Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2006

**Luís Miguel
Fonseca Nunes**

Séries de potências formais em duas variáveis hipercomplexas totalmente regulares

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2006

Luís Miguel Fonseca Nunes

Séries de potências formais em duas variáveis hipercomplexas totalmente regulares

dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática, realizada sob a orientação científica do Professor Doutor Helmuth Robert Malonek, Professor Catedrático do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

o júri

presidente	Prof. Doutor Domingos Moreira Cardoso professor Catedrático do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.
vogal	Prof. Doutor Semyon B. Yakubovich professor Associado com Agregação do Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.
vogal	Prof. Doutor Helmuth Robert Malonek (Orientador) professor Catedrático do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro .

agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer ao Professor Doutor Helmuth Robert Malonek pela sua orientação, paciência e apoio ao longo destes dois anos.
Gostaria de deixar uma saudação especial à minha colega de Mestrado Tânia, pelas suas sugestões, apoio, amizade e companheirismo.
O meu agradecimento a todos aqueles que acreditaram nas minhas capacidades e me incentivaram a não desistir nos momentos difíceis.
Aos meus pais pelo apoio e presença constante ao longo destes anos de trabalho.
Um obrigado à Carla e à Noémia pela disponibilidade com que se prontificaram em ajudar-me nos momentos de maiores dificuldades.
À minha família, aos meus amigos de Algodres e aos meus colegas pelo incentivo e amizade ao longo destes dois anos.

palavras-chave

Séries de potências formais, convergência, funções monogénicas, abordagem de Cauchy, diferenciabilidade hipercomplexa, Análise de Clifford, produto permutacional, extensão de Cauchy-Kowalewskaya.

resumo

O principal objectivo deste trabalho consiste em estudar séries de potências formais em duas variáveis hipercomplexas totalmente regulares.
No capítulo um referimos as definições e resultados básicos da teoria das séries de potências formais. Terminamos este capítulo com alguns exemplos das séries formais clássicas.
O segundo capítulo é dedicado ao estudo de séries de potências formais do ponto de vista da convergência. Mencionamos dois teoremas fundamentais da teoria das séries: O Teorema da Divisão de Rückert e o Teorema de Preparação de Weierstrass.
No terceiro capítulo referimos alguns fundamentos da Análise de Clifford. Apresentamos o conceito de diferenciabilidade hipercomplexa de funções com valores numa Álgebra de Clifford. Mostramos que a classe de funções diferenciáveis hipercomplexas coincide com a classe de funções monogénicas, definidas como soluções de um sistema generalizado de Cauchy-Riemann. Abordamos o produto n-ário que pode ser aplicado para construir a analogia de séries de potências, para que estas gerem funções monogénicas. Finalmente discutimos o conceito da extensão de Cauchy-Kowalewskaya como aplicação para obter, a partir de séries de potências de várias variáveis reais, séries em termos de duas ou mais variáveis totalmente regulares.
No quarto e último capítulo utilizamos os elementos da Análise de Clifford para construir exemplos de séries formais em duas variáveis hipercomplexas totalmente regulares.

keywords

Formal power series, convergence, monogenic functions, Cauchy approach, hypercomplex differentiability, Clifford Analysis, permutational product, Cauchy-Kowalewskaya extension.

abstract

The main objective of this work consists of studying formal power series in two total regular hypercomplex variables.
In the first chapter we refer the definitions and basic results of the formal power series theory. We finish this chapter with some examples of classic formal series.
The second chapter is dedicated to the study of formal power series in convergence point of view. We mention two crucial theorems of the series theory: The Ruckert's Division Theorem and The Weierstrass's Preparation Theorem.
In the third chapter we refer some beddings of the Clifford Analysis. We present the hypercomplex differentiability concept of functions with values in a Clifford Algebra. We show that the class of hypercomplex differential functions coincides with the class of monogenic functions, defined as solutions of a generalized system of Cauchy- Riemann. We develop the product n-ário that can be applied to construct the analogy of power series so that these generate monogenic functions. Finally we argue the concept of the Cauchy-Kowalewskaya extension as application to get from power series of some real variables, series in terms of two or more total regular variables.
In the fourth and last chapter we use the elements of the Clifford Analysis to construct examples of formal series in two total regular hypercomplex variables.

Conteúdo

Introdução **iii**

1 Fundamentos da teoria de séries de potências formais **1**

1.1 Séries de potências formais 1

1.2 Representação matricial de séries de potências formais 11

1.3 Exemplos de séries formais 22

1.3.1 Série exponencial 22

1.3.2 Série binomial 24

1.3.3 Série logarítmica 30

2 Séries de potências convergentes através de séries de potências formais **33**

2.1 Definições básicas 33

2.1.1 Convergência normal e convergência absoluta 33

2.1.2 Funções holomorfas representadas por séries de potências formais . . . 44

2.1.3 O exemplo da função exponencial 47

2.2 Regularidade e Teoremas Importantes 48

2.2.1 Conceitos básicos sobre séries de potências formais em mais do que uma variável 48

2.2.2 Definição de regularidade 57

2.2.3 Teorema da Divisão de Rückert 58

2.2.4 Teorema de Preparação de Weierstrass 61

3 Fundamentos da Análise de Clifford **63**

3.1 Definição da Álgebra de Clifford 64

3.2 Diferenciabilidade hipercomplexa 66

3.2.1 Definição da derivada hipercomplexa 68
3.2.2 Diferenciabilidade hipercomplexa e monogenicidade 69
3.2.3 Produto Permutacional 74
3.3 Extensão de Cauchy-Kowalewskaya 84

4 Séries de potências generalizadas na Análise de Clifford 87
4.1 Um método de construção de funções holomorfas de uma variável complexa . 87
4.2 Construção de séries de potências generalizadas que representam funções elementares monogénicas 91
4.2.1 Função exponencial generalizada 91
4.2.2 Co-seno generalizado 97
4.2.3 Seno generalizado 101
4.2.4 Co-seno hiperbólico generalizado 103
4.2.5 Seno hiperbólico generalizado 107

Conclusão 109

Bibliografia 113

Introdução

Leonhard Euler (1707-1783) publicou em 1748 *Introdução à Análise dos Infinitos*, uma obra considerada fundadora da Análise: onde pela primeira vez o objecto central de estudo era a função; até então estudavam-se *quantidades*, que se relacionavam umas com as outras através de equações.

Euler dedica boa parte do livro a encontrar expansões em séries de potências, das funções que conhece. Essas séries de potências não necessitavam de ser convergentes, bastava que resultassem das funções expandidas por operações formais; as séries assim obtidas *representavam* as funções expandidas, mesmo que não tivessem os mesmos valores. As séries eram tratadas *algebricamente*.

Num artigo "sobre uma nova espécie de cálculo relativo à diferenciação e à integração de quantidades variáveis", publicado nas *Novas Memórias da Academia de Berlim* em 1772, Lagrange (1736-1813) apresenta uma nova noção do cálculo diferencial, "independente de toda a metafísica e toda a teoria de quantidades infinitamente pequenas ou desvanecentes". A ideia é simples: Lagrange parte da expansão de uma função $f(x)$ em série de potências do acréscimo i da variável

$$f(x+i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \dots$$

onde $p, q, r, \dots$ serão novas funções de x, derivadas de f; então p é a primeira derivada de f; pelo teorema de Taylor, $p = \frac{df}{dx}$, $q = \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}$, etc. Era necessário que qualquer função fosse expandível em séries de potências, e Lagrange "provou" isso em 1797, numa obra fundamental: a *Teoria das Funções Analíticas*. Para Lagrange, como para Euler, a convergência das séries era uma questão secundária, de forma que, trabalhar com séries não implicava necessariamente considerar limites.

O trabalho de Lagrange entra em clara ruptura com tudo o que há de anterior, mas notamse também influências de Euler: a importância das séries de potências. É verdade que Euler não tentou provar a expansibilidade em séries de potências de qualquer função, mas estava convencido dessa possibilidade. Também é verdade que as séries não têm para Euler o papel central nos *princípios* que têm para Lagrange, mas é difícil dar-lhe um papel mais central nos *desenvolvimentos*.

Uma excepção interessante à tendência algebrizante do século XVIII é o matemático português José Anastácio da Cunha (1744-1787). A única obra que Anastácio da Cunha conseguiu começar a publicar em vida foi um compêndio intitulado *Princípios Mathematicos*. No que se refere à teoria das séries, precede os trabalhos de Augustin Louis Cauchy (1789-1857) e Bernard Bolzano (1781-1848). Anastácio da Cunha foi o primeiro a fornecer uma definição correcta do conceito de convergência de uma série numérica. Anastácio dá como definição de convergência a condição que Cauchy, meio século depois, demonstrou ser necessária e suficiente (ver [20]): *"Série convergente chamam os Matemáticos àquela cujos termos são semelhantemente determinados, cada um pelo número dos termos precedentes, de sorte que sempre a série se possa continuar e finalmente venha a ser indiferente e continuá-la ou não, por se poder desprezar sem erro notável a soma de quantos termos se quisesse ajuntar aos já escritos ou indicados; e estes últimos indicam-se escrevendo etc, depois dos primeiros dois, ou três, ou quantos se quiser; é porém necessário que os termos escritos mostrem como se poderia continuar a série, ou que isso se saiba por outra via (Definição I, Livro IX)"*.

A linguagem não é fácil de seguir, mas pelo uso que Anastácio da Cunha faz desta definição percebe-se o seu significado: a série $u_1 + u_2 + \ldots$ é convergente se, dada uma grandeza arbitrária ϵ, a partir de algum n, qualquer "continuação" da série, isto é, qualquer soma $u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+r}$ for menor do que ϵ; em termos modernos, Anastácio da Cunha diz que a série $u_1 + u_2 + \ldots$ é convergente se a sucessão das suas somas parciais for uma sucessão de Cauchy.

No livro de Anastácio da Cunha, na parte que trata da teoria das séries, começa por tratar das séries de termos positivos e dá, de um modo preciso e exacto, o critério para a sua convergência, que imediatamente aplica à progressão geométrica decrescente. Depois, para julgar da convergência de cada série dada, manda comparar os seus termos com os desta progressão. Esta doutrina equivale ao teorema hoje clássico: «se a razão de dois termos consecutivos de uma série tende para um limite, inferior à unidade, quando a ordem deles tende para o infinito, a série é convergente». Anastácio da Cunha não enuncia este teorema, que foi mais tarde apresentado por Cauchy, mas a sua doutrina resolve a questão da convergência da série, proposta nos mesmos casos em que o teorema enunciado a resolve.

Na teoria do desenvolvimento das funções em séries, a sua demonstração da fórmula de Taylor tem o vício das que tinham sido apresentadas antes dele e não difere delas essencialmente. Só mais tarde Lagrange deu a primeira demonstração rigorosa por meio da consideração do resto da série. A esta doutrina das séries está ligada a dos números irracionais, representados por potências de expoente fraccionário ou irracional, que constitui a parte mais notável da obra de Anastácio da Cunha.

Um ponto de vista clássico acerca da teoria das funções complexas de variável complexa, foi extensivamente explorado por Weierstrass (1815-1897), que dá ênfase ao conceito de série de potências formais. O ponto de partida da abordagem de Weierstrass à teoria das funções complexas de variável complexa é precisamente o conceito de série de potências convergente.

Um dos maiores temas do século passado tem sido a crescente substituição do pensamento humano por programas de computador. Todas as áreas de negócios, científicas, médicas e actividades governamentais estão agora computarizadas, incluindo sectores que nós humanos tinhamos pensado exclusivamente para nós. As fronteiras do pensamento humano estão a ser deixadas para trás através de processos automatizados.

Os programas de Matemática: Maple, Mathematica, Matlab, entre outros, têm uma grande comodidade na manipulação algébrica de fórmulas.

O que podemos esperar dos métodos de computadores são pequenas (ou grandes) provas em formato uniformizado. Os seres humanos podem ter muitos problemas em encontrar essas provas, mas o procedimento de verificação é perfeitamente civilizado e envolve uma pequena (ou grande) quantidade de trabalho humano.

Obviamente não podemos dizer que os métodos de computador são os melhores para todas as situações. Por vezes, os resultados que eles produzem são mais demorados e menos "amigos do utilizador" do que os encontrados por meios humanos. Mas a emergência desses métodos colocou uma importante família de ferramentas na mão de matemáticos discretos, e muitos dos resultados, que não eram acessíveis de outra maneira, foram encontrados e provados por métodos de computador.

Em suma podemos verificar que com o aparecimento dos computadores deu-se o renascimento no tratamento das séries de potências formais, ou seja, houve um novo interesse em detectar novas fórmulas uma vez que através dos computadores pudemos fazer a verificação algébrica muito mais rápida do que manualmente.

Este trabalho divide-se em quatro capítulos.

No *primeiro capítulo* fazemos uma introdução às séries de potências formais, referindo as suas propriedades e definindo também as suas operações. Apresentamos ainda uma representação das séries de potências formais a nível matricial. Terminamos expondo alguns exemplos de séries formais: exponencial, binomial e logarítmica.

No *segundo capítulo* estudamos em detalhe séries de potências formais convergentes. Começamos por relembrar a noção de convergência e algumas das suas principais propriedades: convergência absoluta e reordenação de séries convergentes. Seguidamente, introduzimos séries formais convergentes e discutimos as operações com elas: soma de duas séries formais, multiplicação de duas séries formais, substituição de duas séries formais e derivação de duas séries formais. Em particular, obtemos o Princípio da Identidade para funções associadas a séries de potências convergentes. Finalmente, expomos e provamos dois resultados essenciais da teoria: Teorema da Divisão de Rückert e o teorema de Preparação de Weierstrass.

No capítulo um e dois abordamos não o ponto de vista de Cauchy baseado na diferenciabilidade, mas o *ponto de vista de Weierstrass*, isto é, a teoria das séries convergentes. Este tem o mesmo precedente duma exposição suscinta das operações formais sobre as séries, ou seja, é o que hoje em dia chamamos a teoria das séries formais.

No *terceiro capítulo* descrevemos um conceito elementar de diferenciabilidade hipercomplexa de funções com valores em $\mathcal{C}l_{0,n}$ definidas num subconjunto aberto $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$, onde $\mathcal{C}l_{0,n}$ é uma álgebra de Clifford sobre o corpo dos números reais. Usando uma nova estrutura hipercomplexa de $\mathbb{R}^{n+1}$, obtemos uma generalização muito natural da abordagem de Cauchy às funções holomorfas. Por outro lado, mostramos que a classe de funções diferenciáveis hipercomplexas coincide com a classe de funções monogénicas, isto é, solução de um sistema generalizado de Cauchy-Riemann.

Indicamos uma generalização elementar da abordagem de Weierstrass para a teoria das funções holomorfas na teoria das funções hipercomplexas. Discutimos as propriedades do produto n-ário, o qual poderá ser aplicado para construir a analogia de séries de potências formais e convergentes em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Os resultados são de ampla uniformidade formal com a teoria de funções de várias variáveis complexas. Isto advem da nova estrutura hipercomplexa do espaço real $\mathbb{R}^{n+1}$.

No *quarto capítulo* tratamos séries de potências formais que correspondem às funções elementares. Estudamos um método para a geração de funções monogénicas baseado na solução de equações diferenciais hipercomplexas. Esta relação está ligada com uma abordagem sistemática, para a, geração de funções monogénicas elementares, como soluções de equações diferenciais parciais. Em particular, estas funções são tratadas como uma aplicação de funções com domínios em R^3 para domínios em R^3.

O método está relacionado com a abordagem de Fueter (1880-1950) para a geração de funções monogénicas quaterniónicas.

Capítulo 1

Fundamentos da teoria de séries de potências formais

Uma série de potências formal pode ser pensada como um "polinómio com infinitos termos". Alternativamente podemos pensar uma série de potências formal como uma série de potências em que ignoramos os problemas de convergência. Numa série de potências formal, o que é relevante é a sequência dos coeficientes. Muitas das operações que se realizam em polinómios podem ser alargadas ao ajuste das séries de potências formais. Este capítulo que se baseia nos livros de Cartan [7], Henrici [13] e Ruiz [23] serve para relembrar algumas noções importantes, onde apresentamos algumas definições básicas e alguns teoremas que são a chave para o desenvolvimento deste trabalho.

1.1 Séries de potências formais

Seja $\mathbb{K}$ o corpo comutativo dos números reais ou complexos, e seja P um polinómio em $x \in \mathbb{K}$ com coeficientes nesse corpo. A adição de dois polinómios e a multiplicação de um polinómio por um escalar fazem com que $\mathbb{K}[P]$ seja um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, formado pela base infinita $I, x, \ldots, x^n, \ldots$.

Cada polinómio P é uma combinação linear finita dos elementos da base $\{x^n\}$ com coeficientes em $\mathbb{K}$, ou seja,

$$P := \sum_{\nu \geq 0} a_\nu x^\nu.$$

Ao longo deste trabalho iremos denotar por $\{a_\nu\}$ a sucessão de elementos do corpo $\mathbb{K}$.

Em termos de estrutura algébrica, a passagem de polinómios para séries de potências formais não levanta quaisquer problemas adicionais.

Definição 1.1.1 *Dada uma sucessão infinita $\{c_0, c_1, ..., c_n, \ldots\}$ de números reais ou complexos, a série*

$$Q := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{1.1}$$

*chama-se **série de potências formal** de elementos $c_n \in \mathbb{K}$ com $n = 0, 1, 2, \ldots$ Os números c_n chamam-se **coeficientes da série** e x é um número real ou complexo.*

Com as séries de potências formais podemos efectuar várias operações tais como, o produto de duas séries de potências, a soma de duas séries de potências, a multiplicação de uma série por um escalar, entre outras. Sendo assim, vamos então ver como se definem essas operações em concreto.

Sejam dadas duas séries de potências formais $A := \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ e $B := \sum_{n\geq 0} b_n x^n$, definimos a soma de duas séries de potências formais por:

$$A + B := \sum_{n\geq 0} a_n x^n + \sum_{n\geq 0} b_n x^n = \sum_{n\geq 0} c_n x^n = C \tag{1.2}$$

onde

$$c_n = a_n + b_n. \tag{1.3}$$

O elemento neutro da adição é a série de potências formal $\theta := \sum_{n\geq 0} d_n x^n$ com $d_n = 0$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, ou seja, é a série de potências formal

$$\theta := 0 + 0x + 0x^2 + \ldots = 0.$$

Definimos o produto de duas séries de potências formais por:

$$A.B := \left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right) = \sum_{n} \check{c}_n x^n = \check{C} \tag{1.4}$$

onde

$$\check{c}_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q. \tag{1.5}$$

O elemento neutro do produto é a série de potências formal $I := \sum_{n \geq 0} c_n x^n$ com $c_0 = 1, c_n = 0$ para $n > 0$, ou seja, é a série de potências formal $I := 1 + 0x + 0x^2 + \ldots$.

Seja $A := \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ uma série de potências formal e $\lambda \in \mathbb{K}$ um escalar, definimos o produto de uma série de potências formal por um escalar do seguinte modo:

$$\lambda.A := \lambda \left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) = \sum_{n \geq 0} (\lambda a_n)\, x^n. \tag{1.6}$$

O produto de duas séries de potências formais é comutativo, associativo e bilinear, ou seja,

- $PQ = QP$
- $(P_1 + P_2)Q = P_1 Q + P_2 Q$
- $(\lambda P)Q = \lambda(PQ)$

quaisquer que sejam as séries de potências formais P, P_1, P_2, Q e o escalar $\lambda \in \mathbb{K}$.

$\mathbb{K}[P]$ é uma álgebra comutativa sobre o corpo $\mathbb{K}$ com unidade, em particular é um anel comutativo com unidade. Definimos $\mathbb{K}[P] = \mathbb{K}[[x]]$ como o conjunto ou o anel das séries de potências formais, indicando assim a indeterminada usada. Os elementos deste anel devem ser pensados como séries de potências cujos coeficientes são elementos de $\mathbb{K}$.

Definição 1.1.2 *Seja $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ uma série de potências formal que abreviaremos por S. A **ordem de uma série de potências formal** S designa-se por $w(S)$ e é o menor inteiro n tal que $a_n \neq 0$.*

Nota: Se $S = 0$ convencionamos que $w(0) = +\infty$. #

Definição 1.1.3 *Uma família $(S_i(x))_{i \in \mathbb{I}}$ de séries de potências formais, onde $\mathbb{I}$ designa um conjunto de índices, chama-se **somável** se, para todo o inteiro k, temos $w(S_i) \geq k$ excepto para um número finito de índices i.*

Designamos **monómio de grau** p a uma série de potências formal tal que $a_n = 0$ para $n \neq p$.

Proposição 1 *O anel* $\mathbb{K}[[x]]$ *é um anel de integridade, o que significa que, se* $S \neq 0$ *e* $T \neq 0$*, então* $ST \neq 0$.

Demonstração:

Suponhamos que as séries de potências formais $S(x) = \sum_p a_p x^p$ e $T(x) = \sum_q a_q x^q$ não são nulas. Sejam $p = w(S)$ e $q = w(T)$ então o produto $S(x)T(x) = \sum_n c_n x^n$ onde $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$. Para $n < p + q$ temos que $c_n = 0$ e $c_{p+q} = a_p b_q$. Como $\mathbb{K}$ é um corpo e $a_p \neq 0$ e $b_q \neq 0$ temos $c_{p+q} \neq 0$, logo ST não é nula.

Além disso provámos que $w(ST) = w(S) + w(T)$ para $S \neq 0$, $T \neq 0$.

■

Consideremos agora duas séries de potências formais $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ e $T(y) = \sum_{p \geq 0} b_p y^p$. Suponhamos que $b_0 = 0$, o que equivale a dizer que, $w(T) \geq 1$. A cada monómio $a_n x^n$ associamos a série formal $a_n (T(y))^n$ (o que tem sentido porque as séries de potências formais em y formam uma álgebra). Como $b_0 = 0$ a ordem de $a_n(T(y))^n$, é maior ou igual a n, então a família $a_n(T(y))^n$ onde n toma valores $0, 1, 2, 3, \ldots$ é somável e podemos considerar a série de potências formal

$$V := \sum_n a_n (T(y))^n \tag{1.7}$$

onde reagruparemos os termos em y. Esta série de potências formal em y chama-se a **substituição** de $T(y)$ em $S(x)$, ou a **composição** de S com T que designaremos por $S(T(y))$ ou $S \circ T$ e possui as seguintes propriedades:

$$(S_1 + S_2) \circ T = S_1 \circ T + S_2 \circ T \tag{1.8}$$

$$(S_1 S_2) \circ T = (S_1 \circ T)(S_2 \circ T) \tag{1.9}$$

$$1 \circ T = 1 \tag{1.10}$$

quaisquer que sejam as séries de potências formais S_1, S_2 e T. A propriedade (1.9) é a **lei distributiva da composição em relação à multiplicação**.

Estas propriedades mostram que para uma série de potências formal T com $w(T) \geq 1$ a aplicação $S \longrightarrow S \circ T$ é **um homomorfismo do anel** $\mathbb{K}[[x]]$ **no anel** $\mathbb{K}[[y]]$, transformando o elemento unidade 1 nele próprio.

Seja S uma série de potências formal e $I(x)$ a série de potências formal definida por $I(x) = x$. Então $I(x) = x$ é o elemento neutro para a composição das séries de potências formais

$$S \circ I = S = I \circ S.$$

Nota: Se substituirmos x por 0 em $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ obtemos a série de potências formal a_0 reduzida ao seu *termo constante.* Se tivermos uma família somável de séries de potências formais S_i e se $w(T) \geq 1$ a família $S_i \circ T$ é somável e além disso,

$$\sum_i S_i \circ T = \sum_i (S_i \circ T) \tag{1.11}$$

o que generaliza a propriedade (1.8). #

Seja $S_i(x) = \sum_{n \geq 0} a_{n,i} x^n$, então $\sum_i S_i(x) = \sum_{n \geq 0} \sum_i a_{n,i} x^n$ donde

$$\sum_i S_i \circ T = \sum_{n \geq 0} \sum_i a_{n,i} (T(y))^n \tag{1.12}$$

enquanto que

$$\sum_i S_i \circ T = \sum_i \sum_{n \geq 0} a_{n,i} (T(y))^n. \tag{1.13}$$

Para provar a igualdade do segundo membro de (1.12) e (1.13) observamos que, em cada um deles, o coeficiente de uma potência dada y^p, apenas faz intervir um número finito de coeficientes $a_{n,i}$ e aplicamos a associatividade da adição (finita) no corpo $\mathbb{K}$.

Proposição 2 (Associatividade da substituição) *Sejam S, T, U séries de potências formais, então*

$$(S \circ T) \circ U = S \circ (T \circ U) \tag{1.14}$$

sempre que $w(T) \geq 1, w(U) \geq 1$.

Demonstração:

Os dois membros de (1.14) têm sentido, desde que S seja um monómio. Eles são iguais porque

$$T^n \circ U = (T \circ U)^n \tag{1.15}$$

que resulta de (1.9) por recorrência sobre n. O caso geral de (1.15) deduz-se considerando a série S como a soma (infinita) dos seus monómios $\sum_n a_n x^n$; onde temos por definição

$$S \circ T = \sum_{n \geq 0} a_n T^n$$

e depois de (1.12)

$$(S \circ T) \circ U = \sum_{n \geq 0} a_n (T^n \circ U),$$

o que depois de (1.15) é igual a

$$\sum_{n \geq 0} a_n (T \circ U)^n = S \circ (T \circ U).$$

■

No anel $\mathbb{K}[[y]]$ temos a identidade

$$(1 - y)(1 + y + \ldots + y^n + \ldots) = 1 \tag{1.16}$$

cuja prova é imediata porque

$$(1 - y)(1 + y + \ldots + y^n + \ldots) = 1 + y + \ldots + y^n - y - y^2 - \ldots = 1$$

donde concluimos que a série $1 - y$ tem um inverso em $\mathbb{K}[[y]]$ (isto é, no sentido das séries de potências formais sem colocar a questão de convergência).

Proposição 3 *Para que a série de potências formal $S(x) = \sum_n a_n x^n$ possua um elemento inverso em relação à multiplicação de $\mathbb{K}[[x]]$ é necessário e suficiente que $a_0 \neq 0$, ou seja, $S(0) \neq 0$.*

Demonstração:

A condição necessária verifica-se porque, se $T(x) = \sum_n b_n x^n$ e $S(x)T(x) = 1$ temos $a_0 b_0 = 1$, donde concluimos que $a_0 \neq 0$.

Reciprocamente, suponhamos que $a_0 \neq 0$, vamos mostrar que $(a_0)^{-1}S(x) = S_1(x)$ tem uma inversa $T_1(x)$, donde resultará que $S(x)$ tem por inversa $(a_0)^{-1}T_1(x)$. Ou $S_1(x) = 1 - U(x)$ com $w(U) \geq 1$. Então podemos substituir $U(x)$ por y em (1.16) e por conseguinte $1 - U(x)$ tem uma inversa.

■

Seja $S(x) = \sum_n a_n x^n$ uma série de potências formal, então a sua derivada que se designa por S' é a série

$$S'(x) = \sum_{n \geq 0} n a_n x^{n-1}. \tag{1.17}$$

A aplicação $S \longrightarrow S'$ é uma aplicação linear de $\mathbb{K}[[x]]$ nele mesmo.

Sejam S e T duas séries de potências formais, então definimos a derivada da soma e do produto de duas séries de potências formais respectivamente, por:

$$(S+T)' = S' + T' \tag{1.18}$$

$$(ST)' = S'T + ST'. \tag{1.19}$$

Se $S(0) \neq 0$, seja $\frac{1}{S}$ ou S^{-1} a série de potências formal inversa de S, então, definimos a derivada da inversa de uma série de potências formal por

$$\left(\frac{1}{S}\right)' = -\frac{1}{S^2}S'. \tag{1.20}$$

Por recorrência definimos as derivadas sucessivas de uma série de potências formal, e, obtemos a derivada de ordem n da série de potências formal S

$$S^{(n)}(x) = n!a_n + termos \;\; de \;\; grau \;\; maior \;\; ou \;\; igual \;\; a \;\; 1 \tag{1.21}$$

substituindo x por zero obtemos

$$S^{(n)}(0) = n!a_n. \tag{1.22}$$

Proposição 4 *Seja dada uma série de potências formal S. Para existir uma série de potências formal T tal que*

$$T(0) = 0 \;\; e \; S \circ T = I \tag{1.23}$$

é necessário e suficiente que

$$S(0) = 0 \quad e \quad S'(0) \neq 0. \tag{1.24}$$

Se ela existir, então T é única e temos que $T \circ S = I$. Neste caso dizemos que T é a inversa da série de potências formal S, pela lei da composição.

Demonstração:

Sejam dadas duas séries de potências formais $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ e $T(y) = \sum_{n\geq 1} b_n y^n$. Se tivermos

$$S(T(y)) = y \tag{1.25}$$

temos que

$$a_0 \neq 0, \qquad a_1 b_1 = 1 \tag{1.26}$$

donde concluimos que as condições (1.24) são necessárias.

Supondo que as condições (1.24) são satisfeitas, consideremos que o coeficiente de y^n é nulo no primeiro membro de (1.25), ele é igual ao coeficiente de y^n em

$$a_1 T(y) + a_2 (T(y))^2 + \ldots + a_n (T(y))^n$$

o que nos dá a relação

$$a_1 b_1 + P_n(a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_{n-1}) = 0, \tag{1.27}$$

onde P_n é um polinómio conhecido com coeficientes inteiros maiores ou iguais a zero, linear em $a_2, \ldots, a_n$. Desde que $a_1 \neq 0$, a segunda relação de (1.26) permite calcular b_1; logo, para $n \geq 2$ a relação (1.27) permite calcular b_n por recorrência sobre n. Donde temos a existência e a unicidade da série de potências formal $T(y)$.

A série obtida é satisfeita com $T(0) = 0$, $T'(0) \neq 0$; donde aplicando a T o resultado que acabámos de demonstrar para S, vemos que existe uma série de potências formal S_1 tal que

$$S_1(0) = 0 \quad e \quad T \circ S_1 = I.$$

Temos que

$$S_1 = I \circ S_1 = (S \circ T) \circ S_1 = S \circ (T \circ S_1) = S \circ I = S.$$

O que verificámos que S_1 não é mais do que a série de potências formal S e temos $T \circ S = I$.

■

Nota: Desde que $S(T(y)) = y$ e $T(S(x)) = x$ dizemos que as *transformações formais* $y = S(x)$ e $x = T(y)$ são recíprocas uma da outra, ou então, dizemos que T é a *série formal recíproca* da série S. $\#$

As séries de potências formais sobre o corpo $\mathbb{K}$ formam um domínio de integridade pela Proposição 1. Em qualquer domínio de integridade $\mathbb{K}[[x]]$, os elementos que possuem inverso em relação ao produto chamam-se **unidades** de $\mathbb{K}[[x]]$. As unidades do domínio de integridade das séries de potências formais são exactamente as séries de potências formais com $a_0 \neq 0$.

Prova:

Seja P uma série de potências formal tal que $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ queremos mostrar que existe uma série de potências formal Q tal que $PQ = I$. Consideremos uma série de potências formal Q tal que $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots$ então fazendo o produto PQ obtemos o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_0b_0 & = & 1 \\ a_0b_1 + a_1b_0 & = & 0 \\ a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 & = & 0 \\ \vdots & = & 0 \end{array}\right. .$$

A primeira equação mostra-nos que $a_0 \neq 0$ é uma condição necessária para a validade destas equações. Suponhamos agora que os $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ sejam de tal forma que as primeiras n relações deste sistema são satisfeitas, então $c_n = 0 = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0$ isto implica que $a_0b_n = -a_1b_{n-1} - a_2b_{n-2} - \ldots - a_nb_0$. Mas vimos que $a_0 \neq 0$ é suficiente para determinar o elemento b_n com a ajuda dos coeficientes $b_0, \ldots, b_{n-1}$. Sendo assim a série de potências formal P com $a_0 \neq 0$ possui um elemento inverso, que é a série de potências formal Q, ou seja, $Q = P^{-1}$.

■

As séries de potências formais com $a_0 = 0$ chamam-se **não unidades**. Uma série de potências formal tal que $a_0 = 0$ e $a_1 \neq 0$ chama-se **uma quase-unidade** e representa-se por u_q.

Exemplo 1.1.4 *Determinamos a série de potências formal inversa da série* $P = 1 - x$.

Queremos encontrar uma série de potências formal que seja inversa da série de potências formal $P = 1 - x$. Então consideremos uma série de potências formal Q tal que $Q = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$. Assim efectuando o produto temos que ter $PQ = I$, ou seja,

$$(1-x)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) = 1 + 0x + 0x^2 + \ldots,$$

que é equivalente ao sistema

$$\left\{\begin{array}{ccc} b_0 & = & 1 \\ b_1 - b_0 & = & 0 \\ b_2 - b_1 & = & 0 \\ \vdots & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} b_0 & = & 1 \\ b_1 = b_0 & = & 1 \\ b_2 = b_1 = b_0 & = & 1 \\ \vdots & & \end{array}\right. .$$

Então a série de potências formal $Q = P^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$, que é o desenvolvimento da série geométrica $\frac{1}{1-x}$. Assim $P = 1 - x$ e $P^{-1} = \frac{1}{1-x}$.

Exemplo 1.1.5 *Determinamos a série de potências formal inversa da série* $P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ *com*

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_0 & = & 1 \\ a_1 & = & 1 \\ a_{n+1} & = & a_n + a_{n-1} \end{array}\right.$$

onde P *tem os coeficientes da sucessão de Fibonacci, isto é,* $P = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \ldots$.

Queremos encontrar uma série de potências formal que seja inversa da série de potências formal P, então consideremos uma série de potências formal Q tal que $Q = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$ Efectuando o produto temos que ter $PQ = I$, ou seja,

$$(1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \ldots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) = 1 + 0x + 0x^2 + \ldots$$

Assim obtemos o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccc} b_0 & = & 1 \\ b_1 + b_0 & = & 0 \\ b_2 + b_1 + 2b_0 & = & 0 \\ b_3 + b_2 + 2b_1 + 3b_0 & = & 0 \\ b_4 + b_3 + 2b_2 + 3b_1 + 5b_0 & = & 0 \\ b_5 + b_4 + 2b_3 + 3b_2 + 5b_1 + 8b_0 & = & 0 \\ \vdots & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} b_0 & = & 1 \\ b_1 & = & -1 \\ b_2 & = & -1 \\ b_3 & = & 0 \\ b_4 & = & 0 \\ b_5 & = & 0 \\ \vdots & & \end{array}\right. .$$

Então a série de potências formal $Q = P^{-1} = 1 - x - x^2$. Assim $P = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \ldots$ e $P^{-1} = 1 - x - x^2$.

