



Jorge Daniel de
Jesus Reis

**Desenvolvimento de uma ferramenta numérica
para implementação de modelos elastoplásticos
no MEF**



**Jorge Daniel de
Jesus Reis**

**Desenvolvimento de uma ferramenta numérica
para implementação de modelos elastoplásticos
no MEF**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestrado em Engenharia Mecânica, realizada sob orientação científica de António Gil D'Orey de Andrade Campos, Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro.

O júri / The jury

Presidente / President

Prof. Doutor Joaquim Alexandre Mendes de Pinho da Cruz
Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro

Vogais / Committee

Prof. Doutor António Gil D'Orey de Andrade Campos
Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro (orientador)

Doutor Nelson Mineiro Souto
Investigador Auxiliar da Université de Bretagne-Sud

Agradecimentos / Acknowledgements

À minha família que sempre me apoiou ao longo de todo o meu percurso académico e permitiu que isto fosse possível a todos os níveis. Um especial agradecimento aos meus pais por todos os conselhos e reprimendas, por toda a paciência e acima de tudo, por estarem sempre presentes sem ser preciso pedir.

Ao Professor Doutor António Gil d'Orey de Andrade Campos, pela orientação, disponibilidade, apoio e motivação demonstrada ao longo deste trabalho.

Aos meus colegas do GRIDS que me ajudaram em alguns pontos deste trabalho com um especial obrigado ao Bruno, ao Rodrigo e ao Nelson pela ajuda e ensinamentos.

A todos os meus colegas, por todo o companheirismo e amizade ao longo de tudo o que conseguimos dentro e fora desta academia. Aos meus amigos, um grande obrigado por tudo o que passámos e vamos passar, por todo o apoio e paciência e em especial por todas as palavras que não preciso de escrever.

À Daniela, por todas as imagens deste trabalho, pela motivação, compreensão, paciência e altruísmo mostrado. E por estar lá, sempre.

Palavras-chave

Modelos elastoplásticos, método dos elementos finitos, ferramenta numérica, subrotinas de utilizador, MatLab.

Resumo

Os processos de conformação plástica de materiais metálicos encontram-se presentes nas mais diversas indústrias do nosso quotidiano e são responsáveis por uma grande variedade de produtos e sub-produtos. A simulação numérica permite uma otimização dos ciclos de desenvolvimento, sendo estes muito mais expeditos e económicos.

Hoje em dia, a utilização de programas de simulação baseados no método dos elementos finitos é usual quer na comunidade científica quer na comunidade industrial. Estes permitem a previsão de processos de deformação de materiais cujo comportamento seja representado por modelos e equações clássicas. No entanto, a maioria dos materiais não apresenta um comportamento tão simplista sendo necessário o desenvolvimento de modelos e a sua implementação em códigos de simulação pelo MEF.

Neste trabalho foi desenvolvida uma ferramenta que permite ao utilizador, de forma automática e intuitiva, a implementação através do método dos elementos finitos, de modelos constitutivos de material em programas comerciais. Esta, desenvolvida em ambiente MatLab e recorrendo à computação simbólica, permite uma poupança de tempo na implementação de modelos constitutivos através de subrotinas de utilizador. A metodologia desenvolvida permite a integração automática da (i) parte elástica isotrópica, (ii) de um modelo de cedência, (iii) de um modelo de encruamento plástico e (iv) do módulo elastoplástico do modelo constitutivo para um programa de simulação pelo MEF.

A ferramenta foi testada com recurso ao uso de dois critérios de cedência, nomeadamente von Mises e Hill'48. Procedeu-se também à verificação da implementação de leis de encruamento isotrópico e cinemático, tendo sido escolhidas para teste as leis de Voce, Swift e Prager.

A validação da ferramenta desenvolvida foi efetuada pelos resultados obtidos com as subrotinas geradas. Numa primeira fase, comparou-se as curvas tensão-deformação obtidas diretamente pela ferramenta com as do programa Abaqus, recorrendo a ensaios mecânicos convencionais em condições homogêneas de tensão e deformação.

Numa segunda fase, a validação do cálculo automático do módulo elastoplástico consistente foi feita pela comparação de resultados obtidos com os resultados de uma subrotina desenvolvida analiticamente.

Keywords

Elastoplastic models, finite element method, numeric tool, user subroutines, MatLab.

Abstract

Metal forming processes are present in the various industries in our daily lives and are responsible for a wide variety of products and subproducts. These are developed in a conventional way by trial and error increasing the time and cost of the project. The numerical simulation allows an optimization of development cycles, which are swifter and more economical.

Nowadays, the use of simulation programs based on the finite element method is usual both in the scientific and industrial community. These allow the prediction of material deformation processes whose behavior is represented by classical models and equations. However, most materials do not present a behavior so simple, so it is necessary the development of models and their implementation in FEM simulation code.

In this work was developed a tool that allows the user to easily and automatically implement constitutive material models in commercial finite element method programs. Using symbolic computation, the developed tool saves time in implementation of constitutive models through user subroutines. The developed methodology allows the (i) isotropic elasticity, (ii) yield criteria, (iii) hardening law and (iv) consistent elastoplastic modulus an automatic integration for a FEM simulation program.

The developed tool was evaluated using two yield criteria, namely von Mises and Hill'48. Isotropic and kinematic hardening laws implementation were also accessed with Voce, Swift and Prager laws.

The generated subroutines results ensure the developed tool validation. Initially, the stress-strain curves obtained directly from MatLab and Abaqus simulations were compared using tridimensional tests with stress and strain uniform conditions.

Finally, the consistent elastoplastic modulus automatically calculated was validated by comparing the results with results from an analytically developed subroutine.

Conteúdo

I	Enquadramento e Estado da Arte	1
1	Introdução	3
1.1	Enquadramento	3
1.2	Objetivos	4
1.3	Guia de Leitura	5
2	Modelos de Comportamento	7
2.1	Introdução	7
2.2	Conceitos de Deformação Plástica	8
2.3	Critérios de Plasticidade	11
2.3.1	Critérios Isotrópicos	11
2.3.2	Critérios Anisotrópicos	14
2.4	Leis de Encruamento	20
2.4.1	Leis de Encruamento Isotrópico	22
2.4.2	Leis de Encruamento Cinemático	23
2.4.3	Leis de Encruamento Misto	24
3	Métodos Numéricos	27
3.1	Fundamentos do Método dos Elementos Finitos	28
3.2	Integração dos Modelos no MEF	31
3.3	Programa Abaqus	34
3.4	Subrotinas de Utilizador (UMAT)	35
3.5	Cálculo Algébrico Simbólico	36
3.5.1	Programação em Ambiente MatLab	37
3.6	Criação Automática de subrotinas de Utilizador (UMAT)	38
II	Metodologia e Implementação	41
4	Metodologia de Implementação de Modelos Elastoplásticos em Programas MEF	43
4.1	Relação Tensão Deformação	43
4.1.1	Decomposição nas Componentes Volumétricas e Desviadoras	44
4.2	Plasticidade de von Mises em Três Dimensões	44
4.3	Integração Implícita da Lei de Comportamento Elastoplástico	47
4.3.1	Método <i>Backward-Euler</i> (Método Implícito)	49

4.3.2	Método do Retorno Radial	50
4.4	Módulo Elastoplástico	52
4.4.1	Módulo Elastoplástico Consistente	52
5	Arquitetura da Ferramenta e Implementação	55
5.1	Módulo de Interface com o Utilizador	56
5.2	Módulo de Cálculo Simbólico	58
5.3	Módulo de Criação da Subrotina	59
5.3.1	Cálculo do Módulo Elastoplástico Consistente	59
5.3.2	Impressão da Subrotina Fortran	60
5.4	Implementação Genérica das Subrotinas	60
5.4.1	Inicialização das Subrotinas	61
5.4.2	Cálculo da Tensão Tentativa	62
5.4.3	Determinação do Regime	63
5.4.4	Ciclo Iterativo	63
5.4.5	Atualização de Tensões e Deformações	64
5.4.6	Cálculo da Matriz de Rigidez Elastoplástica Consistente	65
5.4.7	Armazenamento de Variáveis	66
5.5	Módulo de Cálculo Numérico	66
III	Resultados e Discussão	69
6	Validação da Ferramenta Desenvolvida	71
6.1	Modelo de Validação e Condições de Fronteira	71
6.2	Ensaio de Validação	72
6.3	Validação do Cálculo do Módulo Elastoplástico Consistente	83
7	Considerações Finais	87
7.1	Conclusões	87
7.2	Trabalhos Futuros	88
A	Segmentos de Código Desenvolvido	89
A.1	Conversão das Leis	89
A.2	Conversão <i>Inline</i> Para Simbólico	89
A.3	Cálculo Simbólico de Derivadas	90
A.4	Leitura Automática de Variáveis	90

Lista de Tabelas

2.1	Parâmetros mecânicos necessários para a identificação dos critérios de cederência [26].	15
5.1	Função de conversão de <i>inline</i> para simbólico.	58
5.2	Estrutura do módulo de dedução do módulo elastoplástico consistente. . .	59
5.3	Variáveis de entrada das subrotinas.	61
5.4	Inicialização da subrotina e cálculo da tensão tentativa.	62
5.5	Determinação do regime do material.	63
5.6	Ciclo iterativo implícito.	64
5.7	Atualização de tensões e deformações.	65
5.8	Cálculo da matriz de rigidez elastoplástica consistente.	66
5.9	Armazenamento de variáveis nas variáveis de estado da subrotina.	66
5.10	Estrutura básica do ciclo de execução da rotina.	67
6.1	Designação do suporte onde foi executado o ensaio.	73
6.2	Designação dos ensaios efetuados.	73
6.3	Parâmetros de um aço genérico.	74
6.4	Parâmetros de um alumínio genérico.	76
6.5	Características do Aço DP600.	77
6.6	Parâmetros de anisotropia do critério de Hill'48 do Aço DP600.	77
6.7	Parâmetros isentrópicos para o critério de Hill'48.	80
6.8	Características do Alumínio 6111-T4.	80
6.9	Parâmetros de anisotropia do critério de Hill'48 do Alumínio 6111-T4. . .	81

Lista de Figuras

2.1	Representação geométrica dos critérios de plasticidade de Tresca e de von Mises no espaço de Haig-Westergaard. Adaptado de [13].	9
2.2	Separação da deformação total nas suas componentes elástica e plástica.	10
2.3	Representação das superfícies de cedência de Tresca e von Mises no plano $(\sigma_1; \sigma_2)$. Adaptado de [15].	12
2.4	A superfície de cedência de von Mises e Tresca comparadas com dados experimentais. Adaptado de [21].	13
2.5	Representação das superfícies de cedência de Hosford no plano $(\sigma_1; \sigma_2)$ para diferentes valores de a . Adaptado de [15].	14
2.6	Curva tensão deformação perfeitamente plástica. Adaptado de [30].	21
2.7	Expansão isotrópica da superfície de cedência. Adaptado de [10].	21
2.8	Expansão cinemática da superfície de cedência. Adaptado de [10].	22
2.9	Evolução do <i>back-stress</i> . Adaptado de [32].	24
2.10	Esquema da evolução da superfície de cedência no no espaço de Haig-Westergaard: (a) com encruamento isotrópico e cinemático, (b) apenas com encruamento cinemático, e (c) apenas com encruamento isotrópico.	25
3.1	Processo de análise por modelação computacional.	28
3.2	Modelo composto por dois materiais, antes e depois da discretização. Adaptado de [34].	29
3.3	Representação bidimensional e tridimensional de variados tipos de elementos usados.	30
3.4	Representação esquemática das fases do MEF.	30
3.5	Representação esquemática da integração implícita, usando o retorno radial, do critério de von Mises. Adaptado de [10].	32
3.6	Processo de análise utilizando uma subrotina UMAT. Adaptado de [49].	36
4.1	Critério de von Mises no espaço tridimensional das tensões principais. Adaptado de [60].	45
4.2	Formas de escoamento: a) associativo; b) não-associativo. Adaptado de [25].	46
4.3	Representação geométrica de uma superfície de plasticidade genérica e do incremento infinitesimal de deformação plástica normal a esta. Adaptado de [22].	47
4.4	Potencial de acumulação de erro com o método <i>forward-Euler</i> . Adaptado de [60].	48
4.5	Previsão alternativa com posterior correção. Adaptado de [60].	49

5.1	<i>Layout</i> da ferramenta desenvolvido.	56
5.2	Janela de introdução do modelo elastoplástico.	57
5.3	Janela de introdução de propriedades do modelo elastoplástico.	58
5.4	Janela de visualização das curvas resultantes.	68
6.1	Esquema de $1 \times 1 \times 1$ pontos de integração de um elemento hexagonal. . .	72
6.2	Condições de fronteira aplicadas ao modelo numérico de cada teste: a) Ensaio de tração uniaxial b) Ensaio de corte simples. Adaptado de [64]. . .	72
6.3	Evolução da deformação elástica e plástica com a deformação total.	74
6.4	Ensaio de tração uniaxial a 0° com os parâmetros da tabela 6.3.	75
6.5	Ensaio de corte a 0° e Bauschinger 10%, 20% e 30% com os parâmetros da tabela 6.3.	75
6.6	Ensaio de tração uniaxial a 0° com os parâmetros da tabela 6.4.	76
6.7	Ensaio de corte a 0° e Bauschinger 10%, 20% e 30% com os parâmetros da tabela 6.4.	76
6.8	Representação da superfície de cedência do Aço DP600.	78
6.9	Ensaio de tração nas várias direções do Aço DP600, descrito na tabela 6.5. . .	78
6.10	Ensaio de corte nas várias direções e ensaios de Bauschinger do Aço DP600, descrito na tabela 6.5.	79
6.11	Ensaio de tração nas várias direções do Aço DP600, com parâmetros isentrópicos descritos na tabela 6.7.	79
6.12	Ensaio de corte nas várias direções e ensaios de Bauschinger do Aço DP600, com parâmetros isentrópicos descritos na tabela 6.7.	80
6.13	Representação da superfície de cedência do Alumínio 6111-T4.	81
6.14	Ensaio de tração nas várias direções do Alumínio 6111-T4, descrito na tabela 6.8.	81
6.15	Ensaio de corte nas várias direções e ensaios de Bauschinger do Alumínio 6111-T4, descrito na tabela 6.8.	82
6.16	Ensaio de tração nas várias direções do Alumínio 6111-T4, com parâmetros isentrópicos descritos na tabela 6.7.	82
6.17	Ensaio de corte nas várias direções e ensaios de Bauschinger do Alumínio 6111-T4, com parâmetros isentrópicos descritos na tabela 6.7.	83
6.18	Iterações do módulo elástico e elastoplástico. Adaptado de [13].	84
6.19	Comparação das iterações obtidas no ensaio T0 recorrendo a múltiplas rotinas.	85
6.20	Comparação das iterações obtidas no ensaio T0 com várias rotinas para o Aço DP600.	85

Nomenclatura e Notações

$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor das tensões de Cauchy
\mathbf{C}	Módulo elástico ou matriz de elasticidade
\mathbf{C}^{ct}	Módulo elastoplástico consistente
$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{t}}$	Tensor das deformações totais
$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{e}}$	Tensor das deformações elásticas
$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}}$	Tensor das deformações plásticas
\mathbf{U}	Vetor de deslocamentos
E	Módulo de Young ou módulo de elasticidade
ν	Coefficiente de Poisson
f, ϕ	Função de cedência
λ	Multiplicador plástico
σ_i	Valores principais do tensor das tensões de Cauchy
σ_Y	Tensão limite de elasticidade em tração uniaxial ou tensão de cedência
J_i	Invariantes do tensor das tensões de Cauchy
s_i	Valores principais do tensor das tensões de desvio
I_i	Invariantes do tensor das tensões de desvio
r_θ	Coefficiente de anisotropia de Lankford, segundo a direção θ em relação à direção de laminagem
\mathbf{X}	Tensor das tensões inversas (<i>back-stress</i>)
\mathbf{I}	Matriz identidade
$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{p}}$	Deformação plástica efetiva ou equivalente
$\mathbf{K}(\Delta \mathbf{x})$	Matriz rigidez calculada em função do campo de deslocamentos incrementais
$\Delta \mathbf{x}$	Vetor dos deslocamentos externos incrementais
$\Delta \mathbf{F}$	Vetor das forças externas incrementais
σ_{m}	Tensão volumétrica ou hidrostática
ε_{m}	Deformação volumétrica ou hidrostática
G	Módulo de corte
k	Módulo de compressibilidade
\mathbf{s}	Tensor das tensões de desvio
\mathbf{e}	Tensor das deformações de desvio
\mathbf{a}	Vetor de cedência ou vetor normal
A'	Parâmetro de encruamento
A'_i	Parâmetro de encruamento isotrópico
A'_k	Parâmetro de encruamento cinemático
$\boldsymbol{\sigma}^{\text{TR}}$	Tensão tentativa ou estimativa elástica

Outras Convenções

A quantidade de terminologia específica leva à necessidade de referir alguns pontos relacionados com a escrita da presente dissertação.

Desta forma, os valores escalares são representados por letras em itálico. Os vetores são representados por letras minúsculas a negrito, ou em notação indicial através de um índice. Os tensores de segunda ou quarta ordem também são representados a negrito, sendo usadas letras maiúsculas, ou em notação indicial através de dois ou quatro índices, respetivamente.

Na utilização de termos técnicos em português indica-se a sua proveniência da língua inglesa quando se considera necessário.

Consideram-se as seguintes operações:

- produto entre dois tensores,

$$\mathbf{W} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$$

- produto interno tensorial (ou dupla contração de tensores),

$$w = \mathbf{U} : \mathbf{V} \Leftrightarrow w = U_{ij}V_{ij}$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{U} : \mathbf{V} \Leftrightarrow w_{ij} = U_{ijkl}V_{kl}$$

$$w = \mathbf{T} : \mathbf{U} : \mathbf{V} \Leftrightarrow w = T_{ij}U_{ij}V_{kl}$$

- produto tensorial,

$$\mathbf{W} = \mathbf{U} \otimes \mathbf{V} \Leftrightarrow w_{ijkl} = U_{ij}V_{kl}$$

A inversa do tensor é identificada pelo índice $^{-1}$,

$$\mathbf{W}^{-1}\mathbf{W} = \mathbf{I}.$$

Índices

- e elástico
- p plástico
- o incremento atual
- n novo incremento
- taxa ou variação
- efetivo ou equivalente

Parte I

Enquadramento e Estado da Arte

Capítulo 1

Introdução

1.1 Enquadramento

Os processos de conformação plástica de materiais metálicos encontram-se presentes nas mais diversas indústrias do nosso quotidiano, desde o mais pequeno parafuso até painéis de carroçaria de múltiplos veículos. Estes processos abrangem as mais diversas indústrias, das quais se destaca a automóvel, a aeronáutica e aeroespacial, a de produtos alimentares, domésticos e decorativos, bem como a de eletrodomésticos e até a de produtos hospitalares.

Tanta variedade de produtos e sub-produtos obtidos por processos de conformação plástica exige um domínio técnico elevado dos processos, materiais e condições de fabrico. Graças à elevada importância económica mundial, existe uma forte concorrência entre fabricantes, verificando-se uma crescente redução dos períodos de desenvolvimento e fabrico de novos produtos, bem como uma crescente preocupação na redução de custos e impacto ambiental.

Tradicionalmente, a fase de projeto e desenvolvimento de um produto obtido por conformação plástica consiste na aplicação direta do método de tentativa e erro. Este é baseado no conhecimento empírico do projetista relativamente ao processo de conformação, ao material e à geometria do produto. Originando assim inúmeros ciclos de tentativa e erro, o que aumenta tanto o tempo como o custo do projeto. Com a introdução de novos materiais e a evolução crescente da complexidade da geometria dos produtos tem originado um aumento do número de ciclos, assim, e de forma a obter tempos de projeto mais reduzidos e menos dispendiosos para o fabricante, tem-se adotado processos de conceção e projeto assentes na simulação numérica.

A simulação numérica permite uma interatividade maior entre as ferramentas de modelação e de fabrico assistido por computador e as ferramentas de simulação do comportamento do material. Esta interatividade permite a redução do número de ciclos virtuais de tentativa e erro, sendo estes muito mais expeditos e económicos.

Os resultados provenientes da simulação numérica permitem realizar a otimização do processo de conformação, desde a obtenção da secção ideal e espessura inicial do material a conformar, bem como da geometria das ferramentas ou até do nível correto de lubrificante a utilizar. A otimização permite a redução do desperdício de material resultando assim na diminuição de custos em matéria-prima, e garantindo a qualidade final desejada e a resistência mecânica necessária a cada peça.

O método numérico de simulação mais utilizado é o Método dos Elementos Finitos

(MEF), tendo aplicabilidade nas mais diversas áreas da ciência e indústria. O comportamento plástico dos materiais é a componente que mais influencia o resultado da simulação. Desta forma, é a componente que exige maior rigor e aproximação à realidade do ciclo de produção real. Deste modo os modelos tradicionalmente utilizados para representar o comportamento dos materiais seguem os modelos e equações clássicas como o modelo de von Mises com encruamento isotrópico linear ou cinemático [1].

Mas, na realidade, a maioria dos materiais não apresenta um comportamento que possa ser descrito de forma tão simplista. Assim, e de modo a poder efetuar a sua implementação no MEF, é necessário desenvolver um modelo constitutivo que descreva as propriedades físicas do material de forma realista. Para isso, é necessário o desenvolvimento de um modelo triaxial, o que se revela um processo moroso e exigente para o técnico, pois obriga a que este possua fortes conhecimentos quer de modelos quer do MEF, o que afasta a implementação deste tipo de modelos elastoplásticos na indústria.

Com os avanços da computação simbólica, atualmente é possível escrever automaticamente equações matemáticas complexas em ambiente numérico de modo a permitir a sua implementação no MEF. O uso de uma ferramenta automática para implementação de modelos constitutivos num programa de MEF permitiria economia de tempo, uma vez que a criação manual deste tipo de código é morosa e exige conhecimentos tanto de cálculo, como de elementos finitos e criação de interface com programas comerciais de simulação como o Abaqus^{©1}.

Uma vez que o alcance dos modelos materiais em simulações de grande escala são um dos elementos limitadores, a capacidade de implementação automática de um qualquer modelo elastoplástico revela-se uma vantagem importante e catalisadora nos processos de simulação.

1.2 Objetivos

Este trabalho tem como principal objetivo o desenvolvimento de uma ferramenta que permita ao utilizador, de forma automática e intuitiva a implementação de subrotinas de utilizador em *software* comercial de elementos finitos, mais concretamente, o Abaqus.

Esta deve ser capaz de possibilitar ao utilizador a implementação fácil, rápida e objetiva de modelos constitutivos elastoplásticos nos programas de simulação pelo MEF, recorrendo à criação de uma subrotina de utilizador dedicada à definição do comportamento do material, independentemente da geometria do modelo triaxial em estudo.

Esta ferramenta deve ser capaz de proporcionar ao utilizador uma interface intuitiva e rápida de modo a poupar tempo e efetuar a diferença na economia de recursos com o desenvolvimento de modelos elastoplásticos passíveis de ser implementados no MEF.

Para além de gerar uma subrotina de material totalmente capaz de ser integrada no Abaqus, a ferramenta deverá ser também capaz de efetuar uma previsão de como irá ser o comportamento da mesma através da sua componente numérica, considerando apenas um ponto infinitesimal, originando desta forma, curvas representativas do comportamento do material e da evolução da plasticidade do mesmo.

A criação da subrotina e a sua escrita em Fortran recorrem essencialmente ao cálculo

¹ *software* de utilização comercial atualmente comercializado pela SIMULIA, uma marca da *Dassault Systemes SA*.

simbólico, que, através de uma metodologia generalizada irá ser capaz de efetuar as manipulações e cálculo matricial necessário para a obtenção, de forma genérica, de todos as formulações e derivações necessárias para a descrição do comportamento dos modelos constitutivos compostos por critérios de plasticidade contínuos.

A plataforma escolhida para o desenvolvimento desta ferramenta foi o MatLab^{©2}, uma vez que é uma plataforma de relativa fácil aquisição de conhecimentos e de fácil execução e concretização de objetivos. Desta forma, e ao longo deste trabalho, tira-se proveito de todas as ferramentas disponíveis no MatLab de modo a obter uma interface mais fluida e completa para o utilizador.

A execução deste trabalho compreende um domínio alargado de conceitos associados à plasticidade computacional bem como um domínio da programação em ambiente MatLab e linguagem Fortran, utilizada nas subrotinas de material.

1.3 Guia de Leitura

Este trabalho está organizado em três partes distintas. A primeira parte, **Enquadramento e Estado da Arte** procura enquadrar o trabalho e abordar os conteúdos necessários à sua compreensão geral, bem como providenciar uma introdução teórica de todos os critérios e leis utilizadas ao longo deste trabalho para aplicação da metodologia e sua implementação na ferramenta desenvolvida.

Capítulo 1- Introdz-se o trabalho dando principal ênfase aos aspetos que justificam a sua realização e faz-se uma descrição dos objetivos globais deste trabalho.

Capítulo 2 Efetua-se uma breve descrição teórica de múltiplos critérios de plasticidade e leis de encruamento plástico, bem como uma introdução a alguns conceitos de deformação plástica.

Capítulo 3- Aborda-se a temática dos métodos numéricos integrando os seus fundamentos e fazendo uma explicação sumária sobre a integração de modelos constitutivos no MEF, o *software* comercial adotado e todas as nuances relativas ao cálculo simbólico e à programação em ambiente MatLab, bem como uma revisão das ferramentas já existentes semelhantes à desenvolvida neste trabalho.

Na segunda parte, **Metodologia e Implementação** encontra-se descrito o conteúdo da formulação adotada e desenvolvida no decorrer do presente trabalho. Esta possui ainda uma componente explicativa da organização geral e da arquitetura da ferramenta desenvolvida, bem como as soluções atingidas para a implementação dos modelos em programas do MEF.

Capítulo 4- Apresenta toda a metodologia no qual este trabalho se baseou, faz também uma abordagem ao método de integração e correção plástica adotado e, por último, aborda a metodologia de obtenção do módulo elastoplástico consistente.

²*software* de utilização comercial, desenvolvido e propriedade da MatWorks, que detém também o produto Simulink.

Capítulo 5- Efetua-se a apresentação da arquitetura geral de funcionamento da ferramenta desenvolvida assim como a implementação da metodologia na criação automática das subrotinas de utilizador. É feita também uma abordagem às soluções adotadas durante o processo de desenvolvimento dos vários módulos que compõem a ferramenta.

A terceira e última parte deste trabalho, intitulada **Resultados e Discussão**, é onde são apresentados todos os resultados obtidos de modo a validar e atestar o bom funcionamento da ferramenta desenvolvida. Nesta parte são incluídas ainda as considerações finais sobre o presente trabalho.

Capítulo 6- Apresenta-se o conjunto de resultados obtidos com a utilização da ferramenta desenvolvida e são efetuadas as análises necessárias de modo a comprovar o bom funcionamento e a correta implementação de toda a metodologia desenvolvida. É também atestada toda a validade do trabalho desenvolvido tanto na implementação como na otimização das subrotinas de utilizador.

Capítulo 7- Abordam-se as considerações finais do trabalho realizado assim como as conclusões gerais retiradas e as propostas de trabalho futuro a ser efetivado de modo a dar continuidade ao desenvolvimento na temática desta dissertação.

Capítulo 2

Modelos de Comportamento

2.1 Introdução

A modelação do comportamento plástico dos metais é um dos processos mais importantes na análise e simulação de processos tecnológicos. Quer a superfície de plasticidade inicial, quer a sua evolução, na sua generalidade traduzida por leis de encruamento, são características mecânicas relevantes, na medida que descrevem a resposta e o comportamento mecânico dos materiais metálicos quando sujeitos a diferentes trajetórias de solicitação e deformação.

Os modelos que descrevem o comportamento plástico de metais policristalinos podem classificar-se em dois grandes tipos: os cristalográficos que, como o nome indica, se baseiam na estrutura cristalográfica e os que se designam fenomenológicos.

