Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2018

Cláudio Tendai

Cálculo das Variações de Herglotz

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2018

Cláudio Tendai

Cálculo das Variações de Herglotz

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações, Programa de Mestrado em Matemática e Aplicações 2016-2018, realizada sob a orientação científica da Prof.ª Doutora Natália da Costa Martins, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

o júri

presidente

Prof. Doutor Ricardo Miguel Moreira de Almeida
Professor Auxiliar da Universidade do Aveiro

Prof. Doutor Artur Miguel Capêllo Brito da Cruz
Professor Adjunto, Instituto Politécnico de Setúbal

Prof. Doutora Natália da Costa Martins
Professora Auxiliar da Universidade do Aveiro (orientadora)

agradecimentos

Durante a realização desta dissertação foram várias as pessoas que, de diversas formas, me apoiaram e me incentivaram para poder concretizá-la. Desta forma, quero deixar aqui um especial agradecimento à minha orientadora, Professora Doutora Natália da Costa Martins, pela sugestão do tema, pelo apoio e incentivos, pela partilha do saber e, principalmente, pela orientação sábia e agradável, pela disponibilidade de tempo sempre que a solicitava. De igual modo quero agradecer à minha esposa Locádia José Domingos, ao meu filho Celso Cláudio Tendai, aos meus pais e irmãos pelo suporte emocional e pelo carinho e força que sempre me transmitiram.

Aos meus colegas do mestrado em Matemática e Aplicações, turma de 2016-2018, especialmente ao Jorge Alberto Camisola que me acompanhou e me encorajou ao longo deste percurso, gostaria de expressar o meu sincero agradecimento.

Gostaria também de endereçar o meu profundo agradecimento ao diretor do curso, Professor Doutor Agostinho Miguel Mendes Agra, pela forma sábia e incansável de solucionar algumas dificuldades que surgiram ao longo do curso.

Ao Professor Doutor Ricardo Miguel Moreira de Almeida e Professor Doutor Delfim Fernando Marado Torres, pelas contribuições no seminário de Matemática e Aplicações e contribuição em matéria de programação matemática, respetivamente.

Gostaria também de agradecer ao Instituto de Bolsas de Estudo de Moçambique pelo apoio financeiro.

palavras-chave

Cálculo das variações, problema variacional clássico, problema variacional de Herglotz, condições necessárias de otimalidade, equações de Euler-Lagrange, equações de Euler-Lagrange generalizadas, condições de transversalidade, condições de transversalidade generalizadas, condições de Dubois-Reymond, condições de Dubois-Reymond generalizadas.

resumo

Consideramos vários problemas variacionais, nomeadamente: problema variacional clássico, problema variacional clássico com atraso no tempo, problema variacional de Herglotz e problema variacional de Herglotz com atraso no tempo.

Nos Capítulos 1 e 2 apresentamos os problemas variacionais clássicos sem e com atraso no tempo, respetivamente, onde provamos algumas condições de otimalidade, tais como: equações de Euler-Lagrange, condições de transversalidade e condições de Dubois-Reymond.

O objetivo principal desta dissertação é estudar os problemas variacionais de Herglotz. Nos Capítulos 3 e 4, apresentamos algumas condições necessárias de otimalidade para problemas variacionais de Herglotz sem e com atraso no tempo; nomeadamente, deduzimos as equações de Euler-Lagrange, condições de transversalidade e condições de Dubois-Reymond.

keywords

Calculus of variations, classical variational problem, Herglotz’s variational problem, optimality conditions, Euler-Lagrange equations, generalized Euler-Lagrange equations, transversality conditions, generalized transversality conditions, Dubois-Reymond condition, generalized DuBois-Reymond condition.

abstract

We consider several variational problems, namely: classical variational problem, classical variational problem with time delay, Herglotz’s variational problem and Herglotz’s variational problem with time delay.

In Chapters 1 and 2 we present the classical variational problems with and without time delay, respectively, where we prove the optimality conditions, such as: Euler-Lagrange equations, transversality conditions and Dubois-Reymond.

The main objective of this dissertation is to study the variational problems of Herglotz type. In Chapters 3 and 4, we present some necessary optimality conditions for Herglotz's variational problems with and without time delay. In particular, we deduce the Euler-Lagrange equations, conditions of transversality and conditions of Dubois-Reymond.

Conteúdo

Introdução

Ao longo dos séculos, os cientistas têm-se preocupado com a determinação de máximos e mínimos para uma variedade de problemas de natureza geométrica, física, económica, na engenharia e na teoria do controlo. Resolver um problema de otimização significa, como o próprio nome diz, determinar o melhor resultado, de acordo com algum critério pré-estabelecido. Na Matemática os problemas de otimização são representados por problemas de máximos e mínimos sendo frequente os termos: lucro máximo, custo mínimo, tempo mínimo, tamanho ótimo e caminho mais curto. Uma área da Matemática que é muito útil na solução de problemas de otimização é o cálculo das variações, que generaliza a teoria de máximos e mínimos do cálculo diferencial para funções cujo domínio é constituído por um conjunto de curvas admissíveis [5, 6, 8, 10, 19, 20, 22, 23, 25].

Neste trabalho, apresentamos o estudo do cálculo das variações de Herglotz, que, como veremos mais à frente, é uma generalização do cálculo das variações clássico.

Durante o Seminário de Matemática e Aplicações, uma unidade curricular que decorre no segundo ano do Mestrado em Matemática e Aplicações, estudámos o cálculo das variações clássico. No final desta unidade curricular decidimos escrever a nossa dissertação estudando o problema variacional de Hergoltz. Nesta dissertação apresentamos algumas condições de otimalidade, tais como: equações de Euler-Lagrange generalizadas, condições de transversalidade e condições de DuBois-Reymond para problemas variacionais clássicos e generalizados sem e com atraso no tempo.

O problema variacional de Herglotz [18] foi introduzido em 1930 por Gustav Herglotz. Contudo, apenas em 1996, com as publicações [16, 17] este problema se tornou mais conhecido da comunidade matemática. Desde então, vários autores investigaram tais problemas variacionais. As seguintes generalizações dos resultados clássicos bem conhecidos estão disponíveis: equações de Euler-Lagrange generalizadas, condições de transversalidade, condições de DuBois-Reymond e teoremas de Noether para problemas variacionais de Herglotz [12]-[15], [26]-[31]. O problema variacional de Herglotz foi também generalizado no contexto do cálculo fracionário [4] e das variedades Riemanianas [1]. Das pesquisas realizadas podemos constatar a existência de apenas duas teses de doutoramento dedicadas exclusivamente ao problema variacional de Herglotz: [11] e [32].

O objetivo principal desta dissertação é o estudo do problema generalizado do cálculo das variações cuja função integranda depende da variável independente t, uma função arbitrária x, a sua primeira derivada e uma função z. Mais concretamente, o problema básico do cálculo das variações de Herglotz consiste em encontrar os extremantes (maximizantes ou minimizantes) para

$$\dot{z}(b) = L(t, x(t), \dot{x}(t), z(t)),$$

sujeito às condições de fronteira $x(a) = \alpha$ e $x(b) = \beta$ e uma condição inicial $z(a) = \gamma$, onde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, onde L satisfaz determinadas condições de regularidade.

Nesta dissertação as referências base para o estudo dos problemas variacionais de Herglotz são os trabalhos de [24, 26, 27, 29].

O trabalho está organizado em quatro capítulos. No Capítulo 1, apresentamos o cálculo das variações clássico enquanto que no Capítulo 2 apresentamos o cálculo das variações clássico com atraso no tempo.

Nos Capítulos 3 e 4 apresentamos o cálculo das variações generalizado de Herglotz, sem e com atraso no tempo, respetivamente. Finalizamos este trabalho apresentando uma conclusão e trabalhos futuros.

NOTAÇÕES E SIMPLIFICAÇÕES

De modo a simplificarmos a leitura e criarmos uma elegância ao longo do texto, usaremos algumas notações e simplificações.

Ao lidar com problemas com atraso no tempo, τ denota um número real tal que $0 \leq \tau < b - a$ e usamos a notação

$$x_\tau(t) := x(t - \tau);$$

$$\dot{x}_\tau(t) := \dot{x}(t - \tau).$$

Além disso, introduzimos alguns operadores que permitem uma simplificação dos argumentos da função Lagrangeana do problema variacional de Herglotz com e sem atraso no tempo:

$$\begin{aligned}
&\langle x; z\rangle(t) := (t, x(t), \dot{x}(t), z(t));\\
&\langle x\rangle(t) := (t, x(t), \dot{x}(t));\\
&\langle x; z\rangle_\tau(t) := (t, x(t), \dot{x}(t), x_\tau(t), \dot{x}_\tau(t), z(t));\\
&\langle x\rangle_\tau(t) := (t, x(t), \dot{x}(t), x_\tau(t), \dot{x}_\tau(t)).
\end{aligned}$$

Capítulo 1

Cálculo das Variações Clássico

Neste capítulo vamos focar a nossa atenção no cálculo das variações clássico. Começaremos por apresentar alguns detalhes a respeito de seu surgimento e evolução como ramo da Matemática. Os primeiros indícios dos problemas típicos do cálculo das variações apareceram com os fenícios, que tinham o conhecimento de que o círculo é uma curva fechada simples no plano de um dado perímetro que engloba a maior área. Este problema é conhecido como problema de Dido [10]. Em 1686, Isaac Newton[1] propôs o problema da superfície de revolução com resistência mínima: determinar a forma de uma superfície de revolução que atravessa uma massa de um líquido oferecendo resistência mínima, que é um problema típico do cálculo das variações [2].

O cálculo das variações teve seu início no final do século XVII com o bem conhecido problema da Braquistócrona proposto por Johann Bernoulli[2] em 1696. O problema consistia em encontrar a forma que deveria ter uma trajetória sobre a qual uma partícula deslizaria, partindo do repouso e sob ação apenas da gravidade, levando o menor tempo possível para atingir um outro ponto mais abaixo nessa trajetória. Nas palavras de Bernoulli: "Dados dois pontos A e B pertencentes ao mesmo plano vertical com alturas diferentes e não sobre a mesma vertical, determinar o caminho em que uma par-

[1] Isaac Newton (1643-1727) foi um astrónomo, alquimista, filósofo natural, teólogo e cientista inglês, mais reconhecido como físico e matemático.

[2] Johann Bernoulli (1667-1748) foi um matemático suíço da família Bernoulli. Ele é conhecido pelas suas importantes contribuições na área da Matemática, Física e Engenharia e por ter sido professor de Leonhard Euler.

tícula móvel vai de A até B em tempo mínimo, assumindo que sua aceleração depende apenas da gravidade" [21]. Este problema atraiu a atenção de vários matemáticos, incluindo Jakob Bernoulli[3] (irmão de Johann), Leibniz, L'Hôpital e Euler. A solução para este problema é um ciclóide e é chamado Braquistócrona.

Este ramo da Matemática provou ser relevante por causa das inúmeras aplicações existentes em situações reais. Um dos casos é a determinação das curvas fechadas simples com um certo perímetro e limitando uma área máxima (conhecido por problemas isoperimétricos). Por outro lado, temos o problema das geodésicas, que consiste em encontrar a curva de menor comprimento que liga dois pontos da Terra, considerada superfície de revolução. Em todos estes problemas o funcional a extremar é dado por um integral do tipo

$$\mathcal{J}(x) = \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt.$$

Mais concretamente, o problema clássico do cálculo das variações consiste na determinação de funções $x \in C^2([a,b];\mathbb{R})$ que minimizam (resp. maximizam) o funcional

$$\mathcal{J}(x) = \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt,$$

onde x verifica as condições de fronteiras $x(a) = \alpha$ e $x(b) = \beta$, para certos números reais α e β, e L verifica certas condições de regularidade.

A seguir, apresentaremos alguns resultados que serão utilizados na determinação de candidatos a extremos de funcionais. No seguimento iremos supor que o Lagrangeano L satisfaz as seguintentes hipóteses:

(**H1**) $L \in C^1([a,b] \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$;

(**H2**) a função $t \mapsto \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))$ é diferenciável para qualquer trajetória x.

Provaremos mais adiante que os candidatos a minimizantes (resp. maximizantes) para este problema básico devem satisfazer a seguinte equação diferencial

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0, \qquad t \in [a,b],$$

[3]Jakob Bernoulli (1654-1705) foi um matemático suíço, um dos primeiros a desenvolver o cálculo infinitesimal. Ficou também conhecido pelas suas importantes contribuições na geometria analítica, teoria das probabilidades e cálculo das variações para além do que fora feito por Newton e Leibniz, aplicando-o a novos problemas.

chamada de equação de Euler-Lagrange (condição necessária de otimalidade). Se a condição de fronteira $x(a) = \alpha$ é livre, então para encontrarmos os candidatos a extremantes temos que adicionar outra condição necessária: $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(a, x(a), \dot{x}(a)) = 0$ e se $x(b) = \beta$ é livre, então $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(b, x(b), \dot{x}(b)) = 0$. Estas duas condições são usualmente chamadas condições de transversalidade [2].

Considerando o seguinte problema

$$\mathcal{J}(x) = \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \rightarrow extr, \tag{1.1}$$

onde "extr" significa extremar, pretendemos encontrar candidatos a extremantes locais (i.e. minimizantes locais ou maximizantes locais) do funcional. Mais adiante vamos obter a equação de Euler-Lagrange do problema (1.1) onde $x \in C^2([a, b]; \mathbb{R})$ satisfaz as seguintes condições de fronteira:

$$x(a) = \alpha \quad e \quad x(b) = \beta \tag{1.2}$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fixos.

Definição 1.1. Uma função $x \in C^2([a, b]; \mathbb{R})$ diz-se admissível para o problema (1.1)-(1.2) se esta satisfaz as condições (1.2). Diz-se também que $\eta \in C^2([a, b]; \mathbb{R})$ é uma variação admissível para (1.1)-(1.2) se $\eta(a) = \eta(b) = 0$.

Definição 1.2. Dado um funcional $\mathcal{J}$, diz-se que $\tilde{x}$ é minimizante local (resp. maximizante local) para o problema (1.1)-(1.2) se $\tilde{x}$ é uma função admissível e existir um $\epsilon > 0$ tal que

$$\mathcal{J}(\tilde{x}) \leqslant \mathcal{J}(x) \ \Big(resp. \ \mathcal{J}(\tilde{x}) \geqslant \mathcal{J}(x)\Big)$$

para todo o x admissível com $\| \tilde{x} - x \| < \epsilon$ onde a norma é dada pela fórmula

$$\| x \| := \max_{a \leqslant t \leqslant b} | x(t) |$$

Se a desigualdade é satisfeita para todo o $\epsilon > 0$, então $\mathcal{J}(\tilde{x})$ é um mínimo (resp. máximo) global.

1.1 Lemas fundamentais do cálculo das variações

Nesta secção vamos apresentar os lemas fundamentais do cálculo das variações e as suas respetivas provas.

Lema 1.1. (Lema fundamental do cálculo das variações I [23]). *Se f é uma função contínua em $[a,b]$ e*

$$\int_a^b f(t)\eta(t)\,dt = 0 \tag{1.3}$$

para toda a função $\eta \in C([a,b];\mathbb{R})$, com $\eta(a)=\eta(b)=0$, então $f(t)=0$ para $t \in [a,b]$.

Demonstração. Iremos supor, para redução ao absurdo, que existe algum $t_0 \in]a,b[$ tal que $f(t_0) \neq 0$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $f(t_0) > 0$. Como f é contínua, $f(t) > 0$ em algum intervalo contendo t_0. Seja $]t_1,t_2[$ tal intervalo. Para η definimos

$$\eta(t) = \begin{cases} (t-t_1)(t_2-t) & se \quad x \in]t_1,t_2[\\ 0 & se \quad x \in [a,t_1] \\ 0 & se \quad x \in [t_2,b] \end{cases}$$

Podemos verificar que η é contínua em $[a,b]$ e $\eta(a)=\eta(b)=0$, como ilustra a Figura 1.

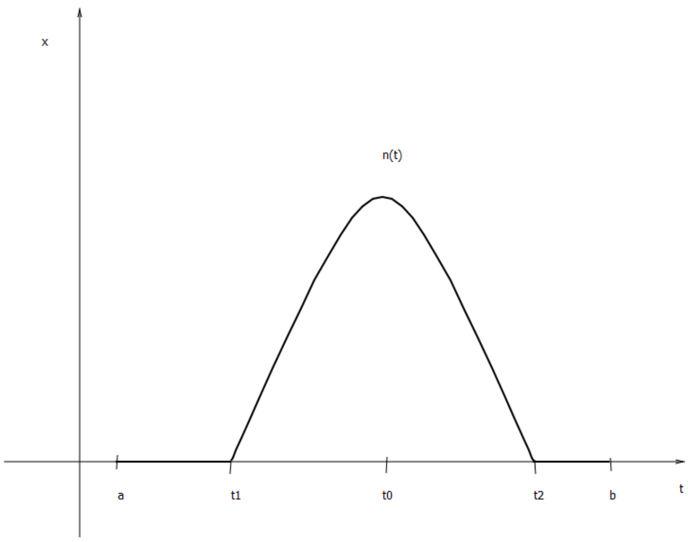

Figura 1.1: Gráfico da função η

Substituindo em (1.3) temos:

$$\int_a^b f(t)\eta(t)\,dt = \int_a^{t_1} 0\ dt + \int_{t_1}^{t_2} f(t)\eta(t)dt + \int_{t_2}^b 0\ dt.$$

Como sabemos que $\eta(t) = (t - t_1)(t_2 - t)$ no intervalo $]t_1, t_2[$, temos:

$$\int_a^b f(t)\eta(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} f(t)(t - t_1)(t_2 - t)dt > 0,$$

uma vez que f é positiva em $]t_1, t_2[$. Isso contradiz (1.3) e o lema fica provado. ■

Lema 1.2. (Lema fundamental do cálculo das variações II-c.f [10]). *Sejam $f_0, f_1 \in C^1([a,b];\mathbb{R})$. Se*

$$\int_a^b \Big(f_0(t)\eta(t) + f_1(t)\dot{\eta}(t)\Big)dt = 0 \tag{1.4}$$

para toda a função $\eta \in C^1([a,b];\mathbb{R})$ com $\eta(a) = \eta(b) = 0$, então

$$\dot{f}_1(t) = f_0(t), \qquad t \in [a,b].$$

Demonstração. De (1.4), conclui-se que

$$\begin{aligned} &\int_a^b f_0(t)\eta(t)dt + \int_a^b f_1(t)\dot{\eta}(t)dt = 0 \\ \Leftrightarrow &\int_a^b f_0(t)\eta(t)dt + \Big[f_1(t).\eta(t)\Big]_a^b - \int_a^b \dot{f}_1(t)\eta(t)dt = 0. \end{aligned}$$

Uma vez que $\eta(a) = \eta(b) = 0$, então

$$\begin{aligned} &\int_a^b f_0(t)\eta(t)dt - \int_a^b \dot{f}_1(t)\eta(t)dt = 0 \\ \Leftrightarrow &\int_a^b \Big(f_0(t) - \dot{f}_1(t)\Big)\eta(t)dt = 0. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 1.1, concluímos que

$$f_0(t) - \dot{f}_1(t) = 0, \qquad \forall t \in [a,b]$$

como se pretendia demonstrar. ■

1.2 Equação de Euler-Lagrange

Teorema 1.1. (Equação de Euler-Lagrange para o problema (1.1)-(1.2) [23]). *Se x é minimizante local (ou maximizante local) do problema (1.1)-(1.2), então x satisfaz a equação*

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0, \qquad t \in [a, b]. \tag{1.5}$$

Demonstração. Consideremos o problema $\mathcal{J}(x) \to extr$ sujeito às condições de fronteira

$$x(a) = \alpha \;\; e \;\; x(b) = \beta.$$

Suponhamos que $\mathcal{J}$ tem extremo em x. Sendo η uma variação arbitrária e admissível define-se

$$x^*(t) = x(t) + \epsilon\eta(t) \tag{1.6}$$

onde $\epsilon \in \mathbb{R}$ e $\eta(a) = \eta(b) = 0$.

