UNIVERSIDADE DE AVEIRO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
2018

GENERALIZAÇÃO DA TRANSFORMADA DE FOURIER E SUAS CONSEQUÊNCIAS

Gedeon Mateus Sevene

Aveiro, Junho de 2018

UNIVERSIDADE DE AVEIRO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
2018

GENERALIZAÇÃO DA TRANSFORMADA DE FOURIER E SUAS CONSEQUÊNCIAS

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para o cumprimento parcial dos requesitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações, realizada sob orientação do **Professor Doutor Luís Filipe Pinheiro de Castro**, Professor Catedrático do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

Gedeon Mateus Sevene

O júri

Presidente	Prof. Doutor Agostinho Miguel Mendes Agra Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro
Oponente	Prof. Doutor Alberto Manuel Tavares Simões Professor Auxiliar da Universidade da Beira Interior
Supervisor	Prof. Doutor Luís Filipe Pinheiro de Castro Professor Catedrático da Universidade de Aveiro

"É impossível proceder ao infinito na série dos seres que se geram sucessivamente. Deve-se admitir, por isso, que existe um ser necessário que tenha em si toda a razão de sua existência, e do qual procedam todos os outros seres. A este chamamos Deus."

(São Tomás de Aquino)

Agradecimentos

A Deus, que é a fonte e o caminho da minha vida.

Ao meu supervisor, Prof. Catedrático Luís Filipe Pinheiro de Castro, pelo acompanhamento e paciência no decorrer do trabalho.

Aos meus familiares, em particular, aos meus queridos filhos e esposa, pelo imensurável apoio.

Aos meus amigos da trincheira, Jarafe e Diosnas, pelos momentos vividos e de descontração.

A todos os professores do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, pelo apoio, educação e transmissão de conhecimentos ao longo do curso.

A todos aqueles que de uma forma directa ou indirecta contribuíram para a realização deste trabalho.

Dedicatória

Dedico o presente trabalho:

Aos meus filhos, Ivanovitch Gedeon Sevene, Hermith Gedeon Sevene e Gedeon Mateus Sevene Jr.
À minha esposa, Laura Zeca Ngulele, pelo seu amor e incondicional apoio.

Ao meu pai, Mateus Mapore Sevene (1955–2004), que partiu, mas continua a manifestar o seu apoio.

À minha mãe, Maria Francisca Ofinar.

Aos meus irmãos, Hugo M. Sevene e Ana Cristina M. Sevene.

À minha tia, Georgina Sandra Ofinar.

Ao meu tio, Aurélio Ofinar

Palavras Chave Transformada de Fourier, Transformada de Fourier Fracionária, Convolução, Equação de Convolução, Desigualdade de Young.

Resumo Nesta dissertação apresentamos um estudo de diferentes tipos de generalizações da Transformada de Fourier (clássica). É dada uma ênfase especial à Transformada de Fourier Fracionária. Um conjunto significativo de novas convoluções é aqui considerado e associado a essas transformações integrais gerais. Tais convoluções dão origem a várias consequências, entre as quais destacamos diferentes tipos de desigualdades de Young e novas classes de equações integrais (para as quais estudamos a sua solvabilidade). Além disso, também são referidas aplicações a outras ciências (como é o caso de propagação de ondas óticas e processamento de sinal).

Keyword Fourier Transform, Fractional Fourier Transform, Convolution, Convolution Equation, Young's inequality.

Abstract In this dissertation we present a study of different types of generalizations of the (classical) Fourier Transform. A special emphasis is given to the Fractional Fourier Transform. A significant number of new convolutions are here considered and associated with those general integral transforms. Such convolutions give rise to several consequences among which we point out different kinds of Young inequalities and new classes of integral equations (to which we study their solvability). Moreover, applications to other sciences are also mentioned (as it is the case of optical wave propagation and signal processing).

Conteúdo

Introdução

Em Matemática, a Transformada de Fourier é uma transformada integral que expressa uma função em termos de funções de base sinusoidal, isto é, como soma ou integral de funções sinusoidais multiplicadas por alguns coeficientes. Existem diversas versões directamente relacionadas com tal transformada integral. A Transformada de Fourier tem muitas aplicações em diversas áreas científicas, dentro e fora da Matemática, como por exemplo em Física, Equações Diferencias, Processamento de Sinal, Processamento de Imagem, Probabilidades e Estatística, Criptografia, Acústica, Oceanografia, Sismologia, Óptica (cf. [2], [6], [21]).

A Transformada de Fourier é um operador linear e, com a devida normalização, é também unitário, possuindo uma propriedade conhecida como o Teorema de Parseval ou, mais geralmente, como o Teorema de Plancherel. A Transformada de Fourier é invertível, e a sua transformada inversa tem quase a mesma forma que a transformada direta (cf. [9], [17], [18]).

Através do designado Teorema da Convolução, as transformadas integrais que gozam de tal propriedade tornam a complicada operação de convolução em simples multiplicações (ver e.g. [9], [10]), o que as torna num método muito eficiente para calcular operações baseadas em convolução, como a multiplicação polinomial, a multiplicação de entidades grandes e o cálculo da função densidade de probabilidade de uma soma de variáveis aleatórias.

O conceito de Transformada de Fourier Fracionária (TFFr) apresenta uma generalização da Transformada de Fourier clássica, que permite a consideração de índices fracionários no correspondente operador da original Transformada de Fourier. Os primeiros trabalhos que abordam esta questão surgem no início do século XX com a ideia de se calcular a Transformada de Fourier clássica com parâmetros fracionários (cf. [2], [10]). Os trabalhos sobre a Transformada de Fourier Fracionária estenderam-se deste então, tornando-a a mais estudada das transformadas fracionárias.

A presente Dissertação é composta por quatro capítulos e não apresenta resultados originais, mas baseia-se, fundamentalmente, nos trabalhos [9], [10], [12], [13], [14], [17], [18]. Faz-se uma abordagem de várias generalizações da Transformada de Fourier e estudam-se suas consequentes propriedades. Abordam-se também algumas das suas potenciais aplicações.

No Capítulo 1, faz-se um breve levantamento dos conceitos básicos de Análise Funcional que suportam a Dissertação, começando por introduzir as noções de métrica, operador, espaço $L^p(\mathbb{R})$ e espaço $S(\mathbb{R})$ com as suas principais propriedades.

No Capítulo 2, desenvolvemos a teoria da Transformada de Fourier. Dedicamos uma secção à Transformada de Fourier no espaço $S(\mathbb{R})$, uma outra secção para a Transformada de Fourier no espaço $L^1(\mathbb{R})$ e, por último, dedicamos uma secção para a Transformada de Fourier no espaço $L^2(\mathbb{R})$. Para cada espaço funcional, discutimos as principais propriedades da Transformada de Fourier e apresentamos os respetivos principais teoremas. A título de exemplo, no Capítulo 2, podemos constatar o Teorema da Inversa de Fourier, Teorema de Riemann-Lebesgue, Teorema de Parseval e Teorema de Plancherel. Adicionalmente, estudamos a aplicação da Transformada de Fourier na resolução de problemas de condução de calor em barras semi-infinitas e infinitas.

No Capítulo 3, introduzimos uma generalização da Transformada de Fourier. Designadamente, introduzimos a noção da Transformada de Fourier Fracionária (TFFr). Primeiro, começamos por dar a definição de TFFr e apresentamos algumas das suas propriedades básicas. De seguida, apresentamos alguns resultados recentes sobre a TFFr para um produto e uma convolução, bem como algumas relações existentes entre elas. Para finalizar os estudos da TFFr, apresentamos algumas das suas aplicações em problemas relacionados com a propagação de ondas ópticas e processamento de sinal. Ainda no mesmo capítulo, introduzimos a Nova Transformada de Fourier Fracionária (NTFFr). Para além de definirmos a NTFFr, introduzimos sete novas convoluções associadas a ela, que podem ser encontradas em [12] e [13]. No mesmo capítulo, apresentamos desigualdades do tipo de Young para as novas convoluções e estudamos a solvabilidade de equações do tipo de convolução com (e sem) pesos de Hermite.

O Capítulo 4 dedica-se ao estudo da Transformada de Fourier com Fase Quadrática (TFFQ) – sendo tal uma generalização da NTFFr. Como sucedeu nos dois capítulos anteriores, começamos por apresentar algumas das propriedades básicas desta nova transformada integral. Posteriormente, apresentamos quatro novas convoluções associadas à TFFQ. Por último, apresentamos as desigualdades de Young para as novas convoluções e a solvabilidade de equações de convolução associadas à TFFQ.

Simbologias e Abreviaturas

- $\blacksquare$ denota o fim da demonstração ou de um exemplo;
- $\rho(x, y)$ denota uma métrica;
- $L^p(\Omega)$ é o espaço de funções p-integráveis, $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, $1 \leqslant p < \infty$;
- $S(\mathbb{R})$ denota o espaço de Schwartz;
- $\mathcal{F}[f](\alpha)$ denota Transformada de Fourier de f;
- $\mathcal{X}_{[a,b]}$ denota função característica do intervalo $[a, b]$;
- l.i.m. denota limite da média em $L^2(\mathbb{R})$;
- TFFr é a abreviatura para Transforma de Fourier Fracionária;
- NTFFr é a abreviatura para Nova Transformada de Fourier Fracionária;
- $\mathcal{F}_\alpha[f](u)$ denota a Transformada de Fourier Fracionária de f com índice α;
- $K_\alpha(x, u)$ denota o núcleo da TFFr ou da NTFFr;
- $*$, Θ, $\diamond$, $\ominus$, $\oslash$, $\oplus$, $\boxminus$, $\boxdot$, $\circledcirc$, $\divideontimes$, ✠, $\star$, $\otimes$, $\odot$, $\boxtimes$ denotam operações de convolução;
- R_α denota a Nova Transformada de Fourier
- K_M denota o núcleo da Transformada Linear Canónica;
- $G(\vec{r}, \vec{r}_0)$ denota a função de Green da equação de propagação de onda.
- TFFQ é a abreviatura para Transformada de Fourier com Fase Quadrática.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste primeiro capítulo o principal objectivo é definir o conjunto de conceitos que constituem o enquadramento dos desenvolvimentos posteriores. Para além das eventuais revisões, recomenda-se a leitura das obras que desenvolvem o formalismo introdutório da Análise Funcional. Para um melhor desenvolvimento, veja por exemplo, [7], [8], [9] e [23].

1.1 Espaço L^p

1.1.1 Definição e Propriedades Básicas

Definição 1.1. *Seja X um conjunto e $\rho(\cdot,\cdot)$ uma função real definida sobre $X \times X$. O conjunto X junto com a função ρ chama-se espaço métrico se a função ρ é não negativa ($\rho(x,y) \geqslant 0, x, y \in X$) e satisfaz as seguintes condições:*
(1.1) $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
(1.2) $\rho(x,y) = \rho(y,x), \quad \forall x, y \in X$;
(1.3) $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z), \quad \forall x, y, z \in X$.

Definição 1.2. *Sejam X e Y conjuntos não vazios. Um operador T com domínio X e contradomínio Y (designado por $T : X \to Y$) é uma aplicação (transformação, função) que para qualquer $x \in X$ corresponde um e só um elemento $y = Tx \in Y$. O subconjunto do contradomínio Y definido por*

$$\mathrm{Im}T := T(X) = \{Tx : x \in X\}$$

chama-se imagem de T.

Definição 1.3. *O operador $I : X \to X$ definido por $Ix := x$ (para qualquer $x \in X$) chama-se operador identidade ou unidade.*

Definição 1.4. *Seja X um espaço linear sobre o corpo $\mathbb{R}$. Um funcional $\|\cdot\|$ sobre X chama-se **norma** se satisfaz as seguintes condições:*

(1.1) $\|x\| \geqslant 0, \quad \forall x \in X$ *sendo* $x = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0$;
(1.2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \quad \forall x \in X, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$;
(1.3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y, z \in X$.

Definição 1.5. *Seja* Ω *um conjunto aberto em* $\mathbb{R}$, $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função mensurável à Lebesgue em um domínio* Ω *mensurável e* $p \geqslant 1$. *Diremos que* f *é p-integrável e* $f \in L^p(\Omega)$ *se sua norma* L^p *for finita:*
Para $1 \leqslant p < +\infty$

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Para $p = +\infty$,

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \text{ess} \sup_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf\{C : |f(x)| < C \quad q.t.p \quad em \quad \Omega\} < \infty.$$

De agora em diante, sempre que nada se disser, iremos estar a assumir que $\Omega \subseteq \mathbb{R}$.

Lema 1.1. *Se* $0 \leqslant a, b$ *e* $\lambda \in [0, 1]$, *então*

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leqslant \lambda a + (1 - \lambda)b. \tag{1.1}$$

Demonstração: Se $b = 0$ ou $\lambda \in \{0, 1\}$ o resultado é evidente. Suponhamos que $b \neq 0$ e $\lambda \in (0, 1)$. Assim, a expressão (1.1) é equivalente a $t^\lambda \leqslant \lambda t + (1 - \lambda)$, onde $t = a/b$. Definindo $f(t) = t^\lambda - \lambda t$ temos que $f'(t) = 0$ é equivalente a $t = 1$ e $f''(1) < 0$. Logo $f(t) \leqslant f(1) = 1 - \lambda$, $\forall t \geqslant 0$.■

Lema 1.2 (Desigualdade de Young[1]). *Seja* $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *uma função contínua estritamente crescente tal que* $\varphi(0) = 0$ *e* $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$, *e seja* $\psi = \varphi^{-1}$. *Definindo, para* $x \geqslant 0$,

$$\Phi(x) = \int\limits_0^x \varphi(y)dy \quad e \quad \Psi(x) = \int\limits_0^x \psi(y)dy,$$

temos $ab \leqslant \Phi(a) + \Psi(b)$ *para todos* $a, b \geqslant 0$, *e a igualdade cumpre-se se e só se* $\varphi(a) = b$.

Demonstração: Para todo $a \geqslant 0$

$$\int\limits_0^a \varphi(x)dx + \int\limits_0^{\varphi(a)} \psi(x)dx = a\varphi(a),$$

ou seja,

$$\Phi(a) + \Psi(\varphi(a)) = a\varphi(a).$$

[1]Alfred Young (1873–1940)— matemático britânico

Daqui resulta

$$\Phi(a) + \Psi(b) = a\varphi(a) + \Psi(b) - \Psi(\varphi(a)).$$

O resultado sai analizando os casos $\varphi(a) \leqslant b$ e $\varphi(a) > b$.■

Definição 1.6. *Para $p > 1$, diremos que $q > 1$ é conjugado de p se tivermos* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Corolário 1.1. *Seja $a, b \geqslant 0$, $p > 1$ e $q > 1$ o conjugado de p. Então*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

e cumpre-se a igualdade se e somente se $a^p = b^q$.

Demonstração: Tomando $\varphi(x) = x^{p-1}$, temos que φ está sob a condição da desigualdade de Young,

$$\Phi(a) = \frac{a^p}{p} \quad \text{e} \quad \Psi(b) = \frac{b^q}{q}.$$

Pela desigualdade de Young, temos

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

com a igualdade valendo se e somente se $b = \varphi(a) = a^{p-1}$, ou seja, $b^q = a^{q(p-1)} = a^p$.■

Teorema 1.1 (Desigualdade de Hölder[2])**.** *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e q o conjugado de p. Então $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leqslant \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}.$$

Demonstração: Vejamos o primeiro caso $1 < p < \infty$. Se $\|f\|_{L^p} = 0$ ou $\|g\|_{L^q} = 0$ o resultado é imediato. Se tal não se verificar, temos pelo Corolário 1.1, tomando

$$a = \frac{|f|}{\|f\|_{L^p}} \quad b = \frac{|g|}{\|g\|_{L^q}}$$

teremos

$$\frac{|f|}{\|f\|_{L^p}} \cdot \frac{|g|}{\|g\|_{L^q}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{|f|^p}{\|f\|_{L^p}^p} + \frac{1}{q}\frac{|g|^q}{\|g\|_{L^q}^q}.$$

Integrando, vem

$$\frac{1}{\|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}} \int_\Omega |fg|dx \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

O que nos leva ao resultado neste caso.

[2]Otto Hölder (1859–1937)— matemático alemão

Agora, vejamos o caso $p = 1$ e $q = \infty$ (o caso $p = \infty$ e $q = 1$ é consequência deste). Temos $|fg| \leqslant |f| \|g\|_{L^\infty}$ em quase todos os pontos. Daqui resulta que $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^\infty}. \blacksquare$$

Teorema 1.2 (Desigualdade de Minkowski[3])**.** *Se* $1 \leqslant p < +\infty$ *e* $f, g \in L^p(\Omega)$*. Então*

$$f + g \in L^p(\Omega) \quad e \quad \|f + g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Demonstração: A demonstração para o caso $p = 1$ e $p = +\infty$ são obvias. Suponhamos que $1 < p < +\infty$ e $f, g \in L^p(\Omega)$. Como $L^p(\Omega)$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$ temos que $f + g \in L^p(\Omega)$. Por outro lado,

$$\|f + g\|_{L^p}^p \leqslant \int_\Omega |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x)| dx + \int_\Omega |f(x) + g(x)|^{p-1} |g(x)| dx. \tag{1.2}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder nos dois integrais do segundo membro de (1.2) e como $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, obteremos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f + g|^p dx \quad &\leqslant \quad \left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |f + g|^{(p-1)q} dx \right)^{1/q} \\
&\quad + \left(\int_\Omega |g|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |f + g|^{(p-1)q} dx \right)^{1/q} \\
&= \quad \left(\int_\Omega |f + g|^p dx \right)^{1/q} \left[\left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g|^p dx \right)^{1/p} \right].
\end{aligned}$$

Supondo que $\left(\displaystyle\int_\Omega |f + g|^p dx \right)^{1/q} \neq 0$ e como $\dfrac{1}{p} = 1 - \dfrac{1}{q}$ segue

$$\left(\int_\Omega |f + g|^p dx \right)^{1/p} \leqslant \left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g|^p dx \right)^{1/p}$$

ou também

$$\|f + g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}. \blacksquare$$

Definição 1.7 (Espaço Uniformemente Convexo)**.** *Um espaço normado X é tido uniformemente convexo se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se x, e y são vetores*

[3] Hermann Minkowski (1864–1909)— matemático alemão

unitários em X,

$$\|x-y\| \geqslant \varepsilon \quad \textit{implica} \quad \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leqslant 1-\delta.$$

Lema 1.3 (Desigualdade de Clarkson[4]). *Se $f, g \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ e*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Primeira desigualdade de Clarkson. Se $p \geqslant 2$, então

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^p \leqslant \frac{1}{2} \left(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p \right).$$

Segunda desigualdade de Clarkson. Se $1 < p < 2$, então

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^q + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^q \leqslant \frac{1}{2^{q-1}} \left(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p \right)^{q-1}.$$

Teorema 1.3. *O espaço $L^p(\Omega)$ é uniformemente convexo para qualquer $1 < p < \infty$.*

Demonstração Dado $\varepsilon > 0$, sejam $f, g \in L^p$ tais que

$$\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^p} = 1 \quad \text{e} \quad \|f-g\|_{L^p} \geqslant \varepsilon.$$

Se $p \geqslant 2$, então usando a primeira desigualdade de Clarkson temos

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p \leqslant \frac{1}{2} \left(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p \right) - \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^p \leqslant 1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p},$$

tomando $\delta = 1 - \left(1 - \dfrac{\varepsilon^p}{2^p}\right)^{1/p}$ temos que

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p} \leqslant 1-\delta,$$

o que mostra que L^p é uniformemente convexo para $p \geqslant 2$.

Para $1 < p < 2$, usando a segunda desigualdade de Clarkson temos

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^q \leqslant \frac{1}{2^{q-1}} \left(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p \right)^{q-1} - \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^q \leqslant 1 - \frac{\varepsilon^q}{2^q},$$

considerando $\delta = 1 - \left(1 - \dfrac{\varepsilon^q}{2^q}\right)^{1/q}$, temos

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p} \leqslant 1-\delta.$$

[4] James A. Clarkson (1906–1970)— matemático americano

Portanto, temos que L^p é um espaço uniformemente convexo para qualquer $1 < p < \infty$.$\blacksquare$

Teorema 1.4 (Riesz[5]–Fischer[6]). *$(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$ é completo e portanto é um espaço de Banach[7] para $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.*

Demonstração: Vamos demonstrar que toda série absolutamente convergente em L^p converge em norma $\|\cdot\|_{L^p}$. Seja

$$f_i \in L^p(\Omega), \quad \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{L^p} = \gamma < \infty.$$

Definamos

$$g_n(x) = \sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|, \quad g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)|,$$

observemos que g_n é uma sucessão crescente e que, usando a desigualdade triangular

$$\|g_n\|_{L^p} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^p} \leqslant \gamma \ \text{ para todo } \ n \in \mathbb{N}.$$

Segue do Teorema de Convergência Dominada que

$$\int_{\Omega} |g|^p dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} |g_n|^p dx \leqslant \gamma^p.$$

Assim, $g \in L^p(\Omega)$ e, em particular $g(x) < \infty$ para todo $x \in \Omega$. Contudo, para quase todos $x \in \Omega$, a série de $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)$ converge, pois $\mathbb{R}$ é completo. Seja $\widetilde{f}$ o seu limite. Então

$$|\widetilde{f}| \leqslant |g(x)| \ \text{ para todo } \ x \in \Omega.$$

Com isso, $\widetilde{f} \in L^p(\Omega)$ e

$$\left| \widetilde{f} - \sum_{i=1}^{n} f_i \right| \leqslant (2g)^p \in L^1(\Omega).$$

O Teorema de Convergência Dominada implica que

$$\left\| \widetilde{f} - \sum_{i=1}^{n} \right\|_{L^p}^{p} = \int_{\Omega} \left| \widetilde{f} - \sum_{i=1}^{n} \right|^p dx \to 0 \ \text{ quando } \ n \to \infty.$$

Mas isso é o mesmo que dizer que a série associada à sucessão (f_i) converge na mesma norma $||\cdot||_{L^p}$.$\blacksquare$

Teorema 1.5 (Separabilidade). *$L^p(\Omega)$ é separável para $1 \leqslant p < +\infty$.*

[5]Frigyes Riesz (1880–1956)— matemático austríaco-húngaro
[6]Ernst Sigismund Fischer (1875–1956)— matemático vieno
[7]Stefan Banach (1892–1945)— matemático polonês

Teorema 1.6 (Reflexibilidade)**.** *O espaço $L^p(\Omega)$ é reflexivo para qualquer $1 < p < \infty$.*

Demonstração: O espaço L^p é um espaço de Banach, pelo Teorema 1.3 ele é uniformemente convexo e é assim reflexivo pelo Teorema de Milman[8]–Pettis[9].■

Definição 1.8 (Convolução)**.** *Sejam $f, g \in L^1(\Omega)$, a convolução de f e g, denotada por $f * g$, é a função definida por*

$$(f * g)(x) = \int_\Omega f(x-y)g(y)dy, \quad \forall x \in \Omega.$$

Teorema 1.7 (Teorema de Young)**.** *Sejam $p, q, r \in [1, \infty]$ tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 + \dfrac{1}{r}$, $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$. Então, $f * g \in L^r(\Omega)$ e além disso vale que*

$$\|f * g\|_{L^r} \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

Demonstração: Para $r < \infty$, sendo

$$p_1 := \frac{p}{1 - p/r}, \quad p_2 := \frac{q}{1 - q/r}$$

e r' o conjugado de r, a desigualdade de Hölder nos fornece para cada $x \in \Omega$

$$\begin{aligned}
|f(x) * g(x)| &\leqslant \int_\Omega |f(x-y)|^{p/r}|g(y)|^{q/r}|f(x-y)|^{1-p/r}|g(y)|^{1-q/r}dy \\
&\leqslant \left(\int_\Omega |f(x-y)|^p|g(y)|^q dy\right)^{1/r}\left(\int_\Omega |f(x-y)|^{\frac{p}{p_1}r'}|g(y)|^{\frac{q}{p_2}r'}dy\right)^{1/r'} \\
&\leqslant \left(\int_\Omega |f(x-y)|^p|g(y)|^q dy\right)^{1/r} \\
&\quad \times \left(\int_\Omega |f(x-y)|^{\frac{p}{p_1}r'\frac{p_1}{r'}}dy\right)^{\frac{1}{r'}\frac{r'}{p_1}}\left(\int_\Omega |g(y)|^{\frac{q}{p_2}r'\frac{p_2}{r'}}dy\right)^{\frac{1}{r'}\frac{r'}{p_2}} \\
&= \left(\int_\Omega |f(x-y)|^p|g(y)|^q dy\right)^{1/r} \|f\|_{L^p}^{p/p_1}\|g\|_{L^q}^{q/p_2},
\end{aligned}$$

pois

$$\frac{r'}{p_1} + \frac{r'}{p_2} = r'\left(\frac{1 - \frac{p}{r}}{p} + \frac{1 - \frac{q}{r}}{q}\right) = 1.$$

[8]Vitali Davidovich Milman (1939)— matemático israelense
[9]Billy James Pettis (1913–1979)— matemático americano

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|f*g\|_{L^r}^r &\leqslant \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_1}r}\|g\|_{L^q}^{\frac{q}{p_2}r}\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega}|f(x-y)|^p|g(y)|^q dy\right)dx\\
&= \|f\|_{L^p}^{r-p}\|g\|_{L^q}^{r-q}\int\limits_{\Omega}|g(y)|^q dy\int\limits_{\Omega}|f(x-y)|^p dx\\
&= \|f\|_{L^p}^{r-p}\|g\|_{L^p}^{r-q}\|g\|_{L^q}^{q}\|f\|_{L^p}^{p}\\
&= \|f\|_{L^p}^{r}\|g\|_{L^p}^{r}.
\end{aligned}$$

No caso em que $r=\infty$, temos que

$$\begin{aligned}
\|f*g\|_{L^\infty}^p &= \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\int\limits_{\Omega}f(x-y)g(y)dy\right|\\
&\leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.\blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 1.8 (Convergência Dominada). *Se f_n é uma sucessão de funções mensuráveis em Ω convergindo para f para quase todos os pontos tais que $|f_n|\leqslant g$, onde g é integrável. Então f é integrável e*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega}f_n(x)d\mu=\int\limits_{\Omega}f(x)d\mu.$$

Teorema 1.9 (Ascoli[10]–Arzela[11]). *Seja $\mathfrak{F}$ uma sucessão de funções $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ com seguintes propriedades:*

- *Equicontinuidade, ou seja, para $\varepsilon>0$ e cada x no domínio, existe um $\delta>0$ tal que $|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon\ \forall f\in\mathfrak{F}$;*
- *Equilimitação, ou seja, existe uma constante C tal que $|f(x)|<C$, $\forall x\in[a,b]$, $\forall f\in\mathfrak{F}$.*

Então existe uma subsucessão $f_n(x)$ e uma função contínua $f(x)$ tal que $f_n(x)$ converge uniformemente para $f(x)$.

Suponhamos que (Z,Σ,μ) seja produto de Lebesgue dos espaços de medida completos e σ-finitos (X,Σ_x,μ_x) e (Y,Σ_y,μ_y).

Teorema 1.10 (Fubini[12]). *Dada qualquer função $f(x,y)$ μ-integrável sobre o conjunto $A\subset Z$, então*

$$\int\limits_X\left(\int\limits_{A_x}f(x,y)d\mu_y\right)d\mu_x=\int\limits_Y\left(\int\limits_{A_y}f(x,y)d\mu_x\right)d\mu_y=\int\limits_A f(x,y)d\mu.$$

[10]Giulio Ascoli (1843–1896)– matemático italiano
[11]Cesare Arzela (1947–1912)— matemático italiano
[12]Guido Fubini (1879–1943)— matemático italiano

1.2 Espaço de Schwartz $S(\mathbb{R})$

Definição 1.9. *O espaço de Schwartz*[13] $S(\mathbb{R})$ *é o espaço linear de todas as funções* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *que tem derivadas de todas as ordens e que satisfazem a condição*

$$\|f\|_{\alpha,\beta} := \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha f^{(\beta)}(x)| < \infty$$

para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$.

