



**Jorge  
Alberto  
Camisola**

## **Cálculo das Variações Fracionário**



**Jorge  
Alberto  
Camisola**

## **Cálculo das Variações Fracionário**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações, Programa de Mestrado em Matemática e Aplicações 2016-2018, realizada sob a orientação científica do Prof. Doutor Ricardo Miguel Moreira de Almeida, Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.



## **o júri**

Presidente

**Prof. Doutora Natália da Costa Martins**  
Professora Auxiliar da Universidade do Aveiro

**Prof. Doutor Luís Miguel Faustino Machado**  
Professor Auxiliar da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

**Prof. Doutor Ricardo Miguel Moreira de Almeida**  
Professor Auxiliar da Universidade do Aveiro (orientador)

## **agradecimentos**

Durante o curso muitas foram as pessoas que de uma forma direta ou indireta deram o seu contributo para que fosse possível concretizar este sonho. Gostaria de agradecer em primeiro lugar o meu orientador, Professor Doutor Ricardo Miguel Moreira de Almeida, pelo seu apoio desde sugestão do tema, partilha do saber, excelente orientação e disponibilidade no atendimento. Agradeço também a minha esposa Carolina, meus filhos Givaldo, Yuri, a minha mãe Otília e aos meus irmãos pelo apoio moral e pelo carinho e força que mesmo distantes souberam transmitir. Agradecer em especial o meu amigo Cláudio Tendai e a todos colegas da turma que de forma indireta deram o seu apoio. Gostaria também de apresentar os meus agradecimentos ao Instituto de bolsas de Moçambique pelo apoio financeiro através da bolsa do Mestrado com referência 31/2015.



**palavras-chave**

Cálculo das variações, Cálculo fracionário, Condições necessárias de otimalidade de Euler-Lagrange, Condições de transversalidade, Problema isoperimétrico, Métodos diretos.

**resumo**

O cálculo de ordem não inteira é uma generalização do cálculo integral e diferencial de ordem inteira. Nesta dissertação estudamos problemas variacionais com derivadas de ordem arbitrária, com enfoque na derivada fracionária de Caputo. Apresentamos as condições necessárias e suficientes de otimalidade, para o problema fundamental, a condição de Legendre, o problema isoperimétrico, o problema de Helglotz e os métodos diretos.





**Keywords**

Calculus of variations, Fractional calculus, Necessary conditions of Euler-Lagrange optimality, transversality conditions, Isoperimetric problem, Direct methods.

**Abstract**

The calculus of non-integer order is a generalization of integral and differential integer order calculus. In this dissertation we study variational problems with derivatives of arbitrary order, involving the Caputo fractional derivative. We present the necessary and sufficient conditions of optimality for the fundamental problem, the Legendre condition, the isoperimetric problem, the Helglotz problem and direct methods.



# Índice

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Cálculo Variacional Clássico</b>	<b>3</b>
1.1 Definições e Resultados . . . . .	4
1.2 Condições Necessárias de Otimalidade . . . . .	6
1.2.1 Problema com fronteiras fixas e a equação de Euler-Lagrange . .	7
1.2.2 Problema com fronteira inicial fixa e final livre . . . . .	10
1.2.3 Problema com fronteira inicial livre e final fixa . . . . .	12
1.2.4 Problema com fronteiras inicial e final livres . . . . .	13
1.3 Problema Isoperimétrico . . . . .	14
1.4 Condição Suficiente de Otimalidade . . . . .	17
<b>2 Cálculo Fracionário</b>	<b>21</b>
2.1 Funções Especiais . . . . .	21
2.1.1 Função Gama . . . . .	22
2.1.2 Função Beta . . . . .	23
2.1.3 Função de Mittag-Leffler . . . . .	23
2.1.4 Integral e Derivada Fracionária de Riemann-Liouville . . . . .	24
2.2 Derivada Fracionária de Caputo . . . . .	25
2.2.1 Relação entre integrais e derivadas . . . . .	32
2.2.2 Leis de semigrupo . . . . .	34
2.2.3 Resultados Diversos . . . . .	38
<b>3 Problema Variacional Fracionário</b>	<b>43</b>
3.1 O Problema Fundamental . . . . .	44

---

3.1.1	Condições Necessárias de Otimalidade . . . . .	44
3.1.2	Condição Suficiente de Otimalidade . . . . .	48
3.2	Condição de Legendre . . . . .	49
3.3	Problema Isoperimétrico . . . . .	51
3.4	Problema Variacional com Restrições Holonómicas . . . . .	53
3.5	O Problema Variacional de Herglotz . . . . .	57
3.6	Métodos Diretos para o Problema Variacional Fracionário . . . . .	60
3.6.1	Métodos Diretos de Euler para o Problema Variacional Fracionário	62
3.7	Exemplos . . . . .	65
<b>Considerações Finais</b>		<b>70</b>
<b>Bibliografia</b>		<b>71</b>

# Introdução

A presente dissertação tem como objetivo o estudo do cálculo variacional fracionário envolvendo o operador fracionário de Caputo. O cálculo fracionário é uma área recente de análise matemática, sendo uma generalização do cálculo integral e diferencial de ordem inteira, envolvendo derivadas e integrais de ordem arbitrária. A origem do cálculo fracionário remonta por volta de trezentos anos quando em 1695 L'Hospital perguntou a Leibniz o significado de  $\frac{d^n y}{dx^n}$  para  $n = \frac{1}{2}$ .

A partir dessa altura, vários foram os matemáticos que desenvolveram os seus trabalhos nesta área de conhecimento, como é o caso de Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Lacroix, Letnikov, Grünwald, Caputo, entre outros, e que contribuíram em grande medida para o desenvolvimento desta área. Nos últimos tempos ela apresenta-se como uma área de elevada importância em diversas áreas das ciências, como é o caso da física (mecânica clássica e quântica, termodinâmica), química, biologia, economia entre outras, descrevendo vários fenómenos relacionadas com estas áreas [16, 30].

O primeiro livro dedicado ao cálculo fracionário foi publicado por Oldham e Spanier em 1974, onde os autores sistematizaram as principais ideias, métodos e aplicações sobre esta área [22]. Existem diversas formas de definir as derivadas e integrais de ordem fracionária. Nesta dissertação destacamos as derivadas segundo Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov e com principal destaque para a derivada fracionária segundo Caputo.

O cálculo das variações é um dos ramos mais antigos da matemática cujo objetivo é encontrar os extremantes (maximizante ou minimizante) de um funcional [10]. O cálculo das variações surgiu no século XVII com a solução do problema da braquistócrona. O objetivo era determinar a trajetória de uma partícula que sujeita a um campo gravitacional constante, sem atrito e com velocidade inicial nula, se desloca entre dois

---

pontos no menor intervalo de tempo.

O cálculo das variações e o cálculo fracionário estão relacionados desde o século XIX. Esta relação vem desde a altura em que Niels Henrik Abel aplicou o cálculo fracionário para a resolução de equações integrais que surgiram na formulação do problema da tautócrona. No século XX as duas áreas juntaram-se numa única área de pesquisa tendo-se designado por Cálculo das Variações Fracionário [22], cujo objetivo é encontrar os extremantes do funcional, cujo Lagrangiano contém integrais e derivadas de ordem arbitrária.

Nesta dissertação dedicamo-nos ao cálculo variacional fracionário em que o Lagrangiano depende da variável independente  $x$ , que habitualmente se designa por tempo, uma função arbitrária  $y$  e a derivada fracionária de Caputo  ${}^cD_{a+}^\alpha y$ . Como já se referiu anteriormente, o problema variacional fracionário consiste em determinar os maximizantes ou minimizantes do funcional

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), {}^cD_{a+}^\alpha y(x)) dx.$$

Ao longo desta dissertação, para todos os problemas apresentados, estabelecemos as respetivas condições necessárias de otimalidade.

O trabalho está dividido em três capítulos. No primeiro capítulo, apresentamos o cálculo variacional clássico. Apresentamos o lema fundamental do cálculo das variações, a equação de Euler-Lagrange, o problema isoperimétrico, condições necessárias e suficientes de otimalidade.

O segundo capítulo aborda o Cálculo Fracionário. Destacamos algumas funções especiais relacionadas com o cálculo fracionário, definições das derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e de Caputo, e alguns resultados da relação entre derivadas e integrais fracionários. O terceiro e último capítulo trata do problema fundamental do cálculo variacional fracionário. Destacamos aqui as condições necessárias e suficientes de otimalidade, a condição de Legendre, o problema isoperimétrico, o problema com restrições holonómicas, o problema de Herglotz e por fim os métodos diretos aproximativos para o cálculo variacional fracionário.

# Capítulo 1

## Cálculo Variacional Clássico

O cálculo variacional é uma área da matemática que procura soluções para os problemas de otimização, generalizando a teoria de máximos e mínimos de uma função em que o domínio é estabelecido por meio de curvas admissíveis.

Quando resolvemos um problema de otimização, procuramos encontrar a melhor solução de todas as soluções admissíveis. Os problemas matemáticos que se referem a maximização ou minimização de funções são muito interessantes, porque estes estão diretamente relacionados com o nosso quotidiano. Por exemplo, maximizar a produção duma empresa, maximizar o lucro de venda dum produto por parte duma empresa, minimizar o custo de distribuição de um determinado produto por parte de uma empresa aos seus clientes, alcançar um determinado objetivo com menor esforço possível, etc. Isto mostra-nos que as tarefas do dia - a - dia são norteados por princípios de máximos e mínimos. Já há bastante tempo que o estudo da teoria do cálculo das variações tornou-se uma ferramenta básica muito importante em diversas áreas da matemática pura, matemática aplicada, da física e engenharias. Nesta área de estudo é importante destacar investigadores de renome que se destacaram nas pesquisas com ela relacionada.

É a partir dos trabalhos de Leonard Euler (1707-1783) que se chegou em 1744 à equação crucial que contribuiu em grande medida para o desenvolvimento do cálculo das variações [22, 23]. Em 1760, Joseph Louis Lagrange (1736-1813) aprofundou o estudo desenvolvido por Euler com outros métodos importantes na construção da equação, e por este motivo ela é chamada equação de Euler-Lagrange, que é uma das condições

---

necessárias de otimalidade [10, 12].

Este capítulo tem como objetivo apresentar elementos que nos permitam discutir os próximos capítulos.

## 1.1 Definições e Resultados

Tal como se referenciou na introdução, o cálculo das variações tem por objetivo encontrar a função que extremiza um funcional, ou seja, encontrar o maximizante ou minimizante de um funcional cujo o Lagrangiano de da variavel  $x$ ,  $y$  e  $y'$ .

**Definição 1.1.1 (Funcional).** *Um funcional é uma função real cujo domínio é um espaço de funções.*

Por exemplo, consideremos dois pontos  $(a, y_1)$  e  $(b, y_2)$ . O comprimento do arco entre aqueles dois pontos define o funcional

$$J[y] = \int_a^b \sqrt{1 + [y']^2} dx. \quad (1.1)$$

Pretende-se encontrar a função  $y$  que minimiza ou maximiza o funcional acima. Para encontrar tal função, vamos tratar do caso mais geral no qual o a função integranda depende  $x, y, y'$ ,

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx,$$

visto que no caso acima o a função integranda depende somente de  $y'$ .

**Definição 1.1.2.** *Dado um conjunto  $S$ , diz-se que  $S$  é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais  $\mathbb{R}$ , se satisfaz as seguintes propriedades:*

1. Se  $x, y \in S$ , então  $x + y \in S$ .
2.  $\forall x, y \in S, x + y = y + x$ .
3.  $\forall x, y, z \in S, (x + y) + z = x + (y + z)$ .
4. Há um elemento neutro em  $S$  que se denota por  $0$ , tal que  $0 + x = x + 0 = x$ .
5. Para cada elemento  $x \in S, \exists -x \in S$  tal que  $x + (-x) = (-x) + x$ .



- 
6. Para cada  $k \in \mathbb{R}$  e quaisquer  $x, y \in S$ ,  $k(x + y) = kx + ky$ .
  7. Para quaisquer escalares  $a, b \in \mathbb{R}$  e qualquer  $x \in S$ ,  $(ab)x = a(bx)$ .
  8. Para quaisquer escalares  $a, b \in \mathbb{R}$  e qualquer  $x \in S$ ,  $(a + b)x = ax + bx$ .
  9. Existe um elemento neutro  $1$ , tal que  $1x = x$ , para qualquer  $x \in S$ .

**Definição 1.1.3.** Seja  $S$  um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais  $\mathbb{R}$ . Uma função  $\|\cdot\|$ , definida em  $S$ , é dita norma se possui as seguintes propriedades:

1.  $\|y\| \geq 0$ , para todo  $y \in S$ .
2.  $\|y\| = 0$  se e só se  $y = 0$ .
3.  $\|\alpha y\| = |\alpha|\|y\|$ , para todos  $y \in S$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
4.  $\|y + z\| \leq \|y\| + \|z\|$  para  $y, z \in S$ .

**Definição 1.1.4.**  $S$  é um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{R}$  se sobre  $S$  existe uma norma  $\|\cdot\| : S \rightarrow \mathbb{R}$ .

No que se segue,  $C([a, b], \mathbb{R})$  denota o espaço vetorial das funções contínuas em  $[a, b]$  com valores em  $\mathbb{R}$ .

**Lema 1.1.1.** (Lema fundamental do cálculo das variações)

Seja  $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ , e se

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = 0,$$

para todo  $h \in C([a, b], \mathbb{R})$  tal que  $h(a) = h(b) = 0$ , então  $f(x) = 0$ ,  $\forall x \in [a, b]$ .

*Demonstração.* Suponhamos por absurdo que  $f$  é não nula em algum ponto  $x_0 \in [a, b]$ . Sem perda de generalidade suponhamos que  $f(x_0) > 0$ . Pela continuidade de  $f$  podemos concluir que existe  $[x_1, x_2] \subseteq [a, b]$  tal que  $f(x) > 0$ ,  $\forall x \in [x_1, x_2]$

Seja  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [a, x_1]; \\ (x - x_1)(x_2 - x) & \text{se } x \in [x_1, x_2]; \\ 0 & \text{se } x \in [x_2, b]. \end{cases}$$

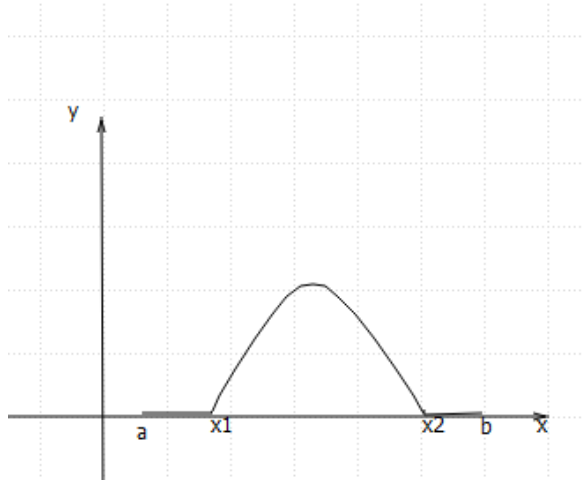


Figura 1.1: Representação da função  $h$

A função  $h$  é contínua em  $[a, b]$  e verifica-se que  $h(a) = h(b) = 0$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)h(x)dx &= \int_a^{x_1} 0dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)h(x)dx + \int_{x_2}^b 0dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(x)(x - x_1)(x_2 - x)dx > 0, \end{aligned}$$

uma vez que a função  $f$  é positiva em  $[x_1, x_2]$ , o que é uma contradição. A contradição resultou por supor que  $f$  é não nula.  $\square$

**Observação 1.1.1.** *O lema anterior é válido supondo que  $h$  é diferenciável [10].*

## 1.2 Condições Necessárias de Otimalidade

Como já se referiu na introdução, o cálculo variacional consiste em encontrar minimizantes e maximizantes de um funcional do tipo (1.1), em que o procedimento para os determinar é semelhante ao que se aplica nas funções de uma variável. Inicialmente procede-se à dedução da equação de Euler-Lagrange, uma das condições necessárias para encontrar extremantes de um funcional [11, 12, 10, 17, 21].

**Definição 1.2.1.** *Dizemos que  $y^* \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  é minimizante local (respectivamente maximizante local) se existir  $\alpha > 0$  tal que para todo  $y \in C^1[a, b]$ , satisfazendo  $\|y^* - y\| < \alpha$ , implica que  $J[y^*] \leq J[y]$  (respectivamente  $J[y^*] \geq J[y]$ ), onde a norma é dada pela fórmula*

$$\|y\| := \max_{a \leq x \leq b} |y(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |y'(x)|.$$

---

### 1.2.1 Problema com fronteiras fixas e a equação de Euler-Lagrange

**Teorema 1.2.1.** *Se uma função  $y \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ , tal que  $y(a) = y_1$  e  $y(b) = y_2$ , é um extremante local para o funcional*

$$J[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx,$$

*então  $y$  satisfaz a equação*

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \forall x \in [a, b].$$

*Demonstração.* Seja

$$y^*(x) = y(x) + \epsilon \eta(x), \quad (1.2)$$

onde  $\epsilon$  um número real com  $|\epsilon| \ll 1$  e  $\eta \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  uma função que se anula nos extremos, ou seja,  $\eta(a) = \eta(b) = 0$ . Seja  $j(\epsilon) = J[y^*]$ . Como  $j'(0) = 0$ , resulta que

$$\int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' \right) dx = 0. \quad (1.3)$$

Fazendo integração por partes no segundo termo da função integranda da equação (1.3), e se considerarmos que

$$\begin{cases} dv = \eta'(x) \Rightarrow v = \eta(x) \\ u = \frac{\partial f}{\partial y'} \Rightarrow du = \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \end{cases},$$

tem-se que

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' dx = \left[ \frac{\partial f}{\partial y'} \eta \right]_a^b - \int_a^b \eta \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} dx. \quad (1.4)$$

A equação (1.3) passa a tomar a seguinte forma

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta dx + \frac{\partial f}{\partial y'}(b, y(b), y'(b)) \eta(b) - \frac{\partial f}{\partial y'}(a, y(a), y'(a)) \eta(a) = 0. \quad (1.5)$$

Tendo em conta que  $\eta(a) = \eta(b) = 0$ , da equação (1.5) tem-se que

$$\int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta dx = 0. \quad (1.6)$$

Pela arbitrariedade de  $\eta$  e pelo lema fundamental do cálculo das variações conclui-se que

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0, \quad (1.7)$$

obtendo a equação de Euler-Lagrange.  $\square$

---

**Exemplo 1.2.1.**

Vamos determinar as funções  $y$  candidatas a extremantes de

$$J[y] = \int_0^1 \sqrt{1 + y'(x)^2} dx,$$

e  $y(0) = 0, y(1) = 1$ , com  $y \in C^2[0, 1]$ .

A condição necessária é:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{\partial f}{\partial y}, \forall x \in [0, 1].$$

Uma vez que

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

resulta que

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{\partial f}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left( \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right) = 0, \forall x \in [0, 1],$$

ou seja,

$$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in [0, 1] : y'(x) = k.$$

Assim sendo, uma vez que  $\int k dx = kx + c$ , então  $y(x) = kx + c$ , para alguns  $k, c \in \mathbb{R}$ .

Como  $y(0) = 0$  e  $y(1) = 1$  tem-se que,

$$\begin{cases} 0 = k \times 0 + c = 0 \\ k + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ k = 1 \end{cases}.$$

Logo  $y(x) = x$ ,  $x \in [0, 1]$ , é o candidato a extremante, porque a equação de Euler-Lagrange é apenas uma condição necessária de otimalidade.

**Exemplo 1.2.2.**

Vamos determinar as funções  $y$  candidatas a extremante do funcional

$$J[y] = \int_1^2 ((y')^2 - 2xy) dx$$

para  $y(1) = 0$  e  $y(2) = -1$ .

---

Pela equação de Euler-Lagrange, temos

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0.$$

Uma vez que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = 2y', \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 2y'',$$

resulta que

$$-2x - 2y'' = 0 \Leftrightarrow -x - y'' = 0 \Leftrightarrow y'' = -x.$$

Logo, uma vez que

$$\int -x dx = \frac{-x^2}{2} + c_1,$$

e

$$\int \left( \frac{-x^2}{2} + c_1 \right) dx = \frac{-x^3}{6} + c_1 x + c_2,$$

concluimos que  $y = \frac{-x^3}{6} + c_1 x + c_2$ , para alguns  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Usando as condições de fronteira, temos o seguinte

$$\begin{cases} \frac{-1}{6} + c_1 + c_2 = 0 \\ \frac{-8}{6} + 2c_1 + c_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = \frac{1}{6} \end{cases}.$$

A função  $y = \frac{-x^3}{6} + \frac{x}{6}$  é candidata a extremante do funcional.

### **Exemplo 1.2.3.**

Consideremos

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 + 4y + 7x) dx,$$

com os pontos inicial  $y(0) = 0$  e final  $y(1) = 1$ , e vamos determinar as funções  $y$  candidatas a extremante do funcional  $J$ .

Pela equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0.$$

Uma vez que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = 2y', \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 2y'',$$

---

então

$$2y'' = 4.$$

Uma vez que

$$\int 2dx = 2x + c_1,$$

e

$$\int (2x + c_1)dx = x^2 + c_1x + c_2,$$

resulta que  $y = x^2 + c_1x + c_2$ , para algumas constantes  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Usando as condições de fronteira temos

$$\begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases}.$$

A função  $y = x^2$  é candidata a extremante do funcional.

