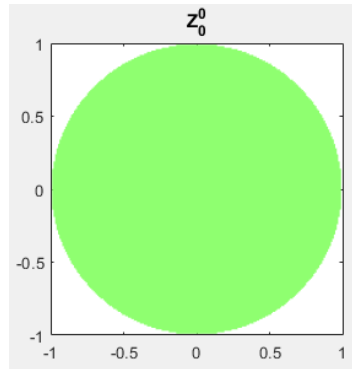


Figura 2.6: Representação dos polinómios de Zernike de ordem  $n = 0$ .

Este termo,  $Z_0^0$ , é denominado como Pistão e é normalmente ignorado, pelo facto de a sua superfície ser constante em todo o círculo, pelo que não apresenta qualquer variação.

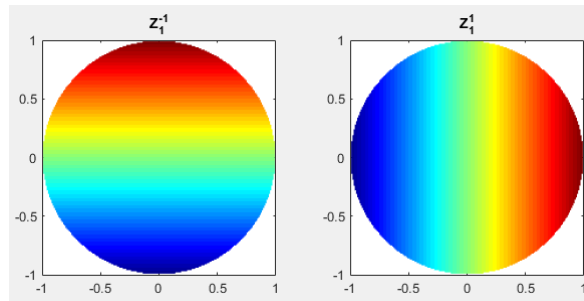


Figura 2.7: Representação dos polinómios de Zernike de ordem  $n = 1$ .

Estes termos,  $Z_1^{-1}$  e  $Z_1^1$  representam uma inclinação, pelo que a aberração associada aos mesmos se denomina de Tilt.

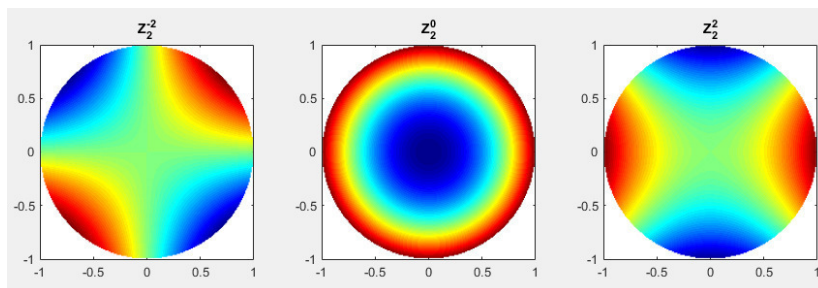


Figura 2.8: Representação dos polinómios de Zernike de ordem  $n = 2$ .

Esta ordem de polinómios divide-se em dois grupos. O primeiro grupo é composto apenas pelo termo  $Z_2^0$ , sendo a sua aberração chamada de Defocus. O segundo grupo está associado aos termos  $Z_2^{-2}$  e  $Z_2^2$ , denominados de Astigmatismo de 3<sup>a</sup> ordem. A combinação destes 3 termos fornece qualquer erro de refração esferocilindrico.

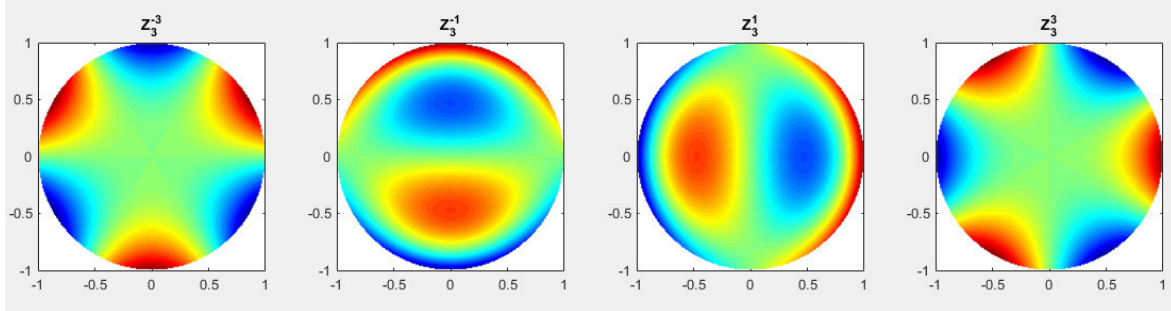


Figura 2.9: Representação dos polinómios de Zernike de ordem  $n = 3$ .

Esta ordem é composta também por dois grupos. O primeiro, composto por  $Z_3^{-1}$  e  $Z_3^1$ , está associado ao Coma primário de 3<sup>a</sup> ordem. O segundo grupo, composto por  $Z_3^{-3}$  e  $Z_3^3$ , associa-se Coma triangular de 3<sup>a</sup> ordem. Estes termos representam aberrações assimétricas, que não podem ser corrigidas através dos óculos ou lentes de contacto convencionais.

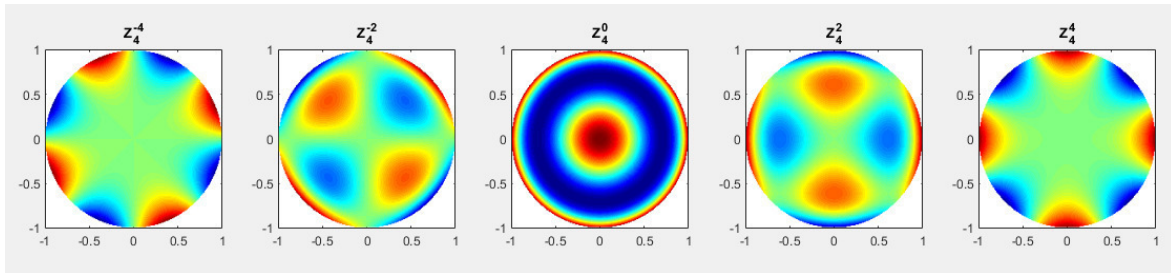


Figura 2.10: Representação dos polinómios de Zernike de ordem  $n = 4$ .

A última ordem está associada a 3 aberrações distintas. A primeira, cujo modo associado é  $Z_4^0$ , corresponde à aberração esférica. Estas aberrações esféricas podem ser corrigidas através de lentes asféricas (lentes com uma superfície mais plana). A segunda, composta por  $Z_4^{-2}$  e  $Z_4^2$ , associa-se ao Astigmatismo de 4<sup>a</sup> ordem. A terceira e última aberração denomina-se por Quadroil e está associada aos modos  $Z_4^{-4}$  e  $Z_4^4$ . Os termos desta ordem representam frentes de onda com formas mais complexas.

O código utilizado para desenvolver as linhas da pirâmide que estão representadas neste subcapítulo estão em anexo e foi desenvolvido no software MATLAB, tal como referido anteriormente (ver anexo (A.6)).

## Capítulo 3

# Polinómios de Zernike vs Funções de Bessel

### 3.1 Introdução

No campo da visão e da ótica visual existe um número de superfícies que se relacionam tanto com a anatomia e fisiologia do olho como com os instrumentos óticos designados para medir e corrigir aberrações.

A luz propaga-se uniformemente a partir de um ponto luminoso em todas as direções a uma velocidade constante. À medida que se propaga, as ondas formam superfícies esféricas imaginárias que são constituídas pelo conjunto de pontos em que a luz se está a propagar em cada momento. A estas superfícies dá-se o nome de frentes de onda. Estas frentes de onda podem ser modeladas matematicamente, por exemplo, pelos polinómios de Zernike. Por outro lado, é possível também comparar a posição atual destas frentes de onda com a posição ideal, sendo assim possível encontrar e representar irregularidades corneanas. A isto dá-se o nome de aberrações de frentes de onda (ver [21]).

Alguns exemplos de superfícies reais são o filme lacrimal e as superfícies corneanas anteriores. Por outro lado, existem superfícies de fase como as frentes de onda e aberrações de frentes de onda, como, por exemplo, funções de influência em espelhos deformáveis. Tal como já foi referido anteriormente, os Polinómios Circulares de Zernike (PCZ) têm vindo a ser bastante utilizados para representar todas estas superfícies, independentemente da sua natureza (superfícies reais ou funções de fase, que são funções que descrevem a distribuição angular da luz refletida num dado corpo quando iluminado numa direção específica) (ver [49]). Mais ainda são considerados como as funções standard para descrever as aberrações de frente de onda do olho humano e também para modelar as superfícies da córnea. Apesar da representação dos PCZ ter-se mostrado útil para a maioria das situações, existem alguns casos que mostram algumas limitações, nomeadamente quando aplicadas a superfícies óticas complexas com elevada frequência espacial ou descontinuidades resultantes de intervenções cirúrgicas.

Para uma melhor compreensão do que são estas superfícies óticas, bem como a denominação de cada uma delas, apresenta-se de seguida uma figura com o olho e a legenda da composição do mesmo, nomeadamente as diversas zonas que o compõem.

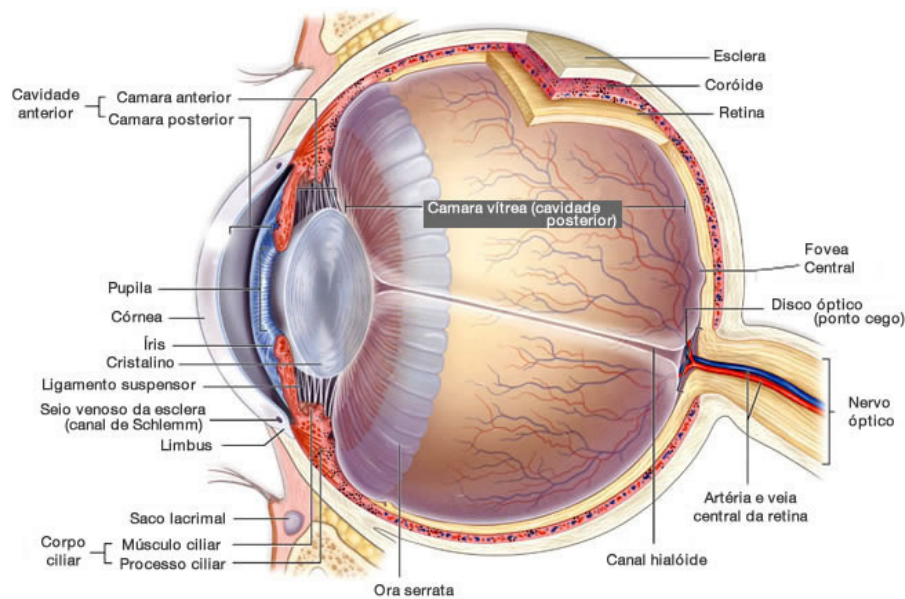


Figura 3.1: Representação da estrutura do olho e da sua composição.

Fonte: [http://www.oticasguarnieri.com.br/visao\\_olho.html](http://www.oticasguarnieri.com.br/visao_olho.html).

Foram propostas muitas representações funcionais alternativas para descrever superfícies óticas, variando de funções cónicas generalizadas para representações mais complexas, como os polinômios de Zernike fracionários (um novo tipo de polinômios de Zernike) e harmónicos esféricos (funções harmónicas que representam a variação espacial de um conjunto ortogonal de soluções da equação de Laplace, quando a solução é expressa em coordenadas esféricas) (ver [19; 23; 42]), sendo que existem ainda outras técnicas que incluem combinações de aproximações modais à zona, como os polinômios  $Q_n^m(u^2)$ , polinômios de Chebyshev e polinômios de Legendre, entre outras (ver [11; 34]). Cada uma destas aproximações apresenta algumas vantagens e desvantagens relativamente à representação standard dos PCZ. No entanto, tal como no caso destes polinômios, nenhuma delas é capaz de explicar adequadamente uma possível frequência espacial elevada numa superfície ótica, como ocorre, por exemplo, na superfície total anterior do olho, incluindo a córnea, limbus e esclera, ou em aberrações oculares mais elevadas nas zonas de transição de uma lente corretiva progressiva. É possível verificar que o aumento na ordem do modelo das decomposições polinomiais (isto é, sobre-parametrização) não melhora a representação dessas superfícies (ver [3]).

A origem dos PCZ está relacionada com uma teoria de física-matemática conhecida como Teoria de Sturm-Liouville (Teoria de S-L). No âmbito desta teoria, o conjunto PCZ é apenas um membro de uma classe de famílias de funções que são ortogonais no disco unitário, o que significa que uma soma das mesmas pode ser usada para aproximar qualquer superfície definida nesse domínio, onde se destacam, além dos Polinômios Circulares de Zernike, as Funções Circulares de Bessel. Este capítulo centrar-se-á nestes dois tipos de funções, sendo que se irão estudar as vantagens e desvantagens de um face ao outro.

As Funções Circulares de Bessel (FCB), que surgem naturalmente em muitos problemas bidimensionais com simetria cilíndrica, são outro exemplo da classe acima mencionada. Este conjunto de funções tem vindo a ser aplicado em diversos campos, que variam desde o pro-



cessamento de sinais até ao estudo da dinâmica de corpos flutuantes. As FCB, devido ao seu comportamento mais uniforme e radial quasi-periódico, têm vantagens sobre os PCZ no que diz respeito à aproximação de superfícies com elevada frequência espacial.

Tal como já foi mencionado, neste capítulo, o objectivo é investigar a aplicabilidade das FCB na modelação de superfícies óticas, aplicando uma análise rigorosa e sistemática e avaliando as vantagens e desvantagens de representação das FCB em relação às representações dos PCZ.

## 3.2 Representação Modal de Superfícies

**Definição 3.2.1** *Uma equação diferencial parcial ou equação de derivadas parciais (EDP) é uma equação envolvendo uma função de várias variáveis independentes e suas repetidas derivadas parciais.*

**Definição 3.2.2** *Uma função definida sobre um dado espaço diz-se rotacionalmente invariante se o seu valor não se altera quando se aplicam rotações arbitrárias sobre o seu argumento.*

**Exemplo 3.2.3** *A função  $f$  definida como*

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3.1)$$

*é invariante a rotações no plano em torno da origem, visto que para o conjunto de coordenadas rotacionais*

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' &= x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned}$$

*verifica-se que  $f(x', y') = f(x, y)$ , para todo o  $\theta \in \mathbb{R}$ .*

Os PCZ foram estudados por Nijboer [36] por aplicação da Teoria de S-L (ver [9; 18]). Em geral, esta teoria permite construir conjuntos completos e ortogonais de funções ou modos. Os PCZ e as FCB são ambos obtidos por aplicação da Teoria de S-L a uma equação diferencial parcial rotacionalmente invariante (EDPRI) de duas variáveis, com uma escolha diferente de parâmetros e condições de fronteira. As soluções correspondentes, PCZ e FCB, são obtidas como um produto de uma função radial e angular. Para ambos os conjuntos de funções, o fator angular é dado por

$$\begin{aligned} \phi_m &= \sin(m\varphi), \quad \text{para } m \geq 0 \\ \phi_m &= \cos(m\varphi), \quad \text{para } m < 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Esta representação dos polinômios de Zernike possui importantes interpretações físicas, como representações complexas das pupilas (ver [35]), a análise extendida de Nijboer-Zernike (ver [7]) e o modo de propagação de feixes de Laguerre-Gaussian (ver [46]).

No que diz respeito à parte radial, no caso dos PCZ, e tal como foi visto no capítulo anterior, esta é dada por

$$R_n^{|m|}(r) = \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|}{2}} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! \left(\frac{n+|m|}{2} - s\right)! \left(\frac{n-|m|}{2} - s\right)!} r^{n-2s}, \quad (3.3)$$

onde  $n \geq |m|$ , com  $n - |m|$  par.

Juntando (3.2) e (3.3), os PCZ são então dados na sua forma normalizada por:

$$Z_n^m(r, \varphi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2(n+1)}{1+\delta_{m,0}}} R_n^{|m|}(r) \cos(m\varphi), & \text{para } m \geq 0 \\ -\sqrt{\frac{2(n+1)}{1+\delta_{m,0}}} R_n^{|m|}(r) \sin(m\varphi), & \text{para } m < 0 \end{cases}, \quad (3.4)$$

onde o fator normalizador é então dado por

$$N_n^m = \sqrt{\frac{2(n+1)}{1+\delta_{m,0}}}$$

e onde  $\delta_{m,0}$  denota o delta de Kronecker, ou seja,

$$\delta_{m,0} = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases}.$$

As propriedades matemáticas dos PCZ têm vindo a ser estudadas de forma extensiva (ver [4; 33] e as referências indicadas nos mesmos). Cada modo de Zernike está associado a um número, que se denomina por valor próprio e é representado por  $\gamma$ , sendo este dado por  $\gamma = n(n+2)$  que aparece nas EDPRI mencionadas anteriormente. Estes valores próprios resultam da teoria S-L e são usados para determinar a ordem do esquema da pirâmide de Zernike descrita por Mahajan (ver [32]).