A condição de finitude para todos $\alpha \geqslant 1$ e $\beta \in \mathbb{N}_0$, implica que $x^\alpha f^\beta(x)$ converge para 0 quando $|x| \to \infty$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$, e assim a função deste tipo diz-se ser rapidamente decrescente.

Denotaremos por $C_0^\infty(\mathbb{R})$ a classe das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ infinitamente contínuas de suporte compacto, onde o suporte de f é o conjunto

$$\mathrm{Supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}.$$

1.2.1 Definição e Propriedades Básicas

A função $\|f\|_{\alpha,\beta}$ é semi-norma no espaço vectorial $S(\mathbb{R})$, no sentido que

$$\|f + g\|_{\alpha,\beta} \leqslant \|f\|_{\alpha,\beta} + \|g\|_{\alpha,\beta},$$

$$\|\eta f\| = \eta \|f\|_{\alpha,\beta}$$

para todos $f, g \in S(\mathbb{R})$ e $\eta \in \mathbb{R}$.

Proposição 1.1. *Se* $f \in S(\mathbb{R})$, *então* $x^\alpha f^{(\beta)}(x)$ *é limitado, e pertence a* $L^1(\Omega)$, *para qualquer* $\alpha, \beta \geqslant 0$. *Para*

$$|x^{\alpha+2} f^{(\beta)}(x)| \leqslant M < \infty$$

implica que

$$|x^\alpha f^{(\beta)}(x)| \leqslant \frac{M}{1 + x^2} \in L^1(\Omega).$$

Proposição 1.2. *Se* $f \in S$, *então* $x^\alpha f^{(\beta)}(x)$ *é limitado, para qualquer inteiro* $\alpha, \beta \geqslant 0$ *e pertence a* $L^1(\Omega)$.

Definição 1.10. *Dada uma sucessão* $f_n(x)$ *pertencente a* $S(\mathbb{R})$, *diremos que* $f_n(x)$ *converge em* $S(\mathbb{R})$ *para zero quando* $n \to \infty$, *se para qualquer número inteiro* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$, $x^\alpha f^{(\beta)}(x)$ *converge uniformemente para zero em* $\mathbb{R}$.

Teorema 1.11. *Seja* $1 \leqslant p < \infty$. *Então o espaço de Schwartz* $S(\mathbb{R})$ *é denso em* $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^p})$, *ou seja, para todo* $f \in L^p(\mathbb{R})$, *existe uma sucessão* $f_n(x)$ *em* $S(\mathbb{R})$ *tal que* $f_n \xrightarrow{L^p(\mathbb{R})} f$.

[13] Laurent Schwartz (1915–2002)— matemático francês

Lema 1.4. *Sejam* $f, g \in S(\mathbb{R})$. *Então*
(1) A função $x^\alpha f^{(\beta)}(x)$ *pertence a* $S(\mathbb{R})$, *para qualquer* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$;
(2) A convolução $f * g \in S(\mathbb{R})$ *e, além disso,* $(f * g)^{(\beta)} = \big(f^{(\beta)} * g\big) = \big(f * g^{(\beta)}\big)$ *para qualquer* $\beta \in \mathbb{N}_0$.

Lema 1.5. *Sejam* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *e* $f_n \xrightarrow{S(\mathbb{R})} f$, *então* $f_n \xrightarrow{L^p(\mathbb{R})} f$.

Demonstração: Como $\|f_n - f\|_{L^\infty} = \|f_n - f\|_{\alpha=0,\beta=0}$, o lema vale para $p = \infty$. Consideremos o caso em que $1 \leqslant p < \infty$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que o integral $\int\limits_{\mathbb{R}} \big(1 + |x|^2\big)^{-pk} dx$ seja finito. Daí, teremos que

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_{L^p}^p &= \int\limits_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|^p dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|x|^2)^{pk}} \Big[\big(1+|x|^2\big)^k |f_n(x) - f(x)|\Big]^p dx \\
&\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} \Big[\big(1+|x|^2\big)^k |f_n(x) - f(x)|\Big]^p \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|x|^2)^{pk}} dx \\
&\leqslant C \sup_{x\in\mathbb{R}} \big[\big(1+|x|^{2k}\big) |f_n(x) - f(x)|\big]^p \\
&\leqslant C \sup_{x\in\mathbb{R}} \big[|f_n(x) - f(x)| + |x|^{2k}|f_n(x) - f(x)|\big]^p \\
&\leqslant C\|f_n - f\|_{\alpha=0,\beta=0} + \|f_n - f\|_{\alpha=2k,\beta=0}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposição 1.3. *Seja dada a função*

$$\rho(f,g) = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} \frac{1}{2^{\alpha+\beta}} \frac{\|f-g\|_{\alpha,\beta}}{1+\|f-g\|_{\alpha,\beta}}, \quad f, g \in S(\mathbb{R}). \tag{1.3}$$

Então
(1) ρ *é uma métrica sobre sobre* $S(\mathbb{R})$;
(2) $f_n \xrightarrow{S} f$ *é equivalente a* $f_n \xrightarrow{\rho} f$.

Teorema 1.12. *O espaço* $(S(\mathbb{R}), \rho)$ *é um espaço métrico completo, onde* ρ *é métrica dada por (1.3).*

Demonstração: Seja f_n uma sucessão de Cauchy em $S(\mathbb{R})$. Como, para cada $\beta \in \mathbb{N}_0$, $\|f^{(\beta)}\|_{L^\infty} = \|f\|_{\alpha=0,\beta}$, temos que $f^{(\beta)}$ é de Cauchy em $(S(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^\infty})$, logo uniformemente limitada.

Afirmemos que $f_n^{(\beta)}$ é equicontínua em cada bola fechada $\overline{B_r(0)}$, $r > 0$, caso contrário suponhamos que existe $x_0 \in \overline{B_r(0)}$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists x_n \in \overline{B_r(0)}, \quad \left|f_n^{(\beta)}(x_n) - f_n^{(\beta)}(x_0)\right| > \varepsilon \ \text{ e } \ \|x_n - x_0\| < \frac{1}{n},$$

onde $||\cdot||$ é a norma euclidiana. Usando o Teorema do Valor Médio obtemos

$$\varepsilon < \left| f_n^{(\beta)}(x_n) - f_n^{(\beta)}(x_0) \right| \leqslant C\|x_n - x_0\| \to 0.$$

Portanto, o Teorema de Ascoli-Arzela implica que $f_n^{(\beta)}$ possui uma subsucessão convergente para certa função $f_\beta \in C(\overline{B}_r(0))$. Porque, para todo $\beta \in \mathbb{N}$, $f_n^{(\beta)}$ é de Cauchy, segue que

$$f_n^{(\beta)} \to f_\beta$$

uniformemente. Mais ainda, $f_\beta = f^{(\beta)}$, consequentemente $f \in C^\infty(\overline{B_r(0)})$.

Para cada bola $\overline{B_r(0)}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, temos que

$$\sup_{B_r(0)} \left| x^\alpha f^{(\beta)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{B_r(0)} \left| x^\alpha f_n^{(\beta)} \right| \right) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup \|f_n\|_{\alpha,\beta},$$

onde vemos que o lado direito é independente do raio da bola, logo $\|f\|_{\alpha,\beta}$ é limitado, ou seja $f \in S(\mathbb{R})$. Só resta provar que de facto $f_n \xrightarrow{S} f$. Dado $\varepsilon > 0$, escolhemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\|_{\alpha,\beta} < \varepsilon$ quando $n, m > k$. Como

$$\sup_{B_r(0)} \left| x^\alpha (f_m - f)^{(\beta)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{B_r(0)} \left| x^\alpha (f_m - f_n)^{(\beta)} \right| \right) \leqslant \lim_{n\to\infty} \|f_m - f_n\|_{\alpha,\beta},$$

segue que $\|f_m - f\| \leqslant \varepsilon$ quando $m > k$, prova a convergência de $f_n \in S(\mathbb{R})$.■

Capítulo 2

Transformada de Fourier em Espaços Especiais

Introduz-se, neste capítulo, as noções de transformada de Fourier[1] nos espaços $S(\mathbb{R})$, $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$. Além disso, para cada espaço, apresenta-se, de seguida, algumas das suas principais propriedades que nos ajudarão a entender com mais clareza os estudos apresentados no capítulo subsequente.

Os resultados apresentados neste capítulo, são sustentados basicamente pelos trabalhos [4], [9], [11], [15], [17] e [18].

2.1 Transformada de Fourier no Espaço $S(\mathbb{R})$

Definição 2.1. *Seja $f \in S(\mathbb{R})$ e α um parâmetro real. Chama-se transformada de Fourier à função*

$$\mathcal{F}[f](\alpha) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\alpha x} dx. \tag{2.1}$$

Definição 2.2. *Seja $f \in S(\mathbb{R})$ e $\mathcal{F}[f](\alpha)$ a transformada de Fourier de f. Denota-se por $\mathcal{F}^{-1}$ a transformada inversa de Fourier e define-se pela expressão*

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f(x)](\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha. \tag{2.2}$$

Exemplo 2.1. Seja $f(x) = e^{-ax^2}$, para $a > 0$, vamos calcular $\mathcal{F}[f]$.

[1] Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830)— matemático francês

Resolução: Fazendo a substituição de variáveis $z = x - i\dfrac{\alpha}{2a}$, teremos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f](\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} e^{i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ax^2 + i\alpha x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-a\left(x^2 - \frac{i\alpha x}{a}\right)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-a\left[\left(x - \frac{i\alpha}{2a}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{4a^2}\right]} dx \\
&= e^{-\alpha^2/4a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-a\left(x - \frac{i\alpha}{2a}\right)^2} dx \\
&= e^{-\alpha^2/4a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-az^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\alpha^2/4a}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 2.1. *Se $f \in S(\mathbb{R})$, então $\mathcal{F}[f] \in S(\mathbb{R})$.*

Demonstração: Temos que

$$\mathcal{F}\left[\frac{df}{dx}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{df}{dx} e^{i\alpha x} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} i\alpha f(x) e^{i\alpha x} dx = -i\alpha \mathcal{F}[f](\alpha).$$

Contudo, uma vez que $\alpha\mathcal{F}[f] = i\mathcal{F}\left[\dfrac{df}{dx}\right]$ e $f'_x \in S(\mathbb{R})$ segue que $\alpha\mathcal{F}[f]$ é limitada. Pelo princípio de indução matemática,

$$|\alpha|^n |\mathcal{F}[f]|$$

é limitada para qualquer n positivo, pela definição de função decrescente, $\mathcal{F}[f]$ é rapidamente decrescente. Assim, temos que mostrar que se $f \in S(\mathbb{R})$ implica $\mathcal{F}\left[\dfrac{d^n f}{d\alpha^n}\right] \in S(\mathbb{R})$ é rapidamente decrescente. Uma vez que

$$\mathcal{F}\left[\frac{df}{d\alpha}\right] = i\mathcal{F}[xf]$$

e $xf \in S(\mathbb{R})$, fica provado que f'_α é rapidamente decrescente. Pelo princípio de indução matemática segue que todas as derivadas de $\mathcal{F}[f]$ existem e são rapidamente decrescentes.$\blacksquare$

Teorema 2.2 (Inversa da Transformada de Fourier). *Seja $f \in S(\mathbb{R})$. Então $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f$.*

Demonstração: Para $n \in \mathbb{N}$, defina-se

$$I_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f] e^{-\alpha/n^2 - i\alpha x} d\alpha.$$

Uma vez que o integrando converge pontualmente para $\mathcal{F}[f]e^{-i\alpha x}$ quando $n \to \infty$,

$$\left|\mathcal{F}[f(x)]e^{-\alpha^2/n^2 - i\alpha x}\right| \leqslant |\mathcal{F}[f(x)]|$$

e $|\mathcal{F}[f]|$ é integrável uma vez que $\mathcal{F}[f] \in S(\mathbb{R})$. Pelo Teorema da Convergência Dominada temos que

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f]e^{-i\alpha x} d\alpha = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]]. \tag{2.3}$$

Por outro lado,

$$I_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(y) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\alpha^2/n^2} e^{i(y-x)\alpha} d\alpha \right) dy.$$

A expressão dentro de parêntesis é a transformada de Fourier de $e^{-\alpha^2/n^2}$ com parâmetro $y - x$, calculando, tomando em conta os resultados obtidos no Exemplo (2.1) teremos que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\alpha^2/n^2} e^{i(y-x)\alpha} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-n^2(y-x)^2/4}.$$

Portanto,

$$I_n(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(y) \frac{n}{\sqrt{4\pi}} e^{-n^2(y-x)^2/4} dy.$$

Considerando

$$g_n(x) = \frac{n}{\sqrt{4\pi}} e^{-n^2x^2/4} = \frac{n}{2}\phi\left(\frac{nx}{2}\right),$$

onde $\phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$, I_n pode ser reescrito como

$$I_n = g_n * f \to f$$

quando $n \to \infty$, isto atendendo (2.3). Assim,

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = \lim_{n\to\infty} I_n(x) = f(x). \blacksquare$$

2.2 Transformada de Fourier no Espaço $L^1(\mathbb{R})$

Definição 2.3. *Para $f \in L^1(\mathbb{R})$, e α um número real, chama-se transformada de Fourier à função*

$$\mathcal{F}[f](\alpha) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\alpha x} dx. \tag{2.4}$$

No caso especial, quando f é par, $f(-x) = f(x)$ para qualquer número real x, (2.4) toma a forma

$$\mathcal{F}[f](\alpha) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty f(x)\cos\alpha x dx. \tag{2.5}$$

Se f é ímpar, $f(-x) = -f(x)$ para qualquer valor real x, (2.4) toma a forma

$$-i\mathcal{F}[f](\alpha) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty f(x)\sin\alpha x dx. \tag{2.6}$$

Se a função f está definida no intervalo $[0,\infty)$, e $f \in L^1[0,\infty)$, então o integral do segundo membro de (2.5) e (2.6) definem, respectivamente, a transformação cosseno e a transformação seno da função $f(x)$.

2.2.1 Propriedades da Transformada de Fourier

Proposição 2.1. *Seja $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, então $\mathcal{F}[f](\alpha)$ é limitado.*

Demonstração: Dado que para qualquer numero real α temos que

$$\mathcal{F}[f][\alpha] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\alpha x}dx,$$

então

$$|\mathcal{F}[f](\alpha)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\alpha x}dx \right| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|dx = \|f\|_{L^1} < \infty,$$

onde $\|f\|_{L^1}$ é a norma de $L^1(\mathbb{R})$ de f, de modo que

$$\sup_{\alpha\in\mathbb{R}} |\mathcal{F}[f](\alpha)| \leqslant \|f\|_{L^1}. \blacksquare$$

Proposição 2.2. *Se $f(x)$ pertence a $L^1(\mathbb{R})$, então $\mathcal{F}[f](\alpha)$ é contínua para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Seja h um número real tal que $h \neq 0$, então

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}[f](\alpha+h) - \mathcal{F}[f](\alpha)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\alpha x}\left(e^{ihx}-1\right)dx \right| \\ &\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|\left|e^{ihx}-1\right|dx, \end{aligned}$$

onde

$$|f(x)|\left|e^{ihx}-1\right| \leqslant 2|f(x)| \in L^1(\mathbb{R})$$

e $|f(x)|\left|e^{-ihx}-1\right| \to 0$, quando $h \to 0$ para quase todos $x \in \mathbb{R}$. Segue do teorema sobre

Convergência Dominada que $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \left|e^{ihx} - 1\right| dx \to 0$, quando $h \to 0$, e consequentemente $\mathcal{F}[f](\alpha)$ é contínua no ponto $\alpha \in \mathbb{R}$.■

Proposição 2.3. *Seja $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ e $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Então*

$$\mathcal{F}[C_1 f + C_2 g](\alpha) = C_1 \mathcal{F}[f](\alpha) + C_1 \mathcal{F}[g](\alpha).$$

Omitimos a demonstração desta propriedade devido à circunstância dela ocorrer directamente por uso das propriedades de linearidade do integral.

Proposição 2.4 (Transformada de Fourier de Derivadas)**.** *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ é uma função n vezes diferenciável absolutamente integrável tal que as suas derivadas até ordem n também são absolutamente integráveis, então*

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)](\alpha) = (-i\alpha)^n \mathcal{F}[f(x)](\alpha).$$

Demonstração: Para $n = 1$. Integrando por partes, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f'(x)](\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x)\ e^{i\alpha x}\big|_{-\infty}^{\infty} - (i\alpha x) \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\alpha x} dx \right] \\
&= -\frac{i\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\alpha x} dx = -i\alpha \mathcal{F}[f(x)](\alpha),
\end{aligned}$$

porque, como f é absolutamente integrável, necessariamente $\lim_{x\to\infty} |f(x)| = 0$, logo $\lim_{x\to\infty} |f(x)e^{i\alpha x}| = 0$.

Para $n = 2$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f''(x)](\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f''(x) e^{i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x)'\ e^{i\alpha x}\big|_{-\infty}^{\infty} - (i\alpha x) \int_{\mathbb{R}} f(x)' e^{i\alpha x} dx \right] \\
&= -\frac{i\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{i\alpha x} dx = -i\alpha(-i\alpha \mathcal{F}[f(x)](\alpha)) = (-i\alpha)^2 \mathcal{F}[f](\alpha).
\end{aligned}$$

Porque f' é absolutamente integrável, $\lim_{x\to\pm\infty} |f'(x)| = 0$. Contudo, $\lim_{x\to\pm\infty} |f'(x)e^{i\alpha x}| = 0$. Usando a indução matemática demonstra-se que

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)](\alpha) = (-i\alpha)^n \mathcal{F}[f(x)](\alpha).■$$

Proposição 2.5 (Derivadas de Transformadas de Fourier)**.** *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ é uma função absolutamente integrável tal que $x^n f(x)$ também é uma função absolutamente integrável.*

Então
$$\mathcal{F}[x^n f(x)](\alpha) = (-i)^n \frac{d^n}{d\alpha^n}\mathcal{F}[f(x)](\alpha).$$

Demonstração: Para $n = 1$. Passando a derivada para dentro do sinal de integração, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\alpha}\mathcal{F}[f](\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{d\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\alpha x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{d}{d\alpha}\left[f(x)e^{i\alpha x}\right]dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} (ix)f(x)e^{i\alpha x}dx = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} xf(x)e^{i\alpha t}dx \\
&= i\mathcal{F}[xf(x)](\alpha).
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros por i obtemos $\mathcal{F}[xf(x)](\alpha) = i\frac{d}{d\alpha}\mathcal{F}[f(x)](\alpha)$. Para $n = 2$,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{d\alpha^2}\mathcal{F}[f](\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d^2}{d\alpha^2}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\alpha x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{d^2}{d\alpha^2}\left[f(x)e^{i\alpha x}\right]dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} (ix)^2 f(x)e^{i\alpha x}dx = i^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} x^2 f(x)e^{i\alpha t}dx \\
&= i^2\mathcal{F}[x^2 f(x)](\alpha).
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros por i^2 obtemos $\mathcal{F}[x^2 f(x)](\alpha) = i\frac{d^2}{d\alpha^2}\mathcal{F}[f(x)](\alpha)$. Pelo método indução matemática demonstra-se que $\mathcal{F}[x^n f(x)](\alpha) = i^n\frac{d^n}{d\alpha^n}\mathcal{F}[f(x)](\alpha)$.■

Proposição 2.6. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$ uma função absolutamente integrável, assuma-se que $\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$. Então para $\alpha \neq 0$,*

$$\mathcal{F}\left[\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt\right](\alpha) = \frac{\mathcal{F}[f(x)](\alpha)}{i\alpha}.$$

Proposição 2.7 (Transformada de Fourier de uma Translação)**.** *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $h \in \mathbb{R}$. Então*
$$\mathcal{F}[f(x-h)](\alpha) = e^{i\alpha h}\mathcal{F}[f(x)](\alpha).$$

Reciprocamente,
$$\mathcal{F}\left[e^{ihx}f(x)\right](\alpha) = \mathcal{F}[f(x)](\alpha+h).$$

Demonstração: Mudando variáveis, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(x-h)](\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x-h)e^{i\alpha x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\alpha(t+h)}dt \\ &= e^{i\alpha h}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\alpha t}dt = e^{i\alpha h}\mathcal{F}[f(t)](\alpha).\end{aligned}$$

A segunda fórmula é obtida directamente:

$$\mathcal{F}\left[e^{ihx}f(x)\right](\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{ihx}f(x)e^{i\alpha x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{i(\alpha+h)x}dx \tag{2.7}$$

$$= \mathcal{F}[f(x)](\alpha+h).\blacksquare \tag{2.8}$$

Proposição 2.8 (Transformada de Fourier de uma Dilatação)**.** *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, então*

$$\mathcal{F}[f(hx)](\alpha) = \frac{1}{|h|}\mathcal{F}[f]\left(\frac{\alpha}{h}\right).$$

Demonstração: Mudando variáveis, se $h > 0$ temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(hx)](\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(hx)e^{i\alpha x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\frac{\alpha}{h}t}\frac{1}{h}dt \\ &= \frac{1}{h}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\frac{\alpha}{h}t}dt = \frac{1}{|h|}\mathcal{F}[f(x)]\left(\frac{\alpha}{h}\right).\end{aligned}$$

Se $h < 0$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(hx)](\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(hx)e^{i\alpha x}dx \\ &= -\frac{1}{h}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\frac{\alpha}{h}t}dt \\ &= \frac{1}{|h|}\mathcal{F}[f(x)]\left(\frac{\alpha}{h}\right).\blacksquare\end{aligned}$$

Proposição 2.9. *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ para $n \in \mathbb{N}$, e $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$ quando $n \to \infty$. Então*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}[f_n](\alpha) = \mathcal{F}[f](\alpha).$$

Proposição 2.10. *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, então cumpre-se a igualdade*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f(x)](y)g(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\mathcal{F}[g(x)](y)dx.$$

Demonstração: Começamos por observar o seguinte:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f(x)](y)g(y)dy &= \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{ixy}dx \right) g(y)dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)g(y)e^{ixy}dxdy.\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Fubini e pelo facto de

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)||g(y)|dxdy = \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|dx \int\limits_{\mathbb{R}} |g(y)|dy < \infty,$$

o integral

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)g(y)e^{ixy}dxdy$$

é simétrico em relação as funções f e g, quer dizer, podemos trocar f por g e vise-versa.■

Teorema 2.3 (Riemann[2]–Lebesgue[3]). *Se* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *e* $\mathcal{F}[f](\alpha)$ *denota a transformada de Fourier de* f*. Então*

$$\mathcal{F}[f](\alpha) \to 0 \quad \textit{quando} \quad |\alpha| \to \infty.$$

Demonstração: Consideremos a função $\mathcal{X}_{[a,b]}$ definida por

$$\mathcal{X}_{[a,b]}(x) := \begin{cases} 1 & \text{se} \quad a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{se} \quad x < a \ \text{ e } \ x > b \end{cases},$$

conhecida como função característica do intervalo limitado $[a, b]$. A sua transformada de Fourier é

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\mathcal{X}_{[a,b]}(x)](\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_a^b f(x)e^{i\alpha x}dx = \frac{1}{i\alpha\sqrt{2\pi}} \left(e^{i\alpha b} - e^{i\alpha a}\right) \\ &= -\frac{i}{\alpha\sqrt{2\pi}} \left(e^{i\alpha a} - e^{i\alpha b}\right).\end{aligned}$$

Para α real, $\alpha \neq 0$, segue que

$$|\mathcal{F}[\mathcal{X}_{[a,b]}](\alpha)| \leqslant \frac{2}{|\alpha\sqrt{2\pi}|} < \frac{2}{\alpha} \to 0 \ \text{ quando } \ |\alpha| \to \infty.$$

Pela linearidade, esta propriedade cumpre-se também para qualquer função escala. E a

[2]Bernhard Riemann (1826–1866)— matemático italiano
[3]Henri Lebesgue (1875–1941)— matemático francês

função escala forma um subconjunto denso de $L^1(\mathbb{R})$, isto é, dado $\varepsilon > 0$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, existe uma função escala f_ε, tal que $\|f - f_\varepsilon\| < \varepsilon$. Desde que

$$\mathcal{F}[f](\alpha) = \mathcal{F}[f_\varepsilon](\alpha) + \mathcal{F}[f](\alpha) - \mathcal{F}[f_\varepsilon](\alpha),$$

temos

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}[f](\alpha)| &\leqslant |\mathcal{F}[f_\varepsilon](\alpha)| + |\mathcal{F}[f](\alpha) - \mathcal{F}[f_\varepsilon](\alpha)| \\ &\leqslant |\mathcal{F}[f_\varepsilon](\alpha)| + \varepsilon, \end{aligned}$$

pela Proposição 2.1 e pela escolha de f_ε. Consequentemente

$$\lim_{|\alpha|\to\infty} \sup |\mathcal{F}[f](\alpha)| \leqslant \lim_{|\alpha|\to\infty} \sup |\mathcal{F}[f](\alpha)| + \varepsilon = \varepsilon. \blacksquare$$

Corolário 2.1. *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, então temos que*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(\alpha x)dx \to 0, \quad \textit{quando} \quad |\alpha| \to \infty,$$

e

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\sin(\alpha x)dx \to 0, \quad \textit{quando} \quad |\alpha| \to \infty.$$

Lema 2.1. *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, então o integral*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$$

existe para quase todo $x \in \mathbb{R}$ e é integrável em relação a x.

Demonstração: A função $f(x-y)f(y)$ é mensurável em $\mathbb{R}^2$, e o integral duplo

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dxdy < \infty.$$

Pelo Teorema de Fubini, este integral é igual ao seu respectivo integral iterado, quer dizer,

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dxdy = \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|dx\right) dy = \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx\right) dy < \infty,$$

por isso, também temos que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|dy\right) dx < \infty.$$

Portanto, $|f(x-y)g(y)|$ é integral como função de variável y para quase todos os pontos, e

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|dy$$

é integrável como função de x, e por isso $\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dx$ é também integral.■

Teorema 2.4. *Seja $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, e $h = f * g$. Então $h \in L^1(\mathbb{R})$, e*

$$\mathcal{F}[h](\alpha) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f](\alpha)\mathcal{F}[g](\alpha)$$

e

$$\|h\|_{L^1} = \|f * g\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}.$$

Demonstração: O Lema 2.1 mostra que $h \in L^1(\mathbb{R})$. Usando a definição da convolução, a Transformada de Fourier e o Teorema de Fubini, notamos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[h](\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} h(x)e^{i\alpha x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{i\alpha x}dx \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(y)dy \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)e^{i\alpha x}dx = \int_{\mathbb{R}} g(y)dy \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(u)e^{i\alpha(u+y)}du \\
&= \sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} g(y)e^{i\alpha y}dy \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(u)e^{i\alpha u}du\right) \\
&= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f](\alpha)\mathcal{F}[g](\alpha).
\end{aligned}$$

Para segunda desigualdade temos:

$$\begin{aligned}
\|h\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}} |h(x)|dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|dx \int_{\mathbb{R}} |g(y)|dy = \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}.■
\end{aligned}$$

Exemplo 2.2. Vamos calcular a transformada de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{se} \quad |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{se} \quad |x| > 1 \end{cases}, \quad \text{para} \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Resolução: Calculando a transformada de Fourier de f, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f](\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)^{i\alpha x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-1}^{1} ae^{i\alpha x}dx \\
&= -a\frac{e^{i\alpha x}}{i\alpha\sqrt{2\pi}}\Bigg|_{-1}^{1} = a\frac{e^{-i\alpha}-e^{i\alpha}}{i\alpha\sqrt{2\pi}} \\
&= a\frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha - \cos\alpha + i\sin\alpha)}{i\alpha\sqrt{2\pi}} \\
&= \frac{2ia\sin\alpha}{i\alpha\sqrt{2\pi}} \\
&= a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\alpha}{\alpha}.\blacksquare
\end{aligned}$$

Exemplo 2.3. Seja dada a função $f(x) = e^{-a|x|}$, $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Calcular $\mathcal{F}[f](\alpha)$ e $\mathcal{F}[f^{(3)}](\alpha)$.

