



universidade de aveiro

Departamento de Matemática

2017

**TERESA MARGARIDA
BASTO SANTOS SIMÕES
FIGUEIREDO**

**MEDIANA e QUARTIS: um caso de estudo das
dificuldades de aprendizagem de alunos do 8.º ano
de escolaridade**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática para professores, realizada sob a orientação científica da Doutora Adelaide Valente Freitas, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

Dedico este trabalho aos meus filhos, João e Gonçalo,
ao meu marido, Pedro, e aos meus pais,
pelo incansável apoio e compreensão.

O júri

Presidente

Prof.^a Doutora Nélia Maria Marques da Silva

Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro.

Prof.^a Doutora Maria Cristina Souto de Miranda

Professora Adjunta da Universidade de Aveiro.

Prof.^a Doutora Adelaide Valente Freitas

Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro (Orientadora).

Agradecimentos

Em primeiro lugar gostava de agradecer à minha orientadora, Doutora Adelaide Freitas, que tanto me ajudou e me motivou com as suas sábias palavras, pela sua total disponibilidade e apoio.

À minha amiga Ida Mamede que me lançou este desafio e esteve sempre disponível quando dela precisei.

Aos meus pais que sempre me incentivaram a desenvolver cada vez mais a minha formação.

Ao Pedro que sempre compreendeu a minha ausência e muito me apoiou.

A todos aqueles que se dedicam a promover o sucesso dos nossos alunos, sobretudo no que à Matemática diz respeito.

Por último, não posso deixar de registar uma palavra muito especial de carinho para os meus filhos, João e Gonçalo.

Palavras-chave Estatística, mediana, quartis, erros, dificuldades, alunos do oitavo ano de escolaridade.

Resumo

Espera-se que qualquer indivíduo adulto seja capaz de interpretar corretamente gráficos estatísticos, tabelas de frequências, medidas estatísticas (médias, mediana, moda, quartis, percentis, etc.), informação indispensável para que ele seja um cidadão ativo e desempenhe a sua cidadania de forma responsável. É nesta perspectiva que cada vez mais se fala em Literacia Estatística. A identificação de erros e dificuldades dos alunos na abordagem a estes conceitos permitirá intervir, aumentando, futuramente, em cada cidadão, a capacidade de tomar decisões de forma consciente.

Seguindo a metodologia de caso de estudo, nesta dissertação analisam-se os tipos de erros mais comuns cometidos por alunos do oitavo ano de escolaridade, no que diz respeito ao cálculo e à interpretação da mediana e dos quartis. Esta investigação baseia-se num conjunto de questões, respondido por oitenta e um alunos daquele ano de escolaridade, em formato de teste de avaliação.

Da análise das respostas dos alunos verificou-se que: i) o conhecimento da correta utilização da fórmula de cálculo da mediana está significativamente associado à correta interpretação de um novo cálculo da mediana quando existe alteração pontual dos dados originais, sendo essa associação mais forte quando a alteração corresponde a uma mudança do valor mínimo da coleção original de dados; ii) a correta determinação dos quartis e da mediana, por meio de fórmulas, está significativamente associado, mas com associação fraca, à correta identificação de tais medidas num diagrama de extremos e quartis; e iii) quando há alteração pontual dos dados, o facto de um aluno saber recalcular corretamente a mediana de um conjunto de dados, usando a fórmula, não está associado significativamente a saber identificar corretamente uma alteração da mediana de dados apresentados por meio de um diagrama de extremos e quartis. Esta última conclusão leva a conjecturar que os alunos tendem a não relacionar a mediana entre representações distintas dos dados (dados por um conjunto de observações versus diagrama de extremos e quartis). Na realidade, o desempenho demonstrado pelos alunos indicia que estes veem estas duas abordagens (via fórmula versus via gráfica) sobre a mediana como se de dois tópicos diferentes, não interligados, se tratassem.

keywords Statistic, median, quarters, mistakes, difficulties, eighth grade students.

Abstract

One might expect that every adults would be able to correctly interpret statistical graphs, frequency charts, statistical measures (average, median, mode, quarters, percentiles, etc.), essential information that allows him to be an active citizen and play his citizenship in a responsible way. It is in this perspective that we have been talking about Statistics Literacy. Identifying the students' mistakes and difficulties in the approach of these concepts will let us intervene, increasing in the future, in every citizen, the ability to make decisions in a conscious way.

Following the methodology of a study case, in this dissertation we have analysed the most common mistakes made by eighth grade students as far as calculus and the interpretation of median and quarters is concerned. This investigation is based on a set of questions answered by eighty-one students of the eighth grade in an assessment test.

From the analysis of the answers we have concluded that: i) the knowledge of the correct use of the formula to calculate the median is strongly associated to the correct interpretation of a new calculus of the median when there is a random change of the original data, and that association is stronger when the change corresponds to a variation of the minimum value of the original data collection; ii) the correct determination of the quarters and the median, using formulas, is statistically significantly associated, but weakly, to the correct identification of such measures in a boxplot; and iii) when one observation is changed in the data set, the fact that the student knows how to recalculate correctly the median of a set of data, using a formula, is not associated to recognizing that change in a boxplot. This last conclusion leads us to assume that students tend not to relate median among different data representations (data given by a set of observations versus a boxplot). In fact, the students' performance shows that they see these two types of way to analyse the median (via formula versus via graph) as if they were two different topics with no connection.

Índice

Agradecimentos	iv
Resumo	vi
Abstract.....	viii
CAPÍTULO 1	1
1.1. Objetivo	1
1.2. Motivação para o tema.....	2
1.3. Estrutura da dissertação	3
CAPÍTULO 2	4
2.1. Nota prévia.....	4
2.2. Evolução da Estatística	6
2.3. Revisão da Literatura	13
2.4. Conflitos existentes na literatura sobre os conceitos de mediana e quartil.....	17
CAPÍTULO 3	21
3.1. A mediana e os quartis nos manuais escolares	21
3.2. A “Mediana” nos manuais escolares	22
3.3. Os “Quartis” nos Manuais Escolares	27
3.4. A <i>mediana</i> e os <i>quartis</i> nas Metas Curriculares de Matemática.....	32
3.5. Outras formas de cálculo da mediana e dos quartis.....	40
CAPÍTULO 4	45
4.1. Introdução	45
4.2. Apresentação dos resultados	46
4.3. Discussão dos Resultados	63
4.4. Considerações Finais	68
Referências	73

CAPÍTULO 1

1.1. Objetivo

“...os erros cometidos pelos alunos são possibilidades que abrem para o sujeito a oportunidade de ser construtor do próprio conhecimento. O erro é elemento importante para a aprendizagem, considerando que a evolução da inteligência está vinculada a situações perturbadoras...”

Cury (1995, p.46)

Este trabalho, que a seguir se apresenta, centra-se nas dificuldades que os alunos sentem quando calculam e interpretam os conceitos de mediana e quartis de um conjunto de dados com um número par ou ímpar de elementos.

Todos os dias lidamos, tanto a nível pessoal como profissional, com informação estatística que carece de interpretação. Para sermos cidadãos competentes, é necessário que essa informação seja analisada corretamente. Torna-se, por isso, fundamental que aquando da aprendizagem de conceitos relativos a este tema se alerte para as potenciais dificuldades. Investigações realizadas alertam para o facto de a mediana não ser um conceito claro para os estudantes, e tendo por base essa ideia, houve necessidade de tentar dar mais um contributo para que o sucesso dos alunos seja cada vez maior.

Muitos são os autores que estão de acordo com o facto de a Estatística ser cada vez mais importante para o sucesso de qualquer cidadão, já que permite a ligação entre vários temas, matemáticos ou não, resolução de problemas ou interpretação do real. Contudo, muitas vezes os alunos entendem a Estatística como a aprendizagem de fórmulas matemáticas, deixando de lado o entendimento da utilidade e a interpretação correta no contexto de um problema.

É nas situações em que é necessário interligar os conhecimentos ou atribuir-lhes um significado num determinado contexto, que são visíveis algumas lacunas ao nível dos conhecimentos dos alunos. De acordo com Boaventura & Fernandes (2004), num estudo realizado, em resposta a uma questão em que era dada a média, a moda e a mediana e se pediam as ida-

des possíveis de quatro estudantes, muitos foram os alunos que apenas se centraram na média e na moda, ignorando a mediana. Também Eisenbach (1994, citado em Batanero, 2000), refere a confusão sentida por parte dos alunos entre a interpretação dos conceitos de média, moda e mediana.

Neste trabalho, o foco da investigação reside na mediana e nos quartis. Pretendem-se analisar os principais erros cometidos por alunos oitavo ano de escolaridade no cálculo e na interpretação dos conceitos de mediana e quartis, já que o erro, no processo de ensino/aprendizagem pode ser de grande utilidade, oferecendo alternativas importantes para melhorar a aprendizagem.

1.2. Motivação para o tema

Para qualquer professor que leciona, não é difícil sentir-se atraído pelo estudo dos maiores erros cometidos pelos seus alunos aquando da abordagem de algum tema ou conceito. Desta forma, sentimos que este é um assunto de incontornável relevância para um professor que, dia após dia, ajuda os seus alunos no seu sucesso educativo. É por sabermos que qualquer que seja a profissão futura dos nossos alunos, independentemente de seguirem um percurso com base na Matemática ou não, a Estatística terá um peso muito importante no seu dia a dia. O que torna a Estatística tão importante e indissociável do nosso quotidiano é a grande quantidade de informação com que lidamos diariamente e a sua necessária análise para tomadas de decisão.

Todos os dias lidamos com informação proveniente de gráficos, tabelas, médias, que estão, muitas das vezes, na nossa vida profissional mas também pessoal. Torna-se, assim, imprescindível que qualquer cidadão domine conceitos estatísticos e os saiba interpretar. É com esta base, e reconhecendo a importância da Estatística na melhoria das capacidades de intervenção dos alunos como cidadãos ativos e capacitados para tomarem decisões, que surgiu este tema que, de acordo com vários autores, está conotado com falhas e incapacidade de interpretação por parte dos estudantes – a mediana e os quartis.

Apesar de já existir alguma investigação neste âmbito, muito ainda se pode fazer. Acreditamos que se os professores estiverem mais alertados quanto ao tipo de possíveis erros

e dificuldades que possam ser cometidos ou sentidos pelos seus alunos, poderão melhor adaptar o seu trabalho junto destes.

Assim, este trabalho analisará os erros e dificuldades cometidas por um conjunto de 81 alunos do oitavo ano de escolaridade aquando do cálculo e análise da mediana e dos quartis, numa perspetiva de melhoria e busca constante pelo sucesso educativo dos nossos alunos.

1.3. Estrutura da dissertação

A dissertação está organizada em quatro capítulos.

Neste primeiro capítulo apresentam-se os objetivos, a motivação para a realização deste estudo e termina-se com a apresentação da estrutura do trabalho.

No segundo capítulo faz-se uma breve introdução do tema em estudo, apresentando um pouco da história da Estatística, analisando alguns dos trabalhos desenvolvidos por vários autores e suas conclusões. Faz-se, ainda, uma revisão da literatura sobre os conflitos associados aos conceitos de mediana e quartis.

No terceiro capítulo abordam-se exclusivamente os conceitos de mediana e quartis nos manuais escolares e nas metas curriculares.

No quarto e último capítulo apresenta-se o estudo realizado, que consistiu numa prova de avaliação que foi respondida por oitenta e um alunos do oitavo ano de escolaridade sobre os conceitos e as interpretações de mediana e quartis. Apresentam-se os resultados e fazem-se as considerações finais face aos resultados obtidos.

CAPÍTULO 2

2.1. Nota prévia

“Para la mayoría de los estudiantes la estadística es un tema misterioso donde operamos con números por medio de fórmulas que no tienen sentido.”

Graham (1987, p.5)

É comum nos últimos anos falar-se na Matemática numa perspetiva de Literacia Matemática. A Literacia Matemática de que tanto se ouve falar é um tema central nos dias de hoje e implica que se desenvolvam competências necessárias ao exercício de uma cidadania responsável, centrada na resolução de problemas e na investigação matemática.

Tem sido defendido, nomeadamente por investigadores e educadores (de acordo com a Conferência Internacional sobre o Ensino das Ciências, Tecnologia e Matemática – UNESCO, 2001), uma formação matemática para todos, para que cada um: contribua para o desenvolvimento local, nacional e internacional; possa ter uma vida produtiva; goze de qualidade de vida. Para os alunos, a literacia surge associada à capacidade de aplicação de conhecimentos, à análise, ao raciocínio, à comunicação eficiente e à resolução e interpretação de problemas em diferentes contextos e situações. Deste modo, espera-se que os alunos consigam compreender a extensão e os limites dos conceitos matemáticos, avaliar argumentos matemáticos, explicar e justificar resultados, comunicar o processo e a solução alcançada e apreciar criticamente o modelo, bem como os seus limites. Requer-se uma educação em Matemática numa perspetiva de literacia para todos e para isso é necessário que esteja ativamente relacionada com o mundo empírico. A Literacia Matemática corresponde a algo a ser alvejado e desenvolvido ao longo da vida, no entanto, é nos primeiros anos de escolaridade que deve começar. Segundo Schreiner & Sjoberg (2004), os alunos que nos primeiros anos de escola desenvolvem interesse pela Matemática irão, verosimilmente, prosseguir este interesse ao longo da vida. Os valores e as atitudes relativamente à ciência e à Matemática, em concreto, desenvol-

vidas nos primeiros anos de escolaridade, condicionam o indivíduo adulto no modo como este se envolve na Matemática.

A resolução de problemas é uma parte integrante e fundamental de toda a aprendizagem matemática. Os alunos devem ter múltiplas oportunidades para: formular, discutir e resolver problemas; (re)construir conhecimentos matemáticos através da resolução de problemas; aplicar e adaptar uma diversidade de estratégias adequadas para resolver problemas; analisar e refletir sobre o processo de resolução de problemas. O raciocínio deverá constituir uma parte consistente das experiências matemáticas dos alunos e deverá ser desenvolvido usando uma diversidade de contextos.

De acordo com o Currículo Nacional do Ensino Básico, a competência matemática que todos devem desenvolver inclui: a predisposição para raciocinar matematicamente; o gosto e a confiança pessoal em realizar atividades intelectuais que envolvem raciocínio matemático; a predisposição para procurar entender a estrutura de um problema e a aptidão para desenvolver processos de resolução; a aptidão para discutir com os outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através de uma linguagem escrita e oral (M. E., 2001). Martins e Ponte realçam que o objetivo do ensino da Estatística é, antes de mais, “promover a Literacia Estatística, ensinando os alunos a ler e interpretar dados” (2010, p.7).

A Estatística surge então como um tema que tem vindo, cada vez mais, a impor-se nos programas escolares, sendo estudada do ensino básico ao secundário sob o tema “Organização e Tratamento de Dados”.

Segundo Grafield & Ahlgren (1998), os alunos tendem a ver a Estatística à imagem da Matemática, o que implica que eles procuram uma solução única e definitivamente correta ou errada para as situações estatísticas com que se deparam. Ora, a Estatística não se quaduna com esta perspetiva, pois esta, em particular a Estatística inferencial, envolve incerteza e apenas nos fornece resultados com um determinado grau de certeza. Assim, há autores (por exemplo Moore, 1992) que afirmam, inclusive, que a Estatística, embora seja uma ciência matemática, não é um ramo da Matemática.

2.2. Evolução da Estatística

“Não podemos escapar dos dados, assim como não podemos evitar o uso de palavras. Tal como palavras os dados não se interpretam a si mesmos, mas devem ser lidos com entendimento. Da mesma maneira que um escritor pode dispor as palavras em argumentos, assim também os dados podem ser convincentes, enganosos ou simplesmente inócuos. A instrução numérica, a capacidade de acompanhar e compreender argumentos baseados em dados, é importante para qualquer um de nós.”

Moore (2005, p.4)

De acordo com Farias, Soares & César (2003, p.6), “a Estatística é uma ciência que se dedica ao desenvolvimento e ao uso de métodos para a coleta, resumo, organização e análise de dados”. Para Rao (1999), a Estatística é uma ciência que estuda e pesquisa sobre: o levantamento de dados com a maior quantidade de informação possível para um dado custo; o processamento de dados para a quantificação da quantidade de incerteza existente na resposta para um determinado problema; a tomada de decisões sob condições de incerteza, sob o menor risco possível.

A palavra *Estatística* surge da palavra latina status, que significa o “estudo do Estado” ou “ciência dos negócios do Estado”, pois na antiguidade, tal como ainda acontece nos nossos dias, era com base numa coleção de informações sobre a população e a economia, que os governantes conheciam as suas nações e construíam os seus programas de governo.

Divide-se, basicamente, em três etapas:

- recolha de dados a partir de uma amostra escolhida da população;
- análise descritiva (estatística dedutiva¹) que envolve a interpretação dos dados através de tabelas, gráficos e cálculo de medidas;
- escolha de um modelo explicativo para o comportamento do objeto em estudo, a fim de se fazer a análise dos dados – inferência (Estatística Indutiva²).

¹ Estatística dedutiva – trata da organização e apresentação gráfica de dados.

Constata-se que a Estatística já era o suporte para muitas tomadas de decisão na antiguidade. Aparece pela primeira vez, por volta de 3000 a.C., aquando dos censos na Babilónia, China e Egipto ou nos registos egípcios da falta de mão de obra relacionada com a construção de pirâmides.

“O primeiro levantamento estatístico de que se tem conhecimento deve-se a Heródoto e refere-se a um estudo da riqueza da população do Egipto, cuja finalidade era averiguar quais eram os recursos humanos e económicos disponíveis para a construção das pirâmides, isso no ano de 3050 a.C., no ano 2238 a.C., o imperador Chinês Yao ordenou a realização de uma Estatística com fins industriais e comerciais.”

(Medeiros, 2007, p.17)

É também exemplo da utilização da Estatística uma instrução dada por Moisés no quarto livro do Antigo Testamento quando pede para que se faça um levantamento dos homens de Israel aptos para guerrear. Estas informações eram posteriormente utilizadas para taxar impostos e alistar militares. Mais tarde, há relatos de terem sido feitos censos por todo o império Romano.