A compreensão e o domínio dos conceitos associados aos modelos que se baseiam na estrutura cristalográfica exigem um elevado conhecimento microscópico dos cristais e da sua textura uma vez que o material é considerado um corpo policristalino. Os dados obtidos através da análise cristalográfica do metal são incorporados segundo os modelos de plasticidade de policristais, como o de Taylor-Bishop-Hill (TBH) [2]. Neste, é possível identificar a superfície de plasticidade do material inicial bem como a sua evolução com a deformação plástica. Através do Método dos Elementos Finitos (MEF), um número relativamente elevado de grãos é associado a cada ponto de integração implementado, nos quais é simulada a evolução da posição relativa dos planos de escorregamento ativados pela solicitação mecânica [3]. Obtém-se assim, através da ponderação dos grãos dos modelos TBH, o comportamento plástico geral do material em cada ponto de integração considerado. Portanto consegue-se obter uma relação entre a evolução da textura cristalográfica e o processo tecnológico em causa.

De modo a poder obter-se modelos numéricos mais simples e menos exigentes computacionalmente, é possível, sem perda de generalidade, simplificar o modelo a um único grão por ponto de integração [3]. Nestes modelos de plasticidade a textura cristalográfica é o principal parâmetro de entrada. No entanto, outros dados podem vir a ser considerados como, por exemplo, a forma e a dimensão dos grãos.

Independentemente das simplificações consideradas, a descrição do comportamento mecânico do material usando estes modelos é complexa em termos de aplicações computacionais, necessitando de múltiplos parâmetros e conduzindo inevitavelmente a tempos de cálculo extremamente elevados [4]. Esta desvantagem face aos modelos de comportamento fenomenológicos torna o uso dos modelos cristalográficos difícil e menos comum

no ambiente industrial.

Os modelos fenomenológicos descrevem o comportamento de um material do ponto de vista macroscópico, considerando que este se faz representar por uma superfície de plasticidade que evolui com a evolução da deformação plástica. Considera-se ainda que a superfície de plasticidade é matematicamente um potencial para o estado de deformação plástica [5]. A superfície de plasticidade pode então ser adequadamente definida de modo a descrever os pontos mais importantes do comportamento plástico dos materiais policristalinos, isotrópicos e anisotrópicos, uma vez que Bishop & Hill [2] demonstraram teoricamente que tais pressupostos são válidos para materiais policristalinos, e Hecker [6] observou através da análise de várias superfícies de plasticidade experimentais que o comportamento plástico dos materiais é corretamente descrito segundo uma superfície de plasticidade para materiais monofásicos.

Apesar das suas limitações, os modelos fenomenológicos são fortemente implementados em ferramentas numéricas baseadas no MEF para a simulação de processos de conformação plástica. Em comparação com os modelos baseados na textura cristalográfica, os modelos fenomenológicos são mais fáceis de implementar e compreender e são numericamente mais eficientes uma vez que exigem menores tempos de cálculo. Como os modelos fenomenológicos usam como dados de entrada valores obtidos através de ensaios mecânicos, estes são tendencialmente mais precisos comparativamente a modelos policristalinos quando a deformação é moderada [5].

Nestes modelos, para estados de tensão multi-axiais, o comportamento plástico pode ser definido por três entidades distintas: critério de plasticidade, lei de encruamento e lei de plasticidade [7].

2.2 Conceitos de Deformação Plástica

Dentro de certos limites, a relação tensão-deformação é linear, sendo então regida pela lei de Hooke, desta forma a deformação é reversível e a forma inicial do material é recuperada após a remoção das cargas aplicadas a este.

Caso o limite elástico seja ultrapassado o material entra no regime plástico, e após a remoção das cargas aplicadas o corpo fica permanentemente deformado, com novas características mecânicas e geométricas dependentes das trajetórias e valor da deformação, ou deformações várias, a que esteve sujeito. O comportamento plástico é então caracterizado por um estado de deformação irreversível, obtido após ser atingido um determinado nível de tensão.

No regime elástico, o tensor das tensões de Cauchy, σ , pode ser diretamente relacionado com a deformação elástica, sendo este expresso pela lei de Hooke,

$$\sigma = \mathbf{C} : \varepsilon^e, \quad (2.1)$$

onde \mathbf{C} é o tensor de 4^a ordem de elasticidade. Este tensor relaciona os tensores de segunda ordem das tensões de Cauchy σ e das deformações ε através da equação 2.1. Tomando em consideração que o tensor das tensões de Cauchy e das deformações serem,

de um modo geral, tensores simétricos [8], tem-se que,

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

onde E é o módulo de Young e ν o coeficiente de Poisson.

Uma forma prática de realizar e compreender a diferenciação entre comportamento elástico e plástico de um ponto material, passa por representar o estado de tensão desse ponto no espaço das tensões principais de Haig-Westergaard, e definir, neste espaço, a superfície de cedência ou superfície de plasticidade. A esta, correspondem todos os estados de tensão que definem a entrada do material em regime plástico. Deste modo, todos os estados de tensão inseridos no interior da superfície encontram-se em regime elástico, estando no limite do regime plástico todos aqueles que se situem sobre a superfície de cedência [9].

A existência de estados de tensão no exterior da superfície são fisicamente impossíveis, no entanto são passíveis de ocorrer matematicamente. O espaço das tensões principais de Haig-Westergaard é representado através de três eixos ortogonais entre si, nos quais, as coordenadas são os valores das tensões principais [10]. Na figura 2.1 pode ser encontrada a representação das superfícies limite de elasticidade resultantes da aplicação dos critérios de plasticidade de Tresca [11] e de von Mises [12].

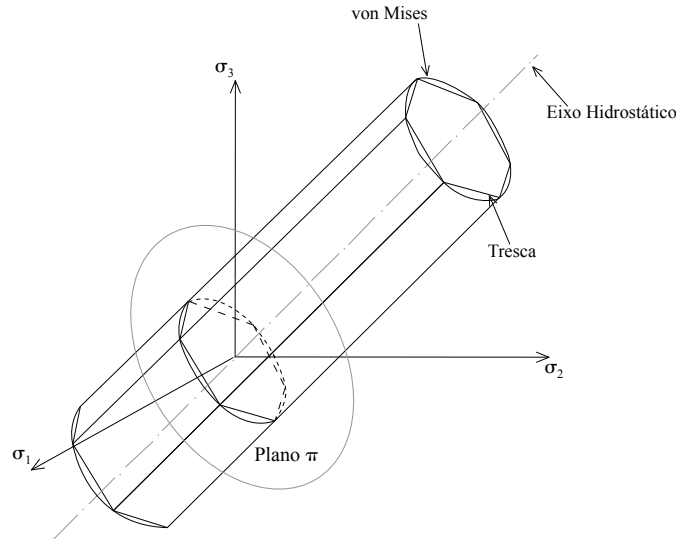


Figura 2.1: Representação geométrica dos critérios de plasticidade de Tresca e de von Mises no espaço de Haig-Westergaard. Adaptado de [13].

Tendo isto, para se efetuar a caracterização do comportamento plástico de um material, recorre-se a uma abordagem clássica ao controlo da plasticidade através do estado das tensões, introduzindo com este objetivo a definição do denominado critério de plas-

tidade,

$$f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0. \quad (2.3)$$

Este critério estabelece uma superfície de cedência, definida pela igualdade da função escalar do tensor das tensões $\boldsymbol{\sigma}$, $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$, que delimita os estados de tensão considerados admissíveis.

Para que ocorra um incremento das deformações plásticas no material é necessário que o estado de tensão se encontre sobre a superfície de cedência, ou seja, que a igualdade em 2.3 se verifique. Caso contrário, o material apresenta uma resposta em regime elástico, permanecendo a deformação plástica constante. Estas deformações são nulas caso o ponto em questão nunca obtenha registos realizados sobre a superfície de cedência.

Segundo este modelo, considera-se que a deformação total, $\boldsymbol{\varepsilon}^t$, num dado ponto, como se mostra na figura 2.2, é composta pela deformação elástica, $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, e pela deformação plástica, $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, de acordo com

$$\boldsymbol{\varepsilon}^t = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p. \quad (2.4)$$

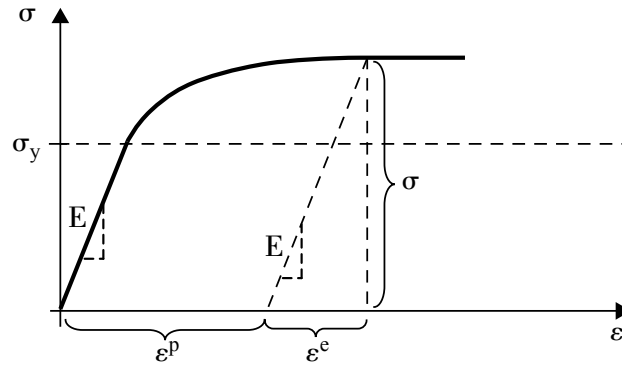


Figura 2.2: Separação da deformação total nas suas componentes elástica e plástica.

A relação anterior apenas é válida para deformações infinitesimais, não podendo ser aplicada a casos de grandes deformações. No entanto, esta relação é largamente utilizada na simulação incremental de processos tecnológicos de conformação plástica de metais. Apesar destes processos apresentarem grandes deformações comparativas entre o estado inicial e o estado final do material, não se verificam ao longo das sucessivas iterações grandes deformações [14]. Como tal, está assegurada a validade da relação 2.4.

A dependência da tensão em relação à deformação plástica, obtida a partir das equações 2.1 e 2.4, é mostrada por

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}^t - \boldsymbol{\varepsilon}^p). \quad (2.5)$$

Adianta-se apenas que, para materiais isotrópicos, esta função deverá necessariamente respeitar uma das seguintes situações descritas em [15], como é o exemplo do critério de Tresca e von Mises:

- O estado plano de tensão num ponto pode ser completamente descrito pela magnitude e orientação das tensões principais. No caso de materiais isotrópicos, a orientação dos eixos das tensões principais não afeta a condição de cedência.

- Um estado de tensão hidrostática não gera deformação plástica em materiais metálicos. Assim, o critério de cedência não deve ser formulado no valor absoluto das tensões principais, mas sim na magnitude das diferenças destas. Este pressuposto implica que a deformação é uma função dependente da parcela desviadora das tensões do primeiro invariante de σ [16].

2.3 Critérios de Plasticidade

Segundo a teoria clássica da plasticidade, só se admite que um material entra em deformação plástica quando a igualdade 2.3 é satisfeita. Os critérios de plasticidade estabelecem diferentes condições de cedência do material, e permitem a caracterização do estado de tensão por um escalar quaisquer que sejam as forças envolvidas.

A lei de plasticidade associada¹ é considerada como válida na teoria da deformação plástica para a generalidade dos materiais metálicos [17]. Esta lei pode ser definida por

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad (2.6)$$

em que o escalar $\dot{\lambda}$ é designado por multiplicador plástico. Tendo o caso em que este é positivo, e quando ocorre deformação plástica, a equação 2.6 traduz o fato de o tensor das taxas pseudotemporais de deformação plástica ser normal e exterior à superfície de limite de elasticidade. Por esta razão, a equação 2.6 é normalmente denominada lei da normalidade.

Ao longo das últimas décadas, têm surgido inúmeros critérios de plasticidade que descrevem o comportamento plástico de materiais isotrópicos e anisotrópicos. Nas subsecções seguintes enumeram-se, com algum detalhe, os critérios de plasticidade isotrópicos e anisotrópicos considerados mais importantes [18].

2.3.1 Critérios Isotrópicos

Os materiais podem ser considerados isotrópicos ou anisotrópicos dependendo da sua resposta a solicitações mecânicas. Os materiais isotrópicos são caracterizados pela sua resposta indiferente às direções a que lhe são impostas solicitações mecânicas [19].

Os principais critérios isotrópicos foram propostos por Tresca (1864), von Mises (1913), Drucker (1949) e Hershey e Hosford (1954 e 1972) [18]. Contudo, outros critérios foram propostos, tais como por exemplo, Mohr-Coulomb, Beltrami ou Green, apesar de não se revelarem tão importantes como os outros.

Tresca, em 1864, propôs o primeiro critério de plasticidade isotrópico [15]. Este modelo é representado por um cilindro que circunscreve o prisma hexagonal regular de Tresca no espaço das tensões principais, como se observa na figura 2.3.

¹Uma lei de plasticidade diz-se associada no caso de se utilizar o mesmo potencial para descrever o comportamento plástico em termos quer da superfície de limite de elasticidade quer da deformação plástica.

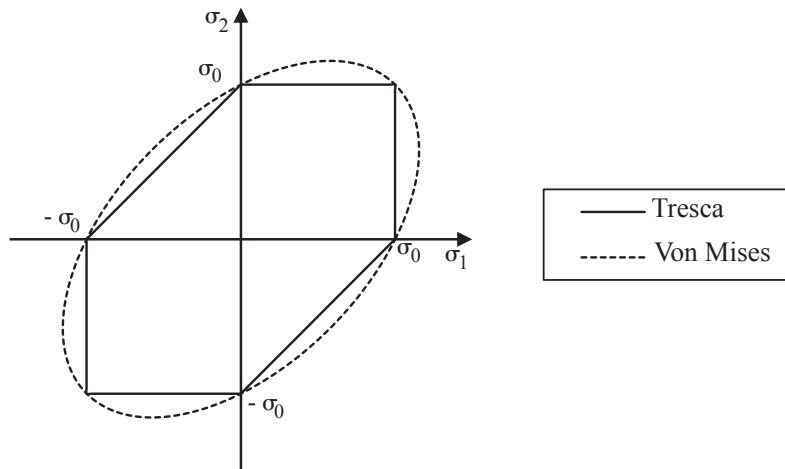


Figura 2.3: Representação das superfícies de cedência de Tresca e von Mises no plano $(\sigma_1; \sigma_2)$. Adaptado de [15].

O critério de plasticidade de Tresca é baseado em resultados experimentais e admite por hipótese que a deformação plástica num ponto material ocorre sempre que a tensão tangencial máxima é ultrapassada devido à deslocação dos planos de escorregamento através da ação de tensões de corte, e uma vez que o tensor hidrostático é pouco relevante para a cedência. Geralmente, o critério é apresentado em função das tensões principais [18], pela seguinte expressão,

$$\sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_Y, \quad (2.7)$$

onde σ_I e σ_{III} são a maior e menor tensões principais do tensor das tensões $\boldsymbol{\sigma}$ e σ_Y é a tensão limite de elasticidade em tração uniaxial.

Sendo o critério mais usado na descrição do comportamento de materiais isotrópicos, o critério de von Mises foi proposto isoladamente por Huber em 1904 e von Mises em 1913 [20]. Neste, é postulado que a cedência do material deve ser calculada através do segundo invariante da componente tangencial pura do tensor das tensões quando a energia de distorção elástica atinge um determinado valor crítico. A expressão matemática capaz de quantificar essa energia é obtida a partir do segundo invariante do tensor das tensões, definido por J_2 e no sistema de eixos principais toma a seguinte forma [18]

$$(s_1 - s_2)^2 + (s_2 - s_3)^2 + (s_1 + s_3)^2 = 2\sigma_Y^2, \quad (2.8)$$

na qual, s_1 , s_2 e s_3 são as tensões principais do tensor das tensões desviador \mathbf{s} . O critério isotrópico de von Mises apresenta como grande vantagem, na descrição do comportamento dos materiais, a sua simplicidade, uma vez que necessita apenas de um ensaio de tração uniaxial para a identificação dos parâmetros do modelo.

Como se mostra na figura 2.4, o critério de cedência de von Mises apresenta um melhor enquadramento nos dados experimentais de metais dúcteis como o aço macio, o alumínio e o cobre do que o critério de Tresca.

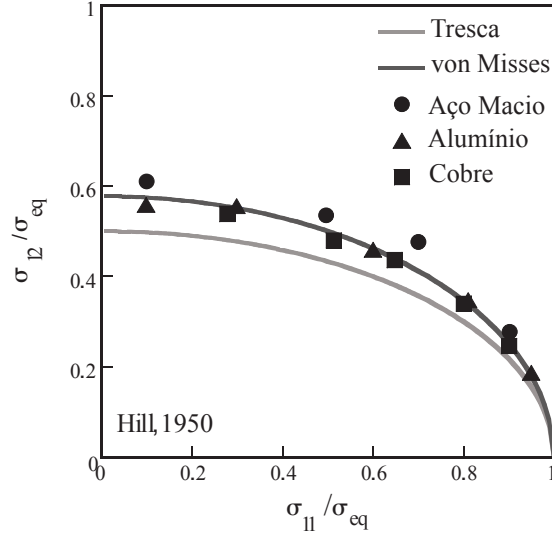


Figura 2.4: A superfície de cedência de von Mises e Tresca comparadas com dados experimentais. Adaptado de [21].

Drucker, em 1949, propôs um critério com o intuito de representar os materiais metálicos que apresentam um comportamento isotrópico situado entre os critérios de Tresca e von Mises. Este critério leva em conta os segundo e terceiro invariantes do tensor desviatório, I_2 e I_3 respectivamente, sendo assim dado pela expressão

$$I_2^3 + cI_3^2 = 27 \left(\frac{\sigma_Y}{3} \right)^6, \quad (2.9)$$

onde c é um parâmetro que varia entre $-27/8$ até $9/4$ de modo a assegurar a convexidade da superfície de cedência [15].

O critério de Hershey e Hosford (1954 e 1972) [22], cujas superfícies de cedência se podem encontrar na figura 2.5, corresponde a uma evolução do critério de von Mises e pode tomar uma formulação não quadrática. Este critério pode assim ser expresso pela expressão seguinte

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^a + (\sigma_2 - \sigma_3)^a + (\sigma_1 + \sigma_3)^a = 2\sigma_Y^a, \quad (2.10)$$

onde a é um expoente que é determinado com base na estrutura cristalográfica do material. Este toma o valor de 8 se a estrutura cristalográfica do metal for cúbica de faces centradas (CFC). Caso seja cúbica de corpo centrado (CCC), a toma o valor de 6. Outra das características deste critério é que pode tomar a forma do critério de von Mises caso o valor do expoente s seja igual a 2, e o de Tresca caso o valor do expoente tenda para infinito.

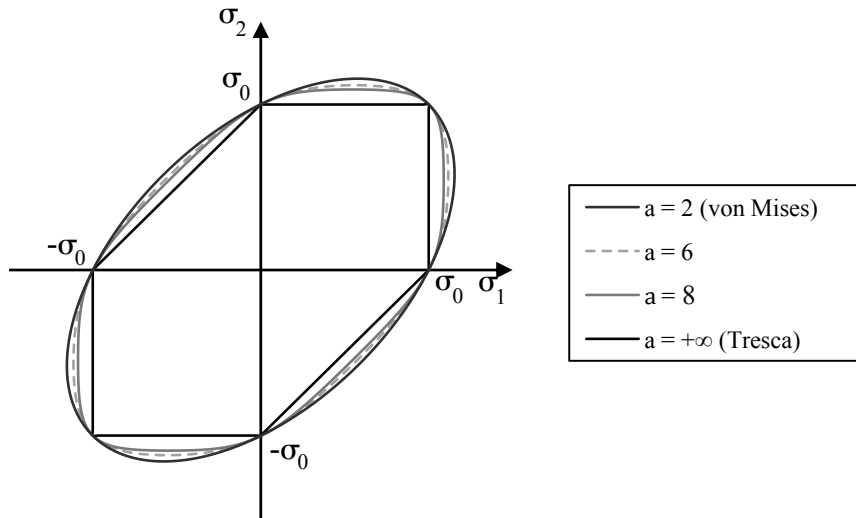


Figura 2.5: Representação das superfícies de cedência de Hosford no plano $(\sigma_1; \sigma_2)$ para diferentes valores de a . Adaptado de [15].

De todos os critérios isotrópicos apresentados nesta subsecção destaca-se o critério de von Mises por ser o mais utilizado em problemas de plasticidade computacional na comunidade científica e por todos os fatores referidos na descrição deste mesmo critério.

2.3.2 Critérios Anisotrópicos

Os materiais que apresentem propriedades mecânicas dependentes da direção de solici-tação são classificados como materiais anisotrópicos. Os materiais anisotrópicos têm a particularidade do seu comportamento mecânico variar em função da direção de solici-tação. Esta característica denomina-se de anisotropia plástica e resulta, geralmente, da história da deformação imposta pelos processos tecnológicos de produção. Esta, é influ-enciada por diversos fatores, tais como a estrutura cristalográfica, o teor em elementos de liga e a natureza dos tratamentos térmicos e mecânicos a que o material foi previamente submetido [23].

Deste modo, mesmo em casos em que o material é inicialmente isotrópico, com a evolução da deformação plástica e conseqüentemente o aparecimento de direções privile-giadas de deformação, o material vai tornando-se progressivamente anisotrópico. Devido à crescente utilização de materiais anisotrópicos nos processos de conformação, verificou-se nas últimas décadas uma grande evolução e surgimento de uma grande diversidade de critérios anisotrópicos [24]. Estes critérios permitem uma previsão mais fiel do comporta-mento mecânico resultantes da conformação plástica de materiais anisotrópicos, durante as simulações efetuadas pelo MEF.

De seguida são apresentados os critérios de plasticidade anisotrópicos mais relevantes [25]. Destes, destacam-se os seguintes: Hill (1948, 1979, 1990 e 1993), Bassani (1977), Hosford (1979), Budiansky (1984), Barlat *et al.* (1989, 1991, 1994, 1996, 2000, 2004 18-p e 2004 13-p), Karafilis e Boyce (1993), Vegter *et al.* (1998), Banabic *et al.* (2000), Cazacu e Barlat (2001), Bron e Benson (2004).

Os critérios de plasticidade anteriormente referidos respeitam as três características matemáticas:

- Independência da pressão hidrostática.
- Convexidade.
- Lei de plasticidade associada.

À exceção dos critérios propostos por Karafillis e Boyce e, Vegter *et al.*, todos os outros limitam-se à modelação do comportamento de materiais anisotrópicos com comportamento ortotrópico [26]. Na tabela 2.1 encontra-se um resumo dos principais critérios de cedência bem como os parâmetros necessários para a identificação de cada.

Tabela 2.1: Parâmetros mecânicos necessários para a identificação dos critérios de cedência [26].

Autor, ano	σ_0	σ_{30}	σ_{45}	σ_{75}	σ_{90}	σ_b	r_0	r_{30}	r_{45}	r_{75}	r_{90}	r_b	3D
Grupo de Hill													
Hill 1948	x						x		x		x		x
Hill 1979	x					x	x						x
Hill 1990	x		x		x	x			x				
Hill 1993	x				x	x	x				x		
Lin, Ding 1996	x				x	x	x		x		x		
Hu 2005					x	x	x		x		x		x
Leacock 2006					x	x	x		x		x		
Grupo de Hershey													
Hosford 1979	x						x				x		x
Barlat 1989	x						x				x		
Barlat 1991	x		x		x	x							x
Karafillis Boyce 1993	x		x		x		x		x		x		x
Barlat 1997	x		x		x	x	x		x		x		x
BBC 2000	x		x		x	x	x		x		x		x
Barlat 2000	x		x		x	x	x		x		x		
Bron, Besson 2003	x		x		x	x	x		x		x	x	x
Barlat 2004	x		x		x	x	x		x		x	x	x
BBC 2005	x		x		x	x	x		x		x	x	x
Grupo de Drucker													
Cazacu-Barlat 2001	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x
Cazacu-Barlat 2003	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x
C-P - B 2006	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x
Polinomiais													
Comsa 2006	x		x		x	x	x		x		x	x	x
Soare 2007 (Poly 4)	x	x	x		x	x	x		x		x	x	x

Não bastando ser capaz de identificar o critério presente é também necessário ser capaz de previamente selecionar o melhor critério a utilizar na simulação de modo a obterem-se resultados eficazes e eficientes. Desta forma, enumeram-se de seguida um conjunto de requisitos a preencher pelo critério escolhido pelo utilizador [26]:

- O critério de cedência deve, de forma precisa, descrever a superfície de cedência, a tensão de cedência uniaxial e os coeficientes uniaxiais da anisotropia plástica.
- Deve ser eficiente do ponto de vista computacional e de fácil implementação.
- Deve ser flexível e generalista.
- É importante ter em consideração o número de parâmetros mecânicos necessários para o identificar.
- Deve ser de fácil integração num processo de identificação.
- Deve ser *user-friendly* e bem aceite tanto na comunidade científica como na indústria.

O grupo de critérios de Hill (1948, 1993)

Em 1948, Hill propôs um critério de plasticidade anisotrópico, dado por

$$\phi = F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 2(L\sigma_{yz}^2 + M\sigma_{xz}^2 + N\sigma_{xy}^2) = \sigma_Y^2, \quad (2.11)$$

onde F, G, H, L, M e N são constantes do material, a serem determinadas experimentalmente. Ou, de outra forma, o critério de Hill 1948 pode ser reescrito da seguinte forma

$$\phi = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{M} : \boldsymbol{\sigma} = \sigma_Y^2, \quad (2.12)$$

onde \mathbf{M} é um tensor de 4ª ordem que possui os parâmetros de anisotropia do critério de Hill 1948.

Segundo o critério de Hill 1948, são apenas necessários 3 ensaios de tracção uniaxial a 0° , 45° e 90° em relação à direção de laminagem de modo a poder determinarem-se os 6 coeficientes necessários à descrição da anisotropia. Estes são dados pelas expressões:

$$F = \frac{H}{r_{90}}; \quad G = \frac{1}{r_0 + 1}; \quad H = r_0 G;$$

$$L = M = 1.5; \quad N = \frac{1}{2} \frac{(r_0 + r_{90})(2r_{45} + 1)}{r_{90}(r_0 + 1)},$$

onde r_0 , r_{45} e r_{90} são os coeficientes de anisotropia de Lankford. Estes podem ser obtidos através de

$$r_\theta = \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{33}} = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}, \quad (2.13)$$

em que ε_{11} , ε_{22} e ε_{33} correspondem às deformações segundo as direções longitudinal, transversal e normal do provete sujeito a tração uniaxial, segundo uma direção que faz um ângulo θ relativamente à direção de laminagem.

Caso o material seja isotrópico, Hill demonstrou que os coeficientes de anisotropia satisfazem a condição,

$$L = M = N = 3F = 3G = 3H = \frac{3}{2\sigma_Y^2}, \quad (2.14)$$

dando assim origem à superfície de plasticidade descrita pelo critério de von Mises.

Hill, em 1993, propôs outro critério de plasticidade anisotrópico. Este só se aplica a estados planos de tensão e é mais adequado a materiais que apresentem propriedades

mecânicas particulares, exemplificativamente $\sigma_0 = \sigma_{90}$ e $r_0 \neq r_{90}$ ou $\sigma_0 \neq \sigma_{90}$ e $r_0 = r_{90}$. Uma vez que não tem em conta as tensões de corte, este é então expresso por

$$\phi = \frac{\sigma_{xx}^2}{\sigma_0^2} - C \frac{\sigma_{xx}\sigma_{yy}}{\sigma_0\sigma_{90}} + \frac{\sigma_{yy}^2}{\sigma_{90}^2} + \left[(A + B) - \frac{A\sigma_{xx} + B\sigma_{yy}}{\sigma_b} \right] \frac{\sigma_{xx}\sigma_{yy}}{\sigma_0\sigma_{90}} = 1. \quad (2.15)$$

Neste critério a determinação dos coeficientes é realizada através de 3 ensaios experimentais, um ensaio de tração biaxial e dois ensaios de tração uniaxial a 0° e 90° relativamente à direção de laminagem [27].

O grupo de critérios de Barlat (Yld89, Yld91, Yld94, Yld96, Yld2000-2d, Yld2004-18p, Yld2004-13p)

De modo a ter em conta as tensões de corte, Barlat e Lian, propuseram uma extensão do critério de Hosford (1979) de modo a alargar a aplicabilidade deste. Este critério de plasticidade anisotrópico, que apenas pode ser aplicável a estados planos de tensão, designado de *Yld89* é expresso por

$$\phi = \bar{c}|K_1 + K_2|^a + \bar{c}|K_1 - K_2|^a + (2 - \bar{c}|2K_2|^a) = 2\sigma_Y^a, \quad (2.16)$$

onde K_1 e K_2 são respetivamente dados por

$$K_1 = \frac{\sigma_{xx} + \bar{h}\sigma_{yy}}{2}, \quad K_2 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \bar{h}\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \bar{p}^2\sigma_{xy}^2}, \quad (2.17)$$

onde \bar{c} , \bar{h} , \bar{P} e a são coeficientes do material.