### 1.2.2 Problema com fronteira inicial fixa e final livre

Considere o funcional

$$J[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx,$$

onde  $y(a) = y_1$ , e  $y(b)$  livre. Recorrendo à equação (1.5) tem-se que

$$\int_a^b \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta dx + \frac{\partial f}{\partial y'}(b, y(b), y'(b)) \eta(b) - \frac{\partial f}{\partial y'}(a, y(a), y'(a)) \eta(a) = 0.$$

Uma vez que  $\eta(a) = 0$  e supondo que  $\eta(b) = 0$ , este problema é o mesmo da subsecção (1.2.1), logo a equação (1.7) verifica-se. Então temos que

$$\frac{\partial f}{\partial y'}(b, y(b), y'(b)) \eta(b) = 0. \quad (1.8)$$

Pela arbitrariedade da  $\eta(b)$ , obtemos a condição de transversalidade

$$\frac{\partial f}{\partial y'}(b, y(b), y'(b)) = 0. \quad (1.9)$$

---

A condição necessária para um problema com a fronteira inicial fixa e a final livre é dada por:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0, & x \in [a, b] \\ \frac{\partial f}{\partial y'} (b, y(b), y'(b)) = 0, \end{cases}$$

**Exemplo 1.2.4.**

Considere o funcional

$$J[y] = \int_0^1 [3y]^2 + [6y']^2 dx,$$

com a condição de fronteira  $y(0) = 1$  e  $y(1)$  livre.

Pela equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0.$$

Uma vez que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 18y; \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = 72y'; \quad \frac{d}{dx}(72y') = 72y'',$$

resulta que

$$18y - 72y'' = 0.$$

Resolvendo a equação diferencial tem-se que

$$-72\lambda^2 + 18 = 0 \Leftrightarrow -4\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2} \vee \lambda = -\frac{1}{2}.$$

A solução candidata a extremante é dada por

$$y^* = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 e^{-\frac{x}{2}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Pela condição de fronteira e de transversalidade resulta que

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ \frac{c_1}{2} e^{\frac{1}{2}} - \frac{c_2}{2} e^{-\frac{1}{2}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{e+1} \\ c_2 = \frac{e}{e+1} \end{cases}$$

Logo, a função candidata a extremante é

$$y^* = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e+1} + \frac{e^{-\frac{x+2}{2}}}{e+1}.$$

---

### 1.2.3 Problema com fronteira inicial livre e final fixa

Considere o funcional

$$J[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx,$$

onde  $y(b) = y_2$  e  $y(a)$  livre. Recorrendo à equação (1.5),

$$\int_a^b \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right] \eta dx + \frac{\partial f}{\partial y'}(b, y(b), y'(b)) \eta(b) - \frac{\partial f}{\partial y'}(a, y(a), y'(a)) \eta(a) = 0.$$

Uma vez que  $\eta(b) = 0$  e supondo que  $\eta(a) = 0$ , este problema é o mesmo da subsecção (1.2.1), logo a equação (1.7) verifica-se. Então temos que Pela arbitrariedade de  $\eta(a)$ , obtemos a condição de transversalidade

$$\frac{\partial f}{\partial y'}(a, y(a), y'(a)) \eta(a) = 0. \quad (1.10)$$

Pela arbitrariedade de  $\eta(a)$ , obtemos a condição de transversalidade

$$\frac{\partial f}{\partial y'}(a, y(a), y'(a)) = 0. \quad (1.11)$$

Para o problema com fronteira inicial livre e a final fixa obtemos como condição necessária de otimalidade

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0, & x \in [a, b] \\ \frac{\partial f}{\partial y'}(a, y(a), y'(a)) = 0. \end{cases}$$

#### Exemplo 1.2.5.

Considere o funcional

$$J(y) = \int_0^1 (3y^2 + 3(y')^2 + 1) dx,$$

em que a função

$$f(x, y, y') = 3y^2 + 3(y')^2 + 1,$$

$y(0)$  é livre e  $y(1) = 1$ .

Vamos determinar as funções candidatas a extremante do funcional.

Uma vez que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6y; \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = 6y'; \quad \frac{d}{dx} (6y') = 6y'',$$



---

pela equação de Euler-Lagrange, temos que

$$6y - 6y'' = 0.$$

Resolvendo a equação diferencial acima temos

$$6 - 6\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \vee \lambda = 1.$$

Assim sendo,  $y^* = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Pela condição de fronteira e de transversalidade, temos

$$\begin{cases} c_1 e + c_2 e^{-1} = 1 \\ c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = \frac{1}{e + e^{-1}} \\ c_1 = \frac{1}{e + e^{-1}} \end{cases}.$$

Assim, a função candidata a extremante é  $y^* = \frac{e^x + e^{-x}}{e + e^{-1}}$ .

#### 1.2.4 Problema com fronteiras inicial e final livres

Considere o funcional

$$J[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx.$$

Recorrendo à equação (1.5)

$$\int_a^b \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta dx + \frac{\partial f}{\partial y'}(b, y(b), y'(b)) \eta(b) - \frac{\partial f}{\partial y'}(a, y(a), y'(a)) \eta(a) = 0,$$

pela equação de Euler-Lagrange (1.7), tem-se que

$$\frac{\partial f}{\partial y'}(b, y(b), y'(b)) \eta(b) - \frac{\partial f}{\partial y'}(a, y(a), y'(a)) \eta(a) = 0. \quad (1.12)$$

Tendo em conta as condições de fronteiras livres, e pela arbitrariedade de  $\eta$  em todo o intervalo  $[a, b]$ , temos como condições de transversalidade

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y'}(b, y(b), y'(b)) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y'}(a, y(a), y'(a)) = 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

---

Assim obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0, & x \in [a, b] \\ \frac{\partial f}{\partial y'}(a, y(a), y'(a)) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y'}(b, y(b), y'(b)) = 0, \end{cases} \quad (1.14)$$

como condição necessária para o problema com fronteira inicial livres.

### 1.3 Problema Isoperimétrico

Os problemas variacionais são muitas vezes acompanhados por uma ou mais restrições. A presença dessas restrições limita ainda mais o espaço em que procuramos o extremo do problema colocado. Estas restrições podem ser prescritas de diversas formas, e neste caso vamo-nos debruçar em problemas com restrições isoperimétricas. Um problema isoperimétrico é aquele em que se pretende encontrar os extremantes dum funcional sujeito a um outro funcional que tem um valor definido [10, 11, 17, 21]. Os problemas isoperimétricos encontram uma elevada aplicação em muitas áreas, em particular destacamos na área da economia. No âmbito do cálculo variacional destacamos os problemas isoperimétricos que consistem em minimizar ou maximizar o funcional

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad (1.15)$$

sujeita à condição

$$L[y] = \int_a^b G(x, y, y') dx = C, \text{ para } C \in \mathbb{R}, \quad (1.16)$$

e às condições de fronteira  $y(a) = y_a$  e  $y(b) = y_b$ .

**Definição 1.3.1.** Dizemos que  $y^* \in C^2([a, b], \mathbb{R})$  é minimizante local (respectivamente maximizante local) para um problema isoperimétrico (1.15)-(1.16) se  $y$  satisfaz (1.16) e existir  $\alpha > 0$ , tal que  $J[y^*] \leq J[y]$  (respectivamente  $J[y^*] \geq J[y]$ ), para todo  $y \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ , satisfazendo a restrição isoperimétrica (1.16) e  $\|y^* - y\| < \alpha$ , onde a norma é dada pela fórmula

$$\|y\| := \max_{a \leq x \leq b} |y(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |y'(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |y''(x)|.$$

---

**Definição 1.3.2.** Dizemos que  $y \in C^2([a, b], \mathbb{R})$  é um extremal para  $L$  se  $y$  satisfaz a equação de Euler-Lagrange, relativamente para  $L$ . Um extremante (minimizante local ou maximizante local) para o problema (1.15)-(1.16), que não é extremal para  $L$ , designa-se por extremante normal, caso contrário designa-se por extremante anormal.

**Teorema 1.3.1.** Seja  $y$  um minimizante do funcional  $J$  em (1.15), definido em

$$D = \{y \in C^2([a, b], \mathbb{R}) : y(a) = y_a \text{ e } y(b) = y_b\},$$

sujeito à restrição (1.16). Se  $y$  não é extremal de (1.16), então existe um número real  $\lambda$  tal que  $y$  é uma solução da equação

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial W}{\partial y'} \right) = 0, \quad x \in [a, b], \quad (1.17)$$

onde  $W : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é função da classe  $C^2$ , definida por  $W = F + \lambda G$ .

*Demonstração.* Consideremos uma variação  $y$  com dois parâmetros  $y + \epsilon_1 \eta_1 + \epsilon_2 \eta_2$ , com  $|\epsilon_1| \ll 1$ ,  $|\epsilon_2| \ll 1$ , e  $\eta_1, \eta_2 \in C^2([a, b], \mathbb{R})$  satisfazendo  $\eta_1(a) = \eta_1(b) = 0$  e  $\eta_2(a) = \eta_2(b) = 0$ . Definimos duas funções  $j$  e  $l$  com dois parâmetros  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$ , definidas numa vizinhança de zero, como sendo

$$j(\epsilon_1, \epsilon_2) = J[y + \epsilon_1 \eta_1 + \epsilon_2 \eta_2], \quad \text{e} \quad l(\epsilon_1, \epsilon_2) = L[y + \epsilon_1 \eta_1 + \epsilon_2 \eta_2] - C.$$

Assim,

$$\frac{\partial l}{\partial \epsilon_2}(0, 0) = \int_a^b \left( \frac{\partial G}{\partial y} \eta_2 + \frac{\partial G}{\partial y'} \eta_2' \right) dx. \quad (1.18)$$

Integrando por partes o segundo termo da função integranda teremos

$$\int_a^b \frac{\partial G}{\partial y'} \eta_2' dx = - \int_a^b \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} \eta_2 dx + \frac{\partial G}{\partial y'} \eta_2 \Big|_{x=a}^{x=b}. \quad (1.19)$$

Substituindo (1.19) em (1.18), temos que

$$\frac{\partial l}{\partial \epsilon_2}(0, 0) = \int_a^b \left[ \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial G}{\partial y'} \right) \right] \eta_2 dx + \frac{\partial G}{\partial y'} \eta_2 \Big|_{x=a}^{x=b}, \quad (1.20)$$

Visto que  $\eta_2(a) = \eta_2(b) = 0$ , da equação (1.20) obtemos

$$\frac{\partial l}{\partial \epsilon_2}(0, 0) = \int_a^b \left[ \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial G}{\partial y'} \right) \right] \eta_2 dx$$

Assumindo que  $y$  não é extremal para  $L$ , existe uma função  $\eta_2$  tal que  $\frac{\partial l}{\partial \epsilon_2}(0, 0) \neq 0$ . Pelo Teorema da Função Implícita, existe uma única função  $\epsilon_2(\cdot)$  da classe  $C^2$ , definida

numa vizinhança de zero, tal que  $l(\epsilon_1, \epsilon_2) = 0$ . Por outro lado,  $(0, 0)$  é minimizante de  $j$ , sujeito à restrição  $l(\cdot, \cdot) = 0$  e  $\nabla l(0, 0) \neq (0, 0)$ . Aplicando método dos multiplicadores de Lagrange, existe um número real  $\lambda$  tal que  $\nabla(j + \lambda l)(0, 0) = (0, 0)$ . Derivando  $j(\epsilon_1, \epsilon_2) + \lambda l(\epsilon_1, \epsilon_2)$  em ordem a  $\epsilon_1$  e substituindo  $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (0, 0)$ , obtemos

$$\int_a^b \left[ \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial W}{\partial y'} \right) \right] \eta_1 dx + \left[ \eta_1 \frac{\partial W}{\partial y'} \right]_{x=a}^{x=b} = 0.$$

Usando a condição de fronteira  $\eta_1(a) = \eta_1(b) = 0$  e pelo lema fundamental do cálculo das variações, concluímos que

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial W}{\partial y'} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \lambda \left( \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial G}{\partial y'} \right) \right) = 0.$$

□

**Teorema 1.3.2.** *Seja  $y \in C^2([a, b], \mathbb{R})$  um minimizante local ou maximizante local para o problema isoperimétrico (1.15)-(1.16). Então existem dois números reais  $\lambda_0$  e  $\lambda$ , não simultaneamente nulos, tal que  $y$  é solução da equação de Euler-Lagrange do funcional*

$$W[y] = \int_a^b H(x, y, y') dx, \quad (1.21)$$

com  $H = \lambda_0 F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y')$ . Ou seja

$$\lambda_0 \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] + \lambda \left[ \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial G}{\partial y'} \right) \right] = 0, \quad x \in [a, b]. \quad (1.22)$$

*Demonstração.* Se  $y$  for minimizante ou maximizante normal, então tomamos  $\lambda_0 = 1$ , e o Teorema 1.3.2 coincide com o Teorema 1.3.1. Para minimizantes ou maximizantes anormais, basta tomar  $\lambda_0 = 0$  e  $\lambda = 1$ . □

### Exemplo 1.3.1.

Consideremos o seguinte problema:

$$\min J[y] = \int_0^1 [y']^2 dx,$$

sujeito a

$$L[y] = \int_0^1 y dx = B,$$

e  $y(0) = 0, y(1) = 1$ .

---

Usando os multiplicadores de Lagrange temos

$$[y']^2 + \lambda y = 0,$$

e uma vez que definindo  $f = [y']^2 + \lambda y$ , temos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda, \frac{\partial f}{\partial y'} = 2y', \frac{d}{dx}(2y') = 2y''.$$

Pela equação de Euler-Lagrange temos

$$\lambda - 2y'' = 0.$$

Assim sendo,

$$y'' = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow y' = \frac{\lambda x}{2} + c_1 \Rightarrow y = \frac{\lambda x^2}{4} + c_1 x + c_2.$$

Usando as condições de fronteira resulta que

$$\begin{cases} \frac{\lambda \times 0}{4} + c_1 \times 0 + c_2 = 0 \\ \frac{\lambda}{4} + c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = \frac{4 - \lambda}{4} \end{cases}.$$

Temos como candidato a minimizante do funcional a função

$$y = \frac{\lambda x^2}{4} + \frac{4 - \lambda}{4}x.$$

Agora recorremos à restrição isoperimétrica para determinar o valor de  $\lambda$ :

$$\int_0^1 y dx = \int_0^1 \left( \frac{\lambda x^2}{4} + \frac{4 - \lambda}{4}x \right) dx = B \Leftrightarrow \left[ \frac{\lambda x^3}{12} + \frac{4 - \lambda}{8}x^2 \right]_0^1 = B.$$

Fazendo as respectivas substituições pelos limites temos  $\lambda = 12(1 - 2B)$ , e substituindo o valor  $\lambda$  na solução candidata temos

$$y = \frac{12(1 - 2B)x^2}{4} + \frac{4 - 12(2B - 1)}{4}x.$$

## 1.4 Condição Suficiente de Otimalidade

A condição suficiente de otimalidade que a seguir apresentamos para que um extremal seja um minimizante global, envolve a condição da função ser convexa (resp. côncava) na otimização de dimensões finitas, [10, 21].

---

**Definição 1.4.1.** Dada uma função  $F : I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dizemos que  $F(x, y, y')$  é convexa (resp. côncava) em  $(y, y')$  se  $\frac{\partial F}{\partial y_i}$ ,  $i = 2, 3$  são contínuas e verifica a seguinte condições:

$$F(x, y + y^*, y' + y^{*'}) - F(x, y, y') \geq (\text{resp } \leq) \frac{\partial F}{\partial y} y^* + \frac{\partial F}{\partial y'} y^{*'},$$

para todo  $(x, y, y'), (x, y + y^*, y' + y^{*'}) \in I \times \mathbb{R}^2$ , onde  $I$  é o intervalo  $[a, b]$ .

**Teorema 1.4.1.** Considere o funcional

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx,$$

definido em

$$D := \{y \in C^2([a, b], \mathbb{R}) : y(a) = y_a, y(b) = y_b\}.$$

Suponhamos que o Lagrangiano  $F(x, y, y')$  é continuamente diferenciável e convexa (côncava) em  $(y, y')$ . Se  $y^*$  é um extremal, então  $y^*$  é um minimizante (resp. maximizante) global para o funcional  $J$  em  $D$ .

*Demonstração.* Efetuemos a prova para o caso em que a função é convexa. Se  $F$  é uma função convexa em  $(y, y')$ , então para qualquer  $\eta \in C^2$ ,

$$J[y^* + \eta] - J[y^*] = \int_a^b F(x, y^* + \eta, y^{*'} + \eta') - F(x, y^*, y^{*'}) dx \geq \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y^*} \eta + \frac{\partial F}{\partial y^{*'}} \eta' \right) dx.$$

Fazendo a integração por partes do segundo termo da função integranda da expressão anterior temos

$$J[y^* + \eta] - J[y^*] \geq \int_a^b \underbrace{\eta \left( \frac{\partial F}{\partial y^*} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y^{*'}} \right)}_{=0} dx + \underbrace{\left[ \eta \frac{\partial F}{\partial y^{*'}} \right]_{x=a}^{x=b}}_{=0}.$$

Pela equação de Euler-Lagrange e pelas condições de fronteira obtemos o seguinte resultado

$$J[y^* + \eta] - J[y^*] \geq 0.$$

□

**Exemplo 1.4.1.**

---

Consideremos o funcional

$$J[y] = \int_0^1 ((y')^2 + 12yx) dx,$$

com as condições de fronteira  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 1$ . Portanto  $f(x, y, y') = (y')^2 + 12yx$ .

Vamos determinar as funções candidatas a extremante do funcional e verifiquemos, caso exista, se é minimizante ou maximizante a solução encontrada.

Uma vez que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 12x, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = 2y', \quad \frac{d}{dx}(2y') = 2y'',$$

pela equação de Euler-Lagrange

$$12x - 2y'' = 0 \Leftrightarrow 2y'' = 12x \Leftrightarrow y'' = 6x.$$

Resulta que

$$y' = 3x^2 + c_1 \quad \text{e} \quad y = x^3 + c_1x + c_2.$$

Usando as condições de fronteira, vamos determinar as constantes  $c_1$  e  $c_2$

$$\begin{cases} 0 + 0 + c_2 = 0 \\ 1 + c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases}.$$

Portanto, a solução candidata a extremante do funcional é  $y^* = x^3$ .

Verifiquemos se a função  $f$  é convexa:

$$\begin{aligned} f(x, y + y^*, y' + y^{*'}) - f(x, y, y') &\geq \partial_2 f(x, y, y')y^* + \partial_3 f(x, y, y')y^{*'} \\ \Leftrightarrow (y' + y^{*'})^2 + 12(y + y^*)x - (y')^2 - 12xy &\geq 12xy^* + 2y'y^{*'} \\ \Leftrightarrow (y')^2 + (y^{*'})^2 + 2y'y^{*'} + 12xy + 12xy^* - (y')^2 - 12xy &\geq 12xy^* + 2y'y^{*'} \\ \Leftrightarrow (y')^2 + (y^{*'})^2 + 2y'y^{*'} + 12xy + 12xy^* - (y')^2 - 12xy - 12xy^* - 2y'y^{*'} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (y^{*'})^2 &\geq 0, \end{aligned}$$

o que é verdade. Logo a função  $f$  é convexa, provando que  $y^* = x^3$  é minimizante do funcional.

---



# Capítulo 2

## Cálculo Fracionário

O cálculo fracionário é a teoria dos integrais e derivadas de ordem arbitrária. Esta área teve um desenvolvimento bastante lento devido à dificuldade de elaborar definições equivalentes e à dificuldade em aplicar o conceito em fenómenos da natureza, mesmo que a sua origem remonte à época das ideias propostas no final do século XVII por Leibniz e Newton [22, 23].

Nos últimos tempos muitas pesquisas têm sido levadas a cabo por estudiosos interessados nesta área da matemática, e observado que muitos dos fenómenos físicos não são bem explicados com o cálculo de ordem inteira. Apesar do cálculo de ordem não inteira ser considerado uma generalização do cálculo de ordem inteira e equivalente quando as ordens nas definições são inteiras, o de ordem não inteira apresenta características particulares, como por exemplo o efeito da memória hereditária.

A maioria das aplicações e modelos utilizando sistemas de ordem não inteira usam equações diferenciais fracionárias. Em inúmeras situações, a solução exata não é conhecida, razão pela qual são aplicados métodos numéricos para encontrar uma solução aproximada [18, 25, 26, 27].

### 2.1 Funções Especiais

Nesta secção debruçamo-nos sobre algumas das funções que são de extrema importância para a obtenção de diversos resultados que apresentamos neste capítulo, tais como a função Gama, a função Mittag-Leffler com um e dois parâmetros, e a função Beta.

---

### 2.1.1 Função Gama

A função Gama vem como resposta à necessidade de encontrar uma extensão da função fatorial para os reais e para os complexos.

A função fatorial  $f(x) = x!$  só está definida no domínio do conjunto dos números naturais, tendo em conta que a função fatorial é discreta.

Sendo assim, a função Gama coincide com a função fatorial para valores inteiros e é contínua para os reais. Existem muitas definições relacionadas com a função Gama sendo que neste trabalho mencionaremos algumas.