Entre 1545 e 1563, a Igreja Católica reconhece a importância dos registos de baptismo, casamento e óbito, tornados obrigatórios após o Concílio do Trento. Alguns anos depois surge, na Alemanha, o matemático Gottfried Achenwall (1719 – 1772), a quem se atribui a criação do vocabulário estatístico. Contudo, o que se fez até então, pouco tinha a ver com a Estatística, era apenas levantamento de dados, sem que deles se tirasse qualquer conclusão. A primeira tentativa para tirar alguma conclusão dos dados recolhidos surge em Inglaterra, no século XVII, com o que foi denominado de Aritmética Política, tendo evoluído para aquilo que hoje se conhece como Demografia. Foi John Graunt (1620 – 1674), negociante londrino o autor desta proeza.

² Estatística indutiva – conjunto de métodos para tirar conclusões sobre uma população, baseada em informações obtidas a partir de uma amostra da população.

É no século XX que se tem o verdadeiro início da Estatística (moderna) já que é apenas no século XIX que surgem as primeiras teorias estatísticas. Os resultados que advêm da aplicação dos métodos estatísticos na resolução de diversos problemas, aliados à evolução das tecnologias de informação e comunicação, depressa tornaram a Estatística indispensável. Jolliffe (2007) refere que “as maiores alterações no ensino da Estatística (...) são resultado da chamada revolução tecnológica”. Em 1948 ocorreu a primeira mesa redonda sobre o ensino da Estatística a desde aí houve um incremento no interesse desta área por parte de várias comunidades científicas em todo o mundo. Em 1970, na primeira conferência do *Comprehensive School Mathematics Program*, surge a ideia de inserir a Estatística no ensino da Matemática nas escolas. De entre os vários motivos que levaram a esta tomada de posição está a relevância da Probabilidade e da Estatística em quase todas as atividades da sociedade moderna.

A Estatística é, nos dias de hoje indispensável para qualquer pessoa, seja na análise de informação, seja na tomada de decisões na sua vida familiar ou profissional. Seja qual for a área ou objeto de estudo de um profissional, este irá utilizar conceitos de Estatística.

Martins & Ponte (2011) referem que a Estatística deve estar integrada no sistema educativo, uma vez que o estudo desta ciência fomenta o desenvolvimento do sentido crítico, a capacidade de argumentação, intervenção e a tomada de decisões “para que estes possam vir a ser cidadãos informados, consumidores inteligentes e profissionais competentes” (p.3).

O tema Estatística aparece nos currículos do ensino secundário, pela primeira vez, na década de sessenta, com a reforma do ensino da Matemática apelidada de Matemáticas Modernas. Em 1986, este tema é incluído nos currículos dos segundo e terceiro ciclos do ensino básico, mas é apenas em 2007 que passa a integrar o primeiro ciclo do ensino básico. Atualmente, o tema “Estatística e Probabilidades”, presente no programa de Matemática de 1991 passou a ser designado por “Organização e Tratamento de Dados” (OTD), nomenclatura esta, também presente em muitos outros países como França (*Organisation et représentation de données numériques*), Reino Unido (*Processing, representing and interpreting data* ou *handling data*) ou Estados Unidos da América (*Data Analysis*).

De acordo com Loura (2009, p.47) “a alteração da terminologia adotada deve-se ao facto do Currículo Nacional destacar o seguinte:

- Predisposição para recolher e organizar dados e representá-los de forma adequada, nomeadamente através de tabelas e gráficos e utilizando as novas tecnologias;
- Aptidão para ler e interpretar tabelas e gráficos à luz das situações a que dizem respeito e para comunicar os resultados das interpretações feitas;
- Tendência para dar resposta a problemas com base na análise de dados recolhidos e de experiências planeadas para o efeito;
- Aptidão para realizar investigações que recorram a dados de natureza quantitativa, envolvendo a recolha e análise de dados e a elaboração das conclusões;
- Aptidão para usar processos organizados de contagem na abordagem de problemas combinatórios simples;
- Sensibilidade para distinguir fenómenos aleatórios e fenómenos deterministas e para interpretar situações concretas de acordo com essa distinção;
- O sentido crítico face ao modo como a informação é apresentada.”

No programa do ensino básico, em vigor desde 2007 (Ministério da Educação, 2007), o tema Organização e Tratamento de dados desenvolve-se da forma como consta da Tabela 1.

1.º Ciclo	2.º Ciclo	3.º Ciclo
<p><i>Representação e interpretação de dados e situações aleatórias</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Leitura e interpretação de informação apresentada em tabelas e gráficos. - Classificação de dados utilizando diagramas de Venn e Carroll - Tabelas de frequências absolutas, gráficos de pontos e pictogramas – gráficos de barras - Moda - Situações aleatórias 	<p><i>Representação e interpretação de dados</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Formulação de questões - Natureza dos dados - Tabelas de frequências absolutas e relativas - Gráficos de barras, circulares, de linha e diagramas de caule e folhas - Média aritmética - Extremos e quartis. 	<p><i>Planeamento estatístico</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Especificação do problema - Recolha de dados - População e amostra <p><i>Tratamento de dados</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Organização, análise e interpretação de dados - Histograma - Medidas de localização e dispersão - Discussão de resultados <p><i>Probabilidade</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Noção de fenómeno aleatório e de experiência aleatória - Noção e cálculo da probabilidade de um acontecimento

Tabela 1 – Tópicos do tema “Organização e Tratamento de Dados” do ensino básico (in Loura, 2009, p.48)

Analisando a Tabela 1, podemos concluir que o atual programa dá uma grande ênfase à Estatística, mostrando exigência desde os primeiros anos de escolaridade com base na “análise exploratória de dados e no envolvimento progressivo dos alunos em experiências de natureza investigativa” (Martins & Ponte, 2010, p.12). Os mesmos autores referem, ainda, que são de opinião que a introdução do capítulo Organização e Tratamento de dados nos três ciclos do ensino básico tem como base a valorização da Literacia Estatística, reconhecendo o papel fundamental deste tema no desenvolvimento social e pessoal do aluno.

Martins & Ponte (2010) referem que o propósito principal de ensino no primeiro ciclo do ensino básico é o desenvolvimento de capacidades de leitura, interpretação, recolha, organização e representação de dados em diferentes contextos, com o objetivo de resolver problemas do quotidiano dos alunos. No segundo ciclo do ensino básico, pretende-se um aprofundamento e alargamento de todo o trabalho realizado no ciclo de ensino anterior, desenvolvendo o pensamento, o raciocínio, a capacidade de compreensão, produção de informação estatística, assim como a utilização dessa mesma informação para a resolução de problemas e a tomada de decisões argumentadas. Afirmam, ainda que “não se pretende que os alunos, quando acabam o ensino básico, sejam capazes de realizar estudos estatísticos sofisticados, mas sim que compreendam e saibam utilizar a linguagem básica e as ideias fundamentais da Estatística, desde a formulação de questões a investigar à interpretação de resultados” (p.12).

Segundo Loura (2009), após uma análise em que refere a má perceção que os alunos têm sobre as reais dificuldades que sentem na abordagem a tópicos ligados à Estatística, refere que o destaque que é dado ao tema Organização e Tratamento de Dados “irá certamente contribuir para um aumento real da Literacia Estatística e da capacidade de realização e interpretação de estudos estatísticos que recorram a uma correta recolha e análise exploratória de dados” (p. 49).

Esta perspetiva vai ao encontro daquilo que se tem assistido a nível internacional, para tentar combater o que alguns estudos mostram - os adultos não pensam estatisticamente para analisar e tomar decisões sobre questões pessoais importantes (Ben-Zvi & Garfield, 2004). Deste modo, é na escola que recai a tarefa de proporcionar aos alunos, futuros adultos, uma formação que nos permitirá vir a ter uma sociedade estatisticamente alfabetizada, com indivíduos capazes de ler e interpretar criticamente informação disponível de várias formas, para que haja uma correta integração social e tomadas de decisão conscientes.

O GAISE (Guidelines for assessment and instruction in statistics education) College Report (2005), (citado por Martins & Ponte (2011)) enuncia seis recomendações que refletem esta preocupação com o desenvolvimento da literacia estatística:

- salientar a literacia estatística e desenvolver o pensamento estatístico;
- utilizar dados reais;
- acentuar a compreensão dos conceitos, em vez de apenas teoria e procedimentos;
- fomentar uma aprendizagem ativa na sala de aula;

- utilizar tecnologia para desenvolver a compreensão dos conceitos e a análise dos dados;
- utilizar a avaliação para conhecer e melhorar a aprendizagem dos alunos.

O domínio dos processos envolventes na Organização e Tratamento de Dados e a aquisição da Literacia Estatística facultam capacidades indispensáveis para o melhoramento da resolução de problemas e para a participação consciente e o exercício efetivo da cidadania (Ponte & Serrazina, 2000). Gal (2002) afirma que a Literacia Estatística é a “habilidade para interpretar e avaliar criticamente informações estatísticas, esperada para os cidadãos adultos no contexto da leitura, inseridos numa sociedade industrializada permeada por diversas informações com uma componente necessária esperada do resultado da escolaridade dos mesmos” (p.2). A Literacia Estatística baseia-se em um conjunto de conhecimentos, convicções, hábitos, capacidades de comunicação e habilidades que os indivíduos necessitam para lidar com situações pessoais ou profissionais. Como advogam Martins & Ponte (2011), com o domínio dos conhecimentos e processos estatísticos, os cidadãos estarão munidos de competências que os ajudarão a ultrapassar com maior segurança os problemas que lhes são apresentados diariamente e cuja resolução requer a aplicação de conhecimento e pensamento estatístico.

A Estatística é também essencial na compreensão dentro da própria Matemática. Tal como preconizam Abrantes, Serrazina & Oliveira (1999), "a competência matemática que todos devem desenvolver inclui conhecimentos de Estatística e de Probabilidades, os quais constituem uma ferramenta imprescindível em diversos campos de atividade científica, profissional, política e social" (p.94). Os mesmos autores asseguram que este tema é imprescindível para compreender outros tópicos matemáticos, como números, medidas ou as capacidades transversais como a resolução de problemas. São unânimes as opiniões de diversos autores que reforçam a necessidade em superar as tarefas que recorrem a processos rotineiros e que se deve apostar na criação de experiências de aprendizagem que exijam dos alunos a recolha, a interpretação e a representação de dados envolvidos numa atividade real (Sousa, 2002).

Gal (2002) divide a Literacia Estatística em duas componentes - a cognitiva e a de disposição. A primeira envolve o conhecimento matemático e a capacidade de elaborar questões críticas. A segunda componente diz respeito à postura crítica, sendo moldada pelas cren-

ças e atitudes do indivíduo. É cada vez mais fundamental, de acordo com a primeira componente, que qualquer cidadão seja capaz de, entre outras coisas, ler e escrever informações de gráficos ou tabelas, interpretar textos que envolvem conceitos estatísticos, compreender conceitos, aferir, por exemplo, se a amostra utilizada é ou não representativa da população, se a forma de apresentação dos dados é ou não tendenciosa, ou se as medidas de tendência central utilizadas são as mais adequadas.

Gal & Garfield (1997, p.3) referem que “após o estudo da Estatística, os alunos de qualquer ano de escolaridade devem-se tornar cidadãos capazes de:

- compreender e lidar com a incerteza, variabilidade e informação estatística no mundo à sua volta e participar efetivamente na sociedade de informação emergente;
- contribuir para ou tomar parte na produção, interpretação e comunicação de dados de problemas que encontram na vida profissional.”

2.3. Revisão da Literatura

“Levar o aluno a pensar é fundamental para a aprendizagem em qualquer área do conhecimento. Isso é inquestionável. Principalmente quando se trata de conteúdos de Estatística. Uma estratégia já consagrada que visa o alcance dessa aprendizagem é o ensino por meio de problemas. Problemas não triviais, de preferência extraídos do quotidiano, com significado, portanto, e que desafiem a mente do aluno.”

(Oliveira, 2007, citado por Bayer, 2011, p. 656)

O insucesso escolar é um tema que tem estado na ordem do dia, merecendo a maior das atenções por parte de investigadores e profissionais como sejam psicólogos, sociólogos ou da área das ciências da educação. Ora, é do senso comum, que a Matemática surge como uma das disciplinas onde os alunos revelam mais dificuldades e perante a qual os alunos menos gosto revelam.

Vieira (2011) refere que a Matemática é uma das primeiras disciplinas que os jovens abandonam e onde os alunos menos integrados na escola revelam mais insucesso. Afirma, também, que este insucesso está, de alguma forma, já enraizado, sendo encarado pela sociedade como algo normal e até aceitável. São muitos os pais que se conformam com o insucesso prematuro dos seus filhos na Matemática, revendo-se na situação dos seus educandos. Nota-se um agravar da situação havendo, por parte dos alunos, um progressivo sentimento de rejeição perante a disciplina, apelidando-se de alunos com poucas capacidades, contribuindo para a sua perda de autoestima. No entanto, segundo Abrantes (1995) é fundamental que os alunos não se sintam excluídos das atividades da disciplina de Matemática, devendo ser capazes de realizar algum trabalho, sentindo prazer na sua concretização, elevando a sua autoconfiança perante a Matemática. Há outros autores, como Nunes & Bryant (1996) que partilham da mesma opinião, advogando que a Matemática deve estar ao alcance de todos sendo não só uma forma de conhecimento, mas também uma forma de pensar, podendo ser aprendida e usada fora da escola.

A este respeito, Vieira (2008) refere que uma maneira de aproximar a Matemática da realidade dos alunos é resolvendo problemas do seu quotidiano. Ser capaz de organizar dados, estabelecer relações, formular perguntas, selecionar e mobilizar informações são elementos básicos, quer na vida escolar, quer na vida profissional ou pessoal, permitindo desenvolver o sentido crítico, construindo o seu conhecimento e compreendendo a sociedade em seu redor.

É neste contexto que se tem assistido, nos últimos anos, a um aumento da importância da correta interpretação dos resultados de um estudo estatístico. Consequência desta necessidade é o incremento dado ao ensino da Estatística nos diferentes níveis, enfatizando a interpretação dos seus conceitos, contextualizando os resultados obtidos. Pede-se, então, aos alunos que “pensem estatisticamente”.

Vendramini & Dias (2005) afirma que há uma consciencialização, por parte dos professores, das dificuldades de aprendizagem dos alunos, verificando-se um aumento substancial de investigações relacionadas com a tentativa de identificação dos principais erros dos estudantes na resolução de problemas. Hudson (1999), ao refletir sobre essas dificuldades, afirma que os alunos apresentam um “conhecimento isolado” no que respeita aos diferentes conceitos estatísticos, sendo capazes de calcular corretamente o que lhes é solicitado, no entanto, são incapazes de relacionar os resultados obtidos com o contexto da situação, ou

aplicar esse conhecimento numa situação da vida real. Muitas vezes a abordagem feita à Estatística consiste apenas na transmissão e aplicação de fórmulas matemáticas, não sendo abordada a interpretação correta dos valores obtidos no contexto da situação problemática. Bayer (2011, p.654), refere que os professores “são muitas vezes confrontados com resultados e interpretações dos problemas estatísticos incorretos, incoerentes e absurdos, mostrando uma total falta de capacidade de análise, interpretação e entendimento da utilidade estatística” por parte dos alunos.

De acordo com Barros (2003), existem nas escolas alunos que demonstram dificuldades na compreensão de conceitos estatísticos básicos como seja a moda, a média ou a mediana. A este respeito, Boaventura & Fernandes (2004) referem que a mediana é vista como a medida de tendência central onde os alunos apresentam mais dificuldades, desde o processo de cálculo utilizado que por vezes não é correto, à interpretação do resultado obtido. Barros (2003) e Sousa (2002) afirmam que uma das incorreções mais frequentes é a associação da mediana à metade da amplitude dos dados, o cálculo da mediana a partir dos valores da variável, não tendo em conta as respetivas frequências absolutas. Barros et al (2009), num dos estudos que realizou, ao questionar futuros professores concluiu que as interpretações sobre a mediana referem-se apenas à determinação do seu valor, não tendo havido qualquer aluno que apresentasse uma interpretação contextualizada. Já Bayer (2011) refere que um dos principais erros cometidos pelos estudantes na resolução de problemas estatísticos deve-se às dificuldades ao nível do seu conhecimento matemático, apresentando erros de cálculo.

É no sentido de identificar os erros dos alunos que devemos apostar para melhorar os seus desempenhos e facilitar o processo de ensino/aprendizagem, tal como afirma Bayer (2011), “o professor ao conhecer o erro do aluno terá à sua disposição dados preciosos para intervenções mais individualizadas” (p. 656).

Radatz (1979) categorizou os tipos de erros cometidos pelos alunos, da seguinte forma: dificuldades de linguagem; deficiência de pré-requisitos; associações incorretas e rigidez de raciocínio; aplicação de estratégias irrelevantes e dificuldades em obter informação a partir de representações gráficas.

Bayer (2011) defende que é a partir do conhecimento da forma como os alunos raciocinam e interpretam os problemas estatísticos que se podem identificar os erros por eles cometidos e, conseqüentemente, se possam adaptar e criar soluções didático-pedagógicas que

os minimizem. O mesmo autor argumenta, ainda, que se deve começar por analisar o erro cometido pelo aluno como “carência do conhecimento matemático” (p.658), isto é, os erros cometidos advêm de dificuldades ao nível do cálculo. Seguidamente, deve ser analisado até que ponto o aluno consegue interpretar e compreender o significado das medidas calculadas, interpretando o resultado no contexto do problema. Bayer (2011) distingue cinco principais erros que podem ocorrer aquando da resolução de um problema estatístico, que a seguir se enumeram e descrevem (p.658):

“- **Erro Tipo 1:** está relacionado com a falta de compreensão do aluno a respeito da leitura do problema, ou seja, o aluno não compreende a situação problemática, ou ainda, não interpreta corretamente o texto lido.