Barlat *et al.*, em 1991, propuseram uma extensão do critério isotrópico de Hershey a materiais anisotrópicos com simetria ortotrópica [13]. Este critério designado de *Yld91* é expresso por

$$\phi = (\tilde{S}_1 - \tilde{S}_2)^{2k} + (\tilde{S}_2 - \tilde{S}_3)^{2k} + (\tilde{S}_3 - \tilde{S}_1)^{2k} = 2\sigma_Y^{2k}; \quad (2.18)$$

onde k é uma constante do material que pode ser considerado um parâmetro do critério de plasticidade, cuja otimização da sua escolha pode melhorar a previsão da forma da superfície de plasticidade. No entanto, este é um valor isotrópico que apenas afeta a forma da superfície de plasticidade isotropicamente [18]. O critério *Yld91* apresenta a desvantagem de não permitir a descrição simultânea da tensão limite de elasticidade e o coeficiente de anisotropia de Lankford, na direção de 45° .

Em 2000, surgiu um critério, denominado de *Yld2000 - 2d*, que veio superar as desvantagens apresentadas pelo *Yld96*. O critério *Yld2000 - 2d*, relativamente ao critério *Yld96*, é matematicamente mais simples, facilitando a sua implementação em conjunto com o MEF, apresentando pelo menos o mesmo rigor. Além de ter a sua convexidade provada, ainda apresenta a vantagem de possibilitar a descrição em simultâneo dos valores de σ_{45} e r_{45} . O critério *Yld96* apresenta ainda as desvantagens das suas derivadas apresentarem formulações analíticas complexas e da sua elevada complexidade para estados de tensão triaxiais provocar a ocorrência de problemas numéricos de difícil resolução. A função deste critério é melhorar a superfície de plasticidade obtida através do critério *Yld94* que, apesar da desvantagem da sua convexidade não ter sido ainda provada matematicamente, é um critério mais preciso que o apresentado acima *Yld91*.

De seguida são enunciadas as equações que regem cada um destes critérios.

- *Yld94*

$$\phi = \alpha_1 \left| \tilde{S}_2 - \tilde{S}_3 \right|^a + \alpha_2 \left| \tilde{S}_3 - \tilde{S}_1 \right|^a + \alpha_3 \left| \tilde{S}_1 - \tilde{S}_2 \right|^a = 2\sigma_Y^a, \quad (2.19)$$

onde

$$\alpha_1 = \alpha_x P_{1i}^2 + \alpha_y P_{2i}^2 + \alpha_z P_{3i}^2. \quad (2.20)$$

- *Yld96*

Pode ser obtido através das expressões 2.19 e 2.20, sendo que os parâmetros α são dados por

$$\alpha_x = \alpha_{x0} \cos^2(2\beta_1) + \alpha_{x1} \sin^2(2\beta_1), \quad (2.21)$$

$$\alpha_y = \alpha_{y0} \cos^2(2\beta_1) + \alpha_{y1} \sin^2(2\beta_1), \quad (2.22)$$

$$\alpha_z = \alpha_{z0} \cos^2(2\beta_1) + \alpha_{z1} \sin^2(2\beta_1). \quad (2.23)$$

- *Yld2000 – 2d*

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = 2\sigma_Y^a \quad (2.24)$$

com

$$\phi_1 = \left| \tilde{S}_1^{(1)} - \tilde{S}_2^{(1)} \right|^a \text{ e } \phi_2 = \left| 2\tilde{S}_2^{(2)} + \tilde{S}_1^{(2)} \right|^a + \left| 2\tilde{S}_1^{(2)} + \tilde{S}_2^{(2)} \right|^a. \quad (2.25)$$

Barlat *et al.* [28] propuseram um critério de plasticidade, convexo, designado por *Yld2004–18p*, que contém 18 coeficientes de anisotropia e é aplicável a estados de tensão triaxiais. Este é dado por

$$\phi = \sum_{i,j}^{1,3} \left| \tilde{S}_i^{(1)} - \tilde{S}_j^{(2)} \right|^a = 4\sigma_Y^a, \quad (2.26)$$

onde os índices i e j assumem valores inteiros de 1 a 3, e $\tilde{S}^{(1)}$ e $\tilde{S}^{(2)}$ são definidos pelas transformações lineares $\tilde{S}^{(k)} = \tilde{L}^{(k)}S$, onde

$$\tilde{L}^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{L}_{12}^{(k)} & -\tilde{L}_{13}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{L}_{21}^{(k)} & 0 & -\tilde{L}_{23}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{L}_{31}^{(k)} & -\tilde{L}_{32}^{(k)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{L}_{44}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{L}_{55}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{L}_{66}^{(k)} \end{bmatrix}, \text{ com } k = 1, 2. \quad (2.27)$$

Com o objetivo de simplificar a determinação dos coeficientes de anisotropia, sem perda de generalidade e exactidão dos resultados obtidos, Barlat *et al.* propuseram o critério *Yld2004 – 13p*, expresso por

$$\begin{aligned} \phi = & \left| \tilde{S}_1^{(1)} - \tilde{S}_2^{(1)} \right|^a + \left| \tilde{S}_2^{(1)} - \tilde{S}_3^{(1)} \right|^a + \left| \tilde{S}_3^{(1)} - \tilde{S}_1^{(1)} \right|^a + \left| \tilde{S}_1^{(1)} \right|^a + \left| \tilde{S}_2^{(1)} \right|^a + \left| \tilde{S}_3^{(1)} \right|^a \\ & - \left[\left| \tilde{S}_1^{(2)} \right|^a + \left| \tilde{S}_2^{(2)} \right|^a + \left| \tilde{S}_3^{(2)} \right|^a \right] = 2\sigma_Y^a, \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde $\tilde{S}^{(1)}$ e $\tilde{S}^{(2)}$ são definidos pelas transformações lineares $\tilde{S}^{(k)} = \tilde{L}^{(k)}S$, através de,

$$\tilde{L}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\tilde{L}_{13}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{L}_{21}^{(1)} & 0 & -\tilde{L}_{23}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{L}_{44}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{L}_{55}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{L}_{66}^{(1)} \end{bmatrix} \text{ e} \quad (2.29)$$

$$\tilde{L}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{L}_{12}^{(2)} & -\tilde{L}_{13}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{L}_{21}^{(2)} & 0 & -\tilde{L}_{23}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{L}_{44}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{L}_{55}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{L}_{66}^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Karafilis e Boyce (1993)

Em 1993, Karafilis e Boyce propuseram uma extensão do seu critério de plasticidade isotrópico genérico de modo a abranger também materiais anisotrópicos. A anisotropia foi então inserida através da aplicação de uma transformação linear sobre o tensor das tensões e uso do tensor \tilde{S} , estado plástico isotrópico equivalente, na expressão do critério isotrópico. Este critério pode então ser formulado por [29]

$$\phi = (1 - c)\phi_1(\tilde{S}) + c\phi_2(\tilde{S}) = 2\sigma_Y^a, \quad (2.31)$$

onde as expressões ϕ_1 e ϕ_2 são dadas por

$$\phi_1 = \left| \tilde{S}_1 - \tilde{S}_2 \right|^a + \left| \tilde{S}_2 - \tilde{S}_3 \right|^a + \left| \tilde{S}_3 - \tilde{S}_1 \right|^a \text{ e} \quad (2.32)$$

$$\phi_2 = \frac{3^a}{2^{a-1} + 1} \left(\left| \tilde{S}_1 \right|^a + \left| \tilde{S}_2 \right|^a + \left| \tilde{S}_3 \right|^a \right). \quad (2.33)$$

Este critério possui o mesmo número de coeficientes de anisotropia que o critério *Yld91*, ou seja, 6. No entanto, e devido a um coeficiente adicional c , o critério de Karafilis e Boyce é mais genérico, sendo que, o critério *Yld91* é um caso particular para $c = 0$.

Cazacu e Barlat (2001)

Cazacu e Barlat propuseram um critério anisotrópico que é a extensão do critério isotrópico de Drucker (1949), descrito em 2.3.1, tirando proveito do princípio de que qualquer critério isotrópico pode ser estendido de modo a descrever a anisotropia dos materiais.

Através da transformação linear $\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{L}}\mathbf{S}$, é então introduzida a anisotropia. São então calculados o segundo $J_2^{\tilde{S}}$ e terceiro $J_3^{\tilde{S}}$ invariantes do tensor resultante e aplicados ao critério isotrópico de Drucker (1949),

$$\left(J_2^{\tilde{S}} \right)^3 + c \left(J_3^{\tilde{S}} \right)^2 = 27 \left(\frac{\sigma_Y}{3} \right)^6, \quad (2.34)$$

com $c \in [-27/8; 9/4]$ de modo a poder garantir a convexidade do critério [20]. Os segundo e terceiro invariantes do tensor das tensões deste critério são descritos respetivamente por polinómios de 2º e 3º graus. Os coeficientes destes polinómios são os coeficientes de anisotropia do material e são expressos por

$$J_2^0 = \frac{a_1}{6}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \frac{a_2}{6}(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + \frac{a_3}{6}(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + a_4\sigma_{xy}^2 + a_5\sigma_{xz}^2 + a_6\sigma_{yz}^2 \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} J_3^0 = & \frac{1}{27}(b_1 + b_2)\sigma_{xx}^3 + \frac{1}{27}(b_3 + b_4)\sigma_{yy}^3 + \frac{1}{27}[2(b_1 + b_4) - b_2 - b_3]\sigma_{zz}^3 \\ & - \frac{1}{9}(b_1\sigma_{yy} + b_2\sigma_{zz})\sigma_{xx}^2 - \frac{1}{9}(b_3\sigma_{zz} + b_4\sigma_{xx})\sigma_{yy}^2 \\ & - \frac{1}{9}[(b_1 - b_2 + b_4)\sigma_{xx} + (b_1 - b_3 + b_4)\sigma_{yy}]\sigma_{zz}^2 \\ & + \frac{2}{9}(b_1 + b_4)\sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \frac{\sigma_{xz}^2}{3}[2b_9\sigma_{yy} - b_8\sigma_{zz} - (2b_9 - b_8)\sigma_{xx}] \\ & - \frac{\sigma_{xy}^2}{3}[2b_{10}\sigma_{zz} - b_5\sigma_{yy} - (2b_{10} - b_5)\sigma_{xx}] \\ & - \frac{\sigma_{yz}^2}{3}[(2b_6 + b_7)\sigma_{xx} - b_6\sigma_{yy} - b_7\sigma_{zz}] + 2b_{11}\sigma_{xy}\sigma_{xz}\sigma_{yz}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Estes invariantes são então introduzidos no critério isotrópico de Drucker (1949). Este critério apresenta diversas vantagens em relação aos demais critérios de plasticidade anisotrópicos, tais como o seu elevado número de coeficientes de anisotropia associados à simplicidade matemática da sua formulação. A sua formulação de reduzida complexidade matemática permite a sua fácil implementação em programas de simulação pelo MEF, enquanto que o seu elevado número de coeficientes anisotrópicos garante a sua generalidade e flexibilidade na descrição do comportamento anisotrópico de diversos materiais metálicos [13].

$$(J_2^0)^3 + c(J_3^0)^2 = 27\left(\frac{\sigma_Y}{3}\right)^6. \quad (2.37)$$

2.4 Leis de Encruamento

Como foi referido na Secção 2.3, após o estado de tensão de um ponto material atingir a superfície de cedência, esta pode manter-se inalterada ou evoluir ao longo do processo de conformação com a evolução da deformação plástica, podendo ser expandida e/ou transposta ou distorcida.

De modo a poder realizar-se uma caracterização elastoplástica completa, não basta definir a superfície de cedência inicial mas também é necessário caracterizar a sua evolução resultante do comportamento inelástico do material. Assim, e segundo a teoria da plasticidade, as alterações induzidas na textura e na microestrutura do material provocadas pela deformação plástica determinam a evolução da superfície de plasticidade.

Durante a evolução plástica do material, a superfície de cedência pode manter-se inalterada, apresentando assim um comportamento elástico-perfeitamente plástico, representado na figura 2.6, ou pode progredir com o trabalho plástico. Caso esta progrida, pode sofrer uma expansão ou uma translação ou uma alteração de forma não uniforme,

sendo estas definidas por encruamento isotrópico, encruamento cinemático e encruamento misto respetivamente.

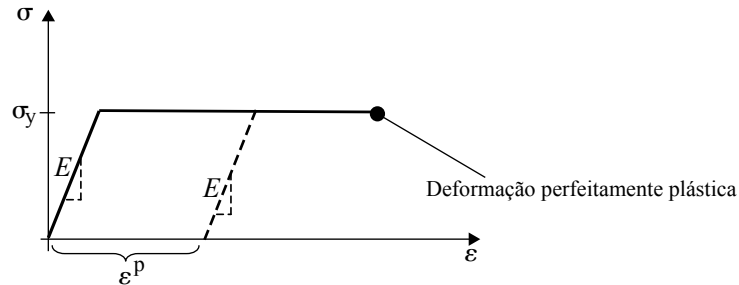


Figura 2.6: Curva tensão deformação perfeitamente plástica. Adaptado de [30].

No encruamento isotrópico assume-se que a superfície de cedência atualizada é conseguida com base numa expansão uniforme da superfície inicial, definida pelo critério de plasticidade. Ora, isto significa que ambos os centros das superfícies se mantêm coincidentes, como mostrado na figura 2.7, desprezando-se assim o efeito de Bauschinger que surge quando ocorre inversão da trajetória como, por exemplo, num ensaio típico tração-compressão.

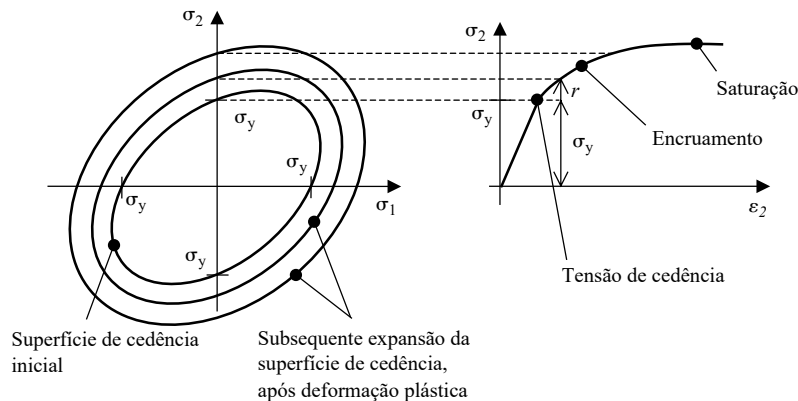


Figura 2.7: Expansão isotrópica da superfície de cedência. Adaptado de [10].

Ao contrário do modelo anterior, no encruamento cinemático considera-se que existe uma translação do centro e da superfície plástica durante o processo de conformação. Assim, é possível modelar fenómenos como o amaciamento transiente ou o efeito de Bauschinger que têm na sua origem mudanças de trajetória de deformação (ver figura 2.8). Aliás, este modelo é mais adequado na descrição de movimentos de inversão do sentido de carga, uma vez que os modelos isotrópicos geram superfícies de plasticidade demasiado grandes nestes casos, o que não se verifica na realidade, em que as superfícies de cedência são menores.

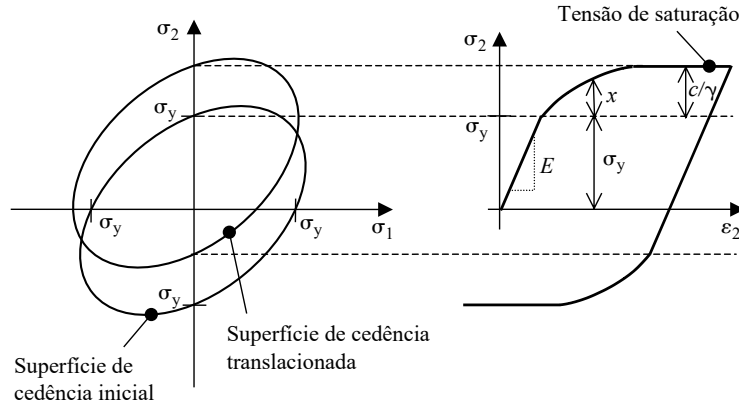


Figura 2.8: Expansão cinemática da superfície de cedência. Adaptado de [10].

Existem também modelos que combinam ambos os encruamentos, tendo em consideração efeitos isotrópicos e cinemáticos em simultâneo. Estes modelos mostram-se mais precisos na reprodução do comportamento dos materiais metálicos, como se pode ver mais à frente nesta secção.

2.4.1 Leis de Encruamento Isotrópico

O encruamento isotrópico é definido de uma forma genérica pela equação seguinte:

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) = \phi(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_y(\boldsymbol{\alpha}) = 0, \quad (2.38)$$

na qual o termo $\phi(\boldsymbol{\sigma})$ é uma função convexa do tensor das tensões, ou seja, a função de cedência, e o termo $\sigma_y(\boldsymbol{\alpha})$ a função de encruamento que define a dimensão da superfície de plasticidade. Então, estando apenas sujeita a este tipo de encruamento, uma superfície de plasticidade genérica depende apenas da deformação plástica efetiva e é descrita por

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\epsilon}^p) = \phi(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_y(\bar{\epsilon}^p) = 0. \quad (2.39)$$

As leis que regem a tensão $\sigma_y(\boldsymbol{\alpha})$ que caracteriza a dimensão da superfície de plasticidade admitem variáveis internas do material como parâmetros de entrada e, segundo [18], apresentam-se de seguida as mais relevantes:

- Ludwick (1909)

$$\sigma_Y = \sigma_{Y_0} + H\bar{\epsilon}^n \quad (2.40)$$

- Prager (1938)

$$\sigma_Y = \sigma_{Y_0} \tanh\left(\frac{E\bar{\epsilon}}{\sigma_{Y_0}}\right) \quad (2.41)$$

- Ramberg e Osgood (1943)

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sigma_Y}{E} + H\left(\frac{\sigma_Y}{E}\right)^n \quad (2.42)$$

- Hollomon (1944)

$$\sigma_Y = H\bar{\varepsilon}^n \quad (2.43)$$

- Fernandes *et al.* (1998)

$$\sigma_Y = C [g(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}_{ps}) + h\bar{\varepsilon}^p]^n \quad (2.44)$$

Destacam-se as leis propostas por Swift e Voce, apresentadas na mesma sequência:

- Swift (1947)

$$\sigma_Y = C(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}^p)^n \quad (2.45)$$

onde ε_0 é dado por

$$\varepsilon_0 = \left(\frac{\sigma_{Y0}}{C} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.46)$$

- Voce (1948)

$$\sigma_Y = \sigma_{Y0} + (\sigma_{Y_{sat}} - \sigma_{Y0}) [1 - \exp(-C_Y \bar{\varepsilon}^p)], \quad (2.47)$$

nas quais σ_Y , σ_{Y0} e $\sigma_{Y_{sat}}$, são respetivamente, a tensão de escoamento, que descreve a evolução da tensão limite de elasticidade, e as tensões limite de elasticidade inicial e de saturação em tração uniaxial. $\bar{\varepsilon}$ e $\bar{\varepsilon}^p$ são a deformação logarítmica efetiva e a deformação plástica efetiva, respetivamente. Por fim, os restantes parâmetros, E , H , n , C , ε_0 , C_Y , g , $\bar{\varepsilon}_{ps}$ e h são constantes do material a determinar experimentalmente.

Resta apenas referir que a lei de Swift é mais apropriada para descrever materiais que exibam encruamento isotrópico sem saturação e Voce, no caso dos materiais apresentarem saturação [18].

2.4.2 Leis de Encruamento Cinemático

O modelo cinemático não admite a alteração da forma da curva limite de elasticidade, mas efetua a translação da superfície de cedência, como já foi referido no início da presente secção. Deste modo, é necessário proceder à definição da evolução da superfície resultante do comportamento inelástico do material. Isto ocorre a partir da inclusão do tensor das tensões inversas \mathbf{X} , convencionalmente designado de *back-stress* [31]. As variáveis de encruamento que descrevem o tensor das tensões inversas mais usadas são, à semelhança do encruamento isotrópico, a deformação plástica efetiva ou equivalente e o trabalho plástico total.

Uma superfície de plasticidade genérica regida por uma lei de encruamento cinemático, dependente da deformação plástica, pode então ser formulada da seguinte forma

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p) = \phi(\boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{X}(\bar{\varepsilon}^p) - \sigma_{Y0} = 0. \quad (2.48)$$

Prager, em 1955, propôs uma lei de encruamento cinemático expressa por

$$\dot{\mathbf{X}} = c\dot{\varepsilon}^p, \quad (2.49)$$

na qual c é uma constante do material a ser determinada experimentalmente. De acordo com esta lei a superfície é transladada na direção dos incrementos de deformação plástica. Esta prevê assim um amaciamento com as várias mudanças de trajetória. Ziegler, em

1959, e após constatar que a lei de Prager não apresentava resultados consistentes para estados planos e triaxiais de tensão [18], apresentou uma modificação à lei anterior. Esta é dada por

$$\dot{\mathbf{X}} = (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})\dot{\mu}, \quad (2.50)$$

em que $\dot{\mu}$ é um escalar de proporcionalidade determinado através da condição de consistência. Esta lei postula que a superfície de plasticidade se move no sentido radial definido pelo tensor $\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}$. A diferença entre estes dois modelos pode ser observada na figura 2.9 onde se mostra a direção da evolução do *back-stress* para ambos os critérios.

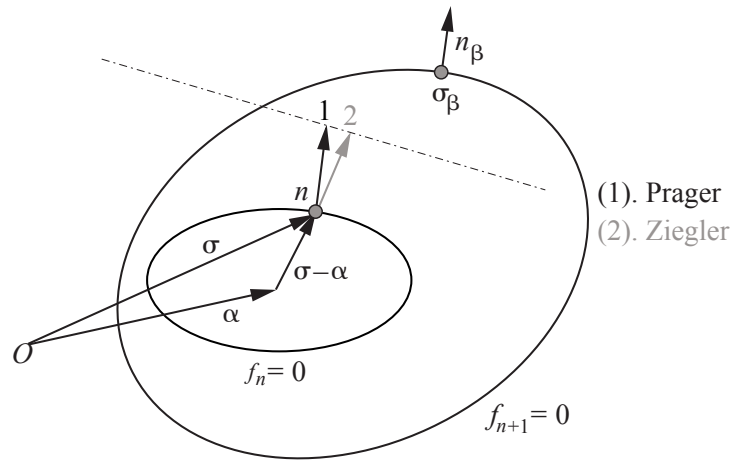


Figura 2.9: Evolução do *back-stress*. Adaptado de [32].

A empregabilidade das leis de encruamento cinemático linear é apenas admitida em processos de deformação quase estáticos, não sendo adequados quando se verifica uma alteração brusca na trajetória de deformação ou uma deformação cíclica. Deste modo, em 1985, Lemaître e Chaboche propuseram uma lei de encruamento cinemático não-linear com saturação [13], dada pela equação

$$\dot{\mathbf{X}} = C_X \left[\frac{\mathbf{X}_{\text{sat}}}{\bar{\sigma}} (\mathbf{S} - \mathbf{X}) - X \right] \dot{\varepsilon}^p, \quad \text{com} \quad \mathbf{X}(0) = 0, \quad (2.51)$$

onde C_X e X_{sat} caracterizam, respetivamente, o valor de saturação da norma do tensor das tensões inversas $\|\mathbf{X}\|$ e a velocidade de aproximação ao valor de saturação. Estes parâmetros do material são determinados experimentalmente. Esta é a lei de encruamento cinemático mais utilizada [18] e revela a tendência para a coaxialidade entre os tensores $\mathbf{S} - \mathbf{X}$ e \mathbf{X} .

2.4.3 Leis de Encruamento Misto

O encruamento misto representa a junção de ambos os tipos de encruamento descritos, como se mostra na figura 2.10. Assim, este resulta numa lei que permite a modelação do comportamento dos materiais com maior generalidade, uma vez que a superfície efetua uma translação e uma expansão em simultâneo.

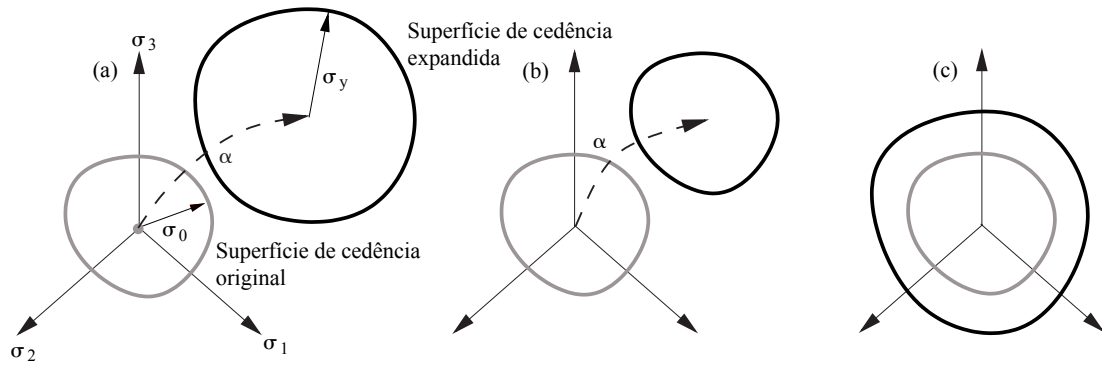


Figura 2.10: Esquema da evolução da superfície de cedência no no espaço de Haig-Westergaard: (a) com encruamento isotrópico e cinemático, (b) apenas com encruamento cinemático, e (c) apenas com encruamento isotrópico.

Uma superfície de plasticidade genérica regida por uma uma lei de encruamento misto, pode então ser formulada da seguinte forma genérica

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = \phi(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}_1)) - \sigma_Y(\boldsymbol{\alpha}_2) = 0, \quad (2.52)$$

onde $\boldsymbol{\alpha}_1$ e $\boldsymbol{\alpha}_2$ são vetores cujas componentes são respetivamente variáveis de encruamento cinemático e isotrópico.

Capítulo 3

Métodos Numéricos

Nos dias de hoje observa-se uma crescente necessidade de resposta por parte da engenharia a problemas cada vez mais complexos. Estes exigem uma resposta que, na sua generalidade, não se encontra ao alcance das ferramentas analíticas, que se tornam demasiado complexas para fornecerem respostas competitivas e temporalmente válidas. Desta forma, surge assim a necessidade de se recorrer aos métodos numéricos de modo a obter resultados a problemas de complexidade crescente.

Este processo inicia-se pela observação do problema real, sobre o qual se retiram inúmeros dados de modo a permitir a correta modelação do mesmo. Com estes dados é então construído o modelo matemático que melhor se aproxima do problema real.

Dependendo da introdução de condições experimentais de modo a poder produzir resultados numéricos que sejam representativos da realidade experimental, as condições experimentais são relevantes e devem ser determinadas de modo a garantir a exatidão da análise.

Recorrendo aos mais variados algoritmos e métodos de análise, os métodos numéricos são capazes de modelar matematicamente os mais variados problemas que se encontram presentes na nossa sociedade. Apesar de não apresentarem soluções exatas, as soluções fornecidas podem ser bastante precisas para uma grande variedade de problemas como previsões meteorológicas, cálculo de trajetórias de voo, previsão de valores de ações no mercado bolsista, análise de riscos ou, com maior aplicabilidade deste trabalho, simulação de processos tecnológicos de deformação de materiais.

Nas mais diversas áreas de aplicabilidade, os resultados dos métodos numéricos necessitam sempre de um tratamento cuidado de modo a perceber e compreender o erro, por mais pequeno que este seja. Só desta forma se pode analisar a fiabilidade do programa de simulação bem como a validade do modelo testado.

Na figura 3.1 pode-se ver um processo geral de análise de um problema através do uso de modelos computacionais, sendo este processo iterativo de análise do resultados e compreensão dos mesmos e das várias partes que os originaram. Requerendo uma validação progressiva e constante estes métodos numéricos são capazes de produzir resultados consideravelmente satisfatórios e fiáveis.

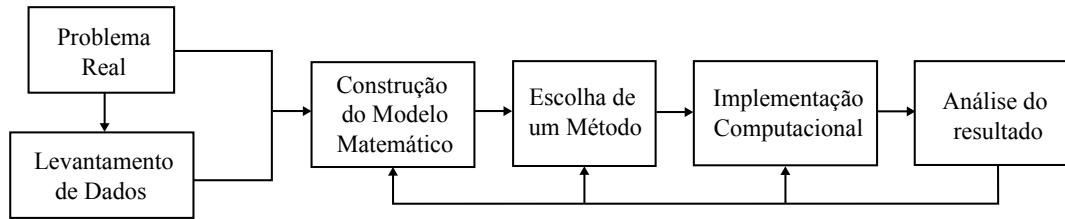


Figura 3.1: Processo de análise por modelação computacional.