Uma condição necessária para x ser extremante de $\mathcal{J}$ é que $\frac{d}{d\epsilon}\mathcal{J}(x^*)\Big|_{\epsilon=0} = 0$.

Uma vez que

$$\frac{d}{d\epsilon}\mathcal{J}(x^*)\Bigg|_{\epsilon=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x^*}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)).\frac{\partial x^*}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^*}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)).\frac{\partial \dot{x}^*}{\partial \epsilon}\right) dt\Bigg|_{\epsilon=0} = 0. \tag{1.7}$$

Considerando $\epsilon = 0$, temos que

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t))\,\eta(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\,\dot{\eta}(t)\right) dt = 0. \tag{1.8}$$

Integrando por partes o segundo termo de (1.8), obtemos que

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{\eta}(t)dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\eta(t)\right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\eta(t)dt.$$

Logo temos que

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\right)\eta(t))dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\eta(t)\right]_a^b = 0.$$

Uma vez que $\eta(a) = \eta(b) = 0$, obtemos

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\right)\eta(t)dt = 0. \tag{1.9}$$

Uma vez que η é nulo nas extremidades, usando o Lema 1.1 em (1.9) conclui-se que

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t,x(t),\dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t)) = 0, \qquad t \in [a,b].$$

■

A equação (1.5) é conhecida como a equação de Euler-Lagrange, e é uma condição necessária para que x seja extremante de (1.1)-(1.2). A equação de Euler-Lagrange é, em geral, uma equação diferencial da segunda ordem, portanto a solução terá geralmente duas constantes arbitrárias. No caso especial onde o Lagrageano não depende explicitamente de uma das variáveis t, x, $\dot{x}$, é possível fazer imediatamente a simplificação da equação de Euler-Lagrange (1.5).

1. Se $L = L(t, x(t))$, então a equação de Euler-Lagrange é igual $\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t)) = 0$, e portanto, não é uma equação diferencial ordinária.

2. Se $L = L(t, \dot{x}(t))$, então a equação de Euler-Lagrange reduz-se a

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, \dot{x}(t)) = C \tag{1.10}$$

   onde C é uma constante arbitrária.

3. Se $L = L(x(t), \dot{x}(t))$, então a equação de Euler-Lagrange será dada por

$$L(x(t),\dot{x}(t)) - \dot{x}(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(t),\dot{x}(t)) = C. \tag{1.11}$$

   Demonstração. Uma vez que L não depende de t temos que

$$\mathcal{J}(x) = \int_a^b L(x(t),\dot{x}(t))\, dt,$$

   e, portanto, a respetiva equação de Euler-Lagrange é

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x} - \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\ddot{x} = 0. \tag{1.12}$$

   Multiplicando (1.12) por $\dot{x}$, obtemos

$$\frac{\partial L}{\partial x}\dot{x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x}^2 - \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x}\,\ddot{x} = 0$$

e, portanto, temos que

$$\frac{d}{dt}\left(L - \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0.$$

Logo,

$$L - \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

■

Observação 1.1. *Para simplificação da escrita, iremos por vezes não escrever os argumentos nas funções.*

1.3 Condições de transversalidade

Vamos agora analisar o problema em que pelo menos uma das condições de fronteira não é especificada. Esse problema é chamado problema de ponto final livre ou problema de ponto inicial livre.

Consideremos o problema

$$\mathcal{J}(x) = \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to \ extr \tag{1.13}$$

$$x(a) = \alpha, \ \ x(b) \ \ livre \tag{1.14}$$

Se x é extremante, então uma certa condição deve ser satisfeita em $t = b$. As condições deste tipo, são denominadas condições de limites naturais ou condições de transversalidade.

Seja x um minimizante local (resp. maximizante local). Seja $\eta \in C^2([a, b]; \mathbb{R})$ tal que

$$\eta(a) = 0 \tag{1.15}$$

e $x^*(t) = x(t) + \epsilon\eta(t)$, para $\epsilon \in \mathbb{R}$.
Não há condições para η em $t = b$ como ilustra a Figura 2.

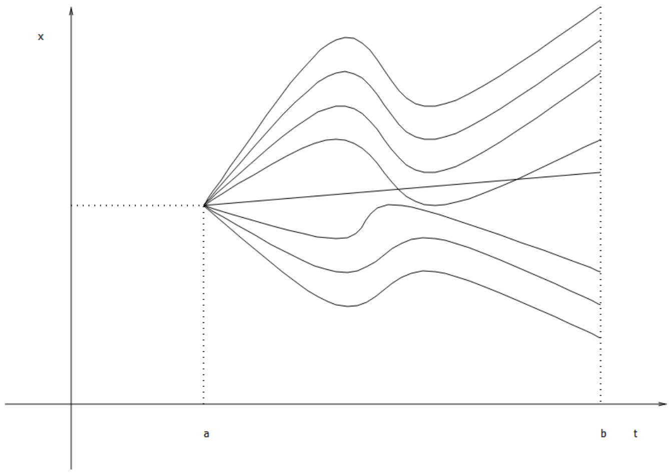

Figura 1.2: Problema com ponto final livre.

Observe-se que

$$\frac{d}{d\epsilon}\mathcal{J}(x^*)\bigg|_{\epsilon=0} = \frac{d}{d\epsilon}\int_a^b L(t, x(t) + \epsilon\eta(t), \dot{x}(t) + \epsilon\dot{\eta}(t))dt\bigg|_{\epsilon=0}$$
$$= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\right)\eta(t)dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\eta(t)\right]_a^b.$$

Uma vez que $\eta(a) = 0$, uma condição necessária para x ser minimizante local (ou maximizante local) é

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\right)\eta(t)dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(b, x(b), \dot{x}(b)).\eta(b) = 0 \quad (1.16)$$

para qualquer $\eta \in C^2([a, b]; \mathbb{R})$ satisfazendo $\eta(a) = 0$. Uma vez que (1.16) é válida para todas estas funções η, em particular esta igualdade também se verifica para toda a variação η tal que $\eta(b) = 0$, logo

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\right)\eta(t)dt = 0. \quad (1.17)$$

Pelo Lema 1.1 x deve satisfazer a condição de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0, \qquad t \in [a, b]. \quad (1.18)$$

Substituindo (1.18) em (1.16) temos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(b, x(b), \dot{x}(b)).\eta(b) = 0. \quad (1.19)$$

Uma vez que (1.19) é válida para qualquer escolha de $\eta(b)$, temos que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(b, x(b), \dot{x}(b)) = 0. \tag{1.20}$$

A equação (1.20) é chamada condição de transversalidade. A equação (1.18), a condição $x(a) = \alpha$ e a condição de transversalidade (1.20) são suficientes para determinar os extremantes do problema (1.13)-(1.14). De modo análogo se prova que se $x(a)$ é livre (ver a Figura 3), a condição de transversalidade para o extremante x em $t = a$ é

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(a, x(a), \dot{x}(a)) = 0. \tag{1.21}$$

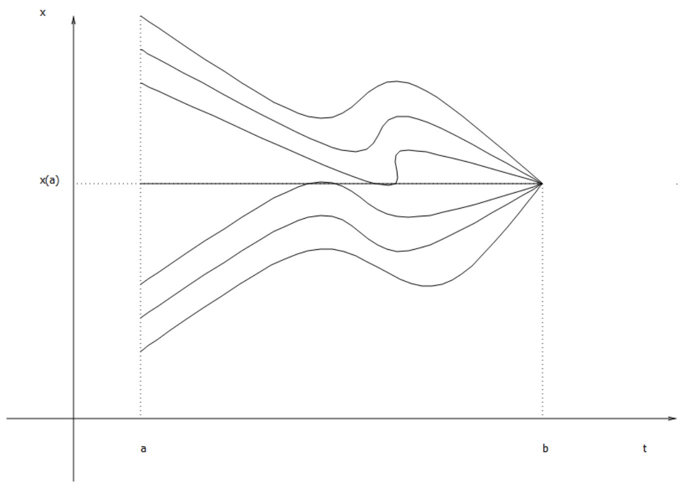

Figura 1.3: Problema com fronteira inicial livre.

Provámos assim o seguinte resultado.

Teorema 1.2. *[10] Se x é um extremante local do problema*

$$\mathcal{J}(x) = \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to extr \tag{1.22}$$

então x satisfaz a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0, \qquad t \in [a, b].$$

Além de mais se $x(b)$ é livre, então

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(b, x(b), \dot{x}(b)) = 0;$$

se $x(a)$ é livre, então

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(a, x(a), \dot{x}(a)) = 0.$$

1.4 Condição de DuBois-Reymond

A seguir iremos provar outra condição necessária que é muito útil na determinação de extremantes para um problema variacional.

Teorema 1.3. (Condição de Dubois -Reymond para problemas variacionais clássicos- cf. [27]). *Se x é um extremante local do problema* (1.1)-(1.2)*, então x satisfaz a seguinte equação*

$$\frac{d}{dt}\left(L(t, x(t), \dot{x}(t)) - \dot{x}(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\right) = \frac{\partial L}{\partial t}(t, x(t), \dot{x}(t)), \tag{1.23}$$

para $t \in [a, b]$.

Demonstração. Seja $t \in [a, b]$ arbitrário. Note-se que

$$\begin{aligned}&\int_a^t \frac{d}{ds}\left(L(s, x(s), \dot{x}(s)) - \dot{x}(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(s, x(s), \dot{x}(s))\right)ds \\ &= \int_a^t \left(\frac{\partial L}{\partial s}(s, x(s), \dot{x}(s)) + \frac{\partial L}{\partial x}(s, x(s), \dot{x}(s))\,\dot{x}(s) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(s, x(s), \dot{x}(s))\,\ddot{x}(s)\right. \\ &\left. - \ddot{x}(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(s, x(s), \dot{x}(s)) - \dot{x}(s)\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(s, x(s), \dot{x}(s))\right)ds.\end{aligned}$$

Cancelando os termos simétricos obtemos

$$\begin{aligned}&\int_a^t \frac{d}{ds}\left(L(s, x(s), \dot{x}(s)) - \dot{x}(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(s, x(s), \dot{x}(s))\right)ds \\ &= \int_a^t \left(\frac{\partial L}{\partial s}(s, x(s), \dot{x}(s)) + \frac{\partial L}{\partial x}(s, x(s), \dot{x}(s))\dot{x}(s) - \dot{x}(s)\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(s, x(s), \dot{x}(s))\right)ds,\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}&\int_a^t \frac{d}{ds}\left(L(s, x(s), \dot{x}(s)) - \dot{x}(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(s, x(s), \dot{x}(s))\right)ds \\ &= \int_a^t \left[\frac{\partial L}{\partial s}(s, x(s), \dot{x}(s)) + \dot{x}(s)\left(\frac{\partial L}{\partial x}(s, x(s), \dot{x}(s)) - \frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(s, x(s), \dot{x}(s)) = 0\right)\right]ds.\end{aligned}$$

Como x é solução da equação de Euler-Lagrange conclui-se que

$$\int_a^t \frac{d}{ds}\left(L(s,x(s),\dot{x}(s)) - \dot{x}(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(s,x(s),\dot{x}(s))\right)ds = \int_a^t \frac{\partial L}{\partial s}(s,x(s),\dot{x}(s))ds.$$

Da arbitrariedade de $t \in [a,b]$, concluímos que

$$\frac{d}{dt}\left(L(t,x(t),\dot{x}(t)) - \dot{x}(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t))\right) = \frac{\partial L}{\partial t}(t,x(t),\dot{x}(t)),$$

ficando provado (1.23). ■

1.5 Condição suficiente de otimalidade

Nesta secção iremos apresentar uma condição suficiente de otimalidade para o problema (1.1).

Definição 1.3. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo não vazio. Dada uma função $L : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diz-se que $L(t,z_1,z_2)$ é convexa (resp. côncava) em (z_1,z_2) se $\frac{\partial L}{\partial z_1}$ e $\frac{\partial L}{\partial z_2}$ são contínuas e verificam a seguinte condição

$$L(t,z_1+\overline{z}_1,z_2+\overline{z}_2) - L(t,z_1,z_2) \geq \frac{\partial L}{\partial z_1}(t,z_1,z_2)\overline{z}_1 + \frac{\partial L}{\partial z_2}(t,z_1,z_2)\overline{z}_2$$

$$(resp.\ L(t,z_1+\overline{z}_1,z_2+\overline{z}_2) - L(t,z_1,z_2) \leqslant \frac{\partial L}{\partial z_1}(t,z_1,z_2)\overline{z}_1 + \frac{\partial L}{\partial z_2}(t,z_1,z_2)\overline{z}_2)$$

para todo $(t,z_1+\overline{z}_1,z_2+\overline{z}_2),(t,z_1,z_2) \in I \times \mathbb{R}^2$.

Teorema 1.4. (cf.[24]) Seja $L(t,z_1,z_2)$ convexa (resp. côncava) em (z_1,z_2) . *Se x satisfaz a equação de Euler-Lagrange* (1.5) *e as condições de transversalidade* (1.20) *e* (1.21)*, então x é minimizante (resp. maximizante) global para o problema (1.1).*

Demonstração. Vamos proceder à demonstração para o caso convexo. Suponhamos que L é uma função convexa em (z_1,z_2). Então, para qualquer $\eta \in C^2([a,b];\mathbb{R})$, tem-se que

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(x+\eta) - \mathcal{J}(x) &= \int_a^b L(t,x(t)+\eta(t),\dot{x}(t)+\dot{\eta}(t))dt - \int_a^b L(t,x(t),\dot{x}(t))dt \\
&= \int_a^b \Big[L(t,x(t)+\eta(t),\dot{x}(t)+\dot{\eta}(t)) - L(t,x(t),\dot{x}(t))\Big]dt \\
&\geq \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x}(t,x(t),\dot{x}(t))\,\eta(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t))\,\dot{\eta}(t)\right)dt. \quad (1.24)
\end{aligned}$$

Integrando por partes o segundo termo de (1.24), temos

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(x+\eta)-\mathcal{J}(x) \geq \int_a^b \eta(t)\Big(\frac{\partial L}{\partial x}(t,x(t),\dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t))\Big)dt \\ + \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t))\eta(t)\right]_a^b}_{=0}\end{aligned}$$

Como x satisfaz a equação de Euler-Lagrange e as condições de transversalidade (1.20) e (1.21) obtemos que

$$\mathcal{J}(x+\eta)-\mathcal{J}(x) \quad \geq \quad 0,$$

o que prova o pretendido. A prova no caso da função ser côncava é análoga. ∎

1.6 Exemplos ilustrativos

A seguir vamos apresentar alguns exemplos que mostram a utilidade de alguns resultados deste capítulo.

Exemplo 1.1. Considere o problema

$$\mathcal{J}(x) = \int_0^1 \big(\dot{x}^2(t) - 3tx(t)\big)\, dt \to extr, \tag{1.25}$$

com

$$x(0) = 0 \quad e \quad x(1) = 1. \tag{1.26}$$

Neste caso $L(t,x(t),\dot{x}(t)) = \dot{x}^2(t) - 3tx(t)$.

Vamos determinar os candidatos a extremantes do funcional (1.25) sujeito às condições (1.26). A equação de Euler-Lagrange é

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(\dot{x}^2(t) - 3tx(t)\big) - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}(\dot{x}^2(t) - 3tx(t)) = 0$$

e, portanto, temos que

$$-3t - \frac{d}{dt}(2\dot{x}(t)) \quad = \quad 0 \Leftrightarrow 2\ddot{x}(t) + 3t = 0 \Leftrightarrow \ddot{x}(t) = -\frac{3}{2}t.$$

Aplicando a integração sucessiva temos,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \int -\frac{3}{2}\,t\,dt = -\frac{3}{4}t^2 + c_1, \qquad c_1 \in \mathbb{R},\\ x(t) &= \int \left(-\frac{3}{4}t^2 + c_1\right) dt = -\frac{1}{4}t^3 + c_1 t + c_2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Usando as condições de fronteira, conclui-se que $c_1 = \frac{5}{4}$ e $c_2 = 0$, logo

$$x(t) = -\frac{1}{4}t^3 + \frac{5}{4}t, \qquad t \in [0, 1],$$

é o único candidato a extremante do problema dado.