**Definição 2.1.1.** *A função Gama é dada pelo integral impróprio de Euler definida por:*

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

A definição seguinte foi apresentada por Euler.

**Definição 2.1.2.** *A função Gama, válida para todo  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ , é dada por*

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x}{1 + \frac{x}{n}}.$$

Uma das propriedades da função Gama é a seguinte:

**Proposição 2.1.1.** *É verdade que*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

onde  $x > 0$ . Quando  $x = n \in \mathbb{N}$  temos então que  $\Gamma(n+1) = n!$ .

*Demonstração.* Integrando por partes iremos provar que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Assim temos,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt,$$

fazendo

---


$$\begin{cases} u = t^x \Rightarrow du = xt^{x-1} \\ dv = e^{-t} \Rightarrow v = -e^{-t} \end{cases},$$

segue que

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt = [-e^{-t} t^x]_0^\infty + x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x),$$

logo obtendo-se a relação  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  .

□

## 2.1.2 Função Beta

**Definição 2.1.3.** A função Beta é dada por:

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad \text{onde } p > 0, q > 0.$$

**Proposição 2.1.2.** (simetria) A função Beta tem a propriedade de simetria dada por

$$B(p, q) = B(q, p).$$

*Demonstração.* Pela definição da função Beta

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt,$$

Fazendo a mudança de variável  $x = 1 - t$ , teremos

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = \int_0^1 (1-x)^{p-1} x^{q-1} dx = B(q, p).$$

□

## 2.1.3 Função de Mittag-Leffler

A função de Mittag-Leffler é uma das funções mais importantes no cálculo fracionário, desempenhando um papel preponderante na solução de equações diferenciais de ordem fracionária. Neste trabalho destacamos as funções de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros.

---

## Função de Mittag-Leffler de um parâmetro

A função de Mittag-Leffler de um parâmetro é a generalização da função exponencial.

**Definição 2.1.4.** *A função Mittag-Leffler de um parâmetro é dada pela série*

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(1 + \alpha k)},$$

sendo  $x, \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$ , e  $\Gamma$  é a função Gama.

A função  $E_{\alpha}$  é a generalização da função exponencial, uma vez que se considerarmos  $\alpha = 1$  temos

$$E_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(1 + k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

## Função de Mittag-Leffler de dois parâmetros

Em 1905 o matemático Wiman propôs e estudou uma generalização da função de Mittag-Leffler, a que chamou de função de Mittag-Leffler com dois parâmetros.

**Definição 2.1.5.** *A função de Mittag-Leffler com dois parâmetros é definida por uma série da seguinte forma*

$$E_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\beta + \alpha k)},$$

com  $x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $\alpha > 0$ . Note que, para  $\beta = 1$ , a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros transforma-se na função de um parâmetro. De fato,

$$E_{\alpha, 1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(1 + \alpha k)} = E_{\alpha}(x).$$

### 2.1.4 Integral e Derivada Fracionária de Riemann-Liouville

**Definição 2.1.6.** *Seja  $\alpha \in \mathbb{R}$ , com  $\alpha > 0$ ,  $f$  uma função integrável em  $[a, b]$ . Para  $x \in [a, b]$ , definimos os integrais fracionários de Riemann-Liouville de ordem  $\alpha$ , à esquerda e à direita, respectivamente, como  $I_{a+}^{\alpha} f(x)$  e  $I_{b-}^{\alpha} f(x)$ :*

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a,$$

e

$$I_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad b > x.$$

Para introduzirmos as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville, devemos recordar-nos das propriedades das derivadas de ordem inteira, em que para  $m, n \in \mathbb{N}$ , com  $m > n$  vale

$$D^n f(x) = D^m I^{m-n} f(x).$$

Aqui,  $D^n$  é a derivada usual de ordem inteira  $n$  e  $I$  o integral de ordem inteira  $m - n$ .

**Definição 2.1.7.** (*Derivada Fracionária de Riemann-Liouville*) As derivadas fracionárias de ordem  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , de Riemann-Liouville à esquerda e à direita são definidas por

$$D_{a+}^\alpha f(x) = D^n I_{a+}^{n-\alpha} f(x) \quad e \quad D_{b-}^\alpha f(x) = (-1)^n D^n I_{b-}^{n-\alpha} f(x),$$

com  $n = [\alpha] + 1$ , onde  $[\alpha]$  representa o maior número inteiro menor ou igual a  $\alpha$ , ou seja,

$$D_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a,$$

e

$$D_{b-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( -\frac{d}{dx} \right)^n \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f(t) dt, \quad b > x.$$

As propriedades de semi-grupo são válidas para integrais fracionários. Para cada  $\alpha, \beta > 0$ , temos:

$$I_{a+}^\alpha I_{a+}^\beta f(x) = I_{a+}^{\alpha+\beta} f(x) \quad e \quad I_{b-}^\alpha I_{b-}^\beta f(x) = I_{b-}^{\alpha+\beta} f(x).$$

## 2.2 Derivada Fracionária de Caputo

No seu artigo datado de 1967, Caputo reformulou a definição da derivada fracionária de Riemann-Liouville, ao mudar a ordem da derivada ordinária com o operador integral fracionário. Ao fazê-lo, a transformação de Laplace desta nova derivada depende de condições iniciais de ordem inteira, diferentes da condição inicial quando usamos a derivada fracionária de Riemann-Liouville, que envolve condições de ordem fracionária [2, 4, 5].

A derivada de Caputo distingue-se da derivada de Riemann-Liouville em relação à ordem em que os operadores integrais de ordem não inteira e a derivada de ordem inteira

são aplicados. Essa mudança origina consequências significativas tanto no resultado da derivada de algumas funções quanto no contexto da sua aplicação. Apresentamos agora a definição de derivada fracionária de Caputo.

**Definição 2.2.1.** Dado  $\alpha > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I$  é o intervalo  $[a, b]$ ,  $f \in C^n(I)$  uma função. A derivada fracionária de Caputo à esquerda de ordem  $\alpha$  da função  $f$  é dada por:

$${}^c D_{a+}^\alpha f(x) = I_{a+}^{n-\alpha} \left( \frac{d}{dx} \right)^n f(x),$$

e a derivada fracionária de Caputo à direita é dada por

$${}^c D_{b-}^\alpha f(x) = I_{b-}^{n-\alpha} \left( -\frac{d}{dx} \right)^n f(x),$$

onde  $n = [\alpha] + 1$  para  $\alpha \notin \mathbb{N}$ ,  $n = \alpha$  para  $\alpha \in \mathbb{N}$ .

Dado  $\alpha = m \in \mathbb{N}$ ,

$${}^c D_{a+}^\alpha f(x) = f^{(m)}(x) \quad \text{e} \quad {}^c D_{b-}^\alpha f(x) = (-1)^m f^{(m)}(x),$$

e se  $\alpha \notin \mathbb{N}$  teremos

$${}^c D_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt, \quad (2.1)$$

e

$${}^c D_{b-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} (-1)^n f^{(n)}(t) dt.$$

No caso particular em que  $\alpha \in ]0, 1[$ , teremos o seguinte

$${}^c D_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f'(t) dt,$$

e

$${}^c D_{b-}^\alpha f(x) = \frac{-1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (x-t)^{-\alpha} f'(t) dt.$$

Nesta secção vamo-nos restringir à derivada de Caputo para o caso em que  $\alpha \notin \mathbb{N}$  e estudaremos algumas das suas propriedades. Procedemos à prova dos teoremas e lemas da derivada fracionária de Caputo à esquerda, que de modo equivalente se pode provar para derivada fracionária de Caputo à direita, efetuando as respetivas modificações.

---

**Teorema 2.2.1.** *Suponhamos que  $f \in C^{n+1}([a, b], \mathbb{R})$ . Então, para todo  $\alpha > 0$ ,*

$${}^c D_{a+}^\alpha f(x) = \frac{(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} f^{(n)}(a) + \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha} \frac{d}{dt} f^{(n)}(t) dt$$

e

$${}^c D_{b-}^\alpha f(x) = \frac{(b-x)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} f^{(n)}(b) - \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha} \frac{d}{dt} f^{(n)}(t) dt.$$

*Demonstração.* Procedemos a prova integrando por partes (2.1),

$${}^c D_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt,$$

com

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = (x-t)^{n-\alpha-1} \Rightarrow u = -\frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \\ v = f^{(n)}(t) \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} f^{(n)}(t) \end{cases},$$

obtendo o seguinte:

$$\begin{aligned} {}^c D_{a+}^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left\{ \left[ \frac{-(x-t)^{n-\alpha} f^{(n)}(t)}{n-\alpha} \right]_{t=a}^{t=x} + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \frac{d}{dt} f^{(n)}(t) dt \right\} \\ &= \frac{(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} f^{(n)}(a) + \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha} \frac{d}{dt} f^{(n)}(t) dt, \end{aligned}$$

concluindo assim a prova do teorema. □

Pela definição, é claro que se  $\alpha \rightarrow (n-1)^+$ , teremos

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow (n-1)^+} {}^c D_{a+}^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-n+1)} \int_a^x (x-t)^{n-n+1-1} f^{(n)}(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1)} \int_a^x f^{(n)}(t) dt \\ &= f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow (n-1)^+} {}^c D_{b-}^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-n+1)} \int_x^b (t-x)^{n-n+1-1} (-1)^n f^{(n)}(t) dt \\ &= \int_x^b (-1)^n f^{(n)}(t) dt \\ &= (-1)^n \left( f^{(n-1)}(b) - f^{(n-1)}(x) \right) \\ &= (-1)^{n-1} \left( f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(b) \right). \end{aligned}$$

---

Se  $f$  é uma função da classe  $C^{n+1}$ , usando o Teorema 2.2.1 obtemos

$$\lim_{\alpha \rightarrow n^-} {}^c D_{a+}^\alpha f(x) = f^{(n)}(x)$$

e

$$\lim_{\alpha \rightarrow n^-} {}^c D_{b-}^\alpha f(x) = (-1)^n f^{(n)}(x).$$

Consideremos as normas

$$\|\cdot\|_C : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

e

$$\|\cdot\|_{C^{(n)}} : C^n[a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

dadas por

$$\|f\|_C := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

e

$$\|f\|_{C^{(n)}} := \sum_{k=0}^n \|f^{(k)}\|_C.$$

**Teorema 2.2.2.** *As derivadas fracionárias de Caputo são operadores limitados. Para todo  $\alpha > 0$ ,  $\|{}^c D_{a+}^\alpha f\|_C \leq K \|f\|_{C^{(n)}}$  e  $\|{}^c D_{b-}^\alpha f\|_C \leq K \|f\|_{C^{(n)}}$ , onde*

$$K = \frac{(b-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)}.$$

*Demonstração.* Dado que  $|f^{(n)}(t)| \leq \|f\|_{C^{(n)}}$ , para todo  $t \in [a, b]$ , temos

$$\|{}^c D_{a+}^\alpha f\|_C \leq \frac{\|f\|_{C^{(n)}}}{\Gamma(n-\alpha)} \max_{x \in [a, b]} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} dt \leq K \|f\|_{C^{(n)}}.$$

□

Seguindo a prova do teorema anterior concluímos que  ${}^c D_{a+}^\alpha f(a) = {}^c D_{b-}^\alpha f(b) = 0$  uma vez que,

$$|{}^c D_{a+}^\alpha f| \leq \|f\|_{C^{(n)}} \frac{(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)}$$

e

$$|{}^c D_{b-}^\alpha f| \leq \|f\|_{C^{(n)}} \frac{(b-x)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)}.$$

A relação entre os dois tipos de derivadas fracionárias é estabelecida no teorema a seguir.



---

**Teorema 2.2.3.** Se  $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ , então

$${}^c D_{a+}^\alpha f(x) = D_{a+}^\alpha \left[ f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right]$$

e

$${}^c D_{b-}^\alpha f(x) = D_{b-}^\alpha \left[ f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(b)}{k!} (b-x)^k \right].$$

*Demonstração.* Da definição da derivada de Caputo e integrando por partes, deduzimos o seguinte:

$$\begin{aligned} & \Gamma(n-\alpha) D_{a+}^\alpha \left[ f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (x-a)^k f^{(k)}(a) \right] \\ &= \left( \frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left[ f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] dt \\ &= \left( \frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \left[ f^{(1)}(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!} (t-a)^{k-1} \right] dt \\ &= \left( \frac{d}{dx} \right)^{n-1} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left[ f^{(1)}(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!} (t-a)^{k-1} \right] dt. \end{aligned}$$

Repetindo mais uma vez este procedimento obtemos

$$\left( \frac{d}{dx} \right)^{n-2} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left[ f^{(2)}(t) - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-2)!} (t-a)^{k-2} \right] dt.$$

Repetindo o procedimento  $(n-3)$  vezes obtemos a fórmula desejada.  $\square$

Assim, se para todo  $k = 0, \dots, n-1$ ,  $f^{(k)}(a) = 0$ , então  ${}^c D_{a+}^\alpha f(x) = D_{a+}^\alpha f(x)$ , e se  $f^{(k)}(b) = 0$ , então  ${}^c D_{b-}^\alpha f(x) = D_{b-}^\alpha f(x)$ .

**Lema 2.2.1.** Dado  $\beta \in \mathbb{R}$ , considerando as funções  $f(x) = (x-a)^{\beta-1}$  e  $g(x) = (b-x)^{\beta-1}$ , onde  $\beta > n$ , então para  $\alpha > 0$ ,

$${}^c D_{a+}^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1}$$

e

$${}^c D_{b-}^\alpha g(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-x)^{\beta-\alpha-1}.$$

---

*Demonstração.* Uma vez que

$$f^{(n)}(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - n)}(x - a)^{\beta - n - 1},$$

temos o seguinte

$${}^c D_{a+}^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n - \alpha) \times \Gamma(\beta - n)}(x - a)^{n - \alpha - 1} \times \int_a^x \left(1 - \frac{t - a}{x - a}\right)^{n - \alpha - 1} (t - a)^{\beta - n - 1} dt.$$

Consideremos a mudança de variável

$$u = \frac{t - a}{x - a} \Rightarrow (x - a)du = dt.$$

Substituindo na expressão anterior temos

$$\begin{aligned} {}^c D_{a+}^\alpha f(x) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n - \alpha) \times \Gamma(\beta - n)}(x - a)^{n - \alpha - 1} \times \int_0^1 (1 - u)^{n - \alpha - 1} \\ &\quad \times (u(x - a))^{\beta - n - 1} \times (x - a)du \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n - \alpha) \times \Gamma(\beta - n)}(x - a)^{\beta - \alpha - 1} \times \int_0^1 (1 - u)^{n - \alpha - 1} \times u^{\beta - n - 1} du, \end{aligned} \quad (2.2)$$

e recorrendo à função Beta,

$$B(n - \alpha, \beta - n) = \int_0^1 u^{\beta - n - 1} (1 - u)^{n - \alpha - 1} du, \quad n - \alpha, \beta - n \geq 0,$$

obtemos assim que

$${}^c D_{a+}^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n - \alpha) \times \Gamma(\beta - n)}(x - a)^{\beta - \alpha - 1} \times B(n - \alpha, \beta - n).$$

Usando a propriedade da função Beta, tem-se que

$$B(n - \alpha, \beta - n) = \frac{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n)}{\Gamma(n - \alpha + \beta - n)} = \frac{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n)}{\Gamma(-\alpha + \beta)}. \quad (2.3)$$

Substituindo (2.3) em (2.2) tem-se que

$$\begin{aligned} {}^c D_{a+}^\alpha f(x) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n - \alpha) \times \Gamma(\beta - n)}(x - a)^{\beta - \alpha - 1} \times \frac{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n)}{\Gamma(\beta - \alpha)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)}(x - a)^{\beta - \alpha - 1}. \end{aligned}$$

Fica assim concluída a prova. □

---

Tomemos como exemplo a função  $f(x) = x^2$ . Sabe-se que  ${}^cD_{0+}^\alpha x^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} x^{k-\alpha}$ , se  $n-1 < \alpha < n$  e  $k \geq n$ . Assim temos

$${}^cD_{0+}^{\frac{1}{2}} x^2 = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-\frac{1}{2}+1)} x^{2-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\Gamma(\frac{5}{2})} \sqrt{x^3}.$$

É de salientar que, quando  $\alpha = 1$ , temos  ${}^cD_{0+}^1 x^2 = 2x$ . No caso particular em que  $n \leq k$ , com  $n, k \in \mathbb{N}$ , obtemos

$${}^cD_{a+}^\alpha (x-a)^k = \frac{k!}{\Gamma(k+1-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha}$$

e

$${}^cD_{b-}^\alpha (b-x)^k = \frac{k!}{\Gamma(k+1-\alpha)} (b-x)^{k-\alpha}.$$

Por outro lado, para  $n > k \in \mathbb{N}_0$ , temos

$${}^cD_{a+}^\alpha (x-a)^k = {}^cD_{b-}^\alpha (b-x)^k = 0, \quad (2.4)$$

uma vez que

$$D^n(x-a)^k = D^n(b-x)^k = 0.$$

**Lema 2.2.2.** Dado  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $\alpha > 0$ , e consideremos as funções  $f(x) = E_\alpha(\mu(x-a)^\alpha)$  e  $h(x) = E_\alpha(\mu(b-x)^\alpha)$ , onde  $E_\alpha$  é a função de Mittag-Leffler. Então  ${}^cD_{a+}^\alpha f(x) = \mu f(x)$  e  ${}^cD_{b-}^\alpha h(x) = \mu h(x)$ .

*Demonstração.* Segue usando as igualdades abaixo:

$$\begin{aligned} {}^cD_{a+}^\alpha f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} {}^cD_{a+}^\alpha (x-a)^{\alpha k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha k - \alpha + 1)} (x-a)^{\alpha k - \alpha} \\ &= \mu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^{k-1}}{\Gamma(\alpha(k-1) + 1)} (x-a)^{\alpha(k-1)} \\ &= \mu f(x). \end{aligned}$$

□

### 2.2.1 Relação entre integrais e derivadas

Nesta secção iremos provar que a derivada fracionária de Caputo é a operação inversa do integral fracionário numa certa classe de funções.

**Teorema 2.2.4.** *Dada uma função  $f \in C^n([a, b], \mathbb{R})$  e  $\alpha > 0$ , tem-se que*

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha} {}^c D_{a+}^{\alpha} f(x) &= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad e \\ I_{b-}^{\alpha} {}^c D_{b-}^{\alpha} f(x) &= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(b)}{k!} (b-x)^k. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Usando a lei de semigrupo e a fórmula de integração por partes, tem-se que

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha} {}^c D_{a+}^{\alpha} f(x) &= I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = I_{a+}^n f^{(n)}(x) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \frac{d}{dt} f^{(n-1)}(t) dt \\ &= \frac{1}{(n-2)!} \int_a^x (x-t)^{n-2} \frac{d}{dt} f^{(n-2)}(t) dt - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} \\ &= \frac{1}{(n-3)!} \int_a^x (x-t)^{n-3} \frac{d}{dt} f^{(n-3)}(t) dt - \sum_{k=n-2}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \\ &= \dots = \int_a^x \frac{d}{dt} f(t) dt - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \\ &= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k. \end{aligned}$$

□

Em particular, dado  $\alpha \in ]0, 1[$ , temos o seguinte  $I_{a+}^{\alpha} {}^c D_{a+}^{\alpha} f(x) = f(x) - f(a)$  e  $I_{b-}^{\alpha} {}^c D_{b-}^{\alpha} f(x) = f(x) - f(b)$ . A partir do Teorema 2.2.4 deduz-se a fórmula de Taylor:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + I_{a+}^{\alpha} {}^c D_{a+}^{\alpha} f(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (b-x)^k + I_{b-}^{\alpha} {}^c D_{b-}^{\alpha} f(x). \end{aligned}$$

---

**Teorema 2.2.5.** Dada uma função  $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  e  $\alpha > 0$ , tem-se que

$${}^c D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha f(x) = f(x) \quad e \quad {}^c D_{b-}^\alpha I_{b-}^\alpha f(x) = f(x).$$

*Demonstração.* Por definição

$${}^c D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{n - \alpha - 1} F^{(n)}(t) dt, \quad (2.5)$$

onde  $F(x) = I_{a+}^\alpha f(x)$ . Por cálculos diretos obtemos o seguinte,

$$F^{(n-1)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n + 1)} \int_a^x (x - t)^{\alpha - n} f(t) dt.$$

Integrando por partes a expressão anterior teremos

$$F^{(n-1)}(x) = \frac{f(a)}{\Gamma(\alpha - n + 2)} (x - a)^{\alpha - n + 1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha - n + 2)} \int_a^x (x - t)^{\alpha - n + 1} f'(t) dt,$$

assim, teremos

$$F^{(n)}(x) = \frac{f(a)}{\Gamma(\alpha - n + 1)} (x - a)^{\alpha - n} + \frac{1}{\Gamma(\alpha - n + 1)} \int_a^x (x - t)^{\alpha - n} f'(t) dt. \quad (2.6)$$

Substituindo (2.6) em (2.5) usando a fórmula de Dirichlet, temos

$$\begin{aligned} {}^c D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha f(x) &= \frac{f(a)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\alpha - n + 1)} \int_a^x (x - t)^{n - \alpha - 1} (t - a)^{\alpha - n} dt \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\alpha - n + 1)} \int_a^x \int_a^t (x - t)^{n - \alpha - 1} (t - \tau)^{\alpha - n} f'(\tau) d\tau dt \\ &= \frac{f(a)(x - a)^{n - \alpha - 1}}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\alpha - n + 1)} \int_a^x \left(1 - \frac{t - a}{x - a}\right)^{n - \alpha - 1} (t - a)^{\alpha - n} dt \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\alpha - n + 1)} \int_a^x \int_t^x (x - \tau)^{n - \alpha - 1} (\tau - t)^{\alpha - n} f'(t) d\tau dt, \end{aligned}$$

e procedendo a mudança de variável  $u = \frac{t - a}{x - a}$ , temos

$$\begin{aligned} {}^c D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha f(x) &= \frac{f(a)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\alpha - n + 1)} \int_0^1 (1 - u)^{n - \alpha - 1} u^{\alpha - n} du \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\alpha - n + 1)} \int_a^x f'(t) \int_t^x (x - \tau)^{n - \alpha - 1} (\tau - t)^{\alpha - n} d\tau dt \\ &= \frac{f(a)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\alpha - n + 1)} \Gamma(n - \alpha)\Gamma(\alpha - n + 1) \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\alpha - n + 1)} \int_a^x f'(t) dt \Gamma(n - \alpha)\Gamma(\alpha - n + 1) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

□

---

**Teorema 2.2.6.** *Sejam  $f, g \in C^n([a, b], \mathbb{R})$  e  $\alpha > 0$ . Então*

$${}^c D_{a+}^\alpha f(x) = {}^c D_{a+}^\alpha g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k$$

e

$${}^c D_{b-}^\alpha f(x) = {}^c D_{b-}^\alpha g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + \sum_{k=0}^{n-1} d_k (b-x)^k,$$

onde  $c_k$  e  $d_k$  são constantes arbitrárias.

