Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2014

Filipe Nunes Monteiro

Recursos digitais de apoio ao ensino das funções exponencial e logarítmica

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2014

Filipe Nunes Monteiro

Recursos digitais de apoio ao ensino das funções exponencial e logarítmica

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para Professores, realizada sob a orientação científica da Professora Auxiliar Doutora Paula Oliveira do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro e da Professora Doutora Dina Seabra, Professora Adjunta da Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Águeda da Universidade de Aveiro.

o júri / the jury

presidente / president

Professor Doutor António Ferreira Pereira

Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Professor Doutor José João Antunes Guimarães Dias Almeida

Professor Auxiliar do Departamento de Informática da Universidade do Minho

Professora Doutora Maria Paula de Sousa Oliveira

Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro (Orientadora)

agradecimentos

Expresso aqui o meu agradecimento ao Senhor meu Deus, pela sabedoria e discernimento, que me permitiu elaborar este trabalho.

Agradeço a orientação deste trabalho às professoras Doutora Paula Oliveira e Doutora Dina Seabra, pela imprescindível ajuda, dedicação, disponibilidade, incentivos e os constantes desafios que me proporcionaram entusiasmo e alegria na elaboração do meu trabalho e sem as quais impossibilitaria a realização do mesmo.

Ao Professor João Pedro Cruz um agradecimento especial pelo apoio prestado nas questões de programação.

Agradeço às minhas filhas, Eva Filipa e Maria Inês pelo incentivo que me deram e à minha mãe e à minha irmã pela ajuda incondicional.

Palavras-chave Função exponencial, função logarítmica, MEGUA, SIACUA, *Sage Mathematics*, *Latex*, *Python*, escolha múltipla, exercícios parametrizados, estudo autónomo, instruções, comandos, parâmetros.

Resumo Pretende-se com este trabalho a criação de exercícios parametrizados, recorrendo a software *"open source"*, sobre as funções exponencial e logarítmica, para a disciplina da Matemática do 12.º ano de escolaridade, tendo por base as Metas Curriculares da Matemática para o Ensino Secundário. A construção destes recursos digitais de apoio ao ensino, proporciona aos alunos materiais para um estudo continuado, potenciando novas oportunidades de aprendizagem, conduzindo deste modo a uma maior consolidação de conhecimentos e autonomia no estudo, nomeadamente pelo *feedback* imediato que o aluno recebe ao responder a uma dada questão, usando uma plataforma de apoio ao ensino. Ambiciona-se ainda com este trabalho, dar a conhecer a base de programação dos exercícios parametrizados criados, através da construção de um complemento ao tutorial existente para introdução à programação *Python/Sage*, como auxiliar na aprendizagem desta linguagem. Descrevem-se neste documento alguns dos procedimentos utilizados na construção dos exercícios criados, com o objetivo de facilitar a novos utilizadores a criação de outros exercícios.

Keywords Exponential function, logarithmic function, MEGUA, SIACUA, Sage Mathematics, Latex, Python, multiple choice, parameterized exercises, self-study, instructions, commands, parameters.

Abstract The aim of this study is to create parameterized exercises, using open source software on exponential and logarithmic functions for the subject of Mathematics for the 12th grade, based on the Mathematics Curricular Goals. The construction of these digital resources to support teaching, provides materials for continuous study, fostering new learning opportunities, thereby leading to a greater knowledge consolidation and autonomous study, including the immediate feedback that students receive after an answer on a given matter. The questions are available on a online platform to support teaching. Another aim of this study was to disclose the programming basis of parameterized exercises created, through the construction of an introductory tutorial on programming on Python/Sage, as an aid in learning this language. In this tutorial some of the procedures used in the construction of exercises are described in order to facilitate the creation of new exercises, by unexperienced users.

Conteúdo

Introdução

Este trabalho resulta de uma investigação realizada no âmbito do mestrado em matemática para professores, sob o tema Recursos Digitais de Apoio ao Ensino das Funções Exponencial e Logarítmica.
Estes recursos consistem na criação de exercícios parametrizados, usando a marcação tipográfica LaTeX para o texto, e programados em *software Sage Mathematics* com recurso ao pacote de *software "open source"* denominado MEGUA (projeto), utilizando a linguagem de programação *Python*.
Este trabalho tem dois objetivos principais, nomeadamente, a construção de recursos digitais de apoio ao ensino das funções exponenciais e logarítmicas e a construção de um complemento ao tutorial existente para introdução à programação *Python/Sage*.

Os recursos digitais de apoio ao ensino das funções exponenciais e logarítmicas proporcionam aos alunos materiais para um estudo continuado, com recurso a diferentes exercícios sob o mesmo tópico, potenciando novas oportunidades de aprendizagem, conduzindo, consequentemente a uma maior consolidação de conhecimentos.
O formato utilizado na elaboração dos exercícios foi o de escolha múltipla, ocorrendo uma resposta correta em quatro possíveis, proporcionando ao aluno o acesso à resolução passo a passo do problema, caso erre na resposta ou opte por não responder.

Do ponto de vista do professor, este material permite a diversificação das práticas letivas, usando ferramentas *e-learning*, contribuindo assim para o desenvolvimento de hábitos de trabalho, complementando o ensino tradicional.

O complemento do tutorial é um auxiliar na aprendizagem desta linguagem de programação, onde se apresentam os procedimentos que permitiram a construção dos exercícios criados, propiciando aos futuros utilizadores um recurso facilitador para a geração de novos exercícios.
Foram várias e diversificadas as dificuldades encontradas na programação dos exercícios, contudo todas elas foram ultrapassadas o que potenciou uma evolução na aprendizagem e permitiu inovar na programação. Referem-se aqui algumas dessas dificuldades:

- Em certos casos, para um mesmo exercício com diferentes parâmetros, surgia a necessidade de omitir algum texto. Introduziu-se um comando original designado "*card*" que permitiu ultrapassar este obstáculo;

- A utilização de gráficos em alguns exercícios levantava problemas, nomeadamente na representação dos eixos coordenados, que foram contornados traçando uma reta em cor branca.

- Um mesmo exercício gerar diferentes enunciados, muito útil na questão dos problemas, foi uma questão também resolvida, com o uso de escolhas.

Algumas concretizações dos exercícios criados foram exportados para a plataforma SIACUA, onde serão disponibilizados aos alunos num ambiente *"web"* [3].

Escolhido um tema, desenvolve-se uma questão parametrizada que consta de:

- Enunciado
- Resolução detalhada
- Programação

Na figura 1 exemplifica-se um exercício (Objeto MEGUA) sumariamente.

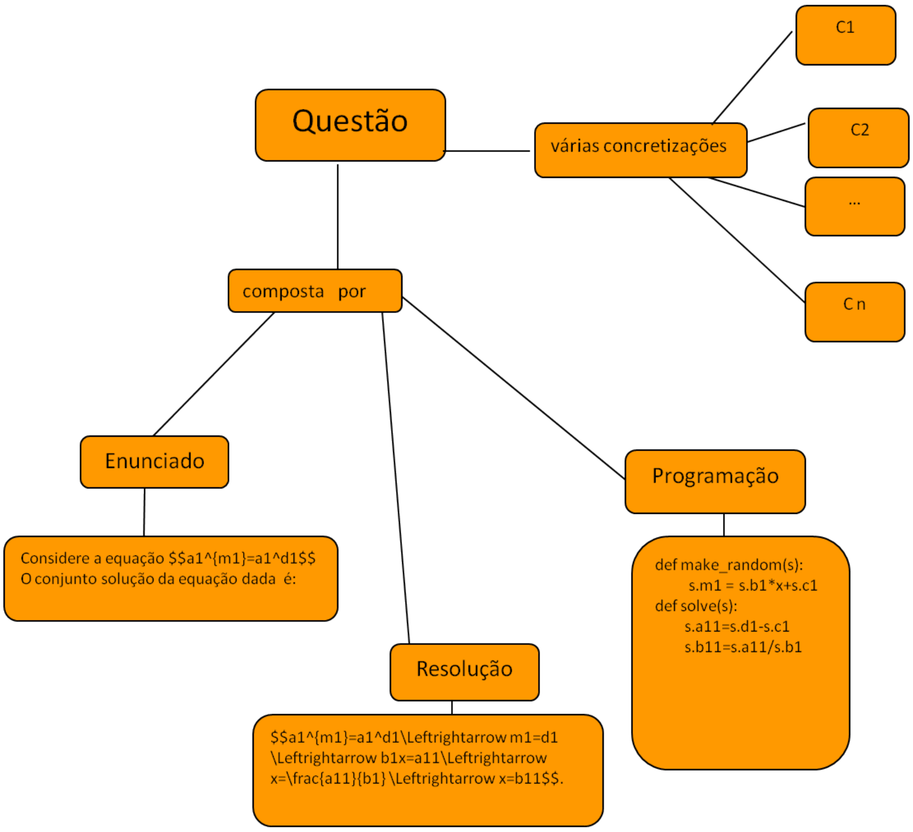


Figura 1: Objeto MEGUA

Cada exercício pode ser alterado ou criadas variações adaptadas a novos contextos [4].

Neste projeto as questões são todas elas de escolha múltipla, acrescentando deste modo as opções de escolha múltipla à formulação da questão parametrizada.
Descreve-se sumariamente na figura 2 a aplicação de um objeto MEGUA em diferentes contextos[3].

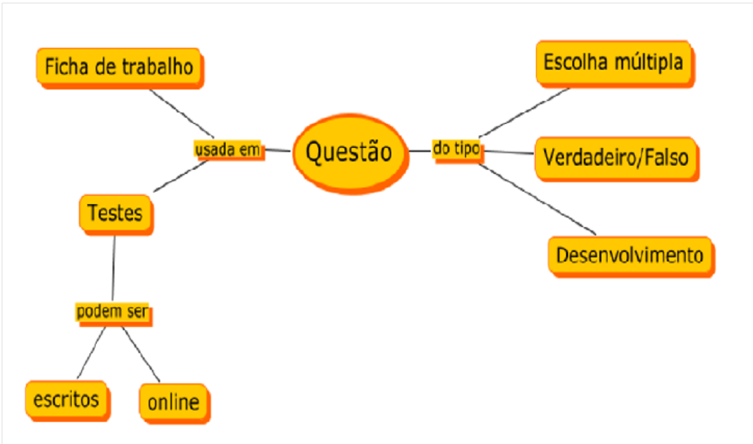


Figura 2: diferentes utilizações de um objeto MEGUA

Com a plataforma SIACUA disponibiliza-se, na forma de aplicação Web, um sistema de apoio ao estudo autónomo, que proporciona um *feedback* imediato ao aluno sobre o seu progresso na aprendizagem, com base nas respostas fornecidas.

Atualmente o *feedback* realiza-se de duas formas distintas: quanto à evolução geral no tema, com recurso a barras de progresso (Figura 3) e quanto à resolução da questão apresentada (Figuras 4 e 5).

Relativamente à primeira, o aluno seleciona o conceito pretendido sendo gerada uma questão ao acaso, se a sua resposta for correta aumenta a barra, caso contrário diminui. Apesar de todos os exercícios estarem catalogados quanto ao nível de dificuldade, essa informação não está disponível para o utilizador [19].

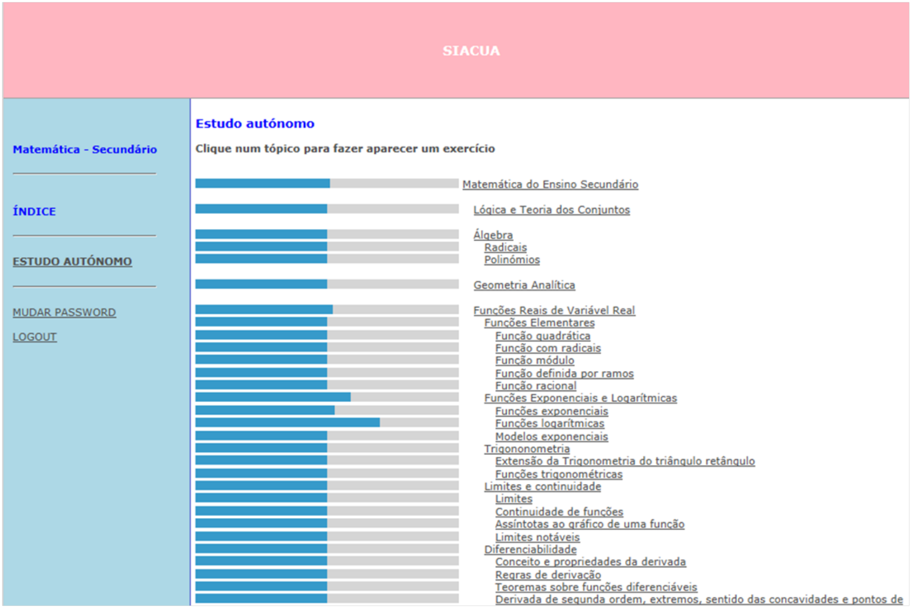


Figura 3: Barras de progresso no SIACUA

Relativamente à segunda, o aluno é informado de imediato se acertou ou errou, tendo acesso à resolução detalhada caso erre ou opte por não responder.

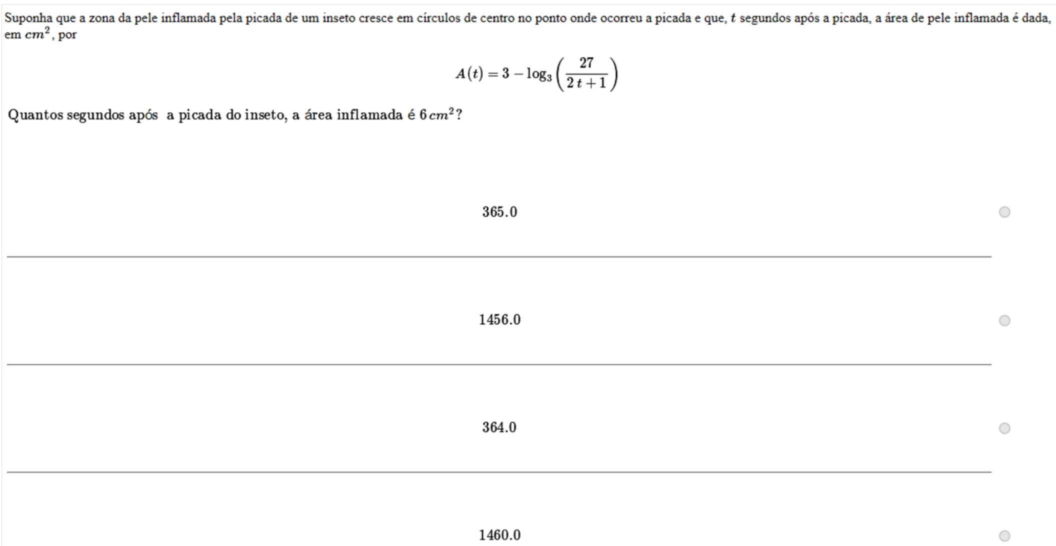
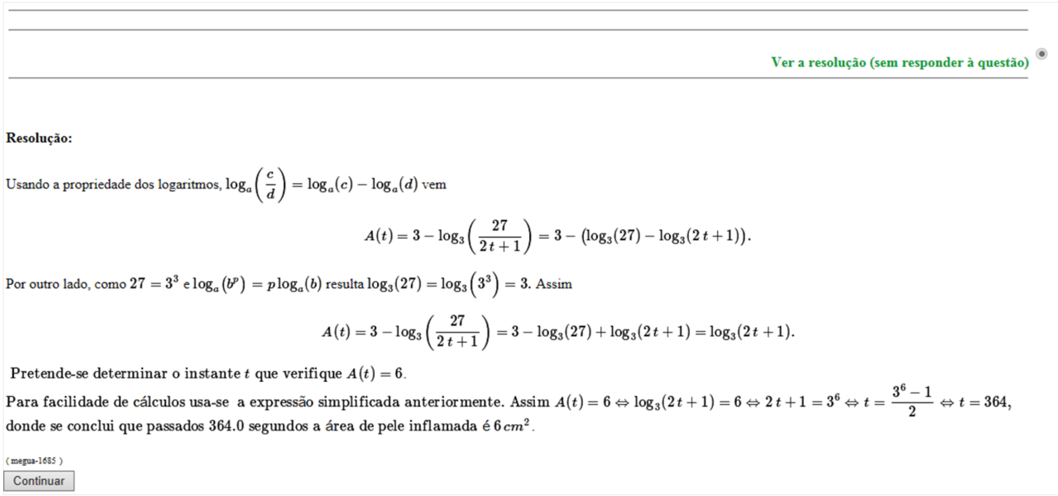


Figura 4: Questão de escolha múltipla



Ver a resolução (sem responder à questão)

Resolução:

Usando a propriedade dos logaritmos, $\log_a\left(\frac{c}{d}\right) = \log_a(c) - \log_a(d)$ vem

$$A(t) = 3 - \log_3\left(\frac{27}{2t+1}\right) = 3 - \left(\log_3(27) - \log_3(2t+1)\right).$$

Por outro lado, como $27 = 3^3$ e $\log_a(b^p) = p\log_a(b)$ resulta $\log_3(27) = \log_3\left(3^3\right) = 3$. Assim

$$A(t) = 3 - \log_3\left(\frac{27}{2t+1}\right) = 3 - \log_3(27) + \log_3(2t+1) = \log_3(2t+1).$$

Pretende-se determinar o instante t que verifique $A(t) = 6$.

Para facilidade de cálculos usa-se a expressão simplificada anteriormente. Assim $A(t) = 6 \Leftrightarrow \log_3(2t+1) = 6 \Leftrightarrow 2t+1 = 3^6 \Leftrightarrow t = \frac{3^6-1}{2} \Leftrightarrow t = 364$, donde se conclui que passados 364.0 segundos a área de pele inflamada é $6\,cm^2$.

(megua-1685)

Continuar

Figura 5: Resolução

Deste modo, os alunos ao terem fácil acesso a um exercício de escolha múltipla e à sua resolução, transforma o processo de aprendizagem mais autónomo, fomentando hábitos de trabalho, a motivação e a persistência, culminando numa maior consolidação de conhecimentos, num ambiente complementar ao ensino presencial.

Capítulo 1

As Tecnologias na Aprendizagem da Matemática

Nos últimos anos, o computador tem vindo a assumir um papel preponderante na aprendizagem da Matemática [15]. Primordialmente, o computador era usado para efetuar cálculos numéricos fastidiosos, sendo posteriormente utilizados na criação de modelos computacionais na simulação de hipotéticos cenários. Com o aparecimento da Internet, o acesso a conhecimentos e à sua fácil partilha promoveu o debate de ideias estimulando a produção de materiais para a aprendizagem da matemática e de outras ciências.
Os programas de matemática em vigor incentivam e estimulam a utilização, de uma forma responsável, das novas tecnologias de forma a proporcionar novas oportunidades aos alunos na melhoria da aprendizagem.
Tendo em conta que as orientações metodológicas fomentam a abordagem experimental de problemas, a análise de diversos exemplos e as mais variadas representações dos conteúdos, bem como a exploração e formulação de conjeturas, obriga à execução de procedimentos rotineiros de forma rápida [16]. A aplicação destas orientações só seriam exequíveis com recurso a novas tecnologias. Temos de ter em linha de conta que o professor é insubstituível,

com um papel fundamental na seleção de tarefas e observação das diversas abordagens e raciocínios que os alunos executam na realização das mesmas.

1.1 Estado da arte

O ritmo diferenciado de aprendizagem dos alunos é um dos principais desafios que se coloca atualmente aos professores. Para responder a este desafio surgem os mais variados projetos de estudo autónomo via Internet para colmatar o problema da diferenciação, alguns deles referidos de seguida.

PmatE

O projeto Matemática Ensino, PmatE, da Universidade de Aveiro, desenvolve desde 1990 *software* destinado a aumentar o gosto pela matemática, nomeadamente pelas matemáticas escolares, sendo igualmente instrumento de avaliação e aprendizagem [5]. As diversas matérias são sujeitas a um trabalho intensivo de modelação levado a cabo por equipas integrando elementos do PmatE e professores dos respetivos graus de Ensino [6]. A unidade fundamental desse *software* é o "modelo gerador de questões", em que as questões são do tipo verdadeiro/falso generalizado.
Como referido em [7] "As questões são geradas aleatoriamente por expressões parametrizadas onde os domínios dos parâmetros dependem do nível etário e escolar a que se destinam. A estas expressões com $k(k \geq 4)$ opções de resposta chamamos modelo gerador dos enunciados das questões ou apenas modelo gerador das questões.
Os quatro itens de cada questão gerada podem resultar dos k possíveis por saída totalmente aleatória ou com uma aleatoriedade condicionada à prescrição de certos objetivos".
Os modelos podem ser organizados no modo competição ou como sistema de avaliação e aprendizagem [9]. A modularidade, a flexibilidade e a alea-

toriedade dos modelos e dos programas produzidos são características fundamentais para conferirem a estes últimos, em qualquer dos modos referidos, um interesse sempre renovado [8]. Este projeto permite ao aluno recordar, sedimentar, aprofundar conhecimentos e automaticamente fazer autodiagnóstico, para além de ser um estímulo para a matemática quando usado em modo de competição; quanto ao professor, permite-lhe fazer avaliação diagnóstica e formativa, para além de lhe fornecer material para as aulas ou trabalhos de casa.

MEGUA& SIACUA

Foram criados pela Universidade de Aveiro, dois projetos de software de diferente especificidade que se complementam. No primeiro desenvolve-se uma ferramenta para criação de exercícios parametrizados; no segundo desenvolve-se um ambiente interativo que usa os exercícios criados.

No projeto MEGUA é desenvolvido *software*, com o mesmo nome, para produção de recursos digitais para *web* ou documentos em papel na área da matemática, tendo como objetivo a criação e a partilha de bases de dados de exercícios parametrizados e respetivas resoluções detalhadas, construídas sobre a plataforma *Sage Mathematics* usando a biblioteca de *software* MEGUA. A consulta de arquivos de exercícios permite uma rápida elaboração de material didático (questões de desenvolvimento, verdadeiro/falso e escolha múltipla), bem como a sua modificação ou adaptação a novos contextos, para apoio às aulas (fichas de trabalho) e à avaliação(testes escritos ou *online*) [3].

O projeto SIACUA tem como incumbência o desenvolvimento de um sistema para apoio ao estudo autónomo, disponibilizando os recursos aos estudantes de forma interativa, fornecendo de imediato um *feedback*, de acordo com as respostas dadas. Esse *feedback* existe ao nível da questão, que é gerada ao acaso, sendo o aluno informado de imediato se acertou ou errou e vendo a resolução detalhada caso erre ou opte por não responder; existe também ao nível do progresso geral no tema, sob a forma de barras de progresso, podendo o estudante escolher o conceito pretendido. Para atualizar as barras de progresso foi usado um modelo Bayesiano de utilizador, com recurso a C# e SQL e aos pacotes de *Software Genie & Smile* [3].

A aplicação foi usada pela primeira vez no ano letivo 2013/2014 em Cálculo III e o *feedback* dos alunos nas aulas e através de inquérito é muito positivo, em particular pela solicitação da disponibilização de um maior número de exercícios de escolha múltipla com resolução detalhada. Apesar de serem resultados preliminares, os indicadores mostram que o estudo autónomo via *Web*, como meio complementar às aulas, está a ser bem acolhido pelos estudantes [3].

STACK

Parafraseando Paiva [10], o STACK (*System for Teaching and Assessment using a Computer algebra Kernel*) é um sistema gratuito de construção de testes de Matemática online desenvolvido na Universidade de *Birmingham* no Reino Unido. Os sistemas de avaliação online presentes nas plataformas de ensino/aprendizagem convencionais, por exemplo *Blackboard* e *Moodle*, são limitados no tipo de perguntas que podem incluir nos seus testes. Perguntas onde existe uma grande variedade de respostas corretas ou a resposta correta pode ser dada de muitas formas diferentes não podem ser implementadas nestas plataformas. Neste sistema, é possível apresentar uma resposta sob a forma de uma expressão matemática. Para manusear as expressões matemáticas e comparar respostas, o sistema utiliza o software livre Maxima. Como o sistema permite que as perguntas possam depender de parâmetros aleatórios, os alunos podem praticar inúmeras vezes perguntas semelhantes por forma a superar as dificuldades.

WebWork

O *WebWork* é uma ferramenta que permite que os alunos, via *Web*, resolvam trabalhos de casa. Este sistema permite ao aluno saber se a resposta a um problema está correta; caso não esteja, tem a possibilidade de tentar resolver novamente o problema o número de vezes que necessitar, permitindo-lhe uma melhor compreensão do tema.

O sistema permite, ao professor, criar conjuntos de problemas individualizados, tendo os alunos diferentes versões de cada problema. O professor tem acesso às estatísticas da resolução dos mesmos, o que permite criar planos de aula mais personalizados e desta forma um melhor acompanhamento dos alunos.

Este sistema foi criado por Arnold Pizer e Gage Michael do Departamento de Matemática da Universidade de *Rochester*, para o ensino da matemática, sendo apoiado pela *Mathematics Association of America* que realiza e divulga pesquisas para a melhoria na educação matemática, disponibilizando uma grande variedade de materiais, por forma a melhorar o desempenho dos membros do corpo docente na experiência educacional com os alunos [15].