Exemplo 1.2. Consideremos o problema

$$\mathcal{J}(x) = \int_0^1 \left(\dot{x}^2(t) - x^2(t) + 2tx(t)\right) dt \to extr, \tag{1.27}$$

sujeito a

$$x(0) = 0 \quad e \quad x(1) = 1. \tag{1.28}$$

A equação de Euler-Lagrange é dada por:

$$-2x(t) + 2t - \frac{d}{dt}(2\dot{x}(t)) = 0 \Leftrightarrow 2\ddot{x}(t) + 2x(t) - 2t = 0 \Leftrightarrow \ddot{x}(t) + x(t) - t = 0.$$

Uma vez que a solução geral da equação diferencial homogénea $\ddot{x}(t) + x(t) = 0$ é dada por

$$x(t) = c_1 cos(t) + c_2 sen(t), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

e $x(t) = t$ é uma solução particular da equação de Euler-Lagrange, então a solução geral de equação de Euler-Lagrange é

$$x(t) = c_1 cos(t) + c_2 sen(t) + t, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Usando as condições (1.28) conclui-se que $c_1 = c_2 = 0$. Logo, o problema (1.27)-(1.28) tem um único candidato a extremante que é dado por

$$x(t) = t, \qquad t \in [0, 1].$$

Exemplo 1.3. Consideremos o problema

$$\mathcal{J}(x) = \int_0^1 \left(\dot{x}^2(t) + x^2(t) + 45\right) dt \to extr,$$

sujeito à condição inicial $x(0) = 1$ ($x(1)$ é livre).

A equação de Euler-Lagrange para este problema é a seguinte:

$$2x(t) - \frac{d}{dt}(2\dot{x}(t)) = 0 \Leftrightarrow 2x(t) - 2\ddot{x}(t) = 0 \Leftrightarrow x(t) - \ddot{x}(t) = 0. \tag{1.29}$$

Vamos determinar a equação característica associada a (1.29)

$$-\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1.$$

Portanto, os candidatos a extremantes do funcional $\mathcal{J}$ são de forma $x = k_1 e^t + k_2 e^{-t}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Para determinarmos as constantes k_1 e k_2 vamos recorrer à condição inicial

$$x(0) = 1 \Rightarrow k_1 e^0 + k_2 e^0 = 1 \Rightarrow k_1 + k_2 = 1$$

e à condição de transversalidade

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(1, x(1), \dot{x}(1)) = 0 \Rightarrow \dot{x}(1) = 0 \Rightarrow k_1 e - k_2 e^{-1} = 0.$$

Logo,

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 1 \\ k_1 e - k_2 e^{-1} = 0 \end{cases}$$

donde resulta que $k_1 = \dfrac{e^{-1}}{e + e^{-1}}$ e $k_2 = \dfrac{e}{e + e^{-1}}$.

Portanto, $x(t) = \dfrac{e^{t-1} + e^{1-t}}{e + e^{-1}}$ é o único candidato a extremante. Uma vez que o Lagrangeano é uma função convexa, x é minimizante global do funcional $\mathcal{J}$ sujeito à restrição $x(0) = 1$.

1.7 Problemas isoperimétricos

Nesta secção apresentamos os problemas isoperimétricos. Um problema isoperimétrico consiste em minimizar (resp. maximizar) o funcional

$$\mathcal{J}(x) = \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \tag{1.30}$$

na classe das funções $x \in C^2([a,b];\mathbb{R})$ que verificam as condições de fronteira

$$x(a) = \alpha, \;\; x(b) = \beta \tag{1.31}$$

e a restrição

$$\mathcal{K}(x) = \int_a^b h(t, x(t), \dot{x}(t))dt = P \tag{1.32}$$

onde h é uma função dada e $P \in \mathbb{R}$ é uma constante especificada. A condição (1.32) diz-se restrição isoperimétrica.

Definição 1.4. $\tilde{x} \in C^2([a,b];\mathbb{R})$ diz-se minimizante (resp. maximizante) local para o problema isopermétrico (1.30)-(1.32) se existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{J}(\tilde{x}) \leq \mathcal{J}(x)$ $\Big($*resp.* $\mathcal{J}(\tilde{x}) \geq \mathcal{J}(x)\Big)$ para todo $x \in C^2([a,b];\mathbb{R})$, satisfazendo as condições de fronteira (1.31), a restrição isoperimétrica (1.32) e $\| \tilde{x} - x \| < \delta$.

Definição 1.5. Diz-se que $x \in C^2([a,b];\mathbb{R})$ é um extremal para $\mathcal{J}$ se x satisfaz a equação de Euler-Lagrange (1.5) relativamente a $\mathcal{J}$. Um extremante local do problema (1.30)-(1.32) que não é extremal de $\mathcal{K}$ é dito extremante normal, em caso contrário diz-se anormal.

Teorema 1.5. (Condições necessárias de otimalidade para extremantes normais - cf. [24]). *Para o problema (1.30)-(1.32), suponha-se que L e h satisfazem as condições (**H1**)e (**H2**) e que $x \in C^2([a,b];\mathbb{R})$ é um minimizante local (resp. maximizante local) para o funcional (1.30) sujeito às condições* (1.31) *e à restrição isoperimétrica (1.32). Se x não é extremal para $\mathcal{K}$, então existe um real λ tal que x satisfaz a equação*

$$\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0, \qquad t \in [a,b] \tag{1.33}$$

onde $\mathrm{H} = L - \lambda h$.

Demonstração. Suponhamos que $x \in C^2([a,b];\mathbb{R})$ é um extremante normal do problema (1.30)-(1.32). Definam-se as funções $\Theta, \; \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$\psi(\epsilon_1, \epsilon_2) \;=\; \mathcal{J}(x + \epsilon_1\eta_1 + \epsilon_2\eta_2) \tag{1.34}$$

$$\Theta(\epsilon_1, \epsilon_2) \;=\; \mathcal{K}(x + \epsilon_1\eta_1 + \epsilon_2\eta_2) - P \tag{1.35}$$

onde $\eta_2 \in C^2([a,b];\mathbb{R})$ é fixo (que iremos escolher mais adiante) e $\eta_1 \in C^2([a,b];\mathbb{R})$ é função arbitrária fixa.

Observe que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Theta}{\partial \epsilon_2}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial \epsilon_2}\left(\int_a^b h\Big(t, x(t)+\epsilon_1\eta_1(t)+\epsilon_2\eta_2(t), \dot{x}(t)+\epsilon_1\dot{\eta}_1(t)+\epsilon_2\dot{\eta}_2(t)\Big)\,dt\right)\Bigg|_{(0,0)} \\
&= \int_a^b \frac{\partial h}{\partial \epsilon_2}\Big(t, x(t)+\epsilon_1\eta_1(t)+\epsilon_2\eta_2(t), \dot{x}(t)+\epsilon_1\dot{\eta}_1(t)+\epsilon_2\dot{\eta}_2(t)\Big)\Bigg|_{(0,0)} dt \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial h}{\partial x}(t,x(t),\dot{x}(t))\,\eta_2(t) + \frac{\partial h}{\partial \dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t))\,\dot{\eta}_2(t)\right)dt.
\end{aligned}$$

Usando a fórmula de integração por partes no segundo termo, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Theta}{\partial \epsilon_2}(0,0) = \int_a^b \left(\frac{\partial h}{\partial x}(t,x(t),\dot{x}(t))\,(t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial h}{\partial \dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t))\right)\eta_2(t)dt \\
+\left[\frac{\partial h}{\partial \dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t))\eta_2(t)\right]_a^b.
\end{aligned}$$

Restringindo η_2 àquelas funções tais que $\eta_2(a) = \eta_2(b) = 0$, obtemos que

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \epsilon_2}(0,0) = \int_a^b \left(\frac{\partial h}{\partial x}(t,x(t),\dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial h}{\partial \dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t))\right)\eta_2(t)dt.$$

Como x não é um extremal de $\mathcal{K}$, então podemos escolher η_2 tal que $\frac{\partial \Theta}{\partial \epsilon_2}(0,0) \neq 0$. Mantemos η_2 fixado. Uma vez $\Theta(0,0) = 0$, o Teorema da Função Implícita garante a existência de uma função g definida na vizinhança V de zero tal que $g(0) = 0$ e $\Theta(\epsilon_1, g(\epsilon_1)) = 0$, para qualquer $\epsilon_1 \in V$, isto é, existe um conjunto de curvas $\tilde{x} = x + \epsilon_1\eta_1 + g(\epsilon_1)\eta_2$ satisfazendo a restrição isoperimétrica. Observe-se que $(0,0)$ é extremante de ψ sujeito à restrição $\Theta = 0$ e

$$\nabla\Theta(0,0) \neq (0,0).$$

Pela regra dos multiplicadores de Lagrange, existe uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla\psi(0,0) = \lambda\nabla\Theta(0,0). \tag{1.36}$$

Restringindo η_1 para aquelas funções tais que $\eta_1(a) = \eta_1(b) = 0$, obtemos

$$\frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_1}(0,0) = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \right) \eta_1(t) dt$$

e

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \epsilon_1}(0,0) = \int_a^b \left(\frac{\partial h}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial h}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \right) \eta_1(t)\, dt.$$

Usando (1.36) segue que

$$\begin{aligned} \int_a^b \Bigg[\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \lambda \Big(\frac{\partial h}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) \\ - \frac{d}{dt}\frac{\partial h}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \Big) \Bigg] \eta_1(t)\, dt = 0. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Pelo Lema 1.1 e recordando que η_1 é arbitrária, concluímos que

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \lambda \left(\frac{\partial h}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial h}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \right) = 0$$

para todo $t \in [a, b]$, provando que x satisfaz a equação de Euler-Lagrange relativamente à função $H = L - \lambda h$, o que prova a condição (1.33). ■

Teorema 1.6. (Condição necessária de otimalidade para extremantes normais e anormais para (1.30)-(1.32) - cf. [24]). *Suponhamos que $\mathcal{J}$ tem um extremo em $x \in C^2([a, b]; \mathbb{R})$ sujeito às condições de fronteira (1.31) e à restrição isoperimétrica (1.32). Então existem duas constantes λ_0 e λ_1, ambas não simultaneamente nulas, tal que x satisfaz a equação*

$$\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0, \qquad t \in [a, b] \tag{1.38}$$

onde $H = \lambda_0 L - \lambda_1 h$. Se x não é um extremal para $\mathcal{K}$, então podemos tomar $\lambda_0 = 1$ e se x é extremal para $\mathcal{K}$, então $\lambda_0 = 0$, a menos que x seja também um extremal para $\mathcal{J}$. No último caso, nem λ_0 nem λ_1 são determinados.

Demonstração. A prova é similar à prova do Teorema 1.5. Uma vez $(0, 0)$ é extremante de ψ sujeito à restrição $\Theta = 0$ a regra dos multiplicadores de Lagrange garante a existência de dois números reais λ_0 e λ_1, com $(\lambda_0, \lambda_1) \neq (0, 0)$ tais que

$$\lambda_0 \nabla \psi \;=\; \lambda \nabla \Theta.$$

■

Para finalizar esta secção vamos apresentar um exemplo de um problema isoperimétrico.

Exemplo 1.4. Pretendemos encontrar a curva de comprimento P situado no plano superior de $\mathbb{R}^2$ que passa pelos pontos $(-a,0)$ e $(a,0)$ e que engloba a maior área. Estamos portanto à procura da função $x = x(t)$ para o qual o integral

$$\mathcal{J}(x) = \int_{-a}^{a} x(t)\, dt$$

atinge o maior valor, sujeito às seguintes condições:

$$x(-a) = x(a) = 0, \quad \mathcal{K}(x) = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+\dot{x}^2(t)}\; dt = P.$$

Com vista a aplicarmos o Teorema 1.5, ou seja usando a equação de Euler-Lagrange (1.33), obtemos que

$$1 - \lambda \frac{d}{dt}\Big(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}\Big) = 0. \tag{1.39}$$

Integrando ambos os membros de (1.39) tem-se que

$$\frac{\lambda \dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = t - C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 &= \frac{(t-C_1)^2}{\lambda^2 - (t-C_1)^2} \\ \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} &= \pm \frac{(t-C_1)}{\sqrt{\lambda^2-(t-C_1)^2}} \\ \Leftrightarrow dx &= \pm \frac{(t-C_1)}{\sqrt{\lambda^2-(t-C_1)^2}} dt. \end{aligned}$$

Integrando ambos os membros da última equação, obtemos

$$x - C_2 = \pm\sqrt{\lambda^2 - (t-C_1)^2}, \quad C_2 \in \mathbb{R},$$

que é equivalente a

$$(x-C_2)^2 + (t-C_1)^2 = \lambda^2.$$

Por outras palavras, a curva que extremiza o problema dado é um arco de circunferência de centro (C_1, C_2) e raio $|\lambda|$, onde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ são constantes de integração.

Usando as condições de fronteira $x(-a) = x(a) = 0$, concluímos que $C_1 = 0$ (logo o centro da circunferência está sobre o eixo xx) e $C_2^2 = \lambda^2 - a^2$. A condição isoperimétrica estabelece a relação $P = \pi|\lambda|$, isto é, $|\lambda| = \dfrac{P}{\pi}$, logo a curva extremante para o problema dado é a semi-circunferência de centro $(0, 0)$ e raio $\dfrac{P}{\pi}$. Observe-se que o intervalo $[-a, a]$ não deve estar especificado no início do problema, mas o valor de a é escolhido baseado no valor da restrição isoperimétrica. Após sabermos que a curva otimal é um arco de circunferência, é imediato verificar que o valor de a é dado por $\dfrac{P}{\pi}$.

1.8 Conclusão

Neste capítulo estudámos os problemas variacionais clássicos e provámos alguns resultados fundamentais da teoria do cálculo das variações, nomeadamente: lemas fundamentais do cálculo das variações, equação de Euler-Lagrange, condições de transversalidade, condição de DuBois-Reymond e condição suficiente de otimalidade. Estas condições de otimalidade foram deduzidas na classe de funções C^2, no entanto, era possível deduzi-las para funções com menos regularidade, nomeadamente, na classe das funções C^1. Contudo, neste caso não seria possível escrever a equação de Euler-Lagrange do Exemplo 1.3 na forma (1.29).

Neste trabalho restringimos-nos aos problemas variacionais com condições de fronteira fixas e problemas variacionais em que pelo menos uma das condições de fronteira não é especificada. Existem outros problemas variacionais muito interessantes e que têm muitas aplicações úteis, como por exemplo, problemas no qual o ponto final b é livre ou problemas variacionais com restrições holonómicas [5].

Capítulo 2

Cálculo das Variações Clássico com atraso no tempo

Neste capítulo apresentamos uma extensão dos problemas variacionais clássicos considerando problemas variacionais nos quais o comportamento das trajetórias no passado é tido em conta na determinação das soluções. Os sistemas dinâmicos com atraso no tempo são muito importantes na modelação de fenómenos da vida real em vários campos, como exemplo na Matemática, Biologia, Química, Economia e Mecânica. De facto, certos sistemas dinâmicos são determinados não apenas pelas variáveis no momento atual, mas também pelo seu comportamento no passado. Dada a importância dos problemas com atraso no tempo, vários autores generalizaram os resultados clássicos do cálculo das variações para o caso com atraso no tempo [3, 7, 9, 19, 27, 30, 31].

O principal objetivo deste capítulo é estender os resultados clássicos do cálculo das variações nomeadamente, a equação de Euler-Lagrange e a condição de DuBois-Reymond, para problemas variacionais com atraso no tempo.

De modo a simplificarmos a notação iremos usar as seguintes notações

$$\begin{aligned} x_\tau(t) &:= x(t-\tau); \\ \dot{x}_\tau(t) &:= \dot{x}(t-\tau); \\ \langle x\rangle_\tau(t) &:= (t, x(t), \dot{x}(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau)). \end{aligned}$$

Consideremos o seguinte problema:

Problema (P_τ). Seja τ um número real tal que $0 \leq \tau < b - a$. Determinar as trajetórias $x \in C^2([a-\tau, b]; \mathbb{R})$ tais que:

$$\mathcal{J}(x) = \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau))\, dt \to extr$$
$$\text{sujeito a} \quad x(b) = \beta \text{ e } x(t) = \mu(t), \quad t \in [a-\tau, a], \tag{2.1}$$

onde $\beta \in \mathbb{R}$, $\mu \in C^2([a-\tau, a]; \mathbb{R})$ é uma função inicial dada e onde se supõe que o Lagrageano L satisfaz as seguintes hipóteses:

1. $L \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^4; \mathbb{R})$;

2. as funções $t \mapsto \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau))$ e $t \mapsto \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}(t, x(t), \dot{x}(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau))$ são diferenciáveis para qualquer trajetória x.

2.1 Equações de Euler-Lagrange

Definição 2.1. (Função admissível para o problema (P_τ)). Dizemos que a função $x \in C^2([a-\tau, b]; \mathbb{R})$ é admissível para o problema (P_τ) se satisfaz as condições (2.1).

Definição 2.2. (Variação admissível). Dizemos que $\eta \in C^2([a-\tau, b]; \mathbb{R})$ é uma variação admissível para o problema (P_τ) se $\eta(t) = 0$ para $t \in [a-\tau, a]$ e $\eta(b) = 0$.

Teorema 2.1. (Equações de Euler-Lagrange para problemas variacionais clássicos com atraso no tempo - cf [27]). *Se x é uma solução do problema (P_τ), então x satisfaz as seguintes equações de Euler-Lagrange com atraso no tempo:*

$$\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x\rangle_\tau(t+\tau) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(t+\tau) + \frac{\partial L}{\partial x}\langle x\rangle_\tau(t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(t) = 0, \tag{2.2}$$

$a \leq t \leq b - \tau$, e

$$\frac{\partial L}{\partial x}\langle x\rangle_\tau(t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(t) = 0, \tag{2.3}$$

$b - \tau \leq t \leq b$.

Demonstração. Suponhamos que $x \in C^2([a-\tau, b]; \mathbb{R})$ é uma solução do problema (P_τ) e seja η uma variação admissível. Seja ϵ um número real arbitrário.

Defina-se $x^*(t) = x(t) + \epsilon\eta(t)$ e $x^*_\tau(t) = x_\tau(t) + \epsilon\eta(t-\tau)$.