Na simulação de processos de deformação de materiais, muitos dos programas comerciais de simulação numérica atuais já deram provas de ter a capacidade para prever com fiabilidade a rotura, o enrugamento e a distribuição de deformações no material. Desta forma, continua a ser uma área de forte expansão, com um rápido crescimento impulsionado por um crescente número de artigos e congressos realizados sobre este tema de investigação. Esta crescente expansão e evolução dos métodos numéricos permite assim atingir velocidades de cálculo cada vez maiores bem como previsão de defeitos com custos computacionais aceitáveis.

Um dos métodos mais importantes é o método dos elementos finitos, que tem mostrado ao longo dos últimos anos grande capacidade e resposta face aos mais diversos problemas de engenharia. Estes necessitam de variáveis capazes de modelar o problema de forma representativa, pode-se então destacar 4 grandes grupos de variáveis, as que definem as propriedades do material, a geometria do componente, as condições do processo e variáveis numéricas utilizadas nos cálculos internos, ou parâmetros de configuração.

3.1 Fundamentos do Método dos Elementos Finitos

A ideia subjacente ao Método dos Elementos Finitos, frequentemente designado de MEF, é a modelação de um problema genérico que envolve meios contínuos, através da análise de partes discretas desses meios, para os quais é possível conhecer ou obter leis constitutivas do seu comportamento [8].

Este método surgiu nos anos sessenta, pela mão de Ray Clough, como resposta à necessidade crescente de resolver problemas cada vez mais complexos, essencialmente na área da aeronáutica e da engenharia civil [33]. Anteriormente, estes problemas implicavam a resolução direta de um sistema de equações diferenciais que os descreviam. Esta resolução era muitas vezes obtida por meio das séries de Fourier. No entanto, este método é bastante complexo, moroso e unicamente aplicável a problemas com geometrias relativamente simples [33].

A resolução de problemas complexos só é possível devido à discretização do espaço de integração em vários elementos finitos independentes da geometria do problema, ilustrada na figura 3.2.

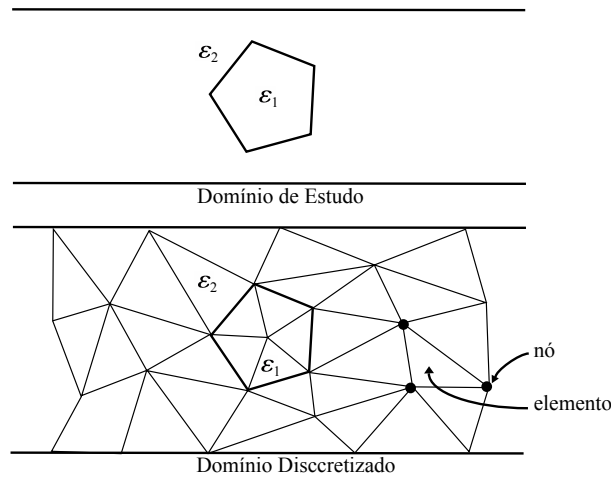


Figura 3.2: Modelo composto por dois materiais, antes e depois da discretização. Adaptado de [34].

Esta característica permite uma implementação computacional, que possibilita a rápida resolução de problemas geometricamente muito distintos, sem que para isso seja necessário resolver novo sistema de equações diferenciais. Isto favorece a rapidez e baixo custo, que hoje é essencial para a realização de qualquer investigação ou desenvolvimento tecnológico principalmente quando os testes experimentais são muito dispendiosos, efetuando-se desta forma, ensaios numéricos a fim de averiguarem se é viável ou não avançarem para os testes experimentais. Apesar disto, e tendo em conta que este método produz soluções aproximadas, quando se recorre à sua utilização, deve-se ter a capacidade de avaliar e majorar os erros que este origina.

Do ponto de vista do utilizador, esta abordagem do problema recorrendo à resolução sequencial e estruturada de vários problemas mais simples que, quando agrupados, originam uma solução do problema global, reside na necessidade de passar do modelo individual para o modelo geral, processo denominado por assemblagem. Este processo combina todas as leis matemáticas que regem cada elemento individualmente uma vez que os vários elementos que constituem o sólido se encontram ligados entre si, pelos nós.

Estes elementos podem ser de vários tipos de acordo com a dimensão a que se trabalhe, como se evidencia na figura 3.3. No caso de problemas bidimensionais, os elementos mais frequentes são quadriláteros e triângulos. Em análises tridimensionais são geralmente hexaedros, tetraedros, ou pentaedros. Assim, e analisando o MEF sob o ponto de vista do utilizador é possível definir três etapas distintas, contudo muito genéricas. Estas encontram-se esquematizadas na figura 3.4 e são vulgarmente designadas como: Pré-processamento, Análise e Pós-processamento.

A fase de pré-processamento está associada à construção do modelo geométrico do sistema a estudar e a definição das condições a que está submetido. Como referido anteriormente, a discretização das regiões em estudo é feita através da divisão do meio contínuo em elementos e, em cada elemento definido, um conjunto de pontos de ligação designados de nós. O deslocamento destes, correspondem aos graus de liberdade do sistema. De seguida, atribuem-se as propriedades físicas e mecânicas de cada componente do modelo. Esta atribuição deve ser feita de uma forma cuidada, pois são determinantes para que o modelo numérico corresponda ou não à realidade.

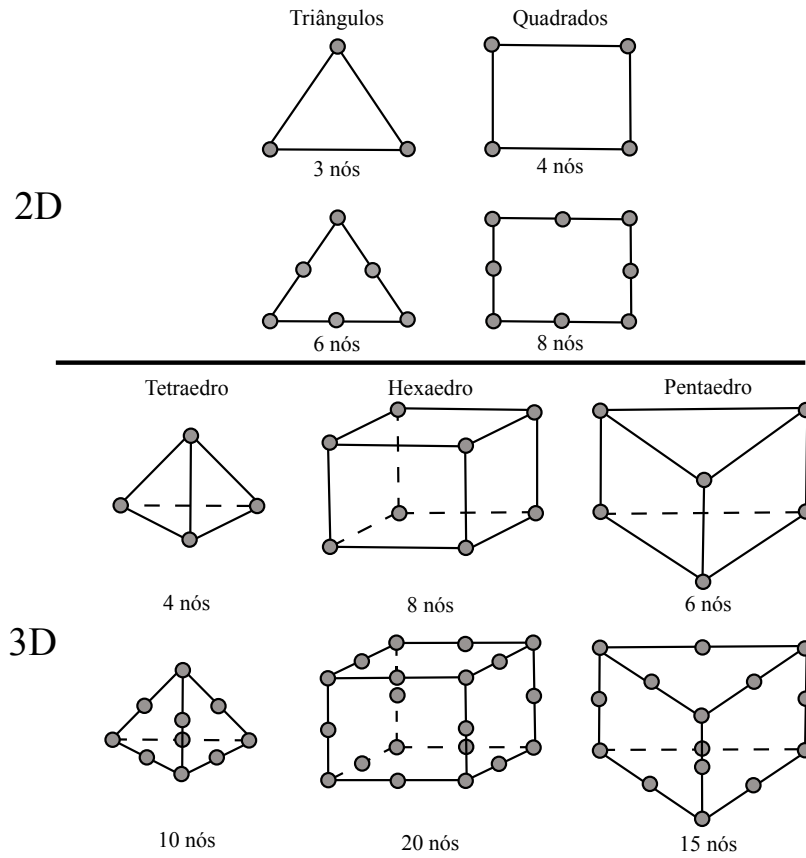


Figura 3.3: Representação bidimensional e tridimensional de variados tipos de elementos usados.

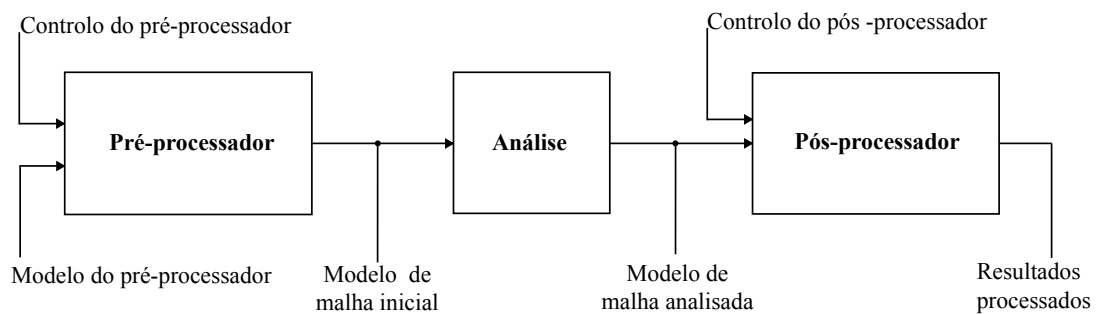


Figura 3.4: Representação esquemática das fases do MEF.

A definição dos modelos de materiais a serem utilizados é muito importante para que se consiga obter resultados razoáveis. Desta forma, a maioria dos programas comerciais contém pré-processadores que incluem inúmeras ferramentas gráficas que facilitam a tarefa de construção do modelo. A qualidade global de uma análise de elementos finitos está fortemente dependente da capacidade do utilizador de transpor o problema para rea-

lidade computacional, visto que é necessário efetuar simplificações e definir estratégias de modelação. Quando as geometrias que se pretendem modelar são de extrema complexidade é comum a utilização de um software especializado na construção de modelos. Estes são denominados por programas CAD¹. Então surge a necessidade dos pré-processadores serem capazes de interpretar e traduzir modelos já previamente modelados. De seguida, são definidas as condições de fronteira (apoios e condições de contorno) e a aplicação de cargas. Só depois se procede à fase de cálculo e pós-processamento.

A fase da análise corresponde à tarefa mais importante, visto que é quando se efetua todo o cálculo numérico. Contudo, sob o ponto de vista do utilizador, esta tarefa corresponde normalmente a uma "caixa negra". Durante esta fase são criados ficheiros com todos os resultados relativos à informação pretendida pelo utilizador de uma forma *user friendly* e recorrendo, na maioria dos casos a representações gráficas destes.

A última fase, o pós-processamento encarrega-se de interpretar os ficheiros anteriores e apresentá-los de forma inteligível e amigável. Tipicamente, os resultados são apresentados sob a forma de mapa de cores, visto que possibilita ao utilizador uma fácil interpretação dos resultados do problema.

3.2 Integração dos Modelos no MEF

Nos programas de simulação por elementos finitos, a formulação do processo de conformação pelas equações e o método de integração utilizado na integração temporal destas equações constituem duas características fundamentais [18].

Se forem consideradas equações de equilíbrio com acelerações nulas, estamos perante uma formulação estática, se pelo contrário, forem ignoradas, estamos perante uma formulação dinâmica.

Quanto ao método de integração temporal, este pode ser implícito, ou explícito. Considerando o intervalo de tempo $[t, t + \Delta t]$, se a integração do modelo constitutivo acontecer no instante t o método de integração presente é explícito [35]. Se por outro lado, ocorrer no instante $t + \Delta t$, então é um método de integração implícito [35]. Este fenómeno pode ser observado na figura 3.5.

Nos métodos de integração implícitos, as equações de equilíbrio são formuladas em torno da configuração final do intervalo de tempo $[t, t + \Delta t]$. Desta forma, o método implícito garante e impõe o equilíbrio da estrutura na configuração de chegada, ou relativamente ao intervalo de tempo, no final do incremento Δt [36].

Durante anos os métodos explícitos, devido aos seus tempos de cálculo mais reduzidos e maior convergência generalizada, eram dominantes e possuíam uma utilização alargada. Com o avanço dos métodos numéricos e uso de elementos finitos mais robustos, aliado a maior capacidade de cálculo, tornou-se possível a resolução eficiente e competitiva de problemas de deformação de grande escala com métodos implícitos [37]. Se é certo que a eficácia numérica é um fator crítico do ponto de vista da aplicação industrial das ferramentas de simulação numérica, a exatidão dos resultados obtidos é, no presente, também fundamental. Neste caso, a solução passa pela utilização de programas implícitos.

¹do inglês, *Computer Aided Design*

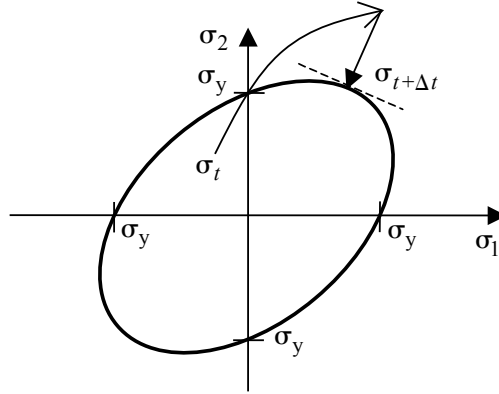


Figura 3.5: Representação esquemática da integração implícita, usando o retorno radial, do critério de von Mises. Adaptado de [10].

A formulação estática do problema tem como base o fato do trabalho realizado pelas forças de inércia ser sensivelmente quatro ordens de grandeza inferior à energia de deformação plástica [38]. Desta forma, estas podem ser desprezadas das equações de equilíbrio. Então, e relativamente a um ponto material aleatório, pode escrever-se:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0. \quad (3.1)$$

Integrando no domínio V e multiplicando por um campo de deslocamentos arbitrário δx_i compatível com as condições de fronteira, obtém-se a partir de 3.1 o princípio dos trabalhos virtuais [39]

$$\int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta x_i dV = 0. \quad (3.2)$$

Aplicando o teorema de Green, pode-se então obter o princípio das potências virtuais na seguinte forma, [40]

$$\int_V \partial \sigma_{ij} \partial x_{i,j} dV - \int_A t_i \delta x_i dA = 0, \quad (3.3)$$

onde σ_{ij} é o tensor das tensões, $x_{i,j}$ é o gradiente dos deslocamentos, x_i é o vetor dos deslocamentos e t_i é o vetor das solicitações externas. V e A são, respetivamente, o volume e a área do esboço no instante t . Linearizando a equação 3.3 no instante t , obtém-se [41]

$$\int_V [d\sigma_{ij} - \sigma_{kj} dx_{i,k} + \sigma_{ij} dx_{k,k}] \delta x_{i,j} dv - \int_A t_i \delta x_i dA = 0. \quad (3.4)$$

O problema da equação 3.4, dá origem à obtenção de um problema não-linear sob a forma

$$\mathcal{R}(\Delta \mathbf{x}) = 0, \quad (3.5)$$

o qual, após discretização pelo MEF, leva à obtenção do sistema de equações algébricas

$$\mathbf{K}(\Delta \mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} = \Delta \mathbf{F} \quad (3.6)$$

onde $\mathbf{K}(\Delta \mathbf{x})$ é a matriz rigidez calculada em função do campo de deslocamentos incrementais, e $\Delta \mathbf{x}$ e $\Delta \mathbf{F}$ são, respetivamente, vetores dos deslocamentos e das forças externas

incrementais, a partir dos quais é possível o cálculo dos tensores das tensões e das deformações.

O problema não pode ser resolvido analiticamente uma vez que este é não linear nos deslocamentos. De modo a usar o método estático implícito, a equação 3.6 deve ser formuladas no instante de tempo $t + \Delta t$ [42]. Adotado este método, e após a formulação, o cálculo do incremento de deslocamentos $\Delta \mathbf{x}$ faz-se pela resolução do problema não-linear da equação 3.5. Este deve então ser reescrito na forma

$${}^{t+\Delta t}\mathcal{R}(\Delta \mathbf{x}) = 0, \quad (3.7)$$

assim como o sistema de equações 3.6 deve também ser reescrito na forma

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}\Delta \mathbf{x} = {}^{t+\Delta t}\Delta \mathbf{F}. \quad (3.8)$$

Sendo este um problema não-linear, uma vez que as grandezas matriciais ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}$ e ${}^{t+\Delta t}\Delta \mathbf{F}$ são elas próprias função da configuração final do incremento de tempo que se pretende determinar, $\Delta \mathbf{x}$, a sua resolução implica a adoção de um método iterativo.

No geral é adotado o método iterativo de Newton-Raphson, segundo o qual se procedem a correções sucessivas até que se verifique a condição de equilíbrio estático da estrutura na configuração final do incremento, ou seja, até se igualarem as forças internas e externas, com a exceção do critério de paragem do algoritmo de Newton-Raphson [43].

Resolvendo o problema formulado pela expressão 3.7 pelo método de Newton-Raphson, pode escrever-se

$${}^{t+\Delta t}\mathcal{R}(\Delta \mathbf{x}^{(i)}) = {}^{t+\Delta t}\mathcal{R}(\Delta \mathbf{x}^{(i-1)}) + \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\mathcal{R}(\Delta \mathbf{x}^{(i-1)})}{\partial \Delta \mathbf{x}^{(i)}} (\Delta \mathbf{x}^{(i)} - \Delta \mathbf{x}^{(i-1)}) + \dots = 0, \quad (3.9)$$

obtendo um sistema de equações lineares de incógnita $d\mathbf{x}^{(i)} = \Delta \mathbf{x}^{(i)} - \Delta \mathbf{x}^{(i-1)}$, o qual se pode reescrever como

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)}d\mathbf{x}^{(i)} = -{}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(i-1)}, \quad (3.10)$$

em que ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(i-1)}$ é o vetor das forças não equilibradas na iteração de equilíbrio $i - 1$, dado por

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)}\Delta \mathbf{x}^{(i-1)} - {}^{t+\Delta t}\Delta \mathbf{F}^{(i-1)} \quad (3.11)$$

e o vetor $d\mathbf{x}^{(i)}$ é a correção da iteração i do vetor incremento de deslocamentos $\Delta \mathbf{x}$, determinado iterativamente ($i = 1, 2, \dots$), tal que

$$\Delta \mathbf{x}^{(i)} = \Delta \mathbf{x}^{(i-1)} + d\mathbf{x}^{(i)}, \quad (3.12)$$

até que o critério de convergência seja satisfeito.

O tamanho de cada incremento pode ser muito grande, em teoria, mas na prática, este encontra-se limitado pelas não-linearidades associadas ao problema, como por exemplo, a lei de comportamento do material. Sendo então atribuídas normalmente duas dificuldades ao método estático implícito: o tempo de cálculo cresce de forma quase quadrática com o número de graus de liberdade a simular e a quantidade de memória para a resolução do sistema de equações lineares é muito superior aos métodos explícitos [44].

Devido às não-linearidades e ao tamanho demasiado grande do incremento é também associado a este método uma possível falta de convergência para a solução. A resolução

deste problema, na sua generalidade, passa pela redução do tamanho do incremento. Isto pode originar a obtenção de uma solução, ou indicação de uma solução errada, uma vez que este método permite a obtenção de uma solução errada.

Menciona-se ainda que o método estático implícito, por envolver um procedimento de equilíbrio estático, apresenta-se muito estável, e em simultâneo, pode torna-se difícil simular com este tipo de programas processos de deformação que envolvam instabilidades materiais.

O presente trabalho enquadra-se na implementação e definição de modelos material que, de uma forma genérica, são representados por \mathbf{K} . Esta matriz é calculada em função do campo de deslocamentos incrementais e permite a partir destes a obtenção dos tensores das tensões e das deformações.

3.3 Programa Abaqus

O programa para o qual irão ser implementados os modelos material sob a forma de subrotinas de utilizador geradas automaticamente através de uma ferramenta numérica desenvolvida, é o Abaqus. Este é um programa bastante versátil que possibilita a sua utilização em diversas áreas da engenharia, como é o caso do sector automóvel e aeroespacial, em investigações académicas e de desenvolvimento tecnológico.

Abaqus é um programa de utilização comercial e encontra-se dividido em duas partes: os módulos gráficos (Abaqus/CAE² e Abaqus/Viewer) e os módulos de análise (Abaqus/Standard e Abaqus/Explicit) [45].

O módulo gráfico é constituído por um módulo de pré-processamento CAE³ onde o utilizador define toda a estratégia da simulação, desde da geometria à integração temporal, bem como a discretização do problema. Esta definição recorre a uma interface gráfica, o ficheiro de entrada (ASCII) e um módulo de pós-processamento. Assim, o utilizador define a geometria da estrutura, atribui as características dos materiais, aplica as cargas e condições de fronteira do problema bem como as interações/atrito entre os vários componentes em análise, define o número de etapas para a realização da análise e a sua natureza (linear ou não-linear) e faz a discretização da estrutura em elementos finitos [46]. Em resumo, o Abaqus/CAE, permite definir os vários aspetos necessários para definir todo o problema em análise e no final gerar um ficheiro de código ASCII de extensão inp que o motor de cálculo processa.

Dependendo do tipo de integração temporal que se tenha escolhido na fase do pré-processamento, para uma análise através do esquema tradicional de integração quasi-estática implícita, utiliza-se o módulo de análise Abaqus/Standard. Para a resolução de problemas não-lineares dinâmicos, tais como o impacto balístico, que utilizam um esquema de integração explícita, utiliza-se o módulo de análise Abaqus/Explicit. Independentemente da integração temporal escolhida, o motor de cálculo cria vários ficheiros de *output* no decorrer da simulação, entre os quais o ficheiro dos resultados, das mensagens de erro ou avisos, e da descrição dos vários incrementos temporais considerados pelo motor de cálculo. O módulo de análise usado neste trabalho foi o Abaqus/Standard uma vez que a formulação usada por este módulo é a mais adequada para a análise dos processos de tecnológicos de conformação de metais.

²do inglês, *Complete Abaqus Environment*.

³do inglês, *Computer-Aided Engineering*.

O pós-processamento é realizado através do Abaqus/Viewer que opera sobre o ficheiro de resultados e permite ao utilizador visualizar e interpretar os resultados obtidos [47].

O Abaqus possui uma vasta biblioteca de requisitos da análise passíveis de serem usadas, tais como diversos tipos de elementos, diversos modelos constitutivos do material, modos de contacto, *etc.* Adicionalmente permite o uso de subrotinas de utilizador⁴, escritas em linguagem Fortran, para a definição de requisitos mais específicos do material. Neste trabalho foram geradas, pelo software desenvolvido, várias UMAT's⁵, sendo estas as subrotinas de utilizador usadas pelo Abaqus na definição de modelos constitutivos do material.

O programa Abaqus possui também uma biblioteca com um vasto número de tipos de elementos, usados na discretização de meios contínuos. Neste trabalho foram considerados elementos sólidos tri-lineares hexaédricos de 8 nós. O Abaqus permite o uso de métodos de integração numérica distintos para cada elemento. A escolha do método de integração afeta quer o tempo de cálculo, quer os resultados finais obtidos [47].

Com isto, graças às suas grandes potencialidades, o Abaqus permite o estudo numérico de quase todos os tipos de problemas, envolvendo geometrias complexas, interações entre diversos materiais, grandes deformações, *etc.*

3.4 Subrotinas de Utilizador (UMAT)

Por vezes, os modelos de material, tipos de condições de contorno e formulações implementadas nos pacotes de elementos finitos (sejam estes comerciais ou não) não atendem às necessidades do utilizador. Apresentando assim limitações ao utilizador no que toca à correta definição do comportamento do material [48]. Estas limitações são contornadas na sua generalidade pela maioria dos programas comerciais, como é o caso do Abaqus, permitindo um maior controlo das etapas do processo de análise do problema através de subrotinas de utilizador. No Abaqus, diversos tipos de subrotinas podem ser implementadas pelo utilizador [47]. As subrotinas UMAT, que constituem um dos grandes objetivos deste trabalho, possibilitam uma correta definição de um modelo constitutivo de qualquer tipo de material.

A subrotina UMAT deve ser implementada em *Fortran*, compilada e associada ao executável principal do Abaqus. Esta é então chamada em cada ponto de integração de cada elemento, em todos os incrementos de carga e iterações. Estas subrotinas possuem como principais variáveis de entrada o estado de tensão a que o ponto de integração está sujeito no início do incremento, e o incremento de deformação total, sendo o estado de tensão no final do incremento e o módulo elastoplástico as variáveis de saída. O utilizador tem assim a possibilidade de definir o comportamento mecânico do ponto material ao longo do incremento, utilizando o modelo constitutivo pretendido. A figura 3.6 esquematiza o processo de análise de um problema utilizando subrotinas UMAT.

Em cada incremento do processo, em cada ponto de integração, são enviadas para a subrotina UMAT informações referentes às propriedades do material, ao tensor das deformações, aos incrementos de deformação e aos valores das variáveis de estado. A partir desses dados, é realizada uma previsão do tensor constitutivo e do estado de tensões. Após ser efetuada uma correção do estado das tensões, atualiza-se a matriz constitutiva

⁴do inglês, *User Subroutines*.

⁵*User Material*.

e o estado de tensão no ponto. São também fornecidos à saída da subrotina a matriz constitutiva atualizada, o tensor das tensões e o tensor de deformação elástica e plástica.

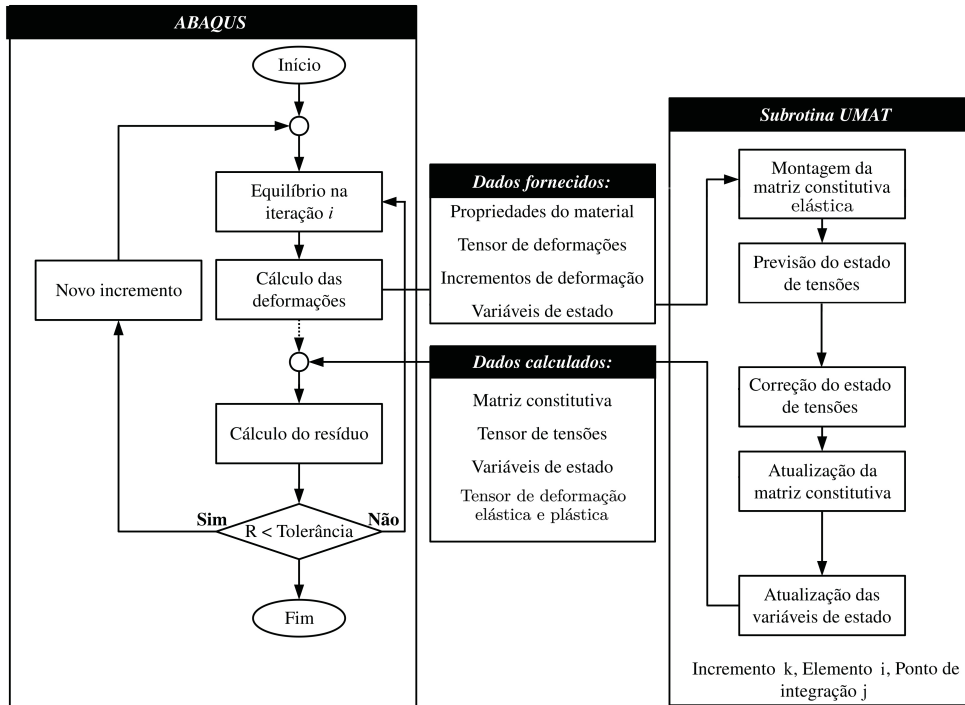


Figura 3.6: Processo de análise utilizando uma subrotina UMAT. Adaptado de [49].

3.5 Cálculo Algébrico Simbólico

Para obter soluções em problemas matemáticos, dois tipos de abordagem podem ser tomadas: numérica ou simbólica. Durante um longo período de tempo a aproximação numérica tinha a vantagem de ser capaz de resolver uma grande parte dos problemas. Contudo, recentemente, a aproximação simbólica tem ganho cada vez mais reconhecimento como uma ferramenta viável para resolver problemas de engenharia de grande escala. A solução simbólica de problemas matemáticos envolve a manipulação simbólica de objetos como fórmulas lógicas ou algébricas, regras ou programas.

Ao contrário das aproximações numéricas, o objetivo da manipulação simbólica é a exatidão. Assim, normalmente a solução é caracterizada por ser uma fração ou uma fórmula que representa a solução. Desta forma, o cálculo simbólico pode ser usado nos mais variados problemas, dos quais se destacam [50]:

- Problemas onde é necessária a solução exata;
- Estudo de problemas quando apenas informação parcial está disponível e a fórmula obtida através do cálculo simbólico representa a simplificação do modelo matemático através da aplicação dos conhecimentos existentes sobre o problema em questão;
- Em simulações, onde a fórmula matemática é parametrizada e utilizada para o estudo de uma vasta gama de soluções, dependendo da escolha dos parâmetros.