Maple TA

O Maple TA é uma ferramenta baseada na *Web*, de fácil manuseamento para a criação de trabalhos e testes, que permite em tempo real ter acesso à avaliação das respostas e ao respetivo desempenho dos alunos.

Com as potencialidades do Maple, o professor tem total liberdade na formulação das questões bem como na obtenção das respostas às mesmas, tendo ainda acesso a sofisticadas ferramentas de visualização que possibilitam a introdução de gráficos. Se tivermos, por exemplo, uma questão de resposta livre, não há a obrigatoriedade da resposta correta ser igual à solução mencionada, basta simplesmente que seja equivalente. Um modelo de questão pode-se transformar em milhares de perguntas semelhantes proporcionando uma maior individualização dos trabalhos de casa aos alunos. Se o aluno responder de forma incorreta a uma questão, esta é adaptada numa versão mais simples proporcionando ao aluno uma melhoria na aprendizagem, antes de tentar resolver novamente a pergunta original [15].

Escola Virtual

O projeto da Porto Editora Escola Virtual disponibiliza vários recursos, desde vídeos, aplicações dinâmicas e exercícios de escolha múltipla entre outros; estes recursos são ótimos numa primeira abordagem ou no primeiro contacto que o aluno tem com um determinado conteúdo, dada a dinâmica e o aspeto visual dos mesmos.

The Khan Academy

Surge nos Estados Unidos da América, pela mão de Salman Khan, "The Khan Academy"[20], uma organização com o intuito de fornecer a qualquer pessoa e em qualquer lugar, uma educação de alta qualidade. Esta organização sem fins lucrativos, teve como embrião pequenos vídeos colocados no *YouTube* onde eram apresentadas, de forma simples, algumas explicações de Matemática. O sucesso destes vídeos, deu origem a um portal com exercícios que testam os objetivos de cada lição, permitindo, com recurso a métricas inteligentes, o acompanhamento do seu progresso. É de salientar que este portal é de livre acesso, onde os professores se podem inscrever, registar os seus alunos e monitorizar deste modo os seus progressos de aprendizagem. O financiamento por parte da *Google* e da *Microsoft*, permitiu a sua expansão para todo o mundo, estando os seus vídeos traduzidos em várias línguas, entre elas o português; os seus vídeos expandiram-se para outras áreas das ciências e humanidades e para os diferentes graus de ensino [15].

1.2 MEGUA

O *Sage Mathematics* é um *software open source* para a matemática ao nível da computação algébrica, numérica e gráfica, para além de conter uma enorme biblioteca e um sistema de acesso a bibliotecas de funções matemáticas já existentes. Grande parte destas bibliotecas de funções matemáticas foi desenvolvida para o sistema *Linux* pelo que a sua disponibilização em *Windows* ainda está em desenvolvimento. Com recurso à criação de *Software Packages* é possível aumentar as funcionalidades do *software Sage Mathematics*. Neste âmbito foi criado o *Software Package* denominado MEGUA que permite a criação de exercícios parametrizados por valores ou funções, escritos na linguagem tipográfica LaTeX recorrendo ao ambiente *Sage Mathematics* [1]. A linguagem de programação utilizada é o *Python*, que não requer a declaração do tipo de variáveis nas rotinas, para além de estar programado para o acesso às bibliotecas *Sage Mathematics*, tornando-se deste modo de fácil utilização. Porque, nos tempos atuais, a maioria das pessoas usa computadores com *Windows*, *tablets* e já existem hábitos de programação na nuvem (*Cloud Computing and Archive*), houve necessidade de criar o *Sage Notebook* para o *Software Package* MEGUA para a criação e reutilização de exercícios parametrizados. Entretanto, surgiu uma versão modernizada e com filosofia de segurança e sistema de partilha de projetos diferente do *notebook*, denominado *Sage Mathematics Cloud* (SMC) [17].

Nesta secção explicamos os procedimentos necessários para elaboração de um exercício, algumas das funções que integram a biblioteca do *Sage Mathematics*, bem como algumas definidas no MEGUA e as criadas no decorrer deste trabalho.

1.2.1 Como criar um exercício

Para criar um exercício de escolha múltipla com recurso ao *Sage Mathematics* e ao pacote de software MEGUA deve-se criar um *worksheet*, constituído por três células.
A primeira célula deve conter as instruções da tabela 1.2.1.

1.	#auto
2.	from megua.all import *
3.	meg = MegBookWeb("/home/nbuser/mp2013web.sqlite")

Tabela 1.2.1: célula 1

1. Comentário (iniciado pelo símbolo #)

2. Esta instrução importa o pacote *open source* MEGUA e as suas funções.

3. mp2013web.sqlite é a base de dados que contém todos os exercícios criados no âmbito do mestrado em matemática para professores, edição de 2013/14. A instrução meg importa a informação contida nesta base de dados.

Na segunda célula (tabela 1.2.2) é descrito o nome do exercício, as chaves dos exercícios que serão disponibilizados na plataforma SIACUA e o curso a que se destina.

```
meg.siacua(exname="E97I20_Ineqlog_005",ekeys=[42, 43, 44, 46, 49],
sendpost=True,course="matsec",usernamesiacua="***")
```

Tabela 1.2.2: célula 2

Na terceira célula (tabela 1.2.3) é, efetivamente, criado o exercício de escolha múltipla, constituído essencialmente por 5 secções: uma breve descrição, informação a ser enviada para o SIACUA, enunciado, escolha múltipla e respetiva resolução em $HTML$ e programação Python.

1.	meg.save(r”
2.	%summary Demonstração; Escolha múltipla Este exercício efetua o produto de dois números inteiros.
3.	SIACUAstart level= 3; slip= 0.2; guess= 0.25; discr = 0.3; concepts = $[(4422, 0.8), (4421, 0.2)]$ SIACUAend
4.	%problem Exemplo
5.	O resultado de $a1 \times b1$ é:
6.	%answer
7.	<multiplechoice> <choice> vresposta </choice> <choice> errada1 </choice> <choice> errada2 </choice> <choice> errada3 </choice> </multiplechoice>
8.	O resultado de $a1 \times b1$ é $vresposta$.
9.	class $E12X34_numeros_$001(Exercise):
10.	$defmake\_random(s):$
11.	$s.a1 = ur.iunif(1, 10)$ $s.b1 = ur.iunif(20, 30)$
12.	def solve(s):
13.	$s.vresposta = s.a1 * s.b1$
14.	$s.errada1 = s.vresposta * 2$ $s.errada2 = s.vresposta + 2$ $s.errada3 = s.vresposta + 4$

Tabela 1.2.3: célula 3

1. Esta instrução grava o exercício descrito.

2. Breve descrição dos conteúdos do exercício.

3. Informação a ser enviada para o SIACUA:

   - level=Nível de dificuldade (entre 1 e 5);
   - slip=Probabilidade de o aluno errar na questão quando sabe o assunto;
   - guess=Probabilidade de o aluno adivinhar a resposta sem saber nada do assunto (0.25 se são quatro opções);
   - discr=Fator de descriminação da questão;
   - concepts = [(4422, 0.8),(4421, 0.2)]a indicação da percentagem dos conceitos envolvidos (4422 - função logaritmo 80%, 4421 - função exponencial 20%).

   Estes parâmetros são utilizados no modelo Bayesiano de utilizador [17].

4. % problem, inicia o enunciado do exercício Exemplo.

5. Corpo do enunciado do exercício.

6. Indica o início da resposta ao problema.

7. Trata-se do bloco de escolha múltipla, com qualquer número de opções ($< choice >$), em que a primeira opção é sempre a única resposta correta.

8. Este é o bloco, onde será descrita a resolução pormenorizada do exercício, desde o ponto 4 até ao presente ponto, a escrita é feita em LaTeX e $HTML$.

9. O exercício tem o nome de classe $E12X34\_numeros\_001$ no qual $E12X34$ designa o código MSC (*Mathematics Subject Classification*) mais apropriado ao exercício. Aqui inicia-se o bloco programação em Python, que consiste em dois blocos fundamentais: $make\_random(s)$ e $solve(s)$.

10. Em $make\_random(s)$ são gerados todos os parâmetros que ocorrem no enunciado do problema.

11. Nesta instrução $s.a1$ e $s.b1$ são os parâmetros $a1$ e $b1$ que ocorrem no texto do enunciado e da resolução do exercício. Neste exemplo $a1$ toma os valores naturais de 1 a 10.

12. Em $solve(s)$ consta toda a programação necessária à resolução do exercício e respostas da escolha múltipla.

13. A função $s.vresposta$ obtém o produto entre os parâmetros $a1$ e $b1$, sendo que o valor obtido é a resposta correta.

14. As funções $s.errada$ são as várias hipóteses de respostas erradas que são concretizadas na escolha múltipla.

A escolha dos domínios das sucessivas transformações ao longo da resolução do problema, é de extrema importância. A escolha dos parâmetros deve evitar cálculos fastidiosos que funcionam como distratores à resolução do exercício, bem como prever situações de impossibilidade, por exemplo, no quociente $\frac{x}{y}$, o y deverá tomar um valor diferente de zero.

Cada exercício ao ser compilado, gera um ficheiro $HTML$, ao qual corresponde uma chave, *ekey*, que pode posteriormente ser usada para obter essa concretização específica [18].

1.2.2 Biblioteca do Python/Sage Mathematics/MEGUA

Esta secção tem como finalidade dar a conhecer alguns dos comandos de programação frequentemente utilizados na elaboração dos exercícios, ilustrados com alguns exemplos.

Geração aleatória de um número inteiro

1. Com recurso ao comando $ur.unif(a,b)$, é possível gerar aleatoriamente um número inteiro entre a e b. O parâmetro c_1 toma valores inteiros compreendidos entre -5 e 5 inclusive.

```
def make_random(s):
    s.c1 = ur.iunif(-5,5)
```

2. Com recurso ao comando $ur.unif\_nonset(a,b,[...])$, é possível gerar aleatoriamente um número inteiro entre a e b com exceção dos valores em [...]. O parâmetro b_1 toma valores inteiros compreendidos entre -5 e 5 inclusive, com exceção dos números inteiros, -1, 0 e 1.

```
s.b1 = ur.iunif_nonset(-5,5,[-1,0,1])
```

Geração aleatória de um elemento de uma lista previamente definida

1. O comando $ZZ.random\_element(n)$, gera um índice para uma lista pré-definida com n elementos. O parâmetro a_1 toma um valor aleatório de entre a lista l=[2,e,3,4,5,10].

```
l=[2,e,3,4,5,10]
id=ZZ.random_element(6)
s.a1=l[id]
```

2. Com recurso ao comando $choice([r'...', r'...', ...])$ é possível, dada uma lista previamente elaborada, gerar aleatoriamente um elemento dessa mesma lista. As designações das variáveis devem sugerir a sua função. Assim, em

   ```
   s.ord1=choice([r'\le',r'<',r'\ge',r'>',r'=']),
   ```

   ord representa um sinal de ordem, escolhido de entre o conjunto $\{\leq, <, \geq, >, =\}$. Como em LaTeX o sinal $\leq$ escreve-se \le e o $\geq$ escreve-se \ge, o conjunto inclui estes dois "sinais", e escreve-se r'\le' para que, efetivamente, seja interpretado como tal.

Tomada de decisões

Como em todas as linguagens de programação, a tomada de decisão pode fazer-se recorrendo às instruções $if....else....$; caso se pretendam descriminar mais situações usa-se entre o if e o $else$ o comando $elif$. No exemplo seguinte, pretende-se resolver uma inequação do tipo $a_1\ x\ ord1\ b_1$, onde "$ord1$" é um sinal de desigualdade gerado aleatoriamente da lista $\{\leq, <, \geq, >\}$.
Por exemplo, $2x \leq -5$ ou $-2x \leq -5$. No 1.º caso o sinal de desigualdade não se altera, isto é, $x \leq -\frac{5}{2}$, mas no 2.º caso a resposta será $x \leq -\frac{5}{2}$. Com recurso ao comando if ....else...., se o coeficiente de x é positivo, o sinal de desigualdade mantém-se, caso contrário inverte-se. Com recurso ao comando if ....elif....else...., temos a possibilidade de executar a função anterior para os 4 sinais de desigualdade distintos.

```
    a1x ord1 b1 \Leftrightarrow x sgn1 \frac{b1}{a1}
def make_random(s):
    s.ord1=choice([r'\le',r'<',r'\ge',r'>'])
def solve(s):
    if s.ord1==r'\le':
        if s.a1>0:
```

```
            s.sgn1=r'\le'
        else:
            s.sgn1=r'\ge'
    elif s.ord1==r'<':
        if s.a1>0:
            s.sgn1=r'<'
        else:
            s.sgn1=r'>'
    elif s.ord1==r'\ge':
        if s.a1>0:
            s.sgn1=r'ge'
        else:
            s.sgn1=r'\le'
    else s.ord1==r'>':
        if s.a1>0:
            s.sgn1=r'>'
        else:
            s.sgn1=r'<'
```

Seleção de um texto, entre vários previamente definidos

Surge por vezes a necessidade de escrever uma frase de entre várias definidas, o que é possível de duas formas distintas.

1. < showone variável >
   < thisone > Texto 1. < /thisone >
   < thisone > Texto 2. < /thisone >
   < thisone > Texto 3. < /thisone >
   < /showone >

Ver-se-á exemplificado de seguida um problema onde se classifica uma equação como: possível e determinada, possível indeterminada ou impossível.

```
A equação a1x = b1 é
<showone casos1>
<thisone>  possível e determinada.  </thisone>
<thisone>  possível e indeterminada.</thisone>
<thisone>  impossível.              </thisone>
</showone>
def make_random(s):
    s.a1 = ur.iunif(0,1)
    s.b1 = ur.iunif(0,1)
def solve(s):
  if s.a1==0 and s.b1==0:
      s.casos1=1
  elif s.a1==0 and s.b1==1:
      s.casos1=2
  else:
      s.casos1=0
```

2. variável@c{"Texto 1","Texto 2","Texto 3"}.

O comando *variavel@c*{....} só funciona com carateres de texto. Não funciona com fórmulas ou outros símbolos, ao contrário do comando "*showone*".

Ver-se-á exemplificado, de seguida, o mesmo problema anterior, agora com recurso ao comando *variavel@c*{....} :

```
A equação a1x = b1
é casos1@c{"possível e determinada.",
"possível e indeterminada.","impossível."}
   def make_random(s):
       s.a1 = ur.iunif(0,1)
       s.b1 = ur.iunif(0,1)
   def solve(s):
     if s.a1==0 and s.b1==0:
         s.casos1=1
     elif s.a1==0 and s.b1==1:
         s.casos1=2
     else:
         s.casos1=0
```

As frases geradas ficam do seguinte modo:

a) A equação $0x = 0$ é possível e indeterminada.

b) A equação $0x = 1$ é impossível.

c) A equação $x = 0$ é possível e determinada.

d) A equação $x = 1$ é possível e determinada.

Geração de gráficos

O *software Sage mathematics* permite o traçado de gráficos que podem ser incluídos em qualquer *worksheet*. Por exemplo, para traçar o gráfico de $g(x) = 2^x$ consideram-se as duas etapas seguintes:

1. Na parte pretendida do texto coloca-se o nome do gráfico (fig1).

   <center>

   fig1

   </center>

2. Na parte da programação (make_random ou solve), por exemplo:

   s.inf1 = -1 #limite inferior da janela de visualização

   s.sup1 = 1 #limite superior da janela de visualização

   g1 = plot(2ˆ(x),x, s.inf1, s.sup1, color='blue')

   s.fig1 = s.sage_graphic(g1, "fig1", dimx=7, dimy=7) #dimensões do gráfico 7cm por 7cm

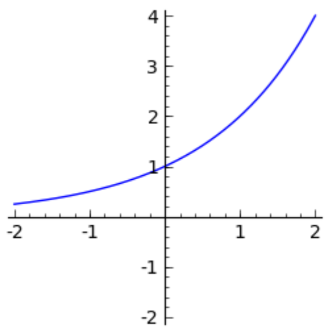


Figura 1

Funções genéricas

As funções exponencial e logarítmica constam da biblioteca do *Sage Mathematics*. Contudo, quando se pretende utilizar o *Sage* para efetuar cálculos com logaritmos a instrução log(b, a) devolve $\dfrac{\ln b}{\ln a}$. Em certos casos é necessário manter a estrutura inicial $\log_a b$, daí que tenha surgido a necessidade de criar o comando logb(bˆc,a,factorize=true), que calcula e simplifica o valor do logaritmo de base a calculado em $b\hat{\ }c$, do seguinte modo $c \times logb(b, a)$, onde $logb(b, a)$ é o logaritmo de b na base a.

1.2.3 Comandos do MEGUA desenvolvidos neste trabalho

Serão descritas nesta secção técnicas utilizadas para ultrapassar determinadas dificuldades, que foram surgindo ao implementar novos exercícios. Estas técnicas serão ilustradas com alguns exercícios.
Ver-se-á de seguida como ultrapassar os seguintes problemas:

Como evitar dois sinais consecutivos

É possível definindo funções auxiliares como se exemplifica no que se segue.

1. Função afim "$m1$"

   Escrevendo em LaTeX $f(x) = a_1^{b_1 x + c_1}$, surge por vezes a seguinte situação:

   $$f(x) = 4^{-2\,x+-5},$$

   contudo, se usarmos a função $m1$ descrita como

   $$s.m1 = s.b1 * x + s.c1 \tag{1.1}$$

   em vez de usar $a_1^{b_1 x + c_1}$ no LaTeX , escreve-se $f(x) = a_1^{m1}$, e obtém-se

   $$f(x) = 4^{-2\,x-5}.$$

   Ao longo do texto, quando nada for dito em contrário $m1$ é dado por (1.1).

2. Comando "sgn" (sinal)

   Considerando $f(x) = e1 + f1 \times a1^{m1}$, surge por vezes a situação:

   $$f(x) = -2 + -2 \times 4^{-2\,x-5}.$$

   Se usarmos o comando $sgn2$ descrito por

```
if s.f1<0:$
    s.sgn2='-'# sgn2 tomará o sinal do parâmetro f1
else:
    s.sgn2='+'# sgn2 tomará o sinal do parâmetro f1
```

e sendo $f11$ o valor absoluto de $f1$, a expressão $f(x) = e1 + f1 \times a1^{m1}$ será substituída por

$$f(x) = e1\, sgn2\, f11 \times\ a1^{m1},$$

obtendo-se na concretização

$$f(x) = -2 - 2 \times 4^{-2\,x-5}.$$

Comando "*card*"

No decorrer da resolução parametrizada de uma equação com exponenciais do tipo $a_1^{b_1 x+c_1} = d_1$, surgiu a questão que se $d1 \leq 0$ a equação seria impossível. Contudo, $d1 > 0$ a resolução teria que conduzir a $x = \dfrac{\log_{a_1} d_1 - c_1}{b_1}$. Perante este desafio, seria necessário, nalgumas situações parar com a resolução e noutras continuar. Surgiu então a seguinte ideia: o símbolo # serve na programação Python/Sage para introduzir comentários, enquanto que o símbolo % introduz comentários na parte correspondente a linguagem tipográfica LaTeX. Poderia então, no caso da equação ser impossível, no início de cada uma das restantes linhas da resolução ser atribuído o sinal % e passariam a comentários, que na prática corresponderia a terminar a resolução da equação. Deste modo é criado o comando "*card*" (cardinal):

```
if s.d1<=0:
    s.card1='%'
else:
    s.card1=''
```

Aplicou-se o comando "*card*" em diversas situações:

1. Na resolução de equações com exponenciais, descrito pormenorizadamente no Exercício E97I20 eqexp 023.

2. Na simplificação de frações, descrito no Exercício E97I20 eqexp 021.

3. Na geração de problemas com mais de uma questão, descrito no Exercício E97I20 aplicalog 036.

4. Na escolha de texto, descrito no Exercício E97I20 aplicalog 039.

O comando "*card*" é na sua essência um comando de escolha de texto tal como os comandos $< showone >$ e variável@c{....}, com vantagens e desvantagens relativamente a estes.

Vantagens do comando "*card*"

1. O comando "*card*" funciona em descrições matemáticas, isto é, entre os símbolos $...$, tem a vantagem de fazer escolha de expressões matemáticas ao contrário do comando variável@c{....}, que só funciona com letras e espaços. Há necessidade de recorrer à instrução \text{} para a introdução de texto entre $...$.

2. Comparando com o comando $< showone >$ tem uma programação mais simples.

Desvantagem do comando "*card*"

1. O comando "*card*" é indicado para duas opções "mostra ou esconde", enquanto que os comandos $< showone >$ e variável@c{....} não têm limitações de opções.

2. Se a quantidade de texto e expressões for extenso, o comando $< showone >$ é de utilização mais simples. Se o texto for exclusivamente palavras e espaços, o comando variável@c{....} tem uma programação mais simples.

   Por exemplo, para escolher entre as palavras “duplica”e “triplica”recorreu-se ao comando “*card*”.

   ```
   $card1 \text{duplica.}$ $card2 \text{triplica.}$
   ```

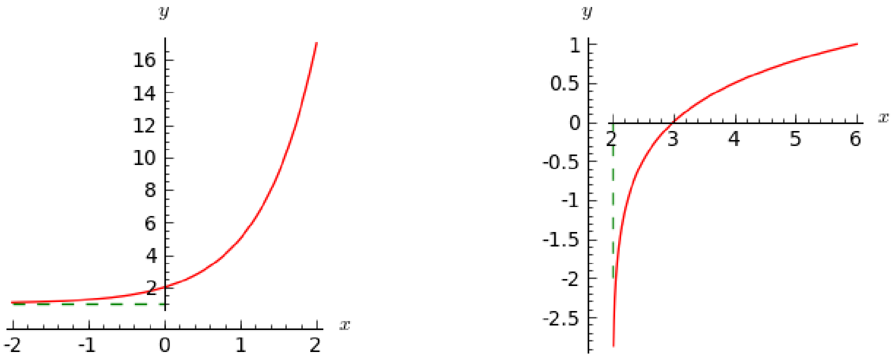
   ```
       def solve(s):
           if s.a1==2:
               s.card1=''
               s.card2='%'
           else:$
               s.card1='%'
               s.card2=''
   ```

   Sendo $a1 = 2$, a função escreve “duplica”, caso contrário escreve ”triplica”. Há necessidade de recorrer à instrução \text{} para a introdução de texto entre $...$.

O comando “*card*” complementa os comandos de escolha de texto, não os substituindo.

Melhoria dos eixos coordenados nos gráficos em programação *Python/Sage*

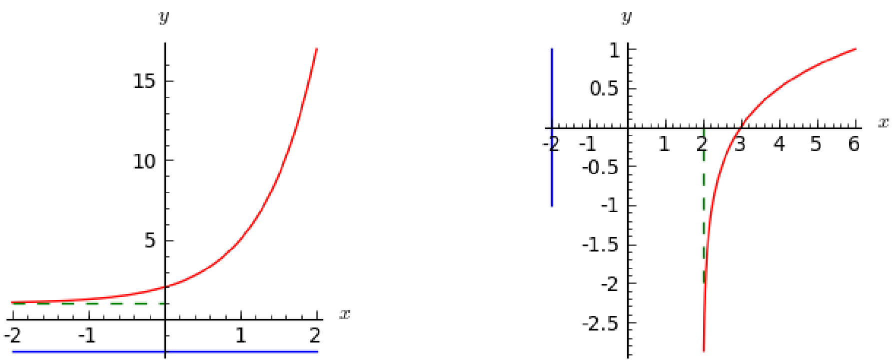
Por vezes ao representar graficamente uma função exponencial ou logarítmica, os eixos coordenados surgem da seguinte forma:



(a) exp (b) log

Figura 2: origem mal definida

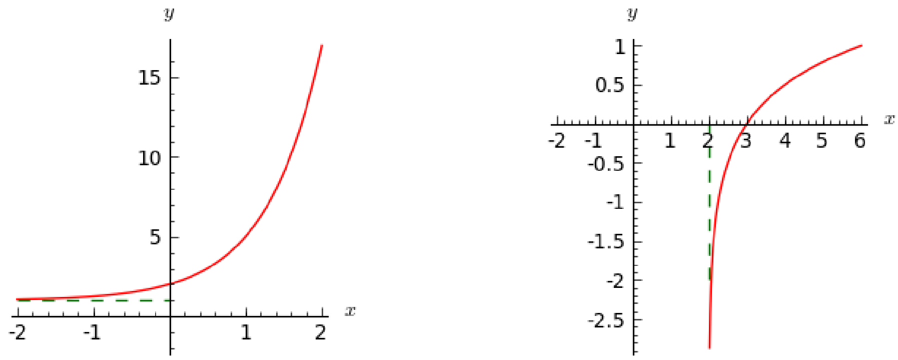
Verificou-se que esta situação, ocorre sempre que o gráfico da função pertença a um ou dois quadrantes.
Perante este novo desafio, surgiu a ideia de representar retas pelos quadrantes, onde não está representado o gráfico da função. No caso da função exponencial representou-se uma reta horizontal que passe pelos 3.º e 4.º quadrante e uma reta vertical que passe pelos 2.º e 3.º quadrantes no caso da função logarítmica. Deste modo surgem, respetivamente, os gráficos:



(a) exp (b) log

Figura 3: reta auxiliar

Estando resolvido o problema dos eixos coordenados, faltaria encontrar uma solução para ocultar as retas horizontal e vertical dos gráficos.
A solução encontrada residiu na mudança de cor das retas, colocando a cor branca, que colocaria impercetível a representação das mesmas, como se verifica nos gráficos seguintes.