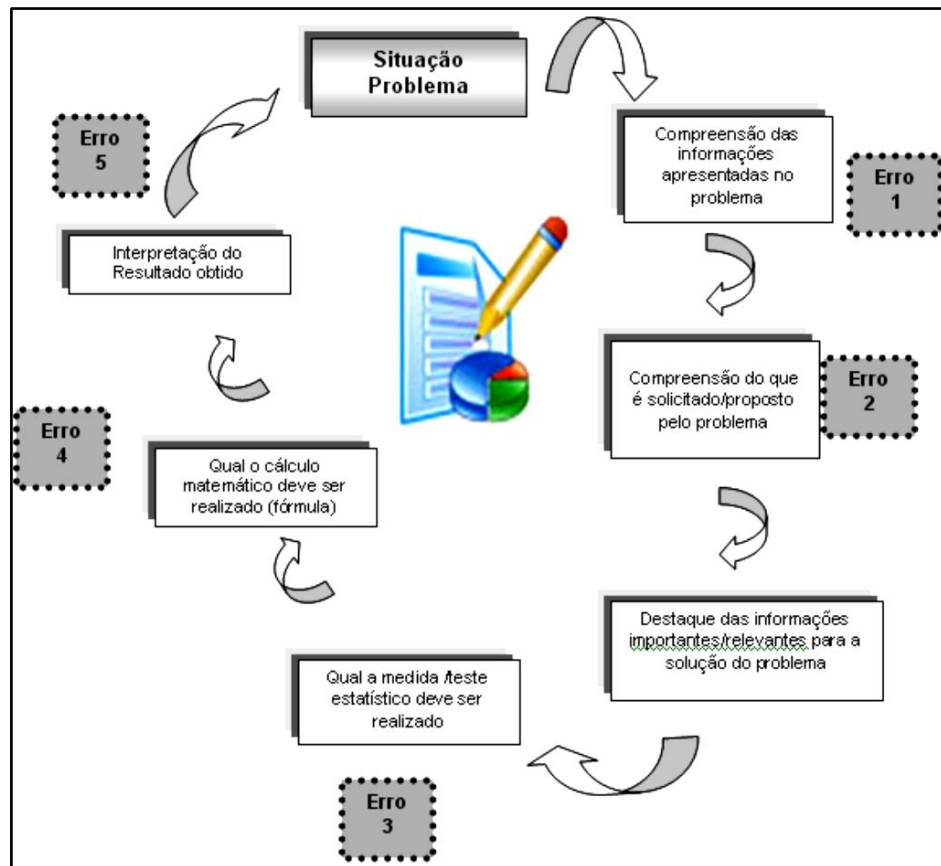
- **Erro Tipo 2:** o aluno não compreende o que está sendo solicitado pelo problema, ou ainda por falta de atenção entende erroneamente o que é solicitado para ser feito.

- **Erro Tipo 3:** configura-se por um erro decorrente da falta de conhecimento teórico do aluno sobre os conceitos de Estatística. Saber a adequação de cada medida/teste estatístico para um determinado problema.

- **Erro Tipo 4:** cometido no cálculo matemático da medida estatística – ocorre muitas vezes por falta de atenção ou pela falta de uma base matemática relacionada muitas vezes com operações básicas de cálculo.

- **Erro Tipo 5:** No término do cálculo da medida/teste estatístico realizado os valores obtidos são erroneamente interpretados no contexto do problema, ou seja, o aluno não compreende o porquê do cálculo da medida e o que seu significado representa na solução do problema.”

Este autor apresenta, também, uma situação esquemática do que foi referido anteriormente.



In Bayer (2011, p. 659)

Aplicando esta tipologia de erros num estudo realizado a cento e treze estudantes universitários de diferentes cursos, envolvendo conteúdos como sejam a moda, a média, a mediana ou o desvio-padrão, Bayer (2011) constatou que a maior incidência de erros ocorreu na interpretação, concluindo que isso se deverá à “falta de conhecimento teórico dos alunos sobre conceitos de Estatística e sobre a adequação de cada medida para a resolução de um determinado problema” (p.660).

2.4. Conflitos existentes na literatura sobre os conceitos de mediana e quartil

Uma forma de sintetizar dados para uma futura análise é recorrendo ao cálculo de medidas como a mediana ou os quartis.

A mediana é um valor que divide a amostra ao meio. Metade dos valores da distribuição são inferiores ou iguais à mediana, sendo que os restantes são iguais ou superiores à mediana.

Para determinar a mediana é fundamental começar por ordenar o conjunto de dados. Temos, então, duas situações diferentes que podem ocorrer quanto à dimensão da amostra. No caso de a amostra ter um número ímpar de elementos, haverá apenas um valor central, correspondendo à mediana da distribuição. No caso de a amostra ter um número par de elementos, há dois valores centrais, pelo que a mediana corresponderá à média aritmética desses dois valores. Decorre, assim, desta definição, que a mediana é um valor que pode nem sempre pertencer à amostra. Quando a dimensão da amostra é par, apenas se obterá um valor igual a alguma das observações caso os dois valores centrais sejam iguais.

Outras medidas de localização são os quartis, que localizam outros pontos da distribuição dos dados, além do central (mediana). Considerando a definição anterior no que respeita à mediana, se aplicarmos separadamente à primeira e à segunda metade da distribuição, obteremos, respetivamente os primeiro e terceiro quartis. A mediana pode também ser considerada como o segundo quartil. Assim, os quartis dividem a distribuição em quatro partes com igual percentagem de elementos.

Estas medidas revelam-se particularmente úteis para avaliar a simetria de uma distribuição. Recorrendo ao diagrama de extremos e quartis reúne-se visualmente numa representação gráfica o mínimo, o máximo, primeiro quartil, segundo quartil (mediana) e terceiro quartil de uma distribuição. De acordo com Martins (2011), o diagrama de extremos e quartis “é a representação que melhor se posiciona na relação custo / benefício” (p.1), já que, recorrendo a cinco números (dois deles por observação direta) se consegue uma representação muito esclarecedora no que respeita à maior ou menor concentração, simetria e existência de valores *aberrantes* na distribuição. Esta autora defende, também, que é muito útil para comparar conjuntos de dados.

A palavra conflito aparece quando a interpretação de conceitos matemáticos por parte dos alunos não está de acordo com o que está previsto pelo professor. Assim, surgem erros que não resultam da falta de estudo por parte dos alunos mas pelo facto de esses estudantes estabelecerem correspondências incorretas entre diferentes termos e conceitos.

É com base nas exigências do atual programa de Matemática que surgem dificuldades, por parte dos alunos, no que respeita a definições, propriedades e na utilização de uma grande variedade de algoritmos e cálculos para o mesmo conceito.

O presente estudo tem por finalidade identificar as maiores dificuldades dos alunos no cálculo e na interpretação dos conceitos de mediana e de quartil já que, segundo Boaventura & Fernandes (2004), Barros (2003) e Sousa (2002), a mediana é considerada a medida de tendência central que mais obstáculos apresenta por parte dos alunos.

Quando se aborda um determinado tema, deve, o professor, fazer referência às definições dos conceitos básicos necessários às aprendizagens dos alunos. Assim se passa aquando do ensino da Estatística, no que respeita aos conceitos de mediana e de quartil. No entanto, basta fazer uma pequena pesquisa na literatura específica da Estatística para nos apercebermos da diversidade de definições e algoritmos que podem ser utilizados para o seu cálculo.

É no contexto do cálculo que começam a surgir as dificuldades dos alunos. De acordo com Barr (1980), os alunos mostram saber a definição de mediana, no entanto, não conseguem interpretar o seu significado. Para Batanero (2000), a principal dificuldade dos alunos prende-se com o facto de o algoritmo de cálculo da mediana não ser único, dependendo do tipo de dados, da forma como estes estão apresentados e o seu número de elementos. Porém, Cobo (2003) defende que as maiores dificuldades dos alunos relativas a estes conceitos estão relacionadas com os conflitos na sua representação, alegando que os alunos confundem verbalmente os conceitos e os símbolos que se referem a cada uma das medidas de tendência central. Barr (1980), por sua vez, apresenta o conflito conceitual, em que os alunos interpretam a mediana como o centro de um conjunto de dados não ordenados.

Mavarech (1983) apresenta os conflitos como sendo processuais, isto é, os alunos apresentam falhas ao nível do cálculo da mediana, não considerando as frequências absolutas no seu cálculo.

Carvalho (2001) lista um conjunto de procedimentos que conduzem aos principais erros no cálculo da mediana, nomeadamente o facto de os alunos não ordenarem os dados (o que significa que, para eles, a mediana será o valor central dos dados conforme lhes são apresentados), e o de os alunos não terem em consideração o valor da frequência absoluta de cada

observação quando estes são apresentados na forma de tabela e os alunos calcularem a média em vez da mediana.

Schuyten (1991) alega que os alunos cometem erros no cálculo da mediana porque não entendem a razão pela qual se usam dois distintos algoritmos para o seu cálculo. Diz-nos, também, que os alunos apresentam dificuldades ao estimar o valor da mediana quando os dados lhes são apresentados num gráfico.

Carvalho e César (2001), num estudo realizado a alunos do sétimo ano de escolaridade, constataram que, na sua grande maioria, os alunos aplicam corretamente os algoritmos para o cálculo da mediana ou da média mas demonstram erros conceptuais e dificuldades na aplicação prática dos conhecimentos sobre medidas de tendência central.

Cobo e Batanero (2000) apresentam também como possível justificação para os erros dados pelos alunos no cálculo da mediana, o facto de as medidas de tendência central serem apresentadas usando fórmulas, não permitindo, deste modo, que os alunos compreendam o significado integral de cada um dos conceitos.

Para Barros (2003) e Sousa (2002) os alunos apresentam dificuldades pois utilizam um processo incorreto fazendo corresponder a mediana à metade da amplitude dos dados.

Tomando como base estes erros apresentados por diferentes autores, podemos conjecturar que o conceito de quartil pode também nem sempre ser bem utilizado ou calculado, pois, de certa forma, é intrínseco ao conceito de mediana. No programa de Matemática e nos manuais do terceiro ciclo do ensino básico, em Portugal, os quartis são definidos com base no conceito de mediana. Na verdade, num conjunto ordenado de dados, o primeiro quartil é o valor mediano dos dados que ficam à esquerda da mediana e o terceiro quartil corresponde ao valor mediano dos dados que ficam à direita da mediana. No entanto, este não é o único processo de cálculo dos quartis.

Fernandes & Pinto (2014), referem que o facto de se ensinar ao longo dos diferentes ciclos de ensino (terceiro ciclo, secundário e universitário) diferentes formas de cálculo dos quartis contribui para a incerteza dos alunos, desconfiança e desconforto relativamente à Estatística e aos seus conceitos.

CAPÍTULO 3

3.1. A mediana e os quartis nos manuais escolares

De acordo com o Decreto-Lei n.º 369/90, de 26 novembro, que estabelece o sistema de adoção, o período de vigência e o regime de controlo de qualidade dos manuais escolares, Artigo 1º, alínea 3,

“...entende-se por manual escolar o instrumento de trabalho, impresso, estruturado e dirigido ao aluno, que visa contribuir para o desenvolvimento de capacidades, para a mudança de atitudes e para a aquisição dos conhecimentos propostos nos programas em vigor, apresentando a informação básica, correspondente às rubricas programáticas, podendo ainda conter elementos para o desenvolvimento de atividades de aplicação e avaliação da aprendizagem efetuada....”.

Se antes era o manual escolar, o único apoio dos professores para o ensino, agora essa situação alterou-se, sendo que todos, ou quase todos os alunos têm acesso a recursos mais dinâmicos e apelativos. No entanto, é consensual que os manuais escolares ainda assumem um papel fundamental na aprendizagem dos alunos.

Para Rego, Gomes & Balula (2010), o manual escolar é o primeiro recurso educativo, numa sociedade em que se busca um acesso generalizado a uma educação de qualidade, devendo ser acessível a todos os estratos sociais, independentemente das diferenças culturais, socioeconómicas ou geográficas. Esta acessibilidade, faz do manual um dos recursos mais importantes na escolarização.

Para o aluno, o manual escolar exerce essencialmente as funções de orientação e de estudo. De acordo com Gonçalves (2011), o manual escolar “representa um recurso pedagógico-didático, capaz de fomentar o desenvolvimento de competência” (p.54).

O manual escolar é “o recurso mais utilizado em todos os tempos e em todos os países” (Sebarroja, 2001, p.86), já que é “um dos principais instrumentos de trabalho de alunos e professores, servindo como mediador entre o programa e os alunos”. Brito (1999) defende esta mesma ideia, alegando que os manuais escolares são “um auxiliar relevante entre os instrumentos de suporte destinados ao processo de ensino/aprendizagem e que favorecem o processo educativo” (p. 139). Também Carvalho & Fadigas (2009) referem que “o manual escolar é frequentemente reconhecido como de grande importância e apresentado como o instrumento mais utilizado pelos professores”.

Torna-se, assim, pertinente uma análise de alguns manuais escolares vigentes no que concerne à abordagem do tema deste trabalho. Deste modo, apresentamos a seguir, as várias formas que cada autor escolheu para introduzir e definir a mediana e os quartis.

3.2. A “Mediana” nos manuais escolares

Começamos por analisar os manuais escolares do sétimo ano de escolaridade, já que é o ano em que é lecionado o conceito de mediana. Foram escolhidos cinco manuais de duas editoras – Porto Editora e Asa Editores – que correspondem aos manuais que mais adoções tiveram por parte dos professores de Matemática, para trabalho nas escolas onde lecionam.

Os manuais a seguir apresentados não estão sujeitos a qualquer ordem, sendo esta aleatória.

❖ Manual Escolar – Matemática 7 (Porto Editora)

Maria Augusta Ferreira Neves e António Pinto Silva.

Neste manual escolar, o capítulo referente à Estatística aparece como o último capítulo a ser abordado durante o ano letivo, sendo o conceito de mediana o último a ser transmitido aos alunos. A definição apresentada pelos autores deste manual é a seguinte:

Considerando um conjunto de n dados numéricos, constrói-se uma sequência crescente (em sentido lato), repetindo cada valor um número de vezes igual à respetiva frequência absoluta. A esta sequência chama-se **sequência ordenada dos dados** (ou, simplesmente, **dados ordenados**).

- Se n é ímpar, a mediana corresponde ao valor central, isto é, ao valor do elemento de ordem $\frac{n+1}{2}$ da sequência ordenada dos dados.
 - Se n é par, a mediana corresponde à média aritmética dos dois valores centrais, ou seja, aos valores dos elementos de ordens $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2} + 1$ da sequência ordenada dos dados.
- A mediana pode representar-se por \tilde{x} ou por Me .

(In Matemática 7, vol. 2, p. 141)

A interpretação do conceito de mediana é apresentado usando um exercício concreto já resolvido, que a seguir se apresenta:

A seguinte sequência ordenada representa o custo, em euros, dos artigos expostos numa montra.

10	12	12	15	15	15	15
17	18	20	20	30	35	40

- $n = 14$
- ordem dos elementos centrais: $\frac{14}{2} = 7$ e $\frac{14}{2} + 1 = 8$
- $\tilde{x} = \frac{15 + 17}{2} = 16$. A mediana é 16 euros.

Dizer que a mediana é 16 euros significa que 50% dos artigos expostos têm um preço igual ou inferior a 16 euros ou que, 50% dos artigos expostos têm um preço igual ou superior a 16 euros.

(In Matemática 7, vol. 2, p. 141)

❖ Manual Escolar – Matemática Dinâmica 7 (Porto Editora)

Luísa Faria, Luís Guerreiro e Pedro Rocha Almeida.

A abordagem feita neste manual escolar é em tudo semelhante à do manual anterior, aparecendo como o último conceito a ser lecionado, do último capítulo do volume 2. A definição de mediana é dada de forma seguinte:

Considerando um conjunto de n dados numéricos, constrói-se uma sequência crescente (em sentido lato), repetindo cada valor um número de vezes igual à respetiva frequência absoluta. A esta sequência chama-se **sequência ordenada dos dados** (ou, simplesmente, **dados ordenados**).

- Se n é ímpar, a mediana corresponde ao valor central, isto é, ao valor do elemento de ordem $\frac{n+1}{2}$ da sequência ordenada dos dados.
- Se n é par, a mediana corresponde à média aritmética dos dois valores centrais, ou seja, aos valores dos elementos de ordens $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2} + 1$ da sequência ordenada dos dados.

A mediana pode representar-se por \tilde{x} ou por Me .

(In Matemática Dinâmica 7, vol. 2, p. 128)

É, também, através de um exemplo resolvido, que os autores apresentam a interpretação do conceito de mediana.

Relativamente às temperaturas registadas nos 11 dias do *À descoberta*, tem-se a seguinte sequência ordenada dos dados:

- 8 - 3 - 3 - 2 - 2 - 2 0 0 1 2 4

- $n = 11$ (ímpar)
- ordem do elemento central: $\frac{11+1}{2} = \frac{12}{2} = 6$ (corresponde a -2)
- $\tilde{x} = -2$. A mediana é -2 °C.

Significa que, em pelo menos 50% dos dias (aproximadamente, 54,5%), registou-se uma temperatura inferior ou igual a dois graus negativos.

(In Matemática Dinâmica 7, vol. 2, p. 128)

❖ Manual Escolar – Novo Espaço 7 (Porto Editora)

Belmiro Costa e Ermelinda Rodrigues.

A abordagem feita neste manual escolar continua na linha dos anteriores, sendo que é o último conceito abordado, do último capítulo do volume 2. No entanto, após a introdução da terceira medida de localização que os alunos aprendem – mediana – os autores apresentam um tópico onde trabalham a “Discussão de Resultados”, onde comparam a posição relativa da

mediana e da média. A diferença, neste manual, relativamente aos anteriores está no facto de os autores, antes de apresentarem a forma como se calcula a mediana, apresentarem a interpretação do seu conceito.

A partir de um conjunto de dados ordenados, dá-se o nome de **mediana** ao valor (pertencente ou não a esse conjunto de dados) que o divide ao meio, ou seja, pelo menos 50% dos elementos da amostra são menores ou iguais à mediana e pelo menos 50% são maiores ou iguais à mediana. A mediana representa-se por \tilde{x} ou Me .

(In Novo Espaço 7, vol. 2, p. 118)

Após a apresentação de um caso concreto em que o número de elementos da distribuição é ímpar e outra em que é par, os autores concluem a seguinte:

A **mediana** de um conjunto de dados numéricos, depois de ordenados, é:

- o dado que ocupa a posição central, se o **número de dados é ímpar**;
- a média aritmética dos dados que ocupam as duas posições centrais, se o **número de dados é par**.

(In Novo Espaço 7, vol. 2, p. 119)

Estes autores apresentam ainda, como regra prática, uma fórmula para o cálculo da mediana, no caso de a distribuição ter um número par ou ímpar de dados.

Regra prática

Para determinar a mediana de um conjunto de n dados ordenados por ordem crescente:

- se n é **ímpar** a mediana é o valor correspondente à posição $\frac{n+1}{2}$;
- se n é **par** a mediana é a média aritmética do elemento que ocupa a posição $\frac{n}{2}$ e do seguinte.

(In Novo Espaço 7, vol. 2, p. 119)

❖ **Manual Escolar – PI 7 (Asa Editores)**

Fátima Cerqueira Magro, Fernando Fidalgo e Pedro Louçano.