Para simplificarmos a notação não iremos colocar os argumentos das funções e dos funcionais.

Uma condição necessária para que x seja solução do problema (P_τ) é

$$\frac{d}{d\epsilon}\mathcal{J}(x^*)\bigg|_{\epsilon=0} = 0,$$

isto é

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x^*}\langle x^*\rangle_\tau(t)\eta(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^*}\langle x^*\rangle_\tau(t)\dot{\eta}(t) + \frac{\partial L}{\partial x^*_\tau}\langle x^*\rangle_\tau(t)\eta(t-\tau)\right.$$
$$\left.+ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^*_\tau}\langle x^*\rangle_\tau(t)\dot{\eta}(t-\tau)\right)\bigg|_{\epsilon=0} dt = 0.$$

Logo temos que

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x}\langle x\rangle_\tau(t)\eta(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(t)\dot{\eta}(t)\right) dt$$
$$+ \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x\rangle_\tau(t)\eta(t-\tau) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(t)\dot{\eta}(t-\tau)\right) dt = 0.$$

Aplicando a mudança de variável $t = s + \tau$ no segundo integral, obtemos

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x}\langle x\rangle_\tau(s)\eta(s) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)\dot{\eta}(s)\right) ds$$
$$+ \int_{a-\tau}^{b-\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)\eta(s) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)\dot{\eta}(s)\right) ds = 0,$$

o que é equivalente a

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x}\langle x\rangle_\tau(s)\eta(s) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)\dot{\eta}(s)\right) ds$$
$$+ \int_{a-\tau}^{a} \left(\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)\eta(s) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)\dot{\eta}(s)\right) ds$$
$$+ \int_{a}^{b-\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)\eta(s) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)\dot{\eta}(s)\right) ds = 0.$$

Como η é nulo em $[a-\tau, a]$, temos que

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x}\langle x\rangle_\tau(s)\eta(s) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)\dot{\eta}(s)\right) ds$$
$$+ \int_{a}^{b-\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)\eta(s) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)\dot{\eta}(s)\right) ds = 0,$$

e, portanto

$$\begin{aligned}
&\int_a^{b-\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\langle x\rangle_\tau(s)+\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)\right)\eta(s)ds\\
+\;&\int_a^{b-\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)\right)\dot{\eta}(s)ds\\
+\;&\int_{b-\tau}^{b}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\langle x\rangle_\tau(s)\eta(s)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)\dot{\eta}(s)\right)ds=0.
\end{aligned}$$

Aplicando a fórmula de integração por partes obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_a^{b-\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\langle x\rangle_\tau(s)+\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)-\frac{d}{ds}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)\Big)\right)\eta(s)ds\\
&\qquad+\left[\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)\Big)\eta(s)\right]_a^{b-\tau}\\
&+\int_{b-\tau}^{b}\left[\frac{\partial L}{\partial x}\langle x\rangle_\tau(s)-\frac{d}{ds}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)\Big)\right]\eta(s)ds+\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)\eta(s)\right]_{b-\tau}^{b}=0.
\end{aligned}$$

Uma vez que a equação anterior é válida para todas as variações admissíveis, também é válida para aquelas variações admissíveis η tais que $\eta(t)=0$ para todo $t\in[b-\tau,b]$ e, portanto, temos

$$\int_a^{b-\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\langle x\rangle_\tau(s)+\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)-\frac{d}{ds}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)\Big)\right)\eta(s)ds.$$

Pelo Lema 1.1, concluímos que

$$\frac{\partial L}{\partial x}\langle x\rangle_\tau(t)+\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x\rangle_\tau(t+\tau)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(t)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(t+\tau)\right)=0,$$

para $a\leq t\leq b-\tau$, ficando provada a equação (2.2). Agora, se nos restringirmos àquelas variações admissíveis η tais que $\eta(t)=0$ para todo $t\in[a,b-\tau]$, obtemos

$$\int_{b-\tau}^{b}\left[\frac{\partial L}{\partial x}\langle x\rangle_\tau(s)-\frac{d}{ds}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)\Big)\right]\eta(s)ds=0.$$

Logo, o Lema 1.1, permite concluír que

$$\frac{\partial L}{\partial x}\langle x\rangle_\tau(t)-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(t)=0,$$

para $b-\tau\leq t\leq b$, ficando provada a equação (2.3). ■

Definição 2.3. (Extremais para (P_τ)). Funções admissíveis para o problema (P_τ) que são soluções das equações de Euler-Lagrange (2.2)-(2.3) são chamadas extremais com atraso no tempo.

Observação 2.1. *Se $\tau = 0$, então o problema (P_τ) reduz-se no problema variacional clássico* (1.1)-(1.2)*, e, portanto, o Teorema 1.1 é um corolário do Teorema 2.1.*

2.2 Condição de transversalidade

A seguir apresentamos condições de otimalidade para o problema clássico com atraso no tempo (P_τ), em que $x(b)$ é arbitrário.

Teorema 2.2. (Equações de Euler-Lagrange e condição de transversalidade para o problema clássico com atraso no tempo - cf [27]). *Se x é um extremante do problema clássico com atraso no tempo*

$$\mathcal{J}(x) = \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau))dt \to extr,$$

$$sujeito\ a\ \ x(t) = \mu(t), \quad t \in [a-\tau, a],$$

então x satisfaz as duas equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x\rangle_\tau(t+\tau) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(t+\tau) + \quad \frac{\partial L}{\partial x}\langle x\rangle_\tau(t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(t) = 0, \tag{2.4}$$

$a \leq t \leq b-\tau$ e

$$\frac{\partial L}{\partial x}\langle x\rangle_\tau(t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(t) = 0, \tag{2.5}$$

$b-\tau \leq t \leq b$, e a condição de transversalidade

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(b) = 0. \tag{2.6}$$

Demonstração. Usando os mesmos argumentos da prova do Teorema 2.1, obtemos

$$\int_a^{b-\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\langle x\rangle_\tau(s)+\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)-\frac{d}{ds}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)\Big)\right)\eta(s)ds$$
$$+\left[\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)\Big)\eta(s)\right]_a^{b-\tau}$$
$$+\int_{b-\tau}^{b}\left[\frac{\partial L}{\partial x}\langle x\rangle_\tau(s)-\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)\right)\right]\eta(s)ds+\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)\eta(s)\right]_{b-\tau}^{b}=0.$$

A equação anterior é válida para todas as variações admissíveis e, portanto, também é válida para aquelas variações admissíveis η tais que $\eta(t)=0$ para todo $t\in[b-\tau,b]$, logo

$$\int_a^{b-\tau}\left[\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x\rangle_\tau(t+\tau)-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(t+\tau)+\frac{\partial L}{\partial x}\langle x\rangle_\tau(t)-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(t)\right]\eta(t)dt=0.$$

Aplicando o Lema 1.1, concluímos que

$$\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x\rangle_\tau(t+\tau)-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(t+\tau)+\frac{\partial L}{\partial x}\langle x\rangle_\tau(t)-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(t)=0,$$

para $a\le t\le b-\tau$.

Por outro lado, se nos restringirmos àquelas variações η admissíveis tais que $\eta(t)=0$ para todo $t\in[a,b-\tau]$ temos que

$$\int_{b-\tau}^{b}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\langle x\rangle_\tau(t)-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(t)\right)\eta(t)dt+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(b)\eta(b)=0. \tag{2.7}$$

Uma vez que (2.7) é válida para todas estas variações η, em particular esta igualdade também se verifica para toda a variação η tal que $\eta(b)=0$, permitindo concluir que

$$\int_{b-\tau}^{b}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\langle x\rangle_\tau(t)-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(t)\right)\eta(t)dt=0.$$

Pelo Lema 1.1, concluímos que

$$\frac{\partial L}{\partial x}\langle x\rangle_\tau(t)-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(t)=0 \qquad t\in[b-\tau,b]. \tag{2.8}$$

Substituindo (2.8) em (2.7) temos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(b)\eta(b)=0. \tag{2.9}$$

Uma vez que (2.9) é válida para qualquer escolha de $\eta(b)$, concluímos que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(b)=0$$

provando a condição de transversalidade (2.6). ■

2.3 Condições de DuBois-Reymond

O seguinte teorema é uma extensão da condição de DuBois-Reymond para problemas variacionais clássicos.

Teorema 2.3. (Condições de DuBois-Reymond para problemas variacionais clássicos com atraso no tempo - cf. [27]). *Se x é um extremamente do problema clássico com atraso no tempo tal que*

$$\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x\rangle_\tau(t+\tau)\;\dot{x}(t)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(t+\tau)\,\ddot{x}(t)=0 \tag{2.10}$$

para todo $t\in[a-\tau,b-\tau]$, então x satisfaz as seguintes equações de Dubois-Reymond

$$\frac{d}{dt}\left[L\langle x\rangle_\tau(t)-\dot{x}(t)\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(t)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(t+\tau)\right)\right]=\frac{\partial L}{\partial t}\langle x\rangle_\tau(t) \tag{2.11}$$

para $a\leq t\leq b-\tau$, e

$$\frac{d}{dt}\left(L\langle x\rangle_\tau(t)-\dot{x}(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(t)\right)=\frac{\partial L}{\partial t}\langle x\rangle_\tau(t), \tag{2.12}$$

para $b-\tau\leq t\leq b$.

Demonstração. Seja $t\in[a,b-\tau]$ arbitrário. Verifica-se que

$$\begin{aligned}
&\int_a^t \frac{d}{ds}\left[L\langle x\rangle_\tau(s)-\dot{x}(s)\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)\right)\right]ds\\
&=\int_a^t\left[\frac{d}{ds}L\langle x\rangle_\tau(s)-\ddot{x}(s)\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)\right)\right.\\
&\left.-\dot{x}(s)\,\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)\right)\right]ds\\
&=\int_a^t\left[\,\frac{\partial L}{\partial s}\langle x\rangle_\tau(s)+\frac{\partial L}{\partial x}\langle x\rangle_\tau(s)\dot{x}(s)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)\ddot{x}(s)+\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x\rangle_\tau(s)\;\dot{x}(s-\tau)\right.\\
&+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s)\;\ddot{x}(s-\tau)-\ddot{x}(s)\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)\right)\\
&\left.-\dot{x}(s)\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)\right)\right]ds.
\end{aligned}$$

Cancelando os termos simétricos, obtemos

$$\int_a^t \frac{d}{ds}\left[L\langle x\rangle_\tau(s) - \dot{x}(s)\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)\right)\right]ds$$
$$= \int_a^t \left[\frac{\partial L}{\partial s}\langle x\rangle_\tau(s) + \frac{\partial L}{\partial x}\langle x\rangle_\tau(s)\dot{x}(s) - \ddot{x}(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau) - \dot{x}(s)\frac{d}{ds}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)\Big)\right]ds + \int_a^t \left(\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x\rangle_\tau(s)\dot{x}(s-\tau) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s)\ddot{x}(s-\tau)\right)ds.$$

Observe-se que fazendo uma mudança de variável $u = s-\tau$ no último integral, obtemos

$$\int_a^t \frac{d}{ds}\left[L\langle x\rangle_\tau(s) - \dot{x}(s)\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)\right)\right]ds$$
$$= \int_a^t \left[\frac{\partial L}{\partial s}\langle x\rangle_\tau(s) + \frac{\partial L}{\partial x}\langle x\rangle_\tau(s)\dot{x}(s) - \ddot{x}(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau) - \dot{x}(s)\frac{d}{ds}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)\Big)\right]ds + \int_{a-\tau}^{t-\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x\rangle_\tau(u+\tau)\dot{x}(u) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(u+\tau)\ddot{x}(u)\right)du$$

Usando a hipótese (2.10) no último integral, concluímos que

$$\int_a^t \frac{d}{ds}\left[L\langle x\rangle_\tau(s) - \dot{x}(s)\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)\right)\right]ds$$
$$= \int_a^t \frac{\partial L}{\partial s}\langle x\rangle_\tau(s) + \frac{\partial L}{\partial x}\langle x\rangle_\tau(s)\dot{x}(s) - \ddot{x}(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau) - \dot{x}(s)\frac{d}{ds}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)$$
$$\left. + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)\Big)\right]ds,$$

logo

$$\int_a^t \frac{d}{ds}\left[L\langle x\rangle_\tau(s) - \dot{x}(s)\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)\right)\right]ds$$
$$= \int_a^t \left[\frac{\partial L}{\partial s}\langle x\rangle_\tau(s) - \Big(\ddot{x}(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau) + \dot{x}(s)\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)\Big)\right.$$
$$+ \dot{x}(s)\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau) + \frac{\partial L}{\partial x}\langle x\rangle_\tau(s)\dot{x}(s) - \dot{x}(s)\frac{d}{ds}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)$$
$$\left. + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)\Big)\right]ds.$$

Usando a hipótese (2.10) no último integral, concluímos que

$$\int_a^t \frac{d}{ds}\left[L\langle x\rangle_\tau(s) - \dot{x}(s)\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)\right)\right]ds$$
$$= \int_a^t \left[\frac{\partial L}{\partial s}\langle x\rangle_\tau(s) + \dot{x}(s)\left(\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau) + \frac{\partial L}{\partial x}\langle x\rangle_\tau(s)\right.\right.$$
$$\left.\left.- \frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s) - \frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)\right)\right]ds.$$

Usando a equação de Euler-Lagrange (2.2) na equação anterior, obtemos que

$$\int_a^t \frac{d}{ds}\left[L\langle x\rangle_\tau(s) - \dot{x}(s)\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s+\tau)\right)\right]ds = \int_a^t \frac{\partial L}{\partial s}\langle x\rangle_\tau(s)ds.$$

Da arbitrariedade de $t \in [a, b-\tau]$, podemos concluir que

$$\frac{d}{dt}\left[L\langle x\rangle_\tau(t) - \dot{x}(t)\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(t+\tau)\right)\right] = \frac{\partial L}{\partial t}\langle x\rangle_\tau(t),$$

ficando provada a condição (2.11). A seguir vamos provar a condição (2.12). Seja $t \in [b-\tau, b]$ arbitrário. Observe-se que

$$\int_t^b \frac{d}{ds}\left[L\langle x\rangle_\tau(s) - \dot{x}(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)\right]ds$$
$$= \int_t^b \left[\left(\frac{\partial L}{\partial s}\langle x\rangle_\tau(s) + \frac{\partial L}{\partial x}\langle x\rangle_\tau(s)\dot{x}(s) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)\ddot{x}(s) + \frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x\rangle_\tau(s)\dot{x}(s-\tau)\right.\right.$$
$$\left.\left.+ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s)\ddot{x}(s-\tau)\right) - \ddot{x}(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s) - \dot{x}(s)\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)\right)\right]ds.$$

Cancelando os termos simétricos, obtemos

$$\int_t^b \frac{d}{ds}\left(L\langle x\rangle_\tau(s) - \dot{x}(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)\right)ds$$
$$= \int_t^b \left(\frac{\partial L}{\partial s}\langle x\rangle_\tau(s) + \frac{\partial L}{\partial x}\langle x\rangle_\tau(s)\dot{x}(s) - \dot{x}(s)\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)\right)ds$$
$$+ \int_t^b \left(\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x\rangle_\tau(s)\dot{x}(s-\tau) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(s)\ddot{x}(s-\tau)\right)ds.$$

Usando a mudança de variável $u = s - \tau$ no último integral, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_t^b \frac{d}{ds}\left(L\langle x\rangle_\tau(s) - \dot{x}(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)\right)ds \\
&= \int_t^b \left(\frac{\partial L}{\partial s}\langle x\rangle_\tau(s) + \frac{\partial L}{\partial x}\langle x\rangle_\tau(s)\dot{x}(s) - \dot{x}(s)\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)\right)ds \\
&+ \int_{t-\tau}^{b-\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x\rangle_\tau(u+\tau)\dot{x}(u) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x\rangle_\tau(u+\tau)\ddot{x}(u)\right)du.
\end{aligned}$$

Usando a hipótese (2.10) e substituindo a equação de Euler-Lagrange (2.3) no último integral, obtemos

$$\int_t^b \frac{d}{ds}\left(L\langle x\rangle_\tau(s) - \dot{x}(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(s)\right)ds = \int_t^b \frac{\partial L}{\partial s}\langle x\rangle_\tau(s)ds.$$

Da arbitrariedade de $t \in [b-\tau, b]$, concluímos que

$$\frac{d}{dt}\left(L\langle x\rangle_\tau(t) - \dot{x}(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x\rangle_\tau(t)\right) = \frac{\partial L}{\partial t}\langle x\rangle_\tau(t),$$

como se pretendia demonstrar. ■

2.4 Exemplo ilustrativo

Nesta subsecção iremos apresentar um exemplo que mostra a utilidade dos resultados deste capítulo. Observe-se que todos resultados apresentados anteriormente são válidos na classe mais geral das funções PC^2, isto é, na classe das funções seccionalmente de classe C^2.

Exemplo 2.1. *Consideremos o seguinte problema variacional com atraso no tempo*

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(x) &:= \int_0^2 (\dot{x}(t-1))^2\, dt \to extr, \\
x(t) &= -t, \quad t \in [-1,0] \text{ e } x(2) = 1.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Determinando as equações de Euler-Lagrange (2.2)-(2.3) para o problema (2.13), obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0, & t \in [0,1], \\ 0 = 0, & t \in [1,2]. \end{cases}$$

Resolvendo a equação do sistema anterior com a condição inicial $x(0) = 0$, obtemos

$$x(t) = k_1 t \qquad t \in [0,1]$$

para alguma constante $k_1 \in \mathbb{R}$. Portanto, as equações de Euler-Lagrange apenas nos dão informação sobre os candidatos a extremantes no intervalo $[0,1]$. Vamos verificar se as condições de DuBois-Reymond nos fornecem condições necessárias que os extremais têm de verificar no intervalo $[1,2]$.