(a) exp (b) log

Figura 4: reta auxiliar invisível

Definir intervalos

É possível definir intervalos de números reais de duas formas distintas, com recurso a quatro instruções (programação vertical) ou a uma instrução (programação horizontal). Se quisermos representar, por exemplo, o intervalo

$$[b11, +\infty[\,,$$

poderemos programar do modo que se segue:

Programação vertical

Houve necessidade de criar as funções "*pesq*" e "*pdir*" para os parênteses retos (respetivamente esquerdo e direito) e as variáveis "*vesq*" e "*vdir*" para os extremos do intervalo, respetivamente esquerdo e direito.

```
$$ pesq vesq , vdir pdir $$
```

```
s.vesq1=s.b11
s.vdir=r'+\infty'
s.pesq=r'\left['
s.pdir=r'\right['
```

Programação horizontal

É necessário previamente definir a função intervalo do seguinte modo,

```
def intervalo(s,pesq,vesq,vdir,pdir):
  return pesq + latex(vesq) + "," + latex(vdir)+ pdir
```

construindo, de seguida, o intervalo desejado, rcorreta:

```
s.rcorreta=s.intervalo(r'\left[', s.b11, +Infinity,
                       r'\right[')
```

A criação destes comandos facilitou a implementação de novos exercícios, possibilitando um gerador mais amplo, bem como a redução do tempo de programação de um exercício.

Capítulo 2

Função exponencial e função logarítmica

2.1 Introdução

Neste trabalho construiram-se exercícios envolvendo funções exponenciais e logarítmicas. No que se segue faz-se uma breve referência a estas funções, para o seu enquadramento no texto, e apresentam-se os exercícios.

2.1.1 Função Exponencial

É do nosso conhecimento que se tivermos uma potência de expoente racional sabemos qual o seu significado. Sejam $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, $a^{\frac{p}{q}}$ com $a > 0$ tem a seguinte definição $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$. Assim, se $x \in \mathbb{Q}$ (qualquer número racional se pode representar na forma $\frac{p}{q}$ com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$) e $a > 0$, a^x está bem definida. Contudo, se $x \in \mathbb{R}\backslash\{\mathbb{Q}\}$, ou seja, x irracional, a definição não é tão óbvia[13].

Dado qualquer $x \in \mathbb{R}\backslash\{\mathbb{Q}\}$ existe $(r_n)_n$ sucessão de números racionais

$r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, com $p_n \in \mathbb{Z}$ e $q_n \in \mathbb{N}$ tal que

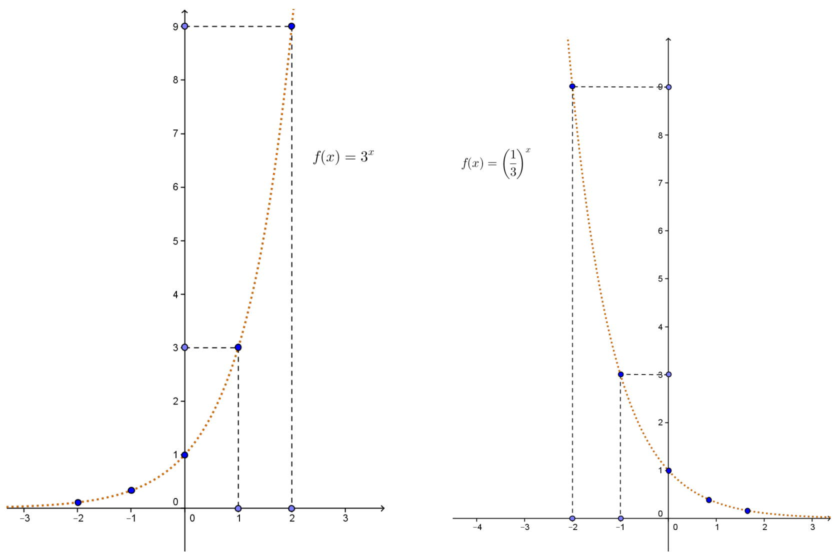
$$r_n \longrightarrow x.$$

Define-se a^x (com $a > 0$) como sendo o limite da sucessão $(a^{r_n})_n$,

$$a^x = \lim_{n \longrightarrow +\infty} a^{r_n}.$$

Se $a = 1$ temos a função constante $f(x) = 1$.

Assim, dado $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$ define-se função exponencial, de domínio $\mathbb{R}$, escrita na forma $f(x) = a^x$. Esta função é estritamente crescente se $a > 1$ e estritamente decrescente se $0 < a < 1$[12].



(a) $a > 1$ (b) $0 < a < 1$

Figura 1: função exponencial

A função exponencial tem por contradomínio o conjunto $\mathbb{R}^+$.

Caso $a = e$ [1] a função definida por $f(x) = e^x$ designa-se por exponencial natural.

[1]Recorde-se que $e = \lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

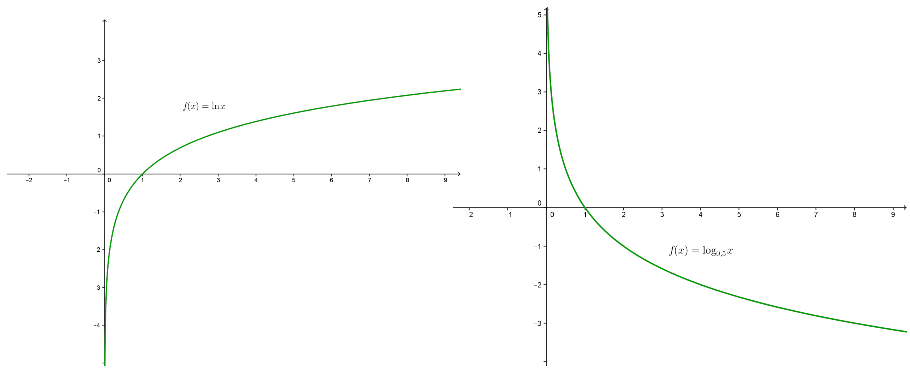
2.1.2 Função Logarítmica

Como a função exponencial é estritamente monótona, é injetiva e, por conseguinte tem inversa. Designa-se por função logarítmica a inversa da função exponencial,

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \log_a x.$$

Com $\log_a x$ a satisfazer a relação $a^y = x \Leftrightarrow y = \log_a x$ ($x \in \mathbb{R}^+$ e $y \in \mathbb{R}$). Como a inversa de uma função estritamente crescente (decrescente) é estritamente crescente (decrescente), podemos afirmar que a função definida por $f(x) = \log_a x$ é estritamente crescente se $a > 1$, e estritamente decrescente se $0 < a < 1$.



(a) $a > 1$ (b) $0 < a < 1$

Figura 2: função logarítmica

Se $a = e$ escreve-se $\log_e(x) = \ln x$ e designa-se por logaritmo natural. A notação $\log(x)$ destina-se ao logaritmo na base 10, designado por logaritmo decimal.

O gráfico da função logarítmica é a reflexão do gráfico da função exponencial com eixo de simetria a bissetriz dos quadrantes ímpares ($y = x$) [14].

Na Figura 3 exemplifica-se com a função definida por $f(x) = 3^x$ e a sua inversa dada por $f^{-1}(x) = \log_3(x)$.

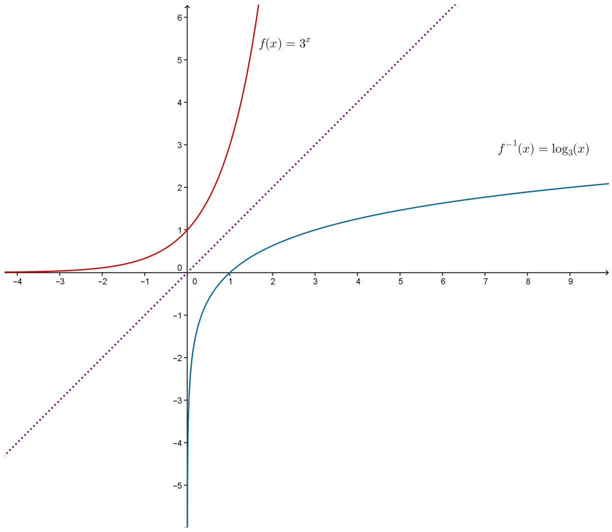


Figura 3

2.2 Apresentação de exercícios

No ensino secundário, o programa em vigor sugere o estudo da funções exponencial e logarítmica de base $a > 1$, portanto os exercícios elaborados só contemplam estes casos.

Observação 2.2.1. O estudo das funções a^x e $\log_a x$ com $0 < a < 1$ é semelhante, uma vez que para $a > 1$ vem $o < \dfrac{1}{a} < 1$ e $\left(\dfrac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$, enquanto que $\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$

Para cada exercício será apresentado a sua resolução parametrizada, a explicação da sua programação (caso surjam situações distintas e inovações inseridas) e concretizações do mesmo.

Na escolha das opções de resposta consideram-se alguns dos erros frequentemente cometidos pelos alunos. Ao criar diferentes opções de resposta corre-se o risco de ocorrer opções iguais. Esta dificuldade foi por vezes ultrapassada restringindo alguns parâmetros.

Os exercícios centram-se, essencialmente, à volta do estudo das funções do tipo

$$f_2(x) = e_1 + f_1 \times a_1^{b_1 x + c_1}$$

e

$$f_3(x) = e_1 + f_1 \times \log_{a_1}(b_1 x + c_1),$$

verificando-se por vezes alterações pontuais.

As variáveis e parâmetros, na maioria dos exercícios neste trabalho, têm uma estrutura comum como se descreve a seguir. O objetivo é que os alunos entendam o comportamento destas funções, daí que a escolha de parâmetros seja relativamente restrita evitando cálculos fastidiosos.

```
def make\_random(s):
    x=var('x')
    l=[2,e,3,4,5,10]
    id=ZZ.random_element(6)
    s.a1=l[id]
    s.b1 = ur.iunif_nonset(-5,5,[-1,0,1])
    s.c1 = ur.iunif(-5,5)
    s.e1 = ur.iunif(-5,5)
    s.f1 = ur.iunif_nonset(-5,5,[-1,0,1])
```

- A letra x é descrita como variável do nosso exercício.
- O parâmetro $a1$(base da função exponencial ou logarítmica) toma um valor aleatório de entre a lista l=[2,e,3,4,5,10].
- Os parâmetros $c1$ e $e1$ tomam valores inteiros compreendidos entre -5 e 5 inclusive.
- Os parâmetros $b1$ e $f1$ tomam valores inteiros compreendidos entre -5 e 5 inclusive, com exceção dos números inteiros, -1, 0 e 1.

2.2.1 Domínio da função exponencial

Como a função exponencial definida por $f(x) = a^x$ tem por domínio $\mathbb{R}$, qualquer função do tipo $f(x) = a^{g(x)}$ terá por domínio, o domínio da função g.

Elaboraram-se exercícios onde se pede para determinar o domínio de funções com expressão analítica do tipo $e_1 + f_1 \times a_1^{g(x)}$, onde $g(x) = \sqrt{b_1x + c_1}$ e $g(x) = \dfrac{d_1x + g_1}{b_1x + c_1}$.

Exercício E97I20 dominioexp 030

Neste exercício, o conceito a explorar é o domínio de uma função definida por

$$f(x) = e_1 + f_1 \times a_1^{\sqrt{b_1x+c_1}}.$$

O domínio da função f é o domínio de $g(x) = \sqrt{b_1x + c_1}$ ou seja,

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : b_1x + c_1 \geqslant 0\}.$$

A determinação do domínio envolve a resolução da inequação

$$b_1x + c_1 \geqslant 0 \Leftrightarrow b_1x \geqslant -c_1.$$

Como o sinal da desigualdade vai depender do sinal de b_1, deve ter-se em conta este facto contemplado na programação do exercício.

```
Domínio da função $f$, $D_f$, é $$D_f=\{x\in\mathbb{R}:m1\ge 0\}
= pardominioesq1 dominioesq1 , dominiodta1 pardominiodta1$$
O intervalo obtido é o conjunto solução da inequação
$$m1\ge 0 \Leftrightarrow m1\ge 0 b1x\ge sgn1 e11
\Leftrightarrow x sgn3 sgn2 bc11$$
```

Concretizando, com dois exemplos

1. $b_1 > 0$

   Considere a função f definida por

   $$f(x) = 5 + 2 \times 3^{\sqrt{4\,x+4}}$$

   Domínio da função f, D_f, é

   $$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 4\,x + 4 \geq 0\} = [-1, +\infty[$$

   O intervalo obtido é o conjunto solução da inequação

   $$4\,x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow 4x \geq -4 \Leftrightarrow x \geq -1$$

2. $b_1 < 0$

   Considere a função f definida por

   $$f(x) = -2 - 2 \times 4^{\sqrt{-2\,x-5}}$$

   Domínio da função f, D_f, é

   $$D_f = \{x \in \mathbb{R} : -2\,x - 5 \geq 0\} = \left]-\infty, -\frac{5}{2}\right]$$

   O intervalo obtido é o conjunto solução da inequação

   $$-2\,x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq 5 \Leftrightarrow x \leq -\frac{5}{2}.$$

Para resolver a inequação

$$b_1 x + c_1 \geqslant 0 \Leftrightarrow b_1 x \geqslant -c_1,$$

é necessário adicionar ao segundo membro o simétrico de c_1.

Assim, no campo *solve(s)*, onde surgem as condições necessárias à resolução, definem-se novos parâmetros,

```
s.e11=abs(s.c1)
if s.c1<0:
    s.sgn1=''
else:
    s.sgn1='-'
```

onde $e11$ é o valor absoluto de $c1$ e $sgn1$ é um sinal posicional que se omite se $-c1 > 0$ e é o sinal "-"se $-c1 < 0$. Estes novos parâmetros definem-se para, por exemplo, escrever
$4\,x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow 4\,x \geq -4$ em vez de $4\,x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow 4\,x \geq - + 4$
ou $-2\,x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow -2\,x \geq 5$ em vez de $-2\,x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow -2\,x \geq +5$.
O sinal de b_1 influencia a resolução. Se $b_1 > 0$, resulta a inequação $x \geqslant -\frac{c_1}{b_1}$, mas se $b_1 < 0$ vem $x \leqslant -\frac{c_1}{b_1}$. Para ultrapassar esta situação definiram-se os parâmetros,

```
s.bc1=-s.c1/s.b1
s.bc11=abs(s.bc1)
if s.bc1>0:
    s.sgn2='+'
else:
    s.sgn2='-'
if s.b1>0:
    s.sgn3='\ge'
else:
    s.sgn3='\le'
```

onde $bc1 = -\frac{c1}{b1}$, $bc11$ é o valor absoluto de $bc1$ e $sgn2$ o sinal definido como no caso anterior.

O comando $sgn2$ pode ser eliminado, mas como este foi um dos primeiros exercícios elaborados foi ainda utilizado. O comando $sgn3$ representa o sinal de desigualdade, mantendo-se inalterado se o valor de $b1$ é positivo e invertendo-se caso $b1$ seja negativo, como se exemplifica no que se segue:

$$4x \geq -4 \Leftrightarrow x \geq -1$$

$$-2x \geq 5 \Leftrightarrow x \leq -\frac{5}{2}.$$

Na escolha múltipla,

```
<multiplechoice>
<choice>
$$ D_f= pardominioesq1 dominioesq1 , dominiodta1 pardominiodta1 $$
</choice>
<choice>
$$  D_f=parerradaesq1 erradaesq1 , erradadta1 parerradadta1  $$
</choice>
<choice>
$$ D_f= parerradaesq1 erradaesq2 , erradadta2 parerradadta2$$
</choice>
<choice>
$$ D_f=parerradaesq3 erradaesq3 , erradadta3 parerradadta3 $$
</choice>
</multiplechoice>
```

coloca-se em 1.º lugar a resposta correta seguida das opções erradas (no mínimo de três).

Houve necessidade de criar as variáveis pardominioesq1 e pardominiodta1 para os parênteses retos do intervalo e as variáveis dominioesq1 e dominiodta1 para os extremos do intervalo.

Para as opções erradas da escolha múltipla, de forma similar criaram-se as variáveis parerradaesqi, erradaesqi , erradadtai parerradadtai, com $i = 1, 2, 3$, como se descreve a seguir.

```
if s.b1>0:
    s.dominioesq1=s.bc1
    s.dominiodta1=r'+\infty'
    s.pardominioesq1=r'\left['
    s.pardominiodta1=r'\right['
    s.erradaesq1=r'-\infty'
    s.erradadta1=-s.bc1
    s.parerradaesq1=r'\left]'
    s.parerradadta1=r'\right]'
    s.erradaesq2=r'-\infty'
    s.erradadta2=s.bc1
    s.parerradaesq2=r'\left]'
    s.parerradadta2=r'\right]'
    s.erradaesq3=-s.bc1
    s.erradadta3=r'+\infty'
    s.parerradaesq3=r'\left['
    s.parerradadta3=r'\right['
else:(caso b1<0)
    s.dominioesq1=r'-\infty'
    s.dominiodta1=s.bc1
    s.pardominioesq1=r'\left]'
    s.pardominiodta1=r'\right]'
    s.erradaesq1=r'-\infty'
    s.erradadta1=-s.bc1
    s.parerradaesq1=r'\left]'
```

```
s.parerradadta1=r'\right]'
s.erradaesq2=s.bc1
s.erradadta2=r'+\infty'
s.parerradaesq2=r'\left['
s.parerradadta2=r'\right['
s.erradaesq3=-s.bc1
s.erradadta3=r'+\infty'
s.parerradaesq3=r'\left['
s.parerradadta3=r'\right['
```

Obtém-se deste modo, os seguintes intervalos para cada uma das respostas:

- Para $b1 > 0$

  A resposta correta é $[bc1, +\infty[$ e as respostas erradas são:

  errada1 $=]-\infty, -bc1]$

  errada2 $=]-\infty, bc1]$

  errada3 $=]-bc1, +\infty[$

  Concretizando, para a equação $4\,x+4 \geq 0$, obtém-se as quatro possíveis escolhas

  (A) $[-1, +\infty[$ (B) $]-\infty, 1]$ (C) $]-\infty, -1]$ (D) $]1, +\infty[$.

- Para $b1 < 0$

  A resposta correta é $]-\infty, bc1]$ e as respostas erradas são:

  errada1 $=]-\infty, -bc1]$

  errada2 $= [bc1, +\infty[$

  errada3 $=]-bc1, +\infty[$

  Concretizando, para a equação $-2\,x-5 \geq 0$, resulta as quatro possíveis escolhas

  (A) $\left]-\infty, -\frac{5}{2}\right]$ (B) $\left]-\infty, \frac{5}{2}\right]$ (C) $\left[-\frac{5}{2}, +\infty\right[$ (D) $\left]\frac{5}{2}, +\infty\right[$.

Exercício E97I20 dominioexp 031

Com este exercício, o conceito a explorar é o domínio de uma função da classe

$$f(x) = e_1 + f_1 \times a_1^{\frac{d_1 x + g_1}{b_1 x + c_1}}.$$

Mais uma vez, como o domínio da função exponencial é $\mathbb{R}$, basta considerar o domínio da função g definida por $g(x) = \dfrac{d_1 x + g_1}{b_1 x + c_1}$ ou seja,

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : b_1 x + c_1 \neq 0\}.$$

Em termos de programação, no campo *make_random(s)* surge a necessidade de criar

```
s.n1 = s.d1*x+s.g1
s.m1 = s.b1*x+s.c1
```

De forma análoga à (1.1), a função n1 surge pela necessidade de se evitar sinais operatórios consecutivos.

O enunciado do exercício pode ser descrito da forma

```
Considere a função $f$ definida por
 $$f(x)= e1 sgn6 f11\times a1^{\frac{n1}{m1}}$$
O domínio de $f$, $D_f$,  é ...
```

Concretizando,vem

⌜ Considere a função f definida por

$$f(x) = 5 + 5 \times 4^{\frac{3\,x-1}{-2\,x-5}}$$

O domínio de f, D_f, é ⌟

No que diz respeito à estrutura da escolha múltipla,

```
<multiplechoice>
<choice>
$$\mathbb{R}\text{\ } \left\{bc1 \right\}$$
</choice>
<choice>
$$ \mathbb{R}$$
</choice>
<choice>
$$\mathbb{R}\text{\ } \left\{-bc1 \right\}$$
</choice>
<choice>
$$\left] bc1 ,+\infty \right[ $$
</choice>
```

as quatro possíveis escolhas serão, no exemplo apresentado

$$\text{(A) } \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{5}{2}\right\} \qquad \text{(B) } \mathbb{R} \qquad \text{(C) } \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{5}{2}\right\} \qquad \text{(D) } \left]-\frac{5}{2},+\infty\right[.$$

Obtém-se deste modo, cada uma das opções de resposta.

A resposta correta é $\mathbb{R}\backslash\{bc1\}$ e as respostas erradas são:

errada1 $= \mathbb{R}$

errada2 $= \mathbb{R}\backslash\{-bc1\}$

errada3 $=]bc1, +\infty[$

Observação 2.2.2. Se $c_1 = 0$, a resposta correta e a errada2 seriam iguais, contudo, este caso não ocorre impondo a restrição de que c_1 não tome o valor zero.

Quanto à programação da resolução, temos:

```
O domínio da função $f$,  é $$D_f=\{x\in\mathbb{R}:m1\neq 0\}
=\mathbb{R}\text{\ } \left\{ bc1 \right\}.$$
O conjunto obtido é o conjunto solução da condição
$$m1\neq 0 \Leftrightarrow b1x\neq c11\Leftrightarrow x\neq bc1.$$
```

Concretizando:

O domínio da função f, é

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : -2\,x - 5 \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash \left\{-\frac{5}{2}\right\}$$

O conjunto obtido é o conjunto solução da condição $-2\,x - 5 \neq 0$.

$$\{x \in \mathbb{R} : -2\,x - 5 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : -2x \neq 5\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq -\frac{5}{2}\right\}$$

2.2.2 Domínio da função logarítmica

O domínio de $f(x) = \log_a(x)$ é $\mathbb{R}^+$. Assim, o domínio de qualquer função do tipo $f(x) = \log_a(g(x))$ será

$$\{x \in \mathbb{R} : g(x) > 0 \ \wedge \ x \in D_g\}.$$

Exercício E97I20 dominiolog 019

Neste exercício considera-se a família de funções

$$f(x) = e_1 + f_1 \times \log_{a_1}(b_1x + c_1)$$

e pretende-se determinar o seu domínio. Tendo em conta que $g(x) = b_1x + c_1$ tem domínio $\mathbb{R}$, o domínio da função é:

$$\{x \in \mathbb{R} : b_1x + c_1 > 0\}.$$

No que ao enunciado diz respeito, a única alteração face ao exercício da subsecção anterior, prende-se com a substituição da função exponencial pela função logarítmica.

```
Seja $\quad f(x)= e1 sgn6 f11\times\log_{a1}(m1).$
O domínio de $f$ é:
```

Concretizando:

⌜Seja f definida por

$$f(x) = 5 + 2 \times \log_3(4\,x + 4)$$

O domínio de f é:⌟

Para resolver a inequação $b_1x + c_1 > 0$, deve ter-se em conta o sinal de b_1

$$b_1x + c_1 > 0 \Leftrightarrow b_1x > -c_1$$

Estes casos têm que ser contemplados na programação do exercício, tal como já fora descrito anteriormente com a diferença do sinal de desigualdade ser “ $>$ ” no lugar de “ $\geq$ ”.

Resolução:

```
 O domínio de $f$ é $$D_f=\{x\in\mathbb{R}:m1>0\}.$$
 Como $\displaystyle \quad m1>0\Leftrightarrow  b1x>c11
 \Leftrightarrow x sgn3 bc1,\quad $ conclui-se que
   $$D_f=\left] dominioesq1 , dominiodta1 \right[.$$
```

Concretizando,

- se $b_1 > 0$

  Seja $f(x) = 5 + 2 \times \log_3(4\,x + 4)$

  O domínio de f é

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 4\,x + 4 > 0\}$$

Como $4\,x+4>0 \Leftrightarrow 4x>-4 \Leftrightarrow x>-1$, conclui-se que

$$D_f = \left]-1, +\infty\right[.$$

- se $b_1 < 0$

  Seja $f(x) = -2 - 2 \times \log_4(-2\,x-5)$

  O domínio de f é

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : -2\,x - 5 > 0\}$$

  Como $-2\,x-5>0 \Leftrightarrow -2x>5 \Leftrightarrow x<-\dfrac{5}{2}$, conclui-se que

$$D_f = \left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[.$$

Como o raciocínio aplicado neste exercício é semelhante ao aplicado no exercício da subsecção anterior, não se apresenta a parte da programação.