Este manual escolar é composto por três volumes, sendo que o capítulo que contém a abordagem à Organização e Tratamento de Dados aparece no final do volume 2, antes dos capítulos “Equações” e “Figuras Semelhantes”. A apresentação do conceito de mediana é feita, pelos autores, de uma forma direta, sem que seja precedida de qualquer exemplo. O conceito aparece depois da referência às medidas de localização já estudadas em anos anteriores, como o moda e a média, da forma seguinte:

A **mediana** é o valor que divide o conjunto de dados em dois conjuntos com o mesmo número de elementos.

O cálculo da mediana requer a ordenação prévia do conjunto de dados.

Depois de ordenado o conjunto de dados, podem verificar-se duas situações:

- se o número de dados do conjunto for ímpar, a mediana (Me ou \tilde{x}) é o valor central desse conjunto de dados;
- se o número de dados do conjunto for par, a mediana (Me ou \tilde{x}) é a média dos dois valores centrais do conjunto de dados.

(In PI 7, vol. 2, p. 94)

❖ **Manual Escolar – XIS 7 (Asa Editores)**

Paula Pinto Pereira e Pedro Pimenta.

Tal como o outro manual da mesma editora, a mediana é apresentada sem qualquer exercício prático como ponto de partida, apresentando, posteriormente, um exercício de aplicação, resolvido.

A mediana (M_e ou \bar{x}) de um conjunto de dados ordenados é:

- o dado que ocupa a posição central (quando o número de dados é ímpar);
- a média aritmética dos dois dados centrais (quando o número de dados é par).

Ou seja:

A mediana é:

- o elemento de ordem $\frac{n+1}{2}$ na sequência ordenada de dados, se n for ímpar.
- a média aritmética dos elementos de ordens $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2} + 1$ da sequência ordenada de dados, se n for par.

(In XIS 7, vol. 2, p. 128)

3.3. Os “Quartis” nos Manuais Escolares

Centremo-nos, agora, na análise dos manuais escolares do oitavo ano, para observar os contrastes existentes aquando da introdução dos quartis, por parte dos diversos autores. Os manuais escolares do oitavo ano de escolaridade escolhidos para análise correspondem aos seleccionados para o sétimo ano de escolaridade. Novamente, alerta-se para o facto de a ordem pela qual aparecem estes manuais escolares escolhidos ser aleatória, seguindo a ordem constante do ponto 3.2.

❖ Manual Escolar – Matemática 8 (Porto Editora)

Maria Augusta Ferreira Neves e António Pinto Silva.

Neste manual escolar, o capítulo *Medidas de Localização*, onde aparece o conceito de quartil, é o último do segundo volume. O conceito de quartil é introduzido após uma tarefa inicial orientada. É apresentado, em primeiro lugar, a determinação dos quartis de um conjunto com um número ímpar de dados numéricos, da seguinte forma:

Determinação dos quartis de um conjunto com um número ímpar de dados numéricos

Dada a sequência ordenada de um conjunto de n dados numéricos (sendo n ímpar), o primeiro quartil (Q_1) é a mediana do subconjunto de dados de ordem inferior a $\frac{n+1}{2}$ e o terceiro quartil (Q_3) é a mediana do subconjunto de dados de ordem superior a $\frac{n+1}{2}$.

O segundo quartil (Q_2) é igual à mediana, ou seja, é o dado que ocupa a posição central e é igual ao termo de ordem $\frac{n+1}{2}$ da sequência ordenada do conjunto inicial de dados.

(In Matemática 8, vol. 2, p.133)

Logo após a introdução da fórmula para determinar os quartis de um conjunto com um número ímpar de dados, é apresentada a fórmula para o cálculo quando o número de dados é par.

Determinação dos quartis de um conjunto com um número par de dados numéricos

Dada a sequência ordenada de um conjunto de n dados numéricos (sendo n par), o primeiro quartil (Q_1) é a mediana do subconjunto de dados de ordem inferior ou igual a $\frac{n}{2}$ e o terceiro quartil (Q_3) é a mediana do subconjunto de dados de ordem superior ou igual a $\frac{n}{2} + 1$.

O segundo quartil (Q_2) é igual à mediana, ou seja, é igual à média dos valores das ordens centrais, $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2} + 1$, da sequência ordenada do conjunto inicial de dados.

(In Matemática 8, vol. 2, p. 134)

❖ Manual Escolar – Matemática Dinâmica 8 (Porto Editora)

Luísa Faria, Pedro Rocha Almeida e Catrina Antão

O capítulo do manual escolar onde se faz referência aos quartis, volta a ser o último do volume 2. Neste caso, os autores referem que apesar de haver vários métodos para determinar

os quartis, vão apresentar a sua definição e as regras de cálculo de acordo com o que está programado na maioria das calculadoras.

Os quartis são determinados, inicialmente, sem recurso a qualquer fórmula, através de um exercício resolvido.

Posteriormente, os autores apresentam as fórmulas de cálculo, da seguinte maneira:

Dado um conjunto de n dados numéricos, constrói-se a sequência ordenada dos dados e identificam-se os quartis de acordo com a paridade de n .

n é ímpar	O primeiro quartil (representado por Q_1) corresponde à mediana do subconjunto de dados de ordem inferior a $\frac{n+1}{2}$ na sequência ordenada do conjunto inicial de dados.
	O segundo quartil (representado por Q_2) corresponde ao valor da mediana, isto é, ao valor do elemento de ordem $\frac{n+1}{2}$ da sequência ordenada de dados.
	O terceiro quartil (representado por Q_3) corresponde à mediana do subconjunto de dados de ordem superior a $\frac{n+1}{2}$ na sequência ordenada do conjunto inicial de dados.
n é par	O primeiro quartil (Q_1) corresponde à mediana do subconjunto de dados de ordem inferior ou igual a $\frac{n}{2}$ na sequência ordenada do conjunto inicial de dados.
	O segundo quartil (Q_2) corresponde ao valor da mediana, isto é, à média aritmética dos valores dos elementos de ordens $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2} + 1$ da sequência ordenada de dados.
	O terceiro quartil (Q_3) corresponde à mediana do subconjunto de dados de ordem superior ou igual a $\frac{n}{2} + 1$ na sequência ordenada do conjunto inicial de dados.

(In Matemática Dinâmica 8, vol. 2, p. 136)

Estes autores referem, também, duas propriedades relativas aos quartis, que a seguir se apresentam:

<p>Propriedades</p> <p>Num conjunto de dados numéricos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • a percentagem de dados não inferiores ao 1.º quartil é, pelo menos, 75% ; • a percentagem de dados não superiores ao 3.º quartil é, pelo menos, 75% .

(In Matemática Dinâmica, vol. 2, p. 136)

❖ **Manual Escolar – Novo Espaço 8 (Porto Editora)**
Belmiro Costa e Ermelinda Rodrigues.

Neste manual escolar constata-se que, tal como nos manuais anteriormente apresentados, o capítulo referente aos quartis, aparece como o último do volume 2.

O conceito de quartil é abordado através de exercícios resolvidos que concluem, primeiro para um número ímpar de dados, como a seguir se apresenta:

Num conjunto com n **dados** numéricos, sendo n um **número ímpar**, tem-se:

- O **1.º quartil**, Q_1 , é a mediana do subconjunto de dados de ordem inferior a $\frac{n+1}{2}$ da sequência ordenada do conjunto inicial de dados.
- O **3.º quartil**, Q_3 , é a mediana do subconjunto de dados de ordem superior a $\frac{n+1}{2}$ da sequência ordenada do conjunto inicial de dados.

(In Novo Espaço 8, vol. 2, p. 128)

Posteriormente, apresentam, de igual forma, para um número par de dados, as fórmulas de cálculo. A seguir apresenta-se um excerto desta parte do manual em questão:

Num conjunto com n **dados** numéricos, sendo n um **número par**, tem-se:

- O **1.º quartil**, Q_1 , é a mediana do subconjunto de dados de ordem inferior ou igual a $\frac{n}{2}$ da sequência ordenada do conjunto inicial de dados.
- O **3.º quartil**, Q_3 , é a mediana do subconjunto de dados de ordem superior ou igual a $\frac{n}{2} + 1$ da sequência ordenada do conjunto inicial de dados.

(In Novo Espaço 8, vol. 2, p. 129)

❖ **Manual Escolar – PI 8 (Asa Editores)**

Fátima Cerqueira Magro, Fernando Fidalgo e Pedro Louçano.

Contrariamente ao que se verifica nos manuais anteriormente referidos no que respeita à localização do capítulo que contém a abordagem aos quartis, aqui aparece como o primeiro do volume 2.

O conceito de quartil é apresentado, pelos autores deste projeto, após um exercício resolvido, da seguinte forma:

- a mediana dos dados que ficam à esquerda da *Me*, designa-se por **1º quartil, Q1**;
- a *Me* coincide com o **2º quartil, Q2**;
- a mediana dos dados que ficam à direita da *Me*, designa-se por **3º quartil, Q3**.

O que significa que:

- 25% dos dados têm um valor igual ou inferior ao 1º quartil (75% dos dados têm um valor igual ou superior a este).
- 75% dos dados têm um valor igual ou inferior ao 3º quartil (25% dos dados têm um valor igual ou superior a este).

(In PI 8, vol. 2, p.14)

❖ **Manual Escolar – XIS 8 (Asa Editores)**

Paula Pinto Pereira e Pedro Pimenta.

Tal como acontece na maioria nos manuais escolares aqui considerados, o capítulo referente à Organização e Tratamento de Dados, que contempla a introdução do conceito “quartil”, aparece como sendo o último capítulo do segundo volume.

Os autores iniciam a abordagem ao tema com a apresentação do conceito. Após a introdução da regra de cálculo, os autores apresentam exemplos resolvidos, que envolvem distribuições com um número par e ímpar de elementos.

As fórmulas de cálculo apresentadas assemelham-se, em tudo, ao que aparece na maioria dos outros manuais escolares, tal como a seguir se pode comprovar:

- Conjuntos de dados numéricos ordenados com um número ímpar de elementos:
 - Primeiro quartil: mediana do subconjunto de dados de ordem inferior a $\frac{n+1}{2}$.
 - Terceiro quartil: mediana do subconjunto de dados de ordem superior a $\frac{n+1}{2}$.
- Conjuntos de dados numéricos ordenados com um número par de elementos:
 - Primeiro quartil: mediana do subconjunto de dados de ordem inferior ou igual a $\frac{n}{2}$.
 - Terceiro quartil: mediana do subconjunto de dados de ordem superior ou igual a $\frac{n}{2} + 1$.

(In XIS 8, vol. 2, p.108)

3.4. A mediana e os quartis nas Metas Curriculares de Matemática

A 17 de junho de 2013 foi homologado o Novo Programa e Metas Curriculares de Matemática, definindo-os como o normativo legal para a disciplina de Matemática no ensino básico, sendo, em conformidade, de utilização obrigatória pelas escolas e professores (MEC, 2013, p.1).

As Metas Curriculares assentam em dois grandes eixos. O primeiro é estabelecer objetivos concisos, ensináveis e avaliáveis para cada ano de escolaridade e o segundo é dar liberdade ao professor na seleção das estratégias de ensino adequadas a esses objetivos. Na introdução desse documento pode ler-se que “encontram-se elencados, nas Metas Curriculares, objetivos gerais que são especificados por descritores, redigidos de forma concisa e que apontam para desempenhos precisos e avaliáveis. O documento foi construído com base nos conteúdos temáticos expressos no Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007” (MEC, 2013, p.1).

Também de acordo com a análise do documento, pode inferir-se que os descritores são objetivos e claros, ensináveis e avaliáveis, a sua ordem é compatível com uma possível sequência de ensino, são normativos do vocabulário matemático e não são sumários, isto é, há, por vezes, necessidades de trabalhar, em simultâneo, descritores que pertencem a domí-

nios distintos. As Metas Curriculares de Matemática estão, segundo os seus autores, escritas em linguagem técnica, com o objetivo de minimizar as ambiguidades de comunicação entre professores e Ministério da Educação, cabendo depois, ao professor converter o conteúdo dos descritores numa linguagem apropriada aos alunos.

Este documento tem agregado a si os Cadernos de Apoio às Metas Curriculares (Bivar et al, s/d), organizados por ciclo de ensino. Estes cadernos fornecem exemplos de exercícios que podem ilustrar descritores, alguns deles com níveis de desempenho, informações complementares e algumas explicações de algumas opções tomadas pelos autores das Metas Curriculares.

Assim, está definido que, deste tenra idade, os alunos começam a ter contacto com a Estatística que é introduzida paulatinamente através dos conceitos iniciais da Teoria de Conjuntos, que consta do domínio Organização e Tratamento de Dados. No sexto ano de escolaridade são abordadas definições essenciais como sejam a de *população*, *amostra*, *variável estatística* ou *unidades estatística*. A introdução de estatísticas ordinais (funções de dados) é feita no sétimo ano do ensino básico, com o conceito de sequência ordenada de dados, para que posteriormente se aborde o conceito de *mediana* e, já no oitavo ano de escolaridade, o conceito de *quartil*.

Nas Metas Curriculares (MEC, 2013) é entendido que o conceito de mediana é simples e intuitivo, não oferecendo, à partida, problemas na sua interpretação por parte dos alunos, pelo que é sugerido ser introduzido com exemplos, de modo a ilustrar o conceito e fazer com que o aluno o adquira com rigor e clareza, uma vez que servirá de base para que, no ano letivo seguinte, seja abordado o conceito de quartil. No documento que explicita o novo programa de Matemática e nas Metas Curriculares (MEC, 2013), a mediana de uma amostra de dimensão n é definida como:

- O valor central da amostra ou conjunto de dados, se n é ímpar;
- A média aritmética dos dois valores centrais da amostra ou conjunto de dados, se n é par.

levando à interpretação de que pelo menos metade dos dados têm valores não superiores à mediana, isto é, pelo menos cinquenta por cento das observações são inferiores ou iguais à mediana e no máximo cinquenta por cento das observações são superiores à mediana.

A seguir apresenta-se parte da informação que consta do documento das Metas Curriculares (MEC, 2013, p. 94) – OTD7:

Representar, tratar e analisar conjuntos de dados

1. *Construir, considerado um conjunto de dados numéricos, uma sequência crescente em sentido lato repetindo cada valor um número de vezes igual à respetiva frequência absoluta, designando-a por «sequência ordenada dos dados» ou simplesmente por «dados ordenados».*
2. *Identificar, dado um conjunto de n dados numéricos, a «mediana» como o valor central no caso de n ser ímpar (valor do elemento de ordem $\frac{n+1}{2}$ da sequência ordenada dos dados), ou como a média aritmética dos dois valores centrais (valores dos elementos de ordens $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2} + 1$ da sequência ordenada dos dados) no caso de n ser par e representar a mediana por « \tilde{x} » ou « Me ».*
3. *Determinar a mediana de um conjunto de dados numéricos.*
4. *Reconhecer, considerado um conjunto de dados numéricos, que pelo menos metade dos dados têm valores não superiores à mediana.*
5. *Designar por «medidas de localização» a média, a moda e a mediana de um conjunto de dados.*

No caderno de Apoio às Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2013, p. 46), aparecem vários exemplos de exercícios de aplicação, com resolução, da determinação da mediana de uma distribuição, no entanto, ressalta-nos um que por estar assinalado com “***”, depreende-se que corresponde a um nível de desempenho mais avançado. A seguir reproduz-se esse exercício (enunciado e resolução).

Exemplo 1**

Na turma da Marta fizeram um estudo acerca do número de idas ao cinema dos alunos durante o primeiro período e concluíram que a mediana era 4. Sabe-se que a turma tem 27 alunos, que a Marta foi ao cinema só uma vez e a colega Ana foi 8 vezes.

a. *Qual o número mínimo e máximo de alunos que foi ao cinema:*

a1. *Mais do que 4 vezes?*

a2. *Menos do que 4 vezes?*

b. *Sabendo que a média do conjunto de dados é 3, apresenta, justificando, um possível conjunto de dados correspondente a este estudo.*

Proposta de resolução:

a. Como a mediana é o valor central, que divide ao meio uma sucessão ordenada, então, no máximo metade das observações têm um valor superior à mediana e pelo menos metade têm valores inferiores ou iguais à mediana. A amostra ordenada é constituída por pelo menos 14 observações abaixo ou iguais a 4 e pelo menos 14 observações acima ou iguais a 4.

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots \quad x_{13} \quad \tilde{x} \quad x_{15} \quad \dots \quad x_{26} \quad x_{27}$$

a1. Pelo menos metade dos alunos (13, no máximo) foi ao cinema mais que 4 vezes. O número máximo de alunos que foi ao cinema mais de 4 vezes é 13 e o mínimo é 1 (porque a Ana foi 8 vezes).

a2. No mínimo 1 (a Marta foi ao cinema só uma vez) e, no máximo 13 (temos 13 valores menores ou iguais a 4 idas ao cinema).

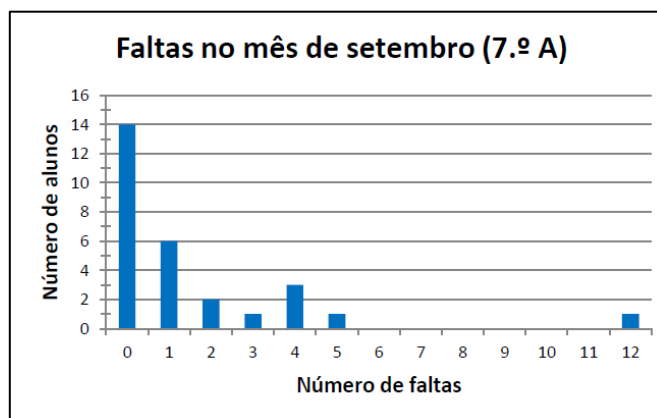
b. Como a turma tem 27 alunos, a mediana é igual ao termo de ordem $\frac{27+1}{2}$, isto é, o décimo quarto termo, que é 4. Há uma aluna que foi uma vez ao cinema e outra que foi 8 vezes, a média dos dados é 3 e a mediana é 4. Então, por tentativa-erro, um possível conjunto ordenado de dados será:

0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 4 4 (4) 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 8 8 8

No Caderno de Apoio às Metas Curriculares aparece, ainda, outro exemplo que carece de destaque, já que os dados são apresentados de forma distinta da anterior e o número de dados apresentados é par, o que implica a utilização de uma fórmula diferente da anterior para o cálculo da mediana.

Exemplo 2

Observa atentamente o gráfico de barras relativo às faltas dos alunos do 7.º ano, da turma A, durante o mês de setembro. Determina a moda, a mediana do conjunto de dados e o número médio de faltas.



