Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2007

Ana Rute Cerveira Esteves

Teoria de Fredholm em Espaços de Hilbert

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2007

Ana Rute Cerveira Esteves

Teoria de Fredholm em Espaços de Hilbert

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática, realizada sob a orientação científica do Professor Doutor Luís Filipe Pinheiro de Castro, Professor Associado com Agregação do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

o júri

presidente — Doutor Vasile Staicu
Professor Catedrático da Universidade de Aveiro

vogais — Doutor Luís Filipe Pinheiro de Castro
Professor Associado com Agregação da Universidade de Aveiro

Doutora Ana Isabel Baptista Moura Santos
Professora Auxiliar do Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa

agradecimentos

Ao Professor Doutor Luís Filipe Pinheiro de Castro, o meu reconhecimento e respeito pela sabedoria, exigência e disponibilidade. Quero também agradecer-lhe a paciência com que encarou as minhas dúvidas e hesitações, bem como o rigor dos seus comentários, os quais foram fundamentais ao longo de todo o processo de realização deste trabalho.
Aos meus pais e ao meu irmão pelo apoio incondicional. Finalmente uma palavra de apreço dirigida em especial a todos os meus amigos, a quem roubei tempo para que este sonho se concretizasse.

palavras-chave

Análise Funcional, Teoria de Operadores, Operadores de Fredholm, Teoria Espectral.

resumo

No âmbito da Análise Funcional, este trabalho incide no estudo da Teoria de Fredholm de operadores que actuam entre espaços de Hilbert. Adicionalmente são introduzidos, para além da definição de operador Fredholm, alguns outros tipos de operadores (como por exemplo operadores compactos, adjuntos e auto-adjuntos). São consideradas várias proposições que relacionam estes operadores assim como propriedades gerais para cada tipo específico de operador. Neste enquadramento teórico, as proposições a que nos referimos fornecem-nos resultados, todos eles de igual importância, dos quais damos como exemplo: se T é um operador de Fredholm e K é um operador compacto então T+K é um operador de Fredholm e os seus índices de Fredholm coincidem. Neste trabalho é também referida uma das principais conclusões da Teoria de Fredholm, no que diz respeito às equações integrais de segundo grau, quando se mostra que se K é um operador compacto então I-K é um operador de Fredholm com índice de Fredholm nulo. A teoria espectral é também focada neste trabalho uma vez que esta teoria está relacionada com o inverso de certos operadores, as suas propriedades gerais e as suas relações com os operadores originais.

keywords

Functional Analysis, Theory of Operators, Fredholm Operators, Spectral Theory

abstract

In the area of Functional Analysis, this work deals with the Fredholm theory of operators that act on Hilbert spaces. In addition, besides the definition of Fredholm operator, there are some other operators defined in this work (for instance, compact, adjoint and self-adjoint operators). Several propositions which connect these operators are considered as well as general properties of each kind of operators. In this theoretical framework, the referred propositions give us several results, all of the same degree of importance, such as: if T is a Fredholm operator and K is a compact operator, then T+K is a Fredholm operator and their Fredholm indices coincide. This work also shows one of the main Fredholm theory conclusions, concerning the second-kind integral equations, when it is demonstrated that if K is a compact operator then I-K is a Fredholm operator with zero Fredholm index. The spectral theory is also focused in this work since this theory is concerned with certain inverse operators, their general properties, and their relations to the initial operators.

Conteúdo

0.0 Introdução . . . 3
0.1 Notações . . . 7
0.2 Noções Básicas . . . 7

1 Espaços de Banach e Espaços de Hilbert **9**
1.1 Espaços de Banach . . . 9
1.1.1 Álgebra de Banach . . . 10
1.2 Espaços de Hilbert . . . 10

2 Operadores de Fredholm em Espaços de Hilbert **13**
2.1 Operadores em Espaços de Hilbert . . . 13
2.1.1 Operadores Limitados em Espaços de Hilbert . . . 13
2.1.2 Operadores Compactos em Espaços de Hilbert . . . 19
2.1.3 Operadores Adjuntos e Auto-Adjuntos em Espaços de Hilbert . . . 21
2.2 Operadores de Fredholm em Espaços de Hilbert . . . 32

3 O Espectro de Operadores em Espaços de Hilbert **45**
3.1 Definições Iniciais . . . 45
3.2 Resolventes e Representações em Séries . . . 46
3.3 Propriedades Espectrais . . . 48

4 Teoria Espectral sobre Operadores Auto-Adjuntos em Espaços de Hilbert **53**
4.1 Operadores Auto-Adjuntos e Valores Próprios . . . 53
4.2 Caracterização do Resolvente para Operadores Auto-Adjuntos . . . 54
4.3 Caracterização do Espectro para Operadores Auto-Adjuntos . . . 56

5 Conclusão **59**

Introdução

No âmbito da Análise Funcional e Teoria de Operadores, este trabalho incide principalmente no estudo da Teoria de Fredholm de operadores actuando entre espaços de Hilbert.

O trabalho será iniciado com uma nota introdutória, onde se encontrarão notações e noções básicas essenciais à compreensão dos conteúdos apresentados nos capítulos seguintes.

No que se refere ao trabalho propriamente dito, ele será iniciado no capítulo um, com a definição de espaço de Hilbert e espaço de Banach, sendo o espaço de Hilbert o espaço que permanece no desenrolar do trabalho. Num espaço de Hilbert, pela própria definição deste, a noção central é a de produto interno. A partir do produto interno obtemos a norma e o conceito de ortogonalidade entre vectores. Os espaços de Hilbert são uma classe especial de espaços normados mas, historicamente, os espaços de Hilbert surgiram primeiro. A teoria destes espaços foi iniciada pelo matemático alemão David Hilbert por volta de 1912 quando este trabalhava com equações integrais.

O conceito de operador é muito comum e útil em todos os domínios das ciências exactas. Os operadores são usados há já muitos anos, sem que, no entanto, muitas das vezes se tenha a noção exacta do seu conceito matemático. De forma bastante ampla (e sem, por enquanto, termos preocupações em sermos exactos) podemos intuitivamente dizer que um operador é algo que opera sobre o que encontra à sua frente e que, de acordo com certas regras, transforma tal objecto em algo da mesma classe ou classe diferente. Em determinados contextos matemáticos, uma função linear entre espaços vectoriais que preserva as operações de adição vectorial e multiplicação escalar pode por exemplo ser vista como um caso particular de um operador.

Em Análise Funcional, como é bem sabido, existem estruturas mais gerais do que os espaços vectoriais tais como os espaços métricos e os espaços normados e nas quais se pode trabalhar com os referidos operadores. De especial interesse são os operadores que “preservam” as duas operações algébricas de espaços vectorias, designados de operadores lineares, que passamos a definir. Tendo em conta que $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ são espaços de Hilbert, um operador linear $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ é uma aplicação linear definida num domínio $(D(T))$ que é um subespaço de $\mathcal{H}_1$ e que possui a propriedade de linearidade. Por outras palavras, T é um operador linear se:

i) $D(T)$ é um espaço vectorial e $Im(T) \subset \mathcal{H}_2$;

ii) para quaisquer $x, y \in D(T)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$.

É ainda importante referir que a igualdade anterior expressa o facto do operador linear ser um homomorfismo de um espaço vectorial "dentro" de um outro espaço vectorial. Isto é, T "preserva" as duas operações do espaço vectorial. Assim os espaços vectoriais são importantes na Análise Funcional, uma vez que os operadores lineares se encontram definidos nesses mesmos espaços. Dentro dos operadores lineares, os invertíveis desempenham um papel fundamental dada a sua importância na obtenção de soluções únicas para correspondentes equações. Relembre-se que o operador $T : D(T) \longrightarrow Im(T)$ é injectivo se a diferentes elementos do domínio corresponderem diferentes imagens. Desta forma, $T^{-1} : Im(T) \longrightarrow D(T)$ existe e denomina-se por inverso de T. Dito de outra forma, o inverso de um operador linear existe se, e apenas se, o núcleo do operador tiver dimensão nula. Muitas outras propriedades dos operadores lineares são pertinentes de serem examinadas, nomeadamente os operadores limitados, compactos, adjuntos e auto-adjuntos. Estes operadores serão abordados no segundo capítulo do presente trabalho.

As primeiras noções de equação surgem logo nos primeiros anos do ensino básico mas é no ensino secundário que se aprofundam as equações algébricas do primeiro, segundo, terceiro e quarto graus. Para estas equações, facilmente se encontram os valores das suas incógnitas. Mas nem sempre é assim, como acontece com a equação $Tf(x) = g(x)$, onde T é um operador. Este tipo de equação denomina-se equação funcional (dada a circunstância da sua eventual solução ser uma função e transformar essa mesma função numa nova função g). Para resolver tal equação é necessário verificar a invertibilidade do respectivo operador.

De salientar neste enquadramento que um dos objectivos do presente trabalho tem que ver com a perspectivação de ligações entre conteúdos do Ensino Superior e Ensinos Básico e Secundário.

Adicionalmente ao acima referido, o conceito de matriz surge vinculado às relações lineares tais como transformações lineares, sistema de equações lineares e sistema de equações diferenciais. Se considerarmos uma matriz real $m \times n$, $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,n, j=1,\dots,m}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

podemos definir um correspondente operador, denominado por operador matricial, do seguinte modo:

$$\begin{array}{rcccc} A & : & \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & & x & \longmapsto & Ax \end{array}$$

Uma vez que a multiplicação por uma matriz é uma operação linear, podemos dizer que o operador definido anteriormente é um operador linear.

Num panorama mais geral, há cerca de 100 anos atrás, Ivar Fredholm fez um estudo sobre equações integrais do tipo $u(y) - \int K(y,x)u(x)dx = f(y)$. Um exemplo simples destas é a seguinte equação integral $u(y) - \int_0^1 u(x)dx = f(y)$. Para resolver esta equação convém relembrar que $\int_0^1 u(x)dx$, quando considerado como uma função de y, é constante. Assim, no caso homogéneo ($f \equiv 0$) as únicas soluções possíveis para $u(y)$ são as funções constantes. Por outro lado, para uma qualquer função f, as soluções existem se e apenas se for satisfeita a seguinte condição $\int_0^1 f(y)dy = 0$. Consequentemente, a dimensão do núcleo e do co-núcleo neste exemplo é igual a 1. Para este tipo de equações, Fredholm mostrou que as dimensões quer do núcleo quer do co-núcleo são sempre finitas e iguais.

O trabalho realizado por Fredholm espelha a criatividade de David Hilbert que fez um estudo pormenorizado de operadores integrais da forma $f(y) = \int K(y,x)u(x)dx$.

Um operador de Fredholm entre espaços de Hilbert é um operador limitado, T, para o qual o núcleo e o co-núcleo possuem dimensão finita. No seu trabalho com equações integrais Fredholm mostrou que se K é um operador integral então $I + K$ é um operador de Fredholm. Para os operadores que Fredholm considerou, as dimensões do núcleo e do co-núcleo têm que ser iguais, no entanto, no geral, tal não tem que se verificar.

O conceito de espectro, na Análise Funcional é uma generalização do conceito de valores próprios, mais frequentemente estudado pela Álgebra Linear em espaços de dimensão finita. É um conceito inerente ao estudo de matrizes numéricas. Podemos definir espectro de um operador como o conjunto dos números complexos λ tais que o operador $\lambda I - T$ não é invertível (onde I é o operador identidade).

A teoria espectral é um dos principais ramos da Análise Funcional, tornando-se bastante importante para a compreensão dos operadores. Esta teoria consiste essencialmente na descoberta de quando é possível ter-se o inverso de certos operadores, nas suas propriedades e na relação com os operadores originais. Como tal, no último capítulo do presente trabalho será feita uma análise relativa à existência de valores próprios, tendo como base apenas os operadores auto-adjuntos limitados.

Por fim, salienta-se que para a resolução da presente dissertação foram consultados predominantemente as obras [1]-[3], [5], [7], [9]-[11].

Notações e Noções Básicas

0.1 Notações

- O domínio de um operador T será denotado por $D(T)$.
- A imagem será denotada por $Im(T)$.
- $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ denotará o conjunto dos operadores limitados actuando entre os espaços de Hilbert $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$.
- $\mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ denotará o conjunto dos operadores compactos actuando entre os espaços de Hilbert $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$.
- $\mathcal{G}[\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)]$ denotará o conjunto dos operadores limitados e invertíveis actuando entre os espaços de Hilbert $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$.
- O conjunto dos operadores de Fredholm será denotado por $\mathcal{F}$.
- O conjunto dos operadores de semi-Fredholm será denotado por $\mathcal{SF}$.
- $ind(T)$ denotará o índice de Fredholm do operador T.
- O espectro de um operador T será denotado por $\sigma(T)$.
- $R_\lambda(T)$ denotará o operador resolvente de T

0.2 Noções Básicas

Definição 0.1 *Um espaço vectorial E sobre um corpo $\mathbb{K}$ é um conjunto de elementos chamados vectores munidos de uma operação "$+$" : $E \times E \longrightarrow E$ denominada adição e também de uma multiplicação por escalares "." : $\mathbb{K} \times E \longrightarrow E$ que satisfazem as seguintes propriedades:*

- *A adição é comutativa: para quaisquer* $u, v \in E$ *tem-se* $u + v = v + u$*;*

- *A adição é associativa: para quaisquer* $u, v, w \in E$ *tem-se*

$$u + (v + w) = (u + v) + w;$$

- *Existe um* $e \in E$ *tal que* $e + u = u$*, para todo o* $u \in E$ *(onde* e *é designado por elemento neutro);*

- *Para cada* $u \in E$*, existe* $u' \in E$ *tal que* $u + u' = e$*, sendo* u' *designado por simétrico de* u*;*

- *O produto por escalares é associativo. Para quaisquer* α*,* $\beta \in \mathbb{K}$ *e* $u \in E$*, tem-se:*

$$\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u;$$

- $1 \cdot u = u$*, para todo o* $u \in E$*, onde 1 é designado por unidade de* $\mathbb{K}$*;*

- *O produto por escalares é distributivo em relação à adição de escalares. Para quaisquer* α*,* $\beta \in \mathbb{K}$ *e* $u \in E$*, tem-se* $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$*.*

Definição 0.2 *Se* X *e* Y *são espaços vectoriais e* $T : X \longrightarrow Y$ *é uma aplicação linear definimos:*

- $Ker(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$

- $Im(T) = \{y \in Y : y = Tx\}$

onde $Ker(T)$ *é denominado núcleo de* T *e* $Im(T)$ *a imagem de* T*.*

Capítulo 1

Espaços de Banach e Espaços de Hilbert

1.1 Espaços de Banach

Seja E um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Uma norma sobre E é uma função $\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

(i) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, para todo o $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$;

(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para quaisquer $x, y \in E$;

(iii) $\|x\| = 0$ implica $x = 0$.

