



**INÊS FILIPA  
SERÔDIO COSTA**

**PROPRIEDADES COMBINATÓRIAS E  
ESPETRAIS DO GRAFO DAS RAINHAS**





**INÊS FILIPA  
SERÔDIO COSTA**

**PROPRIEDADES COMBINATÓRIAS E  
ESPETRAIS DO GRAFO DAS RAINHAS**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações, realizada sob a orientação científica do Doutor Domingos Moreira Cardoso, Professor Catedrático do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, e do Doutor Rui Filipe Alves Silva Duarte, Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.



Dedico este trabalho aos meus pais, avós e irmãos.

“A UA é tão simétrica que devia ser UAU.”

Inês Serôdio Costa

**o júri**

presidente

**Prof. Doutor Eugénio Alexandre Miguel Rocha**

Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

vogais

**Prof. Doutor Domingos Moreira Cardoso**

Professor Catedrático do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro  
(Orientador)

**Prof. Doutor Ricardo Nuno Fonseca de Campos Pereira Mamede**

Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e  
Tecnologia da Universidade de Coimbra





## **agradecimentos**

Agradeço ao Professor Domingos Cardoso e ao Professor Rui Duarte por todo o conhecimento partilhado, todos os momentos de discussão e incentivo para a realização deste trabalho.

Aos meus pais, avós e irmãos por me terem dado a possibilidade de tirar um curso superior e pela força que me deram em todo este percurso. Em particular à Maria pelo seu tão bom humor ao final do dia. Agora é a tua vez, mana.

Ao Pedro pela paciência e companhia neste percurso de garfos e facas.

À Bruna, à Margarida e à Rita pela constante presença.



**palavras chave**

grafo das rainhas, teoria espectral de grafos, número de dominância, número cromático, número de clique, número de independência.

**resumo**

Nesta dissertação estudam-se as propriedades combinatórias e espectrais do Grafo das Rainhas de ordem  $n^2$ ,  $Q(n)$ .

No caso das propriedades combinatórias, faz-se uma revisão da literatura relativamente aos resultados obtidos sobre vários invariantes combinatórios de  $Q(n)$ .

Detalharam-se algumas provas dos valores obtidos para os números de clique, de independência, de dominância e cromático.

Relativamente aos resultados espectrais, apresentam-se vários resultados originais nomeadamente referentes ao menor valor próprio  $-4$  e ao valor próprio  $n - 4$  que estão presentes no espectro de todos os grafos  $Q(n)$  para  $n \geq 4$ .

Esta dissertação termina com a anotação de alguns problemas em aberto e a formulação de algumas conjecturas.

**keywords**

queens' graph, spectral graph theory, domination number, chromatic number, clique number, stability number

**abstract**

In this essay, we study the combinatorial and spectral properties of the Queens Graph of order  $n^2$ ,  $Q(n)$ .

In the combinatorial properties chapter, we review the literature about some combinatorial invariants of  $Q(n)$ .

Some proofs of these known values are presented in this text, for example for clique number, stability number, chromatic number and domination number.

In the spectral properties chapter, we present several original results with respect to the smaller eigenvalue  $-4$  and the eigenvalue  $n - 4$  which are in the spectrum of all  $Q(n)$  for  $n \geq 4$ .

Finally, we present some open problem about the spectrum of  $Q(n)$  and formulate some conjectures.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Conceitos Fundamentais e Notação</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Grafo das Rainhas</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Propriedades Combinatórias de <math>\mathcal{Q}(n)</math></b>	<b>11</b>
4.1	Ordem, Dimensão e Grau dos vértices . . . . .	11
4.2	Raio e Diâmetro . . . . .	13
4.3	Números de Independência e de Clique . . . . .	14
4.4	Número Cromático . . . . .	15
4.5	Número de Dominância . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Propriedades Espectrais de <math>\mathcal{Q}(n)</math></b>	<b>25</b>
5.1	Limites em $\sigma(\mathcal{Q}(n))$ . . . . .	25
5.2	Valores próprios e vetores próprios de $\mathcal{Q}(n)$ . . . . .	27
5.2.1	Valor Próprio $-4$ . . . . .	29
5.2.2	Valor Próprio $n - 4$ . . . . .	32
5.2.3	Valores próprios inteiros de $\mathcal{Q}(n)$ para $n = 3, 5, 7, 9, 11$ . . . . .	35
5.3	Partições Equilibradas . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>41</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>43</b>



# Lista de Figuras

1.1	Movimentos possíveis de uma rainha no tabuleiro. . . . .	1
1.2	Uma solução do Problema das 8-Rainhas. . . . .	2
2.1	Exemplo do mesmo grafo com duas representações diferentes. . . . .	6
2.2	Exemplos de grafo completo, $k$ -regular e complementar. . . . .	7
3.1	$\mathcal{Q}(4)$ - Grafo das Rainhas para $n = 4$ . . . . .	10
4.1	$\mathcal{T}_4$ , $\mathcal{T}_5$ e $\mathcal{T}_6$ e graus dos vértices das respectivas entradas. . . . .	12
4.2	Representação de cliques máximas através de rainhas, para $\mathcal{Q}(1)$ , $\mathcal{Q}(2)$ , $\mathcal{Q}(3)$ e $\mathcal{Q}(4)$ . . . . .	14
4.3	Uma coloração mínima dos vértices de $\mathcal{Q}(3)$ , $\mathcal{Q}(4)$ e $\mathcal{Q}(5)$ . . . . .	16
4.4	Exemplos de um quadrado latino, à esquerda, e de um design de Knut Vik, à direita, ambos de ordem 5. . . . .	17
4.5	Diagonais completas representadas pelos símbolos x e o. . . . .	18
4.6	Exemplo de um design de Knut Vik de ordem 12, retirado de [17]. . . . .	18
4.7	À esquerda um conjunto dominante de cardinalidade mínima de $\mathcal{Q}(5)$ , à direita um conjunto dominante de $\mathcal{Q}(6)$ determinado a partir do primeiro. . . . .	21
4.8	Exemplo que ilustra a demonstração do Teorema 4.5.3. . . . .	23
5.1	Vetores próprios associados ao valor próprio $-3$ do espectro de $\mathcal{Q}(n)$ , com $n = 5, 7, 9$ . . . . .	35
5.2	Vetores próprios associados ao valor próprio $-2$ do espectro de $\mathcal{Q}(n)$ , com $n = 7, 9$ . . . . .	36
5.3	Vetores próprios associados ao valor próprio $n - 6$ do espectro de $\mathcal{Q}(n)$ , com $n = 7, 9$ . . . . .	37
5.4	Exemplo de partição equilibrada e respetiva matriz quociente. . . . .	38
5.5	Exemplo de aplicação do Algoritmo 1. . . . .	39





# Lista de Tabelas

4.1	Valores de $\gamma(\mathcal{Q}(n))$ para $n \in \{1, 2, \dots, 19\}$ . . . . .	20
4.2	Valores de $\gamma(\mathcal{Q}(9i + j))$ , para $j = 0, 1, \dots, 8$ e $i = 1, 2, \dots, 14$ . . . . .	23
5.1	Espetro de $\mathcal{Q}(n)$ para $n = 2, 3, 4$ . . . . .	28
5.2	Valores próprios inteiros de $\mathcal{Q}(n)$ e respectivas multiplicidades, para $4 \leq n \leq 11$ . . . . .	28
5.4	Exemplos de $C_3$ e $D_{-1}$ de ordem 16. . . . .	32



# Capítulo 1

## Introdução

O xadrez é um dos mais conhecidos jogos de tabuleiro do mundo. Usualmente é disputado entre dois jogadores num tabuleiro composto por 64 células coloridas alternadamente de preto e branco e organizadas por 8 linhas e 8 colunas. Joga-se com 6 figuras diferentes como peças – reis, rainhas, bispos, cavalos, torres e peões – tendo cada uma um modo distinto de se movimentar no tabuleiro. Este trabalho foca-se apenas na rainha e nos seus movimentos.

Uma rainha estando numa posição do tabuleiro pode mover-se para qualquer outra entrada da sua linha, coluna ou diagonal, como está ilustrado na Figura 1.1. Assim uma rainha está em ataque às peças que se encontrem numa entrada que esta consiga alcançar num movimento.

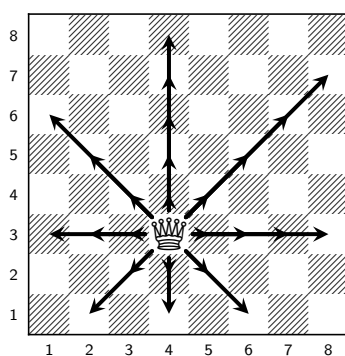


Figura 1.1: Movimentos possíveis de uma rainha no tabuleiro.

As notas históricas a seguir indicadas foram retiradas de [2].

O *Problema das 8 Rainhas* foi proposto por um jogador de xadrez alemão, Max Bezzel, numa revista de xadrez em 1848 e questionava a possibilidade de colocar 8 rainhas num tabuleiro de xadrez de modo a que nenhum par de rainhas se ataca mutuamente.

No entanto foi em junho de 1850 que este problema foi publicado por Franz Nauck para um público diferente e foi parcialmente resolvido por Johann Carl Friedrich Gauss, que encontrou 72 diferentes soluções. Em setembro do mesmo ano, Nauck apresenta 92 soluções mas apenas em 1874 é provado não haver mais nenhuma outra solução, por E. Pauls [12].

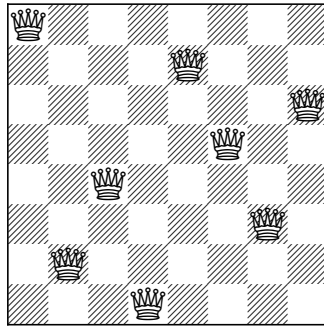


Figura 1.2: Uma solução do Problema das 8-Rainhas.

O *Problema das  $n$  Rainhas* é uma generalização deste problema, consistindo na colocação de  $n$  rainhas num tabuleiro com  $n$  linhas e  $n$  colunas de tal modo de que não existe nenhum par de rainhas a atacar-se mutuamente.

Foi também E. Pauls [12] que provou que o *Problemas das  $n$  Rainhas* tem sempre solução para  $n \geq 4$ .

A partir deste problema surge uma variante de grande interesse para os matemáticos, o *Problema da Completação das  $n$  Rainhas*. Neste problema, algumas rainhas já estão colocadas sobre o tabuleiro de xadrez e a questão é se é possível completar o resto do tabuleiro de modo a ter uma solução do *Problemas das  $n$  Rainhas*.

Este segundo problema é **NP-Completo** [8], no entanto muitos matemáticos acreditam na possibilidade de existência de um algoritmo em tempo polinomial para a resolução do problema. Com esta possibilidade a ser verificada, o problema de **P=NP** é resolvido, sendo este um dos *Millenium Prize Problems* publicados pelo Clay Mathematics Institute que premeia com 1 milhão de dólares a quem apresentar solução de um desses problemas.

No entanto o foco deste trabalho não é incidente sobre nenhum dos dois problemas acima referidos mas sim relativo ao grafo associado ao movimento das rainhas num tabuleiro de xadrez, o *Grafo das Rainhas*.

No segundo capítulo serão introduzidos alguns conceitos básicos e notação de Teoria dos Grafos e outros, necessários para uma melhor compreensão deste texto. No

capítulo seguinte, o conceito de Grafo das Rainhas é apresentado assim como algumas propriedades básicas e imediatas deste tipo de grafos.

As propriedades combinatórias e espetrais dos Grafos das Rainhas serão o grande destaque deste trabalho. No quatro capítulo é estudado este grafo em termos combinatórios, referindo alguns resultados já conhecidos e apresentados na bibliografia. Para terminar, no quinto capítulo, é estudado pela primeira vez o espectro do Grafo das Rainhas e, portanto, os resultados apresentados são originais, produto do trabalho realizado juntamente com os orientadores desta dissertação.



## Capítulo 2

# Conceitos Fundamentais e Notação

São vários os problemas com que nos cruzamos no dia-a-dia e diversas as vezes que recorremos a figuras para os descrever e facilitar a sua resolução. Se se pretender indicar um percurso e respetivo tempo no mapa do metropolitano ou indicar relações entre um grupo de pessoas, com facilidade se consegue representar recorrendo a pontos (estações do metropolitano/pessoas) e linhas a indicarem a relação pretendida entre esses pontos (ligação de estações/relação no grupo de pessoas).

Esta representação por pontos e linhas entre esses pontos é precisamente a noção pictórica de Grafo.

Todos os conceitos desta secção e relativos à Teoria dos Grafos ao longo do texto, tiveram como base [3] e [4].

Neste trabalho todos os grafos estudados são grafos simples e por esse motivo serão apenas referidos como grafos.

**Definição 2.0.1** (Grafo). Define-se por *grafo (simples)* um par  $G = (V, E)$ , onde  $V$  é um conjunto que designamos por *conjunto de vértices* e  $E$  um conjunto disjunto de  $V$  cujos elementos são pares não ordenados de vértices e que designamos por *conjunto de arestas*.

Ao longo do texto, os conjuntos de vértices e de arestas de um grafo  $G$  denotam-se por  $V(G)$  e  $E(G)$ , respetivamente, ou por  $V$  e  $E$  quando não houver dúvidas a que grafo se referem. As arestas serão representadas pelo par não ordenado dos dois vértices extremos que as compõe, isto é por  $(v_i, v_j)$  ou por  $(v_j, v_i)$ , com  $v_i, v_j \in V(G)$ .

Um grafo pode ser determinado pela sua representação gráfica e tendo em conta que a posição dos vértices no plano ou a forma das arestas não é relevante para esta representação mas sim a correta ligação dos vértices através das arestas, o mesmo grafo admite diferentes representações.