1.2 Representação matricial de séries de potências formais

Esta secção baseia-se essencialmente na obra de Henrici [13].

Uma série de potências formal

$$P := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{1.28}$$

pode ser representada através de uma matriz.

Seja $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ uma série de potências formal, então podemos construir uma matriz triangular infinita através dos coeficientes da série de potências formal do seguinte modo

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \tag{1.29}$$

onde

$$\begin{cases} a_{ij} = a_{j-i} & \text{se} \quad j \geq i \\ a_{ij} = 0 & \text{se} \quad j < i \end{cases}.$$

Estas matrizes chamam-se **matrizes semi-circulares** e são um caso especial das matrizes triangulares superiores. Podemos estabelecer uma correspondência entre as séries de potências formais e as matrizes semi-circulares como sendo uma aplicação

$$P \longrightarrow A \tag{1.30}$$

onde A é a matriz semi-circular associada a P. Se tivermos a matriz semi-circular A então os coeficientes da série de potências formal P são os elementos da primeira linha da matriz semi-circular A, associada à série de potências formal P.

As operações de séries de potências formais definidas anteriormente também se podem definir a nível matricial. Iremos agora ver como se definem as operações de séries de potências formais a nível matricial.

Definimos a soma de duas séries de potências formais do seguinte modo: sejam A e B as matrizes semi-circulares associadas às séries de potências formais P e Q respectivamente, então a soma de duas séries de potências formais vai corresponder à soma das suas matrizes semi-circulares associadas, isto é,

$$P + Q \longrightarrow A + B. \tag{1.31}$$

<u>Prova</u>:

Sejam P e Q duas séries de potências formais tais que $P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ e $Q = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$. Sejam A e B as matrizes semi-circulares associadas às séries de potências formais P e Q respectivamente, então

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & \cdots \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & b_0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & b_0 \end{bmatrix}.$$

A soma das séries P e Q dá

$$\begin{aligned} P + Q &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \ldots \end{aligned}$$

e a soma das matrizes A e B dá

$$A + B = \begin{bmatrix} a_0 + b_0 & a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & \cdots & \cdots \\ 0 & a_0 + b_0 & a_1 + b_1 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 + b_0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_0 + b_0 \end{bmatrix}.$$

Pelo resultado anteriormente referido os coeficientes de $P+Q$ são $a_0+b_0, a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots$, o que nos dá a série de potências formal

$$P + Q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \ldots$$

■

Definimos o produto de duas séries de potências formais como o produto das suas matrizes semi-circulares associadas correspondentes, ou seja, sejam A e B as matrizes semi-circulares associadas às séries de potências formais P e Q respectivamente, então o produto de duas séries de potências formais vai corresponder ao produto das suas matrizes semi-circulares associadas, isto é,

$$PQ \longrightarrow AB. \tag{1.32}$$

O produto de duas matrizes triangulares superiores infinitas existe, e, é ainda uma matriz triangular superior infinita.

Prova:

Sejam P e Q duas séries de potências formais tais que $P = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ e $Q = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots$. Sejam A e B as matrizes semi-circulares associadas às séries de potências formais P e Q respectivamente, então

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & \cdots \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & b_0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & b_0 \end{bmatrix}.$$

O produto das séries P e Q dá

$$\begin{aligned} P.Q &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots) \\ &= (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \ldots \end{aligned}$$

e o produto das matrizes A e B dá

$$A.B = \begin{bmatrix} a_0b_0 & a_0b_1 + a_1b_0 & a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 & \cdots & \cdots \\ 0 & a_0b_0 & a_0b_1 + a_1b_0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_0b_0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_0b_0 \end{bmatrix}.$$

Pelo resultado anteriormente referido os coeficientes de PQ são $a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_2 + a_2b_0, \ldots$ o que nos dá a série de potências formal $PQ = (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \ldots$

$\blacksquare$

Nota: Se fizermos o produto das matrizes BA obtemos o mesmo que AB então podemos concluir que $PQ = QP$, assim dizemos que as matrizes semi-circulares são **comutativas**. #

Esta correspondência estabelecida é um isomorfismo. Para a série de potências formal P ser a unidade do domínio de integridade das séries de potências formais temos que ter $a_0 \neq 0$, como provado anteriormente.

A série de potências formal inversa de P designada por P^{-1} existe se existir uma matriz semi-circular A associada à série de potências formal P e uma matriz semi-circular B associada à série de potências formal P^{-1} tal que $P \longrightarrow A$ e $P^{-1} \longrightarrow B$ então $AB = I$, onde I é a matriz semi-circular identidade

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Como já vimos as matrizes semi-circulares são comutativas, então $AB = BA = I$, assim a matriz B é a inversa de A, ou seja, $B = A^{-1}$.

Teorema 1.2.1 (Teorema de Wronski) *Se $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots.$ é uma série de potências formal e $a_0 \neq 0$ os coeficientes da série recíproca $P^{-1}(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots.$ são dados por:*

$$b_n = \frac{(-1)^n}{a_0^{n+1}} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_0 & a_1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.2.2 *Verificamos a fórmula de Wrosnki para a série de potências formal* $P = 1 + x + x^2 + \ldots$

Vimos no Exemplo 1.1.4 que a inversa da série de potências formal P era a série de potências formal $P^{-1} = 1 - x$, pela fórmula de Wronski verificamos que $b_0 = \frac{1}{a_0} = \frac{1}{1} = 1$, $b_1 = \frac{(-1)^1}{1^2}|1| = -1$, $b_2 = \frac{(-1)^2}{1^3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1(0) = 0$, $b_3 = 0$ porque tem duas linhas linearmente dependentes. Então os coeficientes de P^{-1} são $1, -1, 0, 0, \ldots$ o que nos dá $P^{-1} = 1 - x + 0x^2 + \ldots = 1 - x$.

Exemplo 1.2.3 *Verificamos a fórmula de Wronski para a série de potências formal* $P = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \ldots$

Vimos no Exemplo 1.1.5 que a inversa da série de potências formal P era a série de potências formal $P^{-1} = 1 - x - x^2$, pela fórmula de Wronski observamos que $b_0 = \frac{1}{a_0} = \frac{1}{1} = 1$, $b_1 = \frac{(-1)^1}{1^2}|1| = -1$, $b_2 = \frac{(-1)^2}{1^3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1(-1) = -1$, $b_3 = 0$. Então os coeficientes de P^{-1} são $1, -1, -1, 0, \ldots$ o que nos dá $P^{-1} = 1 - x - x^2 + 0x^3 + \ldots = 1 - x - x^2$.

Tal como vimos anteriormente, a derivada de uma série de potências formal P designa-se por P'.

Exemplo 1.2.4 *Se* $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ *é uma série de potências formal a série de potências formal derivada é então* $P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots$

Teorema 1.2.5 *Se* P *é uma série de potências formal tal que* $P' = 0$ *então* P *é uma série de potências formal constante, ou seja,* $P = a_0 + 0x + 0x^2 + \ldots$

Demonstração:

Seja P uma série de potências formal tal que $P = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$. A afirmação $P' = 0$ é equivalente a $(n + 1)a_{n+1} = 0$, com $n = 0, 1, 2, \ldots$, porque $\mathbb{K}$ é um corpo que tem característica zero e $P \in \mathbb{K}$. Além disso $n + 1 \neq 0$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ e como $\mathbb{K}$ não tem divisores de zero, podemos concluir que $a_{n+1} = 0$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ e apenas diferente de zero para a_0, logo $P = a_0 + 0x + 0x^2 + \ldots = a_0$.

■

As derivadas do produto da potência, e da inversa de uma série de potências formal são definidas respectivamente por:

- Derivada do produto

$$(PQ)' = P'Q + PQ'. \tag{1.33}$$

Prova:

Sejam P e Q duas séries de potências formais tais que $P = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ e $Q = b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots$ As derivadas das séries de potências formais P e Q são respectivamente $P' = a_1 + 2a_2x + \ldots$ e $Q' = b_1 + 2b_2x + \ldots$. Então

$$\begin{aligned} P'Q &= (a_1 + 2a_2x + \ldots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots) \\ &= a_1b_0 + (2a_2b_0 + b_1a_1)x + (b_2a_1 + 3b_0a_3 + 2a_2b_1)x^2 + \ldots \end{aligned}$$

e
$$Q'P = a_0b_1 + (a_1b_1 + 2b_2a_0)x + (a_2b_1 + 3a_0b_3 + 2a_1b_2)x^2 + \ldots$$

Assim
$$P'Q + Q'P = b_1a_0 + a_1b_0 + 2(b_2a_0 + b_0a_2 + b_1a_1)x + \ldots \tag{1.34}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} PQ &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots) \\ &= b_0a_0 + (b_1a_0 + a_1b_0)x + (b_2a_0 + b_0a_2 + b_1a_1)x^2 + \ldots \end{aligned}$$

logo
$$(PQ)' = b_1a_0 + a_1b_0 + 2(b_2a_0 + b_0a_2 + b_1a_1)x + \ldots \tag{1.35}$$

Donde verificamos que (1.34)=(1.35), ou seja $(PQ)' = P'Q + PQ'$.

■

- Derivada da potência

$$(P^n)' = nP^{n-1}P'. \tag{1.36}$$

Prova:

Seja P uma série de potências formal então $P^2 = PP$, por (1.33) temos que $(PP)' = P'P + PP' = 2PP'$ devido à comutatividade, assim $(P^2)' = 2PP'$, por recorrência sobre n temos que $(P^n)' = nP^{n-1}P'$, para $n = 1, 2, \ldots$

■

- Derivada da inversa

$$\left(\frac{1}{P}\right)' = -\frac{P'}{P^2}. \tag{1.37}$$

<u>Prova</u>:

Sejam P e Q duas séries de potências formais tal que $Q = P^{-1}$, então $PQ = I$, onde I designa a série de potências formal identidade. Derivando ambos os membros vemos que $(PQ)' = I' \Leftrightarrow P'Q + PQ' = 0 \Leftrightarrow PQ' = -P'Q$. Dividindo ambos os membros por P obtemos $Q' = -P'QP^{-1}$, uma vez que $Q = P^{-1}$ temos $(P^{-1})' = -P'P^{-1}P^{-1} \Leftrightarrow (P^{-1})' = -\frac{P'}{P^2}$.

■

Agora vamos estudar o problema da "substituição de uma série de potências formal noutra". Sejam $P = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ e $Q = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots$ duas séries de potências formais.

A composição de duas séries de potências formais implica substituir x^n de Q^n em P e juntar os coeficientes da mesma potência de x para obter a nova série $P \circ Q = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots$ A série Q^n existe para $n = 0, 1, 2, \ldots$ e é igual a $Q^n = \left(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots\right)^n$, ou seja,

$$Q^n = b_0^{(n)} + b_1^{(n)}x + b_2^{(n)}x^2 + \ldots \tag{1.38}$$

$$\begin{aligned} P \circ Q &= a_0 + a_1\left(b_0^{(1)} + b_1^{(1)}x + \ldots\right) + a_2\left(b_0^{(2)} + b_1^{(2)}x + \ldots\right) + \ldots + a_n\left(b_0^{(n)} + b_1^{(n)}x + \ldots\right) + \ldots \\ &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots \end{aligned}$$

onde

$$c_n = a_1b_n^{(1)} + a_2b_n^{(2)} + \ldots + a_nb_n^{(n)} \tag{1.39}$$

para $n = 1, 2, \ldots$ e $c_0 = a_0$.

Iremos mais à frente demonstrar como obter estes coeficientes.

Sejam A e B duas séries de potências formais unidades, onde $A = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ e $B = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots$ e sejam Q e R duas séries de potências formais não unidades tais que $Q = q_1x + q_2x^2 + \ldots$ e $R = r_1x + r_2x^2 + \ldots$

Usaremos a notação $Q^k = \sum q_n^{(k)}x^n$ e $R^k = \sum r_n^{(k)}x^n$ para $k = 1, 2, \ldots$. O nosso objectivo é calcular os coeficientes $c_0, c_1, c_2, \ldots$ no produto $c = (A \circ Q)(B \circ R)$, onde as composições tem de ser calculadas primeiro. Por (1.39), estes coeficientes são

$$c_n = \sum_{i+j=n} \sum_{k=0}^{i} a_k q_i^{(k)} \sum_{m=0}^{j} b_m r_j^{(m)}. \tag{1.40}$$

Concluimos que estes coeficientes podem também ser formados de uma maneira diferente. Para $k, m = 0, 1, 2, \ldots$, seja $Q^k R^m = \sum p_n^{(k,m)} x^n$

Teorema 1.2.6 *Seja A uma série de potências formal tal que $A = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ e R uma não unidade tal que $R = r_1 x + r_2 x^2 + \ldots$ com a seguinte notação*

$$c_n = \sum_{k+m \leq n} a_k b_m P_n^{(k,m)}. \tag{1.41}$$

Intuitivamente, isto significa que para calcular o produto $c = (a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2 + \ldots)(b_0 + b_1 R + b_2 R^2 + \ldots)$, primeiro temos que expandir para todos os possíveis produtos $c = a_0 b_0 + a_1 b_0 Q + a_0 b_1 R + a_2 b_0 Q^2 + a_1 b_1 QR + \ldots$ cada termo separadamente, e obter os coeficientes dessas séries.

Desde que Q e R sejam não unidades, apenas o produto $Q^k R^k$ onde $k + m \leq n$ contribui para o coeficiente de x^n.

Demonstração:

Queremos mostrar que (1.41) se reduz a (1.40).

$$P_n^{(k,m)} = \sum_{i+j=n} q_i^{(k)} r_j^{(m)}$$

assim

$$\begin{aligned}
\sum_{k+m \leq n} a_k b_m P_n^{(k,m)} &= \sum_{k+m \leq n} a_k b_m \sum_{i+j=n} q_i^{(k)} r_j^{(m)} \\
&= \sum_{i+j=n} \sum_{k+m \leq n} a_k q_i^{(k)} b_m r_j^{(m)} \\
&= \sum_{i+j=n} \sum_{k=0}^{i} a_k q_i^{(k)} \sum_{m=0}^{j} b_m r_j^{(m)}.
\end{aligned}$$

∎

A composição de duas séries de potências formais goza da propriedade distributiva em relação à multiplicação usual, isto é, no sentido de Cauchy: sejam A, B e Q séries de potências formais, então

$$(A \circ Q)(B \circ Q) = (AB) \circ Q \tag{1.42}$$

sendo A e B unidades e Q uma não unidade.

Sendo A uma série de potências formal e Q uma não unidade então a derivada da composição de séries de potências formais define-se por

$$(A \circ Q)' = (A' \circ Q)Q'. \tag{1.43}$$

Prova:

Na notação anterior os coeficientes das séries de potências formais de x^n em $(A \circ Q)'$ eram $c_n = (n+1)\left(a_1 q_{n+1}^{(1)} + a_2 q_{n+1}^{(2)} + \ldots + a_{n+1} q_{n+1}^{(n+1)}\right)$. O n-ésimo coeficiente em $(A' \circ Q)Q'$ pode ser calculado usando a lei distributiva Teorema 1.2.6

$$(a_1 + 2a_2 Q + 3a_3 Q^2 + \ldots)Q' = a_1 Q' + 2a_2 QQ' + 3a_3 Q^2 Q' + \ldots \tag{1.44}$$

por (1.36) temos que $kQ^{k-1}Q' = (Q^k)'$ Assim o coeficiente de x^n em $kQ^{k-1}Q'$ é $(n+1)q_{n+1}^{(k)}$ e para o coeficiente de x^n em (1.44) temos

$$a_1(n+1)q_{n+1}^{(1)} + a_2(n+1)q_{n+1}^{(2)} + \ldots + a_{n+1}(n+1)q_{n+1}^{(n+1)},$$

de acordo com o que foi dito anteriormente.

■

Teorema 1.2.7 *Seja P uma quase unidade tal que $P = a_1 x + a_2 x^2 + ...$ onde $a_1 \neq 0$. Sobre a operação da composição, as séries de potências formais quase unidades (u_q) no domínio de integridade das séries de potências formais sobre o corpo $\mathbb{K}$, formam um grupo.*

Demonstração:

Para a prova resta mostrar que a lei associativa para qualquer quase unidade P tem uma inversa sobre a composição. Isto é mais facilmente conseguido pelos métodos matriciais.

■

Se $P = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, continuamos a usar a notação

$$P^k = \sum_n a_n^{(k)} x^n, k = 1, 2, \ldots \tag{1.45}$$

Com qualquer não unidade P, associamos agora a matriz $A = (a_{ij})$ com os elementos $a_{ij} = a_j^{(i)}$, com $i, j = 1, 2, \ldots$. Pela composição de séries de potências formais com não unidades sabemos que $a_{ij} = 0$ para $j < i$. Assim a matriz A é triangular

$$A = \begin{bmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & \cdots \\ 0 & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.46}$$

O produto de qualquer duas matrizes triangulares existe e é novamente uma matriz triangular, como vimos anteriormente.

A seguinte aplicação é denotada pela correspondência $P \longrightarrow A$. Nenhuma matriz A pode corresponder a duas séries de potências formais diferentes P, porque a primeira linha de A contém os coeficientes de P.

Seja X uma série de potências formal unidade tal que $X = 1x + 0x^2 + 0x^3 + \ldots$, então $X \circ P = P \circ X = P$. A série de potências formal X em relação à composição de $P \in \{u_q\}$ é o elemento neutro. Se

$$P^k = \sum_n a_n^{(k)} x^n$$

para $k = 1, 2, ...$ então podemos identificar P com uma matriz da forma

$$A = \begin{bmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & \cdots & \cdots \\ 0 & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_3^{(3)} & a_4^{(3)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}. \tag{1.47}$$

Lema 1.2.8 *Sejam $P, Q \in \{u_q\}$ (não unidades), tal que à série de potências formal P está associada a matriz A, isto é, $(P \longrightarrow A)$ e à série de potências formal Q está associada a matriz B, isto é, $(Q \longrightarrow B)$ então à composição de P com Q que designamos por $(P \circ Q)$ está associada a matriz AB, ou seja, $P \circ Q \longrightarrow AB$.*

Demonstração:

Na verdade, se $P = a_1x + a_2x^2 + \ldots$, $Q = b_1x + b_2x^2 + \ldots$ e $AB = (c_{ij})$, então para $n \geq m$ temos $c_{mn} = a_m^{(m)} b_n^{(m)} + a_{m+1}^{(m)} b_n^{(m+1)} + \ldots + a_n^{(m)} b_n^{(n)}$. A expressão na direita também surge pela formação do n-ésimo coeficiente na composição $P^m \circ Q$. Em virtude da lei distributiva da composição, $P^m \circ Q = (P \circ Q)^m$. Assim c_{mn} é igual ao n-ésimo coeficiente em $(P \circ Q)^m$ como pretendíamos.

■

A composição goza da propriedade associativa, isto é, sejam $P, Q, R \in \{u_q\}$ tal que as matrizes A, B e C estão associadas às séries de potências formais P, Q e R respectivamente, então $P \circ (Q \circ R) = (P \circ Q) \circ R = A(BC) \cong (AB)C$.

Prova:

Sejam P, Q e R não unidades e A, B e C as matrizes associadas às não unidades tal que $P \longrightarrow A$, $B \longrightarrow Q$ e $C \longrightarrow R$, pelo lema anterior $P \circ Q \longrightarrow AB$, assim $(P \circ Q) \circ R \longrightarrow (AB)C$. Em particular, os coeficientes de $(P \circ Q) \circ R$ aparecem na primeira linha da matriz $(AB)C$. Mas devido à multiplicação das matrizes ser associativa, os mesmos coeficientes também aparecem pela formação $A(BC)$, o qual surge da composição $P \circ (Q \circ R)$. Assim $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$, como queríamos.

■

Para a prova do Teorema 1.2.7 resta mostrar que para qualquer quase unidade $P = a_1x + a_2x^2 + \ldots$ tem uma inversa. Pela teoria geral dos grupos é suficiente mostrar que tem uma inversa à esquerda. $Q = b_1x + b_2x^2 + \ldots$ é uma inversa à esquerda de P se e só se os seus coeficientes satisfazem

$$b_1 a_1^{(1)} = 1, \qquad b_1 a_n^{(1)} + b_2 a_n^{(2)} + \ldots + b_n a_n^{(n)} = 0 \tag{1.48}$$

para $n = 2, 3, \ldots$

Porque $a_n^{(n)} = a_1^{(n)} \neq 0$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, estas relações de recorrência têm uma única solução $\{b_1, b_2, \ldots\}$ tal que $b_1 \neq 0$. Isto completa a prova do Teorema 1.2.7.

■

Se P é uma quase unidade, a inversa da composição $P \in \{u_q\}$ designa-se por $P^{[-1]}$ e chama-se **reversão** de P e é tal que $P \circ P^{[-1]} = I$.

Do mesmo modo usamos $P^{[2]} = P \circ P$ e $P^{[k]} = \underbrace{P \circ P \circ \cdots \circ P}_{k \text{ vezes}}$.

A derivada da inversa da composição designa-se por $\left(P^{[-1]}\right)'$ e define-se por

$$\left(P^{[-1]}\right)' = \left(P' \circ P^{[-1]}\right)^{-1}. \tag{1.49}$$

Prova:

Queremos encontrar a fórmula da derivada da inversa da composição, isto é, $\left(P^{[-1]}\right)'$. Seja $Q = P^{[-1]}$ tal que $Q \circ P = X$, pela derivação da composição temos $(Q' \circ P)P' = X'$, isto é,

$$(Q' \circ P)P' = I \tag{1.50}$$

onde $I = 1 + 0x + 0x^2 + \ldots$.

Se P é uma quase unidade então P' é uma unidade cuja recíproca existe. Assim temos $(Q' \circ P)P'P'^{-1} = IP'^{-1}$, ou seja, $(Q' \circ P) = P'^{-1}$, fazendo a composição com $P^{[-1]}$ em ambos os membros temos $Q' \circ P \circ P^{[-1]} = P'^{-1}P^{[-1]}$; mas $P \circ P^{[-1]} = X$, em que X é o elemento neutro para as não unidades, logo $Q' \circ X = P'^{-1}P^{[-1]}$. Como X é uma não unidade $Q' \circ X = X \circ Q' = Q'$, logo $Q' = P'^{-1}P^{[-1]}$. Usando o facto de que para uma unidade $A \in \{$séries de potências formais$\}$ e uma não unidade Q é válido $A^{-1} \circ Q = (A \circ Q)^{-1}$, obtemos

$$\left(P^{[-1]}\right)' = \left(P' \circ P^{[-1]}\right)^{-1}.$$

■

1.3 Exemplos de séries formais

1.3.1 Série exponencial

Se a é um elemento de $\mathbb{K}$ então a equação diferencial que define a série exponencial é $P' = aP$ onde P é uma série de potências formal e P' a sua derivada.

Prova:

Seja P uma série de potências formal tal que $P = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots$, então $P' = b_1 + 2b_2x + \ldots$, logo temos $P' = aP \Leftrightarrow b_1 + 2b_2x + \ldots = a(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots)$ que é equivalente ao sistema

$$\left\{\begin{array}{ccc} b_1 & = & ab_0 \\ 2b_2 & = & ab_1 \\ 3b_3 & = & ab_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ nb_n & = & ab_{n-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} b_1 & = & ab_0 \\ b_2 & = & \frac{a^2}{2}b_0 \\ b_3 & = & \frac{a^3}{3!}b_0 \\ \vdots & = & \vdots \\ b_n & = & \frac{a^n}{n!}b_0 \end{array}\right. .$$

Então concluimos que $P = b_0 \underbrace{\left(1 + \frac{a}{1!}x + \frac{a^2}{2!}x^2 + \frac{a^3}{3!}x^3 + \dots\right)}_{E_a}$. Isto é, $P = b_0 E_a$, onde $E_a = 1 + \frac{a}{1!}x + \frac{a^2}{2!}x^2 + \frac{a^3}{3!}x^3 + \dots$ é a **série exponencial**.

■

Teorema 1.3.1 (Teorema da adição para séries exponenciais) *Sejam $a, b \in \mathbb{K}$ então $E_aE_b = E_{a+b}$.*

Demonstração:

Seja P uma série de potências formal tal que $P = E_aE_b - E_{a+b}$. Se provarmos que $P = 0$ então $E_aE_b = E_{a+b}$. Derivando P obtemos $P' = E_a^{'}E_b + E_aE_b^{'} - E_{a+b}^{'}$, usando o resultado anterior

$$\begin{aligned} P^{'} &= aE_aE_b + bE_aE_b - (a+b)E_{a+b} \\ &= (a+b)E_aE_b - (a+b)E_{a+b} \\ &= (a+b)(E_aE_b - E_{a+b}) \\ &= (a+b)P. \end{aligned}$$

Ou seja, $P' = (a+b)P$. Mas pelo resultado anterior $P = c_0\left(1 + \frac{(a+b)}{1!}x + \frac{(a+b)^2}{2!}x^2 + \dots\right) = c_0E_{a+b}$, então $E_aE_b - E_{a+b} = c_0E_{a+b}$. A partir do coeficiente de x^0 de P obtemos que $c_0 = 0$, pois $1.1 - 1 = c_0 1 \Leftrightarrow 0 = c_0$. Logo $P = c_0E_{a+b} = 0$, ou seja,

$$E_aE_b = E_{a+b}.$$

■

Do teorema anterior resulta que $E_a^{-1} = E_{-a}$.

Prova:

$$\begin{aligned} E_a &= 1 + \frac{a}{1!}x + \frac{a^2}{2!}x^2 + \dots \\ E_{-a} &= 1 - \frac{a}{1!}x + \frac{a^2}{2!}x^2 - \dots \end{aligned}$$

Pelo teorema anterior temos que

$$E_aE_{-a} = E_{a+(-a)} = E_{a-a} = E_0 = 1,$$

logo $E_aE_{-a} = 1 \Leftrightarrow E_{-a} = \frac{1}{E_a} \Leftrightarrow E_{-a} = E_a^{-1}$.

■

1.3.2 Série binomial

Se a é um elemento de $\mathbb{K}$ então a equação diferencial que define a série binomial é

$$P' = \frac{a}{1+x}P \tag{1.51}$$

onde P é uma série de potências formal e P' a sua derivada.

Prova:

Seja P uma série de potências formal tal que $P = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots$ então $P' = b_1 + 2b_2x + \ldots$

A relação funcional dada é equivalente a

$$(1+x)\left(b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2 + \ldots\right) = a\left(b_0 + b_1x + \ldots\right).$$

Pelo produto de Cauchy obtemos

$$b_1 + (2b_2 + b_1)\,x + (3b_3 + 2b_2)\,x^2 + \ldots = ab_0 + ab_1x + \ldots$$

Comparando os coeficientes, temos o sistema

$$\begin{cases} b_1 & = & ab_0 \\ 2b_2 + b_1 & = & ab_1 \\ 3b_3 + 2b_2 & = & ab_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ nb_n + (n-1)b_{n-1} + \ldots & = & ab_{n-1} \end{cases}.$$

Então

$$\begin{aligned} nb_n &= ab_{n-1} - (n-1)b_{n-1} \\ &= (a-n+1)b_{n-1} \end{aligned}$$

e $(n-1)b_{n-1} = (a-n+2)b_{n-2}$, logo

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{a-n+1}{n}b_{n-1} \\ &= \frac{(a-n+1)}{n}\frac{(a-n+2)}{n-1}b_{n-2} \\ &= \frac{(a-(n-1))}{n}\frac{(a-(n-2))}{n-1}\cdots\frac{a-0}{1}b_0 \end{aligned}$$

o que nos dá

$$b_n = \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-(n-1))}{n!} b_0$$

ou seja, $b_n = \binom{a}{n} b_0$.

O que permite concluir que $P = b_0 B_a$, onde b_0 é o coeficiente de x^0 de P e

$$B_a := 1 + \binom{a}{1} x + \binom{a}{2} x^2 + \dots$$

é denominada por **Série Binomial** em a.

■

Agora sim estamos em condições de mostrar que os coeficientes c_n são dados pela relação (1.39).

Prova:

Para obter os coeficientes c_n, com $n = 1, 2, \dots$ da série de potências formal temos de fazer a composição $B_a \circ Q$, onde $Q = b_1 x + b_2 x^2 + \dots$. Seja Q uma não unidade e B_a uma unidade tal que $B_a = 1 + \binom{a}{1} x + \binom{a}{2} x^2 + \dots$. Seja $B_a \circ Q = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$ com $c_0 = 1$. Derivando obtemos $(B_a \circ Q)' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots$. Como B_a é uma série de potências formal e Q é uma não unidade temos $(B_a \circ Q)' = (B_a' \circ Q)Q'$, mas $B_a' = aB_{-1}B_a = aB_{a-1}$, logo $(B_a \circ Q)' = (aB_{a-1} \circ Q)Q'$. Multiplicando ambos os membros por $B_1 \circ Q$, usando a lei distributiva e tendo em conta que $B_1 B_{a-1} = B_a$ segue-se

$$(B_1 \circ Q)(B_a \circ Q)' = (B_1 \circ Q)a(B_{a-1} \circ Q)Q' = a(B_1 B_{a-1} \circ Q)Q' = a(B_a \circ Q)Q'.$$

Então temos $(1 + b_1 x + \dots + b_{n-1} x^{n-1} + \dots)(c_1 + 2c_2 x + \dots + nc_n x^{n-1} + \dots) = a(c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1} + \dots)(b_1 + 2b_2 x + \dots + nb_n x^{n-1} + \dots)$.

Efectuando os produtos de Cauchy e comparando os coeficientes de x^{n-1} temos se $b_0 = 1$ que $b_{n-1}c_1 + 2b_{n-2}c_2 + \dots + nb_0 c_n = a(c_{n-1}b_1 + 2c_{n-2}b_2 + \dots + nc_0 b_n)$ o que é equivalente a

$$nb_0 c_n = a(c_{n-1}b_1 + 2c_{n-2}b_2 + \dots + nc_0 b_n) - (b_{n-1}c_1 + 2b_{n-2}c_2 + \dots + (n-1)b_1 c_{n-1}).$$

Como $b_0 = 1$ temos

$$c_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [a(n-k)c_k b_{n-k} - kc_k b_{n-k}] = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [a(n-k) - k] c_k b_{n-k}.$$

Fazendo $k = n - k$ temos $c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[a(n-(n-k)-(n-k))]c_{n-k}b_{n-(n-k)}$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[a(k)-n+k]c_{n-k}b_k \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[(a+1)k-n]c_{n-k}b_k \end{aligned}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

Então podemos concluir que se $Q = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots$ e B_a designa a série binomial então $B_a \circ Q = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots$, onde $c_0 = 1$ e

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}[a(n-k)-k]c_kb_{n-k} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[(a+1)k-n]c_{n-k}b_k \end{aligned}$$

para $k = 1, 2, \ldots$.

$\blacksquare$

Esta fórmula chama-se a **fórmula de J.C.Miller**.

Teorema 1.3.2 *Sejam $a, b \in \mathbb{K}$ então $B_aB_b = B_{a+b}$.*

Demonstração:

Seja P uma série de potências formal tal que $P = B_aB_b - B_{a+b}$. Se provarmos que $P = 0$ então $B_aB_b = B_{a+b}$. Derivando P temos $P' = B_a^{'}B_b + B_aB_b^{'} - B_{a+b}^{'}$, usando (1.51) obtemos

$$\begin{aligned} P^{'} &= \frac{a}{1+x}B_aB_b + \frac{b}{1+x}B_aB_b - \frac{a+b}{1+x}B_{a+b} \\ &= \frac{1}{1+x}[(a+b)B_aB_b - (a+b)B_{a+b}] \\ &= \frac{a+b}{1+x}(B_aB_b - B_{a+b}) \\ &= \frac{a+b}{1+x}P. \end{aligned}$$

Como $P = b_0\left(1 + \binom{a+b}{1}x + \binom{a+b}{2}x^2 + \ldots\right)$ é proporcional a B_{a+b}, ou seja, $P = b_0B_{a+b}$, então $B_aB_b - B_{a+b} = b_0B_{a+b}$. A partir do coeficiente de x^0 de P obtemos que $b_0 = 0$, pois $1.1 - 1 = b_01$. Logo $P = 0B_{a+b} = 0$ e por sua vez $B_aB_b = B_{a+b}$.

■

Teorema 1.3.3 (Teorema de Vandermonde) *Sejam* $a, b \in \mathbb{K}$ *então*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}. \tag{1.52}$$

A prova do teorema de Vandermonde será apresentada posteriormente.