Definição 1.1 *A um espaço vectorial, E, munido de uma norma, $\|\cdot\|$, chamamos espaço normado, $(E, \|\cdot\|)$.*

Definição 1.2 *Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço normado e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy. O espaço $(E, \|\cdot\|)$ diz-se completo se toda a sucessão de Cauchy em E converge para um elemento em E (segundo a norma $\|\cdot\|$).*

Definição 1.3 *Um espaço de Banach é um espaço normado completo.*

Exemplo 1.4 *Seja $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e $L^p[a, b]$, com $[a, b] \subset \mathbb{R}$, um espaço vectorial munido da norma $\|\cdot\|_p$, onde*

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad para \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|f\|_p = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \quad , \qquad para \quad p = \infty.$$

Note-se que as aplicações $\|\cdot\|_p$, são de facto normas. A única dificuldade relevante em estabelecer este facto consiste em provar a desigualdade triangular que segue da desigualdade de Minkowski [6]. Adicionalmente, o espaço $L^p[a,b]$, com esta norma é um espaço de Banach.

1.1.1 Álgebra de Banach

Definição 1.5 *Uma álgebra de Banach $\mathcal{A}$ é um espaço de Banach (portanto um espaço vectorial normado e completo em relação à sua norma) munido de um produto associativo que satisfaz a condição $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$, para quaisquer $x, y \in \mathcal{A}$.*

1.2 Espaços de Hilbert

Seja $\mathcal{H}$ um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{C}$. Um produto interno em $\mathcal{H}$ é uma função $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definida em $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$, que toma valores em $\mathbb{C}$, e que satisfaz as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y, z \in \mathcal{H}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$:

- $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ e $\langle x, x\rangle = 0$ se e só se $x = 0$;
- $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$;
- $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$;
- $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

Podemos desta forma dizer que o produto interno é uma função sesquilinear. Um espaço vectorial munido de um produto interno diz-se um espaço pré-hilbertiano. Temos ainda, como consequência das propriedades anteriores, que num espaço pré-Hilbertiano, para quaisquer $x, y, z \in \mathcal{H}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle \quad \text{e} \quad \langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle.$$

Proposição 1.6 *[6][Desigualdade de Cauchy-Schwarz] Seja $\mathcal{H}$ um espaço pré-Hilbertiano. Se $x, y \in \mathcal{H}$, então:*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Proposição 1.7 *[6] Seja $\mathcal{H}$ um espaço pré-Hilbertiano. A função*

$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\| : & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & \|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

define uma norma em $\mathcal{H}$.

Definição 1.8 *Se o espaço pré-hilbertiano* $\mathcal{H}$ *com a métrica dada por esta norma (acabada de introduzir) é completo, dizemos que* $\mathcal{H}$ *é um espaço de Hilbert. Portanto, um espaço de Hilbert é um espaço de Banach cuja norma provém de um produto interno.*

Exemplo 1.9 *Seja* $p = 2$ *e* $L^p[a, b] = L^2[a, b]$ *o espaço vectorial das funções definidas em* $[a, b]$ *munido da norma* $\|f\|_2$*, onde*

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Através da Proposição 1.7, ainda podemos dizer que

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

Assim e recordando o exemplo de um espaço de Banach com $p = 2$*, conclui-se que* $L^2[a, b]$ *é um espaço de Hilbert.*

Capítulo 2

Operadores de Fredholm em Espaços de Hilbert

2.1 Operadores em Espaços de Hilbert

Apenas nos iremos referir a operadores lineares. Como tal, em geral omitiremos o qualificativo "linear" e falaremos apenas em operadores. Operadores lineares são também por vezes denominados "transformações lineares" ou "aplicações lineares".

2.1.1 Operadores Limitados em Espaços de Hilbert

Definição 2.1 *Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert. Um operador $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ diz-se limitado se existir uma constante c tal que*

$$\|Tx\| \leq c\|x\|, \quad \textit{qualquer} \quad \textit{que} \quad \textit{seja} \quad x \in \mathcal{H}_1.$$

O conjunto dos operadores limitados de $\mathcal{H}_1$ em $\mathcal{H}_2$ é denotado por $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Em particular, no caso em que $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, o conjunto dos operadores limitados é denotado por

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}) := \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}).$$

Dado um operador linear limitado $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$, definimos

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \quad \forall x \in \mathcal{H}_1.$$

Note-se que, uma vez que T é limitado, a existência do supremo é garantida. Tem-se assim, para qualquer operador limitado $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$,

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\| \quad \forall x \in \mathcal{H}_1.$$

Proposição 2.2 *Sejam $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert e $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ um operador limitado. Então*

(i) $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \quad \forall x \in \mathcal{H}_1$

(ii) $\|T\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle Tx, y\rangle| \quad \forall x \in \mathcal{H}_1, \quad y \in \mathcal{H}_2$

Demonstração. Comecemos por mostrar (i). Dado que por hipótese T é um operador limitado, qualquer que seja $x \in \mathcal{H}_1$,

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0} \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Logo

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \quad \forall x \in \mathcal{H}_1$$

como pretendíamos mostrar.

Mostremos agora (ii).

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz sabemos que para quaisquer $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$

$$|\langle Tx, y\rangle| \leq \|Tx\|\|y\| \leq \|T\|\|x\|\|y\|.$$

Logo

$$\sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle Tx, y\rangle| \leq \|T\|.$$

Por outro lado, para qualquer $x \in \mathcal{H}_1$ tal que $Tx \neq 0$, tem-se que

$$\|Tx\| = \frac{\langle Tx, Tx\rangle}{\|Tx\|} = \langle Tx, \frac{Tx}{\|Tx\|}\rangle.$$

Considerando $y = \frac{Tx}{\|Tx\|}$, vem que

$$\|Tx\| = \langle Tx, y\rangle \leq \sup_{\|y\|=1} |\langle Tx, y\rangle|$$

logo

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \leq \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle Tx, y\rangle|$$

e portanto

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle Tx, y\rangle|.$$

■

Definição 2.3 *Seja $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Um operador diz-se invertível se existir um operador $T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ tal que*

$$T^{-1}T = I_{\mathcal{H}_1}$$

$$TT^{-1} = I_{\mathcal{H}_2}$$

Vai-se denotar por $\mathcal{G}[\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)]$ o conjunto dos operadores invertíveis $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$

Observação 2.4 *Note-se que se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ é invertível então o inverso é único.*

Sejam U e $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ dois inversos de T. De facto $UT = I_{\mathcal{H}_1}$ e $TV = I_{\mathcal{H}_2}$ implica:

$$U = UI_{\mathcal{H}_2} = U(TV) = (UT)V = I_{\mathcal{H}_1}V = V.$$

Definição 2.5 *Sejam X um espaço normado, com norma $\|\cdot\|$ e $A \subset X$ um seu subconjunto. Diz-se que um ponto $x \in X$ é aderente ao conjunto A se existir uma sucessão $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A com x_n a convergir para x, segundo a norma $\|\cdot\|$. Chama-se fecho do conjunto A ao conjunto dos pontos de X que são aderentes a A, conjunto este que se denota por $\overline{A}$. O conjunto A diz-se denso em X se se tem $\overline{A} = X$, isto é, se todos os pontos de X são aderentes a A.*

Corolário 2.6 *Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Então*

(i) $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \Rightarrow Tx_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Tx$

(ii) $Ker(T)$ *é fechado.*

Demonstração. Comecemos por mostrar (i).

Sabemos que

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq \|T\|\|x_n - x\|.$$

Como por hipótese $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, tem-se que

$$\|Tx_n - Tx\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

e consequentemente que $Tx_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Tx$.

Provemos agora (ii).

Seja $x \in \overline{Ker(T)}$. Então por definição de fecho, existe uma sucessão $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de termos em $Ker(T)$ tal que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Logo $Tx_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Tx$. Como $Tx_n = 0$, pois $x_n \in Ker(T)$, então para qualquer $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $Tx = 0$, ou seja, $x \in Ker(T)$. ■

Definição 2.7 *Dado um espaço vectorial X e $x, y \in X$, designa-se por segmento de extremos x, y, o conjunto*

$$\{z \in X : z = tx + (1-t)y, \quad t \in [0,1]\}.$$

Um subconjunto $A \subset X$ diz-se convexo se, para quaisquer $x, y \in A$, o segmento de extremos x, y está contido em A.

Proposição 2.8 *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $A \subset \mathcal{H}$ um subconjunto fechado, convexo e não vazio. Então, para qualquer $x \in \mathcal{H}$, existe uma e uma só aproximação óptima de x em A, isto é, existe um único elemento $a_0 \in A$ tal que*

$$\|x - a_0\| = inf\{\|x - a\| : a \in A\} := d(x, A)$$

Demonstração. Por translação, podemos supor $x = 0$ (caso contrário considera-se $A - \{x\}$ em vez de A). Seja

$$d = d(0, A) := inf\{\|a\| : a \in A\}.$$

Sabemos, por definição de ínfimo, que existe uma sucessão $\{a_n\}$ em A tal que

$$\|a_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} d.$$

Mostremos que a sucessão $\{a_n\}$ é uma sucessão de Cauchy. Temos, aplicando a regra do paralelogramo, que

$$\left\|\frac{a_n - a_m}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{a_n + a_m}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\|a_n\|^2 + \frac{1}{2}\|a_m\|^2.$$

Como, por hipótese, A é convexo

$$\frac{a_n + a_m}{2} \in A$$

logo

$$\left\|\frac{a_n + a_m}{2}\right\| \geq d$$

e portanto, para $m, n \to \infty$,

$$\left\|\frac{a_n - a_m}{2}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\|a_n\|^2 + \frac{1}{2}\|a_m\|^2 - d^2 \to 0$$

o que nos permite concluir que $\|a_n - a_m\| \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ou seja, que $\{a_n\}$ é uma sucessão de Cauchy. Novamente por hipótese, sabemos que A é fechado logo $a_n \to a_0 \in A$. Como

$a_0 \in A$, $\|a_0\| \geq d$. Além disso, quando $n \to m$,

$$\|a_0\| \leq \|a_0 - a_n\| + \|a_n\| \to d.$$

Logo $\|a_0\| = d$ o que prova a existência de uma aproximação óptima de x em A.

Mostremos agora que essa aproximação óptima é única. Suponhamos que existiam a_0 e $a_0^{'}$ em A, tais que $\|a_0\| = \|a_0^{'}\| = d$. Aplicando a regra do paralelogramo temos que

$$\left\|\frac{a_0 - a_0^{'}}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{a_0 + a_0^{'}}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\|a_0\|^2 + \frac{1}{2}\|a_0^{'}\|^2 = d^2.$$

Note-se que se $a_0 \neq a_0^{'}$, então teríamos que

$$\left\|\frac{a_0 + a_0^{'}}{2}\right\|^2 < d^2$$

o que seria um absurdo uma vez que (como por hipótese A é convexo) $\frac{a_0+a_0^{'}}{2} \in A$. ∎

Definição 2.9 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Os elementos $x, y \in \mathcal{H}$ dizem-se ortogonais, $x \perp y$, se $\langle x, y\rangle = 0$.*

Proposição 2.10 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, $x \in \mathcal{H}$ e A um subconjunto de $\mathcal{H}$. Então, são equivalentes as seguintes proposições:*

(i) a_0 é a aproximação óptima de x em A, isto é, $a_0 \in A$ e $\|x - a_0\| = d(x, A)$;

(ii) $a_0 \in A$ e $(x - a_0) \perp A$

Demonstração. Comecemos por mostrar que se $a_0 \in A$ é uma aproximação óptima de x em A, então $a_0 \in A$ e $(x - a_0) \perp A$.

Seja $a \in A$, com $\|a\| = 1$. Sendo A um subespaço vectorial considere-se ainda $a_1 \in A$ definido por $a_1 = a_0 + \lambda a, \quad \lambda \in \mathbb{K}$. Por hipótese a_0 é a aproximação óptima de x em A

então $\|x-a_0\|^2 \leq \|x-a_1\|^2$. Como

$$\begin{aligned}
\|x-a_1\|^2 &= \langle x-a_1, x-a_1\rangle \\
&= \langle x-a_0-\lambda a, x-a_0-\lambda a\rangle \\
&= \langle x,x\rangle - \langle x,a_0\rangle - \langle x,\lambda a\rangle - \langle a_0,x\rangle + \langle a_0,a_0\rangle + \\
&\quad \langle a_0,\lambda a\rangle - \langle \lambda a,x\rangle + \langle \lambda a,a_0\rangle + \langle \lambda a,\lambda a\rangle \\
&= \|x-a_0\|^2 - \langle x,\lambda a\rangle + \langle a_0,\lambda a\rangle - \langle \lambda a,x\rangle \\
&\quad +\langle \lambda a,a_0\rangle + \|\lambda a\|^2 \\
&= \|x-a_0\|^2 - (\langle x,\lambda a\rangle + \overline{\langle x,\lambda a\rangle}) + \langle a_0,\lambda a\rangle \\
&\quad +\overline{\langle a_0,\lambda a\rangle} + \|\lambda a\|^2 \\
&= \|x-a_0\|^2 - 2Re\langle x,\lambda a\rangle + 2Re\langle a_0,\lambda a\rangle + |\lambda|^2\|a\|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|x-a_0\|^2 - 2Re(\langle x,\lambda a\rangle - \langle a_0,\lambda a\rangle) + |\lambda|^2 \\
&= \|x-a_0\|^2 - 2Re(\bar{\lambda}\langle x-a_0,a\rangle) + |\lambda|^2,
\end{aligned}$$

temos então que

$$\|x-a_0\|^2 \leq \|x-a_0\|^2 - 2Re(\bar{\lambda}\langle x-a_0,a\rangle) + |\lambda|^2.$$

Considerando agora $\lambda = \langle x-a_0,a\rangle$ vem que

$$\|x-a_0\|^2 \leq \|x-a_0\|^2 - |\langle x-a_0,a\rangle|^2$$

e portanto $|\langle x-a_0,a\rangle| = 0$ isto é $(x-a_0)\perp a$.