Resolução: Temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f](\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\alpha x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-a|x|}e^{i\alpha x}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{ax+i\alpha x}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ax+i\alpha x}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a+i\alpha}e^{(a+i\alpha)x}\Bigg|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{a-i\alpha}e^{-(a-i\alpha)x}\Bigg|_{0}^{\infty}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a-i\alpha} + \frac{1}{a+i\alpha}\right) \\
&= \frac{2a}{\sqrt{2\pi}\,(a^2+\alpha^2)}.
\end{aligned}$$

Pela Proposição 2.4, $\mathcal{F}[f^{(n)}(x)](\alpha) = (i\alpha)^n\mathcal{F}[f(x)](\alpha)$. Contudo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f^3](\alpha) &= (-i\alpha)^3\mathcal{F}[f](\alpha) \\
&= (-i)^3\alpha^3\frac{2a}{\sqrt{2\pi}(a^2+\alpha^2)} \\
&= \frac{2a\alpha^3}{\sqrt{2\pi}(a^2+\alpha^2)}i.\blacksquare
\end{aligned}$$

Definição 2.4. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}[f](\alpha)$ a transformada de Fourier de f. Tal como anteriormente, denota-se por $\mathcal{F}^{-1}$ a transformada inversa de Fourier e representa-se pela* *seguinte expressão*

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f](\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Segundo a definição da transformada inversa de Fourier temos que

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f](\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha. \tag{2.9}$$

Portanto, o integral (2.9) pode ser reescrito como (valor principal de Cauchy[4])

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \mathcal{F}[f](\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad R > 0.$$

Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$, defina-se

$$S_R(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} \mathcal{F}[f](\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad 0 < R < \infty.$$

Então

$$S_R(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} e^{-i\alpha x} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\alpha t} dt \right) d\alpha. \tag{2.10}$$

Uma vez que o integral (2.10) é convergente, a ordem de integração pode ser permutada, de modo que

$$\begin{aligned} S_R(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \left(\int_{-R}^{R} e^{-i\alpha(x-t)} d\alpha \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \left[\frac{i}{(x-t)} \left(e^{-iR(x-t)} - e^{iR(x-t)} \right) \right] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{\sin R(x-t)}{x-t} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x-t) \frac{\sin Rt}{t} dt. \end{aligned}$$

Com efeito,

$$S_R(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin Rt}{t} dt,$$

[4]Augustin-Louis Cauchy (1789–1957)— matemático francês

ou

$$S_R(x) - f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x)\right]\frac{\sin Rt}{t}dt,$$

uma vez que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin Rt}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

Lema 2.2. *Se* $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$S_R(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R} \mathcal{F}[f](\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha, \quad 0 < R < \infty,$$

$$g_x(t) = \frac{1}{2}[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]. \tag{2.11}$$

Então

$$S_R(x) - f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty g_x(t)\frac{\sin Rt}{t}dt.$$

Teorema 2.5. *Se* $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}[f](\alpha) \in L^1(\mathbb{R})$ *e* f *é contínua em* $\mathbb{R}$. *Então*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f](\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha.$$

Teorema 2.6. *Se* $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, $g_x(t)$ *está definido como em (2.11) e existe um* $\delta > 0$, *tal que*

$$\int_0^\delta \frac{|g_x(t)|}{t}dt < \infty.$$

Então

$$\lim_{R\to\infty} S_R(x) = f(x).$$

Corolário 2.2. *Se* $f, g \in \mathbb{R}$ *e* $\mathcal{F}[f(x)](\alpha) = \mathcal{F}[g(x)](\alpha)$ *para qualquer* $\alpha, x \in \mathbb{R}$. *Então*

$$f(x) = g(x).$$

Demonstração: Pelos pressupostos do corolário temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(x)](\alpha) = \mathcal{F}[g(x)](\alpha) &\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f(x)]](\alpha) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[g(x)]](\alpha) \\ &\Rightarrow f(x) = g(x). \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 2.7. *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}[f](\alpha)$ denota a Transformada de Fourier de f e $\mathcal{F}[f](\alpha) = 0$ para quase todos os $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $f(x) = 0$ para quase todos os $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Consideremos os números $c > 0$ e $\varepsilon > 0$. Seja

$$\omega_{c,\varepsilon}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < -c-\varepsilon \ \text{ e } \ x > c+\varepsilon \\ 1 & \text{se} \quad -c < x < c \end{cases}.$$

A função $\omega_{c,\varepsilon}$ é infinitamente diferenciável e

$$\mathcal{F}[\omega_{c,\varepsilon}](\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \omega_{c,\epsilon}(x) e^{i\alpha x} dx.$$

Integrando por partes, notamos que $\mathcal{F}[\omega_{c,\varepsilon}] = o\left(|\alpha|^{-k}\right)$ quando $\alpha \to \infty$, para qualquer inteiro $k \geqslant 1$. Portanto $\mathcal{F}[\omega_{c,\varepsilon}] \in L^1(\mathbb{R})$. Porque $\omega_{c,\varepsilon}$ é finito, diferenciável em qualquer ponto $x \in \mathbb{R}$, os pressupostos do Teorema 2.6 cumprem-se. Contudo, concluímos que

$$\omega_{c,\varepsilon}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[\omega_{c,\varepsilon}](\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad x \in \mathbb{R},$$

onde o integral converge absolutamente desde que $\mathcal{F}[\omega_{c,\varepsilon}] \in L^1(\mathbb{R})$. Pela Proposição 2.6 e 2.10, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\omega_{c,\varepsilon}(x-y)dy &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(y) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[\omega_{c,\varepsilon}](\alpha) e^{-i\alpha(x-y)} d\alpha \right] dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(y) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[\omega_{c,\varepsilon}](\alpha) e^{-i\alpha x} e^{i\alpha y} d\alpha \right] dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(y) e^{i\alpha y} dy \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[\omega_{c,\varepsilon}](\alpha) e^{-i\alpha x} \right) d\alpha \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f](\alpha) \left(\mathcal{F}[\omega_{c,\varepsilon}](\alpha) e^{-i\alpha x} \right) d\alpha.
\end{aligned}$$

Se $\mathcal{F}[f](\alpha) = 0$ para qualquer α, obtemos

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\omega_{c,\varepsilon}(x-y)dy = 0, \tag{2.12}$$

que se cumpre para qualquer $c > 0$. Por força da definição da função $\omega_{c,\varepsilon}$, temos:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\omega_{c,\varepsilon}(x-y)dy = \int\limits_{x-c-\varepsilon}^{x-c} f(y)\omega_{c,\varepsilon}(x-y)dy + \int\limits_{x-c}^{x+c} f(y)\omega_{c,\varepsilon}(x-y)dy + \int\limits_{x+c}^{x+c+\varepsilon} f(y)\omega_{c,\varepsilon}(x-y)dy,$$

onde
$$\left|\int\limits_{x-c-\varepsilon}^{x-c} f(y)\omega_{c,\varepsilon}(x-y)dy\right| \leqslant \int\limits_{x-c-\varepsilon}^{x-c} |f(y)|dy \to 0, \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0.$$
Analogamente,
$$\left|\int\limits_{x+c}^{x+c+\varepsilon} f(y)\omega_{c,\varepsilon}(x-y)dy\right| \to 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0,$$
enquanto que
$$\int\limits_{x-c}^{x+c} f(y)\omega_{c,\varepsilon}(x-y)dy = \int\limits_{x-c}^{x+c} f(y)dy.$$
De (2.12) segue que
$$\int\limits_{x-c}^{x+c} f(y)dy = 0,$$
para qualquer $c > 0$, que é o mesmo dizer que $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(y)dy = 0$, para qualquer α e β, o que implica que $f(x) = 0$ para quase todos os $x \in \mathbb{R}$.■

Proposição 2.11 (Involução)**.** *A Transformada de Fourier é uma involução de ordem 4, isto é, $\mathcal{F}^4 = I$, onde I é o operador identidade.*

Demonstração: Pela definição da Transformada Inversa de Fourier temos que
$$\mathcal{F}^2[f](\alpha) = \mathcal{F}[\mathcal{F}](\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f](\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha = f(-x).$$
Daí que
$$\mathcal{F}^4[f](\alpha) = \mathcal{F}^2[\mathcal{F}^2](\alpha) = \mathcal{F}^2[f(-x)](\alpha) = f(-(-x)) = f(x).■$$

Corolário 2.3 (Wiener[5])**.** *Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}[f](\alpha) \neq 0$ para qualquer $x \in [a,b]$. Então existe uma função $g \in L^1(\mathbb{R})$, tal que*
$$\frac{1}{\mathcal{F}[f](\alpha)} = \mathcal{F}[g](\alpha), \quad \forall \alpha \in [a,b].$$

Teorema 2.8. *Seja $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Se $\mathcal{F}[f](\alpha) = -i\alpha\mathcal{F}[g](\alpha)$, então*
$$f(x) = -\int\limits_{x}^{\infty} g(y)dy.$$

[5]Norbert Wiener (1894–1964)— matemático e filósofo americano

Demonstração: Assumamos que $\mathcal{F}[f](\alpha)$, $\mathcal{F}[g](\alpha) \in L^1(\mathbb{R})$. Então pelo Teorema 2.5, temos

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f](\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha$$

e

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[g](\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-i\alpha) \mathcal{F}[f](\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha,$$

para quase todos x. Assim,

$$\int_a^b g(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-i\alpha b} - e^{-i\alpha a}\right) \mathcal{F}[f](\alpha) d\alpha = f(b) - f(a). \tag{2.13}$$

Consequentemente, $g(x) = f'(x)$ ou $G(x) = f(x)$, onde $G(x)$ é a primitiva de $g(x)$, para quase todos os x.

Seja $K(\alpha) = e^{-\alpha^2}$, $\mathcal{F}[K](\alpha) \equiv H(\alpha) = \sqrt{\pi} e^{(-\alpha^2/4)}$. Defina-se

$$F_R(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\alpha x} \mathcal{F}[f](\alpha) K\left(\frac{\alpha}{R}\right) d\alpha$$

e

$$G_R(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\alpha x} \mathcal{F}[g](\alpha) K\left(\frac{\alpha}{R}\right) d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\alpha x} (-i\alpha \mathcal{F}[f](\alpha)) K\left(\frac{\alpha}{R}\right) d\alpha.$$

Notemos que $\mathcal{F}[f](\alpha)$ é limitado e $F_R(x)$ é a Transformada de Fourier de uma função que pertence ao espaço $L^1(\mathbb{R})$, pelo Teorema 2.3, $F_R(x) \to 0$ quando $|x| \to 0$. Da expressão (2.13) segue que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\alpha b} \mathcal{F}[f(b)](\alpha) K\left(\frac{\alpha}{R}\right) d\alpha - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\alpha a} \mathcal{F}[f(a)](\alpha) K\left(\frac{\alpha}{R}\right) d\alpha$$

$$= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\alpha x} \mathcal{F}[g(x)](\alpha) K\left(\frac{\alpha}{R}\right) d\alpha dx,$$

o que implica que

$$F_R(b) - F_R(a) = \int_a^b G_R(x) dx, \quad b > 0. \tag{2.14}$$

Introduzindo $\lim\limits_{b \to \infty}$ em (2.14) teremos,

$$F_R(x) = -\int_x^\infty G_R(y) dy.$$

Desde que $g \in L^1(\mathbb{R})$, temos que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |G_R(y) - g(y)|dy = 0,$$

o que implica que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}} G_R(x)dy = \int_{\mathbb{R}} g(y)dy.$$

Para qualquer x fixo, temos

$$\lim_{R\to\infty} F_R(x) = \lim_{R\to\infty} \left(-\int_x^{\infty} G_R(y)dy \right) = -\int_{\mathbb{R}} g(y)dy.$$

Do primeiro membro temos que $F_R(x) \to f(x)$, para quase todos os x, quando $R \to \infty$. Assim sendo,

$$f(x) = -\int_x^{\infty} g(y)dy,$$

para quase todos $x \in \mathbb{R}$.■

2.2.2 Transformada de Fourier no Espaço $L^2(\mathbb{R})$

Em geral, dada a função $f \in L^2(\mathbb{R})$, a expressão

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\alpha x}dx, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

não está bem definida, isto é, não é finita. A título de exemplo, a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in (-\infty, 1] \\ \\ \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \in (1, \infty) \end{cases}$$

pertence a $L^2(\mathbb{R})$ mas não a $L^1(\mathbb{R})$. O espaço $L^2(\mathbb{R})$ tem propriedades não existentes no espaço $L^1(\mathbb{R})$. Para introduzir o conceito de Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R})$ precisamos de algumas notações preliminares.

Definição 2.5. *Uma forma bilinear definida em um espaço vectorial (sobre um corpo K) V, é uma função $B : V \times V \to K$ linear em ambas as variáveis.*

1. $B(u + w, v) = B(u, v) + B(w, v)$;

2. $B(u, v + w) = B(u, v) + B(u, w)$;

3. $B(\lambda u, v) = B(u, \lambda v) = \lambda B(u, v)$.

Definição 2.6. *Seja V um espaço vectorial sobre um corpo K. Em V, pode-se definir a função bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to K$ (denominada produto interno), que satisfaz os seguintes axiomas:*

1. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$;

2. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$;

3. $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$.

Se $v \neq 0$, então $\langle v, v \rangle > 0$ em que u, v e w são vectores de V, e λ é um elemento de K.

Proposição 2.12. *A forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle : L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ é definida por*

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx \tag{2.15}$$

é um produto de interno de f e g.

O produto de interno existe quando $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ por causa da desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky[6]-Schwarz[7]. O produto de interno goza das seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}
\langle f, g \rangle &= \overline{\langle f, g \rangle}; \\
\langle f, f \rangle &= \|f\|^2_{L^2}; \\
\langle f, \gamma g \rangle &= \overline{\gamma}\langle f, g \rangle; \quad \gamma \in \mathbb{C}; \\
\langle f, g + h \rangle &= \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle; \\
|\langle f, g \rangle| &\leqslant \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}. \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Proposição 2.13. *Se $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, então $\langle f, g \rangle$ é uma função contínua em ambos os argumentos.*

Demonstração: Consideremos a diferença do produto interno:

$$\langle f, g \rangle - \langle f_0, g_0 \rangle = \langle f - f_0, g \rangle + \langle f_0, g - g_0 \rangle.$$

Contudo,

$$\begin{aligned}
|\langle f, g \rangle - \langle f_0, g_0 \rangle| &\leqslant |\langle f - f_0, g \rangle| + |\langle f_0, g - g_0 \rangle| \\
&\leqslant \|f - f_0\|\|g\| + \|g - g_0\|\|f_0\| \\
&\leqslant \|f - f_0\|\|g_0\| + \|g - g_0\|\|f_0\| + \|f - f_0\|\|g - g_0\|.
\end{aligned}$$

[6] Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (1804–1889)— matemático russo

[7] Karl Hermann Amandus Schwarz (1845–1921)— matemático alemão

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\delta(\|f_0\| + \|g_0\|) + \delta^2 < \varepsilon,$$

então

$$|\langle f, g\rangle - \langle f_0, g_0\rangle| < \varepsilon$$

para

$$\|f - f_0\| < \delta \;\text{ e }\; \|g - g_0\| < \delta. \blacksquare$$

Se Ω_1 e Ω_2 são subconjuntos de L^2, uma transformada T de Ω_1 para Ω_2 chama-se isometria se para qualquer par de elementos deste domínio $\langle Tf, Tg\rangle = \langle f, g\rangle$. Uma transformada T chama-se unitária se os seus domínios coincidem com $L^2(\mathbb{R})$ e se $\langle Tf, Tg\rangle = \langle f, g\rangle$ para qualquer $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

Se S é um subconjunto denso de $L^2(\mathbb{R})$ e $f \in L^2(\mathbb{R})$, então existe uma sucessão f_n de funções pertencentes a S, tal que $\|f - f_n\|_{L^2} \to 0$, quando $n \to \infty$.

Definição 2.7. *Para $f \in L^2(\mathbb{R})$. Defina-se f_n tal que*

$$f_n(x) := \begin{cases} f(x) & se \quad |x| \leqslant n \\ 0 & se \quad |x| > n \end{cases}.$$

Definição 2.8. *Para $f \in L^2(\mathbb{R})$ denote-se por $\mathcal{F}[f(x)](\alpha)$, a Transformada de Fourier de f, definida por*

$$\mathcal{F}[f(x)](\alpha) := \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} f(x) e^{i\alpha x} dx, \tag{2.16}$$

onde l.i.m *denota o limite da média em $L^2(\mathbb{R})$, ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{F}[f] - \mathcal{F}[f_n]\|_{L^2} \to 0.$$

A definição deixa claro que a Transformada de Fourier $f \mapsto \mathcal{F}[f](\alpha)$ é de $L^2(\mathbb{R})$ para $L^2(\mathbb{R})$ e é linear, isto é, se $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ e $\lambda, \gamma \in \mathbb{C}$, então

$$\mathcal{F}[\lambda f + \gamma g] = \lambda \mathcal{F}[f] + \gamma \mathcal{F}[g].$$

Teorema 2.9. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, então*

$$\|f\|_{L^2}^2 = \|\mathcal{F}[f]\|_{L^2}^2.$$

Em particular, temos que a transformada de Fourier de f pertence a $L^2(\mathbb{R})$.

Teorema 2.10 (Relação de Parseval[8])**.** *Se* $f \in L^2(\mathbb{R})$*, então*

$$\|f\|_{L^2} = \|\mathcal{F}[f]\|_{L^2}. \tag{2.17}$$

Demonstração: Seja $f \in L^2(\mathbb{R})$. Então $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathcal{F}[f_n] - \mathcal{F}[f]\|_{L^2} = 0$. Explorando o facto de que $|\|f\|_{L^p} - \|g\|_{L^p}| \leqslant \|f - g\|_{L^p}$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{F}[f_n]\|_{L^2} = \|\mathcal{F}[f]\|_{L^2}. \tag{2.18}$$

Da definição de f_n é evidente que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}. \tag{2.19}$$

Dado que $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, pelo Teorema 2.9,

$$\|f_n\|_{L^2} = \|\mathcal{F}[f_n]\|_{L^2}. \tag{2.20}$$

Usando (2.18), (2.19) e (2.20), temos

$$\|f\|_{L^2} = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^2} = \lim_{n\to\infty} \|\mathcal{F}[f_n]\|_{L^2} = \|\mathcal{F}[f]\|_{L^2},$$

ou seja,

$$\|f\|_{L^2} = \|\mathcal{F}[f]\|_{L^2}.\blacksquare$$

Teorema 2.11. *Se* $f, g \in L^2(\mathbb{R})$*. Então*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f(x)]\overline{\mathcal{F}[g(x)]}dx,$$

ou seja,

$$\langle f, g\rangle = \langle \mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g]\rangle.$$

Demonstração: Pelo Teorema de Parseval,

$$\|\mathcal{F}[f] + \mathcal{F}[g]\|_{L^2}^2 = \|f + g\|_{L^2}^2.$$

Deste modo,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \langle \mathcal{F}[f(x)] + \mathcal{F}[g(x)]\rangle\langle \mathcal{F}[f(x)] + \mathcal{F}[g(x)]\rangle dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \langle f(x) + g(x)\rangle\langle f(x) + g(x)\rangle dx.$$

[8]Marc-Antoine Parseval (1755–1836)— matemático francês

Efectuando algumas operações elementares em ambos os membros, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} \left(|\mathcal{F}[f(x)]|^2 + |\mathcal{F}[g(x)]|^2 + \mathcal{F}[f(x)]\overline{\mathcal{F}[g(x)]} + \overline{\mathcal{F}[f(x)]}\mathcal{F}[g(x)] \right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(|f(x)|^2 + |g(x)|^2 + f(x)\overline{g(x)} + \overline{f(x)}g(x) \right) dx.$$

De novo, pelo Teorema de Parseval,

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}[f(x)]|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}[g(x)]|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx.$$

Por isso

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f(x)]\overline{\mathcal{F}[g(x)]} dx + \int_{\mathbb{R}} \overline{\mathcal{F}[f(x)]}\mathcal{F}[g(x)] dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)} + \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}g(x) dx. \tag{2.21}$$

Substituindo g por ig e $\mathcal{F}[g(x)]$ por $i\mathcal{F}[g(x)]$ em (2.21) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f(x)]\overline{\mathcal{F}[ig(x)]} dx + \int_{\mathbb{R}} \overline{\mathcal{F}[f(x)]}\mathcal{F}[ig(x)] dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{(ig(x))} dx + \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}(ig(x)) dx,$$

ou

$$-i\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f(x)]\overline{\mathcal{F}[g(x)]} dx + i\int_{\mathbb{R}} \overline{\mathcal{F}[f(x)]}\mathcal{F}[g(x)] dx = -i\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)} dx + i\int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}g(x) dx. \tag{2.22}$$

Dividindo (2.22) por $-i$ e somando com (2.21) fica demonstrado o teorema.■

Teorema 2.12. *Seja $f \in L^2(\mathbb{R})$. Para $n \in \mathbb{N}$ defina-se*

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & se \quad |x| \leqslant n \\ 0 & se \quad |x| > n \end{cases}.$$

Então $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{F}[f_n] \in L^2(\mathbb{R})$. Além disso, quando $n \to \infty$, $\mathcal{F}[f_n] \in L^2(\mathbb{R})$ converge em média $L^2(\mathbb{R})$ para uma função f pertencente a $L^2(\mathbb{R})$.

Teorema 2.13. *Se $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, então*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathcal{F}[g(x)] dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f(x)]g(x) dx.$$

Demonstração: Defina-se f_n e g_n tais que

$$f_m(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad |x| \leqslant m \\ 0 & \text{se} \quad |x| > m \end{cases} \quad \text{e} \quad g_n(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se} \quad |x| \leqslant n \\ 0 & \text{se} \quad |x| > n \end{cases}.$$

Para quaisquer números positivos m e n, temos

$$\mathcal{F}[f_m(x)](\alpha) = \int_{\mathbb{R}} f_m(x)e^{i\alpha x}dx, \tag{2.23}$$

$$\mathcal{F}[g_n(x)](\alpha) = \int_{\mathbb{R}} g_n(x)e^{i\alpha x}dx. \tag{2.24}$$

Multiplicando (2.23) por $g_n(\alpha)$ e integrando obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f_m(x)]g_n(\alpha)d\alpha = \int_{\mathbb{R}} g_n(\alpha)d\alpha \int_{\mathbb{R}} f_m(x)e^{i\alpha x}dx.$$

Pelo Teorema 2.12, f_m e f_n pertencem a $L^1(\mathbb{R})$. Por isso os integrais iterados do segundo membro são convergentes. Pelo Teorema de Fubini e a forma específica das funções f_n e g_n, podemos trocar a ordem de integração no seguinte sentido:

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f_m(x)](\alpha)g_n(\alpha)d\alpha = \int_{\mathbb{R}} f_m(\alpha)d\alpha \int_{\mathbb{R}} g_n(x)e^{i\alpha x}dx$$

ou

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f_m(x)](\alpha)g_n(\alpha)d\alpha = \int_{\mathbb{R}} f_m(\alpha)\mathcal{F}[g_n(x)](\alpha)d\alpha. \tag{2.25}$$

É sabido que

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_{L^2} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \|\mathcal{F}[g_n] - \mathcal{F}[g]\|_{L^2} = 0.$$

Considerando $n \to \infty$ em (2.25), teremos

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f_m(x)](\alpha)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f_m(\alpha)\mathcal{F}[g(x)](\alpha)d\alpha.$$

De novo, considerando agora $m \to \infty$, encontraremos

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f(x)](\alpha)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(\alpha)\mathcal{F}[g(x)](\alpha)d\alpha. \blacksquare$$

Teorema 2.14. *Seja $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $g = \overline{\mathcal{F}[f]}$. Então*

$$f = \overline{\mathcal{F}[g]}.$$

Demonstração: Temos que

$$\left\| f - \overline{\mathcal{F}[g]} \right\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} \left[f(x) - \overline{\mathcal{F}[g(x)]} \right] \left[\overline{f(x)} - \mathcal{F}[g(x)] \right] dx,$$

então

$$\left\| f - \overline{\mathcal{F}[g]} \right\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 - \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathcal{F}[g(x)]dx - \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)\mathcal{F}[g(x)]}dx + \|\mathcal{F}[g]\|_{L^2}^2. \tag{2.26}$$

Tendo em conta que $g = \overline{\mathcal{F}[f]}$, pelo Teorema 2.10 e 2.13 temos

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathcal{F}[g(x)]dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f(x)]g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f(x)]\overline{\mathcal{F}[f(x)]}dx = \|\mathcal{F}[f]\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2. \tag{2.27}$$

Adicionalmente,

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)\mathcal{F}[g(x)]}dx = \|f\|_{L^2}^2. \tag{2.28}$$

Finalmente, pelo Teorema 2.10 e pela hipótese, vem

$$\|\mathcal{F}[g]\|_{L^2}^2 = \|g\|_{L^2}^2 = \|\mathcal{F}[f]\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2. \tag{2.29}$$

Das expressões de (2.26) à (2.29), concluímos que

$$\left\| f - \overline{\mathcal{F}[g]} \right\|_{L^2}^2 = 0.\blacksquare$$

Corolário 2.4 (Inversa da Transformada de Fourier)**.** *Se* $\in L^2(\mathbb{R})$*. Então*

$$f(x) := \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} \mathcal{F}[f(x)](\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha.$$

Demonstração: Seja $g = \overline{\mathcal{F}[f]}$. Então, pelo Teorema 2.14, $\overline{f(x)} = \mathcal{F}[g(x)]$, que é

$$\overline{f(x)} = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} g(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} \overline{\mathcal{F}[f(x)](\alpha)}e^{i\alpha x}d\alpha. \tag{2.30}$$

Fazendo o conjugado na identidade (2.30), temos:

$$f(x) = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} \mathcal{F}[f(x)](\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha.\blacksquare$$

Teorema 2.15 (Plancherel[9]). *Se $f \in L^2(\mathbb{R})$. Então existe $\mathcal{F}[f] \in L^2(\mathbb{R})$ tal que*

$$\mathcal{F}[f(x)](\alpha) = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} f(x)e^{i\alpha x}dx,$$

$$f(x) = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} \mathcal{F}[f(x)](\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha$$

e

$$\|f\|_{L^2} = \|\mathcal{F}[f]\|_{L^2}.$$

De tal modo que, para qualquer $f \in L^2(\mathbb{R})$ pode ser expressado como $f = \mathcal{F}[g]$ para um único $g \in L^2(\mathbb{R})$.

2.3 Aplicações da Transformada do Fourier

Nesta secção, a ideia fundamental é trazer algumas aplicações da Transformada de Fourier na resolução de Equações Diferenciais com Derivadas Parciais com várias condições de fronteira.

2.3.1 Problemas de Cauchy para a Equação de Calor

O problema da condução do calor em uma barra infinita consiste em determinar uma função $u : \mathbb{R} \times [0, \infty)$ que satisfaz a equação do calor

$$u_t = \eta u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{2.31}$$

onde η é o coeficiente de difusão térmica e

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{2.32}$$

é a condição inicial. As equações (2.31)-(2.32) formam o chamado problema de Cauchy ou problema de valor inicial.

O processo de resolução da equação do calor vem exposto a seguir:

(1) Supondo que o valor inicial seja uma função de $S(\mathbb{R})$, e que a solução exista e que seja uma função de $S(\mathbb{R})$, para cada $t > 0$ fixo, obteremos a forma dessa solução.

(2) A seguir, olhamos para essa expressão como uma candidata à solução geral, e procuramos determinar condições sobre f que assegurem ser a expressão dada, solução do problema.