Ao escolher um conjunto de parâmetros e condições de fronteira diferentes na EDPRI (ver [9; 18]), a solução radial deixa de ser os polinômios radiais de Zernike e passa a ser as funções de Bessel de primeira espécie (ver [47]), que são dadas por

$$J_m(c_{mk}r) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(m-s)!} \left( \frac{c_{mk}r}{2} \right)^{m+2s}, \quad (3.5)$$

com  $m \in \mathbb{Z}$ . De notar que as funções de Bessel de primeira espécie são séries de potências com infinitos termos, em oposição ao número de termos finito da parte radial dos polinômios de Zernike. Têm uma oscilação quase-periódica e o seu envelope decai a uma taxa de  $1/(cr)^{1/2}$  à medida que o argumento  $cr$  cresce (ver [5]). Nos campos da física e da engenharia, entende-se por envelope à curva que delimita os extremos de um sinal oscilatório, isto é, o envelope generaliza o conceito de uma frequência constante. Na figura seguinte, ilustra-se este conceito de envelope de uma onda seno modulado, variando entre a parte superior e a parte inferior. Esta função pode corresponder a uma função de espaço, ângulo, tempo ou de qualquer outra variável.

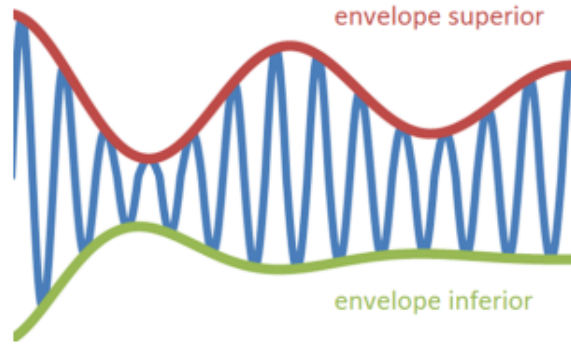


Figura 3.2: Representação do envelope superior e inferior de uma onda de seno modulado

Fonte: *Aplicação da equação de Bessel fracionária na descrição da topografia da córnea*, [40].

Para este caso, os dois modos dimensionais, isto é, parte radial e angular, são FCB cuja expressão normalizada é dada por

$$B_m^k(r, \varphi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{1 + \delta_{m,0}}} \frac{1}{J_{m+1}(c_{mk})} J_m(c_{mk}r) \cos(m\varphi), & \text{para } m \geq 0 \\ \sqrt{\frac{2}{1 + \delta_{m,0}}} \frac{1}{J_{m+1}(c_{mk})} J_m(c_{mk}r) \sin(m\varphi), & \text{para } m < 0 \end{cases}. \quad (3.6)$$

De seguida, tem-se a representação dos dois casos mencionados anteriormente.

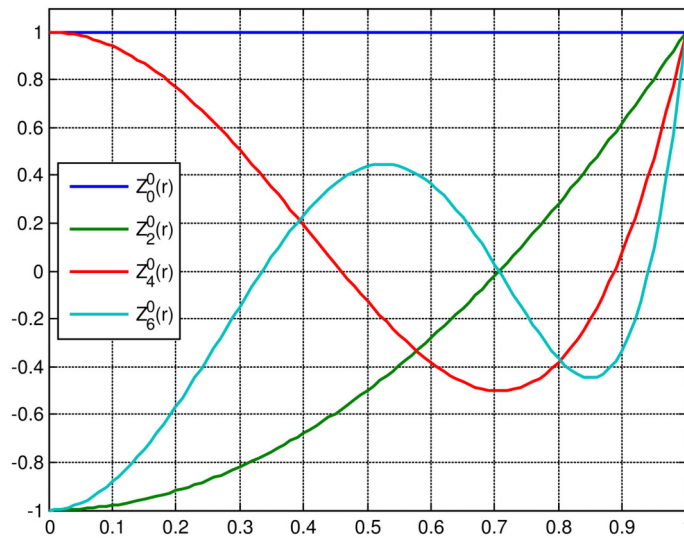


Figura 3.3: Representação da função radial dos PCZ para  $m = 0$ ,  $n = 0, 2, 4, 6$ .

Fonte: *Zernike vs. Bessel circular functions in visual optics*, [47].

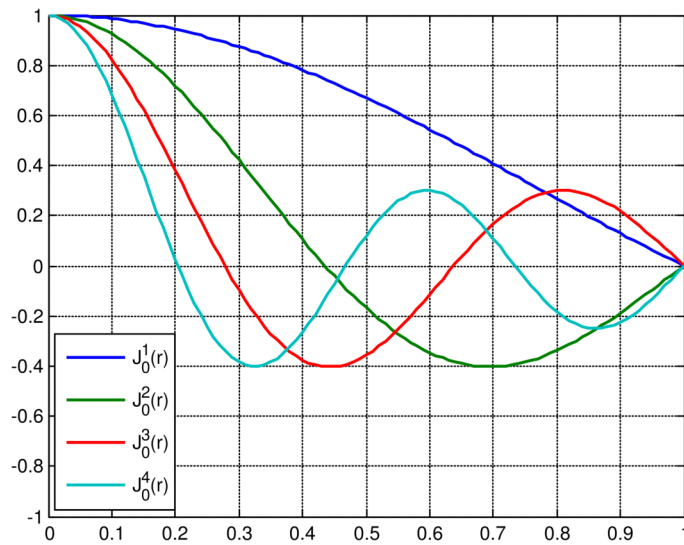


Figura 3.4: Representação da função de Bessel de primeira espécie para  $m = 0$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ .

Fonte: *Zernike vs. Bessel circular functions in visual optics*, [47].

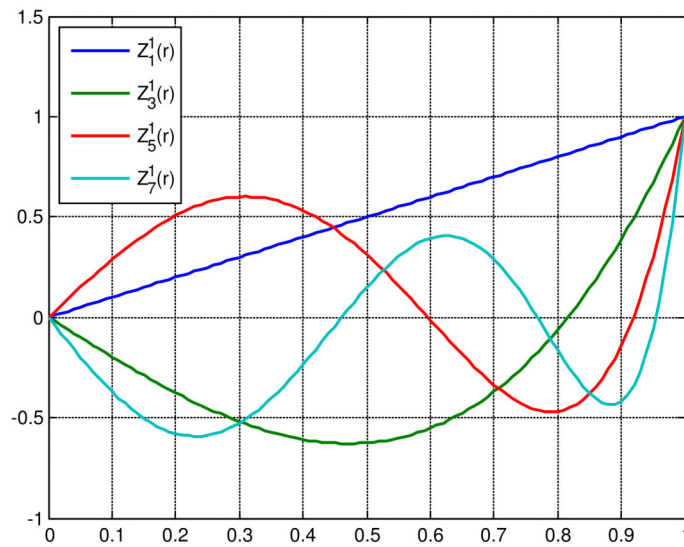


Figura 3.5: Representação da função radial dos PCZ para  $m = 1$ ,  $n = 1, 3, 5, 7$ .

Fonte: *Zernike vs. Bessel circular functions in visual optics*, [47].

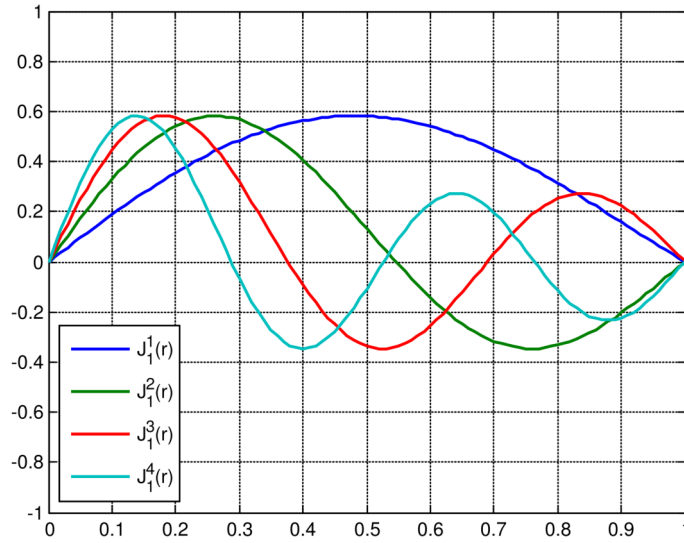


Figura 3.6: Representação da função de Bessel de primeira espécie para  $m = 1$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ .

Fonte: *Zernike vs. Bessel circular functions in visual optics*, [47].

Numa primeira fase, é importante notar que apenas se vão ter em conta os raios pertencentes ao intervalo  $[0, 1]$ . Isto aplica-se aos 4 gráficos apresentados anteriormente. Por outro lado, é importante realçar a utilização e comparação dos primeiros quatro modos dos PCZ e das FCB, tendo em conta duas restrições: nos primeiros dois gráficos, restringiu-se  $m = 0$ , enquanto que, nos últimos dois, a restrição colocada foi a de  $m = 1$ . Da análise dos gráficos verifica-se que, apesar de a ordem radial das funções de Bessel ser menor, o número de intersecções com o eixo horizontal é maior nas FCB relativamente aos PCZ, comparando o primeiro, o segundo, o terceiro e o quarto modo de um com o do outro. Isto quer dizer que, para os mesmos modos, as FCB apresentam um maior número de zeros e, consequentemente, um maior número de oscilações em comparação com os PCZ, o que vai ser um fator importante mais à frente.

A teoria de S-L estabelece que uma função arbitrária pode ser expandida como uma combinação linear de modos ortogonais:

$$S(\rho, \varphi) = \sum_{n,m}^{\infty} a_n^m \psi_n^m(\rho, \varphi) \quad (3.7)$$

onde  $\psi_n^m(\rho, \varphi)$  pode ser tanto FCB como PCZ, que são definidos no mesmo domínio que a função  $S$ . Os coeficientes  $a_n^m$  são factores que determinam o peso de cada modo correspondente na expansão. Estes coeficientes são então obtidos a partir do seguinte integral de sobreposição

$$a_n^m = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} S(\rho, \varphi) \psi_n^m(\rho, \varphi) \rho \, d\varphi d\rho. \quad (3.8)$$

**Definição 3.2.4** Um conjunto de funções  $h_i(x)$  diz-se conjunto completo se, para qualquer função  $f(x)$ , existir um conjunto  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ ,

tal que

$$f(x) = \sum_i a_i h_i(x), \quad (3.9)$$

e

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( f(x) - \sum_i a_i h_i(x) \right)^2 dx = 0. \quad (3.10)$$

Os PCZ e FCB são conjuntos ortogonais completos. A ortogonalidade de modos significa que na expansão modal da função  $S(\rho, \phi)$  cada modo suporta uma certa quantidade de informação sobre  $S$  que não sobrepõe a informação suportada por qualquer outro modo. Completude, por outro lado, significa que uma função arbitrária como  $S(\rho, \phi)$  não suporta mais informação do que todo o conjunto de modos, tal que o conjunto completo dos modos é capaz de representar a superfície. Estas duas propriedades garantem que qualquer função arbitrária pode ser aproximada tanto quanto necessário pela sua expansão modal infinita tal como está expresso em (3.7) e será igual se satisfizer as mesmas condições de fronteira.

### 3.3 Representação de superfícies com modelos finitos

Como foi mencionado anteriormente, para objetivos computacionais, é sempre necessário um modelo finito de uma superfície, o que significa que a superfície de interesse terá amostras sobre o domínio. Isto é notável, por exemplo, nos dispositivos de discos de Plácido, que é um dispositivo com discos concêntricos alternadamente brancos e pretos com o objetivo de detetar deformações na córnea (ver a figura seguinte), onde os dados da altura da córnea são representados por uma nuvem de pontos discretos.



Figura 3.7: Dispositivo de discos de Plácido.

Fonte: <http://phisick.com/item/placidos-disk-for-astigmatism/>.

O número de funções para a expansão modal da superfície tem de ser também finito. Assim, a soma infinita (3.7) é truncada por um número finito de termos. Esta soma truncada de modos deixa de ser igual à função  $S$ , pelo que surge um erro de aproximação ou erro de ajuste que tem de ser também tido em conta e que permite, deste modo, avaliar a qualidade deste mesmo ajuste. Usando um subconjunto finito de funções PCZ ou FCB ortogonais discretas (amostras), chega-se então ao seguinte modelo linear

$$S(\rho_d, \phi_d) = \sum_{p=1}^P a_p \psi_p(\rho_d, \phi_d) + \epsilon_p(\rho_d, \phi_d). \quad (3.11)$$

O subíndice  $d$  refere-se ao ponto da amostra. Neste capítulo,  $D$  corresponde ao número total de amostras. O índice único  $p$  descreve os índices  $n$  e  $m$  usados anteriormente.

A expressão (3.11) pode ser reescrita sob a forma de vetor da seguinte forma

$$S = \psi a + \epsilon, \quad (3.12)$$

onde  $S$  é um vetor coluna com  $D$  elementos que representa uma superfície amostral com pontos discretos  $(\rho_d, \phi_d)$ , com  $d = 1, 2, \dots, D$ .  $\psi$  é uma matriz  $(D \times P)$  correspondente aos modos ortogonais também amostrados por pontos discretos,  $\psi_p(\rho_d, \phi_d)$ . O vetor  $a$  é um elemento  $P$ , isto é, um vetor coluna com  $P$  entradas correspondente aos  $P$  coeficientes da expressão. Quanto a  $\epsilon$ , é um vetor coluna de  $D$  elementos que representa a medida e a modelação do erro nos pontos da amostra. Um dos objetivos é encontrar o vetor  $\hat{a}$  dos coeficientes que minimizam o quadrado do erro, que é determinado através do método dos mínimos quadrados, isto é

$$\hat{a} = (\psi^T \psi)^{-1} \psi^T S, \quad (3.13)$$

onde o sobreíndice  $T$  representa transposição de uma matriz. Este método é utilizado com o objetivo de estudar de que forma é que as FCB se comportam comparativamente aos PCZ standard na modelação de superfícies óticas.

De seguida, é necessário decidir o subconjunto finito de FCB e PCZ que se vai comparar. Um dos requisitos é que se use o mesmo número de modos em cada conjunto. Se se decidir organizar os modos de Bessel de acordo com os seus valores próprios, os resultados são apresentados numa pirâmide invertida, tal como se pode observar na figura seguinte.

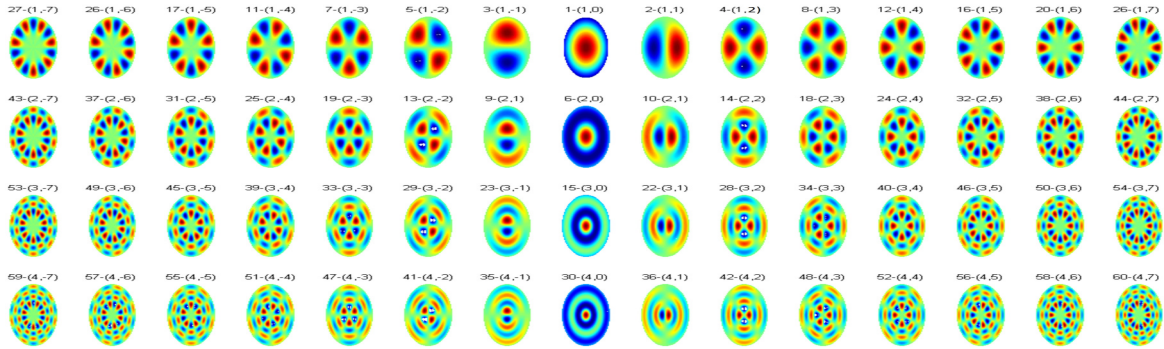


Figura 3.8: Representação gráfica das FCB.

Assim, fixando o índice radial para ambos os conjuntos, resultará na inclusão de modos com diferente ordem angular e vice-versa. Contudo, ter-se-á quase a mesma quantidade de modos em cada base. Os valores próprios dos FCB podem ser facilmente obtidos numericamente devido ao comportamento quase-periódico das funções de Bessel, mas também estão disponíveis em tabelas. Assim, é simples organizar os modos FCB. Usa-se a combinação mencionada anteriormente para escolher o conjunto de FCB que serão comparadas com PCZ. Foram testadas funções de Bessel e comparadas com os polinómios de Zernike para várias superfícies criadas artificialmente. Todas as superfícies foram produzidas no disco unitário simulando a pupila ou a área da córnea normalizadas. As figuras que se apresentarão neste capítulo a partir de agora terão uma representação gráfica do erro de aproximação tanto para as FCB como para os PCZ, de maneira a que seja possível tirar conclusões no que diz respeito às performances de ambos nos vários casos. Este erro será medido em dB (decibel). Isto deve-se ao facto de o

dB ser uma unidade logarítmica, indicando uma proporção. Assim, para obter este erro nesta medida, recorre-se à seguinte fórmula

$$RMS = 20 \log \left( \frac{P}{P_0} \right) \text{ dB},$$

onde  $P$  é o erro quadrático médio entre a amostra e o valor da FCB/PCZ e  $P_0$  é um valor de referência e constante. Deste modo, caso o valor de  $P$  seja superior ao de  $P_0$ , obter-se-á um RMS positivo, enquanto que, se  $P$  for inferior a  $P_0$ , o RMS toma um valor negativo. No caso de  $P$  e  $P_0$  iguais, o valor obtido será 0. Assim, a obtenção de valores negativos não é, de todo, um problema. Aliás, o valor do RMS será tanto melhor, quanto mais baixo for.