Para qualquer $a \in \mathbb{K}$ e n inteiro não negativo definimos o **factorial generalizado ou símbolo de Pochhammer** do seguinte modo:

$$(a)_n = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad n = 0 \\ \underbrace{a(a+1)(a+2)...(a+n-1)}_{n \text{ factores}} & \text{se} \quad n = 1, 2, ... \end{cases}. \tag{1.53}$$

- Para qualquer $a \in \mathbb{K}$ e qualquer k inteiro não negativo

$$\binom{a}{n} = (-1)^n \frac{(-a)_n}{n!}. \tag{1.54}$$

<u>Prova</u>:

$$\begin{aligned} \binom{a}{n} &= \frac{a!}{n!(a-n)!} \\ &= \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)(a-n)!}{n!(a-n)!} \\ &= \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!} \\ &= \frac{(-1)^n(-a)(-a+1)\ldots(-a+n-1)}{n!} \\ &= (-1)^n \frac{(-a)_n}{n!}. \end{aligned}$$

■

- Para qualquer $b \in \mathbb{K}$ e qualquer n, k inteiros não negativos tal que $n > k$ e assumindo que $b \neq n-1, n-2, \ldots, n-k$

$$(-b)_{n-k} = \frac{(-b)_n(-n)_k(n-k)!}{n!(b-n+1)_k}. \tag{1.55}$$

Prova:

$$
\begin{aligned}
&\frac{(-b)_n(-n)_k(n-k)!}{n!(b-n+1)_k}\\
&\qquad = \frac{(-b)(-b+1)\dots(-b+n-1)(-n)(-n+1)\dots(-n+k-1)(n-k)!}{n!(b-n+1)(b-n+2)\dots(b-n+k)}\\
&\qquad = \frac{(-1)^n b(b-1)\dots(b-n+1)(-1)^k n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)!}{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)!(b-n+1)\dots(b-n+k)}\\
&\qquad = (-1)^{n+k}\frac{b(b-1)\dots(b-n+k+1)(b-n+k)\dots(b-n+1)}{(b-n+1)\dots(b-n+k)}\\
&\qquad = (-1)^{n+k} b(b-1)\dots(b-n+k+1)\\
&\qquad = (-b)(-b+1)\dots(-b+n-k-1) = (-b)_{n-k}.
\end{aligned}
$$

■

- Para qualquer $b \in \mathbb{K}$ e qualquer n, k inteiros não negativos tal que $n > k$ e assumindo que $b \neq n, n-1, \dots, n-k$

$$\binom{b}{n-k} = (-1)^n \frac{(-b)_n}{n!}(-1)^k \frac{(-n)_k}{(b-n+1)_k}. \tag{1.56}$$

Prova:

Por (1.54) temos $\binom{b}{n-k} = (-1)^{n-k}\frac{(-b)_{n-k}}{(n-k)!}$ e por (1.55) temos

$$
\begin{aligned}
\binom{b}{n-k} &= (-1)^{n-k}\frac{1}{(n-k)!}\frac{(-b)_n(-n)_k(n-k)!}{n!(b-n+1)_k}\\
&= (-1)^n \frac{(-b)_n}{n!}(-1)^k \frac{(-n)_k}{(b-n+1)_k}.
\end{aligned}
$$

■

- Para qualquer $a \in \mathbb{K}$ e n inteiro não negativo

$$(a)_n = (-1)^n (-a-n+1)_n. \tag{1.57}$$

Prova:

$$
\begin{aligned}
(a)_n &= a(a+1)\dots(a+n-1)\\
&= (-1)^n(-a)(-a-1)\dots(-a-n+1)
\end{aligned}
$$

Mas, $(-a-n+1)_n = (-a-n+1)(-a-n+2)\dots(-a-1)(-a)$.

Logo, $(a)_n = (-1)^n(-a-n+1)_n$.

■

Agora sim estamos em condição de provar o teorema de Vandermonde que é equivalente a provar

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k(-n)_k}{k!(c)_k} = \frac{(c-a)_n}{(c)_n}.$$

Demonstração:

Calculando o n-ésimo coeficiente de B_aB_b, obtemos

$$\binom{a}{0}\binom{b}{n} + \binom{a}{1}\binom{b}{n-1} + \ldots + \binom{a}{n}\binom{b}{0}$$

que pelo Teorema 1.3.2 é igual a $\binom{a+b}{n}$. Assim, $\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$ e por sua vez, usando (1.54) e (1.56) temos

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\,(-a)_k}{k!}(-1)^n\frac{(-b)_n}{n!}(-1)^k\frac{(-n)_k}{(b-n+1)_k} = \frac{(a+b)!}{(a+b-n)!n!}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{(-a)_k(-n)_k}{k!(b-n+1)_k} = \frac{(a+b)\ldots(a+b-n+1)}{(-1)^n(-b)_n}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{(-a)_k(-n)_k}{k!(b-n+1)_k} = \frac{(-a-b)\ldots(-a-b+n-1)}{(-b)_n}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{(-a)_k(-n)_k}{k!(b-n+1)_k} = \frac{(-a-b)_n}{(-b)_n}.$$

Substituindo $-a$ por a e $b-n+1$ por c obtém-se:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k(-n)_k}{k!(c)_k} = \frac{(a-(c+n-1))_n}{(-c-n+1)_n} = \frac{(-(c-a)-n+1)_n}{(-c-n+1)_n}\frac{(-1)^n}{(-1)^n}.$$

Usando (1.57) verificamos que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k(-n)_k}{k!(c)_k} = \frac{(c-a)_n}{(c)_n}$.

■

Então o teorema de Vandermonde assume a seguinte forma

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(a)_k(-n)_k}{(c)_k k!} = \frac{(c-a)_n}{(c)_n}. \tag{1.58}$$

A generalização desta fórmula deve-se a Gauss ter estabelecido a soma finita para séries infinitas.

1.3.3 Série logarítmica

Seja P uma série de potências formal dada por $P = E_a - I = \frac{a}{1!}x + \frac{a^2}{2!}x^2 + \ldots$ vamos procurar a reversão de P.

Prova:

$$\begin{aligned} P^{[-1]'} &= \left[(E_a - I)' \circ P^{[-1]}\right]^{-1} \\ &= \left(aE_a - P^{[-1]}\right)^{-1} \\ &= \left[a(E_a - I) \circ P^{[-1]} + aI \circ P^{[-1]}\right]^{-1}. \end{aligned}$$

Tendo em conta as identidades $P \circ P^{[-1]} = X$ e $I \circ A = I$ temos

$$\begin{aligned} (aX + aI)^{-1} &= [a(X + I)]^{-1} \\ &= a^{-1}(X + I)^{-1} \\ &= a^{-1}B_{-1}. \end{aligned}$$

Isto é equivalente a $\frac{1}{a}(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots)$. Uma vez que em $P^{[-1]}$ o coeficiente com o índice zero é zero, obtemos $P^{[-1]} = \frac{1}{a}\underbrace{\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots\right)}_{L}$, onde L designa a **série formal logaritmica**.

■

Teorema 1.3.4 *Sejam E_a, B_a, L as séries formais exponenciais, binomiais e logaritmica respectivamente, então $E_a \circ L = B_a$.*

Demonstração:

Seja P uma série de potências formal tal que $P = E_a \circ L$, o primeiro coeficiente a_0 em P é igual a um e além disso $P' = (E_a' \circ L)L' = (aE_a \circ L)L' = aPL'$, o que implica que $P' = aPL'$ sendo $L = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots$, então $L' = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = (1 + x)^{-1}$, logo $P' = aP\frac{1}{1+x}$. Assim P satisfaz a equação diferencial formal $P' = \frac{a}{1+x}P$. Onde concluimos que $(1 + x)P' = aP$, em que a solução é B_a, como vimos anteriormente. O que implica $P = B_a$, ou seja, $E_a \circ L = B_a$.

■

Exemplo 1.3.5 *Seja P uma série de potências formal não unidade. Mostramos que a única solução Q da equação $Q^2 = 1 + P$ é dada por $Q = B_{\frac{1}{2}} \circ P$.*

Seja Q uma série de potências formal e P uma série de potências formal não unidade, então $Q = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots$ e $P = a_1x + a_2x^2 + \ldots$

$$Q^2 = 1 + P \Leftrightarrow (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$$

Deste modo $b_0^2 + (2b_0b_1)x + (2b_0b_2 + b_1^2)x^2 + \ldots = 1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} b_0^2 & = & 1 \\ 2b_0b_1 & = & a_1 \\ 2b_0b_2 + b_1^2 & = & a_2 \\ \vdots & = & \vdots \end{cases}.$$

Onde temos $b_0 = 1 \vee b_0 = -1$. O caso $b_0 = -1$ é idêntico a $b_0 = 1$, então obtemos o sistema

$$\begin{cases} b_0 & = & 1 \\ b_1 & = & \frac{a_1}{2} \\ b_2 & = & \frac{a_2}{2} - \frac{a_1^2}{8} \\ \vdots & = & \vdots \end{cases}.$$

Deste modo $Q^2 = 1 + 2\left(\frac{a_1}{2}\right)x + \left[2\left(\frac{a_2}{2} - \frac{a_1^2}{8}\right) + \frac{a_1^2}{4}\right]x^2 + \ldots$. Ou seja $Q^2 = 1 + a_1x + \left(a_2 - \frac{a_1^2}{4} + \frac{a_1^2}{4}\right)x^2 + \ldots = 1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$. Assim, $Q^2 = 1 + P$. Se $Q = B_{\frac{1}{2}} \circ P$ então

$$\begin{aligned} Q^2 &= \left(B_{\frac{1}{2}} \circ P\right)\left(B_{\frac{1}{2}} \circ P\right) \\ &= \left(B_{\frac{1}{2}}B_{\frac{1}{2}}\right) \circ P \\ &= B_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \circ P = B_1 \circ P. \end{aligned}$$

Aqui aplicámos as propriedades demonstradas anteriormente e como $B_1 = 1 + x$ temos que $Q^2 = B_1 \circ P = 1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$

Capítulo 2

Séries de potências convergentes através de séries de potências formais

2.1 Definições básicas

Neste capítulo que se baseia nos livros de Cartan [7] e Ruiz [23] estudamos em detalhe a convergência das séries de potências formais, começando por relembrar a noção de convergência de séries e algumas das suas propriedades. Ainda nesta secção introduzimos séries de potências formais convergentes e discutimos as suas operações: soma, multiplicação, substituição e derivação. Finalmente são apresentados dois grandes teoremas acerca das séries de potências formais: Teorema da Divisão de Rückert e o Teorema de Preparação de Weierstrass. Consideramos novamente o corpo $\mathbb{K}$ como sendo o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1.1 Convergência normal e convergência absoluta

Definição 2.1.1 *Uma série $\sum a_\nu$ com a_ν elementos de $\mathbb{K}$ converge para o elemento $c \in \mathbb{C}$ se, para todo número real $\epsilon > 0$ existe um conjunto finito de indíces $\mathbb{I}_\epsilon \subset \mathbb{N}^n$ tal que $\left|\sum_{\nu \in \mathbb{I}} a_\nu - c\right| < \epsilon$ para todo o conjunto finito de indíces $\mathbb{I} \supset \mathbb{I}_\epsilon$. Nesse caso dizemos que c é a soma da série e designamos $c = \sum a_\nu$.*

Diz-se que a série $\sum a_n$ é **absolutamente convergente** quando a série $\sum |a_n|$ é convergente.

- Se a série $\sum a_n$ converge, mas a série $\sum |a_n|$ diverge então a série $\sum a_n$ não é absolutamente convergente.

- As séries de potências são absolutamente convergentes no interior do círculo de convergência.

Consideremos as funções definidas sobre um conjunto $\mathbb{E}$ com valores reais ou complexos. Para cada função u notaremos

$$\|u\| = \sup_{x \in \mathbb{E}} |u(x)|, \tag{2.1}$$

que representa um número maior ou igual a zero e que designaremos por **norma** de u. Sejam u e v duas funções e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar, então a norma possui as seguintes propriedades:

- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

- $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$

para todo o escalar λ, quando $\|u\| < +\infty$, ou seja, sobre o espaço vectorial das funções u, tais que $\|u\| < \infty$, $\|u\|$ é uma norma.

Dizemos que uma série de funções u_n é **normalmente convergente** se a série das normas $\sum\limits_n \|u_n\|$ é uma série convergente com termos positivos, ou seja, $\sum\limits_n \|u_n\| < +\infty$.

Isto implica que para cada $x \in \mathbb{E}$ a série $\sum\limits_n |u_n(x)|$ é convergente, logo a série $\sum\limits_n u_n(x)$ é absolutamente convergente; além disso, se $v(x)$ designa a soma desta última série temos $\|v\| \leq \sum\limits_n \|u_n\|$ e $\lim\limits_{p \to \infty} \left\| v - \sum\limits_{n=0}^{p} u_n \right\| = 0$.

Esta última relação exprime que as somas parciais $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ convergem uniformemente para v quando p tende para ∞. Assim toda a série normalmente convergente é uniformemente convergente.

Se $\mathbf{A}$ é um sub-conjunto de $\mathbb{E}$, dizemos que a série de termo geral u_n **converge normalmente** para $x \in \mathbf{A}$ se a série de funções $u_n^{'} = u_n|\mathbf{A}$ (restrição de u_n com $\mathbf{A}$) converge normalmente. Relembramos que o limite de uma série uniformemente convergente de funções contínuas é contínua. Em particular, a soma de uma série normalmente convergente de funções contínua é contínua.

Proposição 5 (Troca entre a soma e a passagem para o limite) *Suponhamos que, para cada* n, $\lim_{x \to x_0} u_n(x)$ *existe e é* a_n. *Então se a série* $\sum_n u_n$ *é normalmente convergente, a série* $\sum_n a_n$ *é convergente e temos*

$$\sum_n a_n = \lim_{x \to x_0} \sum_n u_n(x). \tag{2.2}$$

O corpo $\mathbb{K}$ é um corpo munido de uma aplicação $x \longrightarrow |x|$ de $\mathbb{K}$ num conjunto de números reais maiores ou iguais a zero, tal que, satisfaz as seguintes propriedades:

- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $|xy| = |x||y|$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

É chegada a altura de introduzir na teoria questões de convergência, abandonando o domínio puramente formal.

Seja $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ uma série de potências formal com coeficientes em $\mathbb{K}$. A partir deste momento substituiremos x por um elemento z do corpo $\mathbb{K}$, o que dará à série um *valor* $S(z)$ que será um elemento do corpo $\mathbb{K}$; mas esta substituição exige que a série de potências formal $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ seja convergente, de tal modo, que nos restringiremos ao caso em que a série é absolutamente convergente.

De uma maneira mais precisa, introduziremos uma variável $r \geq 0$ real e consideremos a série de potências com termos positivos (ou nulos)

$$\sum_{n \geq 0} |a_n| r^n, \tag{2.3}$$

dita série associada à série de potências formal $S(x)$. O conjunto dos $r \geq 0$ para os quais

$$\sum_{n \geq 0} |a_n| r^n < +\infty \tag{2.4}$$

é um intervalo de $\mathbb{R}^+$ e é diferente do vazio desde que a série de potências formal convirja para $r = 0$. Este intervalo pode ser aberto ou fechado à direita, finito ou infinito e pode reduzir-se apenas ao ponto zero. Em todos os casos, seja ρ o limite superior (menor dos majorantes do conjunto de reais ρ tais que $\sum_{k\geq 0} |a_k|\rho^k < \infty$): ρ é um número maior ou igual a zero finito ou infinito (caso em que a série converge absolutamente para qualquer z, por maior que seja o seu valor absoluto $|z|$) chamado **raio de convergência** da série de potências formal $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. O conjunto dos z tal que $|z| < \rho$ chama-se o **disco de convergência** da série de potências formal e é um conjunto aberto. É vazio se $\rho = 0$. É verdadeiramente um disco desde que o corpo dos coeficientes seja o corpo complexo $\mathbb{C}$.

Proposição 6 *:*

a) Para todo $r < \rho$, a série de potências formal $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge normalmente para $|z| \leq r$; em particular, a série de potências formal converge absolutamente para cada z tal que $|z| < \rho$;

b) A série de potências formal $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge para $|z| > \rho$.

A prova desta proposição vai resultar do

Lema 2.1.2 (Lema de Abel) *Sejam os números reais r e r_0 tais que $0 < r < r_0$. Se existe um número finito $M > 0$ tal que $|a_n|(r_0)^n \leq M$ para qualquer inteiro $n \geq 0$, então a série de potências formal $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge normalmente para $|z| \leq r$.*

Demonstração:

Inicialmente temos que $|a_n z^n| \leq |a_n| r^n \leq M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$ e $\epsilon_n = M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$ é o termo geral de uma série convergente, mais concretamente, de uma progressão geométrica de razão $\frac{r}{r_0} < 1$, porque $r < r_0$. Vamos agora demonstrar a afirmação a) da proposição anterior. Se $r < \rho$ tomemos r_0 tal que $r < r_0 < \rho$; desde que a série $\sum_{n\geq 0} |a_n|(r_0)^n$ convirga, o seu termo geral é majorado por um número fixo M, e o Lema de Abel assegura a convergência normal de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ para $|z| < r$.

Falta provar a afirmação b): se $|z| > \rho$, existem inteiros n tais que $|a_n z^n|$ sejam arbitrariamente grandes, caso contrário em virtude do Lema de Abel, a série $\sum_{n\geq 0} |a_n| r'^n$ será convergente para um r' tal que $\rho < r' < |z|$, o que contradirá a definição de ρ.

■

Teorema 2.1.3 *Dada a série de potências formal* $\sum c_n z^n$*, sejam* $\alpha = \lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|c_n|}$ *(expressão do raio de convergência de Hadamard),* $R = \frac{1}{\alpha}$ *(* $se\ \alpha = 0, R = +\infty$ *,* $se\ \alpha = +\infty, R = 0$*). Então* $\sum c_n z^n$ *converge se* $|z| < R$ *e diverge se* $|z| > R$*.*

Demonstração:

Para demonstrar a expressão do raio de convergência $\frac{1}{\alpha} = \lim_{n\to\infty} sup|c_n|^{\frac{1}{n}}$, relembremo-nos da definição do limite superior de uma série de números reais u_n: $\lim_{n\to\infty} sup u_n = \lim_{p\to\infty}\left(\sup_{n\geq p} u_n\right)$. Utilizando o critério de convergência clássica que diz: "seja v_n uma série de potências de números reais tal que $v_n \geq 0$; se $\lim_{n\to\infty} sup(v_n)^{\frac{1}{n}} < 1$, temos $\sum_n v_n < +\infty$, e se $\lim_{n\to\infty} sup(v_n)^{\frac{1}{n}} > 1$, temos $\sum_n v_n = +\infty$ (*regra de Cauchy*, que resulta da comparação da série $\sum_n v_n$ com uma progressão geométrica)". Aqui temos $v_n = |a_n|r^n$ e por conseguinte $\lim_{n\to\infty} sup(v_n)^{\frac{1}{n}} = r\left(\lim_{n\to\infty} sup|c_n|^{\frac{1}{n}}\right)$, logo a série $\sum_n |a_n|r^n$ converge para $\frac{1}{r} > \lim_{n\to\infty} sup|c_n|^{\frac{1}{n}}$, e diverge para $\frac{1}{r} < \lim_{n\to\infty} sup|c_n|^{\frac{1}{n}}$. O que prova que $\frac{1}{\alpha} = \lim_{n\to\infty} sup|c_n|^{\frac{1}{n}}$.

■

Exemplo 2.1.4

- *As séries de potências formais* $\sum_{n\geq 0} n!z^n$ *e* $\sum n^n z^n$ *têm um raio de convergência nulo.*
- *A série de potências formal* $\sum \frac{z^n}{n!}$*, tem um raio de convergência infinito.*
- *A série de potências formal* $\sum z^n$*, tem um raio de convergência igual a um. Se* $|z| = 1$ *a série diverge, porque* $z^n \not\longrightarrow 0$ *se* $n \longrightarrow \infty$*.*
- *A série de potências formal* $\sum \frac{z^n}{n}$*, tem um raio de convergência igual a um. No círculo de convergência, a série diverge no ponto* $z = 1$ *e converge em todos os outros pontos de* $|z| = 1$*.*
- *A série de potências formal* $\sum \frac{z^n}{n^2}$*, tem um raio de convergência igual a um, convergindo em todos os pontos de* $|z| = 1$*.*

Proposição 7 *Sejam* $A(x)$ *e* $B(x)$ *duas séries de potências formais onde o raio de convergência seja maior ou igual a* ρ*. Sejam*

$$S(x) = A(x) + B(x) \tag{2.5}$$

$$P(x) = A(x)B(x) \tag{2.6}$$

a sua soma e o seu produto respectivamente. Então:

- *As séries $S(x)$ e $P(x)$ tem um raio de convergência maior ou igual a ρ.*
- *Além disso, para $|z| < \rho$,*

$$S(z) = A(z) + B(z), \qquad P(z) = A(z)B(z). \tag{2.7}$$

Demonstração:

Sejam $A(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$, $B(x) = \sum\limits_{n\geq 0} b_n x^n$, $S(x) = \sum\limits_{n\geq 0} c_n x^n$, $P(x) = \sum\limits_{n\geq 0} d_n x^n$. Colocando $\gamma_n = |a_n| + |b_n|$, $\delta_n = \sum\limits_{0\leq p\leq n} |a_p||b_{n-p}|$. Temos $|c_n| \leq \gamma_n$, $|d_n| \leq \delta_n$. Se $r < \rho$ as séries $\sum\limits_{n\geq 0} |a_n| r^n$ e $\sum\limits_{n\geq 0} |b_n| r^n$ convergem, logo

$$\sum_{n\geq 0} \gamma_n r^n = \sum_{n\geq 0} |a_n| r^n + \sum_{n\geq 0} |b_n| r^n < +\infty$$

$$\sum_{n\geq 0} \delta_n r^n = \sum_{p\geq 0} |a_p| r^p . \sum_{q\geq 0} |b_q| r^q < +\infty.$$

Assim as séries $\sum\limits_{n\geq 0} |c_n| r^n$ e $\sum\limits_{n\geq 0} |d_n| r^n$ convergem; e todo $r < \rho$ é igual ao raio de convergência de cada uma das séries $S(x)$ e $P(x)$. Logo os seus raios de convergência são maiores ou iguais a ρ.

Falta provar as relações (2.7) da proposição. A primeira é evidente e a segunda resulta da multiplicação das séries convergentes; de uma maneira precisa, temos uma proposição clássica que relembramos aqui:

Proposição 8 *Sejam $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ e $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ duas séries absolutamente convergentes. Se colocarmos $w_n = \sum\limits_{0\leq p\leq n} u_p v_{n-p}$, a série $\sum\limits_{n\geq 0} w_n$ é absolutamente convergente, e a sua soma é igual ao produto $\sum\limits_{p\geq 0} u_p \sum\limits_{q\geq 0} v_q$.*

Demonstração:

Consideremos $\alpha_p = \sum\limits_{n\geq p} |u_n|$, $\beta_p = \sum\limits_{n\geq q} |v_n|$; então temos $\sum\limits_{n\geq 0} |w_n| \leq \sum\limits_{p\geq 0}\sum\limits_{q\geq 0} |u_p||v_q| = \alpha_0\beta_0$; além disso, se $m \geq 2n$, então $\sum\limits_{k\leq m} w_k - \sum\limits_{k\leq n} u_k \sum\limits_{k\leq n} v_k$ é majorada por uma soma de termos

$|u_p||v_q|$ para cada um dos quais um ou mais dos inteiros p e q é maior do que n, logo esta soma é majorada por $\alpha_0\beta_{n+1} + \beta_0\alpha_{n+1}$, e ela tende para zero quando n tende para infinito. Logo $\sum_{k\leq m} w_k$ tende para o produto das somas infinitas $\sum_{n\geq 0} u_n$ e $\sum_{n\geq 0} v_n$.

■

Sejam dadas duas séries de potências formais S e T com $T(0) = 0$; e consideremos definida a série de potências formal $S \circ T$.

Proposição 9 *Seja $T(x) = \sum_{n\geq 1} b_n x^n$ uma série de potências formal. Se os raios de convergência $\rho(S)$ e $\rho(T)$ são diferentes de zero, o raio de convergência é igual ao raio de convergência da série de potências formal $U = S \circ T$. De uma maneira mais precisa, existem $r > 0$ tal que $\sum_{n\geq 1} |b_n| r^n < \rho(S)$; se r for assim escolhido, o raio de convergência de U é maior ou igual a r, e, para todo o z tal que $|z| \leq r$, temos*

$$|T(z)| < \rho(S), \qquad S(T(z)) = U(z). \tag{2.8}$$

Demonstração:

Seja $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Para $r > 0$ suficientemente pequeno, $\sum_{n\geq 1} |b_n| r^{n-1}$ é finito porque o raio de convergência de T é diferente de zero. Logo $\sum_{n\geq 1} |b_n| r^{n-1}$ é finito para $r > 0$, e por conseguinte

$$\sum_{n\geq 1} |b_n| r^n = r \sum_{n\geq 1} |b_n| r^{n-1}$$

tende para zero quando r tende para zero. Então existe um $r > 0$ tal que $\sum_{n\geq 1} |b_n| r^n < \rho(S)$. Logo

$$\sum_{p\geq 0} |a_p| \left(\sum_{k\geq 1} |b_k| r^k \right)^p$$

é finito. Ou então esta é uma série $\sum_{n\geq 0} \gamma_n r^n$, e se fizermos $U(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$, temos $|c_n| \leq \gamma_n$. Assim $\sum_{n\geq 0} |c_n| r^n$ é finita, e o raio de convergência de U é maior ou igual a r.

Falta provar a segunda relação de (2.8). Seja $S_n(x) = \sum_{0\leq k\leq n} a_k x^k$, e seja $S_n \circ T = U_n$. Para $|z| \leq r$, temos

$$U_n(z) = S_n(T(z)) \tag{2.9}$$

pois a aplicação $T \longrightarrow T(z)$ é um homomorfismo de anéis e S_n é um polinómio. Desde que a série S convirja no ponto $T(z)$, temos

$$S(T(z)) = \lim_n S_n(T(z)). \tag{2.10}$$

De outro modo, os coeficientes de $U - U_n = (S - S_n) \circ T$ são majorados por

$$\sum_{p>n} |a_p| \left(\sum_{k \geq 1} |b_k| r^k \right)^p ,$$

série cuja soma tende para zero quando n tende para $+\infty$. Segue-se que, para $|z| \leq r$, $U(z) - U_n(z)$ tende para zero quando n tende para $+\infty$. Finalmente temos que $U(z) = \lim\limits_{n\to\infty} U_n(z) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(T(z)) = S(T(z))$ para $|z| \leq r$. O que prova a segunda relação de (2.8) e termina a prova da proposição.

■

Seja $S(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ com $a_0 \neq 0$, então existe uma única série de potências formal $T(x)$ tal que o produto $S(x)T(x) = 1$.

Proposição 10 *Se o raio de convergência de S é diferente de zero, ele é o mesmo raio de convergência da série T tal que ST é igual a* 1.

Demonstração:

Multiplicando $S(x)$ por uma constante conveniente, remetemo-nos ao caso onde $a_0 = 1$. Seja então $S(x) = 1 - U(x)$, com $U(0) = 0$. A série inversa $T(x)$ obtém-se por substituição de $U(x)$ com y na série $1 + \sum\limits_{n>0} y^n$; onde esta última série tem um raio de convergência igual a 1, logo diferente de zero. Esta proposição resulta então da proposição anterior.

■

Proposição 11 *Seja $S(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ uma série de potências formal, $S'(x) = \sum\limits_{n\geq 0} n a_n x^{n-1}$ a sua série de potências formal derivada. As séries S e S' têm o mesmo raio de convergência. Além disso, se este raio de convergência ρ é diferente de zero, temos, para $|z| < \rho$,*

$$S'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{S(z+h) - S(z)}{h} \tag{2.11}$$

para valores diferentes de zero.

Antes de passarmos à sua demonstração vejamos a seguinte nota preliminar.

Nota: Se $|z| < \rho$ então $|z+h| < \rho$ para h suficientemente pequeno; então $S(z+h)$ está definida. No caso real, a relação (2.11) exprime que a função $S \longrightarrow S(z)$ tem uma derivada igual a $S'(z)$, no caso complexo mostra também que temos uma noção de derivada por semelhança com a variável complexa z. Em ambos os casos a existência de uma função derivada $S'(z)$ implica que a função $S(z)$ seja contínua para $|z| < \rho$. #

Estamos agora em condições de passar à demonstração da proposição.

Demonstração:

Seja $|a_n| = \alpha_n$, chamemos ρ e ρ' aos raios de convergência das séries S e S'. Se $r < \rho$, a série $\sum_{n\geq 0} n\alpha_n r^{n-1}$ converge, logo

$$\sum_{n\geq 1} \alpha_n r^n \leq r\left(\sum_{n\geq 0} n\alpha_n r^{n-1}\right) < +\infty,$$

e por conseguinte $r \leq \rho$. Inversamente, seja $r < \rho$, tomemos um r' tal que $r < r' < \rho$; temos

$$n\alpha_n r^{n-1} = \frac{1}{r'}(\alpha_n r'^n) n \left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1};$$

desde que $r' < \rho$, existe um $M > 0$ (finito) tal que $\alpha_n r'^n \leq M$ para todo n, donde

$$n\alpha_n r^{n-1} \leq \frac{M}{r'} n \left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1},$$

e como a série $\sum_{n\geq 1} n\left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1}$ converge, a série $\sum_{n\geq 1} n\alpha_n r^{n-1}$ converge; logo $r \leq \rho'$. Assim todo o número menor que ρ' é menor ou igual a ρ e todo número menor que ρ é menor ou igual a ρ', donde $\rho = \rho'$.

Falta demonstrar a relação (2.11). Além disso fixemos z de tal maneira que $|z| < \rho$, escolhemos um r tal que $|z| < r < \rho$ e suponhamos que

$$0 \neq |h| \leq r - |z|. \tag{2.12}$$

Então $S(z+h)$ está definida e temos

$$\frac{S(z+h) - S(z)}{h} - S'(z) = \sum_{n\geq 1} u_n(z,h), \tag{2.13}$$

onde colocamos

$$u_n(z,h) = a_n \left\{(z+h)^{n-1} + z(z+h)^{n-2} + \ldots + z^{n-1} - nz^{n-1}\right\}. \tag{2.14}$$

Desde que $|z|$ e $|z+h|$ sejam menores ou iguais a r; temos $|u_n(z,h)| \leq 2n\alpha_n r^{n-1}$; uma vez que $r < \rho$ temos $\sum_{n\geq 1} n\alpha_n r^{n-1} < +\infty$; logo, dado $\epsilon > 0$, existe um inteiro n_0 tal que

$$\sum_{n\geq n_0} 2n\alpha_n r^{n-1} \leq \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.15}$$

Tendo assim escolhido n_0, a soma finita $\sum_{n\leq n_0} U_n(z,h)$ é um polinómio em h, nulo para $h=0$; logo, desde que $|h|$ seja inferior a um número η conveniente, temos $\left|\sum_{n\leq n_0} U_n(z,h)\right| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Finalmente, se h é satisfeito com (2.12) e com $|h| \leq \eta$, deduzimos de (2.13) que

$$\left|\frac{S(z+h)-S(z)}{h} - S'(z)\right| \leq \left|\sum_{n\leq n_0} u_n(z,h)\right| + \sum_{n>n_0} 2n\alpha_n r^{n-1} \leq \epsilon \tag{2.16}$$

o que prova a relação (2.11).

■

Seja $S(x)$ uma série de potências formal cujo raio de convergência seja diferente de zero. Seja $S(z)$ a soma da série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ para $|z| < \rho$. É uma função que admite por derivada a função $S'(z) = \sum_{n\geq 0} na_n z^{n-1}$.

Um facto adicional e importante é que a derivada da soma da série pode ser obtida por derivação termo a termo da série de potências original. Neste caso, o raio de convergência da série obtida por derivação é o mesmo da série original. Aplicando novamente a proposição anterior à série S', a série $S'(z)$ vai admitir à sua volta, para $|z| < \rho$ uma função derivada $S''(z)$, soma da série de potências formal $\sum_{n\geq 0} n(n-1)a_n z^{n-2}$ que tem o mesmo raio de convergência ρ.

Se $S(z)$ é uma função infinitamente derivável para $|z| < \rho$; a sua derivada de ordem n é

$$S^{(n)}(z) = n!a_n + T_n(z), \tag{2.17}$$

onde T_n é uma série tal que $w(T_n) \geq 1$, de outro modo dizemos que $T_n(0) = 0$. Donde

$$a_n = \frac{1}{n!} S^{(n)}(0). \tag{2.18}$$

Repetindo este raciocínio vê-se que uma série de potências com raio de convergência $\rho > 0$ representa uma função analítica em $|z| < \rho$, com derivadas de qualquer ordem, que se podem obter por derivação termo a termo.

Isto mostra que se conhecermos a função $S(z)$ numa vizinhança de zero, os coeficientes a_n da série de potências formal S são inteiramente determinados. Como consequência obtemos que "seja dada uma função $f(z)$ definida para $|z|$ suficientemente pequeno, existe uma única série de potências formal $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ cujo raio de convergência é diferente de zero, e temos $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ para $|z|$ suficientemente pequeno".

Proposição 12 *Seja S uma série de potências formal tal que $S(0) = 0$, $S'(0) \neq 0$, e seja T a série recíproca de S, isto é, a série tal que $T(0) = 0$, $S \circ T = I$. Se o raio de convergência de S é diferente de zero, ele é o mesmo raio de convergência da série T.*

Demonstração:

Retomemos as noções da demonstração da Proposição 4 e consideremos as relações (1.27) que permitem calcular os coeficientes desconhecidos b_n da série procurada $T(x)$. Ao lado da série $S(x)$, consideremos uma série *majorante*, isto é, uma série $\overline{S}(x) = A_1 x - \sum_{n\geq 2} A_n x^n$ com coeficientes $A_n > 0$ tal que $|a_n| \leq A_n$ para todo n; além disso suporemos que $A_1 = |a_1|$. À série $\overline{S}$ da Proposição 4 associamos uma série $\overline{T}(y) = \sum_{n\geq 1} B_n y^n$ tal que $\overline{S}(\overline{T}(y)) = y$; os seus coeficientes B_n são dados pelas relações

$$A_1 B_n - P_n(A_2, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_{n-1}) = 0 \tag{2.19}$$

análogas a (1.27). Deduzimos por recorrência sobre n

$$|b_n| \leq B_n. \tag{2.20}$$

Segue-se que o raio de convergência da série T é igual ao da série $\overline{T}$. Vamos mostrar que este último é maior do que zero, o que demonstrará a proposição.

Escolhemos a série $\overline{S}$ do seguinte modo: "seja $r > 0$ um número estritamente inferior ao raio de convergência da série S (que por hipótese é diferente de zero); o termo geral da série $\sum_{n\geq 1} |a_n| r^n$ é então majorado por um número finito $M > 0$, e se considerarmos

$$A_1 = |a_1| \quad e \quad A_n = \frac{M}{r^n} \quad para \;\; n \geq 2, \tag{2.21}$$

obtemos os coeficientes de uma série majorante de S; a sua soma $\overline{S}(x)$ é igual a

$$\overline{S}(x) = A_1 x - M \frac{\frac{x^2}{r^2}}{1-\frac{x}{r}} \tag{2.22}$$

para $|x| < r$".