[9]Michel Plancherel (1885–1967)— matemático suíço

Processo de resolução: Para cada $t > 0$ fixo, aplicamos a Transformada de Fourier (com relação a x) na equação (2.31); designando por

$$U(\alpha, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} u(x,t) e^{i\alpha x} dx \tag{2.33}$$

obtemos, equação (2.31),

$$U_t(\alpha, t) = -\eta\alpha^2 U(\alpha, t), \tag{2.34}$$

onde usamos a Proposição 2.4, e o facto do integral em (2.33) convergir uniformemente. Agora, para cada α fixo, a equação (2.34) é uma Equação Diferencial Ordinária em t, que pode ser integrada imediatamente:

$$U(\alpha, t) = Ce^{-\eta\alpha^2 t},$$

onde a constante de integração é determinada usando-se a condição inicial (2.32):

$$C = U(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\alpha x} dx = \mathcal{F}[f](\alpha).$$

Assim, obtemos que, para cada $t > 0$ fixo, $U(\alpha, t)$ é

$$U(\alpha, t) = \mathcal{F}[f](\alpha) e^{-\eta\alpha^2 t}.$$

Como

$$e^{-i\eta^2 t} = \mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\eta t}} e^{-x^2/4\eta t}\right],$$

podemos usar o Teorema 2.4 sobre a Transformada de Fourier de uma convolução de duas funções pertencentes a $S(\mathbb{R})$, para obter

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\eta t}} e^{-x^2/4\eta t} * f(x),$$

ou seja,

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\eta\pi t}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(y) e^{-(x-y)^2/4\eta t} dy, \tag{2.35}$$

essa é a solução candidata procurada.

Prosseguimos, agora, para a segunda parte do processo, já apresentando um resultado que fornece condições suficientes em f para que (2.35) seja solução do problema de Cauchy em (2.31)-(2.32).

Teorema 2.16. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua e limitada. Então, a expressão (2.35) define uma função $u(x,t) \in C^\infty$ no semiplano $t > 0$, que satisfaz a* *equação (2.31). E, além disso, a condição inicial (2.32) é satisfeita no sentido seguinte:*

$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)].$$

Em particular, se f for contínua,

$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = f(x).$$

Teorema 2.17 (Unicidade)**.** *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for limitada e contínua, então o problema de Cauchy dado em (2.31)-(2.32) tem uma única solução contínua e limitada em $t \geqslant 0$.*

2.3.2 Condução do Calor numa Barra Semi-infinita

O problema é a determinação de $u(x,t)$ tal que

$$\begin{aligned} u_t &= \eta u_{xx}, & x>0, \quad t>0,\\ u(0,t) &= h(t), & t>0,\\ u(x,0) &= f(x), & x>0. \end{aligned} \tag{2.36}$$

No caso homogéneo, $h(t) = 0$, o problema pode ser resolvido do seguinte modo. Estende-se f, para $x < 0$, como uma função ímpar e aplique-se o processo aplicado na secção anterior. Designando esta extensão por $\tilde{f}$, a solução de (2.36) será

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\eta\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(y) e^{-(x-y)/4\eta t} dy,$$

supondo que f seja, digamos, contínua e limitada. Observe que a condição de fronteira, $u(0,t) = 0$ é, de facto, satisfeita.

Agora, no caso não-homogéneo, o método de extensão não funciona. Será necessário considerar a Transformação-seno de Fourier:

$$F_s[f](\alpha) := \int_0^\infty f(x) \sin \alpha x dx$$

que esta bem definida se $f \in L^1 \in (0,\infty)$. É fácil provar que, se estendermos f, como função ímpar, e denominarmos $\hat{f}$ a sua extensão, teremos

$$F_s(\alpha) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2i} \mathcal{F}[\hat{f}](\alpha).$$

Pode-se também provar, sem dificuldades, que $\mathcal{F}[\hat{f}](\alpha)$ é uma função ímpar. Usando esse facto e a inversa de Fourier, obtemos

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F_s(\alpha) \sin(\alpha x) dx, \quad x > 0, \tag{2.37}$$

supondo que f é contínua. A identidade (2.37) é a inversa da transformada-seno e é de grande importância na resolução da equação (2.36) com $h(t) = A$, onde A é uma constante. Fazendo

$$U_s(\alpha, t) = \int_0^\infty u(x,t) \sin(\alpha x) dx$$

e, assumindo que a solução de (2.36) seja uma função do espaço $L^1(0, \infty)$, para cada $t > 0$ e que, além disso,

$$\lim_{x \to \infty} (x,t) = \lim_{x \to 0} u_x(x,t) = 0, \tag{2.38}$$

obtemos, sucessivamente,

$$\frac{\partial U_s(x,t)}{\partial t} = \int_0^\infty u_t(x,t) \sin(\alpha x) dx = \eta \int_0^\infty u_{xx}(x,t) \sin(\alpha x) dx$$

e, integrando por partes, usando (2.38) e a condição de fronteira

$$\frac{\partial U_s(\alpha,t)}{\partial t} = \eta \alpha A - \eta \alpha^2 U_s(\alpha, t). \tag{2.39}$$

A condição inicial de (2.36) reduz-se a

$$U_s(\alpha, 0) = F_s(\alpha),$$

e, portanto, a Equação Diferencial Ordinária (2.39), com essa condição inicial tem como solução

$$U_s(\alpha,t) = F_s\left(e^{-\eta\alpha^2 t}\right) + A\alpha^{-1}\left(1 - e^{-\eta\alpha^2 t}\right)$$

e, daí, usando (2.37), obtemos a expressão de u.

Para resolver equações com outras condições de fronteira, por exemplo

$$u_x(0,t) + ku(0,t) = 0,$$

usamos o seguinte artifício. A função

$$v(x,t) = u_x(x,t) + ku(x,t)$$

também é solução da Equação de Calor, se u for. Logo, uma equação da forma

$$\begin{aligned} u_t &= \eta u_{xx} && x > 0, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) + ku(0,t) &= h(t) && \qquad\quad t > 0, \\ u(x,0) &= f'(x) + kf(x) && x > 0, \end{aligned}$$

transforma-se numa outra equação da forma

$$\begin{aligned} v_t &= \eta v_{xx}, \\ v(0,t) &= h(t), \\ v(x,0) &= f'(x) + kf(x), \end{aligned}$$

o qual pode ser resolvido pelas técnicas anteriores. Uma vez obtido v, podemos calcular u, integrando a equação diferencial que liga u e v, e obtemos

$$u(x,t) = -e^{-kx} \int_x^\infty v(y,t) e^{ky} dy,$$

bastando para isso supor, por exemplo, que $e^{kx}u(x,t) \to 0$, quando $x \to \infty$.

Capítulo 3

Generalização e Consequências da Transformada de Fourier

A Transformada de Fourier Fracionária (TFFr) é uma generalização da Transformada de Fourier clássica (TF). Recentemente encontrou aplicações em várias áreas, incluindo processamento de sinal e óptica. Muitas propriedades dessa transformação já são conhecidas. A título de exemplo, existem já extensões do teorema de produto e da convolução para a Transformada de Fourier Fracionária. Neste capítulo, a ideia fundamental é apresentar extensões destes teoremas, lidar com a Transformação de Fourier Fracionária de um produto e de uma convolução de duas funções.

Os resultados que serviram de suporte para este capítulo foram obtidos, essencialmente, dos trabalhos de [2], [3], [10], [12], [13] e [19].

3.1 Teoremas sobre a Transformada de Fourier Fracionária de um Produto e de uma Convolução

Definição 3.1. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$, α um parâmetro real e k uma constante inteira. Chama-se a Transformada de Fourier Fracionária ao operador integral $\mathcal{F}_\alpha$ definido por*

$$\mathcal{F}_\alpha[f](u) := \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1 - i\cot\alpha}{2\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i[(x^2+u^2)/2]\cot\alpha - ixu\csc\alpha} dx & se \quad \alpha \neq k\pi \\ f(u) & se \quad \alpha = 2k\pi \\ f(-u) & se \quad \alpha = (2k+1)\pi. \end{cases}$$

O operador $\mathcal{F}_\alpha$ apresenta algumas propriedades:

(a) Unitariedade: $\mathcal{F}_{-\alpha}[f](u) = \mathcal{F}_\alpha[f](-u)$;

(b) Aditividade: $\mathcal{F}_\alpha[\mathcal{F}_\beta[f]](u) = \mathcal{F}_{\alpha+\beta}[f](u)$;

(c) Redução ao operador identidade: para $\alpha = 2k\pi$, temos $\mathcal{F}_{2k\pi}[f(x)](u) = f(u)$; em geral
$\mathcal{F}_{-\alpha}[\mathcal{F}_{\alpha}[f]](u) = f(u)$;

(d) Redução a Transformada de Fourier clássica se $\alpha = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$;

(e) Conservação da simetria: A TFFr de uma função par (ímpar) é uma função par (ímpar);

(f) Identidade de Parseval: $\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_{\alpha}[f(x)](u)\overline{\mathcal{F}_{\alpha}[g(x)](u)}dx$;

(g) A TFFr da função f com a substituição de variável $x \mapsto x + y$ é

$$\mathcal{F}_{\alpha}[f(x+y)](u) = \mathcal{F}_{\alpha}[f(x)](u + y\cos\alpha)e^{i(u^2/2)\sin\alpha\cos\alpha + iuy\sin\alpha};$$

(h) A TFFr da função f com a substituição de variável $x \mapsto ax$ é

$$\mathcal{F}_{\alpha}[f(ax)](u) = \sqrt{\frac{1 - i\cot\alpha}{a^2 - i\cot\alpha}}e^{i(u^2/2)\cot\alpha\left(1 - \frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}\right)}\mathcal{F}_{\beta}[f(x)]\left(\frac{u\sin\beta}{a\sin\beta}\right),$$

onde $\mathcal{F}_{\beta}[f](u)$ é TFFr de f com ângulo β, tal que $\cot\alpha = a^2\cot\beta$;

(i) A TFFr de $g(x) = (ix)^{-m}f(x)$ é

$$\mathcal{F}_{\alpha}[g](u) = (\sin\alpha)^{-m}e^{-i(u^2/2)\cot\alpha}\int\limits_{-\infty}^{u} e^{i(x^2/2)\cot\alpha}\mathcal{F}_{\alpha}[f(x)](u)dx;$$

(j) A TFFr da função derivada, isto é, de f' e

$$\mathcal{F}_{\alpha}[f'(x)](u) = [\mathcal{F}_{\alpha}[f(x)](u)]'\cos\alpha + iu\mathcal{F}_{\alpha}[f(x)](u)\sin\alpha;$$

(k) A TFFr de uma integração, isto é, de $g(x) = \int\limits_{c}^{x} f(t)dt$ é

$$\mathcal{F}_{\alpha}[g](u) = \sec\alpha e^{i(u/2)\tan\alpha}\int\limits_{c}^{u} e^{-i(x^2/2)\tan\alpha}\mathcal{F}_{\alpha}[f(x)](u)dx;$$

(l) A TFFr da função Gaussiana $f(x) = e^{-(a_k - ia_j)x^2/2}$ é também uma função Gaussiana, dada por

$$\mathcal{F}_{\alpha}[f(x)](u) = \sqrt{\frac{1 - i\cot\alpha}{a_k - i(a_j + \cot\alpha)}}e^{-(b_k - ib_j)u^2/2},$$

onde

$$b_k = \frac{a_k}{\sin^2\alpha[a_k^2 + (a_j + \cot\alpha)^2]\sqrt{[1 + (a_j + \cot\alpha)^2]}}$$

$$b_j = \frac{[(a_k - ia_j)^2 - 1]\cot\alpha + a_j(\cot^2\alpha - 1)}{a_k^2 + (a_j + \cot\alpha)^2}.$$

De agora em diante, limitaremos a nossa atenção a $\mathcal{F}_\alpha$ para o caso $\alpha \neq k\pi$.

Teorema 3.1. *Seja dada a Transformada de Fourier Fracionária na forma*

$$\mathcal{F}_\alpha[f](u) := \int_{\mathbb{R}} f(x)K_\alpha(x,u)dx,$$

onde

$$K_\alpha(x,u) = \sqrt{\frac{1 - i\cot\alpha}{2\pi}}e^{i[(x^2+u^2)/2]\cot\alpha - ixu\csc\alpha}, \quad \alpha \neq k\pi, \tag{3.1}$$

é o núcleo do operador integral. Então,

1. $K_\alpha(x,u) = K_\alpha(u,x)$ *(Simetria);*
2. $K_{-\alpha}(x,u) = \overline{K_\alpha(x,u)}$ *(Conjugado complexo);*
3. $K_\alpha(-x,u) = K_\alpha(x,-u)$ *(Simetria pontual);*
4. $\int_{\mathbb{R}} K_\alpha(x,u)K_\beta(u,z)du = K_{\alpha+\beta}(x,z)$ *(Aditividade).*

Observação 3.1. A propriedade da aditividade (b) na Definição (3.1), pode ser demonstrada com maior facilidade representando a TFFr na forma exponencial, isto é, $\mathcal{F}_\alpha = e^{i\alpha\mathcal{H}} = e^{ia}$, onde $\mathcal{H}$ é o operador de Hamilton dado por $\mathcal{H} = -\dfrac{\mathcal{D}^2 + \mathcal{U}^2 + \mathcal{I}}{2}$, por sua vez, $\mathcal{U}$ é o operador multiplicador dado por $(\mathcal{U}f)(x) := ixf(x) = (\mathcal{F}\mathcal{D}\mathcal{F}^{-1})\, f(x)$ (vide [1], pag. 2).

Tabela 3.1:

	Transformada de Fourier Fracionária de Algumas Funções Elementares	
	$f(u)$	$\mathcal{F}_\alpha[f](u)$
1	$\delta(x-u)$	$\sqrt{\frac{1-i\cot\alpha}{2\pi}}e^{(i/2)(x^2\cot\alpha - 2xu\csc\alpha + u^2\cot\alpha)}$ se $\alpha \neq k\pi$
2	1	$\sqrt{\frac{1+i\tan\alpha}{2\pi}}e^{-i(u^2/2)\tan\alpha}$ se $\alpha \neq (2k+1)\pi$
3	$e^{(i/2)(\lambda x^2 + 2\gamma x)}$	$\sqrt{\frac{1+i\tan\alpha}{1+\lambda\tan\alpha}}e^{i\frac{x^2(\lambda-\tan\alpha)+2\gamma x\sec\alpha-\gamma^2\tan\alpha}{2(1+\lambda\tan\alpha)}}$ se $\alpha - \frac{2}{\pi}\arctan\lambda \neq (2k+1)\pi$
4	$e^{(-i/2)(\lambda x^2 + 2\gamma x)}$	$\sqrt{\frac{1-i\cot\alpha}{\lambda - i\cot\alpha}}e^{\frac{i}{2}\cot\alpha\frac{x^2(\lambda^2-1)+2\lambda\gamma x\sec\alpha+u^2}{\lambda^2+\cot^2\alpha}}e^{-\frac{1}{2}\csc^2\alpha\frac{\lambda u^2+2\gamma x\cos\alpha-\lambda\gamma^2\sin^2\alpha}{\lambda^2+\cot^2\alpha}}$, $\lambda > 0$
5	$\phi_n(u)$	$e^{-i\alpha n}\phi_n(u)$
6	$e^{-x^2/2}$	$e^{-x^2/2}$

Na tabela acima, λ, $\gamma \in \mathbb{R}$ e $\phi_n(u)$ é a função de Hermite. Em (4), condição $\lambda > 0$ visa garantir a convergência

3.1.1 Transformada de Fourier Fracionária de um Produto

Consideremos duas funções $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{W}$, onde $\mathcal{W}$ denota a álgebra de Wiener. Seja

$$z(x) = f(x)g(x).$$

A função z pertence a $L^1(\mathbb{R})$ e a TFFr é dada por
$\mathcal{F}_\alpha[z(x)][u]$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{1-i\cot\alpha}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)e^{i[(x^2+u^2)/2]\cot\alpha - ibxu\csc\alpha}dx \\
&= \sqrt{\frac{1-\cot\alpha}{2\pi}} e^{i(u^2/2)\cot\alpha} \int_{\mathbb{R}} \left[\sqrt{\frac{1+i\cot\alpha}{2\pi}} e^{-i(x^2/2)\cot\alpha} \right. \\
&\quad \left. \times \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_\alpha[f(x)](v)e^{-i(v^2/2)\cot\alpha + ivx\sec\alpha}dv\right] g(x)e^{i(x^2/2)\cot\alpha - ixu\sec\alpha}dx \\
&= \frac{|\csc\alpha|}{2\pi} e^{i(u^2/2)\cot\alpha} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_\alpha[f(x)](v)e^{-i(v^2/2)\cot\alpha} \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-i(u-v)x\csc\alpha}dxdv \\
&= \frac{|\csc\alpha|}{\sqrt{2\pi}} e^{i(u^2/2)\cot\alpha} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_\alpha[f(x)](v)e^{-i(v^2/2)\cot\alpha} \mathcal{F}[g(x)]((u-v)\csc\alpha)dv, \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

onde $\mathcal{F}$ denota a Transformada de Fourier clássica. A última identidade dá o resultado procurado: a TFFr do produto de f e g pode ser obtida através da multiplicação da TFFr de f pela função *chirp*, convolvida com a Transformada de Fourier de g escalada e mais uma vez, multiplicando pela função *chirp* e pelo factor escala.

Outras formas usuais do resultado (3.2) podem ser obtidas através de substituição de variáveis. Primeiro, fazemos a substituição de variáveis $v \mapsto u - v$, resultando em

$$\mathcal{F}_\alpha[z(x)](u) = \frac{|\csc\alpha|}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_\alpha[f(x)](u-v)\mathcal{F}[g(x)](v\csc\alpha)e^{i[uv-(u^2/2)]\cot\alpha}dx. \qquad (3.3)$$

Podemos fazer uma substituição adicional $v \mapsto v\sin\alpha$ em (3.3), resultando em

$$\mathcal{F}_\alpha[z(x)](u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_\alpha[f(x)](u-v\sin\alpha)\mathcal{F}[g(x)](v)e^{-i(v^2/2)\sin\alpha\cos\alpha + iuv\cos\alpha}dv. \qquad (3.4)$$

As identidades (3.2)-(3.4) são válidas se α não for múltiplo de π.

3.1.2 Transformada de Fourier Fracionária de uma Convolução

Consideremos, mais uma vez, as funções $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{W}$, onde $\mathcal{W}$ álgebra de Wiener. Recordamos que a convolução clássica de f e g é dada por

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy. \tag{3.5}$$

Assim sendo, a TFFr da convolução é

$$\mathcal{F}[f * g](\omega) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f(x)](\omega)\mathcal{F}[g(x)](\omega),$$

onde por sua vez $\mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g] \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{W}$. Sabemos que $\mathcal{F}_\alpha[\mathcal{F}[f*g]]$ é a TFFr de $f*g$ com ângulo $\alpha - \frac{\pi}{2}$. Valendo-se da identidade (3.2), tendo em conta o produto (3.5) e fazendo a substituição de variáveis $\alpha - \frac{\pi}{2} \mapsto \alpha$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_\alpha[\mathcal{F}[f * g]](u) &= \mathcal{F}_{\alpha-\frac{\pi}{2}}[f * g] \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}|\csc\alpha|}{\sqrt{2\pi}} e^{i(u^2/2)\cot\alpha} \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_\alpha[\mathcal{F}[f]](v)\mathcal{F}[\mathcal{F}[g]]((u-v)\csc\alpha)e^{-i(v^2/2)\cot\alpha}dv. \\
&= |\csc\alpha| e^{i(u^2/2)\cot\alpha} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_{\alpha-\frac{\pi}{2}}[f](v)g((u-v)\csc\alpha)e^{-i(v^2/2)\cot\alpha}dv \\
&= |\sec\alpha| e^{-i(u^2/2)\tan\alpha} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_\alpha[f]g((u-v)\sec\alpha)e^{i(v^2/2)\tan\alpha}dv.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

A TFFr de uma convolução pode, portanto, ser obtida pela multiplicação da TFFr de f pela função *chirp*, convolvida com a Transformada de Fourier inversa de g escalada, multiplicando pela função *chirp* e pelo factor escala.

A expressão (3.6) pode tomar outras formas, que podem ser consideradas úteis. A primeira é obtida fazendo a substituição de variáveis $v \mapsto u - v$, resultando

$$\mathcal{F}_\alpha[\mathcal{F}[f * g]](u) = |\sec\alpha| \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_\alpha[f(x)](v-u)g(v\sec\alpha)e^{i[(v^2-2uv)/2]\tan\alpha}dv. \tag{3.7}$$

A segunda forma é obtida fazendo-se a substituição $v\sec\alpha \mapsto v$ em (3.7). Daí,

$$\mathcal{F}_\alpha[\mathcal{F}[f * g]](u) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_\alpha[f(x)](u - v\cos\alpha)g(v)e^{i(v^2/2)\sin\alpha\cos\alpha - iuv\sin\alpha}dv. \tag{3.8}$$

De acrescentar que as identidades (3.6)-(3.8) são válidas se $\alpha - \frac{\pi}{2}$ não for múltiplo de π.

3.1.3 Outras Representações Generalizadas para Transformada de Fourier Fracionária de um Produto e de uma Convolução

Nesta subsecção vamos deduzir outras formas para (3.3), (3.4), (3.6) e (3.8) que não são óbvias de identificar neste momento. Para obter novas representações generalizadas da TFFr de um produto, consideramos, mais uma vez

$$z(x) = f(x)g(x),$$

pressupondo que $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{W}$ e, β e γ são tais que

$$\cot\beta + \cot\gamma = \cot\alpha.$$

Então,

$$\mathcal{F}_\alpha[z(x)](u) = \sqrt{\frac{1-i\cot\alpha}{2\pi}} e^{i(u^2/2)\cot\alpha} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i(x^2/2)\cot\beta} g(x) e^{i(x^2/2)\cot\gamma} e^{-ixu\csc\alpha} dx.$$

Fazendo o uso do Teorema da Convolução, o integral do segundo membro da última expressão pode ser representado na forma

$$\mathcal{F}_\alpha[z(x)](u) = \sqrt{\frac{1-\cot\alpha}{2\pi}} e^{i(u^2/2)\cot\alpha} (A * B)(u\csc\alpha),$$

onde

$$\begin{aligned}
A(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i(x^2/2)\cot\beta - ix\omega} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i(x^2/2)\cot\beta - ix(\omega\sin\beta)\csc\beta} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-i\cot\beta}} e^{-i(\omega^2/2)\sin^2\beta\cot\beta} \mathcal{F}_\beta[f(x)](\omega\sin\beta) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-i\cot\beta}} e^{-i(\omega^2/2)\sin\beta\cos\beta} \mathcal{F}_\beta[f(x)](\omega\sin\beta),
\end{aligned}$$

e

$$B(u\csc\alpha - v) = \frac{1}{\sqrt{1-i\cot\beta}} e^{-i[(u\csc\alpha - v)^2/2]\sin\gamma\cos\gamma} \mathcal{F}_\gamma[f(x)]((u\csc\alpha - v)\sin\gamma).$$

Contudo,

$$\mathcal{F}_\alpha[z(x)](u) = \frac{\sqrt{1-i\cot\alpha}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-i\cot\beta}\sqrt{1-i\cot\gamma}} e^{i(u^2/2)\cot\alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(v^2/2)\sin\beta\cos\beta} \mathcal{F}_\beta[f(x)](v\sin\beta)$$

$$\times e^{-[(u\csc\alpha - v)^2/2]\sin\gamma\cos\gamma}\mathcal{F}_\gamma[g(x)]((u\csc\alpha - v)\sin\gamma)dv,$$

ou também,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\alpha[z(x)](u) &= \frac{\sqrt{1 - i\cot\alpha}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1 - i\cot\beta}\sqrt{1 - i\cot\gamma}}e^{i(u^2/2)[(\sin\alpha\cos\alpha - \sin\gamma\cos\gamma)/\sin^2\alpha]} \\ &\times \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_\beta[f(x)](v\sin\beta)\mathcal{F}_\gamma[g(x)]((u\csc\alpha - v)\sin\gamma) \\ &\times e^{-i(v^2/2)(\sin\beta\cos\beta + \sin\gamma\cos\gamma) + iuv\sin\gamma\cos\gamma/\sin\alpha}dv. \qquad (3.9)\end{aligned}$$

Este resultado é válido para α, β e γ não múltiplos de π.

A identidade (3.9) goza de dois casos particulares. Se $\alpha = \beta$ e $\gamma = -\dfrac{\pi}{2}$, obtemos

$$\mathcal{F}_\alpha[z(x)](u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i(u^2/2)\cot\alpha}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_\alpha[f(x)](v\sin\alpha)\mathcal{F}[g(x)](u\csc\alpha - v)e^{-i(v^2/2)\sin\alpha\cos\alpha}dv,$$

que é a identidade (3.2) com a substituição de variáveis $v \mapsto v\sin\alpha$. Se $\alpha = \gamma$ e $\beta = \dfrac{\pi}{2}$, então a expressão (3.9) tornar-se-a

$$\mathcal{F}_\alpha[z(x)](u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f(x)](v)\mathcal{F}_\alpha[g(x)](u - v\sin\alpha)e^{-(v^2/2)\sin\alpha\cos\alpha + iuv\cos\alpha}dv,$$

que é a equação (3.4) com f e g invertendo os seus papeis.

Agora, fazendo as substituições $\alpha \mapsto \alpha - \dfrac{\pi}{2}$, $\beta \mapsto \beta - \dfrac{\pi}{2}$ e $\gamma \mapsto \gamma - \dfrac{\pi}{2}$, os ângulos α, β e γ ficam ligados pela relação $\tan\alpha = \tan\beta + \tan\gamma$. Por conseguinte, a identidade (3.6) toma a forma

$$\mathcal{F}_\alpha[\mathcal{F}[f * g]](u) = \frac{\sqrt{1 + i\tan\alpha}}{\sqrt{1 + i\tan\beta}\sqrt{1 + i\tan\gamma}}e^{-(u^2/2)(\sin\alpha\cos\alpha - \sin\gamma\cos\gamma)/\cos^2\alpha}\times$$

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_\beta[f(x)](v\cos\beta)\mathcal{F}_\gamma[g(x)]((u\sec\alpha - v)\cos\gamma)e^{i(v^2/2)(\sin\beta\cos\beta + \sin\gamma\cos\gamma) - iuv\cos\cos\gamma/\cos\alpha}dv. \qquad (3.10)$$

Como (3.9), a identidade (3.10) tem dois casos particulares notáveis. Se $\alpha = \beta$, $\gamma = 0$, teremos

$$\mathcal{F}_\alpha[\mathcal{F}[f * g]](u) = e^{i(u^2/2)\tan\alpha}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_\alpha[f(x)](u\cos\alpha)g(u\sec\alpha - v)e^{i(v^2/2)\sin\alpha\cos\alpha}dv,$$

que é a equação (3.6) com a substituição de variáveis $v \mapsto v\cos\alpha$. Se $\alpha = \gamma$ e $\beta = 0$, obtemos

$$\mathcal{F}_\alpha[\mathcal{F}[f*g]](u)=\int_{\mathbb{R}}\mathcal{F}_\alpha[g(x)](u-v\cos\alpha)f(u)e^{i(v^2/2)\sin\alpha\cos\alpha-iuv\sin\alpha}dv,$$

que é a identidade (3.8) com f e g invertendo os seus papéis.