### 3.4 Superfícies com anéis

A estrutura de um anel pode ser obtida por uma função gaussiana radial centrada com um raio  $r_0$  e um fator angular constante

$$u(r, \phi) = \exp \left[ \frac{-(r - r_0)^2}{w^2} \right]. \quad (3.14)$$

Antes de se representar e estudar o comportamento das FCB e dos PCZ numa estrutura de um anel, ir-se-á estudar o comportamento destas funções em gaussianas simples. No estudo que se segue, alterou-se apenas o valor do parâmetro que diz respeito à forma da gaussiana, nomeadamente testando para gaussianas mais e menos estreitas. De seguida, usando as figuras e resultados apresentados em [47], fazem-se as devidas interpretações dos mesmos.

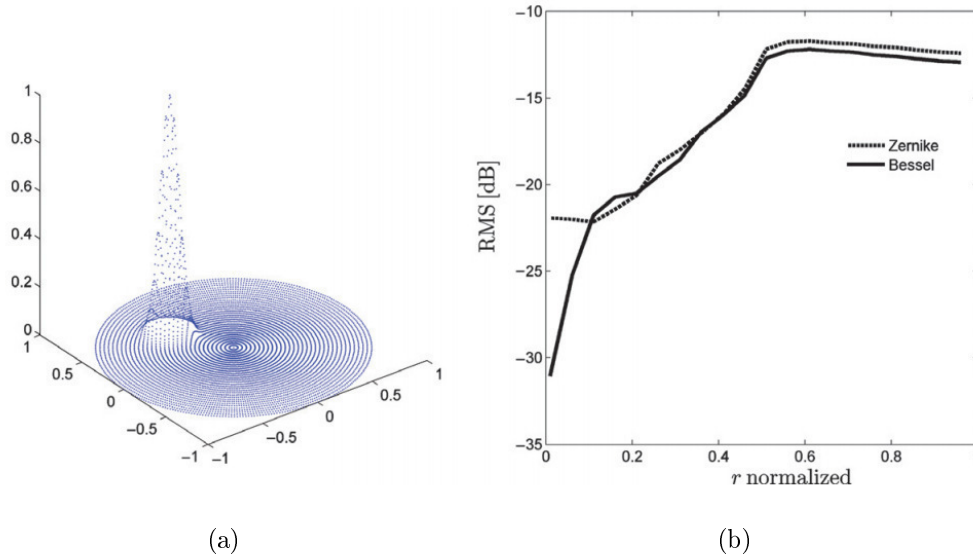


Figura 3.9: Representação de uma Gaussiana com  $w^2 = 0.1$ . Em (a) encontra-se a representação gráfica desta função, enquanto que em (b) está representado o gráfico do erro (RMS) de aproximação das FCB e dos PCZ ao longo do disco.

Fonte: *Zernike vs. Bessel circular functions in visual optics*, [47].



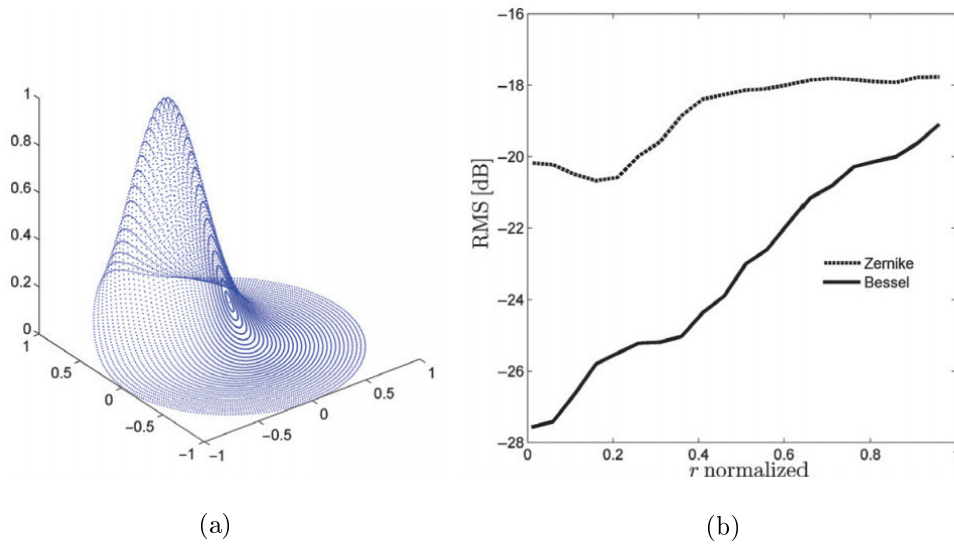


Figura 3.10: Representação de uma Gaussiana com  $w^2 = 0.5$ . Em (a) encontra-se a representação gráfica desta função, enquanto que em (b) está representado o gráfico do erro (RMS) de aproximação das FCB e dos PCZ ao longo do disco.

Fonte: *Zernike vs. Bessel circular functions in visual optics*, [47].

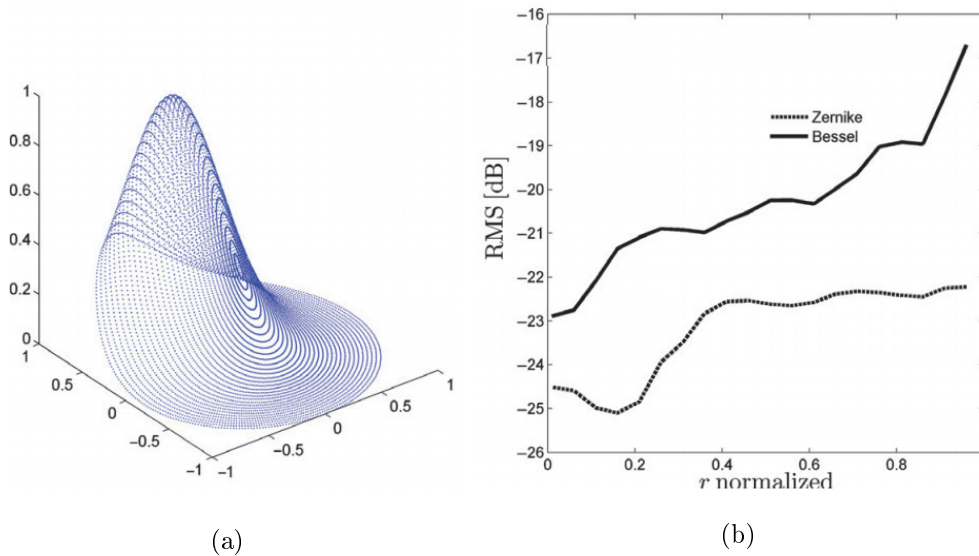


Figura 3.11: Representação de uma Gaussiana com  $w^2 = 15$ . Em (a) encontra-se a representação gráfica desta função, enquanto que em (b) está representado o gráfico do erro (RMS) de aproximação das FCB e dos PCZ ao longo do disco.

Fonte: *Zernike vs. Bessel circular functions in visual optics*, [47].

Analisando os gráficos um a um, é possível retirar conclusões diferentes. No primeiro gráfico, verifica-se um comportamento muito semelhante no ajuste das FCB e dos PCZ a este tipo de superfície. Pode-se verificar que o erro de aproximação vai aumentando em ambos os polinômios à medida que se afasta do centro. Porém, tendo em conta regiões mais próximas do centro, verifica-se um comportamento consideravelmente melhor das FCB. No que diz respeito ao segundo gráfico, verifica-se uma performance muito melhor das FCB ao longo de

todo o raio, sendo que a maior diferença de comportamentos se regista no centro do disco e vai diminuindo à medida que se afasta do mesmo. No terceiro gráfico, os PCZ apresentam um melhor ajuste em todo o raio. A diferença de performance é quase sempre constante ao longo do raio, aumentando apenas quando este toma valores próximos de 1. Pode-se concluir, assim, que, no que diz respeito a gaussianas simples, as FCB apresentam uma melhor performance quando a gaussiana é mais estreita, sendo que, para os casos em que  $w$  toma valores mais altos, já são os PCZ que apresentam um melhor ajuste.

Posto isto, pode-se agora passar ao estudo de uma superfície de um anel. Este tipo de superfície pode representar os efeitos de usar um certo tipo de lentes de contacto. Uma superfície com múltiplos anéis, por exemplo uma soma de duas ou mais funções semelhantes, poderia representar uma frente de onda gerada por uma lente multifocal. Aqui, as FCB apresentam uma capacidade de adaptação ligeiramente melhor para anéis completos, especialmente na zona central da estrutura. Também foram produzidos anéis incompletos por combinação de funções gaussianas radiais com uma função super-gaussiana angular:

$$u(r, \phi) = \exp \left[ \frac{-(r - r_o)^2}{w^2} \right] \exp \left[ \frac{-(\phi - \phi_0)^{2N}}{w_\phi^{2N}} \right] \quad (3.15)$$

onde  $N$  é um número inteiro positivo.

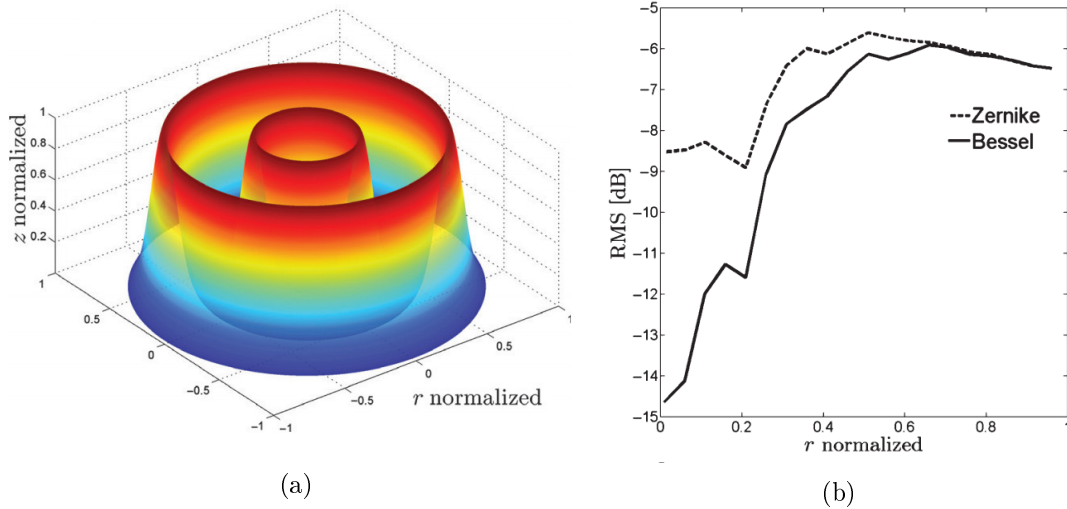


Figura 3.12: Representação gráfica de um anel completo (a). Em (b) está representado o gráfico do erro (RMS) de aproximação das FCB e dos PCZ ao longo do disco na superfície de um anel completo.

Fonte: *Zernike vs. Bessel circular functions in visual optics*, [47].

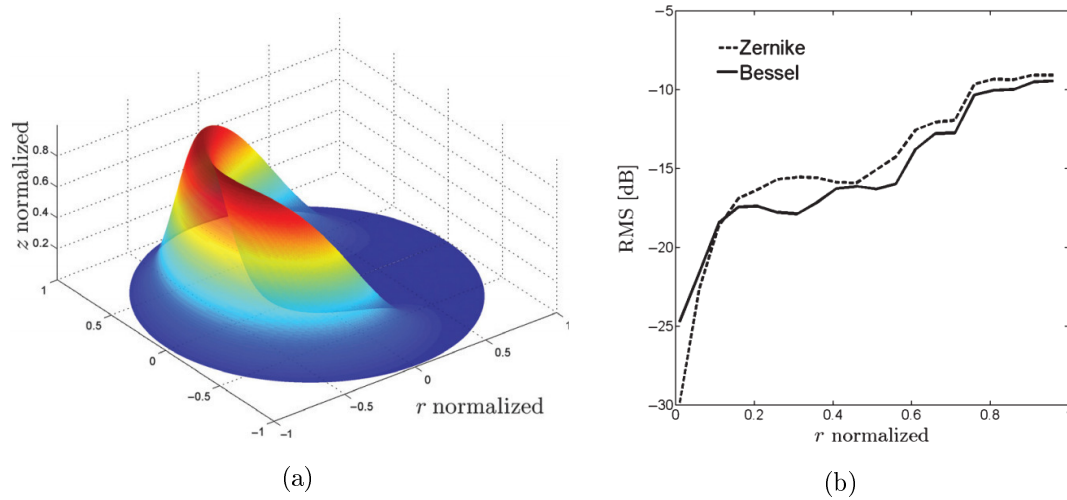


Figura 3.13: Representação gráfica de um anel incompleto (a). Em (b) está representado o gráfico do erro (RMS) de aproximação das FCB e dos PCZ ao longo do disco na superfície de um anel incompleto.

Fonte: *Zernike vs. Bessel circular functions in visual optics*, [47].

Através da observação dos gráficos anteriores, pode-se concluir que, no caso dos anéis completos as FCB apresentam uma melhor capacidade de ajuste em quase todo o raio, apresentando um comportamento semelhante à PCZ quando o raio toma valores mais afastados do centro do disco. Conclui-se ainda que, neste tipo de superfície, a diferença do erro entre as FCB e PCZ é maior à medida que o raio toma valores mais próximos do centro, sendo que as FCB apresentam claramente uma melhor capacidade de ajuste nestes valores. No que diz respeito aos anéis incompletos, as FCB e os PCZ apresentam um comportamento muito semelhante em quase todo o raio, sendo que, para valores mais próximos de 0, os PCZ apresentam uma melhor performance.

Em casos reais, anéis concêntricos podem estar fora do eixo. Este facto afeta a capacidade de ajuste das FCB, contudo, um pré-processamento dos pontos dos dados permitirão recentrar a superfície e a performance de ajustamento desejada. Estruturas de anel incompleto poderão ser úteis na modelação dos efeitos da pressão das pálpebras na superfície da córnea anterior.

### 3.5 Modelo de olho completo

Um caso interessante é o modelo da superfície total do olho anterior, que inclui a superfície anterior da córnea, limbus e esclera. Neste sentido, é bastante pertinente recordar a Figura 3.1.

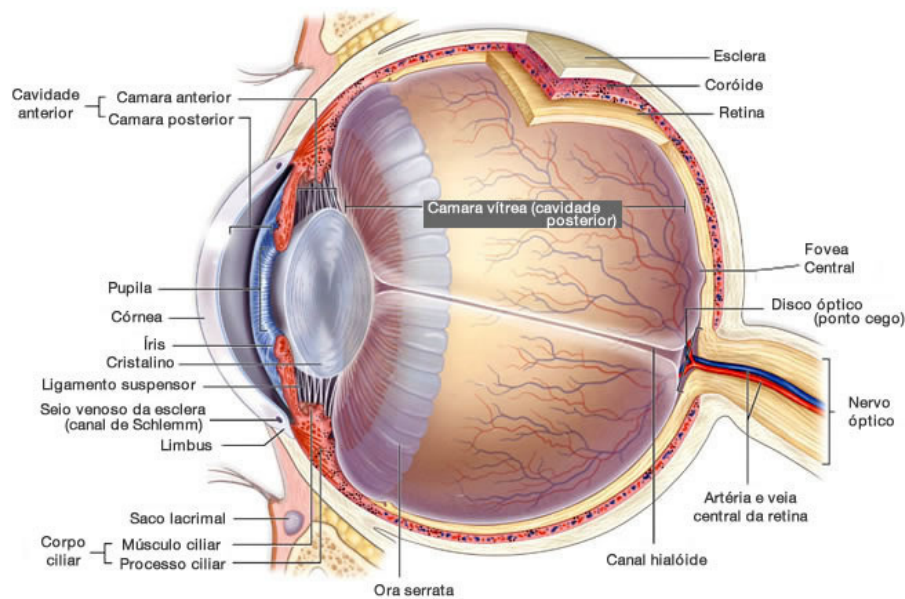
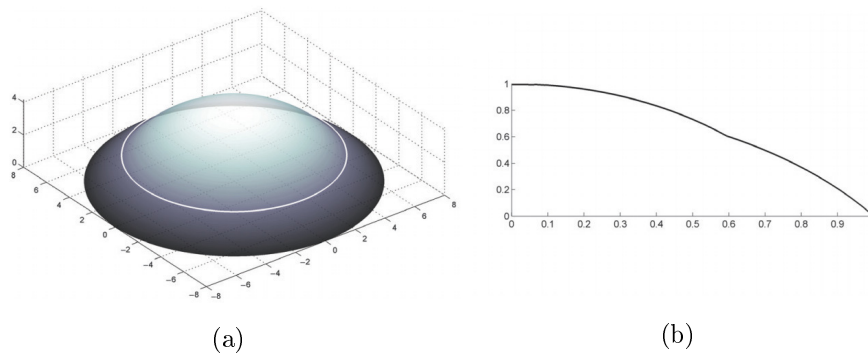


Figura 3.14: Representação da estrutura do olho e da sua composição.