Procuremos uma função $\overline{T}(y)$, definida para os valores suficientemente pequenos de y, nulos para $y = 0$, e tal que $\overline{S}(\overline{T}(y)) = y$; $\overline{T}(y)$ deve ser solução da equação do segundo grau

$$\left(\frac{A_1}{r} + \frac{M}{r^2}\right)\overline{T}^2 - \left(A_1 + \frac{y}{r}\right)\overline{T} + y = 0, \tag{2.23}$$

que admite por soluções (anulando-se para $y = 0$)

$$\overline{T}(y) = \frac{A_1 + \frac{y}{r} - \sqrt{(A_1)^2 - 2A_1\frac{y}{r} - 4M\frac{y}{r^2} + \frac{y^2}{r^2}}}{2\left(\frac{A_1}{r} + \frac{M}{r^2}\right)}. \tag{2.24}$$

Quando $|y|$ é suficientemente pequeno, o radical é da forma $A_1\sqrt{1+u}$, com $|u| < 1$, logo $\overline{T}(y)$ admite um desenvolvimento em séries inteiras em y, que converge para $|y|$ suficientemente pequeno. Assim o raio de convergência desta série é diferente de zero, o que faltava demonstrar.

■

2.1.2 Funções holomorfas representadas por séries de potências formais

Em análise Matemática, cada série de potências formal convergente define uma função com valores reais ou complexos. As séries de potências formais também podem ser interpretadas como funções, mas temos de ter cuidado com o domínio e o contra-domínio.

Definição 2.1.5 *Dizemos que uma função $f(x)$, definida numa vizinhança de x_0, pode ser desenvolvida numa série de potências formal no ponto x_0 se existe uma série de potências formal $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ onde o raio de convergência é diferente de zero e se satisfaz $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n (x-x_0)^n$ para $|x - x_0|$.*

A série de potências formal $S(x)$ se existir é única. Se $f(x)$ se pode desenvolver numa série de potências formal no ponto x_0, então a função f é infinitamente derivável numa vizinhança de x_0 e é também a soma de uma série de potências formal. Se o produto de duas funções f e g

desenvolvidas em séries de potências formais no ponto x_0 é identicamente nulo numa vizinhança de x_0, então pelo menos uma das funções f e g é identicamente nula numa vizinhança de x_0; isto resulta do facto de que o anel das séries de potências formais é um anel de integridade.

Seja D um aberto do plano complexo $\mathbb{C}$, e seja f uma função de variável complexa $z = x+iy$ definida em D.

Definição 2.1.6 *Dizemos que $f(z)$ é **holomorfa** no ponto $z_0 \in D$ se*

$$\lim_{u \to 0} \frac{f(z_0+u) - f(z_0)}{u}, \qquad u \neq 0 \tag{2.25}$$

existe.

Isto é o mesmo que dizer que f possui no ponto z_0 uma derivada em relação à variável complexa. Dizemos que f é holomorfa num aberto D se é holomorfa em cada ponto de D.

Definição 2.1.7 *Uma função $f(x)$ com valores reais ou complexos, definida num conjunto aberto D chama-se **analítica** em D se, para todos os pontos $x_0 \in \mathrm{D}$, a função $f(x)$ pode ser desenvolvida numa série de potências formal no ponto x_0.*

De outro modo, dizemos que deve existir um número $\rho(x_0) \geq 0$ e uma série de potências formal $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, de raio de convergência maior ou igual a $\rho(x_0)$, tal que

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n (x-x_0)^n \quad \text{para} \quad |x-x_0| < \rho(x_0).$$

Proposição 13 *Seja $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ uma série de potências formal onde o raio de convergência ρ é diferente de zero. Seja*

$$S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

a sua soma para $|x| < \rho$. Então $S(x)$ é uma função analítica no disco $|x| < \rho$.

A prova desta proposição é uma consequência imediata da seguinte proposição

Proposição 14 *Sob as condições da proposição anterior, seja x_0, tal que $|x_0| < \rho$. Então a série de potências formal*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} S^{(n)}(x_0) x^n \tag{2.26}$$

tem um raio de convergência maior ou igual a $\rho - |x_0|$*, donde*

$$S(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} S^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \quad \textit{para} \quad |x-x_0| < \rho - |x_0|. \tag{2.27}$$

Demonstração:

Fazendo $r_0 = |x_0|$, $\alpha_n = |a_n|$. Temos

$$S^{(p)}(x_0) = \sum_{q\geq 0} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q}(x_0)^q.$$

$$|S^{(p)}(x_0)| = \sum_{q\geq 0} \frac{(p+q)!}{q!} \alpha_{p+q}(r_0)^q.$$

Para $r_0 \leq r < p$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{p\geq 0} \frac{1}{p!} |S^{(p)}(x_0)|(r-r_0)^p &\leq \sum_{p,q} \frac{(p+q)!}{p!q!} \alpha_{p+q}(r_0)^q (r-r_0)^p \\ &\leq \sum_{n\geq 0} \alpha_n \sum_{0\leq p\leq n} \frac{n!}{p!(n-p)!} (r-r_0)^p (r_0)^{n-p} \\ &\leq \sum_{n\geq 0} \alpha_n r^n \\ &\leq +\infty. \end{aligned}$$

Logo o raio de convergência da série (2.26) é maior ou igual a $r - r_0$. Como r pode ser escolhido arbitrariamente próximo de ρ, este raio de convergência é maior ou igual a $\rho - r_0$.

Seja agora x tal que $|x - x_0| < \rho - r_0$. A série dupla

$$\sum_{p,q} \frac{(p+q)!}{p!q!} a_{p+q}(x_0)^q (x-x_0)^p \tag{2.28}$$

converge absolutamente, a partir da desigualdade anterior. Para calcular a sua soma podemos agora agrupar os termos arbitrariamente. Iremos calcular esta soma de duas maneiras diferentes. Um primeiro agrupamento de termos dá:

$$\sum_{n\geq 0} a_n \sum_{0\leq p\leq n} \frac{n!}{p!(n-p)!} (x-x_0)^p (x_0)^{n-p} = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = S(x).$$

Um outro agrupamento dá

$$\sum_{p\geq 0} \frac{(x-x_0)^p}{p!} \sum_{q\geq 0} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q}(x_0)^q = \sum_{p\geq 0} \frac{(x-x_0)^p}{p!} S^{(p)}(x_0).$$

Comparando, obtemos (2.27), o que termina a demonstração.

■

Pólya conjecturou que se uma função tem uma série de potências com coeficientes inteiros e raio de convergência um, então uma função é racional ou o círculo unitário é um limite natural. Esta conjectura foi estudada por G. Polya em 1916 e demonstrada correctamente em 1921 por Carlson num resultado que agora é considerado como um clássico acontecimento do século vinte. Para qualquer série de potências, uma das seguintes afirmações é verdadeira:

- A série converge apenas em $z = 0$.
- A série converge absolutamente para todo z.
- A série converge absolutamente para qualquer z apenas num intervalo finito aberto $(-R, R)$ e diverge se $z < -R$ ou $z > R$. Nos pontos $z = R$ e $z = -R$, a série pode ser absolutamente convergente, convergente condicionalmente ou divergente.

2.1.3 O exemplo da função exponencial

Já mostrámos anteriormente que a série de potências formal $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} x^n$ tem um raio de convergência infinito.

Para z complexo, definimos

$$e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} z^n, \tag{2.29}$$

que é a soma de uma série absolutamente convergente e admite uma derivada

$$\frac{d}{dz}\left(e^z\right) = e^z \tag{2.30}$$

pela fórmula (2.11). Esta fórmula e as afirmações seguintes mostram, como se obtêm algumas propriedades básicas de funções holomorfas como consequência da sua construção a partir de uma série.

Aplicando a Proposição 11 com duas séries de termos gerais $u_n = \frac{1}{n!} z^n$ e $v_n = \frac{1}{n!} z'^n$ obtemos

$$w_n = \sum_{0 \leq p \leq n} \frac{1}{p!(n-p)!} z^p z'^{n-p} = \frac{1}{n!}(z + z')^n. \tag{2.31}$$

Por consequência temos a **propriedade funcional fundamental da função exponencial**

$$e^{z+z'} = e^z . e^{z'}. \tag{2.32}$$

Em particular temos

$$e^z.e^{-z} = 1, \tag{2.33}$$

logo $e^z \neq 0$ para todo z.

Considerando $z = x + iy$ com x e y reais resulta:

$$e^{x+iy} = e^x.e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y),$$

logo $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ e $\frac{d}{dy}\left(e^{iy}\right) = ie^{iy}$.

A função exponencial no plano complexo é uma função holomorfa e é periódica com o período imaginário $2\pi i$. Através da fórmula anterior verificamos que existe uma ligação entre a função exponencial e as funções trigonométricas.

2.2 Regularidade e Teoremas Importantes

2.2.1 Conceitos básicos sobre séries de potências formais em mais do que uma variável

Consideremos agora o espaço afim $\mathbb{K}^n$, munido da topologia euclidiana usual. Como é sabido, cada ponto $x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n}) \in \mathbb{K}^n$ tem uma vizinhança que consiste nos policilindros Δ do poliraio $\rho = (\rho_1, ..., \rho_n)$ com $\rho_i \geq 0$, centrado em x_0

$$\Delta = \{x \in K^n : |x_i - x_{0i}| < \rho_i\} \tag{2.34}$$

para $1 \leq i \leq n$.

Uma série de potências formal com n variáveis $x_1, \ldots, x_n$ é uma expressão da forma $f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} a_\nu x_1^{\nu_1} \ldots x_n^{\nu_n}$ que denotaremos por $\sum_{\nu} a_\nu x^\nu$ ou simplesmente $\sum a_\nu x^\nu$ onde $a_\nu \in \mathbb{K}$ para qualquer ν, os a_ν são os coeficientes de $\sum a_\nu x^\nu$ e o primeiro deles é $a(0, \ldots, 0)$ denotado por $f(0)$.

Se identificarmos o elemento $a \in \mathbb{K}$ com a sequência $(a, 0, 0, \ldots)$ e definirmos $X = (0, 1, 0, 0, \ldots)$, usando as definições da soma e da multiplicação, vemos que cada sequência com apenas alguns termos diferentes de zero, pode ser escrita como a soma finita

$$(a_0, a_1, \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n.$$

O conjunto de todas estas séries de potências formais será denotado por $\mathbb{F}_n, \mathbb{K}[[x_1, \ldots, x_n]]$ ou $\mathbb{K}[[x]]$.

A ordem de uma série de potências formal $\sum a_\nu x^\nu$, denotada por $w(f)$ é o menor inteiro $p \geq 0$ tal que $a_\nu \neq 0$ para algum ν com $|\nu| = p$. Se $f = 0$ então $w(f) = +\infty$.

Seja $f = \sum a_\nu x^\nu$ uma série de potências formal. Se $x \in \mathbb{K}^n$ e a série $\sum a_\nu x^\nu$ de elementos de $\mathbb{K}$ converge para $c \in \mathbb{K}$, dizemos que f converge em x para c e escrevemos $f(x) = c$.

Definição 2.2.1 *Seja* $\mathrm{D} \subset \mathbb{K}^n$, *dizemos que* f ***converge uniformemente*** *em* D *se e só se:*
a) f *converge em todos os pontos de* D,
b) para todo $\epsilon > 0$ *existe um conjunto finito* $\mathbb{I}_\epsilon \subset \mathbb{N}^n$ *tal que* $\left|\sum_{\nu \in \mathbb{I}_\epsilon} a_\nu x^\nu - f(x)\right| < \epsilon$ *para todo o conjunto finito de índices* $\mathbb{I} \supset \mathbb{I}_\epsilon$ *e para todos os pontos* $x \in \mathrm{D}$.

Seja f uma série de potências formal, **o domínio de** f, denotado por $\mathrm{D}(f)$, é o interior do conjunto de pontos na qual f converge.

A série f chama-se **convergente** se $\mathrm{D}(f) \neq \phi$. O conjunto de todas as séries de potências formais convergentes será denotado por $\mathbb{O}_n, \mathbb{K}\{x_1, ..., x_n\}$ ou $\mathbb{K}\{x\}$.

Por agora usaremos a seguinte notação: dado um ponto $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*) \in \mathbb{K}^n$ cujas coordenadas são diferentes de zero, $\Delta(x^*)$ será denotado o policilindro do poliraio $\rho = (|x_1^*|, ..., |x_n^*|)$ centrado na origem.

Proposição 15 *Seja* $f = \sum a_\nu x^\nu$ *uma série de potências formal convergente e* $\mathrm{D}^*(f)$ *o conjunto de pontos na qual* f *converge e cujas coordenadas são diferentes de zero. O conjunto* $D(f)$ *é a união de* $\Delta(x^*), x^* \in \mathrm{D}^*(f)$. *Em particular* $D(f)$ *é uma vizinhança aberta ligada à origem. Além disso,* f *converge uniformemente em todo o subconjunto compacto de* $\mathrm{D}(f)$.

Demonstração:

Basta mostrar que para $0 < r < 1$ e $x^* \in \mathrm{D}^*(f)$, a série f converge uniformemente em $\Delta(rx^*)$. Para finalizar, primeiro notamos que $\sum |a_\nu x^{*\nu}|$ converge porque temos $\sum a_\nu x^{*\nu}$ pela proposição "seja $\sum a_\nu$ uma série de números complexos, então $\sum a_\nu$ converge se e só se $\sum |a_\nu|$ converge". Então existe um $M > 0$ tal que $|a_\nu x^{*\nu}| < M$ (pela Proposição "uma série $\sum a_\nu$ de números reais não negativos converge se e só se existe um número real $M > 0$ tal que $\sum_{\nu \in \mathbb{I}} a_\nu < M$ para qualquer conjunto finito de indíces $\mathbb{I} \subset \mathbb{N}^n$. Neste caso a soma das séries é o supremo de todas essas somas finitas").

Agora, se $x \in \Delta(rx^*)$ e $\mathbb{I} \subset \mathbb{I}^n$ é finito temos

$$\sum_{\nu \in \mathbb{I}} |a_\nu x^\nu| \leq \sum_{\nu \in \mathbb{I}} |a_\nu x^{*\nu}| r^{|\nu|} < M \sum_{\nu \in \mathbb{I}} r^{|\nu|} \tag{2.35}$$

mas, desde que

$$\sum_{\nu \in \mathbb{I}} r^{|\nu|} \leq \sum_{\nu_1 \in \mathbb{I}_1} r^{\nu_1} \ldots \sum_{\nu_n \in \mathbb{I}_n} r^{\nu_n}, \tag{2.36}$$

onde $\mathbb{I}_l \subset \mathbb{N}$ é o conjunto da l-ésima componente de todos os índices de $\mathbb{I}$, e a série $\sum r^{\nu_l}$, com $1 \leq l \leq n$ converge para $0 < r < 1$, apenas temos duas séries $\sum\limits_{\nu \in \mathbb{I}} r^{|\nu|}$ e $\sum |a_\nu x^\nu|$ (novamente pela última Proposição referida). Assim concluímos que a série $\sum a_\nu x^\nu$ converge.

Resta-nos ver que esta convergência é uniforme em $\Delta(rx^*)$. Assim consideremos $\epsilon > 0$ e um conjunto finito $\mathbb{I}_\epsilon \subset \mathbb{N}^n$ tal que $\sum\limits_{\nu \notin \mathbb{I}} r^{|\nu|} < \dfrac{\epsilon}{M}$ para qualquer conjunto finito de indíces $\mathbb{I} \supset \mathbb{I}_\epsilon$.

Para a desigualdade precedente temos

$$\left| \sum_{\nu \in \mathbb{I}} a_\nu x^\nu - f(x) \right| \leq \sum_{\nu \notin \mathbb{I}} |a_\nu x^\nu| \leq M \sum_{\nu \notin \mathbb{I}} r^{|\nu|} < \epsilon, \tag{2.37}$$

o que conclui a prova.

∎

Consideremos agora novas variáveis $y_1, \ldots, y_n$ e para qualquer $\mu \in \mathbb{N}^n$ a fórmula

$$(x_1 + y_1)^{\mu_1} \ldots (x_n + y_n)^{\mu_n} = \sum_{\nu} P_{\mu\nu}(x) y^\nu,$$

onde $P_{\mu\nu}(x) = \frac{\mu!}{\nu!(\mu-\nu)!} x^{\mu-\nu}$ e $\mu_1 \geq \nu_1 \geq \ldots \mu_n \geq \nu_n$.

Proposição 16 *Seja $f = \sum a_\nu x^\nu$ uma série de potências formal convergente. Então a função associada*
$$\begin{array}{rccc} {}^a f\colon & \mathrm{D}(f) & \longrightarrow & K \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

é contínua e para qualquer $x_0 \in \mathrm{D}(f)$ defendemos que:

a) Para qualquer ν a série $\sum\limits_{\mu} a_\mu P_{\mu\nu}(x_0)$ converge, então dizemos que $b_\nu = \sum\limits_{\mu} a_\mu P_{\mu\nu}(x_0)$.

b) A série de potências $g = \sum b_\nu x^\nu$ é convergente, e $g(x - x_0) = f(x)$ para x suficientemente perto de x_0.

Demonstração:

Para qualquer inteiro $p \geq 0$ consideremos f_p o polinómio $\sum\limits_{|\nu|\leq p} a_\nu x^\nu$. Agora fixemos $0 < r < 1$ e $x^* \in \mathrm{D}^*(f)$. Pela Proposição 15, a sequência de polinómios $(f_p)_{p\geq 0}$ converge uniformemente para ${}^a\mathrm{f}|\Delta(rx^*)$ em $\Delta(rx^*)$. Consequentemente, ${}^a\mathrm{f}|\Delta(rx^*)$ é contínua e $D(f)$ sendo a união de todos $\Delta(rx^*)$, ${}^a\mathrm{f}$ é contínua.

Para provar $a)$ e $b)$ notamos que se $y \in \mathbb{K}^n$ está suficientemente perto da origem, o ponto $z = (|x_{01}| + |y_1|, \ldots, |x_{0n}| + |y_n|)$ pertence a $\mathrm{D}(f)$ (novamente pela Proposição 15), e segue-se que a série $\sum\limits_{(\mu,\nu)} a_\mu P_{\mu\nu}(x_0)y^\nu$ converge. De facto, se $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ são conjuntos finitos temos:

$$\sum_{(\mu,\nu)\in\mathcal{I}\times\mathcal{J}} |a_\mu P_{\mu\nu}(x_0)y^\nu| \leq \sum_{\mu\in\mathcal{I}} |a_\mu| \sum P_{\mu\nu}\left(|x_{01}|, \ldots, |x_{0n}|\right)|y^\nu| = \sum_{\mu\in\mathcal{I}} |a_\mu| z^\mu,$$

e a outra afirmação segue-se da Proposição ("uma série $\sum a_\nu$ de números reais não negativos converge se e só se existe um número real $M > 0$ tal que $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{I}} a_\nu < M$ para qualquer conjunto finito de indíces $\mathbb{I} \subset \mathbb{N}^n$. Neste caso a soma das séries é o supremo de todas essas somas finitas") e o facto que f converge para z. Assim, a série iterada

$$\sum_\nu \sum_\mu a_\mu P_{\mu\nu}(x_0)y^\nu, \qquad \sum_\mu \sum_\nu a_\mu P_{\mu\nu}(x_0)y^\nu, \tag{2.38}$$

existe e a sua soma coincide pela Proposição ("seja $\sum a_\nu$ uma série convergente e consideremos uma permutação τ de $\{1, \ldots, n\}$ então a soma da série iterada $\sum\limits_{\nu_{\tau(1)}} \cdots \sum\limits_{\nu_{\tau(n)}} a_\nu$ converge e coincide com a soma de $\sum a_\nu$"). Assim provamos $a)$ e que a série g de $b)$ é convergente. Finalmente, se x está perto de x_0, então $y = x - x_0$ está perto da origem, e pela observação anterior

$$\begin{aligned} g(x - x_0) &= \sum_\nu \left(\sum_\mu a_\mu P_{\mu\nu}(x_0)\right) y^\nu \\ &= \sum_\mu \sum_\nu a_\mu P_{\mu\nu}(x_0)y^\nu \\ &= f(x_0 + y) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

■

Sejam $f = \sum a_\nu x^\nu$ e $g = \sum b_\nu x^\nu$ duas séries de potências formais. Consideremos a sua soma e o seu produto definidos como na Seccção 1.1. Facilmente observamos que $(1 -$

$x_1)\dots(1-x_n)\sum_{|\nu|\geq 0} x^\nu = 1$, o que mostra claramente que

$$w(f+g) \geq min\{w(f), w(g)\} \quad e \quad w(fg) = w(f)w(g). \tag{2.39}$$

Se f e g são diferentes de zero então fg também é diferente de zero, além disso se f e g convergem para o ponto $x \in \mathbb{K}^n$ então $f+g$ e fg também convergem para o ponto x e temos

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad e \quad (fg)(x) = f(x)g(x). \tag{2.40}$$

Se f e g são séries de potências formais convergentes então

$$\mathrm{D}(f+g) \supset \mathrm{D}(f) \cap \mathrm{D}(g) \neq \phi, \quad \mathrm{D}(fg) \supset \mathrm{D}(f) \cap \mathrm{D}(g) \neq \phi, \tag{2.41}$$

o que implica que as séries $f+g$ e fg sejam também convergentes.

Desta forma, $\mathbb{O}_n$ é um anel comutativo com unidade, que contém o corpo dos coeficientes $\mathbb{K}$, assim é uma $\mathbb{K}$-álgebra. Além disso, é um domínio de integridade, como já foi provado anteriormente.

Definição 2.2.2 *Uma família $\{f_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ de séries de potências formais*

$$f_\lambda = \sum a_{\lambda\nu} x^\nu \tag{2.42}$$

*chama-se **somável** se para qualquer inteiro $p \geq 0$ a subfamília das séries de ordem menor ou igual a p é finita.*

Esta definição é equivalente à Definição 1.1.3.

Sejam $f = \sum a_\nu x^\nu, g_1, \dots, g_n$ séries de potências formais com ordens $w(g_1) \geq 1 \dots w(g_n) \geq 1$. Então para qualquer ν,

$$w(a_\nu g_1^\nu \dots g_n^\nu) \geq \nu_1 w(g_1) + \dots + \nu_n w(g_n) \geq |\nu|, \tag{2.43}$$

e portanto a família

$$\{a_\nu g_1^\nu \dots g_n^\nu | \nu \in \mathbb{N}^n\} \tag{2.44}$$

é somável. A soma desta família chama-se a **substituição ou composição** de $g_1, \dots, g_n$ em f e denotada por $f(g_1, \dots, g_n)$.

Para qualquer outra série de potências formal h temos:

- $(h+f)(g_1,\ldots,g_n) = h(g_1,\ldots,g_n) + f(g_1,\ldots,g_n)$, e
- $(hf)(g_1,\ldots,g_n) = h(g_1,\ldots,g_n)f(g_1,\ldots g_n)$.

Como uma aplicação, consideremos a identidade $(1-x_1)\sum x_1^{\nu} = 1$, então para qualquer $f \in \mathbb{F}_n$ com $f(0) = a \neq 0$, temos

$$1 = \left(1 - \left(1 - \frac{1}{a}f\right)\right)\sum\left(1 - \frac{1}{a}f\right)^{\nu_1}, \tag{2.45}$$

e consequentemente existe uma série de potências formal

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a}\sum\left(1 - \frac{1}{a}f\right)^{\nu_1}. \tag{2.46}$$

Segue-se que $\mathbb{F}_n$ é um anel local cujo ideal maximal $\hat{m}_n$ consiste nas séries de potências formais com ordens maiores ou iguais a 1. Claramente, este ideal é gerado pelas variáveis $\hat{m}_n = \{x_1,\ldots,x_n\}\mathbb{F}_n$.

No que diz respeito à convergência temos

Proposição 17 *Se $f, g_1, \ldots, g_n$ são séries de potências formais convergentes, $f(g_1,\ldots,g_n)$ é convergente. Se $x \in \mathbb{K}^n$ está perto da origem, então $g_1,\ldots,g_n, f(g_1,\ldots,g_n)$ converge em x e além disso f converge para $(g_1(x),\ldots,g_n(x))$ e $f(g_1,\ldots,g_n)(x) = f(g_1(x),\ldots,g_n(x))$.*

Demonstração:

Seja $f = \sum a_\nu x^\nu$, $g_i = \sum b_{i\nu}x^\nu$, com $1 \leq i \leq n$, escrevemos $g_i^* = \sum |b_{i\nu}|x^\nu$, com $1 \leq i \leq n$. Pela Proposição 16 e desde que $g_1^*(0) = \ldots = g_n^*(0) = 0$, observamos que se x está perto da origem, as séries $g_1^*,\ldots,g_n^*$ convergem em $(|x_1|,\ldots,|x_n|)$, para $t_1,\ldots,t_n$ respectivamente, e $t = (t_1,\ldots,t_n) \in \mathrm{D}(f)$. Assim supomos que x verifica estas condições. Então $g_1,\ldots,g_n$ também converge em x, e escrevemos $g(x) = (g_1(x),\ldots,g_n(x))$. Logo $|g_i(x)| \leq t_i$ pela definição de g_i^* para $1 \leq i \leq n$, concluimos que $g(x) \in \mathrm{D}(f)$ pela Proposição 15. Resta-nos mostrar que $f(g_1,\ldots,g_n)$ converge em x para $f(g(x))$.

Para esse fim, para qualquer inteiro $p \geq 0$, consideremos as séries

$$f_p = \sum_{|\nu|\leq p} a_\nu x^\nu, \qquad h_p = f_p(g_1,\ldots,g_n). \tag{2.47}$$

Pelas propriedades das séries de potências formais temos $h_p = f_p(g(x))$ e desde que f convirja em $g(x)$ isto implica, $\lim_{p\to\infty} f_p(g(x)) = f(g(x))$. Assim, temos que provar que $f(g_1,\ldots,g_n)$

converge em x para $\lim_{p\to\infty} h_p(x)$. Pelas propriedades da composição

$$f(g_1,\ldots,g_n) - h_p = (f - f_p)(g_1,\ldots,g_n) = \sum_{|\nu|>p} a_\nu g_1^{\nu_1}\ldots g_n^{\nu_n} \tag{2.48}$$

para qualquer p, denotaremos esta série por $\sum_\nu c_{p\nu}x^\nu$. Seja também $\sum_\nu d_{p\nu}x^\nu$ a série obtida por substituição de $g_1^*,\ldots,g_n^*$ em $\sum_{|\nu|>p} |a_\nu|x^\nu$. Pretendemos que $\sum_\nu d_{p\nu}x^\nu$ convirja para x e

$$\sum_\nu d_{p\nu}|x|^\nu \leq \sum_{|\nu|>p} |a_\nu t^\nu|. \tag{2.49}$$

Na verdade, se $\mathbb{I}\subset\mathbb{N}^n$ é finito e $q = max\{|\nu||\nu\in\mathbb{I}\}$, defendemos que

$$\begin{aligned}\sum_{\nu\in\mathbb{I}} d_{p\nu}|x|^\nu &\leq \sum_{p<|\nu|\leq q} |a_\nu| \left(\sum |b_{1\mu}x^\mu|\right)^{\nu_1}\ldots\left(\sum |b_{n\mu}x^\mu|\right)^{\nu_n}\\ &= \sum_{p<|\nu|\leq q} |a_\nu t^\nu|\\ &\leq \sum_{p<|\nu|} |a_\nu t^\nu|,\end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade segue-se pelas propriedades da composição. Agora a afirmação é uma consequência da Proposição ("uma série $\sum a_\nu$ de números reais não negativos converge se e só se existe um número real $M > 0$ tal que $\sum_{\nu\in\mathbb{I}} a_\nu < M$ para qualquer conjunto finito de indíces $\mathbb{I}\subset\mathbb{N}^n$. Neste caso a soma das séries é o supremo de todas essas somas finitas"), desde que a série $\sum |a_\nu t^\nu|$ convirja.

Por outro lado, é claro que $|c_{p\nu}| \leq d_{p\nu}$, deste modo

$$|(f(g_1,\ldots,g_n) - h_p)(x)| \leq \sum_\nu d_{p\nu}|x^\nu| \leq \sum_{p<|\nu|} |a_\nu t^\nu|.$$

Isto significa que, $f(g_1,\ldots,g_n)$ converge em x e que a última desigualdade é válida para todo p, $f(g_1,\ldots,g_n)(x) = \lim_{p\to\infty} h_p(x)$ como queríamos.

■

A primeira consequência do resultado precedente é que se f é uma série de potências formal convergente com $f(0) = a \neq 0$, então a série de potências formal $\frac{1}{f} = \frac{1}{a}\sum\left(1-\frac{1}{a}\right)^{\nu_1}$ é convergente. Logo $\mathbb{O}_n$ é um anel local, cujo ideal maximal m_n consiste nas séries de potências convergentes com ordens maiores ou iguais a um. Este ideal é novamente gerado pelos indeterminantes $m_n = \{x_1, \ldots, x_n\}\mathbb{O}_n$.

Seja $1 \leq i \leq n$, a derivada em relação a x_i da série de potências formal $f = \sum a_\nu x^\nu$ é a série de potências formal

$$D_f = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{\nu_i > 0} \nu_i a_\nu x_1^{\nu_1} \ldots x_i^{\nu_{i-1}} \ldots x_n^{\nu_n}, \tag{2.50}$$

onde D chama-se o operador da diferenciação formal. Se $\{f_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ é uma família somável de séries de potências formais, a família $\{\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} | \lambda \in \Lambda\}$ é também somável, e a sua soma é $\partial\left(\sum \frac{f_\lambda}{\partial x_i}\right)$. Do mesmo modo, as propriedades usuais das derivadas tornam-se verdadeiras neste conjunto formal.

Fórmula de Leibniz:

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = f\frac{\partial g}{\partial x_i} + g\frac{\partial f}{\partial x_i}; \tag{2.51}$$

Regra da Cadeia:

$$\frac{\partial(f(g_1, \ldots, g_n))}{\partial x_i} = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g_1, \ldots, g_n)\frac{\partial g_j}{\partial x_i}; \tag{2.52}$$

Lema de Schwarz:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right). \tag{2.53}$$

A partir da regra de Schwarz podemos deduzir por indução as *derivadas de ordem superior* e então temos

$$\partial^{|\nu|} f / \partial x^\nu = \frac{\partial^{|\nu|} f}{\partial x^\nu} \tag{2.54}$$

onde ∂x^ν representa $\partial x_1^{\nu_1}, \ldots, \partial x_n^{\nu_n}$. Em particular obtemos a *expansão de Taylor*

$$f = \sum \frac{1}{\nu!}\frac{\partial^{|\nu|} f}{\partial x^\nu}(0)x^\nu. \tag{2.55}$$

Mais concretamente, para $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ e $f \in \mathbb{F}[[x, y]]$, temos

$$f(x, y) = \sum \frac{1}{\nu!}\frac{\partial^{|\nu|} f}{\partial x^\nu}(0, y)x^\nu. \tag{2.56}$$

De facto, a família $\left\{\frac{1}{\nu!}\frac{\partial^{|\nu|}}{\partial x^\nu} f(0, y)x^\nu | \nu \in \mathbb{N}^n\right\}$ é somável, e denotando por h esta soma temos que $w(f - h) \geq m$ para qualquer inteiro $m \geq 0$ onde $f = h$.

Para séries de potências formais convergentes temos:

Proposição 18 *Seja f uma série de potências formal convergente. Então a função associada*

$$^{a}f \;:\; \mathrm{D}(f) \;\longrightarrow\; K$$

é analítica, regular e para qualquer $x_0 \in \mathrm{D}(f)$:

a) A série $\frac{\partial^{|\nu|} f}{\partial x^{\nu}}$ converge em x_0 para $\frac{\partial^{|\nu|\,a} f}{\partial x^{\nu}}(x_0)$, e

b) A série de potências $T_{x_0} f = \sum \frac{1}{\nu!}\frac{\partial^{|\nu|} f}{\partial x^{\nu}}(x_0) x^{\nu}$ é convergente, e para x próximo de x_0 temos $f(x) = T_{x_0} f(x - x_0)$.

Demonstração:

Vejamos primeiro que a derivada parcial $\frac{\partial^{a}\mathrm{f}}{\partial x_i}(x_0)$ existe e que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ converge em x_0 para esta derivada. Sem perda de generalidade, assumimos que $i = 1$. Usando a notação da Proposição 16 fazemos $(1) = (1, 0, \ldots, 0)$ e assim

$$g = b_{(1)} x_1 + x_1 g_1 + g_2, \qquad g_1(0) = 0, \quad g_2 = \sum_{\mu_1 = 0} x^{\mu_1}. \tag{2.57}$$

Notemos que g_1 e g_2 são partes da expansão de g e consequentemente são ambas convergentes. Agora para $t \neq 0$ pequeno temos,

$$\frac{{}^{a}g(t, 0, \ldots, 0) -^{a} g(0)}{t} = b_{(1)} +^{a} \mathrm{g}_1(t, 0, \ldots, 0), \tag{2.58}$$

e visto que ${}^{a}\mathrm{g}_1$ é contínua e $g_1(0) = 0$, deduzimos que a derivada $\frac{\partial^{a}\mathrm{g}}{\partial x_1}(0)$ existe e

$$\frac{\partial^{a}\mathrm{g}}{\partial x_1}(0) = b_{(1)} = \sum a_{\nu} P_{\nu,(1)}(x_0). \tag{2.59}$$

Também temos

$$P_{\nu,(1)} = \nu_1 x_1^{\nu_1 - 1} x_2^{\nu_2} \ldots x_n^{\nu_n}, \tag{2.60}$$

donde

$$\sum a_{\nu} P_{\nu,(1)}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

e concluímos que a última série converge em x_0 para $b_{(1)}$. Assim

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \frac{\partial^{a}\mathrm{g}}{\partial x_1}(0).$$

Finalmente pela Proposição 16 $b)$ concluimos que a derivada $\frac{\partial^{a}\mathrm{f}}{\partial x_1}(x_0)$ existe e coincide com $\frac{\partial^{a}\mathrm{g}}{\partial x_1}(0)$, que é

$$\frac{\partial^{a}\mathrm{f}}{\partial x_1}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0). \tag{2.61}$$

Segue-se facilmente por indução para ambos que ${}^{a}\mathrm{f}$ é regular e deste modo provamos a afirmação $a)$. Mas então $b)$ também se segue, já que a série $T_{x_0} f$ é exactamente a série g definida anteriormente.