3.1.4 Transformada de Fourier Fracionária de uma Convolução Modificada e de um Produto Modificado

Definição 3.2. *Para qualquer $f,g\in L^1(\mathbb{R})\cap\mathcal{W}$, define-se por convolução modificada o operador integral dado por*

$$(f\Theta g)(x):=\int_{\mathbb{R}}f(y)g(x-y)e^{iy(y-x)\cot\alpha}dy. \tag{3.11}$$

Teorema 3.2. *Seja $f\Theta g$ a convolução modificada de duas funções $f,g\in L^1(\mathbb{R})\cap\mathcal{W}$ e, $\mathcal{F}_\alpha[f]$, $\mathcal{F}_\alpha[g]$ e $\mathcal{F}_\alpha[f\Theta g]$ as Transformadas de Fourier Fracionárias de f, g e $f\Theta g$, respectivamente. Então,*

$$\mathcal{F}_\alpha[f\Theta g](u)=\sqrt{\frac{2\pi}{1-i\cot\alpha}}e^{-i(u^2/2)\cot\alpha}\mathcal{F}_\alpha[f](u)\mathcal{F}_\alpha[g](u). \tag{3.12}$$

Demonstração: Pela definição da Transformada de Fourier Fracionária,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\alpha[f\Theta g](u) &= \sqrt{\frac{1-i\cot\alpha}{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}f(y)g(x-y)e^{iy(y-x)\cot\alpha}dy\,e^{i[(x^2+u^2)/2]-ixu\csc\alpha}dx\\ &= \sqrt{\frac{1-i\cot\alpha}{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}f(y)g(x-y)e^{i[(x^2+u^2)/2]\cot\alpha-ixu\csc\alpha+iy(y-x)\cot\alpha}dxdy.\end{aligned}$$

Fazendo a substituição de variáveis $t=x-y$ na última identidade, teremos

$$\mathcal{F}_\alpha[f\Theta g](u)=\sqrt{\frac{1-i\cot\alpha}{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}}f(y)e^{i[(y^2+u^2)/2]\cot\alpha-iyu\csc\alpha}dy\right]g(t)e^{i(t^2/2)\cot\alpha-itu\csc\alpha}dt.$$

Multiplicando e dividindo a última expressão por $\sqrt{\frac{1-i\cot\alpha}{2\pi}}e^{i(u^2/2)\cot\alpha}$, vem

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_\alpha[f\Theta g](u) &= \sqrt{\frac{2\pi}{1-i\cot\alpha}}e^{-i(u^2/2)\cot\alpha}\left(\sqrt{\frac{1-i\cot\alpha}{2\pi}}\right)^2 \\
&\times\left[\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{i[(y^2+u^2)/2]\cot\alpha-iyu\csc\alpha}dy\right)g(t)e^{i[(t^2+u^2)/2]\cot\alpha-itu\csc\alpha}dt\right] \\
&= \sqrt{\frac{2\pi}{1-i\cot\alpha}}e^{-i(u^2/2)\cot\alpha}\mathcal{F}_\alpha[f](u)\mathcal{F}_\alpha[g](u).\blacksquare
\end{aligned}$$

A idendidade (3.12) pode ter outras representações particulares. Considerando $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$ no operador de convolução (3.12), a Transformada de Fourier Fracionária toma a forma

$$\mathcal{F}_{-\frac{\pi}{2}}[f\Theta g](u) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}_{-\frac{\pi}{2}}[f](u)\mathcal{F}_{-\frac{\pi}{2}}[g](u),$$

onde $\mathcal{F}_{-\frac{\pi}{2}}[f](u)$ e $\mathcal{F}_{-\frac{\pi}{2}}[g](u)$ são as Transformadas de Fourier das funções $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente.

3.1.5 Propriedades da Transformada de Fourier Fracionária de uma Convolução Modificada

A Transformada de Fourier Fracionária de uma convolução modificada satisfaz as seguintes propriedades:

- Comutatividade: Temos que

$$\mathcal{F}_\alpha[f\Theta g](u) = \sqrt{\frac{2\pi}{1-i\cot\alpha}}e^{-i(u^2/2)\cot\alpha}\mathcal{F}_\alpha[f(x)](u)\mathcal{F}_\alpha[g(x)](u)$$

e

$$\mathcal{F}_\alpha[g\Theta f](u) = \sqrt{\frac{2\pi}{1-i\cot\alpha}}e^{-i(u^2/2)\cot\alpha}\mathcal{F}_\alpha[f(x)](u)\mathcal{F}_\alpha[g(x)](u).$$

Daí que

$$\mathcal{F}_\alpha[f\Theta g] = \mathcal{F}_\alpha[g\Theta f].$$

- Associatividade: Facilmente notamos que

$$\mathcal{F}_\alpha[(f\Theta g)\Theta h](u) = \left(\frac{2\pi}{1-i\cot\alpha}\right)e^{-iu^2\cot\alpha}\mathcal{F}_\alpha[f(x)](u)\mathcal{F}_\alpha[g(x)](u)\mathcal{F}_\alpha[h(x)](u)$$

e

$$\mathcal{F}_\alpha[f\Theta(g\Theta h)](u) = \left(\frac{2\pi}{1-i\cot\alpha}\right)e^{-iu^2\cot\alpha}\mathcal{F}_\alpha[f(x)](u)\mathcal{F}_\alpha[g(x)](u)\mathcal{F}_\alpha[h(x)](u).$$

Por conseguinte,

$$\mathcal{F}_\alpha[(f\Theta g)\Theta h] = \mathcal{F}_\alpha[f\Theta(g\Theta h)].$$

- Distributividade: Observando que

$$\mathcal{F}_\alpha[f\Theta(g+h)](u) = \sqrt{\frac{2\pi}{1-i\cot\alpha}}e^{-i(u^2/2)\cot\alpha}\mathcal{F}_\alpha[f(x)](u)(\mathcal{F}_\alpha[g(x)](u)+\mathcal{F}_\alpha[h(x)](u))$$

e

$$\mathcal{F}_\alpha[f\Theta g+f\Theta h](u) = \sqrt{\frac{2\pi}{1-i\cot\alpha}}e^{-i(u^2/2)\cot\alpha}(\mathcal{F}_\alpha[f(x)](u)\mathcal{F}_\alpha[g(x)](u)+\mathcal{F}_\alpha[f(x)](u)\mathcal{F}_\alpha[h(x)](u)),$$

obtemos

$$\mathcal{F}_\alpha[f\Theta(g+h)] = \mathcal{F}_\alpha[f\Theta g + f\Theta h].$$

Definição 3.3. *Para quaisquer funções $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{W}$, define-se operador produto modificado como*

$$z(x) = f(x)g(x)e^{ix^2\cot\alpha}.$$

Teorema 3.3. *Seja $z(x) = f(x)g(x)e^{ix^2\cot\alpha}$ o produto modificado de duas funções $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{W}$ e, $\mathcal{F}_\alpha[f]$, $\mathcal{F}_\alpha[g]$ e $\mathcal{F}_\alpha[z]$ as Transformadas de Fourier Fracionárias de f, g e z, respectivamente. Então,*

$$\mathcal{F}_\alpha[z](u) = \sqrt{\frac{1+i\cot\alpha}{2\pi}}\mathcal{F}_\alpha[f(x)]\mathcal{F}_\alpha[g(x)](u-v)e^{i[v(u-v)/2]\cot\alpha}dv.$$

3.2 Relação da Transformada de Fourier com outras Transformadas

Nesta secção, vamos apresentar algumas relações existentes entre a Transformada de Fourier com outras transformadas e apresentaremos algumas das suas principais propriedades.

3.2.1 Transformada de Wigner

Definição 3.4. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$, chama-se Transformada de Wigner*[1] *a função definida por*

$$\Gamma[f](u,\alpha) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} f\left(u+\frac{x}{2}\right)\overline{f\left(u-\frac{x}{2}\right)}e^{-i\alpha x}dx.$$

A Transformada de Wigner goza das seguintes propriedades:

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\Gamma[f](u,\alpha)d\alpha = |f(u)|^2 \quad \text{e} \quad \int\limits_{\mathbb{R}}\Gamma[f](u,\alpha)du = |\mathcal{F}[f](\alpha)|^2.$$

[1] Eugene Paul Wigner (1902–1995)— matemático e físico húngaro

Consequentemente,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\Gamma[f](u,\alpha)d\alpha du = \|f(u)\|^2 = \|\mathcal{F}[f](\alpha)\|^2.$$

De seguida vem uma relação importante entre a TFFr e a Transformada de Wigner:

Teorema 3.4. *A Transformada de Wigner e a TFFr estão relacionadas por meio de um ângulo de rotação α:*

$$\Gamma[\mathcal{F}_\alpha[f]](u,\xi) = G_{-\alpha}(\Gamma[f])(u,xi),$$

onde G_α representa a rotação no sentido horário das variáveis (u,ξ) sobre o ângulo α. Equivalentemente,

$$G_\alpha(\Gamma[\mathcal{F}_\alpha[f]])(u,\xi) = \Gamma[f](u,\xi).$$

O Teorema 3.4 permite-nos concluir que

$$\int_{\mathbb{R}}\Gamma[\mathcal{F}_\alpha[f]](u,\xi)d\xi = |\mathcal{F}_\alpha[f](u)| \quad \text{e} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\Gamma[\mathcal{F}_\alpha[f]](u,\xi)dud\xi = \|f(u)\|^2.$$

Definição 3.5. *A transformada de Radon de uma função bidimensional é o integral da Transformada de Wigner através de uma linha que passa pela origem.*

A transformada de Radon-Wigner é a Transformada de Radon da transformada de Wigner. Se essa linha faz um ângulo α com o eixo x, então a Transformada de Radon-Wigner é dada por

$$\int_{\mathbb{R}}\Gamma[f](r\cos\alpha, r\sin\alpha)dr = \int_{\mathbb{R}}\Gamma[\mathcal{F}_\alpha[f]](u,\xi)d\xi = |\mathcal{F}_\alpha[f](u)|^2.$$

3.2.2 Função de Ambiguidade

A Função de Ambiguidade está de certa forma relacionada com a Transformada de Wigner.

Definição 3.6. *Para $f \in L^1(\mathbb{R})$, define-se Função de Ambiguidade o operador integral dado por*

$$\mathcal{A}[f](u,\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f\left(x+\frac{u}{2}\right)\overline{f\left(x-\frac{u}{2}\right)}e^{-i\xi x}dx.$$

A Função de Ambiguidade é similar à Transformada de Wigner, mas o integral é em relação à outra variável. A Transformada de Radon da Função de Ambiguidade é

$$\int_{\mathbb{R}}\mathcal{A}[f](r\cos\alpha, r\sin\alpha)dr = \int_{\mathbb{R}}\mathcal{A}[\mathcal{F}_\alpha[f]](u,\xi)d\xi = \mathcal{F}_\alpha[f]\left(\frac{u}{2}\right)\mathcal{F}_\alpha[f]\left(-\frac{u}{2}\right).$$

Tal como a Transformada de Wigner, cumpre-se a igualdade

$$G_\alpha(\mathcal{A}[\mathcal{F}_\alpha[f]])(u,\xi) = \mathcal{A}[f](u,\xi).$$

3.2.3 Transformada de Fourier com Janela

Definição 3.7. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$, a Transformada de Fourier com Janela (TFJ) é definida por*

$$\mathcal{F}_w[f](u,\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) w(x-u) e^{-i\xi x} dx,$$

onde w é a função janela.

A TFJ goza da seguinte relação com a Transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}_w[f](u,\xi) = e^{-i\xi x}(\mathcal{F}_{w_1}[f])(\xi,-u),$$

onde $w_1 = \mathcal{F}[w]$, ou seja,

$$\mathcal{F}_w[f](u,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathcal{F}[w(x-t)](u) e^{-i\xi(x+t)} dt.$$

3.2.4 Transformada de Wavelet

Definição 3.8. *Para $f \in L^1(\mathbb{R})$, chama-se Transformada de Wavelet ao operador integral obtido por*

$$\mathcal{F}_\xi[f](u) = c(\alpha) e^{-4iu^2 \sin(2\alpha)} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{\left[\frac{i}{2}\left(\frac{u-x}{\tan^{1/2}\alpha}\right)^2\right]} dx, \quad u = \xi \sec\alpha.$$

3.2.5 Transformada Linear Canónica

Consideremos uma matrix M unimodular, isto é, com determinante igual à unidade. Adicionalmente, requeremos que a matriz tenha três parâmetros u, v e w com a seguinte relação:

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{w}{v} & \dfrac{1}{v} \\ -v + \dfrac{uw}{v} & \dfrac{u}{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{u}{v} & -\dfrac{1}{v} \\ v + \dfrac{uw}{v} & \dfrac{w}{v} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}^{-1}. \tag{3.13}$$

Segundo as igualdades estabelecidas em (3.13), temos que

$$u = \frac{d}{b} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{b} + c\right), \quad v = \frac{1}{b}, \quad w = \frac{a}{b} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{b} + c\right).$$

Definição 3.9. *A Transformada Linear Canónica, denotada por $\mathcal{F}_M$, de uma função $f \in L^1(\mathbb{R})$ é definida por*

$$\mathcal{F}_M[f](\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) K_M(\xi, x) dx,$$

onde

$$K_M := \sqrt{\frac{v}{2\pi i}} e^{\frac{i}{2}\left(u\xi^2 - 2v\xi x + wx^2\right)} = \frac{1}{\sqrt{2ib\pi}} e^{\frac{i}{2b}\left(d\xi^2 - 2\xi x + ax^2\right)}$$

é o núcleo do operador com parâmetros u, v e w independentes de x e ξ.

Casos Especiais

- Transformada de Fresnel: Se $M = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, com $b = \dfrac{lz}{2\pi}$, temos que

  $$\mathcal{F}_M[f](\xi) = e^{-i\pi z/l} g_z(\xi),$$

  onde

  $$g_z(\xi) := \frac{e^{i\pi z/l}}{\sqrt{ilz}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i(\pi/lz)(\xi - z)^2} dx$$

  é a Transformada de Fresnel.

- Dilatação: A operação $f(x) \mapsto g_s(\xi) = \sqrt{s} f(s\xi)$ pode ser obtida por meio de uma Transformação Linear Canónica porque considerando $M = \begin{bmatrix} 1/s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$ temos que

  $$g_s(\xi) = \sqrt{\operatorname{sgn}(s)} \mathcal{F}_M[f](\xi).$$

- Transformada de Gauss-Weierstrass: Esta é obtida escolhendo $M = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$:

  $$\mathcal{F}_M[f](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2i\pi b}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i(x-\xi)^2/2b} dx.$$

- Multiplicação Chirp: Tomando $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$ obtemos

  $$\mathcal{F}_M[f](\xi) = f(\xi) e^{ic\xi^2/2}.$$

3.3 Aplicações da Transformada de Fourier Fracionária

Nesta secção, apresentamos algumas aplicações da Transformada de Fourier Fracionária. Porém, não são apresentados muitos detalhes matemáticos relacionadas com as identidades apresentadas pelo facto de estarem diretamente relacionadas com outras áreas científicas, como Física e Electrónica, na qual se tem pouco domínio.

3.3.1 Propagação de uma Onda Óptica em Meio Livre

Definição 3.10. *Um meio homogéneo é aquele que apresenta as mesmas características em todos os elementos de volume.*

Definição 3.11. *Um meio isotrópico é aquele em que a velocidade de propagação da luz e as demais propriedades ópticas são independentes da direcção em que é realizada a medida.*

Consideremos uma onda monocromática

$$\vec{E}(\vec{r}, z, t) = \vec{e}\Psi(\vec{r}, z)e^{i(kz-\omega t)}, \tag{3.14}$$

onde $\vec{r}$ é o vector de posição transversal, t é o tempo, ω é a frequência angular, k é o número de onda, $\vec{e}$ é o vector polarização $\vec{e} = (e_x, e_y, 0)$ e $\Psi(\vec{r}, z)$ muda lentamente durante o comprimento de onda ao longo da direcção de propagação $k\dfrac{\partial \Psi}{\partial z} \gg \dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$. A equação de onda correspondente para propagação em um meio homogéneo e isotrópico toma a forma parabólica bem conhecida:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{2k}\Delta_{\perp}\right)\Psi(\vec{r}, z) = 0, \tag{3.15}$$

onde $\Delta_{\perp}$ é o operador transversal de Laplace. A função de Green[2] ou o propagador desta equação é

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{ik}{2\pi z}e^{(ik/2z)(\vec{r}-\vec{r}_0)^2}, \tag{3.16}$$

onde o sub-índice 0 refere-se ao plano $z = 0$. A identidade (3.16) pode ser reescrita por meio do núcleo bidimensional da TFFr como

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{k^2}{1 - i\tan\alpha}K_{\alpha}(k\vec{r}_0, k\vec{r}\cos\alpha)e^{\left[(r^2k^2\sin(2\alpha)/4\right]}, \tag{3.17}$$

com $\tan\alpha = kz$. Consequentemente, a distribuição de campo em qualquer z pode ser representada como TFFr da distribuição de entrada com factores de escala correspondentes

[2] George Green (1794–1841)— matemático e físico britânico

dependendo de z e um deslocamento de fase adicional, isto é,

$$\Psi(\vec{r}, z) = \frac{k}{1 - i\tan\alpha} F_\alpha(k\vec{r}\cos\alpha) e^{i\left[r^2 k^2 \sin(2\alpha)/4\right]}, \tag{3.18}$$

onde

$$F_\alpha(k\vec{r}\cos\alpha) = \int_{\mathbb{R}} \Psi(\vec{r}_0, 0) K_\alpha(k\vec{r}_0, k\vec{r}\cos\alpha) d(k\vec{r}_0). \tag{3.19}$$

Usando a Propriedade (h) na Definição (3.1), pode-se escrever uma conexão simples entre padrões difractivo de objectos similares $\Psi(\vec{r}_0, 0) = \Phi(a\vec{r}_0, 0)$ em qualquer plano z:

$$\Psi(\vec{r}, z) = -\frac{k}{1 + i\tan\beta} e^{i\frac{r^2 k^2 \sin(2\beta)}{4(a^2\cos^2\beta + \sin^2\beta)}} \mathcal{F}_\beta[\Phi(\vec{r}, 0)](k\vec{r}a\cos\beta),$$

onde o ângulo β goza da relação $kz = \tan\alpha = a^{-2}\tan\beta$.

3.3.2 Propagação de Ondas Através de Fibras de Índice Guiado

Consideremos agora a propagação de uma onda monocromática através de uma fibra de índice guiado com um perfil de índice de refracção quadrático

$$n^2 = n_0^2\{1 - [g_x^2(z)x^2 + g_y^2(z)y^2]\} \tag{3.20}$$

onde g_z e g_y são os parâmetros do gradiente que descrevem a evolução da distribuição parabólica transversal, n_0 constante. A aproximação paraxial correspondente à equação de onda de Helmholtz para a amplitude de função de campo $\Psi(x, y, z)$ tem a forma da equação de Schrodinger dependente do tempo para osciladores harmónicos cuja frequência clássica depende do tempo, ou seja,

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{2}\left(\frac{\Delta_\perp}{k} - k\left(g_x^2 x^2 + g_y^2 y^2\right)\right)\right]\Psi(x, y, z) = 0.$$

A função de Green de propagação de ondas é

$$\begin{aligned} G(x, y, x_0, y_0, z) &= \sqrt{\frac{k}{2\pi i H_{1x}(z)}} e^{\left(ik/(2H_{1x}(z))\left[H'_{1x}(z)x^2 + H_{2x}(z)x_0^2 - 2xx_0\right]\right)} \\ &\quad \times \sqrt{\frac{k}{2\pi i H_{1y}(z)}} e^{\left(ik/(2H_{1y}(z))\left[H'_{1y}(z)y^2 + H_{2y}(z)y_0^2 - 2yy_0\right]\right)}, \end{aligned}$$

onde H_{1x}, H_{2x}, H_{1y} e H_{2y} são os raios axiais e de campo nas direcções transversais, H'_{1x}, H'_{2x}, H'_{1y} e H'_{2y} denotam as suas derivadas em relação a z. A função de propagação pode ser representada na forma factorizada:

$$G(x, y, x_0, y_0) = G_x(x, x_0, z) G_y(y, y_0, z),$$

de modo que somente a análise de um dos dois factores é necessária, que é o que segue. Introduzindo a nova variável $\alpha = \tan^{-1}[H_{1x}(z)g_{x0}/H_{2x}(z)]$ e $g_{x0} = g_x(0)$, $G_x(x, x_0, z)$ pode ser representada na forma

$$G_x(x, x_0, z) = \sqrt{\frac{k \sin\alpha}{g_{x_0} H_{1x}(z)}} e^{i[x^2\phi_x(z)-\alpha]/2} K_\alpha \left(x_0\sqrt{k g_{x_0}}, \sqrt{\frac{k}{g_{x_0}}} \frac{\sin\alpha}{H_{1x}(z)} x \right), \qquad (3.21)$$

onde K_α é o núcleo da TFFr e

$$\phi_x(z) = \frac{k}{H_{1x}(z)} \left(H'_{1x}(z) - \frac{H_{2x}(z)}{g_{x0}^2 H_{1x}^2(z) + H_{2x}^2(z)} \right).$$

3.3.3 Processamento de Sinal

Varredura de sistema de frequência

Varredura de frequência de rádio ou varredura de frequência referem-se a varredura de uma banda de radiofrequência para detectar sinais sendo para lá transmitidos. Isso é implementado usando um receptor de rádio com frequência de recepção ajustável. À medida que a frequência do receptor é alterada para varrer uma faixa de frequência desejada, um display indica a potência dos sinais recebidos em cada frequência.

Os filtros de frequência varrida são comummente usados, por exemplo, em analisadores de frequência para sinais de alta frequência. Os filtros de frequência varrida são sistemas lineares variáveis no tempo. Eles também podem ser representados por sua resposta impulsiva variando no tempo $h(t, x)$, que é a resposta no tempo t a uma entrada $\delta(t, x)$.

Sejam

$$h(t, x) = \int_{\mathbb{R}} g(t - x) e^{i(c(\alpha)/2)(t^2 - x^2)}, \quad y(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) h(t, x) \quad \text{e} \quad \alpha = -\cot^{-1} c,$$

então

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_\alpha[y][u] &= \sqrt{\frac{1 - i\cot\alpha}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x) h(t, x) e^{i[(u^2+t^2)/2]\cot\alpha - iut\csc\alpha} dx dt \\
&= \sqrt{\frac{1 - i\cot\alpha}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i[(u^2+t^2)/2]\cot\alpha} \mathcal{F}[g(t)](u\csc\alpha) e^{-iux\csc\alpha} dx \\
&= \mathcal{F}[g](u\csc\alpha)\mathcal{F}_\alpha[f](u).
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{F}[g](u\csc\alpha)\mathcal{F}_\alpha[f](u)$ pode ser chamado de função de transferência do filtro de frequência varrida no domínio fracionário de Fourier.

3.4 Teoremas do Produto e de uma Convolução para Nova Transformada de Fourier Fracionária

Nesta secção introduziremos a noção da Nova Transformada de Fourier Fracionária (NTFFr). De seguida, estudamos a suas principais propriedades e, em particular, a transformada de um produto e de uma convolução.

Definição 3.12. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$, α um parâmetro real e k uma constante inteira. Chama-se Nova Transformada de Fourier Fracionária ao operador integral definido por*

$$R_\alpha[f](u) := \int_{\mathbb{R}} f(x)K_\alpha(x,u)dx, \tag{3.22}$$

onde o núcleo é dado por

$$K_\alpha(x,u) := \begin{cases} \dfrac{c(\alpha)}{\sqrt{2\pi}} e^{ia(\alpha)[(x^2+u^2)-2b(\alpha)xu]} & se \quad \alpha \neq k\pi \\ \delta(x-u) & se \quad \alpha = 2k\pi \\ \delta(x+u) & se \quad \alpha = (2k+1)\pi \end{cases}$$

com

$$a(\alpha) = \frac{\cot(\alpha)}{2}, \quad b(\alpha) = \sec\alpha, \quad c(\alpha) = \sqrt{1 - i\cot\alpha}.$$

O operador R_α goza de algumas propriedades:

(a) $R_0[f](u) = f(u)$;

(b) $R_\pi[f](u) = f(-u)$;

(c) $R_{-\alpha}[R_\alpha[f]](u) = f(u)$;

(d) $R_\alpha[R_\beta[f]](u) = R_{\alpha+\beta}[f](u)$;

(e) $R_{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}[f(x)] = \mathcal{F}(u)$.

De agora em diante, limitaremos a nossa atenção a R_α para o caso $\alpha \neq k\pi$. Em alguns casos consideraremos a, b e c no lugar de $a(\alpha)$, $b(\alpha)$ e $c(\alpha)$, respectivamente.

Definição 3.13. *Consideremos uma função $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{W}$ e definam-se as funções $\tilde{f}$ e $\hat{f}$ como $\tilde{f}(x) := f(x)e^{ia(\alpha)x^2}$ e $\hat{f}(x) := f(x)e^{-ia(\alpha)x^2}$. Para quaisquer duas funções $f(x)$ e $g(x)$, define-se a operação convolução $\diamond$ por*

$$(f \diamond g)(x) := \frac{c(\alpha)}{\sqrt{2\pi}} e^{-iax^2}(\tilde{f} * \tilde{g})(x)$$

onde $*$ é operação convolução introduzida em (1.8). Da mesma forma, define-se a operação convolução $\ominus$ por

$$(f \ominus g)(x) := \frac{e^{iax^2}}{\sqrt{2\pi}}(\hat{f} * \hat{g})(x).$$

Teorema 3.5. *Seja $R_\alpha[f]$, $R_\alpha[g]$, a Nova Transformada Fracionária de Fourier de f e g, respectivamente. Então*

$$R_\alpha[f \diamond g](u) = R_\alpha[f](u) R_\alpha[g](u) e^{-ia(\alpha)u^2}. \tag{3.23}$$

Além disso,

$$R_\alpha[(f(x) \cdot g(x)) \cdot e^{ia(\alpha)x^2}](u) = c(-\alpha)(R_\alpha[f] \ominus R_\alpha[g])(u). \tag{3.24}$$

Demonstração: Pela definição de NTFFr e (1.8), temos

$$\begin{aligned}
R_\alpha[f \diamond g](u) &= \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (f \diamond g)(x) e^{i[a(x^2+u^2)-2abux]} dx \\
&= \frac{c^2}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i[a(x^2+u^2)-2abux]} e^{-iax^2} dx \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{iay^2} g(x-y) e^{ia(x-y)^2} dy \\
&= \frac{c^2}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) e^{i[a(x^2+u^2)-2abux+2ay^2-2axy]} dy dx
\end{aligned}$$

Fazendo a substituição de variáveis $v = x - y$, obtemos

$$\begin{aligned}
R_\alpha[f \diamond g](u) &= \frac{c^2}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y) g(v) e^{i[a(y^2+u^2+v^2)-2abu(y+v)]} dy dv \\
&= \frac{c^2 e^{-iau^2}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{i[a(y^2+u^2)-2abuy]} dy \int_{\mathbb{R}} g(v) e^{i[a(v^2+u^2)-2abuv]} dv \\
&= e^{-iau^2} R_\alpha[f](u) R_\alpha[g](u).
\end{aligned}$$

Fica demonstrado (3.23). No concernente a (3.24), pela definição (3.22) e pela substituição de variável $v = u - t$, temos

$$\begin{aligned}
(R_\alpha[f] \ominus R_\alpha[g])(u) &= \frac{e^{ia(\alpha)u^2}}{\sqrt{2\pi}} (\hat{R}_\alpha[f] * \hat{R}_\alpha[g])(u) \\
&= \frac{e^{ia(\alpha)u^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ia(\alpha)t^2} R_\alpha[f(x)](t) e^{-ia(\alpha)(u-t)^2} R_\alpha[g(t)](u-t) dt \\
&= \frac{e^{ia(\alpha)u^2} c(\alpha)}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \int_{\mathbb{R}} R_\alpha[g(t)](u-t) e^{ia[x^2-(u-t)^2-2btx]} dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e^{ia(\alpha)u^2}c(\alpha)}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dx \int\limits_{\mathbb{R}} R_\alpha[g(t)](u-t)e^{-ia[(u-t)^2-x^2+2btx]}dt \\
&= \frac{e^{ia(\alpha)u^2}c(\alpha)}{\sqrt{2\pi}c(-\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{2ia(x^2-bxu)}dx\frac{c(-\alpha)}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} R_\alpha[g(t)](v)e^{ia(v^2+x^2-2bvx)}dt \\
&= \frac{e^{ia(\alpha)u^2}c(\alpha)}{\sqrt{2\pi}c(-\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)g(x)e^{2ia(x^2-bxu)}dx.
\end{aligned}
$$

que é o mesmo que (3.24)■.