Fonte: [http://www.oticasguarnieri.com.br/visao\\_olho.html](http://www.oticasguarnieri.com.br/visao_olho.html).

Para produzir este modelo, juntaram-se duas superfícies esféricas com diferentes raios, sendo implementados parâmetros típicos para o raio anterior da córnea, íris visível e diâmetro do olho. Isto resulta numa superfície com descontinuidade na primeira derivada, precisamente na região do limbus. A superfície é radialmente simétrica, por isso pode-se escolher um modo de maior ordem radial, mas restringir o conjunto para  $m = 0$ .



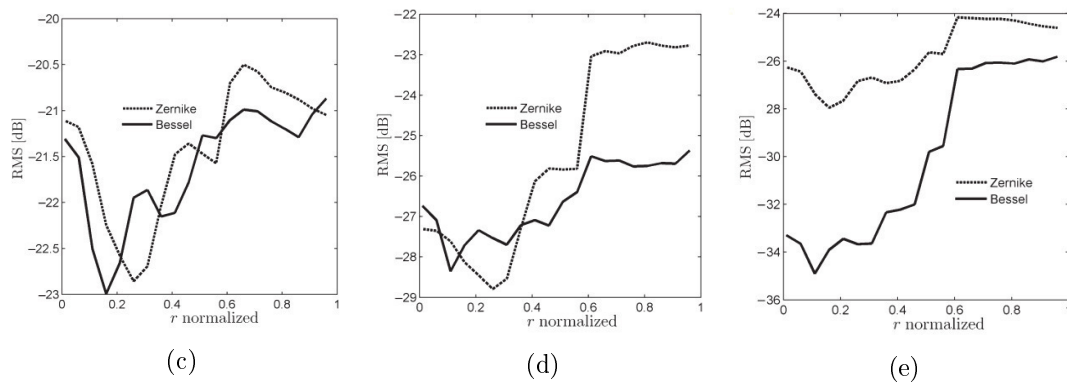


Figura 3.15: Representação gráfica de um modelo do olho completo com a conjugação de duas superfícies (a). Representação em perfil de um corte da representação anterior onde se vê de forma clara a sobreposição das duas superfícies (b). Em (c), (d) e (e) está representado o gráfico do erro (RMS) de aproximação das FCB e dos PCZ ao longo do disco na superfície de um modelo de olho completo, contemplando 4, 5 e 6 modos, respetivamente.

Fonte: *Zernike vs. Bessel circular functions in visual optics*, [47].

Através da última figura, é possível retirar várias conclusões. Em primeiro lugar, destacar que a sobreposição das duas superfícies, ou seja, a região do limbus, se encontra em  $r = 0,6$ . Pode-se passar agora à análise dos últimos três gráficos, sendo que eles combinam, respetivamente, os primeiros 4, 5 e 6 modos das FCB e dos PCZ. No primeiro gráfico, é possível perceber que o comportamento de ambos os polinômios é semelhante, alternando uma melhor performance das FCB e dos PCZ ao longo do raio e não sendo possível concluir qual dos dois tem uma melhor capacidade de ajuste. No segundo gráfico, observam-se duas zonas diferentes: na primeira, desde o centro do disco até à região do limbus, em que  $r = 0,6$ , as performances das FCB e dos PCZ vão alternando, não sendo possível escolher uma melhor performance; na segunda região, quando  $r$  toma valores entre 0,6 e 1, as FCB apresentam claramente uma melhor performance. No terceiro gráfico, o comportamento das FCB é claramente melhor em todo o raio, sendo que a diferença dos erros de ambas as funções vai diminuindo à medida que o raio toma valores mais afastados de 0. No global, conclui-se que, com uma combinação com um número menor de modos, as FCB e os PCZ têm um comportamento semelhante, porém, quando o número de modos aumenta, as FCB apresentam uma melhor performance.

As FCB têm uma performance melhor que as PCZ quando o ajuste é feito neste tipo de superfície pelo facto da componente radial das FCB ter mais zeros, resultando num maior número de oscilações, dentro do intervalo unitário, do que as PCZ para a mesma ordem radial.

### 3.6 Discussão

Pode-se observar na Figura 3.8 que alguns elementos da base das FCB são semelhantes a alguns elementos particulares da base PCZ tornando possível uma analogia grosseira entre os conjuntos. Uma ordenação das FCB é feita de acordo com os seus valores próprios e leva a um esquema de modos correspondente que faz sentido em termos da analogia acima mencionada. Uma vez fixado o número de modos, as FCB revelam um comportamento muito bom para estruturas centradas tal como funções gaussianas e superfícies com muitas ondas radiais, contudo o erro de aproximação para FCB aumenta para superfícies com amplitude considerável

na fronteira do domínio circular. Superfícies mais suaves foram melhor representadas por PCZ devido à natureza quadrática dos termos de ordem baixa que carregam informação suficiente para descrever tais superfícies.

Um determinado valor de ordem angular  $m$  restringe os elementos correspondentes de ordem radial  $n$  no conjunto PCZ. Isto não acontece na base FCB, onde existe um modo para qualquer combinação ou ordem radial e angular. Isto dá às FCB uma vantagem para representar superfícies de simetria mesmo quando existem descontinuidades na primeira derivada, tal como no modelo da superfície total do olho anterior.

Na maioria das simulações, restringiram-se as FCB a um conjunto que exibe características semelhantes às dos PCZ e, portanto, limitou-se o seu comportamento. Contudo, mostrou-se que, no caso particular do olho total, levantando a restrição e aumentando o número de modos de FCB com  $m = 0$ , verifica-se uma melhor performance das mesmas.

### 3.7 Conclusão

Este capítulo teve por base as ideias desenvolvidas em [47], tendo sido feita uma revisão e uma interpretação dos resultados obtidos nesse mesmo estudo. Foram apresentadas as FCB que são ortogonais no disco unitário e comparadas com os PCZ, conhecidos por ajustar várias superfícies que representam casos comuns no campo da ótica visual. Observou-se que as FCB revelam um excelente comportamento e mostraram excelentes resultados, provando assim serem um candidato bastante competitivo para os PCZ para representar todo o tipo de superfícies, como é o caso de superfícies da córnea frontal. As FCB exibem também um melhor comportamento para modelar superfícies que apresentam uma variação abrupta como no caso da superfície total do olho anterior na região do limbus. Mostrou-se também que o conjunto das FCB é um candidato adequado para estudar características particulares de superfícies da córnea pós-cirúrgicas, tais como superfícies de anel único que se assemelham a superfícies residuais de remoções.

## Capítulo 4

# Modelos ótimos para análise estatística com Polinómios de Zernike

### 4.1 Introdução

Tal como foi visto anteriormente, os polinómios de Zernike surgem em diversas aplicações nomeadamente na área da ótica e da análise de imagens num domínio circular. Neste capítulo, pretende-se encontrar modelos ótimos para modelos de regressão cuja expansão envolve polinómios de Zernike. Considerando o típico método dos mínimos quadrados, determinar-se-á o seu modelo ótimo e, a partir daí, encontrar-se-á o modelo  $\Phi_p$ -ótimo no sentido de Kiefer (1974) [27], que minimiza a matriz de covariância do estimador dos mínimos quadrados. Ter-se-á ainda em conta um estudo de alguns critérios de otimalidade que terão um papel fundamental na estimação dos modelos ótimos pretendidos. De salientar ainda que este capítulo teve por base o artigo [10].

### 4.2 Polinómios de Zernike

Nos capítulos anteriores foram apresentados os Polinómios de Zernike e algumas das suas propriedades. Neste subcapítulo, ir-se-á fazer uma revisão destes polinómios numa perspetiva que será mais pertinente para o estudo que se pretende fazer.

**Definição 4.2.1** (cf. [2]) *Seja  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  um espaço de medida  $\sigma$ -finito. Para  $1 \leq p < \infty$  define-se*

$$L^p(X, \mathcal{M}, \mu) := \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensuráveis com } \int_X |f(x)|^p d\mu < \infty \right\}, \quad (4.1)$$

*podendo-se notar simplesmente por  $L^p(X)$ .*

*Se  $f \in L^p(X)$ , então define-se*

$$\|f\|_{L^p} := \left( \int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p}. \quad (4.2)$$

Considere-se uma função  $f$  definida no disco unitário por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \quad (4.3)$$

e que pertence ao espaço  $L^2(D)$  e o problema de estimar esta função a partir de dados experimentais

$$Z_{ij} = f(x_i, y_j) + \epsilon_{ij} \quad (1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n), \quad (4.4)$$

onde  $(x_i, y_j) \in D$  são os pontos experimentais. As variáveis  $\epsilon_{ij}$  não são correlacionadas e têm média zero e igual variância. O problema de recuperar a função  $f$  a partir dos dados  $(Z_{ij})_{1 \leq j \leq m}$  num domínio circular surge num vasto conjunto de aplicações, nomeadamente a teoria da difração das aberrações óticas [4; 48], reconhecimento de padrões [1], análise de imagens [28; 30] e modelos estatísticos para dados circulares [15]. Vários autores propuseram expandir a função  $f$  em termos de polinômios de Zernike e estimar os coeficientes desta expansão a partir de dados experimentais [20; 31; 38]. Por um lado, os coeficientes estimados desta expansão são usados para construir outras funções desconhecidas [31] e, por outro lado, estes coeficientes são também usados para classificação por técnicas usadas frequentemente, como máquina de vetores de suporte, distância mínima e classificação pelo método do vizinho mais próximo [20]. A técnica da máquina de vetores de suporte é um classificador linear binário não probabilístico que toma como entrada um conjunto de dados e prediz qual a classe, entre duas possíveis, a que cada entrada faz parte. Por outro lado, o método da distância mínima é um método que atribui uma classe a um determinado dado de entrada a ser introduzido mediante a menor distância entre esse mesmo dado de entrada e o ponto médio de cada classe existente. Por último, o método do vizinho mais próximo é uma técnica que atribui um dado à classe que tiver a amostra mais próxima do ponto que está a ser introduzido.

Neste capítulo, ir-se-á estudar o efeito que o modelo, isto é, a escolha dos pontos  $(x_i, y_j)$  no disco  $D$ , tem na qualidade da estimação dos coeficientes na expansão da função  $f$  em termos de polinômios de Zernike. Neste sentido, ir-se-á encontrar modelos do tipo

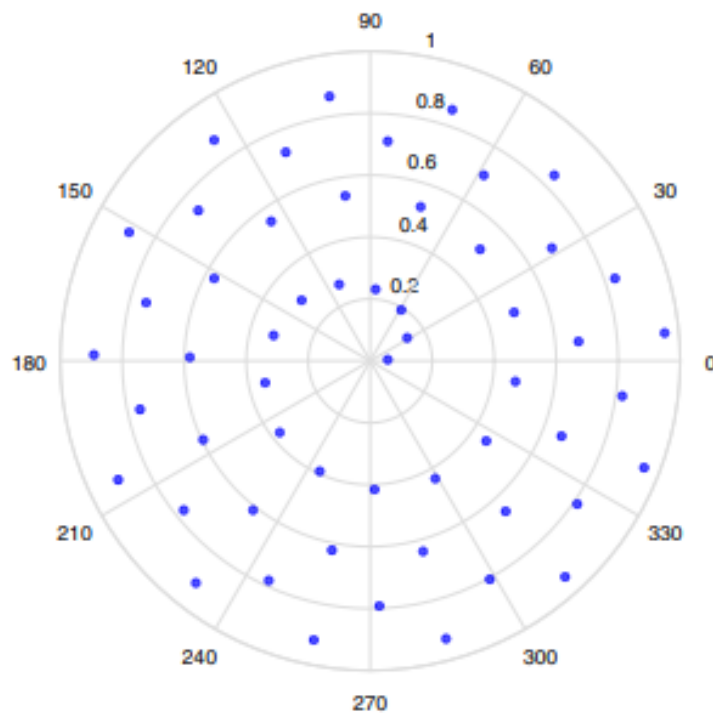


Figura 4.1: Modelo com padrão espiral.

Fonte: *Optimal sampling patterns for Zernike polynomials*, [41].



em que cada ponto corresponde a um ponto do modelo. Estes pontos são os pontos que constituem os modelos que serão usados para calcular os coeficientes da expansão truncada que minimizam o erro quadrático, isto é, esse erro de aproximação será calculado nestes pontos. Assim, é de extrema importância encontrar os modelos que permitem obter os melhores resultados, de entre as condições e objetivos desejados. No caso particular da imagem anterior, está-se perante um modelo com um padrão em espiral.

Num dos próximos subcapítulos, fazer-se-á uma revisão sobre algumas propriedades destes polinómios, bem como notações e observações pertinentes no âmbito deste capítulo. Para estimar os coeficientes na expansão truncada da função de regressão nos termos de polinómios de Zernike recorrer-se-á ao típico método dos mínimos quadrados. Nos subcapítulos seguintes, estudar-se-ão alguns critérios que permitem concluir a otimalidade de um determinado modelo, sendo que, posteriormente, se aplicarão estes critérios ao estudo dos polinómios de Zernike que se está a fazer neste trabalho e tendo sempre em conta o método dos mínimos quadrados em que se baseia este estudo. É ainda mostrado que uma alocação ótima das variáveis explanatórias  $(x_i, y_i)$  dá uso a círculos específicos no domínio experimental  $D$  e que este número de círculos aumenta com o aumento do grau da expansão de  $f$ .

### 4.3 Critério de $\Phi$ -otimalidade

Seja  $f^T = (f_1, f_2, \dots, f_k)$  onde  $f_i$  são funções reais contínuas num conjunto compacto  $\chi$ . O valor esperado de uma observação  $x$  em  $\mathcal{X}$  é dado por

$$\sum_{i=1}^k \theta_i f_i(x) = \theta^T f(x), \quad (4.5)$$

onde  $\theta^T = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$  e as observações não são correlacionadas. Este subcapítulo tem por base a teoria de aproximação de modelos, onde estes são uma classe  $\Xi$  de medidas probabilísticas em  $\mathcal{X}$  e a matriz de informação de um modelo  $\xi$  em  $\mathcal{X}$  é dada por  $M(\xi) = \int_{\mathcal{X}} f(x) f^T(x) \xi(dx)$ . Além disso,  $M^{-1}(\xi)$  é proporcional à matriz de covariância dos melhores estimadores lineares de  $\theta$ , no caso em que  $M$  é singular, [27]. Seja então  $\mathcal{M} = \{M(\xi) : \xi \in \Xi\}$ .

Seja  $\Phi$  uma função que é real ou  $+\infty$  em  $\mathcal{X}$ . Um problema da teoria de otimização de modelos é a caracterização de modelos  $\xi^*$  que são  $\Phi$ -ótimos, isto é,

$$\Phi(M(\xi^*)) = \min_{\xi \in \Xi} \Phi(M(\xi)). \quad (4.6)$$

Os exemplos mais comuns de critérios de otimalidade são

$$\Phi_0(M) = \det M^{-1} \quad (D\text{-otimalidade}), \quad (4.7)$$

$$\Phi_{1,C}(M) = \text{tr}(CM^{-1}) \quad (L\text{-otimalidade}; A\text{-otimalidade se } C = I), \quad (4.8)$$

$$\Phi_{\infty}(M) = \text{Maior valor próprio de } M^{-1} \quad (E\text{-otimalidade}), \quad (4.9)$$

onde  $C$  é uma matriz simétrica definida não-negativa e (4.7) e (4.9) são consideradas infinitas se  $M$  é singular, aplicando-se igualmente em (4.8).

**Definição 4.3.1** (cf. [29]) *Uma matriz quadrada diz-se singular se e só se o seu determinante é 0, ou seja, nulo.*

A caracterização supramencionada deverá auxiliar no cálculo de modelos  $\Phi$ -ótimos. Assim, pode-se escrever  $\bar{d}_0(\xi) = \max_{x \in \mathcal{X}} f(x)^T M^{-1}(\xi) f(x)$ , tendo Kiefer e Wolfowitz [24] mostrado que no caso (4.7)  $M(\xi^*)$  é igual para todo o  $\xi^*$   $\Phi_0$ -ótimo e que

$$\xi^* \text{ é } \Phi_0\text{-ótimo} \Leftrightarrow \bar{d}_0(\xi^*) = \min_{\xi} \bar{d}_0(\xi) \Leftrightarrow \bar{d}_0(\xi^*) = k. \quad (4.10)$$

Esta relação é útil, porque para um dado  $\xi'$  que se supõe ser quase ótimo, não se pode concluir nada *à priori* relativamente a  $\det(M^{-1}(\xi'))$  partindo de um mínimo desconhecido de  $\det(M^{-1}(\xi))$ . A expressão (4.10) corresponde então a uma condição verificável de otimalidade. Este facto permite deduzir que é possível obter  $\xi^*$  computacionalmente de forma iterativa, como muito autores e investigadores já fizeram. Outro aspeto útil de (4.10), implementado em [12; 25; 26], é que  $f(x)^T M^{-1}(\xi^*) f(x) = k$  no suporte de  $\xi^*$ .