2.2.3 Propriedades

Nos exercícios que se seguem pretende-se simplificar expressões usando as propriedades operatórias das funções exponencial e/ou logarítmica.

Exercício E97I20 proplog 015

Neste exercício pretende-se simplificar uma expressão na forma $\log_{a_1}(a_1 x^{b_1})$. Com recurso à propriedade

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a(c),$$

obtém-se

$$\log_{a_1}(a_1 x^{b_1}) = \log_{a_1}(a_1) + \log_{a_1}(x^{b_1}).$$

Como $\log_a(a) = 1$ vem

$$\log_{a_1}(a_1) + \log_{a_1}(x^{b_1}) = 1 + \log_{a_1}(x^{b_1}).$$

Pelo facto de $\log_a(b^p) = p \log_a b$, teremos

$$1 + \log_{a_1}(x^{b_1}) = 1 + b_1 \times \log_{a_1}(x).$$

Assim,

$$\log_{a_1}(a_1 x^{b_1}) = 1 + b_1 \times \log_{a_1}(x).$$

Dada a possibilidade do parâmetro b_1 tomar valores negativos, a resolução do exercício terá de recorrer também à propriedade $x^{-p} = \dfrac{1}{x^p}$.

Estes dois casos têm de ser contemplados na programação do exercício, recorrendo ao comando $< showone >$.

Deste modo vem,

```
<showone casos1>
<thisone >(resolução do exercício para o caso b1>0) </thisone>
 <thisone >(resolução do exercício para o caso b1<0)</thisone>
</showone>
```

Concretizando:

- Para $b_1 > 0$

  Usando a propriedade $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$ e o facto de $\log_a(a) = 1$ obtém-se, por exemplo,

  $$\log_3\left(3\,x^4\right) = 1 + \log_3\left(x^4\right).$$

  Como $\log_a(b^p) = p \log_a b$ vem,

  $$\log_3\left(x^4\right) = 4\,\log_3(x).$$

  Assim,

  $$\log_3\left(3\,x^4\right) = 1 + \log_3\left(x^4\right) = 4\,\log_3(x) + 1.$$

- Para $b_1 < 0$

  Usando a propriedade $\log_a(b) + \log_a(c) = \log_a(bc)$ e o facto de $\log_a(a) = 1$ obtém-se, por exemplo,

  $$\log_4\left(\frac{4}{x^2}\right) = 1 + \log_4\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

  Como $p\log_a b = \log_a(b^p)$ e $x^{-p} = \dfrac{1}{x^p}$ vem

  $$\log_4\left(\frac{1}{x^2}\right) = -2\,\log_4(x)\,.$$

  Assim,

  $$\log_4\left(\frac{4}{x^2}\right) = -2\,\log_4(x) + 1.$$

Com recurso ao ciclo if...else..., opta-se pela primeira resolução quando $b_1 > 0$ e pela segunda resolução caso contrário.

```
if s.b1>0:
    s.casos1=0
else:
    s.casos1=1
```

Exercício E97I20 proplog 016

Pretende-se com este exercício simplificar uma expressão na forma

$$\log_b(a_1) + b_1 \times \log_b(c_1).$$

Com recurso à propriedade $\log_a(b^p) = p\log_a b$, obtém-se

$$\log_b(a_1) + b_1 \times \log_b(c_1) = \log_b(a_1) + \log_b(c_1^{b_1}).$$

Como $\log_a(bc) = \log_a b\ +\ \log_a c$ vem,

$$\log_b(a_1) + \log_b(c_1^{b_1}) = \log_b(a_1 \times c_1^{b_1}).$$

Dada a possibilidade do parâmetro b_1 tomar valores negativos, a resolução do exercício terá de recorrer à propriedade $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$ em vez de $\log_b(a) + \log_b(c^b) = \log_b(a \times c^b)$.

Teremos então as concretizações,

- Para $b_1 > 0$

  Usando as propriedades

  $$\log_a(b^p) = p \log_a b \quad e \quad \log_a(bc) = \log_a b \ + \ \log_a c$$

  vem por exemplo,

  $$\log_a(5) + 2\log_a(3) = \log_a(5) + \log_a(3^2) = \log_a(5 \times 3^2) = \log_a(45).$$

- Para $b_1 < 0$

  Usando as propriedades

  $$\log_a(b^p) = p \log_a b \quad e \quad \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

  vem por exemplo,

  $$\log_a(5) - 2\log_a(6) = \log_a(5) - \log_a(6^2) = \log_a\left(\frac{5}{6^2}\right) = \log_a\left(\frac{5}{36}\right).$$

Estes dois casos são contemplados na programação do exercício, tendo de recorrer ao comando $<$ *showone* $>$ como já fora descrito anteriormente.

Exercício E97I20 proplog 018

Com este exercício pretende-se simplificar uma expressão na forma

$$\frac{a_1}{a_1^{1-\log_{a_1}(b_1)}}.$$

Com recurso à propriedade $a^{p+q} = a^p \times a^q$, obtém-se

$$\frac{a_1}{a_1^{1-\log_{a_1}(b_1)}} = \frac{a_1}{a_1 \times a_1^{-\log_{a_1}(b_1)}}.$$

Usando a propriedade $\log_a(b^p) = p\log_a b$,

$$\frac{a_1}{a_1 \times a_1^{-\log_{a_1}(b_1)}} = \frac{a_1}{a_1 \times a_1^{\log_{a_1}(b_1^{-1})}} = \frac{a_1}{a_1 \times a_1^{\log_{a_1}(\frac{1}{b_1})}}$$

e do facto de $a^{\log_a b} = b$, conclui-se que

$$\frac{a_1}{a_1 \times a_1^{\log_{a_1}(\frac{1}{b_1})}} = \frac{a_1}{a_1 \times \frac{1}{b_1}} = b_1.$$

Assim,

$$\frac{a_1}{a_1^{1-\log_{a_1}(b_1)}} = b_1.$$

Exemplificando o exercício, com uma concretização

$$\frac{5}{5^{1-\log_5(3)}}$$

é igual a uma das quatro possíveis escolhas:

(A) 3 (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) -3 (D) $-\dfrac{1}{3}$.

Como $a^{p+q} = a^p \times a^q$, vem

$$\frac{5}{5^{1-\log_5(3)}} = \frac{5}{5 \times 5^{-\log_5(3)}}.$$

Usando a propriedade $\log_a(b^p) = p\log_a b$,

$$\frac{5}{5 \times 5^{-\log_5(3)}} = \frac{5}{5 \times 5^{\log_5(3^{-1})}} = \frac{5}{5 \times 5^{\log_5(\frac{1}{3})}}$$

e o facto de $a^{\log_a b} = b$, conclui-se que

$$\frac{5}{5 \times 5^{\log_5(\frac{1}{3})}} = \frac{5}{5 \times \frac{1}{3}} = 3.$$

Assim,

$$\frac{5}{5^{1-\log_5(3)}} = 3.$$

2.2.4 Transformações do gráfico de uma função exponencial

A partir da família de funções definidas por $f(x) = e1 + f1 \times a^{b1x+c1}$ e com uma escolha de parâmetros adequados é possível percorrer um grande número de funções, obtendo deste modo as mais variadas transformações.

Exercício E97I20 graficoexp 034

Com este exercício pretende-se aplicar ao gráfico de uma função definida por $f(x) = e_1 + a_1^{b_1 x}$ ou $f(x) = e_1 - a_1^{b_1 x}$, uma translação segundo o vetor $(0, b)$ ou uma reflexão em relação ao eixo das abcissas seguida de uma translação associada ao vetor $(0, b)$.

É criado, inicialmente, um gráfico de uma função exponencial definida por $f(x) = e_1 + a_1^{b_1 x}$ ou $f(x) = e_1 - a_1^{b_1 x}$, onde também está representada a sua assintota horizontal $y = e_1$.

No enunciado identifica-se a figura inicial como fig1, da forma:

```
Considere a função $f$ cujo gráfico se apresenta na figura
<center> fig1 </center>
```

Concretizando, vem

⌜Considere a função f cujo gráfico se apresenta na figura ⌟

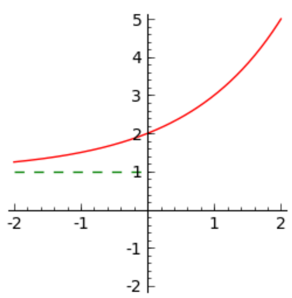


Figura 4

A figura fig1 é constituído pela função exponencial (g3), por um segmento de reta horizontal "invisível"(g31) e pela assintota da função (g3201). Para a representação de fig1 recorre-se a instrução s.sage_graphic(..., "...", dimx=..., dimy=...), colocando-se no primeiro parâmetro todos os gráficos que se pretende visualizar(g3, g31, g3201), no segundo parâmetro vem a identificação da figura, nos 3.º e 4.º parâmetros temos as dimensões horizontal e vertical da figura.

```
def solve(s):
s.fig1 = s.sage_graphic( g3+g31+g3201, "fig1", dimx=7, dimy=7)
```

Para a construção do gráfico g3 recorre-se à instrução "$plot(p1, p2, p3, ...)$", onde o primeiro parâmetro representa a função exponencial do tipo $f(x) = e_1 + a_1^{b_1 x}$ ou $f(x) = e_1 - a_1^{b_1 x}$ com recurso à função sinal1 que gera o sinal operatório " $+$ " ou " $-$ " (s.func); o segundo parâmetro representa a variável independente da função; os 3.º e 4.º parâmetros representam o limite inferior e superior da parte do gráfico que queremos representar; o 5.º indica a cor do gráfico e o 6.º introduz as identificações dos eixos coordenados.

```
x=var('x')
l=[2,e,3,4,5,10]
id=ZZ.random_element(6)
s.a1=l[id]
s.b1 = ur.iunif_nonset(-1,1,[0])
s.e1 = ur.iunif_nonset(-3,3,[0])
s.m1 = s.b1*x
s.sinal1= ur.iunif_nonset(-1,1,[0])
s.func = s.e1 +s.sinal1*s.a1^(s.m1)
```

```
def solve(s):
    s.inf1 = -2 #limite inferior
    s.sup1 = 2 #limite superior

    g3 = plot(s.func,x, s.inf1, s.sup1,  color='red',
              axes_labels=["$x$","$y$"])
```

Concretizando, vem

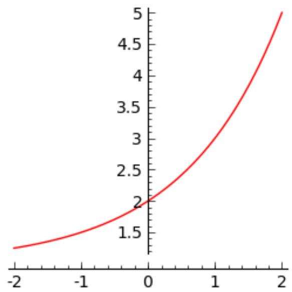


Figura 5

Para melhorar a representação dos eixos coordenados nos gráficos recorre-se a um segmento de reta "invisível"(cor branca), com recurso à instrução "*plot*", como já fora descrito no capítulo 1. Poder-se-ia usar a instrução $line([(a, b), (c, d)])$ para obter um segmento de reta, cujos extremos seriam os pontos de coordenadas (a, b) e (c, d).

Com a variação dos parâmetros $sinal1$ e e_1 varia também o posicionamento do segmento de reta.

Surge assim a função constante "dim1", no caso de $f(x) = e_1 + a_1^{b_1 x}$(para $sinal1 > 0$), se $e_1 > 0$ o segmento de reta posicionar-se-á duas unidades abaixo do eixo das abcissas, se $e_1 < 0$ posicionar-se-á duas unidades abaixo da assintota horizontal, no caso de $f(x) = e_1 - a_1^{b_1 x}$(para $sinal1 < 0$), se $e_1 > 0$ posicionar-se-á duas unidades acima da assintota horizontal e se $e_1 < 0$

o segmento de reta posicionar-se-á duas unidades acima do eixo das abcissas, como se mostra a seguir com recurso aos comandos if...else....

```
def solve(s):
    if s.sinal1 >0:# caso f(x)=e_1 + a_1^{b_1x}
        if s.e1 >0:
            s.dim1= -2
        else:(se e1<0)
            s.dim1= s.e1 -2
    else:(se sinal1<0)# caso f(x)=e_1 - a_1^{b_1x}
        if s.e1 >0:
            s.dim1= s.e1 +2
        else:(se e1<0)
            s.dim1= 2

    g31= plot(s.dim1,x, s.inf1, s.sup1,  color='white')
```

Concretizando,

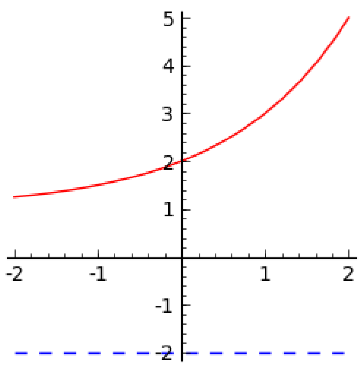


Figura 6

Nota 2.2.3. A reta "invisível"está a tracejado e de cor azul.

Para a representação da assintota horizontal recorre-se à instrução

$$line([(a,b),(c,d),...,...])$$

cuja ordenada dos pontos extremos do segmento é o valor da assintota (e1) da função f e as abcissas variam consoante a assintota horizontal seja à esquerda (se $b_1 > 0$) ou à direita (se $b_1 < 0$) da origem. No 3.º parâmetro a instrução $linestyle =' dashed'$ indica que a linha é a tracejado, enquanto que no 4.º parâmetro está indicada a cor.

Concretizando,

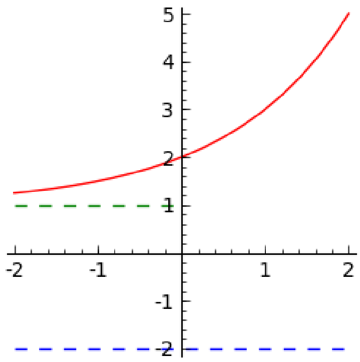
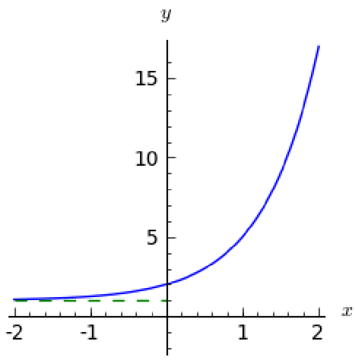


Figura 7

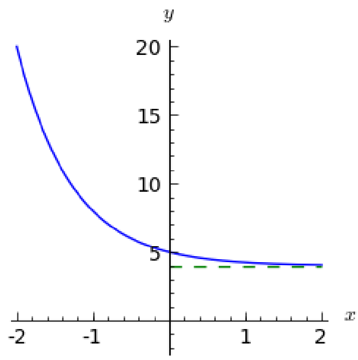
```
if s.b1>0:
   s.limassimptotainferior = -2
   s.limassimptotasuperior = 0
else:# (se b1<0)
   s.limassimptotainferior = 0
   s.limassimptotasuperior = 2
s.assimptota1= s.e1
g3201=line([(s.limassimptotainferior,s.assimptota1),
      (s.limassimptotasuperior,s.assimptota1)],
       linestyle='dashed',color='green')
```

A função f teria portanto as seguintes concretizações:

- se $sinal1 > 0$

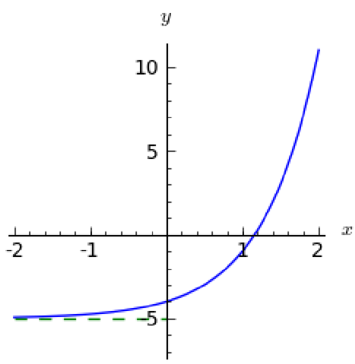


(a) $b1 > 0$

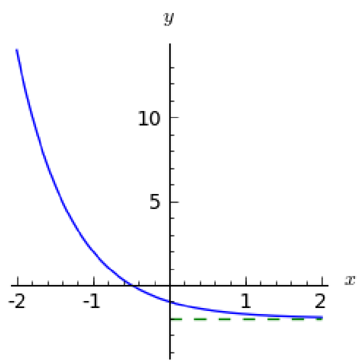


(b) $b1 < 0$

Figura 8: $e1 > 0$



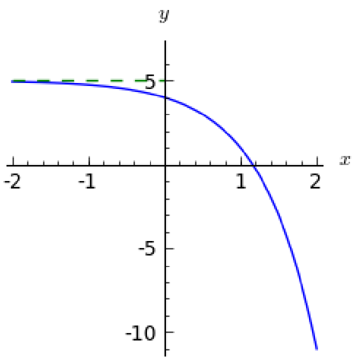
(a) $b1 > 0$



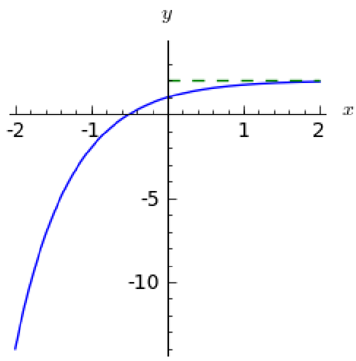
(b) $b1 < 0$

Figura 9: $e1 < 0$

- se $sinal1 < 0$

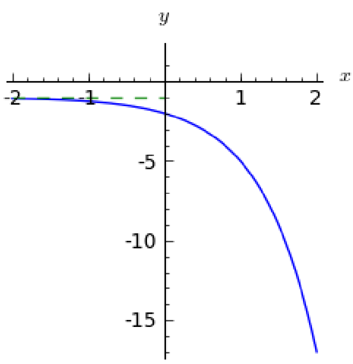


(a) $b1 > 0$

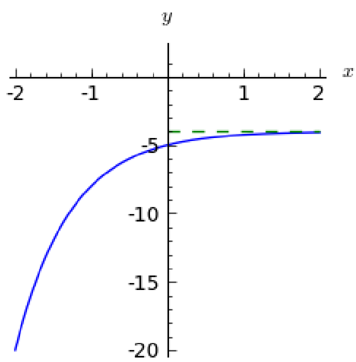


(b) $b1 < 0$

Figura 10: $e1 > 0$



(a) $b1 > 0$



(b) $b1 < 0$

Figura 11: $e1 < 0$

Visualizar-se-á seguidamente uma concretização da transformação da função f do tipo $c1 - f(x)$.

Considere a função f cujo gráfico se apresenta na figura

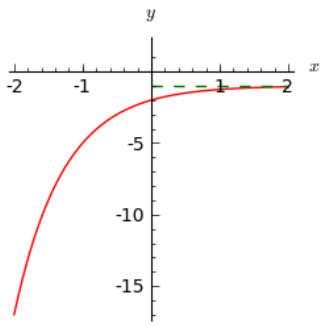
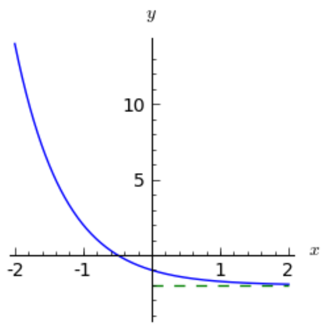
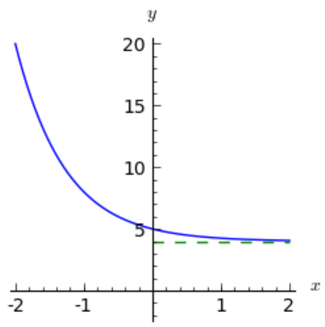


Figura 12

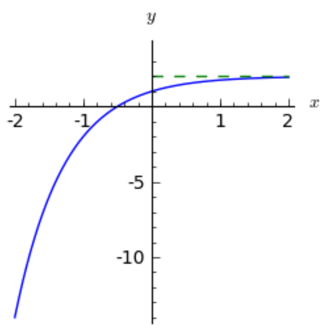
O gráfico da função g definida por $g(x) = -3 - f(x)$ é uma das quatro possíveis escolhas:



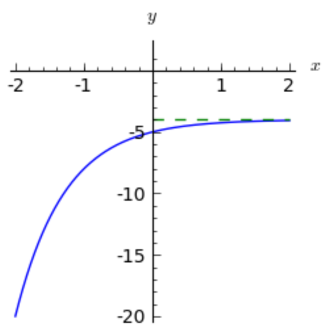
(a) correta1



(b) errada1



(c) errada2



(d) errada3

Figura 13

Resolução:

O gráfico da função f sofreu uma reflexão em relação ao eixo das abcissas seguida de uma translação associada ao vetor $(0, -3)$

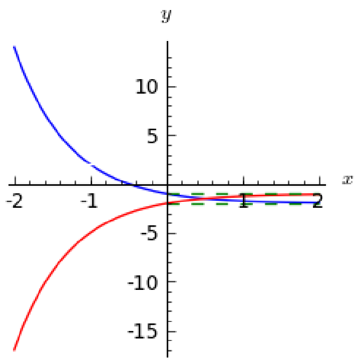


Figura 14

2.2.5 Transformações do gráfico de uma função logarítmica

A partir da família de funções definidas por

$$f(x) = e1 + f1 \times \log_{a1}(b1x + c1),$$

com uma escolha adequada de parâmetros e1, f1, b1 e c1, é possível percorrer um grande número de funções, obtendo, deste modo, as mais variadas transformações gráficas da função $\log_{a_1}(x)$.

Exercício E97I20 graficolog 037

Com este exercício pretende-se aplicar ao gráfico de uma função do tipo

$$f(x) = log_{a_1}(b_1(x + e_1)),$$

uma translação segundo o vetor $(a, 0)$ ou uma reflexão em relação ao eixo das ordenadas seguida de uma translação associada ao vetor $(a, 0)$.
Neste exercício é criado inicialmente um gráfico de uma função logarítmica do tipo

$$f(x) = log_{a_1}(b_1(x + e_1)),$$

onde também está representado a sua assintota vertical $x = -e_1$.

Em termos de programação é em tudo similar ao exercício anterior E97I20 graficoexp 034.
Visualizar-se-á seguidamente uma concretização da transformação da função f do tipo $-f(x + c_1)$.

Considere a função f cujo gráfico se apresenta na figura

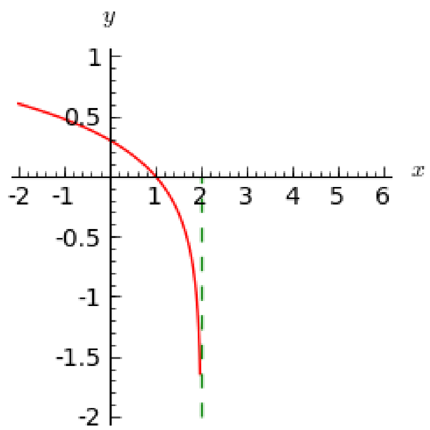
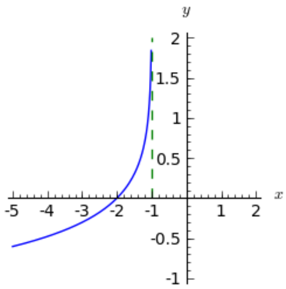
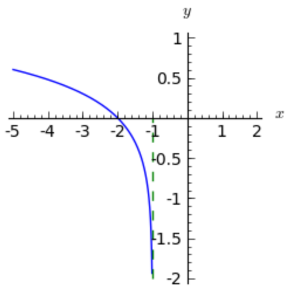


Figura 15

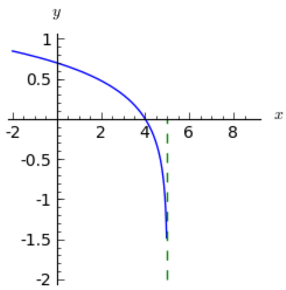
O gráfico da função g definida por $g(x) = -f(x + 3)$ é uma das quatro possíveis escolhas:



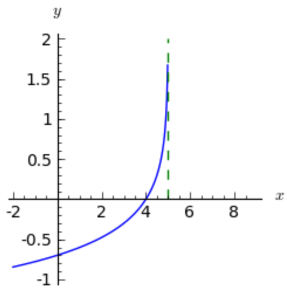
(a) correta1



(b) errada1



(c) errada2



(d) errada3

Figura 16

Resolução:

O gráfico da função f sofreu uma reflexão em relação ao eixo das abcissas seguida de uma translação associada ao vetor (- 3,0).

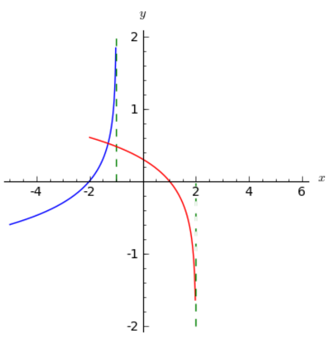


Figura 17

As questões sobre transformações geométricas de gráficos e a sua visualização gráfica são importantes e frequentemente tratadas, ao longo do ensino secundário, de acordo com as metas curriculares:
"Estudam-se ainda as transformações geométricas dos gráficos de funções obtidas através da adição ou da multiplicação das variáveis dependente ou independente de uma dada função por uma constante [11]."
Daí a escolha em apresentar estes dois exercícios, suficientemente abrangentes para responder as metas curriculares.

2.2.6 Equações com exponenciais

Nas famílias de exercícios que se seguem o conceito a explorar é a resolução de equações envolvendo exponenciais.