3.4.1 Duas Novas Convoluções e suas Propriedades

Nesta subsecção, introduziremos duas novas convoluções associadas com a TFFr (que estão definidas nos domínios $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$) e provamos as suas propriedades básicas. Também apresentaremos a demonstração para as convoluções (3.25) e (3.28) no espaço $L^1(\mathbb{R})$, já que os outros casos podem ser provados de forma similar. Nesta subsecção definimos a norma $\|f\|_{L^1}$ de $f \in L^1(\mathbb{R})$ como

$$
\|f\|_{L^1} := \frac{1}{\sqrt{2\pi|\sin\alpha|}}\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|dx,
$$

onde a constante $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi|\sin\alpha|}}$ tem como objectivo facilitar os cálculos posteriores. No espaço $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, usaremos a norma usual

$$
\|f\|_{L^p} := \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}.
$$

Definição 3.14. *Define-se a operação convolução $\oslash$ por*

$$
(f \oslash g)(s) := \frac{c(\alpha)}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(u)g\left(s-u+\frac{1}{2ab}\right)e^{ia\left(2u^2-2su+\frac{s}{ab}-\frac{u}{ab}\right)}du. \tag{3.25}
$$

Teorema 3.6. *Seja $\psi(x) := e^{i(x-ax^2)}$. Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, então*

$$
\|f \oslash g\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}, \tag{3.26}
$$

e

$$
R_\alpha[f \oslash g](x) = \psi(x)R_\alpha[f](x)R_\alpha[g](x). \tag{3.27}
$$

Por outras palavras, o produto $f \oslash g$ define uma função pertencente a $L^1(\mathbb{R})$ e satisfaz o Teorema da convolução da NTFFr associada com a função ψ.

Demonstração: Primeiro, iremos demonstrar a desigualdade (3.26). Note que $|c| = \dfrac{1}{|\sin\alpha|}$. Considerando $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ e fazendo a substituição de varáveis $v = s - u + \dfrac{1}{2ab}$, teremos

$$\begin{aligned}
\|f \oslash g\|_{L^1} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi|\sin\alpha|}}\int\limits_{\mathbb{R}} |(f \oslash g)(s)|ds \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi|\sin\alpha|}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} |f(u)|\left|g\left(s-u+\frac{1}{2ab}\right)\right|duds \\
&= \frac{1}{2\pi|\sin\alpha|}\int\limits_{\mathbb{R}} |f(u)|du\int\limits_{\mathbb{R}} |g(v)|dv \\
&= \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1},
\end{aligned}$$

que prova a desigualdade (3.26). Essa desigualdade assegura imediatamente que a convolução definida por (3.25) pertence a $L^1(\mathbb{R})$. Agora, vamos demonstrar a factorização (3.27). Pela definição (3.22) da NTFFr, temos

$$\begin{aligned}
&\psi(x)R_\alpha[f](x)R_\alpha[g](x) \\
&\quad= e^{i(x-ax^2)}\frac{c}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(u)e^{ia(x^2+u^2-2bxu)}du\frac{c}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} g(v)e^{ia(x^2+v^2-2bxv)}dv \\
&\quad= e^{i(x-ax^2)}\frac{c^2}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(u)g(v)e^{ia[2x^2+u^2+v^2-2bx(u+v)]}dudv \\
&\quad= \frac{c^2}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(u)g(v)e^{ia[x^2+u^2+v^2-2bx\left(u+v-\frac{1}{2ab}\right)]}dudv.
\end{aligned}$$

Fazendo a substituição de variáveis $u = u$ e $s = u + v - \dfrac{1}{2ab}$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\psi(x)R_\alpha[f](x)R_\alpha[g](x) \\
&= \frac{c^2}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(u)g\left(s-u+\frac{1}{2ab}\right)e^{ia\left[x^2+u^2+\left(s-u+\frac{1}{2ab}\right)^2-2bsx\right]}duds \\
&= \frac{c^2}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(u)g\left(s-u+\frac{1}{2ab}\right)e^{ia[x^2+2u^2+s^2-2su+\frac{s}{ab}-\frac{u}{ab}-2bsx]}duds \\
&= \frac{c}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}\left[\frac{c}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(u)g\left(s-u+\frac{1}{2ab}\right)e^{ia\left(2u^2-2su+\frac{s}{ab}-\frac{u}{ab}\right)}du\right]e^{ia(x^2+s^2-2bsx)}ds \\
&= R_\alpha\left[\frac{c}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(u)g\left(s-u+\frac{1}{2ab}\right)e^{ia\left(2u^2-2su+\frac{s}{ab}-\frac{u}{ab}\right)}du\right](x) \\
&= R_\alpha[f \oslash g](x).\blacksquare
\end{aligned}$$

Seja

$$m(t) := e^{iat^2}, \quad n_\pm := e^{ia\left(t^2 \pm \frac{t}{ab}\right)}$$

e consideremos

$$g_\pm := g\left(t \pm \frac{1}{ab}\right),$$

a qual pode ser vista como uma função com retardamento ou como uma função de mudança com passo $\frac{1}{ab}$. Claramente, as funções m e $n_\pm$ não têm raízes e têm o mesmo módulo, isto é, $|m(t)| = |n_\pm(t)| = 1$. Por isso, podemos representar

$$m^{-1}(t) := \frac{1}{m(t)}, \quad n_\pm^{-1}(t) := \frac{1}{n_\pm(t)}.$$

Há duas formas distintas de representar o operador convolução $f \oslash g$ por meio da operação convolução $*$ definida em (1.8):

(1) Podemos representar o operador convolução $(f \oslash g)(s)$ como

$$(f \oslash g)(s) = (m \cdot f) * (n_+ \cdot g_+)(s) \cdot \frac{1}{m(s)} \cdot \frac{c}{\sqrt{2\pi}}.$$

Neste caso, a convolução de f e g é obtida pela multiplicação de f pela função *chirp* (m), convolvida com g com retardamento $\left(\frac{1}{ab}\right)$ e multiplicando por nova função *chirp* (n_+), dividida pela função *chirp* (m) e multiplicando pelo factor $\frac{c}{\sqrt{2\pi}}$.

(2) Noutra forma, podemos representar como

$$(f \oslash g)(s) = (n_- \cdot f) * (m \cdot g_+)(s) \cdot \frac{1}{n_-(s)} \cdot \frac{c}{\sqrt{2\pi}}.$$

Então a mesma convolução de f e g é obtida pela multiplicação de f pela função *chirp* (n_-), convolvida com g com retardamento $\left(\frac{1}{ab}\right)$ e multiplicando por nova função *chirp* (m), dividida pela função *chirp* (n_-) e multiplicando pelo factor $\frac{c}{\sqrt{2\pi}}$.

Como vamos verificar de seguida, a convolução (3.25) satisfaz a propriedade de comutatividade, associatividade e distributividade:

- Comutatividade: Pela propriedade de factorização (3.27), temos

$$R_\alpha[f \oslash g](x) = \psi(x) R_\alpha[f](x) R_\alpha[g](x),$$

$$R_\alpha[g \oslash f](x) = \psi(x) R_\alpha[f](x) R_\alpha[g](x),$$

o que implica que

$$R_\alpha[f \oslash g](x) = R_\alpha[g \oslash f](x).$$

Consequentemente, $f \oslash g = g \oslash f$.

- Associatividade: Pela propriedade da factorização (3.27), temos

$$R_\alpha[(f \oslash g) \oslash h](x) = \psi^2(x) R_\alpha[f](x) R_\alpha[g](x) R_\alpha[h](x),$$

$$R_\alpha[f \oslash (g \oslash h)](x) = \psi^2(x) R_\alpha[f](x) R_\alpha[g](x) R_\alpha[h](x).$$

Daí, resulta que

$$R_\alpha[(f \oslash g) \oslash h](x) = R_\alpha[f \oslash (g \oslash h)](x).$$

Assim sendo, $(f \oslash g) \oslash g = f \oslash (g \oslash h)$.

- Distributividade: Observando que

$$R_\alpha[f \oslash (g + h)](x) = \psi(x) R_\alpha[f](x) R_\alpha[g + h](x),$$

e

$$R_\alpha[f \oslash g + f \oslash h](x) = \psi(x) R_\alpha[f](x) R_\alpha[g](x) + \psi(x) R_\alpha[f](x) R_\alpha[h](x),$$

obtemos

$$R_\alpha[f \oslash (g + h)](x) = R_\alpha[f \oslash g + f \oslash h](x).$$

Consequentemente,

$$f \oslash (g + h) = f \oslash g + f \oslash h.$$

Definição 3.15. *Defini-se o produto $f \oplus g$ por*

$$(f \oplus g)(s) := \frac{c(\alpha)}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(u) g\left(s - u - \frac{1}{2ab}\right) e^{ia\left(2u^2 - 2su - \frac{s}{ab} + \frac{u}{2ab}\right)} du. \tag{3.28}$$

Teorema 3.7. *Seja $\zeta(x) := e^{i(-x - ax^2)}$. Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, então*

$$\|f \oplus g\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}, \tag{3.29}$$

e

$$R_\alpha[f \oplus g](x) = \zeta(x) R_\alpha[f](x) R_\alpha[g](x). \tag{3.30}$$

Similarmente à convolução (3.25), existem duas formas distintas de representar a convolução (3.28), nomeadamente:

$$(f \oplus g)(s) = (m \cdot f) * (n_+ \cdot g_-)(s) \cdot m^{-1}(s) \cdot \frac{c}{\sqrt{2\pi}};$$

$$(f \oplus g)(s) = (n_+ \cdot f) * (m \cdot g_-)(s) \cdot n_+^{-1}(s) \cdot \frac{c}{\sqrt{2\pi}}.$$

3.4.2 Classes de Equações de Convolução

Nesta subsecção, estabeleceremos a solvabilidade de muitas equações de convolução associadas à NTFFr e obteremos a solução na forma explicita. Começaremos por considerar o seguinte tipo de equações integrais no espaço de Banach $L^1(\mathbb{R})$:

$$\lambda\varphi(s) + (k \oslash \varphi)(s) = f(s), \tag{3.31}$$

onde $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in L^1(\mathbb{R})$ e φ é a incognita pertencente ao espaço $L^1(\mathbb{R})$. Usaremos a notação $A(s) := \lambda + \psi(s)R_\alpha[k](s)$. A proposição seguinte é importante na demonstração do Teorema 3.8.

Proposição 3.1.

(1) Se $\lambda \neq 0$, então $A(s) \neq 0$ para qualquer s pertencente fora de um intervalo finito.

(2) Se $A(s) \neq 0$ para qualquer $s \in \mathbb{R}$, então a função $\dfrac{1}{A(s)}$ é limitada e continua em $\mathbb{R}$.

Demonstração: Pelo Lema Clássico de Riemann-Lebesgue, a função $A(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$ e

$$\lim_{|x|\to\infty} A(x) = \lambda \neq 0,$$

quer dizer, $A(x)$ toma valor λ no infinito. Já que $\lambda \neq 0$ e $A(x)$ é contínua, existe um $C > 0$ tal que $A(x) \neq 0$ para todo $|x| > C$. O item (1) está provado.

(2) Devido à continuidade de A e $\lim_{|s|\to\infty} A(s) = \lambda \neq 0$, existe $C_0 > 0$ e $\varepsilon_1 > 0$ tal que

$$\inf_{|s|>C_0} |A(s)| > \varepsilon_1.$$

Como A é contínuo e não toma valor zero no conjunto compacto

$$S(0, C_0) = \{s \in \mathbb{R} : |s| \leqslant C_0\},$$

existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que

$$\inf_{|s|\leqslant C_0} |A(s)| > \varepsilon_2.$$

Com isso, deduzimos que

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} \frac{1}{|A(s)|} \leqslant \max\left\{\frac{1}{\varepsilon_1}, \frac{1}{\varepsilon_2}\right\} < \infty.$$

O que implica que a função $\dfrac{1}{|A(s)|}$ é contínua e limitada em $\mathbb{R}$. Já que $R_\alpha[f] \in L^1(\mathbb{R})$, temos que $\left(\dfrac{R_\alpha[f]}{A}\right) \in L^1(\mathbb{R})$.$\blacksquare$

Teorema 3.8. *Assuma-se que $A(s) \neq 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$, e cada uma das seguintes condições é satisfeita:*

(i) $\lambda \neq 0$ *e* $R_\alpha[f] \in L^1(\mathbb{R})$*;*

(ii) $\lambda = 0$ *e* $\dfrac{R_\alpha[f]}{R_\alpha[k]} \in L^1(\mathbb{R})$*.*

Então, a equação (3.31) tem solução em $L^1(\mathbb{R})$ se e somente se

$$R_{-\alpha}\left(\frac{R_\alpha[f]}{A}\right) \in L^1(\mathbb{R}).$$

Neste caso, a solução é dada por

$$\varphi = R_{-\alpha}\left(\frac{R_\alpha[f]}{A}\right).$$

Demonstração: *Necessidade:* Suponhamos que a equação de convolução (3.31) tem solução $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$. Aplicando R_α a ambos os membros da equação (3.31) e usando a identidade da factorização do Teorema 3.6, obtemos

$$A(s)R_\alpha[\varphi](s) = R_\alpha[f](s).$$

Uma vez que $A(s) \neq 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$R_\alpha[\varphi] = \frac{R_\alpha[f]}{A}. \tag{3.32}$$

Como a função $\dfrac{1}{A(x)}$ é limita, contínua (vide Proposição 3.2) e $R_\alpha[f] \in L^1(\mathbb{R})$, deduzimos que $\dfrac{R_\alpha[f]}{A} \in L^1(\mathbb{R})$. Agora, podemos aplicar a transformação inversa de $R_\alpha[f]$ a (3.32) para obter a solução indicada no teorema. A necessidade fica provada
Suficiência: Consideremos a função.

$$\varphi := R_{-\alpha}\left(\frac{R_\alpha[f]}{A}\right).$$

Isto implica que $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, já que $R_\alpha[\varphi] = \dfrac{R_\alpha[f]}{A}$. Equivalentemente, $A(R_\alpha[f]) = R_\alpha[f]$. Por força da identidade da factorização e pelo Teorema de Unicidade de R_α (que existe apesar de optarmos por não apresentar aqui),

$$R_\alpha[\lambda\varphi + (k \oslash \varphi)] = R_\alpha[f].\blacksquare$$

Teorema 3.9. *Assuma-se que*

$$B(s) := \lambda + \zeta(s)R_\alpha[k](s) \neq 0$$

para todo $s \in \mathbb{R}$, e cada uma das seguintes condições é satisfeita:

(i) $\lambda \neq 0$ *e* $R_\alpha[f] \in L^1(\mathbb{R})$*;*

(ii) $\lambda = 0$ *e* $\dfrac{R_\alpha[f]}{R_\alpha[k]} \in L^1(\mathbb{R})$.

Então, a equação

$$\lambda\varphi(s) + (k \oplus \varphi)(s) = f(s)$$

tem solução em $L^1(\mathbb{R})$ se e somente se

$$R_{-\alpha}\left(\frac{R_\alpha[f]}{B}\right) \in L^1(\mathbb{R}).$$

Neste caso, a solução é dada por

$$\varphi = R_{-\alpha}\left(\frac{R_\alpha[f]}{B}\right).$$

3.5 Desigualdades e Consequências de Novas Convoluções para a Nova Transformada de Fourier Fracionária com pesos de Hermite

Nesta secção, apresentaremos novas convoluções para a Nova Transformada de Fourier Fracionária, que de alguma forma estão associadas às funções de Hermite[3]. Consequentes desigualdades e propriedades são derivadas destas convoluções, entre as quais destacamos dois novos tipos de desigualdades de Young. Além disso, estudaremos algumas classes de equações integrais que aparecem em problemas de engenharia. Na presente secção, para $f \in L^1(\mathbb{R})$, voltamos a considerar a norma $\|f\|_{L^1}$ como $\|f\|_{L^1} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi|\sin\alpha|}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx$.

Definição 3.16. *Para $n \in \mathbb{N}$, definem-se por funções de Hermite normalizadas as funções*

$$\phi_n(x) := (-1)^n \left(2^n n!\sqrt{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \tag{3.33}$$

Teorema 3.10. *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, então a transformada*

$$(f \boxminus g)(x) := -\frac{abc}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(u)g(v)e^{ia\left(u^2+v^2-x^2\right)-2a^2b^2(x-u-v)^2} dudv \tag{3.34}$$

[3]Charles Hermite (1822–1901)— matemático francês

define a convolução que satisfaz a desigualdade

$$\|f \boxminus g\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$$

e a factorização

$$R_\alpha[f \boxminus g](x) = \xi(x) R_\alpha[f](x) R_\alpha[g](x), \tag{3.35}$$

onde $\xi(x) := e^{-\frac{1}{2}x^2 - iax^2}$. *Em outras palavras, o produto* $f \boxminus g$ *define uma nova função pertencente a* $L^1(\mathbb{R})$ *e satisfaz o Teorema da Convolução para NTFFr com peso* ξ.

Demonstração: Começaremos por demonstrar a desigualdade da norma. Note-se que $|c(\alpha)| = |\sin\alpha|^{-\frac{1}{2}}$. Fazendo a troca de variáveis $t = ab(x-u-v)$, temos

$$\begin{aligned}
\|f \boxminus g\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}} |f \boxminus g| dx \\
&\leqslant \frac{ab}{\pi\sqrt{|\sin\alpha|}} \int_{\mathbb{R}^3} |f(u)||g(v)| e^{-2a^2b^2(x-u-v)^2} dudvdx \\
&= \frac{1}{\pi\sqrt{|\sin\alpha|}} \int_{\mathbb{R}^2} |f(u)||g(v)| dudv \int_{\mathbb{R}} e^{-2t^2} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi|\sin\alpha|}} \int_{\mathbb{R}} |f(u)| du \int_{\mathbb{R}} |g(v)| dv \\
&= \sqrt{2\pi|\sin\alpha|}\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

A desigualdade fica provada. Obviamente, essa desigualdade garante que a nova função definida em (3.34) pertence a $L^1(\mathbb{R})$. De seguida, vamos demonstrar a factorização usando a identidade $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{ixt}e^{-kt^2}dt = \frac{1}{\sqrt{2k}}e^{-\frac{1}{4k}x^2}$ para $k = \frac{1}{2}$. Com vista a isso,

$$\begin{aligned}
&\xi(x)R_\alpha[f](x)R_\alpha[g](x) \\
&= e^{-\frac{1}{2}x^2 - iax^2} \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{ia\left(x^2+u^2-2bxu\right)} du \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(v) e^{ia\left(x^2+v^2-2bxv\right)} dv \\
&= \frac{e^{-iax^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}t^2+ixt} dt \frac{c^2}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{ia\left(x^2+u^2-2bxu\right)} du \int_{\mathbb{R}} g(v) e^{ia\left(x^2+v^2-2bxv\right)} dv \\
&= \frac{c^2}{2\pi\sqrt{2\pi}} e^{-iax^2} \int_{\mathbb{R}^3} f(u)g(v) e^{-\frac{1}{2}t^2+ixt} e^{ia\left[2x^2+u^2+v^2-2bx(u+v)\right]} dudvdt \\
&= \frac{c^2}{2\pi\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} f(u)g(v) e^{-\frac{1}{2}t^2} e^{ia\left[x^2+u^2+v^2-2bx\left(u+v-\frac{t}{2ab}\right)\right]} dudvdt.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $u = u$, $v = v$ e $s = u + v - \frac{t}{2ab}$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\xi(x)R_\alpha[f](x)R_\alpha[g](x)\\
&\quad= -\frac{abc^2}{\pi\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(u)g(v)e^{-2a^2b^2(s-u-v)^2}e^{ia\left(x^2+u^2+v^2-2bxs\right)}dudvds\\
&\quad= \frac{c}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}\left[-\frac{abc}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(u)g(v)e^{ia\left(u^2+v^2-s^2\right)-2a^2b^2(s-u-v)^2}dudv\right]\\
&\qquad\times e^{ia\left(x^2+s^2-2bxs\right)}ds\\
&\quad= R_\alpha\left[-\frac{abc}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(u)g(v)e^{ia\left(u^2+v^2-s^2\right)-2a^2b^2(s-u-v)^2}dudv\right](x)\\
&\quad= R_\alpha[f \boxminus g](x).\blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 3.11. *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, então a transformada*

$$(f \boxdot g)(x) := \frac{c^2e^{in\alpha}}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\phi_n(x-u-v)f(u)g(v)e^{2ia\left(u^2+v^2-xu-xv+uv\right)}dudv \tag{3.36}$$

define a convolução que satisfaz a desigualdade

$$\|f \boxdot g\|_{L^1} \leqslant \|\phi_n\|_{L^1}\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1} \tag{3.37}$$

e a factorização

$$R_\alpha[f \boxdot g](x) = \Phi_n(x)R_\alpha[f](x)R_\alpha[g](x), \tag{3.38}$$

onde $\Phi_n(x) := \phi_n(x)e^{-2iax^2}$. Assim, o produto $f \boxdot g$ define uma nova função pertencente a $L^1(\mathbb{R})$ e satisfaz o Teorema da Convolução para NTFFr associado com a função de Hermite ϕ_n escalada pela função chirp e^{-2iax^2}.

Demonstração: Começamos por demonstrar a desigualdade (3.37). Fazendo a substituição de variáveis $u = u$, $v = v$ e $t = x - u - v$ e, usando a norma $\|\cdot\|_{L^1}$, temos

$$\begin{aligned}
\|f \boxdot g\|_{L^1} &= \int\limits_{\mathbb{R}} |f \boxdot g|dx\\
&\leqslant \frac{1}{2\pi|\sin\alpha|}\int\limits_{\mathbb{R}^3}|f(u)||g(v)||\phi_n(x-u-v)|dudvdx\\
&= \frac{1}{2\pi|\sin\alpha|}\int\limits_{\mathbb{R}}|f(u)|du\int\limits_{\mathbb{R}}|g(v)|dv\int\limits_{\mathbb{R}}|\phi_n(t)|dt\\
&= \sqrt{2\pi|\sin\alpha|}\|\phi_n\|_{L^1}\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

A última desigualdade implica que a função definida em (3.36) pertence a $L^1(\mathbb{R})$. Agora, vamos demonstrar a factorização (3.38). Pela definição da NTFFr, temos

$$
\begin{aligned}
&\Phi_n(x)R_\alpha[f](x)R_\alpha[g](x)\\
&= \frac{\phi_n(x)e^{-2iax}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(u)e^{ia\left(x^2+u^2-2bxu\right)}du\frac{c^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} g(v)e^{ia\left(x^2+v^2-2bxv\right)}dv\\
&= \frac{c^3e^{-2iax^2}}{\sqrt{(2\pi)^3}}\int\limits_{\mathbb{R}} \phi_n(x)e^{in\alpha}e^{ia\left(x^2+t^2-2bxt\right)}dt\int\limits_{\mathbb{R}} f(u)e^{ia\left(x^2+u^2-2bxu\right)}du\\
&\quad\times\int\limits_{\mathbb{R}} g(v)e^{ia\left(x^2+v^2-2bxv\right)}dv\\
&= \frac{c^3e^{in\alpha}}{\sqrt{(2\pi)^3}}\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(u)g(v)\phi_n(t)e^{-2iax^2}e^{ia\left[3x^2+u^2+v^2+t^2-2bx(u+v+t)\right]}dudvdt\\
&= \frac{c^3e^{in\alpha}}{\sqrt{(2\pi)^3}}\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(u)g(v)\phi_n(t)e^{ia\left[x^2+u^2+v^2+t^2-2bx(u+v+t)\right]}dudvdt.
\end{aligned}
$$

Fazendo a substituição de variáveis $u=u$, $v=v$ e $s=u+v+t$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\Phi_n(x)R_\alpha[f](x)R_\alpha[g](x)\\
&= \frac{c^3e^{in\alpha}}{\sqrt{(2\pi)^3}}\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(u)g(v)\phi_n(s-u-v)e^{ia\left[x^2+u^2+v^2+(s-u-v)^2-2bxs\right]}dudvds\\
&= \frac{c}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}\left[\frac{c^2e^{in\alpha}}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(u)g(v)\phi_n(s-u-v)e^{2ia\left(u^2+v^2-su-sv+uv\right)}dudv\right]\\
&\quad\times e^{ia\left(x^2+s^2-2bxs\right)}ds\\
&= R_\alpha\left[\frac{c^2e^{in\alpha}}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(u)g(v)\phi_n(s-u-v)e^{2ia\left(u^2+v^2-su-sv+uv\right)}dudv\right](x)\\
&= R_\alpha[f\boxdot g](x).\blacksquare
\end{aligned}
$$

Teorema 3.12. *Se $f,g\in L^1(\mathbb{R})$, então a transformada*

$$
(f\circledcirc g)(x) := \frac{e^{in\alpha}}{2\pi|\sin\alpha|}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\phi_n(x-u-v)f(u)g(v)e^{2ia\left(u^2-xu-uv+xv\right)}dudv \tag{3.39}
$$

define a convolução que satisfaz a desigualdade

$$
\|f\circledcirc g\|_{L^1}\leqslant\|\phi_n\|_{L^1}\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1} \tag{3.40}
$$

e a factorização

$$
R_\alpha[f\circledcirc g](x)=\phi_n(x)R_\alpha[f](x)R_{-\alpha}[g](x). \tag{3.41}
$$

Isto é, o produto $f\circledcirc g$ define uma função pertencente a $L^1(\mathbb{R})$ e satisfaz o Teorema da Convolução associada com NTFFr e a sua inversa (INTFFr) com o factor $\phi_n(x)$.

Demonstração: A desigualdade (3.40) demonstra-se de forma análoga à desigualdade (3.37). Vamos provar a identidade (3.41). Pela definição de NTFFr, temos

$$
\begin{aligned}
&\phi_n(x)R_\alpha[f](x)R_{-\alpha}[g](x)\\
&= e^{in\alpha}\frac{\sqrt{1-i\cot\alpha}}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(u)g(v)\phi_n(t)e^{ia\left[x^2+t^2+u^2+x^2-x^2-v^2-2bx(t+u-v)\right]}dudvdt\\
&= e^{in\alpha}\frac{\sqrt{1-i\cot\alpha}}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(u)g(v)\phi_n(t)e^{ia\left[x^2+t^2+u^2-v^2-2bx(t+u-v)\right]}dudvdt\\
&= e^{in\alpha}\frac{\sqrt{(1-i\cot\alpha)(1+\cot^2\alpha)}}{2\pi\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(u)g(v)\\
&\quad\times\phi_n(s-u+v)e^{ia\left[x^2+(s-u+v)^2+u^2-v^2-2bxs\right]}dudvds\\
&= e^{in\alpha}\frac{\sqrt{1-i\cot\alpha}}{|\sin\alpha|\sqrt{(2\pi)^3}}\int\limits_{\mathbb{R}}\left[\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(u)g(v)\phi_n(s-u+v)e^{ia\left(2u^2-2us-2uv+2sv\right)}dudv\right]\\
&\quad\times e^{ia\left(x^2+s^2-2bxs\right)}ds.\\
&= R_\alpha[f\circledcirc g](x).\blacksquare
\end{aligned}
$$

3.5.1 Desigualdade de Young para o Operador de Convolução

Nesta subsecção, apresentaremos algumas desigualdades da norma para as convoluções (3.34), (3.36) e (3.39). A fim de simplificar as notações, consideramos $\mathcal{E}_{\text{ch}}(t) := e^{iat^2}$, $\mathcal{E}_{\text{gd}}(t) := e^{-2a^2b^2t^2}$, onde $\mathcal{E}_{\text{ch}}$, $\mathcal{E}_{\text{gd}}$ são funções *chirp* e função de Gauss, respectivamente. Além disso,

$$\mathcal{E}(s,u,v) := e^{ia\left(u^2+v^2-s^2\right)-2a^2b^2(s-u-v)^2} = \mathcal{E}_{\text{ch}}(u)\mathcal{E}_{\text{ch}}(v)[\mathcal{E}_{\text{ch}}(s)]^{-1}\mathcal{E}_{\text{gd}}(s-u-v).$$

Recordamos a desigualdade de Minkowski

$$\left[\int_{\Theta_2}\left|\int_{\Theta_2}F(x,y)d\mu_1(x)\right|^s d\mu_2(y)\right]^{\frac{1}{s}} \leqslant \int_{\Theta_1}\left(\int_{\Theta_2}|F(x,y)|^s d\mu_2(y)\right)^{\frac{1}{s}}d\mu_1(x), \tag{3.42}$$

onde temos dois espaços de medida (Θ_1,μ_1) e (Θ_2,μ_2) e uma função mensurável $F(\cdot,\cdot):\Theta_1\times\Theta_2\to\mathbb{C}$.