Por exemplo, as duas representações da Figura 2.1 são referentes ao mesmo grafo  $G = (V(G), E(G))$  com  $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e  $E = \{(1, 2), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (4, 5)\}$ .



Figura 2.1: Exemplo do mesmo grafo com duas representações diferentes.

O número de vértices de um grafo  $G$ , ou seja  $|V(G)|$ , designa-se por *ordem* de  $G$  e denota-se por  $v(G)$ . O número de arestas,  $|E(G)|$ , diz-se a *dimensão* de  $G$  e denota-se por  $\varepsilon(G)$ .

Uma aresta diz-se *incidente* aos seus vértices extremos e dois vértices dizem-se *adjacentes* ou *vizinhos* se são extremos de uma mesma aresta. O conjunto dos vértices adjacentes a um vértice  $v$  designa-se por *vizinhança* de  $v$  e denota-se por  $\mathcal{N}_G(v)$  ou apenas  $\mathcal{N}(v)$  se não houver dúvida em relação ao grafo a que corresponde.

O número de vizinhos de um vértice  $v$  denota-se por  $d_G(v)$  (ou simplesmente  $d(v)$ ) e designa-se por *grau* de  $v$ . Tem-se ainda que o *grau máximo* dos vértices de  $G$  é representado por  $\Delta(G)$  e o *grau mínimo* por  $\delta(G)$ , correspondendo respetivamente ao maior e ao menor dos graus dos seus vértices.

A título de exemplo para estes conceitos, note-se que para o grafo representado na Figura 2.1,  $v(G) = 5$ ,  $\varepsilon(G) = 6$ ,  $\mathcal{N}(1) = \{2, 5\}$ ,  $d(1) = 2$ ,  $\Delta(G) = 3$  e  $\delta(G) = 1$ .

Num grafo  $G$ , a matriz quadrada  $A_G = (a_{ij})$  de ordem  $v(G)$  com  $a_{ij} = 1$  se os vértices  $i$  e  $j$  são vizinhos e  $a_{ij} = 0$  caso contrário, diz-se a *matriz de adjacência* de  $G$ .

Os valores próprios da matriz de adjacência de um grafo serão simplesmente chamados de valores próprios do grafo e o seu espectro será representado por  $\sigma(G) = \{\mu_1^{[m_1]}, \mu_2^{[m_2]}, \dots, \mu_p^{[m_p]}\}$  onde  $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_p$  são os valores próprios distintos de  $G$  e  $m_i$ , ou  $m(\mu_i)$ , com  $i \in [p]$ , as respetivas multiplicidades. Quando  $m_i = 1$ , omitimos a multiplicidade.

Ainda para a Figura 2.1, a matriz de adjacência de  $G$  é

$$A_G = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$



Num grafo  $G = (V(G), E(G))$  com  $V(G) = \{v_i : i \in [v(G)]\}$  e  $E(G) = \{e_i : i \in [\varepsilon(G)]\}$ , um *caminho* de comprimento  $k$  entre os vértices  $v_0$  e  $v_k$  é uma sequência não vazia

$$P = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k,$$

onde  $v_{j-1}$  e  $v_j$  são os vértices extremos de  $e_j$ , para cada  $j \in [k]$  e todos os vértices da sequência são distintos.

A *distância* entre dois vértices  $v_i$  e  $v_j$  é o comprimento do menor caminho entre  $v_i$  e  $v_j$  e, no caso de não haver nenhum caminho entre esse par de vértices, a distância diz-se infinita.

Um grafo  $G$  de ordem  $n$  diz-se *completo* e denota-se por  $K_n$  se todos os seus vértices são adjacentes. Por outro lado diz-se *nulo* quando não tem arestas, isto é,  $E = \emptyset$ . Se todos os vértices de  $G$  tiverem grau  $k$ ,  $G$  diz-se *k-regular*.

O *grafo complementar*  $G^c$  de  $G$  é o grafo tal que  $V(G^c) = V(G)$  e dois vértices de  $G^c$  são adjacentes se e só se não o forem em  $G$ .

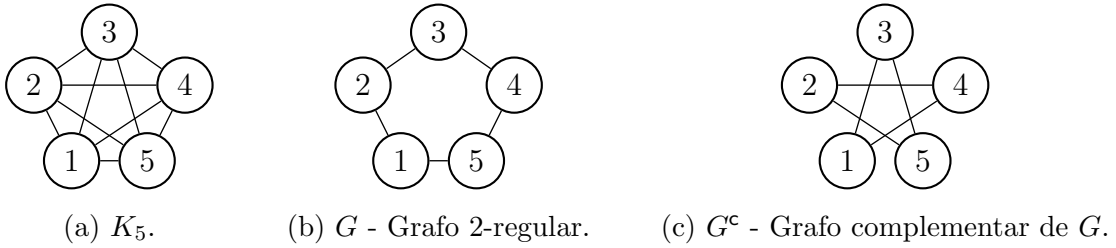


Figura 2.2: Exemplos de grafo completo,  $k$ -regular e complementar.

Dados dois grafos  $G$  e  $H$ ,  $H$  diz-se *subgrafo* de  $G$ , e representa-se por  $H \subset G$ , se  $V(H) \subset V(G)$ ,  $E(H) \subset E(G)$ . Quando um par de vértices de  $H$  é adjacente se e só se o é em  $G$ , diz-se que  $H$  é um *subgrafo induzido* de  $G$ .

É necessário por fim, definir *partição* de um conjunto.

Seja  $C$  um conjunto não vazio. Uma família de subconjuntos de  $C$ ,  $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ , diz-se uma *partição* se  $C_i \neq \emptyset$  para todo o  $i \in [n]$ ,  $C_i \cap C_j = \emptyset$  para qualquer  $i \neq j$  e  $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n = C$ .



# Capítulo 3

## Grafo das Rainhas

Seja  $\mathcal{T}_n$  o tabuleiro de xadrez de dimensão  $n \times n$ . Para indicar uma entrada de  $\mathcal{T}_n$ , faz-se referência à correspondente linha  $x$  e coluna  $y$  da entrada através do par ordenado  $(x, y)$  com  $x, y \in [n]$ . As linhas são numeradas por ordem crescente de cima para baixo, e as colunas da mais à esquerda à mais à direita. Esta numeração difere da utilizada habitualmente nos tabuleiros de xadrez, contudo foi adotada por ser mais intuitiva e coincidir com a matricial.

Define-se o Grafo das Rainhas,  $\mathcal{Q}(n)$ , como o grafo que associa a cada entrada de  $\mathcal{T}_n$  um vértice e onde dois vértices são vizinhos se e só se estiverem na mesma linha, coluna ou diagonal do tabuleiro a que estão associados.

Formalmente tem-se que  $\mathcal{Q}(n) = (V, E)$  com  $V = \{v_{(i,j)} : i, j \in [n]\}$  e  $E = \{(v_{(i,j)}, v_{(k,\ell)}) \in V^2 : i = k \vee j = \ell \vee i - j = k - \ell \vee i + j = k + \ell\}$ .

Para definir uma etiquetação dos vértices vai ser necessário definir uma bijeção que a cada entrada no tabuleiro de xadrez de dimensão  $n \times n$  faça corresponder um e um só vértice de  $\mathcal{Q}(n)$ .

**Teorema 3.0.1.** *Seja  $\varphi : [n]^2 \longrightarrow [n^2]$  definida por  $\varphi(i, j) = (i - 1)n + j$ . Então  $\varphi$  é uma bijeção. Além disso, se  $k = \varphi(i, j)$ , então  $i = \lceil \frac{k}{n} \rceil$  e  $j = k + n - n \lceil \frac{k}{n} \rceil$ .*

*Demonstração.* Sejam  $(i, j), (i', j') \in [n]^2$  tais que  $\varphi(i, j) = \varphi(i', j')$ , isto é,  $(i - 1)n + j = (i' - 1)n + j'$ , ou seja,  $(i - i')n = j' - j$ .

Uma vez que  $n | n(i - i') = j' - j$  e  $-(n - 1) \leq j' - j \leq n - 1$ , tem-se que  $j' - j = 0$ , ou seja,  $j' = j$  e consequentemente  $i - i' = \frac{j' - j}{n} = 0$ , isto é,  $i = i'$ . Deste modo, tem-se  $(i, j) = (i', j')$  que leva a concluir que  $\varphi$  é injetiva.

Sendo  $\varphi$  injetiva e tendo em conta que  $|[n]^2| = |[n^2]| = n^2$ , pode-se concluir que  $\varphi$  é sobrejetiva.

Seja agora  $k = \varphi(i, j) = n(i - 1) + j$  então,  $n(i - 1) < n(i - 1) + 1 \leq k \leq n(i - 1) + n = ni$  e como  $i - 1 < \frac{k}{n} \leq i$  e,  $i$  é inteiro, tem-se  $i = \lceil \frac{k}{n} \rceil$ .

Finalmente,  $j = k - n(i - 1) = k + n - n \lceil \frac{k}{n} \rceil$ . □

Como a cada entrada de  $\mathcal{T}_n$  se associa um vértice de  $\mathcal{Q}(n)$ , a etiquetação dos vértices vai ser feita através da bijeção  $\varphi$ , onde para cada entrada  $(i, j)$  corresponde o vértice  $\varphi(i, j)$ .

Em linguagem corrente, esta etiquetação é feita da coluna mais à esquerda para a coluna mais à direita e da linha mais acima para a mais abaixo.

Embora a etiquetação dos vértice de  $\mathcal{Q}(n)$  seja feita pela bijeção  $\varphi$ , ao longo do trabalho vai utilizar-se a notação  $v_{(i,j)}$  para nos referirmos a um vértice, utilizando-se as correspondentes coordenadas  $(i, j)$  em  $\mathcal{T}_n$ .

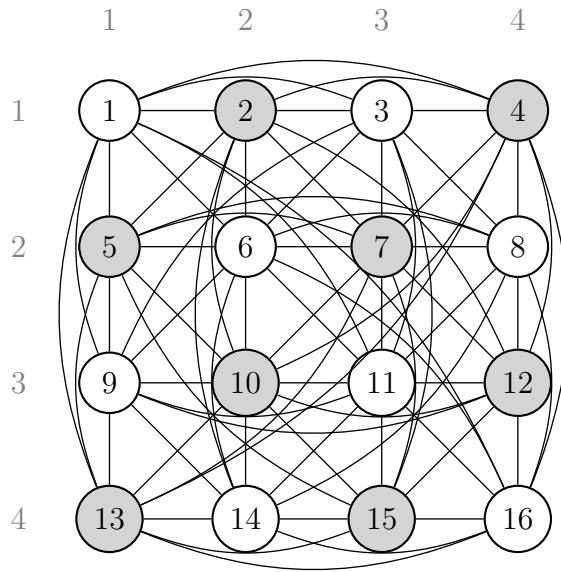


Figura 3.1:  $\mathcal{Q}(4)$  - Grafo das Rainhas para  $n = 4$ .

Para  $n = 4$  tem-se representado o Grafo das Rainhas,  $\mathcal{Q}(4)$ , na Figura 3.1. Com este exemplo torna-se mais simples perceber a construção do Grafo das Rainhas através do respetivo tabuleiro de xadrez, assim como a etiquetação dos vértices e as coordenadas do tabuleiro.

Facilmente se nota que  $\mathcal{Q}(n + 1)$  pode ser obtido através de  $\mathcal{Q}(n)$  com o acréscimo de uma coluna de vértices à direita, uma linha de vértices abaixo e as arestas correspondentes. Por este motivo, para  $m \leq n$ ,  $\mathcal{Q}(m)$  é um subgrafo de  $\mathcal{Q}(n)$ .

# Capítulo 4

## Propriedades Combinatórias de $\mathcal{Q}(n)$

Algumas propriedades combinatórias de  $\mathcal{Q}(n)$  podem ser obtidas quase imediatamente pela própria estrutura deste tipo de grafos e em função do parâmetro  $n$ .

### 4.1 Ordem, Dimensão e Grau dos vértices

O Grafo das Rainhas, por definição, tem um número de vértices  $|V| = n^2$  em que  $n \in \mathbb{N}$  é a largura do tabuleiro de xadrez.

Para determinar o número de arestas de  $\mathcal{Q}(n)$ , note-se que dois vértices são adjacentes se e só se estiverem na mesma linha, coluna ou diagonal de  $\mathcal{T}_n$ . Assim tem-se  $\binom{n}{2}$  arestas em cada uma das  $n$  linhas, das  $n$  colunas, na diagonal principal e na diagonal secundária e  $\binom{i}{2}$  arestas, para  $i \in 2, 3, \dots, n-1$ , nas restantes diagonais do tabuleiro, havendo 4 diagonais com  $i$  vértices.

Deste modo o número de arestas, para  $n \geq 2$ , é dado pela expressão

$$\begin{aligned} e(\mathcal{Q}(n)) &= (2n+2) \times \binom{n}{2} + 4 \times \sum_{i=2}^{n-1} \binom{i}{2} \\ &\stackrel{*}{=} (2n+2) \times \binom{n}{2} + 4 \times \binom{n}{3} \\ &= (2n+2) \times \frac{n!}{(n-2)!2!} + 4 \times \frac{n!}{(n-3)!3!} \\ &= (n+1)n(n-1) + \frac{2}{3} \times n(n-1)(n-2) \\ &= n(n-1) \left( n+1 + \frac{2}{3}(n-2) \right) \\ &= \frac{n(n-1)(5n-1)}{3}, \end{aligned}$$

onde em (\*) foi utilizada a identidade do stick de hóquei que pode ser consultada em [10].

O grau dos vértices, por exemplo, mantem-se constante em cada um dos vários bordos do tabuleiro. Na Figura 4.1, em cada uma das entradas de  $\mathcal{T}_4$ ,  $\mathcal{T}_5$  e  $\mathcal{T}_6$  estão indicados os graus dos vértices correspondentes a essas entradas nos respectivos Grafos das Rainhas.