*Demonstração.* Se  ${}^c D_{a+}^\alpha f(x) = {}^c D_{a+}^\alpha g(x)$ , então  ${}^c D_{a+}^\alpha (f(x) - g(x)) = 0$ , e aplicando o operador integral a ambos os lados da igualdade, usando o Teorema 2.2.4, obtemos

$$f(x) = g(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f-g)^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k,$$

e assim provamos a primeira parte do resultado, com  $c_k = \frac{(f-g)^{(k)}(a)}{k!}$ . Para provar o recíproco supomos que

$$f(x) = g(x) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k.$$

Recorrendo à equação (2.4), temos  ${}^c D_{a+}^\alpha (x-a)^k = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Com este resultado a prova está completa.  $\square$

## 2.2.2 Leis de semigrupo

No desenvolvimento desta secção faz-se o estudo dos casos de composição entre integrais e derivadas fracionárias. Observamos que, em geral, as leis do semigrupo falham para a derivada de Caputo, apesar de para alguns casos específicos serem válidas.

**Teorema 2.2.7.** *Se  $f \in C^{m+n}([a, b], \mathbb{R})$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) e  $\alpha > 0$ , então para todo  $k \in \mathbb{N}$  temos*

$$(I_{a+}^\alpha)^k ({}^c D_{a+}^\alpha)^m f(x) = \frac{({}^c D_{a+}^\alpha)^m f(c)}{\Gamma(k\alpha + 1)} (x-a)^{k\alpha}$$

e

$$(I_{b-}^\alpha)^k ({}^c D_{b-}^\alpha)^m f(x) = \frac{({}^c D_{b-}^\alpha)^m f(d)}{\Gamma(k\alpha + 1)} (b-x)^{k\alpha},$$

para alguns  $c \in ]a, x[$  e  $d \in ]x, b[$ .

---

*Demonstração.* Pelas propriedades do semigrupo para integrais fracionários, obtemos

$$(I_{a+}^{\alpha})^k := I_{a+}^{\alpha} \dots I_{a+}^{\alpha} = I_{a+}^{k\alpha}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} (I_{a+}^{\alpha})^k ({}^c D_{a+}^{\alpha})^m f(x) &= I_{a+}^{k\alpha} ({}^c D_{a+}^{\alpha})^m f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(k\alpha)} \int_a^x (x-t)^{k\alpha-1} ({}^c D_{a+}^{\alpha})^m f(t) dt \\ &= \frac{({}^c D_{a+}^{\alpha})^m f(c)}{\Gamma(k\alpha)} \int_a^x (x-t)^{k\alpha-1} dt \\ &= \frac{({}^c D_{a+}^{\alpha})^m f(c)}{\Gamma(k\alpha+1)} (x-a)^{k\alpha}, \end{aligned}$$

para algum  $c \in ]a, x[$ , cuja existência é garantida pelo teorema do valor médio para integrais.

□

**Teorema 2.2.8.** *Seja  $f \in C^{n+m}([a, b], \mathbb{R})$ , com  $m \in \mathbb{N}$  e  $\alpha > 0$ , temos*

$${}^c D_{a+}^{\alpha} \left( \frac{d}{dx} \right)^m f(x) = {}^c D_{a+}^{\alpha+m} f(x)$$

e

$${}^c D_{b-}^{\alpha} \left( -\frac{d}{dx} \right)^m f(x) = {}^c D_{b-}^{\alpha+m} f(x).$$

*Demonstração.* Prova-se a fórmula atendendo a que

$$\begin{aligned} {}^c D_{a+}^{\alpha} \left( \frac{d}{dx} \right)^m f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left( \frac{d}{dx} \right)^m f^{(n)}(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma((n+m)-(\alpha+m))} \int_a^x (x-t)^{(n+m)-(\alpha+m)-1} f^{(n+m)}(t) dt \\ &= {}^c D_{a+}^{\alpha+m} f(x). \end{aligned}$$

□

No entanto, em geral,

$$\left( \frac{d}{dx} \right)^m {}^c D_{a+}^{\alpha} f(x) \neq {}^c D_{a+}^{\alpha+m} f(x)$$

e

$$\left( -\frac{d}{dx} \right)^m {}^c D_{b-}^{\alpha} f(x) \neq {}^c D_{b-}^{\alpha+m} f(x).$$

---

Pelo Teorema 2.2.8, se definirmos  $\beta = \alpha - (n - 1) \in ]0, 1[$ , temos

$${}^c D_{a+}^\alpha f(x) = {}^c D_{a+}^\beta f^{(n-1)}(x) \quad \text{e} \quad {}^c D_{b-}^\alpha f(x) = {}^c D_{b-}^\beta (-1)^{n-1} f^{(n-1)}(x).$$

Assim, para o cálculo da derivada fracionária de qualquer ordem  $\alpha > 0$ , é suficiente saber a derivada de ordem  $\beta = \alpha - (n - 1) \in ]0, 1[$ .

**Teorema 2.2.9.** *Seja  $m \in \mathbb{N}$  um número inteiro e  $f \in C^{n+m}([a, b], \mathbb{R})$  uma função. Então*

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}\right)^m {}^c D_{a+}^\alpha f(x) &= {}^c D_{a+}^{\alpha+m} f(x) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{k+n-\alpha-m}}{\Gamma(k+n-\alpha-m+1)} f^{(k+n)}(a) \\ e \\ \left(-\frac{d}{dx}\right)^m {}^c D_{b-}^\alpha f(x) &= {}^c D_{b-}^{\alpha+m} f(x) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(b-x)^{k+n-\alpha-m}}{\Gamma(k+n-\alpha-m+1)} f^{(k+n)}(b). \end{aligned}$$

*Demonstração.* Observamos que

$${}^c D_{a+}^{\alpha+m} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n+m)}(t) dt.$$

Integrando por partes, fazendo

$$\begin{cases} du = (x-t)^{n-\alpha-1} \Rightarrow u = \frac{-(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \\ v = f^{(n)}(t) \Rightarrow dv = \frac{d}{dt} f^{(n)}(t) \end{cases},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}\right)^m {}^c D_{a+}^\alpha f(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left[ \frac{(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} f^{(n)}(a) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha} \frac{d}{dt} f^{(n)}(t) dt \right] \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^{m-1} \left[ \frac{(x-a)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} f^{(n)}(a) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n+1)}(t) dt \right]. \end{aligned}$$

Fazendo de novo a integração por partes, fazendo

$$\begin{cases} du = (x-t)^{n-\alpha-1} \Rightarrow u = \frac{-(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \\ v = f^{(n+1)}(t) \Rightarrow dv = \frac{d}{dt} f^{(n+1)}(t) \end{cases},$$



tem-se o seguinte

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}\right)^m {}^c D_{a+}^\alpha f(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^{m-2} \left[ \sum_{k=0}^1 \frac{(x-a)^{k+n-\alpha-2}}{\Gamma(k+n-\alpha-1)} f^{(k+n)}(a) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n+2)}(t) dt \right]. \end{aligned}$$

Continuando com este procedimento, chegamos ao resultado desejado.  $\square$

Como consequência do Teorema 2.2.9, vem que se  $f^{(k)}(a) = 0$ , para todo  $k = n, n+1, \dots, n+m-1$ , então

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m {}^c D_{a+}^\alpha f(x) = {}^c D_{a+}^{\alpha+m} f(x),$$

e se  $f^{(k)}(b) = 0$ , para todo  $k = n, n+1, \dots, n+m-1$ ,

$$\left(-\frac{d}{dx}\right)^m {}^c D_{b-}^\alpha f(x) = {}^c D_{b-}^{\alpha+m} f(x).$$

**Teorema 2.2.10.** *Seja  $\alpha, \beta > 0$  tal que existe  $k \in \mathbb{N}$ , com  $\beta, \beta + \alpha \in [k-1, k]$ . Então, para  $f \in C^k([a, b], \mathbb{R})$ , tem-se*

$${}^c D_{a+}^\alpha {}^c D_{a+}^\beta f(x) = {}^c D_{a+}^{\alpha+\beta} f(x)$$

e

$${}^c D_{b-}^\alpha {}^c D_{b-}^\beta f(x) = (-1)^{[\alpha+\beta]} {}^c D_{b-}^{\alpha+\beta} f(x).$$

*Demonstração.* Suponhamos que  $\alpha + \beta = k$ . Como  $\beta \in [k-1, k[$ , temos que  $[\beta] = k-1 = \alpha + \beta - 1$ . Pelo Teorema 2.2.5 pode concluir-se que

$${}^c D_{a+}^\alpha {}^c D_{a+}^\beta f(x) = {}^c D_{a+}^\alpha I_{a+}^{\alpha+\beta-\beta} f^{[\alpha+\beta]}(x) = f^{[\alpha+\beta]}(x) = {}^c D_{a+}^{\alpha+\beta} f(x).$$

Suponhamos agora que  $\alpha + \beta < k$ . Neste caso  $\alpha \in ]0, 1[$  e  $[\beta] = [\alpha + \beta] = k-1$ . Como  ${}^c D_{a+}^\beta f(a) = 0$ , pelo Teorema 2.2.3,

$${}^c D_{a+}^\alpha {}^c D_{a+}^\beta f(x) = D_{a+}^\alpha {}^c D_{a+}^\beta f(x).$$

Desta forma, obtemos finalmente

$$\begin{aligned}
{}^c D_{a+}^\alpha {}^c D_{a+}^\beta f(x) &= D_{a+}^\alpha {}^c D_{a+}^\beta f(x) \\
&= \left( \frac{d}{dx} \right) I_{a+}^{1-\alpha} I_{a+}^{[\beta]+1-\beta} f^{[\beta]+1}(x) \\
&= \left( \frac{d}{dx} \right) I_{a+}^1 I_{a+}^{[\beta+\alpha]+1-(\beta+\alpha)} f^{[\beta+\alpha]+1}(x) \\
&= {}^c D_{a+}^{\alpha+\beta} f(x).
\end{aligned}$$

□

**Teorema 2.2.11.** *Se  $f \in C^k([a, b], \mathbb{R})$  e  $\alpha > 0$ , então*

$${}^c D_{a+}^{n-\alpha} {}^c D_{a+}^\alpha f(x) = {}^c D_{a+}^n f(x) \quad \text{e} \quad {}^c D_{b-}^{n-\alpha} {}^c D_{b-}^\alpha f(x) = {}^c D_{b-}^n f(x).$$

*Demonstração.* Uma vez que  ${}^c D_{a+}^\alpha f(a) = 0$ , e aplicando o Teorema 2.2.3, temos que

$$\begin{aligned}
{}^c D_{a+}^{n-\alpha} {}^c D_{a+}^\alpha f(x) &= D_{a+}^{n-\alpha} {}^c D_{a+}^\alpha f(x) \\
&= \left( \frac{d}{dx} \right)^{n-[\alpha]} I_{a+}^{\alpha-[\alpha]} I_{a+}^{[\alpha]+1-\alpha} \left( \frac{d}{dx} \right)^{[\alpha]+1} f(x) \\
&= \left( \frac{d}{dx} \right)^{n-[\alpha]-1} \left( \frac{d}{dx} \right) I_{a+}^1 \left( \frac{d}{dx} \right)^{[\alpha]+1} f(x) \\
&= {}^c D_{a+}^n f(x).
\end{aligned}$$

□

### 2.2.3 Resultados Diversos

Nesta secção vamos debruçarmo-nos sobre diversas propriedades dos operadores fracionários, como por exemplo a integração por partes (Teorema 2.2.12). No Teorema 2.2.13 obtemos a versão fracionária do teorema de Fermat e no Teorema 2.2.16 obtemos a prova da fórmula de Taylor.

**Teorema 2.2.12.** *Sejam  $f \in C([a, b], \mathbb{R})$  e  $g \in C^n([a, b], \mathbb{R})$ , então temos para  $\alpha > 0$ ,*

$$\int_a^b f(x) {}^c D_{a+}^\alpha g(x) dx = \int_a^b D_{b-}^\alpha f(x) g(x) dx + \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \left( -\frac{d}{dx} \right)^k I_{b-}^{n-\alpha} f(x) g^{(n-k-1)}(x) \right]_{x=a}^{x=b}$$

e

$$\int_a^b f(x) {}^c D_{b-}^\alpha g(x) dx = \int_a^b D_{a+}^\alpha f(x) g(x) dx + \left[ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} \left( \frac{d}{dx} \right)^k I_{a+}^{n-\alpha} f(x) g^{(n-k-1)}(x) \right]_{x=a}^{x=b}.$$

*Demonstração.* Recorrendo à fórmula de Dirichlet, obtemos

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) {}^c D_{a+}^\alpha g(x) dx &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^b \int_a^x f(x)(x-t)^{n-\alpha-1} \frac{d}{dt} g^{(n-1)}(t) dt dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^b \int_x^b f(t)(t-x)^{n-\alpha-1} dt \cdot \frac{d}{dx} g^{(n-1)}(x) dx.\end{aligned}$$

Fazendo a integração por partes

$$\begin{aligned}& \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left[ \int_x^b f(t)(t-x)^{n-\alpha-1} dt \cdot g^{(n-1)}(x) \right]_{x=a}^{x=b} \\ & - \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^b \frac{d}{dx} \left( \int_x^b f(t)(t-x)^{n-\alpha-1} dt \right) g^{(n-1)}(x) dx \\ & = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left[ \int_x^b f(t)(t-x)^{n-\alpha-1} dt \cdot g^{(n-1)}(x) \right]_{x=a}^{x=b} \\ & + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^b \left( -\frac{d}{dx} \right) \left( \int_x^b f(t)(t-x)^{n-\alpha-1} dt \right) \cdot \frac{d}{dx} g^{(n-2)}(x) dx.\end{aligned}$$

Fazendo novamente a integração por partes, a fórmula anterior será igual a

$$\begin{aligned}& \left[ \sum_{k=0}^1 \left( -\frac{d}{dx} \right)^k \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b f(t)(t-x)^{n-\alpha-1} dt \cdot g^{(n-k-1)}(x) \right]_{x=a}^{x=b} \\ & + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^b \left( -\frac{d}{dx} \right)^2 \left( \int_x^b f(t)(t-x)^{n-\alpha-1} dt \right) \cdot \frac{d}{dx} g^{(n-3)}(x) dx.\end{aligned}$$

Repetindo este processo temos

$$\begin{aligned}& \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \left( -\frac{d}{dx} \right)^k \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b f(t)(t-x)^{n-\alpha-1} dt \cdot g^{(n-k-1)}(x) \right]_{x=a}^{x=b} \\ & + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^b \left( -\frac{d}{dx} \right)^n \left( \int_x^b f(t)(t-x)^{n-\alpha-1} dt \right) \cdot g(x) dx \\ & = \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \left( -\frac{d}{dx} \right)^k I_{b-}^{n-\alpha} f(x) g^{(n-k-1)}(x) \right]_{x=a}^{x=b} + \int_a^b D_{b-}^\alpha f(x) g(x) dx.\end{aligned}$$

□

**Teorema 2.2.13.** *Seja  $\alpha \in ]0, 1[$  um número real e  $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  uma função. Se  $f(x^*)$  é um máximo, então  ${}^c D_{a+}^\alpha f(x^*) \geq 0$  e  ${}^c D_{b-}^\alpha f(x^*) \geq 0$ .*

*Demonstração.* Se  $f(x^*)$  é máximo, então  $f$  é não decrescente no intervalo  $[a, x^*]$  e é não crescente em  $[x^*, b]$ . Fazendo a mudança de variável  $\tau = (x - t + a)$ , temos :

$$\begin{aligned} {}^c D_{a+}^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (\tau - a)^{-\alpha} f'(x - \tau + a) d\tau \\ &= \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{d}{dt} (f(x - \tau + a)) \left( \alpha \int_\tau^x (s - a)^{-\alpha-1} ds + \frac{1}{(x - a)^\alpha} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Fazendo integração por partes obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{f(a)}{(x - a)^\alpha} - f(x) \left( \alpha \int_a^x (s - a)^{-\alpha-1} ds + \frac{1}{(x - a)^\alpha} \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x f(x - \tau + a) \left( -\frac{\alpha}{(\tau - a)^{\alpha+1}} \right) d\tau \\ &= \frac{f(x) - f(a)}{\Gamma(1-\alpha)(x - a)^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(x) - f(x - \tau + a)}{(\tau - a)^{\alpha+1}} d\tau. \end{aligned}$$

Como  $f(x^*) \geq f(a)$  e se  $f(x) \geq f(x - \tau + a)$ , para todo  $\tau \in [a, x^*]$ , segue-se que

$${}^c D_{a+}^\alpha f(x^*) \geq 0.$$

□

Observamos no Teorema 2.2.13 não podemos concluir que a derivada fracionária é nula no ponto extremo.

Tomemos, por exemplo,  $f(x) = 2x - x^2$ , com  $x \in [0, 2]$ . Então  $f$  satisfaz as hipóteses do Teorema 2.2.13 para  $x^* = 1$ . Para  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,

$${}^c D_{0+}^{0.5}(2x - x^2) = \frac{2\Gamma(2)}{\Gamma(1.5)} x^{0.5} - \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.5)} x^{1.5} \Rightarrow {}^c D_{0+}^{0.5} f(1) = \frac{2}{\Gamma(1.5)} - \frac{2}{\Gamma(2.5)} \approx 0.75 > 0.$$

Além disso, uma vez que  $f(x) = 2(2 - x) - (2 - x)^2$ , então

$${}^c D_{2-}^{0.5} f(1) = \frac{2}{\Gamma(1.5)} - \frac{2}{\Gamma(2.5)} \approx 0.75 > 0.$$

O resultado que se segue é o Teorema de Valor Médio para a derivada fracionária de Caputo.

**Teorema 2.2.14.** *Seja  $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  e  $\alpha \in ]0, 1[$ . Então, para todo  $x \in ]a, b[$ , existem  $c \in ]a, x[$  e  $d \in ]x, b[$ , tais que*

$$f(x) = f(a) + {}^c D_{a+}^\alpha f(c) \frac{(x - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}$$

e

$$f(x) = f(b) + {}^c D_{b-}^\alpha f(d) \frac{(b - x)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}.$$

*Demonstração.* Pelo Teorema de Valor Médio para integrais, existe  $c \in ]a, x[$  tal que

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha} {}^c D_{a+}^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} {}^c D_{a+}^{\alpha} f(t) dt \\ &= {}^c D_{a+}^{\alpha} f(c) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt \\ &= {}^c D_{a+}^{\alpha} f(c) \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Ainda tendo em conta o Teorema 2.2.4,

$$I_{a+}^{\alpha} {}^c D_{a+}^{\alpha} f(x) = f(x) - f(a),$$

a assim temos que

$$f(x) - f(a) = {}^c D_{a+}^{\alpha} f(c) \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

□

**Teorema 2.2.15.** *Seja  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $k \in \mathbb{N}$  e  $f$  uma função tal que as derivadas fracionárias  ${}^c D_{a+}^{k\alpha} f$ ,  ${}^c D_{a+}^{(k+1)\alpha} f$ ,  ${}^c D_{b-}^{k\alpha} f$ , e  ${}^c D_{b-}^{(k+1)\alpha} f$  existem e são contínuas em  $[a, b]$ . Então, para todo  $x \in [a, b]$ ,*

$$I_{a+}^{k\alpha} {}^c D_{a+}^{k\alpha} f(x) - I_{a+}^{(k+1)\alpha} {}^c D_{a+}^{(k+1)\alpha} f(x) = \frac{(x-a)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} {}^c D_{a+}^{k\alpha} f(a)$$

e

$$I_{b-}^{k\alpha} {}^c D_{b-}^{k\alpha} f(x) - I_{b-}^{(k+1)\alpha} {}^c D_{b-}^{(k+1)\alpha} f(x) = \frac{(b-x)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} {}^c D_{b-}^{k\alpha} f(b),$$

onde  ${}^c D_{a+}^{k\alpha} = {}^c D_{a+}^{\alpha} {}^c D_{a+}^{\alpha} \dots {}^c D_{a+}^{\alpha}$  e  ${}^c D_{b-}^{k\alpha} = {}^c D_{b-}^{\alpha} {}^c D_{b-}^{\alpha} \dots {}^c D_{b-}^{\alpha}$  ( $k$ -vezes).