■

Teorema 2.2.3 (Princípio da Identidade) *Seja f uma série de potências formal convergente. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) $f = 0$.

b) $^a f = 0$ *num subconjunto aberto não vazio de* $\mathrm{D}(f)$.

c) f *e todas as suas derivadas de todas as ordens são iguais a zero em alguns pontos de* $\mathrm{D}(f)$.

Demonstração:

Seja $A \subset \mathrm{D}(f)$ o conjunto de todos os $x \in \mathrm{D}(f)$ tal que $w(T_x f) = +\infty$. Pela Proposição 18, o conjunto A é simultaneamente aberto e fechado, assim $\mathrm{D}(f)$ é ligado pela Proposição 15, A é também vazio ou igual a $\mathrm{D}(f)$. Agora se $c)$ se verificar, $A \neq \phi$ e pela precedente nota $A = \mathrm{D}(f)$, donde $f = 0$. As outras implicações demonstram-se facilmente.

■

Corolário 2.2.4 *Seja $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ um polinómio não nulo. Então o conjunto aberto $\{x \in \mathbb{K}^n | f(x) \neq 0\}$ é um subconjunto denso de $\mathbb{K}^n$.*

2.2.2 Definição de regularidade

Uma série de potências formal $f \in \mathbb{F}_n = \mathbb{K}[[x]]$ com $x = (x_1, \ldots, x_n)$ chama-se **regular de ordem** p em relação a x_n se

$$f(0, \ldots, 0, x_n) = x_n^p g(x_n) \tag{2.62}$$

com $g(0) \neq 0$. Um polinómio $z^p + a_1 z^{p-1} + \ldots + a_p$ com coeficientes $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{F}_n$ chama-se **distinguido** se é regular de ordem p em relação a z, ou seja, se $a_1(0) = \ldots = a_p(0) = 0$ e $a_0(0) \neq 0$.

Exemplo 2.2.5

- $f(x, y) = p^2 y^3 + p x^3 + p^2 x y^2 + p y^2$ *é regular de grau 2 em y e de grau 3 em x.*

- $p^2 x y^2$ *não é regular em qualquer variável em qualquer grau.*

Lema 2.2.6 *Seja $f \in \mathbb{F}_n$, tal que $f \neq 0$. Após uma mudança linear de coordenadas, f torna-se regular de ordem $w(f)$ em relação a x_n.*

Demonstração:

Seja $f = \sum a_\nu x^\nu$ uma série de potências formal convergente e $p = w(f)$. Então $f_p = \sum\limits_{|\nu|=p} a_\nu x^\nu \neq 0$, e existem $c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{K}$ com

$$c = f_p(c_1, \ldots, c_{n-1}, 1) \neq 0$$

(caso contrário o polinómio homogéneo f_p poderá ser divisível por x_{n-1}). Agora fazemos a mudança de coordenadas $x_i = y_i + c_i y_n$, com $1 \leq i \leq n$ e $x_n = y_n$ para termos

$$g(y) = f(y_1 + c_1 y_n, \ldots, y_{n-1} + c_{n-1} y_n, y_n). \tag{2.63}$$

Claramente $g(0, \ldots, 0, y_n) = f(c_1 y_1, \ldots, c_{n-1} y_{n-1}, y_n)$ consiste nos monómios $c y_n^p$ mais termos de maiores graus.

■

2.2.3 Teorema da Divisão de Rückert

Teorema 2.2.7 (Teorema da Divisão de Rückert) *Seja $\Phi \in \mathbb{O}_n$ uma série de potências convergente, regular de ordem p em relação a x_n. Para qualquer $f \in \mathbb{O}_n$ existe $Q \in \mathbb{O}_n[x_n]$ e $R \in \mathbb{O}_{n-1}[x_n]$ com grau $R < p$ tal que $f = Q\Phi + R$. Estas condições determinam Q e R unicamente. Além disso, se Φ é um polinómio distinguido em x_n e $f \in \mathbb{O}_{n-1}[x_n]$, então também $Q \in \mathbb{O}_{n-1}[x_n]$.*

Este resultado mantém-se verdadeiro quando substituímos $\mathbb{O}_n$ por $\mathbb{F}_n$ e $\mathbb{O}_{n-1}$ por $\mathbb{F}_{n-1}$.

Demonstração:

Desde que Φ seja regular de ordem p em relação a x_n, podemos escrever

$$\Phi = \varphi + c x_n^p, \qquad \varphi = \sum_{i=0}^{p} a_i(x') x_n^{p-i} + x_n^{p+1} b(x),$$

onde $a_0, \ldots, a_p \in \mathbb{O}_{n-1} = \mathbb{K}[[x']]$ com $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ e $c \in \mathbb{K}$. Em cima para multiplicar por $\frac{1}{c}$ assumimos que $c = 1$.

Seja $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$, com $\rho_i \geq 0$. Para $f = \sum a_\nu x^\nu \in \mathbb{O}_n$ denotaremos por $\|f\|$ a soma das séries $\sum |a_\nu| \rho^\nu$ onde esta soma existe, caso contrário $\|f\| = +\infty$, isto é, $\|f\| = max|a_\nu|$.

Seja X o conjunto de todas as séries $f \in \mathbb{O}_n$ com $\|f\| < +\infty$. Se ρ é suficientemente pequeno, X contém algumas colecções finitas prescritas de séries de potências convergentes; em particular $f, \varphi, b, a_i \in X$.

Definimos uma aplicação $T : X \longrightarrow X$ do seguinte modo: se $Q \in X$ seja

$$f - \varphi Q = R + x_n^p T(Q) \tag{2.64}$$

onde $R \in \mathbb{O}_{n-1}[x_n]$, e o grau de R é menor que p. Esta aplicação T é **contractiva**, isto é,

$$dist(T(Q), T(Q')) < c \; dist(Q, Q')$$

para qualquer $Q, Q' \in X$, onde $0 < c < 1$ ($dist$ significa a distância associada à norma $\|.\|$). Na verdade seja

$$f - \varphi Q = R + x_n^p T(Q), \qquad f - \varphi Q' = R' + x_n^p T(Q').$$

Então

$$\varphi(Q' - Q) = R - R' + x_n^p (T(Q) - T(Q')). \tag{2.65}$$

Calculando as normas nesta igualdade, e tendo em conta que $R - R'$ é um polinómio em $\mathbb{O}_{n-1}[x_n]$ de grau menor que p temos

$$\begin{aligned} \|x_n^p (T(Q) - T(Q'))\| &\leq \|R - R'\| + \|x_n^p (T(Q) - T(Q'))\| \\ &= \|R - R' + x_n^p (T(Q) - T(Q'))\| \\ &= \|\varphi(Q - Q')\| \\ &\leq \|\varphi\| \|Q - Q'\|. \end{aligned}$$

Mas

$$\|x_n^p (T(Q) - T(Q'))\| = \rho_n^p \|T(Q) - T(Q')\|,$$

e obtemos

$$dist(T(Q), T(Q')) \leq \frac{\|\varphi\|}{\rho_n^p} dist(Q, Q'). \tag{2.66}$$

Temos

$$\frac{\|\varphi\|}{\rho_n^p} \leq \frac{1}{\rho_n^p} \sum_{i=0}^{p} \|a_i\| \rho_n^{p-i} + \rho_n \|b\|. \tag{2.67}$$

Agora, desde que $\|b\| < +\infty$, $\rho_n \|b\| < \frac{1}{4}$ para ρ_n suficientemente pequeno. Assim fixando ρ_n, para, $\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}$ suficientemente pequenos também a outra soma é menor que $\frac{1}{4}$, desde que $a_i(0) = 0$. Logo, concluímos

$$dist(T(Q), T(Q')) < \frac{1}{2} dist(Q, Q').$$

De momento assumiremos

Nota: $(X, \|.\|)$ é uma álgebra de Banach. #

Sobre esta suposição podemos aplicar o clássico:

Teorema 2.2.8 (Teorema do ponto fixo) *Seja X um espaço métrico completo e $T : X \longrightarrow X$ uma aplicação contractiva. Então T tem um único ponto fixo.*

Consequentemente e sob a afirmação da nota, a nossa aplicação T tem um único ponto fixo, dizemos que $Q \in X$. Segue-se pela própria definição de T que

$$f = Q(\varphi + x_n^p) + R = Q\Phi + R. \tag{2.68}$$

Assim mostrámos a existência da divisão. Agora vamos mostrar a unicidade: se $f = Q'\Phi + R'$ com $Q \neq Q' \in \mathbb{O}_n$, $R' \in \mathbb{O}_{n-1}[x_n]$ com grau de $R' < p$, podemos sempre escolher ρ tal que $Q', R' \in X$ e então Q' poderá ser um segundo ponto fixo de T, o que é impossível pelo Teorema 2.2.8.

Isto estabelece a primeira parte do teorema. Supomos agora que $f, \Phi \in \mathbb{O}_{n-1}[x_n]$ e Φ é distinguido em x_n. Então pela divisão de f pelo polinómio mónico Φ no anel dos polinómios $\mathbb{O}_{n-1}[x_n]$, encontramos $f = Q'\Phi + R'$ com $Q', R' \in \mathbb{O}_{n-1}[x_n]$ e o grau de $R' < p$. Pela unicidade já provada $Q = Q'$, $R = R'$.

Finalmente chegamos à prova da Nota:

O factor chave aqui é que $(X, \|.\|)$ é completo. Para ver isso consideremos uma sequência de Cauchy $(g_s)_{s\geq 0}$ de X, onde $g_s = \sum a_{s\nu}x^\nu$ para $s \geq 0$. Então toda a sequência $(a_{s\nu})_{s\geq 0}$ é uma sequência de Cauchy pertencente a $\mathbb{K}$ com um limite $a_\nu \in \mathbb{K}$. Segue-se que $g = \sum a_\nu x^\nu \in X$, e $g = \lim\limits_{s\to\infty} g_s$.

Para provar isto precisamos mostrar que para qualquer $\epsilon > 0$ dado e para um s suficientemente grande

$$\sum_\nu |a_\nu - a_{s\nu}|\rho^\nu = \|g - g_s\| < \epsilon \tag{2.69}$$

mantém-se. Além disso, desde que a série nesta desigualdade seja uma série de números reais não negativos, é suficiente para verificar que

$$\sum_{\nu\in\mathbb{I}} |a_\nu - a_{s\nu}|\rho^\nu \leq \frac{\epsilon}{2}$$

para qualquer conjunto finito de índices $\mathbb{I}$. Notamos que desde que $(g_s)_{s\geq 0}$ seja uma sequência de Cauchy, para r, s grande temos

$$\sum_{\nu} |a_{r\nu} - a_{s\nu}|\rho^{\nu} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Consequentemente

$$\sum_{\nu\in\mathbb{I}} |a_{r\nu} - a_{s\nu}|\rho^{\nu} < \frac{\epsilon}{2} \tag{2.70}$$

e tomando o limite nesta soma finita quando r tende para infinito, temos $\sum_{\nu\in\mathbb{I}} |a_{\nu} - a_{s\nu}|\rho^{\nu} \leq \frac{\epsilon}{2}$ como pretendiamos.

A prova no caso formal é similar. O espaço de Banach usado neste caso é $X = \mathbb{F}_n$ com a norma $\|f\| = exp^{-\nu(f)}$, onde $\nu(f)$ representa o maior inteiro $m \geq 0$ tal que $f \in \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}^m\mathbb{F}_n$.

■

2.2.4 Teorema de Preparação de Weierstrass

Completamos o excurso à teoria das séries em várias variáveis com o famoso Teorema de Preparação de Weierstrass que é, extremamente relevante para a teoria das funções de várias variáveis complexas.

Teorema 2.2.9 (Teorema de Preparação de Weierstrass) *Seja $\Phi \in \mathbb{O}_n$ regular de ordem p em relação a x_n. Então existe um polinómio distinguido $P \in \mathbb{O}_{n-1}[x_n]$ regular de grau p em x_n e uma unidade Q de $\mathbb{O}_n$ tal que $P = Q\Phi$. Estas condições determinam P e Q unicamente.*

Além disso este resultado mantém-se verdadeiro quando substituímos $\mathbb{O}_n$ por $\mathbb{F}_n$ e $\mathbb{O}_{n-1}$ por $\mathbb{F}_{n-1}$.

Demonstração:

Pelo Teorema 2.2.7 existe $Q \in \mathbb{O}_n, a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{O}_{n-1}$ tal que

$$x_n^p = Q\Phi - \sum_{i=1}^{p} a_i x_n^{p-i}.$$

Mas $\Phi(0,x_n) = x_n^p g(x_n)$ porque Φ é regular de ordem p com $g(0) \neq 0$, e consequentemente

$$x_n^p = Q(0,x_n)x_n^p g(x_n) - \sum_{i=1}^{p} a_i(0)x_n^{p-i}.$$

Assim vemos que $a_1(0) = \ldots = a_p(0) = 0$, $a_0 \neq 0$, $Q(0,0) \neq 0$, e assim

$$P = x_n^p + a_1 x_n^{p-1} + \ldots + a_p$$

é o polinómio distinguido procurado. A unicidade da divisão implica a unicidade de P. A prova no caso formal é a mesma.

■

Capítulo 3

Fundamentos da Análise de Clifford

Este capítulo é baseado essencialmente nas obras [8], [9], [10], [14], [15], [16] e [17].

A Análise de Clifford é uma designação atribuida a todas as àreas da Análise multidimensional que trabalham na base de fundamentos algébricos mais gerais que o corpo dos números complexos. O número de àreas é muito extenso e inclui, além de outras, a análise harmónica, a teoria do potencial e a geometria diferencial.

Uma álgebra de dimensão finita com um elemento unidade no corpo dos números reais ou complexos foi antigamente conhecida como um sistema hipercomplexo. A definição de sistema hipercomplexo de números pode incluir a exigência da multiplicação associativa.

Como exemplos de sistemas hipercomplexos temos os números reais, os complexos, os quaterniões, os números de Cayley, os números de Clifford que para $n = 3$ são conhecidos como números de Clifford-Lipschitz e as álgebras de matrizes sobre $\mathbb{R}$. Os números de Clifford têm uma representação isomórfica como elementos de uma matriz algébrica $(2^n \times 2^n)$. A representação matricial dos números complexos e dos quaterniões são os casos especiais mais conhecidos. As álgebras de Clifford como álgebras associativas não comutativas sobre o corpo dos números reais ou complexos podem ser definidas através de métodos diferentes, mas a forma mais fácil é introduzir a base da álgebra através das regras da multiplicação de uma base ortonormal (ONB) sobre o espaço vectorial de dimensão n.

3.1 Definição da Álgebra de Clifford

Definição 3.1.1 *Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormada (ONB) de $\mathbb{R}^n$ com um produto de acordo com as regras da multiplicação*

$$e_k e_l + e_l e_k = -2\delta_{kl} e_0 \quad (k, l = 1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

onde δ_{kl} é o símbolo de Kronecker. Este produto não comutativo, gera a álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ sobre $\mathbb{R}$ de dimensão 2^n. A álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ construída sobre $\mathbb{R}$ é o conjunto de todos os números $\alpha \in \mathcal{C}l_{0,n}$ tal que

$$\alpha = \sum_A \alpha_A e_A$$

com a base $\{e_A : A \subseteq \{1, \ldots, n\}\}$ formada por

$$e_A = e_{h_1} e_{h_2} \ldots e_{h_r},\ 1 \leq h_1 < \ldots < h_r \leq n,\ e_\varnothing = e_0 = 1,\ e_i = e_{\{i\}} \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n)$$

e as componentes α_A são números reais. O conjugado do elemento α é definido por $\overline{\alpha} = \sum_A \alpha_A \overline{e}_A$, onde

$$\overline{e}_A = \overline{e}_{h_r} \overline{e}_{h_{r-1}} \ldots \overline{e}_{h_1};\ \overline{e}_k = -e_k \quad (k = 1, \ldots, n);\ \overline{e}_0 = e_0 = 1.$$

Para qualquer $\alpha, \beta \in \mathcal{C}\ell_{0,n}$ definimos um produto interno em $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ da seguinte forma

$$(\alpha, \beta) = \sum_A \alpha_A \beta_A$$

do mesmo modo definimos uma norma

$$|\alpha| = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}} = \left(\sum_A |\alpha_A|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.2}$$

com

$$|\alpha\beta| \leq 2^n |\alpha||\beta|.$$

Neste sentido $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ é uma álgebra linear, associativa mas não comutativa sobre $\mathbb{R}$ e ao mesmo tempo é um espaço de Hilbert.

Por outro lado, o subespaço real $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{0,n}$ seja constituído pelos elementos da forma especial

$$\alpha = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k e_k \qquad (m \leq n)$$

que se chamam **números hipercomplexos**. Segue então que para números hipercomplexos α, β

$$\alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2 = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k^2$$

e

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$$

enquanto que para cada $\alpha \neq 0 \in \tilde{\mathcal{C}l}_{0,n}$ o seu inverso é

$$\alpha^{-1} = \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2}.$$

Notemos que o vector $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ aparece como um elemento de $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ na forma $x = \vec{x} = x_1e_1 \ldots x_ne_n$ chama-se **1-vector**, enquanto que o escalar real x_0 na forma $x = x_0e_0 = x_0$ chama-se **0-vector**. Neste sentido é usual considerar uma graduação dos elementos de $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ em relação à cardinalidade de $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ que conduz ao subconjunto de $\binom{n}{2}$ $2-vectores$ ou bi-vectores, $\binom{n}{3}$ $3-vectores$ até $1 = \binom{n}{n}$ $2^n - vectores$.

A teoria das funções complexas de várias variáveis complexas usa para a descrição do conjunto do domínio a álgebra dos números complexos, combinando $2n$ variáveis reais $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ a um vector de n variáveis complexas $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, \ldots, n$. Então é possível realizar a transformação inversa da variável do complexo para o real com a ajuda do vector dos seus conjugados $(\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n)$ na forma

$$x_k = \frac{1}{2}(\overline{z}_k + z_k) \tag{3.3}$$

e

$$y_k = \frac{i}{2}(\overline{z}_k - z_k) \tag{3.4}$$

para $k = 1, \ldots, n$. Neste caso identificamos $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$. Em particular, a propriedade local da diferenciabilidade complexa de uma função $f : \Omega \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ implica que f pode ser considerada como uma função de z_k, $k = 1, \ldots, n$ e não de $\overline{z}_k$, $k = 1, \ldots, n$. Isto deve-se ao facto de ser localmente aproximável por uma aplicação linear (o diferencial) do vector $(dz_1, \ldots, dz_n)$. Uma importante consequência é a representação de $f : \Omega \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ usando séries de potências múltiplas em $(z_1, \ldots, z_n)$.

Para termos o domínio de uma estrutura hipercomplexa é usual identificarmos pontos de $\mathbb{R}^{n+1}$ denotados por $x = (x_0, \ldots, x_n) = (x_0, \vec{x})$ com a variável hipercomplexa

$$z = x_0 + x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \in \tilde{\mathcal{C}l}_{0,n} := span_{\mathbb{R}}\{1, e_1, \ldots, e_n\}$$

que se chama para-vector, o que significa $0 - vector + 1 - vector$, o conjugado de z é dado por $\overline{z} = x_0 - x_1e_1 - \ldots - x_ne_n$.

A extensão de (3.2) para a norma de $\alpha \in \mathcal{C}\ell_{0,n}$ é enganadora e leva-nos a

$$\|\alpha\| = \left(\sum_A \alpha\overline{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_A \alpha_A^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

A diferenciabilidade usual generalizada para a teoria das funções hipercomplexas considera funções com valores $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ da forma $f(z) = \sum_A f_A(z)e_A, \;\; f_A(z) \in \mathbb{R}$, como aplicações

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \cong \tilde{C}l_{0,n} \longrightarrow \mathcal{C}\ell_{0,n}.$$

Uma segunda estrutura hipercomplexa de $\mathbb{R}^{n+1}$ consiste no seguinte isomorfismo

$$\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathcal{H}^n = \{\vec{z} : \vec{z} = (z_1, \ldots, z_n),\;\; z_k = x_k - x_0e_k;\;\; x_0, x_k \in \mathbb{R}\}$$

isto significa fazer n copias $\mathbb{C}_k$ de $\mathbb{C}$ onde $i \cong e_k$, $(k = 1, \ldots, n)$; $x_0 \cong Rez$; $x_k \cong Imz$ com $z \in \mathbb{C}$ e onde $\mathbb{C}_k := -e_k\mathbb{C}$. Então $\mathcal{H}^n$ é o produto cartesiano $\mathcal{H}^n := \mathbb{C}_1 \times \ldots \times \mathbb{C}_n$ e as funções $f(z) = \sum_A f_A(z)e_A$ com valores $\mathcal{C}l_{0,n}$ são consideradas como aplicações

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathcal{H}^n \mapsto \mathcal{C}\ell_{0,n}.$$

3.2 Diferenciabilidade hipercomplexa

A abordagem de Cauchy para funções holomorfas de uma variável complexa está relacionada com o conceito de diferenciabilidade complexa. O primeiro passo para a conveniente generalização dessa abordagem na teoria das funções hipercomplexas consiste em considerarmos a estrututa da aplicação linear $\ell \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^n; \mathcal{C}\ell_{0,n})$.

Para determinar a forma geral da aplicação linear de $\mathcal{H}^n$ em $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ temos de ter em conta que a aplicação linear usada tem de ser $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ -linear e que gera apenas um módulo sobre o anel não comutativo a não ser que $n = 1$.

$\mathcal{H}^n$ é um subconjunto especial do n-ésimo produto cartesiano $(\mathcal{C}\ell_{0,n})^n$ de $\mathcal{C}\ell_{0,n}$, mas não é um submódulo $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ desde que

$$\lambda\vec{z},\;\; \vec{z}\lambda \in \mathcal{H}^n \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

Contudo o embebimento de $\mathcal{H}^n$ no módulo esquerdo (direito) $(\mathcal{C}l_{0,n})^n$ permite-nos usar as propriedades de $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ para descrever a aplicação linear $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ de $\mathcal{H}^n$ em $\mathcal{C}\ell_{0,n}$.

Definição 3.2.1 *Se $\vec{u}, \vec{v} \in (\mathcal{C}\ell_{0,n})^n$ e $\lambda \in \mathcal{C}\ell_{0,n}$ então*

$$\ell : \mathcal{H}^n \longmapsto (\mathcal{C}\ell_{0,n})^n$$

chama-se aplicação linear de $\mathcal{H}^n$ em $(\mathcal{C}l_{0,n})^n$ se

$$\ell(\lambda\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\ell(\vec{u}) + \ell(\vec{v})$$

no caso de uma aplicação linear esquerda e se

$$\ell(\vec{u}\lambda + \vec{v}) = \ell(\vec{u})\lambda + \ell(\vec{v})$$

chama-se uma aplicação linear direita.

Teorema 3.2.2 *(ver [17]) Qualquer aplicação $\ell_L(\ell_R) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^n; \mathcal{C}\ell_{0,n}), \mathcal{C}\ell_{0,n}$ linear à esquerda (à direita) pode ser representada de uma única maneira na forma*

$$\ell_L(\vec{z}) = z_1 A_1 + \ldots + z_n A_n \tag{3.5}$$

$$\ell_R(\vec{z}) = A_1 z_1 + \ldots + A_n z_n \tag{3.6}$$

onde $A_k \in \mathcal{C}\ell_{0,n}$, $(k = 1, \ldots, n)$.

Demonstração:

Seja $\vec{s}_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, $(k = 1, \ldots, n)$ elementos da base canónica do módulo $(\mathcal{C}\ell_{0,n})^n$. Então temos a representação da base canónica à esquerda (à direita)

$$\vec{z} = z_1\vec{s}_1 + \ldots + z_n\vec{s}_n$$

$$\vec{z} = \vec{s}_1 z_1 + \ldots + \vec{s}_n z_n$$

de $\vec{z} \in \mathcal{H}^n$ considerado como um elemento de $(\mathcal{C}\ell_{0,n})^n$.

Uma vez que $z_k\vec{s}_k \notin \mathcal{H}^n$, apenas o embebimento de $\mathcal{H}^n$ em $(C\ell_{0,n})^n$ nos permite escrever estas representações, que imediatamente nos conduz a

$$\ell_L(\vec{z}) = z_1 A_1 + \ldots + z_n A_n$$

$$\ell_R(\vec{z}) = \widetilde{A}_1 z_1 + \ldots + \widetilde{A}_n z_n$$

com $A_k = \ell_L(\vec{s}_k)$ respectivamente $\widetilde{A}_k = \ell_R(\vec{s}_k)$, $k = 1, \ldots, n$.

A unicidade segue do facto de as componentes de $\vec{z}$ formarem uma base para o dual algébrico $\mathcal{L}_L(\mathcal{H}^n, \mathcal{C}\ell_{0,n})$ respectivamente $\mathcal{L}_R(\mathcal{H}^n, \mathcal{C}\ell_{0,n})$ de $\mathcal{H}^n$. De facto $z_1, \ldots, z_n$ são $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ linearmente independentes à esquerda (à direita), por exemplo no caso à direita

$$\alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_n z_n = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n - x_0(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n) = 0$$

com $\alpha_k \in \mathcal{C}\ell_{0,n}$, $k = 1, \ldots, n$ temos $\alpha_k \equiv 0$. O mesmo acontece no caso à esquerda.

■

Segue como corolário que as componentes de $\vec{z}$ formam uma base para os duais algébricos $\ell_L(\mathcal{H}^n; (\mathcal{C}\ell_{0,n})^n)$ respectivamente $\ell_R(\mathcal{H}^n; (\mathcal{C}\ell_{0,n})^n)$ de $\mathcal{H}^n$. Estamos agora em condições de definir o produto interno para várias variáveis complexas

$$(\vec{z}, \vec{\zeta}) = \overline{(\vec{\zeta}, \vec{z})} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k} \zeta_k \tag{3.7}$$

consequentemente

$$\begin{aligned} \|\vec{z}\| &= (\vec{z}, \vec{z})^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} \overline{z_k} z_k \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (n x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Geralmente para $(n \geq 1)$ não temos uma relação isométrica entre $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathcal{H}^n$ tal como entre $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$, mas para $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $\vec{z} \in \mathcal{H}^n$ temos (ver [17])

$$n^{-\frac{1}{2}} \|\vec{z}\| \leq |z| = |x| \leq \|\vec{z}\|. \tag{3.8}$$

3.2.1 Definição da derivada hipercomplexa

Definição 3.2.3 *Seja f uma aplicação contínua numa vizinhança de $\vec{z}_* \in \mathcal{H}^n$ em $\mathcal{C}\ell_{0,n}$. Então f chama-se* ***derivada hipercomplexa à esquerda (resp. derivada hipercomplexa à direita)*** *em $\vec{z}_*$ se existe uma aplicação ℓ linear $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ à esquerda (resp. à direita) tal que*

$$\lim_{\Delta\vec{z} \to 0} \frac{|f(\vec{z}_* + \Delta\vec{z}) - f(\vec{z}_*) - \ell(\Delta\vec{z})|}{\|\Delta\vec{z}\|} = 0. \tag{3.9}$$

Dizemos que a função f é ***diferenciável hipercomplexa em*** *$\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathcal{H}^n$ se for diferenciável hipercomplexa em todos os pontos de Ω.*

A aplicação linear $\ell_L(\ell_R)$ chama-se **derivada hipercomplexa à esquerda (à direita)** $f'_L(f'_R)$ da função f.

Nota: Devido a (3.5),(3.6) e (3.8) a relação (3.9) é equivalente a

$$f(\vec{z}_* + \Delta\vec{z}) - f(\vec{z}_*) = \Delta z_1 A_1 + \ldots + \Delta z_n A_n + o(\|\Delta\vec{z}\|) \tag{3.10}$$

no caso diferenciável hipercomplexo à esquerda onde $A_k \in \mathcal{C}\ell_{0,n}$ e

$$\lim_{\Delta\vec{z}\to 0} \frac{o(\|\Delta\vec{z}\|)}{\|\Delta\vec{z}\|} = 0$$

(análogamente para o caso diferenciável à direita). #

Relembramos que para uma aplicação f de $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{0,n}$ em $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ obtemos

$$f(z + \Delta z) - f(z) = A\Delta z + o(|\Delta z|)$$

como exige a definição de diferenciabilidade.

Como consequência do teorema sobre a representação única das aplicações lineares de $\mathcal{H}^n$ em $\mathcal{C}l_{0,n}$ temos o teorema:

Teorema 3.2.4 *Se $f(\vec{z})$ é diferenciável hipercomplexa à esquerda (à direita) então a correspondente aplicação linear derivada à esquerda (à direita) é determinada de forma única.*

3.2.2 Diferenciabilidade hipercomplexa e monogenicidade

De forma a vermos que o conceito de diferenciabilidade hipercomplexa representa a abordagem de Cauchy na teoria das funções monogénicas, provemos o seguinte teorema.

Teorema 3.2.5 *Seja $f = f(\vec{z})$ diferenciável real continuamente num conjunto aberto $\Omega \subset \mathcal{H}^n$. Então f é diferenciável hipercomplexa à esquerda (à direita) em Ω se e só se $Df = 0$ ($fD = 0$) em Ω, onde D é o operador diferencial hipercomplexo*

$$D = \frac{\partial}{\partial x_0} + e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + e_n \frac{\partial}{\partial x_n} \tag{3.11}$$

que actua na função f a partir da esquerda (resp. direita) como indica a sua posição no lado esquerdo (direito) de f.

Demonstração:

Vamos apenas considerar funções diferenciais à esquerda. A demonstração para funções diferenciais à direita é análoga. Da suposição da diferenciabilidade real segue que o incremento de $f(\vec{z})$ tem a forma

$$f(\vec{z}+\Delta\vec{z})-f(\vec{z})=\Delta f(z)=\frac{\partial f}{\partial x_0}\Delta x_0+\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n+o(|\Delta x|)$$

com

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(|\Delta x|)}{|\Delta x|}=0.$$

Através da transformação

$$x_0=z_0,\ x_k=e_kz_0+z_k,\quad k=1,\ldots,n \tag{3.12}$$

com o inverso

$$z_0=x_0,\quad z_k=x_k-x_0e_k,\quad k=1,\ldots,n$$

juntamente com a propriedade da norma (3.8) obtemos

$$\Delta f(\vec{z})=\Delta z_0 Df+\Delta z_1\frac{\Delta f}{\Delta x_1}+\ldots+\Delta z_n\frac{\Delta f}{\Delta x_n}+o(\|\Delta\vec{z}\|). \tag{3.13}$$

$Df=0$ é condição necessária para diferenciabilidade à esquerda, que segue da forma do incremento de uma função diferenciável hipercomplexa, a única determinação de ℓ_L e a $\mathcal{C}l_{0,n}$ independência linear de $z_0,z_1,\ldots,z_n$, isto é, do Teorema 3.2.2.

$Df=0$ é também uma condição suficiente de diferenciabilidade à esquerda que surge da Definição 3.2.3.

■

Nota:

1. Para a demonstração do caso de diferenciabilidade à direita, (3.12) tem de ser substituida pela transformação "direita" $x_0=z_0$ e $x_k=e_kz_0+z_k$.

2. Obtemos o mesmo resultado pela aplicação de

$$x_0=\frac{1}{n+1}(\overline{z}+e_1z_1+\ldots+e_nz_n) \tag{3.14}$$

$$x_k = \frac{1}{n+1}(e_k\overline{z} + e_ke_1z_1 + \ldots + nz_k + \ldots + e_ke_nz_n) \tag{3.15}$$

$k = 1, \ldots, n$ a transformação que é inversa a

$$\overline{z} = x_0 - e_1x_1 - \ldots - e_nx_n,\ z_k = -e_kx_0 + x_k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{3.16}$$

Em vez de (3.13), $\Delta f(\vec{z})$ torna-se igual a

$$\begin{aligned}\Delta f(\vec{z}) = \frac{1}{n+1} fD\Delta\overline{z} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{1}{n+1}fDe_1\right)\Delta z_1 + \ldots +\\ + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + \frac{1}{n+1}fDe_n\right)\Delta z_n + o(\|\Delta\vec{z}\|)\end{aligned} \tag{3.17}$$

e D pode ser alterado por $\frac{1}{n+1}D$, o que ilustra o papel do factor $\frac{1}{2}$ na derivada parcial complexa (3.20) (o caso $n = 1$).

3. Para $n = 1$, (3.13) toma a seguinte forma

$$\begin{aligned}\Delta f(z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{\partial f}{\partial x_1}e_1\right)\Delta z_0 + \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta z_1 + o(\|\Delta z_1\|)\\ &= fD\Delta z_0 + \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta z_1 + o(\|\Delta z_1\|).\end{aligned}$$

Comparando com a forma complexa usual temos

$$\Delta f(z) = \frac{1}{2}fD\Delta\overline{z} + \frac{1}{2}f\overline{D}\Delta z + o(\|\Delta z\|) \tag{3.18}$$

e vemos que em vez de $\overline{D}$ o gradiente $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ *(ver [24])* tem um papel mais importante.

#

Exemplo 3.2.6 *Consideremos o polinómio monogénico*

$$h(x) = x_1x_2 - x_0x_2e_1 - x_0x_1e_2 = \frac{1}{2}[z_1z_2 + z_2z_1] \tag{3.19}$$

então temos que

$$\begin{aligned}\Delta h(\vec{z}) &= \frac{1}{2}[(z_1 + \Delta z_1)(z_2 + \Delta z_2) + (z_2 + \Delta z_2)(z_1 + \Delta z_1) - (z_1z_2 + z_2z_1)]\\ &= \frac{1}{2}[(\Delta z_1z_2 + z_1\Delta z_2 + \Delta z_2z_1 + z_2\Delta z_1) + (\Delta z_1\Delta z_2 + \Delta z_2\Delta z_1)]\\ &= z_1\Delta z_2 + z_2\Delta z_1 + o(\|\Delta\vec{z}\|)\\ &= \Delta z_1z_2 + \Delta z_2z_1 + o(\|\Delta\vec{z}\|).\end{aligned}$$

Uma vez que $\Delta z_1 z_2 + z_1 \Delta z_2 = \Delta z_2 z_1 + z_2 \Delta z_1$, segue pela Definição 3.2.3 que $h(\vec{z})$ é diferenciável hipercomplexa à esquerda (à direita).