Mostremos agora que se $a_0 \in A$ e $(x-a_0)\perp A$, então a_0 é a aproximação óptima de x em A, isto é

$$\|x-a_0\| = d(x,A).$$

Tendo em conta a hipótese tem-se que, para qualquer $a \in A$, $(a_0-a)\in A$ e

$$(x-a_0)\perp(a_0-a).$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras,

$$\|x-a\|^2 = \|x-a_0\|^2 + \|a_0-a\|^2,$$

logo $\|x-a_0\|^2 \leq \|x-a\|^2$, ou seja $\|x-a_0\| = d(x,A)$. ■

Definição 2.11 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e A um seu subconjunto não vazio. O conjunto $A^{\perp}$, formado pelos elementos de $\mathcal{H}$ que são ortogonais a todos os elementos de A, isto é*

$$A^{\perp} = \{x \in \mathcal{H} : x \perp A\}$$

designa-se por ortogonal de A.

Proposição 2.12 *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $A \subset \mathcal{H}$ um subespaço fechado. Então*

$$\mathcal{H} = A \oplus A^{\perp},$$

onde $\oplus$ designa "soma directa".

Demonstração. Seja $x \in \mathcal{H}$. Sendo A um subespaço vectorial, é obviamente convexo. Temos também, por hipótese, que A é fechado logo pela Proposição 2.8, dado $x \in \mathcal{H}$ existe a aproximação óptima de x em A. Logo,

$$x = a_0 + (x - a_0),$$

com $a_0 \in A$ e $\|x - a_0\| = d(x, A)$. Além disso, pela Proposição 2.10, também temos que $(x - a_0) \in A^{\perp}$. Logo $\mathcal{H} = A + A^{\perp}$. Note-se que $A \cap A^{\perp} = \{0\}$, uma vez que se $y \in A \cap A^{\perp}$ viria que $\langle y, y \rangle = 0$ e consequentemente que $y = 0$. Portanto $\mathcal{H} = A \oplus A^{\perp}$ ∎

2.1.2 Operadores Compactos em Espaços de Hilbert

Definição 2.13 *Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. O operador T é compacto se e só se para toda a sucessão limitada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{H}_1$, a sucessão $\{Tx_n\}_{n\in\mathbb{R}}$ possui uma subsucessão convergente em $\mathcal{H}_2$.*

Observação 2.14 *Pode-se ainda provar que:*

- *T é um operador compacto se e só se $T(U)$, sendo U um qualquer conjunto limitado de $\mathcal{H}_1$, possui fecho compacto, isto é $\overline{T(U)}$ é compacto em $\mathcal{H}_2$;*

- *T é um operador compacto se e só se $\overline{T(U_1)}$ é compacto em $\mathcal{H}_2$, onde $U_1 = \{x \in \mathcal{H}_1 : \|x\| < 1\}$ é a bola unitária.*

O conjunto dos operadores compactos de $\mathcal{H}_1$ em $\mathcal{H}_2$ é denotado por $\mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.

Proposição 2.15 *Dados dois operadores compactos a sua soma é ainda um compacto.*

Demonstração. Sejam $T_1, T_2 : X \longrightarrow Y$ dois operadores compactos e seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ uma sucessão limitada.

Como T_1 é um operador compacto, aplicando a Definição 2.13, podemos dizer que existe uma subsucessão $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\{T_1 x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge em Y. Como $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ também é limitada em X (por ser uma subsucessão de uma sucessão limitada) e como T_2 é compacto, então também existe uma subsucessão de $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{x''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $\{T_2 x''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge em Y. Como $\{T_1 x''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma subsucessão de $\{T_1 x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que também converge então a sucessão soma $\{T_1 x''_n + T_2 x''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge em Y e consequentemente $\{(T_1 + T_2)x''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge em Y permitindo concluir que $T_1 + T_2$ é compacto. ■

Definição 2.16 *Seja $\{f_n\}$ uma sucessão de funções contínuas em $[a, b]$. Diz-se que a sucessão $\{f_n\}$ é equicontínua se para todo o $x, y \in [a, b]$, para todo o $\epsilon > 0$ e para todo $f_n \in \{f_n\}$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$|y - x| < \delta \Longrightarrow |f_n(y) - f_n(x)| < \epsilon$$

Exemplo 2.17 *Dada uma função contínua K e a e b finitos, definimos o operador $T : L^2([a, b]) \longrightarrow L^2([a, b])$, onde*

$$(Tx)(s) = \int_a^b K(s, t)x(t)dt.$$

Vamos justificar que T assim definido é um operador compacto. Sabemos que T é limitado em $L^2[a, b]$ e que

$$\|T\| \leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 dtds}.$$

Seja então $x_n \in L^2[a, b]$ e $\|x_n\| \leq M$ para $n = 1, 2, ...$ e $M > 0$. Temos que:

$$\begin{aligned}
\|(Tx_n)(s)\|^2 &= \int_a^b \left| \int_a^b K(s,t)\, x_n(t)\, dt \right|^2 ds \\
&\leq \int_a^b \left(\int_a^b |K(s,t)|^2 dt \int_a^b |x_n(t)|^2 dt \right) ds \\
&\leq \int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 dtds \int_a^b |x_n(t)|^2 dt
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\|(Tx_n)(s)\| &\leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 dtds}\,\|x_n(t)\| \\
&\leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b \max|K(s,t)|^2 dtds}\,\|x_n(t)\| \\
&\leq \sqrt{\max|K(s,t)|^2}\sqrt{\int_a^b \int_a^b dtds}\,\|x_n(t)\| \\
&\leq M\max|K(s,t)| \quad (b-a)
\end{aligned}$$

o que nos permite concluir que a sucessão $\{Tx_n\}$ *é limitada.*

Mostremos agora que a sucessão $\{Tx_n\}$ *é equicontínua. Seja* $s_1, s_2 \in [a,b]$*. Temos que:*

$$\begin{aligned}
\|(Tx_n)(s_1)-(Tx_n)(s_2)\|^2 &\leq \int_a^b \left(\int_a^b |K(s_1,t)-K(s_2,t)|^2 dt \int_a^b |x_n(t)|^2 dt\right) ds \\
&\leq \int_a^b \int_a^b |K(s_1,t)-K(s_2,t)|^2 dtds \int_a^b |x_n(t)|^2 dt
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\|(Tx_n)(s_1)-(Tx_n)(s_2)\| &\leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(s_1,t)-K(s_2,t)|^2 dtds}\,\|x_n(t)\| \\
&\leq M(b-a)\max|K(s_1,t)-K(s_2,t)|.
\end{aligned}$$

Como K *é uma função contínua, esta última inequação permite-nos concluir que a sucessão* $\{Tx_n\}$ *é equicontínua. Temos então que a sucessão* $\{Tx_n\}$ *para além de ser limitada é equicontínua logo pelo Teorema de Arzela Ascoli [8]* T *é um operador compacto.*

2.1.3 Operadores Adjuntos e Auto-Adjuntos em Espaços de Hilbert

Definição 2.18 *Seja* V *um qualquer espaço com produto interno,* $\langle\cdot,\cdot\rangle$*, e* x_0 *um vector fixo em* V*. A funcional* $f: V \longrightarrow \mathbb{K}$ *definida por*

$$f(x) = \langle x, x_0\rangle, \quad \forall x \in V$$

é uma funcional linear. Além disso, uma vez que pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, se tem

$$|f(x)| = |\langle x, x_0\rangle| \leq \|x_0\|\|x\|$$

qualquer que seja $x \in V$*, então* f *é uma funcional linear limitada.*

Observação 2.19 *No caso de V ser um espaço de Hilbert, o recíproco também é verdadeiro de acordo com a proposição seguinte.*

Teorema 2.20 *Seja f uma funcional linear limitada definida sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então existe um e um só vector $x_0 \in \mathcal{H}$ tal que*

$$f(x) = \langle x, x_0 \rangle, \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

verificando-se ainda a igualdade

$$\|f\| = \|x_0\|.$$

Demonstração. Comecemos por mostrar que existe um vector $x_0 \in \mathcal{H}$ de f tal que

$$f(x) = \langle x, x_0 \rangle.$$

Note-se que se $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathcal{H}$, então $f(x) = \langle x, x_0 \rangle$ é verificada considerando $x_0 = 0$. Suponhamos que $f \neq 0$ e seja $Ker(f)$ o núcleo de f, isto é

$$Ker(f) = \{x \in \mathcal{H} : f(x) = 0\}.$$

Dado que f é linear e limitada, então pelo Corolário 2.6, $Ker(f)$ é fechado em $\mathcal{H}$. Assim pela Proposição 2.12, $\mathcal{H}$ pode ser representado por

$$\mathcal{H} = Ker(f) \oplus (Ker(f))^{\perp}.$$

Como por hipótese $f \neq 0$, então $Ker(f) \neq \mathcal{H}$ e portanto a igualdade anterior implica que $(Ker(f))^{\perp} \neq \{0\}$. Logo existe $y_1 \neq 0$ em $(Ker(f))^{\perp}$. Então $y = \frac{y_1}{\|y_1\|} \neq 0$ está também em $(Ker(f))^{\perp}$.

Assim, para qualquer $x \in \mathcal{H}$,

$$f(x)y - f(y)x \in Ker(f)$$

e, uma vez que $y \in (Ker(f))^{\perp}$,

$$0 = \langle f(x)y - f(y)x, y \rangle = f(x) - \langle x, \overline{f(y)}y \rangle$$

isto é

$$f(x) = \langle x, \overline{f(y)}y \rangle.$$

Considerando $x_0 = \overline{f(y)}y$, verificamos que $f(x) = \langle x, x_0 \rangle$.

Mostremos agora que x_0 é único. Suponhamos que existe $x_1 \in \mathcal{H}$ tal que

$$f(x) = \langle x, x_0 \rangle = \langle x, x_1 \rangle, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Logo

$$\langle x, x_0\rangle - \langle x, x_1\rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle x, (x_0 - x_1)\rangle = 0.$$

Em particular, para $x = x_0 - x_1$, obtemos $\|x_0 - x_1\|^2 = 0$ e consequentemente $x_0 = x_1$, provando-se assim que x_0 é único.

Finalmente, relativamente à norma de f, tem-se por um lado que

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, x_0\rangle| \leq \sup_{\|x\|=1} (\|x\|\|x_0\|) = \|x_0\| \tag{2.1}$$

e por outro lado

$$\|x_0\|^2 = \langle x_0, x_0\rangle = |f(x_0)| \leq \|f\|\|x_0\|$$

ou seja

$$\|x_0\| \leq \|f\| \tag{2.2}$$

Assim de (2.1) e (2.2) resulta que $\|f\| = \|x_0\|$ ■

Lema 2.21 *Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ dois espaços de Hilbert e $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ um operador limitado. Então existe um único operador $T^* : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ tal que*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle.$$

Além disso, $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Demonstração. Seja $y \in \mathcal{H}_2$, arbitrariamente fixado e considere-se uma funcional linear em $\mathcal{H}_1$, f_y, definida por

$$f_y(x) = \langle Tx, y\rangle \qquad \forall x \in \mathcal{H}_1.$$

Tendo em conta a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e o facto de T ser um operador linear limitado

$$\begin{aligned} |f_y(x)| &= |\langle Tx, y\rangle| \\ &\leq \|Tx\|\|y\| \\ &\leq \|T\|\|x\|\|y\| \qquad \forall x \in \mathcal{H}_1. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Logo f_y é limitado e $\|f_y\| \leq \|T\|\|y\|$. Portanto f_y é uma funcional linear e limitada em $\mathcal{H}_1$ e consequentemente, pelo Teorema 2.20, existe um único vector $y^* \in \mathcal{H}_1$, tal que

$$f(x) = \langle x, y^*\rangle,$$

logo

$$\langle Tx, y\rangle = f_y(x) = \langle x, y^*\rangle \qquad \forall x \in \mathcal{H}_1$$

e por um raciocínio semelhante a (2.3) ,

$$\|f_y\| = \|y^*\|.$$

Como a cada $y_2 \in \mathcal{H}_2$ corresponde um e um só $y^* \in \mathcal{H}_1$, então $T^* : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ é o operador definido por $T^*y = y^*, \quad \forall y \in \mathcal{H}_2$, que satisfaz $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$.