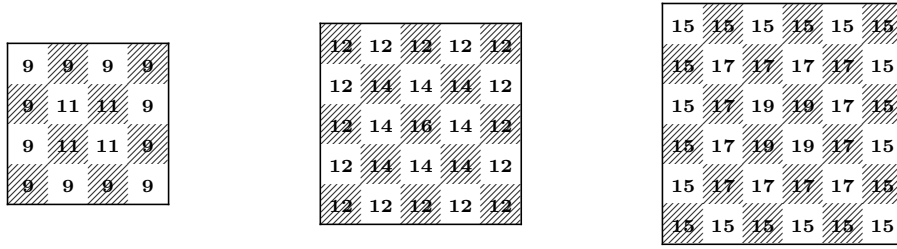


Figura 4.1:  $\mathcal{T}_4$ ,  $\mathcal{T}_5$  e  $\mathcal{T}_6$  e graus dos vértices das respectivas entradas.

Com base nesta estrutura, é possível obter uma fórmula fechada para o grau dos vértices de  $\mathcal{Q}(n)$ , e com esse propósito, começamos por definir uma partição de  $V(\mathcal{Q}(n))$ .

Considere-se

- $V_1$  definido pelos vértices mais periféricos do tabuleiro de xadrez;
- $V_2$  definido pelos vértices mais periféricos do tabuleiro de xadrez quando retirados os vértices de  $V_1$ ;
- ...
- e  $V_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$  definido pelos vértices mais periféricos do tabuleiro, neste caso o(s) único(s) restante(s), quando retirados os vértices de  $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1}$ .

É imediato que  $\{V_1, V_2, \dots, V_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}\}$  representa uma partição de  $V(\mathcal{Q}(n))$  pois, pelo modo como foi construída, tem-se  $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$  conjuntos não vazios, disjuntos dois a dois e cuja união de todos os conjuntos é  $V(\mathcal{Q}(n))$ .

**Teorema 4.1.1.** *Considerando a partição de  $V(\mathcal{Q}(n))$  acima, o grau dos vértices de  $\mathcal{Q}(n)$  é dado por  $d(v) = 3(n-1) + 2(i-1)$  para todo  $v \in V_i$  com  $i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ .*

*Demonstração.* Para  $v \in V_1$  é imediato que  $d(v) = 3(n-1)$ . Considerando  $i$  tal que  $1 < i \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$  e assumindo que  $v \in V_i$  corresponde a uma das entradas do tabuleiro  $\mathcal{T}_n$ ,  $(p, q) \in X_{i,i} \cup X_{i,(n-(i-1))} \cup X_{(n-(i-1)),(n-(i-1))} \cup X_{(n-(i-1)),i}$ , onde

$$\begin{aligned} X_{i,i} &= \{(i, j), i \leq j \leq n-i\}, \\ X_{i,(n-(i-1))} &= \{(j, n-(i-1)), i \leq j \leq n-i\}, \\ X_{(n-(i-1)),(n-(i-1))} &= \{(n-(i-1), j), i+1 \leq j \leq n-(i-1)\} \text{ e} \\ X_{(n-(i-1)),i} &= \{(j, i), n-(i-1) \leq j \leq i+1\}, \end{aligned}$$

vem que  $d(v)$  é constante para todo o  $v \in V_i$ .

Quando  $v$  corresponde à entrada  $(i, i)$  do tabuleiro, os seus vizinhos são os vértices da sua linha, coluna e diagonais, exceto ele próprio. Logo  $v$  tem  $n-1$  vizinhos na sua linha,  $n-1$  vizinhos na sua coluna,  $n-1$  vizinhos na diagonal principal e  $2 \times (i-1)$  vizinhos na sua diagonal perpendicular à diagonal principal.

Conclui-se então que  $d(v) = 3(n-1) + 2(i-1)$  para  $v \in V_i$  □

Como consequência deste teorema, retira-se uma expressão para os graus mínimo e máximo de  $\mathcal{Q}(n)$ .

O grau mínimo é atingido para os vértices mais periféricos do tabuleiro – os vértices de  $V_1$  – e, portanto, tem-se que  $\delta(\mathcal{Q}(n)) = 3(n-1)$ . Já o grau máximo é atingido pelos vértices mais centrais do tabuleiro – os vértices de  $V_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$ , composto por 1 vértice se  $n$  ímpar e 4 vértices se  $n$  par – e tem-se que

$$\Delta(\mathcal{Q}(n)) = \begin{cases} 4n-5 & \text{para } n \text{ par;} \\ 4n-4 & \text{para } n \text{ ímpar.} \end{cases} \quad (4.1)$$

Sabendo o número de arestas de um grafo  $G$  e o seu número de vértices, a expressão do grau médio é dado por  $\overline{d}_G = \frac{2e(G)}{v(G)}$ .

Para  $\mathcal{Q}(n)$ , os parâmetros  $e(\mathcal{Q}(n))$  e  $v(\mathcal{Q}(n))$  já são conhecidos e assim tem-se que  $\overline{d}_{\mathcal{Q}(n)} = \frac{2(n-1)(5n-1)}{3n}$ .

## 4.2 Raio e Diâmetro

Num grafo  $G$  define-se a *excentricidade* de um vértice  $v$  como a maior distância entre  $v$  e todos os outros vértices de  $G$ .

O *raio* de  $G$ , denotado por  $r(G)$ , é a menor das excentricidades dos seus vértices, sendo a maior das excentricidades designada por *diâmetro* de  $G$ , representado por  $\text{diam}(G)$ .

No caso de  $\mathcal{Q}(n)$ , quaisquer dois vértices se não são vizinhos, têm um vizinho em comum e neste caso existe sempre um caminho entre dois vértices  $v_{(i,j)}, v_{(k,l)} \in V$  formado pelas arestas  $(v_{(i,j)}, v_{(k,j)})$  e  $(v_{(k,j)}, v_{(k,l)})$ . Por este motivo, a excentricidade de cada vértice é no máximo 2, sendo exatamente 2 para  $n \geq 3$  pois  $\mathcal{Q}(n)$  não é um grafo completo.

Consequentemente vem que  $\text{diam}(\mathcal{Q}(n)) = r(\mathcal{Q}(n)) = 2$  para  $n \geq 4$ .

### 4.3 Números de Independência e de Clique

Um *conjunto independente* de  $G$  é um conjunto de vértices que induz um subgrafo nulo de  $G$ . Por outro lado, uma *clique* de  $G$  é um conjunto de vértices que induz um subgrafo completo de  $G$ .

Define-se o *número de independência* de  $G$ ,  $\alpha(G)$ , e o *número de clique*,  $\omega(G)$ , como a maior cardinalidade dos conjuntos independentes e das cliques de  $G$ , respetivamente.

Como já é sabido, o *Problema das  $n$ -Rainhas* tem solução para  $n \geq 4$  e portanto qualquer solução deste problema é um conjunto independente de ordem  $n$ . Consequentemente, o número de independência de  $\mathcal{Q}(n)$  terá de ser igual ou superior a  $n$ . Por outro lado, se se estiver perante um conjunto independente com  $n + 1$  vértices, pelo Princípio da Gaiola dos Pombos (que pode ser consultado por exemplo em [4]), tem de se ter dois vértices na mesma linha (e coluna) que leva a que estes vértices sejam vizinhos e se entre em contradição por se tratar de um conjunto independente.

Assim sendo, vem que  $\alpha(\mathcal{Q}(n)) = n$  para  $n \geq 4$ .

A respeito do número de clique de  $\mathcal{Q}(n)$ , é imediato que este será igual ou superior a  $n$ , uma vez que os  $n$  vértices de qualquer linha (ou coluna) formam uma clique.

Para os valores de  $n = 1, 2, 3, 4$ , pela Figura 4.2, podemos concluir que o número de clique de  $\mathcal{Q}(n)$  é respetivamente 1, 4, 5, 5.

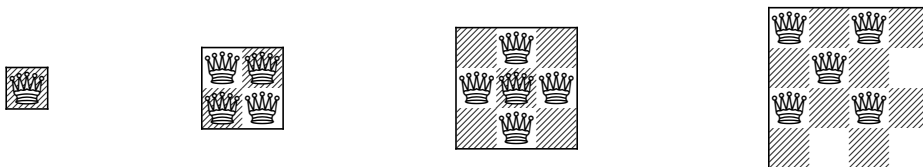


Figura 4.2: Representação de cliques máximas através de rainhas, para  $\mathcal{Q}(1)$ ,  $\mathcal{Q}(2)$ ,  $\mathcal{Q}(3)$  e  $\mathcal{Q}(4)$ .

Para números de clique para valores de  $n$  superiores aos representados na figura, tem-se o seguinte teorema.



**Teorema 4.3.1.**  $\omega(\mathcal{Q}(n)) = n$  para  $n \geq 5$ .

*Demonstração.* Já se sabe que  $\omega(\mathcal{Q}(n)) \geq n$ .

Supondo que existe uma clique com  $n + 1$  vértices, ter-se-ia pelo menos dois vértices na mesma linha. Sejam esses dois vértices  $v_{(i,j_1)}$  e  $v_{(i,j_2)}$ , com  $j_2 = j_1 + k$  e  $k \geq 1$ . Os vizinhos comuns de  $v_{(i,j_1)}$  e  $v_{(i,j_2)}$  fora da  $i$ -ésima linha e possíveis para formar uma subclique maximal da clique inicial, serão um dos três conjuntos de vértices:

1.  $v_{(i-k,j_1)}$ ,  $v_{(i-k,j_2)}$  e adicionalmente  $v_{(i-\frac{k}{2},j_1-\frac{k}{2})}$  se  $k$  for par;
2. ou  $v_{(i+k,j_1)}$ ,  $v_{(i+k,j_2)}$  e adicionalmente  $v_{(i+\frac{k}{2},j_1+\frac{k}{2})}$  se  $k$  for par;
3. ou  $v_{(i-\frac{k}{2},j_1-\frac{k}{2})}$  e  $v_{(i+\frac{k}{2},j_1+\frac{k}{2})}$  se  $k$  for par.

Em qualquer um dos casos, existe no máximo três vértices fora da  $i$ -ésima linha que juntamente com  $v_{(i,j_1)}$  e  $v_{(i,j_2)}$  formam uma clique maximal. Qualquer vértice fora de uma linha tem no máximo 3 vizinhos nessa mesma linha e, portanto,

- para os dois primeiro casos, escolhendo qualquer um dos 2 (ou 3) vértices obtidos, esse vértice teria  $v_{(i,j_1)}$  e  $v_{(i,j_2)}$  como vizinhos na  $i$ -ésima linha e o terceiro vizinho não poderia ser acrescentado à clique pois não era vizinho dos restantes vértices;
- para o terceiro caso, escolhendo qualquer um dos 2 vértices obtidos, esse vértice teria  $v_{(i,j_1)}$ ,  $v_{(i,j_2)}$  e  $v_{(i,j_1+\frac{k}{2})}$  como vizinhos na  $i$ -ésima linha e assim poderia se acrescentar  $v_{(i,j_1+\frac{k}{2})}$  à clique.

Deste modo, a clique máxima não pode ter  $n + 1$  vértices para  $n \geq 5$ . □

Surge imediatamente como consequência do teorema anterior que, para  $n \geq 5$ , o conjunto das  $n$  linhas formam uma cobertura mínima por cliques de  $\mathcal{Q}(n)$ , isto é, as  $n$  linhas (em que cada uma delas forma uma clique máxima) são suficientes para cobrir todas as entradas do tabuleiro e este é o modo de o fazer utilizando um menor número de cliques.

## 4.4 Número Cromático

Uma  $k$ -coloração dos vértices de um grafo  $G$  é uma função que a cada vértice de  $G$  faz corresponder uma cor de um conjunto com  $k$  cores. Uma coloração diz-se *própria* se para qualquer par de vértices vizinhos, esses vértices têm cores distintas.

O *número cromático* de um grafo  $G$  denota-se por  $\chi(G)$  e é o menor valor  $k$  para o qual  $G$  admite uma  $k$ -coloração própria.

Note-se que se  $S$  é um subgrafo de um grafo  $G$ ,  $\chi(S) \leq \chi(G)$ .

Um resultado conhecido da combinatória afirma que o número cromático de um grafo é não inferior ao seu número de clique e não superior ao maior grau dos seus vértices mais um que, uma vez mais, poderá ser consultado por exemplo em [4] no Teorema 19.3.

A primeira desigualdade vem do facto de se existe um subgrafo completo de  $G$  com  $\omega(G)$  vértices, são necessárias pelos menos  $\omega(G)$  cores para colorir esse subgrafo, consequentemente o mesmo número de cores para colorir  $G$  e assim  $\omega(G) \leq \chi(G)$ . Por outro lado, colorindo sequencialmente os vértices de um grafo, a cor a atribuir ao vértice  $v_i$  tem que ser distintas das cores atribuídas aos seus vizinhos. Logo, supondo que, na pior das hipóteses, se utilizaram  $\Delta(G)$  cores nos vizinhos de  $v_i$  é necessária mais uma cor para  $v_i$ , ou seja, são necessárias  $\Delta(G) + 1$  cores e portanto  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

Assim, tendo em conta a Equação 4.1 e do Teorema 4.3.1 vem que

$$\omega(\mathcal{Q}(n)) \leq \chi(\mathcal{Q}(n)) \leq \begin{cases} 4n - 4, & \text{se } n \text{ é par;} \\ 4n - 3, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Recorrendo a estes limites (ou através de uma simples análise) tem-se que  $\chi(\mathcal{Q}(1)) = 1$  e  $\chi(\mathcal{Q}(2)) = 4$ , uma vez que  $\omega(\mathcal{Q}(1)) = \Delta(\mathcal{Q}(1)) = 1$  e  $\omega(\mathcal{Q}(2)) = \Delta(\mathcal{Q}(2)) = 4$ .