Exercício E97I20 eqexp 021

Com este exercício pretende-se resolver equações envolvendo exponenciais com a mesma base, da forma $a_1^{b_1 x + c_1} = a_1^{d_1}$, invocando a injetividade da função exponencial.
A função exponencial é uma função injetiva, isto é,

$$\forall x_1, x_2 \in Df, x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Esta propriedade da função exponencial permite-nos resolver equações do tipo

$$a^{f_1(x)} = a^{g_1(x)},$$

bastando para tal resolver a equação $f_1(x) = g_1(x)$.

Assim,

$$\begin{aligned} a_1^{b_1x+c_1} = a_1^{d_1} &\Leftrightarrow b_1x + c_1 = d_1 \\ &\Leftrightarrow b_1x = d_1 - c_1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{d_1 - c_1}{b_1} \end{aligned}$$

No que ao enunciado diz respeito, tem-se a seguinte estrutura:

```
Considere a equação $$a1^{m1}=a1^d1$$
O conjunto solução da equação dada  é:
```

Concretizando:

⌜ Considere a equação

$$10^{6\,x+4} = 10^{-2}$$

O conjunto solução da equação dada é: ⌟

A resolução do exercício pormenorizada é

```
A função exponencial é uma função injetiva, isto é,
$\forall x_1,x_2\in Df, x_1\neq x_2
\Longrightarrow f(x_1)\neq f(x_2).$
Esta propriedade permite resolver equações do tipo
$a^{f_1(x)}=a^{g_1(x)}$, bastando para tal resolver a equação
$f_1(x)=g_1(x)$.
Assim, vem  $$a1^{m1}=a1^d1\Leftrightarrow m1=d1
\Leftrightarrow b1x=a11
\Leftrightarrow x=\frac{a11}{b1}card1\Leftrightarrow x=b11$$.
O conjunto solução da equação dada  é: $ \left\{b11 \right\}$
```

Onde $a11 = d1 - c1$ e $b11 = \dfrac{a11}{b1}$
Concretizando, obtém-se, por exemplo,

A função exponencial é uma função injetiva, isto é,

$$\forall x_1, x_2 \in Df, x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Esta propriedade permite resolver equações do tipo $a^{f_1(x)} = a^{g_1(x)}$, bastando para tal resolver a equação $f_1(x) = g_1(x)$. Assim, vem

$$10^{6\,x+4} = 10^{-2} \Leftrightarrow 6\,x + 4 = -2 \Leftrightarrow 6x = -6 \Leftrightarrow x = \frac{-6}{6} \Leftrightarrow x = -1.$$

O conjunto solução da equação dada é: $\{-1\}$.
As resoluções são apresentadas com muito detalhe, para que o aluno possa compreender todos os passos até à apresentação da solução. Neste exemplo há possibilidade do valor $\dfrac{d1 - b1}{c1}$ ser uma fração irredutível. Se o for, não faz sentido estar a repetir a igualdade, tal como se exemplifica

$$4\,x - 2 = 3 \Leftrightarrow 4x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4},$$

em vez de,

$$4\,x - 2 = 3 \Leftrightarrow 4x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}.$$

Recorreu-se aos comandos "*mdc*" e "*card*" para solucionar este problema, do seguinte modo

```
s.mdc=GCD(s.a11,s.b1)
if s.a11>0 and s.b1>0 and s.mdc==1:
    s.card1='%'
else:
    s.card1=''
```

O comando "*mdc*" calcula o máximo divisor comum dos valores dos parâmetros $a11$ e $b1$; enquanto que o comando "*card*" foi criado para que, no caso da fração $\dfrac{a11}{b1}$ ser irredutível, ela não se repita novamente dado que seria igual ao valor da função $b11$. Quando a fração não é irredutível, o comando "*card*" não tem qualquer significado, e deste modo a resolução aparece integralmente.

As variáveis errada1, errada2 e errada3 foram criadas para as três respostas erradas do modo seguinte,

```
s.errada1=-s.b11
s.errada2=(s.d1+2*s.c1)/s.b1
s.errada3=(-s.d1-s.c1)/s.b1
```

Assim,
A resposta correta é $\{b11\}$ e as respostas erradas são respetivamente:
errada1 $= \{-b11\}$
errada2 $= \left\{\frac{d1+2\times c1}{b1}\right\}$
errada3 $= \left\{-\frac{d1+c1}{b1}\right\}$

Verifica-se que a resposta errada1 é o simétrico da resposta correta; no caso da solução ser $b11 = 0$, o valor dessas duas respostas seria o mesmo. Para contornar esta situação recorre-se, por exemplo, ao comando if...else..., no caso da solução ser zero adiciona uma constante, caso contrário mantém o simétrico da solução.

```
if s.b11==0:
    s.errada1=-s.b11+4
else:
    s.errada1=-s.b11
```

Concretizando para a equação $10^{6\,x+4} = 10^{-2}$, obtém-se as quatro possíveis escolhas:

(A) $\{-1\}$ (B) $\{1\}$ (C) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$ (D) $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

Exercício E97I20 eqexp 022

Pretende-se com este exercício resolver uma equação na forma

$$a_1^{b_1 x + c_1} = d_1,$$

onde se terá que recorrer à função inversa.

Como a programação neste exercício é similar ao anterior, apresenta-se apenas um exemplo de concretização.

Considere a equação

$$4^{-4\,x-2} = 4$$

de entre as opções dadas, a solução é:

(A) $\left\{-\dfrac{3}{4}\right\}$ (B) $\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$ (C) $\{-1\}$ (D) $\left\{-\dfrac{127}{2}\right\}$

Resolução:

Equações do tipo $a^{f_1(x)} = g_1(x)$ resolvem-se usando a função inversa da função exponencial, ou seja,

$$a^{f_1(x)} = b \Leftrightarrow f_1(x) = \log_a(b).$$

Assim,

$$\begin{aligned} 4^{-4\,x-2} = 4 \quad &\Leftrightarrow \quad -4\,x - 2 = \log_4(4) \\ &\Leftrightarrow \quad -4x = 1 + 2 \\ &\Leftrightarrow \quad -4x = 3 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

donde se conclui que o conjunto solução da equação é $\left\{-\dfrac{3}{4}\right\}$.

Exercício E97I20 eqexp 023

Neste exercício pretende-se resolver uma equação na forma

$$e_1 + f_1 \times a_1^{b_1 x + c_1} = d_1.$$

A resolução deste tipo de equações, por manipulações algébricas, reduz-se à resolução de equações do tipo $a^{f_1(x)} = g_1(x)$. Assim,

$$a^{f_1(x)} = g_1(x) \Leftrightarrow f_1(x) = \log_a(g_1(x))$$

atendendo aos respetivos domínios,

$$\{x \in \mathbb{R} : x \in Df_1 \wedge g_1(x) > 0 \wedge x \in Dg_1\}.$$

Resolvendo a equação, vem

$$\begin{aligned} e_1 + f_1 \times a_1^{b_1 x + c_1} = d_1 \quad &\Leftrightarrow \quad f_1 \times a_1^{b_1 x + c_1} = d_1 - e_1 \\ &\Leftrightarrow \quad a_1^{b_1 x + c_1} = \frac{d_1 - e_1}{f_1} \end{aligned}$$

Como a função exponencial tem contradomínio $\mathbb{R}^+$, surge a necessidade de fazer o estudo tendo em atenção o sinal de $\dfrac{d_1 - e_1}{f_1}$.
Assim, é necessário no caso de $\dfrac{d_1 - e_1}{f_1} > 0$ a resolução manter-se e caso contrário que a restante resolução não exista porque a equação é impossível. Perante este desafio em termos de programação, recorre-se ao comando "*card*" definido da forma:

```
if s.d11<=0:
    s.card1='%'
else:
    s.card1=''
```

Ao atribuir, no caso da condição ser impossível, no início de cada uma das restantes linhas da resolução da equação o sinal %, estas passam a comentários,

```
\begin{eqnarray*}
e1 sgn6 f11\times a1^{m1}=d1
            &\Leftrightarrow & f1\times a1^{m1}=c11\\
            &\Leftrightarrow & a1^{m1}= \frac{c11}{f1}\\
            &\Leftrightarrow & a1^{m1}= d11\\
   card1&\Leftrightarrow & m1 = \log_{a1}(d11)\\
   card1&\Leftrightarrow & b1x = \log_{a1}(d11) sgn1 e11\\
   card1&\Leftrightarrow
        & x = b12\left(\log_{a1}(d11)sgn1 e11\right)\\
   card1&\Leftrightarrow
        & x = sgn7\frac{\log_{a1}(d11)}{auxb1}sgn2 bc11\\
   card1&\Leftrightarrow & x = b11
\end{eqnarray*}
```

de acordo com os parâmetros definidos, abaixo:

```
s.f11=abs(s.f1)
if s.f1<0:
    s.sgn6='-'
else:#(s.f1>0)
    s.sgn6='+'
s.c11=s.d1-s.e1
s.d11=s.c11/s.f1
s.a11=logb(s.d11,s.a1,factorize=true)-s.c1
s.b11=s.a11/s.b1
s.e11=abs(s.c1)
if s.c1<0:
    s.sgn1='+'
else:
    s.sgn1='-'
```

```
s.bc1=-s.c1/s.b1
s.bc11=abs(s.bc1)
if s.bc1>0:
    s.sgn2='+'
else:
    s.sgn2='-'
s.b12=1/s.b1
s.auxb1=abs(s.b1)
if s.b1>0:
    s.sgn7=''
else:
    s.sgn7='-'
```

Concretizando no caso em que $\dfrac{d_1 - e_1}{f_1} > 0$, vem

$$\begin{aligned}
4 - 4 \times 4^{3\,x-4} = -2 \quad &\Leftrightarrow \quad -4 \times 4^{3\,x-4} = -6 \\
&\Leftrightarrow \quad 4^{3\,x-4} = \frac{-6}{-4} \\
&\Leftrightarrow \quad 4^{3\,x-4} = \frac{3}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad 3\,x - 4 = \log_4\left(\frac{3}{2}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad 3x = \log_4\left(\frac{3}{2}\right) + 4 \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3}\left(\log_4\left(\frac{3}{2}\right) + 4\right) \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{\log_4(\frac{3}{2})}{3} + \frac{4}{3} \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3}\,\log_4\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

A solução é $\left\{\dfrac{1}{3}\,\log_4\left(\dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{4}{3}\right\}$.

Na situação em que $\dfrac{d_1 - e_1}{f_1} \leq 0$, considere-se a concretização

$$\begin{aligned} 5 + 5 \times 4^{-2x-5} = 3 \quad &\Leftrightarrow \quad 5 \times 4^{-2x-5} = -2 \\ &\Leftrightarrow \quad 4^{-2x-5} = \frac{-2}{5} \\ &\Leftrightarrow \quad 4^{-2x-5} = -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

A condição é impossível, dado que o contradomínio da função exponencial é $\mathbb{R}^+$.
A solução é $\{\}$.

Nesta situação precisa, ter-se-á na resolução o texto "A condição é impossível, dado que o contradomínio da função exponencial é $\mathbb{R}^+$", enquanto que no caso contrário não há texto. Solucionou-se este problema recorrendo mais uma vez ao comando "*card*", colocando o texto como comentário quando $d_{11} > 0 \; \left(\dfrac{d_1 - e_1}{f_1} > 0\right)$.

```
if s.d11<=0:
    s.card2=''
else:#(sd11>0)
    s.card2='%'
```

```
$card2\text{A condição é impossível,
o contradomínio da função exponencial é}\mathbb{R}^+.$
```

Quanto à estrutura da escolha múltipla, surge, na construção das respostas erradas, a necessidade de subdividir o caso de $d_{11} \leq 0$.

```
    if s.d11<0:
        s.correta1=''
        s.errada1=(logb(-s.d11,s.a1,factorize=true)-s.c1)/s.b1
        s.errada2=(logb(-s.d11,s.a1,factorize=true)+s.c1)/s.b1
        s.errada3=(s.a1^(s.d11)-s.c1)/s.b1
    elif s.d11==0:
        s.correta1=''
        s.errada1=(logb(2,s.a1,factorize=true)-s.c1)/s.b1
        s.errada2=(logb(3,s.a1,factorize=true)+s.c1)/s.b1
        s.errada3=(s.a1^(s.d11)-s.c1)/s.b1
    else:#(d11>0)
        s.correta1=s.b11
        s.errada1=-s.b11
        s.errada2=(logb(s.d11,s.a1,factorize=true)+s.c1)/s.b1
        s.errada3=(s.a1^(s.d11)-s.c1)/s.b1
```

Concretizando:

- se $d_{11} < 0$

  Considere a equação

  $$5 + 5 \times 4^{-2\,x-5} = 3$$

  de entre as opções dadas, a solução é:

  (A) $\{\}$ (B) $\left\{-\frac{1}{2}\,\log_4(\frac{2}{5}) - \frac{5}{2}\right\}$ (C) $\left\{-\frac{1}{2}\,\log_4(\frac{2}{5}) + \frac{5}{2}\right\}$ (D) $\left\{-\frac{1}{8}\,4^{\frac{3}{5}} - \frac{5}{2}\right\}$.

- se $d_{11} = 0$

  Considere a equação

  $$1 + 5 \times 3^{5\,x-4} = 1.$$

  O conjunto solução da equação dada é:

  obtém-se as quatro possíveis escolhas

  (A) $\{\}$ (B) $\left\{\frac{1}{5}\,\log_3{(2)} + \frac{4}{5}\right\}$ (C) $\left\{-\frac{3}{5}\right\}$ (D) $\{1\}$.

- se $d_{11} > 0$

  Considere a equação

  $$4 - 4 \times 4^{3\,x-4} = -2.$$

  de entre as opções dadas, o conjunto solução é:

  $$\text{(A)}\left\{\tfrac{1}{3}\log_4\left(\tfrac{3}{2}\right) + \tfrac{4}{3}\right\} \ \text{(B)}\left\{-\tfrac{1}{3}\log_4\left(\tfrac{3}{2}\right) - \tfrac{4}{3}\right\} \ \text{(C)}\left\{\tfrac{1}{3}\log_4\left(\tfrac{3}{2}\right) - \tfrac{4}{3}\right\} \ \text{(D)}\{4\}\,.$$

A resolução destas equações com exponenciais potenciaram a implementação do comando "*card*", pela necessidade de interromper a resolução em determinadas condições.

2.2.7 Equações com logaritmos

Nas famílias de exercícios que se seguem apresentam-se resoluções de equações envolvendo logaritmos.

Exercício E97I20 eqlog 013

Neste exercício, pretende-se resolver uma equação que é redutível à forma

$$e_1 + f_1 \times \log_{a_1}(b_1 x + c_1) = d_1.$$

Nesta família de equações, através de alguma manipulação, reduz-se a sua resolução à de equações do tipo $\log_{a_1} g(x) = h_1$.
Assim, $\log_a g(x) = h_1 \Leftrightarrow g(x) = a^{h_1}$ atendendo aos respetivos domínios, $\{x \in \mathbb{R} : x \in Dg \wedge g(x) > 0\}$.

Resolvendo a equação,

$$\begin{aligned} e_1 + f_1 \times \log_{a_1}(b_1x + c_1) = d_1 &\Leftrightarrow f_1 \times \log_{a_1}(b_1x + c_1) = d_1 - e_1 \\ &\Leftrightarrow \log_{a_1}(b_1x + c_1) = \frac{d_1 - e_1}{f_1} \\ &\Leftrightarrow b_1x + c_1 = a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}} \\ &\Leftrightarrow b_1x = a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}} - c_1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}} - c_1}{b_1} \end{aligned}$$

Neste caso, o domínio é $\{x \in \mathbb{R} : b_1x + c_1 > 0\}$ e a solução da equação pertence ao domínio, como se verifica a seguir.

- se $b_1 > 0$

  $b_1x + c_1 > 0 \Leftrightarrow b_1x > -c_1 \Leftrightarrow x > -\dfrac{c_1}{b_1}$ e portanto, o domínio da função logarítmica é:

  $$\{x \in \mathbb{R} : x > -\frac{c_1}{b_1}\} = \left]-\frac{c_1}{b_1}, +\infty\right[$$

  dado que $a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}} > 0$ então $\dfrac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}}{b_1} > 0$.

  Como $x = \dfrac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}} - c_1}{b_1} = \dfrac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}}{b_1} - \dfrac{c_1}{b_1}$, conclui-se que $x > -\dfrac{c_1}{b_1}$.

- se $b_1 < 0$

  $b_1x + c_1 > 0 \Leftrightarrow b_1x > -c_1 \Leftrightarrow x < -\frac{c_1}{b_1}$

  o domínio da função logarítmica é:

  $$\{x \in \mathbb{R} : x > -\frac{c_1}{b_1}\} = \left]-\infty, -\frac{c_1}{b_1}\right[$$

  dado que $a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}} > 0$ então $\dfrac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}}{b_1} < 0$.

  Como $x = \dfrac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}} - c_1}{b_1} = \dfrac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}}{b_1} - \dfrac{c_1}{b_1}$, conclui-se que $x < -\dfrac{c_1}{b_1}$.

No que diz respeito ao enunciado do exercício e à sua programação, vem

```
Considere a função $f$ definida por
$$ f(x)=e1 sgn6 f11\times d10$$ e a função $g$
 tal que $g(x)=f(x)sgn5 d0$.

Os zeros,  caso existam, da função $g$ são:
```

Concretizando:

⌜Considere a função f definida por

$$f(x) = 3 - 5 \times \log(5\,x - 3)$$

e a função g tal que $g(x) = f(x) - 3$.

Os zeros, caso existam, da função g são:⌟

Definiram-se os parâmetros,

```
s.c11=s.d1-s.e1
s.d11=(s.c11/s.f1)
s.a11=s.a1^(s.d11)-s.c1
s.b11=s.a11/s.b1
s.errada3=-s.c1+(s.a1^((s.d1-s.e1)/s.f1))/s.b1
s.d10=logb(s.m1,s.a1)
```

e resolveu-se a equação da forma:

```
Pretende-se determinar os zeros da função $g$, ou seja,
resolver a equação
$$g(x)=0\Leftrightarrow f(x)-d0=0\Leftrightarrow f(x)=d1.$$
```

```
Resolvendo a equação vem
 \begin{eqnarray*}
e1 sgn6 f11\times d10=d1&\Leftrightarrow & f1\times d10=c11\\
                        &\Leftrightarrow & d10= d11\\
                        &\Leftrightarrow & m1 = a1^{d11}\\
                        &\Leftrightarrow & b1x = a11\\
                        &\Leftrightarrow & x = b11.\\
\end{eqnarray*}
O  domínio da equação é o domínio da função logaritmo, ou seja,
$D_g=\displaystyle \{x\in\mathbb{R}:m1>0\}.$
Como $$m1>0\Leftrightarrow b1x>sgn4 e11
\Leftrightarrow x sgn3 sgn2 bc11,$$
conclui-se que $$D_g \displaystyle \{x\in\mathbb{R}:m1>0\}
=\left] dominioesq1 , dominiodta1 \right[.$$
Uma vez que  $b11\in D_g$, $b11$ é o zero da função $g$.
```

Concretizando:

Pretende-se determinar os zeros da função g, ou seja, resolver a equação

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 3.$$

Resolvendo a equação vem

$$\begin{aligned}
3 - 5 \times \log(5\,x - 3) = 3 &\Leftrightarrow -5 \times \log(5\,x - 3) = 0\\
&\Leftrightarrow \log(5\,x - 3) = 0\\
&\Leftrightarrow 5\,x - 3 = 10^0\\
&\Leftrightarrow 5x = 4\\
&\Leftrightarrow x = \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

O domínio da função f é o domínio da função logaritmo, ou seja, $D_g = \{x \in \mathbb{R} : 5\,x - 3 > 0\}$. Como

$$5\,x - 3 > 0 \Leftrightarrow 5x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{5},$$

conclui-se que

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : 5\,x - 3 > 0\} = \left]\frac{3}{5}, +\infty\right[.$$

Uma vez que $\frac{4}{5} \in D_g$, $\frac{4}{5}$ é o zero da função g.

Observação 2.2.4. Os outros parâmetros e variáveis encontram-se já descritos nos exercícios de equações com exponenciais e respetivos domínios.

Exercício E97I20 proplog 017

Pretende-se com este exercício resolver uma equação em ordem a x, da forma $\log_{a_1}(x) = c_1 + b_1 \times \log_{a_1}(y)$, com recurso às propriedades das exponenciais e logaritmos.

Resolvendo a equação,

$$\begin{aligned}
\log_{a_1}(x) = c_1 + b_1 \times \log_{a_1}(y) \quad &\Leftrightarrow \quad x = a_1^{c_1 + b_1 \times \log_{a_1}(y)} \\
&\Leftrightarrow \quad x = a_1^{c_1} \times a_1^{b_1 \times \log_{a_1}(y)} \\
&\Leftrightarrow \quad x = a_1^{c_1} \times a_1^{log_{a_1}(y^{b_1})} \\
&\Leftrightarrow \quad x = a_1^{c_1} \times y^{b_1}
\end{aligned}$$

No que diz respeito ao enunciado do exercício e à sua programação, usaram-se técnicas descritas anteriormente.

```
Considere a equação $$\log_{a1}(x)= c1 sgn1 b11\log_{a1}(y)$$
É equivalente a
```

No que se segue apresenta uma concretização do enunciado bem como a sua resolução.

⌜Considere $x,\ y\ \in \mathbb{R}^+$. A equação $\log_5(x) = -2 + 3\log_5(y)$ é equivalente a⌟

Resolução:

Uma vez que $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$, vem

$$\begin{aligned}
\log_5(x) = -2 + 3\log_5(y) &\Leftrightarrow x = 5^{-2+3\log_5(y)} && (\log_a(b^p) = p\log_a b)\\
&\Leftrightarrow x = 5^{-2+\log_5(y^3)} && (a^{p+q} = a^p \times a^q)\\
&\Leftrightarrow x = 5^{-2} \times 5^{\log_5(y^3)} && (a^{\log_a b} = b)\\
&\Leftrightarrow x = \frac{1}{25}y^3
\end{aligned}$$

Assim, a equação dada é equivalente a $x = \dfrac{1}{25}y^3$.

2.2.8 Inequações com exponenciais

Nas famílias de exercícios que se seguem pretende-se explorar a resolução de inequações com exponenciais.

Como a função exponencial é estritamente monótona crescente se a base $a > 1$, então $a^x > a^y$, se e apenas se $x > y$.

Considerou-se a família de funções

$$e_1 + f_1 \times a_1^{b_1x+c_1}$$

e foram criados quatro exercícios distintos em que apenas variou o sinal de desigualdade: $f(x) < d1$[2], $f(x) \leq d1$[3], $f(x) > d1$[4] e $f(x) \geq d1$[5]. Como os exercícios são em tudo semelhantes, apresentaremos apenas um deles com detalhe.

[2]Exercício E97I20 Ineqexp 025

[3]Exercício E97I20 Ineqexp 026

[4]Exercício E97I20 Ineqexp 027

[5]Exercício E97I20 Ineqexp 028

Exercício E97I20 Ineqexp 025

Com este exercício pretende-se resolver uma inequação na forma

$$e_1 + f_1 \times a_1^{b_1 x + c_1} < d_1,$$

usando quer a injetividade da função exponencial, quer a sua monotonia, e ainda a função inversa.

Na resolução da inequação,

$$e_1 + f_1 \times a_1^{b_1 x + c_1} < d_1 \Leftrightarrow f_1 \times a_1^{b_1 x + c_1} < d_1 - e_1,$$

deve ter-se em conta o sinal de f_1

1) se $f_1 > 0$, obtemos

$f_1 \times a_1^{b_1 x + c_1} < d_1 - e_1 \Leftrightarrow a_1^{b_1 x + c_1} < \dfrac{d_1 - e_1}{f_1}$, considerando que

1.1) se $\dfrac{d_1 - e_1}{f_1} \leqslant 0$, a condição é impossível e a solução é S=∅

1.2) se $\dfrac{d_1 - e_1}{f_1} > 0$, vem

$$\begin{aligned} a_1^{b_1 x + c_1} < \frac{d_1 - e_1}{f_1} \quad &\Leftrightarrow \quad b_1 x + c_1 < \log_{a_1}\left(\frac{d_1 - e_1}{f_1}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad b_1 x < \log_{a_1}\left(\frac{d_1 - e_1}{f_1}\right) - c_1, \end{aligned}$$

deve-se ainda ter em conta o sinal de b_1 na resolução da inequação.

1.2.1) se $b_1 > 0$, obtemos

$$b_1 x < \log_{a_1}(\frac{d_1 - e_1}{f_1}) - c_1 \Leftrightarrow x < \frac{\log_{a_1}(\frac{d_1 - e_1}{f_1}) - c_1}{b1}$$

e a solução é

$$S = \left]-\infty, \frac{\log_{a_1}(\frac{d_1 - e_1}{f_1}) - c_1}{b1}\right[$$

1.2.2 se $b_1 < 0$

$$b_1 x < \log_{a_1}(\frac{d_1 - e_1}{f_1}) - c_1 \Leftrightarrow x > \frac{\log_{a_1}(\frac{d_1 - e_1}{f_1}) - c_1}{b1}$$

e a solução é

$$S = \left]\frac{\log_{a_1}(\frac{d_1 - e_1}{f_1}) - c_1}{b1}, +\infty\right[$$

2) se $f_1 < 0$, obtemos

$$f_1 \times a_1^{b_1 x + c_1} < d_1 - e_1 \Leftrightarrow a_1^{b_1 x + c_1} > \frac{d_1 - e_1}{f_1}$$

e temos dois casos a considerar.