Como $\|f_y\| \leq \|T\|\|y\|$ e $\|f_y\| = \|y^*\|$, então

$$\|T\|\|y\| \geq \|f_y\| = \|y^*\| = \|T^*y\|$$

e portanto $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Falta ainda mostrar que T^* é único. Seja $S : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ um operador tal que

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}_1 \quad e \quad y \in \mathcal{H}_2.$$

Então

$$\begin{aligned}
\langle x, T^*y\rangle = \langle x, Sy\rangle &\implies \langle x, T^*y\rangle - \langle x, Sy\rangle = 0\\
&\implies \langle x, T^*y - Sy\rangle = 0\\
&\implies T^*y = Sy\\
&\implies S = T^*
\end{aligned}$$

e portanto T^* é único como se pretendia demonstrar. ■

Definição 2.22 *Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ dois espaços de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Definimos operador adjunto de T como o operador $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ tal que para quaisquer $x \in \mathcal{H}_1$ e $y \in \mathcal{H}_2$:*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle.$$

Lema 2.23 *Seja $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço com produto interno. Se $\langle y, x\rangle = \langle z, x\rangle$, $\forall x \in X$, então $y = z$.*

Demonstração. Sabemos por hipótese que $\langle y, x\rangle = \langle z, x\rangle$, $\forall x \in X$. Como

$$\langle y, x\rangle - \langle z, x\rangle = 0, \quad \forall x \in X$$

vem que $\langle y - z, x\rangle = 0$, $\forall x \in X$. Escolhendo $x = y - z$, vem $\langle y - z, y - z\rangle = 0$ ou seja $\|y - z\|^2 = 0$, portanto $y = z$ como se pretendia demonstrar. ■

Corolário 2.24 *Se* $\langle z, x\rangle = 0$, $\forall x \in X$, *então* $z = 0$.

Demonstração. A demonstração deste corolário decorre imediatamente do lema anterior. ■

Proposição 2.25 *Seja* $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ *um operador limitado. O operador adjunto* $T^* : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ *é linear.*

Demonstração. Sejam $z_1, z_2 \in \mathcal{H}_1$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$. Para $x \in \mathcal{H}_1$ vem que

$$\begin{aligned}
\langle T^*(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2), x\rangle &= \overline{\langle x, T^*(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2)\rangle} \\
&= \overline{\langle Tx, \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2\rangle} \\
&= \alpha_1 \overline{\langle Tx, z_1\rangle} + \alpha_2 \overline{\langle Tx, z_2\rangle} \\
&= \alpha_1 \overline{\langle x, T^* z_1\rangle} + \alpha_2 \overline{\langle x, T^* z_2\rangle} \\
&= \alpha_1 \langle T^* z_1, x\rangle + \alpha_2 \langle T^* z_2, x\rangle \\
&= \langle \alpha_1 T^* z_1 + \alpha_2 T^* z_2, x\rangle
\end{aligned}$$

Logo

$$T^*(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) = \alpha_1 T^* z_1 + \alpha_2 T^* z_2$$

e portanto T^* é um operador linear. ■

Proposição 2.26 *Sejam* $\mathcal{H}_1$ *e* $\mathcal{H}_2$ *espaços de Hilbert,* $T, S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ *e* $\alpha \in \mathbb{K}$. *Então*

a) $\langle T^* y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle$, $\forall x \in \mathcal{H}_1$, $\forall y \in \mathcal{H}_2$;

b) $(T + S)^* = T^* + S^*$;

c) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$;

d) $(TS)^* = S^* T^*$;

e) $T^{**} = T$;

f) $\|T^*\| = \|T\|$;

g) $\|T^* T\| = \|T\|^2 = \|TT^*\|$;

Demonstração.

(a) Tendo em conta a definição de operador adjunto temos que:

$$\langle T^* y, x\rangle = \overline{\langle x, T^* y\rangle} = \overline{\langle Tx, y\rangle} = \langle y, Tx\rangle.$$

(b) Por definição de operador adjunto temos que $\forall x \in \mathcal{H}_1$, $\forall y \in \mathcal{H}_2$,

$$\langle (T+S)x, y\rangle = \langle x, (T+S)^* y\rangle. \tag{2.4}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\langle (T+S)x, y\rangle &= \langle Tx + Sx, y\rangle, \quad \text{pois} \quad T, S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)\\
&= \langle Tx, y\rangle + \langle Sx, y\rangle\\
&= \langle x, T^* y\rangle + \langle x, S^* y\rangle\\
&= \langle x, T^* y + S^* y\rangle\\
&= \langle x, (T^* + S^*) y\rangle.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\langle (T+S)x, y\rangle = \langle x, (T^* + S^*) y\rangle. \tag{2.5}$$

De (2.4) e (2.5), podemos concluir que $(T+S)^* = T^* + S^*$.

(c) Sejam $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ qualquer. Por definição de operador adjunto,

$$\langle (\alpha T)x, y\rangle = \langle x, (\alpha T)^* y\rangle. \tag{2.6}$$

Por outro lado, uma vez que $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$,

$$\begin{aligned}
\langle (\alpha T)x, y\rangle &= \langle \alpha (Tx), y\rangle\\
&= \alpha \langle Tx, y\rangle\\
&= \alpha \langle x, T^* y\rangle\\
&= \langle x, \bar{\alpha}(T^* y)\rangle\\
&= \langle x, (\bar{\alpha} T^*) y\rangle.
\end{aligned}$$

Temos então que

$$\langle (\alpha T)x, y\rangle = \langle x, (\bar{\alpha} T^*) y\rangle. \tag{2.7}$$

De (2.6) e (2.7), vem que $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$.

(d) Por definição de operador adjunto temos que $\forall x \in \mathcal{H}_1$, $\forall y \in \mathcal{H}_2$,

$$\langle (TS)x, y\rangle = \langle x, (TS)^* y\rangle. \tag{2.8}$$

Por outro lado, uma vez que $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$,

$$\begin{aligned}\langle (TS)x, y\rangle &= \langle T(Sx), y\rangle \\ &= \langle Sx, T^*y\rangle \\ &= \langle x, S^*(T^*y)\rangle \\ &= \langle x, (S^*T^*)y\rangle.\end{aligned}$$

Ou seja

$$\langle (TS)x, y\rangle = \langle x, (S^*T^*)y\rangle. \tag{2.9}$$

De (2.8) e (2.9) vem que $(TS)^* = S^*T^*$.

(e) Sabemos da alínea (a) que

$$\langle T^*y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle. \tag{2.10}$$

Por outro lado, por definição de operador adjunto de T^*,

$$\langle T^*y, x\rangle = \langle y, (T^*)^*x\rangle. \tag{2.11}$$

De (2.10) e (2.11) concluímos o pretendido ou seja $T^{**} = T$.

(f) Através do Lema 2.21 sabemos que

$$\|T^*\| \leq \|T\|.$$

Como T^* é limitado, fazendo $T = T^*$ vem que

$$\|(T^*)^*\| \leq \|T^*\|.$$

Logo, aplicando a alínea (e) vem que $\|T\| \leq \|T^*\|$ e consequentemente que

$$\|T^*\| = \|T\|.$$

(g) Para todo o $x \in \mathcal{H}_1$ temos que

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2 &= \langle Tx, Tx\rangle \\ &= \langle T^*Tx, x\rangle \\ &\leq \|T^*Tx\|\|x\| \\ &\leq \|T^*T\|\|x\|^2.\end{aligned}$$

Logo

$$\|T\| \leq \sqrt{\|T^*T\|} \Leftrightarrow \|T\|^2 \leq \|T^*T\|. \tag{2.12}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \|T^*T\| &\leq \|T^*\|\|T\| \\ &= \|T\|\|T\| \\ &= \|T\|^2. \end{aligned} \tag{2.13}$$

De (2.12) e (2.13) tem-se que

$$\|T^*T\| = \|T\|^2.$$

Analogamente se prova que $\|TT^*\| = \|T\|^2$, ou seja, para todo o $x \in \mathcal{H}_1$, tem-se que

$$\begin{aligned} \|T^*x\|^2 &= \langle T^*x, T^*x\rangle \\ &= \langle (T^*)^*Tx, x\rangle \\ &\leq \|(T^*)^*Tx\|\|x\| \\ &\leq \|(T^*)^*T\|\|x\|^2. \end{aligned}$$

Logo

$$\|T^*\| \leq \sqrt{\|TT^*\|} \Leftrightarrow \|T^*\|^2 \leq \|TT^*\|.$$

Como $\|T^*\| = \|T\|$, vem que

$$\|T\|^2 \leq \|TT^*\|. \tag{2.14}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \|TT^*\| &\leq \|T\|\|T^*\| \\ &= \|T\|\|T\| \\ &= \|T\|^2. \end{aligned} \tag{2.15}$$

De (2.14) e (2.15) tem-se que

$$\|TT^*\| = \|T\|^2.$$

Fica assim demonstrado que $\|T^*T\| = \|T\|^2 = \|TT^*\|$.

■

Após termos considerado T como sendo um operador limitado definido num espaço de Hilbert, a apresentação do quadro seguinte, tendo como base as propriedades demonstradas no lema anterior, tem como objectivo ilustrar que existem características análogas entre a aplicação de passagem ao complexo conjugado nos números complexos e a aplicação de passagem ao adjunto nos operadores limitados. É ainda de salientar que a composição de operadores limitados definidos num espaço de Hilbert não é, em geral, comutativa.

	$\bar{\cdot} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$	$* : \mathcal{B}(H) \longrightarrow \mathcal{B}(H)$
(1)	$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$	$(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$
(2)	$\overline{\alpha z} = \bar{\alpha}\bar{z}$	$(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$
(3)	$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_2 z_1}$	$(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$
(4)	$\overline{(\bar{z})} = z$	$(T^*)^* = T$
(5)	$\lvert\overline{z}\rvert = \lvert z\rvert$	$\lVert T^*\rVert = \lVert T\rVert$
(6)	$\lvert\overline{z}z\rvert = \lvert z\rvert^2 = \lvert z\overline{z}\rvert$	$\lVert T^*T\rVert = \lVert T\rVert^2 = \lVert TT^*\rVert$

Tabela 1: Propriedades das aplicações de passagem ao complexo conjugado e de passagem ao adjunto.

Exemplo 2.27 *Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert. Considerando $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, note-se que A^* é invertível e $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. De facto,*

$$(A^{-1})^* A^* = (AA^{-1})^* = I^* = I.$$

Por outro lado

$$A^*(A^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I^* = I.$$

Logo A^* é invertível e portanto $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Definição 2.28 *Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ dois espaços de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Definimos T como sendo um operador auto-adjunto se e só se $T^* = T$, isto é para quaisquer $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$ tem-se*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle.$$

Proposição 2.29 *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um operador auto-adjunto. Então:*

(i) $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|$;

(ii) $\langle Tx, x\rangle = 0$, *para qualquer* $x \in H$ *implica que* $T = 0$.

Demonstração. Comecemos por demonstrar (i).

Consideremos $M = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|$. Tem-se que, para cada $x \in \mathcal{H}$, com $\|x\| = 1$,

$$\sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle| \leq \|Tx\| \leq \|T\|.$$

Logo $M \leq \|T\|$.

Provemos agora que $M \geq \|T\|$. Para quaisquer $x, y \in \mathcal{H}$ tem-se que

$$\langle T(x+y), x+y\rangle = \langle Tx, x\rangle + 2Re\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, y\rangle$$

e que

$$\langle T(x-y), x-y\rangle = \langle Tx, x\rangle - 2Re\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, y\rangle.$$

Logo,

$$4Re\langle Tx, y\rangle = \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle$$

e

$$|4Re\langle Tx, y\rangle| = |\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle|.$$

Majorando, por uso da desigualdade triangular, ainda podemos escrever

$$|4Re\langle Tx, y\rangle| \leq |\langle T(x+y), x+y\rangle| + |\langle T(x-y), x-y\rangle|.$$

Aplicando a regra do paralelogramo e uma vez que $|\langle Tx, x\rangle| \leq M\|x\|^2$, obtém-se

$$4Re\langle Tx, y\rangle \leq M(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) \leq 2M(\|x\|^2 + \|y\|^2) \tag{2.16}$$

Tendo em conta a fórmula exponencial do número complexo $\langle Tx, y\rangle$:

$$\langle Tx, y\rangle = |\langle Tx, y\rangle| e^{i\theta} \quad \text{com} \quad \theta \in \mathbb{R} \tag{2.17}$$

e, substituindo em (2.16) vem que

$$|\langle Tx, y\rangle| \leq \frac{M}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2) \tag{2.18}$$

Supondo que $Tx \neq 0$ e considerando que

$$y = \frac{\|x\|}{\|Tx\|} Tx,$$

podemos escrever (2.18) da seguinte forma

$$\|Tx\|\|x\| \leq M\|x\|^2$$

e concluir que $\|Tx\| \leq M\|x\|$, para qualquer $x \in \mathcal{H}$ e $\|T\| \leq M$.

Para mostrar (ii), basta ter em conta (i), isto é, se por hipótese $\langle Tx, x\rangle = 0$, vem aplicando (i) que $\|T\| = 0$ e portanto $T = 0$. ■

Proposição 2.30 *Seja A um operador limitado definido num espaço de Hilbert. Então os operadores $T = A^*A$ e $S = A^* + A$ são auto-adjuntos.*

Demonstração. Para todo o $x, y \in \mathcal{H}$ e dado que $T = A^*A$, temos que

$$\begin{aligned} \langle Tx, y \rangle &= \langle A^*Ax, y \rangle \\ &= \langle Ax, Ay \rangle \\ &= \langle x, A^*Ay \rangle \\ &= \langle x, Ty \rangle \end{aligned}$$

Logo $T = T^*$.

Analogamente, para todo o $x, y \in \mathcal{H}$, vem que

$$\begin{aligned} \langle Sx, y \rangle &= \langle (A^* + A)x, y \rangle \\ &= \langle x, (A^* + A)^*y \rangle \\ &= \langle x, (A + A^*)y \rangle \\ &= \langle x, Sy \rangle \end{aligned}$$

e portanto tem-se que $S^* = S$ como se pretendia demonstrar. ■

Proposição 2.31 *A composição de dois operadores auto-adjuntos é auto-adjunto se e só se os operadores comutarem.*

Demonstração. Sejam A, B dois operadores auto-adjuntos definidos no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Tendo por hipótese que $AB = BA$ e aplicando os resultados da Proposição 2.26 então, para todo o $x, y \in \mathcal{H}$,

$$(AB)^* = B^*A^* = BA = AB,$$

o que demonstra o pretendido ou seja, que a composição de dois operadores auto-adjuntos é ainda auto-adjunto.