Proposta de resolução:

Ordenação de dados:

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 2 2 3 4 4 4 5 12

Determinação da mediana: como n é par ($n = 28$), a mediana é a média aritmética da soma do termo de ordem $\frac{28}{2}$ e $\frac{28}{2} + 1$, isto é, dos termos de ordem 14 e 15. Assim, o valor da mediana é $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5$.

Determinação da moda: 0 (é o valor com maior frequência).

Determinação da média: $\frac{0 \times 14 + 1 \times 6 + 2 \times 2 + 3 + 4 \times 3 + 5 + 12}{28} = \frac{3}{2} = 1,5$.

O conceito de quartil é abordado no oitavo ano de escolaridade. A respeito da definição sugerida pelos autores das Metas Curriculares, pode ler-se, no Caderno de Apoio às Metas Curriculares do terceiro ciclo (Bivar et al, s/d), que “não existe uma definição simples nem para o primeiro nem para o terceiro quartil” (p. 87). Aquando da abordagem aos quartis, assiste-se a uma tentativa de justificação do uso de determinados processos e métodos para o cálculo dos quartis, pelos alunos do oitavo ano de escolaridade.

“o termo «quartis» é associado de uma maneira geral à divisão em quatro partes de um conjunto de dados sem que se apresente uma definição mais precisa, recorrendo-se muitas vezes a exemplos relativamente aos quais são indicados os procedimentos para os obter. Analisando a literatura especializada, verifica-se a existência de uma grande diversidade de processos que não conduzem aos mesmos resultados para o primeiro e para o terceiro quartil (o segundo quartil, invariavelmente, é definido como sendo igual à mediana). Em suma, não existe uma definição universalmente aceite nem para o primeiro nem para o terceiro quartil.”

Bivar et al (s/d, p.88)

Assim, e sendo necessário, perante vários cenários de cálculo dos quartis e com a obtenção de possíveis resultados diferentes os autores das Metas Curriculares estabelecem a definição que é justificada por ser o método “mais amplamente utilizado, sendo em particular o que está programado na maioria das calculadoras” (Bivar et al, p. 89).

A seguir apresenta-se a transcrição de parte do documento das Metas Curriculares (MEC, 2013, p. 104) com a sugestão do método para o ensino dos quartis para o oitavo ano de escolaridade:

1. *Identificar, dado um conjunto de n dados numéricos (sendo n ímpar), o «primeiro quartil» (respetivamente «terceiro quartil») como a mediana do subconjunto de dados de ordem inferior (respetivamente superior) a $\frac{n+1}{2}$ na sequência ordenada do conjunto inicial de dados.*
2. *Identificar, dado um conjunto de n dados numéricos (sendo n par), o «primeiro quartil» (respetivamente «terceiro quartil») como a mediana do subconjunto de dados de ordem inferior ou igual a $\frac{n}{2}$ (respetivamente superior ou igual a $\frac{n}{2} + 1$) na sequência ordenada do conjunto inicial de dados.*
3. *Identificar, considerando um conjunto de dados numéricos, o «segundo quartil» como a mediana desse conjunto e representar os primeiro, segundo e terceiro quartis respetivamente por Q_1 , Q_2 e Q_3 .*
4. *Reconhecer, considerado um conjunto de dados numéricos, que a percentagem de dados não inferiores (respetivamente não superiores) ao primeiro (respetivamente terceiro) quartil é pelo menos 75%.*
5. *Representar conjuntos de dados quantitativos em diagramas de extremos e quartis.*

A este propósito pode ler-se no Caderno de Apoio às Metas Curriculares que “relativamente a estes descritores é conveniente que se deem exemplos em que os quartis sejam iguais a algum dos dados apresentados bem como exemplos em que isso não acontece” (p. 90).

Parece-nos, por isso, importante realçar alguns dos exemplos formulados como base de trabalho para as aulas e que constam do Caderno de Apoio às Metas Curriculares. Os exemplos a seguir apresentados foram escolhidos tendo por base o sugerido anteriormente e o facto de serem conjuntos de dados com um número par e ímpar de elementos.

Exemplo 1:

Considera o seguinte conjunto de dados numéricos:

23, 13, 14, 25, 26, 14, 12, 20, 15, 13, 23, 26, 26, 12, 17.

Indica os valores do primeiro e do terceiro quartil.

Proposta de resolução:

Dados ordenados: 12, 12, 13, 13, 14, 14, 15, 17, 20, 23, 23, 25, 26, 26, 26.

Como são 15 dados e 15 é ímpar, a ordem de referência para o cálculo dos

quartis é a ordem $\frac{15+1}{2} = 8$.

12, 12, 13, 13, 14, 14, 15, 17, 20, 23, 23, 25, 26, 26, 26

Para calcular o primeiro quartil temos que determinar a mediana dos dados de ordem menor que 8:

12, 12, 13, 13, 14, 14, 15.

O primeiro quartil é 13.

Para calcular o terceiro quartil temos que determinar a mediana dos dados de ordem maior que 8:

20, 23, 23, 25, 26, 26, 26

O terceiro quartil é 25.

Exemplo 2:

Indica o primeiro, o segundo e o terceiro quartis do seguinte conjunto de dados:

33, 34, 45, 47, 34, 32, 40, 35, 33, 43, 47, 47, 32, 37.

Proposta de resolução:

Dados ordenados: 32, 32, 33, 33, 34, 34, 35, 37, 40, 43, 45, 47, 47, 47.

Uma vez que o número de dados é par ($n = 14$), existem duas ordens centrais, a ordem 7 e a ordem 8. A mediana é igual à média dos valores dessas ordens, ou seja, a mediana é 36. O segundo quartil é também 36 pois, por definição, é igual ao valor da mediana.

Para calcular o primeiro quartil, devemos ter em conta os dados até à ordem 7 $\left(\frac{14}{2}\right)$. Calculando a mediana dos primeiros 7 dados da sequência ordenada, temos que o primeiro quartil é 33.

32, 32, 33, 33, 34, 34, 35

Calculando a mediana dos últimos 7 dados da sequência ordenada, verifica-se que o terceiro quartil é 45.

37, 40, 43, 45, 47, 47, 47

Concluimos, assim, que $Q_1 = 33$; $Q_2 = 36$; $Q_3 = 45$.

3.5. Outras formas de cálculo da mediana e dos quartis

Apesar de ser mais ou menos consensual o método utilizado para o ensino da mediana e dos quartis nos manuais escolares dos sétimo e oitavo anos de escolaridade, as fórmulas tidas como base de trabalho não são únicas.

De acordo com Fernandes & Pinto (2013, p.35) “no ensino superior se ensinam formas de cálculo dos quartis distintas das apresentadas nos ensinos básico e secundário, o que confunde os alunos e gera neles uma certa desconfiança relativamente à Estatística”, sendo assim, referem que “o método introduzido no ensino superior é preferível”.

A seguir apresentam-se diferentes métodos, no que respeita ao cálculo da mediana e dos quartis.

Fernandes & Pinto (2013) defendem como aquele que deve ser usado no ensino da mediana e dos quartis, tanto no ensino básico como no ensino secundário – o método CDF – *Cumulative Distribution Function* – percentil de ordem p .

$$Q_p = \begin{cases} x_{(np)+1} & , np \notin \mathbb{N} \\ \frac{x_{np} + x_{np+1}}{2} & , np \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Consideremos um conjunto ordenado de dados com n elementos.

A determinação da mediana é consensual que será dada pelo elemento de ordem $\frac{n+1}{2}$ na amostra ordenada quando n é ímpar.

Já no que respeita ao cálculo dos primeiro e terceiro quartis, esta depende do método utilizado - inclusivo ou exclusivo, tal como se apresenta na tabela seguinte.

n par		n ímpar		
Q_1	Q_3	Q_1	Q_3	
$K = \frac{n+2}{4}$	$K = \frac{3n+2}{4}$	$K = \frac{n+3}{4}$	$K = \frac{3n+1}{4}$	Método Inclusivo
		$K = \frac{n+1}{4}$	$K = \frac{3n+3}{4}$	Método Exclusivo

A tabela anterior indica-nos a posição (K) em que se encontra, na distribuição, o valor do quartil. No entanto, esse valor nem sempre é um número natural, assim considera-se:

- se o valor de K é inteiro, então

$$Q_1 \text{ ou } Q_3 \text{ corresponde a } x_{(K)};$$

- se o valor de K não é inteiro,

$$Q_1 \text{ ou } Q_3 \text{ corresponde a } \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \text{ em que } i < K < i + 1.$$

Fernandes & Pinto (2013) defendem que o método de cálculo dos quartis deve ter como base o resto da divisão inteira de n por 4, isto é, resto 0, resto 1, resto 2 ou resto 3. Assim, aplicando o método CDF, obtém-se:

	Resto 0	Resto 1	Resto 2	Resto 3
Q_1	$K = \frac{n+2}{4}$	$K = \frac{n+3}{4}$	$K = \frac{n+2}{4}$	$K = \frac{n+1}{4}$
Q_3	$K = \frac{3n+2}{4}$	$K = \frac{3n+1}{4}$	$K = \frac{3n+2}{4}$	$K = \frac{3n+3}{4}$

Simplificando esta tabela, uma vez que as fórmulas para quando n é par (resto 0 e resto 2) são iguais, fica:

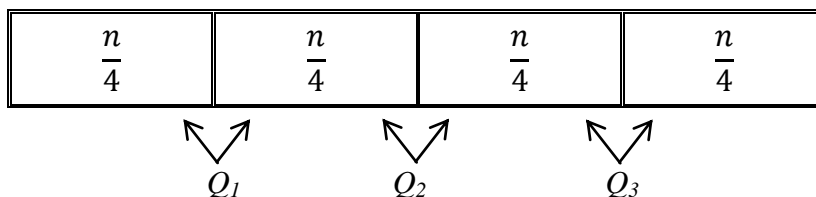
	n par	n ímpar	
		Resto 1	Resto 3
Q_1	$K = \frac{n+2}{4}$	$K = \frac{n+3}{4}$	$K = \frac{n+1}{4}$
Q_3	$K = \frac{3n+2}{4}$	$K = \frac{3n+1}{4}$	$K = \frac{3n+3}{4}$

Note-se que o cálculo da mediana continua a ser dado pela fórmula anteriormente apresentada, $Q_2 = x_{(\frac{n+1}{2})}$, quando n é ímpar.

Fernandes & Pinto (2013) referem uma outra forma de cálculos da mediana e dos quartis, também ela baseada nos restos da divisão de n (número total de elementos da distribuição) por 4.

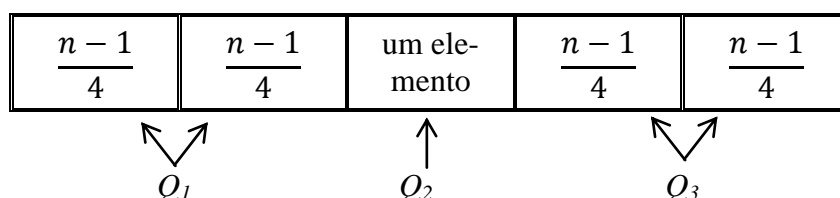
São apresentadas quatro situações distintas:

- Situação 1: resto zero.



Neste caso, Q_1 , Q_2 e Q_3 são determinados pela média aritmética dos dados que ocupam, respetivamente as posições: $\frac{n}{4}$ e $\frac{n}{4} + 1$; $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2} + 1$; $3\frac{n}{4}$ e $3\frac{n}{4} + 1$.

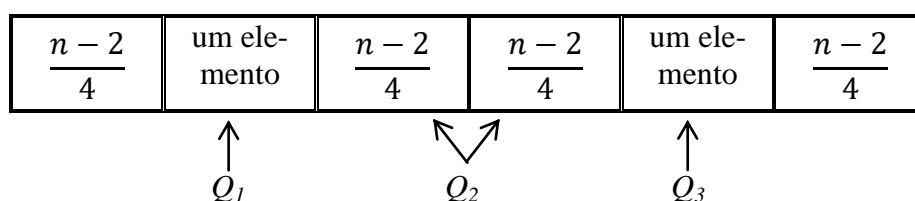
- Situação 2: resto 1.



O segundo quartil, isto é, a mediana, é o valor que ocupa a posição $2\frac{n-1}{2} + 1$.

Os Q_1 e Q_3 são determinados pela média aritmética dos dados que ocupam, respetivamente, as posições: $\frac{n-1}{4}$ e $\frac{n-1}{4} + 1$; $3\frac{n-1}{4} + 1$ e $3\frac{n-1}{4} + 1 + 1$.

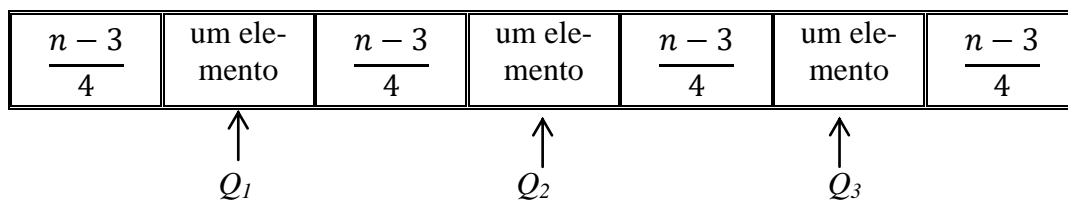
- Situação 3: resto 2.



O segundo quartil, ou seja, a mediana, é a média aritmética dos dados que ocupam as posições: $2\frac{n-2}{4} + 1$ e $2\frac{n-2}{4} + 1 + 1$.

Os Q_1 e Q_3 são os elementos que ocupam as posições: $\frac{n-2}{4} + 1$ e $3\frac{n-2}{4} + 1 + 1$.

- Situação 4: resto 3.



Os Q_1 , Q_2 e Q_3 são os elementos que ocupam, respetivamente as posições:

$$\frac{n-3}{4} + 1 \quad , \quad 2\frac{n-3}{4} + 1 + 1 \quad , \quad 2\frac{n-3}{4} + 1 + 1 + 1.$$

CAPÍTULO 4

4.1. Introdução

Este capítulo tem com principal objetivo analisar os conflitos que os alunos do 8.º ano de escolaridade apresentam no cálculo e interpretação da mediana, dos quartis. Para tal foi elaborada uma prova de avaliação envolvendo aqueles tópicos e aplicado a um conjunto de 81 alunos que frequentavam o 8.º ano de escolaridade, no ano letivo 2015-2016. Os dados foram recolhidos por amostra convencional com alunos pertencentes a três turmas de uma escola particular com contrato de associação, situada num centro urbano do distrito de Viseu, sendo que o corpo discente se compõe de alunos provenientes dos mais heterogéneos meios económicos e socioculturais da cidade e áreas adjacentes.

A prova de avaliação (anexo 1) era composta por doze alíneas, agrupadas em quatro questões. Houve a preocupação de escolher exercícios similares aos existentes nos manuais escolares do 8.º ano de escolaridade, ou, eventualmente, do 7.º ano de escolaridade. Finalmente, o tratamento e a análise de dados centram-se nas respostas apresentadas pelos alunos, classificadas como corretas, incorretas ou parcialmente corretas, tendo sido determinadas percentagens relativas a cada tipo de resposta. O erro, sempre que cometido, é identificado. Esta informação é apresentada para cada alínea da prova realizada.

Carvalho (2004), Boaventura (2003) e Barros (2004) identificaram vários erros que os alunos cometem, no que respeita a determinados conceitos e abordagens ao nível da Estatística, nomeadamente nas medidas de tendência central. Esses trabalhos basearam-se em estudos realizados a alunos dos 7.º e 12.º anos de escolaridade e do ensino superior (futuros professores do 1.º e 2.º ciclos do ensino básico) que permitiram identificar questões onde os alunos apresentam maiores dificuldades, as quais se encontram listadas na tabela seguinte.

Dificuldades	7.º ano	12.º ano	Ensino Superior
Determinar um conjunto de dados, conhecidas a média, a mediana e a moda desse conjunto.		✓	
Possibilidade /impossibilidade de aplicação da mediana a certo tipo de variáveis.		✓	
Propriedades da média e da mediana.		✓	
Atribuir significado às medidas de tendência central.	✓	✓	✓
Selecionar a variável estatística que melhor representa uma distribuição.	✓		✓
Localizar a média, mediana e moda em distribuições assimétricas e simétricas.		✓	

Tabela 2 – Dificuldades em Estatística de alunos do 7.º ano, 12.º ano e ensino superior. (adaptado de Barros (2004), Boaventura (2003) e Carvalho (2004)).

✓ Significa que foram observadas dificuldades e erros nos conteúdos referidos.

Aqueles autores salientam o facto de haver erros que são comuns a alunos de diferentes níveis de escolaridade, referindo que “uma maior experiência de ensino (...), em geral, não contribui significativamente para erradicar muitos desses erros e dificuldades” Fernandes (2009, p.6).

4.2. Apresentação dos resultados

Este estudo, como foi dirigido a alunos do terceiro ciclo do ensino básico, teve como base as situações problemáticas envolvendo variáveis discretas e centra-se, essencialmente, no cálculo e na interpretação da mediana e dos quartis.

Questão 1

Considera o seguinte conjunto de dados.

10 12 14 12 15 16 8 12 13 15 11

Indica o valor da mediana, da média e da moda do conjunto de dados apresentado.

Com a inclusão deste item pretendia-se analisar três situações, identificando os erros a elas adjacentes:

- Distinguir o conceito de mediana dos de média e moda.
- Saber que, para calcular a mediana, é necessário colocar os dados por ordem crescente.
- Calcular a mediana quando n é ímpar.

Após análise das respostas dos alunos conclui-se que 85% dos alunos (69 alunos) calculou corretamente o valor da mediana, 5% (4 alunos) não responderam e os restantes 10% (8 alunos) apresentaram algum tipo de erro, de acordo com o que está apresentado no quadro seguinte.

Tipo de erro	N.º de alunos
Não ordenar os dados.	4
Confusão entre média e mediana.	2
Não identificar o valor central como mediana, após ordenar os dados.	2

Quanto ao cálculo da média, 81% dos alunos (66 alunos) calcularam corretamente, tendo havido 21% (12 alunos) que apresentaram algum tipo de erro e três alunos não responderam. A análise dos erros apresentados pelos alunos no cálculo da média está apresentada na tabela seguinte.