Subsequentemente, Karlin e Studden [22] e Federov [13; 14] mostraram no caso (4.8) que, se  $M(\xi^*)$  não é singular, então

$$\xi^* \text{ é ótimo} \Leftrightarrow \bar{d}_1(\xi^*) = \min_{\xi} \bar{d}_1(\xi) \Leftrightarrow \bar{d}_1(\xi^*) = \text{tr } CM^{-1}(\xi^*) \quad (4.11)$$

onde  $\bar{d}_1(\xi) = \max_x f(x)^T M^{-1}(\xi) CM^{-1}(\xi) f(x)$ .

## 4.4 Momentos de Zernike

Tal como foi referido anteriormente, apesar de os polinómios de Zernike já terem sido introduzidos no primeiro capítulo, neste capítulo esta família de polinómios será apresentada de uma forma alternativa que é mais adequada para o estudo que se pretende fazer. Os polinómios de Zernike podem ser definidos na forma

$$Z_n^{-m}(\rho, \phi) = N_n^m R_n^m(\rho) \sin(m\phi), \quad Z_n^m(\rho, \phi) = N_n^m R_n^m(\rho) \cos(m\phi) \quad (4.12)$$

onde a função  $R_n^m(\rho)$  é definida para  $n, m \in \mathbb{N}_0$  com  $n \geq m \geq 0$  por

$$R_n^m(\rho) = (-1)^{(n-m)/2} \rho^m P_{(n-m)/2}^{(m,0)}(1-2\rho^2) \\ = \begin{cases} \sum_{l=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^l (n-l)!}{l!((n+m)/2-l)!((n-m)/2-l)!} \rho^{n-2l} & , \text{ para } n-m \text{ par} \\ 0 & , \text{ para } n-m \text{ ímpar} \end{cases} \quad (4.13)$$

e  $P_k^{(\alpha,\beta)}$  denota o  $k$ -ésimo polinómio de Jacobi ortogonal em relação à medida  $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta I_{[-1,1]}(x)dx$ , que se encontra definido a seguir (ver [45]).

**Definição 4.4.1** *Seja a função peso  $\omega(x) = (1-x)^\alpha x^\beta$  com  $\alpha > -1$ ,  $\beta > -1$  e tome-se intervalo fechado  $[0, 1]$ . A família de polinómios de Jacobi, designada por  $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ , sendo  $n$  o grau do polinómio e  $\alpha$  e  $\beta$  os expoentes de  $(1-x)$  e  $x$ , respetivamente, na função peso  $\omega(x)$ , é definida, pela propriedade da ortogonalidade por*

$$\int_0^1 \left[ (1-x)^\alpha x^\beta \right] P_m^{(\alpha,\beta)}(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \omega(x) dx = C_n \delta_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ C_n > 0 & \text{para } m = n \end{cases}, \quad (4.14)$$

com  $C_n = (-1)^n$ . O polinómio de Jacobi  $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$  é então dito ortogonal no intervalo  $[0, 1]$  em relação à função peso  $\omega(x) = (1-x)^\alpha x^\beta$ .

Voltando a (4.12), tem-se que o fator de normalização (ver capítulo 2) é dado por

$$N_n^m = \sqrt{\frac{2(n+1)}{1+\delta_{m,0}}}, \quad (4.15)$$

e a seguinte relação é verificada

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 Z_{n_1}^{m_2}(\rho, \phi) Z_{n_2}^{m_1}(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi = \delta_{n_1, n_2} \delta_{m_1, m_2} \quad (4.16)$$

para todo  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0, 1 \leq |m_j| \leq n_j$  ( $j = 1, 2$ ), onde  $n_j - m_j$  é par ( $j = 1, 2$ ). Assim como no primeiro capítulo,  $\delta_{i,j}$  denota o delta de Kronecker, ou seja,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

De notar também que a relação de ortogonalidade para os polinômios  $R_n^m(\rho)$  é dada por

$$\int_0^1 \rho R_{n_1}^m(\rho) R_{n_2}^m(\rho) d\rho = \frac{\delta_{n_1, n_2}}{2(n_1 + 1)}. \quad (4.17)$$

Uma função  $f \in L^2(D)$  admite a expansão

$$f(\rho, \phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{i=-k \\ k-|i| \text{ par}}}^k \theta_{(k,i)} Z_k^i(\rho, \phi), \quad \rho \in [0, 1], \phi \in [0, 2\pi[ \quad (4.18)$$

onde as quantidades  $\theta_{(k,i)}$  são os habituais coeficientes de Fourier dados por

$$\theta_{(k,i)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(\rho, \phi) Z_k^i(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi \quad \text{se } k - |i| \text{ é par.} \quad (4.19)$$

Assume-se que os dados correspondentes ao modelo (4.4) estão disponíveis, onde as variáveis explanatórias  $(x_i, y_j)$  são representadas em termos de coordenadas polares  $(\rho_i, \phi_j)$ . Geralmente, uma expansão truncada de (4.18) até uma dada ordem  $d$ , tal que  $d \in \mathbb{N}$ , é usada como uma aproximação da função  $f$ . Uma das formas de calcular os coeficientes desta expansão (e como subproduto a aproximação da função  $f$ ) é o método dos mínimos quadrados. Este método determina o parâmetro  $\theta = (\theta_{(0,0)}, \theta_{(1,-1)}, \theta_{(1,1)}, \dots, \theta_{(d,-d)}, \dots, \theta_{(d,d)})^T \in \mathbb{R}^{(d+1)(d+2)/2}$  tal que

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left( Z_i^j - \sum_{k=0}^d \sum_{\substack{l=-k \\ k-|l| \text{ par}}}^k \theta_{(k,l)} Z_k^l(\rho_i, \phi_j) \right)^2 \quad (4.20)$$

é mínimo.

Embora não se explore neste trabalho, um outro método de estimação de coeficientes da expansão truncada dá uso à estimação direta dos coeficientes de Fourier (4.19), tal que

$$\tilde{\theta}_{(k,l)} = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n Z_k^l(\rho_i, \phi_j) \rho_i (\rho_i - \rho_{i-1}) (\phi_j - \phi_{j-1}) Z_{ij} \quad (4.21)$$

( $l = 0, \dots, d; |k| \leq l, l - |k|$  par). Os coeficientes estimados nesta expansão são usados para diversos fins, tais como a estimação da função  $f$  no contexto da reconstrução de imagens

[38] ou reconhecimento de símbolos através dos métodos de máquinas de vetores de suporte, distância média mínima ou vizinho mais próximo [20].

## 4.5 Modelos ótimos para a estimação dos mínimos quadrados no modelo de regressão de Zernike

Considerando o modelo de regressão correspondente ao problema dos mínimos quadrados presente em (4.20)

$$E[Y|\rho, \phi] = \theta^T f_d(\rho, \phi); \quad \text{Var}[Y|\rho, \phi] = \sigma^2 > 0 \quad (4.22)$$

onde

$$f_d(\rho, \phi) = \left( Z_0^0(\rho, \phi), Z_1^{-1}(\rho, \phi), Z_1^1(\rho, \phi), \dots, Z_d^{-d}(\rho, \phi), \dots, Z_d^d(\rho, \phi) \right)^T \in \mathbb{R}^{(d+1)(d+2)/2} \quad (4.23)$$

é um vetor de polinómios de Zernike de ordem  $d$  e

$$\theta = (\theta_{(0,0)}, \theta_{(1,-1)}, \theta_{(1,1)}, \theta_{(2,-2)}, \theta_{(2,0)}, \theta_{(2,2)}, \dots, \theta_{(d,-d)}, \dots, \theta_{(d,d)})^T \in \mathbb{R}^{(d+1)(d+2)/2} \quad (4.24)$$

correspondente ao vetor dos parâmetros. Tendo em conta que a soma dos primeiros  $n$  números naturais é dada por

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1). \quad (4.25)$$

pode-se afirmar que aparecem  $(d+1)(d+2)/2$  polinómios de Zernike no modelo de regressão em (4.22). De facto, este valor é dado pela soma dos primeiros  $d+1$  graus dos polinómios da expansão, que está truncada na ordem  $d$ . Tendo em conta a expressão (4.25), tem-se então que a soma dos primeiros  $d+1$  naturais é dada por

$$\sum_{l=1}^{d+1} l = \frac{1}{2}(d+1)(d+2), \quad (4.26)$$

pelo que a expansão truncada contém  $(d+1)(d+2)/2$  polinómios de Zernike.

Neste subcapítulo, um modelo aproximado é dado por uma medida probabilística, denominada por  $\xi$ , no conjunto  $[0, 1] \times [0, 2\pi]$  (notar que os modelos serão representados em coordenadas polares). Este conceito vem de Keifer [27] e é apropriado para a estimação pelo método dos mínimos quadrados. Para uma medida de probabilidade com suporte finito, os pontos de suporte, denominados por  $(\rho_i, \phi_j)$ , determinam os pontos onde são feitas as observações e os pesos correspondentes, denominados por  $w_{i,j}$ , indicam a proporção relativa do total de observações, tomadas no ponto  $(\rho_i, \phi_j)$ . Para um dado modelo  $\xi$  com suporte finito, a matriz de covariância da estimação dos mínimos quadrados para o vector  $\theta$  é proporcional à inversa da matriz de informação

$$M(\xi) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(\rho, \phi) f^T(\rho, \phi) d\xi(\rho, \phi), \quad (4.27)$$

e um modelo aproximado ótimo maximiza uma função apropriada dessa matriz. Existem diversos critérios na literatura, que são usados para discriminar os diversos modelos concorrentes [39; 44], porém, neste capítulo, restringir-se-á à famosa família de critérios de  $\Phi_p$ -óptimalidade introduzidos por Kiefer [27] tomando  $-\infty \leq p < 1$ . Segundo Kiefer [27], o modelo  $\Phi_p$ -ótimo,

designado por  $\xi_p^*$ , é utilizado para estimar o parâmetro  $\theta$  no modelo de regressão (4.22), se  $\xi_p^*$  maximiza a expressão

$$\Phi_p(\xi) = \left( \frac{2}{(d+1)(d+2)} \text{tr}(M^p(\xi)) \right)^{\frac{1}{p}} \quad (4.28)$$

de entre todos os modelos com matriz de informação não-singular. Note-se que os casos em que  $p = 0$  e  $p = -\infty$  correspondem ao critério de  $D$ -otimalidade e ao critério de  $E$ -otimalidade, respetivamente. Os modelos usados nestes casos particulares são os que maximizam as seguintes expressões

$$\Phi_0(\xi) = |M(\xi)|^{2/(d+1)(d+2)} \quad (4.29)$$

$$\Phi_{-\infty}(\xi) = \lambda_{\min}(M(\xi)) \quad (4.30)$$

onde  $\lambda_{\min}(B)$  representa o menor valor próprio da matriz  $B$ . O principal resultado neste subcapítulo descreve a estrutura de um modelo  $\Phi_p$ -ótimo para a estimação dos mínimos quadrados dos coeficientes no modelo de regressão (4.22) com polinômios de Zernike como funções de regressão. Para isso, define-se a medida  $U(r)$ , com  $0 \leq r \leq 1$ , como a distribuição uniforme no círculo de raio  $r$  e centro 0, ou seja,

$$U(r) \sim \mathcal{U}(\{(\rho, \phi) \in D \mid \rho = r\}). \quad (4.31)$$

Relembre-se agora as seguintes definições/teoremas que são necessários para o estudo que se segue.

**Definição 4.5.1** (cf. [29]) *Designa-se por combinação convexa de um conjunto de pontos  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^m$  ao ponto*

$$X = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n, \quad (4.32)$$

onde  $X \in \mathbb{R}^m$  e

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (4.33)$$

com  $\lambda_i \geq 0$ .

Relembre-se a definição de matriz ortogonal.

**Definição 4.5.2** (cf. [29]) *Uma matriz  $Q$  é uma matriz ortogonal se e somente se  $Q$  é invertível e  $Q^{-1} = Q^T$ , isto é,*

$$QQ^T = I, \quad (4.34)$$

sendo que, deste modo, uma outra propriedade de uma matriz ortogonal é que  $Q^T = Q^{-1}$ .

Relembre-se agora o conceito de matrizes semelhantes.

**Definição 4.5.3** (cf. [29]) *Duas matrizes,  $A$  e  $B$  dizem-se matrizes semelhantes se existe uma matriz invertível,  $X$ , tal que  $A = X^{-1}BX$ .*

**Teorema 4.5.4** (cf. [29]) *Suponha-se que  $A$  e  $B$  são matrizes semelhantes. Então  $A$  e  $B$  têm o mesmo polinómio característico e os mesmos valores próprios. Esta prova é apresentada de seguida.*

**Prova:** Pela definição anterior, como  $A$  e  $B$  são semelhantes, então  $A = X^{-1}BX$ . Para o polinómio característico de  $A$ , tem-se que:

$$\begin{aligned}
 |\lambda I - A| &= |\lambda I - X^{-1}BX| \\
 &= |\lambda X^{-1}IX - X^{-1}BX| \\
 &= |X^{-1}(\lambda I - B)X| \\
 &= |X^{-1}| |\lambda I - B| |X| \\
 &= \frac{1}{|X|} |\lambda I - B| |X| \\
 &= |\lambda I - B|
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

que corresponde ao polinómio característico de  $B$ . Uma vez que  $A$  e  $B$  têm o mesmo polinómio característico, então  $A$  e  $B$  têm os mesmos valores próprios. ■

É possível mostrar que modelos  $\Phi_p$ -ótimos são combinações convexas específicas de modelos do tipo (4.31), isto é, existem raios  $0 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_{\lfloor d/2 \rfloor + 1} = 1$  e pesos positivos  $w_1, w_2, \dots, w_{\lfloor d/2 \rfloor + 1}$ , com  $\sum_{i=1}^{\lfloor d/2 \rfloor + 1} w_i = 1$ , tal que qualquer modelo  $\Phi_p$ -ótimo no modelo de regressão (4.22) é dado na forma

$$\xi_p^* = \sum_{i=1}^{\lfloor d/2 \rfloor + 1} w_i U(r_i). \tag{4.36}$$

Se  $d$  é par, então tem-se que  $r_1 = 0$  (as observações têm de ser tomadas a partir do centro), enquanto que, se  $d$  é ímpar,  $r_1 > 0$ . A prova deste facto encontra-se em [27]. Devido à sua complexidade e extensão, estudar-se-ão apenas alguns casos particulares deste problema.