*Demonstração.* Usando as leis do semigrupo para integrais e o Teorema 2.2.4, obtemos

$$\begin{aligned} I_{a+}^{k\alpha} {}^c D_{a+}^{k\alpha} f(x) - I_{a+}^{(k+1)\alpha} {}^c D_{a+}^{(k+1)\alpha} f(x) &= I_{a+}^{k\alpha} ({}^c D_{a+}^{k\alpha} f(x) - I_{a+}^{\alpha} {}^c D_{a+}^{\alpha} {}^c D_{a+}^{k\alpha} f(x)) \\ &= I_{a+}^{k\alpha} ({}^c D_{a+}^{k\alpha} f(x) - {}^c D_{a+}^{k\alpha} f(x) + {}^c D_{a+}^{k\alpha} f(a)) = \frac{(x-a)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} {}^c D_{a+}^{k\alpha} f(a). \end{aligned}$$

□

**Teorema 2.2.16.** *Seja  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $f$  tal que  ${}^c D_{a+}^{k\alpha} f$  e  ${}^c D_{b-}^{k\alpha} f$  existem e são contínuas para todo  $k = 0, 1, \dots, n+1$ .*

*Então, dado  $x \in [a, b]$ ,*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} {}^c D_{a+}^{k\alpha} f(a) + \frac{{}^c D_{a+}^{(n+1)\alpha} f(c)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} (x-a)^{(n+1)\alpha}$$

---

e

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-x)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} {}^c D_{b-}^{k\alpha} f(b) + \frac{{}^c D_{b-}^{(n+1)\alpha} f(b)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} (b-x)^{(n+1)\alpha},$$

para  $c \in ]a, x[$  e  $d \in ]x, b[$ .

*Demonstração.* Pelo Teorema 2.2.15,

$$\sum_{k=0}^n \left( I_{a+}^{k\alpha} {}^c D_{a+}^{k\alpha} f(x) - I_{a+}^{(k+1)\alpha} {}^c D_{a+}^{(k+1)\alpha} f(x) \right) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} {}^c D_{a+}^{k\alpha} f(a).$$

Assim concluímos que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} {}^c D_{a+}^{k\alpha} f(a) + I_{a+}^{(n+1)\alpha} {}^c D_{a+}^{(n+1)\alpha} f(x).$$

Usando o teorema de valor médio para integrais

$$\begin{aligned} I_{a+}^{(n+1)\alpha} {}^c D_{a+}^{(n+1)\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma((n+1)\alpha)} \int_a^x (x-a)^{(n+1)\alpha-1} {}^c D_{a+}^{(n+1)\alpha} f(t) dt \\ &= \frac{{}^c D_{a+}^{(n+1)\alpha} f(c)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} (x-a)^{(n+1)\alpha}, \end{aligned}$$

para algum  $c \in ]a, x[$ , concluindo a prova. □

## Capítulo 3

# Problema Variacional Fracionário

O estudo do cálculo das variações fracionário iniciou-se em 1996, com o trabalho desenvolvido por Riewe [29], tendo explicado que "o Lagrangiano tradicional e a mecânica Hamiltoniana não podiam ser usados com forças não conservativas estando em fricção". Desde esta altura, vários estudos apareceram para diferentes tipos de derivadas fracionárias, com o objetivo de determinar as condições necessárias e suficientes de otimalidade [1, 3, 4, 23, 28, 30]. O principal objetivo deste capítulo é o estudo do cálculo das variações quando o funcional depende da derivada fracionária de Caputo. Começamos com o problema fundamental do cálculo das variações dependendo da derivada fracionária de Caputo.

Seja  $y \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ , e considere o problema

$$\begin{aligned} J(y) &= \int_a^b F(x, y(x), {}^c D_{a+}^\alpha y(x)) dx \longrightarrow \min, \\ y(a) &= y_a, \quad y(b) = y_b \end{aligned} \tag{3.1}$$

com as seguintes suposições:

1.  $F : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  é contínua e diferenciável em relação ao segundo e terceiro argumento.

2. Para qualquer  $y$ , a função  $x \longrightarrow D_{b-}^\alpha \left( \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^\alpha y(x)} \right)$  é contínua.

---

## 3.1 O Problema Fundamental

Nesta secção apresentamos as condições necessárias e suficientes de otimalidade, que o candidato a minimizante do funcional deve cumprir. Para obtermos estas condições tomaremos em consideração o facto de que a primeira variação do funcional (3.1) é igual a zero.

### 3.1.1 Condições Necessárias de Otimalidade

**Teorema 3.1.1.** *Seja  $y$  um minimizante do funcional  $J$  em (3.1) definido em*

$$D = \{y \in C^1([a, b], \mathbb{R}) : y(a) = y_a \text{ e } y(b) = y_b\},$$

*onde  $y_a, y_b \in \mathbb{R}$  são fixos. Então,  $y$  é solução da equação*

$$\frac{\partial F}{\partial y} + D_{b-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^\alpha y} = 0, \forall x \in [a, b]. \quad (3.2)$$

*Demonstração.* Seja  $y + \epsilon\eta$  uma variação de  $y$ , com  $|\epsilon| \ll 1$  e  $\eta \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ . Uma vez que  $y$  pertence ao conjunto  $D$ , a condição de fronteira  $\eta(a) = \eta(b) = 0$  deve-se verificar. Seja  $j$  uma função definida numa vizinhança de zero, dada pela regra

$$j(\epsilon) = J(y + \epsilon\eta).$$

Seja  $y$  um minimizante de  $J$ . Então  $\epsilon = 0$  é também minimizante de  $j$  e  $j'(0) = 0$ . Logo,

$$\int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^\alpha y} {}^c D_{a+}^\alpha \eta \right) dx = 0. \quad (3.3)$$

Aplicando o Teorema 2.2.12 ao segundo termo da função integranda, obtemos o seguinte:

$$\int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^\alpha y} {}^c D_{a+}^\alpha \eta \right) dx = \int_a^b D_{b-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^\alpha y} \eta dx + \left[ \eta I_{b-}^{1-\alpha} \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^\alpha y} \right]_{x=a}^{x=b}. \quad (3.4)$$

Substituindo a equação (3.4) em (3.3) tem-se o seguinte

$$\int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial y} + D_{b-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^\alpha y} \right] \eta dx + \left[ \eta I_{b-}^{1-\alpha} \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^\alpha y} \right]_{x=a}^{x=b} = 0. \quad (3.5)$$



---

Tendo em conta que  $\eta(a) = \eta(b) = 0$ , da equação (3.5) resulta que

$$\int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial y} + D_{b-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^\alpha y} \right] \eta dx = 0. \quad (3.6)$$

Pela arbitrariedade de  $\eta$ , e pelo (Lema (1.1.1)), concluimos que

$$\frac{\partial F}{\partial y} + D_{b-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^\alpha y} = 0, \quad \forall x \in [a, b]. \quad (3.7)$$

□

**Definição 3.1.1.** *A equação (3.7) chama-se equação fracionária de Euler-Lagrange associada ao funcional  $J$ . Uma sua solução chama-se extremal do funcional.*

O teorema a seguir estabelece as condições necessárias e de transversalidade do funcional (3.1) com uma das fronteiras livres.

**Teorema 3.1.2.** *Seja  $y$  um minimizante do funcional (3.1). Então,  $y$  é uma solução para a equação diferencial fracionária*

$$\frac{\partial F}{\partial y} + D_{b-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial^c D_{b-}^\alpha y} = 0, \quad \forall x \in [a, b]. \quad (3.8)$$

*Se  $y(a)$  é livre, então*

$$I_{b-}^{1-\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^\alpha y} = 0, \quad \text{em } x = a,$$

*e se  $y(b)$  é livre, então*

$$I_{b-}^{1-\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^\alpha y} = 0, \quad \text{em } x = b.$$

*Demonstração.* Se  $y$  é um minimizante, pelo Teorema 3.1.1

$$\frac{\partial F}{\partial y} + D_{b-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial^c D_{b-}^\alpha y} = 0, \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Usando a equação (3.5), tem-se que

$$\left[ \eta I_{b-}^{1-\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^\alpha y} \right]_{x=a}^{x=b} = 0.$$

Se  $y(a)$  é livre, então  $\eta(a)$  é também livre. Escolhendo  $\eta(a) \neq 0$  e  $\eta(b) = 0$ , obtemos como condição de transversalidade

$$I_{b-}^{1-\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^\alpha y} = 0, \quad \text{em } x = a.$$

---

Neste caso, temos como condições necessárias

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} + D_{b-}^{\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{b-}^{\alpha} y} = 0, & x \in [a, b] \\ I_{b-}^{1-\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^{\alpha} y} = 0, & em \quad x = a. \end{cases}$$

Por outro lado, se  $y(b)$  é livre, então  $\eta(b)$  é também livre. Tomando  $\eta(a) = 0$  e  $\eta(b) \neq 0$  obtemos como condição de transversalidade

$$\left( I_{b-}^{1-\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^{\alpha} y(x)} \right) = 0, \quad em \quad x = b.$$

Neste caso, temos

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} + D_{b-}^{\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^{\alpha} y} = 0, & x \in [a, b] \\ I_{b-}^{1-\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^{\alpha} y} = 0, & em \quad x = b \end{cases}.$$

□

De seguida apresentamos o resultado do problema mais geral. Consideremos  $A \in [a, b]$  e o funcional

$$J(y) = \int_A^b F(x, y(x), {}^c D_{a+}^{\alpha} y(x)) dx, \quad (3.9)$$

com  $y$  definido no conjunto

$$D_A = \{y \in C^1([a, b], \mathbb{R}) : y(a) = y_A \text{ e } y(b) = y_b\}.$$

**Teorema 3.1.3.** *Se  $y$  é um minimizante do funcional (3.9), então  $y$  satisfaz*

$$D_{b-}^{\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^{\alpha} y} - D_{A-}^{\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^{\alpha} y} = 0 \quad em \quad [a, A],$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + D_{b-}^{\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^{\alpha} y} = 0 \quad em \quad [A, b],$$

e  $y$  satisfaz também a condição de transversalidade :

$$I_{A-}^{1-\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^{\alpha} y} - I_{b-}^{1-\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^{\alpha} y} = 0 \quad em \quad x = a.$$

*Demonstração.* Seja  $y + \epsilon\eta$  uma variação de  $y$ , com  $|\epsilon| \ll 1$ ,  $\eta \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ , e  $\eta(A) = \eta(b) = 0$ . A primeira variação do funcional é dada por

$$\begin{aligned} \int_A^b \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} {}^c D_{a+y}^\alpha \eta \right] dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} {}^c D_{a+y}^\alpha \eta \right] dx - \int_a^A \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} {}^c D_{a+y}^\alpha \eta \right] dx &= 0. \end{aligned}$$

Procedendo a integração por partes os segundos termos de cada integrando, tem-se que

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y} \eta dx + \left[ \eta I_{b-}^{1-\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} \right]_{x=a}^{x=b} + \int_a^b \eta D_{b-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} dx - \left\{ \int_a^A \frac{\partial F}{\partial y} \eta dx \right. \\ \left. + \left[ \eta I_{A-}^{1-\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} \right]_{x=a}^{x=A} + \int_a^A \eta D_{A-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} dx \right\} = 0. \end{aligned}$$

Tendo em conta que  $\eta(b) = \eta(A) = 0$ , tem-se que

$$\begin{aligned} \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} + D_{b-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} \right) \eta dx - \left[ \eta I_{b-}^{1-\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} \right]_{x=a} - \left\{ \int_a^A \left( \frac{\partial F}{\partial y} + D_{A-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} \right) \eta dx \right. \\ \left. - \left[ \eta I_{A-}^{1-\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} \right]_{x=a} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Separando o integral com limites de integração  $[a, b]$  respetivamente em dois, temos que

$$\begin{aligned} \int_A^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} + D_{b-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} \right) \eta dx + \int_a^A \left( \frac{\partial F}{\partial y} + D_{b-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} \right) \eta dx - \left[ \eta I_{b-}^{1-\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} \right]_{x=a} \\ - \left\{ \int_a^A \left( \frac{\partial F}{\partial y} + D_{A-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} \right) \eta dx - \left[ \eta I_{A-}^{1-\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} \right]_{x=a} \right\} = 0 \\ \Leftrightarrow \int_A^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} + D_{b-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} \right) \eta dx + \int_a^A \left( D_{b-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} - D_{A-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} \right) \eta dx \\ + \eta(a) \left[ I_{A-}^{1-\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} - I_{b-}^{1-\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} \right]_{x=a} = 0. \end{aligned}$$

Pela arbitrariedade de  $\eta$ , concluímos que

$$\frac{\partial F}{\partial y} + D_{b-}^\alpha \frac{\partial L}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} = 0, \quad x \in [A, b]$$

e

$$D_{b-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} - D_{A-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} = 0, \quad x \in [a, A],$$

e que  $y$  satisfaz a condição de transversalidade em  $x = a$ :

$$I_{A-}^{1-\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} - I_{b-}^{1-\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} = 0.$$

□

### 3.1.2 Condição Suficiente de Otimalidade

A equação (3.2) é uma condição necessária de otimalidade. Para deduzirmos as condição suficiente, recordamos a definição da função convexa. Consideremos uma função  $F(x, y, y')$  contínua e diferenciável em relação ao segundo e terceiro argumentos. Dizermos que  $F$  é uma função convexa se

$$F(x, y + y^*, y' + y'^*) - F(x, y, y') \geq \frac{\partial F}{\partial y} y^* + \frac{\partial F}{\partial y'} y'^*.$$

**Teorema 3.1.4.** *Se  $F$  é uma função convexa em  $[a, b] \times \mathbb{R}^2$ , então cada solução da equação fracionária de Euler-Lagrange minimiza o funcional  $J$  definido em*

$$D = \{y \in C^1([a, b], \mathbb{R}) : y(a) = y_a \quad e \quad y(b) = y_b\}.$$

*Demonstração.* Seja  $y$  uma solução da equação (3.2) e  $y + \epsilon\eta$  a variação de  $y$ , com  $|\epsilon| \ll 1$ ,  $\eta \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  e  $\eta(a) = \eta(b) = 0$ . Então

$$\begin{aligned} J(y + \epsilon\eta) - J(y) &= \int_a^b \left[ F\left(x, y(x) + \epsilon\eta(x), {}^c D_{a+}^\alpha y(x) + \epsilon {}^c D_{a+}^\alpha \eta(x)\right) \right. \\ &\quad \left. - F\left(x, y(x), {}^c D_{a+}^\alpha y(x)\right) \right] dx \\ &\geq \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^\alpha y(x)} {}^c D_{a+}^\alpha \eta(x) \right) dx. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Integrando por partes o segundo termo do integral da desigualdade anterior temos

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^\alpha y(x)} {}^c D_{a+}^\alpha \eta(x) dx = \left[ \eta(x) I_{b-}^{1-\alpha} \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^\alpha y} \right]_{x=a}^{x=b} + \int_a^b \eta(x) D_{b-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^\alpha y} dx. \quad (3.11)$$

Substituindo (3.11) em (3.10), obtemos

$$J(y + \epsilon\eta) - J(y) \geq \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) dx + \left[ \eta(x) I_{b-}^{1-\alpha} \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^\alpha y} \right]_{x=a}^{x=b} + \int_a^b \eta(x) D_{b-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^\alpha y} dx.$$

Uma vez que  $\eta(a) = \eta(b) = 0$ , temos

$$J(y + \epsilon\eta) - J(y) \geq \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} + D_{b-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^\alpha y} \right) \eta(x) dx = 0.$$

Logo

$$J(y + \epsilon\eta) - J(y) \geq 0,$$

provando assim que  $J$  atinge um mínimo em  $y$ . □

## 3.2 Condição de Legendre

A condição de Legendre é uma condição de segunda ordem que um extremal deve verificar para que seja um minimizante de um dado funcional. A condição de Legendre foi provada pela primeira vez em cálculo variacional fracionário, para o funcional que depende da derivada fracionária de Riemman-Liouville [4, 6, 19].

**Teorema 3.2.1.** *Seja  $y$  um minimizante do funcional  $J$  em (3.1), definido em  $D$ . Se  $\frac{\partial^2 F}{\partial y_{ij}}$  existe e é contínua, para  $i, j \in \{2, 3\}$ , então  $y$  satisfaz*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial ({}^c D_{a+}^\alpha y)^2} \geq 0.$$

*Demonstração.* Seja  $y + \epsilon \eta$  uma variação de  $y$ , com  $\eta \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ , tal que  $\eta(a) = 0 = \eta(b)$ . Definindo

$$j(\epsilon) = J(y + \epsilon \eta),$$

então temos que  $j''(0) \geq 0$ , ou seja

$$\int_a^b \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \eta^2(x) + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial {}^c D_{a+}^\alpha y} \eta(x) {}^c D_{a+}^\alpha \eta(x) + \frac{\partial^2 F}{\partial ({}^c D_{a+}^\alpha y)^2} \cdot ({}^c D_{a+}^\alpha \eta(x))^2 \right] dx \geq 0. \quad (3.12)$$

Suponhamos que a condição de Legendre é violada por algum  $x_0 \in [a, b]$ . Então existe um sub-intervalo  $[c, d] \subseteq [a, b]$ , e três constantes reais  $C_1, C_2, C_3$ , com  $C_3 < 0$ , tais que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x) < C_1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial {}^c D_{a+}^\alpha y} < C_2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial ({}^c D_{a+}^\alpha y)^2} < C_3, \quad (3.13)$$

para todo  $x \in [c, d]$ . Seja  $\eta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$\eta(x) := (\alpha + 2)(x - c)^{\alpha+1} - 2 \frac{\alpha + 4}{d - c} (x - c)^{\alpha+2} + \frac{\alpha + 10}{(d - c)^2} (x - c)^{\alpha+3} - \frac{4}{(d - c)^3} (x - c)^{\alpha+4}.$$

Então  $\eta(c) = 0 = \eta(d)$  e  $\eta'(c) = 0 = \eta'(d)$ . Uma vez que

$$\begin{aligned} {}^c D_{c+}^\alpha \eta(x) &= \Gamma(\alpha + 3)(x - c) - \frac{(\alpha + 4)\Gamma(\alpha + 3)}{(d - c)} (x - c)^2 + \frac{(\alpha + 10)\Gamma(\alpha + 4)}{6(d - c)^2} (x - c)^3 \\ &\quad - \frac{\Gamma(\alpha + 5)}{6(d - c)^3} (x - c)^4, \end{aligned}$$

---

temos também que  ${}^cD_{c+}^\alpha \eta(c) = 0 = {}^cD_{c+}^\alpha \eta(d)$ . Além disso, para todo  $x \in [c, d]$ , tem-se que

$$\begin{aligned}
\eta(x) &\leq (\alpha + 2)(x - c)^{\alpha+1} + \frac{10 + \alpha}{(d - c)^2}(x - c)^{\alpha+3} \\
&\leq (2 + \alpha)(d - c)^{\alpha+1} + (\alpha + 10)(d - c)^{\alpha+1} \\
&\leq [(2 + \alpha) + (\alpha + 10)](d - c)^{\alpha+1} \\
&\leq (2\alpha + 12)(d - c)^{\alpha+1} \leq 14(d - c)^{\alpha+1}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
{}^cD_{c+}^\alpha \eta(x) &\leq \Gamma(\alpha + 3)(x - c) + \frac{(\alpha + 10)\Gamma(\alpha + 4)}{6(d - c)^2}(x - c)^3 \\
&\leq \Gamma(\alpha + 3)(d - c) + \frac{(\alpha + 10)\Gamma(\alpha + 4)}{6(d - c)^2}(d - c)^3 \\
&\leq \frac{6\Gamma(\alpha + 3)(d - c) + (\alpha + 10)\Gamma(\alpha + 4)(d - c)}{6} \\
&\leq \frac{\Gamma(\alpha + 3)(d - c)[6 + (\alpha + 10)(\alpha + 3)]}{6} \\
&\leq \frac{\Gamma(\alpha + 3)(d - c)(6 + \alpha^2 + 13\alpha + 30)}{6} \\
&\leq \frac{\Gamma(\alpha + 3)(d - c)(\alpha^2 + 13\alpha + 36)}{6} \\
&\leq 50(d - c).
\end{aligned}$$

Definimos a função  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , do seguinte modo:

$$h(x) := \begin{cases} \eta(x), & \text{se } x \in [c, d] \\ 0, & \text{se } x \notin [c, d] \end{cases}.$$

Pelas propriedades da função  $\eta$ , tem-se que  $h \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ ,  $h(a) = 0$  e  $h(b) = 0$ . Para além disto,

$${}^cD_{a+}^\alpha h(x) = \begin{cases} {}^cD_{c+}^\alpha \eta(x), & \text{se } x \in [c, d] \\ 0, & \text{se } x \notin [c, d] \end{cases}.$$

Notemos que, para  $x > d$ ,  ${}^cD_{a+}^\alpha \eta(x) = {}^cD_{c+}^\alpha h(d) = 0$ . Substituindo esta variação na

equação (3.12) e usando a relação (3.13) , temos que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_a^b \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} h^2(x) + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial {}^c D_{a+}^\alpha y} h(x) {}^c D_{a+}^\alpha h(x) dx + \frac{\partial^2 F}{\partial ({}^c D_{a+}^\alpha y)^2} ({}^c D_{a+}^\alpha h(x))^2 \right] dx \\
0 &\leq \int_c^d \left[ 14^2 \cdot C_1 (d-c)^{2\alpha+2} + 2 \cdot 14 \cdot 50 \cdot C_2 (d-c)^{\alpha+2} + 50^2 \cdot C_3 (d-c)^2 \right] dx \\
&= (d-c)^2 (b-a) \left[ 196 \cdot C_1 (d-c)^{2\alpha} + 1400 \cdot C_2 (d-c)^\alpha + 2500 \cdot C_3 \right] < 0,
\end{aligned}$$

se assumirmos que  $|d-c| \ll 1$ , obtendo assim a contradição.  $\square$

### 3.3 Problema Isoperimétrico

Os problemas isoperimétricos têm como objetivo principal a minimização ou maximização de um funcional sujeito a uma restrição integral [7]. Estes problemas têm aplicação em diversas áreas como por exemplo na geometria, álgebra, física e análise [9].