Tipo de erro	N.º de alunos
Não ter em conta a frequência absoluta de cada um dos dados.	5
Erro de cálculo.	6
Confunde média com mediana.	1

No que respeita ao cálculo da moda, 94% dos alunos (76 alunos) responderam corretamente, 5 alunos não responderam, não possibilitando, assim, a identificação de qualquer erro.

Constata-se que a maioria dos alunos sabe que deve ordenar os dados para determinar a mediana. No entanto, a determinação da mediana, mesmo após a ordenação dos dados, não é evidente para quatro alunos, gerando o erro.

Outro erro cuja existência se pretendia verificar dizia respeito à distinção entre o conceito de mediana e de média, que apenas foi identificado em três alunos.

Questão 2

Considera o seguinte conjunto de dados:

8 10 11 12 12 13 13 15 15 16

a) Qual o valor da mediana, do 1.º e do 3.º quartis da distribuição dos dados?

Com a inclusão deste item pretendia-se analisar duas situações, identificando os erros a elas adjacentes:

→ Calcular a mediana, quando n é par, num conjunto de dados ordenados.

→ Calcular os quartis, quando n é par, num conjunto de dados ordenados.

Após análise das respostas dos alunos conclui-se que 54% dos alunos (44 alunos) calcularam corretamente o valor da mediana, do 1.º e 3.º quartis, 2% (2 alunos) não responderam e 30% (24 alunos) apresentaram uma resposta errada. A distribuição dos tipos de erros cometidos pelos alunos está apresentada no quadro seguinte.

Tipo de erro	N.º de alunos
Calcula erradamente o Q_1 .	2
Confunde a mediana com a média.	1
Calcula a mediana como se n fosse ímpar.	14
Calcula a média dos quatro primeiros e últimos valores da distribuição.	1
Responde o valor 10 sem apresentar qualquer cálculo.	3

Há ainda 14% dos alunos (11 alunos) que deram uma resposta incompleta dos quais 9 alunos calcularam apenas os primeiro e terceiro quartis e 2 calcularam apenas a mediana e o terceiro quartil. Essa distribuição encontra-se apresentada no quadro seguinte.

Resposta em falta	N.º de alunos
Cálculo da mediana	9
Cálculo do Q_1 .	2

Neste item o erro mais comum foi o de calcular a mediana de uma distribuição com um número par de dados como se de uma distribuição com um número ímpar de dados se tratasse. Podemos identificar como dificuldade dos alunos a determinação da mediana de um conjunto com um número ímpar de elementos. Também foi possível verificar que 9 alunos que não determinaram a mediana.

Questão 2

Considera o seguinte conjunto de dados:

8 10 11 12 12 13 13 15 15 16

b) Qual o valor da mediana se o valor mínimo for alterado de 8 para 3?
E do 1.º e 3.º quartis?

Com a inclusão deste item pretendia-se analisar três situações, identificando os erros a elas adjacentes:

- Calcular a mediana, quando n é par, num conjunto de dados ordenados.
- Calcular os quartis, quando n é par, num conjunto de dados ordenados.
- Verificar a invariabilidade da mediana e dos quartis quando se altera o limite inferior da distribuição.

Após análise das respostas dos alunos conclui-se que 83% dos alunos (67 alunos) calcularam corretamente o valor da mediana, do 1.º e do 3.º quartis. Há a acrescentar a estes últimos 7% dos alunos (6 alunos) que apresentam uma resposta correta, de acordo com o erro cometido na alínea anterior. Verifica-se ainda que 5% dos alunos (4 alunos) dão uma resposta incompleta calculando apenas a mediana e 4% (3 alunos) apresentaram uma resposta errada. A distribuição dos tipos de erros cometidos pelos alunos está apresentada no quadro seguinte.

Tipo de erro	N.º de alunos
Responde “10”.	1
Responde “11”.	1
Responde “12”.	1

Depois de analisadas as respostas dadas pelos alunos a este item, pode concluir-se que, na generalidade, estes conseguiram responder corretamente ao solicitado. No entanto,

pretendia-se que a resposta fosse imediata, demonstrando, assim, que detetavam a invariabilidade da mediana e, neste caso, também dos primeiro e terceiro quartis, aquando da alteração do valor mínimo do conjunto de dados. Constatou-se que os alunos voltaram a efetuar os cálculos para chegar à resposta pretendida.

Questão 2

Considera o seguinte conjunto de dados:

8 10 11 12 12 13 13 15 15 16

c) Qual o valor da mediana se for acrescentado ao conjunto de dados o valor 17?

Com a inclusão deste item pretendia-se analisar três situações, identificando os erros a elas adjacentes:

- Calcular a mediana, quando n é ímpar, num conjunto de dados ordenados.
- Verificar a possível variabilidade da mediana quando se acrescenta um valor à distribuição que altera o limite superior da distribuição.

Após análise das respostas dos alunos conclui-se que 85% dos alunos (69 alunos) calcularam corretamente o valor da mediana, 14% dos alunos (11 alunos) apresentam uma resposta incorreta e 1 aluno não respondeu. A distribuição dos tipos de erros cometidos pelos alunos está apresentada no quadro seguinte.

Tipo de erro	N.º de alunos
Responde “10”.	1
Responde “12”	5
Calcula a mediana como se n fosse par.	1
Calcula a média.	4

Questão 2

Considera o seguinte conjunto de dados:

8 10 11 12 12 13 13 15 15 16

d) Qual o valor da mediana se for acrescentado ao conjunto de dados o valor 1?

Com a inclusão deste item pretendia-se analisar três situações, identificando os erros a elas adjacentes:

- Calcular a mediana, quando n é ímpar, num conjunto de dados ordenados.
- Verificar a variabilidade da mediana quando se acrescenta um valor à distribuição altera o limite inferior da distribuição.

Após análise das respostas dos alunos conclui-se que 80% dos alunos (65 alunos) calculou corretamente o valor da mediana, 16% dos alunos (14 alunos) dá uma resposta incorreta e há 2 alunos não dão qualquer resposta. A distribuição dos tipos de erros cometidos pelos alunos está apresentada no quadro seguinte.

Tipo de erro	N.º de alunos
Responde “10”.	3
Responde “12”.	1
Responde “13”.	4
Calcula a média.	4
Calcula como se n fosse par.	2

Analisando as respostas dos alunos às alíneas c) e d) da pergunta 2, volta assistir-se ao cálculo, na íntegra para determinar os valores pedidos, pelo que se pode constatar que os alunos não evidenciam conhecimento quanto à eventual variabilidade da mediana e/ou dos quartis quando são acrescentados valores ao conjunto de dados inicialmente apresentado.

Questão 2

Considera o seguinte conjunto de dados:

8 10 11 12 12 13 13 15 15 16

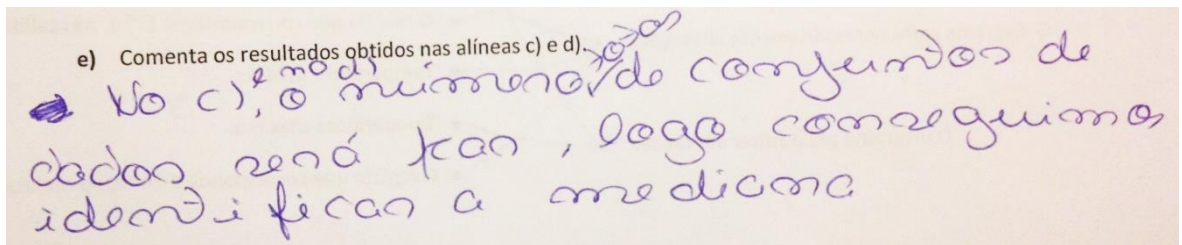
e) Comenta os resultados obtidos nas alíneas c) e d).

Com a inserção desta questão pretendia-se verificar se os alunos têm noção da alteração do valor da mediana ao ser acrescentado um valor à distribuição já existente.

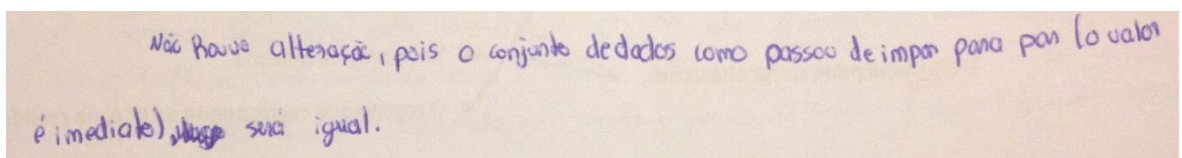
Após análise das respostas verificou-se que 47 alunos (58% dos alunos) conseguiram concluir que o valor da mediana se altera, sendo que destes, 26 alunos responderam que o valor da mediana *aumenta* quando se acrescenta um valor superior a esta e *diminui* caso o valor acrescentado seja inferior.

No que respeita às respostas incorretas apresentam-se, a seguir, alguns exemplos.

Exemplo 1:



Exemplo 2:



Exemplo 3:

Os valores são iguais

Exemplo 4:

Quanto maior o valor acrescentado maior será o valor da mediana

Questão 3

Considera o seguinte conjunto ordenado de dados, onde b representa um número inteiro:

1 2 2 7 b 8 9 9

Qual dos seguintes valores pode ser a mediana do conjunto de dados?

(A) 2 (B) 9 (C) 7,5 (D) 7,25

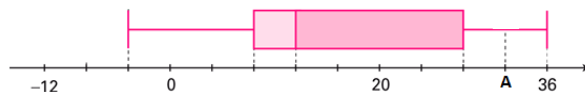
Com a inclusão deste item pretendia-se verificar se os alunos tinham a noção de que o valor da mediana nem sempre pertence ao conjunto de dados considerado.

Após análise das respostas dos alunos conclui-se que 89% dos alunos (72 alunos) responderam corretamente à questão (7,5). No entanto, houve dois alunos cuja resposta dada foi “2”, nove alunos que responderam “9” e um aluno respondeu “7,25”.

Realce-se o facto de, numa pergunta de escolha múltipla com quatro opções, ter havido um aluno que acrescentou um valor para dar como resposta (10) e um aluno que não deu qualquer resposta.

Questão 4

O diagrama de extremos e quartis seguinte representa as temperaturas, em graus Celsius, observadas numa cidade, durante um ano.



a) Por observação do diagrama de extremos e quartis e efectuando cálculos sempre que necessário, indica:

i) Q_1

Com a inclusão deste item pretendia-se verificar se os alunos sabiam identificar o primeiro quartil num diagrama de extremos e quartis.

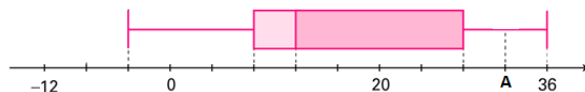
Após análise das respostas dos alunos conclui-se que 83% dos alunos (67 alunos) responderam corretamente à questão (8). No entanto, houve onze alunos cuja resposta dada estava incorreta e quatro alunos não responderam.

A distribuição dos tipos de erros cometidos pelos alunos está apresentada no quadro seguinte.

Tipo de erro	N.º de alunos
Responde “3”.	1
Responde “4”.	3
Responde “10”.	3
Responde “12”.	2
Responde “15,6”.	1
Responde “20”.	1

Questão 4

O diagrama de extremos e quartis seguinte representa as temperaturas, em graus Celsius, observadas numa cidade, durante um ano.



a) Por observação do diagrama de extremos e quartis e efectuando cálculos sempre que necessário, indica:

ii) Mediana.

Com a inclusão deste item pretendia-se verificar se os alunos sabiam identificar a mediana num diagrama de extremos e quartis.

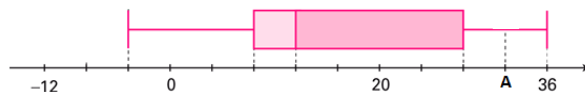
Após análise das respostas dos alunos conclui-se que 77% dos alunos (62 alunos) responderam corretamente à questão (12). Houve quinze alunos cuja resposta dada estava incorreta e quatro alunos não responderam.

A distribuição dos tipos de erros cometidos pelos alunos está apresentada no quadro seguinte.

Tipo de erro	N.º de alunos
Responde “0 a 20”.	1
Responde “10”.	2
Responde “16”.	1
Responde “17”.	1
Responde “18”.	4
Responde “20”.	3
Responde “22”.	1
Calcula uma média.	2

Questão 4

O diagrama de extremos e quartis seguinte representa as temperaturas, em graus Celsius, observadas numa cidade, durante um ano.



a) Por observação do diagrama de extremos e quartis e efectuando cálculos sempre que necessário, indica:

iii) Q_3

Com a inclusão deste item pretendia-se verificar se os alunos sabiam identificar o terceiro quartil num diagrama de extremos e quartis.

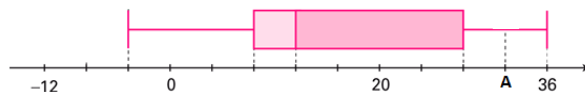
Após análise das respostas dos alunos conclui-se que 81% dos alunos (66 alunos) responderam corretamente à questão (28). No entanto, houve onze alunos cuja resposta dada estava incorreta e quatro alunos não responderam.

A distribuição dos tipos de erros cometidos pelos alunos está apresentada no quadro seguinte.

Tipo de erro	N.º de alunos
Responde “3”.	1
Responde “10”.	2
Responde “12 a 28”.	1
Responde “16”.	1
Responde “18”.	1
Responde “20”.	1
Responde “22,6”.	1
Responde “24”.	1
Responde “36”.	2

Questão 4

O diagrama de extremos e quartis seguinte representa as temperaturas, em graus Celsius, observadas numa cidade, durante um ano.



- a) Por observação do diagrama de extremos e quartis e efectuando cálculos sempre que necessário, indica:
- iv) A amplitude interquartil.

Com a inclusão deste item pretendia-se verificar se os alunos sabiam calcular a amplitude interquartil.

Após análise das respostas dos alunos conclui-se que 81% dos alunos (66 alunos) responderam corretamente à questão (realce-se que nesta questão foram consideradas corretas as respostas em que os alunos utilizaram os valores apresentados nas alíneas anteriores e que não estavam corretos – corresponde a 6 alunos). No entanto, houve onze alunos cuja resposta dada estava incorreta e quatro alunos não responderam.

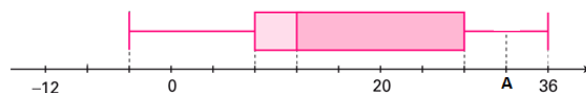
A distribuição dos tipos de erros cometidos pelos alunos está apresentada no quadro seguinte.

Tipo de erro	N.º de alunos
Responde “5”.	1
Responde “7”.	1
Responde “10”.	1
Responde “12”.	1
Responde “28”.	1
Responde “40”.	4
Responde “48”.	1
Responde “57”.	1

Das respostas dadas pelos alunos aos quatro itens da alínea a) da questão 4, pode aferir-se que há alunos que apresentam dificuldades na interpretação de um diagrama de extremos e quartis, não tendo identificado corretamente a mediana e o primeiro e terceiro quartis. Saliente-se o facto dos quinze alunos que identificam incorretamente a mediana, dez apresentaram um valor igual ou superior a 16. Há ainda a realçar situações de alunos que confundem o valor do terceiro quartil com o máximo da distribuição.

Questão 4

O diagrama de extremos e quartis seguinte representa as temperaturas, em graus Celsius, observadas numa cidade, durante um ano.



b) Houve uma incorreção no registo de uma temperatura, tendo essa que ser alterada. Faz a correspondência correta.

Com a inclusão deste item pretendia-se verificar se os alunos conseguiam detetar a invariância ou não dos quartis e/ou da mediana, havendo determinadas alterações aos dados iniciais.

A primeira correspondência correta é:

“O registo que corresponde a 30º é, na realidade, 36º.”



O diagrama mantém-se inalterado.

Após análise das respostas dos alunos conclui-se que apenas 42% dos alunos (34 alunos) responderam corretamente à questão. Houve três alunos que não responderam.

A distribuição dos tipos de erros cometidos pelos alunos está apresentada no quadro seguinte.

Tipo de erro	N.º de alunos
Responde “O diagrama sofre necessariamente alterações”.	32
Responde “O diagrama pode sofrer alterações”.	12

A segunda correspondência correta é:

“O registo que corresponde a 0º é, na realidade, 4º.”



O diagrama mantém-se inalterado.

Após análise das respostas dos alunos conclui-se que 58% dos alunos (47 alunos) responderam corretamente à questão. Houve cinco alunos que não responderam.

A distribuição dos tipos de erros cometidos pelos alunos está apresentada no quadro seguinte.

Tipo de erro	N.º de alunos
Responde “O diagrama sofre necessariamente alterações”.	15
Responde “O diagrama pode sofrer alterações”.	14

A terceira correspondência correta é:

“O registo que corresponde a 12º é, na realidade, 8º.”



O diagrama pode sofrer alterações.

Após análise das respostas dos alunos conclui-se que apenas 35% dos alunos (28 alunos) responderam corretamente à questão. Houve dois alunos que não responderam.

A distribuição dos tipos de erros cometidos pelos alunos está apresentada no quadro seguinte.

Tipo de erro	N.º de alunos
Responde “O diagrama sofre necessariamente alterações”.	36
Responde “O diagrama mantém-se alterado”.	15

A quarta correspondência correta é:

“Temperatura mínima.”



O diagrama sofre necessariamente alterações.

Após análise das respostas dos alunos conclui-se que apenas 41% dos alunos (33 alunos) responderam corretamente à questão. Seis alunos não responderam à questão.

A distribuição dos tipos de erros cometidos pelos alunos está apresentada no quadro seguinte.

Tipo de erro	N.º de alunos
Responde “O diagrama mantém-se inalterado”.	13
Responde “O diagrama pode sofrer alterações”.	29

A quinta correspondência correta é:

“Temperatura máxima.”



O diagrama sofre necessariamente alterações.

Após análise das respostas dos alunos conclui-se que 39% dos alunos (32 alunos) responderam corretamente à questão. Houve quatro alunos que não responderam.

A distribuição dos tipos de erros cometidos pelos alunos está apresentada no quadro seguinte.

Tipo de erro	N.º de alunos
Responde “O diagrama mantém-se inalterado”.	15
Responde “O diagrama pode sofrer alterações”.	30

A sexta correspondência correta é:

“O registo que corresponde a 20º é, na realidade, 24º.”



O diagrama mantém-se inalterado.

Após análise das respostas dos alunos conclui-se que apenas 49% dos alunos (40 alunos) responderam corretamente à questão. Houve quatro alunos que não responderam.

A distribuição dos tipos de erros cometidos pelos alunos está apresentada no quadro seguinte.