Para os valores de  $n \in \{3, 4, 5\}$ ,  $\chi(\mathcal{Q}(n)) = 5$ , que coincide com o limite inferior apresentado mas torna-se rapidamente muito distante do limite superior. Na Figura 4.3 é possível ver um exemplo das colorações mínimas correspondentes a estes valores de  $n$  e onde o conjunto das cores é  $C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

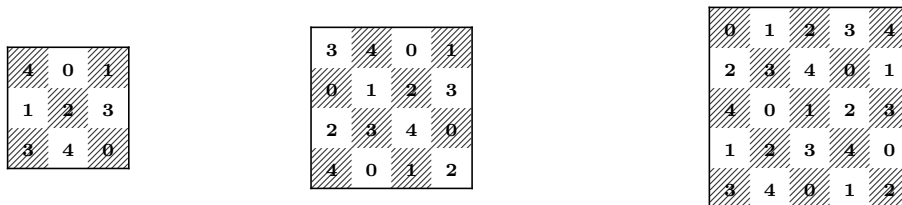


Figura 4.3: Uma coloração mínima dos vértices de  $\mathcal{Q}(3)$ ,  $\mathcal{Q}(4)$  e  $\mathcal{Q}(5)$ .

Note-se que, para  $\mathcal{Q}(5)$ , os conjuntos de vértices coloridos com a mesma cor formam uma solução para o *Problemas das 5 Rainhas*. Em geral, quando  $\chi(\mathcal{Q}(n)) = n$ , cada conjunto de vértices da mesma cor é uma solução para o *Problema das n-Rainhas*.

Para prosseguir nos resultados referentes ao número cromático de  $\mathcal{Q}(n)$ , é conveniente introduzir as definições de quadrado latino e de design de Knut Vik.

**Definição 4.4.1** (Quadrado Latino, Design de Knut Vik, [1]). Um *quadrado latino* de ordem  $n$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$  preenchida com  $n$  símbolos diferentes de tal modo que cada símbolo ocorre exatamente uma vez em cada linha e coluna.

Um *design de Knut Vik* de ordem  $n$  é um quadrado latino de ordem  $n$  cujas diagonais não têm símbolos iguais.



Figura 4.4: Exemplos de um quadrado latino, à esquerda, e de um design de Knut Vik, à direita, ambos de ordem 5.

Através de um design de Knut Vik de ordem  $n$  imediatamente se obtém uma coloração dos vértices de  $\mathcal{Q}(n)$ , fazendo uma correspondência entre os  $n$  símbolos e as  $n$  cores distintas e colorindo o vértice de uma entrada  $\mathcal{T}_n$  da cor correspondente ao símbolo dessa entrada do design de Knut Vik.

Um exemplo desta correspondência pode ser visto comparando o design de Knut Vik da Figura 4.4 e a coloração de  $\mathcal{Q}(5)$  na Figura 4.3.

Resumidamente,  $\chi(\mathcal{Q}(n)) = n$  se e só se existir um design de Knut Vik de ordem  $n$ . Consequentemente alguns resultados já conhecidos relativos a designs de Knut Vik podem ser aplicados a colorações de  $\mathcal{Q}(n)$ .

No entanto, ao longo da pesquisa sobre estas mesmas propriedades, foram encontradas algumas incorreções que serão indicadas de seguida. Para isso, considere-se as seguintes definições.

**Definição 4.4.2** (Diagonal completa). Designa-se por  $k$ -ésima diagonal completa de  $\mathcal{T}_n$  e denota-se por  $D_k$  o conjunto de células

$$D_k = \begin{cases} \{(i, j) \in [n]^2 : i - j \equiv k \pmod{n}\} (*) \\ \text{ou} \\ \{(i, j) \in [n]^2 : i + j \equiv k \pmod{n}\} (**) \end{cases}$$

para um dado  $k = 0, \dots, n - 1$ . Em  $(*)$  a diagonal completa diz-se à esquerda e em  $(**)$  à direita.

**Definição 4.4.3** (Super-diagonal, Super-diagonais paralelas). Um conjunto de  $n$  células de uma matriz  $n \times n$  diz-se uma super-diagonal se e só se contém um elemento de cada linha, cada coluna e cada diagonal completa.

Duas super-diagonais dizem-se paralelas se não têm células em comum.

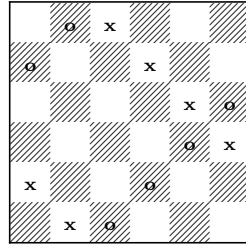


Figura 4.5: Diagonais completas representadas pelos símbolos x e o.

A. Hendayat, em [9], afirma que um design de Knut Vik existe se e só se a sua ordem não for divisível por 2 nem por 3. Esta afirmação surge como Corolário do Teorema 2.1 do mesmo texto - “*Um design de Knut Vik de ordem  $n$  existe se e só se existe uma matriz  $n \times n$  com  $n$  super-diagonais paralelas*”.

Na prova desse teorema, numa das implicações o autor admite que “*se  $\mathcal{K}$  é um design de Knut Vik de ordem  $n$ , então cada conjunto de  $n$  células de  $\mathcal{K}$  com um símbolo fixo é uma super diagonal*”. Esta ideia é tomada erradamente o que invalida o teorema e consequentemente o corolário.

Como contra-exemplo desta afirmação, na Figura 4.6 é possível ver que se trata de um design de Knut Vik pois em cada linha, cada coluna e cada diagonal não existem elementos repetidos. No entanto, existem conjuntos de células que não formam super-diagonais, como por exemplo o conjunto de células com o símbolo 0 que inclui as entradas (2, 9) e (10, 5) que pertencem à mesma diagonal completa à esquerda.

0	5	9	6	3	8	4	1	10	11	7	2
7	11	4	2	1	6	10	3	0	8	9	5
8	1	10	9	5	2	0	7	11	6	3	4
10	0	3	8	7	11	9	5	4	1	2	6
5	6	11	4	2	1	3	0	8	9	10	7
11	7	0	1	10	4	8	6	3	2	5	9
2	8	6	3	9	5	7	11	1	10	4	0
3	4	5	0	11	10	6	9	2	7	8	1
9	2	1	10	4	7	5	8	6	3	0	11
4	10	7	11	0	3	1	2	9	5	6	8
6	3	2	5	8	9	11	4	7	0	1	10
1	9	8	7	6	0	2	10	5	4	11	3

Figura 4.6: Exemplo de um design de Knut Vik de ordem 12, retirado de [17].

Deste modo, poderão existir designs de Knut Vik de ordens divisíveis por 2 e 3 (o

exemplo acima apresentado, de ordem 12, é um desses casos), assim como colorações de vértices de  $\mathcal{Q}(n)$ .

O seguinte teorema é equivalente para designs de Knut Vik e a sua prova aparece em [5].

**Teorema 4.4.1.** *Se  $n \equiv 1, 5 \pmod{6}$ , então  $\chi(\mathcal{Q}(n)) = n$ .*

*Demonstração.* Para facilitar esta prova, as coordenadas de  $\mathcal{T}_n$  são indicadas de 0 a  $n - 1$ .

Supondo que  $n$  não é par nem divisível por 3, seja a coloração de  $\mathcal{Q}(n)$  feita com o conjunto de cores  $C = \{0, 1, \dots, n - 1\}$  onde a cada vértice  $v_{i,j}$  corresponde a cor  $j - 2i \pmod{n}$ .

Sejam  $(i, j)$  e  $(p, q)$  dois vértices com a mesma cor. Então  $(j - 2i) \equiv (q - 2p) \pmod{n}$  que é equivalente a  $2(p - i) \equiv (q - j) \pmod{n}$  que permite concluir que

- se os dois vértices estiverem na mesma linha, isto é,  $i = p$ , então  $j = q$  e trata-se do mesmo vértice;
- se os dois vértices estiverem na mesma coluna, isto é,  $j = q$ , então  $i = p$  se  $n$  for ímpar e neste caso, trata-se do mesmo vértice;
- se os dois vértices estão na mesma diagonal, então

ou  $p - i = q - j \Rightarrow 2(q - j) \equiv (q - j) \pmod{n} \Rightarrow j = q$  o que implica que  $i = p$  se  $n$  for ímpar e neste caso, trata-se do mesmo vértice;

ou  $i + j = p + q \Leftrightarrow p - i = j - q \Rightarrow 2(j - q) \equiv (q - j) \pmod{n} \Rightarrow 3(j - q) \equiv 0 \pmod{n}$  e consequentemente  $(i, j) = (p, q)$  se  $n$  não for divisível por 3.

Assim, apenas se consegue ter uma  $n$ -coloração de  $\mathcal{Q}(n)$  se  $n$  não for divisível por 2 nem por 3, que é o mesmo que dizer que  $n \equiv 1, 5 \pmod{6}$  □

A coloração de  $\mathcal{Q}(5)$  na Figura 4.3 é uma coloração deste tipo.

**Teorema 4.4.2.** *Para  $n \geq 5$ ,*

$$n \leq \chi(\mathcal{Q}(n)) \leq \begin{cases} n, & \text{se } n \equiv 1, 5 \pmod{6}; \\ n + 3, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.2)$$

*Demonstração.* Uma vez que  $\omega(\mathcal{Q}(n)) = n$  para  $n \geq 5$ , o limite inferior de  $\chi(\mathcal{Q}(n))$  vem pelo Teorema 4.3.1.

O primeiro ramo do limite superior surge do Teorema 4.4.1.

Para o segundo ramo é suficiente ter em conta que  $\mathcal{Q}(m)$  é sempre subgrafo de  $\mathcal{Q}(n)$  para  $m \leq n$ , que o número cromático de um subgrafo de  $\mathcal{Q}(n)$  é não superior a  $\chi(\mathcal{Q}(n))$  e que todo o número  $m$  está no máximo a uma distância de 3 unidades de um número  $n$  tal que  $m \leq n$  e  $n \equiv 1, 5 \pmod{6}$ . □

Como consequência direta deste teorema, apresenta-se um novo corolário com uma fórmula fechada para o número cromático de  $\mathcal{Q}(n)$ .

**Corolário 4.4.3.** *Para  $n \geq 5$ ,  $\chi(\mathcal{Q}(n)) = n$  se  $n \equiv 1, 5 \pmod{6}$  e*

$$\chi(\mathcal{Q}(n)) \in \begin{cases} \{n, n+1\} & \text{se } n \equiv 0, 4 \pmod{6}, \\ \{n, n+1, n+2, n+3\} & \text{se } n \equiv 2 \pmod{6}, \\ \{n, n+1, n+2\} & \text{se } n \equiv 3 \pmod{6}. \end{cases}$$

## 4.5 Número de Dominância

Para terminar este capítulo, será apresentado um dos problemas mais conhecidos e estudados relativos ao Grafo das Rainhas mas que ainda continua em aberto.

Num grafo  $G$ , um vértice  $v$  *domina-se* a ele próprio e a todos os seus vizinhos e um *conjunto dominante* é um conjunto de vértices que consegue dominar todos os vértices do grafo  $G$ . Define-se *número de dominância* de  $G$ ,  $\gamma(G)$ , como a cardinalidade do menor conjunto dominante de  $G$ .

Para  $\mathcal{Q}(1)$  e  $\mathcal{Q}(2)$ , qualquer vértice forma um conjunto dominante, assim como o vértice central (vértice 5) forma para  $\mathcal{Q}(3)$ , e assim tem-se que  $\gamma(\mathcal{Q}(1)) = \gamma(\mathcal{Q}(2)) = \gamma(\mathcal{Q}(3)) = 1$ .

No entanto a determinação do número de dominância para um Grafo das Rainhas não é um exercício tão fácil assim.

Os números de dominância de  $\mathcal{Q}(n)$  apenas são conhecidos para um número finito de valores de  $n$ , isto é, nenhuma fórmula fechada é conhecida para  $\gamma(\mathcal{Q}(n))$ . Na Tabela 4.1 estão presentes alguns números, retirados de [15], para  $n$  até 19.

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\gamma(\mathcal{Q}(n))$	1	1	1	2	3	3	4	5	5	5

$n$	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\gamma(\mathcal{Q}(n))$	5	6	7	8	9	9	9	9	10

Tabela 4.1: Valores de  $\gamma(\mathcal{Q}(n))$  para  $n \in \{1, 2, \dots, 19\}$ .

Contudo, tendo presente a estrutura dos Grafos das Rainhas, podemos tirar algumas conclusões relativas aos limites superiores dos valores de  $\gamma(\mathcal{Q}(n))$  para valores arbitrários de  $n$ .

**Teorema 4.5.1.** *Para  $n \geq 4$ ,  $\gamma(\mathcal{Q}(n+1)) \leq \gamma(\mathcal{Q}(n)) + 1$ .*

*Demonstração.* Seja  $S \subset V(\mathcal{Q}(n))$  um conjunto dominante de cardinalidade mínima de  $\mathcal{Q}(n)$  para qualquer  $n \geq 4$ . Para as  $n$  primeiras linhas e  $n$  primeiras colunas de  $\mathcal{T}_{n+1}$ , considere-se as posições correspondentes às de  $S$  em  $\mathcal{T}$ . Os vértices correspondentes a essas posições em junção com o vértice  $(n+1)^2$  formam um conjunto dominante de  $\mathcal{Q}(n)$  e consequentemente  $\gamma(\mathcal{Q}(n+1)) \leq \gamma(\mathcal{Q}(n)) + 1$ .  $\square$

A Figura 4.7 contribui para a clarificação desta prova.