Seja $1\leqslant p,q,r\leqslant\infty$ satisfazendo a seguinte condição:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+1.$$

Os espaços de Banach em consideração são $L^p(\mathbb{R})$, $L^q(\mathbb{R})$ e $L^r(\mathbb{R})$. No sentido de abreviar as notações $\boxminus$, $\boxdot$, $\circledcirc$, será usado um símbolo comum $\circledast$.

Teorema 3.13. *Seja $L^p(\mathbb{R})$, $L^q(\mathbb{R})$ e $L^r(\mathbb{R})$ espaços de Banach com $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}+1$. Então,*

$$
\begin{aligned}
\|f \circledast g\|_{L^r} &\leqslant C_1\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}, \quad se \quad f\in L^p(\mathbb{R}) \quad e \quad f\in L^q(\mathbb{R}), && (3.43)\\
\|f \circledast g\|_{L^s} &\leqslant C_2\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1} \quad para\ qualquer \quad s\geqslant 1 \quad e \quad f,g\in L^1(\mathbb{R}), && (3.44)
\end{aligned}
$$

onde C_1 e C_2 são constantes reais positivas.

Demonstração: *Parte I:* Demonstraremos a desigualdade (3.43)-(3.44) para a convolução (3.34) e omitiremos os casos (3.36) e (3.39) porque as demonstrações são análogas. Fazendo a substituição de variáveis $t := u+v$, teremos

$$
\begin{aligned}
h(s) &= -\frac{abc}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(u)g(v)\mathcal{E}_{\text{ch}}(u)\mathcal{E}_{\text{ch}}(v)[\mathcal{E}_{\text{ch}}(s)]^{-1}\mathcal{E}_{\text{gd}}(s-u-v)dudv\\
&= -\frac{abc}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}[\mathcal{E}_{\text{ch}}(s)]^{-1}\mathcal{E}_{\text{gd}}(s-t)dt\left\{\int\limits_{\mathbb{R}}[\mathcal{E}_{\text{ch}}(t-v)f(t-v)]\cdot[\mathcal{E}_{\text{ch}}(v)g(v)]dv\right\}\\
&= -\frac{abc}{\pi\mathcal{E}_{\text{ch}}(s)}\int\limits_{\mathbb{R}}\mathcal{E}_{\text{gd}}(s-t)F(t)dt, \qquad (3.45)
\end{aligned}
$$

onde $F(t) := \int\limits_{\mathbb{R}}[\mathcal{E}_{\text{ch}}(t-v)f(t-v)]\cdot[\mathcal{E}_{\text{ch}}(v)g(v)]dv$.

Facilmente notamos que $\mathcal{E}_{\text{ch}}f\in L^p(\mathbb{R})$ e $\mathcal{E}_{\text{ch}}g\in L^q(\mathbb{R})$. Aplicando a desigualdade de Young para convolução dessa classe resulta que $F\in L^r(\mathbb{R})$. Temos que $\left|\mathcal{E}_{\text{ch}}^{-1}(x)\right|=1$ e $\mathcal{E}_{\text{gd}}\in L^1(\mathbb{R})$. Mais uma vez, aplicando a desigualdade de Young para a convolução no caso $\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{1}=\dfrac{1}{r}+1$, o que significa que $h\in L^r(\mathbb{R})$.

Parte II: Agora, vamos demonstrar a desigualdade (3.44) para a convolução (3.34). Dado que a função $\mathcal{E}_{\text{gd}}$ é uma função rapidamente decrescente, $\mathcal{E}_{\text{gd}}\in L^s(\mathbb{R})$ para qualquer $s\geqslant 1$ e

$$\int_{\mathbb{R}}|\mathcal{E}_{\text{gd}}(\pm x\pm u\pm v)|^s dx = \|\mathcal{E}_{\text{gd}}\|_{L^s}^s \quad (u,v \ \text{ fixo em } \ \mathbb{R}).$$

Fazendo o uso da desigualdade de Minkowski, teremos

$$
\begin{aligned}
&\left[\int_{\mathbb{R}}\left|\int_{\mathbb{R}^2}\mathcal{E}_{\text{gd}}(x-u-v)f(u)g(v)dudv\right|^s dx\right]^{\frac{1}{s}}\\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{\mathbb{R}}|\mathcal{E}_{\text{gd}}(x-u-v)|^s|f(u)|^s|g(v)|^s dx\right)^{1/s}dudv\\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{\mathbb{R}}|\mathcal{E}_{\text{gd}}(x-u-v)|^s dx\right)^{1/s}|f(u)||g(v)|dudv\\
&= \|\mathcal{E}_{\text{gd}}\|_{L^s}\int_{\mathbb{R}^2}|f(u)||g(v)|dudv = \|\mathcal{E}_{\text{gd}}\|_{L^s}\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}.
\end{aligned}
$$

Assim obtemos a desigualdade (3.44).■

3.5.2 Solvabilidade de Equações de Convolução

Nesta subsecção, mais uma vez, estudaremos a solvabilidade de muitas equações de convolução associadas à NTFFr e obteremos a solução na forma explicita. Começaremos por considerar o seguinte tipo de equações integrais no espaço de Banach $L^1(\mathbb{R})$:

$$\lambda\varphi(s) + (k \boxminus \varphi)(s) = f(s), \tag{3.46}$$

onde $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in L^1(\mathbb{R})$ e φ é a incognita pertencente ao espaço $L^1(\mathbb{R})$. Usaremos a notação $D(s) := \lambda + \xi(s)R_\alpha[k](s)$. A Proposição seguinte é importante na demonstração do Teorema 3.14

Proposição 3.2.

(1) Se $\lambda \neq 0$, então $D(s) \neq 0$ para qualquer s pertencente fora de um intervalo finito.

(2) Se $D(s) \neq 0$ para qualquer $s \in \mathbb{R}$, então a função $\dfrac{1}{D(s)}$ é limitada e continua em $\mathbb{R}$.

Demonstração: Pelo Lema Clássico de Riemann-Lebesgue, a função $D(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$ e

$$\lim_{|x|\to\infty} D(x) = \lambda \neq 0,$$

quer dizer, $D(x)$ toma valor λ no infinito. Já que $\lambda \neq 0$ e $D(x)$ é contínua, existe um $C > 0$ tal que $D(x) \neq 0$ para todo $|x| > C$. O item (1) está provado.

(2) Devido à continuidade de D e $\lim\limits_{|s|\to\infty} D(s) = \lambda \neq 0$, existe $C_0 > 0$ e $\varepsilon_1 > 0$ tal que

$$\inf_{|s|>C_0} |D(s)| > \varepsilon_1.$$

Como D é contínuo e não toma valor zero no conjunto compacto

$$S(0, C_0) = \{s \in \mathbb{R} : |s| \leqslant C_0\},$$

existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que

$$\inf_{|s|\leqslant C_0} |D(s)| > \varepsilon_2.$$

Com isso, deduzimos que

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} \frac{1}{|D(s)|} \leqslant \max\left\{\frac{1}{\varepsilon_1}, \frac{1}{\varepsilon_2}\right\} < \infty.$$

O que implica que a função $\dfrac{1}{|D(s)|}$ é contínua e limitada em $\mathbb{R}$. Já que $R_\alpha[f] \in L^1(\mathbb{R})$, temos que $\left(\dfrac{R_\alpha[f]}{D}\right) \in L^1(\mathbb{R})$.■

Teorema 3.14. *Assuma-se que $D(s) \neq 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$, e uma das seguintes condições é satisfeita:*

(i) $\lambda \neq 0$ *e* $R_\alpha[f] \in L^1(\mathbb{R})$*;*

(ii) $\lambda = 0$ *e* $\dfrac{R_\alpha[f]}{R_\alpha[k]} \in L^1(\mathbb{R})$.

Então, a equação (3.31) tem solução em $L^1(\mathbb{R})$ se e somente se

$$R_{-\alpha}\left(\frac{R_\alpha[f]}{D}\right) \in L^1(\mathbb{R}).$$

Neste caso, a solução é dada por

$$\varphi = R_{-\alpha}\left(\frac{R_\alpha[f]}{D}\right).$$

Demonstração: *Necessidade:* Suponhamos que a equação de convolução (3.46) tem solução $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$. Aplicando R_α a ambos os membros da equação (3.46) e usando a identidade da factorização do Teorema 3.10, obtemos

$$D(s)R_\alpha[\varphi](s) = R_\alpha[f](s).$$

Uma vez que $D(s) \neq 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$R_\alpha[\varphi] = \frac{R_\alpha[f]}{D}. \tag{3.47}$$

Como a função $\dfrac{1}{D(x)}$ é limita, contínua (vide Proposição 3.3) e $R_\alpha[f] \in L^1(\mathbb{R})$, deduzimos que $\dfrac{R_\alpha[f]}{D} \in L^1(\mathbb{R})$. Agora, podemos aplicar a transformação inversa de $R_\alpha[f]$ a (3.47) para obter a solução indicada no teorema. A necessidade fica provada.
Suficiência: Consideremos a função.

$$\varphi := R_{-\alpha}\left(\frac{R_\alpha[f]}{D}\right).$$

Isto implica que $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, já que $R_\alpha[\varphi] = \dfrac{R_\alpha[f]}{D}$. Equivalentemente, $D(R_\alpha[f]) = R_\alpha[f]$. Por força da identidade da factorização e pelo Teorema de Unicidade de R_α (que existe embora não tenha sido apresentado),

$$R_\alpha[\lambda\varphi + (k \boxminus \varphi)] = R_\alpha[f].\blacksquare$$

Teorema 3.15. *Assuma-se que*

$$E_n(s) := \lambda + \phi_n(s) R_\alpha[k](s) \neq 0$$

para todo $s \in \mathbb{R}$, e uma das seguintes condições é satisfeita:

(i) $\lambda \neq 0$ *e* $R_\alpha[f] \in L^1(\mathbb{R})$;

(ii) $\lambda = 0$ *e* $\dfrac{R_\alpha[f]}{R_\alpha[k]} \in L^1(\mathbb{R})$.

Então, a equação

$$\lambda\varphi(s) + (k \boxdot \varphi)(s) = f(s)$$

tem solução em $L^1(\mathbb{R})$ se e somente se

$$R_{-\alpha}\left(\frac{R_\alpha[f]}{E_n}\right) \in L^1(\mathbb{R}).$$

Neste caso, a solução é dada por

$$\varphi = R_{-\alpha}\left(\frac{R_\alpha[f]}{E_n}\right).$$

Teorema 3.16. *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, então o produto $\maltese$ definido por*

$$(f \maltese g)(x) := \frac{e^{in\alpha}}{2\pi|\sin\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \phi_m(x+u-v) f(u) g(v) e^{2ia\left(v^2+xu-uv-2xv\right)} du dv \tag{3.48}$$

satisfaz as seguintes propriedades:

$$\|f \maltese g\|_{L^1} \leqslant \|\phi_n\|_{L^1} \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}, \quad R_\alpha[f \maltese g](x) = \phi_m(x) R_\alpha[f](x) R_{-\alpha}[g](x).$$

Quer dizer, o produto $f \maltese g$ define uma função pertencente a $L^1(\mathbb{R})$ e satisfaz o Teorema da Convolução associada com NTFFr e a sua inversa (INTFFr) com o factor $\phi_n(x)$.

Capítulo 4

Transformada de Fourier com Fase Quadrática

Neste capítulo faz-se uma abordagem em volta do operator integral de Fourier com fase quadrática. Concretamente, obtêm-se novas convoluções, desigualdade de Young, convergência na norma do integral oscilatório e, por último, analisa-se a existência de soluções em $L^1(\mathbb{R})$ da respectiva equação de convolução. Os resultados deste capítulo, foram extraídos do trabalho [14].

4.1 Operador Integral e suas Propriedades

Definição 4.1. *Seja $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ $(b \neq 0)$. Chama-se função fase quadrática à função definida por*

$$Q_{(a,b,c,d,e)}(x, y) := ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey. \tag{4.1}$$

No sentido de simplificar as fórmulas matemáticas, usaremos as notações

$$Q_{(a-e)}(x, y) := Q_{(a,b,c,d,e)}(x, y) \quad \text{e} \quad Q_{(a-c)}(x, y) := Q_{(a,b,c,0,0)}(x, y).$$

Definição 4.2. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$ ou $f \in L^2(\mathbb{R})$. Denota-se por $\mathbb{Q}$, o operador integral definido por*

$$(\mathbb{Q}f)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{iQ_{(a-e)}(x,y)} dy \tag{4.2}$$

o qual se designa por operador integral de Fourier de fase quadrática.

Continuamos a denotar por $S(\mathbb{R})$ o espaço de Schwartz e $C_0(\mathbb{R})$ o espaço de Banach de funções contínuas em $\mathbb{R}$ que convergem no infinito para zero munido da norma do supremo

$\|\cdot\|_\infty$. Além disso, no espaço $L^1(\mathbb{R})$ usar-se-á a norma $\|\cdot\|_{L^1}$ definida por

$$\|f\|_{L^1} := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} |f(y)|dy,$$

onde a constante $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ tem como objectivo facilitar os cálculos posteriores. No espaço $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, consideramos a norma

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(y)|^p dy \right)^{1/p}.$$

Lema 4.1 (Lema clássico de Riemann-Lebesgue)**.** *Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$. Então*

$$\lim_{x\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)e^{ixy}dy = 0.$$

Lema 4.2 (Riemann–Lebesgue)**.** *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, então $\mathbb{Q}f \in C_0(\mathbb{R})$ e $\|\mathbb{Q}f\|_\infty \leqslant \|f\|_{L^1}$.*

Demonstração: Uma vez que $\left|e^{iQ_{(a-e)(x,y)}}\right| = 1$, segue que

$$\|\mathbb{Q}f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |(\mathbb{Q}f)(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int\limits_{\mathbb{R}} e^{iQ_{(a-e)(x,y)}} f(y)dy \right|$$

$$\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \left|e^{iQ_{(a-e)}(x,y)}\right| |f(y)|dy = \|f\|_{L^1}.$$

Ademais, escolhendo $g(y) := e^{i(cy^2+ey)}f(y)$ facilmente notamos que $g \in L^1(\mathbb{R})$ se e somente se $f \in L^1(\mathbb{R})$. Usando o lema clássico de Riemann-Lebesgue, teremos

$$|(\mathbb{Q}f)(x)| = \frac{\left|e^{i(ax^2+dx)}\right|}{\sqrt{2\pi}} \left| \int\limits_{\mathbb{R}} g(y)e^{ibxy}dy \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int\limits_{\mathbb{R}} g(y)e^{ibxy}dy \right| \to 0,$$

quando $x \to \infty$.■

Lema 4.3. *A fórmula*

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\sin\lambda(x-t)}{x-t}dt$$

cumpre-se se $\dfrac{f(x)}{1+|x|}$ pertence a $L^1(\mathbb{R})$.

Teorema 4.1 (Teorema do Inverso). *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $\mathbb{Q}f \in L^1(\mathbb{R})$, então*

$$f(x) = \frac{b}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (\mathbb{Q}f)(y) e^{-iQ_{(a-e)}(x,y)} dy \tag{4.3}$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Primeiro, demonstraremos a fórmula do inverso para $f \in S$. Neste caso, pelo Lema 4.3 e cálculos directos, temos

$$\begin{aligned}
\frac{b}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (\mathbb{Q}f)(y) e^{-iQ_{(a-e)}(x,y)} dy &= \frac{b}{2\pi} \lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \int_{\mathbb{R}} e^{-iQ_{(a-e)}(x,y)} e^{iQ_{(a-e)}(y,u)} f(u) du dy \\
&= \frac{b}{2\pi} e^{-i(cx^2+ex)} \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{i(cu^2+eu)} du \lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-iby(x-u)} dy \\
&= \frac{1}{\pi} e^{-i(cx^2+ex)} \lim_{\lambda\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{i(cu^2+eu)} \frac{\sin b\lambda(x-u)}{x-u} du \\
&= e^{-i(cx^2+ex)} f(x) e^{i(cx^2+ex)} = f(x).
\end{aligned}$$

Contudo, $\mathbb{Q}$ é um operador linear, contínuo de S para S e sobrejetivo. Por cálculos diretos temos que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)(\mathbb{Q}g)(x) dx = \int_{\mathbb{R}} g(y)(\mathbb{Q}f) dy.$$

Usando essa última identidade e a equação (4.3), para $g \in S$, teremos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x)(\mathbb{Q}g)(x) dx &= \frac{b}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-iQ_{(a-e)}(x,y)} (\mathbb{Q}g)(x) dx \right) (\mathbb{Q}f)(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} (\mathbb{Q}g)(x) \left(\frac{b}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (\mathbb{Q}f)(y) e^{-iQ_{(a-e)}(x,y)} dy \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f_0(x)(\mathbb{Q}g)(x) dx,
\end{aligned}$$

onde

$$f_0(x) := \frac{b}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (\mathbb{Q}f)(y) e^{-iQ_{(a-e)}}(y,x) dy.$$

Pela equação (4.3) $\mathbb{Q}g$ cobre todo espaço S quando $g \in S$. Por isso,

$$\int_{\mathbb{R}} (f_0(x) - f(x))\Phi(x) = 0$$

para qualquer $\Phi \in S$. Uma vez que S é denso in $L^1(\mathbb{R})$, temos que $f_0(x) - f(x) = 0$ para quase todos os $x \in \mathbb{R}$.■

Corolário 4.1 (Unicidade)**.** *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $\mathbb{Q}f = 0$, então $f = 0$.*

Teorema 4.2 (Teorema de Plancherel)**.** *Existe um operador isomorfo linear $\overline{\mathbb{Q}} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ que é determinado exclusivamente pela relação de $\overline{\mathbb{Q}}f = \mathbb{Q}f$ para todo $f \in S$. O operador inverso também é determinado de maneira exclusiva por $\overline{\mathbb{Q}}^{-1}f = \mathbb{Q}^{-1}f$ para qualquer $f \in S$.*

Teorema 4.3 (Teorema de Plancherel)**.** *Seja f uma função de variável complexa pertence a $L^2(\mathbb{R})$ e seja*

$$\mathbb{Q}(x,k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{|y|<k} f(y) e^{iQ_{(a-e)}(x,y)} dy.$$

Então, quando $k \to \infty$, $\mathbb{Q}(x,k)$ converge fortemente para a função $\mathbb{Q}f$. Reciprocamente,

$$f(x,k) := \frac{b}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{|y|<k} (\mathbb{Q}f)(y) e^{-iQ_{(a-e)}(y,x)} dy$$

converge fortemente para f.

Teorema 4.4 (Identidade de Parseval)**.**

(i) Para qualquer $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, cumpre-se a seguinte identidade

$$\langle \mathbb{Q}f, \mathbb{Q}g \rangle = \frac{1}{|b|} \langle f, g \rangle,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o usual produto interno em $L^2(\mathbb{R})$ dado por $\langle f, g \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)} dx$.

No caso particular quando $f = g$, temos

$$\|\mathbb{Q}f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{|b|} \|f\|_{L^2}^2. \tag{4.4}$$

(ii) Se $|b| = 1$, então $\mathbb{Q}$ define um operador unitário em $L^2(\mathbb{R})$.

Demonstração: Consideremos $b > 0$. Fazendo algumas manipulações e o usando adequadamente o Lema 4.3, teremos

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbb{Q}f, \mathbb{Q}g\rangle &= \int_{\mathbb{R}} (\mathbb{Q}f)(x)\overline{(\mathbb{Q}g)(x)}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{iQ_{(a-e)}(x,y)}e^{-iQ_{(a-e)}(x,u)}f(y)\overline{f(u)}dydudx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{i(cy^2+ey)}e^{-i(cu^2+eu)}f(y)\overline{g(u)}dydy\int_{\mathbb{R}} e^{ibx(y-u)}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{i(cy^2+ey)}e^{-i(cu^2+eu)}f(y)\overline{g(u)}dydu\left(\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ibx(y-u)}dx\right) \\
&= \frac{1}{b}\int_{\mathbb{R}} e^{i(cy^2+ey)}f(y)\left(\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\left[e^{-(cu^2+eu)}\overline{g(u)}\right]\frac{\sin b\lambda(y-u)}{y-u}du\right)dy \\
&= \frac{1}{b}\int_{\mathbb{R}} e^{i(cy^2+ey)}f(y)e^{-i(cy^2+ey)}\overline{g(y)}dy \\
&= \frac{1}{b}\int_{\mathbb{R}} f(y)\overline{g(y)}dy = \frac{1}{b}\langle f, g\rangle.
\end{aligned}
$$

Analogamente, se $b<0$ então $\langle \mathbb{Q}f, \mathbb{Q}g\rangle = -\frac{1}{b}\langle f, g\rangle$. Fica assim provada a proposição (i). Pelo Teorema 4.2 e proposição (i), o operador $\mathbb{Q}$ é unitário quando $b=1$.■

4.2 Novas Convoluções

Nestas secção fazer-se-á a apresentação de novas convoluções associadas ao operador $\mathbb{Q}$. De seguida, mostraremos algumas identidades de factorização.

Para demonstrar os teoremas abaixo usaremos a seguinte identidade

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{ixt}e^{-kt^2}dt = \frac{1}{\sqrt{2k}}e^{-\frac{x^2}{4k}}, \quad k>0, \tag{4.5}$$

para qualquer $x\in\mathbb{R}$.

Teorema 4.5. *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ e $\Omega_1(x) := e^{-\frac{x^2}{2}-aix^2}$, então o elemento denotado por $f \overset{\Omega_1}{\underset{\mathbb{Q}}{\star}} g$ define a convolução*

$$\left(f \overset{\Omega_1}{\underset{\mathbb{Q}}{\star}} g\right)(x) := \frac{b}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(u)g(u)e^{i(cu^2+cv^2-cx^2+eu+ev-ex)-\frac{(bx-bu-bv-d)^2}{2}}dudv \tag{4.6}$$

que cumpre a seguinte desigualdade e a factorização

$$\left\| f \overset{\Omega_1}{\underset{\mathbb{Q}}{\star}} g \right\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}, \quad \mathbb{Q}\left(f \overset{\Omega_1}{\underset{\mathbb{Q}}{\star}} g \right)(x) = \Omega_1(x)(\mathbb{Q}f)(x)(\mathbb{Q}g)(x).$$

Demonstração: Primeiro, vamos demonstrar a desigualdade da norma. Fazendo a substituição de variáveis $t := bx - bu - bv - d$, teremos

$$\begin{aligned}
\left\| f \overset{\Omega_1}{\underset{\mathbb{Q}}{\star}} g \right\|_{L^1} &= \frac{|b|}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(u)g(u) e^{i(cu^2+cv^2-cx^2+eu+ev-ex)-\frac{(bx-bu-bv-d)^2}{2}} dudv \right| dx \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(u)|du \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |g(v)|dv \frac{|b|}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left| e^{i(cu^2+cv^2-cx^2+eu+ev-ex)-\frac{(bx-bu-bv-d)^2}{2}} \right| dx \\
&= \frac{|b|\|f\|_{L1}\|g\|_{L1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(bx-bu-bv-d)^2}{2}} dx \\
&= \frac{\|f\|_{L1}\|g\|_{L1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Faz-se notar que na última igualdade se usou (4.5). Para demonstrar a factorização usamos o sentido inverso, isto é, saímos da factorização para o operador de convolução:

$\Omega_1(x)(\mathbb{Q}f)(x)(\mathbb{Q}g)(x)$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\frac{x^2}{2}-aix^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{iQ_{(a-e)(x,u)}} f(u)du \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{iQ_{(a-e)}(x,v)} g(u)dv \\
&= e^{-aix^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}+ixt} dt \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{iQ_{(a-e)}(x,u)} e^{iQ_{(a-e)}(x,y)} f(u)g(v)dudv \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(ax^2+cu^2+cv^2+bx(u+v+\frac{t}{b}+\frac{d}{b})+dx+eu+ev)} e^{-\frac{t^2}{2}} f(u)g(v)dudvdt.
\end{aligned}$$

Fazendo a troca de variáveis $u = u$, $v = v$ e $s = u + v + \frac{t}{b} + \frac{d}{b}$, teremos

$\Omega_1(x)(\mathbb{Q}f)(x)(\mathbb{Q}g)(x)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b}{2\pi\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{iQ_{(a-e)}(x,s)} e^{i(cu^2+cv^2-cs^2+eu+ev-es)-\frac{(bs-bu-bv-d)^2}{2}} f(u)g(v)dudvds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{iQ_{(a-e)}(x,s)} \left[\frac{b}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(cu^2+cv^2-cs^2+eu+ev-es)-\frac{(bs-bu-bv-d)^2}{2}} f(u)g(v)dudv \right] ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{iQ_{(a-e)}(x,s)} \left(f \overset{\Omega_1}{\underset{\mathbb{Q}}{\star}} g \right)(s)ds = \mathbb{Q}\left(f \overset{\Omega_1}{\underset{\mathbb{Q}}{\star}} g \right)(x). \blacksquare
\end{aligned}$$

Observação 4.1.