A computação simbólica encontra-se menos evoluída relativamente à computação numérica, principalmente devido à insuficiência de recursos computacionais disponíveis ao longo do tempo, tal como, por exemplo, a memória e capacidade de processamento dos computadores [51]. O contínuo crescimento do poder computacional levou a um crescimento do cálculo simbólico e, como resultado, ao desenvolvimento de sistemas sofisticados de CAS⁶. Estes sistemas permitem ao utilizador uma maior concentração nos problemas e no estudo das suas próprias formulações matemáticas ao invés de passarem grandes períodos de tempo a transformar os problemas numa forma passível de ser resolvida numericamente. Como efeito, a computação simbólica encontra-se aplicada a um diverso número de áreas como a matemática, a física, a engenharia e a economia. Esta tem-se tornado uma importante base para aplicações avançadas em áreas da ciência da computação, tais como desenho assistido por computador ou de desenvolvimento de software, raciocínio e modelação geométrica ou programação de robôs, *etc.* [50].

Enquanto a maioria dos programas CAS tem como objetivo principal a manipulação de fórmulas, muitas aplicações estenderam as suas capacidades e, atualmente, os mais robustos oferecem outras funcionalidades como aplicações gráficas ou simulações integradas, dando ao utilizador uma maior compreensão da solução do problema. Além disso, *software* moderno é capaz de resolver problemas bastante grandes e complexos, que normalmente são utilizados de um modo interativo, mas também podem ser programados para efetuar múltiplas operações semelhantes em vários problemas diferentes.

À medida que as aplicações CAS se tornaram capazes de resolver problemas maiores, estes seguiram um caminho já adotado pelo programa numérico, de computação sequencial para computação paralela e sucessivamente *cloud computing*. Desta forma, este tipo de computação tornou-se um potencial acelerador nas pesquisas e descobertas científicas.

3.5.1 Programação em Ambiente MatLab

O MatLab⁷ é um programa interativo que se destina a cálculos numéricos e gráficos científicos. O seu ponto forte reside na manipulação e cálculo matricial como, por exemplo, resolução de sistema lineares. Além disto, muitas funções especializadas já se encontram internamente implementadas, de modo que, em muitos casos, basta utilizar os comandos disponíveis nas *toolbox* disponíveis.

Outros dois pontos fortes do MatLab são a criação e manipulação de gráficos científicos e a possibilidade de extensão das funções existentes através do uso de outras *toolboxes* ou através da criação destas. Em geral, e com a evolução natural do programador, apesar de ser uma linguagem de alto nível, o MatLab tem a capacidade de implementar novas funcionalidades, podendo, em último caso apresentar uma solução superior a programas específicos.

Sendo uma linguagem de alto nível, uma característica interessante é que o MatLab é de aprendizagem mais fácil do que as linguagens de programação convencionais, tais como C e Fortran. Porém, quanto maiores e mais complexas forem as rotinas e funções da biblioteca, menor é a sua performance quando comparada a uma rotina equivalente em C e/ou Fortran.

A *toolbox* de manipulação simbólica⁸ incorpora computação simbólica no ambiente

⁶do inglês, *Computer Algebra Systems*.

⁷Do inglês, *Matrix Laboratory*.

⁸do inglês, *Symbolic Math Toolbox*.

numérico do MatLab, complementando assim as componentes numéricas e gráficas do programa. Esta inclui funções de cálculo, como derivação, integração, obtenção de limites, somatórios e a série de Taylor, mas também funções de álgebra linear como inversos ou determinantes. A *toolbox* de computação simbólica é capaz também de efetuar simplificações nas expressões, resolver equações algébricas e diferenciais, bem como transformadas, como a de Laplace. A *Symbolic Math Toolbox* possui mais de 100 funções nativas que permitem acesso direto ao *kernel* do Maple, usando apenas a sintaxe e estilo de linguagem que é natural ao MatLab.

De modo a criar ao utilizador uma utilização mais *user friendly*, o MatLab possui uma ferramenta de criação de interfaces gráficas, o GUI⁹. Esta tem a capacidade de criar uma aplicação totalmente autónoma e capaz de controlar toda uma variedade de controlos, como barras de menus, botões ou barras de ferramentas. Através de rotinas em *callback* este tipo de aplicações consegue controlar a tarefa por completo através do *layout* disponível para o utilizador.

3.6 Criação Automática de subrotinas de Utilizador (UMAT)

Desde os anos 70 que se tem vindo a desenvolver e implementar programas que criam, de forma automática, código para programas pelo método dos elementos finitos. Este tipo de programa, como o Finger¹⁰, apresentado por Wang [52], SFEAS¹¹ por Leff e Yun [53] ou SGEM¹² por Nagabhushanam *et al.* [54] são usados para derivar as matrizes e vetores necessários no MEF. Estes proporcionam, na sua generalidade, uma integração temporal e espacial dos modelos e são normalmente acompanhados de um módulo automático capaz de gerar código, que combina as capacidades da computação simbólica e dos métodos numéricos de modo a obter código compacto e eficiente.

Estes programas têm uma desvantagem que se prende com o crescimento quase incontroável das expressões, o que torna a criação automática de código menos eficiente do que seria de esperar [55]. Desta forma, e combinando um sistema algébrico denominado de *Mathematica* com algoritmos de diferenciação automática, Jože Korelc [56] apresenta assim SMS¹³. Esta biblioteca otimiza as expressões introduzidas pelo utilizador de modo a poder corrigir e aliviar o problema do programa, o crescimento das expressões.

Do mesmo autor, surge em 2009 [57] um conjunto de bibliotecas, em ambiente *Mathematica*, chamado AceGen que é usado na derivação automática de fórmulas necessárias em processos numéricos. Estas bibliotecas vêm, desta forma, corrigir os desvios no comportamento de expressões derivadas, tanto no espaço como no tempo. O AceGen é capaz de interagir com múltiplas linguagens como o MatLab, mas também é capaz de compilar de forma compacta e otimizada código em Fortran ou C. Este possui também uma variedade de módulos de criação automática de interfaces com os ambientes numéricos onde o código pode ser implementado, dos quais se salientam o *FEAP*[©], o *ELFEN*[©] e o Abaqus, que são ambientes comerciais de elementos finitos escritos em Fortran.

⁹do inglês, *Graphical User Interface*

¹⁰do inglês, *Finite Element Code Generator*.

¹¹do inglês, *Symbolic Finite Element Analysis System*.

¹²do inglês, *Symbolic Generation of Elemental Matrices for Finite Element Analysis*.

¹³do inglês, *Symbolic Mechanics System*.

Em [58, 59] pode-se encontrar uma secção sobre a criação automática de subrotinas de utilizador em ambiente Mathematica, com aplicação à análise do crescimento de tecidos moles. Nestes artigos é dado a conhecer a implementação específica de subrotinas em materiais hiperelásticos incompressíveis através do módulo Mathematica UMAT, criado à semelhança do presente trabalho através de computação simbólica e criação automática de código Fortran.

Uma vez que os programas até então desenvolvidos não focam a sua objetividade na implementação temporal de modelos constitutivos de material, pode-se afirmar que o objetivo do presente trabalho permanece assim válido.

Parte II

Metodologia e Implementação

Capítulo 4

Metodologia de Implementação de Modelos Elastoplásticos em Programas MEF

A implementação de modelos constitutivos elastoplásticos em programas do MEF pode ser efetivada de múltiplas maneiras, seja de forma analítica ou através de cálculo simbólico. A metodologia adotada durante essa implementação é crucial na obtenção de resultados sólidos e coerentes qualquer que seja o modelo constitutivo implementado.

No presente trabalho desenvolveu-se uma metodologia abrangente que permite a criação de bases sólidas para uma correta implementação dos mais variados modelos constitutivos passíveis de ser introduzidos na ferramenta, pelo utilizador. Esta é apresentada de forma generalista podendo ser utilizada através de cálculo analítico ou através de cálculo simbólico. Integrando na ferramenta desenvolvida os benefícios de ambos, desenvolveu-se uma implementação mista, na qual se definem diretamente algumas expressões e se obtêm as restantes recorrendo ao cálculo simbólico.

Por uma questão de simplicidade e facilidade de compreensão por parte do leitor, a metodologia adotada nesta dissertação irá ser apresentada para critérios e leis de encruamento mais simples, tais como o critério de cedência de von Mises e a lei de encruamento cinemático de Ziegler. Não obstante, não se verifica qualquer perda de generalidade nem rigor físico da metodologia apresentada de seguida.

4.1 Relação Tensão Deformação

Para um material linear elástico e isotrópico, a relação tensão-deformação respeita a lei de Hooke, descrita na equação 2.1, ou na sua forma tensorial,

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

4.1.1 Decomposição nas Componentes Volumétricas e Desviadoras

De uma forma alternativa podem-se representar as leis que regem a relação tensão-deformação através da sua decomposição nas suas componentes volumétricas, ou médias, e nas componentes desviadoras. Assim, o tensor das tensões toma a forma,

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_m \mathbf{I} + \mathbf{s} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_m \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

onde a tensão desviadora é descrita por \mathbf{s} , a decomposição das deformações é então dada por,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_m \mathbf{I} + \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon_m & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} - \varepsilon_m & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} - \varepsilon_m \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

onde a componente desviadora das deformações é dada por \mathbf{e} . As componentes volumétricas que surgem em 4.2 e 4.3 são então obtidas por

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad \text{e por} \quad \varepsilon_m = \frac{1}{3}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}). \quad (4.4)$$

As leis tensão-deformação são então dadas por [60]

$$\mathbf{s} = G\mathbf{e}, \quad (4.5)$$

e por

$$\sigma_m = 3k\varepsilon_m, \quad (4.6)$$

onde o módulo de corte G e o módulo de compressibilidade k , encontram-se relacionados com E e ν através de

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{e} \quad k = \frac{E}{3(1-2\nu)}.$$

4.2 Plasticidade de von Mises em Três Dimensões

Observando um caso generalista tridimensional, o critério de cedência de von Mises é então dado por

$$f = \bar{\sigma} - \sigma_0 = \sqrt{3}\mathbf{J}_2^{1/2} - \sigma_0 = \sqrt{3/2}(\mathbf{s} : \mathbf{s})^{1/2} - \sigma_0 \quad (4.7)$$

onde

$$\mathbf{s} = [s_x \quad s_y \quad s_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}]^T \quad (4.8)$$

são as tensões desviadoras definidas anteriormente. Desta forma, este critério pode então ser representado no espaço das tensões principais como se pode ver na figura 4.1. Nesta encontra-se representada a superfície de cedência, bem como o tensor das tensões $\boldsymbol{\sigma}$ e as suas respetivas componentes, a componente volumétrica (sobre o eixo $\mathbf{i} = [1 \quad 1 \quad 1]^T$) e a componente desviadora \mathbf{s} .

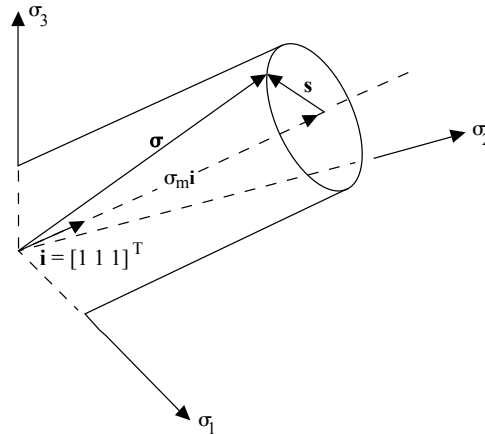


Figura 4.1: Critério de von Mises no espaço tridimensional das tensões principais. Adaptado de [60].

A partir da equação 4.7 pode-se concluir que o raio do cilindro representado na figura 4.1 é distintamente $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0$. Deste modo, e tendo em consideração que, $\dot{\epsilon}_y^p = \dot{\epsilon}_z^p = -\frac{1}{2}\dot{\epsilon}_x^p$, é passível de se afirmar que, a taxa da deformação plástica equivalente surge na forma,

$$\dot{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[(\dot{\epsilon}_x^p)^2 + (\dot{\epsilon}_y^p)^2 + (\dot{\epsilon}_z^p)^2 + \frac{1}{2} ((\dot{\gamma}_{xy}^p)^2 + (\dot{\gamma}_{yz}^p)^2 + (\dot{\gamma}_{xz}^p)^2) \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\dot{\mathbf{e}}^p : \dot{\mathbf{e}}^p)^{1/2}, \quad (4.9)$$

onde $\dot{\mathbf{e}}^p$ é a componente desviadora das deformações plásticas.

O critério de plasticidade e a lei de encruamento definem, respetivamente, a superfície de cedência e a sua evolução ao longo da deformação plástica, todavia não contêm quaisquer informações acerca da evolução da deformação plástica. Estas informações são fornecidas pela lei de plasticidade, que define os incrementos e as direções da deformação plástica em função do estado de tensão e dos incrementos de tensão [10].

Segundo a lei de plasticidade os incrementos de deformação plástica, $\dot{\epsilon}^p$, são proporcionais ao gradiente do potencial plástico ϕ em relação às componentes do tensor das tensões, $\boldsymbol{\sigma}$, ou seja

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (4.10)$$

em que λ é um escalar denominado de multiplicador plástico, sendo positivo na ocorrência de deformação plástica, e cujo objetivo é ajustar o tamanho dos incrementos plásticos. O potencial plástico ϕ é uma função escalar do tensor das tensões, cuja descrição é similar à descrição da superfície de plasticidade, f .

Através da equação 4.10 conclui-se que a direção da deformação plástica é ortogonal ao potencial plástico. Conforme descrito em [6], Spitzig *et al.* observou experimentalmente uma ligeira dependência da tensão hidrostática no comportamento plástico de alguns materiais metálicos. Esta dependência significa que a superfície definida pelo potencial plástico é distinta da superfície de plasticidade, ou seja, observaria-se que $\phi \neq f$ falando-se de lei de plasticidade não-associativa, como se mostra na figura 4.2.

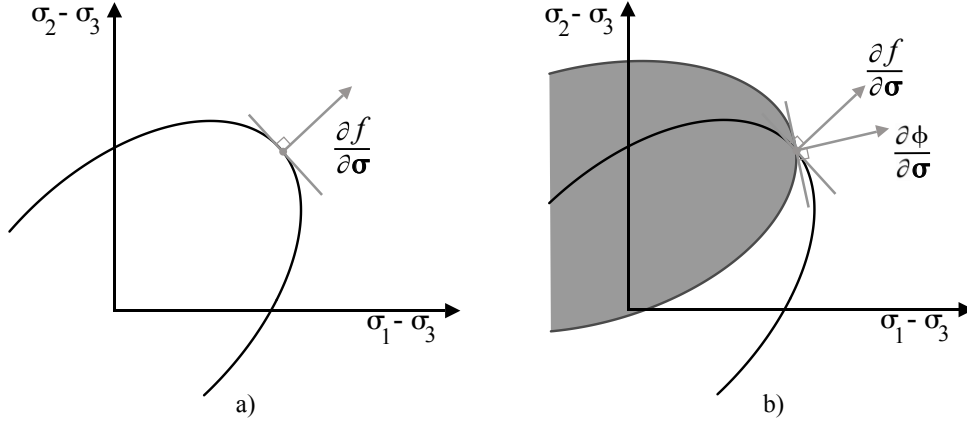


Figura 4.2: Formas de escoamento: a) associativo; b) não-associativo. Adaptado de [25].

No entanto, uma vez que a diferença entre a normal à superfície definida pelo potencial plástico e a normal à superfície de plasticidade é consideravelmente reduzida, pode então ser desprezada, considerando-se a lei de plasticidade associativa $\phi \equiv f$ para materiais metálicos caracterizados por baixa porosidade [61]. Considera-se também que o comportamento plástico destes é independente da tensão hidrostática [62].

A lei de plasticidade associada considera que os incrementos de deformação plástica são ortogonais à superfície de plasticidade, sendo por isso usualmente denominada de lei da normalidade. Esta é então expressa por

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (4.11)$$

A figura 4.3 demonstra o significado da lei da normalidade, estando representados geometricamente, no espaço $(\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 - \sigma_3)$, uma superfície de plasticidade genérica e o incremento infinitesimal de deformação plástica normal a esta, para um dado estado de tensão e incremento infinitesimal de tensão.

Diferenciando a equação 4.7, tem-se na forma tensorial

$$\mathbf{a} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{3}{2\bar{\sigma}} \mathbf{s} \quad (4.12)$$

e, tendo em conta que $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{a}$, através da definição de deformação plástica equivalente descrita na equação 4.9, e da lei de plasticidade associada, equação 4.11 obtêm-se a seguinte expressão para os incrementos infinitesimais de deformação plástica equivalente

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\lambda} (\mathbf{a} : \mathbf{a})^{1/2} = \dot{\lambda}. \quad (4.13)$$

A definição destas variáveis enquadra-se como uma introdução ao algoritmo de retorno radial com integração implícita.

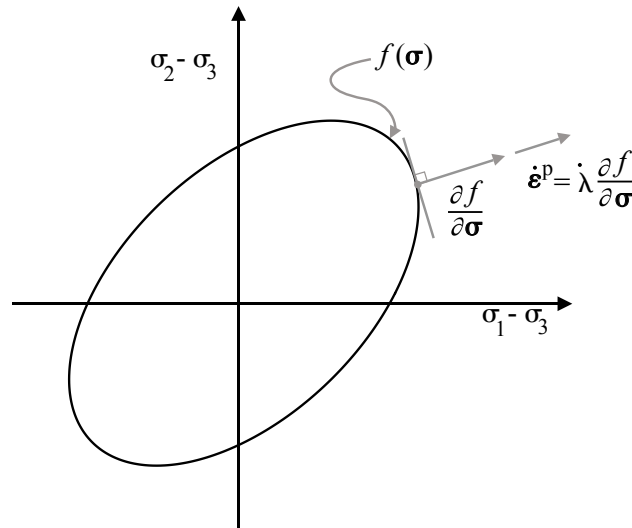


Figura 4.3: Representação geométrica de uma superfície de plasticidade genérica e do incremento infinitesimal de deformação plástica normal a esta. Adaptado de [22].

4.3 Integração Implícita da Lei de Comportamento Elastoplástico

A integração pseudotemporal da lei de comportamento elastoplástico pode ser efetuada recorrendo a vários métodos baseados em um ou mais passos de tempo. No presente trabalho, procede-se à integração pseudotemporal do problema elastoplástico recorrendo a um dos métodos baseados num só passo de tempo.

Com uma abordagem genérica, é possível agrupar os métodos de integração segundo o seu tipo de abordagem, estes são designados de *forward-Euler* e *backward-Euler*.

O método *forward-Euler* considera o estado de tensão conhecido, estado este obtido na iteração anterior, como referência para a determinação da direção de deformação plástica. Este tipo de consideração só é válida para incrementos de deformação muito pequenos. Este método não assegura a consistência incremental nem a satisfação da condição de consistência do novo estado de tensão estimado ou o novo estado de tensão pode não se situar sobre a superfície de plasticidade. O método *forward-Euler* [63], encontra-se assim esquematizado na figura 4.4.

A diferença existente entre o estado de tensão estimado, que não se encontra sobre a superfície de plasticidade, e o estado de tensão que se encontra sobre esta deve ser corrigida, para isto recorre-se à subincrementação, que consiste em dividir a deformação total a corrigir em várias parcelas, e realizar a correção plástica parcela a parcela, atualizando a direção de deformação plástica após cada sub-incremento.

O método *backward-Euler*, sendo um processo iterativo, utiliza como referência para a determinação da direção da deformação plástica o estado de tensão referente ao final do incremento, estado este que ainda é desconhecido. Garantindo que o estado de tensão final se situa sobre a superfície de plasticidade este método assegura consistência incremental, obtendo-se, desta forma, uma melhor precisão mesmo para grandes incrementos

de deformação. No entanto, a sua formulação é mais complexa por envolver as segundas derivadas da função de cedência, de difícil determinação para a generalidade dos critérios de plasticidade anisotrópicos.

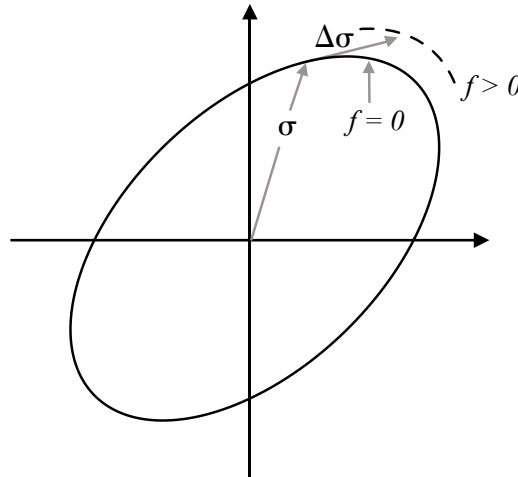


Figura 4.4: Potencial de acumulação de erro com o método *forward-Euler*. Adaptado de [60].

A cada iteração de uma linearização incremental e iterativa de um problema não-linear, um incremento de carga ΔF_{ext} é adicionado, sendo então obtidos os respetivos incrementos de deslocamentos, recorrendo ao cálculo da matriz rigidez \mathbf{C} . Desta forma, e para problemas não-lineares surge um vetor de forças residuais devido à relação não-linear entre tensões e deformações.

Após isto, o objetivo é a atualização das tensões em cada ponto de integração de Gauss. O problema desta análise elastoplástica consiste no facto de, embora se saiba os incrementos de deformação total, não se conhecem à partida os incrementos de deformação elástica ou plástica. Uma vez que a parte elástica dos incrementos de deformação total é desconhecida, também os incrementos de tensão correspondentes aos incrementos de deformação são desconhecidos. Este facto resulta na necessidade de se realizar a integração da lei constitutiva, devido ao facto do módulo elastoplástico ser função da deformação plástica.

Sendo este um problema iterativo por si só, os algoritmos mais conhecidos para a sua resolução são denominados de algoritmos de retorno por previsão elástica - correção plástica. Estes algoritmos são essencialmente constituídos por duas etapas distintas, uma etapa de previsão e uma de correção.

Na primeira etapa, a etapa de previsão, os incrementos de deformação são considerados totalmente elásticos, supondo assim que não ocorreu plasticidade. Deste modo, através da lei de Hooke, é possível determinar os incrementos de tensão e calcular o novo estado de tensão, designado por *trial stress*, *predictor* ou *guess stress*, como sendo inteiramente elástico.

Tendo sido determinado o novo estado de tensão, é necessário verificar se o critério de plasticidade é respeitado. Por outro lado, caso o novo estado de tensão se situe no

interior da superfície de plasticidade, a previsão inicial está correta e a partir deste estado de tensão é adicionado um novo incremento de carga.

Por outro lado, no caso do novo estado de tensão se situar no exterior da superfície de plasticidade, origina-se uma situação fisicamente impossível que não respeita o critério de plasticidade. Como tal, é necessário recorrer à etapa de correção, sendo evidente que ocorreu plastificação no ponto de integração considerado ao longo incremento de carga. Nesta etapa, de modo a assegurar a condição de consistência, é aplicada a lei de plasticidade ao novo estado de tensão para permitir o seu retorno à superfície de plasticidade. A principal diferença entre os algoritmos de integração deste tipo consiste no modo como é realizado o retorno à superfície de plasticidade.

4.3.1 Método *Backward-Euler* (Método Implícito)

O método *backward-Euler* é baseado na equação

$$\sigma_C = \sigma_B - \Delta\lambda \mathbf{Ca}_C, \quad (4.14)$$

a qual é iniciada com uma estimativa para σ_C . Esta estimativa pode ser obtida a partir do cálculo de

$$\Delta\sigma = \mathbf{C}\Delta\varepsilon - \Delta\lambda \mathbf{Ca}. \quad (4.15)$$

Geralmente esta estimativa inicial não vai satisfazer o critério de cedência e iterações posteriores irão ser necessárias devido à normal existente na estimativa B não igualar a normal final no ponto D, como se mostra na figura 4.5.

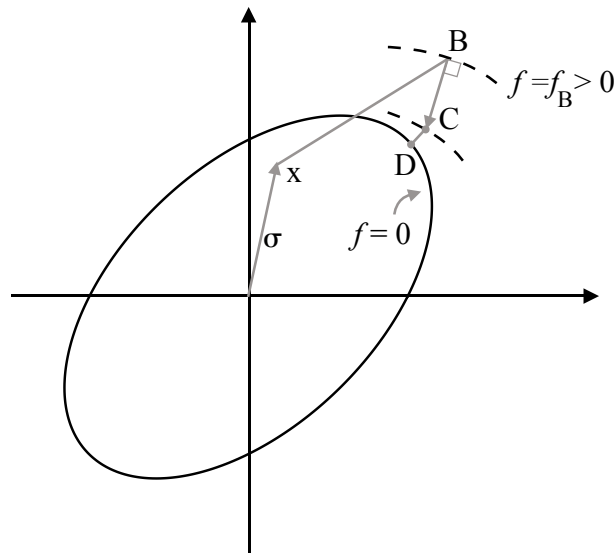


Figura 4.5: Previsão alternativa com posterior correção. Adaptado de [60].

De modo a poder criar um ciclo iterativo, é criado um vetor de resíduo, \mathbf{r} , que é utilizado para representar a diferença entre a tensão atual e a tensão de *backward-Euler*.

O vetor \mathbf{r} é dado por

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\sigma} - (\boldsymbol{\sigma}_B - \Delta\lambda\mathbf{Ca}_C), \quad (4.16)$$

e são realizadas várias iterações de modo a reduzir o seu valor até este atingir um valor residual, enquanto isto, e no fim do ciclo iterativo, deve verificar-se que o critério de cedência $f = 0$.

De notar que para o caso particular de von Mises, a equação 4.16, devido à igualdade $\mathbf{Ca} = \frac{3G}{\bar{\sigma}}\mathbf{s}$ pode tomar a forma

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\sigma} - \left(\boldsymbol{\sigma}_B - \Delta\lambda \frac{3G}{\bar{\sigma}_C} \mathbf{s}_C \right). \quad (4.17)$$

Com a tensão tentativa elástica $\boldsymbol{\sigma}_B$ mantida fixa, uma expansão de Taylor pode então ser aplicada à equação 4.16 de modo a produzir a expressão do novo resíduo, \mathbf{r}_n ,

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_o + \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\lambda} \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (4.18)$$

onde $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ é a taxa de variação de $\boldsymbol{\sigma}$ e $\dot{\lambda}$ é a taxa de variação de $\Delta\lambda$ e o índice n significa “new” e o índice o “old”. Dando a \mathbf{r}_n o valor de zero, obtém-se então

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = - \left(\mathbf{I} + \Delta\lambda \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^{-1} (\mathbf{r}_o + \dot{\lambda} \mathbf{Ca}) = -\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{r}_o - \dot{\lambda} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Ca}. \quad (4.19)$$

A aplicação de uma série de Taylor truncada na função de cedência origina

$$f_{Cn} = f_{Co} + \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \dot{\bar{\varepsilon}}^p = f_{Co} + \mathbf{a}_C^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} + A'_C \dot{\lambda} = 0, \quad (4.20)$$

resolvendo em ordem a $\dot{\lambda}$ obtém-se a expressão para o valor infinitesimal do multiplicador plástico, dado por

$$\dot{\lambda} = \frac{f_o - \mathbf{a}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{r}_o}{\mathbf{a}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Ca} + A'}. \quad (4.21)$$

Por consequente, a equação 4.19 pode ser resolvida iterativamente de modo a obter o valor da taxa de variação da tensão, $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$. Da mesma forma, o valor da taxa de variação da deformação plástica equivalente é, a cada iteração, dada por

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}) \dot{\lambda} \quad (4.22)$$

onde, para a maioria dos critérios de cedência, o parâmetro da tensão $\mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma})$ é igual a 1 [60].

4.3.2 Método do Retorno Radial

É agora mostrado que o método do retorno radial é uma forma específica do método de integração totalmente implícito, ou *backward-Euler*. Como referido em [60], este critério foi primeiramente proposto por Wilkins e consequentemente refinado.

Para o critério de cedência de von Mises com encruamento linear pode-se então mostrar que não são necessárias iterações do método implícito e que a equação 4.14 produz uma solução exata. Isto pode ser mostrado mais facilmente com recurso à separação das componentes hidrostática e desviadora e com recurso às relações 4.2 e 4.3 presentes na

secção 4.1.1.