Figura 4.7: À esquerda um conjunto dominante de cardinalidade mínima de  $\mathcal{Q}(5)$ , à direita um conjunto dominante de  $\mathcal{Q}(6)$  determinado a partir do primeiro.

Em [6] é apresentado um limite inferior e um superior para  $\gamma(\mathcal{Q}(n))$ , ambos através de conversas privadas de E. Cockayne com P. H. Spencer e L. Welch, respetivamente.

Estes dois limites são apresentados nos dois seguintes teoremas e as suas provas foram retiradas do mesmo artigo, no entanto, como foi referido no comentário adicionado em 2003 ao artigo [11], uma prova do limite inferior já tinha sido publicada por V. Raghavan em [13].

**Teorema 4.5.2.** [6] Para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma(\mathcal{Q}(n)) \geq \frac{n-1}{2}$ .

*Demonstração.* Nesta prova, uma linha ou coluna de  $\mathcal{T}_n$  que contenha uma rainha diz-se ocupada.

Considere-se um conjunto dominante de cardinalidade mínima sobre o tabuleiro e seja  $a$  ( $b$ ) a coluna mais à esquerda (direita) não ocupada e seja  $c$  ( $d$ ) a linha mais a cima (a baixo) não ocupada. Define-se ainda  $\delta_1 = b - a$  e  $\delta_2 = d - c$  e assume-se, sem perda de generalidade, que  $\delta_1 \geq \delta_2$ .

Considere-se os conjuntos  $S_1$  e  $S_2$  de quadrados na coluna  $a$  e  $b$ , respetivamente, que ficam entre as linhas  $c$  e  $c + \delta_1 - 1$  inclusive e seja  $S = S_1 \cup S_2$ . Uma vez que  $\delta_1 \geq \delta_2$ , nenhuma diagonal intersesta simultaneamente  $S_1$  e  $S_2$ . Assim qualquer rainha domina diagonalmente no máximo 2 quadrados de  $S$ , ou seja, no máximo um por diagonal. As rainhas situadas acima da linha  $c$  ou abaixo da linha  $c + \delta_1 - 1$  não dominam células de  $S$  por linha ou por coluna.

Por definição de  $c$ , existem pelo menos  $c - 1$  rainhas acima da linha  $c$ . Cada linha

abaixo de  $d$  está ocupada e  $d = c + \delta_2 \leq c + \delta_1$ . Deste modo todas as  $n - c - \delta_1$  linhas abaixo da linha  $c + \delta_1$  estão ocupadas e portanto existem pelo menos  $n - c - \delta_1$  rainhas abaixo da linha  $c + \delta_1 - 1$ .

Consequentemente tem-se pelo menos  $(c - 1) + (n - c - \delta_1) = n - \delta_1 - 1$  rainhas nessas linhas e cada um delas domina no máximo 2 das células de  $S$ . Cada uma das restantes rainhas, das quais existem no máximo  $\gamma(\mathcal{Q}(n)) - (n - \delta_1 - 1)$ , consegue cobrir no máximo 4 células de  $S$ . Uma vez que todas as  $2\delta_1$  células de  $S$  têm de ser dominadas, tem-se que

$$2(n - \delta_1 - 1) + 4(\gamma(\mathcal{Q}(n)) - (n - \delta_1 - 1)) \geq 2\delta_1,$$

que leva a que  $\gamma \geq \frac{n-1}{2}$  como pretendido.  $\square$

**Teorema 4.5.3.** [6] *Seja  $n = 3q + r$  com  $0 \leq r \leq 2$ . Então  $\gamma(\mathcal{Q}(n)) \leq 2q + r$ .*

*Demonstração.* Começando para o caso em que  $n = 3q$ , vai-se provar que  $\gamma(\mathcal{Q}(n)) \leq \frac{2n}{3}$ . Dividindo  $\mathcal{T}_n$  em 9 quadrados de  $q \times q$  células, com a etiquetação de quadrados correspondente à da Figura 4.8a, coloca-se  $q$  rainhas na diagonal principal do terceiro quadrado,  $(n - 1)$  rainhas na diagonal acima da diagonal principal do sétimo quadrado e ainda uma última rainha no canto inferior esquerdo deste sétimo quadrado.

Estas  $2q$  rainhas cobrem o tabuleiro todo, basta reparar que as células do quadrado 5 são dominadas pelas rainhas que têm na mesma diagonal e as células dos restantes quadrado pelas rainhas que têm na mesma linha ou coluna.

Para  $n = 3q + r$  onde  $r = 1, 2$ , considere-se a configuração da Figura 4.8a com o acréscimo de  $r$  linhas extras no fundo do tabuleiro e  $r$  colunas à direita, como está descrito na Figura 4.8b. Uma nova rainha é colocada na posição  $(3q + 1, 3q + 1)$  para  $r = 1$  e ainda na posição  $(3q + 2, 3q + 2)$  para  $r = 2$ .

Naturalmente os  $2q + r$  vértices correspondentes às posições das rainhas são um conjunto dominante de todos os vértices de  $\mathcal{Q}(3q + r)$ .  $\square$

Através das experiências computacionais efetuados em [11], conhecem-se outros números de dominância para além dos apresentados na Tabela 4.1.

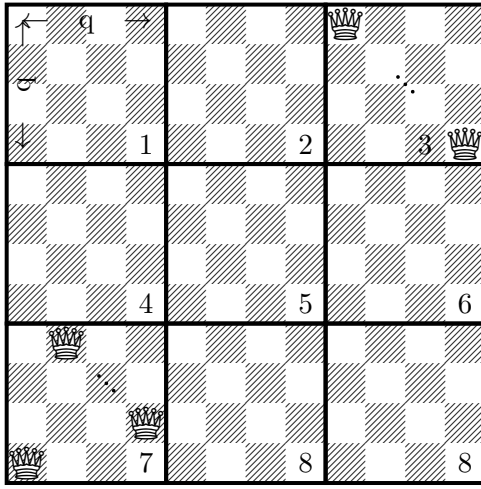
Estes números são apresentados na Tabela 4.2 para valores de  $n$  tais que  $n = 9i + j$  com  $j = 0, 1, \dots, 8$  e  $i = 1, 2, \dots, 14$ . Alguns destes números já teriam sido publicados, como o próprio autor refere em [11].

O maior valor de  $n$  para o qual é conhecido o seu número de dominância de  $\mathcal{Q}(n)$  é  $n = 131$ . No entanto, este parâmetro ainda não é conhecido mesmo para vários valores de  $n$  inferiores a 131.

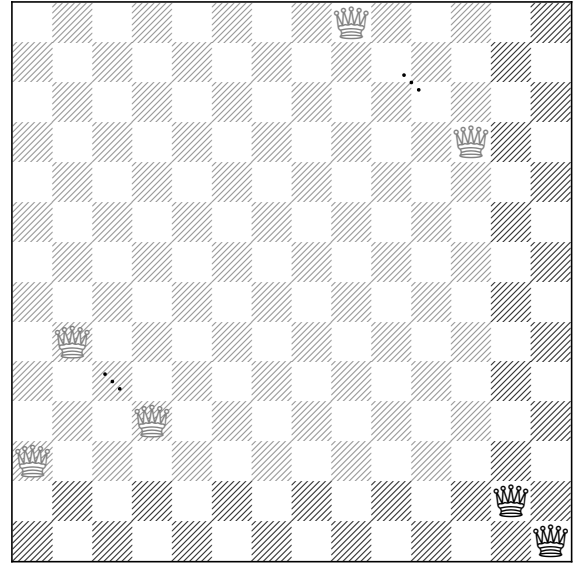
O problema mantém-se em aberto sendo importante notar que os valores obtidos para  $\mathcal{Q}(n)$  rondam o valor  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ .

Uma vez que a partir da Tabela 4.2 o maior valor de  $n$  para o qual se conhece o





(a)



(b)

Figura 4.8: Exemplo que ilustra a demonstração do Teorema 4.5.3.

$i \setminus j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	5	5	5	6	7	8	9	9	9
2	9	10		11		12		13	
3	14		15	15	16		17		
4		19		20		21			
5	23				25				27
6				29				31	
7			33				35		36
8		37				39			
9	41				43				45
10		46		47				49	
11			51				53		
12		55				57		58	
13	59				61				63
14				65	65	66			

Tabela 4.2: Valores de  $\gamma(\mathcal{Q}(9i + j))$ , para  $j = 0, 1, \dots, 8$  e  $i = 1, 2, \dots, 14$ .

número de dominância do Grafo das Rainhas corresponde a  $\gamma(\mathcal{Q}(131)) = 66$  e tendo em conta o Teorema 4.5.1, surge o seguinte Corolário.

**Corolário 4.5.4.** Para  $n \geq 131$ ,  $\gamma(\mathcal{Q}(n)) \leq n - 65$ .

Alguns dos resultados deste capítulo, não tinham até agora destaque na bibliografia existente: apareciam como referência ao longo dos textos e não com a distinção devida à sua importância. Outros provêm de obras de diversos autores ou de consequências dos resultados por eles obtidos. Para outros ainda, desconhece-se se as provas foram ou não publicadas.

No próximo capítulo serão conhecidas várias propriedades do espectro do Grafo das Rainhas, uma questão que até agora, tanto quanto se sabe, não havia sido estudada. Como consequência, presume-se que vários resultados apresentados sejam originais.

# Capítulo 5

## Propriedades Espectrais de $\mathcal{Q}(n)$

Este trabalho teve início precisamente com a análise do espectro do Grafo das Rainhas para diferentes ordens. Através de experiências computacionais, notou-se um comportamento idêntico e bastante curioso de  $\sigma(\mathcal{Q}(n))$ , o que despertou o interesse em estudar este tipo de grafos mais profundamente.

Neste capítulo os vetores serão apresentados sobre o tabuleiro de xadrez e, portanto, a  $i$ -ésima entrada de um vetor com  $n^2$  componentes será representada no quadrado de  $\mathcal{T}_n$  correspondente ao vértice  $i$  de  $\mathcal{Q}(n)$ .

Por este motivo, cada entrada  $x_{(p,q)}$  de um vetor  $X = (x_{(i,j)}) \in \mathbb{R}^{n^2}$  corresponde à célula de coordenadas  $(p, q)$  do tabuleiro  $\mathcal{T}_n$ .

### 5.1 Limites em $\sigma(\mathcal{Q}(n))$

Seja  $G$  um grafo,  $A_G$  a sua matriz de adjacência,  $\Delta(G)$  o maior grau dos seus vértices e  $\mu_1$  o seu maior valor próprio.

Alguns limites inferiores e superiores são conhecidos para os valores próprios de um grafo. Neste âmbito, de seguida serão apresentados alguns resultados clássicos da Teoria Espectral dos Grafos.

O teorema seguinte utiliza o conceito de grau médio dos vértices para estabelecer um limite inferior do maior valor próprio de  $G$ . A prova pode ser consultada em [3].

**Teorema 5.1.1.** *Seja  $\bar{d}$  o valor médio dos graus dos vértices de um grafo  $G$ . Então,*

$$\bar{d} = \frac{2\varepsilon(G)}{v(G)} \leq \mu_1(A_G), \quad (5.1)$$

*e a igualdade ocorre se e só se  $G$  é regular.*

Em [3] é ainda referido e provado um limite superior e inferior para os valores próprios de um grafo através do grau máximo dos vértices, apresentado no seguinte Lema.

**Lema 5.1.2.** *Qualquer que seja o valor próprio  $\mu$  de  $A_G$ ,*

$$-\Delta(G) \leq \mu \leq \Delta(G). \quad (5.2)$$

Em [16], é apresentado um outro limite superior para  $\mu_{\max}(G)$  diferente do anterior e que tem como base o número de arestas de  $G$ ,  $e(G)$ . Este outro limite é apresentado no seguinte teorema.

**Teorema 5.1.3.** *([16]) Para um dado grafo  $G$  de ordem  $n$ , dimensão  $e(G)$  e sem vértices isolados,*

$$\mu_1 \leq \frac{-1 + \sqrt{1 + 8e(G)}}{2}, \quad (5.3)$$

*com a igualdade ocorre se e só se  $G$  é completo.*

Os dois últimos teoremas fornecem dois possíveis limites superiores para  $\mathcal{Q}(n)$ . Pela desigualdade de (5.1) e tendo ainda em conta (4.1)

$$\mu_1(\mathcal{Q}(n)) \leq \begin{cases} 4n - 5, & \text{se } n \text{ é par;} \\ 4n - 4, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

e pela desigualdade (5.3)

$$\mu_1(\mathcal{Q}(n)) \leq \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{8n(n-1)(5n-1)}{3}}}{2}.$$

Com o aumento de  $n$ , o primeiro limite cresce linearmente com  $n$ , enquanto o segundo cresce proporcionalmente a  $n^{\frac{3}{2}}$  mostrando-se um pior limite neste caso específico.

Assim, por (5.1) e por (5.2), vem que

$$\frac{2(n-1)(5n-1)}{3n} \leq \mu_1(\mathcal{Q}(n)) \leq \begin{cases} 4n - 5, & \text{se } n \text{ é par;} \\ 4n - 4, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.4)$$

De seguida, apresenta-se um resultado que vai permitir estabelecer um limite inferior para qualquer valor próprio de  $\mathcal{Q}(n)$ .