Comecemos por verificar que os candidatos a extremantes satisfazem a condição (2.10) do Teorema 2.3: $2\dot{x}(t).\ddot{x}(t) = 0,\ t \in [-1,1]$. Esta condição verifica-se trivialmente no intervalo $[-1,0]$ porque $x(t) = -t,\ t \in [-1,0]$. Observe-se que no intervalo [0,1] a condição também se verifica trivialmente porque $\ddot{x}(t) = 0,\ t \in [0,1]$. Portanto, temos uma família x_f de candidatos a extremantes com atraso no tempo dada por

$$x_f(t) = \begin{cases} -t, & t \in [-1,0], \\ k_1\, t, & t \in]0,1], \\ f(t), & t \in]1,2[, \\ 1, & t = 2, \end{cases} \tag{2.14}$$

onde f é uma função escolhida para garantir que x_f seja uma função da classe PC^2 e de modo a verificar as condições necessárias de Dubois-Reymond. Observe-se que a condição (2.11) reduz-se a

$$\frac{d}{dt}\Big[(\dot{x}(t-1))^2 - 2(\dot{x}(t))^2\Big] = 0, \quad t \in [0,1],$$

ou seja,

$$\dot{x}(t-1)\ddot{x}(t-1) = 2\dot{x}(t)\ddot{x}(t), \quad t \in [0,1],$$

que se verifica trivialmente para x_f. A condição (2.12) reduz-se a

$$\dot{x}(t-1)\,\ddot{x}(t-1) = 0 \quad t \in [1,2],$$

isto é,

$$\dot{x}(t)\,\ddot{x}(t) = 0, \quad t \in [0,1]$$

que é também verificado trivialmente para qualquer x_f.

Podemos portanto concluir que as condições de DuBois-Reymond também não nos dão informação sobre o comportamento de x_f no intervalo $[1, 2]$.

Este exemplo mostra a necessidade da dedução de outra condição necessária de otimalidade para determinar de modo explicito x_f no intervalo $]1, 2[$. No nosso entender, esta questão em aberto tem interesse para a elaboração de um trabalho futuro.

2.5 Conclusão

Neste capítulo apresentámos alguns resultados importantes para os problemas variacionais clássicos com atraso no tempo, nomeadamente apresentámos as equações de Euler-Lagrange, as condições de DuBois-Reymond e uma condição de transversalidade. Os resultados aqui apresentados, representam uma extensão dos resultados apresentados no Capítulo 1 (basta considerar $\tau = 0$).

Capítulo 3

Cálculo das Variações generalizado

Neste capítulo apresentamos o problema variacional de Herglotz, que é uma generalização do problema clássico do cálculo das variações. Apresentamos também as seguintes condições necessárias de otimalidade: a equação de Euler-Lagrange generalizada, as condições de transversalidade e a condição de Dubois-Reymond. O estudo destas condições necessárias, mereceu uma abordagem clássica para introduzir uma variação numa trajetória admissível e estudar as condições para que a trajetória seja um extremante.

Em 1930, Gustav Herglotz[1] propôs um cálculo das variações generalizado que generaliza o problema clássico [18].

O problema variacional generalizado pode ser formulado da seguinte forma:

Problema (H). Determinar as trajetórias $x \in C^2([a,b];\mathbb{R})$ e $z \in C^1([a,b];\mathbb{R})$ tais que:

$$
\begin{gathered}
z(b) \to extr, \\
com\ \dot{z}(t) = L(t, x(t), \dot{x}(t), z(t)), \qquad t \in [a,b], \qquad (H) \\
\text{sujeito a } z(a) = \gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}
\end{gathered}
$$

[1]Gustav Herglotz (1881-1953), era um matemático alemão. Ele estudou e ensinou matemática e astronomia em Viena, Munique e Göttingen. Seus ramos de trabalho incluiu a teoria da relatividade, as equações diferenciais, a teoria dos números e das funções, a Geofísica, Astronomia e Matemática Aplicada à Física Teórica.

onde γ é um número real fixo e *extr*, significa minimizar ou maximizar. Supomos que o Lagrangeano L satisfaz as seguintes hipóteses

1. $L \in C^1([a,b] \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$;

2. a função $t \mapsto \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t), z(t))$ é diferenciável para qualquer trajetória admissível x.

Observe-se que $\dot{z}(t) = L(t, x(t), \dot{x}(t), z(t))$ representa uma família de equações diferenciais: para cada função x obtém-se equação diferencial diferente. Portanto, z depende não só de t mas também de x, facto que pode ser explicitado escrevendo $z(t, x(t), \dot{x}(t))$, mas por simplificação de escrita escrevemos apenas $z(t)$. Quando for necessário simplificarmos a escrita, iremos representar $(t, x(t), \dot{x}(t), z(t))$ por $\langle x; z \rangle(t)$.

O problema de Herglotz (H) reduz-se ao problema clássico do cálculo das variações se o Lagrangeano L não depende da variável z: de facto se

$$\dot{z}(t) = L(t, x(t), \dot{x}(t)), \quad t \in [a,b],$$

$$z(a) = \gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R},$$

então tem-se que o problema (H) se reduz ao problema:

$$z(b) = \int_a^b \tilde{L}(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \to extr,$$

onde

$$\tilde{L}(t, x(t), \dot{x}(t)) = L(t, x(t), \dot{x}(t)) + \frac{\gamma}{b-a}.$$

Herglotz provou que uma condição necessária de otimalidade para que um par (x, z) seja uma solução do problema variacional generalizado (H) é dada por

$$\frac{\partial L}{\partial x}\langle x; z \rangle(t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x; z \rangle(t) + \frac{\partial L}{\partial z}\langle x; z \rangle(t)\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x; z \rangle(t) = 0, \quad t \in [a,b].$$

Esta equação é conhecida como equação de Euler-Lagrange generalizada.

Na Secção 3.1 iremos deduzir a equação de Euler-Lagrange generalizada para o problema (H) na classe de funções $x \in C^2([a,b]; \mathbb{R})$ que satisfaz as condições de fronteira

$$x(a) = \alpha \text{ e } x(b) = \beta, \tag{3.1}$$

onde α, $\beta, \in \mathbb{R}$. As condições de transversalidade para o problema (H) são apresentadas na Secção 3.2.

Seguidamente vamos apresentar algumas definições que são importantes mais adiante.

Definição 3.1. (Par admissível para problema (H)). Dizemos que um par (x, z), $x \in C^2([a, b]; \mathbb{R})$ e $z \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ é um par admissível para o problema (H) se satisfaz a equação diferencial

$$\dot{z}(t) = L(t, x(t), \dot{x}(t), z(t)), \quad t \in [a, b],$$

$$com \quad z(a) = \gamma, \qquad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Definição 3.2. (Variação admissível). Dizemos que $\eta \in C^2([a, b]; \mathbb{R})$ é uma variação admissível para o problema (H) sujeito às condições de fronteira (3.1) se, e somente se, $\eta(a) = \eta(b) = 0$.

3.1 Equação de Euler-Lagrange generalizada

Nesta secção apresentamos um resultado que nos fornece uma condição necessária de otimalidade para que um par admissível (x, z) seja extremante do funcional $z(b, x(b), \dot{x}(b))$, onde z é definido por

$$\dot{z}(t) = L(t, x(t), \dot{x}(t), z(t)), \quad t \in [a, b],$$

$$\text{sujeito à condição } z(a) = \gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R},$$

onde x satisfaz as condições de fronteira (3.1).

Teorema 3.1. (Equação de Euler-Lagrange generalizada [18]). *Se (x, z) é uma solução do problema (H) sujeita às condições de fronteira (3.1), então (x, z) satisfaz a seguinte equação de Euler-Lagrange generalizada:*

$$\frac{\partial L}{\partial x}\langle x; z\rangle(t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x; z\rangle(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x; z\rangle(t)\ \frac{\partial L}{\partial z}\langle x; z\rangle(t) = 0, \qquad t \in [a, b]. \tag{3.2}$$

Demonstração. Vamos supor que (x,z) é uma solução do problema (H) sujeita às condições (3.1) e seja $\eta \in C^2([a,b];\mathbb{R})$ uma variação admissível tal que $\dot{\eta}(a)=0$. Seja $\epsilon \in \mathbb{R}$ fixado arbitrariamente. Defina-se $\zeta : [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$\zeta(t) := \frac{d}{d\epsilon} z(t, x(t)+\epsilon\eta(t), \dot{x}(t)+\epsilon\dot{\eta}(t))\Big|_{\epsilon=0}$.

Uma vez que $z(a)=\gamma$ para $\gamma \in \mathbb{R}$ e $\eta(a)=0$ então $\zeta(a) = \frac{d}{d\epsilon} \underbrace{z(a,x(a),\dot{x}(a))}_{\gamma}\Big|_{\epsilon=0} = 0$.

Uma vez que z é minimizante (resp. maximizante), temos

$$z(b, x(b)+\epsilon\eta(b), \dot{x}(b)+\epsilon\dot{\eta}(b)) \geq z(b, x(b), \dot{x}(b)).$$

$$\Big(resp.\ z(b, x(b)+\epsilon\eta(b), \dot{x}(b)+\epsilon\dot{\eta}(b)) \leq z(b, x(b), \dot{x}(b))\Big).$$

Portanto, $\zeta(b) = \frac{d}{d\epsilon} z(b, x(b)+\epsilon\eta(b), \dot{x}(b)+\epsilon\dot{\eta}(b))\Big|_{\epsilon=0} = 0.$

Uma vez que

$$\begin{aligned}
\dot{\zeta}(t) &= \frac{d}{dt}\frac{d}{d\epsilon} z(t, x(t)+\epsilon\eta(t), \dot{x}(t)+\epsilon\eta(t))\Big|_{\epsilon=0} \\
&= \frac{d}{d\epsilon}\frac{d}{dt} z(t, x(t)+\epsilon\eta(t), \dot{x}(t)+\epsilon\dot{\eta}(t))\Big|_{\epsilon=0} \\
&= \frac{d}{d\epsilon} L(t, x(t)+\epsilon\eta(t), \dot{x}(t)+\epsilon\dot{\eta}(t), z(t))\Big|_{\epsilon=0},
\end{aligned}$$

concluímos que

$$\begin{aligned}
\dot{\zeta}(t) = {} & \frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle(t)\,\eta(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(t)\,\dot{\eta}(t) \\
& + \frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle(t)\frac{d}{d\epsilon} z(t, x(t)+\epsilon\eta(t), \dot{x}(t)+\epsilon\dot{\eta}(t))\Big|_{\epsilon=0} \\
\Leftrightarrow \dot{\zeta}(t) = {} & \frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle(t)\eta(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(t)\,\dot{\eta}(t) + \frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle(t)\,\zeta(t) \\
\Leftrightarrow \dot{\zeta}(t) - {} & \frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle(t)\,\zeta(t) = \frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle(t)\,\eta(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(t)\,\dot{\eta}(t).
\end{aligned}$$

Deste modo, ζ satisfaz uma equação diferencial linear da primeira ordem, cuja solução é encontrada de acordo com

$$\dot{x} - Px = Q \Leftrightarrow e^{-\int_a^t P(\theta)d\theta} x(t) - x(a) = \int_a^t e^{-\int_a^\tau P(\theta)d\theta} Q(\tau)d\tau.$$

Portanto,

$$e^{-\int_a^t \frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle(\theta)d\theta}\zeta(t) - \zeta(a) = \int_a^t e^{-\int_a^\tau \frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle(\theta)d\theta}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle(\tau)\eta(\tau) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(\tau)\dot{\eta}(\tau)\right)d\tau.$$

Denotando $\lambda(t) := e^{-\int_a^t \frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle(\theta)d\theta}$, obtemos

$$\lambda(t)\zeta(t) - \zeta(a) = \int_a^t \lambda(\tau)\left(\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle(\tau)\eta(\tau) + \frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle(\tau)\dot{\eta}(\tau)\right)d\tau.$$

Em particular, para $t = b$, temos

$$\lambda(b)\zeta(b) - \zeta(a) = \int_a^b \lambda(\tau)\left(\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle(\tau)\eta(\tau) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(\tau)\dot{\eta}(\tau)\right)d\tau.$$

Uma vez que $\zeta(a) = \zeta(b) = 0$, o lado esquerdo da equação anterior anula-se e obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \lambda(\tau)\left(\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle(\tau)\eta(\tau) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(\tau)\dot{\eta}(\tau)\right)d\tau \\ \Leftrightarrow 0 &= \int_a^b \lambda(\tau)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle(\tau)\eta(\tau)d\tau + \int_a^b \lambda(\tau)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(\tau)\dot{\eta}(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula de integração por partes no segundo integral, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \lambda(t)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle(t)\eta(t)\,dt - \int_a^b \frac{d}{dt}\Big(\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(t)\Big)\eta(t)dt + \left[\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(t)\eta(t)\right]_a^b \\ \Leftrightarrow 0 &= \int_a^b \left(\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle(t) - \frac{d}{dt}\Big(\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(t)\Big)\right)\eta(t)dt + \left[\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(t)\eta(t)\right]_a^b. \end{aligned}$$

Uma vez que $\eta(b) = \eta(a) = 0$, obtemos que:

$$\int_a^b \left(\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle(t) - \frac{d}{dt}\Big(\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(t)\Big)\right)\eta(t)dt = 0.$$

Logo, o Lema 1.1 permite concluir que

$$\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle(t) - \frac{d}{dt}\left(\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(t)\right) = 0, \quad t \in [a,b].$$

Aplicando a regra de derivação do produto no segundo termo da última equação, obtemos

$$\lambda(t)\left(\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle(t) + \frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(t)\right) = 0, \quad t \in [a,b].$$

Uma vez que $\lambda(t) \neq 0$, podemos concluir que

$$\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle(t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(t) + \frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(t) = 0, \quad t \in [a,b],$$

ficando provado o resultado pretendido. ■

De modo a simplificarmos as expressões, e de acordo com o Teorema 3.1, de agora em diante passamos a usar a notação $\lambda(t) := e^{-\int_a^t \frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle(\theta)d\theta}$.

Definição 3.3. (Extremais generalizados). Os pares admissíveis para o problema (H) que são soluções da equação de Euler-Lagrange (3.2) são chamadas extremais generalizados.

Corolário 3.1. *Suponha que x seja uma solução do problema (H) sujeito às condições (3.1), em que o Lagrangeano L não depende de z. Então, x satisfaz a equação de Euler-Lagrange clássica*

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0, \quad t \in [a, b]. \tag{3.3}$$

3.2 Condições de transversalidade generalizadas

Consideramos agora o caso em que os valores de $x(a)$ e de $x(b)$ não são necessariamente especificados.

Teorema 3.2. (Condições de transversalidade generalizadas [26]). *Suponhamos que o par (x, z) é uma solução do problema (H). Então (x, z) satisfaz a equação de Euler-Lagrange generalizada (3.2). Além disso,*

1. *Se $x(b)$ é livre, então tem-se que*

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x; z\rangle(b) = 0. \tag{3.4}$$

2. *Se $x(a)$ é livre, então tem-se que*

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x; z\rangle(a) = 0. \tag{3.5}$$

Demonstração. Suponhamos que o par (x, z) é uma solução do problema (H). Seja $\eta \in C^2([a, b]; \mathbb{R})$ e defina-se uma função ζ como na prova do Teorema 3.1. Da arbitrariedade de η, e usando argumentos semelhantes aos da prova do Teorema 3.1, concluímos que (x, z) satisfaz a equação Euler-Lagrange generalizada (3.2). Iremos agora provar a condição (3.4) (a prova de (3.5) segue exatamente os mesmos argumentos). Suponhamos que $x(b)$ é livre e $x(a) = \alpha$; então $\eta(a) = 0$; de outra forma, podemos restringimo-nos a essas funções η tais que $\eta(a) = 0$. Usando os mesmos argumentos que usamos na prova do Teorema 3.1, verifica-se que ζ satisfaz a equação diferencial linear da primeira ordem

$$\dot{\zeta}(t) = \frac{\partial L}{\partial x}\langle x; z\rangle(t)\eta(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x; z\rangle(t)\dot{\eta}(t) + \frac{\partial L}{\partial z}\langle x; z\rangle(t)\,\zeta(t)$$

$$\Leftrightarrow \dot{\zeta}(t) - \frac{\partial L}{\partial z}\langle x; z\rangle(t)\,\zeta(t) = \frac{\partial L}{\partial x}\langle x; z\rangle(t)\eta(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x; z\rangle(t)\dot{\eta}(t),$$

cuja solução é tal que

$$\lambda(t)\zeta(t) - \zeta(a) = \int_a^t \lambda(\tau)\left(\frac{\partial L}{\partial x}\langle x; z\rangle(\tau)\eta(\tau) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x; z\rangle(\tau)\dot{\eta}(\tau)\right)d\tau.$$

Uma vez que $\zeta(t) = 0$, para $t \in \{a, b\}$, obtemos

$$\int_a^b \lambda(t)\left(\frac{\partial L}{\partial x}\langle x; z\rangle(t)\eta(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x; z\rangle(t)\dot{\eta}(t)\right)dt = 0.$$

Usando a fórmula de integração por partes na segunda parcela, obtemos

$$\begin{aligned}\int_a^b \lambda(t)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x; z\rangle(t)\eta(t)dt + \left[\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x; z\rangle(t)\eta(t)\right]_a^b \\ - \int_a^b \frac{d}{dt}\Big(\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x; z\rangle(t)\Big)\eta(t)dt = 0,\end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned}\int_a^b \left[\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x; z\rangle(t) - \frac{d}{dt}\left(\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x; z\rangle(t)\right)\right]\eta(t)dt \\ + \left[\left(\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x; z\rangle(t)\right)\eta(t)\right]_a^b = 0.\end{aligned}$$

Uma vez que $\eta(a) = 0$, podemos concluir que

$$\int_a^b \left[\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x; z\rangle(t) - \frac{d}{dt}\left(\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x; z\rangle(t)\right)\right]\eta(t)dt + \lambda(b)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x; z\rangle(b)\eta(b) = 0, \tag{3.6}$$

para qualquer $\eta \in C^2([a,b];\mathbb{R})$ satisfazendo $\eta(a)=0$. Uma vez que (3.6) é válida para todas estas funções η, em particular esta igualdade também se verifica para toda a variação η tal que $\eta(b)=0$, logo

$$\int_a^b \left[\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle(t) - \frac{d}{dt}\left(\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(t)\right)\right]\eta(t)dt = 0.$$

Pelo Lema 1.1, temos

$$\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle(t) - \frac{d}{dt}\left(\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(t)\right) = 0, \quad t \in [a,b]. \tag{3.7}$$

Substituindo (3.7) em (3.6), obtemos

$$\lambda(b)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(b)\eta(b) = 0. \tag{3.8}$$

Uma vez que (3.8) é válida para qualquer escolha de $\eta(b)$, temos

$$\lambda(b)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(b) = 0.$$

Como $\lambda(b) \neq 0$, logo

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(b) = 0.$$

■

As equações (3.4) *e* (3.5) *são chamadas de condições de transversalidade generalizadas.*

Observação 3.1. *Se o par (x,z) é uma solução para o problema (H) sem nenhuma das condições de fronteiras (3.1), então (x,z) satisfaz a equação de Euler-Lagrange generalizada (3.2) e as duas condições de transversalidade (3.4) e (3.5).*

Seguidamente iremos observar que as condições de transversalidade generalizadas (3.4) e (3.5) são generalizações das condições de transversalidade para os problemas variacionais clássicos.