Tipo de erro	N.º de alunos
Responde “O diagrama sofre necessariamente alterações”.	18
Responde “O diagrama pode sofrer alterações”.	19

A alínea b) da questão 4 foi aquela que apresentou o maior número de respostas incorretas, evidenciando que os alunos não têm assimiladas as situações em que existe variabilidade ou não dos valores da mediana e/ou dos quartis e valores mínimo e máximo da distribuição.

4.3. Discussão dos Resultados

Da análise das respostas recolhidas e tendo em conta a contabilização do tipo de erro detetado, podemos conjecturar que o conhecimento dos alunos a respeito da mediana e dos quartis se limita à interpretação isolada de cada uma das situações e representações, não parecendo haver evidência da relação no desempenho do aluno entre a parte envolvendo cálculos e a parte envolvendo interpretação gráfica. Também é notório que os alunos cometem erros de cálculo, no entanto, é mais pertinente o facto de os alunos nem sempre ordenarem os dados. Quando se apresenta uma distribuição já com os dados ordenados, o tipo de erro mais comum é o de os alunos não diferenciarem a forma de cálculo da mediana ou dos quartis numa distribuição com um número par de elementos de uma que tem um número ímpar de dados.

É, também, visível que os alunos confundem o conceito de mediana com o conceito de média.

Na análise da variabilidade ou não da mediana (questão 4. b)), destaca-se a percentagem mais baixa de respostas corretas dadas pelos alunos, verificando-se a falta de percepção e uma interpretação incorreta do conceito de mediana.

Há, ainda, a realçar o facto de a única pergunta de resposta aberta (questão 2, alínea e) ter um elevado número de alunos com respostas incorretas. Este facto sugere que os alunos não estão preparados para relacionar e tirar conclusões das análises estatísticas que efetuam, revelando pouco desenvolvimento do pensamento e raciocínio estatístico.

Para analisar a significância dos resultados descritivos observados foram realizados testes de associação do qui-quadrado recorrendo ao programa estatístico SPSS (Statistical Package for Social Sciences). O objetivo foi verificar a prova de avaliação realizada pelos oitenta e um alunos.

Assim, pretendeu verificar-se:

1. Se existe associação significativa entre o desempenho dos alunos no cálculo dos primeiro, segundo (mediana) e terceiro quartis, com dados ordenados e com dados não ordenados, e ainda associação entre este cálculo analítico (via fórmula) e a sua identificação no diagrama de extremos e quartis;
2. Se existe associação significativa entre o desempenho dos alunos quando calculam o valor da mediana, após a alteração de valores analiticamente usando a fórmula e graficamente ou interpretando o diagrama de extremos e quartis;
3. Se existe associação significativa entre o desempenho dos alunos no cálculo analítico da mediana (i.e. usando a fórmula) quando há alteração de dados e quando não há.

Para se poder analisar melhor cada uma das situações descritas anteriormente, apresentam-se, a seguir, tabelas resumo dos dados apurados. Em cada uma das tabelas apresentam-se as questões cujos resultados foram confrontados e os respetivos valores de associação e valor de prova. Usou-se o coeficiente de contingência V de Cramer que toma valores entre 0 e 1. O valor 0 corresponde a ausência de associação entre as variáveis, valores próximos de zero correspondem a fraca associação e valores mais próximos de 1 correspondem a associação forte. A hipótese nula do teste de hipótese realizado corresponde a não existência de associação, ou seja, o coeficiente V de Cramer ser nulo.

A seguir, temos a primeira tabela que diz respeito à primeira situação que se pretende analisar, isto é, se existe associação entre o desempenho dos alunos no cálculo dos primeiro, segundo (mediana) e terceiro quartis com dados ordenados e não ordenados (i.e. associação entre as questões 1, 2.a) e 3), e ainda com a identificação de tais medidas no diagrama de extremos e quartis (i.e. associação entre as questões 1, 2.a) e 3 e as questões 4. a) i), ii), iii)).

Item	Item	V de Cramer	Valor de p
Questão 1	Questão 2 a)	0,219	0,100
	Questão 3	0,152	0,442
	Questão 4 a) <i>i</i>	0,217	0,105
	Questão 4 a) <i>ii</i>	0,215	0,112
	Questão 4 a) <i>iii</i>	0,227	0,079
Questão 2 a)	Questão 3	0,231	0,070
	Questão 4 a) <i>i</i>	0,114	0,715
	Questão 4 a) <i>ii</i>	0,252	0,036*
	Questão 4 a) <i>iii</i>	0,130	0,603
Questão 3	Questão 4 a) <i>i</i>	0,244	0,046*
	Questão 4 a) <i>ii</i>	0,255	0,032*
	Questão 4 a) <i>iii</i>	0,250	0,039*

*Associação estatisticamente significativa (valor $p < 0,05$).

Tendo em conta os valores p apresentados na tabela acima pode concluir-se que o uso correto da fórmula no cálculo dos primeiro, segundo (mediana) e terceiro quartis está significativamente associado, mas de forma relativamente fraca (coeficiente de associação V de Cramer aproximadamente igual a 0,25), à correta identificação gráfica destas três medidas no diagrama de extremos e quartis.

Na tabela seguinte, pretende analisar-se a existência de associação entre o desempenho dos alunos na determinação analítica (via fórmula itens A na tabela) e gráfica (via diagrama de extremos e quartis itens B) da mediana após uma alteração dos dados originais (seja ela por alteração do valor mínimo) por acrescentar um valor máximo ou ainda um valor mínimo.

Item A	Item B	V de Cramer	Valor de p
Questão 2 b)	Questão 4 b) <i>i</i>	0,210	0,129
	Questão 4 b) <i>ii</i>	0,073	0,929
	Questão 4 b) <i>iii</i>	0,086	0,876
	Questão 4 b) <i>iv</i>	0,119	0,684
	Questão 4 b) <i>v</i>	0,125	0,638
	Questão 4 b) <i>vi</i>	0,199	0,169
Questão 2 c)	Questão 4 b) <i>i</i>	0,110	0,745
	Questão 4 b) <i>ii</i>	0,205	0,146
	Questão 4 b) <i>iii</i>	0,163	0,366
	Questão 4 b) <i>iv</i>	0,151	0,447
	Questão 4 b) <i>v</i>	0,195	0,185
	Questão 4 b) <i>vi</i>	0,096	0,827
Questão 2 d)	Questão 4 b) <i>i</i>	0,149	0,465
	Questão 4 b) <i>ii</i>	0,231	0,071
	Questão 4 b) <i>iii</i>	0,123	0,653
	Questão 4 b) <i>iv</i>	0,201	0,162
	Questão 4 b) <i>v</i>	0,167	0,338
	Questão 4 b) <i>vi</i>	0,212	0,121

Da análise dos valores p observados nesta tabela pode inferir-se que não existe associação significativa, pelo que, a forma correta, incorreta ou o não responder, às questões de cálculo dos primeiro, segundo (mediana) e terceiro quartis usando fórmulas quando há altera-

ção de dados, não implica, necessariamente que o aluno responda correta ou incorretamente ou que não responda, respetivamente, o valor da mediana após alteração de dados, recorrendo ao diagrama de extremos e quartis.

Assim, considerando uma perspetiva analítica (utilização de fórmulas) e uma perspetiva gráfica (utilização do diagrama de extremos e quartis), não há evidência estatisticamente significativa de associação entre estas duas perspetivas. O facto de um aluno saber interpretar bem a alteração sofrida na mediana usando a fórmula, não determina que saberá interpretar bem as alterações sofridas na mediana usando o diagrama de extremos e quartis. A eventual dificuldade em trabalhar com fórmulas não determina necessariamente maior ou menor dificuldade em interpretar o que ocorre no diagrama de extremos e quartis quando há alteração nos dados originais.

Finalmente, na última tabela pretende analisar-se o desempenho dos alunos e perceber se existe associação significativa entre as suas respostas quando calculam a mediana, através do uso da fórmula, dos dados originais (item B na tabela) e após a sua alteração (item A na tabela).

Item A	Item B	V de Cramer	Valor de p
Questão 2 b)	Questão 1	0,428	0,000*
	Questão 2 a)	0,414	0,000*
	Questão 3	0,154	0,425
Questão 2 c)	Questão 1	0,358	0,000*
	Questão 2 a)	0,181	0,258
	Questão 3	0,201	0,161
Questão 2 d)	Questão 1	0,391	0,000*
	Questão 2 a)	0,266	0,022*
	Questão 3	0,193	0,196

* Associação estatisticamente significativa (valor $p < 0,05$).

Da análise da tabela observa-se que existem associações significativas (valor $p < 0,05$) e conclui-se que o conhecimento da utilização da fórmula da mediana afeta a interpretação de um novo cálculo quando há alteração de valores do conjunto de dados iniciais. Assim, existe evidência de associação significativa entre o saber calcular a mediana (a partir de um conjunto de dados ordenados) e efetuar um raciocínio para obter o valor da mediana quando existe uma alteração do valor mínimo do conjunto de dados originais, sendo essa associação mais forte quando a alteração corresponde à mudança do valor mínimo (coeficiente V de Cramer = 0,414) do que quando se acrescenta um valor que será o novo mínimo da coleção de dados (coeficiente V de Cramer = 0,266).

4.4. Considerações Finais

O tema escolhido para este trabalho não foi ao acaso. É um assunto incontornável e de fulcral importância, uma vez que permitirá procurar métodos para aperfeiçoar o desempenho dos alunos, possibilitando-lhes tornarem-se pessoas críticas, sabendo interpretar a realidade da sociedade em que vivem.

Como a Estatística é uma ciência em constante mutação, é fundamental criar nos alunos uma atitude favorável à aprendizagem e consequente forma de raciocínio. Deve, então e dentro do possível, analisar-se o erro cometido e fazer com que o aluno o supere.

Para Gal (2002), as informações estatísticas podem ser representadas, basicamente, de três formas: linguagem corrente, símbolos ou números e tabelas ou gráficos. Por vezes utilizam-se as três formas combinadas entre si. É, portanto, importante que o aluno saiba deambular entre todas estas formas de representação de dados e interpretar os resultados, tirando conclusões válidas.

Em contraste com a grande utilização e uso da Estatística no quotidiano de qualquer cidadão, observam-se dificuldades em determinados conceitos estatísticos.

A realização deste estudo permitiu perceber alguns dos erros mais comuns, dos alunos do oitavo ano de escolaridade, nos cálculos e interpretações da mediana e dos quartis.

Globalmente os alunos que participaram neste estudo revelaram um desempenho bastante satisfatório no cálculo e na interpretação da mediana e dos quartis.

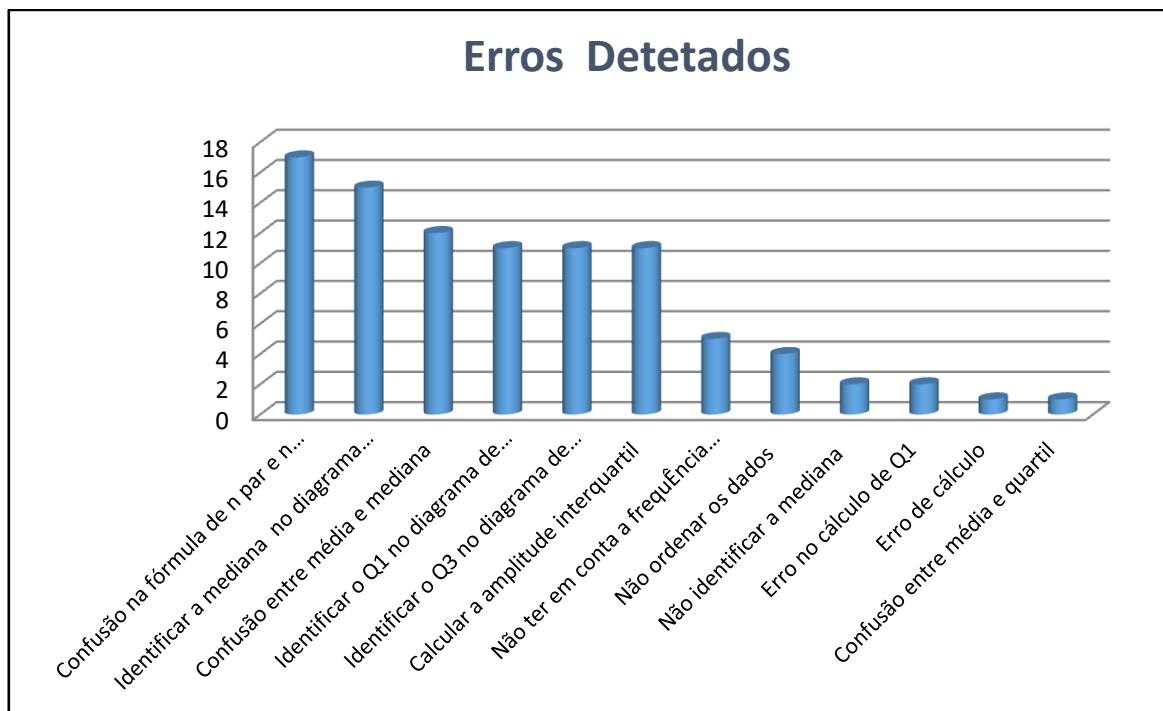
Após a análise das respostas dos alunos, constatou-se que, os diagramas de extremos e quartis não são tão acessíveis e tão fáceis de entender como são outras formas de representar dados estatísticos – gráficos de barras, histogramas, diagrama de caule-e-folhas, ...

De acordo com os resultados obtidos, podem resumir-se os erros cometidos pelos alunos, que foram observados neste trabalho, como a seguir se elencam:

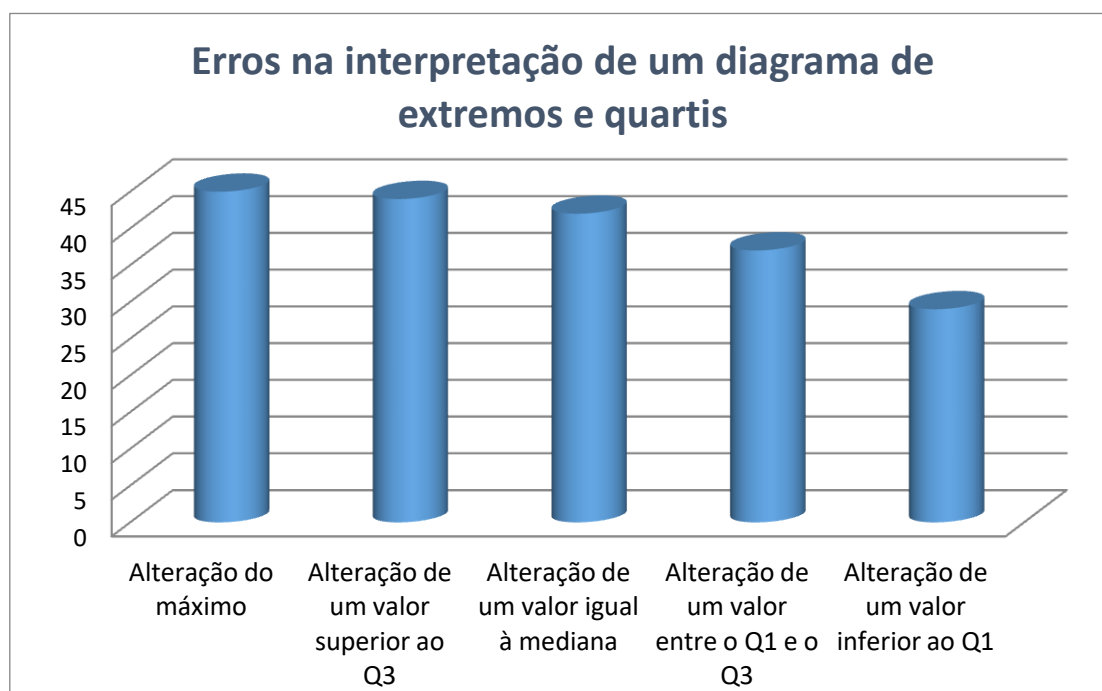
- Entender que os dados devem manter a ordem de acordo com o enunciado e não pela ordem crescente;
- Não entender o valor mediano como um valor central da distribuição;
- Não associar a mediana de uma distribuição com um número par de elementos revelando que não sabem interpretar a definição de mediana como valor central;
- Não detetar, sem recurso ao cálculo, invariabilidade da mediana, primeiro e terceiro quartis quando são alterados valores extremos;
- Não detetar, sem recurso a cálculos, a variabilidade ou invariabilidade dos valores da mediana, primeiro e terceiro quartis, quando são acrescentados valores extremos à distribuição.

A seguir apresentam-se dois gráficos resumo com os erros apresentados pelos alunos na resolução das questões apresentadas na prova.

No primeiro gráfico apresentam-se os erros dos alunos cometeram aquando do cálculo da mediana ou dos quartis usando as fórmulas. Incluem-se, também, os tipos de erros cometidos pelos alunos aquando da alteração dos dados iniciais de uma distribuição.



No segundo gráfico, apresentam-se os tipos de erro cometidos pelos alunos ao nível da interpretação da variabilidade ou invariabilidade da mediana e dos quartis quando há alteração de dados, usando um diagrama de extremos e quartis.



Desta análise conclui-se que as dificuldades dos alunos, de acordo com o estudo efetuado, centram-se maioritariamente na interpretação de um diagrama de extremos e quartis ou ainda na interpretação do conceito de mediana. Embora os alunos tenham demonstrado algumas dificuldades ao nível do cálculo da mediana e dos quartis usando a fórmula, estas foram muito mais evidentes quando lhes é solicitado que relacionem ou interpretem resultados.

Faz então sentido, e após as conclusões a que se chegou, que haja uma intervenção junto dos alunos, baseada nos erros identificados para que um tema tão incontornável como é o da Estatística, não condicione uma cidadania responsável e ativa. Fortulan (2003) afirma que “o nosso mundo está «transbordante» de dados estatísticos que muitas vezes são analisados erroneamente, levando a decisões equivocadas, devido, justamente, à falta de um raciocínio estatístico mais elaborado” (p.2).

Embora se considere que os objetivos propostos para este trabalho foram atingidos, surgem algumas questões que podem servir de base para outros projetos ou investigações. É a partir da identificação dos erros mais comuns dos alunos que se deve debruçar o trabalho de qualquer professor, arranjando estratégias para ajudar o sucesso educativo dos seus alunos. Seria, então, interessante a identificação de várias estratégias para ajudar os professores no sentido de ajudar o aluno na superação das suas dificuldades e este possa aprender a raciocinar matemática e estatisticamente.