Desta forma a equação 4.14 pode ser expressa em ordem às suas componentes

$$\boldsymbol{\sigma}_C = \sigma_{mB}\mathbf{j} + \mathbf{s}_B - \Delta\lambda\mathbf{C}\mathbf{a}_B = \sigma_{mB}\mathbf{j} + \mathbf{s}_C, \quad (4.23)$$

onde as tensões elásticas, $\boldsymbol{\sigma}_B$, na posição de previsão B são separadas nas suas componentes hidrostáticas, $\sigma_{mB}\mathbf{j}$ e desviadoras, \mathbf{s}_B [60]. Posto isto, e com o auxílio de $\mathbf{j} = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, e de

$$\mathbf{a}^T\mathbf{C}\mathbf{a} = \mathbf{a} : \mathbf{C} : \mathbf{a} = 3G, \quad (4.24)$$

a equação 4.23 toma a forma

$$\boldsymbol{\sigma}_C = \sigma_{mC}\mathbf{j} + \mathbf{s}_C = \sigma_{mB}\mathbf{j} + \left(1 - \frac{3\mu\Delta\lambda}{\bar{\sigma}_B}\right)\mathbf{s}_B. \quad (4.25)$$

Uma vez que \mathbf{s}_B não possui qualquer componente na direção \mathbf{j} , pois, $\mathbf{s}^T\mathbf{j} = 0$, facilmente se pode concluir que a igualdade $\boldsymbol{\sigma}_{mB} = \boldsymbol{\sigma}_{mC}$ é verdadeira e o vetor das tensões desviadoras em C é dado por

$$\mathbf{s}_C = \alpha\mathbf{s}_B = \left(1 - \frac{3G\Delta\lambda}{\bar{\sigma}_B}\right)\mathbf{s}_B. \quad (4.26)$$

O escalar α é aqui introduzido de modo a facilitar a leitura das equações e tornar a compreensão mais intuitiva e expedita.

Estas tensões desviadoras devem respeitar o critério de cedência dado por

$$f_C = \bar{\sigma}_C(\boldsymbol{\sigma}_C) - \sigma_{oC}(\bar{\varepsilon}_C^p) = \bar{\sigma}_C(\boldsymbol{\sigma}_C) - \sigma_{oC}(\bar{\varepsilon}_B^p + \Delta\bar{\varepsilon}^p(\Delta\varepsilon^p)), \quad (4.27)$$

de modo que, com recurso à equação 4.8, obtém-se a condição de cedência

$$f_C = \bar{\sigma}_C(\mathbf{s}_C) - \sigma_{oC}(\bar{\varepsilon}_C^p) = \alpha\bar{\sigma}_B - \sigma_{oC}(\bar{\varepsilon}_C^p). \quad (4.28)$$

Usando a equação 4.26 com encruamento cinemático linear e tendo em conta que $\Delta\bar{\varepsilon}^p = \Delta\lambda$, a equação anterior é, segundo [60], simplificada de modo a obter a expressão

$$f_C = \bar{\sigma}_B - 3\mu\Delta\lambda - (\sigma_{oB} + A'\Delta\bar{\varepsilon}^p) = f_B - (3G + A')\Delta\lambda = 0, \quad (4.29)$$

onde $A' = A'_k + A'_i$ e A'_i e A'_k são respetivamente as derivadas pseudotemporais da lei de encruamento isotrópica e cinemática.

Da equação anterior pode-se obter diretamente a expressão do multiplicador plástico, que é então dado por

$$\Delta\lambda = \frac{f_B}{(3\mu + A')}. \quad (4.30)$$

Por fim, e a partir de 4.23, 4.26 e 4.30 obtém-se então as expressões completas para a atualização das tensões no ciclo iterativo:

$$\boldsymbol{\sigma}_C = \sigma_{mB}\mathbf{j} + \alpha\mathbf{s}_B, \quad \alpha = 1 - \frac{3\mu f_B}{(3\mu + A')\bar{\sigma}_B}. \quad (4.31)$$

Com a introdução de encruamento não-linear, o retorno é igualmente radial no espaço desviador e é igualmente regido pela equação 4.26. Apesar disto, a equação 4.30 deixa

de ser válida para o cálculo do multiplicador plástico, mas se $A' = A'_B = A'_A$ pode ser gerado um valor inicial para a iteração escalar de Newton-Raphson [32]. Esta iteração satisfaz a condição de cedência 4.28 com o multiplicador plástico como única variável. A série de Taylor truncada origina então

$$f_{C_n} = f_{C_0} + \frac{\partial f}{\partial \Delta \lambda} \dot{\lambda} = f_{C_0} + (3G + A'_{C_0}) \dot{\lambda} = 0, \quad (4.32)$$

que toma o lugar da equação 4.29.

4.4 Módulo Elastoplástico

A derivação da matriz elastoplástica consistente assegura a convergência quadrática do método de Newton-Raphson no algoritmo de integração implícito. O uso desta, em detrimento da matriz elastoplástica tangente confere uma maior convergência e permite o uso de intervalos de tempo superiores. Por outro lado, o uso da matriz elastoplástica tangente, que é inconsistente com o procedimento de integração implícito (*backward-Euler*) conduz à perda da convergência assintótica do método de Newton.

Contudo, e apesar de melhorar significativamente a solução obtida, este método possui duas grandes desvantagens: (i) a matriz elastoplástica consistente tem de ser calculada e (ii) simultaneamente resolvida. Isto gera um problema uma vez que, na grande maioria dos casos, a derivação da matriz de forma algébrica é um processo difícil e moroso, bem como a resolução da matriz que, com a evolução e crescimento do problema, pode representar grande parte do esforço computacional.

4.4.1 Módulo Elastoplástico Consistente

Tendo em conta o carácter incremental da plasticidade [32], e considerando termos infinitesimais, consideram-se as equações 2.4 e 2.5 na forma de taxas pseudotemporais, obtendo-se respetivamente

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^t = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (4.33)$$

e, de forma simplificada,

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e. \quad (4.34)$$

Assim, a substituição das equações 2.6, 4.33 e 4.34 na derivada da expressão 4.16 resulta em

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^t - \dot{\lambda} \mathbf{C} \mathbf{a} - \Delta \lambda \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \Delta \lambda \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\alpha}}. \quad (4.35)$$

Pode-se agora substituir na equação acima a expressão para a obtenção da taxa de variação pseudotemporal do *back-stress*, representado por $\boldsymbol{\alpha}$. Esta expressão é dada, de forma genérica, por

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -D_1 \mathbf{r}_{\alpha o} + D_2 \bar{\boldsymbol{\sigma}} + D_3 \dot{\lambda} \bar{\boldsymbol{\sigma}} + D_4 \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (4.36)$$

onde, as constantes D_1 a D_4 são dadas por

$$D_1 = \frac{1}{1+d}; \quad D_2 = \frac{df_o}{(1+d)\bar{\boldsymbol{\sigma}}}; \quad D_3 = \frac{A_k'(1-A_i'\Delta\lambda')}{\bar{\boldsymbol{\sigma}}(1+d)}; \quad D_4 = 1 - D_1 \quad (4.37)$$

e

$$d = A_k' \Delta \lambda'.$$

A partir deste ponto, e sem perda de generalidade, a restante formulação irá ser apresentada em função do critério de von Mises de modo a permitir algumas simplificações que levam a uma leitura e compreensão mais acessível do processo.

Tendo então em conta que, para o critério de von Mises, a expressão $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = 0$ pode-se então obter a simplificação

$$\mathbf{Q}\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^t - \dot{\lambda}\mathbf{C}\mathbf{a}, \quad (4.38)$$

onde \mathbf{Q} é dado por

$$\mathbf{Q} = \left[\mathbf{I} + D_1 \Delta \lambda \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]. \quad (4.39)$$

Segue-se então, por consequência, uma expressão mais reduzida para o valor da taxa de variação pseudotemporal das tensões dada por

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^t - \dot{\lambda} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{a} = \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^t - \dot{\lambda} \mathbf{R} \mathbf{a}. \quad (4.40)$$

De modo a poder obter-se então o valor da taxa pseudotemporal do multiplicador plástico, aplica-se a condição de consistência sob a forma de taxa de variação pseudotemporal de $f(\boldsymbol{\sigma})$, correspondendo a

$$\dot{f} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \sigma_o = \mathbf{a}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{a}^T \dot{\boldsymbol{\alpha}} - A_i' \dot{\lambda} = 0, \quad (4.41)$$

onde $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ é dado pela equação 4.40 e $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ por 4.36.

Tendo em conta que $\dot{f} = 0$ no regime de deformação plástica, resolvendo em ordem a $\dot{\lambda}$, obtém-se

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^t}{(\mathbf{a}^T \mathbf{R} \mathbf{a} + A_i' + A_k')} \quad (4.42)$$

em que a não-singularidade da expressão é garantida pelo facto de o denominador ser estritamente positivo [18].

Atenda-se ao facto de o multiplicador plástico, por um lado, ser nulo no caso de um comportamento elástico e, por outro lado, corresponder à equação 4.42 no caso de um comportamento plástico. Neste contexto, da substituição da equação 4.42 na expressão 4.35, resulta que

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{\text{ct}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^t \quad (4.43)$$

ou numa forma equivalente,

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{\text{ct}} : d\boldsymbol{\varepsilon}^t, \quad (4.44)$$

em que o tensor \mathbf{C}^{ct} , denominado módulo elastoplástico consistente, corresponde a

$$\mathbf{C}^{\text{ct}} = \mathbf{R} \left[\mathbf{I} - \frac{\mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{R}}{\mathbf{a} \mathbf{R} \mathbf{a}^T + A_i' + A_k'} \right]. \quad (4.45)$$

Desta forma, o módulo elastoplástico consistente \mathbf{C}^{ct} permite relacionar quer os tensores das taxas pseudotemporais de tensão e de deformação, representados na equação 4.43, quer os incrementos (infinitesimais) dos tensores das tensões e das deformações 4.44 [8].

Efetivamente, considerar a matriz elastoplástica tangente na resolução de problemas pseudotemporalmente discretizados, que é definida em termos de relações incrementais de natureza infinitesimal, pode resultar num processo numérico que não se revele ótimo do ponto de vista computacional. Neste caso, a utilização de uma matriz consistente

com a qual se tomem em consideração não só as características gerais da matriz elasto-plástica tangente mas também as peculiaridades associadas à utilização de técnicas de discretização pseudotemporal permite otimizar o desempenho numérico do método de Newton-Raphson, ao garantir a sua convergência quadrática.

Capítulo 5

Arquitetura da Ferramenta e Implementação

O objetivo principal deste trabalho é a implementação numérica de modelos elastoplásticos em programas comerciais do método dos elementos finitos. Deste modo, a ferramenta desenvolvida nesse sentido é responsável por todas as operações necessárias para permitir esta implementação, para o programa comercial escolhido, o Abaqus.

A implementação de modelos constitutivos de material no Abaqus é conseguida através da criação totalmente automática de subrotinas de utilizador (UMAT's). Porém, de modo a tornar esta ferramenta mais versátil e proporcionar ao utilizador uma visualização prévia do resultado esperado aquando da introdução da subrotina resultante no Abaqus, foi adicionada uma componente numérica que proporciona ao utilizador uma previsão do tipo de resultados que poderá vir a obter no Abaqus do modelo introduzido sob solicitações uniformes.

Esta introdução numérica origina mais um módulo de trabalho, distinto da criação automática da UMAT que opera com valores numéricos de modo a simular um ensaio de tração uniaxial e um ensaio de corte simples para um ponto de integração. Desta forma a arquitetura geral e modo de funcionamento da ferramenta elaborada neste trabalho encontram-se descritos de uma forma genérica na figura 5.1 de modo a permitir a compreensão do trabalho desenvolvido e proporcionar uma visualização esquemática dos módulos descritos mais à frente.

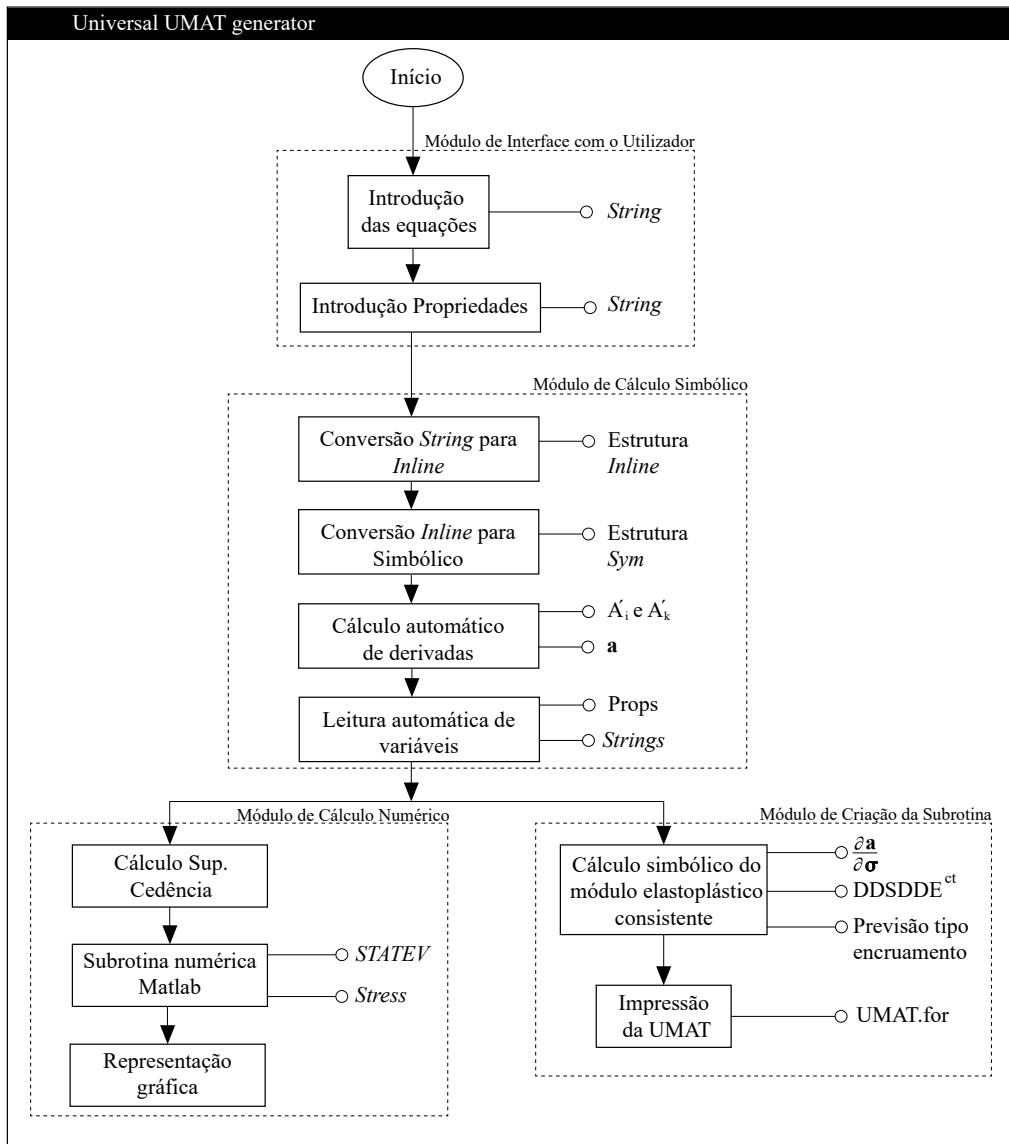


Figura 5.1: *Layout* da ferramenta desenvolvido.

5.1 Módulo de Interface com o Utilizador

Para o desenvolvimento do módulo que é responsável pela interface com o utilizador, recorreu-se à ferramenta GUIDE¹ para o desenvolvimento de todo o grafismo. O seu uso permite a criação de interfaces gráficas de forma rápida e eficaz sem necessitar de dispendiosas horas de aprendizagem de outro qualquer tipo de ferramenta, criação de interfaces externas ou código de comunicação com o utilizador.

De forma a permanecer de fácil utilização, a janela de interface inicial apenas necessita da introdução, por parte do utilizador, de três leis ou critérios que descrevam o comportamento plástico do material, como se observa na figura 5.2: (i) critério de cedên-

¹do inglês, *Graphical User Interface Development Environment*, do MatLab.

cia, (ii) lei de encruamento isotrópico e (iii) lei de encruamento cinemático.

A introdução do modelo de comportamento é efetuada utilizando a estrutura de escrita que se pode observar na figura 5.2. Neste caso, o modelo que se observa na figura 5.2 é constituído pelo critério de cedência de Hill'48, descrito pela expressão 2.11, a lei de encruamento isotrópico de Swift, expressão 2.45, e a lei de encruamento cinemático linear de Prager, descrita por 2.49.

The image shows a software interface window titled "Critério de Cedência". It contains three input fields for mathematical formulas:

- Critério de Cedência:** $\sigma_Y = (a1*(sy-sz)^2+a2*(sz-sx)^2+a3*(sx-sy)^2+2*(a4*tyz^2+a5*txz^2+a6*txy^2))^{(1/2)}$
- Lei de Encruamento Isotrópica:** $\sigma_Y = a7*(eqplas+a8)^{a9}$
- Lei de Encruamento Cinemática:** $X = a10*deplas$

On the right side of the window, there are two buttons: "Gerar UMAT" and "Fechar".

Figura 5.2: Janela de introdução do modelo elastoplástico.

As expressões introduzidas na ferramenta devem cumprir uma estrutura definida. Assim, as variáveis de entrada como sx , sy e sz correspondem respetivamente a σ_x , σ_y e σ_z , txy , txz e tyz correspondem a τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} . De modo a permitir o seu reconhecimento, na introdução das leis de encruamento, as variáveis $deplas$, $eqplas$, e $deqpl$ correspondem a $\dot{\epsilon}^P$, $\bar{\epsilon}^P$ e $\Delta\bar{\epsilon}^P$ respetivamente.

As constantes, ou parâmetros do material são representadas por a_i , sendo estas escritas de forma sequencial, para permitir uma leitura adequada das mesmas.

Após a introdução do modelo de comportamento do material, é necessário definir as constantes do material e os parâmetros que definem o critério de cedência e as leis de encruamento. De maneira a simplificar mais uma vez o contacto com o utilizador, a introdução dos parâmetros que definem o material e dão forma aos critérios e leis é feita através de três caixas de texto. Na figura 5.3 é apresentada a janela de introdução de propriedades que o utilizador encontra durante a utilização da ferramenta.

As constantes do material são introduzidas pela ordem $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, com n igual ao número de constantes necessário ao modelo inserido.

Neste caso pode-se observar que as constantes material introduzidas representam um aço genérico e que os parâmetros atribuídos ao critério de Hill'48, o tornam isotrópico e equivalente ao de von Mises. Os restantes parâmetros são respetivos às leis de encruamento e não definem nenhum material específico.

De notar que a interface faz a receção dos dados introduzidos pelo utilizador como *strings*², sendo depois a sua estrutura alterada ao longo do código consoante as necessidades.

²um *string* é um tipo de dados usado para a representação de texto.

E = 210000

ν = 0.3

Constantes do modelo material

0.5,0.5,0.5,1.5,1.5,1.5,900,0.0081,0.25,0.1

Cancelar Ok

Figura 5.3: Janela de introdução de propriedades do modelo elastoplástico.

5.2 Módulo de Cálculo Simbólico

Neste módulo de código são recebidos os *inputs* do utilizador na forma de texto (*strings*). Estes necessitam de ser convertidos, de modo a poder realizar as manipulações e deduções necessárias. Para isto recorre-se ao uso de uma estrutura há muito presente na *toolbox* de funções do MatLab: *inline*.

Esta é responsável pela definição de funções com argumentos declarados tendo em conta que esta estrutura é uma plataforma intermédia importante para a conversão das expressões introduzidas na sua forma simbólica, como se observa em A.1. Esta conversão é feita através do uso de uma função auxiliar criada propositadamente para o efeito, descrita na tabela 5.1 cujo código pode ser encontrado em A.2. Na generalidade das operações recorre-se ao comando *eval*. Este executa expressões MatLab declaradas em texto, de modo a poder efetuar as transições entre estruturas descritas.

Tabela 5.1: Função de conversão de *inline* para simbólico.

1. Leitura dos argumentos da função de entrada.
2. Leitura do número de argumentos.
3. Para todo o argumento:
 - 3.1 Concatena o argumento num vetor.
 - 3.2 Declara o argumento como simbólico.
4. Declara a nova função, executando a original *inline* com argumentos simbólicos.

Para se proceder à criação da subrotina UMAT e à conclusão da integração temporal das equações elastoplásticas, é necessário efetuarem-se algumas operações intermédias como, por exemplo, o cálculo de \mathbf{a} , que é dado por $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ ou o cálculo de A'_i e A'_k .

O cálculo de \mathbf{a} é efetuado com recurso ao comando *jacobian* da *toolbox* de cálculo simbólico do MatLab. Uma vez que a operação anterior é uma derivação parcial de uma expressão em ordem a um vetor, recorreu-se ao comando *jacobian* da *toolbox* de cálculo simbólico. Este comando aceita como parâmetros de entrada: (i) a função f , (ii) o vetor de variáveis $\boldsymbol{\sigma}$. Por sua vez, o cálculo de A'_i e A'_k é efetuado com recurso ao comando *diff* para efetuar o cálculo da derivada temporal das leis de encruamento isotrópico e cinemático respetivamente. O segmento de código referente a esta parte pode ser encontrado em A.3.

Neste módulo efetua-se ainda a leitura e concatenação dos argumentos das funções dadas pelo utilizador, demonstrado em A.4. Este procedimento é necessário uma vez que a execução das funções em estrutura *inline* exige que seja dado como *input* um conjunto de variáveis de igual número aos argumentos da função.

5.3 Módulo de Criação da Subrotina

5.3.1 Cálculo do Módulo Elastoplástico Consistente

De modo a tornar completa a implementação do modelo elastoplástico definido pelo utilizador é necessário proceder à dedução do módulo elastoplástico consistente seguindo a metodologia explicitada em 4.4.1. Apesar deste se apresentar na secção referida deduzido para o caso especial de von Mises, a estrutura que se apresenta na tabela 5.2 é aplicável a todos os critérios de cedência quadráticos, uma vez que as manipulações e deduções necessárias são deixadas a cargo da estrutura de cálculo simbólico desenvolvida.

Tabela 5.2: Estrutura do módulo de dedução do módulo elastoplástico consistente.

1. Receção dos parâmetros de entrada na forma simbólica.
2. Cálculo de $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$.
3. Definição da expressão 4.35 de forma simbólica.
4. Substituição das constante auxiliares D_1 a D_4 dados por 4.37.
5. Definição da expressão para $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$, recorrendo à expressão 4.36.
6. Substituição de $\Delta\lambda$ e $\dot{\lambda}$ respetivamente pela forma incremental da expressão 4.42.
7. Substituição da expressão 4.36 na expressão 4.35.
8. Obtenção do módulo consistente através da manipulação da expressão e obtenção da forma explícita em 4.43.

Após a execução da estrutura de código descrita, o módulo elastoplástico consistente

é dado em função das variáveis que constituem o critério de cedência e as leis de encruamento introduzidas pelo utilizador, deixando a sua substituição numérica a cargo da rotina numérica da ferramenta e da subrotina em Fortran.

O maior desafio neste módulo da ferramenta é o controlo da dimensão das expressões e na coerência dimensional necessária para o cálculo da matriz elastoplástica consistente. Estes problemas surgiram uma vez que as manipulações matemáticas exigidas no ponto 8 da tabela 5.2 foram realizadas com recurso ao comando *solve* que considera a propriedade comutativa da multiplicação, que não se verifica quando os objetos de trabalho são matrizes ($i * i$) e vetores ($i * j$). Este problema foi ultrapassado com recurso a variáveis auxiliares intermédias, que de uma forma mais completa asseguram a coerência dimensional ao longo da dedução.

5.3.2 Impressão da Subrotina Fortran

Após toda a manipulação simbólica ter sido realizada e estar pronta a implementar na rotina propriamente dita, é necessário efetuar a conversão da linguagem das expressões. Esta conversão é feita com recurso ao comando *fortran* da *toolbox* de cálculo simbólico do MatLab. Este comando, executa a conversão de expressões em MatLab para Fortran, como se mostra em seguida:

```
>>syms a b c
>>f=a*b^c;
>>F=fortran(f)
F =
    t0 = a*b**c
```

Como se pode verificar, a conversão para Fortran devolve uma expressão de texto da qual é necessário depois extrair a parte útil de modo a poder integrar a subrotina de modelo material.

A impressão da UMAT é efetuada de forma mista, recorrendo a blocos de texto pré-definidos comuns a vários modelos elastoplásticos constitutivos, sendo os blocos variáveis obtidos com recurso ao cálculo simbólico. Os blocos pré-definidos são obtidos de forma analítica e definidos na ferramenta na sua forma final. Para os blocos variáveis, a construção é feita com recurso ao cálculo simbólico, tendo em conta o procedimento referido.

5.4 Implementação Genérica das Subrotinas

A implementação descrita nesta secção apresenta uma característica híbrida que recorre simultaneamente à definição de expressões, obtidas a partir de cálculo algébrico, com o cálculo simbólico necessário para efetuar as operações descritas.

A UMAT, gerada de forma automática, é chamada em cada ponto de integração de cada elemento, iteração a iteração, em todos os incrementos de carga. Esta subrotina possui, como principais variáveis de entrada o estado de tensão a que o ponto de integração de cada elemento está sujeito no início do incremento, e o incremento de deformação total, sendo o estado de tensão no final do incremento e o módulo elastoplástico as variáveis de saída.

O utilizador tem assim a possibilidade de definir o comportamento mecânico do ponto material ao longo do incremento, utilizando o modelo constitutivo pretendido.

5.4.1 Inicialização das Subrotinas

As subrotinas de utilizador, devido à liberdade existente na sua composição, podem definir qualquer tipo de modelo material. Estas podem ser bastante úteis para realizar simulações adequadas em modelos de elementos finitos bastante complexos, tais como condições de carga complexas, condições de contacto em simulações estáticas.

Por norma, as equações constitutivas de uma UMAT exigem a definição explícita da tensão, ou a definição da taxa de variação da tensão, podendo vir também a exigir a dependência das mesmas, seja em ordem ao tempo, à temperatura ou a outras variáveis. As variáveis internas têm também de ser definidas quer na sua forma explícita, ou sob a forma de taxas de variação.

Desta forma, procede-se à criação da *interface* da subrotina com o *software* de simulação definindo não só valores de entrada do material, dados pelo utilizador, mas também variáveis do sistema que garantem a integridade da simulação, como se mostra em maior detalhe na tabela 5.3.

Tabela 5.3: Variáveis de entrada das subrotinas.

Entrada:
1. Estado de tensão convergido no incremento anterior, σ_i .
2. variáveis do sistema: <ul style="list-style-type: none"> 2.1 Incremento total de deformação ϵ^t. 2.2 Tensor rotação \mathbf{R}. 2.3 Gradiente de deformação $\dot{\epsilon}$.
3. Variáveis de estado: <ul style="list-style-type: none"> 3.1 O tensor da deformação elástica no incremento anterior, ϵ_i^e. 3.2 O tensor da deformação plástica no incremento anterior, ϵ_i^p. 3.3 O tensor de evolução da tensão cinemática (<i>back-stress</i>) do incremento anterior, \mathbf{X}_i. 3.4 Deformação plástica efetiva no incremento anterior, $\bar{\epsilon}_i^p$.
4. Propriedades do material: <ul style="list-style-type: none"> 4.1 Módulo de Young, E. 4.2 Coeficiente de Poisson, ν. 4.3 Coeficientes relativos ao critério de cedência, lei de encruamento isotrópico e cinemático, a_i.

Salienta-se que a UMAT também admite a entrada de outras informações como o número e pontos de integração dos elementos, comprimento característico dos elementos, numero de iterações efetuadas bem como o número de incrementos das variáveis.

5.4.2 Cálculo da Tensão Tentativa

A subrotina é iniciada com o cálculo da matriz de rigidez elástica. Esta permite a obtenção da estimativa elástica requerida seguindo a metodologia do método de integração implícito. Numa primeira fase, a subrotina executa o cálculo segundo a lei de Hooke da tensão tentativa de modo a permitir a avaliação posterior do regime em que se encontra o material nessa iteração: elástico, ou plástico.

Em seguida, a subrotina efetua o cálculo da tensão limite de elasticidade de acordo com a deformação plástica equivalente obtida no incremento anterior e a expressão definida pelo utilizador para a evolução do encruamento isotrópico, como se mostra na tabela 5.4.

Tabela 5.4: Inicialização da subrotina e cálculo da tensão tentativa.