Nos dias de hoje os estudos sobre os problemas isoperimétricos são feitos de forma mais rigorosa através do cálculo das variações, baseando-se na equação de Euler-Lagrange [4, 12, 27].

Seja  $l \in \mathbb{R}$  fixo e  $G : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e diferenciável em relação ao segundo e terceiro argumentos tal que, para qualquer  $y \in ([a, b], \mathbb{R})$ ,  $x \rightarrow D_{b-}^\alpha \left( \frac{\partial G}{\partial {}^c D_{a+}^\alpha y} \right)$  é contínua. Consideremos a seguinte restrição integral

$$I(x) = \int_a^b G(x, y(x), {}^c D_{a+}^\alpha y(x)) dx = l. \quad (3.14)$$

**Teorema 3.3.1.** *Seja  $y$  um minimizante do funcional  $J$  em (3.1), definido em*

$$D = \{y \in C^1([a, b], \mathbb{R}) : (a) = y_a \text{ e } y(b) = y_b\},$$

*sujeito à restrição (3.14). Se  $y$  não é extremal de (3.14), então existe um número real  $\lambda$  tal que  $y$  é solução da equação*

$$\frac{\partial W}{\partial y} + D_{b-}^\alpha \frac{\partial W}{\partial {}^c D_{a+}^\alpha y} = 0, \quad x \in [a, b], \quad (3.15)$$

onde  $W : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é a função definida por  $W = F + \lambda G$ .

*Demonstração.* Consideremos uma variação de  $y$  com dois parâmetros  $y + \epsilon_1 \eta_1 + \epsilon_2 \eta_2$ , com  $|\epsilon_1| \ll 1, |\epsilon_2| \ll 1$ , e  $\eta_1, \eta_2 \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ , satisfazendo  $\eta_1(a) = 0 = \eta_1(b)$  e

$\eta_2(a) = 0 = \eta_2(b)$ . Definimos duas funções  $j$  e  $i$  com dois parâmetros  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$ , numa vizinhança de zero, como sendo

$$i(\epsilon_1, \epsilon_2) = I(y + \epsilon_1 \eta_1 + \epsilon_2 \eta_2) - l, \quad \text{e} \quad j(\epsilon_1, \epsilon_2) = J(y + \epsilon_1 \eta_1 + \epsilon_2 \eta_2).$$

Pelo Teorema 2.2.12,

$$\frac{\partial i}{\partial \epsilon_2}(0, 0) = \int_a^b \left[ \frac{\partial G}{\partial y} + D_{b-}^\alpha \frac{\partial G}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} \right] \eta_2(x) dx + \left[ \eta_2(x) I_{b-}^{1-\alpha} \frac{\partial G}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} \right]_{x=a}^{x=b}.$$

Assumindo que  $y$  não é extremal para  $I$ , existe uma função  $\eta_2$  tal que  $\frac{\partial i}{\partial \epsilon_2}(0, 0) \neq 0$ . Pelo Teorema da Função Implícita, existe uma única função  $\epsilon_2(\cdot)$  de classe  $C^1$ , definida numa vizinhança de zero, tal que  $i(\epsilon_1, \epsilon_2(\epsilon_1)) = 0$ .

Por outro lado  $(0, 0)$  é minimizante de  $j$ , sujeito à restrição  $i(\cdot, \cdot) = 0$ , e  $\nabla i(0, 0) \neq (0, 0)$ .

Aplicando a regra dos multiplicadores de Lagrange, existe um número real  $\lambda$  tal que  $\nabla(j + i\lambda)(0, 0) = (0, 0)$ . Diferenciando  $j(\epsilon_1, \epsilon_2) + \lambda i(\epsilon_1, \epsilon_2)$  em ordem a  $\epsilon_1$ , e tomando  $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (0, 0)$ , obtemos

$$\int_a^b \left[ \frac{\partial W}{\partial y} + D_{b-}^\alpha \frac{\partial W}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} \right] \eta_1(x) dx + \left[ \eta_1(x) I_{b-}^{1-\alpha} \frac{\partial W}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} \right]_{x=a}^{x=b} = 0.$$

Usando a condição de fronteira  $\eta_1(a) = \eta_1(b) = 0$ , concluímos que

$$\frac{\partial W}{\partial y} + D_{b-}^\alpha \frac{\partial W}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial y} + D_{b-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} + \lambda \left( \frac{\partial G}{\partial y} + D_{b-}^\alpha \frac{\partial G}{\partial^c D_{a+y}^\alpha} \right) = 0.$$

□

**Teorema 3.3.2.** *Suponhamos que as funções  $F$  e  $G$  são convexas em  $[a, b] \times \mathbb{R}^2$ , e seja  $\lambda \geq 0$  um número real. Definimos a função  $W = F + \lambda G$ . Então, cada solução  $y$  da equação de Euler-Lagrange (3.15) minimiza  $J$  em  $D$  sujeita à restrição integral (3.14).*

*Demonstração.* Pelo Teorema 3.1.4, concluímos que  $y$  minimiza  $W$ , ou seja, para toda a variação  $y + \epsilon \eta$ , tem-se que

$$\begin{aligned} & \int_a^b F(x, y + \epsilon \eta, {}^c D_{a+}^\alpha y + {}^c D_{a+}^\alpha \epsilon \eta) dx + \int_a^b \lambda G(x, y + \epsilon \eta, {}^c D_{a+}^\alpha y + {}^c D_{a+}^\alpha \epsilon \eta) dx \\ & \geq \int_a^b F(x, y, {}^c D_{a+}^\alpha y) dx + \int_a^b \lambda G(x, y, {}^c D_{a+}^\alpha y) dx. \end{aligned}$$



Usando a restrição integral tem-se o seguinte

$$\int_a^b F(x, y + \epsilon\eta, {}^cD_{a+}^\alpha y + {}^cD_{a+}^\alpha \epsilon\eta) dx + \lambda l \geq \int_a^b F(x, y, {}^cD_{a+}^\alpha y) dx + \lambda l,$$

logo,

$$\int_a^b F(x, y + \epsilon\eta, {}^cD_{a+}^\alpha y + {}^cD_{a+}^\alpha \epsilon\eta) dx \geq \int_a^b F(x, y, {}^cD_{a+}^\alpha y) dx.$$

□

### 3.4 Problema Variacional com Restrições Holonómicas

Nesta secção apresentamos resultados de funcionais que dependem de um vetor de funções  $y = (y_1, y_2)$  [4, 8]. Neste caso  ${}^cD_{a+}^\alpha y := ({}^cD_{a+}^\alpha y_1, {}^cD_{a+}^\alpha y_2)$ , sendo  $y_1, y_2 \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  duas funções diferenciáveis. Impomos uma nova restrição

$$g(x, y(x)) = 0, \quad \forall x \in [a, b], \quad (3.16)$$

onde  $g : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função da classe  $C^1$  para além das condições de fronteira  $y(a) = y_a$  e  $y(b) = y_b$  com  $y_a, y_b \in \mathbb{R}^2$ . Consideremos o funcional  $J$  definido por

$$J(y_1, y_2) = \int_a^b F(x, y_1, y_2, {}^cD_{a+}^\alpha y_1, {}^cD_{a+}^\alpha y_2) dx, \quad (3.17)$$

no conjunto

$$D = \{(y_1, y_2) \in C^1[a, b] \times C^1[a, b] : (y_1(a), y_2(a)) = y_a \text{ e } (y_1(b), y_2(b)) = y_b\},$$

onde  $y_a, y_b \in \mathbb{R}^2$  são fixos. Assumimos que o Lagrangiano verifica as seguintes condições:

1.  $F : [a, b] \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e diferenciável em relação aos argumentos  $i = 2, 3, 4, 5$ ;
2. Dada uma função qualquer  $y$ ,  $x \rightarrow D_{b-}^\alpha (\partial_i F(x, y(x), {}^cD_{a+}^\alpha y(x)))$  é contínua para  $i = 4, 5$ .

Suponhamos que as funções admissíveis se encontram na superfície

$$g(x, y_1(x), y_2(x)) = 0, \quad (3.18)$$

onde  $g : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  é contínua e diferenciável em relação ao segundo e terceiro argumentos.

**Teorema 3.4.1.** *Seja  $y \in D$  um minimizante de  $J$  em (3.17) sujeito à restrição (3.18). Se  $\frac{\partial g}{\partial y_2} \neq 0$ , para qualquer  $x \in [a, b]$ , então existe uma função contínua  $\lambda : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $y$  satisfaz*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y_1} + D_{b-}^{\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^{\alpha} y_1} + \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial y_1} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y_2} + D_{b-}^{\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^{\alpha} y_2} + \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial y_2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

*Demonstração.* Consideremos uma variação de  $y$  como sendo  $y + \epsilon \eta$ , com  $|\epsilon| \ll 1$ , e  $\eta \in C^1[a, b] \times C^1[a, b]$ , onde  $\eta = (\eta_1, \eta_2)$  satisfazendo as condições de fronteira  $\eta(a) = (0, 0) = \eta(b)$ . Como  $\frac{\partial g}{\partial y_2} \neq 0$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , pelo Teorema da Função Implícita, existe uma subfamília de variações satisfazendo a restrição (3.18), ou seja, existe uma única função  $\eta_2(\epsilon, \eta_1)$ , tal que  $(y_1(x) + \epsilon \eta_1(x), y_2 + \epsilon \eta_2(x))$ , satisfaz (3.18). Portanto, para todo  $x \in [a, b]$  tem-se que

$$g(x, y_1(x) + \epsilon \eta_1(x), y_2(x) + \epsilon \eta_2(x)) = 0. \quad (3.20)$$

Diferenciando a equação (3.20) em relação a  $\epsilon$  e tomando  $\epsilon = 0$ , obtemos o seguinte

$$\frac{\partial g}{\partial y_1} \eta_1(x) + \frac{\partial g}{\partial y_2} \eta_2(x) = 0. \quad (3.21)$$

Definimos uma nova função  $\lambda(x)$  por

$$\lambda(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y_2} + D_{b-}^{\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^{\alpha} y_2}}{\frac{\partial g}{\partial y_2}}. \quad (3.22)$$

Multiplicando ambos os membros da equação (3.22) por

$$\lambda(x) \frac{\partial g}{\partial y_2} = - \frac{\partial F}{\partial y_2} + D_{b-}^{\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^{\alpha} y_2}. \quad (3.23)$$

Multiplicando ambos os membro (3.23) por  $\eta_2$ , tem-se que

$$\eta_2 \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial y_2} = \left( - \frac{\partial F}{\partial y_2} + D_{b-}^{\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^{\alpha} y_2} \right) \eta_2. \quad (3.24)$$

Da equação (3.21) resulta que

$$\frac{\partial g}{\partial y_1} \eta_1(x) = -\frac{\partial g}{\partial y_2} \eta_2(x), \quad (3.25)$$

e substituindo em (3.24), tem-se que

$$\lambda(x) \frac{\partial g}{\partial y_1} \eta_1(x) = \left( \frac{\partial F}{\partial y_2} + D_{b-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^\alpha y_2} \right) \eta_2(x). \quad (3.26)$$

Por outro lado, sendo  $y$  minimizante de  $J$ , a primeira variação de  $J$  é igual a zero, ou seja

$$\int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial y_1} \eta_1(x) + \frac{\partial F}{\partial y_2} \eta_2(x) + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^\alpha y_1} {}^c D_{a+}^\alpha \eta_1(x)}_{k_1} + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^\alpha y_2} {}^c D_{a+}^\alpha \eta_2(x)}_{k_2} \right] dx = 0. \quad (3.27)$$

Integrando por partes  $k_1$  e  $k_2$ , tem-se que

$$k_1 = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^\alpha y_1} {}^c D_{a+}^\alpha \eta_1(x) dx = \int_a^b D_{b-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^\alpha y_1} \eta_1(x) dx + \left[ \eta_1(x) I_{b-}^{1-\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^\alpha y_1} \right]_{x=a}^{x=b}, \quad (3.28)$$

e

$$k_2 = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^\alpha y_2} {}^c D_{a+}^\alpha \eta_2(x) dx = \int_a^b D_{b-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^\alpha y_2} \eta_2(x) dx + \left[ \eta_2(x) I_{b-}^{1-\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^\alpha y_2} \right]_{x=a}^{x=b}. \quad (3.29)$$

Substituindo (3.28) e (3.29) em (3.27) teremos

$$\begin{aligned} \int_a^b \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial y_1} + D_{b-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^\alpha y_1} \right) \eta_1(x) + \left( \frac{\partial F}{\partial y_2} + D_{b-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^\alpha y_2} \right) \eta_2(x) \right] dx \\ + \left[ \eta_1(x) I_{b-}^{1-\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^\alpha y_1} \right]_{x=a}^{x=b} + \left[ \eta_2(x) I_{b-}^{1-\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^\alpha y_2} \right]_{x=a}^{x=b} = 0. \end{aligned}$$

Tendo em conta que  $\eta_1(a) = \eta_1(b) = \eta_2(a) = \eta_2(b) = 0$ , temos

$$\int_a^b \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial y_1} + D_{b-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^\alpha y_1} \right) \eta_1(x) + \left( \frac{\partial F}{\partial y_2} + D_{b-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^\alpha y_2} \right) \eta_2(x) \right] dx = 0.$$

Pela igualdade (3.26) podemos substituir  $\left( \frac{\partial F}{\partial y_2} + D_{b-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^\alpha y_2} \right) \eta_2(x)$  por

$\lambda(x) \frac{\partial g}{\partial y_1} \eta_1(x)$ , resultando que

$$\int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial y_1} + D_{b-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^\alpha y_1} + \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial y_1} \right] \eta_1(x) dx = 0.$$

Pela arbitrariedade de  $\eta_1$  obtemos a equação

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} + D_{b-}^{\alpha} \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^{\alpha} y_1} + \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial y_1} = 0.$$

Por outro lado, usando a equação (3.22), obtemos a segunda condição

$$\frac{\partial F}{\partial y_2} + D_{b-}^{\alpha} \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^{\alpha} y_2} + \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial y_2} = 0.$$

□

**Teorema 3.4.2.** *Suponhamos que a função  $F(x, y_1, y_2, {}^c D_{a+}^{\alpha} y_1, {}^c D_{a+}^{\alpha} y_2)$  em (3.17) é convexa em relação a  $y_1, y_2, {}^c D_{a+}^{\alpha} y_1, {}^c D_{a+}^{\alpha} y_2$  em  $[a, b] \times \mathbb{R}^4$ ,  $g : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua e diferenciável em relação ao segundo e terceiro argumentos, e seja dado  $\lambda$  definido pela equação (3.22). Se  $\frac{\partial g}{\partial y_2} \neq 0$ , para todo  $x \in [a, b]$ , e  $y$  é solução da equação fracionária de Euler-Lagrange (3.19), então  $y$  minimiza  $J$  em  $D$ , sujeito a (3.18).*

*Demonstração.* Se  $y + \epsilon\eta$  é uma variação de  $y$ , então

$$\begin{aligned} J(y + \epsilon\eta) - J(y) &\geq \int_a^b \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial y_1} + D_{b-}^{\alpha} \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^{\alpha} y_1} \right) \epsilon\eta_1(x) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial F}{\partial y_2} + D_{b-}^{\alpha} \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^{\alpha} y_2} \right) \epsilon\eta_2(x) \right] dx. \end{aligned}$$

Se a variação da função satisfaz a restrição (3.18), obtemos a seguinte relação

$$\eta_2(x) = \frac{-\frac{\partial g}{\partial y_1} \eta_1(x)}{\frac{\partial g}{\partial y_2}},$$

e usando a equação (??) deduzimos que

$$\begin{aligned} J(y + \epsilon\eta) - J(y) &\geq \int_a^b \left\{ \left( \frac{\partial F}{\partial y_1} + D_{b-}^{\alpha} \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^{\alpha} y_1} \right) \epsilon\eta_1(x) \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{\partial F}{\partial y_2} + D_{b-}^{\alpha} \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^{\alpha} y_2} \right) \frac{\frac{\partial g}{\partial y_1} \epsilon\eta_1(x)}{\frac{\partial g}{\partial y_2}} \right\} dx \\ &\geq \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial y_1} + D_{b-}^{\alpha} \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^{\alpha} y_1} + \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial y_1} \right] \epsilon\eta_1 dx. \end{aligned}$$

Por hipótese o integrando é igual a zero, logo

$$J(y + \epsilon\eta) - J(y) \geq 0.$$

□

---

### 3.5 O Problema Variacional de Herglotz

Apresentamos nesta secção o problema fracionário de Herglotz que depende da derivada fracionária de Caputo. O problema de Herglotz foi proposto por Herglotz em 1930, mas apenas em 1996 despertou a atenção dos investigadores da matemática, com os trabalhos [13, 14].

O problema de Herglotz é uma generalização do problema variacional clássico [4], em que o modelo é expresso por uma equação diferencial que envolve a derivada  $z$  e uma função que depende de  $(y, z)$  e da derivada de  $y$ , enquanto que no cálculo variacional clássico o funcional é definido por uma integral que depende apenas de  $y$  e  $y'$ .

O objetivo no problema de Herglotz fracionário é determinar uma curva  $y \in C^1([a, b]\mathbb{R})$ , sujeito às condições de fronteira  $y(a) = y_a$  e  $y(b) = y_b$ , tal que a solução  $z$  do sistema

$$\begin{cases} z'(x) = F(x, y(x), {}^c D_{a+}^\alpha y(x), z(x)), & x \in [a, b] \\ z(a) = z_a \end{cases}, \quad (3.30)$$

atinge um mínimo em  $x = b$ , com as seguintes suposições

1. Dada uma função  $y$ ,  $x \rightarrow {}^c D_{a+}^\alpha y(x)$  é contínua e diferenciável.
2.  $F : [a, b] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua e diferenciável em relação ao segundo, terceiro e quarto argumentos.
3. Dada uma função  $y$ ,  $x \rightarrow D_{b-}^\alpha \left( \lambda(x) \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^\alpha y} \right)$  é contínua, com

$$\lambda(x) = \exp \left( - \int_a^x \frac{\partial F}{\partial z} dt \right), \quad (3.31)$$

onde  $\lambda(x)$  denota o fator integrante. Note que, dado  $y$  do sistema (3.30), o problema transforma-se num problema de valor inicial

$$\begin{cases} z'(x) = F(x, z(x)), & x \in [a, b] \\ z(a) = z_a \end{cases},$$

assim, a solução depende de  $x$  e de  $y$ , que é definida como sendo  $z = z[x, y]$ . Se considerarmos a variação de  $y$  como sendo  $y + \epsilon \eta$  na equação (3.30), então a solução também depende de  $\epsilon$  e é diferenciável em relação a  $\epsilon$ .