**Lema 5.1.4.** *Se  $\mu$  é um valor próprio de  $\mathcal{Q}(n)$  e  $X \in \mathcal{E}_{\mathcal{Q}(n)}(\mu)$ , então*

$$\begin{aligned} (\mu + 4)\|X\|^2 = & \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n x_{(k,j)} \right)^2 + \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n x_{(i,k)} \right)^2 + \\ & + \sum_{k=2}^{2n} \left( \sum_{i+j=k} x_{(i,j)} \right)^2 + \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left( \sum_{i-j=k} x_{(i,j)} \right)^2. \end{aligned} \quad (5.5)$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}
(\mu + 4) \|X\|^2 &= \mu \|X\|^2 + 4 \|X\|^2 \\
&= X \cdot (A_{\mathcal{Q}(n)} X) + 4 \|X\|^2 \\
&= 2 \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i \neq j} x_{(k,i)} x_{(k,j)} \right) + 2 \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i \neq j} x_{(i,k)} x_{(j,k)} \right) + \\
&\quad + 2 \sum_{k=2}^{2n} \left( \sum_{\substack{i+j=k \\ i'+j'=k}} x_{(i,j)} x_{(i',j')} \right) + \\
&\quad + 2 \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left( \sum_{\substack{i-j=k \\ i'-j'=k}} x_{(i,j)} x_{(i',j')} \right) + 4 \sum_{(i,j) \in [n]^2} x_{(i,j)}^2 \\
&= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n x_{(k,j)} \right)^2 + \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n x_{(i,k)} \right)^2 + \\
&\quad + \sum_{k=2}^{2n} \left( \sum_{i+j=k} x_{(i,j)} \right)^2 + \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left( \sum_{i-j=k} x_{(i,j)} \right)^2.
\end{aligned}$$

□

**Teorema 5.1.5.** *Se  $\mu$  é um valor próprio de  $\mathcal{Q}(n)$ , então  $\mu \geq -4$ .*

*Demonstração.* Por (5.1.4) sabe-se que  $(\mu + 4)\|X\|^2 \geq 0$  e uma vez que  $X \neq 0$ ,  $\mu \geq -4$ . □

Com estes resultados, conclui-se que qualquer valor próprio de  $\mathcal{Q}(n)$  é igual ou superior a  $-4$ . Na próxima secção vamos verificar que este limite é atingido para valores de  $n$  não inferiores a 4 e portanto  $-4$  será o menor valor próprio de  $\mathcal{Q}(n)$  para esses mesmos valores.

## 5.2 Valores próprios e vetores próprios de $\mathcal{Q}(n)$

A determinação computacionalmente do espectro de  $\mathcal{Q}(n)$  trouxe alguma sensibilidade daquilo que poderia ser o seu comportamento para qualquer ordem do Grafo das Rainhas.

Na Tabela 5.1 é possível analisar  $\sigma(\mathcal{Q}(n))$  para pequenos valores de  $n$  e, ainda que  $\sigma(\mathcal{Q}(n))$  tenha sido determinado para todas as dimensões até  $n = 11$ . No entanto nem todos os valores próprios distintos são apresentados na tabela dado o seu elevado número quando  $n$  cresce.

$n$	$\sigma(\mathcal{Q}(n))$
2	$\{3, -1^{[3]}\}$
3	$\left\{\frac{5+\sqrt{57}}{2}, 1, (-1+\sqrt{2})^{[2]}, -1^{[2]}, \frac{5+\sqrt{57}}{2}, (-1-\sqrt{2})^{[2]}\right\}$
4	$\{9.6, 1.8^{[2]}, 1.7, 1.3, 0.5^{[2]}, 0, -0.4, -0.8, -1.5^{[2]}, -2.8^{[2]}, 3.3, -4\}$

Tabela 5.1: Espetro de  $\mathcal{Q}(n)$  para  $n = 2, 3, 4$ .

Considerando o espectro de  $\mathcal{Q}(n)$ , os valores próprios inteiros e respectivas multiplicidades apresentam um comportamento com características invariantes e correlacionados, para valores de  $n$  tais que  $4 \leq n \leq 11$ , conforme a Tabela 5.2 ilustra.

$n$	valores próprios inteiros de $\mathcal{Q}(n)$			
4	-4			0
5	-4 <sup>[4]</sup>	-3	0	1 <sup>[2]</sup>
6	-4 <sup>[9]</sup>			2 <sup>[2]</sup>
7	-4 <sup>[16]</sup>	-3, -2	1, 2	3 <sup>[3]</sup>
8	-4 <sup>[25]</sup>			4 <sup>[3]</sup>
9	-4 <sup>[36]</sup>	-3, -2, -1	2, 3, 4	5 <sup>[4]</sup>
10	-4 <sup>[49]</sup>			6 <sup>[4]</sup>
11	-4 <sup>[64]</sup>	-3, -2, -1, 0	3, 4, 5, 6	7 <sup>[5]</sup>

Tabela 5.2: Valores próprios inteiros de  $\mathcal{Q}(n)$  e respectivas multiplicidades, para  $4 \leq n \leq 11$ .

Depois de obtidos estes resultados e com alguma sensibilidade, repara-se que para os valores indicados de  $n$

- $-4$  é sempre valor próprio de  $\mathcal{Q}(n)$  de multiplicidade  $(n-3)^2$ ;
- $n-4$  é sempre valor próprio de  $\mathcal{Q}(n)$  de multiplicidade  $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ ;
- para  $n$  ímpar,  $-3, \dots, \frac{n-11}{2}$  e  $\frac{n-5}{2}, \dots, n-5$  são valores próprios de  $\mathcal{Q}(n)$  de multiplicidade 1.

Perante esta persistência de comportamento a respeito dos valores próprios, passou-se para a análise dos vetores próprios a que lhes estão associados e também em relação a eles se notou um certo padrão.

Note-se que conhecendo um certo número  $p$  de vetores próprios linearmente independentes,  $v_1, \dots, v_p$ , associados a um valor próprio  $\mu$  de um grafo, podemos concluir que  $\mu$  é valor próprio desse grafo com multiplicidade não inferior a  $p$ .

Tendo estas considerações, nas próximas duas subsecções vai ser provado que alguns destes comportamentos identificados relativos aos valores próprios se verificam para todos os Grafos das Rainhas.

### 5.2.1 Valor Próprio $-4$

Os resultados obtidos das experiências computacionais, indicam que

$$F_4 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

é um vetor próprio de  $\mathcal{Q}(4)$  associado a  $-4$ , e os vetores

$$F_5^{(1,1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$F_5^{(1,2)} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$F_5^{(2,1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$F_5^{(2,2)} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

são vetores próprios de  $\mathcal{Q}(5)$  associados a  $-4$ .

Com a apresentação sobre o tabuleiro, nota-se que estes quatro vetores são obtidos de  $F_4$  acrescentando uma linha e coluna de zeros (com uma célula em comum) aos bordos horizontal inferior e vertical direito, horizontal inferior e vertical esquerdo, horizontal superior e vertical direito e horizontal superior e vertical esquerdo.

Para os restantes valores de  $n$ , os  $(n - 3)^2$  vetores próprios associados a  $-4$  têm exatamente a mesma estrutura: são obtidos através de  $F_4$ , acrescentando linhas e colunas de zeros, acima, abaixo, à esquerda e à direita, entre todas as combinações possíveis, o que nos leva à definição da seguinte família de vetores.

**Definição 5.2.1.** Os vetores do conjunto  $\mathcal{F}_n = \{F_n^{(a,b)} \in \mathbb{R}^{n^2} : n \in \mathbb{N}, n \geq 4, (a,b) \in [n-3]^2\}$  são tais que

$$[F_n^{(a,b)}]_{(i,j)} = \begin{cases} [F_4]_{(i-a+1, j-b+1)}, & \text{se } (i,j) \in A \times B, \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases} \quad (5.6)$$

com  $A = \{a, a+1, a+2, a+3\}$  e  $B = \{b, b+1, b+2, b+3\}$ .

Com recurso a esta notação, podemos avançar para o seguinte teorema.

**Teorema 5.2.1.** Para  $n \geq 4$ ,  $X \in \mathcal{E}_{\mathcal{Q}(n)}(-4)$  se e só se

- $\sum_{i=1}^n x_{(i,k)} = 0$ , para todo o  $k \in [n]$ ,
- $\sum_{j=1}^n x_{(k,j)} = 0$ , para todo o  $k \in [n]$ ,
- $\sum_{i+j=k} x_{(i,j)} = 0$ , para todo o  $k \in [2, 2n]$ ,
- e  $\sum_{i-j=k} x_{(i,j)} = 0$ , para todo o  $k \in [-(n-1), n-1]$ .

*Demonstração.* A demonstração é consequência direta do Lema 5.1.4. □

**Teorema 5.2.2.** Para  $n \geq 4$ ,  $-4$  é valor próprio de  $\mathcal{Q}(n)$  com multiplicidade  $(n-3)^2$  e  $\mathcal{F}_n$  é uma base de  $\mathcal{E}_{\mathcal{Q}(n)}(-4)$ .

*Demonstração.* Note-se que todo o elemento de  $\mathcal{F}_n$  pertence a  $\mathcal{E}_{\mathcal{Q}(n)}(-4)$  pois cumpre as quatro condições do teorema anterior.

Suponhamos que  $\mathcal{F}_n$  é um conjunto linearmente dependente. Então existem  $\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{n-3,n-3} \in \mathbb{R}$  não simultaneamente 0, tais que

$$\alpha_{1,1}F_n^{(1,1)} + \dots + \alpha_{n-3,n-3}F_n^{(n-3,n-3)} = 0. \quad (5.7)$$

Seja  $n(i-1) + j$  o menor inteiro tal que  $\alpha_{(i,j)} \neq 0$ . Então à  $(i, j+1)$ -ésima entrada do vetor do primeiro membro de (5.7) corresponde o valor de  $\alpha_{(i,j)}$ . Por suposição essa entrada é não nula e por outro lado, como a igualdade (5.7) tem de ser verificada,  $\alpha_{(i,j)} = 0$ .

Assim, podemos concluir que  $\mathcal{F}_n$  é um conjunto linearmente independente e, consequentemente,  $\dim(\mathcal{E}_{\mathcal{Q}(n)}(-4)) \geq (n-3)^2$ .

Para terminar, vamos provar que os vetores de  $\mathcal{F}_n$  geram o subespaço próprio  $\mathcal{E}_{\mathcal{Q}(n)}(-4)$ . Seja  $S \subseteq [n]^2$  o conjunto de índices de  $(p,q) \in [n]^2$  tal que a entrada  $x_{(p,q)}$  de  $X = (x_{(i,j)}) \in \mathcal{E}_{\mathcal{Q}(n)}(-4)$  é completamente determinada pelas entradas  $x_{(i+1,j)}$  com  $(i,j) \in [n-3]^2$ .



É claro que  $[n-3] \times ([n-2] \setminus \{1\}) \subset S$ .

Sabendo que a soma dos elementos das linhas, colunas e diagonais de  $X$  é nula:

$$\begin{aligned} x_{(1,1)} &= x_{(n,1)} = 0, \\ x_{(i,1)} &= - \sum_{k=2}^i x_{(k,i+1-k)}, \text{ para qualquer } 2 \leq i \leq n-2 \text{ e} \\ x_{(n-1,1)} &= - \sum_{i=2}^{n-2} x_{(i,1)} \end{aligned}$$

o que leva a que  $[n] \times \{1\} \subset S$ .

Adicionalmente,

$$\begin{aligned} x_{(1,n)} &= x_{(n,n)} = 0, \\ x_{(i,n-1)} &= - \sum_{j=1}^{n-2} x_{(i,j)} - x_{(i,n)}, \text{ para qualquer } 1 \leq i \leq n-3, \\ x_{(i+1,n)} &= - \sum_{k=1}^i x_{(k,n-1-i-k)}, \text{ para qualquer } 1 \leq i \leq n-3, \\ x_{(n-1,n)} &= - \sum_{i=2}^{n-2} x_{(i,n)}, \quad x_{(n-2,n-1)} = - \sum_{k=1}^{n-3} x_{(k,k+1)} - x_{(n-1,n)} \text{ e} \\ x_{(n,n-1)} &= -x_{(n-1,n)}, \quad x_{(n-1,n-1)} = - \sum_{i=2}^{n-2} x_{(i,n-1)} - x_{n,n-1}, \end{aligned}$$

e portanto  $[n] \times \{n-1, n\} \subset S$ .

Finalmente tem-se que

$$\begin{aligned} x_{(n,j)} &= - \sum_{k=j}^{n-1} x_{(k,n+j-k)}, \\ x_{(n-2,j)} &= - \sum_{k=1}^{j-1} x_{(n-2-j+k,k)} - x_{(n-1,j+1)} - x_{(n,j+2)} \text{ e} \\ x_{(n-1,j)} &= - \sum_{i=1}^{n-2} x_{(i,j)} - x_{(n,j)}, \text{ para qualquer } n-2 \geq j \geq 2, \end{aligned}$$

e portanto  $\{n-2, n-1, n\} \times ([n-2] \setminus \{1\}) \subset S$ . Como  $S = [n]^2$ , é necessário que  $\dim(\mathcal{E}_{\mathcal{Q}(n)}) \leq (n-3)^2$  o que leva a concluir que  $\dim(\mathcal{E}_{\mathcal{Q}(n)}) = (n-3)^2$ .  $\square$

É agora conhecido um valor próprio  $\mathcal{Q}(n)$  para  $n \geq 4$  assim como uma base do subespaço próprio associado. Na próxima secção, estudamos o valor próprio  $n-4$ .

### 5.2.2 Valor Próprio $n - 4$

Considere-se as seguintes definições.

**Definição 5.2.2** (Vetores linha, coluna, diferença e soma). Define-se vetor linha  $L_i$ , vetor coluna  $C_i$ , vetor diferença  $D_i$  e vetor soma  $S_i$  de dimensão  $n^2$ , com  $i \in \mathbb{N}$ , como sendo os vetores

$$L_i(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = i, \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

$$C_i(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y = i \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

$$D_i(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x - y = i \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

$$S_i(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x + y = i \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

$$C_3 =$$

0	0	1	0
0	0	1	0
0	0	1	0
0	0	1	0

$$D_{-1} =$$

0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1
0	0	0	0

Tabela 5.4: Exemplos de  $C_3$  e  $D_{-1}$  de ordem 16.