A relação do operador diferencial D definido por (3.11) com o operador diferencial parcial complexo

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_0} + i\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \tag{3.20}$$

onde $z = x_0 + ix_1$ é evidente.

Definição 3.2.7 *O operador D chama-se* ***operador generalizado de Cauchy-Riemann*** *e as soluções de $Df = 0$ (resp. $fD = 0$) chamam-se* ***funções monogénicas*** *à esquerda (à direita). O operador*

$$\overline{D} = \frac{\partial}{\partial x_0} - e_1\frac{\partial}{\partial x_1} - \ldots - e_n\frac{\partial}{\partial x_n} \tag{3.21}$$

chama-se ***operador generalizado conjugado de Cauchy-Riemann****.*

Exemplos 3.2.8

1. *As variáveis hipercomplexas*

$$f_k(z) = z_k := x_k - x_0 e_k = -\frac{1}{2}[ze_k + ze_k], (k = 1, \ldots, n)$$

são funções monogénicas à esquerda e à direita.

2. *$f(z) = z \in \tilde{\mathcal{C}}l_{0,n}$ é apenas monogénica se $n = 1$, uma vez que $Df = fD = 1 - n$.*

3. *Potências de z, isto é, $f(z) = z^n$ e produtos de variáveis totalmente regulares $z_j z_k$, $j \neq k$, não são monogénicas.*

4. *Produtos simétricos de variáveis totalmente regulares na forma*

$$\frac{1}{2}[z_j z_k + z_k z_j] = x_j x_k - x_0 x_k e_j - x_0 x_j e_k$$

são monogénicas à esquerda e à direita.

5. *Em $\mathbb{C}$ temos que para uma função holomorfa*

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} - i\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2\frac{df}{dz} = 2f'.$$

Usamos $\frac{1}{2}\overline{D}f$ como a derivada hipercomplexa de uma função monogénica f e adoptamos a notação $f' = \frac{1}{2}\overline{D}f$.

No exemplo um, salientamos que as funções monogénicas $z_k = x_k - x_0 e_k$, $k = 1, \ldots, n$ foram usadas pela primeira vez por Fueter [11, 12] e posteriormente chamadas "variáveis totalmente regulares" tendo em conta o seu papel fundamental como variáveis hipercomplexas monogénicas. A abordagem generalizada de Cauchy à teoria das funções hipercomplexas como explicada por Malonek em [14, 15, 16, 17], baseia-se desde o início na utilização deste tipo de n variáveis hipercomplexas.

Corolário 3.2.9 *A forma do diferencial df como a parte linear do incremento segue através de (3.13)*

$$df = fDdz_0 + f(\nabla_{\vec{x}}, d\vec{z}) = dz_0 Df + (d\vec{z}, \nabla_{\vec{x}})f.$$

Usando os resultados anteriores podemos representar D e o seu conjugado na forma

$$D = \frac{\partial}{\partial x_0} - (\nabla_{\vec{x}}, \hat{\imath})\,, \quad \overline{D} = \frac{\partial}{\partial x_0} + (\nabla_{\vec{x}}, \hat{\imath})$$

onde $\nabla_{\vec{x}}$, representa o gradiente de f em relação a $\vec{x}$. Então, inversamente temos que

$$\frac{\partial}{\partial x_0} = \frac{1}{2}(\overline{D} + D) \tag{3.22}$$

$$(\nabla_{\vec{x}}, \hat{\imath}) = \frac{1}{2}(\overline{D} - D). \tag{3.23}$$

Teorema 3.2.10 *Se $f(\vec{z})$ é monogénica à direita (à esquerda) em $\Omega \subset \mathcal{H}^n \cong \mathbb{R}^{n+1}$ e f'_R (f'_L) a sua derivada hipercomplexa à direita (à esquerda) desaparece em Ω, então $f(\vec{z})$ é constante, isto é, uma função monogénica é determinada exactamente a menos de uma constante pela sua derivada hipercomplexa.*

Demonstração:

Vamos considerar funções monogénicas à direita. Pela definição de diferenciabilidade hipercomplexa equivalente a $fD = 0$, segue de (3.23) que

$$f\,(\nabla_{\vec{x}}, \hat{\imath}) = \frac{1}{2}f\overline{D} = 0.$$

Por outro lado, de (3.22) temos

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = 0$$

Além disso o gradiente de f, em relação a $x = (x_0, \vec{x})$, desaparece e f é constante.

■

3.2.3 Produto Permutacional

A utilização do conjunto $\mathcal{H}^n$ na descrição de funções monogénicas conduz-nos a séries de potências em várias variáveis hipercomplexas. As componentes z_k de $\vec{z} \in \mathcal{H}^n$ são uma espécie de projecção de $z \in \tilde{\mathcal{C}}l_{0,n}$ em direcção à base canónica dos vectores $\vec{s_k} \in \mathcal{H}^n$, obtida pela multiplicação simétrica com $-e_k$, isto é,

$$z_k = -\frac{ze_k + e_k z}{2} = -ze_k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{3.24}$$

Para $z = e_j \in \tilde{\mathcal{C}}l_{0,n}$, $j = 1, \ldots, n$ e $z = e_0 = 1 \in \tilde{\mathcal{C}}l_{0,n}$, temos

$$-e_j \times e_k = \delta_{jk}, \; -1 \times e_k = -e_k, \quad j, k = 1, \ldots, n$$

e consequentemente

$$\vec{e_k} = (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) = \vec{s_k} \tag{3.25}$$

$$\vec{1} = (-e_1, \ldots, -e_n) = \hat{\imath} \in \mathcal{H}^n. \tag{3.26}$$

De (3.25) e (3.26) segue que $\vec{z} = x_0\vec{1} + x_1\vec{e_1} + \ldots + x_n\vec{e_n}$ e com o auxílio do produto interno (3.7) temos

$$(\vec{e_k}, \vec{z}) = z_k, \; (\hat{\imath}, \vec{z}) = nx_0 + x_1e_1 + \ldots + x_ne_n.$$

As diferentes relações de $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ com respeito a $z \in \tilde{\mathcal{C}}l_{0,n}$ e $\vec{z} \in \mathcal{H}^n$ são ilustradas por

$$z = x_0 + (\hat{\imath}, \vec{x}) \in \tilde{\mathcal{C}}l_{0,n}, \quad \vec{z} = \vec{x} + \hat{\imath}x_0 \in \mathcal{H}^n \tag{3.27}$$

$$\overline{z} = x_0 - (\hat{\imath}, \vec{x}), \quad \overline{\vec{z}} = \vec{x} - \hat{\imath}x_0$$

e consequentemente obtemos

$$x_0 = Rez = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad \vec{x} = Re\vec{z} = \frac{1}{2}(\vec{z} + \overline{\vec{z}})$$

$$\vec{x} = Imz = \frac{1}{2}(z\hat{\imath} - \hat{\imath}\overline{z}) = \frac{1}{2}(\hat{\imath}\overline{z} - z\hat{\imath}), \quad x_0 = Im\vec{z} = \frac{1}{2n}(\vec{z} - \overline{\vec{z}}, \hat{\imath}) = \frac{1}{2n}(\hat{\imath}, \vec{z} - \overline{\vec{z}})$$

onde $\vec{x}$ representa a parte real de $\vec{z}$ e x_0 a parte imaginária.

Comparando com o conceito de diferenciabilidade na teoria de funções de n variáveis complexas, a aplicação de n variáveis monogénicas hipercomplexas conduz-nos à questão se todos os produtos de z_k são também monogénicos ou não. Já sabemos que a resposta é negativa, por exemplo $f(z_1, z_2) = z_1 z_2$ não é monogénica. Por isso introduziu-se no artigo de Malonek *[17]* o produto permutacional.

Definição 3.2.11 *Seja $V_{+,.}$ um anel comutativo ou não comutativo, $a_k \in V$ com $k = 1, \ldots, n$, então o " $\times$ " - produto é definido por*

$$a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n = \frac{1}{n!} \sum_{\pi(i_1,\ldots,i_n)} a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n} \tag{3.28}$$

onde a soma percorre todas as permutações de todos os $(i_1, \ldots, i_n)$.

O n-ésimo produto (3.28) é o produto simétrico com as seguintes propriedades:

1. A operação é permutativa, isto é, a permutação dos factores não altera o resultado.
2. Para anéis comutativos, em particular para $V = \mathbb{C}$ e $V = \mathbb{R}$, é simplesmente o produto ordinário de n elementos.
3. A operação é distributiva em relação à adição desde que V seja distributivo.
4. A permutabilidade no caso de anéis não comutativos é conseguida à custa da associatividade, por exemplo,
$$a_1 \times (a_2 \times a_3) \neq (a_1 \times a_2) \times a_3.$$

A perda da associatividade do produto simétrico é compensada para um certo grau por uma relação recursiva que iremos referir mais adiante.

Teorema 3.2.12 *Para todos os inteiros $n \geq 1$*

$$a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n = \frac{1}{n} \left[a_1(a_2 \times \ldots \times a_n) + \ldots + a_n(a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_{n-1}) \right] \tag{3.29}$$

e

$$a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n = \frac{1}{n} \left[(a_2 \times \ldots \times a_n)a_1 + \ldots + (a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_{n-1})a_n \right]. \tag{3.30}$$

Demonstração:

Se agruparmos os elementos em (3.28) de acordo com o primeiro (ou último) factor a_k, $(k = 1, \ldots, n)$ então o resto é exactamente

$$(n-1)! a_1 \times \ldots \times a_{k-1} \times a_{k+1} \times \ldots \times a_n.$$

O que prova o teorema.

■

Corolário 3.2.13 *Se* $a_k \in \widetilde{\mathcal{C}l}_{0,n} \subset \mathcal{C}l_{0,n}$, $(k = 1, \ldots, n)$ *então também* $a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n \in \widetilde{\mathcal{C}l}_{0,n}$.

A demonstração segue da adição de (3.29) e (3.30), divisão por 2 e adicionalmente por indução. Para o caso em que os factores se repetem no produto (3.28), estabelecemos

Convenção

Se o factor a_j ocorre μ_j-vezes em (3.28) temos

$$\underbrace{a_1 \times \ldots \times a_1}_{\mu_1} \times \ldots \times \underbrace{a_n \times \ldots \times a_n}_{\mu_n} = a_1^{\mu_1} \times a_2^{\mu_2} \times \ldots \times a_n^{\mu_n} \tag{3.31}$$

e colocamos parênteses se as potências são entendidas no caso ordinário, isto é,

$$a_1^2 \times a_2 = a_1 \times a_1 \times a_2 = a_1 \times a_2 \times a_1 = a_2 \times a_1 \times a_1$$

mas

$$(a_1)^2 \times a_2 = (a_1 a_1) \times a_2 = (a_1 \times a_1) \times a_2.$$

Fórmula geral recursiva

Através do multi-índice $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ onde $|\mu| = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$ e $\mu! = \mu_1!\mu_2!\ldots\mu_n!$ a fórmula recursiva pode ser extendida para a seguinte expressão

$$a_1^{\mu_1} \times a_2^{\mu_2} \times \ldots \times a_n^{\mu_n} =$$

$$= \frac{1}{|\mu|}\left[\mu_1 a_1 \left(a_1^{\mu_1 - 1} \times a_2^{\mu_2} \times \ldots \times a_n^{\mu_n}\right) + \ldots + \mu_n a_n \left(a_1^{\mu_1} \times a_2^{\mu_2} \times \ldots \times a_n^{\mu_n - 1}\right)\right]$$

e

$$a_1^{\mu_1} \times a_2^{\mu_2} \times \ldots \times a_n^{\mu_n} =$$

$$= \frac{1}{|\mu|}\left[\mu_1 \left(a_1^{\mu_1 - 1} \times a_2^{\mu_2} \times \ldots \times a_n^{\mu_n}\right) a_1 + \ldots + \mu_n \left(a_1^{\mu_1} \times a_2^{\mu_2} \times \ldots \times a_n^{\mu_n - 1}\right) a_n\right].$$

Além disso, o produto permutacional é muito útil para generalizar a fórmula polinomial de um anel não comutativo.

Fórmula Polinomial

Teorema 3.2.14 *Potências de uma soma de n elementos diferentes $a_1, \ldots, a_n$ de um anel V arbitrário comutativo (ou não comutativo) podem ser desenvolvidas pelo produto simétrico na forma usual aplicando (3.31), isto é,*

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^k = \sum_{|\mu|=k} \binom{k}{\mu} \vec{a}^\mu$$

onde $\binom{k}{\mu} = \frac{k!}{\mu!}$, $\vec{a}^\mu = a_1^{\mu_1} \times a_2^{\mu_2} \times \ldots \times a_n^{\mu_n}$; $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

Tomando em consideração a repetição de elementos em (3.31) obtemos pela Definição 3.2.7 que

$$a_1^{\mu_1} \times a_2^{\mu_2} \times \ldots \times a_n^{\mu_n} = \frac{\mu!}{|\mu|!} \sum_{\pi(i_1,\ldots,i_{|\mu|})} a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_{|\mu|}}$$

onde a soma percorre todas as permutações distintas. Isto prova o teorema.

∎

Como exemplo temos

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2)^3 &= a_1^3 + (a_1 a_1 a_2 + a_1 a_2 a_1 + a_2 a_1 a_1) + (a_1 a_2 a_2 + a_2 a_1 a_2 + a_2 a_2 a_1) + a_2^3 \\ &= a_1^3 + 3a_1^2 \times a_2 + 3a_1 \times a_2^2 + a_2^3 \\ &= \sum_{|\mu|=3} \binom{3}{\mu} a_1^{\mu_1} \times a_2^{\mu_2}.\end{aligned}$$

Por outro lado, directamente pela multiplicação com o produto - $\times$

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2)^3 &= (a_1 + a_2) \times (a_1 + a_2) \times (a_1 + a_2) \\ &= a_1 \times a_1 \times a_1 + 3a_1^2 \times a_2 + 3a_1 \times a_2^2 + a_2 \times a_2 \times a_2.\end{aligned}$$

Relembremos que uma função $f = f(\vec{z}) \in \mathbb{C}_1(\Omega, \mathcal{C}\ell_{0,n})$ chama-se **diferenciável hipercomplexa à esquerda (à direita)** em Ω se a função pode ser aproximada numa vizinhança de $\vec{z} \in \Omega$ por uma aplicação $\mathcal{C}\ell_{0,n}$-linear à esquerda (à direita) de $\mathcal{H}^n$ em $\mathcal{C}\ell_{0,n}$, isto é,

$$f(\vec{z} + \Delta\vec{z}) - f(\vec{z}) = \Delta z_1 A_1 + \ldots + \Delta z_n A_n + o(\|\Delta\vec{z}\|) \tag{3.32}$$

$$f(\vec{z} + \Delta\vec{z}) - f(\vec{z}) = A_1 \Delta z_1 + \ldots + A_n \Delta z_n + o(\|\Delta\vec{z}\|) \tag{3.33}$$

onde $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{o(\|\Delta \vec{z}\|)}{\|\Delta \vec{z}\|} = 0$ e $A_k \in \mathcal{C}\ell_{0,n}$ com $k = 1, \ldots, n$.

A_k são apenas as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ e a diferenciabilidade hipercomplexa é equivalente à monogenicidade.

Teorema 3.2.15 *Suponhamos que $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ é um multi-índice arbitrário, $\vec{z} \in \mathcal{H}^n$, então a função*

$$f(\vec{z}) = \vec{z}^{\mu} = z_1^{\mu_1} \times z_2^{\mu_2} \times \ldots \times z_n^{\mu_n} \tag{3.34}$$

é diferenciável hipercomplexa à esquerda e à direita.

Demonstração:

A demonstração segue por indução sobre $|\mu|$ com a ajuda da fórmula geral recursiva. Vamos apenas provar o caso da diferenciabilidade hipercomplexa à direita, o caso da diferenciabilidade à esquerda é análogo. Para $|\mu| = 1$ é trivial. Supondo que para um arbitrário $|\mu|$, $\vec{z}^{\mu}$ é diferenciável hipercomplexa, isto é, por (3.33)

$$(\vec{z} + \Delta \vec{z})^{\mu} - \vec{z}^{\mu} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{z}^{\mu - \tau_i} \Delta z_i + o(\|\Delta \vec{z}\|) \tag{3.35}$$

onde τ_i é um multi-índice com 1 no lugar de i e zero nos restantes casos. Para o caso de $|\mu|$ até $|\mu| + 1$ usamos a segunda igualdade da fórmula geral recursiva (respectivamente, a primeira igualdade no caso da diferenciabilidade à esquerda) que nos dá

$$\begin{aligned}(|\mu| + 1)[(\vec{z} + \Delta \vec{z})^{\mu + \tau_k} - \vec{z}^{\mu + \tau_k}] &= \sum_{i=1}^{n} (\mu_i + \delta_{ik})[(\vec{z} + \Delta \vec{z})^{\mu + \tau_k - \tau_i}(z_i + \Delta z_i) - \vec{z}^{\mu + \tau_k - \tau_i} z_i] \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\mu_i + \delta_{ik})[(\vec{z} + \Delta \vec{z})^{\mu + \tau_k - \tau_i} - \vec{z}^{\mu + \tau_k - \tau_i}] z_i + \sum_{i=1}^{n} (\mu_i + \delta_{ik})(\vec{z} + \Delta \vec{z})^{\mu + \tau_k - \tau_i} \Delta z_i.\end{aligned} \tag{3.36}$$

Olhando para a linearização do segundo termo do lado direito e com as propriedades do produto temos

$$\sum_{i=1}^{n} (\mu_i + \delta_{ik})(\vec{z} + \Delta \vec{z})^{\mu + \tau_k - \tau_i} \Delta z_i = \sum_{i=1}^{n} (\mu_i + \delta_{ik}) \vec{z}^{\mu + \tau_k - \tau_i} \Delta z_i + o(\|\Delta \vec{z}\|).$$

Por (3.35) e pelo primeiro termo de (3.36) temos

$$\sum_{i=1}^{n} (\mu_i + \delta_{ik})[(\vec{z} + \Delta \vec{z})^{\mu + \tau_k - \tau_i} - \vec{z}^{\mu + \tau_k - \tau_i}] z_i = \sum_{i,j=1}^{n} B_{ji} \Delta z_j z_i + o(\|\Delta \vec{z}\|)$$

onde

$$B_{ji} = (\mu_i + \delta_{ik})(\mu_j + \delta_{jk} - \delta_{ji})\vec{z}^{\mu+\tau_k-\tau_i-\tau_j}$$

onde $k = 1, \ldots, n$. $B_{ji} = B_{ij}$ para todo $k = 1, \ldots, n$ onde $i \neq j$ e

$$(\Delta z_j)z_i + (\Delta z_i)z_j = z_i\Delta z_j + z_j\Delta z_i \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

com $(i \neq j)$, respectivamente

$$\Delta z_i z_i = z_i \Delta z_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Finalmente, as últimas relações tornam possível representar o primeiro termo de (3.36) como uma combinação linear à direita de Δz_k com $k = 1, \ldots, n$, o qual prova o teorema.

■

Na adição, o facto de $z_k = -z \times e_k, k = 1, \ldots, n$, dá-nos uma dependência explicita dos polinómios de Fueter (3.34) na variável usual $z \in \widetilde{\mathcal{C}\ell}_{0,n}$, nomeadamente

$$f(\vec{z}) = P_\mu(z) = (-1)^{|\mu|}(z \times e_1)^{\mu_1} \times (z \times e_2)^{\mu_2} \times \ldots \times (z \times e_n)^{\mu_n}. \tag{3.37}$$

Definição 3.2.16 *Seja $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ um multi-índice então*

$$P(\vec{a}, \vec{z}) = \sum_\mu c_\mu (\vec{z} - \vec{a})^\mu$$

$$P(\vec{z}, \vec{a}) = \sum_\mu (\vec{z} - \vec{a})^\mu c_\mu$$

*onde $c_\mu \in \mathcal{C}\ell_{0,n}$, $\vec{a} = \vec{\alpha} + \alpha_0 \hat{\imath} \in \Omega \subset \mathcal{H}^n$, $((\alpha_0, \vec{\alpha}) \in \mathbb{R}^{n+1})$, $a_k = \alpha_k e_0 - \alpha_0 e_k, \alpha_k \in \mathbb{R}$ com $k = 1, \ldots, n$, chamam-se **séries de potências hipercomplexas múltiplas à direita e respectivamente à esquerda**. Como séries de potências ordenadas pelos polinómios homogéneos são também consideradas*

$$P(\vec{a}, \vec{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\mu|=k} c_\mu (\vec{z} - \vec{a})^\mu, \quad P(\vec{z}, \vec{a}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\mu|=k} (\vec{z} - \vec{a})^\mu c_\mu. \tag{3.38}$$

Geralmente, iremos apenas considerar as séries de potências multiplas à direita com centro em $\vec{a} = 0$. A restrição de $\vec{z} \in \mathcal{H}^n$ para $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ conduz-nos directamente à usual série de potências em $\vec{x}^\mu$. Isto é muito útil na conexão com problemas de continuação analítica. A construção é similar a esta na teoria das funções complexas multidimensionais. Neste contexto, consideremos o domínio $U(r)$ em $\mathcal{H}^n$ da forma de acoplamento através de x_0 em forma de policilindros com (vector) - raios $\vec{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ definidos por

$$U(\vec{r}) = \{\vec{z} \in \mathcal{H}^n : |z_k| = \left(x_0^2 + x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} < r_k, \quad k = 1, \ldots, n\}.$$

Teorema 3.2.17 *Com*

$$P(\vec{z}) = \sum_{\mu} c_\mu \vec{z}^\mu \tag{3.39}$$

consideremos

$$\widetilde{P}(\vec{z}) = \sum_{\mu} |c_\mu||\vec{z}^\mu|. \tag{3.40}$$

Se a série de potências formal real (3.40) converge para qualquer ponto $\vec{\zeta} \in \mathcal{H}^n$ então (3.39) converge absolutamente e uniformemente em qualquer subconjunto compacto $\mathbb{K}$ do policilindro $U(\vec{\rho})$ com raios $\vec{\rho} = (\rho_1, \ldots, \rho_n), \rho_k = |\zeta|, \quad k = 1, \ldots, n.$

A demonstração é igual como no caso de séries de potências múltiplas reais ou complexas. Tomando especial atenção a $|c_\mu \vec{z}^\mu| \leq 2^n |c_\mu||z_1|^{\mu_1} \ldots |z_n|^{\mu_n}$.

Do ponto de vista usual, ao considerar séries de potências em relação a $z \in \widetilde{\mathcal{C}\ell}_{0,n}$ é possível obter uma versão análoga do mesmo modo que $|\vec{z}^\mu| = |(z \times e_1)^{\mu_1} \times \ldots \times (z \times e_n)^{\mu_n}| \leq |z|^{|\mu|}$. Além disso os domínios de convergência são bolas. Para séries de potências ordenadas da forma (3.38) uma fórmula de Cauchy-Hadamard análoga pode ser encontrada para raios de convergência na forma

$$r = \left(\overline{\lim_{k \to \infty}} \left(\max_{|\mu|=k} |c_\mu| \right)^{\frac{1}{k}} \right)^{-1}.$$

Usamos agora o método clássico para provar a diferenciabilidade hipercomplexa de (3.39). Pela diferenciação parcial formal de (3.39) temos

$$\frac{\partial P(\vec{z})}{\partial x_i} = \sum_{\mu} c_\mu \mu_i \vec{z}^{\mu - \tau_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{3.41}$$

É fácil verificar que (3.41) converge no mesmo domínio que $P(\vec{z})$ e é uniformemente contínua em relação a $\vec{z}$ em qualquer subconjunto compacto $\mathbb{K} \subset U(\vec{r})$. Por outro lado, pelo Teorema 3.2.15 segue que

$$(\vec{z} + \Delta\vec{z})^\mu - \vec{z}^\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{z}^{\mu - \tau_i} \Delta z_i + \eta_\mu(\|\Delta\vec{z}\|)\|\Delta\vec{z}\| \tag{3.42}$$

onde $\eta_\mu(\|\Delta\vec{z}\|)$ em qualquer compacto $\mathbb{K}$ é continuamente dependente de $\|\Delta\vec{z}\|$ e $\eta_\mu \to 0$ quando $\|\Delta\vec{z}\| \to 0$.

Teorema 3.2.18 *Seja $P(\vec{a},\vec{z})$ uma série de potências múltipla à direita. Se $P(\vec{a},\vec{z})$ converge em algum domínio policilindrico da forma*

$$\mathcal{U}(\vec{r},\vec{a}) = \left\{\vec{z} \in \mathcal{H}^n : |z_k - a_k| = \left((x_0-\alpha_0)^2 + (x_k-\alpha_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} < r_k\right\}$$

para $k = 1,\dots,n$, então $P(\vec{a},\vec{z})$ é ***diferenciável hipercomplexa*** *à direita em $\mathcal{U}(\vec{r},\vec{a})$ e as derivadas parciais em relação a x_k são obtidas pela diferenciação formal como*

$$\frac{\partial P(\vec{z})}{\partial x_k} = \sum_\mu c_\mu \mu_k (\vec{z}-\vec{a})^{\mu-\tau_k} \tag{3.43}$$

onde τ_k é o multi-índice com 1 no lugar de k e zero nos outros casos, ou seja, $\tau_k = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$.

Demonstração:

Seja $\vec{z} \in U(\vec{r})$ e ρ_k tal que

$$|z_k| < \rho_k < r_k \quad (k = 1,\dots,n)$$

e

$$|\Delta z_k| \leq \rho_k - |z_k|.$$

Então segue que

$$|z_k + \Delta z_k| \leq |z_k| + |\Delta z_k| \leq \rho_k < r_k.$$

Consideremos

$$G(\Delta\vec{z}) = P(\vec{z}+\Delta\vec{z}) - P(\vec{z}) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial P(\vec{z})}{\partial x_i}\Delta z_i.$$

Recorrendo a (3.42) temos

$$G(\Delta\vec{z}) = \sum_{|\mu|=1} c_\mu \eta_\mu(\|\Delta\vec{z}\|)\|\Delta\vec{z}\| + \sum_{|\mu|=N}\left(\sum_{i=1}^n c_\mu \mu_i \vec{z}^{\mu-\tau_i}\Delta z_i\right) - \sum_{i=1}^n\left(\sum_{|\mu|=N} \mu_i c_\mu \vec{z}^{\mu-\tau_i}\right)\Delta z_i$$

onde N é escolhido suficientemente grande e para o resto temos

$$\sum_{|\mu|=N} |c_\mu \vec{z}^{\mu-\tau_i}\mu_i| < \frac{\varepsilon}{3m} \tag{3.44}$$

onde $\varepsilon > 0$ e $i = 1, \ldots, n$. Tendo em conta que

$$\sum_{|\mu|=1} c_\mu \eta_\mu(\|\Delta\vec{z}\|) \to 0$$

quando $\|\Delta\vec{z}\|$ converge uniformemente para zero, temos

$$\left|\sum_{|\mu|=1} c_\mu \eta_\mu(\|\Delta\vec{z}\|)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.45}$$

para $\|\Delta\vec{z}\| < \delta$ suficientemente pequeno. Se agora estimarmos a norma de $G(\Delta\vec{z})$, então de (3.44) e (3.45) segue

$$\frac{|G(\Delta\vec{z})|}{\|\Delta\vec{z}\|} \leq \left|\sum_{|\mu|=1} c_\mu \eta_\mu(\|\Delta\vec{z}\|)\right| + 2m \sum_{|\mu|=N} |c_\mu \mu_i \vec{z}^{\mu-\tau_i}| < \varepsilon$$

quando $\|\Delta\vec{z}\| < \delta$, assim provamos que

$$\lim_{\Delta\vec{z}\to 0} \frac{\left|P(\vec{z}+\Delta\vec{z}) - P(\vec{z}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial x_i}\Delta z_i\right|}{\|\Delta\vec{z}\|} = 0.$$

Pela definição da diferenciabilidade hipercomplexa $\frac{\partial P}{\partial x_i}$ são as derivadas parciais de $P(\vec{z})$. Além disso, tendo em conta (3.41) são também funções monogénicas.

■

Sendo assim iremos dar uma definição indutiva da diferenciabilidade hipercomplexa à direita de ordens maiores (o caso de diferenciabilidade à esquerda é análogo). Assumindo que f'_R existe em qualquer ponto de $\Omega \subset \mathcal{H}^n$. Então f'_R é uma função que atribui para qualquer $\vec{z} \in \Omega$ um elemento de $\mathcal{C}\ell_{1,n} = \mathcal{L}_R(\mathcal{H}^n, \mathcal{C}\ell_{0,n})$. Além disso $f(\vec{z})$ é uma função com valores $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ de $\vec{z}$, f'_R uma função com valores $\mathcal{C}\ell_{1,n}$ de $\vec{z}$.

Definição 3.2.19 *Seja $f(\vec{z})$ uma aplicação contínua de uma vizinhança de $\vec{a} \in \mathcal{H}^n \cong \mathbb{R}^{n+1}$ em $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ e $\mathcal{C}\ell_{p,n} = \mathcal{L}_R(\mathcal{H}^n, \mathcal{C}\ell_{p-1,n}), p = 1, 2, \ldots$ como definida anteriormente. $f(\vec{z})$ chama-se* ***p-vezes diferenciável hipercomplexa à direita*** *em $\vec{a}$ se existe uma aplicação $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ linear $\ell \in \mathcal{L}_R(\mathcal{H}^n, \mathcal{C}\ell_{p-1,n})$ tal que*

$$\lim_{\Delta\vec{z}\to 0} \frac{\left|f_R^{(p-1)}(\vec{a}+\Delta\vec{z}) - f_R^{(p-1)}(\vec{a}) - \ell(\Delta\vec{z})\right|}{\|\Delta\vec{z}\|} = 0 \tag{3.46}$$

ℓ chama-se a ***p-ésima derivada à direita*** *de f em $\vec{a}$. Além disso, $f_R^{(p)}(\vec{a}) \in \mathcal{C}\ell_{p,n}$ e*

$$f_R^{(p)}(\vec{a}) = [f_R^{(p-1)}(\vec{z})]'_{\vec{z}=\vec{a}}.$$

A fórmula (3.43) mostra que as derivadas também representam funções monogénicas no mesmo domínio de convergência. Por indução segue

Teorema 3.2.20 *Toda a série de potências generalizada à esquerda (à direita) é infinitamente diferenciável hipercomplexa à esquerda (à direita) no seu domínio de convergência.*

Calculando as derivadas parciais das potências generalizadas $(\vec{z}-\vec{a})^\mu$ em $\vec{z}=\vec{a}$ temos

$$\frac{\partial^{|\nu|}}{\partial \vec{x}^\nu}(\vec{z}-\vec{a})^\mu = \begin{cases} \mu! & se \quad \nu=\mu \\ 0 & se \quad \nu\neq\mu \end{cases}.$$

O teorema pode ser extendido a um teorema acerca de funções monogénicas, geralmente supomos que o inverso está provado, isto é, que qualquer função monogénica pode ser localmente expandida numa série de Taylor. Notamos que a ordem dos zeros de $f(\vec{z})$ pode ser definida com a ajuda da Definição 3.2.19.

Teorema 3.2.21 *Toda a série de potências convergente à direita produz no interior do seu domínio de convergência uma função monogénica $f(\vec{z})$ e aí coincide com a série de Taylor de $f(\vec{z})$, isto é, numa vizinhança de $\vec{z}=\vec{a}$ temos*

$$f(\vec{z}) = \sum_\mu \frac{1}{\mu!}\frac{\partial^{|\mu|} f(\vec{a})}{\partial \vec{x}^\mu}(\vec{z}-\vec{a})^\mu$$

e ordenada

$$f(\vec{z}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\sum_{|\mu|=k}\binom{k}{\mu}\frac{\partial^{|\mu|} f(\vec{a})}{\partial \vec{x}^\mu}(\vec{z}-\vec{a})^\mu\right)$$

(de modo idêntico para as séries à esquerda).

Além disso podemos ter a expressão para $z\in\mathcal{C}\ell_{0,n}$ na forma

$$f(\vec{z}) = \sum_\mu \frac{(-1)^{|\mu|}}{\mu!}\frac{\partial^{|\mu|} f(a)}{\partial \vec{x}^\mu}[(z-a)\times e_1]^{\mu_1}\times\ldots\times[(z-a)\times e_n]^{\mu_n}$$

e ordenada

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{|\mu|}}{k!}\left(\sum_{|\mu|=k}\binom{k}{\mu}\frac{\partial^{|\mu|} f(a)}{\partial \vec{x}^\mu}[(z-a)\times e_1]^{\mu_1}\times\ldots\times[(z-a)\times e_n]^{\mu_n}\right).$$

Para determinar os coeficientes da série de Taylor de uma função monogénica podemos formular o teorema da unicidade para séries de Taylor generalizadas.

Teorema 3.2.22 *Se os coeficientes de duas séries de Taylor generalizadas à direita (à esquerda) coincidem numa pequena vizinhança arbitrária do ponto comum do desenvolvimento $\vec{a}$ então coincidem identicamente.*

3.3 Extensão de Cauchy-Kowalewskaya

O teorema da unicidade é a base para a extensão de Cauchy-Kowalewskaya de uma função com valores em $\mathcal{C}l_{0,n}$ analítica-real em $\mathbb{R}^n$ dada pelo seguinte resultado.