2.1) se $\frac{d_1 - e_1}{f_1} \leqslant 0$ a condição é universal e o conjunto solução é S=$\mathbb{R}$

2.2) se $\frac{d_1 - e_1}{f_1} > 0$, vem

$$\begin{aligned} a_1^{b_1 x + c_1} > \frac{d_1 - e_1}{f_1} \quad & \Leftrightarrow \quad b_1 x + c_1 > \log_{a_1}(\frac{d_1 - e_1}{f_1}) \\ & \Leftrightarrow \quad b_1 x > \log_{a_1}(\frac{d_1 - e_1}{f_1}) - c_1 \end{aligned}$$

Mais uma vez, deve-se ainda ter em conta o sinal de b_1 na resolução da inequação.

2.2.1) se $b_1 > 0$, obtemos

$$b_1 x > \log_{a_1}(\frac{d_1 - e_1}{f_1}) - c_1 \Leftrightarrow x > \frac{\log_{a_1}(\frac{d_1 - e_1}{f_1}) - c_1}{b1}$$

e a solução é

$$S = \left] \frac{\log_{a_1}(\frac{d_1 - e_1}{f_1}) - c_1}{b1}, +\infty \right[$$

2.2.2 se $b_1 < 0$, obtemos

$$b_1 x > \log_{a_1}(\frac{d_1 - e_1}{f_1}) - c_1 \Leftrightarrow x < \frac{\log_{a_1}(\frac{d_1 - e_1}{f_1}) - c_1}{b1}$$

e a solução é

$$S = \left] -\infty, \frac{\log_{a_1}(\frac{d_1 - e_1}{f_1}) - c_1}{b1} \right[$$

No decorrer da programação deste exercício, optou-se inicialmente por recorrer ao comando "*card*" para a resolução da inequação e à instrução $< \mathit{showone} >$ para as três respostas possíveis. No entanto, é possível utilizar unicamente a instrução $< \mathit{showone} >$, tal como vem descrito a seguir.

Recorrendo ao comando if...else, da forma

```
def solve(s):
   if s.f1>0:   (caso 1)
       if s.d11<=0:#(d11=(d1-e1)/f1)  (caso 1.1)
           s.casos1=0 # (condição impossível)
       else:#(d11>0)                  (caso 1.2)
           s.casos1=2
   else:      (caso 2)
       if s.d11<=0:                   (caso 2.1)
           s.casos1=1# (condição universal)
       else:#(d11>0)                  (caso 2.2)
           s.casos1=2
```

Assim, quando $f1 > 0$ e $d11 \leq 0$, é atribuído à variável casos1 o valor 0 (caso 0), e obter-se-á o conteúdo da 1.ª opção da instrução $<$ *showone* $>$, respeitante a “condição é impossível”.

```
<showone casos1>
 <thisone - caso 0>
\begin{eqnarray*}
e1 sgn6 f11\times a1^{m1}<d1
               &\Leftrightarrow & f1\times a1^{m1}<c11\\
               &\Leftrightarrow & a1^{m1}sgn4 d11\\
\end{eqnarray*}
a condição é impossível e, consequentemente,
o conjunto solução é
 </thisone>
$\displaystyle
S=parcorretaesq1 corretaesq1 vcorreta1 corretadta1
parcorretadta1.$
```

Concretizando, vem

$$\begin{aligned} 5+5\times 4^{-2x-5}<3 &\Leftrightarrow 5\times 4^{-2x-5}<-2 \\ &\Leftrightarrow 4^{-2x-5}<-\frac{2}{5} \end{aligned}$$

a condição é impossível e, consequentemente, o conjunto solução é

$$S=\{\}\,.$$

No caso de $f1 < 0$ e $d11 \leq 0$, é atribuído à variável casos1 o valor 1 (caso 1), e obter-se-á o conteúdo da 2.ª opção da instrução $<$ *showone* $>$, respeitante a ”condição é universal”.

```
 <thisone - caso 1>
\begin{eqnarray*}
e1 sgn6 f11\times a1^{m1}<d1
      &\Leftrightarrow & f1\times a1^{m1}<c11\\
      &\Leftrightarrow & a1^{m1}sgn4 d11\\
\end{eqnarray*}
 condição é universal e o conjunto solução é
 </thisone>
$S=parcorretaesq1 corretaesq1 vcorreta1 corretadta1
  parcorretadta1.$
```

Concretizando, vem

$$
\begin{aligned}
-4-4\times 3^{4\,x-6}<1 \quad &\Leftrightarrow \quad -4\times 3^{4\,x-6}<5\\
&\Leftrightarrow \quad 3^{4\,x-6}>-\frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

que é uma condição é universal e o conjunto solução é $S=\mathbb{R}$.

No caso $d11>0$, é atribuído a variável casos1 o valor 2 (caso 2), e obter-se-á o conteúdo da 3.ª opção da instrução $<$ *showone* $>$.

```
 <thisone>
 Como a função $ a1^{x}$ é crescente vem
 \begin{eqnarray*}
e1 sgn6 f11\times a1^{m1}<d1
       &\Leftrightarrow & f1\times a1^{m1}<c11\\
       &\Leftrightarrow & a1^{m1}sgn4 d11\\
       &\Leftrightarrow & m1 sgn4 d10\\
       &\Leftrightarrow & b1x sgn4 d110\\
       &\Leftrightarrow & x sgn5 b12 \left(d110\right)\\
       &\Leftrightarrow & x sgn5 b11,
\end{eqnarray*}
```

```
 o que permite concluir que o conjunto solução é
 </thisone>
</showone>
$S= parcorretaesq1 corretaesq1 vcorreta1 corretadta1
  parcorretadta1.$
```

Concretizando:

$$\begin{aligned} -2+4\times 10^{2\,x-3}<1 &\Leftrightarrow 4\times 10^{2\,x-3}<3 \\ &\Leftrightarrow 10^{2\,x-3}<\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Como a função 10^x é crescente vem

$$\begin{aligned} 10^{2\,x-3}<\frac{3}{4} &\Leftrightarrow 2\,x-3<\log\left(\frac{3}{4}\right) \\ &\Leftrightarrow 2x<\log\left(\frac{3}{4}\right)+3 \\ &\Leftrightarrow x<\frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{3}{4}\right)+3\right) \\ &\Leftrightarrow x<\frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{2}, \end{aligned}$$

o que permite concluir que o conjunto solução é

$$S=\left]-\infty,\frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{2}\right[.$$

No que diz respeito à programação da resolução da inequação, temos

```
 \begin{eqnarray*}
e1 sgn6 f11\times a1^{m1}<d1
  &\Leftrightarrow & f1\times a1^{m1}<c11\\
  &\Leftrightarrow & a1^{m1}sgn4 d11\\
  &\Leftrightarrow & m1 sgn4 d10
  &\Leftrightarrow & b1x sgn4 d110\\
  &\Leftrightarrow & x sgn5 b12 \left(d110\right)\\
  &\Leftrightarrow & x sgn5 b11,
\end{eqnarray*}
```

tendo em conta o significado dos parâmetros e que só existe o logaritmo de um valor positivo ($d11 > 0$),

```
        s.c11=s.d1-s.e1
        s.d11=(s.c11/s.f1)
        s.b12=1/s.b1
        if s.d11>0:
            s.a11=logb(s.d11,s.a1,factorize=true)-s.c1
            s.b11=s.a11/s.b1
            s.d10=logb(s.d11,s.a1)
            s.d110=logb(s.d11,s.a1)-s.c1
```

o sinal de desigualdade ($sign4$) mantém-se quando $f1 > 0$, caso contrário inverte-se.

```
        if s.f1>0:
            s.sgn4='<'
        else:
           s.sgn4='>'
```

Acontece o mesmo com o sinal de desigualdade ($sgn5$), quando $f1 \times b1 > 0$ o sinal de desigualdade mantém-se igual ao inicial, caso contrário inverte-se.

```
        if s.f1*s.b1>0:
            s.sgn5='<'
        else:
           s.sgn5='>'
```

A solução é descrita na forma

```
$$parcorretaesq1 corretaesq1 vcorreta1 corretadta1
  parcorretadta1$$
```

Onde as variáveis corretaesq1 e corretadta1 representam, o espaço vazio ou o conjunto dos números reais ou os extremos do intervalo conjunto solução, respetivamente esquerdo e direito.

```
if s.f1>0:
    if s.d11<=0:
        s.corretaesq1=''
        s.corretadta1=''
    else:
        if s.b1>0:
            s.corretaesq1=r'-\infty'
            s.corretadta1=s.b11
        else:
            s.corretaesq1=s.b11
            s.corretadta1=r'+\infty'
else:
    if s.d11<=0:
        s.corretaesq1=''
        s.corretadta1=r'\mathbb{R}'
    else:
        if s.b1<0:
            s.corretaesq1=r'-\infty'
            s.corretadta1=s.b11
        else:
            s.corretaesq1=s.b11
            s.corretadta1=r'+\infty'
```

As variáveis parcorretaesq1 e parcorretadta1 representam as chavetas ou espaço vazio ou parênteses retos da esquerda e da direita, respetivamente.

```
if s.f1>0:
    if s.d11<=0:
        s.parcorretaesq1=r'\left\{'
        s.parcorretadta1=r'\right\}'
    else:
        s.parcorretaesq1=r'\left]'
        s.parcorretadta1=r'\right['
else:
    if s.d11<=0:
        s.parcorretaesq1=''
        s.parcorretadta1=''
    else:
        s.parcorretaesq1=r'\left]'
        s.parcorretadta1=r'\right['
```

A variável vcorreta1 representa uma vírgula ou um espaço em branco, consoante a resposta é um intervalo, o conjunto vazio ou $\mathbb{R}$.

```
if s.f1>0:
    if s.d11<=0:
        s.vcorreta1=''
    else:
        s.vcorreta1=','
else:
    if s.d11<=0:
        s.vcorreta1=''
    else:
        s.vcorreta1=','
```

Quanto à estrutura da escolha múltipla,

```
<multiplechoice>
<choice>#(resposta certa)
$$parcorretaesq1 corretaesq1 vcorreta1 corretadta1
 parcorretadta1$$
</choice>
<choice>#(respostas erradas, com k=1,2,3)
$$parerradaesqk erradaesqk verradak erradadtak parerradadtak$$
</choice>
</multiplechoice>
```

as respostas erradas são construídas de forma similar à correta, tendo em atenção o sinal de f1, d11 e b1.

A resolução destas inequações com exponenciais, tendo em atenção o sinal de vários parâmetros, foi um estímulo ao nível da programação, propiciando a utilização dos comandos $if...else$ e demonstrando as suas potencialidades.

Exercício E97I20 Ineqexp 024

Após um desafio feito pelas orientadoras, foi criado este exercício, em que o sinal de desigualdade é gerado aleatoriamente de entre os possíveis $<, \leq, >, \geq$ e resolve as respetivas inequações com exponenciais, aglutinando deste modo num único exercício, os exercícios E97I20 Ineqexp 025, 026, 027 e 028.
Considerando o enunciado

```
Considere a inequação $$e1 sgn6 f11\times a1^{m1} ord1 d1$$
O conjunto de solução é:
```

e pelo facto de todos os parâmetros, funções, variáveis serem comuns e terem as mesmas denominações dos exercícios 025,026,027 e 028, a diferença reside no comando "$ord1$" que gera aleatoriamente um sinal de desigualdade entre $\leq, <, \geq$ e $>$.
Essa geração é feita com recurso à instrução $choice([..., ...])$, como se mostra a seguir:

```
s.ord1=choice([r'\le',r'<',r'\ge',r'>'])
```

Em termos de programação a situação resolve-se com recurso ao comando $if...elif...elif...else...$ e aos quatros "corpos de programação"dos exercícios 025, 026, 027 e 028, como se visualiza a seguir:

```
s.ord1=choice([r'\le',r'<',r'\ge',r'>'])
if s.ord1==r'\le':
                        ⋮
corpo de programação de Ineqexp 026
                        ⋮
elif s.ord1==r'<':
                        ⋮
corpo de programação de Ineqexp 025
                        ⋮
elif s.ord1==r'\ge':
                        ⋮
corpo de programação de Ineqexp 028
                        ⋮
else s.ord1==r'>':
                        ⋮
corpo de programação de Ineqexp 027
                        ⋮
```

Este exercício foi, de facto, algo deveras desafiante pela possibilidade de investir e potenciar novos mecanismos de programação.

2.2.9 Inequações com logaritmos

Nas famílias de exercícios que se seguem o conceito a explorar é a resolução de inequações envolvendo logaritmos.
A função logarítmica é estritamente monótona, crescente se a base a é superior a um ($a > 1$) e decrescente se a base a estiver compreendida entre zero e um ($0 < a < 1$).
Na sequência do programa em vigor, os exercícios elaborados só contemplam os casos de base $a > 1$. Deste modo, para $a > 1$, $\log_a(x) > \log_a(y)$, se e apenas se $x > y$.
Considerou-se a família de funções

$$e_1 + f_1 \times \log_{a_1}(b_1 x + c_1)$$

e foram criados quatro exercícios distintos em que apenas variou o sinal de desigualdade: $f(x) < d1$[6], $f(x) \leq d1$[7], $f(x) > d1$[8] e $f(x) \geq d1$[9]. Como os exercícios são em tudo semelhantes, apresentaremos apenas um deles com as suas concretizações, não havendo em termos de programação nada de relevante a acrescentar.

Exercício E97I20 Ineqlog 005

Com este exercício pretende-se resolver uma inequação da forma

$$e_1 + f_1 \times \log_{a_1}(b_1 x + c_1) > d_1.$$

O conjunto solução da inequação deve ter em conta o domínio da função, portanto começa-se pela sua determinação.

[6]Exercício E97I20 Ineqlog 006
[7]Exercício E97I20 Ineqlog 007
[8]Exercício E97I20 Ineqlog 005
[9]Exercício E97I20 Ineqlog 008

Tendo em conta que o domínio da função logarítmica é:

$$\{x \in \mathbb{R} : b_1x + c_1 > 0\}$$

é necessário resolver a inequação

$$b_1x + c_1 > 0 \Leftrightarrow b_1x > -c_1.$$

A resolução desta inequação depende do sinal de b_1.

- se $b_1 > 0$

  $$b_1x > -c_1 \Leftrightarrow x > -\frac{c_1}{b_1}$$

  o domínio da função é:

  $$\left\{x \in \mathbb{R} : x > -\frac{c_1}{b_1}\right\} = \left]-\frac{c_1}{b_1}, +\infty\right[.$$

- se $b_1 < 0$

  $$b_1x > -c_1 \Leftrightarrow x < -\frac{c_1}{b_1}$$

  o domínio da função é:

  $$\{x \in \mathbb{R} : x > -\frac{c_1}{b_1}\} = \left]-\infty, -\frac{c_1}{b_1}\right[.$$

Na resolução da inequação,
$e_1 + f_1 \times \log_{a_1}(b_1x + c_1) > d_1 \Leftrightarrow f_1 \times \log_{a_1}(b_1x + c_1) > d_1 - e_1$
deve ter-se em conta o sinal de f_1

1) se $f_1 > 0$

$$\begin{aligned} f_1 \times \log_{a_1}(b_1x + c_1) > d_1 - e_1 &\Leftrightarrow \log_{a_1}(b_1x + c_1) > \frac{d_1 - e_1}{f_1} \\ &\Leftrightarrow b_1x + c_1 > a_1^{\frac{d_1 - e_1}{f_1}} \\ &\Leftrightarrow b_1x > a_1^{\frac{d_1 - e_1}{f_1}} - c_1 \end{aligned}$$

1.1) se $b_1 > 0$

$$b_1 x > a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}} - c_1 \Leftrightarrow x > \frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}} - c_1}{b_1}$$

$$x \in \left] \frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}} - c_1}{b_1}, +\infty \right[$$

O conjunto solução obtém-se intersetando este conjunto com o domínio da função, $D = \left] -\frac{c_1}{b_1}, +\infty \right[$,

$$S = \left] \frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}} - c_1}{b_1}, +\infty \right[\cap \left] -\frac{c_1}{b_1}, +\infty \right[= \left] \frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}} - c_1}{b_1}, +\infty \right[.$$

Dado que $a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}} > 0$, $b_1 > 0$ e $\frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}} - c_1}{b_1} = \frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}}{b_1} - \frac{c_1}{b_1}$ resulta que

$$\frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}} - c_1}{b_1} > -\frac{c_1}{b_1}.$$

Concretizando:

Resolvendo a inequação $-3 + 4\,\log_5(5\,x - 5) > -7$ vem

$$\begin{aligned} -3 + 4\,\log_5(5\,x - 5) > -7 &\Leftrightarrow 4\,\log_5(5\,x - 5) > -4 \\ &\Leftrightarrow \log_5(5\,x - 5) > -1 \end{aligned}$$

Como a função definida por $\log_5(x)$ é crescente temos

$$\begin{aligned} \log_5(5\,x - 5) > -1 &\Leftrightarrow 5\,x - 5 > 5^{-1} \\ &\Leftrightarrow 5x > 5^{-1} + 5 \\ &\Leftrightarrow x > \frac{26}{25} \end{aligned}$$

Como o domínio da função f com $f(x) = -3 + 4\,\log_5(5\,x - 5)$ é

$$\{x \in \mathbb{R} : 5\,x - 5 > 0\} =]1, +\infty[\quad (5x > 5 \Leftrightarrow x > 1)$$

o conjunto solução da inequação obtém-se intersetando o conjunto obtido ao resolver a inequação com o domínio da função:

$$]1,+\infty[\cap\left]\frac{26}{25},+\infty\right[=\left]\frac{26}{25},+\infty\right[$$

1.2) se $b_1<0$

$$b_1x>a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}-c_1\Leftrightarrow x<\frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}-c_1}{b_1}$$

ou seja,

$$x\in\left]-\infty,\frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}-c_1}{b_1}\right[$$

intersetando com domínio da função, $D=\left]-\infty,-\frac{c_1}{b_1}\right[$, vem

$$S=\left]-\infty,\frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}-c_1}{b_1}\right[\cap\left]-\infty,-\frac{c_1}{b_1}\right[=\left]-\infty,\frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}-c_1}{b_1}\right[.$$

Dado que $a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}>0$, $b_1<0$ e $\frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}-c_1}{b_1}=\frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}}{b_1}-\frac{c_1}{b_1}$ resulta que

$$\frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}-c_1}{b_1}<-\frac{c_1}{b_1}.$$

Concretizando:

Resolvendo a inequação $5+4\,\ln(-4\,x-4)>13$ vem

$$\begin{aligned}5+4\,\ln(-4\,x-4)>13 &\Leftrightarrow 4\,\ln(-4\,x-4)>8\\ &\Leftrightarrow \ln(-4\,x-4)>2\end{aligned}$$

Como a função $\ln(x)$ é crescente temos

$$\begin{aligned}\ln(-4\,x-4)>2 &\Leftrightarrow -4\,x-4>e^2\\ &\Leftrightarrow -4x>e^2+4\\ &\Leftrightarrow x<-\frac{1}{4}\,e^2-1\end{aligned}$$

Como o domínio da função $f(x) = 5 + 4\,\ln(-4\,x - 4)$ é

$$\{x \in \mathbb{R} : -4\,x - 4 > 0\} =]-\infty, -1[\quad (-4x > 4 \Leftrightarrow x < -1)$$

o conjunto solução da inequação obtém-se intersetando o conjunto encontrado na resolução da inequação com o domínio da função:

$$]-\infty, -1[\cap \left]-\infty, -\frac{1}{4}\,e^2 - 1\right[= \left]-\infty, -\frac{1}{4}\,e^2 - 1\right[$$

2) se $f_1 < 0$

$$\begin{aligned} f_1 \times \log_{a_1}(b_1x + c_1) > d_1 - e_1 \quad &\Leftrightarrow \quad \log_{a_1}(b_1x + c_1) < \frac{d_1 - e_1}{f_1} \\ &\Leftrightarrow \quad b_1x + c_1 < a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}} \\ &\Leftrightarrow \quad b_1x < a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}} - c_1 \end{aligned}$$

2.1) se $b_1 > 0$

$$b_1x < a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}} - c_1 \Leftrightarrow x < \frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}} - c_1}{b_1}$$

$$x \in \left]-\infty, \frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}} - c_1}{b_1}\right[$$

Fazendo a interseção com o domínio vem,

$$S = \left]-\infty, \frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}} - c_1}{b_1}\right[\cap \left]-\frac{c_1}{b_1}, +\infty\right[= \left]-\frac{c_1}{b_1}, \frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}} - c_1}{b_1}\right[.$$

Dado que $a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}} > 0$, $b_1 > 0$ e $\frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}} - c_1}{b_1} = \frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}}{b_1} - \frac{c_1}{b_1}$ resulta que

$$\frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}} - c_1}{b_1} > -\frac{c_1}{b_1}.$$

Concretizando:

Resolvendo a inequação $3 - 5\,\log_4(2\,x-1) > -7$ vem

$$\begin{aligned} 3 - 5\,\log_4(2\,x-1) > -7 &\Leftrightarrow -5\,\log_4(2\,x-1) > -10 \\ &\Leftrightarrow \log_4(2\,x-1) < 2 \end{aligned}$$

Como a função $\log_4(x)$ é crescente temos

$$\begin{aligned} \log_4(2\,x-1) < 2 &\Leftrightarrow 2\,x-1 < 4^2 \\ &\Leftrightarrow 2x < 4^2+1 \\ &\Leftrightarrow x < \frac{17}{2} \end{aligned}$$

Como o domínio de $f(x) = 3 - 5\,\log_4(2\,x-1)$ é

$$\{x \in \mathbb{R} : 2\,x - 1 > 0\} = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\quad \left(2x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}\right)$$

o conjunto solução da inequação é

$$\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\cap \left]-\infty, \frac{17}{2}\right[= \left]\frac{1}{2}, \frac{17}{2}\right[$$

2.2) se $b_1 < 0$

$$b_1 x < a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}} - c_1 \Leftrightarrow x > \frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}} - c_1}{b_1}$$

ou seja,

$$x \in \left]\frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}} - c_1}{b_1}, +\infty\right[$$

O conjunto solução obtém-se intersetando este conjunto com o domínio da função:

$$S = \left]\frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}} - c_1}{b_1}, +\infty\right[\cap \left]-\infty, -\frac{c_1}{b_1}\right[= \left]\frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}} - c_1}{b_1}, -\frac{c_1}{b_1}\right[.$$

Dado que $a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}} > 0$, $b_1 < 0$ e $\frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}-c_1}{b_1} = \frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}}{b_1} - \frac{c_1}{b_1}$ resulta que

$$\frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}} - c_1}{b_1} < -\frac{c_1}{b_1}.$$

Concretizando:

Resolvendo a inequação $-2 - 2\,\log_4(-2\,x-5) > -8$ vem

$$\begin{aligned} -2 - 2\,\log_4(-2\,x-5) > -8 &\Leftrightarrow -2\,\log_4(-2\,x-5) > -6 \\ &\Leftrightarrow \log_4(-2\,x-5) < 3 \end{aligned}$$

Como a função $\log_4(x)$ é crescente temos

$$\begin{aligned} \log_4(-2\,x-5) < 3 &\Leftrightarrow -2\,x-5 < 4^3 \\ &\Leftrightarrow -2x < 4^3+5 \\ &\Leftrightarrow x > -\frac{69}{2} \end{aligned}$$

Como o domínio de $f(x) = -2 - 2\,\log_4(-2\,x-5)$ é

$$\{x \in \mathbb{R} : -2\,x-5 > 0\} = \left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[\quad \left(-2x > 5 \Leftrightarrow x < -\frac{5}{2}\right)$$

o conjunto solução da inequação obtém-se intersetando o conjunto encontrado na resolução da inequação com o domínio da função:

$$\left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[\cap \left]-\frac{69}{2}, +\infty\right[= \left]-\frac{69}{2}, -\frac{5}{2}\right[$$

Quanto à elaboração das respostas da escolha múltipla,

- se $f_1 > 0$
  - se $b_1 > 0$

    correta1$= \left]\frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}-c_1}{b_1}, +\infty\right[$ errada1 $= \left]-\infty, \frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}-c_1}{b_1}\right[$

    errada2 $= \left]-\frac{c_1}{b_1}, \frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}-c_1}{b_1}\right[$ errada3 $= \left]-\frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}-c_1}{b_1}, \frac{c_1}{b_1}\right[$

– se $b_1 < 0$

$$\text{correta1}= \left]-\infty, \frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}-c_1}{b_1}\right[\qquad \text{errada1} = \left]\frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}-c_1}{b_1}, +\infty\right[$$

$$\text{errada2} = \left]\frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}-c_1}{b_1}, -\frac{c_1}{b_1}\right[\qquad \text{errada3} = \left]\frac{c_1}{b_1}, -\frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}-c_1}{b_1}\right[$$

- se $f_1 < 0$

– se $b_1 > 0$

$$\text{correta1}= \left]-\frac{c_1}{b_1}, \frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}-c_1}{b_1}\right[\qquad \text{errada1} = \left]-\frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}-c_1}{b_1}, \frac{c_1}{b_1}\right[$$

$$\text{errada2} = \left]\frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}-c_1}{b_1}, +\infty\right[\qquad \text{errada3} = \left]-\infty, \frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}-c_1}{b_1}\right[$$

– se $b_1 < 0$

$$\text{correta1}= \left]\frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}-c_1}{b_1}, -\frac{c_1}{b_1}\right[\qquad \text{errada1} = \left]\frac{c_1}{b_1}, -\frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}-c_1}{b_1}\right[$$

$$\text{errada2} = \left]-\infty, \frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}-c_1}{b_1}\right[\qquad \text{errada3} = \left]\frac{a_1^{\frac{d_1-e_1}{f_1}}-c_1}{b_1}, +\infty\right[$$

Concretizando:

Considere a inequação $-2 - 2\log_4(-2\,x - 5) > -8$. O conjunto de solução é:

(A)$\left]-\frac{69}{2}, -\frac{5}{2}\right[$ (B)$\left]\frac{5}{2}, \frac{69}{2}\right[$ (C)$\left]-\infty, -\frac{69}{2}\right[$ (D)$\left]-\frac{69}{2}, +\infty\right[$

Este exercício proporcionou uma melhoria na análise da parametrização, tendo em conta o aumento da sua complexidade, face à influência do domínio da função na resolução do mesmo.