É de todo fundamental confrontar os alunos com situações diferentes, seja com recurso a um conjunto de dados numéricos, ordenado ou não, seja um diagrama de extremos e quartis, sendo trabalhado a variabilidade de medidas como a mediana ou os quartis, incentivando o espírito crítico dos alunos.

Watson, no sentido de combater as dificuldades que os alunos apresentam na interpretação do diagrama de extremos e quartis, sugere que o seu ensino seja baseado em percentagens, já que os alunos tendem a centrar-se nos cinco valores (mínimo, primeiro quartil, mediana, terceiro quartil e máximo), desvalorizando toda a informação constante no diagrama no que respeita à concentração ou dispersão de dados. Biehler (1997) defende que para os alunos não é um processo fácil tirarem todas estas informações de um diagrama de extremos e quartis.

Também a tecnologia pode ser uma boa ajuda na interpretação de um diagrama de extremos e quartis usando, por exemplo, calculadoras gráficas ou com recurso a aplicações em ambiente virtual, nas quais os alunos possam criar representações matemáticas interagindo com elas, alterando dados, acrescentando dados, ..., permitindo-lhes aprender ao seu próprio ritmo, testando as variações que o diagrama sofre retirando a suas conclusões. Todo este processo deve ser acompanhado pelo professor, gerindo o tempo e proporcionando um bom ambiente de diálogo, partilha de conclusões e apelando ao sentido crítico dos alunos.

Também os manuais escolares são um aliado importante na formação de alunos e na melhoria dos seus resultados. Apesar da função dos manuais escolares ter sido, já por várias vezes e ocasiões, questionada e ponderado o seu papel na forma como o professor desenvolve o seu trabalho junto dos seus alunos, as informações constantes destes são, tão só, as interpretações que o(s) autor(es) fazem do programa, com as imposições que cada uma das editoras lhes impõem. Assim, a adoção de um manual escolar A ou B pode ter implicações no ensino, já que a relevância dada a cada um dos temas, o conteúdo e exploração dependem dos seus autores. Os manuais escolares que foram analisados neste trabalho revelaram-se, em termos do conteúdo abordado (mediana e quartis), bastante similares. No entanto, há um manual do sétimo ano de escolaridade que se distingue dos outros – PI 7 (Asa Editores), pois é o único cujo capítulo referente à Estatística não aparece como sendo o último a ser lecionado. Esta situação também se verifica nos manuais do oitavo ano de escolaridade que foram analisados. O manual da Asa Editores – PI 8 – é o único que apresenta o tema da Estatística como capítulo intermédio e não final como nos outros manuais. Desta análise decorre a dúvida: qual a importância dada, ao longo do ano letivo, ao estudo da Estatística?

Dos resultados deste estudo pode inferir-se que não se tem dada a devida importância nem o tempo necessário ao estudo deste tema, já que os alunos não apresentam um bom nível no que se refere ao seu raciocínio estatístico, ao contrário dos bons resultados demonstrados ao nível da aplicação mecânica dos conceitos.

É importante refletir e estudar qual a influência que a localização do capítulo referente à Estatística tem ao nível do desenvolvimento do pensamento e raciocínio estatístico dos alunos. Até que ponto o facto de este capítulo ser lecionado a meio do ano letivo pode implicar uma maior envolvimento dos seus conceitos com outros temas matemáticos, despertando nos alunos um maior espírito crítico, de análise, aumentando a sua Literacia Estatística.

Referências

- ABRANTES, P. (1995). *O trabalho de projeto e a relação dos alunos com a Matemática: a experiência do projeto MAT789* (Tese de doutoramento apresentada em 1994, Universidade de Lisboa). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- ABRANTES, P., SERRAZINA, L. & OLIVEIRA, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.
- ALMEIDA, M. R. (2002). *Imagens sobre o ensino e a aprendizagem da Estatística*. Lisboa, Instituto de Inovação Educacional.
- BAYER, A. (2011). *Estatística no ensino médio: como tornar o desenvolvimento dos conteúdos mais interessante?* Atas do 3.º Congresso Uruguayo de Educación Matemática, Montevideo. (pp.654 – 661).
- BARR (1980). Some students' ideas on the median and the mode. *Teaching Statistics*.
- BARROS, P., MARTINS, C., PIRES, M. (2009). *Moda, média e mediana: perspectivas dos alunos vs trabalho dos professores*. In ProfMat2009: Viana do Castelo.
- BARROS, P. (2003). Os futuros professores do 2.º ciclo e a estocástica – Dificuldades sentidas e o ensino do tema. Coleção *TESES*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- BATANERO, C. (2000). Dificuldades de los estudiantes en los conceptos estadísticos elementares: el caso de las medidas de posición central. Em C. Loureiro, O. Oliveira e L. Brunheira (Orgs.) *Ensino e aprendizagem da estatística* (pp. 31-48).
- BATANERO, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística. Disponível em: <http://www.ugr.es/local/batanero>
- BATANERO, C., GODINO, J. D., VALLECCILLOS, A. GREEN, D. R. & HOLMES, P. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal for Mathematical in Science and Technology*.
- BIVAR, A., GROSSO, C., OLIVEIRA, F. & TIMÓTEO, M. C. (s. d.). *Metas curriculares do ensino básico – Matemática: caderno de apoio – 3.º ciclo*. Direção Geral de Educação.

- BEN-ZVI, D. & GARFIELD, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: goals, definitions and challenges. In D. BEN-ZVI, & GARFIELD(Eds), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*. The Netherlands: Kluwer.
- BIEHLER, R. (1997). Software for learning and for doing statistics. *International Statistical Review* (pp. 167 – 190).
- BOAVENTURA, M.G. (2003). *Dificuldades de alunos do ensino secundário em conceitos estatísticos: O caso das medidas de tendência central*. Dissertação (Mestrado em Supervisão Pedagógica em Ensino da Matemática). Braga: Universidade do Minho.
- BOAVENTURA, M. G. & FERNANDES, J. (2004). *Dificuldades de alunos do 12.º ano nas medidas de tendência central: o contributo dos manuais escolares*. Em Atas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola.
- BRANCO, J. & MARTINS, M. E. (2002). Literacia estatística. *Educação e Matemática*, n.º69 (set – out.).
- BRITO, A. (1999). *A problemática da adoção dos manuais escolares. Critérios e reflexões*. In: CASTRO, R., RODRIGUES, A., SILVA, J., SOUSA, M. (org.) *Manuais escolares. Estatuto, funções, história*. Atas do I Encontro Internacional sobre Manuais. Braga: Universidade do Minho – IEP.
- CARVALHO, A. D. & FADIGAS, N. (2009). *Os manuais escolares na relação escola-família*. Porto: Observatório dos Recursos Educativos.
- CARVALHO, C. (2001). *Interacção entre pares: contributos para a promoção do desenvolvimento lógico e do desempenho estatístico no 7.º ano* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa, Associação de Professores de Matemática.
- CARVALHO, C. (2004). *Um olhar da psicologia pelas dificuldades dos alunos em conceitos estatísticos*. In: Encontro de probabilidades e estatística na escola. Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.
- CARVALHO, C. (2006). Desafios à educação estatística. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Estatística*.

- CARVALHO, C. & CESAR, M. (2001). *Interagir para aprender: um caso de trabalho colaborativo em estatística*. In SILVA, B. & ALMEIDA, L. (orgs.), atas do VI congresso Galaico-Português de Psicopedagogia, V2. Braga: Centro de Estudos de Educação e Psicologia da Universidade do Minho.
- COBO, B. (2003). *Significados de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. Tese de Doutoramento. Granada: Universidade de Granada.
- COBO, B. & BATANERO, C. (2000). A mediana na educação secundária obrigatória: um conceito simples? *UNO*.
- COSTA, B. & RODRIGUES, E. (2017). *Novo Espaço – Matemática – 7.º ano*. Porto: Porto Editora.
- COSTA, B. & RODRIGUES, E. (2017). *Novo Espaço – Matemática – 8.º ano*. Porto: Porto Editora.
- CURY, H. N. (1995). Retrospectiva histórica e perspectivas atuais da análise de erros em educação Matemática. *Zetetiké*, ano 3, n.º 4, p. 39-50.
- FARIA, L., GUERREIRO, L., ALMEIDA, P. (2017). *Matemática Dinâmica – 7.º Ano*. Porto: Porto Editora.
- FARIA, L., GUERREIRO, L., ALMEIDA, P. (s. d.). *Matemática Dinâmica – 8.º Ano*. Porto: Porto Editora.
- FARIAS A., SOARES, J. & CÉSAR, C. (2003). *Introdução à Estatística*. Rio de Janeiro: Ed. LTC.
- FERNANDES, S. & PINTO, M. (2014). Afinal, o que são e como se calculam os quartis? *Gazeta da Matemática* n.º 174: Sociedade Portuguesa de Matemática (pp.34 - 40).
- FORTULAN, V. (2003). *Conversa de professores: múltiplas faces, experiências plurais*. São Paulo: Projeto Ensinar, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
- GAL, I. (2000). *Adult numeracy development: theory, research, practice*. New Jersey: Hampton Press.

- GAL, I. (2002). Adult's statistical literacy: meanings, componentes, responsibilities. *International Statistical Review*, v.70, n.º1.
- GAL, I., GRAFIELD, J. (1997). Curricular goals and assessment challenges in statistics education. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 1-13). Amsterdam: *IOS Press*.
- GONÇALVES, J. (2011). *O uso do manual escolar enquanto recurso promotor do desenvolvimento de competências históricas*. Relatório final do Mestrado em Ensino de História e Geografia no 3.º ciclo do ensino básico e ensino secundário. Porto: Faculdade de letrasda Universidade do Porto.
- GRAFIELD, J. & AHLGREN, A. (1998). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education*.
- GRAFIELD, J. & BEM-ZVI, D. (2005). A framework for teaching and assessing reasoning, about variability. *Statistics Education Research Journal*.
- GRAM, A. (1987). *Statistical investigations in secondary school*. Cambridge: The Open University Centre for Mathematics Education.
- HUDSON, I. (1999). University Students' Ability to Apply Atatistical Procedures. *Journal of Statistics Education* v7, n.1.
- JOLLIFE, F. (2007). The changing brave new world of statistics assessment. In B. PHILLIPS & : WELDON (Eds), *The proceeding of the ISI / IASE satellite on assessing student learning in statistics*. Netherlands: International Statistical Institute.
- LOURA, L. (2009). Organização e tratamento de dados no novo programa de matemática do ensino básico. *Revista Educação Matemática* n.º 105. Lisboa: APM. (pp. 46 – 49).
- MAGRO, F. C., FIDALGO, F. & LOUÇANO, P. (2014). *PI – Matemática – 7.º Ano*. Vila Nova de Gaia: Asa Editores.
- MAGRO, F. C., FIDALGO, F. & LOUÇANO, P. (2014). *PI – Matemática – 8.º Ano*. Vila Nova de Gaia: Asa Editores.

- MARTINS, C., PIRES, M. V. & BARROS, P. M. (2009). *Conhecimento estatístico: Um estudo com futuros professores*. Actas do XIXEDEM: Números e estatística. Vila Real.
- MARTINS, M. E., & PONTE, J. P. (2010). *Organização e tratamento de dados*. Lisboa. MEDGIDC.
- MARTINS, E.(2011). Diagrama de Caule-e-Folhas. *ALEA* n.º 20.
- MAVARECH, Z. (1983). A deep structure modelo f students's statistical misconceptions. *Educational Studies in Mathematics*.
- MEDEIROS, C. A. (2007). *Estatística Aplicada à Educação*. Distrito Federal: Universidade de Brasília.
- MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO (1998). *Programa de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico*. Lisboa.
- MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO (2001). *Currículo nacional do Ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa.
- MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO (2013). *Programa e Metas Curriculares - Matemática - ensino básico*. Lisboa.
- MOORE, D. (2005). *A Estatística Básica e a sua prática*. 3.ª Edição. Rio de Janeiro: Ed. L.TC.
- NEVES, M. A. & SILVA, A. P. (2017). *Matemática – 7.º Ano*. Porto: Porto Editora.
- NEVES, M. A. & SILVA, A. P. (2017). *Matemática – 8.º Ano*. Porto: Porto Editora.
- NUNES, T. & BRYANT, P. (1996). *Children doing mathematics*. Oxford: Blackwell.
- OLIVEIRA, F.E.M. (2007). *Estatística e Probabilidade*. São Paulo, Edições Atlas.
- PEREIRA, P. P. & PIMENTA, P. (2014). *X – Matemática - 7.º Ano*. Vila Nova de Gaia: Asa Editores.
- PEREIRA, P. P. & PIMENTA, P. (2014). *XIS – Matemática - 8.º Ano*. Vila Nova de Gaia: Asa Editores.

- PONTE, J. P. & BROCARD, J. (2002). A estatística: De parente pobre a cidadão de pleno direito? *Quadrante*, 10.
- PONTE, J. P., et al (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação.
- PONTE, J. P., MATOS, J. M. & ABRANTES, P. (1998). *Investigação em Educação Matemática: Implicações curriculares*. Lisboa.
- PONTE, J. P. & SERRAZINA, M. L. (2000). *Didáctica da matemática do 1º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.
- RADATZ, H. (1979). Error Analysis in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*. V.10, n.º 2.
- RAO, C. R. (1999). Statistics: A technology for the Millennium Internal. *J. Math. & Statist. Sci*, Vol. 8, No.1.
- REGO, B., GOMES, C. A., & BALULA, J. P. (2010). *A avaliação e certificação de manuais escolares em Portugal: um contributo para a excelência*. In Atas da AEPEC Da exclusão à excelência: caminhos organizacionais para a qualidade da Educação. Évora: Universidade de Évora.
- SCHREINER, C. & SJOBERG, S. (2004). *Sowing the seeds os ROSE. Background, Rationale, Questionnaire Development and Data Collection for ROSE. (The Relevance of Science Education) – a Comparative Study of Students' Views of Science and Science Education*. Oslo: Dept. of Teacher Educational School Development, University of Oslo.
- SCHUYTEN, G. (1991). *Statistical thinking in Psychology and Education*. In Vere-Jones (Eds) *Proceedings of the International Conference on Teaching Statistics*. The Netherlands: International Statistical Institute.
- SEBARROJA, J. C. (2001). *A aventura de Inovar. A mudança na escola*. Porto: Porto Editora.
- SOUSA, O. (2002). *Investigações estatísticas no 6.º ano*. Escola Básica 2,3 de São Julião da Barra.

- UNESCO (2001). *Science, technology and mathematics education for human development: framework for action*. Disponível em www.unesco.org/education.
- VENDRAMINI, C. M., & DIAS, A. S. (2005). Teoria de resposta ao item na análise de uma prova estatística em universitários. *Psicousf*.
- VIEIRA, F. MARQUES, I. & MOREIRA, M. A. (1999). *Para o desenvolvimento da autonomia com o manual escolar*.
- VIEIRA, R. M., PEDROSA, M. A., PAIXÃO, F., MARTINS, I. P., CAA-MAÑO, A., MARTIN-DIAZ, M. J. (2008). *Educação científica e desenvolvimento sustentável*. Aveiro: Universidade de Aveiro.
- VIEIRA, R. M., TENREIRO-VIEIRA, C. & MARTINS, I. P. (2011). *A Educação em Ciências com Orientação CTS. Atividades para o ensino básico*. Porto: Areal Editores, SA.
- WATSON, J., FITZALLEN, N. E., WILSON, K. & CREED, J. (2008). *The representational value of hats. Mathematics teaching in the middle school*.

Anexo 1

8.º Ano	Questionário – Organização e Tratamento de Dados
<p>Caro(a) aluno(a) no âmbito do mestrado em Matemática, da Universidade de Aveiro, solicitamos que respondas a este questionário.</p> <p>Desde já agradecemos a colaboração e garantimos o sigilo de todos os dados.</p>	

Lê atentamente todas as perguntas e apresenta todos os cálculos que efetuares.

1. Considera o seguinte conjunto de dados.

10	12	14	12	15	16	8	12	13	15	11
----	----	----	----	----	----	---	----	----	----	----

Indica o valor da mediana, da média e da moda do conjunto de dados apresentado.

2. Considera o seguinte conjunto de dados:

8	10	11	12	12	13	13	15	15	16
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----

- a) Qual o valor da mediana, do 1.º e do 3.º quartis da distribuição dos dados?
- b) Qual o valor da mediana se o valor mínimo for alterado de 8 para 3? E do 1.º e 3.º quartis?
- c) Qual o valor da mediana se for acrescentado ao conjunto de dados o valor 17?
- d) Qual o valor da mediana se for acrescentado ao conjunto de dados o valor 1?
- e) Comenta os resultados obtidos nas alíneas c) e d).

3. Considera o seguinte conjunto ordenado de dados, onde **b** representa um número inteiro.

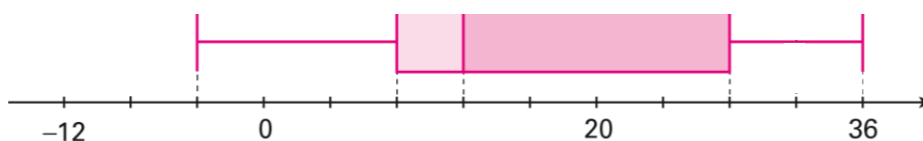
1 2 2 7 **b** 8 9 9

Qual dos seguintes valores pode ser a mediana do conjunto de dados?

(Assinala com um X a opção correta.)

- 2 9 7,5 7,25

4. O diagrama de extremos e quartis seguinte representa as temperaturas, em graus Celsius, observadas numa cidade, durante um ano.



- a) Por observação do diagrama de extremos e quartis e efetuando cálculos sempre que necessário, indica:

- i. Q_1 .
- ii. Mediana.
- iii. Q_3 .
- iv. A amplitude interquartil.

- b) Houve uma incorreção no registo de uma temperatura, tendo essa que ser alterada. Faz a correspondência correta.

O diagrama mantém-se inalterado.	<ul style="list-style-type: none"> • O registo que corresponde a 30° é, na realidade, 36°.
	<ul style="list-style-type: none"> • O registo que corresponde a 0° é na realidade, 4°.
O diagrama sofre necessariamente alterações.	<ul style="list-style-type: none"> • O registo que corresponde a 12° é, na realidade, 8°.
	<ul style="list-style-type: none"> • Temperatura mínima.
O diagrama pode sofrer alterações.	<ul style="list-style-type: none"> • Temperatura máxima.
	<ul style="list-style-type: none"> • O registo que corresponde a 20° é, na realidade 24°.