Note-se que, para vetores do espaço de dimensão  $n^2$ ,  $L_i, C_j, D_a$  e  $S_b$  só não são os vetores nulos para  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq n$ ,  $-(n-1) \leq a \leq n-1$  e  $2 \leq b \leq 2n$ .

Como referido no início desta secção,  $n - 4$  é valor próprio de  $\mathcal{Q}(n)$  com  $n \geq 4$ . De entre os vetores próprios associados ao valor próprio  $n - 4$  obtêm-se para  $\mathcal{Q}(5)$  os vetores que a seguir se indicam

0	1	0	1	0
-1	0	-1	0	-1
0	1	0	1	0
-1	0	-1	0	-1
0	1	0	1	0

$$= C_2 + C_4 - L_2 - L_4$$

0	0	1	0	0
0	0	1	0	0
-1	-1	0	-1	-1
0	0	1	0	0
0	0	1	0	0

$$= C_3 - L_3$$

1	0	0	0	-1
0	1	0	-1	0
0	0	0	0	0
0	-1	0	1	0
-1	0	0	0	1

$$= D_0 - S_6$$

e para  $\mathcal{Q}(6)$  os vetores

0	1	0	0	1	0
-1	0	-1	-1	0	-1
0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0
-1	0	-1	-1	0	-1
0	1	0	0	1	0

$$= C_2 + C_5 - L_2 - L_5$$

0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0
-1	-1	0	0	-1	-1
-1	-1	0	0	-1	-1
0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0

$$= C_3 + C_4 - L_3 - L_4.$$

Para os restantes grafos  $\mathcal{Q}(n)$  para os quais se calculou o espectro, nas respetivas ordens,  $n - 4$  aparece associado aos vetores próprios  $C_i + C_{n-i+1} - L_i - L_{n-i+1}$  com  $i \in \{2, \dots, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor\}$  e ainda ao vetor  $D_0 - S_{n+1}$  para os casos em que  $n$  é ímpar. Deste modo, vem o seguinte teorema.

**Teorema 5.2.3.** *Para  $n \geq 3$ ,  $n - 4$  é um valor próprio de  $\mathcal{Q}(n)$  de multiplicidade pelo menos*

$$\begin{cases} \frac{n-2}{2}, & \text{se } n \text{ é par,} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

*Além disso,  $\{Y_i^n = C_i + C_{n-i+1} - L_i - L_{n-i+1} : i = 2, \dots, \frac{n}{2}\}$  e  $\{Y_i^n = C_i + C_{n-i+1} - L_i - L_{n-i+1} : i = 2, \dots, \frac{n+1}{2}\} \cup \{Z^n = D_0 - S_{n+1}\}$  são vetores linearmente independentes de  $\mathcal{E}_{\mathcal{Q}(n)}(n - 4)$  para  $n$  par e  $n$  ímpar, respetivamente.*

*Demonstração.* Nesta prova, assume-se  $n \geq 3$  e ímpar. Para  $n$  par, a prova é semelhante.

Note-se que  $Y_k^n \in \mathcal{E}_{\mathcal{Q}(n)}(n - 4)$ , para qualquer  $k \in [\frac{n+1}{2}]$ , e que  $Z^n \in \mathcal{E}_{\mathcal{Q}(n)}(n - 4)$ . Uma vez que

$$C_k(p, q) = L_k(q, p) \text{ e } C_{n+1-k}(p, q) = L_{n+1-k}(q, p),$$

tem-se que

$$\sum_{p+q=i+j} (Y_k^n)_{(p,q)} = 0.$$

Do mesmo modo, visto que

$$C_k(p, q) = L_{n+1-k}(n + 1 - q, n + 1 - p) \text{ e } C_{n+1-k}(p, q) = L_k(n + 1 - q, n + 1 - p),$$

tem-se que

$$\sum_{p-q=i-j} (Y_k^n)_{(p,q)} = 0.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned}
(A_{\mathcal{Q}(n)} Y_k^n)_{(i,j)} &= \sum_{(p,q) \in N(i,j)} (Y_k^n)_{(p,q)} \\
&= \sum_{p=i} (Y_k^n)_{(p,q)} + \sum_{q=j} (Y_k^n)_{(p,q)} + \\
&\quad + \sum_{p+q=i+j} (Y_k^n)_{(p,q)} + \sum_{p-q=i-j} (Y_k^n)_{(p,q)} - 4(Y_k^n)_{(i,j)} \\
&= \sum_{p=i} (Y_k^n)_{(p,q)} + \sum_{q=j} (Y_k^n)_{(p,q)} - 4(Y_k^n)_{(i,j)} \\
&= \begin{cases} -(n-2) + (n-2) - 0 = 0 & \text{se } i, j \in \{k, n+1-k\}, \\ -(n-2) - 2 + 4 = -(n-4) & \text{se } i \in \{k, n+1-k\} \text{ mas } j \notin \{k, n+1-k\}, \\ 2 + (n-2) - 4 = n-4 & \text{se } j \in \{k, n+1-k\} \text{ mas } i \notin \{k, n+1-k\}, \\ -2 + 2 - 0 = 0 & \text{se } i, j \notin \{k, n+1-k\}, \end{cases} \\
&= (n-4)(Y_k^n)_{(p,q)}.
\end{aligned}$$

Do mesmo modo,

$$\sum_{p=i} (Z^n)_{(p,q)} = 0 = \sum_{q=j} (Z^n)_{(p,q)}.$$

e portanto

$$\begin{aligned}
(A_{\mathcal{Q}(n)} Z^n)_{(i,j)} &= \sum_{(p,q) \in N(i,j)} (Z^n)_{(p,q)} \\
&= \sum_{p=i} (Z^n)_{(p,q)} + \sum_{q=j} (Z^n)_{(p,q)} + \\
&\quad + \sum_{p+q=i+j} (Z^n)_{(p,q)} + \sum_{p-q=i-j} (Z^n)_{(p,q)} - 4(Z^n)_{(i,j)} \\
&= \sum_{p+q=i+j} (Z^n)_{(p,q)} + \sum_{p-q=i-j} (Z^n)_{(p,q)} - 4(Z^n)_{(i,j)} \\
&= \begin{cases} (n-1) - (n-1) - 0 = 0 & \text{se } i = \frac{n+1}{2} = j, \\ 1 + (n-1) - 4 = n-4 & \text{se } i = j \neq \frac{n+1}{2}, \\ -(n-1) - 1 + 4 = -(n-4) & \text{se } i = n+1-j \neq \frac{n+1}{2}, \\ 0 + 0 - 0 = 0 & \text{se } i \neq j, i+j \neq n+1, \text{ e } i+j \text{ par}, \\ 1 - 1 - 0 = 0 & \text{se } i \neq j, i+j \neq n+1, \text{ e } i+j \text{ ímpar}, \end{cases} \\
&= (n-4)(Z^n)_{(p,q)}.
\end{aligned}$$

Note-se que  $\{Y_1^n, Y_2^n, \dots, Y_{\frac{n+1}{2}}^n\}$  é linearmente dependente pois

$$Y_1^n + Y_2^n + \dots + Y_{\frac{n-1}{2}}^n + \frac{1}{2} Y_{\frac{n+1}{2}}^n = 0.$$

No entanto  $\left\{Y_1^n, Y_2^n, \dots, Y_{\frac{n-1}{2}}^n, Z^n\right\}$  é linearmente independente. Por outro lado sejam  $\alpha_1, \dots, \alpha_{\frac{n-1}{2}}, \beta$  não nulos simultaneamente tais que

$$L := \alpha_1 Y_1^n + \alpha_2 Y_2^n + \cdots + \alpha_{\frac{n-1}{2}} Y_{\frac{n-1}{2}}^n + \beta Z^n = 0.$$

Então  $L_{(1,1)} - L_{(1,n)} = 2\beta = 0$ , consequentemente  $\beta = 0$  e

$$\alpha_1 Y_1^n + \alpha_2 Y_2^n + \cdots + \alpha_{\frac{n-1}{2}} Y_{\frac{n-1}{2}}^n = 0.$$

Seja  $k \in [\frac{n-1}{2}]$  o menor inteiro tal que  $\alpha_k \neq 0$ . Então  $L_{(\frac{n-1}{2}, k)} = \alpha_k = 0$  entrando em contradição com a definição de  $k$ .

Portanto tem-se que  $\dim \mathcal{E}_{\mathcal{Q}(n)}(n-4) \geq \frac{n+1}{2}$ .  $\square$

Um novo valor próprio de  $\mathcal{Q}(n)$  é agora conhecido,  $n - 4$ , assim como a sua multiplicidade que é pelo menos  $\frac{n-1}{2}$  e  $\frac{n+1}{2}$ , para  $n$  par e ímpar respetivamente.

### 5.2.3 Valores próprios inteiros de $Q(n)$ para $n = 3, 5, 7, 9, 11$

Como já tinha sido indicado na Tabela 5.2, para os respectivos valores ímpares de  $n$ ,  $-3, \dots, \frac{n-5}{2}, \frac{n-11}{2}, \dots, n-5$  são valores próprios simples de  $\mathcal{Q}(n)$ .

A intuição que este comportamento poderá ser verificado para todas as ordens ainda não é certa, no entanto de seguida serão apresentados alguns dos vetores próprios obtidos associados a estes valores próprios e dada uma ideia de como é a sua estrutura.

Para o valor próprio  $-3$ , os vetores próprios obtidos para diferentes ordens de  $\mathcal{Q}(n)$  foram os apresentados na Figura 5.1, onde as casas em branco, representam o valor 0.

Figura 5.1: Vetores próprios associados ao valor próprio  $-3$  do espectro de  $\mathcal{Q}(n)$ , com  $n = 5, 7, 9$ .

É evidente, neste caso, que a estrutura do vetor é exatamente a soma dos vetores  $S_{n+1} - D_0 + \left(\frac{n-1}{2}\right) (S_2 + S_{2n} - D_{n-1} - D_{-(n-1)})$ .

Note-se a semelhança destes vetores com o vetor  $D_0 - S_{n+1}$ , associado ao valor próprio  $n - 4$  precisamente para os mesmos valores de  $n$ , referido na secção anterior.

Para o valor próprio  $-2$ , a estrutura é idêntica mas com as diagonais que visualmente aparecem sobre o tabuleiro com largura dois. Note-se que não são apresentadas ordens inferiores pois  $-2$  não é valor próprio para essas mesmas ordens.

	1				-1				2						-2	
1		-1		1		-1			2		-1				1	-2
	-1				1				-1		-1		1		1	
											-1			1		
	1					-1				1				-1		
-1		1		-1		1				1		1		-1	-1	
	-1				1				-2		1			-1		2
									-2						2	

Figura 5.2: Vetores próprios associados ao valor próprio  $-2$  do espectro de  $Q(n)$ , com  $n = 7, 9$ .

Para este caso, é a estrutura de  $n - 5$  que é lhe idêntica, pois os vetores próprios determinados, cumprem efetivamente a expressão  $D_{-1} + D_1 - S_n - S_{n+2}$ . Tal como acontece com o aumento da largura das diagonais de  $-3$  para  $-2$ , também de  $n - 4$  agora para  $n - 5$ , a largura aumenta.

Analisando os restantes vetores próprios, nota-se uma relação na estrutura do vetor próprio de  $-3$  com a de um dos de  $n - 4$ , no vetor de  $-2$  com o de  $n - 5$ , ..., no vetor de  $\frac{n-5}{2}$  com o de  $\frac{n-11}{2}$ . Nota-se também que de  $-3$  até  $\frac{n-5}{2}$ , assim como de  $n - 4$  até  $\frac{n-11}{2}$ , a largura das diagonais vai aumentando uma unidade.

Embora nestes pequenos exemplos, os vetores associados a  $n - 4$  e  $n - 5$  não tivessem elementos com valores diferentes de  $-1, 0$  e  $1$ , com o aumento da ordem, as diagonais apresentadas contém outros valores, como por exemplo para os vetores indicados na Figura 5.3, associados a  $n - 6$ .

Os vetores próprios vão tomando formas idênticas às anteriormente indicadas no entanto torna-se mais difícil determinar uma fórmula que as defina.

		2		-2		
	1				-1	
2		-1		1		-2
-2		1		-1		2
	-1				1	
		-2		2		

		3			-3		
	1		3		-3		-1
3		1			-1		-3
	3		-2		2		-3
	-3		2		-2		3
-3		-1			1		3
	-1		-3		3		1
		-3			3		

Figura 5.3: Vetores próprios associados ao valor próprio  $n - 6$  do espectro de  $\mathcal{Q}(n)$ , com  $n = 7, 9$ .

### 5.3 Partições Equilibradas

O conceito de valor próprio *principal* (*não principal*), introduzido em [7], define-se como sendo um valor próprio  $\mu$  de um grafo  $G$  cujo subespaço próprio  $\mathcal{E}_G(\mu)$  não é (é) ortogonal ao vetor de 1's.

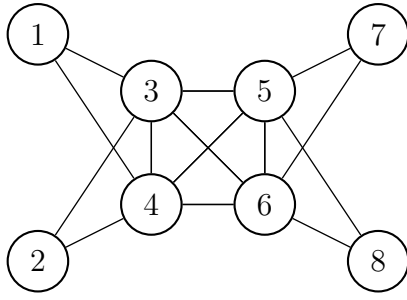
Entre vários trabalhos publicados sobre este tema, em [14] o autor deduz uma relação entre as partições equilibradas de um grafo e os seus valores próprios principais. Para descrevermos esta relação, vamos começar por definir partição equilibrada e matriz quociente de uma partição equilibrada.