Comece-se por notar que o problema do modelo é uma rotação invariante. Assim, seja  $\xi$  o modelo que denota o modelo  $\Phi_p$ -ótimo no disco  $D$  com pontos de suporte  $(\rho_i, \phi_j)$ , pesos  $w_{ij}$ , e assumindo que  $\tilde{\xi}$  é obtido a partir de  $\xi$  através de uma rotação dos pontos de suporte de  $\xi$  com um ângulo  $\alpha$ . Neste sentido, o vetor das funções de regressão segue na forma

$$f(\rho, \phi + \alpha) = T f(\rho, \phi), \tag{4.37}$$

onde a matriz  $T$  é dada por

$$T = \text{diag}(T_0, T_1, \dots, T_d) \in \mathbb{R}^{(d+1)(d+2)/2 \times (d+1)(d+2)/2} \tag{4.38}$$

com os blocos  $T_j \in \mathbb{R}^{(j+1) \times (j+1)}$  definidos na forma

$$T_{2i+1} = \begin{pmatrix} \cos((2i+1)\alpha) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \sin((2i+1)\alpha) \\ 0 & \cos((2i-1)\alpha) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \sin((2i-1)\alpha) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \sin((2i-1)\alpha) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \cos((2i-1)\alpha) & 0 \\ \sin((2i+1)\alpha) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \cos((2i+1)\alpha) \end{pmatrix}$$

$$T_{2i} = \begin{pmatrix} \cos(2i\alpha) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sin(2i\alpha) \\ 0 & \cos((2i-2)\alpha) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \sin((2i-2)\alpha) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cos(2\alpha) & 0 & \sin(2\alpha) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sin(2\alpha) & 0 & \cos(2\alpha) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \sin((2i-2)\alpha) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cos((2i-2)\alpha) & 0 \\ \sin(2i\alpha) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cos(2i\alpha) \end{pmatrix}$$

Assim, tendo em conta a definição 4.5.2, é simples provar que a matriz  $T$  é uma matriz ortogonal. De facto, a matriz  $T$  é uma matriz diagonal por blocos composta por  $d + 1$  submatrizes na sua diagonal. Em cada uma destas submatrizes pode-se observar que cada linha e cada coluna é composta por zeros em todas as suas entradas, excepto em duas. Uma destas entradas é igual a  $\cos \beta_n$  e a outra entrada é igual  $\sin \beta_n$ , sendo  $\beta_n$  um ângulo a título de exemplo e que representa o ângulo de cada linha/coluna desta submatriz e que é igual nas duas entradas diferentes de 0 em cada linha/coluna. Recorrendo então à definição apresentada anteriormente de matriz ortogonal e aplicando ao caso de cada submatriz, chega-se ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} T_d T_d^T &= \begin{pmatrix} \cos^2(\beta_1) + \sin^2(\beta_1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(\beta_2) + \sin^2(\beta_2) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cos^2(\beta_2) + \sin^2(\beta_2) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cos^2(\beta_1) + \sin^2(\beta_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I_d. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Deste modo, conclui-se que

$$\begin{aligned}
TT^T &= \begin{pmatrix} T_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & T_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & T_{d-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & T_d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} T_0^T & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & T_1^T & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & T_{d-1}^T & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & T_d^T \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} T_0 T_0^T & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & T_1 T_1^T & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & T_{d-1} T_{d-1}^T & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & T_d T_d^T \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_{d-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I_d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= I_{(d+1)(d+2)/2}, \tag{4.40}
\end{aligned}$$

pelo que a matriz  $T$  é, assim, ortogonal. Recordando a definição de matriz de informação,  $M(\xi)$ , tem-se por um lado

$$M(\xi) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(\rho, \phi) f^T(\rho, \phi) d\xi(\rho, \phi). \tag{4.41}$$

Por outro lado, por (4.37) tem-se que  $f(\rho, \phi + \alpha) = Tf(\rho, \phi)$ . Deste modo, usando de novo a definição de matriz de informação e recordando que  $\xi$  corresponde a um modelo obtido a partir de  $\xi$  através de uma rotação dos pontos de suporte do mesmo, isto é, se  $\xi$  está associado a  $f$  por  $f(\rho, \phi)$ , então  $\tilde{\xi}$  está associado a  $f$  por  $f(\rho, \phi + \alpha)$ , obtém-se

$$\begin{aligned}
M(\tilde{\xi}) &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(\rho, \phi + \alpha) f^T(\rho, \phi + \alpha) d\tilde{\xi}(\rho, \phi) \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 Tf(\rho, \phi) (Tf(\rho, \phi))^T d\xi(\rho, \phi) \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 Tf(\rho, \phi) f^T(\rho, \phi) T^T d\xi(\rho, \phi) \\
&= T \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(\rho, \phi) f^T(\rho, \phi) d\xi(\rho, \phi) T^T \\
&= TM(\xi)T^T. \tag{4.42}
\end{aligned}$$



Aplicando o Teorema 4.5.4 ao problema que está a ser estudado e relembrando que  $T$  é uma matriz ortogonal, tem-se que

$$\begin{aligned}
M(\tilde{\xi}) &= TM(\xi)T^T \\
\Leftrightarrow M(\tilde{\xi}) &= TM(\xi)T^{-1} \\
\Leftrightarrow T^{-1}M(\tilde{\xi})T &= T^{-1}TM(\xi)T^{-1}T \\
\Leftrightarrow T^{-1}M(\tilde{\xi})T &= (T^{-1}T)M(\xi)(T^{-1}T) \\
\Leftrightarrow T^{-1}M(\tilde{\xi})T &= IM(\xi)I \\
\Leftrightarrow T^{-1}M(\tilde{\xi})T &= M(\xi) \\
\Leftrightarrow M(\xi) &= T^{-1}M(\tilde{\xi})T.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Fazendo  $A = M(\xi)$  e  $B = M(\tilde{\xi})$ , pode-se observar que (4.43) está na forma  $A = X^{-1}BX$ , pelo que  $M(\xi)$  e  $M(\tilde{\xi})$  são matrizes semelhantes e, consequentemente, têm os mesmos valores próprios. Conclui-se ainda que  $\tilde{\xi}$  continua a ser um modelo  $\Phi_p$ -ótimo. Nota-se ainda que o grupo das matrizes de (4.38) é um subgrupo do grupo de matrizes de  $\mathbb{R}^{(d+1)(d+2)/2}$ .

O vetor da função de regressão pode ser escrito na forma

$$f(\rho, \phi) = K^{-1}g(x_1, x_2) = K^{-1}g(x) \tag{4.44}$$

onde  $g$  é o vetor de  $\binom{d+2}{2}$  monómios da forma  $x_i^{\alpha_i}x_j^{\alpha_j}$ , com  $i, j \in \{1, 2\}$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}_0$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 2$ ,  $x_1 = \rho \cos \phi$ ,  $x_2 = \rho \sin \phi$  e  $K \in \mathbb{R}^{(d+1)(d+2)/2 \times (d+1)(d+2)/2}$  é uma matriz ortogonal conveniente que não depende das variáveis experimentais  $(x_1, x_2) \in D$ . Além disso, o problema de encontrar um modelo  $\Phi_p$ -ótimo para o modelo de regressão de Zernike (4.22) é equivalente ao problema de encontrar um modelo  $\Phi_p$ -ótimo para o parâmetro  $K^T\theta$  no modelo de regressão polinomial bidimensional

$$y = \theta^T g(x) + \epsilon \tag{4.45}$$

conforme foi estudado por diversos autores [6; 17; 26]. A solução deste problema é de fácil obtenção, de facto, segundo o modelo (4.22) tem-se que

$$E[Y|\rho, \phi] = \theta^T f_d(\rho, \phi); \quad \text{Var}[Y|\rho, \phi] = \sigma^2 > 0$$

pelo que, tendo em conta que  $f = K^T g(x)$ ,

$$\begin{aligned}
E[Y|\rho, \phi] &= \theta^T f_d(\rho, \phi) \\
&= \theta^T K^T g(x) \\
&= (\theta^T K^T)g(x) \\
&= (K\theta)^T g(x).
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Por outro lado, como  $\text{Var}[Y|\rho, \phi] = \sigma^2 > 0$  corresponde ao erro de aproximação do modelo, tem-se que  $\text{Var}[Y|\rho, \phi] = \sigma^2 > 0 = \epsilon$ , pelo que se chega a

$$\left. \begin{aligned} E[Y|\rho, \phi] &= \theta^T f_d(\rho, \phi) \\ \text{Var}[Y|\rho, \phi] &= \sigma^2 > 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow y = \theta^T g(x) + \epsilon \quad (4.47)$$

sendo  $\theta^T = (K\theta)^T$ .

Assim pode-se concluir que existe um modelo  $\Phi_p$ -ótimo rotacionável, denominado por  $\eta_p^*$ , para este problema. Pelo problema de equivalência geral para  $\Phi_p$ -otimalidade [39], com  $p > -\infty$ , um modelo  $\eta_p^*$  é  $\Phi_p$ -ótimo se e só se a desigualdade

$$d(x, \eta_p^*) = g^T(x) \bar{M}^{-1}(\eta_p^*) K (K^T \bar{M}^{-1}(\eta_p^*) K)^{-p-1} K^T \bar{M}^{-1}(\eta_p^*) g(x) \quad (4.48)$$

$$\leq \text{tr}(K^T \bar{M}^{-1}(\eta_p^*) K)^{-p} \quad (4.49)$$

se verifica, para todo o  $x \in D$ , onde  $\bar{M}(\eta)$  é a matriz de informação do modelo  $\eta$  na expressão (4.45).

Para provar a afirmação anterior, recorde-se o seguinte:

- $\xi^*$  é ótimo  $\Leftrightarrow \bar{d}_1(\xi^*) = \min_{\xi} \bar{d}_1(\xi)$ , onde  $\bar{d}_1(\xi) = \max_x f^T(x) M^{-1}(\xi) C M^{-1}(\xi) f(x)$ ;
- $\Phi_p(\xi^*) = \max \left( \frac{2}{(d+1)(d+2)} \text{tr}(M^p(\xi)) \right)^{\frac{1}{p}}$ ;
- $f(x) = K^{-1}g(x) \Leftrightarrow Kf(x) = KK^{-1}g(x) \Leftrightarrow g(x) = Kf(x)$ .

Assim

$$\begin{aligned} d(x, \eta_p^*) &= g^T \bar{M}^{-1}(\eta_p^*) K (K^T \bar{M}^{-1}(\eta_p^*) K)^{-p-1} K^T \bar{M}^{-1}(\eta_p^*) g(x) \\ &= (Kf(x))^T \bar{M}^{-1}(\eta_p^*) K (K^T \bar{M}^{-1}(\eta_p^*) K)^{-p-1} K^T \bar{M}^{-1}(\eta_p^*) Kf(x) \\ &= f^T(x) K^T \bar{M}^{-1}(\eta_p^*) K (K^T \bar{M}^{-1}(\eta_p^*) K)^{-p-1} K^T \bar{M}^{-1}(\eta_p^*) Kf(x), \end{aligned} \quad (4.50)$$

que corresponde à definição (4.11), sendo que, neste caso,  $M^{-1}(\xi) = K^T \bar{M}^{-1}(\eta_p^*) K$ . Considerando a definição de  $\Phi$ -otimalidade (ver subcapítulo 4.3), tem-se que, no caso de funções convexas,

$$d(\xi^*) = \max_{\xi} \text{tr} [AM^{-1}(\xi)A^T]^p. \quad (4.51)$$

Neste sentido, e tendo em conta que neste estudo está-se a trabalhar com funções convexas, tem-se que

$$\begin{aligned} d(\eta^*) &= \max_{\eta} \text{tr} \left[ (A \bar{M}^{-1}(\eta) A^T)^p \right] \\ &= \max_{\eta} \text{tr} \left[ \left( \underbrace{K^T \bar{M}^{-1}(\eta) K}_{\text{simétrica}} \right)^p \right] \\ &= \max_{\eta} \text{tr} \left[ \left( (K^T \bar{M}^{-1}(\eta) K)^T \right)^p \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \max_{\eta} \operatorname{tr} \left[ \left( (K^T \bar{M}^{-1}(\eta) K)^{-1} \right)^p \right] \\
&= \max_{\eta} \operatorname{tr} \left[ (K^T \bar{M}^{-1}(\eta) K)^{-p} \right]
\end{aligned} \tag{4.52}$$

sendo que,

$$d(\eta) \leq \operatorname{tr} [K^T \bar{M}^{-1}(\eta^*) K]^{-p}. \tag{4.53}$$

Deste modo pode-se então concluir que

$$\begin{aligned}
d(x, \eta_p^*) &= g^T(x) \bar{M}^{-1}(\eta_p^*) K (K^T \bar{M}^{-1}(\eta_p^*) K)^{-p-1} K^T \bar{M}^{-1}(\eta_p^*) g(x) \\
&= \max_{\eta} \operatorname{tr} (K^T \bar{M}^{-1}(\eta_p) K)^{-p} \\
&\leq \operatorname{tr} (K^T \bar{M}^{-1}(\eta_p^*) K)^{-p}.
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Passe-se agora para o caso em que  $p = -\infty$  que caracteriza os modelos  $\Phi_{-\infty}$ -ótimos, que se descrevem de uma forma ligeiramente diferente. Neste caso, a  $E$ -otimalidade do modelo  $\eta_{-\infty}^*$  é equivalente a um modelo com uma matriz  $E$ , tal que  $\operatorname{tr} E = 1$ , e a seguinte desigualdade é verificada

$$\begin{aligned}
d(x, \eta_{-\infty}^*) &= g^T(x) \bar{M}^{-1}(\eta_{-\infty}^*) K (K^T \bar{M}^{-1}(\eta_{-\infty}^*) K)^{-1} E (K^T \bar{M}^{-1}(\eta_{-\infty}^*) K)^{-1} \\
&\quad \times K^T \bar{M}^{-1}(\eta_{-\infty}^*) g(x)
\end{aligned} \tag{4.55}$$

$$\leq \lambda_{\min} ((K^T \bar{M}^{-1}(\eta_{-\infty}^*) K)^{-1}), \tag{4.56}$$

para todo o  $x \in D$ , (ver [39]). Prove-se que a desigualdade (4.56) é de facto satisfeita. Tendo em conta (4.55), tem-se

$$\begin{aligned}
d(x, \eta_p^*) &= g^T(x) \bar{M}^{-1}(\eta_{-\infty}^*) K (K^T \bar{M}^{-1}(\eta_{-\infty}^*) K)^{-1} E (K^T \bar{M}^{-1}(\eta_{-\infty}^*) K)^{-1} \\
&\quad \times K^T \bar{M}^{-1}(\eta_{-\infty}^*) g(x) \\
&= (K f(x))^T \bar{M}^{-1}(\eta_{-\infty}^*) K (K^T \bar{M}^{-1}(\eta_{-\infty}^*) K)^{-1} E (K^T \bar{M}^{-1}(\eta_{-\infty}^*) K)^{-1} \\
&\quad \times K^T \bar{M}^{-1}(\eta_{-\infty}^*) K f(x) \\
&= f^T(x) K^T \bar{M}^{-1}(\eta_{-\infty}^*) K (K^T \bar{M}^{-1}(\eta_{-\infty}^*) K)^{-1} E (K^T \bar{M}^{-1}(\eta_{-\infty}^*) K)^{-1} \\
&\quad \times K^T \bar{M}^{-1}(\eta_{-\infty}^*) K f(x) \\
&= f^T(x) \underbrace{K^T \bar{M}^{-1}(\eta_{-\infty}^*) K}_{M^{-1}(\xi_{-\infty})} \underbrace{(K^T \bar{M}^{-1}(\eta_{-\infty}^*) K)^{-1} E (K^T \bar{M}^{-1}(\eta_{-\infty}^*) K)^{-1}}_C \\
&\quad \times \underbrace{K^T \bar{M}^{-1}(\eta_{-\infty}^*) K}_{M^{-1}(\xi_{-\infty})} f(x).
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Tendo em conta o critério de  $E$ -otimalidade e a definição (4.30), obtém-se

$$\begin{aligned}
 d(x, \eta_{-\infty}^*) &= \max_{\eta} \lambda_{\min}(M(\xi_{-\infty})) \\
 &= \max_{\eta} \lambda_{\min}((K^T \bar{M}^{-1}(\eta_{-\infty})K)^{-1}) \\
 &\leq \lambda_{\min}((K^T \bar{M}^{-1}(\eta_{-\infty}^*)K)^{-1})
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

donde resulta a desigualdade (4.56)

$$\begin{aligned}
 d(x, \eta_p^*) &= g^T(x) \bar{M}^{-1}(\eta_{-\infty}^*)K (K^T \bar{M}^{-1}(\eta_{-\infty}^*)K)^{-1} E (K^T \bar{M}^{-1}(\eta_{-\infty}^*)K)^{-1} \\
 &\quad \times K^T \bar{M}^{-1}(\eta_{-\infty}^*)g(x) \\
 &= \max_{\eta} \lambda_{\min}((K^T \bar{M}^{-1}(\eta_{-\infty})K)^{-1}) \\
 &\leq \lambda_{\min}((K^T \bar{M}^{-1}(\eta_{-\infty}^*)K)^{-1}).
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

Para o caso em que  $p = 0$ , considera-se o critério de  $D$ -otimalidade e tem-se que  $K = I_{(d+1)(d+2)/2}$  e a desigualdade (4.48) reduz-se a

$$d(x, \eta_0^*) = g^T(x) \bar{M}^{-1}(\eta_0^*)g(x) \leq \binom{d+2}{2}, \tag{4.60}$$

para todo o  $x \in D$ . Prove-se agora que (4.60) é verificada. Tendo em conta (4.49), obtém-se

$$\begin{aligned}
 d(x, \eta_0^*) &= g^T(x) \bar{M}^{-1}(\eta_p^*)K (K^T \bar{M}^{-1}(\eta_p^*)K)^{-p-1} K^T \bar{M}^{-1}(\eta_p^*)g(x) \\
 &= g^T(x) \bar{M}^{-1}(\eta_p^*)(\bar{M}^{-1}(\eta_p^*))^{-p-1} \bar{M}^{-1}(\eta_p^*)g(x) \\
 &= g^T(x) \bar{M}^{-1}(\eta_0^*)(\bar{M}^{-1}(\eta_0^*))^{-0-1} \bar{M}^{-1}(\eta_0^*)g(x) \\
 &= g^T(x) \bar{M}^{-1}(\eta_0^*)(\bar{M}^{-1}(\eta_0^*))^{-1} \bar{M}^{-1}(\eta_0^*)g(x) \\
 &= g^T(x) \bar{M}^{-1}(\eta_0^*)\bar{M}(\eta_0^*)\bar{M}^{-1}(\eta_0^*)g(x) \\
 &= g^T(x) \bar{M}^{-1}(\eta_0^*)g(x).
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

Por outro lado, tendo em conta (4.48) tem-se que

$$\begin{aligned}
 d(x, \eta_0^*) &\leq \text{tr}(K^T \bar{M}^{-1}(\eta_p^*)K)^{-p} \\
 &= \max_{\eta} \text{tr}(\bar{M}^{-1}(\eta_p))^p \\
 &= \max_{\eta} \text{tr}(\bar{M}^{-1}(\eta_p))^0 \\
 &= \max_{\eta} \text{tr}(I_{(d+1)(d+2)/2}) \\
 &= \frac{(d+1)(d+2)}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(d+1)(d+2)d!}{2 \times d!} \\
&= \frac{(d+2)!}{(d+2-2)! \times 2} \\
&= \binom{d+2}{2}.
\end{aligned} \tag{4.62}$$