Exercício E97I20 Ineqlog 009

No âmbito, do desafio lançado anteriormente pelas orientadoras, foi criado este exercício, em que o sinal de desigualdade é gerado de entre os possíveis $<, \leq, >, \geq$ e resolve as respetivas inequações com logaritmos, aglutinando deste modo num único exercício, os exercícios E97I20 Ineqlog 005, 006, 007 e 008.
De modo análogo, o método utilizado é em tudo semelhante a construção em "pirâmide"realizado no exercício E97I20 Ineqexp 024.

```
Considere a inequação $$e1 sgn6 f11\times\log_{a1}(m1)ord1 d1$$
O conjunto de solução é:
```

Pelo facto de todas as variáveis serem comuns e terem as mesmas denominações nos exercícios 005, 006, 007 e 008, a diferença também reside no comando "$ord1$" que gera aleatoriamente um sinal de desigualdade e entre $\leq, <, \geq$ e $>$.

Em termos de programação a situação resolve-se com recurso comando $if...elif...elif...else...$ e aos quatros "corpos de programação"dos exercícios 005, 006, 007 e 008, como se visualiza a seguir:

```
def solve(s):
    s.ord1=choice([r'\le',r'<',r'\ge',r'>'])
    if s.ord1==r'\le':
                          ⋮
    corpo de programação de Ineqlog 007
                          ⋮
```

```
elif s.ord1==r'<':
                        ⋮
corpo de programação de Ineqlog 006
                        ⋮
elif s.ord1==r'\ge':
                        ⋮
corpo de programação de Ineqlog 008
                        ⋮
else s.ord1==r'>':
                        ⋮
corpo de programação de Ineqlog 005
                        ⋮
```

Os constantes incentivos ao nível da programação nos exercícios destas duas últimas subsecções e nos que constam na subsecção seguinte, causaram-me grande satisfação, estimulando-me à pesquisa, elaboração e concretização de novos e melhores desafios.

2.2.10 Inequações com exponenciais e logaritmos

Nas famílias de exercícios que se seguem o conceito a explorar é resolução de inequações com funções exponencial e logarítmica.
Após a realização dos E97I20 Ineqexp 024 e E97I20 Ineqlog 009, foi lançado outro desafio: criar um exercício que aglutine os exercícios E97I20 Ineqexp 024 e E97I20 Ineqlog 009, isto é, que gera aleatoriamente uma função exponencial ou logarítmica, bem como o sinal de desigualdade, surgindo o exercício E97I20 Ineqexplog 032.

Exercício E97I20 Ineqexplog 032

Este exercício gera inicialmente uma função exponencial ou logarítmica, gerando em seguida o sinal de desigualdade de entre os quatro possíveis ($<, \leq, >$ *e* $\geq$), culminando na resolução da inequação gerada.
Visualizar-se-á de seguida duas concretizações, uma gerando uma inequação envolvendo uma exponencial e outra gerando uma inequação envolvendo um logaritmo, respetivamente.

1) Considere a inequação

$$2 + 4 \times 2^{-2\,x-3} \leq 1$$

O seu conjunto solução é

(A) $\varnothing$ (B) $\mathbb{R}$ (C) $\left]-\infty, -\frac{5}{4}\right]$ (D) $\left[-\frac{1}{4}\,2^{\left(\frac{3}{4}\right)} + 3, +\infty\right[$

Resolução:

Vamos começar por resolver a inequação

$$\begin{aligned} 2 + 4 \times 2^{-2\,x-3} \leq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 4 \times 2^{-2\,x-3} \leq -1 \\ &\Leftrightarrow \quad 2^{-2\,x-3} \leq \frac{-1}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad 2^{-2\,x-3} \leq -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

a condição é impossível, consequentemente, o conjunto solução é $S = \varnothing$.

2) Considere a inequação

$$4 + 2 \times log_3(-3\,x + 5) \leq 1$$

O seu conjunto solução é

(A) $\left[-\frac{1}{27}\sqrt{3} + \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right[$ (B) $\left]-\frac{1}{27}\sqrt{3} + \frac{5}{3}, +\infty\right[$

(C) $\left]-\infty, -\frac{1}{27}\sqrt{3} + \frac{5}{3}\right[$ (D) $\left]-\frac{5}{3}, \frac{1}{27}\sqrt{3} - \frac{5}{3}\right]$

Resolução:

Vamos começar por resolver a inequação

$$\begin{aligned} 4+2\times\log_3(-3\,x+5)\leq 1 &\Leftrightarrow 2\times\log_3(-3\,x+5)\leq -3\\ &\Leftrightarrow \log_3(-3\,x+5)\leq \frac{-3}{2}\\ &\Leftrightarrow \log_3(-3\,x+5)\leq -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Como a função $\log_3(x)$ é crescente temos

$$\begin{aligned} \log_3(-3\,x+5)\leq -\frac{3}{2} &\Leftrightarrow -3\,x+5\leq 3^{-\frac{3}{2}}\\ &\Leftrightarrow -3x\leq 3^{-\frac{3}{2}}-5\\ &\Leftrightarrow -3x\leq \frac{1}{9}\sqrt{3}-5\\ &\Leftrightarrow x\geq \frac{\frac{1}{9}\sqrt{3}-5}{-3}\\ &\Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{27}\sqrt{3}+\frac{5}{3} \end{aligned}$$

Como o domínio da função $f(x)=4+2\times log_3(-3\,x+5)$ é

$$\{x\in\mathbb{R}:-3\,x+5>0\}=]1,+\infty[\quad\left(-3x>-5\Leftrightarrow x<\frac{5}{3}\right)$$

o conjunto solução da inequação obtém-se intersetando o conjunto obtido ao resolver a inequação com o domínio da função:

$$\text{A solução é}\left]-\infty,\frac{5}{3}\right[\cap\left[-\frac{1}{27}\sqrt{3}+\frac{5}{3},+\infty\right[=\left[-\frac{1}{27}\sqrt{3}+\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right[$$

O exercício apresenta a resolução quer da inequação envolvendo uma exponencial quer envolvendo um logaritmo, da seguinte forma:

```
#(Enunciado)

Considere a inequação

$$ card3 e1 sgn6 f11\times a1^{m1} ord1 d1$$
```

```
$$ card4 e1 sgn6 f11\times log_{a1}(m1) ord1 d1$$
O conjunto de solução é:
#(Escolha múltipla)
<multiplechoice>
<choice>  $$ rcorreta1 $$ </choice>
<choice>  $$ rerrada1  $$ </choice>
<choice>  $$ rerrada2  $$ </choice>
<choice>  $$ rerrada3  $$ </choice>
</multiplechoice>
Resolução:
Vamos começar por resolver a inequação
\begin{eqnarray*}
#(parte inicial da inequação envolvendo uma exponencial)
card3  e1 sgn6 f11\times a1^{m1} ord1 d1
           &\Leftrightarrow & f1\times a1^{m1} ord1 c11\\
      card3&\Leftrightarrow & a1^{m1}sgn4 \frac{c11}{f1}\\
      card3&\Leftrightarrow & a1^{m1}sgn4 d11\\
#(parte inicial da inequação envolvendo um logaritmo)
card4 e1 sgn6 f11\times\log_{a1}(m1)ord1 d1
      &\Leftrightarrow & f1\times\log_{a1}(m1)ord1 c11\\
 card4&\Leftrightarrow &\log_{a1}(m1)sgn4 \frac{c11}{f1}\\
 card4&\Leftrightarrow & \log_{a1}(m1)sgn4 d11\\
\end{eqnarray*}
#(texto para a inequação que envolve uma exponencial)
 $card3 card1 \text{Como a função}$ $ card3 card1 a1^{x}$
 $card3 card1\text{ é crescente temos}$
#(texto para a inequação que envolve um logaritmo)
```

```
 $card4 \text{Como a função}$ $ card4 \log_{a1}(x)$
 $card4\text{ é crescente temos}$
\begin{eqnarray*}
#(conclusão da resolução da inequação envolvendo uma exponencial)
card3 card1&\Leftrightarrow & m1 sgn4 \log_{a1}(d11)\\
card3 card1&\Leftrightarrow & b1x sgn4 \log_{a1}(d11) sgn1 e11\\
card3 card1&\Leftrightarrow
           & x sgn5 b12 \left(\log_{a1}(d11)sgn1 e11\right)\\
card3 card1&\Leftrightarrow
           & x sgn5 sgn7\frac{\log_{a1}(d11)}{auxb1}sgn2 bc11\\
card3 card1&\Leftrightarrow & x sgn5 b11
#(conclusão da resolução da inequação envolvendo um logaritmo)
     card4&\Leftrightarrow & m1 sgn4 a1^{d11}\\
     card4&\Leftrightarrow & b1x sgn4 a1^{d11} sgn1 e11\\
     card4&\Leftrightarrow & b1x sgn4 a11\\
     card4&\Leftrightarrow & x sgn5\frac{a11}{b1}\\
     card4&\Leftrightarrow & x sgn5 b11\\
\end{eqnarray*}
#(resposta no caso de uma inequação envolver uma exponencial)
 <showone casos1>
 <thisone>A condição é impossível.</thisone>
 <thisone>A condição é universal. </thisone>
 <thisone>                        </thisone>
</showone>
$$ card3  rcorreta1 $$
#(resposta no caso de uma inequação envolver um logaritmo)
$ card4 \text{Domínio da função logaritmo:}
```

```
 \{x\in\mathbb{R}:m1>0\}\\
card4 b1x>sgn1 e11\Leftrightarrow x sgn3  bc1$
$card4\text{A solução é}\left]dominioesq1,dominiodta1\right[
\cap\left parineqesq1 ineqesq1 , ineqdta1 \right parineqdta1
= rcorreta1$
```

A ativação do comando "*card*4" elimina do enunciado, da resolução e das escolhas múltiplas tudo o que diz respeito aos logaritmos. Enquanto que a ativação "*card*3" elimina do enunciado, da resolução e das escolhas múltiplas tudo o que diz respeito às exponenciais.
Os comandos "*ord*1" e "*ord*2" geram o sinal de desigualdade e função exponencial ou logarítmica respetivamente.

```
s.ord2 =choice([r'\log_{s.a1}(s.m1)',r's.a1^{s.m1}'])
s.ord1=choice([r'\le',r'<',r'\ge',r'>'])
```

A programação recorre ao comando *if...else...* e aos "corpos de programação" dos exercícios Ineqexp 024, Ineqlog 009, como se visualiza a seguir:

```
if s.ord2==r's.a1^{s.m1}':
    s.card3 =''
    s.card4 ='%'            ⋮
    corpo de programação de Ineqexp 024
                            ⋮
else:
    s.card3 ='%'
    s.card4 =''             ⋮
    corpo de programação de Ineqlog 009
                            ⋮
```

Exercício E97I20 Ineqexplog 033

Este exercício executa o mesmo que o exercício E97I20 Ineqexplog 032, mas dada a extensão e a complexidade de leitura do exercício E97I20 Ineqexplog 032, foi lançado novo desafio, enquanto que no caso anterior a solução e as respostas erradas eram construídas item a item, considerando o exemplo,

$$]-\infty, s.b11]$$

como se descreve a seguir,

```
$$parcorretaesq1 corretaesq1 , corretadta1 parcorretadta1$$
   def solve(s):
       s.corretaesq1=r'-\infty'
       s.corretadta1=s.b11
       s.parcorretaesq1=r'\left\]'
       s.parcorretadta1=r'\right\]'
```

neste exercícios as várias respostas são funções como se ilustra:

```
$$rcorreta1$$
def solve(s):
 s.rcorreta1= s.intervalo(r'\left]',-Infinity, s.b11, r'\right]')
```

Nota 2.2.5. Neste caso é necessário definir a função intervalo do seguinte modo,

```
  def intervalo(s,pesq,vesq,vdir,pdir):
        return pesq + latex(vesq) + "," + latex(vdir) + pdir
```

identificando a função intervalo pelo parêntese esquerdo (pesq), seguido (+) do valor do extremo esquerdo do intervalo (vesq), seguido (+) da vírgula (","), seguido (+) do extremo direito do intervalo (vdir) e terminado (+) com o parêntese direito (pdir).

2.2.11 Função inversa de uma função exponencial

Nos exercícios que se seguem o conceito a explorar é a determinação da expressão da função inversa de uma função envolvendo uma exponencial.

Exercício E97I20 finvexp 029

Neste exercício pretende-se determinar a expressão da função inversa de uma função do tipo $f(x) = e_1 + f_1 \times a_1^{b_1 x + c_1}$

O domínio da função f é $\mathbb{R}$ corresponde ao contradomínio da função f^{-1}. Pelo facto do contradomínio da função exponencial ser $\mathbb{R}^+$ e da função afim ser $\mathbb{R}$, vem $a_1^{b_1 x + c_1} > 0$, é necessário ter em conta o sinal de f_1,

- se $f_1 > 0$

$$f_1 \times a_1^{b_1 x + c_1} > 0 \Leftrightarrow e_1 + f_1 \times a_1^{b_1 x + c_1} > e_1,$$

  o contradomínio da função f é:

$$\{x \in \mathbb{R} : x > e_1\} =]e_1, +\infty[\,,$$

  correspondente ao domínio da função f^{-1}.

- se $f_1 < 0$

$$f_1 \times a_1^{b_1 x + c_1} < 0 \Leftrightarrow e_1 + f_1 \times a_1^{b_1 x + c_1} < e_1,$$

  o contradomínio da função f é:

$$\{x \in \mathbb{R} : x < e_1\} =]-\infty, e_1[\,,$$

  correspondente ao domínio da função f^{-1}.

Para determinar a expressão da função inversa de f resolve-se a equação $f(x) = y$ em ordem a x. Assim

$$\begin{aligned} e_1 + f_1 \times a_1^{b_1 x + c_1} = y &\Leftrightarrow f_1 \times a_1^{b_1 x + c_1} = y - e_1 \\ &\Leftrightarrow a_1^{b_1 x + c_1} = \frac{y - e_1}{f_1} \\ &\Leftrightarrow b_1 x + c_1 = \log_{a_1}(\frac{y - e_1}{f_1}) \\ &\Leftrightarrow b_1 x = \log_{a_1}(\frac{y - e_1}{f_1}) - c_1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\log_{a_1}(\frac{y - e_1}{f_1})}{b_1} \end{aligned}$$

donde se conclui que $f^{-1}(x) = \frac{\log_{a_1}(\frac{x - e_1}{f_1})}{b_1}$.
Concretizando,
Considere a seguinte função f definida por

$$f(x) = -2 - 2 \times 4^{-2\,x-5}.$$

A expressão da função inversa, $f^{-1}(x)$, é

(A) $f^{-1}(x) = -\frac{\log_4\left(-\frac{1}{2}\,x-1\right)+5}{2}$ (B) $f^{-1}(x) = \frac{\log_4\left(-\frac{1}{2}\,x-1\right)+5}{2}$

(C) $f^{-1}(x) = -\frac{\log_4\left(\frac{1}{2}\,x+1\right)+5}{2}$ (D) $f^{-1}(x) = -\frac{\log_4\left(\frac{1}{2}\,x-1\right)+5}{2}$

Resolução:

Para determinar a inversa da função f resolve-se a equação $f(x) = y$ em ordem a x. Assim

$$\begin{aligned}
-2-2\times 4^{-2\,x-5}=y \;&\Leftrightarrow\; -2\times 4^{-2\,x-5}=y+2\\
&\Leftrightarrow\; 4^{-2\,x-5}=-\frac{y+2}{2}\\
&\Leftrightarrow\; -2\,x-5=\log_4\left(-\frac{1}{2}\,y-1\right)\\
&\Leftrightarrow\; -2x=\log_4\left(-\frac{1}{2}\,y-1\right)+5\\
&\Leftrightarrow\; x=-\frac{\log_4\left(-\frac{1}{2}\,y-1\right)+5}{2},
\end{aligned}$$

donde se conclui que

$$f^{-1}(x)=-\frac{\log_4\left(-\frac{1}{2}\,x-1\right)+5}{2}.$$

de domínio $]-\infty,-2[$ e contradomínio $\mathbb{R}$.

Nota 2.2.6. Ao nível da programação, as técnicas foram similares ao que já fora apresentado anteriormente.

2.2.12 Função inversa de uma função logarítmica

Nos exercícios que se seguem o conceito a explorar é a determinação da expressão da função inversa de uma função envolvendo logaritmos.

Exercício E97I20 finvlog 014

Com este exercício pretende-se determinar a expressão da função inversa de uma função do tipo

$$f(x)=e_1+f_1\times\log_{a_1}(b_1x+c_1).$$

O domínio da função f é

$$\{x\in\mathbb{R}:b_1x+c_1>0\}.$$

É preciso ter em conta o sinal de b_1,

- se $b_1 > 0$

  $b_1x + c_1 > 0 \Leftrightarrow b_1x > -c_1 \Leftrightarrow x > -\frac{c_1}{b_1}$,

  o domínio da função f é

  $$\{x \in \mathbb{R} : x > -\frac{c_1}{b_1}\} = \left]-\frac{c_1}{b_1}, +\infty\right[,$$

  correspondendo ao contradomínio da função f^{-1}.

- se $b_1 < 0$

  $b_1x + c_1 > 0 \Leftrightarrow b_1x > -c_1 \Leftrightarrow x < -\frac{c_1}{b_1}$,

  o domínio da função f é

  $$\{x \in \mathbb{R} : x < -\frac{c_1}{b_1}\} = \left]-\infty, -\frac{c_1}{b_1}\right[,$$

  correspondendo ao contradomínio da função f^{-1}.

O contradomínio da função f é $\mathbb{R}$ e corresponde ao domínio da função f^{-1}.

Para determinar a expressão da função inversa de f resolve-se a equação $f(x) = y$ em ordem a x. Assim

$$\begin{aligned}
e_1 + f_1 \times \log_{a_1}(b_1x + c_1) = y &\Leftrightarrow f_1 \times \log_{a_1}(b_1x + c_1) = y - e_1 \\
&\Leftrightarrow \log_{a_1}(b_1x + c_1) = \frac{y - e_1}{f_1} \\
&\Leftrightarrow b_1x + c_1 = a_1^{\frac{y-e_1}{f_1}} \\
&\Leftrightarrow b_1x = a_1^{\frac{y-e_1}{f_1}} - c_1 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{a_1^{\frac{y-e_1}{f_1}} - c_1}{b_1}
\end{aligned}$$

donde se conclui que $f^{-1}(x) = \dfrac{a_1^{\frac{x-e_1}{f_1}} - c_1}{b_1}$.

Concretizando:

Considere a função f com $f(x) = -2 - 2 \times \log_4(-2\,x - 5)$.

A expressão da função inversa, $f^{-1}(x)$, é

(A) $f^{-1}(x) = -\frac{4^{-\frac{x+2}{2}}+5}{2}$ (B) $f^{-1}(x) = \frac{4^{-\frac{x+2}{2}}+5}{2}$

(C) $f^{-1}(x) = -\frac{4^{\frac{x+2}{2}}+5}{2}$ (D) $f^{-1}(x) = -\frac{4^{-\frac{x-2}{2}}+5}{2}$

Resolução:

Para determinar a inversa da função f resolve-se a equação $f(x) = y$ em ordem a x. Assim

$$\begin{aligned} -2 - 2 \times \log_4(-2\,x - 5) = y \;&\Leftrightarrow\; -2 \times \log_4(-2\,x - 5) = y + 2 \\ &\Leftrightarrow\; \log_4(-2\,x - 5) = -\frac{y+2}{2} \\ &\Leftrightarrow\; -2\,x - 5 = 4^{-\frac{y+2}{2}} \\ &\Leftrightarrow\; -2x = 4^{-\frac{y+2}{2}} + 5 \\ &\Leftrightarrow\; x = -\frac{4^{-\frac{y+2}{2}} + 5}{2}, \end{aligned}$$

donde se conclui que

$$f^{-1}(x) = -\frac{4^{-\frac{x+2}{2}} + 5}{2}.$$

de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[$.

Nota 2.2.7. Como no exercício anterior, não há nada relevante a apresentar ao nível da programação, que não tenha sido já explorado em exercícios anteriores.

2.2.13 Aplicação da função exponencial na modelação de situações reais

As funções exponenciais têm uma aplicação vasta nos fenómenos sociais, biológicos, económicos, físicos, ..., sendo usadas como modelos matemáticos, de modo a ajustarem-se aos valores observados da melhor forma possível. Este tipo de exercícios têm a particularidade de ter um enunciado relativamente ao qual são colocadas questões distintas. Recorrendo a uma diferente metodologia na elaboração dos mesmos, foram criadas duas tipologias de exercícios com objetivos distintos. No exercício E97I20 aplicalog 036 escolhe-se uma questão de uma lista pré-definida [10] e à qual o aluno responderá com o mesmo formato de todos os exercícios já elaborados anteriormente. O exercício E97I20 aplicalog 039, na escolha múltipla apresenta respostas a duas questões distintas, podendo o aluno ter de resolver as duas questões para identificar a resposta correta.

Exercício E97I20 aplicaexp 036

Neste exercício, mantendo o mesmo enunciado, pretende-se, de uma forma aleatória, escolher uma questão de duas previamente elaboradas, resolvendo um problema em contexto real.

Como se pode visualizar nas duas concretizações seguintes:

- gerando a 1.ª questão, obtemos

Para modelar o crescimento de uma cultura de bactérias, um biólogo encontrou a seguinte função

$$N(t) = 350\left(\frac{7}{6}\right)^t,$$

[10] Duas questões no caso do exercício elaborado, sendo possível aumentar o número de questões

onde t representa o tempo, em horas, a contar desde o início da observação.

O tempo necessário, em horas, para que o número de bactérias *triplique* é

(A) 7.13 (B) 42.5 (C) 38.0 (D) $\frac{343}{216}$

Resolução:

O início da contagem corresponde a $t = 0$.

Como $N(0) = 350$ conclui-se que, no início da contagem, havia 350 bactérias.

Pretende-se determinar t tal que $N(t) = 3\,N(0) = 1050,$ ou seja,

$350\left(\frac{7}{6}\right)^t = 1050 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{6}\right)^t = 3 \Leftrightarrow t = \log_{\frac{7}{6}} 3 \simeq 7.13$

Assim, ao fim de aproximadamente 7.13horas, o número de bactérias *triplica*.

- gerando a 2.ª questão, obtemos

Para modelar o crescimento de uma cultura de bactérias, um biólogo encontrou a seguinte função

$$N(t) = 650\left(\frac{5}{4}\right)^t,$$

onde t representa o tempo, em horas, a contar desde o início da observação.

Para qualquer valor de t, o quociente $\dfrac{N(t+3)}{N(t)}$ é constante e igual a

(A) $\frac{125}{64}$ (B) 650 (C) 3 (D) $\frac{64}{125}$

Resolução:

Como $N(t+3) = 650\left(\dfrac{5}{4}\right)^{t+3}$ e $a^{p+q} = a^p \times a^q,$ vem

$$N(t+3) = 650\left(\frac{5}{4}\right)^t \times \left(\frac{5}{4}\right)^3$$

e, consequentemente,

$$\frac{N(t+3)}{N(t)}=\frac{650\left(\frac{5}{4}\right)^{t}\times\left(\frac{5}{4}\right)^{3}}{650\left(\frac{5}{4}\right)^{t}}=\left(\frac{5}{4}\right)^{3},$$

o que permite afirmar que o quociente $\dfrac{N(t+3)}{N(t)}$ é constante, sendo essa constante igual a $\left(\dfrac{5}{4}\right)^{3}=\dfrac{125}{64}$.