**Definição 5.3.1** (Partição Equilibrada). Dado um grafo  $G$ , a partição do conjunto de vértices  $V(G) = V_1 \dot{\cup} V_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V_k$  diz-se uma *partição equilibrada* se cada vértice de  $V_i$  tem o mesmo número de vizinhos em  $V_j$  para todos o  $i, j \in [k]$ .

Uma partição equilibrada de  $V(G)$  diz-se também uma partição equilibrada de  $G$  e os subconjuntos de vértices  $V_1, V_2, \dots, V_k$  são chamados de *células*.

**Definição 5.3.2** (Matriz Quociente). Dada uma partição equilibrada  $\pi$  de  $G$ ,  $V = V_1 \dot{\cup} V_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V_k$ , em que cada célula  $V_i$  tem  $b_{ij}$  vizinhos em  $V_j$  para todos os  $i, j \in [k]$ , a matriz  $B_\pi = (b_{ij})$  diz-se *matriz quociente* de  $\pi$ .

Todo o grafo tem uma partição equilibrada trivial em que cada célula da partição corresponde a cada um dos vértices de  $G$  e em que a matriz quociente desta partição corresponde exatamente à matriz de adjacência de  $G$ . Na Figura 5.4 é apresentado um exemplo de uma partição equilibrada não trivial de um grafo e a respetiva matriz quociente.



Grafo  $G$ .

Células de uma partição equilibrada de  $G$ :

$$V_1 = \{1, 2, 7, 8\}, V_2 = \{3, 4, 5, 6\}.$$

Matriz quociente correspondente:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Figura 5.4: Exemplo de partição equilibrada e respetiva matriz quociente.

Da bibliografia, alguns resultados relativos a valores próprios principais são relevantes para obter novas informações do espetro de  $\mathcal{Q}(n)$ . De [7] sabe-se que, sendo  $G$  um grafo,  $\pi$  uma qualquer partição equilibrada de  $G$  e  $B_\pi$  a sua matriz quociente:

1. o maior valor próprio de  $G$  é principal;
2. todos os valores próprios principais são raízes do polinómio característico de  $B_\pi$ ;
3. o polinómio característico de  $B_\pi$  divide o polinómio característico de  $G$ .

Assim, a partir de uma qualquer partição equilibrada de  $\mathcal{Q}(n)$ , calculando-se o polinómio caraterístico da respetiva matriz quociente, o conjunto das suas raízes é um subconjunto de valores próprios de  $\mathcal{Q}(n)$ , onde se inclui o maior valor próprio.

Tem interesse estudar estas propriedades pois na possibilidade de calcular uma partição equilibrada não trivial de  $\mathcal{Q}(n)$ , o polinómio característico da sua matriz quociente terá grau inferior ao polinómio característico de  $\mathcal{Q}(n)$ .

Com isto torna-se mais fácil o cálculo de um subconjunto das raízes de  $\mathcal{Q}(n)$ , subconjunto esse que tem presente o maior valor próprio. É importante referir que em todas as experiências computacionais, o maior valor próprio era não inteiro.

Uma propriedade interessante do Grafo das Rainhas é que este admite sempre uma partição equilibrada com  $\frac{(\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1) \lceil \frac{n}{2} \rceil}{2}$  células para  $n \geq 3$ .

Este tipo de partições pode ser obtida através do algoritmo descrito de seguida, onde a cada entrada de  $\mathcal{T}_n$  se associa um número. A partição obtém-se fazendo pertencer à mesma célula da partição, os vértices com o mesmo número nas entradas correspondentes do tabuleiro.



---

**Algorithm 1** Determinação de uma partição equilibrada de  $\mathcal{Q}(n)$ .

---

**Entrada** Tabuleiro de xadrez  $n \times n$ ,  $\mathcal{T}_n$ .

**Saída** Etiquetação das entradas de  $\mathcal{T}_n$ .

---

**Parte 1** - Etiquetação

1. Assinalar a primeira entrada da primeira coluna - (1,1) - com o número 0;
2. Assinalar as primeiras duas entradas da segunda coluna - (1,2) e (2,2) - com os números 1 e 2, respetivamente;
- $\vdots$
- $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ . Assinalar as primeiras  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  entradas da  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ -ésima coluna - (1,  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ ), (2,  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ ), ..., ( $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ ,  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ ) - com os números  $\sum_{i=0}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} i + 1, \dots, \frac{(\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1) \lceil \frac{n}{2} \rceil}{2} - 1$ , respetivamente.

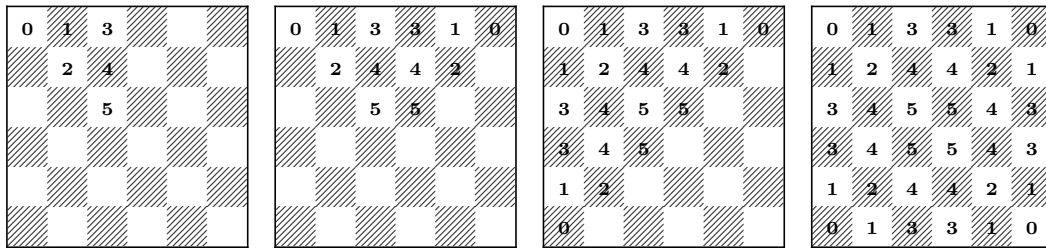
**Parte 2** - Reflexão

1. Refletir o triângulo de entradas preenchidas nos passos anteriores segundo o eixo vertical central do tabuleiro (respeitante à  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ -ésima coluna no caso de  $n$  ímpar, ou entre as  $\frac{n}{2}$ -ésima e  $(\frac{n}{2} + 1)$ -ésima colunas se par).
2. Refletir as casas já preenchidas através da diagonal principal de  $\mathcal{T}_n$ .
3. Refletir as casas já preenchidas através da diagonal secundária de  $\mathcal{T}_n$ .

**Fim de Algoritmo.**

---

A título de exemplo, aplicamos o Algoritmo 1 a  $\mathcal{T}_6$ , obtendo-se a sequência de etiquetação das entradas de  $\mathcal{T}_6$  descrita na Figura 5.5.



(a) Parte 1.

(b) Parte 2 - 1.

(c) Parte 2 - 2.

(d) Parte 2 - 3.

Figura 5.5: Exemplo de aplicação do Algoritmo 1.

Para a determinação da partição equilibrada correspondente, basta considerar que entradas com o mesmo número, correspondem a vértices da mesma célula da partição.

Para esta partição, obteve-se a matriz quociente

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

de ordem 6. Calculando o respetivo polinómio característico, obtém-se

$$p_B(x) = x^6 - 20x^5 + 75x^4 + 49x^3 - 506x^2 + 455x + 42$$

que tem como raízes  $\{14.89, 3.75, 2.48, -2.48, 1.45, -0.08\}$ .

Estas raízes são valores próprios de  $\mathcal{Q}(6)$  e entre elas estão todos os valores próprios principais, nomeadamente o maior valor próprio deste Grafo das Rainhas,  $\mathcal{Q}(6)$ .

Note-se ainda que no caso geral, se se obtiver um polinómio  $p_B$  irredutível, todas os valores próprios encontrados são principais.

**Teorema 5.3.1.** *Qualquer Grafo das Rainhas  $\mathcal{Q}(n)$  com  $n \geq 3$ , admite uma partição equilibrada com  $\frac{(\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1)\lceil \frac{n}{2} \rceil}{2}$  células, determinado pelo Algoritmo 1.*

*Demonstração.* A aplicação do Algoritmo 1 produz uma partição  $\pi$  dos vértices (entradas) de  $\mathcal{Q}(n)$  ( $\mathcal{T}_n$ ) em  $\frac{(\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1)\lceil \frac{n}{2} \rceil}{2}$  células. Pode-se ainda concluir que a cada célula estão associados 1, 4 ou 8 vértices (entradas) e, por simetria, que cada célula induz um grafo regular e ainda que cada vértice de uma célula tem igual número de vizinhos em cada outra célula.  $\square$

# Capítulo 6

## Conclusão

O movimento da rainha num tabuleiro de xadrez  $n \times n$  originou o Grafo das Rainhas,  $\mathcal{Q}(n)$ , sendo este grafo e as suas propriedades combinatórias e espectrais o principal foco desta dissertação.

Alguns invariantes combinatórios de  $\mathcal{Q}(n)$  foram estudados, tais como o raio, o diâmetro, os números de independência, de clique, cromático e de dominância.

Tendo como base o tabuleiro de xadrez, determinar o número de independência de  $\mathcal{Q}(n)$  consiste em colocar o máximo número de rainhas sobre ele de modo a que nenhum par de rainhas se ataque mutuamente. Já para o número de clique a procura prende-se em obter o máximo número de rainhas que colocadas sobre o tabuleiro, todas se atacam. Para estas primeiras propriedades, fórmulas fechadas foram apresentadas para todos os Grafos das Rainhas a partir de certas ordens.

O número cromático e o número de dominância são as duas propriedades mais estudadas na literatura, com vários resultados publicados por diferentes autores.

A determinação do número cromático de  $\mathcal{Q}(n)$  é equivalente à determinação de um design de Knut Vik, conceito que é introduzido no texto. Obtêm-se valores para este invariante combinatório dentro de um conjunto finito de valores, tendo em conta a ordem de  $\mathcal{Q}(n)$ .

Embora vários valores concretos do número de dominância tenham sido apresentados, assim como um limite inferior e limites superiores para o valor em geral, o problema de obtenção de uma fórmula fechada continua em aberto.

É no quinto capítulo, a respeito das Propriedades Espectrais de  $\mathcal{Q}(n)$ , que alguns resultados originais surgiram.

Pelos Teoremas 5.1.5 e 5.2.2, é provado que todos os valores próprios de qualquer Grafo das Rainhas são não inferiores a  $-4$ , sendo que para  $n \geq 4$ ,  $-4$  é efetivamente valor próprio de multiplicidade  $(n - 3)^2$ .

Ainda se confirma que  $n - 4$  é valor próprio de  $\mathcal{Q}(n)$  para  $n \geq 4$ , no Teorema 5.2.3, e que a sua multiplicidade é pelo menos  $\frac{n-2}{2}$  se  $n$  par e  $\frac{n+1}{2}$  se  $n$  ímpar.

O comportamento observado nas experiências computacionais efetuadas para os valores próprios inteiros de  $\mathcal{Q}(n)$ , com  $4 \leq n \leq 11$ , estão na base das conjecturas que a seguir se formulam e que, naturalmente, permanecem em aberto.

- $n - 4$  tem multiplicidade  $\begin{cases} \frac{n-2}{2}, & \text{se } n \text{ é par,} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{caso contrário;} \end{cases}$
- para  $n$  ímpar,  $\{-3, -2, \dots, \frac{n-5}{2}, \frac{n-11}{2}, \dots, n-6, n-5\}$  são valores próprios simples;
- $n - 4$  é o maior valor próprio inteiro.

Dada a estrutura singular do espectro de  $\mathcal{Q}(n)$  e dos subespaços próprios associados aos seus valores próprios, considera-se uma temática interessante para se continuar a estudar de modo a aprofundar ou alargar ou concluir os resultados até agora obtidos.

Para trabalho futuro, poderá interessar a generalização deste tipo de grafos para dimensões retangulares de tabuleiros e/ou para tabuleiros em três dimensões.

# Bibliografia

- [1] L. D. Andersen. Latin square. *Oxford University Press*, pages 215–283, 2018.
- [2] P. J. Campbell. Gauss and the eight queens problem: A study in miniature of the propagation of historical error. *Historia Mathematica*, 4(4):397–404, 1977.
- [3] D. M. Cardoso. *Tópicos de Teoria Algébrica dos Grafos*. Universidade de Aveiro, 2008.
- [4] D. M. Cardoso, J. Szymanski, and M. Rostami. *Matemática Discreta – Combinatória, Teoria dos Grafos, Algoritmos*. Escolar Editora, Lisboa, 2009.
- [5] V. Chvátal. Colouring the queen graphs.  
<http://users.encs.concordia.ca/~chvatal/queengraphs.html>.
- [6] E. Cockayne. Chessboard domination problems. *Discrete Math.*, 86(1):13–20, 1990.
- [7] D. M. Cvetković, M. Doob, and H. Sachs. *Spectra of Graphs: Theory and Application*. Academic Press, New York, 1980.
- [8] I. P. Gent, C. Jefferson, and P. Nightingale. Complexity of  $n$ -queens completion. *J Artif Intell Res.*, 59:815–848, 2017.
- [9] A. Hedayat. A complete solution to the existence and nonexistence of Knut Vik designs and orthogonal Knut Vik designs. *J. Comb. Theory Ser. A.*, 22(3):331–337, 1977.
- [10] C. H. Jones. Generalized hockey stick identities and  $n$ -dimensional blockwalking. *Fibonacci Quarterly*, 34:280–288, 1996.
- [11] P. R. J. Östergård and W. D. Weakley. Values of Domination Numbers of the Queen’s Graph. *Electr. J. Comb.*, 8(1):1–21, 2001.
- [12] E. Pauls. Das maximal problem der damen auf dem schachbrette, ii, deutsche schachzeitung. *Organ fur das Gesamte Schachleben*, 29:257–267, 05 1874.

- [13] V. Raghavan and S. Venkatesan. On bounds for a covering problem. *Inf Process Lett.*, 25:281–284, 1987.
- [14] P. Rowlinson. The main eigenvalues of a graph: A survey. *Appl Anal Discr Math.*, 1(2):455–471, 10 2007.
- [15] N. J. A. Sloane. Domination number for queens’ graph  $q(n)$ . <http://oeis.org/A075458>.
- [16] R. P. Stanley. A bound on the spectral radius of graphs with  $e$  edges. *Linear Algebra Appl.*, 87:267–269, 1987.
- [17] M. Vasquez. New results on the queens- $n^2$  graph coloring problem. *Journal of Heuristics*, 10(4):407–413, 2004.