Reciprocamente, consideremos que AB é auto-adjunto. Então, aplicando novamente a Proposição 2.26 e não esquecendo o facto de A e B serem operadores auto-adjuntos vem que

$$AB = (AB)^* = B^*A^* = BA$$

e portanto A e B comutam. ■

Definição 2.32 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Definimos T como sendo um operador normal se e só se $T^*T = TT^*$.*

Proposição 2.33 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Então T é um operador normal se e só se para qualquer $x \in \mathcal{H}$,*

$$\|Tx\| = \|T^*x\|.$$

Demonstração. Comecemos por mostrar que se T é um operador normal então $\|Tx\| = \|T^*x\|$.

Temos que, para qualquer $x \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2 - \|T^*x\|^2 &= \langle Tx, Tx\rangle - \langle T^*x, T^*x\rangle \\ &= \langle T^*Tx, x\rangle - \langle TT^*x, x\rangle \\ &= \langle (T^*T - TT^*)x, x\rangle.\end{aligned}$$

Como por hipótese T é um operador normal $T^*T = TT^*$ logo $T^*T - TT^* = 0$ e portanto $\|Tx\| = \|T^*x\|$.

Provemos agora que se $\|Tx\| = \|T^*x\|$, então T é um operador normal. Sabemos que

$$(T^*T - TT^*)^* = T^*T - TT^*,$$

o que nos permite concluir que $(T^*T - TT^*)$ é um operador auto-adjunto. Assim, através da Proposição 2.29 podemos concluir que $T^*T - TT^* = 0$ e consequentemente que T é um operador normal. ■

2.2 Operadores de Fredholm em Espaços de Hilbert

Apesar de os operadores de Fredholm poderem ser definidos e estudados em espaços de Banach, apenas nos iremos dedicar à teoria de operadores de Fredholm em espaços de Hilbert.

Definição 2.34 *Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ dois espaços de Hilbert. Um operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ é dito um operador de Fredholm se satisfaz as seguintes condições:*

(i) O espaço vectorial $Ker(T)$ tem dimensão finita (dim $Ker(T) < \infty$);

(ii) O espaço vectorial $CoKer(T)$ tem dimensão finita (dim $CoKer(T) < \infty$);

(iii) Im(T) é fechada (Im(T)= $\overline{Im(T)}$).

O conjunto dos operadores de Fredholm é denotado por $\mathcal{F}$.

Definição 2.35 *Consideremos uma espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e M um seu subespaço fechado. Chamamos projecção ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre M a um operador $P : \mathcal{H} \longrightarrow M$ definido de tal modo que $Im(P) = M$, aplica M em M, aplica $M^{\perp}$ em $\{0\}$ e é um projector (isto é, $P^2 = P$).*

Proposição 2.36 *O item (iii) na Definição 2.34, decorre das demais condições patentes nessa definição.*

Demonstração. Seja $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ um operador, onde $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ são espaços de Hilbert. Queremos mostrar que a imagem do operador T é fechada (tendo em conta as hipóteses em consideração).

Seja $\mathcal{H}_1 = Ker(T) \oplus Ker(T)^{\perp}$. É claro que $Ker(T) \subset \mathcal{H}_1$ e restringindo o operador T a este subconjunto temos que:

$$T\mid_{Ker(T)} : Ker(T) \longrightarrow \mathcal{H}_2$$

onde para qualquer $x \in Ker(T)$,

$$T\mid_{Ker(T)} x = Tx.$$

Por analogia, restringindo T ao $Ker(T)^{\perp}$, temos

$$T\mid_{Ker(T)^{\perp}} : Ker(T)^{\perp} \longrightarrow \mathcal{H}_2,$$

o que nos permite concluir que

$$Ker\left(T\mid_{Ker(T)^{\perp}}\right) = \{0\}.$$

Dado que por hipótese $dimCoKer(T) < \infty$, então existe um subespaço de dimensão finita $V \subset \mathcal{H}_2$ tal que $\mathcal{H}_2 = Im(T) \oplus V$. Mas, sendo V um subespaço de dimensão finita, V é fechado e portanto $\mathcal{H}_2 = V \oplus V^{\perp}$.

Consideremos a seguinte projecção ortogonal $\pi : \mathcal{H}_2 \longrightarrow V^{\perp}$ e seja $G \equiv \pi T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow V^{\perp}$. Note-se que G é contínuo, pois é a composição de dois operadores contínuos. Além disso como $Im(T)$ tem codimensão finita e atendendo à decomposição $\mathcal{H}_2 = V \oplus V^{\perp}$ vem que G é ainda um isomorfismo linear, ou seja, uma transformação linear bijectiva. Assim, através do Teorema da Aplicação Aberta [6], podemos concluir que $G^{-1} : V^{\perp} \longrightarrow \mathcal{H}_1$ é limitado.

Consideremos agora uma sucessão de elementos em $Im(T)$, $\{T(h_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, e mostremos que $\lim_{n\to\infty} T(h_n)$ pertence a $Im(T)$. Temos que

$$\lim_{n\to\infty} G(h_n) = \lim_{n\to\infty} (\pi T(h_n)) = \pi \lim_{n\to\infty} T(h_n) = \pi b$$

que existe em $V^{\perp}$. Aplicando G^{-1} à identidade anterior vem:

$$G^{-1}(\lim_{n\to\infty} G(h_n)) = G^{-1}\pi b$$

o que equivale a ter

$$\lim_{n\to\infty} G^{-1}G(h_n) = G^{-1}\pi b$$

logo

$$\lim_{n\to\infty} h_n = G^{-1}\pi b$$

que existe em $\mathcal{H}_1$.

Seja $h = \lim_{n\to\infty} h_n = G^{-1}\pi b$.

Assim $h \in \mathcal{H}_1$ e consequentemente $T(h) \in Im(T)$. Como T é um operador contínuo

$$\lim_{n\to\infty} T(h_n) = T(h),$$

o que permite concluir que $\lim_{n\to\infty} T(h_n)$ pertence a $Im(T)$. Ou seja, $Im(T)$ é fechado. ■

Definição 2.37 *Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ dois espaços de Hilbert. Um operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ é dito um operador de semi-Fredholm à direita se satisfaz as seguintes condições:*

(i) O espaço vectorial $Ker(T)$ tem dimensão finita ($\dim Ker(T) < \infty$);

(ii) Im(T) é fechada (Im(T)= $\overline{Im(T)}$).

O conjunto dos operadores de semi-Fredholm à direita é denotado por $\mathcal{F}_r$. Por outro lado um operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ é dito um operador de semi-Fredholm à esquerda se satisfaz as seguintes condições:

(i) O espaço vectorial $CoKer(T)$ tem dimensão finita ($\dim CoKer(T) < \infty$);

(ii) Im(T) é fechada (Im(T)= $\overline{Im(T)}$).

O conjunto dos operadores de semi-Fredholm à esquerda é denotado por $\mathcal{F}_l$.

Assim, um operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ é dito um operador de semi-Fredholm se é um operador de semi-Fredholm à esquerda ou se é um operador de semi-Fredholm à direita.

O conjunto dos operadores de semi-Fredholm, pertencentes a $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ denota-se por $\mathcal{SF}$.

Proposição 2.38 *Sejam X, Y espaços de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. T é um operador de semi-Fredholm à direita se e só se existe um subspaço fechado $M \subset X$ de codimensão finita tal que*

$$\inf\{\|Tx\| : x \in M, \|x\| = 1\} > 0.$$

Demonstração. Seja T um operador de semi-Fredholm à direita.

Dado que $\dim Ker(T) < \infty$, existe um subconjunto fechado $M \subset X$ tal que

$$X = Ker(T) \oplus M.$$

Restringindo o operador T a este subconjunto temos que

$$T_{|_M} : M \longrightarrow ImT,$$

que é naturalmente uma bijecção e portanto

$$\exists_{c>0} : \|x\| \leq c\|Tx\| \quad , \forall x.$$

Seja agora $M \subset X$ um subespaço fechado de codimensão finita e

$$\inf\{\|Tx\| : x \in M, \|x\| = 1\} > 0.$$

Dado que $KerT \cap M = \{0\}$, temos que $dimKerT < \infty$. Por outro lado seja F um subespaço de dimensão finita de X tal que $F \oplus M = X$. Temos então que

$$ImT = TF + TM.$$

Restringindo o operador T ao subespaço fechado de codimensão finita vem que $T_{|_M}$ é limitado por baixo. Por outro lado $dimTF < \infty$, logo ImT é fechada e portanto atendendo à Definição 2.37, T é um operador de semi-Fredholm à direita. ■

Lema 2.39 *Num espaço normado X,*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

Demonstração. Note-se que $\|x\| = \|(x - y) + y\|$ e que $\|y\| = \|(y - x) + x\|$. Através da desigualdade triangular ainda podemos dizer que

$$\|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \quad \text{e} \quad \text{que} \quad \|(y - x) + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| \tag{2.19}$$

logo

$$\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\| \Leftrightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

e

$$\|y\| \leq \|y - x\| + \|x\| \Leftrightarrow -\|y - x\| \leq \|x\| - \|y\|.$$

O que nos permite concluir o pretendido, ou seja

$$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

■

Proposição 2.40 *Sejam X, Y espaços de Hilbert, $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ e $K \in \mathcal{K}(X,Y)$. Então*

(i) $T \in \mathcal{F}_r \Longrightarrow T + K \in \mathcal{F}_r$;

(ii) $T \in \mathcal{F}_l \Longrightarrow T + K \in \mathcal{F}_l$;

(iii) $T \in \mathcal{F} \Longrightarrow T + K \in \mathcal{F}$.

Demonstração. Comecemos por demonstrar a implicação (i).

Seja $T \in \mathcal{F}_r$. Pela Proposição 2.38, vimos que se $T \in \mathcal{F}_r$ então existe um subespaço fechado $M_1 \subset X$ de codimensão finita tal que

$$\inf\{\|Tx\| : x \in M_1, \|x\| = 1\} = c > 0.$$

Como por hipótese K é compacto, existe um subespaço fechado $M_2 \subset X$ onde $codim M_2 < \infty$, de tal modo que

$$sup\{\|Kx\| : x \in M_2, \|x\| = 1\} < \frac{c}{2}.$$

Seja $M = M_1 \cap M_2$. Temos então que

$$codim M < \infty \tag{2.20}$$

Sabemos, através do Lema 2.39 que

$$|\|Tx\| - \|Sx\|| \leq \|Tx - Sx\|.$$

Seja $S = -K$, vem que

$$|\|Tx\| - \| - Kx\|| \leq \|Tx - (-K)x\|.$$

Como $\| - Kx\| = | - 1|\|Kx\| = \|Kx\|$, vem que

$$|\|Tx\| - \|Kx\|| \leq \|Tx + Kx\|.$$

Assim,

$$\inf\{\|(T + K)x\| : x \in M, \|x\| = 1\} \geq \inf\{|\|Tx\| - \|Kx\|| : x \in M, \|x\| = 1\} \geq \frac{c}{2} \tag{2.21}$$

De (2.20) e (2.21) e atendendo à Proposição 2.38, conclui-se que $T + K$ é um operador de semi-Fredholm à direita.

Provemos agora a segunda implicação.

Uma vez que $T \in \mathcal{F}_l$ e K é compacto, então atendendo à definição de operador adjunto, T^* ainda continua a ser um operador de semi-Fredholm mas à direita e K^* compacto. Assim por (i) $T^* + K^*$ é um operador de semi-Fredholm à direita logo $T + K$ é um operador de semi-Fredholm à esquerda.

Por fim mostremos a última implicação.

De (i) temos que se $T \in \mathcal{F}_r$ então $T + K \in \mathcal{F}_r$, de (ii) se $T \in \mathcal{F}_l$ então $T + K \in \mathcal{F}_l$. Por definição, um operador é de Fredholm se é um operador de semi-Fredholm à direita e à esquerda. Logo podemos concluir que se $T \in \mathcal{F}$ então $T + K \in \mathcal{F}$. ■

Proposição 2.41 *Sejam X, Y espaços de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) T é de Fredholm;

(ii) Existe $S \in \mathcal{B}(Y, X)$, $F_1 \in \mathcal{F}(X)$ e $F_2 \in \mathcal{F}(Y)$ tal que

$$ST = I_X + F_1 \quad e \quad TS = I_Y + F_2$$

(iii) Existe $S \in \mathcal{B}(Y, X)$, $K_1 \in \mathcal{K}(X)$ e $K_2 \in \mathcal{K}(Y)$ tal que

$$ST = I_X + K_1 \quad e \quad TS = I_Y + K_2$$

Demonstração. $(i) \Longrightarrow (ii)$ Comecemos por mostrar que se T é de Fredholm então existe $S \in \mathcal{B}(Y, X)$, $F_1 \in \mathcal{F}(X)$ e $F_2 \in \mathcal{F}(Y)$ tal que

$$ST = I_X + F_1 \quad e \quad TS = I_Y + F_2.$$

Dado que T é um operador de Fredholm, temos que:

- $ImT = \overline{ImT}$;

- $KerT$ e Y/ImT têm dimensão finita.