Corolário 3.2. *Suponha que x é uma solução do problema (H) em que o Lagrangeano L não depende de z. Então, x satisfaz a equação clássica de Euler-Lagrange* (1.5)*. Além disso,* *1. Se $x(b)$ é livre, então tem-se*

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\left(b, x(b), \dot{x}(b)\right) = 0.$$

2. Se $x(a)$ é livre, então tem-se

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\left(a, x(a), \dot{x}(a)\right) = 0.$$

3.3 Condição de DuBois-Reymond

A seguir iremos provar a condição de Dubois-Reymond que é útil para a determinação de extremantes para um problema variacional generalizado.

Teorema 3.3. (Condição de DuBois-Reymond para problemas variacionais de Herglotz [27]). *Se um par (x, z) é um extremal generalizado, então (x, z) satisfaz a seguinte equação:*

$$\frac{d}{dt}\left(\lambda(t)L\langle x;z\rangle(t) - \dot{x}(t)\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(t)\right) = \lambda(t)\frac{\partial L}{\partial t}\langle x;z\rangle(t), \quad t \in [a,b]. \tag{3.9}$$

Demonstração. Seja $t \in [a,b]$ fixado arbitrariamente. Notemos que

$$\int_a^t \frac{d}{ds}\left(\lambda(s)L\langle x;z\rangle(s) - \dot{x}(s)\,\lambda(s)\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(s)\right)ds = \int_a^t \Bigg(- \frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle(s)\lambda(s)L\langle x;z\rangle(s)$$
$$+ \lambda(s)\frac{d}{ds}L\langle x;z\rangle(s) - \ddot{x}(s)\,\lambda(s)\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(s) - \dot{x}(s)\frac{d}{ds}\Big(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(s)\Big)\Bigg)ds.$$
$$= \int_a^t \Bigg(- \frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle(s)\lambda(s)L\langle x;z\rangle(s) + \lambda(s)\frac{\partial L}{\partial s}\langle x;z\rangle(s) + \lambda(s)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle(s)\dot{x}(s)$$
$$+ \lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(s)\ddot{x}(s) + \lambda(s)\frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle(s)\dot{z}(s) - \ddot{x}(s)\,\lambda(s)\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(s)$$
$$- \dot{x}(s)\Big(- \frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle(s)\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(s) + \lambda(s)\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(s)\Big)\Bigg)ds.$$

Uma vez que $\dot{z}(s) = L(s, x(s), \dot{x}(s), z(s))$, temos que

$$\int_a^t \frac{d}{ds}\left(\lambda(s)L\langle x;z\rangle(s) - \dot{x}(s)\,\lambda(s)\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(s)\right)ds =$$

$$= \int_a^t \Bigg(-\frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle(s)\lambda(s)L\langle x;z\rangle(s) + \lambda(s)\frac{\partial L}{\partial s}\langle x;z\rangle(s) + \lambda(s)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle(s)\dot{x}(s)$$

$$+ \lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(s)\ddot{x}(s) + \lambda(s)\frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle(s)L\langle x;z\rangle(s) - \ddot{x}(s)\,\lambda(s)\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(s)$$

$$- \dot{x}(s)\Big(-\frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle(s)\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(s) + \lambda(s)\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(s)\Big)\Bigg)ds.$$

Cancelando os termos simétricos tem-se que

$$\int_a^t \frac{d}{ds}\left(\lambda(s)L\langle x;z\rangle(s) - \dot{x}(s)\,\lambda(s)\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(s)\right)ds = \int_a^t \Bigg[\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial s}\langle x;z\rangle(s)$$

$$+\lambda(s)\,\dot{x}(s)\left(\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle(s) - \frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(s) + \frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(s)\right)\Bigg]ds.$$

Usando a equação de Euler-Lagrange (3.2) obtemos que

$$\int_a^t \frac{d}{ds}\left(\lambda(s)L\langle x;z\rangle(s) - \dot{x}(s)\,\lambda(s)\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(s)\right)ds = \int_a^t \lambda(s)\frac{\partial L}{\partial s}\langle x;z\rangle(s)ds.$$

Da arbitrariedade de $t \in [a, b]$, concluímos que

$$\frac{d}{dt}\left(\lambda(t)L\langle x;z\rangle(t) - \dot{x}(t)\,\lambda(t)\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle(t)\right) = \lambda(t)\frac{\partial L}{\partial t}\langle x;z\rangle(t), \quad t \in [a,b]$$

como se pretendia demonstrar. ■

Corolário 3.3. (Condição de DuBois-Reymond para problemas variacionais clássicos). *Se o Lagragiano L não depende z e se x é um extremal do problema variacional, então x satisfaz a seguinte equação:*

$$\frac{d}{dt}\left(L(t, x(t), \dot{x}(t)) - \dot{x}(t)\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}L(t, x(t), \dot{x}(t))\right) = \frac{\partial L}{\partial t}L(t, x(t), \dot{x}(t)), \quad t \in [a,b].$$

Demonstração. Basta aplicar o Teorema 3.3 e observar que $\lambda(t) = 1,\ t \in [a, b]$. ■

3.4 Exemplos ilustrativos

Nesta secção ilustramos a importância dos resultados obtidos anteriormente com alguns exemplos.

Exemplo 3.1. Consideremos o seguinte problema variacional de Herglotz

$$z(1) \to extr,$$

onde

$$\dot{z}(t) = \dot{x}^2(t) + z(t), \quad t \in [0,1], \tag{3.10}$$

sujeito às condições

$$z(0) = 1, \ x(0) = 0 \ e \ x(1) = 1. \tag{3.11}$$

Vamos determinar a equação de Euler-Lagrange (3.1) deste problema

$$\begin{aligned} 0 - \frac{d}{dt}(2\dot{x}(t)) + 2\dot{x}(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow -2\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow \ddot{x}(t) - \dot{x}(t) &= 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Seguidamente vamos resolver o sistema formado por (3.10), as condições (3.11) e a equação de Euler Lagrange (3.12)

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) - \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{z}(t) = \dot{x}^2(t) + z(t) \\ x(0) = 0 \\ x(1) = 1 \\ z(0) = 1. \end{cases}$$

Fazendo a mudança de variável $\dot{x}(t) = w(t)$ na equação $\ddot{x}(t) - \dot{x}(t) = 0$ obtemos $\dot{w}(t) - w(t) = 0$ cuja solução geral é dada por $ln \mid w(t) \mid= t + c_1$, com $c_1 \in \mathbb{R}$. Logo

$$\mid w(t) \mid= e^{c_1}.e^t \Leftrightarrow w(t) = \pm e^{c_1} e^t,$$

donde

$$w(t) = k\, e^t, \quad k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Uma vez que a solução nula é também solução da equação diferencial $\dot{w}(t) = w(t)$ podemos concluir que

$$w(t) = k\, e^t, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Uma vez que a solução geral da equação $\ddot{x}(t) - \dot{x}(t) = 0$ é dada por $x(t) = ke^t + c_2$ $c_2 \in \mathbb{R}$, usando as condições de fronteira $x(0) = 0$ e $x(1) = 1$, obtemos $k = \frac{1}{e-1}$ e $c_2 = -\frac{1}{e-1}$.

Portanto, $x(t) = \frac{1}{e-1}(e^t - 1)$. A seguir vamos determinar z.

Como

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) - z(t) &= \dot{x}^2(t) \\ \Leftrightarrow \dot{z}(t) - z(t) &= \Big(\frac{1}{e-1}\Big)^2 e^{2t}, \end{aligned}$$

então, a solução da equação anterior é encontrado de acordo com

$$\lambda(t)z(t) - z(0) = \int_0^t \lambda(\tau)\Big(\frac{1}{e-1}\Big)^2 e^{2\tau} d\tau,$$

onde $\lambda(t) = e^{-\int_0^t 1\, d\theta} = e^{-t}$. Portanto,

$$\begin{aligned} e^{-t}z(t) - z(0) &= \int_0^t e^{-\tau}\Big[\frac{1}{(e-1)^2}e^{2\tau}\Big] d\tau \\ \Leftrightarrow e^{-t}z(t) - 1 &= \frac{1}{(e-1)^2}\int_0^t e^{\tau} d\tau \\ \Leftrightarrow e^{-t}z(t) &= \frac{1}{(e-1)^2}\Big(e^t - 1\Big) + 1 \\ \Leftrightarrow z(t) &= \frac{e^t}{(e-1)^2}\Big(e^t - 1\Big) + e^t, \end{aligned}$$

donde podemos concluir que o extremal do problema dado é

$$x(t) = \frac{1}{e-1}(e^t - 1), \quad z(t) = \frac{e^t}{(e-1)^2}\Big(e^t - 1\Big) + e^t,$$

e tem-se que $z(1) = \dfrac{e^2}{(e-1)} \simeq 4,3$.

Exemplo 3.2. Consideremos o problema estudado no Exemplo 3.1 mas agora consideramos que $x(1)$ é livre. Para este caso, resolvemos o sistema

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) - \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{z}(t) = \dot{x}^2(t) + z(t) \\ x(0) = 0 \\ z(0) = 1, \end{cases}$$

e a condição de transversalidade (3.4). Como vimos no Exemplo 3.1, a solução de equação diferencial $\ddot{x}(t) = \dot{x}$ é dada por

$$x(t) = ke^t + c, \quad k, c \in \mathbb{R}.$$

Usando a condição $x(0) = 0$ obtemos

$$0 = ke^0 + c \Leftrightarrow k = -c.$$

Usando a condição de transversalidade (3.4) conclui-se que

$$2\dot{x}(1) = 0 \Leftrightarrow 2ke^t = 0 \Leftrightarrow k = 0.$$

Então, $c = 0$ e, portanto, $x = 0$. Logo

$$\dot{z}(t) = z(t)$$

cuja solução geral é

$$z(t) = k_1 e^t, \; k_1 \in \mathbb{R}.$$

Uma vez que $z(0) = 1$, temos $k_1 = 1$ e, portanto, $z(t) = e^t$. Logo, o extremal do problema é

$$x(t) = 0, \; z(t) = e^t, \quad t \in [0, 1]$$

tendo-se que $x(1) = 0$ e $z(1) = e \simeq 2,7$. Observe-se que o valor de $z(1)$ deste exemplo é inferior ao valor de $z(1)$ do exemplo anterior. Logo, se o problema tiver extremante, será necessariamente o minimizante.

3.5 Conclusão

Os resultados que apresentámos neste capítulo generalizam o problema clássico do cálculo das variações [2, 5, 8, 20, 23].

Os candidatos a extremantes do problema variacional de Herglotz devem satisfazer a equação de Euler-Lagrange generalizada e a condição de DuBois-Reymond. Nos casos em que pelo menos uma das condições de fronteira não é especificada, os candidatos a extremantes do problema variacional de Herglotz, além de satisfazer a equação da Euler-Lagrange generalizada e a condição de DuBois-Reymond, satisfazem também uma ou duas condições de transversalidade.

Capítulo 4

Cálculo das Variações generalizado com atraso no tempo

Neste capítulo apresentamos uma extensão do problema de Herglotz (H) considerando o problema variacional de Herglotz no qual as trajetórias também dependem de argumentos passados. Como já foi referido no Capítulo 2 os sistemas dinâmicos com atraso no tempo são muito importantes na modelação de fenómenos da vida real. Motivado pela importância de problemas com atraso no tempo, muitos autores generalizaram os resultados clássicos do cálculo das variações com atraso no tempo.

Ao longo do texto, τ denota um número real tal que $0 \leqslant \tau < b-a$. Escrevemos $z(t) := z(t, x(t), \dot{x}(t), x_\tau(t), \dot{x}_\tau(t))$, onde $x_\tau(t) := x(t-\tau)$ e $\dot{x}_\tau(t) := \dot{x}(t-\tau)$. Havendo necessidade de tornarmos as expressões mais simplificadas usaremos a notação $\langle x; z\rangle_\tau(t) := (t, x(t), \dot{x}(t), x_\tau(t), \dot{x}_\tau(t), z(t))$.

Neste capítulo consideramos o seguinte problema de Herglotz com atraso no tempo.

Problema (H_τ). Determinar as trajetórias $x \in C^2([a-\tau, b]; \mathbb{R})$ e $z \in C^1([a,b]; \mathbb{R})$ tais que:

$$z(b) \to extr,$$

$$com\ \dot{z}(t) = L(t, x(t), \dot{x}(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau), z(t)), \quad t \in [a,b], \tag{H_τ}$$

$$\text{sujeito} \quad \text{a } z(a) = \gamma \in \mathbb{R},$$

$$x(b) = \beta\ e\ x(t) = \mu(t), \quad t \in [a-\tau, a],$$

onde $\beta \in \mathbb{R}$, $\mu \in C^2([a-\tau, a]; \mathbb{R})$ é uma dada função inicial e onde se supõe que o Lagrangeano L satisfaz as seguintes hipóteses:

1. $L \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^5; \mathbb{R})$;
2. as funções $t \mapsto \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x; z\rangle_\tau(t)$ e $t \mapsto \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x; z\rangle_\tau(t)$ são diferenciáveis para qualquer trajetória x.

Observação 4.1. *O problema anterior reduz-se ao problema variacional clássico com atraso no tempo se o Lagrangeano L não depender de z. Observa-se também que o problema* (H_τ) *reduz-se ao problema variacional de Herglotz* (H) *quando* $\tau = 0$.

Neste capítulo iremos deduzir algumas condições de otimalidade para o problema variacional de Herglotz com atraso no tempo, nomeadamente, as equações de Euler-Lagrange, as condições de DuBois-Reymond e uma condição de transversalidade.

4.1 Equações de Euler-Lagrange generalizadas

Antes de apresentarmos as equações de Euler-Lagrange generalizadas, apresentamos primeiro alguns conceitos importantes para o estudo desses resultados.

Definição 4.1. (Par admissível ao problema (H_τ)). Dizemos que (x, z) com $x \in C^2([a-\tau, b]; \mathbb{R})$ e $z \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ é um par admissível para o problema (H_τ) se este satisfaz a seguinte equação

$$\dot{z}(t) = L(t, x(t), \dot{x}(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau), z(t)), \quad t \in [a, b],$$

$$\textit{sujeito a } z(a) = \gamma \in \mathbb{R},$$

$$x(b) = \beta \textit{ e } x(t) = \mu(t), \quad t \in [a-\tau, a].$$

Definição 4.2. (Variação admissível). Dizemos que $\eta \in C^2([a-\tau, b]; \mathbb{R})$ é uma variação admissível para o problema (H_τ) se $\eta(t) = 0$ para $t \in [a-\tau, a]$ e $\eta(b) = 0$.

O seguinte teorema fornece condições necessárias para que um par admissível (x, z) seja uma solução do problema (H_τ).

Teorema 4.1. (Equações de Euler-Lagrange generalizadas para problemas variacionais de Herglotz com atraso no tempo [27]). *Se (x, z) é uma solução do problema (H_τ), então (x, z) satisfaz as seguintes equações de Euler-Lagrange generalizadas com atraso no tempo:*

$$\lambda(t+\tau)\left(\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(t+\tau) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(t+\tau) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(t+\tau)\frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle_\tau(t+\tau)\right)$$
$$+ \quad \lambda(t)\left(\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(t)\frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle_\tau(t)\right) = 0, \tag{4.1}$$

$a \leq t \leq b - \tau$, onde $\lambda(t) = e^{-\int_a^t \frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle_\tau(\theta)d\theta}$ é o fator integrante, e

$$\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(t)\frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle_\tau(t) = 0, \tag{4.2}$$

$b - \tau \leq t \leq b$.