Teorema 3.3.1 *Seja $f(\vec{x})$ analítica real no paralelepípedo*

$$\mathcal{V}(\vec{r}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |x_k| < r_k, k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Então uma continuação analítica de f para uma função monogénica à direita ou à esquerda em

$$\mathcal{U}(\vec{r}) = \{\vec{z} \in \mathcal{H}^n : |z_k| < r_k, k =, 1, 2, \ldots, n\}$$

é dada de uma forma única pela função

$$f_R^*(\vec{z}) = \sum_{|\mu|=0} \frac{1}{\mu!} \frac{\partial^{|\mu|} f(0)}{\partial \vec{x}^\mu} \vec{z}^\mu \tag{3.47}$$

respectivamente

$$f_L^*(\vec{z}) = \sum_{\mu} \vec{z}^\mu \frac{1}{\mu!} \frac{\partial^{|\mu|} f(0)}{\partial \vec{x}^\mu} \tag{3.48}$$

e temos

$$f_R^*(\vec{z})|_{x_0=0} = f_L^*(\vec{z})|_{x_0=0} = f^*(\vec{z})|_{\mathbb{R}^n} = f(\vec{x}).$$

Demonstração:

Dentro de $\mathcal{V}(\vec{r})$ a função $f(\vec{x})$ tem a representação numa série de Taylor

$$f(\vec{x}) = \sum_{|\mu|=0} \frac{1}{\mu!} \frac{\partial^{|\mu|} f(0)}{\partial \vec{x}^\mu} \vec{x}^\mu \tag{3.49}$$

e

$$f_R^*(\vec{z})|_{x_0=0} = f_L^*(\vec{z})|_{x_0=0} = f^*(\vec{z})|_{\mathbb{R}^n} = f(\vec{z}) \tag{3.50}$$

torna-se óbvio. A convergência de (3.47) respectivamente de (3.48) em $\mathcal{U}(\vec{r})$ é garantida pela convergência de (3.49) em $\mathcal{V}(\vec{r})$ e a unicidade surge do teorema de unicidade para séries de potências generalizadas.

∎

As funções $f_R^*(\vec{z})$ respectivamente $f_L^*(\vec{z})$ chamam-se **extensões de Cauchy-Kowalewskaya à direita (resp. à esquerda)**. Com a ajuda da extensão de Cauchy-Kowalewskaya o produto de Cauchy-Kowalewskaya referido em [9] pode ser definido por

$$f \odot g = \left(f(\vec{z})|_{x_0=0} . g(\vec{z})|_{x_0=0}\right)^* .$$

Então a utilização de $\mathcal{H}^n$ permite um tratamento bastante fácil do produto de Cauchy-Kowalewskaya de duas séries de potências à direita P e Q da forma

$$P(\vec{z}) = \sum_{|\mu|=0} c_\mu (\vec{z})^\mu$$

e

$$Q(\vec{z}) = \sum_{|\nu|=0} d_\nu (\vec{z})^\nu .$$

O produto de Cauchy-Kowalewskaya é simplesmente dado pela série de potências formal à direita da forma

$$P \odot_R Q(\vec{z}) = \sum_{|\sigma|=0} b_\sigma \vec{z}^\sigma$$

com coeficientes

$$b_\sigma = \sum_{\mu+\nu=\sigma} c_\mu d_\nu .$$

Análogamente o produto de Cauchy-Kowalewskaya de duas séries de potências formais à esquerda pode ser obtido.

Uma aplicação imediata da extensão de Cauchy-Kowalewskaya é a passagem da representação de uma função $f(x)$ monogénica à direita, dada na forma de uma série em termos das variáveis reais $x_0, \ldots, x_n$, para a sua representação em termos das variáveis hipercomplexas $z_1, \ldots, z_n$. Considerando a sua restrição ao hiperplano $x_0 = 0$, obtemos a fórmula (3.49) de $f(\vec{x}) = f(x)|_{x_0=0}$. Substituindo $\vec{x}$ por $\vec{z}$ como na fórmula (3.47) obtemos a continuação de $f(\vec{x})$ para $\mathbb{R}^{n+1}$ na forma $f_R^*(\vec{z})$. Uma vez que a função $f(x)$ coincide com f_R^* (teorema da unicidade) pelo facto de ser monogénica à direita, através deste processo obtemos a sua representação (mais concretamente a sua representação em forma de série) em termos das variáveis $z_1, \ldots, z_n$. Por analogia trata-se do caso de uma função monogénica à esquerda e sua representação numa série à esquerda. O método descrito vai ser utilizado no próximo capítulo.

Capítulo 4

Séries de potências generalizadas na Análise de Clifford

Ao longo deste capítulo pretendemos estudar e construir séries de potências formais que correspondem às funções elementares. Começamos este capítulo com um ponto que descreve a situação e o método usado no plano complexo.

4.1 Um método de construção de funções holomorfas de uma variável complexa

Vamos começar por determinar a solução da equação diferencial $\partial_z f = f$ com o valor inicial $f(0) = 1$, onde $f = u + iv$ e $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$. Deste modo

$$\partial_z f = f \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)(u + iv) = u + iv \Leftrightarrow \frac{1}{2}(u_x + iv_x - iu_y + v_y) = u + iv,$$

que é equivalente ao sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} u_x & + & v_y & = & 2u \\ v_x & - & u_y & = & 2v \end{array} \right. . \tag{4.1}$$

Como estamos a trabalhar com funções holomorfas, sendo f holomorfa, temos $\partial_{\overline{z}} f = 0$ onde $\partial_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$, isto implica

$\partial_{\bar{z}} f = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)(u+iv) = 0$, o que nos dá o sistema

$$\begin{cases} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{cases}. \tag{4.2}$$

As equações (4.2) são as **equações de Cauchy- Riemann**. Substituindo as equações (4.2) em (4.1) deduzimos:

$$\begin{cases} u_x + u_x = 2u \\ v_x + v_x = 2v \end{cases},$$

ou seja

$$\begin{cases} u_x &= u \\ v_x &= v \end{cases}. \tag{4.3}$$

Considerando novamente as equações (4.1) e derivando a primeira em ordem a x e a segunda em ordem a y, obtemos

$$\begin{cases} u_{xx} + v_{xy} = 2u_x \\ v_{xy} - u_{yy} = 2v_y \end{cases}. \tag{4.4}$$

Subtraindo as duas equações em (4.4) temos $u_{xx} + u_{yy} = 2(u_x - v_y) = 0$, em virtude de (4.2), isto é, a parte real u da função holomorfa f é uma função harmónica.

Tendo em conta as condições iniciais $f(0,0) = 1$, depreendemos que $u(0,0) + iv(0,0) = 1$, ou seja, $u(0,0) = 1$ e $v(0,0) = 0$. De (4.3) resulta

$$\begin{cases} u &= C_1 e^x \varphi_1(y) \\ v &= C_2 e^x \varphi_2(y) \end{cases}. \tag{4.5}$$

Derivando (4.5) em ordem a x e a y obtemos:

$$\begin{cases} u_x &= C_1 e^x \varphi_1(y) \\ v_x &= C_2 e^x \varphi_2(y) \end{cases} \tag{4.6}$$

$$\begin{cases} u_y &= C_1 e^x \varphi_1'(y) \\ v_y &= C_2 e^x \varphi_2'(y) \end{cases}. \tag{4.7}$$

Resolvendo agora (4.6) e (4.7) obtemos que a função procurada é

$$\begin{aligned} f &= u + iv \\ &= C_1 e^x \varphi_1(y) + iC_2 e^x \varphi_2(y) \\ &= e^x \left(C_1 \varphi_1(y) + iC_2 \varphi_2(y) \right). \end{aligned}$$

A partir das equações de Cauchy-Riemann verificamos que

$$\begin{cases} C_1 e^x \varphi_1(y) & = & C_2 e^x \varphi_2'(y) \\ C_1 e^x \varphi_1'(y) & = & -C_2 e^x \varphi_2(y) \end{cases}. \tag{4.8}$$

Derivando a primeira equação de (4.8) em ordem a y obtemos

$$C_1 \varphi_1'(y) = C_2 \varphi_2''(y). \tag{4.9}$$

Substituindo (4.9) na segunda equação de (4.8) deduzimos

$$C_2 \varphi_2''(y) = -C_2 \varphi_2(y) \Leftrightarrow \varphi_2''(y) + \varphi_2(y) = 0. \tag{4.10}$$

De modo análogo concluímos que

$$\varphi_1''(y) + \varphi_1(y) = 0. \tag{4.11}$$

Neste caso, toda a solução $y(x)$ da equação diferencial $y'' + \lambda y = 0$ é da forma

$$y(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Deste modo deparamo-nos com duas soluções da forma:

$$\begin{cases} \varphi_1(y) & = & A_1 \cos y + B_1 \sin y \\ \varphi_2(y) & = & A_2 \cos y + B_2 \sin y \end{cases}.$$

A partir de (4.5) e das condições iniciais observamos que:

$$\begin{cases} u(0,0) & = & C_1 \varphi_1(0) \\ v(0,0) & = & C_2 \varphi_2(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 & = & C_1 \varphi_1(0) \\ 0 & = & C_2 \varphi_2(0) \end{cases}.$$

Substituindo y por zero temos

$$\begin{cases} \varphi_1(0) & = & A_1 \\ \varphi_2(0) & = & A_2 \end{cases}.$$

Através das suas derivadas e das condições iniciais resulta que:

$$\begin{cases} \varphi_1'(y) & = & -A_1 \sin y + B_1 \cos y \\ \varphi_2'(y) & = & -A_2 \sin y + B_2 \cos y \end{cases}.$$

e

$$\begin{cases} \varphi_1'(0) &= B_1 \\ \varphi_2'(0) &= B_2 \end{cases},$$

onde obtemos as relações:

$$\begin{cases} 1 &= C_1A_1 \\ 0 &= C_2A_2 \\ C_1B_1 &= -C_2A_2 \\ C_1A_1 &= C_2B_2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} C_2 &\neq 0 \\ A_2 = B_1 &= 0 \\ C_1B_1 &= 0 \\ B_2 &\neq 0 \\ C_1 &\neq 0 \end{cases}. \tag{4.12}$$

Assim verificamos que

$$\begin{cases} \varphi_1(y) &= A_1 \cos y \\ \varphi_2(y) &= B_2 \sin y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = C_1e^xA_1 \cos y \\ v(x,y) = C_2e^xB_2 \sin y \end{cases}$$

e concluímos que a forma geral da função f é dada por

$$f = u + iv = C_1e^xA_1 \cos y + iC_2e^x \sin y,$$

ou seja,

$$f(x,y) = e^x\left(C_1A_1 \cos y + iC_2B_2 \sin y\right) \Leftrightarrow f(x,y) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^xe^{iy} = e^{x+iy} = e^z$$

também conhecida pela **fórmula de Euler**.

Deste modo concluímos que a solução da equação diferencial $\partial_z f = f$ com o valor inicial $f(0) = 1$ é a função *exponencial complexa*

$$f(z) = e^z. \tag{4.13}$$

A função exponencial complexa é a única função definida em $\mathbb{C}$, cuja série de potências coincide no eixo real com a série de potências da função exponencial real:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots \tag{4.14}$$

4.2 Construção de séries de potências generalizadas que representam funções elementares monogénicas

4.2.1 Função exponencial generalizada

O nosso objectivo é construir funções monogénicas, isto é, funções $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de três variáveis reais x_0, x_1, x_2, ambas indentificadas com quaterniões reduzidos $z = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2$ e $f = f_0 + f_1 e_1 + f_2 e_2$ respectivamente tal que

$$\partial_{\overline{z}} f = \frac{1}{2}(\partial_0 + e_1\partial_1 + e_2\partial_2) f = 0, \qquad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{4.15}$$

Iremos começar por encontrar soluções monogénicas de equações diferenciais hipercomplexas da forma

$$\partial_z f = F(z, f). \tag{4.16}$$

Neste caso da generalização da série exponencial, análogamente ao caso complexo explicado na Secção 4.1, consideremos uma equação (4.16) da forma $\partial_z f = f$ com o valor inicial $f(0) = 1$ onde

$$\partial_z f = \frac{1}{2}\left(\partial_0 - e_1\partial_1 - e_2\partial_2\right) f. \tag{4.17}$$

Usando (4.15) vemos que $\partial_z f = \partial_0 f$ e por conseguinte temos que resolver a equação

$$\partial_0 f = f \tag{4.18}$$

com o valor inicial $f(0) = 1$ (comparar com a fórmula (4.3)). A fórmula (4.18) é equivalente ao sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(\partial_0 f_0 + \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2) & = & f_0 \\ \frac{1}{2}(\partial_0 f_1 - \partial_1 f_0) & = & f_1 \\ \frac{1}{2}(\partial_0 f_2 - \partial_2 f_0) & = & f_2 \\ \frac{1}{2}(\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) & = & 0 \end{array} \right. . \tag{4.19}$$

em relação às componentes de f.

A equação hipercomplexa generalizada de Cauchy-Riemann (4.15) é equivalente com um sistema de quatro equações diferenciais reais (também chamado sistema Riesz), o qual iremos escrever em relação às componentes f_0, f_1, f_2 na seguinte forma

$$\begin{cases} \partial_0 f_0 &= \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 \\ \partial_0 f_1 &= -\partial_1 f_0 \\ \partial_0 f_2 &= -\partial_2 f_0 \\ \partial_1 f_2 &= \partial_2 f_1 \end{cases}. \tag{4.20}$$

A última equação do sistema é uma condição de integrabilidade. Juntando as equações (4.19) e (4.20) deduzimos:

$$\begin{cases} \partial_0 f_1 &= f_1 \\ \partial_0 f_2 &= f_2 \\ \partial_0 f_0 &= f_0 \\ \partial_1 f_0 &= -f_1 \\ \partial_2 f_0 &= -f_2 \\ \partial_1 f_2 &= \partial_2 f_1 \\ \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 &= f_0 \end{cases}. \tag{4.21}$$

Consequentemente, podemos reconhecer que as componentes f_1 e f_2 são determinadas por f_0 e também que as funções f_0 (diferenciáveis duas vezes e contínuas devido à monogenicidade de f pelo Teorema 3.2.20) irão automaticamente satisfazer a condição de integrabilidade (Lema de Schwarz acerca de derivadas parciais mistas).

A terceira equação do sistema (4.21) implica que a primeira componente de f tem a forma

$$f_0(x_0, x_1, x_2) = Ce^{x_0}\varphi(x_1, x_2) \tag{4.22}$$

para alguma função com valores reais φ. Por conseguinte a função f pode ser escrita como

$$f(x_0, x_1, x_2) = Ce^{x_0}\left(\varphi(x_1, x_2) - \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x_1, x_2)e_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_1, x_2)e_2\right), \tag{4.23}$$

usando a quarta e quinta equação de (4.21). As derivadas parciais da terceira equação de (4.21) por x_0, da quarta por x_1 e da quinta por x_2 conduzem-nos ao sistema de segunda ordem

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_0^2} &= \frac{\partial f_0}{\partial x_0} \\ \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_1^2} &= -\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_2^2} &= -\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{cases}. \tag{4.24}$$

Somando o lado direito e esquerdo vemos que f_0 é uma função harmónica (como todas as componentes de f), isto é,

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_2^2} = 0. \tag{4.25}$$

A terceira equação de (4.21) permite substituir $\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_0^2}$ por f_0 e assim escrevemos

$$f_0 + \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_2^2} = 0. \tag{4.26}$$

De (4.22) deduzimos

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \varphi = 0 \Leftrightarrow \triangle\varphi + \varphi = 0. \tag{4.27}$$

Para resolver esta equação usamos o método de Fourier (Separação das Variáveis), isto é, considerando $\varphi(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)$ para resolver $\Delta\varphi + \varphi = 0$. Derivando depreendemos que

$$\begin{cases} \varphi_1^{'}(x_1, x_2) & = & \varphi_1^{'}(x_1)\varphi_2(x_2) \\ \varphi_2^{'}(x_1, x_2) & = & \varphi_1(x_1)\varphi_2^{'}(x_2) \\ \varphi_1^{''}(x_1, x_2) & = & \varphi_1^{''}(x_1)\varphi_2(x_2) \\ \varphi_2^{''}(x_1, x_2) & = & \varphi_1(x_1)\varphi_2^{''}(x_2) \end{cases}.$$

Assim

$$\triangle\varphi + \varphi = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2}\varphi_2 + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2^2}\varphi_1 + \varphi_1\varphi_2 = 0$$

e dividindo ambos os membros por $\varphi_1\varphi_2$ obtemos

$$\frac{\varphi_1^{''}}{\varphi_1} + \frac{\varphi_2^{''}}{\varphi_2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\varphi_1^{''}}{\varphi_1} = -1 - \frac{\varphi_2^{''}}{\varphi_2}.$$

Neste caso estamos perante equações diferenciais parciais de segunda ordem. A última expressão mostra que $\frac{\varphi_1^{''}(x_1)}{\varphi_1(x_1)}$ e $\frac{\varphi_2^{''}(x_2)}{\varphi_2(x_2)}$ são constantes, considerando $\frac{\varphi_1^{''}}{\varphi_1} = \lambda = constante$, então $\frac{\varphi_2^{''}}{\varphi_2} = -1 - \lambda$. Por razões de simetria escolhemos $\lambda = -1 - \lambda \Leftrightarrow \lambda + \lambda = -1 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$. Deste modo $\frac{\varphi_1^{''}}{\varphi_1} = \lambda \Leftrightarrow \varphi_1^{''} = -\frac{1}{2}\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_1^{''} + \frac{1}{2}\varphi_1 = 0$.

Por consequência acabamos com duas equações diferenciais ordinárias $\varphi_1^{''}(x_1) + \frac{1}{2}\varphi_1(x_1) = 0$ e $\varphi_2^{''}(x_2) + \frac{1}{2}\varphi_2(x_2) = 0$. Toda a solução $y(x)$ da equação diferencial $y'' + \lambda y = 0$ é da forma

$$y(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Logo as soluções gerais são da forma $\varphi_1(x_1) = A_1 \cos\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right) + B_1 \sin\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\varphi_2(x_2) = A_2 \cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) + B_2 \sin\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right)$ respectivamente. Sendo assim,

$$\varphi(x_1, x_2) = \left(A_1 \cos\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right) + B_1 \sin\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)\right)\left(A_2 \cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) + B_2 \sin\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

Como condições iniciais temos

$$f(0,0,0)=1 \Leftrightarrow f(0,0,0)=f_0(0,0,0)+f_1(0,0,0)e_1+f_2(0,0,0)e_2$$

donde resulta, $f_0(0,0,0)=1$ e $f_1(0,0,0)=0$ e $f_2(0,0,0)=0$. Uma vez que $\partial_0 f_0 = f_0$ deduzimos

$$f_0(x_0,x_1,x_2)=Ce^{x_0}\left(A_1\cos\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)+B_1\sin\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)\right)\left(A_2\cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right)+B_2\sin\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

Aplicando as condições iniciais $f_0(0,0,0)=CA_1A_2=1$. Das equações (4.21) segue $f_1(x_0,x_1,x_2)=-Ce^{x_0}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x_1,x_2)$. Derivando $\varphi(x_1,x_2)$ em relação a x_1 e substituindo x_1 e x_2 por zero obtemos:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(0,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}B_1A_2.$$

De modo análogo $f_2(x_0,x_1,x_2)=-Ce^{x_0}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_1,x_2)$, derivando $\varphi(x_1,x_2)$ em relação a x_2 e substituindo x_1 e x_2 por zero obtemos:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(0,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}B_2A_1.$$

Aplicando novamente as condições iniciais entendemos que: $f_1(0,0,0)=0 \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}CB_1A_2 = 0$ e $f_2(0,0,0)=0 \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}CB_2A_1=0$, donde resultam as igualdades:

$$\left\{\begin{array}{ccc} CA_1A_2 & = & 1 \\ CB_1A_2 & = & 0 \\ CB_2A_1 & = & 0 \\ C & \neq & 0 \\ A_1 & \neq & 0 \\ A_2 & \neq & 0 \\ B_1=B_2 & = & 0 \end{array}\right. . \tag{4.28}$$

Logo as funções desejadas são $f_0(x_0,x_1,x_2)=CA_1A_2e^{x_0}\cos\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right)$, isto é,

$$f_0(x_0,x_1,x_2)=e^{x_0}\cos\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right).$$

Sendo $f_1(x_0,x_1,x_2)=-\partial_1 f_0$ e $f_2(x_0,x_1,x_2)=-\partial_2 f_0$ as componentes f_1 e f_2 são

$$f_1(x_0,x_1,x_2)=e^{x_0}\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$f_2(x_0,x_1,x_2) = e^{x_0}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right).$$

Finalmente concluímos que a solução da equação diferencial $\partial_z f = f$ com o valor inicial $f(0) = 1$ e admitindo um comportamento simétrico em relação a x_1 e x_2 expresso na escolha de $\lambda = -\frac{1}{2}$ é a *função exponencial generalizada*

$$EXP(x_0,x_1,x_2) = e^{x_0}\left[\cos\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right)e_1 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right)e_2\right].$$

Esta função possui as seguintes propriedades onde salientam que se trata de uma função exponencial generalizada: $EXP'(\lambda x) = \lambda EXP(\lambda x), x \in \mathbb{R}^3$ e $EXP(x_0,0,0) = e^{x_0}, x_0 \in \mathbb{R}^3$.

O nosso objectivo agora é obter uma representação numa série hipercomplexa desta função exponencial. Aplica-se para isso o processo descrito no fim da Secção 3.3 que utiliza essencialmente a extensão de Cauchy-Kowalewskaya. A restrição ao hiperplano $x_0 = 0$ resulta em

$$EXP(0,x_1,x_2) = \cos\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right)e_1 +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right)e_2.$$

Usando as relações bem conhecidas das funções seno e co-seno para argumentos em forma de somas ou diferenças obtemos

$$EXP(x_0,x_1,x_2) = \frac{1}{2}\left[e^{x_0}\left(\cos\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right) + \cos\left(\frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{e_1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) - \frac{e_2}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right)\right)\right]$$

$EXP(x_0,x_1,x_2) = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$

onde $\varepsilon_1 = e^{x_0}\left[\cos\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right)\right]$ e $\varepsilon_2 = e^{x_0}\left[\cos\left(\frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{e_1-e_2}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right)\right]$.

ε_1 é uma função monogénica conhecida em Malonek [10]. Iremos verificar que ε_2 também é uma função monogénica. Para provar isto basta verificar que $D\varepsilon_2 = 0$, onde $D = \frac{\partial}{\partial x_0} + e_1\frac{\partial}{\partial x_1} + e_2\frac{\partial}{\partial x_2}$. Vamos começar por efectuar as derivadas parciais.

$$\frac{\partial}{\partial x_0} = e^{x_0}\left[\cos\left(\frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{e_1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) - \frac{e_2}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{e^{x_0}}{\sqrt{2}}\left[-\sin\left(\frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{e_1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) - \frac{e_2}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{e^{x_0}}{\sqrt{2}}\left[\sin\left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}\right) - \frac{e_1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{e_2}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}\right)\right].$$

Sendo assim,

$$D\varepsilon_2 = e^{x_0}\left[\cos\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) + \tfrac{e_1}{\sqrt{2}}\sin\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) - \tfrac{e_2}{\sqrt{2}}\sin\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right)\right] + \tfrac{e_1 e^{x_0}}{\sqrt{2}}\left[-\sin\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) + \right.$$
$$\left. + \tfrac{e_1}{\sqrt{2}}\cos\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) - \tfrac{e_2}{\sqrt{2}}\cos\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right)\right] + \tfrac{e_2 e^{x_0}}{\sqrt{2}}\left[\sin\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) - \tfrac{e_1}{\sqrt{2}}\cos\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) + \tfrac{e_2}{\sqrt{2}}\cos\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right)\right] =$$

$$= e^{x_0}\left[\cos\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) + \tfrac{e_1}{\sqrt{2}}\sin\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) - \tfrac{e_2}{\sqrt{2}}\sin\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right)\right] - e_1\tfrac{e^{x_0}}{\sqrt{2}}\sin\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) - \tfrac{e^{x_0}}{2}\cos\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) -$$
$$- \tfrac{e_1 e_2}{2}e^{x_0}\cos\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) + e_2\tfrac{e^{x_0}}{\sqrt{2}}\sin\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) - \tfrac{e^{x_0}}{2}\cos\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) - \tfrac{e_2 e_1}{2}e^{x_0}\cos\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \tfrac{e_1 e_2}{2}e^{x_0}\cos\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) + e_2\tfrac{e^{x_0}}{\sqrt{2}}\sin\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) - \tfrac{e^{x_0}}{2}\cos\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) - \tfrac{e_2 e_1}{2}e^{x_0}\cos\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= e^{x_0}\cos\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) - e^{x_0}\cos\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) - \tfrac{e_1 e_2}{2}e^{x_0}\cos\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) + \tfrac{e_1 e_2}{2}e^{x_0}\cos\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

Provámos que ε_2 é uma função monogénica, logo $EXP(x_0, x_1, x_2) = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ é a soma de duas funções monogénicas.

Nota: Se observarmos que $\left(\frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{e_1-e_2}{\sqrt{2}}\right)^2 = -1$ e introduzirmos $\frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}} = i_1$ e $\frac{e_1-e_2}{\sqrt{2}} = i_2$ análogamente $\frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}} = y_1$ e $\frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}} = y_2$ evidenciamos que

$$\varepsilon_1 = e^{x_0}\Big[\cos(y_1) + i_1\sin(y_1)\Big] \quad e \quad \varepsilon_2 = e^{x_0}\Big[\cos(y_2) + i_2\sin(y_2)\Big].$$

#

Seguidamente, o nosso objectivo é encontrar uma fórmula análoga a (4.14).

$$EXP(x_0, x_1, x_2) = \tfrac{e^{x_0}}{2}\left[\cos\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) + \cos\left(\tfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right) + \tfrac{e_1}{\sqrt{2}}\left[\sin\left(\tfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right) + \sin\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \tfrac{e_2}{\sqrt{2}}\left[\sin\left(\tfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right) - \sin\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right)\right]\right] =$$

$$= \tfrac{e^{x_0}}{2}\left[1 - \tfrac{1}{2!}\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \tfrac{1}{4!}\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right)^4 - \ldots + 1 - \tfrac{1}{2!}\left(\tfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \tfrac{1}{4!}\left(\tfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right)^4 - \ldots + \tfrac{e_1}{\sqrt{2}}\left[\left(\tfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right) - \right.\right.$$
$$- \tfrac{1}{3!}\left(\tfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right)^3 + \tfrac{1}{5!}\left(\tfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right)^5 - \ldots + \left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) - \tfrac{1}{3!}\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right)^3 + \tfrac{1}{5!}\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right)^5 - \ldots\Big] + \tfrac{e_2}{\sqrt{2}}\left[\left(\tfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right) - \right.$$
$$\left.\left. - \tfrac{1}{3!}\left(\tfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right)^3 + \tfrac{1}{5!}\left(\tfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right)^5 - \ldots - \left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) + \tfrac{1}{3!}\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right)^3 - \tfrac{1}{5!}\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right)^5 + \ldots\right]\right] =$$

$$= \tfrac{e^{x_0}}{2}\Bigg[2 - \tfrac{1}{2!}\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \tfrac{1}{4!}\tfrac{1}{2}\left(x_1^4 + 6x_1^2x_2^2 + x_2^4\right) - \ldots + \tfrac{e_1}{2}\Bigg[2x_1 - \tfrac{1}{3!}\left(x_1^3 + 3x_1x_2^2\right) +$$
$$+\tfrac{1}{5!}\tfrac{1}{2}\left(x_1^5 + 10x_1^3x_2^2 + 5x_1x_2^4\right) - \ldots\Bigg] +$$
$$+\tfrac{e_2}{2}\left[2x_2 - \tfrac{1}{3!}\left(x_2^3 + 3x_1^2x_2\right) + \tfrac{1}{5!}\tfrac{1}{2}\left(x_2^5 + 10x_1^2x_2^3 + 5x_1^4x_2\right) - \ldots\right]\Bigg].$$

Uma vez que $e^{x_0}|_{x_0=0}$ é igual a um, a passagem para a forma de série em termos de z_1 e z_2 (Secção 3.3) implica

$$\begin{aligned} EXP(z_1,z_2) &= 1 - \frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left(z_1^2 + z_2^2\right) + \frac{1}{4!}\frac{1}{4}\left(z_1^4 + 6z_1^2 \times z_2^2 + z_2^4\right) - \ldots + \\ &+ \frac{e_1}{2}\left[z_1 - \frac{1}{3!}\frac{1}{2}\left(z_1^3 + 3z_1 \times z_2^2\right) + \frac{1}{5!}\frac{1}{4}\left(z_1^5 + 10z_1^3 \times z_2^2 + 5z_1 \times z_2^4\right) - \ldots\right] + \\ &+ \frac{e_2}{2}\left[z_2 - \frac{1}{3!}\frac{1}{2}\left(z_2^3 + 3z_1^2 \times z_2\right) + \frac{1}{5!}\frac{1}{4}\left(z_2^5 + 10z_1^2 \times z_2^3 + 5z_1^4 \times z_2\right) - \ldots\right]. \end{aligned}$$

De uma maneira mais precisa, a fórmula geral da série exponencial em termos de z_1 e z_2 é

$$\begin{aligned} EXP(z_1,z_2) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\frac{1}{(\sqrt{2})^{2n}}\sum_{s=0}^{n}\binom{2n}{2s}z_1^{2n-2s} \times z_2^{2s} + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{(\sqrt{2})^{2n+2}}\left[\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}z_1^{2n+1-2k} \times z_2^{2k}\right]e_1 + \right. \\ &+ \left.\left[\sum_{m=0}^{n}\binom{2n+1}{2m}z_1^{2m} \times z_2^{2n+1-2m}\right]e_2\right] \end{aligned}$$

onde $\binom{2n}{2s} = \frac{(2n)!}{(2n-2s)!(2s)!}$, $\binom{2n+1}{2k} = \frac{(2n+1)!}{(2n+1-2k)!(2k)!}$ e $\binom{2n+1}{2m} = \frac{(2n+1)!}{(2n+1-2m)!(2m)!}$.

4.2.2 Co-seno generalizado

De modo análogo, obtemos outras funções elementares como o co-seno e o seno que são tratadas neste ponto. Neste caso consideremos uma equação (4.16) da forma especial $(\partial_z f)^2 = -f$ como é o caso do co-seno com argumento real e que satisfaz a equação diferencial $y'' + y = 0$ com os valores iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$. Se $(\partial_z f)^2 = -f$ então $\frac{1}{2}\left(\partial_0 - e_1\partial_1 - e_2\partial_2\right)\frac{1}{2}\left(\partial_0 - e_1\partial_1 - e_2\partial_2\right)(f_0 + f_1e_1 + f_2e_2) = -(f_0 + f_1e_1 + f_2e_2)$, que é equivalente ao sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl}\frac{1}{4}\left(\partial_0^2 f_0-\partial_1^2 f_0-\partial_2^2 f_0+2\partial_0\partial_1 f_1+2\partial_0\partial_2 f_2\right) & = & -f_0\\ \frac{1}{4}\left(\partial_0^2 f_1-\partial_1^2 f_1-\partial_2^2 f_1-2\partial_0\partial_1 f_0\right) & = & -f_1\\ \frac{1}{4}\left(\partial_0^2 f_2-\partial_1^2 f_2-\partial_2^2 f_2-2\partial_0\partial_2 f_0\right) & = & -f_2\\ \frac{1}{4}\left(-2\partial_0\partial_1 f_2+2\partial_0\partial_2 f_1\right) & = & 0\end{array}\right. . \tag{4.29}$$

Como estamos a trabalhar com funções monogénicas temos $\partial_{\overline{z}} f = 0$, o que nos dá relações análogas a (4.20). Seguindo o mesmo raciocínio da função exponencial, temos de resolver agora a equação

$$\partial_0^2 f = -f \qquad com \quad f(0) = 1 \quad e \quad f'(0) = 0, \tag{4.30}$$

ou seja,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} = -f \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_0^2} e_1 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_0^2} e_2 = -f_0 - f_1 e_1 - f_2 e_2 \tag{4.31}$$

desde que f_k sejam funções com valores reais. Resulta assim um sistema de segunda ordem

$$\left\{\begin{array}{rcl}\partial_0^2 f_0 & = & -f_0\\ \partial_0^2 f_1 & = & -f_1\\ \partial_0^2 f_2 & = & -f_2\end{array}\right. . \tag{4.32}$$

A primeira equação do sistema (4.32) implica que a primeira componente de f tem a forma

$$f_0(x_0, x_1, x_2) = -\varphi(x_0)\varphi(x_1, x_2) \tag{4.33}$$

para funções com valores reais φ.

Derivando $\partial_0 f_0 = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2$ em relação a x_0 obtemos $\partial_0^2 f_0 = \partial_0\partial_1 f_1 + \partial_0\partial_2 f_2$ e das equações (4.32) resulta

$$-f_0 = \partial_0\partial_1 f_1 + \partial_0\partial_2 f_2.$$

Derivando $\partial_0 f_1 = -\partial_1 f_0$ em relação a x_1 obtemos $\partial_0\partial_1 f_1 = -\partial_1^2 f_0$ e de modo análogo, derivando $\partial_0 f_2 = -\partial_2 f_0$ em relação a x_2 obtemos $\partial_0\partial_2 f_2 = -\partial_2^2 f_0$. Deste modo

$$f_0 = \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_2^2}. \tag{4.34}$$

Assim, de (4.33) depreendemos que

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = \varphi, \quad ou \;\; seja \;\; \triangle\varphi = \varphi \; . \tag{4.35}$$

De $\partial_0^2 f_0 = -f_0$ temos $\varphi_0^{''}\varphi_1\varphi_2 = -\varphi_0\varphi_1\varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_0^{''} + \varphi_0 = 0$. Toda a solução $y(x)$ da equação diferencial $y'' + \lambda y = 0$ é da forma

$$y(x) = F_1 \cos\sqrt{\lambda}x + F_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Nesse caso, uma solução é $\varphi_0(x_0) = C(A_1\cos(x_0) + A_2\sin(x_0))$. Temos $\varphi_0(0) \neq 0$ porque $f(0,0,0) = 1$, logo $\varphi_0(0) = CA_1 \neq 0$ e $A_2 = 0$. Tal como no caso anterior $\varphi(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)$, e como $\triangle\varphi = \varphi$ advem $\varphi_1^{''}(x_1)\varphi_2(x_2) + \varphi_1(x_1)\varphi_2^{''}(x_2) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)$. Dividindo ambos os membros por $\varphi_1\varphi_2$ obtemos $\frac{\varphi_1^{''}}{\varphi_1} + \frac{\varphi_2^{''}}{\varphi_2} = 1$.