No que diz respeito ao enunciado:

```
%problema
Para modelar o crescimento de uma cultura de bactérias,um
biólogo encontrou a seguinte função
 $$N(t)=ia1 \left(ia2\right)^{t},$$
onde $t$ representa o tempo, em horas, a contar desde o início
da observação.
$card1\text{Determine o tempo necessário para que o número de
bactérias} decisao1@c{"duplique","triplique"}.$ $card2
\text{Verifique que, para qualquer valor de } card2 t
\text{, o quociente }card2 \displaystyle \frac{N(t+ia3)}
{N(t)} card2 \text{é constante e o seu valor é?}$
```

Com recurso ao comando "*card*" gera-se aleatoriamente uma das questões; ao ativar o comando "*card*2" seleciona-se a 1.ª questão bem como as respostas que lhe são associadas, caso contrário é ativado "*card*1", o qual seleciona a 2.ª questão juntamente com as respostas que lhe são associadas.

```
def make_random(s):
    s.ia5 =ur.iunif_nonset(-1,1,[0])
def solve(s):
```

```
if s.ia5<0:
    s.card1=''
    s.card2='%'
else:
    s.card1='%'
    s.card2=''
```

Neste exercício, a escolha aleatória da palavra duplique (duplica) ou triplique (triplica), foi feita com recurso à instrução variável@c{"Texto 1","Texto 2","Texto 3"}, à qual se deu o nome de decisao1(2).

```
decisao1@c{"duplique","triplique"}.
decisao2@c{"duplica","triplica"}.
s.ia4=ur.iunif(2,3)
if s.ia4==2:
    s.decisao1=0
    s.decisao2=0
else:
    s.decisao1=1
    s.decisao2=1
```

Se a variável $ia4$ tomar o valor 2 obtemos as palavras duplique e duplica; caso tome o valor 3 obtemos as palavras triplique e triplica.

Exercício E97I20 aplicaexp 039

Com este exercício, mantendo o mesmo enunciado, gera-se na escolha múltipla duas respostas relativas a uma questão e outras duas relativas a outra questão, sendo a opção correta alternadamente a uma questão ou a outra. Com o problema elaborado desta forma, o aluno teria de resolver, por vezes, as duas questões propostas ao contrário do exercício anterior que teria de resolver a questão que fosse gerada.

Com recurso à instrução $<$ *showone* $>$ em cada uma das opções da escolha múltipla, opta-se por escolher uma de duas respostas.

```
<multiplechoice>
<choice>
<showone casos1>
<thisone - (casos1=0)>
o tempo necessário para que o número de bactérias
$card1\text{duplique}$ $card2\text{triplique}$ é $a4$
</thisone>
<thisone - (casos1=1)>
para qualquer valor de t, o quociente
$\displaystyle \frac{N(t+ia3)}{N(t)}$
é constante e o seu valor é $a6$
</thisone>
</showone>
</choice>
<choice>
<showone casos1>
<thisone - (casos1=0)>
para qualquer valor de t, o quociente
$ \displaystyle \frac{N(t+ia3)}{N(t)}$
 é constante e o seu valor é $ia1$
</thisone>
<thisone - (casos1=1)>
o tempo necessário para que o número de bactérias
```

```
 $card1\text{duplique}$ $card2\text{triplique}$ é $errada1$
 </thisone>
 </showone>
 </choice>
 <choice>
 <showone casos1>
 <thisone - (casos1=0)>
 para qualquer valor de t, o quociente
  $\displaystyle \frac{N(t+ia3)}{N(t)}$
 é constante e o seu valor é $ia3$
 </thisone>
 <thisone - (casos1=1)>
 o tempo necessário para que o número de bactérias
$card1\text{duplique}$ $card2\text{triplique}$ é $errada2$
 </thisone>
 </showone>
 </choice>
 <choice>
 <showone casos1>
 <thisone - (casos1=0)>
 o tempo necessário para que o número de bactérias
 $card1\text{duplique}$ $card2\text{triplique}$ é $errada3$
 </thisone>
 <thisone - (casos1=0)>
 para qualquer valor de t, o quociente
 $\displaystyle \frac{N(t+ia3)}{N(t)}$
 é constante e o seu valor é $errada4$
```

```
</thisone>
</showone>
</choice>
```

Se o parâmetro $ia5$ tomar um valor negativo, ativa a primeira opção de cada escolha múltipla (casos1=0); caso contrário ativa a segunda opção de cada escolha múltipla, como se visualiza a seguir.

```
def make_random(s):
   s.ia5 =ur.iunif_nonset(-1,1,[0])
def solve(s):
   if s.ia5<0:
       s.casos1=0
   else:(ia5>0)
       s.casos1=1
```

Neste exercício a escolha aleatória da palavra duplique (duplica) ou triplique (triplica), foi feita com recurso ao comando "*card*", funcionando de forma similar a instrução $decisao1(2)$ do exercício anterior.

```
$card1\text{duplica.}$ $card2\text{triplica.}$
$card1\text{duplique}$ $card2\text{triplique}$
```

```
def make_random(s):
   s.ia4=ur.iunif(2,3)
def solve(s):
   if s.ia4==2:
       s.card1=''
       s.card2='%'
```

```
else:
    s.card1='%'
    s.card2=''
```

Concretizando:

Caso $ia5 < 0$:

Para modelar o crescimento de uma cultura de bactérias, um biólogo encontrou a seguinte função

$$N(t) = 500\left(\frac{9}{8}\right)^{t},$$

onde t representa o tempo, em horas, a contar desde o início da observação. Então,

Escolha:

o tempo necessário para que o número de bactérias triplique é 9.33 horas.

Escolha:

para qualquer valor de t, o quociente $\dfrac{N(t+3)}{N(t)}$ é constante e o seu valor é 500.

Escolha:

para qualquer valor de t, o quociente $\dfrac{N(t+3)}{N(t)}$ é constante e o seu valor é 3.

Escolha:

o tempo necessário para que o número de bactérias triplique é $\dfrac{729}{512}$ horas.

Resolução:

O início da contagem corresponde a $t = 0$. Como $N(0) = 500$ conclui-se que, no início da contagem, havia 500 bactérias.

Usando o resultado anterior pretende-se determinar t tal que

$$N(t) = 3\,N(0) = 1500,$$

ou seja,

$$500\left(\frac{9}{8}\right)^t = 1500 \Leftrightarrow \left(\frac{9}{8}\right)^t = 3 \Leftrightarrow t = \log_{\frac{9}{8}} 3 \simeq 9.33.$$

Assim, ao fim de aproximadamente 9.33 horas, o número de bactérias triplica.

Como $N(t+3) = 500\left(\frac{9}{8}\right)^{t+3}$ e $a^{p+q} = a^p \times a^q$, vem

$$N(t+3) = 500\left(\frac{9}{8}\right)^t \times \left(\frac{9}{8}\right)^3$$

e, consequentemente,

$$\frac{N(t+3)}{N(t)} = \frac{500\left(\frac{9}{8}\right)^t \times \left(\frac{9}{8}\right)^3}{500\left(\frac{9}{8}\right)^t} = \left(\frac{9}{8}\right)^3$$

o que permite afirmar que o quociente $\frac{N(t+3)}{N(t)}$ é constante, sendo essa constante igual a $\left(\frac{9}{8}\right)^3 = \frac{729}{512}$.

Caso $ia5 > 0$:

Para modelar o crescimento de uma cultura de bactérias, um biólogo encontrou a seguinte função

$$N(t) = 650\left(\frac{5}{4}\right)^t,$$

onde t representa o tempo, em horas, a contar desde o início da observação. Então,

Escolha:

para qualquer valor de t , o quociente $\frac{N(t+3)}{N(t)}$ é constante e o seu valor é $\frac{125}{64}$.

Escolha:

o tempo necessário para que o número de bactérias triplique é 32.13 horas.

Escolha:

o tempo necessário para que o número de bactérias triplique é 29.03 horas.

Escolha:

para qualquer valor de t , o quociente $\dfrac{N(t+3)}{N(t)}$ é constante e o seu valor é $\dfrac{64}{125}$

Resolução:

O início da contagem corresponde a $t = 0$. Como $N(0) = 650$ conclui-se que, no início da contagem, havia 650 bactérias.

Usando o resultado anterior pretende-se determinar t tal que

$$N(t) = 3\,N(0) = 1950,$$

ou seja,

$$650\left(\frac{5}{4}\right)^t = 1950 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^t = 3 \Leftrightarrow t = \log_{\frac{5}{4}} 3 \simeq 4.92.$$

Assim, ao fim de aproximadamente 4.92 horas, o número de bactérias triplica.

Como $N(t+3) = 650\left(\dfrac{5}{4}\right)^{t+3}$ e $a^{p+q} = a^p \times a^q$, vem

$$N(t+3) = 650\left(\frac{5}{4}\right)^t \times \left(\frac{5}{4}\right)^3$$

e, consequentemente,

$$\frac{N(t+3)}{N(t)} = \frac{650\left(\frac{5}{4}\right)^t \times \left(\frac{5}{4}\right)^3}{650\left(\frac{5}{4}\right)^t} = \left(\frac{5}{4}\right)^3$$

o que permite afirmar que o quociente $\dfrac{N(t+3)}{N(t)}$ é constante, sendo essa constante igual a $\left(\dfrac{5}{4}\right)^3 = \dfrac{125}{64}$.

2.2.14 Aplicação da função logarítmica na modelação de situações reais

As funções logarítmicas, de modo análogo às funções exponenciais são usadas como modelos matemáticos. Nestes dois últimos exercícios elaborados, E97I20 aplicalog 035 e E97I20 aplicalog 038, em tudo são semelhantes aos anteriores E97I20 aplicalog 036 e aplicalog 039 respetivamente, com a única diferença de se tratar de uma aplicação com funções logarítmicas.

Exercício E97I20 aplicalog 035

Neste exercício, mantendo o mesmo enunciado, pretende-se de uma forma aleatória, escolher uma questão de duas previamente elaboradas, resolvendo um problema em contexto real.

Concretizando:
Gerando a 1.ª questão, obtemos a título de exemplo,

Suponha que a zona da pele inflamada pela picada de um inseto cresce em círculos de centro no ponto onde ocorreu a picada e que, t segundos após a picada, a área de pele inflamada é dada, em cm^2, por

$$A(t) = 2 - \log_4\left(\frac{16}{6\,t+1}\right)$$

Para $t > 0$, $A(t)$ é igual a uma das quatro possíveis escolhas
(A) $\log_4(6\,t+1)$ (B) $4-\log_4(6\,t+1)$ (C) $-\log_4(6\,t+1)$ (D) $4+\log_4(6\,t+1)$

Resolução:
Usando a propriedade dos logaritmos, $\log_a\left(\frac{c}{d}\right) = \log_a(c) - \log_a(d)$ vem

$$A(t) = 2 - \log_4\left(\frac{16}{6\,t+1}\right) = 2 - \left(\log_4(16) - \log_4(6\,t+1)\right).$$

Por outro lado, como $16 = 4^2$ e $\log_a(b^p) = p\log_a(b)$ resulta
$\log_4(16) = \log_4(4^2) = 2$. Assim

$$A(t) = 2 - \log_4\left(\frac{16}{6\,t+1}\right) = 2 - \log_4(16) + \log_4(6\,t+1) = \log_4(6\,t+1).$$

Gerando a 2.ª questão, obtemos a título de exemplo,

Suponha que a zona da pele inflamada pela picada de um inseto cresce em círculos de centro no ponto onde ocorreu a picada e que, t segundos após a picada, a área de pele inflamada é dada, em cm^2, por

$$A(t) = 5 - \log_3\left(\frac{243}{4\,t+1}\right)$$

Quantos segundos após a picada do inseto, a área inflamada é $4\,cm^2$?
As quatro possíveis escolhas serão

(A) 20.0 (B) 20.5 (C) 320.0 (D) 328.0

Resolução:
Usando a propriedade dos logaritmos, $\log_a\left(\frac{c}{d}\right) = \log_a(c) - \log_a(d)$ vem

$$A(t) = 5 - \log_3\left(\frac{243}{4\,t+1}\right) = 5 - \left(\log_3(243) - \log_3(4\,t+1)\right).$$

Por outro lado, como $243 = 3^5$ e $\log_a(b^p) = p\log_a(b)$ resulta $\log_3(243) = \log_3(3^5) = 5$. Assim

$$A(t) = 5 - \log_3\left(\frac{243}{4\,t+1}\right) = 5 - \log_3(243) + \log_3(4\,t+1) = \log_3(4\,t+1).$$

Pretende-se determinar o instante t que verifique $A(t) = 4$.

Para facilidade de cálculos usa-se a expressão simplificada anteriormente. Assim

$A(t) = 4 \Leftrightarrow \log_3(4\,t+1) = 4 \Leftrightarrow 4\,t+1 = 3^4 \Leftrightarrow t = \frac{3^4-1}{4} \Leftrightarrow t = 20$, donde se conclui que passados 20.0 segundos a área de pele inflamada é $4\,cm^2$.

Exercício E97I20 aplicalog 038

Com este exercício, mantendo o mesmo enunciado, gera-se na escolha múltipla duas respostas relativas a uma questão e outras duas relativas a outra questão, sendo a opção correta alternadamente a uma questão ou a outra. Com o problema elaborado desta forma, o aluno teria de resolver, por vezes, as duas questões apresentadas na escolha múltipla, ao contrário do exercício anterior que teria apenas de resolver a questão que fosse gerada.

Concretizando uma das opções, vem que:

Suponha que a zona da pele inflamada pela picada de um inseto cresce em círculos de centro no ponto onde ocorreu a picada e que, t segundos após a picada, a área de pele inflamada é dada, em cm^2, por

$$A(t) = 5 - \log_3\left(\frac{243}{4\,t+1}\right)$$

Então,

Escolha:

passados 20.0 segundos a área de pele inflamada é de $4\,cm^2$

Escolha:

se $t > 0$, $A(t) = 10 - \log_3(4\,t+1)$

Escolha:

se $t > 0$, $A(t) = -\log_3(4\,t+1)$

Escolha:

passados 328.0 segundos a área de pele inflamada é de $4\,cm^2$

Resolução:

Usando a propriedade dos logaritmos, $\log_a\left(\frac{c}{d}\right) = \log_a(c) - \log_a(d)$ vem

$$A(t) = 5 - \log_3\left(\frac{243}{4\,t+1}\right) = 5 - \left(\log_3(243) - \log_3(4\,t+1)\right).$$

Por outro lado, como $243 = 3^5$ e $\log_a(b^p) = p\log_a(b)$ resulta $\log_3(243) = \log_3(3^5) = 5$.

Assim,

$$A(t) = 5 - \log_3\left(\frac{243}{4\,t+1}\right) = 5 - \log_3(243) + \log_3(4\,t+1) = \log_3(4\,t+1).$$

Para a outra questão, pretende-se determinar o instante t que verifique $A(t) = 4$.

Para isso usa-se a expressão simplificada anteriormente.

$$A(t) = 4 \Leftrightarrow \log_3(4\,t+1) = 4 \Leftrightarrow 4\,t+1 = 3^4 \Leftrightarrow t = \frac{3^4-1}{4} \Leftrightarrow t = 20,$$

donde se conclui que passados 20.0 segundos a área de pele inflamada é $4\,cm^2$.

As questões sobre a aplicação da matemática a vida real são importantes e frequentemente tratadas , ao longo do ensino secundário, de acordo com as metas curriculares:
´´...a função exponencial é especialmente indicada para modelar o decaimento de uma substância radioativa ou o crescimento de uma população de bactérias porque, em ambas as situações, a análise do fenómeno em estudo permite concluir que a taxa de variação da grandeza observada pode ser considerada, dentro de certas condições, proporcional à quantidade que está num dado momento presente numa amostra,...[11]."
Daí a apresentação destes exercícios para dar resposta as metas curriculares.

Capítulo 3

Considerações Finais

"Tendo em consideração, tal como para os níveis de desempenho, as circunstâncias de ensino (e, de modo muito particular, as características das turmas e dos alunos), as escolas e os professores devem decidir quais as metodologias e os recursos mais adequados para auxiliar os seus alunos a alcançar os desempenhos definidos nas Metas Curriculares [11]."
Atualmente, é exigido ao professor a diversificação de estratégias e de recursos por forma a melhorar as oportunidades de aprendizagem na disciplina de Matemática, uma vez que não se pode ficar alheio à elevada taxa de insucesso na disciplina e às dificuldades evidenciadas pelos alunos, que são, muitas vezes, justificadas pela desmotivação, a falta de concentração na sala de aula e a falta de métodos e hábitos de estudo e de trabalho em casa. O recurso a ferramentas computacionais, na era da tecnologia, pode ajudar a ultrapassar estas barreiras, daí que cada vez mais professores recorram a software próprio para o ensino da matemática como forma de cativar a atenção dos seus alunos.

3.1 Reflexão

Este projeto assentou em três pilares: a evolução da realidade do ensino e da aprendizagem; a necessidade de diversificação de recursos e a utilização de novas tecnologias na melhoria do ensino e da aprendizagem [15].
O processo ensino/aprendizagem ao longo do tempo tem-se mantido praticamente inalterado, apesar da introdução massiva de recursos tecnológicos nas nossas escolas. O recurso às novas tecnologias prende-se essencialmente com a ilustração de conteúdos e não como uma ferramenta interativa.
Por forma a superar as causas do insucesso e proporcionar a melhoria das aprendizagens espicaçando os alunos e estimulando o seu interesse, é primordial a mudança de paradigmas de aprendizagem, proporcionando ao aluno maior autonomia e co-responsabilidade de modo a colmatar as suas dificuldades [16].
Os programas atuais de matemática recomendam o uso das tecnologias, embora defendam que estas sejam usadas com responsabilidade por forma a enriquecer e melhorar as oportunidades de aprendizagens matemáticas dos alunos. As indicações metodológicas recomendam que devem ser concedidas oportunidades aos alunos de abordar questões de experimentação para que possam conjeturar sobre as vantagens das tecnologias na execução de procedimentos rotineiros de forma rápida, para além de ser dada a possibilidade de analisar diversos exemplos e diferentes representações dos conteúdos, explorar, formular conjeturas que manualmente seriam impraticáveis.
A tecnologia não supre o professor de Matemática, pois este assume o papel primordial na seleção de tarefas adequadas, na observação do raciocínio dos alunos através de procedimentos que estes escolhem numa determinada tarefa, permitindo ao professor reunir diversos elementos de avaliação sobre os alunos [15].

O recurso às tecnologias por si só não garante melhorias nas aprendizagens. No entanto, introduzindo as tecnologias é possível propiciar ao aluno situações que o levem a pensar e a experimentar. Deste modo o aluno deixa de ser apenas um recetor de informação, interagindo com o professor e com os conteúdos que está a descobrir.
Durante a minha carreira profissional recorri sempre que possível, na sala de aula, às novas tecnologias e a recursos didáticos atuais, criando oportunidades e condições na melhoria das aprendizagens, estimulando os alunos. Fui procurando o aperfeiçoamento das minhas práticas letivas e refletindo na problemática:
"Aprender vendo fazer é uma técnica secular de ensino que tem mostrado ao longo do tempo a sua eficácia. Hoje em dia, com a tecnologia disponível, o aluno pode, ao alcance de um clique, ter uma série de exercícios diferentes e respetivas resoluções, sem necessitar de recorrer sistematicamente ao professor, usando as horas de contacto para questões mais específicas que o impeçam de progredir. O facto de estes exercícios estarem disponíveis permite ao aluno refletir sobre eles e esclarecer efetivamente as dúvidas que ainda persistirem [2]."
Este mestrado incentivou-me a realizar algo novo e surgiu daí a minha motivação para este estudo.

3.2 Conclusão

"...a aprendizagem matemática é estruturada em patamares de crescente complexidade, pelo que na prática letiva deverá ter-se em atenção a progressão dos alunos, sendo muito importante proceder-se a revisões frequentes de conteúdos já lecionados com vista à sua consolidação, incluindo alguns já conhecidos do Ensino Básico [11].”

Um dos dois objetivos principais deste trabalho foi a construção de recursos digitais de apoio ao ensino das funções exponencial e logarítmica, criando materiais úteis para os alunos, proporcionando, ao alcance de um click, exercícios de escolha múltipla e a sua resolução caso erre ou opte simplesmente por ver a sua resolução, para além de ter informação imediata sobre o seu desempenho. Pretende ser um complemento aos manuais, introduzindo a nova era das tecnologias que têm proporcionado uma melhoria no processo de ensino/aprendizagem, desenvolvendo uma maior autonomia no estudo e consolidação dos conhecimentos. Espero que os meus alunos adiram em massa à plataforma SIACUA e que esta se revele uma mais valia nas suas aprendizagens.

“Students can be engaged on homeworks if they know they will find the detailed answers later as a mean to correct their mathematical reasoning. This mechanism was used in a few courses at University of Aveiro, and students appreciation was very positive. Some of them explicitly stated that it was a great help on their preparation for exams and during assessments improved answers were found [1].”

No início deste trabalho, não tinha conhecimentos nem ao nível da marcação tipográfica LaTeX nem ao nível da linguagem de programação *Python* e biblioteca de funções matemáticas, definidas no *Sage Mathematics* e outras definidas na package MEGUA. Frequentei uma ação de formação, de oito horas, sobre a marcação tipográfica LaTeX e, com auxílio do tutorial do Megua, assim como a ajuda das orientadoras, aprendi a programar na linguagem *Python**Sage Mathematics*\\MEGUA. Esta formação e aquisição de conhecimentos, despertou em mim um grande interesse na programação e nas suas potencialidades, razão pela qual elegi, como segundo objetivo, a construção de um tutorial para introdução à programação *Python/Sage*. Com recurso à delineação dos procedimentos que permitiram a construção dos exercícios criados, penso que este projeto poderá contribuir positivamente para a construção de novos exercícios.

No CD consta uma listagem de cada um dos exercícios (quer a programação quer uma concretização de cada um deles).
O desenvolvimento deste projeto proporcionou-me uma das experiências mais agradáveis e motivadoras da minha carreira, facultando-me um grande enriquecimento profissional e pessoal.

Bibliografia

[1] P. Cruz, P. Oliveira and D. Seabra, *Exercise templates with Sage,* Tbilisi Mathematical Journal 5(2) (2012), pp. 37-44, Tbilisi Centre for Mathematical Sciences & College Publications.

[2] P. Cruz, P. Oliveira and D. Seabra, *Crie o seu arquivo de exercícios resolvidos parametrizados* (Projeto MEGUA), Gazeta da Matemática, 2013.

[3] P. Cruz, P. Carvalho, Luís Descalço, P. Oliveira, D. Seabra, Inovação Pedagógica na Universidade de Aveiro, *Teaching Day*, 27 de novembro 2013.

[4] P. Cruz, P. Oliveira, D. Seabra. MEGUA e os cinco R's base de dados de exercícios parametrizados, TICAMES 2013.

[5] M.P. Carvalho, *Avaliação Formativa por computador*. Quadrante, nº1, 1992.

[6] M.A. Mendes, Números complexos e o Teorema Fundamental da Álgebra, parte II, Tese de Mestrado - Universidade de Aveiro, 2000.

[7] J.C.D. Vieira, 1992, avaliação Formativa - uma experiência no 7º ano. Quadrante, Nº1.

[8] J.C.D. Vieira et al. *Computer-Aided evolution and learning system*, 2004.

[9] R. Isidro, SA^3C - Sistema de Avaliação de aprendizagem assistida por Computador, Dissertação de mestrado, Universidade de Aveiro, 2004.

[10] R. Paiva. Testes e exercícios de treino de Matemática online, Seminário do Departamento de Matemática, 21 de outubro de 2009.

[11] Ministério da Educação Programa e Metas Curriculares, Matemática A, Ensino Secundário, Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas, 2014.

[12] Iaci Malta, Sinésio Pesco, Hélio Lopes. Cálculo a uma variável, volume I uma introdução ao cálculo, Edições Loyola, 2002.

[13] C. Viegas, F. Gomes, Y. Lima. "XEQMAT 12", Manual de Matemática A, Volume 2 do 12.º ano, Texto Editores, LEYA 2012.

[14] M. Neves, A. Pereira, J.Silva. Matemática A, Manual de Matemática A, Funções III do 12.º ano, Porto Editora, LEYA 2012.

[15] I. Rocha, Mergulhar nas funções trigonométricas, dissertação de Mestrado - Universidade de Aveiro, 2013.

[16] S. Duarte, Módulos Interativos de funções, dissertação de Mestrado - Instituto Superior de Leiria, 2013.

[17] E. Millán, L. Descalço, G Castillo, P. Oliveira, S. Diogo, Computers & Education 60, Elsevier, 2013.

[18] MEGUA, https://sagemath.clients.ua.pt/.

[19] SIACUA, http://siacua.web.ua.pt/.

[20] Khan Academy, https://www.khanacademy.org/.

Estes anexos só estão disponíveis para consulta através do CD-ROM.
Queira por favor dirigir-se ao balcão de atendimento da Biblioteca.