Logo, existe um subespaço fechado $X_1 \subseteq X$ tal que

$$X = KerT \oplus X_1$$

e um subespaço de dimensão finita $Y_1 \subseteq Y$ tal que

$$Y = ImT \oplus Y_1.$$

Consideremos $Q \in \mathcal{B}(Y)$, a projecção sobre ImT. Como $Q : Y \longrightarrow ImT$, vem que

$$T_{|X_1} : X_1 \longrightarrow ImT,$$

onde $T_{|_{X_1}} u = Tu$ para $u \in X_1$ é bijectiva. Seja então $S_1 : ImT \longrightarrow X_1$ a sua inversa e consideremos $S = S_1 Q$. Como $u \in X_1$, temos que $STu \in X_1$, logo

$$(ST - I_X)u = STu - I_X u = u - u = 0$$

Assim, em X_1, $ST \equiv I$. Logo, dado que T é um operador de Fredholm e que

$$X = KerT \oplus X_1$$

vem que

$$ST = I_X + F_1,$$

onde F_1 é um operador de Fredholm. Por outro lado, dado $v \in ImT$, $TSv \in ImT$ e consequentemente

$$(TS - I_Y)v = TSv - I_Y v = v - v = 0.$$

Logo, em ImT, $TS \equiv I$ e atendendo a que T é um operador de Fredholm e que $Y = ImT \oplus Y_1$, $TS = I_Y + F_2$, onde F_2 é um operador de Fredholm.

$(i) \Longrightarrow (iii)$ Dado que T é um operador de Fredholm, temos que:

- $ImT = \overline{ImT}$;

- $KerT$ e Y/ImT têm dimensões finitas.

Seja $X = KerT \oplus KerT^{\perp}$. Consideremos $P \in \mathcal{B}(X)$ a projecção sobre $Im(T)$. Como $P : X \longrightarrow ImT$ vem que

$$T_{|_{Ker(T)^{\perp}}} : Ker(T)^{\perp} \longrightarrow ImT,$$

onde $T_{|_{Ker(T)^{\perp}}} u = Tu$, para $u \in Ker(T)^{\perp}$ é bijectivo. Seja então

$$T^{-1}_{|_{Ker(T)^{\perp}}} : ImT \longrightarrow Ker(T)^{\perp}$$

o seu inverso e consideremos $S = T^{-1}_{|_{Ker(T)^{\perp}}} P$. Temos então que

$$ST - I = T^{-1}_{|_{Ker(T)^{\perp}}} PT - I = T^{-1}_{|_{Ker(T)^{\perp}}} T - I = -Q,$$

onde Q é a projecção ortogonal sobre $KerT$. Por outro lado,

$$TS - I = TT^{-1}_{|_{Ker(T)^{\perp}}} P - I = -(I - P).$$

Como $I - P$ e Q são projecções com dimensão finita e consequentemente compactos então $ST - I$ e $TS - I$ são ambos compactos.

$(iii) \Longrightarrow (i)$ Queremos mostrar que se existe $S \in \mathcal{B}(Y,X)$, $K_1 \in \mathcal{K}(X)$ e $K_2 \in \mathcal{K}(Y)$ tal que

$$ST = I_X + K_1 \quad e \quad TS = I_Y + K_2,$$

então T é de Fredholm.

Uma vez que para um qualquer operador compacto existe uma sucessão $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de operadores T_n de característica finita tal que $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para o operador compacto considerado temos, utilizando a nossa hipótese, que

$$ST = I_X + C_1 \quad e \quad TS = I_Y + C_2,$$

onde C_1 e C_2 são operadores de característica finita. Como $KerT \subset Ker(ST)$ e $ImTS \subset ImT$ vem que

$$dimKerT \leq dimKer(ST) = dimKer(I - C_1) < \infty$$

e que

$$dimCoKerT \leq dimCoKer(TS) = dimCoKer(I - C_2) < \infty.$$

Logo, atendendo à Proposição 2.36, o operador T é de Fredholm. ∎

Definição 2.42 *Consideremos T a ser um operador de Fredholm (actuando entre espaços de Hilbert). Como ambos os espaços vectoriais, Ker(T) e CoKer(T), têm dimensão finita, podemos associar a T um número inteiro*

$$\begin{aligned} ind(T) &= dimKer(T) - dimCoKer(T) \\ &= dimKer(T) - dimKer(T^*) \end{aligned} \tag{2.22}$$

usualmente denominado por índice de Fredholm do operador T.

Lema 2.43 *Supondo que $A_0 : M \longrightarrow Y$ é uma restrição de $A : X \longrightarrow Y$ a um subespaço M de X, tal que $CodimM = n < \infty$, então A é um operador de Fredholm se e só se A_0 é um operador de Fredholm e neste caso*

$$indA = indA_0 + n.$$

Demonstração. Basta provar este lema para $n = 1$. Em consequência podemos representar o espaço X do seguinte modo

$$X = M \oplus sp\{x_1\},$$

onde $x_1 \in CodimM$.

Consideremos os seguintes casos:

(i) Comecemos por assumir que $x_1 \in X$ é tal que $Ax_1 \notin ImA_0$. Note-se que se $Ax_1 \notin ImA_0$, podemos dizer que

$$AX = A_0M \oplus sp\{Ax_1\} \quad \text{e} \quad \text{que} \quad KerA_0 = KerA \tag{2.23}$$

e concluir que

$$dimKerA_0 = dimKerA \quad \text{e} \quad dimCoKerA_0 = dimCoKerA + 1 \tag{2.24}$$

(ii) Assumindo agora que $x_1 \in X$, é tal que $Ax_1 \in ImA_0$, temos que $ImA = ImA_0$, logo existe $u \in M$ tal que $Ax_1 = A_0u$ e consequentemente

$$KerA = KerA_0 \oplus sp\{x_1 - u\}.$$

Assim,

$$dimCoKerA_0 = dimCoKerA$$

$$dimKerA_0 = dimKerA - 1.$$

Como por definição $indA = dimKerA - dimCoKerA$, de i) e ii), fica provado que

$$indA = indA_0 + 1.$$

■

Proposição 2.44 *Sejam A e B dois operadores de Fredholm (actuando entre espaços de Hilbert). Se A e B são dois operadores de Fredholm então o produto BA é ainda um operador de Fredholm e*

$$ind(BA) = indB + indA.$$

Demonstração. Sejam $A : X \longrightarrow Y$ e $B : Y \longrightarrow Z$ dois operadores de Fredholm. Pretendemos mostrar que:

(i) $BA : X \longrightarrow Z$ é ainda um operador de Fredholm;

(ii) $ind(BA) = indB + indA$

Para provarmos i), consideremos que:

- $\tilde{A} : X_0 \longrightarrow Y_0$ é um operador bijectivo e uma restrição relativa ao operador A em X_0 (sendo consequentemente X_0 e Y_0 subconjuntos de X e Y, respectivamente);

- $A_0 : X_0 \longrightarrow Y$ é um operador que resulta da restrição relativa ao operador A em X_0.

Temos então :

$$BA_0 : X_0 \longrightarrow Z \quad ; \quad BA : X \longrightarrow Z \quad e \quad B\tilde{A} : X_0 \longrightarrow Z.$$

Sendo $\tilde{A}$ um operador bijectivo, tem inverso. Logo o operador $B\tilde{A}$ é de Fredholm. Adicionalmente, como $\tilde{A}$ é invertível temos que

$$Ker\tilde{A} = \{0\} \quad e \quad Im\tilde{A} = Y_0$$

e consequentemente

$$ind(B\tilde{A}) = indB$$

Dado que $B\tilde{A}$ é um operador de Fredholm e uma vez que sabemos que $B\tilde{A}$ é uma restrição do operador BA, pelo Lema 2.43 concluímos que BA é um operador de Fredholm.

Mostremos agora $ii)$, ou seja que $ind(BA) = indB + indA$. Como BA_0 é uma restrição de BA, através do Lema 2.43 ainda podemos dizer que

$$ind(BA) = ind(BA_0) + n,$$

sendo n a dimensão do núcleo de A. Sabemos, por definição, que

$$ind(BA_0) = dimKer(BA_0) - dimCoKer(BA_0).$$

Por outro lado, como $BA_0 : X_0 \longrightarrow Z$ e $B\tilde{A} : X_0 \longrightarrow Y_0$ vem que:

$$dimKer(BA_0) = dimKer(B\tilde{A})$$

e que

$$dimCoKer(B\tilde{A}) = dim(Z/Im(BA_0)) = dim(Z/Im(B\tilde{A})) + dim(Y/Y_0)$$

Assim,

$$\begin{aligned} ind(BA_0) &= dimKer(B\tilde{A}) - dim(Z/Im(B\tilde{A})) - dim(Y/Y_0) \\ &= ind(B\tilde{A}) - dim(Y/Y_0) \\ &= indB - dim(Y/Y_0) \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} ind(BA) &= indB - dim(Y/Y_0) + n \\ &= indB + n - dim(Y/Y_0) \\ &= indB + indA \end{aligned}$$

■

Proposição 2.45 *Seja n um qualquer inteiro não negativo. Se T é um operador de Fredholm então T^n também é um operador de Fredholm e*

$$ind(T^n) = n\ ind(T).$$

Demonstração. Queremos provar que $ind(T^n) = n\ ind(T)$. Comecemos por provar para $n = 0$. Note-se que para $n = 0$, T^0 é igual ao operador identidade (I). Como I é invertível $Ker(I) = \{0\}$, logo $dimKer(I) = 0$ e $dimCoKer(I) = 0$. Assim, aplicando a definição de índice de Fredholm temos que

$$ind(T^n) = dimKer(I) - dimCoKer(I) = 0 - 0 = 0$$

e portanto $ind(T^n) = n\ ind(T)$, com $n = 0$.

Provemos agora para $n \geq 1$, aplicando o método de indução. Temos, como hipótese de indução, que para $n = k$

$$ind(T^k) = k\ ind(T).$$

Queremos mostrar que para $n = k + 1$,

$$ind(T^{k+1}) = (k + 1)\ ind(T).$$

Pela proposição anterior,

$$ind(T^{k+1}) = ind(T^k T) = ind(T^k) + ind(T).$$

Como por hipótese de indução $ind(T^k) = k\ ind(T)$, logo

$$ind(T^{k+1}) = k\, ind(T) + ind(T)$$

o que equivale a ter

$$ind(T^{k+1}) = (k + 1)\, ind(T),$$

como pretendíamos demonstrar. ■

Proposição 2.46 *Suponhamos que $A : X \longrightarrow Y$ é um operador de Fredholm (actuando entre espaços de Hilbert) e seja $\tilde{A}$ a bijecção associada ao operador A. Se $B : X \longrightarrow Y$ é um operador linear limitado com $\|B\| < \|\tilde{A}^{-1}\|^{-1}$, então $A + B$ é um operador de Fredholm e*

(i) $dimKer(A + B) \leq dimKer(A)$;

(ii) $dimCoKer(A + B) \leq dimCoKer(A)$;

(iii) $ind(A+B) = indA$.

Demonstração. Seja $\tilde{A} : X_0 \longrightarrow Y_0$ um operador bijectivo e uma restrição relativa ao operador A em X_0, sendo consequentemente X_0 e Y_0 subconjuntos de X e Y, respectivamente.

Consideremos $C = A + B$ e seja $\tilde{C} : X_0 \times Y_0 \longrightarrow Y$, definido por

$$\tilde{C}(X_0, Y_0) = Cx_0 + y_0,$$

a restrição relativa ao operador C. Temos então que

$$\tilde{A}(X_0, Y_0) = Ax_0 + y_0.$$

Como por hipótese $\tilde{A}$ é um operador bijectivo, $\tilde{A}$ é invertível e consequentemente,

$$\|\tilde{A} - \tilde{C}\| < \|A - C\| = \|B\| < \|\tilde{A}^{-1}\|^{-1}.$$

Logo o operador $\tilde{C}$ é também um operador invertível.

Considerando ainda $C_0 : X_0 \longrightarrow Y$ um operador que resulta da restrição relativa ao operador C em X_0, definida por $C_0 x = Cx$, este operador ainda é uma restrição do operador $\tilde{C}$. Assim, pelo Lema 2.43, C é um operador de Fredholm e portanto $A+B$ é de Fredholm.

Mostremos agora que $ind(A+B) = indA$.

Ainda através do Lema 2.43, $indC = indC_0 + n$, logo

$$indC = ind\tilde{C} - dimCoKer(A) + n = ind(A)$$

e portanto $ind(A+B) = indA$. Por outro lado dado que $\tilde{C}$ é invertível, podemos dizer que $X_0 \cap KerC = \{0\}$ e consequentemente que

$$dimKer(C) \leq dimX/X_0 = dimKerA,$$

o que prova que $dimKer(A+B) \leq dimKerA$. Temos então que $ind(A+B) = indA$ e que $dimKer(A+B) \leq dimKerA$, o que nos permite concluir que

$$dimCoKer(A+B) \leq dimCoKerA.$$

∎

Proposição 2.47 *Sejam X, Y espaços de Hilbert, $A : X \longrightarrow Y$ um operador de Fredholm e K um operador compacto. Se A é de Fredholm e K é compacto, então*

$$ind(A+K) = indA.$$

Demonstração. Atendendo à Proposição 2.46(iii), temos que $A + \lambda K$ é um operador de Fredholm para todo o $\lambda \in [0, 1]$ e assim faz sentido considerarmos a seguinte aplicação $f : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{F}$ definida por $f(\lambda) = A + \lambda K$.