<p>Início:</p> <p>5. Definição das propriedades elásticas e cálculo da matriz de rigidez elástica, dada pela equação 2.2.</p> <p>6. Cálculo da estimativa elástica do estado de tensão através de 2.1, com o incremento de deformação total dado por 2.4 sob a forma:</p> $\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{\text{TR}} = \boldsymbol{\sigma}_i + \mathbf{C}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}^t \quad (5.1)$ <p>7. Cálculo da estimativa elástica da deformação</p> $\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_i^e - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}^t. \quad (5.2)$ <p>8. Cálculo da tensão limite de elasticidade, σ_Y em função de $\bar{\varepsilon}_i^p$, dado pela expressão definida pelo utilizador ou por critérios clássicos, dados pelas expressões 2.40 a 2.47.</p> <p>9. Cálculo da tensão equivalente $\bar{\sigma}$ com a expressão introduzida pelo utilizador. Exemplos de expressões presentes na secção 2.3.</p> <p>10. Verificação do critério de plasticidade na previsão elástica:</p> $f_{i+1} = \bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{\text{TR}} - X_i) - \sigma_Y(\bar{\varepsilon}_i^p). \quad (5.3)$

5.4.3 Determinação do Regime

Após o cálculo da tensão tentativa é necessário avaliar se esta se encontra dentro ou sobre da superfície de plasticidade, ou seja, se o material, na presente iteração se encontra em regime elástico ou regime plástico. Caso seja elástico, a subrotina segue diretamente para o cálculo descrito na subsecção 5.4.7. Caso se verifique que o regime do material na presente iteração é plástico, a subrotina segue o seu curso completo, descrito na tabela 5.5.

Estando em regime plástico, é necessário ainda proceder à separação da tensão nas suas componentes volumétrica e desviadora, uma vez que a componente volumétrica (ou hidrostática), não provoca qualquer tipo de alteração na deformação de materiais metálicos [32].

Tabela 5.5: Determinação do regime do material.

<p>11. Se $f > 0$, então o material entrou em regime plástico. Para isso,</p> <p>11.1 Determinação da componente volumétrica da tensão através de 4.4.</p> <p>11.2 Obtenção da componente desviadora da tensão, \mathbf{s}, como descrito em 4.2, através da subtração de 4.4.</p> <p>11.3 Cálculo da evolução da tensão tendo em conta o <i>back-stress</i> da iteração anterior.</p> $\mathbf{s}_i^f = \mathbf{s}_i - X_i \quad (5.4)$ <p>11.4 Obtenção da direção de plasticidade dada por 4.12.</p>
--

5.4.4 Ciclo Iterativo

O algoritmo de correção plástica consiste num processo iterativo com a finalidade de satisfazer o critério de plasticidade. De modo a evitar possíveis casos particulares de não convergência, foi imposto um limite de 10 iterações no algoritmo. Este valor máximo de iterações foi atingido com o recurso a uma análise empírica efetuada no decorrer do presente trabalho.

Durante o ciclo, para cada iteração, de modo a verificar o critério de plasticidade é calculado o valor do resíduo entre a diferença da tensão atual e a tensão de *backward-Euler* que, no caso de von Mises, pode ser dado pela expressão 4.17.

A atualização do multiplicador plástico é dada, no caso de von Mises, pela expressão presente na tabela 5.6. Nos restantes casos o multiplicador plástico é dado por 4.21 sob a forma de taxa de variação. Analisando mais uma vez o caso particular de von Mises, o processo de atualização do valor da deformação equivalente plástica é direto, atendendo à igualdade $\Delta \bar{\epsilon}^p = \Delta \lambda$. Para os restantes casos, este está descrito na tabela 5.6.

Tabela 5.6: Ciclo iterativo implícito.

<p>11. No regime de plasticidade:</p> <p>11.5 Para cada iteração (máximo de 10 iterações):</p> <p>11.5.1 Obtenção do valor do resíduo.</p> $r_{i+1} = \bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}_{i+1}) - \sigma_Y(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i+1}^p) \quad (5.5)$ <p>11.5.2 Cálculo do multiplicador plástico dado pela expressão.</p> $\Delta\lambda = \frac{r_{i+1}}{\mathbf{a}_{i+1} : \mathbf{C} : \mathbf{a}_{i+1} + A_i' \bar{a}_{i+1} + A_k' \bar{a}_{i+1}}, \quad (5.6)$ <p>onde \bar{a} é dado pela expressão</p> $\bar{a} = \sqrt{\frac{2}{3}(\mathbf{a} : \mathbf{a})} \quad (5.7)$ <p>11.5.3 Atualização de $\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$.</p> $\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i+1}^p = \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^p + \Delta\lambda\bar{a}_{i+1} \quad (5.8)$ <p>11.5.4 Cálculo da nova tensão limite de elasticidade, σ_Y em função de $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^p + \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i+1}^p$.</p> <p>11.5.5 Se, a desigualdade $r_n < \sigma_{Y0}$ se verificar, avança para 11.6.</p>

5.4.5 Atualização de Tensões e Deformações

Após a convergência do ciclo iterativo é necessário proceder-se à atualização das tensões e deformações. A subrotina procede ao cálculo do incremento de deformação plástica dado assim pelo produto entre o multiplicador plástico e a direção de plasticidade. O tensor *back-stress*, responsável pela translação da superfície de cedência, é também atualizado de forma incremental de acordo com a lei cinemática introduzida pelo utilizador.

No que respeita à atualização do tensor das tensões, é necessário, de modo a obter a tensão real, voltar a juntar as componentes desviadora e volumétrica da tensão previamente, separadas. O novo tensor *back-stress* também tem de ser adicionado de modo a poder fazer-se a correção das tensões.

A atualização das deformações elástica e plástica é feita com o incremento de deformação plástica calculado na tabela 5.6. De notar que na tabela 5.4 foi estimado que toda a deformação seria elástica, sendo necessário, deste modo proceder-se à correção desse pressuposto, como se verifica na tabela 5.7, onde se encontra descrito todo o processo de atualização de tensões e deformações.

Tabela 5.7: Atualização de tensões e deformações.

11. No regime de plasticidade:	
11.6 Cálculo do incremento de deformação plástica.	
	$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}^p = \Delta\lambda\mathbf{a}_{i+1}$ (5.9)
11.7 Incremento do tensor <i>back-stress</i>	
	$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{X}_i + \Delta\mathbf{X}$ (5.10)
11.8 Atualização de tensões:	
	$\boldsymbol{\sigma}_{i+1} = \sigma_Y(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^p + \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i+1}^p)\frac{\mathbf{S}}{\bar{\sigma}} + \mathbf{X}_{i+1} + \sigma_m\mathbf{j}^T$. (5.11)
11.9 Atualização das deformações elástica e plástica:	
	$\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_i^e - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}^p$, (5.12)
	$\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_i^p + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}^p$. (5.13)
11.10 Atualização da deformação plástica equivalente:	
	$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i+1}^p = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^p + \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i+1}^p$. (5.14)

5.4.6 Cálculo da Matriz de Rigidez Elastoplástica Consistente

Uma vez que a rotina resultante do software se destina a ser executada no programa pelo MEF Abaqus, é necessário assegurar a convergência quadrática do ciclo iterativo descrito na tabela 5.6. Desta forma, e devido à natureza do presente trabalho, a dedução da matriz de rigidez elastoplástica consistente é efetuada através do cálculo simbólico, dependendo apenas das variáveis que sofrem atualização ao longo das iterações.

Esta matriz, pode ser dada, para o caso individual de von Mises pela expressão 4.45, sendo esta apresentada novamente na tabela 5.8 para maior facilidade de compreensão.

Resta referir que A'_{i+1} e A'_{k+1} , são respetivamente as derivadas temporais das leis de encruamento isotrópico e cinemático, com as variáveis dependentes atualizadas ao longo da rotina na iteração atual. O cálculo dessas derivadas é efetuado através da computação simbólica. A matriz \mathbf{R} pode ser obtida através das equações 4.39 e 4.40.

Tabela 5.8: Cálculo da matriz de rigidez elastoplástica consistente.

11. No regime de plasticidade:

11.11 Cálculo do módulo elastoplástico consistente:

$$\mathbf{C}_{i+1}^{\text{ct}} = \mathbf{R}_{i+1} \left[\mathbf{I} - \frac{\mathbf{a}_{i+1} \mathbf{a}_{i+1}^{\text{T}} \mathbf{R}_{i+1}}{\mathbf{a}_{i+1} \mathbf{R}_{i+1} \mathbf{a}_{i+1}^{\text{T}} + A'_{i+1} + A'_{k+1}} \right] \quad (5.15)$$

5.4.7 Armazenamento de Variáveis

Por fim, procede-se ao armazenamento dos valores obtidos nas variáveis de estado da subrotina. Estas são também variáveis de saída da subrotina. Estas variáveis podem agrupar-se pelo seu tipo: variáveis de estado do sistema ou variáveis de estado definidas pelo utilizador, como se pode observar na tabela 5.9.

Tabela 5.9: Armazenamento de variáveis nas variáveis de estado da subrotina.

Variáveis de saída:

12. Estado de tensão convergido no incremento atual, $\boldsymbol{\sigma}_{i+1}$.
13. Módulo elastoplástico consistente, $\mathbf{C}_{i+1}^{\text{ct}}$.
14. Variáveis de estado definidas pelo utilizador:
 - 14.1 Deformação elástica efetiva no final do incremento atual, $\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}^e$.
 - 14.2 Deformação plástica efetiva no final do incremento atual, $\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}^p$.
 - 14.3 Tensor cinemático atualizado no incremento atual, \mathbf{X}_{i+1} .
 - 14.4 Deformação plástica equivalente no final do incremento atual, $\bar{\varepsilon}_{i+1}^p$.

5.5 Módulo de Cálculo Numérico

De forma a complementar a criação automática de subrotinas, a componente numérica revela aqui uma grande importância uma vez que permite uma visualização prévia das curvas tensão-deformação de ensaios de um ponto infinitesimal. Este módulo é dividido em várias partes que executam tarefas mais pequenas. Nestas obtêm-se resultados que são comuns a múltiplas secções de código posteriores, de forma a reduzir o tempo de execução e evitar tarefas redundantes ao longo do programa.

A primeira parte deste módulo é a obtenção da superfície de cedência do critério de plasticidade introduzido. De modo a obter-se a superfície de cedência recorre-se a vetores auxiliares que variam de -1 a 1 e são inseridos no critério dado pelo utilizador, com recurso a um ciclo de cálculo, obtendo-se assim os pontos que definem a curva pretendida.

A segunda parte deste módulo é a execução da subrotina, em linguagem MatLab, através da utilização de um *driver* de controlo que administra à rotina pequenos incrementos de deformação e efetua a gestão das variáveis de entrada e saída desta.

Estando reunido todo o conjunto de elementos necessários para a execução numérica da subrotina em linguagem MatLab, mostra-se na tabela 5.10 a estrutura do ciclo de execução desta.

Tabela 5.10: Estrutura básica do ciclo de execução da rotina.

Execução da Subrotina:
1. Se todos os elementos de entrada estão definidos, então:
1.1 Chama a rotina com os parâmetros de entrada: $\sigma_i, \epsilon_i^e, \epsilon_i^p, \bar{\epsilon}_i^p, \mathbf{X}_i, \Delta U_{i+1}, \mathbf{a}, A'_i, A'_k$ e as propriedades definidas pelo utilizador bem como o critério de cedência e as leis de encruamento na estrutura função MatLab.
1.2 Devolve: $\sigma_{i+1}, \epsilon_{i+1}^e, \epsilon_{i+1}^p, \bar{\epsilon}_{i+1}^p, \mathbf{X}_{i+1}$
2. Armazenamento das variáveis de saída e execução do incremento de deformação seguinte.

Na introdução do vetor das deformações, é definido o tipo de ensaio, bem como as condições de fronteira do mesmo. Para isso considera-se, ao longo de todo o ensaio, a relação elástica existente entre as deformações ortogonais ao ensaio. Sendo efetuada posteriormente a correção dos incrementos administrados de modo a obter a deformação real.

Esta subrotina MatLab aceita como variáveis de entrada a tensão e deformações do incremento anterior, o incremento total de deformação e as propriedades do material, bem como os critérios e lei na estrutura *inline* e os *strings* com os argumentos destas funções gerados pelo módulo de manipulação de argumentos das funções.

De modo a permitir a análise gráfica da anisotropia do critério de cedência, é representada também a superfície de cedência do modelo e respetiva comparação com a superfície de cedência de von Mises de igual tensão limite de cedência de modo a facilitar a perceção visual.

Os valores incrementais são retirados da subrotina e formam as curvas tensão-deformação exibidas graficamente pela ferramenta, criando os gráficos essenciais para a visualização do comportamento geral do material. A figura 5.4 mostra um exemplo da janela que o utilizador obtém após a execução da rotina e obtenção das curvas. Caso o Utilizador assim o pretenda, a ferramenta disponibiliza também um ficheiro de *output* no qual se encontram os valores numéricos das curvas tensão-deformação traçadas na janela de visualização.

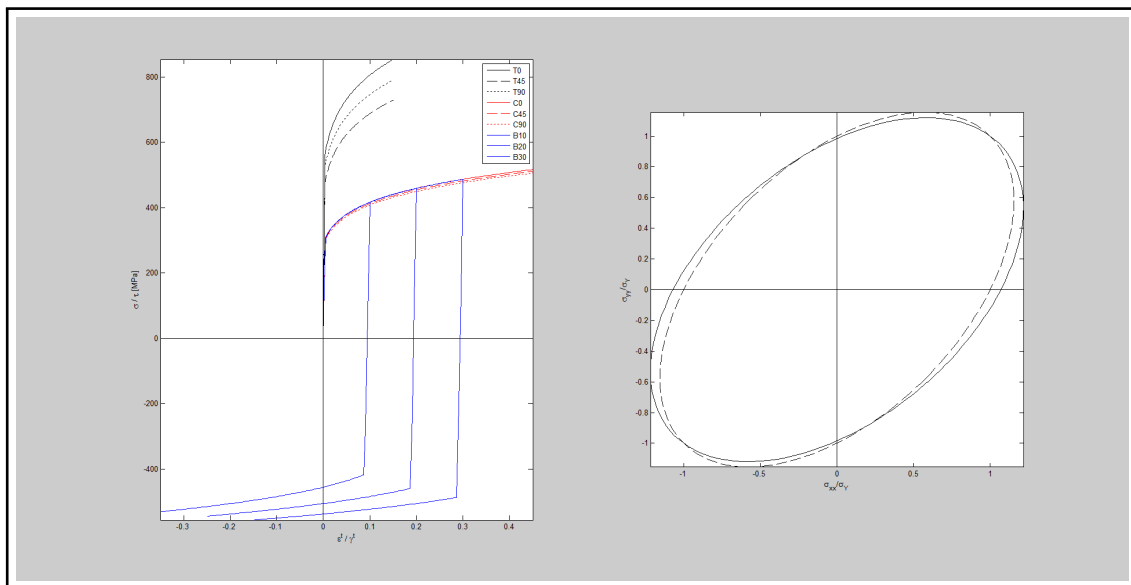


Figura 5.4: Janela de visualização das curvas resultantes.

Parte III

Resultados e Discussão

Capítulo 6

Validação da Ferramenta Desenvolvida

A verificação do bom funcionamento da ferramenta desenvolvida é vital para a validação da implementação simbólica da metodologia. Para modelos de material particularmente complexos implementados em subrotinas do utilizador (UMAT) é de extrema importância efetuar testes de controlo de tensão e deformação.

Então, após a implementação de toda a metodologia apresentada na ferramenta numérica desenvolvida, as UMAT's obtidas foram testadas com o intuito de verificar a implementação dos modelos constitutivos e do algoritmo de integração adotado.

Os ensaios de validação consistem no ensaio de tração e corte simples de um ponto de integração para que seja possível perceber o comportamento mecânico da subrotina no sentido de avaliar o rigor dos resultados e assim verificar a implementação efetuada. Desta forma as subrotinas foram testadas, de acordo com o recomendado em [10], em simulações relativamente simples de um único elemento 3D sujeito a tração uniaxial ou a um estado uniforme de corte simples. Os resultados obtidos tanto pelo módulo numérico da ferramenta MatLab como pelo modelo do MEF Abaqus, em iguais condições, foram analisadas e comparadas.

6.1 Modelo de Validação e Condições de Fronteira

Tendo em conta a modelação numérica dos ensaios realizados no programa pelo MEF Abaqus, foram utilizados para o efeito modelos compostos com um único elemento com 8 nós com interpolação linear e integração reduzida (C3D8R). Este é composto pelas mesmas funções de forma do elemento C3D8, que pode ser observado na figura 3.3 (descrito como hexaedro de 8 nós), sendo que o elemento utilizado neste trabalho dispõe apenas de um único ponto de integração, como se observa na figura 6.1.

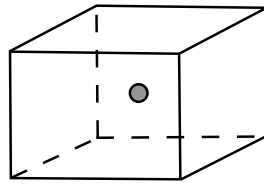


Figura 6.1: Esquema de $1 \times 1 \times 1$ pontos de integração de um elemento hexagonal.

As condições de fronteira dos ensaios foram aplicadas segundo [64], de modo a proporcionar estados de tensão e deformação homogêneos sobre o elemento. A figura 6.2 representa as condições aplicadas ao elemento simulado e que podem ser descritas do seguinte modo sumário: (i) no ensaio de tração uniaxial na direção x , existe um constrangimento do deslocamento da face A em x , da face B em y e da face C em z , sendo aplicado um deslocamento na face oposta a A. (ii) No caso do ensaio de corte, são constrangidos os deslocamentos segundo x e y na face A, é aplicada uma simetria na face B e dado um deslocamento vertical, segundo y na face oposta a A, estando constrangido o deslocamento segundo x nesta também.

Deve também ser referido que a utilização de um elemento com um único ponto de integração, é justificada pela homogeneidade da distribuição das deformações durante os ensaios. Sendo desta forma também possível efetuar a comparação dos resultados obtidos pelo módulo numérico da ferramenta MatLab e a subrotina executada em Abaqus.

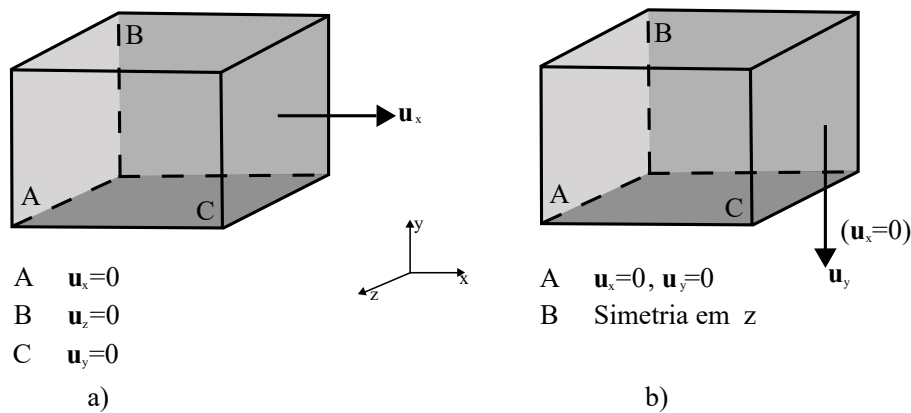


Figura 6.2: Condições de fronteira aplicadas ao modelo numérico de cada teste: a) Ensaio de tração uniaxial b) Ensaio de corte simples. Adaptado de [64].

6.2 Ensaios de Validação

De modo a poder efetuar uma validação completa dos resultados das subrotinas foram efetuados múltiplos ensaios de modo a poder validar cada componente constituinte das subrotinas de forma independente.

Os ensaios descritos na tabela 6.2 foram efetuados em duas situações distintas: (i) a integração temporal dos modelos na ferramenta numérica em MatLab com o recurso a um *driver* de controlo do ensaio e (ii) a análise no programa MEF Abaqus com a utilização da subrotina criada de forma automática. De modo a facilitar a compreensão

e descrição ao longo deste trabalho, encontra-se na tabela 6.1 a designação adotada para os ensaios. Esta designação é complementada com a descrição do tipo de ensaio presente na tabela 6.2.

Tabela 6.1: Designação do suporte onde foi executado o ensaio.

(i) MatLab	M_{-}
(ii) Abaqus	A_{-}

Deste modo efetuaram-se ensaios de tração uniaxial e corte simples a 0° , 45° e 90° e ensaios de Bauschinger a 10%, 20% e 30%. Para facilitar a compreensão e escrita do presente trabalho, de agora em diante os ensaios irão ser denominados de acordo com a tabela 6.2.

Tabela 6.2: Designação dos ensaios efetuados.

Ensaio de tração	
0°	T0
45°	T45
90°	T90
Ensaio de corte	
0°	C0
45°	C45
90°	C90
Ensaio de Bauschinger	
10%	B10
20%	B20
30%	B30

Assim, de modo a avaliar a implementação da metodologia foram efetuados primeiramente ensaios com o critério de cedência de von Mises com encruamento misto. Estes ensaios foram efetuados com recurso a UMAT's sem a implementação do módulo elastoplástico. As análises realizadas no Abaqus foram efetuadas com recurso a um número de incrementos suficientemente elevado de modo a assegurar a convergência das simulações. As análises numéricas efetuadas no MatLab são executadas com incrementos de deformação muito pequenos de modo a prevenir e reduzir o erro das mesmas na transição entre os regimes elástico e plástico.

Para modelar o encruamento isotrópico escolheram-se as leis de Swift e Voce, uma vez que estas são, segundo [18], as de maior relevância e mais utilizadas pelas comunidades científica e industrial. Esta escolha foi também efetuada uma vez que a lei de Swift representa o comportamento de materiais que exibem encruamento sem saturação, como os aços, e a lei de Voce representa os materiais que apresentam encruamento com saturação, como é o caso dos alumínio. A lei de encruamento cinemático escolhida para estes testes foi a de Prager.

Para a primeira simulação foram escolhidos parâmetros genéricos de um aço, não representando na realidade nenhum material específico. Estes encontram-se assim descritos na tabela 6.3.

Tabela 6.3: Parâmetros de um aço genérico.

Características do material		
Módulo de Young	(E)	210 [GPa]
Coefficiente de Poisson	(ν)	0,3
Tensão de cedência	(σ_y)	270 [MPa]
Encruamento isotrópico de Swift		
Coefficiente de encruamento isotrópico	(C)	900 [MPa]
Coefficiente de encruamento isotrópico	(ϵ_0)	0,0081
Coefficiente de encruamento isotrópico	(n)	0,25
Encruamento cinemático de Prager		
Coefficiente de encruamento cinemático	(c)	0,1 [GPa]

Este conjunto de parâmetros descritos na tabela 6.3 deu origem ao conjunto de resultados que se apresentam nas figuras 6.3, 6.4 e 6.5. Os ensaios de Bauschinger foram efetuados de modo a avaliar a evolução do encruamento cinemático.

Foi também representado na figura 6.3, um comparativo da evolução das deformações elástica e plástica com o deslocamento administrado ao material. A soma das componentes da deformação resulta, ao longo de todo o ensaio, na curva de deformação total, como seria expectável. Na figura 6.3 pode-se ainda observar o momento em que o material entra em regime plástico.

Após uma análise cuidada das figuras apresentadas pode-se concluir que os valores de tensão obtidos no programa Abaqus com a subrotina gerada pela ferramenta apresentam coerência com os valores resultantes da análise numérica da ferramenta desenvolvida. Na figura 6.4 pode-se observar que as curvas representativas do ensaio T0 não apresenta grandes discrepâncias pelo que, na sua generalidade, os valores de tensão são coincidentes, mesmo tendo em conta que os incrementos de deslocamento administrados são diferentes nas duas curvas. Assim, comprova-se o bom funcionamento desta subrotina em ambas as situações.

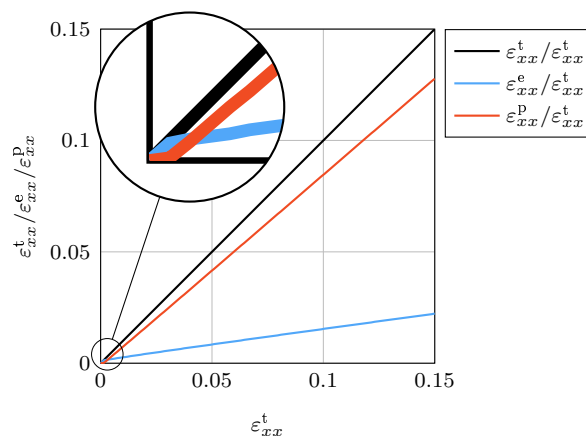


Figura 6.3: Evolução da deformação elástica e plástica com a deformação total.

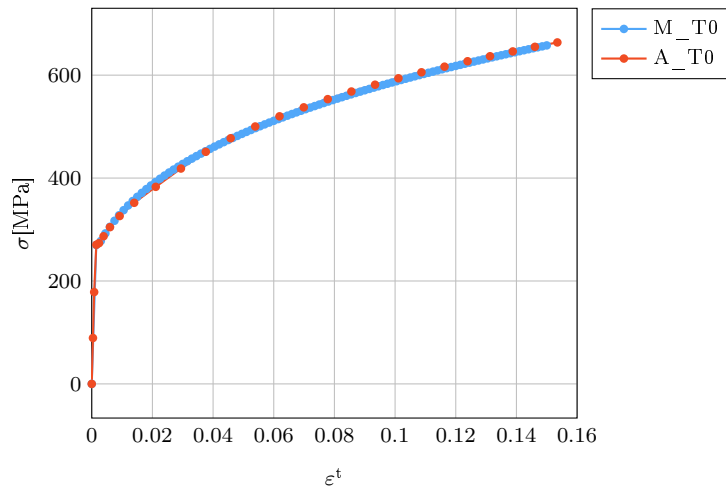


Figura 6.4: Ensaio de tração uniaxial a 0° com os parâmetros da tabela 6.3.

Na figura 6.5 representa-se o ensaio de corte combinado com os ensaios de Bauschinger. Como seria expectável, após a análise da figura 6.4, os resultados mostram uma coerência e aproximação numérica considerável.

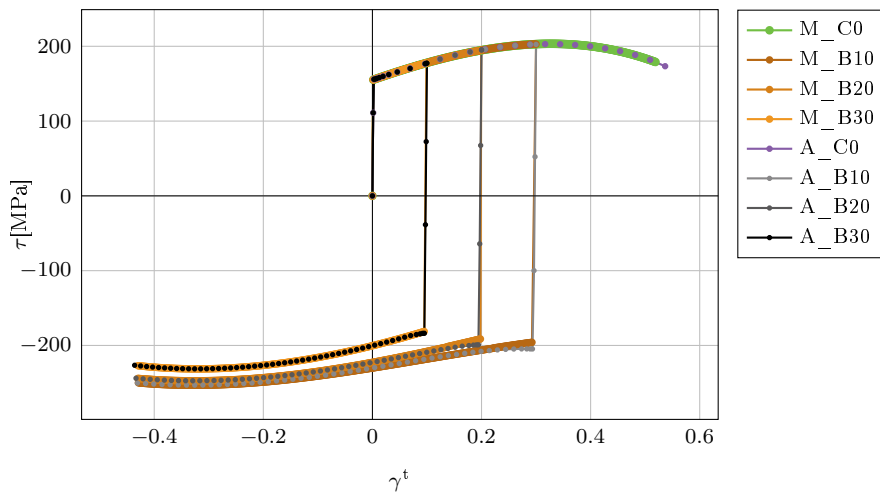


Figura 6.5: Ensaio de corte a 0° e Bauschinger 10%, 20% e 30% com os parâmetros da tabela 6.3.

Da mesma forma, encontram-se descritos na tabela 6.4 os parâmetros material que deram origem aos resultados demonstrados nas figuras 6.6 e 6.7 que evidenciam, respectivamente, as curvas do ensaio T0 e dos ensaios C0, B10, B20 E B30. Estes têm por objetivo promover a obtenção do comportamento de um alumínio genérico bem como assegurar as características mecânicas associadas a este.

As curvas representadas nas figuras 6.6 e 6.7 são referentes ao modelo constitutivo composto pelo critério de cedência de von Mises com as leis de encruamento isotrópico de Voce e cinemático de Prager. Em ambas as figuras pode-se observar uma sobreposição dos conjuntos de pontos obtidos.

Tabela 6.4: Parâmetros de um alumínio genérico.