Demonstração. Suponhamos que (x, z) é uma solução do problema (H_τ) e seja η uma variação admissível. Seja ϵ um número real arbitrário e defina-se $\zeta : [a, b] \to \mathbb{R}$ por

$$\zeta(t) = \left.\frac{d}{d\epsilon} z\langle x + \epsilon\eta\rangle_\tau(t)\right|_{\epsilon=0}.$$

À semelhança do que vimos na prova do Teorema 3.1, obviamente $\zeta(a) = 0$ e como $z(b)$ é um extremo, podemos concluir que $\zeta(b) = 0$. Observe-se que

$$\dot{\zeta}(t) = \left.\frac{d}{dt}\frac{d}{d\epsilon} z\langle x + \epsilon\eta\rangle_\tau(t)\right|_{\epsilon=0} = \left.\frac{d}{d\epsilon}\frac{d}{dt} z\langle x + \epsilon\eta\rangle_\tau(t)\right|_{\epsilon=0} = \left.\frac{d}{d\epsilon} L\langle x + \epsilon\eta, z\rangle_\tau(t)\right|_{\epsilon=0},$$

o que significa que

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}(t) = \frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(t)\eta(t) \quad &+ \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(t)\dot{\eta}(t) + \frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(t)\eta(t-\tau)\\ &+ \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(t)\dot{\eta}(t-\tau) + \frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle_\tau(t)\zeta(t).\end{aligned}$$

Portanto, ζ é solução da seguinte equação diferencial linear da primeira ordem

$$\dot{\zeta}(t) = \frac{\partial L}{\partial x}\eta(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}(t) + \frac{\partial L}{\partial x_\tau}\eta(t-\tau) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\dot{\eta}(t-\tau) + \frac{\partial L}{\partial z}\zeta(t),$$
$$\Leftrightarrow \dot{\zeta}(t) - \frac{\partial L}{\partial z}\zeta(t) = \frac{\partial L}{\partial x}\eta(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}(t) + \frac{\partial L}{\partial x_\tau}\eta(t-\tau) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\dot{\eta}(t-\tau). \tag{4.3}$$

Resolvendo a equação (4.3) aplicando a regra do fator integrante, notamos que ζ satisfaz a seguinte equação

$$\lambda(t)\zeta(t)-\zeta(a)=\int_a^t \lambda(s)\Bigg(\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(s)\eta(s)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)\dot{\eta}(s)+\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s)\eta(s-\tau)$$
$$+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s)\dot{\eta}(s-\tau)\Bigg)ds,$$

onde $\lambda(t):=e^{-\int_a^t \frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle_\tau(\theta)d\theta}$ (fator integrante). A equação anterior é válida para todo $t\in[a,b]$; em particular, para $t=b$ e porque $\zeta(b)=\zeta(a)=0$, temos que

$$\int_a^b \lambda(s)\Bigg(\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(s)\eta(s)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)\dot{\eta}(s)+\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s)\eta(s-\tau)$$
$$+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s)\dot{\eta}(s-\tau)\Bigg)ds=0.$$

Logo

$$\int_a^b \lambda(s)\Bigg(\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(s)\eta(s)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)\dot{\eta}(s)\Bigg)ds+\int_a^b\Bigg(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s)\eta(s-\tau)$$
$$+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s)\dot{\eta}(s-\tau)\Bigg)ds=0.$$

Aplicando a mudança de variável $s=t+\tau$ no segundo integral da expressão anterior, obtemos

$$\int_a^b \lambda(s)\Bigg(\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(s)\eta(s)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)\dot{\eta}(s)\Bigg)ds$$
$$+\int_{a-\tau}^{b-\tau}\lambda(s+\tau)\Bigg(\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\eta(s)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\dot{\eta}(s)\Bigg)ds=0,$$

e, portanto,

$$\int_a^b \lambda(s)\Bigg(\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(s)\eta(s)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)\dot{\eta}(s)\Bigg)ds$$
$$+\int_{a-\tau}^{a}\lambda(s+\tau)\Bigg(\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\eta(s)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\dot{\eta}(s)\Bigg)ds$$
$$+\int_{a}^{b-\tau}\lambda(s+\tau)\Bigg(\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\eta(s)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\dot{\eta}(s)\Bigg)ds=0.$$

Como η é nulo em $[a-\tau, a]$, temos que

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \lambda(s)\left(\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(s)\eta(s)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)\dot{\eta}(s)\right)ds\\
+\ &\int_a^{b-\tau} \lambda(s+\tau)\left(\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\eta(s)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\dot{\eta}(s)\right)ds=0.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
&\int_a^{b-\tau}\left(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(s)+\lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\right)\eta(s)ds\\
+\ &\int_a^{b-\tau}\left(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)+\lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\right)\dot{\eta}(s)ds\\
+\ &\int_{b-\tau}^b \lambda(s)\left(\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(s)\eta(s)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)\dot{\eta}(s)\right)ds=0.
\end{aligned}$$

Aplicando a regra de integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_a^{b-\tau}\Bigg(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(s)+\lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\\
-\ &\frac{d}{ds}\left(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)+\lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\right)\Bigg)\eta(s)ds\\
+\ &\left[\left(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)+\lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\right)\eta(s)\right]_a^{b-\tau}\\
+\ &\int_{b-\tau}^b\left(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(s)-\frac{d}{ds}\left(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)\right)\right)\eta(s)ds\\
+\ &\left[\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)\eta(s)\right]_{b-\tau}^b=0.
\end{aligned}$$

Uma vez que a equação anterior vale para todas as variações admissíveis, também vale para aquelas variações admissíveis η tais que $\eta(t)=0$ para todo o $t\in[b-\tau,b]$ e, portanto, temos

$$\begin{aligned}
&\int_a^{b-\tau}\Bigg(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(s)+\lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\\
-\ &\frac{d}{ds}\left(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)+\lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\right)\Bigg)\eta(s)ds=0.
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 1.1, concluímos que para todo o $t \in [a, b-\tau]$

$$\begin{aligned}\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(t) \quad &+ \quad \lambda(t+\tau)\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(t+\tau) \\ &- \quad \frac{d}{dt}\left(\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(t) + \lambda(t+\tau)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(t+\tau)\right) = 0,\end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned}&\lambda(t+\tau)\left(\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(t+\tau) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(t+\tau) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(t+\tau)\frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle_\tau(t+\tau)\right) \\ &\qquad + \quad \lambda(t)\left(\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle(t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(t)\frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle_\tau(t)\right) = 0,\end{aligned}$$

para $a \leq t \leq b-\tau$, provando assim a validade da equação (4.1). Agora, se nos restringirmos àquelas variações admissíveis η tais que $\eta(t) = 0$ para todo o $t \in [a, b-\tau]$ obtemos

$$\int_{b-\tau}^{b}\left(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(s) - \frac{d}{ds}\Big(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)\Big)\right)\eta(s)ds = 0.$$

Logo, o Lema 1.1 permite concluir que, para todo $[b-\tau, b]$

$$\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(t) - \frac{d}{dt}\left(\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(t)\right) = 0, \tag{4.4}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}&\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(t) - \frac{d}{dt}(\lambda(t))\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(t) - \lambda(t)\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda(t)\left(\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(t) + \frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle_\tau(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(t)\right) = 0,\ t \in [b-\tau, b].\end{aligned}$$

Uma vez que $\lambda(t) \neq 0$, então tem-se que

$$\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(t) + \frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle_\tau(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(t) = 0$$

para $b-\tau \leq t \leq b$, ficando provada a equação (4.2). ■

Definição 4.3. (Extremais generalizados com atraso no tempo). Os pares admissíveis para o problema (H_τ) que são soluções das equações de Euler-Lagrange (4.1) e (4.2) são chamadas extremais generalizados com atraso no tempo.

Observação 4.2. *Se $\tau = 0$, então o problema (H_τ) reduz-se no problema variacional clássico de Herglotz (H) a equação de Euler-Lagrange generalizada (3.2) segue do Teorema 4.1.*

4.2 Condição de transversalidade

A seguir apresentamos as condições de otimalidade para o problema de Herglotz com atraso no tempo (H_τ), *no caso em que* $x(b)$ *é arbitrário.*

Teorema 4.2. (Equações de Euler-Lagrange e condição de transversalidade para o problema variacional de Herglotz com atraso no tempo [27, 29]). *Se* (x, z) *é um extremante do problema de Herglotz com atraso no tempo*

$$\begin{aligned}
&z(b) \to extr,\\
com\ \dot{z}(t) =&L(t, x(t), \dot{x}(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau), z(t)),\\
&sujeito\ a\ z(a) = \gamma \in \mathbb{R},\\
&e\ x(t) = \mu(t), \quad t \in [a-\tau, a],
\end{aligned}$$

então são satisfeitas as duas equações de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned}
\lambda(t+\tau)&\left(\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(t+\tau) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(t+\tau) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(t+\tau)\frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle_\tau(t+\tau)\right)\\
&+\quad \lambda(t)\left(\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(t)\frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle_\tau(t)\right) = 0,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$a \leq t \leq b-\tau$, *onde* $\lambda(t) = e^{\int_a^t \frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle_\tau(\theta)d\theta}$, *e*

$$\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(t)\frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle_\tau(t) = 0, \tag{4.6}$$

$b-\tau \leq t \leq b$, *e a condição de transversalidade*

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(b) = 0. \tag{4.7}$$

Demonstração. Usando os mesmos argumentos do Teorema 4.1, obtemos

$$\int_a^{b-\tau}\Bigg(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(s)+\lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)$$
$$-\frac{d}{ds}\Big(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)+\lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\Big)\Bigg)\eta(s)ds$$
$$+\left[\Big(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)+\lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\Big)\eta(s)\right]_a^{b-\tau}$$
$$+\int_{b-\tau}^{b}\left[\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(s)-\frac{d}{ds}\Big(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)\Big)\right]\eta(s)ds$$
$$+\left[\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)\eta(s)\right]_{b-\tau}^{b}=0.$$

Como a equação anterior é válida para todas as variações admissíveis então, também é válida para aquelas variações admissíveis η tais que $\eta(t)=0$ para todo $t\in[b-\tau,b]$, logo

$$\int_a^{b-\tau}\Bigg[\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(s)+\lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)-\frac{d}{ds}\Big(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)$$
$$+\lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\Big)\Bigg]\eta(s)ds=0.$$

Aplicando o Lema (1.1), concluímos que

$$\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(t)+\lambda(t+\tau)\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(t+\tau)-\frac{d}{dt}\Bigg(\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(t)$$
$$+\lambda(t+\tau)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(t+\tau)\Bigg)=0,$$

para $a\leq t\leq b-\tau$, o que prova a equação (4.5).

Por outro lado, se nos restringirmos às variações η admissíveis tais que $\eta(t)=0$ para todo $t\in[a,b-\tau]$ e da arbitrariedade de $\eta(b)$, obtemos

$$\int_{b-\tau}^{b}\Bigg(\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(t)-\frac{d}{dt}\Big(\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(t)\Big)\Bigg)\eta(t)dt+\left[\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(t)\eta(t)\right]_{b-\tau}^{b}=0.$$

Uma vez que $\eta(b-\tau)=0$, então temos que

$$\int_{b-\tau}^{b}\Bigg(\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(t)-\frac{d}{dt}\Big(\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(t)\Big)\Bigg)\eta(t)dt+\lambda(b)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(b)\eta(b)=0 \tag{4.8}$$

para qualquer $\eta \in C^2([b-\tau, b]; \mathbb{R})$ satisfazendo $\eta(b-\tau) = 0$. Uma vez que (4.8) é válida para estas todas funções η, em particular esta igualdade também se verifica para η tal que $\eta(b) = 0$, logo

$$\int_{b-\tau}^{b} \left(\lambda(t) \frac{\partial L}{\partial x} \langle x; z \rangle_\tau(t) - \frac{d}{dt} \Big(\lambda(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \langle x; z \rangle_\tau(t) \Big) \right) \eta(t) dt = 0.$$

Pelo Lema 1.1, podemos concluir que

$$\lambda(t) \frac{\partial L}{\partial x} \langle x; z \rangle_\tau(t) - \frac{d}{dt} \Big(\lambda(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \langle x; z \rangle_\tau(t) \Big) = 0, \quad t \in [b-\tau, b], \tag{4.9}$$

o que prova a validade da equação (4.6).

Substituindo (4.9) em (4.8), obtemos

$$\lambda(b) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \langle x; z \rangle_\tau(b) \eta(b) = 0. \tag{4.10}$$

Uma vez que (4.10) é válida para qualquer escolha de $\eta(b)$, temos

$$\lambda(b) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \langle x; z \rangle_\tau(b) = 0.$$

Como $\lambda(b) \neq 0$, então

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \langle x; z \rangle_\tau(b) = 0,$$

provando (4.7). ■

4.3 Condições de DuBois-Reymond

O seguinte teorema é uma generalização da condição de DuBois-Reymond para problemas variacionais clássicos com atraso no tempo [6].

Teorema 4.3. (Condições de DuBois-Reymond para problemas variacionais de Herglotz com atraso no tempo [27]). *Se o par (x, z) é um extremante do problema (H_τ) tal que*

$$\frac{\partial L}{\partial x_\tau} \langle x; z \rangle_\tau(t+\tau)\ \dot{x}(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau} \langle x; z \rangle_\tau(t+\tau)\, \ddot{x}(t) = 0 \tag{4.11}$$

para todo $t \in [a-\tau, b-\tau]$, então (x,z) satisfaz as seguintes equações:

$$\frac{d}{dt}\left[\lambda(t)L\langle x;z\rangle_\tau(t) - \dot{x}(t)\left(\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(t) + \lambda(t+\tau)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(t+\tau)\right)\right] = \lambda(t)\frac{\partial L}{\partial t}\langle x;z\rangle_\tau(t) \quad (4.12)$$

para $a \le t \le b-\tau$, e

$$\frac{d}{dt}\left[\lambda(t)\left(L\langle x;z\rangle_\tau(t) - \dot{x}(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(t)\right)\right] = \lambda(t)\frac{\partial L}{\partial t}\langle x;z\rangle_\tau(t), \quad (4.13)$$

para $b-\tau \le t \le b$.

Demonstração. Para provarmos a equação (4.12), seja $t \in [a, b-\tau]$ arbitrário. Verifica-se que

$$\begin{aligned}
&\int_a^t \frac{d}{ds}\left[\lambda(s)L\langle x;z\rangle_\tau(s) - \dot{x}(s)\left(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s) + \lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\right)\right]ds \\
&= \int_a^t \Bigg[-\frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle_\tau(s)\lambda(s)L\langle x;z\rangle_\tau(s) + \lambda(s)\frac{d}{ds}L\langle x;z\rangle_\tau(s) - \ddot{x}(s)\Bigg(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s) \\
&+ \lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\Bigg) - \dot{x}(s)\frac{d}{ds}\left(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s) + \lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\right)\Bigg]ds \\
&= \int_a^t \Bigg[-\frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle_\tau(s)\ \lambda(s)L\langle x;z\rangle_\tau(s) + \lambda(s)\ \frac{\partial L}{\partial s}\langle x;z\rangle_\tau(s) + \lambda(s)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(s)\dot{x}(s) \\
&+ \lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)\ddot{x}(s) + \lambda(s)\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s)\ \dot{x}(s-\tau) + \lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s)\ \ddot{x}(s-\tau) \\
&+ \lambda(s)\frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle_\tau(s)\ \dot{z}(s) - \ddot{x}(s)\left(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s) + \lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\right) \\
&- \dot{x}(s)\frac{d}{ds}\left(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s) + \lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\right)\Bigg]ds.
\end{aligned}$$

Anulando os termos simétricos e fazendo $\dot{z}(s) = L\langle x;z\rangle_\tau(s)$ obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_a^t \frac{d}{ds}\left[\lambda(s)L\langle x;z\rangle_\tau(s) - \dot{x}(s)\left(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s) + \lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\right)\right]ds \\
= &\int_a^t \left[\lambda(s)\ \frac{\partial L}{\partial s}\langle x;z\rangle_\tau(s) + \lambda(s)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(s)\dot{x}(s) - \ddot{x}(s)\lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\right. \\
- &\left.\dot{x}(s)\frac{d}{ds}\left(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s) + \lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\right)\right]ds \\
+ &\int_a^t \lambda(s)\left(\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s)\dot{x}(s-\tau) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s)\dot{x}(s-\tau)\right)ds.
\end{aligned}$$

Aplicando a mudança de variável $u = s-\tau$ no último integral, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_a^t \frac{d}{ds}\left[\lambda(s)L\langle x;z\rangle_\tau(s) - \dot{x}(s)\left(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s) + \lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\right)\right]ds \\
= &\int_a^t \left[\lambda(s)\ \frac{\partial L}{\partial s}\langle x;z\rangle_\tau(s) + \lambda(s)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(s)\dot{x}(s) - \ddot{x}(s)\lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\right. \\
- &\left.\dot{x}(s)\frac{d}{ds}\left(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s) + \lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\right)\right]ds \\
+ &\int_{a-\tau}^{t-\tau} \lambda(u+\tau)\left(\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(u+\tau)\dot{x}(u) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(u+\tau)\dot{x}(u)\right)du.
\end{aligned}$$

Usando a hipótese (4.11) no último integral, concluímos que

$$\begin{aligned}
&\int_a^t \frac{d}{ds}\left[\lambda(s)L\langle x;z\rangle_\tau(s) - \dot{x}(s)\left(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s) + \lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\right)\right]ds \\
&= \int_a^t \left[\lambda(s)\ \frac{\partial L}{\partial s}\langle x;z\rangle_\tau(s) + \lambda(s)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(s)\dot{x}(s) - \ddot{x}(s)\lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\right. \\
&\left.- \dot{x}(s)\frac{d}{ds}\left(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s) + \lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\right)\right]ds.
\end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned}
&\int_a^t \frac{d}{ds}\left[\lambda(s)L\langle x;z\rangle_\tau(s)-\dot{x}(s)\left(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)+\lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\right)\right]ds\\
&=\int_a^t \left[\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial s}\langle x;z\rangle_\tau(s)-\lambda(s+\tau)\Big(\ddot{x}(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)+\dot{x}(s)\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\Big)\right.\\
&+\dot{x}(s)\left(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(s)+\lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\right.\\
&\left.\left.-\frac{d}{ds}\Big(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)+\lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\Big)\right)\right]ds.
\end{aligned}$$

Usando a hipótese (4.11) no último integral, obtemos que

$$\begin{aligned}
&\int_a^t \frac{d}{ds}\left[\lambda(s)L\langle x;z\rangle_\tau(s)-\dot{x}(s)\left(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)+\lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\right)\right]ds\\
&=\int_a^t \left[\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial s}\langle x;z\rangle_\tau(s)+\dot{x}(s)\left(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(s)+\lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{d}{ds}\Big(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)+\lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\Big)\right)\right]ds.
\end{aligned}$$

Usando a equação de Euler-Lagrange generalizada (4.1), obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_a^t \frac{d}{ds}\left[\lambda(s)L\langle x;z\rangle_\tau(s)-\dot{x}(s)\left(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)+\lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s+\tau)\right)\right]ds\\
&\qquad=\int_a^t \lambda(s)\frac{\partial L}{\partial s}\langle x;z\rangle_\tau(s)ds.
\end{aligned}$$