Por se tratar de uma homotopia, $ind(A_{\lambda_1}) = ind(A_{\lambda_2})$, qualquer que seja $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$. Em particular

$$f(0) = indA \quad \text{e} \quad f(1) = ind(A + K).$$

Logo $indA = ind(A + K)$. ■

Corolário 2.48 *Se $K : X \longrightarrow X$ é compacto então $I - K$ é um operador de Fredholm e $ind(I - K) = 0$.*

Demonstração. Para a propriedade de Fredholm, basta aplicar a Proposição 2.40. Quanto à fórmula para o índice, ela decorre da Proposição 2.47. ■

Teorema 2.49 *Seja $T \in \mathcal{B}(X)$, com X a ser um espaço de Hilbert. Então $ind(T) = 0$ se e só se T pode ser escrito como a soma de um operador invertível e um operador compacto.*

Demonstração. O Corolário 2.48 dá-nos uma das implicações a provar. Por outro lado, suponhamos que $ind(T) = 0$. Note-se que T fornece um isomorfismo entre $Ker(T)^{\perp}$ e $Im(T)$. Adicionalmente, $dimKer(T^*) = codimIm(T) = dimKer(T)$. Como

$$X = Ker(T)^{\perp} \oplus Ker(T) = Im(T) \oplus Ker(T^*),$$

podemos adicionar a T um qualquer isomorfismo, $A : Ker(T) \longrightarrow Ker(T^*)$, de forma a obter um operador invertível em X (e naturalmente A possui característica finita logo é compacto). ■

Capítulo 3

O Espectro de Operadores em Espaços de Hilbert

3.1 Definições Iniciais

Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um operador limitado e λ um número complexo. Ao operador T associamos o operador $T_\lambda : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ definido por

$$T_\lambda = \lambda I - T,$$

onde I representa o operador identidade em $\mathcal{H}$

Definição 3.1 *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um operador limitado e λ um número complexo.*

(i) Chamamos espectro de T e denotamos por $\sigma(T)$, ao conjunto

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \quad \textit{não} \quad \textit{é} \quad \textit{invertível}\}$$

(ii) Chamamos conjunto resolvente de T e representamos por $\rho(T)$, ao conjunto

$$\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$$

Definição 3.2 *Quando $\lambda \in \rho(T)$, o operador $\lambda I - T$ possui inverso, e tal inverso é chamado operador resolvente e denotado por $R_\lambda(T)$, isto é,*

$$R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}.$$

Exemplo 3.3 *Seja $B \in \mathcal{B}(X)$ e $T \in \mathcal{B}(Y, X)$. Desde que T seja invertível, $T^{-1} \in \mathcal{B}(X, Y)$, então*

$$\sigma(B) = \sigma(T^{-1}BT).$$

Na realidade, considerando $\lambda \notin \sigma(B)$, podemos concluir que $\lambda I - B$ é invertível. Por outro lado, como T é invertível, $T^{-1}(\lambda I - B)T$ também é invertível e consequentemente $\lambda I - T^{-1}BT$ é invertível. Logo $\lambda \notin \sigma(T^{-1}BT)$ e portanto $\sigma(B) = \sigma(T^{-1}BT)$.

Observação 3.4 *Também podemos dizer que $\sigma(T) = \sigma_l(T) \cup \sigma_r(T)$, onde*

- *$\sigma_l(T)$ é o espectro à esquerda definido por:*

$$\sigma_l(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \quad \textit{não} \quad \textit{é} \quad \textit{invertível} \quad \textit{à} \quad \textit{esquerda}\}$$

$$\sigma_l(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Ker(\lambda I - T) \neq \{0\}\}$$

- *$\sigma_r(T)$ é o espectro à direita definido por:*

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \quad \textit{não} \quad \textit{é} \quad \textit{invertível} \quad \textit{à} \quad \textit{direita}\}$$

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Im(\lambda I - T) \neq \mathcal{H}\}$$

3.2 Resolventes e Representações em Séries

Proposição 3.5 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e T um operador limitado. Então, para quaisquer $\lambda, \mu \in \rho(T)$,*

$$R_\mu - R_\lambda = (\lambda - \mu)R_\mu R_\lambda.$$

Demonstração. Sabemos, por definição que $R_\lambda = R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}$ e que

$$R_\mu = R_\mu(T) = (\mu I - T)^{-1}.$$

Assim, para quaisquer $\lambda, \mu \in \rho(T)$,

$$\begin{aligned}
(\mu I - T)(R_\mu - R_\lambda)(\lambda I - T) &= ((\mu I - T)R_\mu - (\mu I - T)R_\lambda)(\lambda I - T) \\
&= (\mu I - T)R_\mu(\lambda I - T) - (\mu I - T)R_\lambda(\lambda I - T) \\
&= \lambda I - T - (\mu I - T) \\
&= \lambda I - T - \mu I + T \\
&= (\lambda - \mu)I
\end{aligned}$$

o que implica que $R_\mu - R_\lambda = (\lambda - \mu)R_\mu R_\lambda$. ∎

Proposição 3.6 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ é convergente em $\mathcal{H}$, com $T^0 = I$. Então $I - T$ é invertível em $\mathcal{H}$ e*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Por outro lado, se $T \in \mathcal{H}$ é tal que $\|T\| < 1$ então:

i) $I - T$ é invertível;

ii) $(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$;

iii) $\|(I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}$

Demonstração. Suponhamos que $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ é convergente e consideremos $U = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$. Atendendo à continuidade da composição, tem-se que

$$TU = UT = \sum_{n=0}^{\infty} T^{n+1}.$$

Logo

$$(I - T)U = U(I - T) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n - \sum_{n=0}^{\infty} T^{n+1} = I.$$

O que implica que $(I - T)^{-1}$ existe e é igual a U, isto é

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Por outro lado, se $\|T\| \leq 1$ então a série $\sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n$ converge e portanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

Como $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert, $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ e portanto $\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\|$ é convergente. Dado que $I - T$ é invertível e que

$$\|(I - T)^{-1}\| = \|\sum_{n=0}^{\infty} T^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1 - \|T\|},$$

tem-se que

$$\|(I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

$\blacksquare$

3.3 Propriedades Espectrais

Proposição 3.7 *Se $\mathcal{H} \neq \{0\}$ é um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ então $\sigma(T) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Suponhamos que, dado $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\sigma(T)$ é vazio. Então $\rho(T) = \mathbb{C}$ e, por uso da Proposição 3.5, chega-se à conclusão de que

$$\begin{array}{rcl} R \ : \ \rho(T) & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ \lambda & \longmapsto & R(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1} \end{array}$$

é holomorfa em $\mathbb{C}$ (cf. detalhes em [7]).

Por outro lado, $R(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1}$ seria também limitada pois em particular seria contínua no disco compacto. Logo $|\lambda| \leq \|T\|$. Para $|\lambda| \geq \|T\|$ temos, aplicando a Proposição 3.6, que

$$\|R_\lambda\| = \|\lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}T)^{-1}\| \leq \frac{|\lambda|^{-1}}{1 - |\lambda|^{-1}\|T\|} = \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}$$

e portanto $\lim_{|\lambda| \to \infty} R_\lambda = 0$. Assim, pelo Teorema de Liouville [4] (válido para funções holomorfas de $\mathbb{C}$ em $\mathcal{H}$), R_λ teria de ser constante e igual a zero (por ter limite nulo no infinito). O que é um absurdo uma vez que $R_\lambda \in \mathcal{G}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$. ∎

Proposição 3.8 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e*

$$p(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + \alpha_0.$$

Então $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$, onde $p(\sigma(T))$ é o conjunto de todos os números complexos μ tal que $\mu = p(\lambda)$ para algum $\lambda \in \sigma(T)$.

Demonstração. Comecemos por mostrar que

$$\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T)).$$

Seja $\mu \in \sigma(p(T))$. Pretendemos mostrar que existe $\lambda_1 \in \sigma(T)$ tal que $\mu = p(\lambda_1)$.

Consideremos o seguinte polinómio:

$$\mu - p(\lambda) = \alpha_n(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)...(\lambda_n - \lambda). \tag{3.1}$$

Logo,

$$\mu I - p(T) = \alpha_n(\lambda_1 I - T)(\lambda_2 I - T)...(\lambda_n I - T).$$

Pela Proposição 3.7 sabemos que $\sigma(T) \neq \emptyset$. Logo, existe um μ em particular, definido para alguns $\lambda_i \in \sigma(T)$ de forma a que $\mu I - p(T)$ não seja invertível. Caso contrário, $\mu I - p(T)$ seria invertível com

$$(\mu I - p(T))^{-1} = \frac{1}{\alpha_n}(\lambda_n I - T)^{-1}...(\lambda_1 I - T)^{-1}$$

Seja então $\lambda = \lambda_i$. De (3.1) vem que

$$\mu - p(\lambda_i) = 0$$

e portanto

$$\mu = p(\lambda_i) \quad \in p(\sigma(T)).$$

Assim, dado que $\mu \in p(\sigma(T))$ é arbitrário, podemos concluir que

$$\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T)).$$

Mostremos agora que

$$p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T)).$$

Consideremos $\beta \in p(\sigma(T))$. Pretendemos mostrar que $\beta \in \sigma(p(T))$. Por definição, dado que $\beta \in p(\sigma(T))$, podemos dizer que para algum $\lambda_0 \in \sigma(T)$, $\beta = p(\lambda_0)$. Tem-se então que

$$\beta - p(\lambda_0) = 0.$$

Logo λ_0 é um zero do polinómio $p(\lambda) - \beta$. Podemos ainda dizer que

$$\beta - p(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)p_1(\lambda),$$

onde $p_1(\lambda)$ é um polinómio de grau $n-1$ ou seja, é um polinómio que está factorizado em $n-1$ termos lineares, e que

$$\beta I - p(T) = (\lambda_0 I - T)p_1(T). \tag{3.2}$$

Como os factores de $p_1(T)$ são lineares, comutam todos com $(\lambda_0 I - T)$, logo também podemos escrever

$$\beta I - p(T) = p_1(T)(\lambda_0 I - T) \tag{3.3}$$

Assim de (3.2) e (3.3) vem que

$$(\lambda_0 I - T)p_1(T) = p_1(T)(\lambda_0 I - T).$$

Note-se que se a inversa de $\beta I - p(T)$ existisse, teríamos

$$I = (\lambda_0 I - T)p_1(T)(\beta I - p(T))^{-1} = (\beta I - p(T))^{-1}p_1(T)(\lambda_0 I - T),$$

o que mostra que $\lambda_0 I - T$ seria invertível, contradizendo a nossa hipótese uma vez que $\lambda_0 \in \sigma(T)$. Logo $\beta \in \sigma(p(T))$ e portanto $p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T))$. ■

Exemplo 3.9 *Considerando A a ser um operador nilpotente (isto é, existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $A^n = 0$), então $\sigma(A) = \{0\}$.*

Por uso da Proposição 3.8, $\lambda \in \sigma(A)$ se e só se $\lambda^n \in \sigma(A^n)$. Isto é,

$$\sigma(A^n) = (\sigma(A))^n.$$

Uma vez que A é nilpotente,

$$\sigma(A^n) = \sigma(0) = \{0\}.$$

Temos então que

$$\lambda \in \sigma(A) \iff \lambda^n = 0 \iff \lambda = 0,$$

ou seja $\sigma(A) = \{0\}$.

Proposição 3.10 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Então $\lambda \in \sigma(T)$ se e só se $\bar{\lambda} \in \sigma(T^*)$, isto é $\sigma(T) = \overline{\sigma(T^*)}$.*

Demonstração. Para $\lambda \notin \sigma(T)$, tem-se que $\lambda \in \rho(T)$. Isto significa que existe um operador $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $T_\lambda S = ST_\lambda = I$. Passando aos adjuntos vem de forma equivalente que

$$S^*(T_\lambda)^* = (T_\lambda)^* S^* = S^* T^*_{\bar{\lambda}} = T^*_{\bar{\lambda}} S^* = I$$

isto é, $T^*_{\bar{\lambda}}$ é invertível ou, por outras palavras $\bar{\lambda} \in \rho(T^*)$. Ou seja, $\bar{\lambda} \notin \sigma(T^*)$.

Portanto $\lambda \in \sigma(T)$ se e só se $\bar{\lambda} \in \sigma(T)^*$. ■

Definição 3.11 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, $T \in \mathcal{B}(H)$ um operador limitado. Um número complexo λ chama-se valor próprio do operador T se existe $x \neq 0$ em H tal que*

$$(\lambda I - T)x = 0.$$

O vector $x \neq 0$ chama-se vector próprio de T associado ao valor próprio λ. Note-se que $\lambda \in \mathbb{C}$ é um valor próprio de T se e só se $Ker(\lambda I - T) \neq \{0\}$.

Observação 3.12 *Existem várias classificações que correspondem a vários tipos de espectro. Nesta âmbito podemos também dizer que o espectro $\sigma(T)$ é a união disjunta dos seguintes conjuntos*

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T),$$

onde

- $\sigma_p(T)$ *é o espectro discreto (ou pontual) de* T*, isto é,* $\sigma_p(T)$ *é o conjunto dos* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tais que* $R_\lambda(T)$ *não existe. Portanto se* $\lambda \in \sigma_p(T)$ *então* λ *é um valor próprio de* T*.*

- $\sigma_c(T)$ *é o espectro contínuo de* T*, isto é,* $\sigma_c(T)$ *é o conjunto dos* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tais que* $R_\lambda(T)$ *existe e está definido num conjunto* M *denso em* H *mas não é limitado.*

- $\sigma_r(T)$ *é o espectro residual de* T*, isto é,* $\sigma_r(T)$ *é o conjunto dos* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tais que* $R_\lambda(T)$ *existe mas não está definido num conjunto* M *denso em* H*. Neste caso* $R_\lambda(T)$ *pode ou não ser limitado.*

Proposição 3.13 *Seja* $\mathcal{H}$ *um espaço de Hilbert e* $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *um operador normal. Então, se* $\lambda \in \sigma_p(T)$ *e* x *é um vector próprio correspondente então* $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$ *e o mesmo* x *é um vector próprio de* T^* *correspondente a* $\bar{\lambda}$*.*

Demonstração. Seja $Tx = \lambda x$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$ e $x \neq 0 \in \mathcal{H}$. Como $\lambda I - T$ é um operador normal, pela Proposição 2.33 vem que

$$\|\bar{\lambda}x - T^*x\| = \|(\lambda I - T)^*x\| = \|(\lambda I - T)x\| = 0.$$

Logo $T^*x = \bar{\lambda}x$. ■

Exemplo 3.14 *Seja* $\mathcal{H}$ *um espaço de Hilbert e* $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$*. Dado que* B *é invertível se e só se* B^* *é invertível, então*

$$\sigma(B^*) = \sigma(B).$$

Considerando $\lambda \in \sigma(B)$*, temos que* $\lambda I - B$ *não é invertível, logo* $(\lambda I - B)^*$ *também não é invertível e portanto* $\lambda \in \sigma(B^*)$*.*

Definição 3.15 *O espectro essencial é o conjunto de todos os números complexos* λ *tal que* $(\lambda I - T)$ *não é um operador de Fredholm. Como tal, o espectro essencial é também designado de espectro de Fredholm:*

$$\sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \quad \textit{não} \quad \textit{é} \quad \textit{de} \quad \textit{Fredholm}\}$$

Capítulo 4

Teoria Espectral sobre Operadores Auto-Adjuntos em Espaços de Hilbert

Neste capítulo iremos analisar a existência de valores próprios de operadores auto-adjuntos limitados tendo em conta que sendo $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, T é um operador auto-adjunto se e só se $T^* = T$.