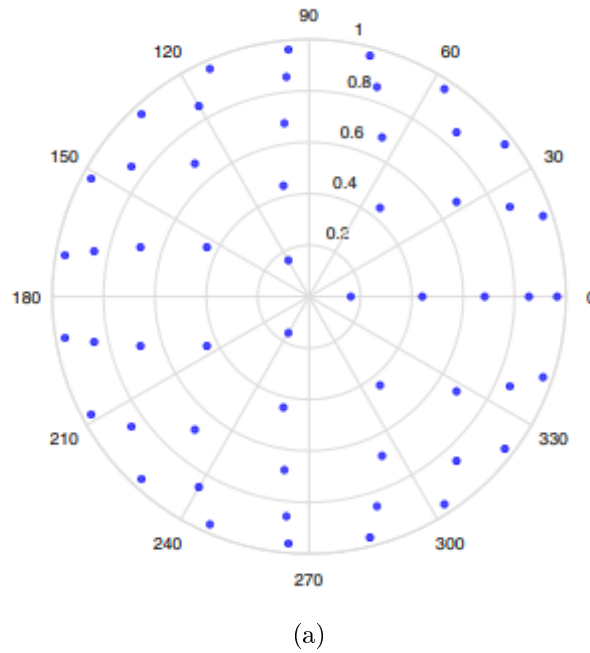
Assim, combinando (4.61) e (4.62) conclui-se que

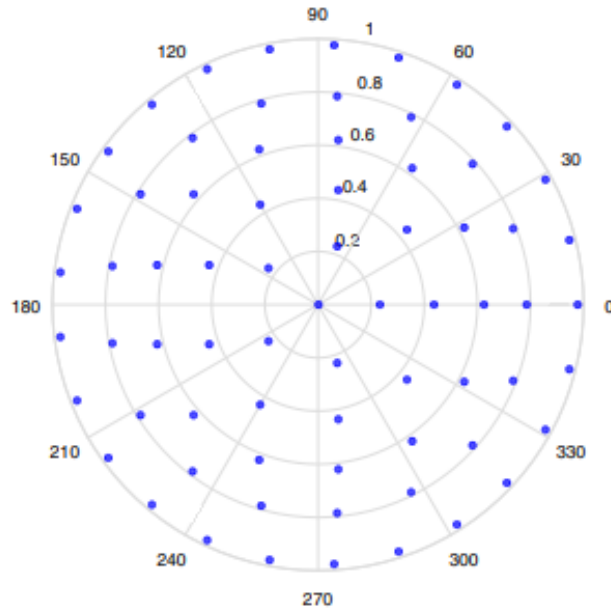
$$d(x, \eta_0^*) = g^T(x) \bar{M}^{-1}(\eta_0^*) g(x) \leq \binom{d+2}{2}.$$

A distribuição uniforme  $U(r_k)$  presente em (4.31) pode ser vista como uma medida discreta uniforme com massa  $1/m$  com  $m \geq d$  pontos

$$U(r) \sim \mathcal{U} \left\{ \left( r \cos \frac{2\pi k}{m}, r \sin \frac{2\pi k}{m} \right) \mid k = 0, \dots, m-1 \right\}.$$

Neste sentido, e tendo em conta os modelos da Figura 4.1, está-se perante modelos como os que são apresentados de seguida.





(b)

Figura 4.2: Representação de modelos com distribuição uniforme, com  $d$  ímpar em (a) e  $d$  par em (b).

Fonte: *Optimal sampling patterns for Zernike polynomials*, [41].

## 4.6 Modelos $D$ -ótimos para estimação dos mínimos quadrados

Focando no critério da  $D$ -otimalidade, neste capítulo procurar-se-á uma forma de estimar modelos  $D$ -ótimos. Para isso, é necessário recordar a definição de matriz de permutação.

**Definição 4.6.1** (cf. [29]) *Uma matriz de permutação é uma matriz quadrada binária, isto é, uma matriz apenas composta por 0's e 1's, que gera uma permutação dos elementos de um vetor ou das linhas ou colunas de uma outra matriz. A matriz de permutação, além de ser composta apenas por 0's e 1's, tem ainda a particularidade de ter apenas uma entrada diferente de 0 em cada linha e em cada coluna.*

**Exemplo 4.6.2** *Matrizes do tipo*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

são matrizes de permutação. Para  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ , a operação  $Av$  tem o seguinte resultado

$$Av = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad (4.63)$$

No caso da multiplicação de matrizes de permutação por outras matrizes, ocorre a permutação de linhas, no caso da matriz de permutação estar à esquerda, e a troca de colunas, no caso da matriz de permutação estar à direita.

**Exemplo 4.6.3** Sendo  $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$  tem-se que

$$AF = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$FA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

De notar ainda que o determinante de uma matriz de permutação é sempre igual a  $\pm 1$ .

Posto isto, tendo em conta a definição do vetor das funções de regressão  $f(\rho, \phi)$  em (4.23) e sendo que  $U(r)$  denota uma distribuição uniforme no círculo unitário com raio  $r$  e centro  $(0, 0)$ , pode-se afirmar que

$$I = I(\rho) = \int f(\rho, \phi) f^T(\rho, \phi) dU(r) \quad (4.64)$$

depende apenas do raio  $r^2$ , tendo em conta que os modelos  $\Phi$ -ótimos são rotacionáveis, como foi visto anteriormente, não dependendo assim da parte angular de cada ponto do modelo. Existe ainda uma matriz de permutação, denotada por  $P$ , tal que esta matriz pode ser representada na forma

$$PIP^T = \text{diag}\{B_{-d}, \dots, B_{-1}, B_0, B_1, \dots, B_d\}, \quad (4.65)$$

onde os blocos  $B_i$  são definidos por

$$B_i = B_i(r) = \int h_i(\rho, \phi) h_i^T(\rho, \phi) dU(\rho, \phi) \in \mathbb{R}^{(\lfloor (d-|i|)/2 \rfloor + 1) \times (\lfloor (d-|i|)/2 \rfloor + 1)} \quad (4.66)$$

com

$$h_i(\rho, \phi) = \left( \tilde{R}_{|i|}^i(\rho, \phi), \tilde{R}_{|i|+2}^i(\rho, \phi), \dots, \tilde{R}_{|i|+2\lfloor (d-|i|)/2 \rfloor}^i(\rho, \phi) \right)^T \in \mathbb{R}^{\lfloor (d-|i|)/2 \rfloor + 1} \quad (4.67)$$

com  $i = -d, -d+1, \dots, d-1, d$  e  $\tilde{R}_i^j(\rho, \phi) = N_i^j R_i^j(\rho, \phi)$ . Para um determinado modelo  $\xi = \sum_{k=1}^{\lfloor d/2 \rfloor + 1} w_k U(r_k)$ , vem que

$$PM(\xi)P^T = \text{diag} \left( \sum_{k=1}^{\lfloor d/2 \rfloor + 1} w_k B_i(r) \right)_{i=-d}^d. \quad (4.68)$$

Pelas propriedades dos determinantes de matrizes, tem-se ainda que

$$\begin{aligned}
\det(PM(\xi)P^T) &= \det P \det M(\xi) \det P^T \\
&= \det P \det M(\xi) \det P^{-1} \\
&= \det P \det P^{-1} \det M(\xi) \\
&= \det P (\det P)^{-1} \det M(\xi) \\
&= \det M(\xi).
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Por outro lado, pelo facto de estes polinómios não dependerem da parte angular, tem-se que  $B_{-i}(r) = B_i(r)$ , pelo que

$$\begin{aligned}
\det(PM(\xi)P^T) &= \det \left( \text{diag} \left( \sum_{k=1}^{\lfloor d/2 \rfloor + 1} w_k B_i(r) \right)_{i=-d}^d \right) \\
&= \prod_{i=-d}^d \left( \det \left( \sum_{k=1}^{\lfloor d/2 \rfloor + 1} w_k B_i(r) \right) \right) \\
&= \det \left( \sum_{k=1}^{\lfloor d/2 \rfloor + 1} w_k B_{-d}(r) \right) \times \cdots \times \det \left( \sum_{k=1}^{\lfloor d/2 \rfloor + 1} w_k B_{-1}(r) \right) \\
&\quad \times \det \left( \sum_{k=1}^{\lfloor d/2 \rfloor + 1} w_k B_0(r) \right) \times \det \left( \sum_{k=1}^{\lfloor d/2 \rfloor + 1} w_k B_1(r) \right) \\
&\quad \times \cdots \times \det \left( \sum_{k=1}^{\lfloor d/2 \rfloor + 1} w_k B_d(r) \right) \\
&= \det \left( \sum_{k=1}^{\lfloor d/2 \rfloor + 1} w_k B_d(r) \right) \times \cdots \times \det \left( \sum_{k=1}^{\lfloor d/2 \rfloor + 1} w_k B_1(r) \right) \\
&\quad \times \det \left( \sum_{k=1}^{\lfloor d/2 \rfloor + 1} w_k B_0(r) \right) \times \det \left( \sum_{k=1}^{\lfloor d/2 \rfloor + 1} w_k B_1(r) \right) \\
&\quad \times \cdots \times \det \left( \sum_{k=1}^{\lfloor d/2 \rfloor + 1} w_k B_d(r) \right)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \det \left( \sum_{k=1}^{\lfloor d/2 \rfloor + 1} w_k B_0(r) \right) \times \left( \det \left( \sum_{k=1}^{\lfloor d/2 \rfloor + 1} w_k B_1(r) \right) \right)^2 \\
&\times \cdots \times \left( \det \left( \sum_{k=1}^{\lfloor d/2 \rfloor + 1} w_k B_d(r) \right) \right)^2 \\
&= \det \left( \sum_{k=1}^{\lfloor d/2 \rfloor + 1} w_k B_0(r) \right) \prod_{i=1}^d \left( \det \left( \sum_{k=1}^{\lfloor d/2 \rfloor + 1} w_k B_d(r) \right) \right)^2. \tag{4.70}
\end{aligned}$$

Tendo em conta (4.69) e (4.70) resulta que

$$\det M(\xi) = \det \left( \sum_{k=1}^{\lfloor d/2 \rfloor + 1} w_k B_0(r) \right) \prod_{i=1}^d \left( \det \left( \sum_{k=1}^{\lfloor d/2 \rfloor + 1} w_k B_d(r) \right) \right)^2. \tag{4.71}$$

Com a representação anterior, os modelos  $D$ -ótimos para a estimação dos mínimos quadrados no modelo de regressão de Zernike podem ser calculados por meios computacionais através do MATLAB.

Relembrando o critério da  $D$ -otimalidade, um modelo é  $D$ -ótimo se e só se

$$\Phi_0(M(\xi^*)) = \min_{\xi \in \Xi} \det M(\xi)^{-1} \tag{4.72}$$

pelo que é equivalente, tendo em conta (4.71),

$$\Phi_0(M(\xi^*)) = \min_{\xi \in \Xi} \left( \det \left( \sum_{k=1}^{\lfloor d/2 \rfloor + 1} w_k B_0(r) \right) \prod_{i=1}^d \left( \det \left( \sum_{k=1}^{\lfloor d/2 \rfloor + 1} w_k B_d(r) \right) \right)^2 \right)^{-1}. \tag{4.73}$$

## 4.7 Modelos $E$ -ótimos para estimação dos mínimos quadrados

No caso do critério de  $E$ -otimalidade, a situação é um pouco mais complicada, devido ao facto de um modelo  $E$ -ótimo não ser necessariamente único. Perante isto, o resultado seguinte representa uma classe importante de modelos  $E$ -ótimos.

**Teorema 4.7.1** *Se  $\xi^*$  denota um modelo tal que a sua matriz de informação (4.27) no modelo de regressão (4.22) é dada pela matriz identidade  $I_{(d+1)(d+2)/2}$ , então  $\xi^*$  é um modelo ótimo.*

**Prova:** Pelo Teorema da Equivalência para  $E$ -otimalidade [39] tem-se que um modelo é  $E$ -ótimo no modelo de regressão de Zernike (4.22) se e só se existe uma matriz  $E$  cujo traço seja 1, tal que a desigualdade

$$f^T(\rho, \phi) E f(\rho, \phi) \leq \lambda_{\min}(M(\xi^*)) = 1 \tag{4.74}$$

se verifica para todo  $(\rho, \phi) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$ . A primeira parte da desigualdade pode ser calculada tomando  $E$  como uma multiplicação de um vetor unitário,  $e_1$ , pelo seu transposto. Por exemplo, tendo  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{(d+1)(d+2)/2}$ , tem-se que

$$E = e_1 e_1^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

tal que  $E \in \mathbb{R}^{(d+1)(d+2)/2 \times (d+1)(d+2)/2}$ . O traço desta matriz  $E$  é igual a 1. No lado direito de (4.74), é necessário relembrar que, por hipótese, a matriz informação do modelo é a matriz identidade. Desta forma, o menor valor próprio da matriz informação será o menor valor próprio da matriz identidade, que é igual a 1. Assim, se a hipótese se verificar e a matriz informação for, de facto, igual à matriz identidade, então a segunda parte da afirmação está verificada. Deste modo, qualquer modelo cuja matriz informação seja igual a  $I_{(d+1)(d+2)/2}$  e verifique a desigualdade (4.74) é um modelo  $E$ -ótimo para o modelo de regressão de Zernike (4.22).

■

**Exemplo 4.7.2** (Ver [10]) *Os dois modelos seguintes cumprem a condição anterior, tendo a matriz identidade como matriz de informação e sendo, portanto, dois modelos  $E$ -ótimos para o modelo de regressão de Zernike (4.22) :*

1. *Modelo uniforme no disco  $D$ , que corresponde a um modelo representado através de pontos experimentais a partir de distribuição contínua uniforme pré-definida no disco;*
2. *Qualquer modelo da forma*

$$\xi^* = \sum_{i=1}^n w_i U(r_i), \quad (4.76)$$

*tal que os raios  $r_1, \dots, r_n$  e os pesos  $w_1, \dots, w_n$  define uma fórmula de quadratura que integra polinómios até ao grau  $2d$  no que diz respeito à medida  $x dx$  no intervalo  $[0, 1]$ , ou seja,*

$$\sum_{i=1}^n w_i r_i^k = \int_0^1 x^k x dx = \frac{1}{k+2}, \quad k = 0, \dots, 2d. \quad (4.77)$$

## 4.8 Conclusão

Neste capítulo, a partir de uma revisão dos polinómios de Zernike, foram encontrados modelos que permitiriam estimar os parâmetros que minimizam o erro da expansão truncada usada, posteriormente, no método dos mínimos quadrados. Neste sentido, fez-se um estudo e exploraram-se diversos critérios de otimalidade que garantem que os modelos que se pretendem avaliar são ou não modelos ótimos. Com este objetivo, encontraram-se métodos que permitem verificar se um dado modelo é ótimo no caso geral e em casos particulares, como modelos  $D$ -ótimos e  $E$ -ótimos.