(a) Quando $a = c = d = e = 0$ e $b = \pm 1$, $\mathbb{Q}$ é a Transformada de Fourier e a Transformada de Fourier Inversa, respectivamente. O peso será $\Omega_1(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Então, a convolução (4.6) associado à Transformada de Fourier toma a forma

$$\left(f \overset{\Omega_1}{\underset{\mathbb{Q}}{\star}} g\right)(x) = \frac{\pm 1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-u-v)^2}{2}} f(u)g(u)dudv;$$

(b) Seja $a = c = \dfrac{\operatorname{cotg}(\alpha)}{2}$, $b = -\sec(\alpha)$. Em tal caso particular notamos que $\mathbb{Q}$ é simplesmente a Nova Transformada de Fourier Fracionária. A convolução (4.6) associada a Transformada de Fourier toma a forma

$$\left(f \overset{\Omega_1}{\underset{\mathbb{Q}}{\star}} g\right)(x) = \frac{b}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{ia(u^2+v^2-x^2)-\frac{b^2}{2}(x-u-v)^2} f(u)g(v)dudv;$$

(c) Se $d = e = 0$, então $\mathbb{Q}$ representa a Transformada Linear Canónica e a convolução (4.6) ganha a seguinte representação

$$\left(f \overset{\Omega_1}{\underset{\mathbb{Q}}{\star}} g\right)(x) = \frac{b}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{ic(u^2+v^2-x^2)-\frac{b^2}{2}(x-u-v)^2} f(u)g(v)dudv.$$

Teorema 4.6. *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ e $\Omega_2(x) := e^{-\frac{x^2}{2}-aix^2-dix}$, então o elemento denotado por $f \overset{\Omega_2}{\underset{\mathbb{Q}}{\otimes}} g$ define a convolução*

$$\left(f \overset{\Omega_2}{\underset{\mathbb{Q}}{\otimes}} g\right)(x) := \frac{b}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(u)g(u) e^{i(cu^2+cv^2-cx^2+eu+ev-ex)-\frac{(bx-bu-bv)^2}{2}} dudv \tag{4.7}$$

e cumpre-se as seguintes desigualdade e a factorização

$$\left\| f \overset{\Omega_2}{\underset{\mathbb{Q}}{\otimes}} g \right\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}, \quad \mathbb{Q}\left(f \overset{\Omega_2}{\underset{\mathbb{Q}}{\otimes}} g\right)(x) = \Omega_2(x)(\mathbb{Q}f)(x)(\mathbb{Q}g)(x).$$

Demonstração: Fazendo a substituição de variáveis $t := bx - bu - bv$, teremos

$$\begin{aligned}
\left\| f \overset{\Omega_2}{\underset{\mathbb{Q}}{\otimes}} g \right\|_{L^1} &= \frac{|b|}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(u)g(u) e^{i(cu^2+cv^2-cx^2+eu+ev-ex)-\frac{(bx-bu-bv)^2}{2}} dudv \right| dx \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(u)|du \\
&\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |g(v)|dv \frac{|b|}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left| e^{i(cu^2+cv^2-cx^2+eu+ev-ex)-\frac{(bx-bu-bv)^2}{2}} \right| dx \\
&= \frac{|b|\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(bx-bu-bv)^2}{2}} dx \\
&= \frac{\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1},
\end{aligned}$$

onde novamente usamos (4.5) na última igualdade. De seguida, temos que

$\Omega_2(x)(\mathbb{Q}f)(x)(\mathbb{Q}g)(x) =$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\frac{x^2}{2}-aix^2-dix}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{iQ_{(a-e)}(x,u)}f(u)du\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{iQ_{(a-e)}(x,v)}g(v)dv\\
&= e^{-aix^2-dix}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}+ixt}dt\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{iQ_{(a-e)}(x,u)}f(u)du\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{iQ_{(a-e)}(x,v)}g(v)dv\\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{i(ax^2+cu^2+cv^2+bx(u+v+\frac{t}{b})+dx+eu+ev)}e^{-\frac{t^2}{2}}f(u)g(u)dudvdt.
\end{aligned}$$

Usando agora $u = u$, $v = v$, e $s = u + v + \dfrac{t}{b}$, obtemos

$\Omega_2(x)(\mathbb{Q}f)(x)(\mathbb{Q}g)(x)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b}{2\pi\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{iQ_{(a-e)}(x,s)}e^{i(cu^2+cv^2-cs^2+eu+ev-es)-\frac{(bs-bu-bv)^2}{2}}f(u)g(v)dudvds\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{iQ_{(a-e)}(x,s)}\left[\frac{b}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(u)g(v)e^{i(cu^2+cv^2-cs^2+eu+ev-es)-\frac{(bs-bu-bv)^2}{2}}dudv\right]ds\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{iQ_{(a-e)}(x,s)}\left(f \overset{\Omega_2}{\underset{\mathbb{Q}}{\otimes}} g\right)(s)ds = \mathbb{Q}\left(f \overset{\Omega_2}{\underset{\mathbb{Q}}{\otimes}} g\right)(x).\blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 4.7. *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ e $\Omega_3(x) := e^{-\frac{x^2}{2}}$, então o elemento denotado por $f \overset{\Omega_3}{\underset{\mathbb{Q}}{\odot}} g$ define a convolução*

$$\left(f \overset{\Omega_3}{\underset{\mathbb{Q}}{\odot}} g\right)\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) := \frac{b}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(u)g(u)e^{i(cu^2+cv^2-c\frac{x^2}{2}+eu+ev-\frac{ex}{\sqrt{2}})-\frac{(bx-bu-bv-2d+d\sqrt{2})^2}{2}}dudv \tag{4.8}$$

que cumpre a seguinte desigualdade e a factorização

$$\left\|f \overset{\Omega_3}{\underset{\mathbb{Q}}{\odot}} g\right\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}, \quad \mathbb{Q}\left(f \overset{\Omega_3}{\underset{\mathbb{Q}}{\odot}} g\right)(\sqrt{2}x) = \Omega_3(x)(\mathbb{Q}f)(x)(\mathbb{Q}g)(x).$$

Demonstração: De forma análoga ao que anteriormente foi realizado, fazendo a substituição de variáveis $t := \sqrt{2}bx - bu - bv - 2d + d\sqrt{2}$, teremos

$\left\|f \overset{\Omega_3}{\underset{\mathbb{Q}}{\odot}} g\right\|_{L^1} =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{|b|}{\sqrt{4\pi^3}}\int_{\mathbb{R}}\left|\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(u)g(u)e^{i(cu^2+cv^2-c\frac{x^2}{2}+eu+ev-ex)-\frac{(\sqrt{2}bx-bu-bv-2d+d\sqrt{2})^2}{2}}dudv\right|dx\\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}|f(u)|du\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}|g(v)|dv\frac{\sqrt{2}|b|}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left|e^{i(cu^2+cv^2-c\frac{x^2}{2}+eu+ev-ex)-\frac{(\sqrt{2}bx-bu-bv-2d+d\sqrt{2})^2}{2}}\right|dx\\
&= \frac{\sqrt{2}|b|\|f\|_{L1}\|g\|_{L1}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(\sqrt{2}bx-bu-bv-2d+d\sqrt{2})^2}{2}}dx\\
&= \frac{\|f\|_{L1}\|g\|_{L1}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1},
\end{aligned}$$

por uso de (4.5).

Por conseguinte, fazendo as substituições adequadas temos que

$\Omega_3(x)(\mathbb{Q}f)(x)(\mathbb{Q}g)(x)$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{iQ_{(a-e)}(x,u)}f(u)du\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{iQ_{(a-e)}(x,v)}g(v)dv\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}+ixt}dt\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{iQ_{(a-e)}(x,u)}e^{iQ_{(a-e)}(x,v)}f(u)g(v)dudv\\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{i(2ax^2+cu^2+cv^2+bx(u+v+\frac{t}{b}+\frac{2d}{b}-\frac{d\sqrt{2}}{b})+\sqrt{2}dx+eu+ev)}e^{-\frac{t^2}{2}}f(u)g(v)dudvdt.
\end{aligned}
$$

De forma similar, fazendo a mudança de variáveis:

$$u = u, \quad v = v \ \text{ e } \ s = u+v+\frac{t}{b}+\frac{2d}{b}-\frac{d\sqrt{2}}{b},$$

teremos,

$\Omega_3(x)(\mathbb{Q}f)(x)(\mathbb{Q}g)(x)$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{iQ_{(a-e)}(\sqrt{2},\frac{s}{\sqrt{2}})}f(u)g(v)e^{i(cu^2+cv^2-c\frac{s^2}{2}+eu+ev-\frac{es}{\sqrt{2}})-\frac{(bs-bu-bv-2d+d\sqrt{2})^2}{2}}dudvds\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{iQ_{(a-e)}(\sqrt{2}x,\frac{s}{\sqrt{2}})}\\
&\quad\times\left[\frac{b}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(u)g(v)e^{i(cu^2+cv^2-c\frac{s^2}{2}+eu+ev-\frac{es}{\sqrt{2}})-\frac{(bs-bu-bv-2d+d\sqrt{2})^2}{2}}dudv\right]d\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{iQ_{(a-e)}(\sqrt{2}x,\frac{s}{\sqrt{2}})}\left(f\overset{\Omega_3}{\underset{\mathbb{Q}}{\odot}}g\right)\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)d\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) = \mathbb{Q}\left(f\overset{\Omega_3}{\underset{\mathbb{Q}}{\odot}}g\right)(\sqrt{2}x).\blacksquare
\end{aligned}
$$

No sentido de simplificar as notações, consideramos $\mathcal{E}_{\text{ch}} := e^{-it(at^2+dt)}$ e $\mathcal{E}_{\text{gd}} := e^{-\frac{|b|}{2}t^2}$, onde $\mathcal{E}_{\text{ch}}$, $\mathcal{E}_{\text{gd}}$ são funções *chirp* e função de Gauss, respectivamente. Ademais, $\Omega_4(t) := \mathcal{E}_{\text{ch}}(t)\cdot\mathcal{E}_{\text{gd}}(t)$.

Teorema 4.8. *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ e $\Omega_4(x) := \mathcal{E}_{\text{ch}}(t)\cdot\mathcal{E}_{\text{gd}}(t)$, então o elemento denotado por $f\overset{\Omega_4}{\underset{\mathbb{Q}}{\boxtimes}}g$ define a convolução*

$$\left(f\overset{\Omega_4}{\underset{\mathbb{Q}}{\boxtimes}}g\right)(x) := \frac{\sqrt{|b|}[\mathcal{E}_{\text{ch}}(x)]^{-1}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{E}_{\text{gd}}(x-u-v)[\mathcal{E}_{\text{ch}}(u)f(u)][\mathcal{E}_{\text{ch}}(v)g(v)]dudv \quad (4.9)$$

que cumpre a desigualdade e a factorização

$$\left\|f\overset{\Omega_4}{\underset{\mathbb{Q}}{\boxtimes}}g\right\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}, \quad \mathbb{Q}\left(f\overset{\Omega_3}{\underset{\mathbb{Q}}{\boxtimes}}g\right)(x) = \Omega_4(x)(\mathbb{Q}f)(x)(\mathbb{Q}g)(x).$$

Demonstração: Primeiro, vamos demonstrar a desigualdade da norma. Fazendo a substituição de variáveis $t := \sqrt{|b|}(x-u-v)$, teremos

$$\begin{aligned}
\left\| f \underset{\mathbb{Q}}{\overset{\Omega_4}{\boxtimes}} g \right\|_{L^1} &= \frac{\sqrt{|b|}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(u)g(u) e^{i(at^2+dt-au^2-du-av^2-dv)-\frac{|b|(x-u-v)^2}{2}} dudv \right| dx \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(u)| du \\
&\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |g(v)| dv \frac{\sqrt{|b|}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left| e^{i(at^2+dt-au^2-du-av^2-dv)-\frac{|b|(x-u-v)^2}{2}} \right| dx \\
&= \frac{\sqrt{|b|}\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|b|(x-u-v)^2}{2}} dx \\
&= \frac{\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

$\Omega_4(x)(\mathbb{Q}f)(x)(\mathbb{Q}g)(x) =$

$$\begin{aligned}
&= e^{-i(ax^2+dx)} e^{-\frac{|b|}{2}x^2} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{iQ_{(a-e)}(x,u)} e^{iQ_{(a-e)}(x,v)} f(u)g(v) dudv \\
&= e^{-(ax^2+dx)} \sqrt{|b|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ibx-\frac{|b|}{2}t^2} dt \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{iQ_{(a-e)}(x,u)} e^{iQ_{(a-e)}(x,v)} f(u)g(v) dudv \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(ax^2+bx(u+v+t)+cu^2+cv^2+dx+eu+ev)} e^{-\frac{|b|}{2}t^2} f(u)g(u) dudvdt.
\end{aligned}$$

Fazendo a troca de variáveis $u=u$, $v=v$ e $s=u+v+t$, teremos
$\Omega_4(x)(\mathbb{Q}f)(x)(\mathbb{Q}g)(x) =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{|b|}}{2\pi\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{iQ_{(a-e)}(x,s)} e^{i(cu^2+cv^2-cs^2+eu+ev-es)-\frac{|b|}{2}(s-u-v)^2} f(u)g(v) dudvds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{iQ_{(a-e)}(x,s)} \left[\frac{\sqrt{|b|}[\mathcal{E}_{\mathrm{ch}}(s)]^{-1}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_{\mathrm{gd}}(s-u-v)[\mathcal{E}_{\mathrm{ch}}(u)f(u)][\mathcal{E}_{\mathrm{ch}}g(v)] dudv \right] ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{iQ_{(a-e)}(x,s)} \left(f \underset{\mathbb{Q}}{\overset{\Omega_4}{\boxtimes}} g \right)(s) ds = \mathbb{Q}\left(f \underset{\mathbb{Q}}{\overset{\Omega_4}{\boxtimes}} g \right)(x). \blacksquare
\end{aligned}$$

4.3 Aplicações

Nesta última secção, ilustraremos algumas possíveis aplicações matemáticas para as convoluções e o operador integral considerado abaixo. Concretamente, obteremos a nova desigualdade de Young, convergência da norma do integral oscilatório e a solução da equação de convolução integral.

4.3.1 Desigualdade de Young para o Operador de Convolução

Na presente subsecção, obter-se-á algumas desigualdades da norma das convoluções (4.6)-(4.9) de uma forma geral.

Seja $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$ satisfazendo a seguinte condição:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1.$$

Os espaços de Banach em consideração são $L^p(\mathbb{R})$, $L^q(\mathbb{R})$ e $L^r(\mathbb{R})$. No sentido de abreviar as notações $\star$, $\otimes$, $\odot$, $\boxtimes$, será usado um símbolo comum $\circledast$.

Teorema 4.9. *Seja $L^p(\mathbb{R})$, $L^q(\mathbb{R})$ e $L^r(\mathbb{R})$ espaços de Banach com $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+1$. Então,*

$$\begin{aligned} \|f \circledast g\|_{L^r} &\leqslant C_1\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}, \quad \textit{se} \quad f \in L^p(\mathbb{R}) \quad \textit{e} \quad f \in L^q(\mathbb{R}), & (4.10)\\ \|f \circledast g\|_{L^s} &\leqslant C_2\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1} \quad \textit{para qualquer} \quad s \geqslant 1 \quad \textit{e} \quad f, g \in L^1(\mathbb{R}), & (4.11)\end{aligned}$$

onde C_1 e C_2 são constantes reais positivas.

Demonstração: *Parte I:* Vamos começar por demonstrar a desigualdade (4.10) para convolução (4.9). Fazendo a substituição de variável $t := u + v$, teremos

$$\begin{aligned} h(x) &:= \left(f \overset{\Omega_4}{\underset{\mathbb{Q}}{\boxtimes}} g\right)(x)\\ &= \frac{\sqrt{|b|}[\mathcal{E}_{\text{ch}}(x)]^{-1}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_{\text{gd}}(x-u-v)[\mathcal{E}_{\text{ch}}(u)f(u)][\mathcal{E}_{ch}(v)f(v)]dudv\\ &= \frac{\sqrt{|b|}[\mathcal{E}_{\text{ch}}(x)]^{-1}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_{\text{gd}}(x-t)dt\left(\int_{\mathbb{R}}[\mathcal{E}_{\text{ch}}(t-v)f(t-v)][\mathcal{E}_{\text{ch}}(v)g(v)]dv\right)\\ &= \frac{\sqrt{|b|}[\mathcal{E}_{\text{ch}}(x)]^{-1}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_{\text{gd}}(x-t)F(t)dt,\end{aligned}$$

onde

$$F(t) := \int_{\mathbb{R}}[\mathcal{E}_{\text{ch}}(t-v)f(t-v)][\mathcal{E}_{\text{ch}}(v)g(v)]dv.$$

Facilmente notamos que $\mathcal{E}_{\text{ch}}f \in L^p(\mathbb{R})$ e $\mathcal{E}_{\text{ch}}g \in L^q(\mathbb{R})$. Aplicando a desigualdade de Young para a convolução dessa classe resulta que $F \in L^r(\mathbb{R})$. Temos que $\left|\mathcal{E}_{\text{ch}}^{-1}(x)\right| = 1$ e $\mathcal{E}_{\text{gd}} \in L^1(\mathbb{R})$. Mais uma vez, aplicando a desigualdade de Young para a convolução no caso $\frac{1}{r}+\frac{1}{1}=\frac{1}{r}+1$, temos que $h \in L^r(\mathbb{R})$.

Parte II: Agora, vamos demonstrar a desigualdade (4.11) para a convolução (4.9). Dado que a função $\mathcal{E}_{\text{gd}}$ é uma função rapidamente decrescente, $\mathcal{E}_{\text{gd}} \in L^s(\mathbb{R})$ para qualquer $s \geqslant 1$ e

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{E}_{\text{gd}}(\pm x \pm u \pm v)|^s dx = \|\mathcal{E}_{\text{gd}}\|_{L^s}^s \quad (u, v \text{ fixos em } \mathbb{R}).$$

Fazendo o uso da desigualdade de Minkowski, teremos

$$\left[\int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{E}_{\text{gd}}(x-u-v) f(u) g(v) du dv \right|^s dx \right]^{\frac{1}{s}}$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{E}_{\text{gd}}(x-u-v)|^s |f(u)|^s |g(v)|^s dx \right)^{1/s} du dv$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{E}_{\text{gd}}(x-u-v)|^s dx \right)^{1/s} |f(u)||g(v)| du dv$$

$$= \|\mathcal{E}_{\text{gd}}\|_{L^s} \int_{\mathbb{R}^2} |f(u)||g(v)| du dv = \|\mathcal{E}_{\text{gd}}\|_{L^s} \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

Assim, obtemos a desigualdade (4.11).■

4.3.2 Convergência da Norma do Integral Oscilatório

A teoria geral sobre integrais oscilatórios tem origem na Análise Harmonica, na qual o caso da Transformada de Fourier é provavelmente um dos melhores exemplos de integral oscilatório.

Assim, de um modo geral, consideremos o integral oscilatório da Transformada de Fourier com fase-quadrática definido por

$$(\mathbb{T}_\lambda \phi)(x) := \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda Q_{(a-e)}(x,y)} \psi(x,y) \phi(y) dy, \tag{4.12}$$

onde $Q_{(a-e)}(x,y)$ definido em (4.1) é a fase e $\psi(x,y)$ é uma função suave com suporte compacto em $\mathbb{R}$ à qual se chama amplitude. A ideia é entender o comportamento da norma de $\mathbb{T}$ quando λ varia em $\mathbb{R}$. O caso em que $\lambda = 0$ é óbvio (trata-se do caso degenerado) e será omitido. Consideraremos o caso em que $\lambda > 0$.

Teorema 4.10. *$\mathbb{T}_\lambda$ pode ser estendido a um operador linear definido em $L^2(\mathbb{R})$ com a norma*

$$\|\mathbb{T}_\lambda\|_{L^2} \leqslant \frac{C}{\sqrt{|\lambda|}},$$

onde a constante C é independente de λ.

Demonstração: Seja $M \subset \mathbb{R}^2$ um suporte compacto de ψ, $\mathcal{X}_M(x)$ e $\mathcal{X}_M(y)$ funções características de variáveis x e y, respectivamente. Facilmente notamos que $\mathbb{T}_\lambda \phi \in L^2(\mathbb{R})$ se $\phi \in L^2(\mathbb{R})$. Contudo, tendo em conta que $\psi(x,y)$ é uniformemente limitada em $M \times M$, existe uma constante C tal que $|\psi(x,y)| \leqslant C < \infty$. Usando as desigualdades de Minkowski e Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, teremos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |(\mathbb{T}_\lambda \phi(x))|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}} dx \left| \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda Q_{(a-e)}(x,y)} \mathcal{X}_M(x)\mathcal{X}_M(y)\psi(x,y)\phi(y)dy \right|^2 \\
&\leqslant \left[\int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_M(y)|\phi(y)|dy \left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_M(x)|\psi(x,y)|^2 dx}_{\text{limitado por C}} \right)^{1/2} \right]^2 \\
&\leqslant C \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_M(y)|\phi(y)|dy \right)^2 \\
&\leqslant C \left(\int_M \mathcal{X}_M(y)dy \right) \left(\int_M |\phi(y)|^2 dy \right) < \infty.
\end{aligned}$$

Provemos a convergência da norma. Pelos pressupostos, $\psi(x,y)$ pode ser considerado como uma função integrável em L^2 em relação a variável $y \in \mathbb{R}$ e $x \in M$ fixo, por $\psi(x,y) = \mathcal{X}_M(y)\psi(x,y)$ para $y \in \mathbb{R}$. Adicionalmente, para qualquer $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\psi(x,y)f(y)$ é também integrável em relação a variável y, para $x \in M$ fixo, como sendo

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{X}_M(y)\psi(x,y)f(y)|^2 dy = \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{X}_M(y)\psi(x,y)|^2 |f(y)|^2 dy \leqslant C \int_{\mathbb{R}} |f(y)|^2 dy < \infty.$$

Por isso, podemos escrever $(\mathbb{T}f)(x) = (\mathbb{Q}_{\lambda(a-e)}\psi f)$ onde $\mathbb{Q}_{\lambda(a-e)}$ está definido da mesma forma que $\mathbb{Q}_{(a-e)}$ quando denotada pela equação (4.2), mas com fase $\lambda Q_{(a-e)}(x,y)$. Usando a equação (4.4), desigualdade de Minkowski e a desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, teremos

$$\begin{aligned}
\|(\mathbb{T}_\lambda f)(x)\|_{L^2}^2 &= \|(\mathbb{Q}_{\lambda(a-e)}\psi f)(x)\|_{L^2}^2 = \frac{1}{|b\lambda|} \|\langle (\psi f)(y), (\psi f)(y) \rangle\|_{L^2}^2 \\
&= \frac{1}{|b\lambda|} \int_{\mathbb{R}} dx \left| \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_M(x)\mathcal{X}_M(y)\psi(x,y)f(y)\overline{\psi(x,y)f(y)}dy \right|^2 \\
&\leqslant \frac{1}{|b\lambda|} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_M(y)|f(y)|^2 dy \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_M(x)|\psi(x,y)|^4 dx \right)^{1/2} \leqslant \frac{C}{|\lambda|}\|f\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Assim, temos a convergência da norma.■

4.3.3 Solvabilidade de Equações Integrais

A título de exemplo das aplicações das convoluções apresentadas de (4.6)–(4.9), consideraremos uma classe de equações integrais. Recordemos que usamos $\circledast$ para denotar uma das convoluções introduzidas anteriormente: $\star$, $\otimes$, $\odot$, $\boxtimes$.

Consideremos a equação convolução

$$\lambda\varphi(x) + (k \circledast \varphi)(x) = p(x) \tag{4.13}$$

onde $\lambda \in \mathbb{C}$, k, p pertencem a $L^1(\mathbb{R})$ e φ é a variável por determinar. Na equação (4.13), quando a convolução $\circledast$ toma uma das possibilidades (4.6), (4.7), (4.8) ou (4.9), também usaremos Ω^* sendo a correspondente função (peso) em

$$\{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4\},$$

respectivamente. Consideremos a notação $S(x) := \lambda + \Omega^*(x) \cdot (\mathbb{Q}k)(x)$.

Teorema 4.11. *Assuma-se que* $S(x) \neq 0$ *para qualquer* $x \in \mathbb{R}$ *e que* $\dfrac{\mathbb{Q}k}{S} \in L^1(\mathbb{R})$. *A equação (4.13) tem solução em* $L^1(\mathbb{R})$ *se e somente se*

$$\mathbb{Q}^{-1}\left(\frac{\mathbb{Q}k}{S}\right) \in L^1(\mathbb{R}) \tag{4.14}$$

Demonstração: *Necessidade.* Suponhamos que a equação (4.13) tem solução $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$. Aplicando o operador $\mathbb{Q}$ a ambos os membros da equação (4.13), teremos

$$\lambda(\mathbb{Q}\varphi)(x) + \Omega^*(x)(\mathbb{Q}\varphi)(x)(\mathbb{Q}k)(x) = (\mathbb{Q}p)(x),$$

isto é, $S(x)(\mathbb{Q}\varphi)(x) = (\mathbb{Q}p)(x)$. Considerando $S(x) \neq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, teremos $\mathbb{Q}\varphi = \dfrac{\mathbb{Q}p}{S}$. Pondo em consideração que $\dfrac{\mathbb{Q}\varphi}{S} \in L^1(\mathbb{R})$, teremos que

$$\varphi = \mathbb{Q}^{-1}\left(\frac{\mathbb{Q}p}{S}\right) \in L^1(\mathbb{R}).$$

Suficiência. Seja $\varphi = \mathbb{Q}^{-1}\left(\dfrac{\mathbb{Q}p}{S}\right) \in L^1(\mathbb{R})$. Por $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ obtemos $S(x)(\mathbb{Q}\varphi)(x) = (\mathbb{Q}p)(x)$. Usando a identidade da factorização da convolução, obteremos

$$\mathbb{Q}[\lambda\varphi(x) + (k \circledast \varphi)(x)] = (\mathbb{Q}p)(x).$$

Graças ao teorema de unicidade do operador $\mathbb{Q}$, concluímos que φ satisfaz a equação (4.13) para quase todos os $x \in \mathbb{R}$.■

Bibliografia

[1] A. Bultheel, H. Martínez, *An Introduction to the Fractional Fourier Transform and Friends*, Cubo - A Mathematical Journal **5**(2), 201-221 (2005).

[2] A. I. Zayed, *A Convolution and Product Theorem for the Fractional Fourier Transform*, IEEE Signal Processing Letters **5**(4), 101-103 (1998).

[3] A. K. Singh, R. Saxena, *On Convolution and Product Theorems for FRFT*, Wireless Personal Communications **65**(1), 189-201 (2012).

[4] D. G. Figueiredo, *Análise de Fourier e Equações Diferencias Parciais*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada-CNPq, São Paulo, 1997.

[5] E. Sejdic, I. Djurovic, L. Stankovic, *Fractional Fourier Transform as a Signal Processing Tool: An Overview of Recent Development*, Signal Processing **91**(1), 1315-1369 (2011).

[6] H. M. Ozaktas, Z. Zalevsky, M. Alper Kutay, *The Fractional Fourier Transform*, Wiley, Chichester, 2001.

[7] H. Triebel, *Higher Analysis*, Johann Ambrosious Barth, Leipzing, 1973.

[8] J. F. Alves, *Análise Funcional*, Universidade do Porto, Porto, 2002.

[9] K. Chandrasekharan, *Classical Fourier Transform*, Springer, Berlin, 1989.

[10] L. B. Almeida, *Product and Convolution Theorems for the Fractional Fourier Transform*, IEEE Signal Processing Letters **4**(1), 15-17 (1997).

[11] L. Debnath, Dambaru Bhatta, *Integral Transforms and Their Aplications*, Taylor and Francis Group, Boca Raton, 2015.

[12] L. P. Castro, P.K. Anh, P.T. Thao, N. M. Tuan, *Two New Convolutions for Fractional Fourier Transform*, Wireless Pers Commum **92**(2), 623-637 (2017).

[13] L. P. Castro, P.K. Anh, P.T. Thao, N. M. Tuan, *Inequalities and Consequence of New Convolution for the Fractional Fourier Transform with Hermith Weights*, American Institute of Physics, AIP Proceedings **1798**(1), 10pp (2017).

[14] L. P. Castro, P.K. Anh, N. M. Tuan *New Convolutions for Quadratic-Phase Fourier Integral Operadores an Their Applications*, Mediterranean Journal of Mathematics **15**(13), 1-17 (2018).

[15] P. P. G. Dyke, *An Introduction to Laplace Transform and Fourier Series*, Springer, London, 1999.

[16] R. J Beerends, H. G. Ter Morsche, J. C. Van den Berg, M. Van de Vrie, *Fourier and Laplace Transform*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[17] R. R. Goldberg, *Fourier Transform*, Cambridge University Press, London, 1970.

[18] S. Bochner, K. Chandraserkharan, *Fourier Transform*, Princeton University Press, London, 1949.

[19] T. Alieva, V. Lopez, F. Agullo-Lopez, L. B. Almeida, *The Fractional Fourier Transform in Optical Propagation Problems*, Journal of Modern Optics **41**(5), 1037-1044 (1994).

[20] V. Ashok Narayanan, K. M. M. Prabhu, *The Fractional Fourier Transform: Theory, Implementation and Error Analysis*, Microprocessors and Miscrosystems **27**(1), 511-521 (2003).

[21] W. J. Donoghue Jr, *Distribuitions and Fourier Transform*, Academic Press, London, 1969.

[22] Y. Katznelson, *An Introdution to Harmonic Analysis*, Cambridge University Press, Stanford, 2002.

[23] Y. Nepómnyashchikh, *Textos de Apoio de Análise Funcional I e II*, Universidade Eduardo Mondlane, Maputo, 2008.