---

**Teorema 3.5.1.** *Seja  $y$  tal que  $z$ ) em (3.30) atinge um mínimo em  $b$ . Então  $y$  é uma solução da equação diferencial fracionária*

$$\lambda(x) \frac{\partial F}{\partial y} + D_{b-}^{\alpha} \left( \lambda(x) \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^{\alpha} y} \right) = 0. \quad (3.32)$$

*Demonstração.* Seja  $y + \epsilon \eta$  uma variação de  $y$ , com  $|\epsilon| \ll 1$  e  $\eta \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ , tal que  $\eta(a) = \eta(b) = 0$ . A variação de  $z$  é dada por

$$\theta(x) = \left. \frac{d}{d\epsilon} z(x, y + \epsilon \eta(x)) \right|_{\epsilon=0}.$$

Inserindo esta variação na equação (3.30), obtemos

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} z[x, y + \epsilon \eta(x)] \right|_{\epsilon=0} = F(x, y(x) + \epsilon \eta, {}^c D_{a+}^{\alpha} y(x) + \epsilon {}^c D_{a+}^{\alpha} \eta(x), z[x, y + \epsilon \eta(x)]).$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} \theta'(x) &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \frac{d}{dx} z[x, y + \epsilon \eta(x)] \right|_{\epsilon=0} \\ &= \left. \frac{d}{d\epsilon} F(x, y(x) + \epsilon \eta(x), {}^c D_{a+}^{\alpha} y(x) + \epsilon {}^c D_{a+}^{\alpha} \eta(x), z(x, y(x) + \epsilon \eta(x))) \right|_{\epsilon=0} \\ &= \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^{\alpha} y} {}^c D_{a+}^{\alpha} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial z} \theta(x), \end{aligned}$$

multiplicando ambos os membros da última igualdade pelo fator integrante obtemos

$$\lambda \theta'(x) - \frac{\partial F}{\partial z} \lambda \theta(x) = \lambda \left( \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^{\alpha} y} {}^c D_{a+}^{\alpha} \eta(x) \right).$$

Notemos que

$$\lambda(x) = \exp \left( - \int_a^x \frac{\partial F}{\partial z} d\tau \right) \Rightarrow \lambda' = -\lambda \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Resolvendo a equação diferencial ordinária, tem-se que

$$\frac{d}{dx} (\lambda \theta) = \lambda \left( \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^{\alpha} y} {}^c D_{a+}^{\alpha} \eta(x) \right). \quad (3.33)$$

Integrando ambos os membros da equação (3.33) tem-se que

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{d}{dx} (\lambda \theta) dt &= \int_a^x \lambda(t) \left( \frac{\partial F}{\partial y} \eta(t) + \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^{\alpha} y} {}^c D_{a+}^{\alpha} \eta(t) \right) dt \\ \Leftrightarrow \theta(x) \lambda(x) - \theta(a) &= \int_a^x \lambda(t) \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \eta(t) + \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^{\alpha} y} {}^c D_{a+}^{\alpha} \eta(t) \right] dt. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Em particular, para  $x = b$ , temos

$$\theta(b) \lambda(b) - \theta(a) = \int_a^b \lambda(x) \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^{\alpha} y} {}^c D_{a+}^{\alpha} \eta(x) \right] dx. \quad (3.35)$$

Tendo em conta que  $z(a)$  é fixo, tem-se que  $\theta(a) = 0$ , e sendo  $z(b)$  o mínimo, então  $\theta(b) = 0$ . Logo

$$\int_a^b \lambda(x) \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+y}^\alpha} {}^c D_{a+y}^\alpha \eta(x) \right] dx = 0. \quad (3.36)$$

Integrando por partes o segundo termo da função integranda temos

$$\int_a^b \lambda(x) \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+y}^\alpha} {}^c D_{a+y}^\alpha \eta(x) dx = \int_a^b \lambda(x) \eta(x) D_{b-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+y}^\alpha} dx + \lambda(x) \left[ \eta(x) I_{b-}^{1-\alpha} \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+y}^\alpha} \right]_{x=a}^{x=b}. \quad (3.37)$$

Visto que  $\eta(a) = \eta(b) = 0$  e substituindo (3.37) em (3.36) temos

$$\int_a^b \left[ \lambda(x) \frac{\partial F}{\partial y} + D_{b-}^\alpha \left( \lambda(x) \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+y}^\alpha} \right) \right] \eta(x) dx = 0. \quad (3.38)$$

Pela arbitrariedade de  $\eta$  no intervalo  $[a, b]$  e pelo lema fundamental do cálculo das variações, tem-se

$$\lambda(x) \frac{\partial F}{\partial y} + D_{b-}^\alpha \left( \lambda(x) \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+y}^\alpha} \right) = 0, \quad \forall x \in [a, b]. \quad (3.39)$$

□

**Teorema 3.5.2.** (*Condições de Transversalidade*) Suponhamos que  $(y, z)$  é uma solução de (3.30). Então  $(y, z)$  satisfaz a equação fracionária de Euler-Lagrange (3.32). Além disso

1. se  $y(b)$  é livre, então temos como condição de transversalidade

$$I_{b-}^{1-\alpha} \lambda(x) \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+y}^\alpha} = 0 \text{ em } x = b.$$

2. se  $y(a)$  é livre, então temos como condição de transversalidade

$$I_{b-}^{1-\alpha} \lambda(x) \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+y}^\alpha} = 0 \text{ em } x = a.$$

*Demonstração.* Suponhamos que  $(y, z)$  é a solução do problema (3.30). Seja  $\eta \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ , e definimos uma função  $\theta$ , como vimos no teorema anterior. Pela arbitrariedade de  $\eta$  no intervalo  $[a, b]$ , e usando os argumentos semelhantes da prova anterior, podemos concluir que  $(y, z)$  satisfazem a equação de Euler-Lagrange (3.32). Suponhamos que  $y(b)$  é livre e  $y(a)$  é fixo, então  $\eta(a) = 0$ . Usando o raciocínio da demonstração anterior, obtemos a igualdade seguinte:

$$\int_a^b \left[ \lambda(x) \frac{\partial F}{\partial y} + D_{b-}^\alpha \left( \lambda(x) \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+y}^\alpha} \right) \right] \eta(x) dx + \left[ \eta(x) I_{b-}^{1-\alpha} \lambda(x) \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+y}^\alpha} \right]_{x=a}^{x=b} = 0. \quad (3.40)$$

---

Usando a equação de Euler-Lagrange (3.39), concluimos que

$$\left[ \eta(x) I_{b-}^{1-\alpha} \lambda(x) \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^\alpha y} \right]_{x=a}^{x=b} = 0.$$

Sendo  $y(a) = y_a$ ,  $\eta(a) = 0$  e pela arbitrariedade de  $\eta(b)$ , então temos como condição de transversalidade

$$I_{b-}^{1-\alpha} \lambda(x) \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^\alpha y} = 0 \quad \text{em } x = b.$$

Portanto, a condição necessária com  $y(b)$  livre é dada por

$$\begin{cases} \lambda(x) \frac{\partial F}{\partial y} + D_{b-}^\alpha \left( \lambda(x) \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^\alpha y} \right) = 0, & x \in [a, b] \\ \lambda(x) I_{b-}^{1-\alpha} \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^\alpha y} = 0, & \text{em } x = b \end{cases}.$$

Por outro lado para  $y(b) = y_b$ , implica que  $\eta(b) = 0$ , e pela arbitrariedade de  $\eta(a)$ , obtemos como condição de transversalidade

$$I_{b-}^{1-\alpha} \lambda(x) \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^\alpha y} = 0 \quad \text{em } x = a.$$

Portanto, a condição necessária com  $y(a)$  livre é dada por

$$\begin{cases} \lambda(x) \frac{\partial F}{\partial y} + D_{b-}^\alpha \left( \lambda(x) \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^\alpha y} \right) = 0, & x \in [a, b] \\ I_{b-}^{1-\alpha} \lambda(x) \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+}^\alpha y} = 0, & \text{em } x = a \end{cases}.$$

□

### 3.6 Métodos Diretos para o Problema Variacional Fracionário

Os métodos numéricos desempenham um papel muito importante para a resolução de equações diferenciais fracionárias, razão pela qual se propõe a abordagem numérica para lidar com problemas variacionais que envolvem derivadas fracionárias. Os métodos numéricos consistem na discretização do funcional, seguido pela localização dos valores da solução num conjunto discreto de pontos para um determinado intervalo de tempo [6, 8, 25, 26]. A definição da derivada de Grünwald-Letnikov é uma generalização das fórmulas de discretização ordinária para derivadas de ordem não inteira.



---

**Definição 3.6.1.** *Seja  $\alpha$  um número real, com  $\alpha \in ]0, 1[$ . A derivada fracionária de Grünwald-Letnikov à esquerda e à direita de ordem  $\alpha$  de uma função  $y$  é dada por*

$${}^{GL}D_{a+}^{\alpha}y(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} y(x - kh)$$

e

$${}^{GL}D_{b-}^{\alpha}y(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} y(x + kh),$$

onde  $\binom{\alpha}{k}$  representa a generalização dos coeficientes binomiais dum número real.

Passamos a adotar a notação  $w_k^{\alpha} := (-1)^k \binom{\alpha}{k}$ .

**Proposição 3.6.1.** ([24]). *Suponhamos que  $y$  é uma função integrável no intervalo  $[a, b]$ . Então a derivada fracionária de Riemann-Liouville existe e coincide com a derivada fracionária de Grünwald-Letnikov.*

**Proposição 3.6.2** ([18]). *Suponhamos que  $y$  é uma função em que as derivadas fracionárias de Caputo e de Riemann-Liouville estão definidas no intervalo  $[a, b]$ . Então se  $0 < \alpha < 1$ ,*

$${}^cD_{a+}^{\alpha}y(x) = D_{a+}^{\alpha}y(x) - \frac{y(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}, \quad (3.41)$$

$${}^cD_{b-}^{\alpha}y(x) = D_{b-}^{\alpha}y(x) - \frac{y(b)}{\Gamma(1-\alpha)}(b-x)^{-\alpha}.$$

Portanto, se  $y(a) = 0$  e  $y(b) = 0$ , a derivada de Caputo coincide com a derivada de Riemann-Liouville, ou seja  ${}^cD_{a+}^{\alpha}y(x) = D_{a+}^{\alpha}y(x)$  e  ${}^cD_{b-}^{\alpha}y(x) = D_{b-}^{\alpha}y(x)$ .

Podemos também aproximar a derivada fracionária de Caputo usando a derivada fracionária de Grünwald-Letnikov com base na relação entre a derivada fracionária de Riemann-Liouville e a derivada fracionária de Caputo. Consideremos o intervalo  $[a, b]$ , e uma partição do intervalo em  $x_i = a + ih$ , para  $i = 0, 1, \dots, N$  e  $h > 0$ , tal que  $x_N = b$ , então

$$D_{a+}^{\alpha}y(x_i) \approx \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^i w_k^{\alpha} y(x_{i-k}) + O(h) \quad (3.42)$$

$$D_{b-}^{\alpha}y(x_i) \approx \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{N-i} w_k^{\alpha} y(x_{i+k}) + O(h).$$

Usando a relação (3.41) e a aproximação em (3.42), podemos deduzir uma soma de decomposições para as derivadas fracionárias de Caputo:

$${}^c D_{a+}^\alpha y(x_i) \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^i w_k^\alpha y(x_{i-k}) - \frac{y(a)}{\Gamma(1-\alpha)} (x_i - a)^{-\alpha} =: {}^c \tilde{D}_{a+}^\alpha y(x_i), \quad (3.43)$$

$${}^c D_{b-}^\alpha y(x_i) \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{N-i} w_k^\alpha y(x_{i+k}) - \frac{y(b)}{\Gamma(1-\alpha)} (b - x_i)^{-\alpha} =: {}^c \tilde{D}_{b-}^\alpha y(x_i).$$

### 3.6.1 Métodos Diretos de Euler para o Problema Variacional Fracionário

Consideremos o problema variacional fracionário, onde o termo fracionário corresponde à derivada fracionária de Caputo. As condições de fronteira são conhecidas, e consideremos a aproximação da derivada fracionária de Caputo dada pela derivada fracionária de Grünwald-Letnikov (3.43). Assim, discretizamos o funcional (3.1) nos pontos  $a = x_0, \dots, x_n = b$ , com  $h = \frac{b-a}{N}$ , cf.[25]. O objetivo é encontrar o valor  $y_1, \dots, y_{n-1}$  da função desconhecida  $y(\cdot)$  nos pontos  $x_i$  com  $i = 1, \dots, n-1$ . Uma vez que

$$J[y(\cdot)] = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} F(x_i, y_i(x_i), {}^c D_{a+}^\alpha y_i(x_i)) dx,$$

e por aproximação da derivada fracionária, usando a equação (3.43) temos

$$J[y(\cdot)] \approx \sum_{i=1}^N F(x_i, y_i(x_i), {}^c \tilde{D}_{a+}^\alpha y_i(x_i)) \cdot h. \quad (3.44)$$

Assim, consideraremos o segundo membro da equação (3.44) como sendo a função  $\Psi$  de  $n-1$  incógnitas  $y = (y_1, \dots, y_{n-1})$ , ou seja

$$\Psi(y) = h \sum_{i=1}^N F(x_i, y_i, {}^c \tilde{D}_{a+}^\alpha y_i) h. \quad (3.45)$$

Para encontrarmos o extremo da função  $\Psi$  temos que resolver o sistema de equações

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Assim temos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y_i} = h \frac{\partial F}{\partial y}(x_i, y_i(x_i), {}^c \tilde{D}_{a+}^\alpha y_i(x_i)) + \sum_{k=0}^{N-i} \frac{h}{h^\alpha} (w_k^\alpha) \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^\alpha y}(x_{i+k}, y_{i+k}, {}^c \tilde{D}_{a+}^\alpha y_{i+k}). \quad (3.46)$$

Igualando a zero a variação em (3.46), temos

$$h \frac{\partial F}{\partial y}(x_i, y_i(x_i), {}^c\tilde{D}_{a+}^\alpha y(x_i)) + \sum_{i=0}^{N-i} \frac{h}{h^\alpha} (w_k^\alpha) \frac{\partial F}{\partial {}^c\tilde{D}_{a+y}^\alpha}(x_{i+k}, y_{i+k}, {}^c\tilde{D}_{a+}^\alpha y_{i+k}) = 0. \quad (3.47)$$

**Teorema 3.6.1.** *O método de Euler para o problema variacional fracionário (3.1) é equivalente para a equação fracionária de Euler-Lagrange (3.2).*

*Demonstração.* Consideremos um minimizante  $(y_1, \dots, y_{n-1})$  de  $\Psi$ , uma variação  $\eta \in C([a, b], \mathbb{R})$  com  $\eta(a) = 0 = \eta(b)$ , e seja  $\eta_i = \eta(x_i)$ , para todo  $i = 0, \dots, n$ . Denotamos  $[i]$  por

$$[i] = \left( x_i, y_i, {}^c\tilde{D}_{a+}^\alpha y_i \right).$$

Sabemos que  $\eta_0 = \eta_n = 0$  e tomemos  $(y_1 + \epsilon \eta_1, \dots, y_{n-1} + \epsilon \eta_{n-1})$  como sendo a variação de  $(y_1, \dots, y_{n-1})$ , com  $|\epsilon| \ll r$ , para um determinado  $r > 0$  fixo. Portando, se  $(y_1, \dots, y_{n-1})$  é um minimizante de  $\Psi$ , pela expansão da série de Taylor deduzimos o seguinte

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Psi(y_1 + \epsilon \eta_1, \dots, y_{n-1} + \epsilon \eta_{n-1}) - \Psi(y_1, \dots, y_{n-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n h \left[ F(x_i, y_i + \epsilon \eta_i, {}^c\tilde{D}_{a+}^\alpha y_i + {}^c\tilde{D}_{a+}^\alpha \eta_i) - F(x_i, y_i, {}^c\tilde{D}_{a+}^\alpha y_i) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \epsilon h \left[ \frac{\partial F}{\partial y}[i] \eta_i + \frac{\partial F}{\partial {}^c\tilde{D}_{a+y}^\alpha}[i] {}^c\tilde{D}_{a+}^\alpha \eta_i \right] + O(\epsilon), \end{aligned}$$

onde  $\epsilon h$  é um número real qualquer. Reescrevendo a expressão acima, temos

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial F}{\partial y}[i] \eta_i + \frac{\partial F}{\partial {}^c\tilde{D}_{a+y}^\alpha}[i] {}^c\tilde{D}_{a+}^\alpha \eta_i \right] = 0 \\ \Leftrightarrow &\sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial F}{\partial y}[i] \eta_i + \frac{\partial F}{\partial {}^c\tilde{D}_{a+y}^\alpha}[i] \left( \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^i w_k^\alpha \eta_{i-k} - \frac{\eta(a)}{\Gamma(1-\alpha)} (x_i - a)^{-\alpha} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Tendo em conta que  $y(a)$  é fixo, então  $\eta(a) = \eta_0 = 0$ , logo

$$\sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial F}{\partial y}[i] \eta_i + \frac{\partial F}{\partial {}^c\tilde{D}_{a+y}^\alpha}[i] \left( \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^i w_k^\alpha \eta_{i-k} \right) \right] = 0. \quad (3.48)$$

O segundo termo da soma anterior será igual a

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial {}^c\tilde{D}_{a+y}^\alpha}[i] \left( \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^i w_k^\alpha \eta_{i-k} \right) = \sum_{i=1}^n \eta_i \sum_{k=0}^{n-i} w_k^\alpha \frac{\partial F}{\partial {}^c\tilde{D}_{a+y}^\alpha}[i+k]. \quad (3.49)$$

---

Substituindo a equação (3.49) na equação (3.48) obtemos

$$\sum_{i=1}^n \eta_i \left( \frac{\partial F}{\partial y}[i] + \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{n-i} w_k^\alpha \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+y}^\alpha}[i+k] \right) = 0.$$

Pela arbitrariedade de  $\eta_i$  para todo  $i = 1, \dots, n-1$ , temos que

$$\frac{\partial F}{\partial y}[i] + \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{n-i} w_k^\alpha \frac{\partial F}{\partial^c D_{a+y}^\alpha}[i+k] = 0. \quad (3.50)$$

Portanto o nosso objetivo é fazer o estudo da equação (3.50) quando  $n$  tende ao infinito.

Seja  $\bar{x} \in ]a, b[$  e  $i \in \{1, \dots, n\}$ , tal que  $x_{i-1} < \bar{x} \leq x_i$ . Observe também que quando  $n \rightarrow \infty$ , é verdade  $i \rightarrow \infty$  e  $n-i \rightarrow \infty$ . De fato, seja  $i \in \{1, \dots, n\}$  tal que

$$a + (i-1)h < \bar{x} \leq a + ih. \quad (3.51)$$

Resolvendo cada uma das inequações anteriores temos que

$$a + (i-1)h < \bar{x} \Leftrightarrow (i-1)h < \bar{x} - a \Leftrightarrow i-1 < \frac{\bar{x} - a}{h} \Leftrightarrow i < \frac{\bar{x} - a}{h} + 1.$$

Logo,

$$n-i > n - \frac{\bar{x} - a}{h} - 1. \quad (3.52)$$

Uma vez que  $h = \frac{b-a}{n}$ , então

$$\frac{\bar{x} - a}{h} = \frac{\bar{x} - a}{\frac{b-a}{n}} = \frac{\bar{x} - a}{b-a} n \quad (3.53)$$

substituindo (3.53) em (3.52) temos

$$n-i > n - \frac{\bar{x} - a}{b-a} n - 1 > n \left[ 1 - \frac{\bar{x} - a}{b-a} \right] - 1 > n \frac{b-\bar{x}}{b-a} - 1.$$

Assim, se  $n \rightarrow \infty$ ,  $n-i \rightarrow \infty$ , e assim  $i \rightarrow \infty$ . Como  $a + (i-1)h < \bar{x} < a + ih$ , concluimos que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \lim_{i \rightarrow \infty} x_{i-1} = \bar{x}.$$

Assumindo que existe uma função contínua  $\bar{y} \in C[a, b]$ , satisfazendo

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geq N : |y_i - \bar{y}(x_i)| < \epsilon, \forall i = 1, \dots, n-1,$$

como  $\bar{y}$  é uniformemente contínua,

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geq N : |y_i - \bar{y}(\bar{x})| < \epsilon, \forall i = 1, \dots, n-1.$$

---

Pela continuidade de  $\bar{y}$  temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty, i \rightarrow \infty} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} w_k^\alpha \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^\alpha y} [i+k] = D_{b-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^\alpha y} (\bar{x}, \bar{y}, {}^c D_{a+}^\alpha \bar{y}(\bar{x})).$$

Para  $n$  suficientemente grande (e  $i$  suficientemente grande)

$$\lim_{n \rightarrow \infty, i \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial y} [i] = \frac{\partial F}{\partial y} (\bar{x}, \bar{y}, {}^c D_{a+}^\alpha \bar{y}(\bar{x})).$$

Logo, concluímos que

$$\frac{\partial F}{\partial y} (\bar{x}, \bar{y}, {}^c D_{a+}^\alpha \bar{y}(\bar{x})) + D_{b-}^\alpha \frac{\partial F}{\partial {}^c D_{a+}^\alpha y} (\bar{x}, \bar{y}, {}^c D_{a+}^\alpha \bar{y}(\bar{x})) = 0. \quad (3.54)$$

Por continuidade, a equação fracionária de Euler-Lagrange (3.54) é válida para todos os valores no intervalo fechado  $a \leq x \leq b$ .  $\square$

## 3.7 Exemplos

### Exemplo 3.7.1.

Considere o problema

$$J(y) = \int_0^7 \left( {}^c D_{0+}^{0,8} y(x) - \frac{6}{\Gamma\left(\frac{16}{5}\right)} x^{2,2} \right)^2 dx \rightarrow \min,$$

sujeito às condições de fronteira

$$y(0) = 0, \quad y(7) = 343.$$

Uma vez que  ${}^c D_{0+}^{0,8} x^3 = \frac{6}{\Gamma\left(\frac{16}{5}\right)} x^{2,2}$ , podemos concluir que  $y(x) = x^3$  é minimizante do funcional. Discretizando o funcional para diferentes valores de  $n$  obtemos várias aproximações numéricas de  $y$ . Assim teremos,

$${}^c D_0^{0,8} y(x_i) \approx \frac{1}{h^{0,8}} \sum_{k=0}^i (w_k^{0,8}) y(x_i - kh),$$

para  $h = \frac{7}{n}$  fixo. Assim, transformamos o funcional em

$$J(y) \approx \int_0^7 \left( \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^i (w_k^{0,8}) y_{i-k} - \frac{6}{\Gamma\left(\frac{16}{5}\right)} x^{2,2} \right)^2 dx.$$

---

Aproximando o integral pela regra de retângulos, concluimos que

$$\Psi(y) = \sum_{i=1}^n h \left( \frac{1}{h^{0,8}} \sum_{k=0}^i \left( w_k^{0,8} \right) y_{i-k} - \frac{6}{\Gamma\left(\frac{16}{5}\right)} x_i^{2,2} \right)^2.$$

A Tabela 3.1, apresenta os erros de aproximação para diferentes valores de  $n$ , e nas Figuras 3.1 à 3.4, os gráficos da solução exata e da solução numérica.