Da arbitrariedade de $t\in[a,b-\tau]$, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\lambda(t)L\langle x;z\rangle_\tau(t)-\dot{x}(t)\left(\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(t)+\lambda(s+\tau)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(t+\tau)\right)\right]\\
&\qquad=\lambda(t)\frac{\partial L}{\partial t}\langle x;z\rangle_\tau(t),
\end{aligned}$$

ficando provada a condição (4.12). A seguir vamos provar a condição (4.13). Seja

$t \in [b-\tau, b]$ arbitrário. Nota-se que

$$\int_t^b \frac{d}{ds}\left(\lambda(s)L\langle x;z\rangle_\tau(s) - \lambda(s)\,\dot{x}(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)\right)ds$$
$$= \int_t^b \Bigg[-\frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle_\tau(s)\lambda(s)L\langle x;z\rangle_\tau(s) + \lambda(s)\Big(\frac{\partial L}{\partial s}\langle x;z\rangle_\tau(s) + \frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(s)\dot{x}(s)$$
$$+ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)\ddot{x}(s) + \frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s)\dot{x}(s-\tau) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s)\ddot{x}(s-\tau)$$
$$+ \frac{\partial L}{\partial z}\langle x;z\rangle_\tau(s)L\langle x;z\rangle_\tau(s)\Big) - \ddot{x}(s)\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s) - \dot{x}(s)\frac{d}{ds}\Big(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)\Big)\Bigg]ds.$$

Cancelando os termos simétricos, obtemos

$$\int_t^b \frac{d}{ds}\left[\lambda(s)L\langle x;z\rangle_\tau(s) - \lambda(s)\dot{x}(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)\right]ds$$
$$= \int_t^b \left[\lambda(s)\left(\frac{\partial L}{\partial s}\langle x;z\rangle_\tau(s) + \frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(s)\dot{x}(s)\right) - \dot{x}(s)\frac{d}{ds}\left(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)\right)\right]ds$$
$$+ \int_t^b \left[\lambda(s)\left(\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s)\dot{x}(s-\tau) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(s)\ddot{x}(s-\tau)\right)\right]ds.$$

Fazendo mudança de variável $u = s - \tau$ no último integral, obtemos

$$\int_t^b \frac{d}{ds}\left[\lambda(s)L\langle x;z\rangle_\tau(s) - \lambda(s)\dot{x}(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)\right]ds$$
$$= \int_t^b \left[\lambda(s)\left(\frac{\partial L}{\partial s}\langle x;z\rangle_\tau(s) + \frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(s)\dot{x}(s)\right) - \dot{x}(s)\frac{d}{ds}\left(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)\right)\right]ds$$
$$+ \int_{t-\tau}^{b-\tau} \left[\lambda(u+\tau)\left(\frac{\partial L}{\partial x_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(u+\tau)\dot{x}(u) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\tau}\langle x;z\rangle_\tau(u+\tau)\ddot{x}(u)\right)\right]du.$$

Usando a hipótese (4.11) no último integral, obtemos

$$\int_t^b \frac{d}{ds}\left(\lambda(s)L\langle x;z\rangle_\tau(s) - \lambda(s)\dot{x}(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)\right)ds$$
$$= \int_t^b \left[\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial s}\langle x;z\rangle_\tau(s) + \dot{x}(s)\left(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial x}\langle x;z\rangle_\tau(s) - \frac{d}{ds}\Big(\lambda(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)\Big)\right)\right]ds.$$

Substituindo a equação de Euler-Lagrange generalizada (4.4), obtemos

$$\int_t^b \frac{d}{ds}\left(\lambda(s)L\langle x;z\rangle_\tau(s) - \lambda(s)\dot{x}(s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(s)\right)ds = \int_t^b \lambda(s)\frac{\partial L}{\partial s}\langle x;z\rangle_\tau(s)ds.$$

Da arbitrariedade de $t \in [b-\tau, b]$, concluímos que

$$\frac{d}{dt}\left(\lambda(t)L\langle x;z\rangle_\tau(t) - \lambda(t)\dot{x}(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\langle x;z\rangle_\tau(t)\right) = \lambda(t)\frac{\partial L}{\partial t}\langle x;z\rangle_\tau(t),$$

provando a condição (4.13). ■

4.4 Exemplo ilustrativo

Seguidamente iremos apresentar um exemplo que mostra a aplicabilidade dos resultados deste capítulo, que são naturalmente válidos na classe das funções PC^2.

Exemplo 4.1. Consideremos o seguinte problema variacional de Herglotz com atraso no tempo, considerando $\tau = 1$,

$$\begin{aligned} z(3) &\to extr, \\ \dot{z}(t) = L\langle x;z\rangle_1(t) &:= (\dot{x}(t-1))^2 + 2z(t), \qquad t \in [0,3], \\ x(t) &= t, \quad t \in [-1,0], \\ x(3) &= 2, \quad z(0) = 0. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Aplicando o Teorema 4.1, as equações de Euler-Lagrange (4.1)-(4.2) para o problema (4.14), permitem concluir que

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) = 0, & t \in [0,2], \\ 0 = 0, & t \in [2,3]. \end{cases}$$

Resolvendo a equação do sistema anterior com a condição inicial $x(0) = 0$, obtemos

$$x(t) = ke^{2t} - k, \qquad t \in [0,2],$$

para alguma constante $k \in \mathbb{R}$. Uma vez que no intervalo $[0,1]$ z é definido por

$$\dot{z}(t) = 1 + 2z(t) \ com \quad z(0) = 0,$$

obtemos

$$z(t) = \frac{1}{2}(e^{2t} - 1), \qquad t \in [0,1].$$

Portanto, as equações de Euler-Lagrange apenas nos dão informação sobre candidatos a extremantes no intervalo $[0, 2]$. Vamos verificar se as condições de DuBois-Reymond nos fornecem uma condição necessária que os candidatos a extremantes têm de verificar no intervalo $[2, 3]$.

Comecemos por verificar quais os candidatos a extremantes que satisfazem a condição (4.11) do Teorema 4.3: $\dot{x}(t)\ddot{x}(t) = 0, \quad t \in [-1, 2]$. Esta condição é trivialmente satisfeita no intervalo $[-1, 0]$; no intervalo $[0, 2]$ a condição só é satisfeita se $k = 0$, logo $x(t) = 0$ em $[0, 2]$. Portanto, com vista a aplicar o Teorema 4.1 podemos considerar uma família x_f de candidatos a extremantes generalizados com atraso no tempo dada por

$$x_f(t) = \begin{cases} t & t \in [-1, 0], \\ 0, & t \in]0, 2], \\ f(t), & t \in]2, 3[, \\ 2, & t = 3, \end{cases} \tag{4.15}$$

onde a função f é escolhida de modo a garantir que x_f é uma função de classe PC^2. Com x definido por (4.15) para algum f, e z definido em $[1, 3]$ como $\dot{z}(t) = 2z(t)$ com $z(1) = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$, segue que $z(t) = \frac{1}{2}e^{2(t-1)}(e^2 - 1)$ para $t \in [1, 3]$.

Logo

$$z(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(e^{2t} - 1), & t \in [0, 1], \\ \frac{1}{2}e^{2(t-1)}(e^2 - 1), & t \in [1, 3], \end{cases} \tag{4.16}$$

e $z(3) = \frac{1}{2}e^4(e^2 - 1)$. Seguidamente verificaremos se as condições de DuBois-Reymond (4.12)-(4.13) dadas pelo Teorema 4.3 são satisfeitas para x e z dados por (4.15) e (4.16), respetivamente. Neste caso, (4.12) reduz-se a

$$\frac{d}{dt}\left[\lambda(t)\Big(\dot{x}(t-1))^2 + 2z(t)\Big) - (\dot{x}(t))^2 2\lambda(t+1)\right] = 0, \quad t \in [0, 2].$$

Como $x(t) = 0$ e $\lambda(t) = e^{-2t}$ no intervalo $[0, 2]$ equação anterior é equivalente a

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-2t}\Big(\dot{x}(t-1))^2 + 2z(t)\Big)\right] = 0, \quad t \in [0, 2].$$

A equação anterior verifica-se trivialmente se $t \in [0,1]$ pois neste caso $\dot{x}(t-1) = 1$ e $z(t) = \frac{1}{2}(e^{2t}-1)$, logo

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big[e^{-2t}\Bigg(1 + 2.\frac{1}{2}(e^{2t}-1)\Bigg)\Big] = 0\\
\Leftrightarrow &\frac{d}{dt}\Big(1\Big) = 0, \quad t \in [0,1].
\end{aligned}$$

Observe-se que se $t \in [1,2]$, $x(t) = 0$, logo a equação (4.12) verifica-se trivialmente pois tem-se que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big[e^{-2t}\Big(0 + 2.\frac{1}{2}(e^{2(t-1)}-1)(e^2-1)\Big)\Big] = 0\\
\Leftrightarrow &\frac{d}{dt}\Big(\frac{e^2-1}{e^2}\Big) = 0, \quad t \in [1,2].
\end{aligned}$$

Seguidamente verificaremos se a condição (4.13) é satisfeita para $t \in [2,3]$. Uma vez que $x(t-1) = 0$ e $z(t) = \frac{1}{2}e^{2(t-1)}(e^2-1)$ no intervalo $[2,3]$, então a condição (4.13) reduz-se a

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big[e^{-2t}\Big((\dot{x}(t-1))^2 + 2.\frac{1}{2}e^{2(t-1)}(e^2-1)\Big)\Big] = 0\\
\Leftrightarrow &\frac{d}{dt}\Big(\frac{e^2-1}{e^2}\Big) = 0 \quad t \in [2,3],
\end{aligned}$$

provando que a condição (4.13) é satisfeita para $t \in [2,3]$.

Logo, podemos concluir que (x,z) definidos por (4.15) e (4.16) verificam as condições de DuBois-Reymond. Para podermos verificar se estes candidatos são de facto extremantes do problema dado seria necessário usar uma condição suficiente de otimalidade. Das pesquisas realizadas não encontramos nenhum resultado deste tipo.

4.5 Conclusão

Neste capítulo apresentámos alguns resultados importantes para os problemas variacionais de Herglotz com atraso no tempo, nomeadamente apresentámos as equações de Euler-Lagrange generalizadas, as condições de DuBois-Reymond e uma condição de transversalidade. Os resultados aqui apresentados, representam uma generalização dos resultados clássicos dos problemas variacionais clássicos com e sem atraso no tempo e também representam uma extensão dos resultados dos problemas variacionais de Herglotz.

Conclusão e trabalhos futuros

O objetivo principal desta dissertação foi estudar os problemas variacionais de Herglotz e a sua extensão para problemas variacionais de Herglotz com atraso no tempo. De modo a compreendermos melhor esses problemas, no Capítulo 1 fizemos uma revisão dos problemas variacionais clássicos sem atraso no tempo.

No segundo capítulo apresentámos alguns resultados da extensão dos problemas variacionais clássicos sem atraso no tempo para problemas variacionais clássicos com atraso no tempo recorrendo a técnicas variacionais clássicas. Como foi possível observar, surgem de modo natural duas equações de Euler-Lagrange e duas condições de DuBois-Reymond no caso de problemas com atraso no tempo. No caso em que $x(b)$ é livre, os extremantes do problema variacional clássico com atraso no tempo, além de satisfazerem as condições de otimalidade referidas anteriormente, também satisfazem uma condição de transversalidade.

No Capítulo 3 apresentámos a generalização do problema variacional clássico para o problema variacional de Herglotz deduzindo algumas condições necessárias de otimalidade: equação de Euler-Lagrange generalizada, condição de DuBois-Reymond generalizada e condições de transversalidade generalizadas. Portanto, os extremantes do problema variacional de Herglotz devem satisfazer a equação de Euler-Lagrange generalizada e a condição de Dubois-Reymond. Se uma das condições de fronteira não é especificada, os extremantes para além de satisfazerem as condições de otimalidade anteriormente mencionadas, também satisfazem uma condição de transversalidade no ponto em que a condição de fronteira é livre.

Todos os resultados demonstrados neste trabalho foram feitos usando argumentos variacionais. Salientamos o facto de que todos estes resultados poderiam ter sido demonstrados no contexto mais geral da teoria do controlo ótimo (ver [28, 29, 30, 31]).

Finalmente, no Capítulo 4 consideramos o problema variacional de Herglotz com atraso no tempo e generalizámos as condições de otimalidades deduzidas no Capítulo 3 .

Em todos os capítulos apresentámos exemplos de aplicação de modo a ilustrar a aplicação dos resultados estudados.

Para finalizar este trabalho gostaríamos de enunciar alguns problemas que seriam interessantes estudar no futuro:

- estudar o problema de Herglotz com uma restrição isoperimétrica, isto é, quando as trajetórias admissíveis além de satisfizerem as condições $x(a) = \alpha$, $x(b) = \beta, z(a) = \gamma$ são tais que o funcional
$$\int_a^b K(t, x(t), \dot{x}(t), z(t))dt,$$
para algum Lagrangeano K que assume um valor real fixo ρ;

- estudar problemas variacionais de Herglotz de ordem superior com atraso no tempo;

- estudar condições suficientes de otimalidade para problemas variacionais de Herglotz com e sem atraso no tempo.

Bibliografia

[1] L. Abrunheiro, L. Machado and N. Martins, The Herglotz variational problem on spheres and its optimal control approach, J. Math. Anal. 7 (2016), no. 1, 12-22.

[2] F. R. Dias Agudo, Análise Real, Volume III, Escolar Editora, Lisboa, 1992.

[3] O. P. Agrawal, J. Gregory and K. Pericak-Spector, A bliss-type multiplier rule for constrained variational problems with time delay, J. Math. Anal. Appl., 210 no.2 (1997), 702-711.

[4] R. Almeida and A. B. Malinowska, Fractional variational principle of Herglotz, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 19 (2014), no. 8, 2367-2381.

[5] B. Van Brunt, The Calculus of Variations, Universitext, Springer, New York, 2004.

[6] L. Cesari, Optimization-theory and applications, Springer, New York, 1983.

[7] L. E. El'sgol'c, Qualitative Methods of Mathematical Analysis, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 12, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1964.

[8] A. P. X. Flores, Cálculo Variacional: Aspetos Teóricos e Aplicações, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista, Campus de Rio Claro, 2011.

[9] G. S. F. Frederico and D. F. M. Torres, Noether's symmetry theorem for variational and optimal control problems with time delay, Numer. Alg. Contr. Optim., (2012), no.3 619-630.

[10] I. M. Gelfand and V. F. Fomin, Calculus of Variations, Prentice-Hall, Moscow, 1963.

[11] B. A. Georgieva, Noether-type theorems for the generalized variational principle of Herglotz, Ph. D. thesis, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2001.

[12] B. Georgieva and R. Guenther, First Noether-type theorem for the generalized variational principle of Herglotz, Topol. Methods Nonlinear Anal., 20, no. 2 (2002), 261-273.

[13] B. Georgieva, R. Guenther and T. Bodurov, Generalized variational principle of Herglotz for several independent variables. First Noether-type theorem, J. Math. Phys., 44 no.9 (2003), 3911-3927.

[14] B. Georgieva and R. Guenther, Second Noether-type theorem for the generalized variational principle of Herglotz, Topol. Methods Nonlinear Anal., 26 no.2 (2005), 307-314.

[15] B. Georgieva, Symmetries of the Herglotz variational principle in the case of one independent variable, Ann. Sofia Univ, Fac. Math and Inf.,100 (2010), $113-122$.

[16] R. B. Guenther, C. M. Guenther and J. A. Gottsch, The Herglotz Lectures on Contact Transformations and Hamiltonian Systems, Lecture Notes in Nonlinear Analysis, Vol. 1, Juliusz Schauder Center for Nonlinear Studies, Nicholas Copernicus University, Torún, 1996.

[17] R. B. Guenther, J. A. Gottsch and D. B. Kramer, The Herglotz algorithm for constructing canonical transformations, SIAM Rev. 38 (1996), no. 2, 287-293.

[18] G. Herglotz, Berührungstransformationen, Lectures at the University of Göttingen, Göttingen, 1930.

[19] D. K. Hughes, Variational and optimal control problems with delayed argument, J. Optim. Theory Appl., 2, no.1 (1968), 1-14.

[20] A. João, Introdução ao Cálculo Variacional, Monografia, Universidade federal de Santa Catarina, Florinópolis, 2006.

[21] C. Lanczos, The Variational Principles Of Mechanics, 4th. ed, Dover Publications Inc., New York, 198.

[22] G. Lima, Cálculo Variacional: problemas clássicos, aspetos teóricos e desdobramento, Dissertação do Mestrado, Universidade de Campina, 2004.

[23] J. D. Logan, Applied Mathematics: A contemporany approach, 4^a Edição, John Wiley and Sons, Lincolm, 2013.

[24] A. B. Malinowska and N. Martins, Generalized transversality conditions for the Hahn quantum variational calculus, Optimization 62 (2013), 323-344.

[25] N. Martins and D. F. M. Torres, Necessary optimality conditions for higher-order infinite horizon variational problems on time scales, J. Optim. Theory Appl. 155 (2012), no. 2, 453– 476. 1204.

[26] S. P. S. Santos, N. Martins and D. F. M. Torres, Higher-order variational problems of Herglotz type, Vietnam J. Math. 42 (2014), no. 4, 409-419.

[27] S. P. S. Santos, N. Martins and D. F. M. Torres, Variational problems of Herglotz type with time delay: DuBois-Reymond condition and Noether's first theorem, Discrete Contin. Dyn. Syst. 35 (2015), no. 9, 4593-4610.

[28] S. P. S. Santos, N. Martins and D. F. M. Torres, An optimal control approach to Herglotz variational problems, in Optimization in the Natural Sciences (eds. A. Plakhov, T. Tchemisova and A. Freitas), Communications in Computer and Information Science, Vol. 499, Springer (2015), 107-117.

[29] S. P. S. Santos, N. Martins and D. F. M. Torres, Noether's theorem for higher-order variational problems of Herglotz type, 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Diferential Equations and Applications, Vol. 2015, AIMS Proceedings (2015), 990-999.

[30] S. P. S. Santos, N. Martins and D. F. M. Torres, Higher-order variational problems of Herglotz with time delay, Pure and Applied Functional Analysis, 1 (2016), no. 2, 291-307.

[31] S. P. S. Santos, N. Martins and D. F. M. Torres, Noether currents for higher-order variational problems of Herglotz type with time delay, Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series S., Vol. 11, (2018), no. 1, 91-102.

[32] S. P. S. Santos, Cálculo das Variações do tipo Herglotz, Tese de Doutoramento, Universidade de Aveiro, 2017.

Índice