Neste caso estamos perante equações diferenciais parciais de segunda ordem. A última expressão mostra que $\frac{\varphi_1^{''}(x_1)}{\varphi_1(x_1)}$ e $\frac{\varphi_2^{''}(x_2)}{\varphi_2(x_2)}$ são constantes. Considerando $\frac{\varphi_1^{''}}{\varphi_1} = \lambda = constante$ evidenciamos que $\frac{\varphi_2^{''}}{\varphi_2} = 1 - \lambda$. Por razões de simetria escolhemos $\lambda = 1 - \lambda \Leftrightarrow \lambda + \lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$. Então $\frac{\varphi_1^{''}}{\varphi_1} = \lambda_1 \Leftrightarrow \varphi_1^{''} = \frac{1}{2}\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_1^{''} - \frac{1}{2}\varphi_1 = 0$. Toda a solução $y(x)$ da equação diferencial $y'' - \lambda y = 0$ é da forma

$$y(x) = Z_1 \cosh\sqrt{\lambda}x + Z_2 \sinh\sqrt{\lambda}x.$$

Sendo assim as soluções são:

$$\varphi_1(x_1) = c_1 \cosh\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right) + c_2 \sinh\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)$$

e

$$\varphi_2(x_2) = B_1 \cosh\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) + B_2 \sinh\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right).$$

Derivando $\varphi_1(x_1)$ em relação a x_1 e $\varphi_2(x_2)$ em relação a x_2, substituindo x_1 e x_2 por zero e de acordo com as condições iniciais deduzimos as relações

$$\begin{cases} CA_1c_1B_1 &= -1 \\ CA_1c_2B_1 &= 0 \\ CA_1c_1B_2 &= 0 \\ c_2 &= 0 \\ B_2 &= 0 \end{cases} \tag{4.36}$$

donde resulta que

$$\varphi(x_1, x_2) = c_1B_1 \cosh\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)\cosh\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right).$$

Deste modo temos que

$$f_0(x_0,x_1,x_2) = -CA_1c_1B_1\cos(x_0)\cosh\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)\cosh\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right).$$

Da primeira relação do sistema (4.36) depreendemos que

$$f_0(x_0,x_1,x_2) = \cos(x_0)\cosh\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)\cosh\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right).$$

Derivando $\partial_0 f_1 + \partial_1 f_0 = 0$ em relação a x_0 e tendo em conta as equações (4.32) obtemos $\partial_0^2 f_1 + \partial_0\partial_1 f_0 = 0 \Leftrightarrow f_1 = \partial_0\partial_1 f_0$, de modo análogo derivando $\partial_0 f_2 + \partial_2 f_0 = 0$ em relação a x_0 e tendo em conta as equações (4.32) obtemos $\partial_0^2 f_2 + \partial_0\partial_2 f_0 = 0 \Leftrightarrow f_2 = \partial_0\partial_2 f_0$.

Podemos assim concluir que a solução da equação diferencial $(\partial_z f)^2 = -f$ com os valores iniciais $f(0) = 1$ e $f'(0) = 0$ e admitindo um comportamento simétrico em relação a x_1, x_2 expresso na escolha de $\lambda = \frac{1}{2}$ é a função *co-seno generalizado*

$$\begin{aligned} COS(x_0,x_1,x_2) = \cos(x_0)\cosh\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)\cosh\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x_0)\sinh\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)\cosh\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right)e_1 - \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x_0)\cosh\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)\sinh\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right)e_2. \end{aligned}$$

O nosso objectivo agora é obter uma representação numa série hipercomplexa desta função co-seno. Aplica-se para isso o processo descrito no fim da Secção 3.3 que utiliza essencialmente a extensão de Cauchy-Kowalewskaya. A restrição ao hiperplano $x_0 = 0$ resulta em

$$COS(0,x_1,x_2) \;=\; \cosh\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)\cosh\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right).$$

Usando as relações bem conhecidas das funções seno hiperbólico e co-seno hiperbólico para argumentos em forma de somas e diferenças obtemos

$$COS(x_0,x_1,x_2) \;=\; \frac{1}{2}\cos(x_0)\left[\cosh\left(\frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) + \cosh\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right)\right].$$

A função co-seno complexa é a única definida em $\mathbb{C}$, cuja série de potências coincide no eixo real com a série de potências da função co-seno real:

$$\cos(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j z^{2j}}{(2j)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots$$

Partindo desta série, o nosso objectivo resume-se em encontrar uma série análoga a esta.

$$\begin{aligned} COS(x_0,x_1,x_2) = \tfrac{1}{2}\cos(x_0)\Bigg[1 + \tfrac{1}{2!}\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \tfrac{1}{4!}\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right)^4 + \ldots + 1 + \tfrac{1}{2!}\left(\tfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \\ + \tfrac{1}{4!}\left(\tfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right)^4 + \ldots + \Bigg] = \tfrac{1}{2}\cos x_0\left[2 + \tfrac{1}{2!}\left(x_1^2+x_2^2\right) + \tfrac{1}{4!}\tfrac{1}{2}\left(x_1^4 + 6x_1^2x_2^2 + x_2^4\right) + \ldots\right]. \end{aligned}$$

Uma vez que $\cos(x_0)|_{x_0=0}$ é igual a um, a passagem para a forma da série em termos de z_1 e z_2 (Secção 3.3) implica

$$COS(z_1, z_2) = 1 + \frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left(z_1^2 + z_2^2\right) + \frac{1}{4!}\frac{1}{4}\left(z_1^4 + 6z_1^2 \times z_2^2 + z_2^4\right) + \dots.$$

De uma maneira mais precisa, a fórmula geral da série co-seno em termos de z_1 e z_2 é

$$COS(z_1, z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\frac{1}{(\sqrt{2})^{2n}} \sum_{s=0}^{n} \binom{2n}{2s} z_1^{2n-2s} \times z_2^{2s}$$

onde $\binom{2n}{2s} = \frac{(2n)!}{(2n-2s)!(2s)!}$.

4.2.3 Seno generalizado

Os cálculos para a função seno são semelhantes aos do caso do co-seno apenas mudam as condições iniciais. Seguidamente temos os valores iniciais $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$ donde $\varphi_0^{'}(x_0) \neq 0$, ou seja $\varphi_0^{'}(0) = -CA_2 \neq 0$, logo $A_1 = 0$ e ainda depreendemos as relações

$$\left\{\begin{array}{rcl} CA_2c_2B_1 & = & 0 \\ CA_2c_1B_2 & = & 0 \\ CA_2c_1B_1 & = & -1 \\ c_2 & = & 0 \\ B_2 & = & 0 \end{array}\right. . \tag{4.37}$$

Sendo assim resulta que

$$f_0(x_0, x_1, x_2) = \sin(x_0)\cosh\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)\cosh\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right).$$

Finalmente concluímos assim que a solução da equação diferencial $(\partial_z f)^2 = -f$ com os valores iniciais $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$ e admitindo um comportamento simétrico em relação a x_1, x_2 expresso na escolha de $\lambda = \frac{1}{2}$ é a função *seno generalizado*:

$$SIN(x_0, x_1, x_2) = \sin(x_0)\cosh\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)\cosh\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x_0)\sinh\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)\cosh\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right)e_1 + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x_0)\cosh\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)\sinh\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right)e_2.$$

O nosso objectivo agora é obter uma representação numa série hipercomplexa desta função seno. Aplica-se para isso o processo descrito no fim da Secção 3.3 que utiliza essencialmente a extensão de Cauchy-Kowalewskaya. A restrição ao hiperplano $x_0 = 0$ resulta em

$$SIN(0, x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right) \cosh\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right) \sinh\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) e_2.$$

Usando as relações bem conhecidas das funções seno hiperbólico e co-seno hiperbólico para argumentos em forma de somas ou diferenças obtemos

$$SIN(x_0, x_1, x_2) = \frac{1}{2} \cos(x_0) \left[\frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}} \sinh\left(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{e_1 - e_2}{\sqrt{2}} \sinh\left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}\right) \right].$$

A função seno complexa é a única definida em $\mathbb{C}$, cuja série de potências coincide no eixo real com a série de potências da função seno real:

$$\sin(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j+1}}{(2j+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots$$

Partindo desta série, o nosso objectivo resume-se em encontrar uma série análoga a esta.

$$SIN(x_0, x_1, x_2) =$$

$$= \tfrac{1}{2} \cos x_0 \left[\tfrac{e_1}{\sqrt{2}} \left[\sinh\left(\tfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right) + \sinh\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) \right] + \tfrac{e_2}{\sqrt{2}} \left[\sinh\left(\tfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right) - \sinh\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) \right] \right] =$$

$$= \tfrac{1}{2} \cos x_0 \left[\tfrac{e_1}{\sqrt{2}} \left[\left(\tfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right) + \tfrac{1}{3!} \left(\tfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right)^3 + \tfrac{1}{5!} \left(\tfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right)^5 + \ldots + \left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) + \tfrac{1}{3!} \left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right)^3 + \right.\right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{5!} \left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right)^5 + \ldots \right] + \tfrac{e_2}{\sqrt{2}} \left[\left(\tfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right) + \tfrac{1}{3!} \left(\tfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right)^3 + \tfrac{1}{5!} \left(\tfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right)^5 + \ldots - \left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) - \right.$$

$$\left.\left. - \tfrac{1}{3!} \left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right)^3 - \tfrac{1}{5!} \left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right)^5 - \ldots \right] \right] =$$

$$= \tfrac{1}{2} \cos x_0 \left[\tfrac{e_1}{2} \left[(2x_1) + \tfrac{1}{3!} \left(x_1^3 + 3x_1 x_2^2\right) + \tfrac{1}{5!} \tfrac{1}{2} \left(x_1^5 + 10 x_1^3 x_2^2 + 5 x_1 x_2^4\right) + \ldots \right] + \tfrac{e_2}{2} \left[(2x_2) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \tfrac{1}{3!} \left(3x_1^2 x_2 + x_2^3\right) + \tfrac{1}{5!} \tfrac{1}{2} \left(5x_1^4 x_2 + 10 x_1^2 x_2^3 + x_2^5\right) + \ldots \right] \right].$$

Uma vez que $\cos(x_0)|_{x_0=0}$ é igual a um, a passagem para a forma de série em termos de z_1 e z_2 (Secção 3.3) implica

$$\begin{aligned} SIN(z_1, z_2) \quad &= \quad \frac{e_1}{2} \left[z_1 + \frac{1}{3!} \frac{1}{2} \left(z_1^3 + 3 z_1 \times z_2^2\right) + \frac{1}{5!} \frac{1}{4} \left(z_1^5 + 10 z_1^3 \times z_2^2 + 5 z_1 \times z_2^4\right) + \ldots \right] + \\ &+ \quad \frac{e_2}{2} \left[z_2 + \frac{1}{3!} \frac{1}{2} \left(3 z_1^2 \times z_2 + z_2^3\right) + \frac{1}{5!} \frac{1}{4} \left(5 z_1^4 \times z_2 + 10 z_1^2 \times z_2^3 + z_2^5\right) + \ldots \right]. \end{aligned}$$

De uma maneira mais precisa, a fórmula geral da série seno em termos de z_1 e z_2 é

$$\begin{aligned} SIN(z_1, z_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{(\sqrt{2})^{2n+2}} \left[\left[\sum_{s=0}^{n} \binom{2n+1}{2s} z_1^{2n+1-2s} \times z_2^{2s} \right] e_1 + \right. \\ &+ \left. \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} z_1^{2k} \times z_2^{2n+1-2k} \right] e_2 \right] \end{aligned}$$

onde $\binom{2n+1}{2s} = \frac{(2n+1)!}{(2n+1-2s)!(2s)!}$ e $\binom{2n+1}{2k} = \frac{(2n+1)!}{(2n+1-2k)!(2k)!}$.

4.2.4 Co-seno hiperbólico generalizado

Debruçemo-nos agora numa equação (4.16) da forma especial $(\partial_z f)^2 = f$ como é o caso do co-seno hiperbólico com argumento real e que satisfaz a equação diferencial $y'' - y = 0$ com os valores iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$. Se $(\partial_z f)^2 = f$ então resulta que

$$\frac{1}{2}\left(\partial_0 - e_1\partial_1 - e_2\partial_2\right)\frac{1}{2}\left(\partial_0 - e_1\partial_1 - e_2\partial_2\right)\left(f_0 + f_1e_1 + f_2e_2\right) = f_0 + f_1e_1 + f_2e_2,$$

que é equivalente ao sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{4}\left(\partial_0^2 f_0 - \partial_1^2 f_0 - \partial_2^2 f_0 + 2\partial_0\partial_1 f_1 + 2\partial_0\partial_2 f_2\right) &=& f_0 \\ \frac{1}{4}\left(\partial_0^2 f_1 - \partial_1^2 f_1 - \partial_2^2 f_1 - 2\partial_0\partial_1 f_0\right) &=& f_1 \\ \frac{1}{4}\left(\partial_0^2 f_2 - \partial_1^2 f_2 - \partial_2^2 f_2 - 2\partial_0\partial_2 f_0\right) &=& f_2 \\ \frac{1}{4}\left(-2\partial_0\partial_1 f_2 + 2\partial_0\partial_2 f_1\right) &=& 0 \end{array} \right. . \tag{4.38}$$

Como estamos a trabalhar com funções monogénicas temos $\partial_{\bar{z}} f = 0$, assim obtemos as relações (4.20). Seguindo o mesmo raciocínio da função exponencial, temos de resolver agora a equação

$$\partial_0^2 f = f \quad com \quad f(0) = 1 \;\; e \;\; f'(0) = 0 \tag{4.39}$$

ou seja,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} = f \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_0^2} e_1 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_0^2} e_2 = f_0 + f_1 e_1 + f_2 e_2, \tag{4.40}$$

desde que f_k sejam funções com valores reais. Deste modo obtemos um sistema de segunda ordem

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_0^2} &=& f_0 \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_0^2} &=& f_1 \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_0^2} &=& f_2 \end{array} \right. . \tag{4.41}$$

A primeira equação do sistema (4.41) implica que a primeira componente de f tem a forma

$$f_0(x_0, x_1, x_2) = \varphi(x_0)\varphi(x_1, x_2) \tag{4.42}$$

para funções com valores reais φ.

Derivando $\partial_0 f_0 = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2$ em relação a x_0 obtemos $\partial_0^2 f_0 = \partial_0\partial_1 f_1 + \partial_0\partial_2 f_2$ e das equações (4.41) concluímos que

$$f_0 = \partial_0\partial_1 f_1 + \partial_0\partial_2 f_2. \tag{4.43}$$

Derivando $\partial_0 f_1 = -\partial_1 f_0$ em relação a x_1 obtemos $\partial_0\partial_1 f_1 = -\partial_1^2 f_0$, de modo análogo, derivando $\partial_0 f_2 = -\partial_2 f_0$ em relação a x_2 obtemos $\partial_0\partial_2 f_2 = -\partial_2^2 f_0$. Deste modo resulta que

$$f_0 = -\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_2^2}. \tag{4.44}$$

Tendo em conta (4.42) segue-se que

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = \varphi \Leftrightarrow \Delta\varphi = -\varphi. \tag{4.45}$$

De $\partial_0^2 f_0 = f_0 \Leftrightarrow \varphi_0^{''}\varphi_1\varphi_2 = \varphi_0\varphi_1\varphi_2$, obtemos $\varphi_0^{''} - \varphi_0 = 0$. Toda a solução $y(x)$ da equação diferencial $y'' - \lambda y = 0$ é da forma

$$y(x) = L_1 \cosh\sqrt{\lambda}x + L_2 \sinh\sqrt{\lambda}x,$$

então uma solução deste tipo de equações é $\varphi_0(x_0) = C(A_1\cosh(x_0) + A_2\sinh(x_0))$. Sendo assim $\varphi_0(0) \neq 0$ porque $f(0) = 1$, logo $\varphi_0(0) = CA_1 \neq 0$ e $A_2 = 0$.

Por outro lado temos $\varphi(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)$ e tendo em conta que $\triangle\varphi = -\varphi$, obtemos

$$\varphi_1^{''}(x_1)\varphi_2(x_2) + \varphi_1(x_1)\varphi_2^{''}(x_2) = -\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2).$$

De modo análogo à função exponencial generalizada acabamos com duas equações diferenciais ordinárias $\varphi_1^{''}(x_1) + \frac{1}{2}\varphi_1(x_1) = 0$ e $\varphi_2^{''}(x_2) + \frac{1}{2}\varphi_2(x_2) = 0$. Toda a solução $y(x)$ da equação diferencial $y'' + \lambda y = 0$ é da forma

$$y(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Então as soluções gerais são do tipo

$$\varphi_1(x_1) = D_1 \cos\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right) + E_1 \sin\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right),$$

e

$$\varphi_2(x_2) = D_2 \cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) + E_2 \sin\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right).$$

Derivando $\varphi_1(x_1)$ em relação a x_1 e $\varphi_2(x_2)$ em relação a x_2, substituindo x_1 e x_2 por zero e de acordo com as condições iniciais depreendemos as seguintes relações

$$\begin{cases} CA_1D_1D_2 &= 1 \\ CA_1E_1D_2 &= 0 \\ CA_1D_1E_2 &= 0 \\ E_1 &= 0 \\ E_2 &= 0 \end{cases}. \tag{4.46}$$

Deste modo obtemos que

$$\varphi(x_1, x_2) = D_1 \cos\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right) D_2 \cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right).$$

Assim deduzimos que

$$f_0(x_0, x_1, x_2) = CA_1D_1D_2 \cosh(x_0) \cos\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right).$$

Da primeira equação do sistema (4.46) resulta que

$$f_0(x_0, x_1, x_2) = \cosh(x_0) \cos\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right).$$

Derivando $\partial_0 f_1 + \partial_1 f_0 = 0$ em relação a x_0 temos

$$\partial_0^2 f_1 + \partial_0\partial_1 f_0 = 0 \Leftrightarrow f_1 = -\partial_0\partial_1 f_0.$$

De modo análogo derivando $\partial_0 f_2 + \partial_2 f_0 = 0$ em relação a x_0 e tendo em conta as equações anteriores obtemos

$$\partial_0^2 f_2 + \partial_0\partial_2 f_0 = 0 \Leftrightarrow f_2 = -\partial_0\partial_2 f_0.$$

Concluímos assim que a solução da equação diferencial $(\partial_z f)^2 = f$ com os valores iniciais $f(0) = 1$ e $f'(0) = 0$ e admitindo um comportamento simétrico em relação a x_1 e x_2 na escolha de $\lambda = -\frac{1}{2}$ é a função *co-seno hiperbólico generalizado*

$$\begin{aligned} COSH(x_0, x_1, x_2) = {} & \cosh(x_0) \cos\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(x_0) \sin\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) e_1 + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(x_0) \cos\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) e_2. \end{aligned}$$

O nosso objectivo agora é obter uma representação numa série hipercomplexa desta função co-seno hiperbólico. Aplica-se para isso o processo descrito no final da Secção 3.3 que utiliza essencialmente a extensão de Cauchy-Kowalewskaya. A restrição ao hiperplano $x_0 = 0$ resulta em

$$COSH(0, x_1, x_2) = \cos\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right).$$

Usando as relações bem conhecidas das funções seno e co-seno para argumentos em forma de somas ou diferenças obtemos

$$COSH(x_0, x_1, x_2) = \frac{1}{2}\cosh(x_0)\left[\cos\left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}\right) + \cos\left(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}\right)\right].$$

A função co-seno hiperbólico complexa é a única definida em $\mathbb{C}$, cuja série de potências coincide no eixo real com a série de potências da função co-seno hiperbólico real:

$$\cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots$$

Partindo desta série, o nosso objectivo resume-se em encontrar uma série análoga a esta.

$$\begin{aligned} COSH(x_0, x_1, x_2) &= \frac{1}{2}\cosh(x_0)\left[1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}\right)^4 - \ldots + \right. \\ &+ \left. 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}\right)^4 - \ldots\right] = \\ &= \frac{1}{2}\cosh(x_0)\left[2 - \frac{1}{2!}\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \frac{1}{4!}\frac{1}{2}\left(x_1^4 + 6x_1^2x_2^2 + x_2^4\right) - \ldots\right]. \end{aligned}$$

Uma vez que $\cosh(x_0)|_{x_0=0}$ é igual a um, a passagem para a forma da série em termos de z_1 e z_2 (Secção 3.3) implica

$$COSH(z_1, z_2) = 1 - \frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left(z_1^2 + z_2^2\right) + \frac{1}{4!}\frac{1}{4}\left(z_1^4 + 6z_1^2 \times z_2^2 + z_2^4\right) - \ldots.$$

De uma maneira mais precisa, a fórmula geral da série co-seno hiperbólico em termos de z_1 e z_2 é

$$COSH(z_1, z_2) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!}\frac{1}{(\sqrt{2})^{2n}} \sum_{s=0}^{n} \binom{2n}{2s} z_1^{2n-2s} \times z_2^{2s}$$

onde $\binom{2n}{2s} = \frac{(2n)!}{(2n-2s)!(2s)!}$.

4.2.5 Seno hiperbólico generalizado

Os cálculos para a função seno hiperbólico são semelhantes aos do caso do co-seno hiperbólico apenas mudam as condições iniciais. Agora como valores iniciais temos $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$, donde $\varphi_0^{'}(x_0) \neq 0$. Assim, $\varphi_0^{'}(0) = CA_2 \neq 0$ e $A_1 = 0$. Depreendemos ainda as relações

$$\begin{cases} CA_2D_1D_2 & = & 1 \\ CA_2E_1D_2 & = & 0 \\ CA_2D_1E_2 & = & 0 \\ D_1 & \neq & 0 \\ D_2 & \neq & 0 \\ E_1 = E_2 & = & 0 \end{cases}. \tag{4.47}$$

Neste caso

$$f_0(x_0, x_1, x_2) = \sinh(x_0) \cos\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right).$$

Deste modo concluímos que a solução da equação diferencial $(\partial_z f)^2 = f$ com os valores iniciais $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$ e admitindo um comportamento simétrico em relação a x_1 e x_2 expresso na escolha de $\lambda = -\frac{1}{2}$ é a função *seno-hiperbólico generalizado*

$$\begin{aligned} SINH(x_0, x_1, x_2) = \sinh(x_0) \cos\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh(x_0) \sin\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) e_1 + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh(x_0) \cos\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) e_2. \end{aligned}$$

O nosso objectivo agora é obter uma representação numa série hipercomplexa desta função seno hiperbólico. Aplica-se para isso o processo descrito no fim da Secção 3.3 que utiliza essencialmente a extensão de Cauchy-Kowalewskaya. A restrição ao hiperplano $x_0 = 0$ resulta em

$$SINH(0, x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) e_2.$$

Usando as relações bem conhecidas das funções seno e co-seno para argumentos em forma de somas ou diferenças obtemos

$$SINH(x_0, x_1, x_2) \quad = \quad \frac{1}{2} \cosh(x_0) \left[\frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{e_1 - e_2}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}\right) \right].$$

A função seno hiperbólico complexa é a única definida em $\mathbb{C}$, cuja série de potências coincide no eixo real com a série de potências da função seno hiperbólico real:

$$\sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

Partindo desta série, o nosso objectivo resume-se em encontrar uma série análoga a esta.

$$SINH(x_0, x_1, x_2) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\cosh x_0 \left[\tfrac{e_1}{\sqrt{2}} \left[\sin\left(\tfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right) + \sin\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) \right] + \tfrac{e_2}{\sqrt{2}} \left[\sin\left(\tfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right) - \sin\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) \right] \right] =$$

$$= \tfrac{1}{2}\cosh x_0 \left[\tfrac{e_1}{\sqrt{2}} \left[\left(\tfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right) - \tfrac{1}{3!}\left(\tfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right)^3 + \tfrac{1}{5!}\left(\tfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right)^5 - \dots + \left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) - \tfrac{1}{3!}\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right)^3 + \right.\right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{5!}\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right)^5 - \dots \right] + \tfrac{e_2}{\sqrt{2}} \left[\left(\tfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right) - \tfrac{1}{3!}\left(\tfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right)^3 + \tfrac{1}{5!}\left(\tfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right)^5 - \dots - \left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right) + \right.$$
$$\left.\left. + \tfrac{1}{3!}\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right)^3 - \tfrac{1}{5!}\left(\tfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right)^5 + \dots \right]\right] =$$

$$= \tfrac{1}{2}\cosh x_0 \left[\tfrac{e_1}{2} \left[(2x_1) - \tfrac{1}{3!}\left(x_1^3 + 3x_1x_2^2\right) + \tfrac{1}{5!}\tfrac{1}{2}\left(x_1^5 + 10x_1^3x_2^2 + 5x_1x_2^4\right) - \dots \right] + \tfrac{e_2}{2} \left[(2x_2) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \tfrac{1}{3!}\left(3x_1^2x_2 + x_2^3\right) + \tfrac{1}{5!}\tfrac{1}{2}\left(5x_1^4x_2 + 10x_1^2x_2^3 + x_2^5\right) - \dots \right]\right].$$

Uma vez que $\cosh(x_0)|_{x_0=0}$ é igual a um, a passagem para a forma de série em termos de z_1 e z_2 (Secção 3.3) implica

$$\begin{aligned} SINH(z_1, z_2) \;&=\; \frac{e_1}{2}\left[z_1 - \frac{1}{3!}\frac{1}{2}\left(z_1^3 + 3z_1 \times z_2^2\right) + \frac{1}{5!}\frac{1}{4}\left(z_1^5 + 10z_1^3 \times z_2^2 + 5z_1 \times z_2^4\right) - \dots \right] + \\ &+\; \frac{e_2}{2}\left[z_2 - \frac{1}{3!}\frac{1}{2}\left(3z_1^2 \times z_2 + z_2^3\right) + \frac{1}{5!}\frac{1}{4}\left(5z_1^4 \times z_2 + 10z_1^2 \times z_2^3 + z_2^5\right) - \dots \right]. \end{aligned}$$

De uma maneira mais precisa, a fórmula geral da série seno-hiperbólico em termos de z_1 e z_2 é

$$\begin{aligned} SINH(z_1, z_2) \;&=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{(\sqrt{2})^{2n+2}} \left[\left[\sum_{s=0}^{n} \binom{2n+1}{2s} z_1^{2n+1-2s} \times z_2^{2s} \right] e_1 + \right. \\ &+\; \left. \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} z_1^{2k} \times z_2^{2n+1-2k} \right] e_2 \right] \end{aligned}$$

onde $\binom{2n+1}{2s} = \frac{(2n+1)!}{(2n+1-2s)!(2s)!}$ e $\binom{2n+1}{2k} = \frac{(2n+1)!}{(2n+1-2k)!(2k)!}$.

Conclusão

No primeiro capítulo pudemos observar que as séries de potências formais se podem representar de diversas formas: como uma sucessão infinita $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots$ ou também a nível matricial, isto é, através de uma série de potências formal podemos construir uma matriz triangular infinita superior, onde a primeira linha da matriz corresponde aos coeficientes da série de potências formal. Finalmente, nesta secção, estudámos três séries formais conhecidas: exponencial, binomial e logarítmica.

Dizer que uma série de potências é convergente, significa que se pode substituir z por um número complexo z_0 e calcular $S(z_0)$ através da expressão que define a série, se $S(z_0) = \sum_{k\geq 0} a_k z_0^k$ for convergente.

Uma série de potências formal $Q := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ pode convergir ou divergir, dependendo da escolha de z. A cada série de potências corresponde um círculo de convergência, tal que Q converge se z pertencer ao interior do círculo de convergência e diverge se z pertencer ao exterior do círculo de convergência.

Posteriormente, fizemos uma breve referência às funções holomorfas e analíticas representadas por séries de potências formais e provámos dois grandes teoremas das séries de potências formais: Teorema da Divisão de Rückert e o teorema de Preparação de Weierstrass.

No capítulo três, começámos por definir a álgebra de Clifford e as suas propriedades. De seguida, apresentámos a definição da diferenciabilidade hipercomplexa e relacionámos esta definição com funções monogénicas. Finalmente, fizemos uma breve abordagem à extensão de Cauchy-Kowaleskaya, extensão essa que foi utilizada no capítulo quatro.

Generalizações da teoria das funções holomorfas de uma variável complexa com maiores dimensões têm sido desenvolvidas seguindo uma das 3 linhas clássicas. São elas a generalização da abordagem de Cauchy, baseada na diferenciabilidade hipercomplexa, a abordagem de Weierstrass baseada em séries de potências e a abordagem de Riemann baseada nas equações de Cauchy-Riemann. Como é sabido, estas 3 abordagens são possíveis e equivalentes não apenas na teoria das funções clássicas, mas também na teoria das funções de várias variáveis complexas.

Pela definição do produto permutacional n-ário, é possível definir a diferenciabilidade hipercomplexa como uma exigência para a existência de uma aplicação linear sobre a álgebra de Clifford subjacente e, ainda provar a equivalência para o conceito de monogenecidade baseado na consideração de um sistema generalizado de Cauchy-Riemann. As funções monogénicas são geradas pelas séries de potências permutacionais convergentes.

Enquanto séries de potências formais em duas ou mais variáveis complexas mantêm uma certa analogia com séries de potências formais de uma variável complexa (pelo Teorema de Preparação de Weierstrass), isto já não acontece com séries de potências generalizadas em duas variáveis hipercomplexas devido à Álgebra de Clifford não ser comutativa.

No último capítulo, abordámos a geração de funções elementares monogénicas como soluções de equações diferenciais particulares.

Através da resolução de equações diferenciais hipercomplexas correspondentes é possível obter séries de potências formais hipercomplexas que generalizam as funções elementares (função exponencial, função co-seno, função seno, função co-seno hiperbólico e função seno hiperbólico).

O uso de soluções fundamentais reais (como co-seno, seno, cos-seno hiperbólico, seno hiperbólico) das equações diferenciais ordinárias em vez de soluções fundamentais complexas $e^{\pm\lambda x}$ é motivado pelo facto de as componentes de f (que andávamos à procura) serem também funções com valores reais.

A função exponencial é uma das mais importantes funções da Matemática. Ela gera as funções trigonométricas (como pode ser vista na equação de Euler para análises complexas), e as funções hiperbólicas. Deste modo, qualquer função elementar, excepto as polinomiais, são criadas a partir da função exponencial. A maior importância das funções exponenciais nos campos das ciências é o facto de essas funções serem múltiplas das suas próprias derivadas. A função exponencial resolve a equação diferencial básica $y' = y$, e é por essa razão comummente encontrada em equações diferenciais. Em particular, a solução de equações diferenciais ordinárias pode frequentemente ser escrita em termos de funções exponenciais.

Parece-nos interessante o facto de que as fórmulas das funções generalizadas em termos das variáveis hipercomplexas z_1 e z_2 seguirem os padrões das séries complexas conhecidas.

Um problema importante e ainda por resolver é o estudo das propriedades algébricas do conjunto das séries de potências formais hipercomplexas análogas ás propriedades das séries formais de uma variável complexa que ficará para um trabalho futuro.

Bibliografia

[1] Abhyankar, S.S. A.; *Local Analytic Geometry*, World Scientific, 1964.

[2] Ahlfors, Lars V.; Clifford Numbers and Möbius Transformation in $\mathbb{R}^n$, *Clifford Algebras and Their Applications of Mathematical Physics*, 1986.

[3] Balser, W.; *Formal Powers Series and Linear Systems of meromorphic ordinary differential equations*, Springer, 2000.

[4] Bernardes, Gil; *Funções Monogénicas de Spin Superior com Valores em Produtos Tensoriais de Álgebras de Clifford*, Tese de Doutoramento, Universidade de Coimbra, 2004.

[5] Brackx, F.; Delandhe, R. Serras, H.; *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics - Denize*, Kluwer Academic Publishers, Volume 55, 1993.

[6] Brackx, F.; Delanghe, R.; Sommen, F.; *Clifford Analysis*, Pitman Advanced Publishing Program, 1982.

[7] Cartan, H.; *Théorie élementaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Collection enseignement des sciences, Éditeurs des sciences et des arts, 1985.

[8] Cnops, J.; Malonek, H; *An Introduction to Clifford Analysis*, Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, 1995.

[9] Delanghe, R.; F. Sommen and V. Souček; *Clifford Algebra and Spinor-Valued Functions, A Function Theory for the Dirac Operator*, Kluwer Academic Publishers, Volume 53, 1992.

[10] Falcão, M.; Cruz, J.; Malonek, H.; *Remarks on the Generation of Monogenic Functions*, K. Gürlebeck and C. Könke, eds. IKM, 17, Weimar, 2006: proceedings http://e-pub.uniweimar.de/volltexte.

[11] Fueter, R.: Analytische Funktionen einer Quaternionenvariablen, *Comment. Math. Helv.* **4** (1932), 9-20.

[12] Fueter, R.: Uber die analytische Darstellung der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen, *Comment. Math. Helv.* **8** (1935-36), 371-378.

[13] Henrici, P.; *Applied and computacional complex Analysis*, A Wiley- Interscience Publication, Volume 1, 1974.

[14] Malonek, H.; A New Hypercomplex Structure of the Euclidean Space $\mathbb{R}^{m+1}$ and the Concept of Hypercomplex Differentiability, **em**: *Complex Variables*, 1990, Vol.14, pp. 25-33.

[15] Malonek, H.; Hypercomplex Differentiability and its Applications, **em**: F. Brackx et al. (eds.), *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics*, Kluwer Academic Publishers, 1993, 141-150.

[16] Malonek, H.; Power Series Representation for Monogenic Functions in $\mathbb{R}^{m+1}$ Based on a Permutational Product, **em**: *Complex Variables*, 1990, Vol.15, pp. 181-191.

[17] Malonek, Helmuth R.; Selected topic in hypercomplex functions theory **em**: *Clliford algebras and potencial theory*, (ed. Eriksson,S.-L), University of Joensuu, Report Series 7, 111-150, 2004.

[18] Petrovšek, M.; Wilf, H.; Zeilberger, D.; *A=B*, Publishers of science and technology, 1996.

[19] *Power series* em htt://mathworld.wolfram.com (acedido em Fevereiro de 2006).

[20] Queiró, João F.; *José Anastácio da Cunha: Um Matemático a Recordar, 200 Anos Depois*, http://www.mat.uc.pt

[21] Rudin, W.; *Analyse réelle et complexe*, Masson, 1978.

[22] Rudin, W.; *Princípios de análise matemática*, Editôra Universidade de Brasilia, 1971.

[23] Ruiz, Jesus M.; *The basic theory of power series*, Vieweg, Wiesbaden, 1993.

[24] Spiegel, Murray R.; *Variáveis Complexas*, Editora Mc Graw-Hill do Brasil, LTDA, 1977.