O erro é dado pela fórmula  $\max |y_i - y(x_i)|$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

$n$	10	50	100	500	1000
erro	9.422	1.847	0.918	0.160	0.054

Tabela 3.1: **Erros de aproximação**

Aqui, verifica-se que quanto maior for o  $n$ , menor é o erro de aproximação à solução exata.

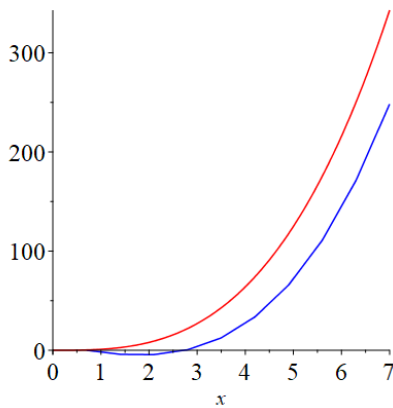


Figura 3.1:  $n = 10$

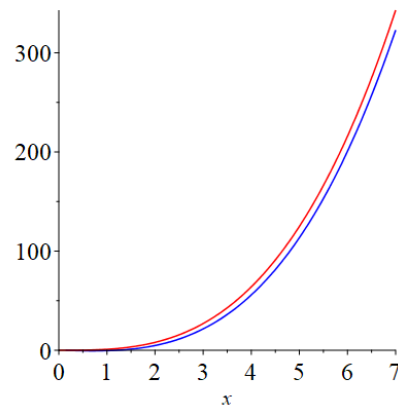


Figura 3.2:  $n = 50$

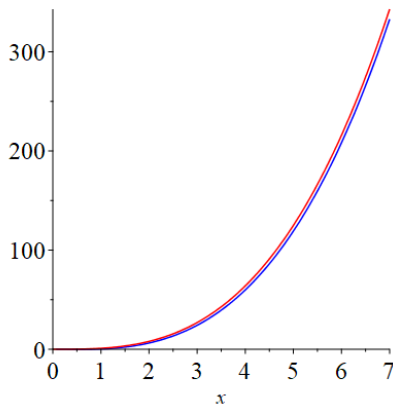


Figura 3.3:  $n = 100$

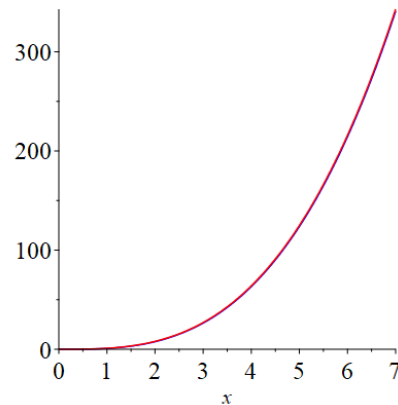


Figura 3.4:  $n = 500$

---

**Exemplo 3.7.2.**

Considere o problema

$$J(y) = \int_0^{10} \left( {}^c D_0^{0,5} y(x) - \frac{2}{\Gamma(2,5)} x^{1,5} \right)^2 dx \longrightarrow \min,$$

sujeito à restrição  $y(0) = 0, y(10) = 100$ .

Uma vez que o Lagrangiano sempre positivo, o minimizante é  $y(x) = x^2$ , tendo em conta que  ${}^c D_0^{0,5} y(x) = \frac{2}{\Gamma(2,5)} x^{1,5}$ . Começamos por aproximar a derivada fracionária

$${}^c D_0^{0,5} y(x_i) \approx \frac{1}{h^{0,5}} \sum_{k=0}^i (w_k^{0,5}) y(x_i - kh).$$

Assim,

$$J(y) \approx \int_0^{10} \left( \frac{1}{h^{0,5}} \sum_{k=0}^i (w_k^{0,5}) y_{i-k} - \frac{2}{\Gamma(2,5)} x^{1,5} \right)^2 dx.$$

Obtemos a função  $\Psi$  definida por

$$\Psi(y) = \sum_{i=1}^n h \left( \frac{1}{h^{0,5}} \sum_{k=0}^i (w_k^{0,5}) y_{i-k} - \frac{2}{\Gamma(2,5)} x_i^{1,5} \right)^2.$$

A Tabela 3.2, apresenta os erros de aproximação para diferentes valores de  $n$ , e nas Figuras 3.5 à 3.8, os gráficos da solução exata e da solução numérica.

$n$	10	50	100	500
erro	1.474	0.409	0.224	0.046

Tabela 3.2: **Erros de aproximação**

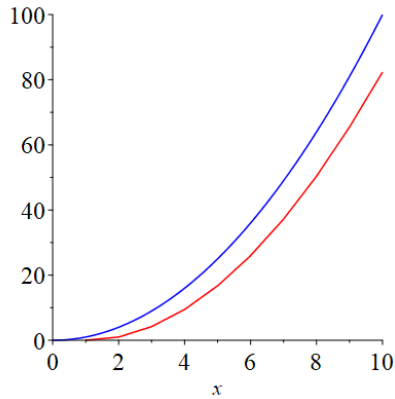


Figura 3.5:  $n = 10$

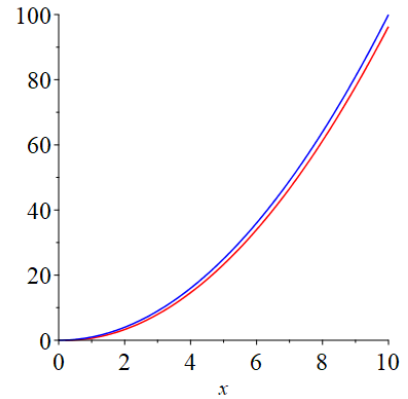


Figura 3.6:  $n = 50$

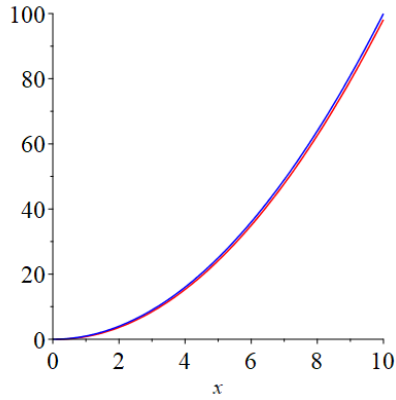


Figura 3.7:  $n = 100$

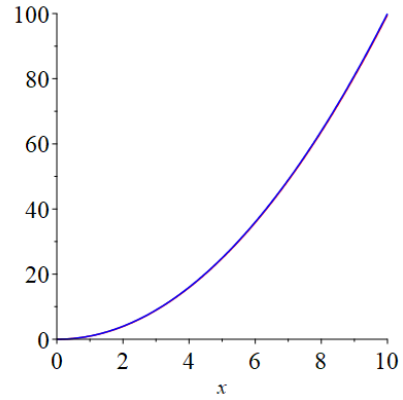


Figura 3.8:  $n = 500$

### Exemplo 3.7.3.

Considere o problema

$$J(y) = \int_0^1 \left( \left( y(x) {}^c D_{0+}^{0,5} y(x) \right)^2 - \cos(x) \right) dx \longrightarrow \min,$$

sujeito à restrição  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 1$ .

Começamos por aproximar a derivada fracionária

$${}^c D_0^{0,5} y(x_i) \approx \frac{1}{h^{0,5}} \sum_{k=0}^i (w_k^{0,5}) y(x_i - kh),$$

para  $h > 0$ . Assim,

$$J(y) \approx \int_0^1 \left( \left( \frac{1}{h^{0,5}} y(x) \sum_{k=0}^i (w_k^{0,5}) y_{i-k} \right)^2 - \cos(x) \right) dx.$$

Obtemos a função  $\Psi$

$$\Psi(y) = \sum_{i=1}^n h \left( \left( \frac{1}{h^{0,5}} y_i \sum_{k=0}^i (w_k^{0,5}) y_{i-k} \right)^2 - \cos(x_i) \right).$$

Das Figuras 3.9 à 3.12 são apresentados os gráficos da solução numérica para diferentes valores de  $n$ .



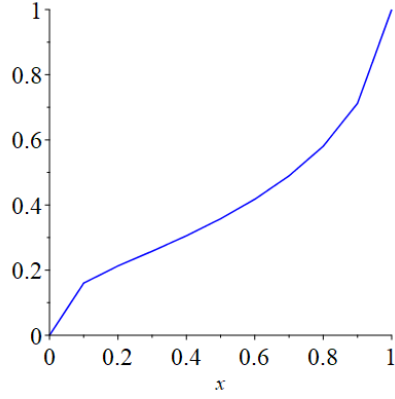


Figura 3.9:  $n = 10$

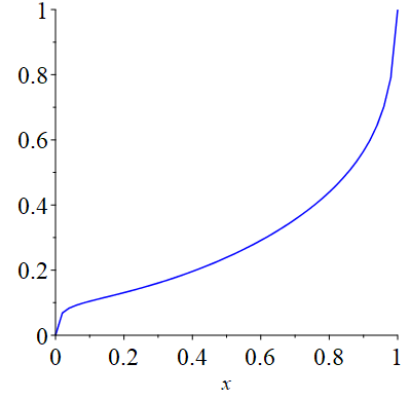


Figura 3.10:  $n = 50$

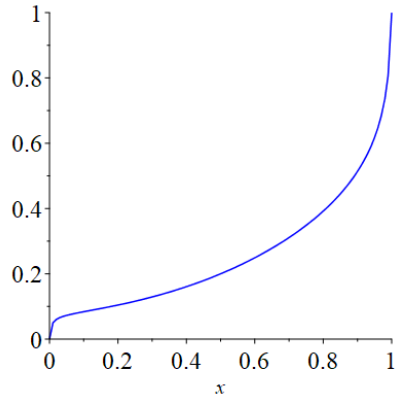


Figura 3.11:  $n = 100$

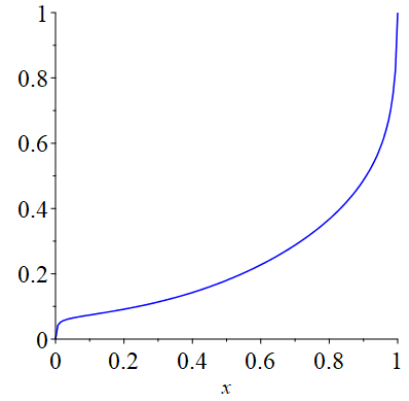


Figura 3.12:  $n = 150$

#### Exemplo 3.7.4.

Considere o problema isoperimétrico

$$J(y) = \int_0^1 \left[ \left( {}^c D_{0+}^{0,8} y(x) \right)^2 + \left( \frac{6}{\Gamma\left(\frac{16}{5}\right)} x^{2,2} \right)^2 \right] dx \longrightarrow \min,$$

sujeito as condições de fronteira  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 1$  e a restrição isoperimétrica

$$I(y) = \int_0^1 {}^c D_{0+}^{0,8} y(x) \cdot \frac{6}{\Gamma\left(\frac{16}{5}\right)} x^{2,2} dx = \left( \frac{6}{\Gamma\left(\frac{16}{5}\right)} \right)^2 \cdot \frac{1}{5,4}.$$

É fácil verificar que a função  $y = x^3$  satisfaz a equação de Euler-Lagrange, com  $\lambda = -2$ .

O funcional  $J$  é aproximado pela soma

$$\sum_{i=1}^n h \left[ \left( \frac{1}{h^{0,8}} \sum_{k=0}^i (w_k^{0,8}) y_{i-k} \right)^2 + \left( \frac{6}{\Gamma\left(\frac{16}{5}\right)} x_i^{2,2} \right)^2 \right],$$

---

e a restrição isoperimétrica pela igualdade

$$\sum_{i=1}^n h \left( \frac{1}{h^{0,8}} \sum_{k=0}^i \left( w_k^{0,8} \right) y_{i-k} \right) \cdot \frac{6}{\Gamma\left(\frac{16}{5}\right)} x_i^{2,2} = \frac{\left( \frac{6}{\Gamma\left(\frac{16}{5}\right)} \right)^2}{5,4}.$$

A Tabela 3.3, apresenta os erros de aproximação para diferentes valores de  $n$ , e nas Figuras 3.13 à 3.16, os gráficos da solução exata e da aproximação numérica.

$n$	10	50	100	500
erro	0,175	0,039	0,019	0,004

Tabela 3.3: **Erros de aproximação**

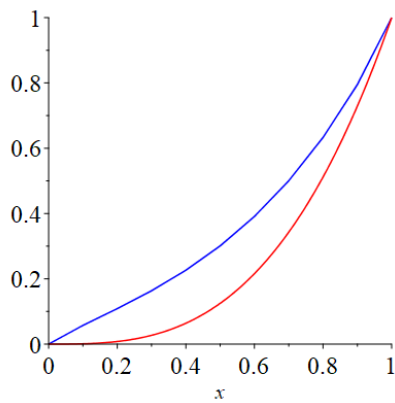


Figura 3.13:  $n = 10$

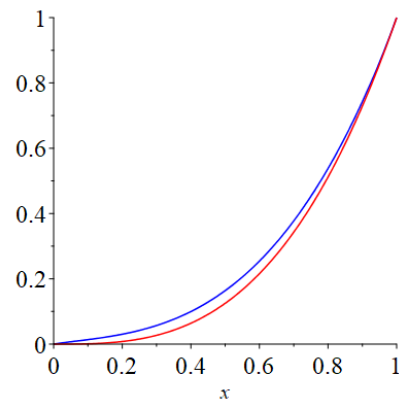


Figura 3.14:  $n = 50$

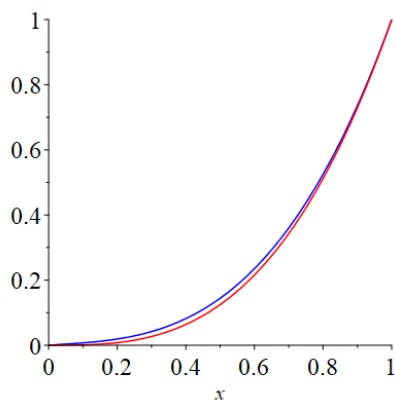


Figura 3.15:  $n = 100$

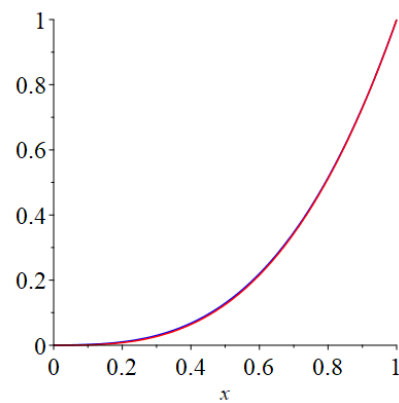


Figura 3.16:  $n = 500$

# Considerações Finais

Nesta dissertação apresentamos o cálculo variacional fracionário que é uma generalização do cálculo variacional clássico. Percebemos que o cálculo fracionário oferece um contributo significativo na descrição de diversos fenómenos que ocorrem na natureza.

Apresentamos no primeiro capítulo o cálculo variacional clássico com as respetivas condições de otimalidade necessárias e suficientes, e as mesmas condições foram estendidas para o terceiro capítulo.

No segundo capítulo, designado por cálculo fracionário, apresentamos algumas funções especiais fundamentais para a definição dos operadores fracionários, como a definição do integral fracionário de Riemann-Liouville, a derivada fracionária Riemann-Liouville e a de Caputo e alguns resultados envolvendo a derivada fracionária de Caputo.

No terceiro capítulo, para além das condições de otimalidade, apresentamos as condições da segunda ordem de Legendre, restrições holonómicas, o problema variacional fracionário de Herglotz, e os métodos diretos para a aproximação numérica da solução exata, visto ao contrário do problema variacional clássico onde que o objetivo é o estudo das condições necessárias de otimalidade (chamados métodos indiretos) os métodos procuram diretamente a solução numérica do problema sem fazer o estudo das condições necessárias do mesmo.

# Bibliografia

- [1] O. P. Agrawal, Fractional variational calculus and the transversality conditions, J. Phys. A: Math. Gen. 39 (2006), no. 33, 10375–10384.
- [2] O. P. Agrawal, Generalized Euler–Lagrange equations and transversality conditions for FVPs in terms of the Caputo derivative, J. Vib. Control, 13 (2007), no. 9–10, 1217–1237.
- [3] O. P. Agrawal, Generalized variational problems and Euler-Lagrange equations, Comput. Math. Appl. 59 (2010), no. 5, 1852–1864.
- [4] R. Almeida, Variational Problems Involving a Caputo-Type Fractional Derivative. J. Optim. Theory Appl. 174 (2017), no. 1, 276-294.
- [5] R. Almeida, A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 44 (2017), 460-481.
- [6] R. Almeida, Optimality conditions for fractional variational problems with free terminal time. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S. 11 (2018), no. 1, 1-19.
- [7] R. Almeida, D. F. M. Torres, Holderian variational problems subject to integral constraints. J Math Anal Appl. 359 (2009), no. 2, 674–681.
- [8] R. Almeida e D. F. M. Torres, A survey on fractional variational calculus, in Handbook of Fractional Calculus with Applications, DeGruyter (aceite).
- [9] V. Blajo, The isoperimetric problem. Amer Math Monthly. 112 (2005), no. 6, 526–566.
- [10] B. Van Brunt, The calculus of variations, Universitext, Springer, New York, 2004.

- 
- [11] A. P. X. Flores, Cálculo variacional: aspectos teóricos e aplicações, Tese de mestrado, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, 2011.
- [12] I. M. Gelfand e S. V. Fromin, Calculus of Variations, Prentice-Hall, 1963.
- [13] R. B. Guenther, J. A. Gottsch e D. B. Kramer, The Herglotz algorithm for constructing canonical transformations, SIAM Rev. 38 (1996), no. 2, 287–293.
- [14] R. B. Guenther, C. M. Guenther e J. A. Gottsch, The Herglotz lectures on contact transformations and Hamiltonian systems, Lecture Notes in Nonlinear Analysis, Vol. 1, Juliusz Schauder Center for Nonlinear Studies, Nicholas Copernicus University, Torún, 1996.
- [15] H. L. Guidorizzi. Um Curso de Cálculo, Vol.1 . 5<sup>a</sup> edição, Editora S.A, 2008.
- [16] R. Herrmann, Folded potentials in cluster physics—a comparison of Yukawa and Coulomb potentials with Riesz fractional integrals, J. Phys. A, 46 (2013), no. 40, 405203, 12 pp.
- [17] A. João, Introdução ao cálculo variacional, Tese de mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 2006.
- [18] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava e J. J. Trujillo, Theory e applications of fractional differential equations, Elisevier,Amsterdam, 2006.
- [19] M. J. Lazo, D. F. M. Torres, The Legendre condition of the fractional calculus of the fractional calculus of variations. Optimization. 63 (2004), 1157-1165.
- [20] F. Mainardi, Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity, Imp. Coll. Press, London, 2010.
- [21] A. B. Malinoswska e N. Martins, Generalized transversality conditions for the Hahn quantum variational calculus, Optimization 62 (2013), 323-344.
- [22] A. B. Malinowska, T. Odziejewicz, D. F. M. Torres, Advanced methods in the fractional calculus of variations, Springer briefs applied sciences and tecnologia.Cham: Springer, 2015.

- 
- [23] A. B. Malinowska e D. F. M. Torres, Introduction to the fractional calculus of variations, Imp. Coll. Press, London, 2012.
- [24] I. Podlubny, Fractional Differential equations, Academic Press, San Diego, 1999.
- [25] S. Pooseh, R. Almeida, D. F. M. Torres, Discrete direct methods in the fractional calculus of variations, Comput. Math. Appl, 66 (2013), no. 5, 668–676.
- [26] S. Pooseh, R. Almeida e D.F.M. Torres, A discrete time method to the first variation of fractional order variational functionals. Cent. Eur. J. Phys. 11 (2013), no. 10, 1262-1267.
- [27] D. Tavares, Cálculo das Variações Fracionário, Tese de doutoramento, Universidade de Aveiro, 2017.
- [28] D. S. Vieira, Equações de difusão e o cálculo fracionário, Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Maringá, 2015.
- [29] F. Riewe, Nonconservative Lagrangian and Hamiltonian machanics. Phys. Rev. E 53 (1996), 1890-1899 .
- [30] B. Zheng,  $(G'/G)$ -expansion method for solving fractional partial differential equations in the theory of mathematical physics, Commun. Theor. Phys. 58 (2012), no. 5, 623– 630.