# Apêndice A

## Anexos

### A.1 Código para obter os valores dos polinômios de Zernike

O código apresentado a seguir é retirado de [16].

```
function z = zernfun(n,m,r,theta,nflag)
%ZERNFUN Zernike functions of order N and frequency M on the unit circle.
% Z = ZERNFUN(N,M,R,THETA) returns the Zernike functions of order N
% and angular frequency M, evaluated at positions (R,THETA) on the
% unit circle. N is a vector of positive integers (including 0), and
% M is a vector with the same number of elements as N. Each element
% k of M must be a positive integer, with possible values M(k) = -N(k)
% to +N(k) in steps of 2. R is a vector of numbers between 0 and 1,
% and THETA is a vector of angles. R and THETA must have the same
% length. The output Z is a matrix with one column for every (N,M)
% pair, and one row for every (R,THETA) pair.
%
% Z = ZERNFUN(N,M,R,THETA,'norm') returns the normalized Zernike
% functions. The normalization factor sqrt((2-delta(m,0))*(n+1)/pi),
% with delta(m,0) the Kronecker delta, is chosen so that the integral
% of (r * [Znm(r,theta)]^2) over the unit circle (from r=0 to r=1,
% and theta=0 to theta=2*pi) is unity. For the non-normalized
% polynomials, max(Znm(r=1,theta))=1 for all [n,m].
%
% The Zernike functions are an orthogonal basis on the unit circle.
% They are used in disciplines such as astronomy, optics, and
% optometry to describe functions on a circular domain.
%
% The following table lists the first 15 Zernike functions.
```

| n | m  | Zernike function   | Normalization |
|---|----|--------------------|---------------|
| 0 | 0  | 1                  | 1/sqrt(pi)    |
| 1 | 1  | r * cos(theta)     | 2/sqrt(pi)    |
| 1 | -1 | r * sin(theta)     | 2/sqrt(pi)    |
| 2 | 2  | r^2 * cos(2*theta) | sqrt(6/pi)    |
| 2 | 0  | (2*r^2 - 1)        | sqrt(3/pi)    |

```
%      2   -2   r^2 * sin(2*theta)          sqrt(6/pi)
%      3    3   r^3 * cos(3*theta)          sqrt(8/pi)
%      3    1   (3*r^3 - 2*r) * cos(theta)   sqrt(8/pi)
%      3   -1   (3*r^3 - 2*r) * sin(theta)   sqrt(8/pi)
%      3   -3   r^3 * sin(3*theta)          sqrt(8/pi)
%      4    4   r^4 * cos(4*theta)          sqrt(10/pi)
%      4    2   (4*r^4 - 3*r^2) * cos(2*theta) sqrt(10/pi)
%      4    0   6*r^4 - 6*r^2 + 1           sqrt(5/pi)
%      4   -2   (4*r^4 - 3*r^2) * sin(2*theta) sqrt(10/pi)
%      4   -4   r^4 * sin(4*theta)          sqrt(10/pi)
%      -----
```

Example 1:

```
%
%      % Display the Zernike function Z(n=5,m=1)
%      x = -1:0.01:1;
%      [X,Y] = meshgrid(x,x);
%      [theta,r] = cart2pol(X,Y);
%      idx = r<=1;
%      z = nan(size(X));
%      z(idx) = zernfun(5,1,r(idx),theta(idx));
%      figure
%      pcolor(x,x,z), shading interp
%      axis square, colorbar
%      title('Zernike function Z_5^1(r,\theta)')
```

Example 2:

```
%
%      % Display the first 10 Zernike functions
%      x = -1:0.01:1;
%      [X,Y] = meshgrid(x,x);
%      [theta,r] = cart2pol(X,Y);
%      idx = r<=1;
%      z = nan(size(X));
%      n = [0 1 1 2 2 2 3 3 3 3];
%      m = [0 -1 1 -2 0 2 -3 -1 1 3];
%      Nplot = [4 10 12 16 18 20 22 24 26 28];
%      y = zernfun(n,m,r(idx),theta(idx));
%      figure('Units','normalized')
%      for k = 1:10
%          z(idx) = y(:,k);
%          subplot(4,7,Nplot(k))
%          pcolor(x,x,z), shading interp
%          set(gca,'XTick',[],'YTick',[])
%          axis square
%          title(['Z_{', num2str(n(k)) ,'}^{', num2str(m(k)) ,'}'])
%      end
%
%      See also ZERNPOL, ZERNFUN2.
```

```

% Paul Fricker 2/28/2012

% Check and prepare the inputs:
% -----
if ( ~any(size(n)==1) ) || ( ~any(size(m)==1) )
error('zernfun:NMvectors','N and M must be vectors.')
end

if length(n)~=length(m)
error('zernfun:NMlength','N and M must be the same length.')
end

n = n(:);
m = m(:);
if any(mod(n-m,2))
error('zernfun:NMmultiplesof2', ...
'All N and M must differ by multiples of 2 (including 0).')
end

if any(m>n)
error('zernfun:MlessthanN', ...
'Each M must be less than or equal to its corresponding N.')
end

if any( r>1 | r<0 )
error('zernfun:Rlessthan1','All R must be between 0 and 1.')
end

if ( ~any(size(r)==1) ) || ( ~any(size(theta)==1) )
error('zernfun:RTHvector','R and THETA must be vectors.')
end

r = r(:);
theta = theta(:);
length_r = length(r);
if length_r~=length(theta)
error('zernfun:RTHlength', ...
'The number of R- and THETA-values must be equal.')
end

% Check normalization:
% -----
if nargin==5 && ischar(nflag)
isnorm = strcmpi(nflag,'norm');
if ~isnorm
error('zernfun:normalization','Unrecognized normalization flag.')
end
else

```

```

isnorm = false;
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Compute the Zernike Polynomials
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Determine the required powers of r:
% -----
m_abs = abs(m);
rpowers = [];
for j = 1:length(n)
    rpowers = [rpowers m_abs(j):2:n(j)];
end
rpowers = unique(rpowers);

% Pre-compute the values of r raised to the required powers,
% and compile them in a matrix:
% -----
if rpowers(1)==0
    rpowern = arrayfun(@(p)r.^p,rpowers(2:end),'UniformOutput',false);
    rpowern = cat(2,rpowern{:});
    rpowern = [ones(length_r,1) rpowern];
else
    rpowern = arrayfun(@(p)r.^p,rpowers,'UniformOutput',false);
    rpowern = cat(2,rpowern{:});
end

% Compute the values of the polynomials:
% -----
z = zeros(length_r,length(n));
for j = 1:length(n)
    s = 0:(n(j)-m_abs(j))/2;
    pows = n(j):-2:m_abs(j);
    for k = length(s):-1:1
        p = (1-2*mod(s(k),2))* ...
            prod(2:(n(j)-s(k)))/ ...
            prod(2:s(k))/ ...
            prod(2:((n(j)-m_abs(j))/2-s(k)))/ ...
            prod(2:((n(j)+m_abs(j))/2-s(k)));
        idx = (pows(k)==rpowers);
        z(:,j) = z(:,j) + p*rpown(:,idx);
    end
end

if isnorm
    z(:,j) = z(:,j)*sqrt((1+(m(j)~=0))*(n(j)+1)/pi);
end
end
% END: Compute the Zernike Polynomials

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Compute the Zernike functions:
% -----
idx_pos = m>0;
idx_neg = m<0;

if any(idx_pos)
z(:,idx_pos) = z(:,idx_pos).*cos(theta*m_abs(idx_pos)');
end
if any(idx_neg)
z(:,idx_neg) = z(:,idx_neg).*sin(theta*m_abs(idx_neg)');
end

% EOF zernfun

```

## A.2 Código para representar a pirâmide dos polinômios de Zernike em $\mathbb{R}^3$

```

function justpyramidR3(nMax)

error(nargchk(1,1,nargin,'struct'));
x=-1:0.01:1;
y=-1:0.01:1;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
[THETA,R]=cart2pol(X,Y);
idx=(R<=1);
Z=nan(size(X));
figure;
colormap(jet);
for n=0:nMax
for l=-n:2:n
Z(idx)= zernfun(n,l,R(idx),THETA(idx));
subplot(nMax+1,2*nMax+1,2*nMax*n+nMax+n+1+1);
surf(X,Y,Z);
shading interp;
axis image;
title(['Z_{' int2str(n) '}^{' int2str(l) '}']);
end
end

```

## A.3 Código para representar um polinômio de Zernike em $\mathbb{R}^3$

```

%error(nargchk(1,1,nargin,'struct'));
x=-1:0.01:1;
y=-1:0.01:1;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
[THETA,R]=cart2pol(X,Y);

```

```

idx=(R<=1);
Z=nan(size(X));
figure;
colormap(jet);
Z(idx)= zernfun(2,-2,R(idx),THETA(idx));
%shading interp;
axis image;
%title(['Z_{ 2 }^{ -2 }']);
surf(X,Y,Z);
shading interp;
axis image;
colorbar
%plot3(X,Y,Z)

```

#### A.4 Código para representar a pirâmide dos polinômios de Zernike em $\mathbb{R}^2$

```

function justpyramidR2(nMax)

error(nargchk(1,1,nargin,'struct'));
x=-1:0.01:1;
y=-1:0.01:1;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
[THETA,R]=cart2pol(X,Y);
idx=(R<=1);
Z=nan(size(X));
figure;
colormap(jet);
for n=0:nMax
for l=-n:2:n
Z(idx)= zernfun(n,l,R(idx),THETA(idx));
subplot(nMax+1,2*nMax+1,2*nMax*n+nMax+n+l+1);
pcolor(X,Y,Z);
shading interp;
axis image;
title(['Z_{ int2str(n) }^{ int2str(l) }']);
end
end

```

#### A.5 Código para representar um polinômio de Zernike em $\mathbb{R}^2$

```

%error(nargchk(1,1,nargin,'struct'));
x=-1:0.01:1;
y=-1:0.01:1;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
[THETA,R]=cart2pol(X,Y);
idx=(R<=1);

```



```

Z=nan(size(X));
figure;
colormap(jet);
Z(idx)= zernfun(2,-2,R(idx),THETA(idx));
%shading interp;
axis image;
%title(['Z_{ 2 }^{ -2 }']);
pcolor(X,Y,Z);
shading interp;
axis image;
%plot3(X,Y,Z)

```

## A.6 Código para representar uma linha da pirâmide de polinômios de Zernike

```

function linha(n)

error(nargchk(1,1,nargin,'struct'));
x=-1:0.01:1;
y=-1:0.01:1;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
[THETA,R]=cart2pol(X,Y);
idx=(R<=1);
Z=nan(size(X));
figure;
colormap(jet);
cont=1;
for l=-n:2:n
Z(idx)= zernfun(n,l,R(idx),THETA(idx));
subplot(1,n+1,cont);
pcolor(X,Y,Z);
shading interp;
axis image;
title(['Z_{ ' int2str(n) ' }^{ ' int2str(l) ' }']);
cont=cont+1;
end

```



# Bibliografia

- [1] Y.S. Abu-Mostafa, D. Psaltis. Recognitive aspects of moment invariants. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, **6**:698-706, 1984.
- [2] R.A. Adams, J.J.F. Fournier. *Sobolev Spaces*. Academic Press, Boston, USA, 1975.
- [3] American National Standards Institute. *Methods for reporting the optical aberrations of eyes*. American National Standards for Ophthalmics, ANSI Z80.28, 2004.
- [4] M. Born, E. Wolf. *Principles of Optics*. Pergamon Press, Oxford, UK, 1975.
- [5] F. Bowman. *Introduction to Bessel Functions*. Dover Publications Inc, NY, USA, 1958.
- [6] G.E.P. Box, J.S. Hunter. Multi-factor experimental designs for exploring response surfaces. *Ann. Math. Statist.*, **28**:195-241, 1957.
- [7] J.J.M. Braat, P. Dirksen, A.J.E.M. Janssen. Assessment of an extended Nijboer-Zernike approach for the computation of optical point-spread functions. *J Opt Soc Am A.*, **19**:858-870, 2002.
- [8] C.E. Campbell. Matrix method to find a new set of Zernike coefficients from an original set when the aperture radius is changed. *J. Opt. Soc. Am. A.*, **20**:209-217, 2003.
- [9] H.F. Davis. *Fourier Series and Orthogonal Functions*. Dover Publications Inc., NY, USA, 1989.
- [10] H. Dette, V.B. Melas, A. Pepelyshev. Optimal designs for statistical analysis with Zernike polynomials. *Statistics*, **41**(6):453-470, 2007.
- [11] J. Espinosa, D. Mas, J. Pérez, C. Illueca. Optical surface reconstruction technique through combination of zonal and modal fitting. *J. Biomed. Opt.*, **15**:026022, 2010.
- [12] R.H. Farrell, J. Kiefer, A. Walbran. Optimum multivariate designs. *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, **1**:113-138, 1967.
- [13] V.V. Fedorov. Design of Experiments for Linear Optimality Criteria. *Theory Probab. Appl.*, **16**(1):189-195, 1969.
- [14] V.V. Fedorov. *Design of Optimal Experiments*. Academic Press, NY, USA, 1972.
- [15] N.I. Fisher. *Statistical Analysis of Circular Data*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1993.
- [16] P. Fricker. *zernfun* ([https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/7687-zernike-polynomials?s\\_tid=FX\\_rc2\\_behav](https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/7687-zernike-polynomials?s_tid=FX_rc2_behav)). MATLAB Central File Exchange, 2012. Access: 10/12/2018.

- [17] Z. Galil, J. Kiefer. Comparison of rotatable designs for regression on balls, I (quadratic). *J. Statist. Plann. Inf.*, **1**:27-40, 1977.
- [18] A.M. Gwaiz. *Sturm-Liouville Theory and its Applications*. Springer-Verlag, London, UK, 2007.
- [19] D.R. Iskander. Modeling videokeratoscopic height data with spherical harmonics. *Optom Vis Sci*, **86**:542-547, 2009.
- [20] H. Hse, A.R. Newton. Sketched symbol recognition using Zernike moments. *IEEE Pattern Recognition, 17th International Congress*, **1**:367-370, 2004.
- [21] M. Jankov, M.Mrochen, P. Schor, W. Chamon, T. Seiler. Wavefronts and the limits of human vision: Part 1 - Fundamentals. *Arquivos Brasileiros de Oftalmologia*, **65(6)**:679-684, 2002.
- [22] S. Karlin, W. Studden. Optimal Experimental Designs. *The Annals of Mathematical Statistics*, **37(4)**:783-815, 1966.
- [23] H.T. Kasprzak, D.R. Iskander. Approximating ocular surfaces by generalised conic curves. *Ophthal. Physiol. Opt.*, **26**:602-609, 2006.
- [24] J. Kiefer, J. Wolfowitz. The Equivalence of Two Extremum Problems. *Canadian Journal of Mathematics*, **12**:363-366, 1960.
- [25] J. Kiefer. Optimum designs in regression problems, II. *Ann. Math. Statist.*, **32**:298-325, 1961.
- [26] J. Kiefer. Optimum experimental designs V, with applications to systematic and rotatable designs. *Proc. 4th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Prob.*, **1**:381-405, 1961.
- [27] J. Kiefer. General equivalence theory for optimum designs (approximate theory). *Ann. Statist.*, **2**:849-879, 1974.
- [28] W.J. Kim, J.S. Kim. Robust rotation angle estimator. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, **21**:768-773, 1999.
- [29] S. Lang. *Linear Algebra*. Springer Science and Business MediaSpringer, NY, USA, 1987.
- [30] S. Liao, M. Pawlak. On image analysis by moments. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell*, **18**:254-266, 1996.
- [31] S.X. Liao, M. Pawlak. On the accuracy of Zernike moments for image analysis. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell*, **20**:1358-1364, 1998.
- [32] V. Mahajan. *Aberration Theory Made Simple*. SPIE Optical Engineering Press: Bellingham, WA, 1991.
- [33] V. Mahajan. *Optical Imaging and Aberrations Part I*. SPIE Optical Engineering Press: Bellingham, WA, 1998.
- [34] A. Martínez-Finkelstein, D. Ramoz-Lopez, G.M. Castro-Luna, Alió JL. *An adaptive algorithm for the cornea modeling from keratometric data*. arXiv:1009:1244v1 [physics.medph], 2010.

- [35] R. Navarro, R. Rivera, J. Aporta. Representation of wavefronts in free-form transmission pupils with complex Zernike polynomials. *J. Optom.*, **4**:41-48, 2011.
- [36] B.R.A. Nijboer. *The diffraction theory of aberrations*. PhD thesis, University of Groningen, Netherlands, 1942.
- [37] R. Noll. Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *J. Opt. Soc. Am.*, **66**:207, 1976.
- [38] M. Pawlak, S.X. Liao. On the recovery of a function on a circular domain. *IEEE Trans. Inform. Theory*, **48**:2736-2753, 2002.
- [39] F. Pukelsheim. *Optimal Design of Experiments*. Wiley, NY, USA, 1993.
- [40] P. Queiroz. *Aplicação da equação de Bessel fracionária na descrição da topografia da córnea*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Aveiro, Portugal, 2016.
- [41] D. Ramos-López, M.A. Sánchez-Granero, M. Fernández-Martínez, A. Martínez-Finkelstein. Optimal sampling patterns for Zernike polynomials. *Applied Mathematics and Computation*, **274**:247-257, 2016.
- [42] M. Schneider, D.R. Iskander, M.J. Collins. Modeling of corneal surfaces with rational functions for high speed videokeratoscopy data compression. *IEEE Trans Biomedical Eng* **56**:493-499, 2009.
- [43] J. Schwiegerling. *Description of Zernike Polynomials*. <https://wp.optics.arizona.edu/visualopticslab/wp-content/uploads/sites/52/2016/08/Zernike-Notes-15Jan2016.pdf>
- [44] S.D. Silvey. *Optimal Design*. Chapman and Hall, London, UK, 1980.
- [45] G. Szegő. *Orthogonal polynomials*. Am. Math. Soc. Colloqu. Publ. 23. Providence, RI, USA, 1975.
- [46] N. Trappe, J.A. Murphy, S. Withington. The gaussian beam mode analysis of classical phase aberrations in diffractionlimited optical systems. *Eur. J. Phys.*, **24**:403, 2003.
- [47] J.P. Trevino , J.E. Gómez-Correa , D.R. Iskander , S. Chávez-Cerda. Zernike vs. Bessel circular functions in visual optics. *Ophthalm. Physiol. Opt.*, **33**:394-402, 2013.
- [48] J.C. Wyant, K. Creath. Basic wavefront aberration theory for optical metrology. *Applied Optics and Optical Engineering*, **11**:2-58, 1993.
- [49] J. Ye, L. Chen, Li, Y. Xinhua, G. Qun, Zhishan. *Review of optical freeform surface representation technique and its application*. Optical Engineering, 2017.