4.1 Operadores Auto-Adjuntos e Valores Próprios

Proposição 4.1 *Seja $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um operador auto-adjunto em $\mathcal{H}$. Então*

(i) Todos os valores próprios de T se existirem são reais;

(ii) Os vectores próprios correspondentes a valores próprios distintos são ortogonais.

Demonstração. Comecemos por mostrar (i).

Seja λ um valor próprio qualquer de T e x o vector próprio correspondente. Então $x \neq 0$ e $Tx = \lambda x$. Sabemos, por hipótese, que T é um operador auto-adjunto logo,

$$\begin{aligned} \lambda\langle x, x\rangle &= \langle \lambda x, x\rangle \\ &= \langle Tx, x\rangle \\ &= \langle x, Tx\rangle \\ &= \langle x, \lambda x\rangle \\ &= \bar{\lambda}\langle x, x\rangle \end{aligned}$$

Como $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$ e uma vez que $x \neq 0$, vem $\langle x, x\rangle \neq 0$. Assim, dividindo ambos os membros por $\langle x, x\rangle$, obtemos $\lambda = \bar{\lambda}$ e consequentemente que λ é real.

Mostremos agora (ii). Sejam λ, μ dois valores próprios de T e x, y os vectores próprios correspondentes. Então $Tx = \lambda x$ e $Ty = \mu y$. Dado que T é um operador auto-adjunto,

$$\begin{aligned} \lambda\langle x, y\rangle &= \langle \lambda x, y\rangle \\ &= \langle Tx, y\rangle \\ &= \langle x, Ty\rangle \\ &= \langle x, \mu y\rangle \\ &= \mu\langle x, y\rangle \end{aligned}$$

Como por hipótese $\lambda \neq \mu$ temos que $\langle x, y\rangle = 0$ e portanto x e y são ortogonais. ■

4.2 Caracterização do Resolvente para Operadores Auto-Adjuntos

Proposição 4.2 *Seja $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um operador auto-adjunto em $\mathcal{H}$. Então um número λ pertence ao conjunto resolvente $\rho(T)$ se e só se existe uma constante $c > 0$ tal que, para todo o $x \in \mathcal{H}$,*

$$\|T_\lambda x\| \geq c\|x\|$$

(onde $T_\lambda = \lambda I - T$).

Demonstração. Se, por hipótese, $\lambda \in \rho(T)$ então $R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1}$ existe e é limitado. Consideremos $\|R_\lambda(T)\| = k$, onde $k > 0$. Atendendo à definição de $R_\lambda(T)$ temos que $R_\lambda(T)T_\lambda = I$. Logo, para qualquer $x \in \mathcal{H}$, temos que

$$\|x\| = \|R_\lambda(T)T_\lambda x\| \leq \|R_\lambda(T)\|\|T_\lambda x\| = k\|T_\lambda x\|.$$

Assim, considerando $c = \frac{1}{k}$ temos que $\|T_\lambda x\| \geq c\|x\|$.

Suponhamos agora que existe uma constante $c > 0$, tal que para todo $x \in \mathcal{H}$,

$$\|T_\lambda x\| \geq c\|x\|.$$

Pretendemos agora mostrar que $\lambda \in \rho(T)$. Mostremos então que:

(i) $T_\lambda : \mathcal{H} \to T_\lambda(\mathcal{H})$ é bijectivo;

(ii) $T_\lambda(\mathcal{H})$ é denso em $\mathcal{H}$;

(iii) $T_\lambda(\mathcal{H})$ é fechado em $\mathcal{H}$

de forma a concluir que $T_\lambda(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ e que $R_\lambda = T_\lambda^{-1}$ existe e é limitado.

Comecemos então por mostrar (i). Queremos mostrar que se $T_\lambda x_1 = T_\lambda x_2$ então $x_1 = x_2$. Temos que

$$\|T_\lambda x_1 - T_\lambda x_2\| = \|T_\lambda(x_1 - x_2)\| = 0.$$

Como por hipótese, T_λ^{-1} é limitado, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|T_\lambda(x_1 - x_2)\| \geq c\|x_1 - x_2\| \tag{4.1}$$

Uma vez que $c > 0$, vem que $\|x_1 - x_2\| = 0$ e consequentemente $x_1 = x_2$, logo $T_\lambda : \mathcal{H} \to T_\lambda(\mathcal{H})$ é bijectiva.

Provemos agora (ii). Por definição, x_0 e $\overline{T_\lambda(\mathcal{H})}$ são ortogonais se

$$< x_0, \overline{T_\lambda(\mathcal{H})} >= 0.$$

Pretendemos mostrar que se $< x_0, \overline{T_\lambda(\mathcal{H})} >= 0$ então $x_0 = 0$. Se $x_0 \perp \overline{T_\lambda(\mathcal{H})}$ então $x_0 \perp T_\lambda(\mathcal{H})$. Deste modo, para qualquer $x \in \mathcal{H}$, temos que

$$0 = \langle T_\lambda x, x_0\rangle = \langle(\lambda I - T)x, x_0\rangle = \lambda\langle x, x_0\rangle - \langle Tx, x_0\rangle.$$

Como, por hipótese T é um operador auto-adjunto, temos que

$$0 = \langle T_\lambda x, x_0\rangle = \langle x, \bar{\lambda}x_0\rangle - \langle x, Tx_0\rangle$$

logo $\langle x, Tx_0\rangle = \langle x, \bar{\lambda}x_0\rangle$ (para todo o $x \in \mathcal{H}$), e através do Lema 2.23 $Tx_0 = \bar{\lambda}x_0$, o que implica que $x_0 = 0$. Na realidade, se $x_0 \neq 0$, aplicando a definição, significava que $\bar{\lambda}$ era um valor próprio de T e teríamos pela Proposição 5.1 que $\bar{\lambda} = \lambda$. Por outro lado,

$$\bar{\lambda}x_0 - Tx_0 = \lambda x_0 - Tx_0 = T_\lambda x_0 = 0$$

logo

$$0 = \|T_\lambda x_0\| \geq c\|x_0\| > 0 \qquad \text{com} \quad c > 0,$$

o que contradiz a hipótese. Como x_0 é um qualquer vector ortogonal de $T_\lambda(\mathcal{H})$ temos que

$$\overline{T_\lambda(\mathcal{H})}^{\perp} = \{0\}$$

e aplicando a Proposição 2.12, $\overline{T_\lambda(\mathcal{H})} = \mathcal{H}$. Logo $T_\lambda(\mathcal{H})$ é denso em $\mathcal{H}$.

Falta ainda mostrar (iii). Queremos mostrar que se $y \in \overline{T_\lambda(\mathcal{H})}$ então $y \in T_\lambda(\mathcal{H})$. Seja então $y \in \overline{T_\lambda(\mathcal{H})}$, logo existe uma sucessão $\{y_n\}$ em $T_\lambda(\mathcal{H})$, que converge para y. Como $y_n \in T_\lambda(\mathcal{H})$, então existem $x_n \in \mathcal{H}$ tais que

$$y_n = T_\lambda x_n.$$

De (4.1) vem que

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{c}\|T_\lambda(x_n - x_m)\| = \frac{1}{c}\|y_n - y_m\|,$$

logo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Como $\mathcal{H}$ é completo, também podemos dizer que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, digamos para $x \in \mathcal{H}$. Dado que T é um operador contínuo, T_λ também o é e portanto $y_n = T_\lambda x_n$ converge para $T_\lambda x$.

Por outro lado, $T_\lambda x \in T_\lambda(\mathcal{H})$ e dado que o limite de uma sucessão convergente num espaço de Hilbert é único, temos que

$$y = T_\lambda x.$$

Portanto $y \in T_\lambda(\mathcal{H})$. ■

4.3 Caracterização do Espectro para Operadores Auto-Adjuntos

Proposição 4.3 *Seja $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um operador auto-adjunto em $\mathcal{H}$. Então o espectro de T, $\sigma(T)$, é real.*

Demonstração. Consideremos $\lambda = \alpha + \beta i$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretendemos mostrar que se $\lambda \in \sigma(T)$ então $\lambda \in \mathbb{R}$. Sabemos, para qualquer $x \neq 0$ em $\mathcal{H}$, que

$$\langle T_\lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle - \langle Tx, x\rangle \tag{4.2}$$

Como $\langle x, x\rangle$ e $\langle Tx, x\rangle$ são reais,

$$\overline{\langle T_\lambda x, x\rangle} = \bar{\lambda}\langle x, x\rangle - \langle Tx, x\rangle \tag{4.3}$$

onde $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$. Subtraindo (4.3) a (4.2) temos que

$$\begin{aligned}
\overline{\langle T_\lambda x, x\rangle} - \langle T_\lambda x, x\rangle &= \bar{\lambda}\langle x, x\rangle - \langle Tx, x\rangle - \lambda\langle x, x\rangle + \langle Tx, x\rangle \\
&= (\bar{\lambda} - \lambda)\langle x, x\rangle \\
&= (\alpha - \beta i - \alpha - \beta i)\|x\|^2 \\
&= -2\beta i\|x\|^2
\end{aligned}$$

Note-se que o lado esquerdo é igual a

$$-2i\Im m\langle T_\lambda x, x\rangle$$

(onde $\Im m$ representa a parte imaginária do respectivo número complexo). Assim, dividindo por dois, tomando o valor absoluto e aplicando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz vem

$$\begin{aligned} |\beta|\|x\|^2 &= |\Im m\langle T_\lambda x, x\rangle| \\ &\leq |\langle T_\lambda x, x\rangle| \\ &\leq \|T_\lambda x\|\|x\| \end{aligned}$$

Dividindo por $\|x\| \neq 0$,

$$\|T_\lambda x\| \geq |\beta|\|x\|$$

e pela Proposição 4.2, para $\beta \neq 0$ vem que $\lambda \in \rho(T)$. Daqui decorre que se $\lambda \in \sigma(T)$ então β tem que ser nulo e portanto $\lambda = \alpha$ é real. ■

Exemplo 4.4 *Seja $\mathcal{H} = L^2([0,1])$ e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Consideremos $T : L^2([0,1]) \longrightarrow L^2([0,1])$ definido por $(Tx)(t) = tx(t)$. Então T é um operador auto-adjunto, sem valores próprios e $\sigma(T) = [0,1]$.*

Temos, para quaisquer $x, y \in L^2([0,1])$, que

$$\begin{aligned} (Tf, g) &:= \int_0^1 (Tf)(t)\overline{g(t)}dt \\ &= \int_0^1 tf(t)\overline{g(t)}dt \\ &= \int_0^1 f(t)\overline{tg(t)}dt \\ &= (f, Tg) \end{aligned}$$

Logo $T^* = T$ ou seja T é auto-adjunto.

Provemos agora que T não tem valores próprios. Temos que

$$(T_\lambda x)(t) = ((\lambda I - T)x)(t) = (\lambda - t)x(t).$$

Seja $t \neq \lambda$, para $t \in [0,1]$. Então $(T_\lambda x)(t) = 0$ implica $x(t) = 0$ e portanto $x = 0$ em $L^2([0,1])$. Logo $\lambda \in [0,1]$ não pode ser valor próprio de T.

Consideremos então $\lambda \notin [0,1]$. Temos que

$$(T_\lambda^{-1}x)(t) = (\lambda - t)^{-1}x(t)$$

e, uma vez que $\lambda \in \rho(T)$, o operador T_λ^{-1} é limitado.

Capítulo 5

Conclusão

Tendo presente que a hoje designada Teoria de Fredholm foi originada pelo estudo das equações integrais no início do século XX, esta dissertação perspectivou e exemplificou várias propriedades e consequências inerentes ao núcleo e imagem de operadores lineares.

O enquadramento que mais globalmente foi usado esteve associado aos espaços de Hilbert, pela importância que estes tiveram para o desenvolvimento da Teoria de Fredholm.

Por fim, algum relevo foi igualmente dado à Teoria Espectral e sua importância para a determinação de propriedades de invertibilidade de correspondentes operadores.

Bibliografia

[1] W. Arveson: *A Short Course on Spectral Theory*, Springer, New York, 2002.

[2] L. Debnath; P. Mikusinski: *Introduction to Hilbert Spaces with Applications*, Academic Press, San Diego, 1990.

[3] I. Gohberg; S. Goldberg; M.A. Kaashoek: *Classes of Linear Operators*, Vol. I, Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.

[4] R.E. Greene; S.G. Krantz: *Function Theory of One Complex Variable*, 2nd ed, American Mathematical Society, Providence, 2002.

[5] C.S. Hönig: *Análise Funcional e o Problema de Sturm-Liouville*, Edgard Blücher, São Paulo, 1978.

[6] P.K. Jain; O.P. Ahuja; K. Ahmad: *Functional Analysis*, New Age International, New Delhi, 1995.

[7] E. Kreyszig: *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1989.

[8] S. Lang: *Real Analysis*, Addison-Wesley, Reading (Mass), 1969.

[9] V. Müller: *Spectral Theory of Linear Operators and Spectral Systems in Banach Algebras*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2003.

[10] B.D. Reddy: *Introductory Functional Analysis with Applications to Boundary Value Problems and Finite Elements*, Springer, New York, 1998.

[11] M. Schechter: *Principles of Functional Analysis*, 2nd ed, American Mathematical Society, Providence, 2001.