Características do material		
Módulo de Young	(E)	70 [GPa]
Coefficiente de Poisson	(ν)	0,34
Tensão de cedência	(σ_y)	336 [MPa]
Encruamento isotrópico de Voce		
Coefficiente de encruamento isotrópico	(σ_{sat})	586 [MPa]
Coefficiente de encruamento isotrópico	(C_y)	6,24
Encruamento cinemático de Prager		
Coefficiente de encruamento cinemático	(c)	0,1 [GPa]

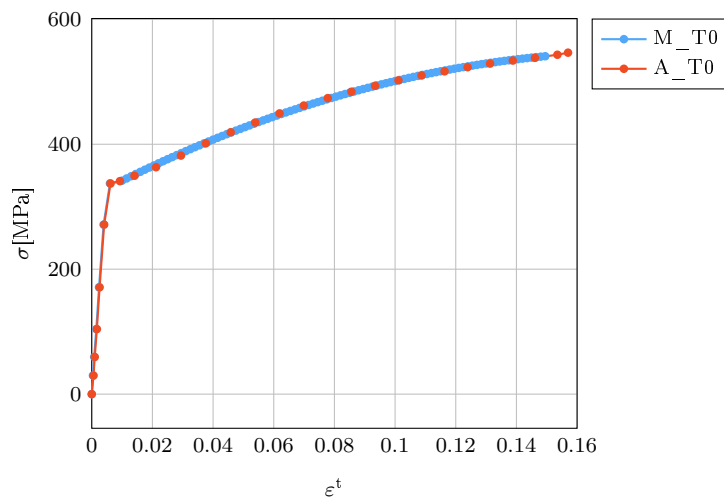


Figura 6.6: Ensaio de tração uniaxial a 0° com os parâmetros da tabela 6.4.

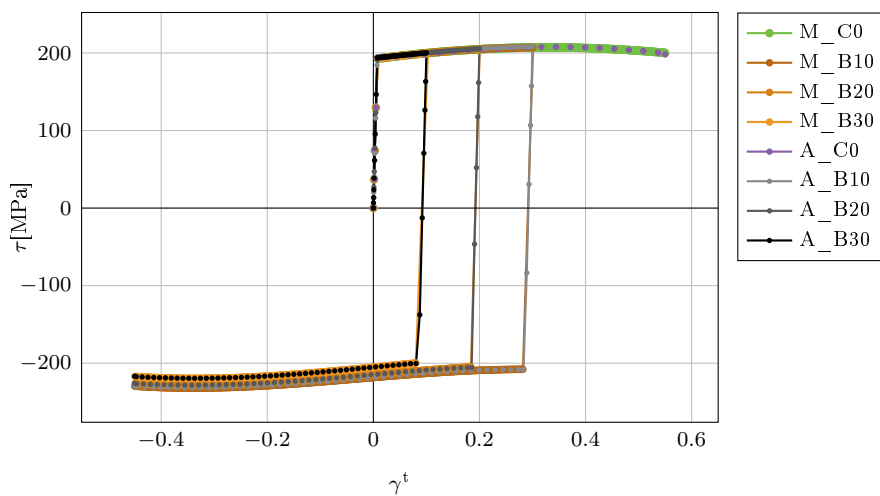


Figura 6.7: Ensaio de corte a 0° e Bauschinger 10%, 20% e 30% com os parâmetros da tabela 6.4.

Atendendo aos resultados obtidos, deu-se por validada a ferramenta quanto ao seu funcionamento e adequabilidade de utilização do critério de plasticidade de von Mises assim como a evolução das leis de encruamento isotrópico e cinemático.

Para a validação da implementação dos modelos para critérios de cedência anisotrópicos selecionaram-se dois materiais reais representativos, o Aço DP600 e o Alumínio 6111-T4, sendo que estes dois apresentam comportamentos mecânicos diferentes, o que aumenta o espectro de possibilidades de teste da ferramenta desenvolvida no decorrer deste trabalho.

As características mecânicas do aço encontram-se listadas na tabela 6.5. Desta forma, para se proceder à implementação deste material numa subrotina optou-se pela escolha do critério de plasticidade de Hill'48, uma vez que é aquele que melhor se adequa à representação deste material[10]. Após a escolha do critério procedeu-se ao cálculo dos parâmetros F, G, H, L, M e N, através das fórmulas descritas na secção 2.3.2 e listadas na tabela 6.6.

Tabela 6.5: Características do Aço DP600.

Características do material		
Módulo de Young	(E)	200 [GPa]
Coefficiente de Poisson	(ν)	0,3
Tensão de cedência	(σ_y)	350 [MPa]
Coefficiente de anisotropia	(r_0)	0,73
Coefficiente de anisotropia	(r_{45})	0,90
Coefficiente de anisotropia	(r_{90})	0,93
Encruamento isotrópico de Hollomon		
Coefficiente de encruamento isotrópico	(H)	1070 [MPa]
Coefficiente de encruamento isotrópico	(n)	0,15

Tabela 6.6: Parâmetros de anisotropia do critério de Hill'48 do Aço DP600.

F	G	H	L	M	N
0,5780	0,4220	0,4537	1,5000	1,5000	1,4445

De modo a validar a implementação dos critérios de cedência anisotrópicos, após a implementação deste modelo material, fizeram-se os ensaios T0, T45, T90, C0, C45 e C90. De modo a avaliar a resposta do material a uma inversão da direção de plasticidade, realizaram-se também os ensaios de B10, B20 e B30, como já tinha sido realizado na validação do critério da ferramenta com um critério isotrópico.

De modo a antever e compreender melhor o fenómeno de cedência do material, é mostrado na figura 6.8 a superfície de cedência do Aço DP600, representado pelo critério de Hill'48 e a comparação com a superfície de cedência isotrópica.

Na figura 6.9 podem observar-se as curvas tensão-deformação para os ensaios de tração realizados. Nesta pode ver-se que o material apresenta um comportamento mais rígido às solicitações a 0°. A 90° obteve-se a curva com os valores mais baixos de tensão, tendo a curva a 45° apresentado um comportamento intermédio devido aos valores de

anisotropia característicos deste material.

Na figura 6.10 observa-se que as diferenças nos ensaios de corte nas várias direções não apresentaram grande discrepância entre si. Este fato é explicado pela pequena diferença que se registra entre os coeficientes M, N e L, o que leva à obtenção de curvas muito semelhantes entre si. As curvas dos ensaios de Bauschinger evidenciam valores de encruamento esperados de acordo com o tipo de comportamento exibido no ensaio mostrado.

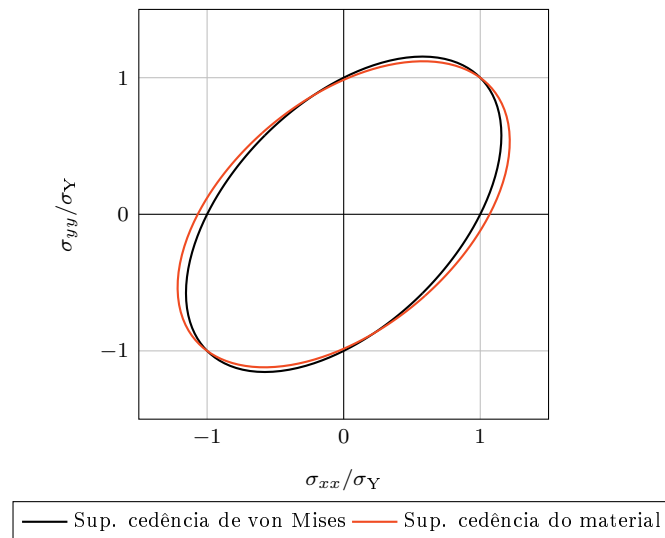


Figura 6.8: Representação da superfície de cedência do Aço DP600.

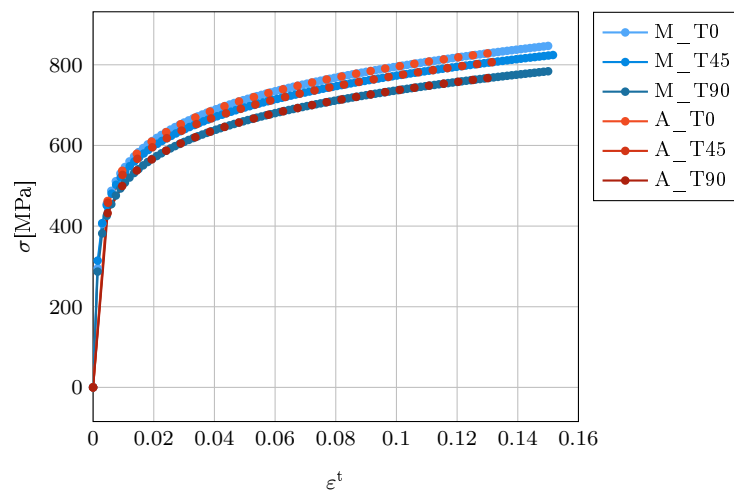


Figura 6.9: Ensaios de tração nas várias direções do Aço DP600, descrito na tabela 6.5.

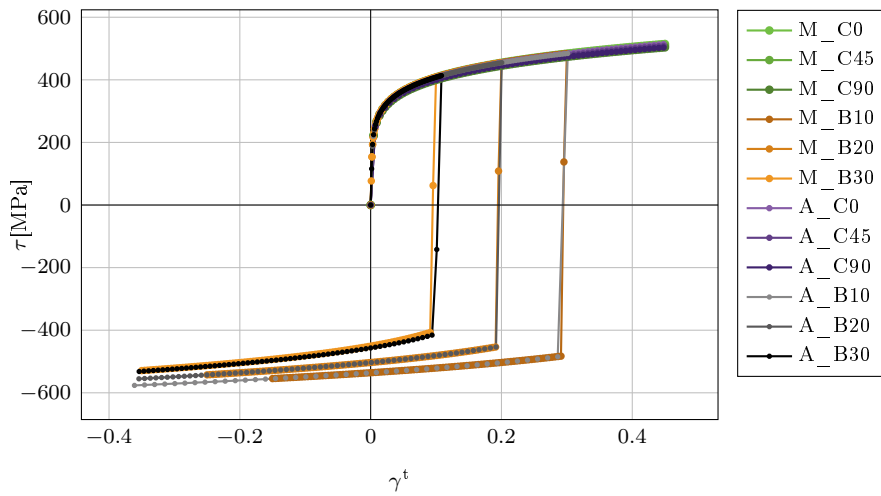


Figura 6.10: Ensaios de corte nas várias direções e ensaios de Bauschinger do Aço DP600, descrito na tabela 6.5.

Através da análise das figuras pode-se então concluir que as subrotinas criadas pela ferramenta estão a funcionar de acordo com o esperado.

Ainda com a intenção de validação, fizeram-se ensaios usando a subrotina com o modelo de Hill com parâmetros isentrópicos, tabela 6.7, mantendo as restantes condições do material inalteradas. Destes ensaios resultam as curvas apresentadas nas figuras 6.11 e 6.12. Estas, apesar de não demonstrarem o comportamento real do material selecionado, revalidam a metodologia seguida. Salienta-se que as curvas dos ensaios T0, T45 e T90, são coincidentes, assim como as curvas dos ensaios C0, C45 e C90, comprovando assim a correta implementação dos modelos material.

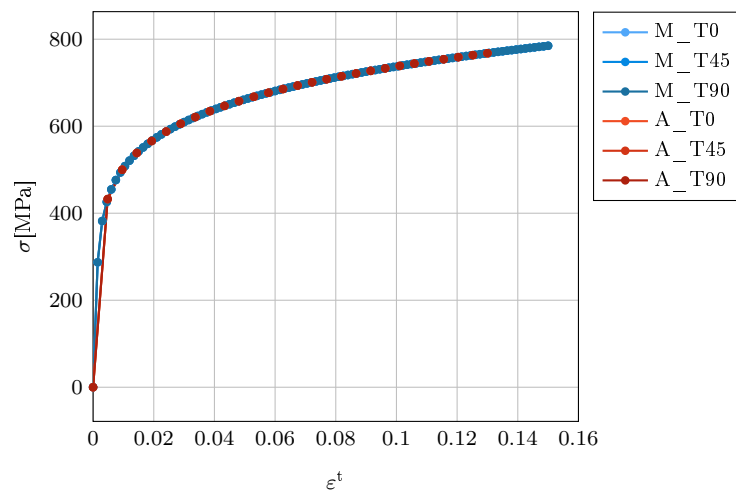


Figura 6.11: Ensaios de tração nas várias direções do Aço DP600, com parâmetros isentrópicos descritos na tabela 6.7.

Tabela 6.7: Parâmetros isentrópicos para o critério de Hill'48.

F	G	H	L	M	N
0,5	0,5	0,5	1,5	1,5	1,5

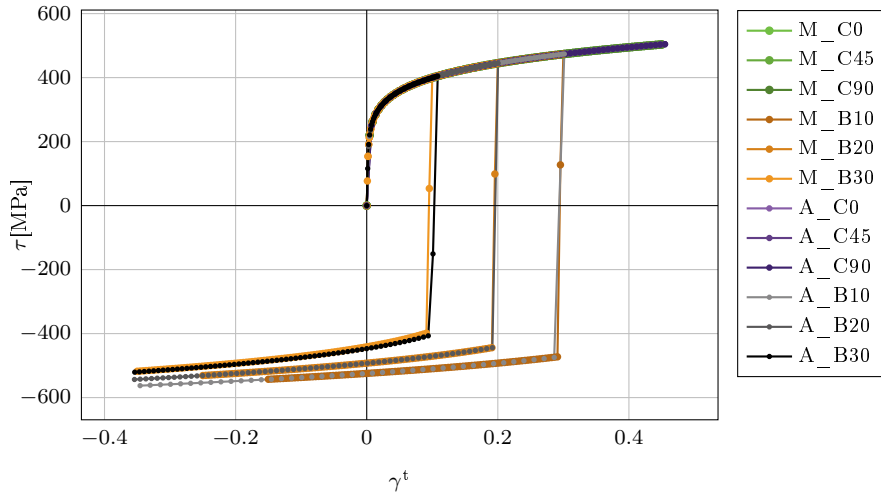


Figura 6.12: Ensaios de corte nas várias direções e ensaios de Bauschinger do Aço DP600, com parâmetros isentrópicos descritos na tabela 6.7.

Seguindo a mesma lógica tomada anteriormente, podem-se observar as propriedades do Alumínio 6111-T4 na tabela 6.8. Estas, originam os parâmetros do critério de cedência utilizado nos ensaios, presentes na tabela 6.9. Os resultados destes ensaios encontram-se nas figuras 6.14 e 6.15, representando respetivamente, os ensaios T0, T45 e T90 e, os ensaios C0, C45, C90, B10, B20 e B30. A figura 6.13 representa a superfície de cedência do Alumínio 6111-T4 e a superfície equivalente isotrópica.

Tabela 6.8: Características do Alumínio 6111-T4.

Características do material		
Módulo de Young	(E)	69 [GPa]
Coefficiente de Poisson	(ν)	0,342
Tensão de cedência	(σ_y)	161 [MPa]
Coefficiente de anisotropia	(r_0)	0,89
Coefficiente de anisotropia	(r_{45})	0,61
Coefficiente de anisotropia	(r_{90})	0,66
Encruamento isotrópico de Voce		
Coefficiente de encruamento isotrópico	(σ_{sat})	360 [MPa]
Coefficiente de encruamento isotrópico	(C_y)	8,448

Tabela 6.9: Parâmetros de anisotropia do critério de Hill'48 do Alumínio 6111-T4.

F	G	H	L	M	N
0,5291	0,4749	0,7135	1,5000	1,5000	1,3793

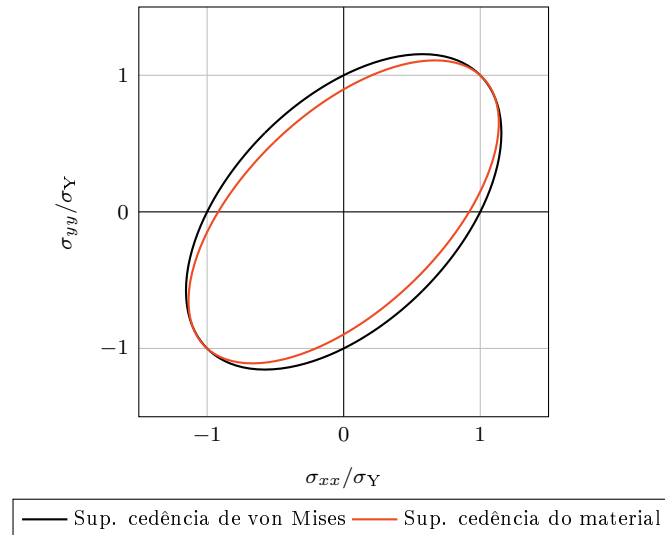


Figura 6.13: Representação da superfície de cedência do Alumínio 6111-T4.

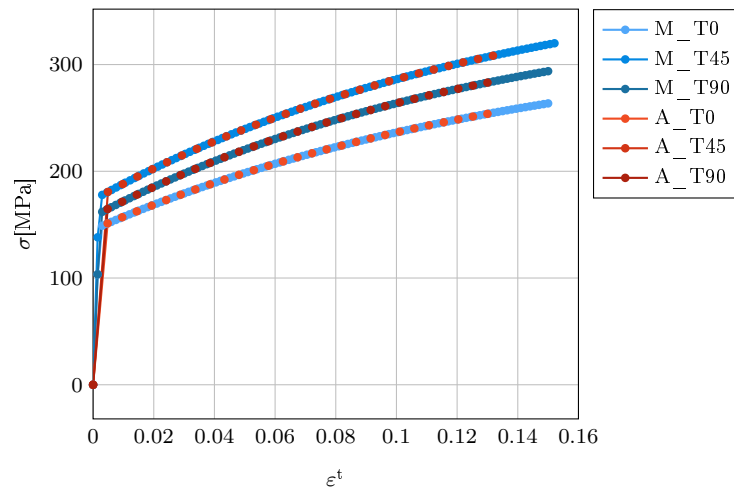


Figura 6.14: Ensaios de tração nas várias direções do Alumínio 6111-T4, descrito na tabela 6.8.

Atendendo então à figura 6.14 pode-se observar que a curva tensão-deformação do ensaio T0 registou o conjunto de valores mais baixos e a curva do ensaio T45 registou os valores mais elevados. Este comportamento segue a mesma linha de comportamento que já se havia registado nos ensaios do aço, tendo em ambos os casos, os resultados das curvas sido coerentes com os valores r_0 , r_{45} e r_{90} do material. Observando este fato e a similaridade dos resultados obtidos em ambos os casos pode-se afirmar que a ferramenta

numérica desenvolvida gera subrotinas cuja integração dos modelos elastoplásticos é eficaz.

Na figura 6.15, que representa uma combinação dos ensaios C0, C45, C90, B10, B20 e B30, apesar da proximidade dos valores das curvas tensão-deformação de corte nas várias direções, observa-se uma predominância para a curva a 0° apresentar valores mais elevados de tensão e a curva a 90° apresentar valores mais reduzidos. Este fato é explicável pela observação dos parâmetros de anisotropia do critério de Hill'48, que resultam do cálculo com os coeficientes de anisotropia do material.

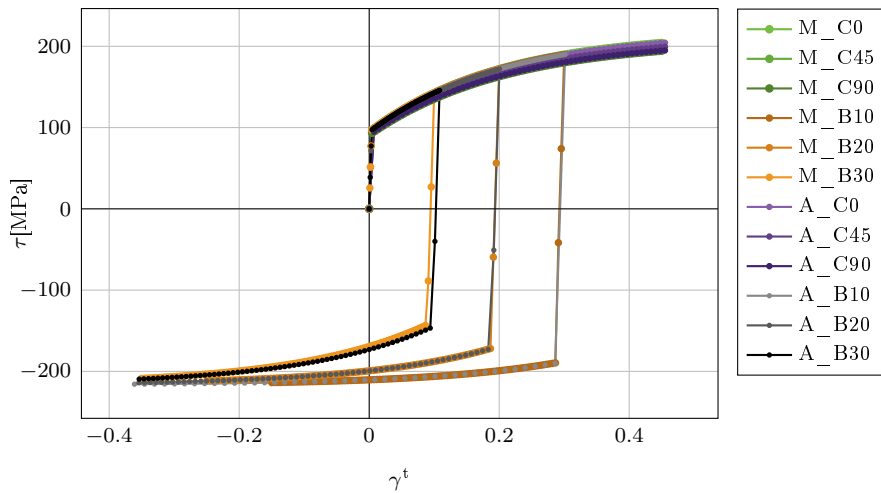


Figura 6.15: Ensaios de corte nas várias direções e ensaios de Bauschinger do Alumínio 6111-T4, descrito na tabela 6.8.

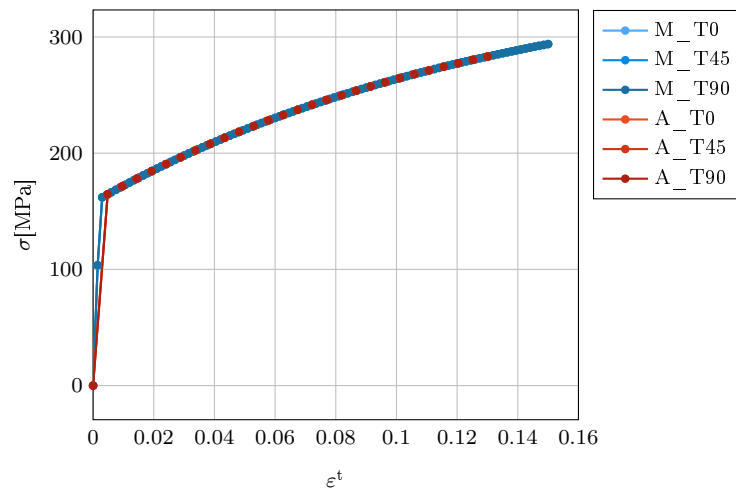


Figura 6.16: Ensaios de tração nas várias direções do Alumínio 6111-T4, com parâmetros isentrópicos descritos na tabela 6.7.

À semelhança do que se efetuou para o aço, de modo a efetuar-se uma correta validação do funcionamento de toda a subrotina, introduziram-se os parâmetros isentrópicos

no modelos implementado e resultaram as figuras 6.16 e 6.17. Da mesma forma que se demonstrou anteriormente, os resultados obtidos foram os esperados, estando para este modelo também validado o bom funcionamento da subrotina gerada.

Desta forma, considerara-se validada a ferramenta numérica desenvolvida no que toca à implementação dos modelos material.

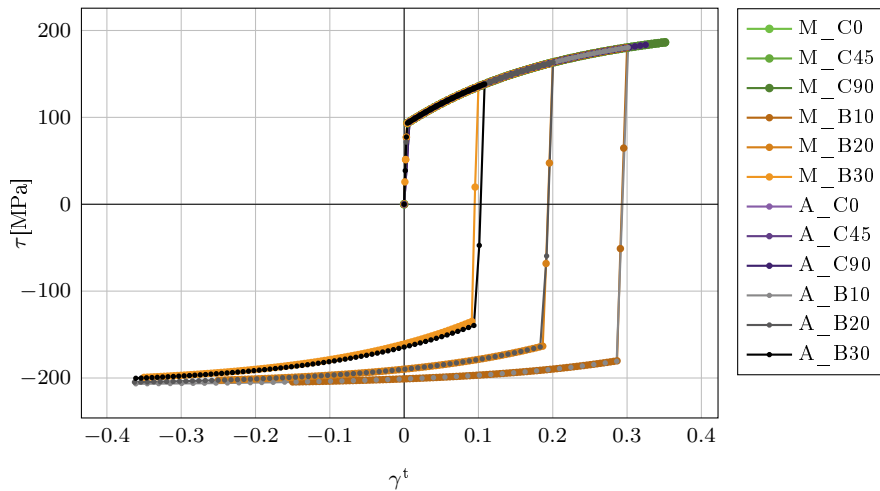


Figura 6.17: Ensaios de corte nas várias direções e ensaios de Bauschinger do Alumínio 6111-T4, com parâmetros isentrópicos descritos na tabela 6.7.

6.3 Validação do Cálculo do Módulo Elastoplástico Consistente

Demonstra-se que o uso do módulo elastoplástico consistente desempenha um papel crucial na convergência quadrática do método de integração implícito. Este é a principal influência no tamanho máximo dos incrementos realizados para se obter um dado estado de deformação do corpo. A convergência do cálculo iterativo encontra-se também fortemente ligada ao número global de iterações do método de Newton na solução de problemas incrementais.

Na figura 6.18 é possível observar as diferenças, através da análise de apenas duas iterações em regime elastoplástico usando o módulo elástico e o módulo elastoplástico. A utilização do módulo elástico, que é constante, provoca ao longo das iterações um intervalo constante entre as várias iterações. Ao manter o declive observado na parte elástica do material provoca um elevado número de iterações para se obter um estado de deformação do material. Por outro lado, o módulo elastoplástico é atualizado a cada iteração, o que faz com que se obtenha uma convergência muito mais rápida e com recurso a um número muito mais reduzido de iterações uma vez que é o expectável com a implementação do módulo elastoplástico consistente.

Nesta secção são apresentados os resultados globais da metodologia geral apresentada na secção 4.4.1, responsável pela formulação do módulo elastoplástico consistente. A eficiência e robustez da metodologia apresentada são examinadas através da aplicação desta a um material, comparando-se o desempenho da mesma ao uso comum do módulo

de rigidez elástica para o cálculo do equilíbrio de forças ao longo das iterações.

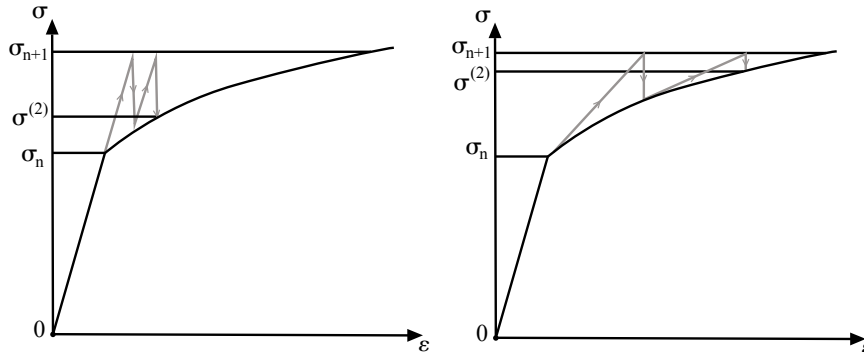


Figura 6.18: Iterações do módulo elástico e elastoplástico. Adaptado de [13].

Numa primeira fase de validação dos resultados, foram comparadas 3 situações distintas de modo a compreender o comportamento de cada uma em separado. O primeiro método de comparação a ser utilizado usa as curvas tensão e tensão tentativa - deformação com recurso a uma subrotina gerada pela ferramenta desenvolvida, sem a implementação do módulo elastoplástico consistente. Desta forma, recorreu-se à subrotina, validada anteriormente que respeita os parâmetros da tabela 6.8, com o uso do critério de cedência de von Mises e encruamento isotrópico.

Tendo sido efetuada a simulação com recurso ao módulo elástico apenas, como seria de esperar, o resultado traduz-se em inúmeras iterações obtidas. Este fato explica-se devido ao módulo elástico apresentar um valor constante ao longo da simulação.

O segundo conjunto de resultados foi obtido recorrendo-se ao uso de uma subrotina otimizada, disponível em [47], com o critério de von Mises e procedeu-se à implementação da lei de encruamento isotrópico de Voce uma vez que o cálculo do módulo elastoplástico consistente não iria ser afetado com esta implementação. Por fim, executou-se a rotina gerada pela ferramenta desenvolvida, com os parâmetros descritos na tabela 6.4 e obtiveram-se os resultados representados a vermelho na figura 6.19.

Como se pode constatar, nesta análise, o número de iterações do ensaio usado, a rotina cujo módulo elastoplástico foi calculado de forma analítica e a gerada automaticamente pela ferramenta desenvolvida é o mesmo. Apesar de se notarem umas ligeiras diferenças na segunda iteração, possivelmente resultantes dos pontos obtidos durante a transição de regimes, a convergência desta encontra-se assegurada, uma vez que as iterações seguintes levam à obtenção de valores muito próximos de tensão e deformação.

Este resultado é o esperado uma vez que as variáveis que compõem o cálculo do módulo elastoplástico consistente são também usadas e implementadas no ciclo iterativo de Newton. Deste modo restava apenas validar a metodologia genérica de cálculo apresentada no presente trabalho.

Para se efetuar a validação completa da dedução e implementação do módulo elastoplástico consistente efetuou-se uma simulação com um material real, neste caso, o Aço DP600 cujas curvas dos ensaios de tração, corte e Bauschinger já tinham sido validadas. Como referido anteriormente este modelo material é descrito pelo critério de cedência de Hill'48 e pela lei de encruamento de Swift, estando os parâmetros deste modelo descritos nas tabelas 6.5 e 6.6 e o resultado desta simulação representado na figura 6.20.

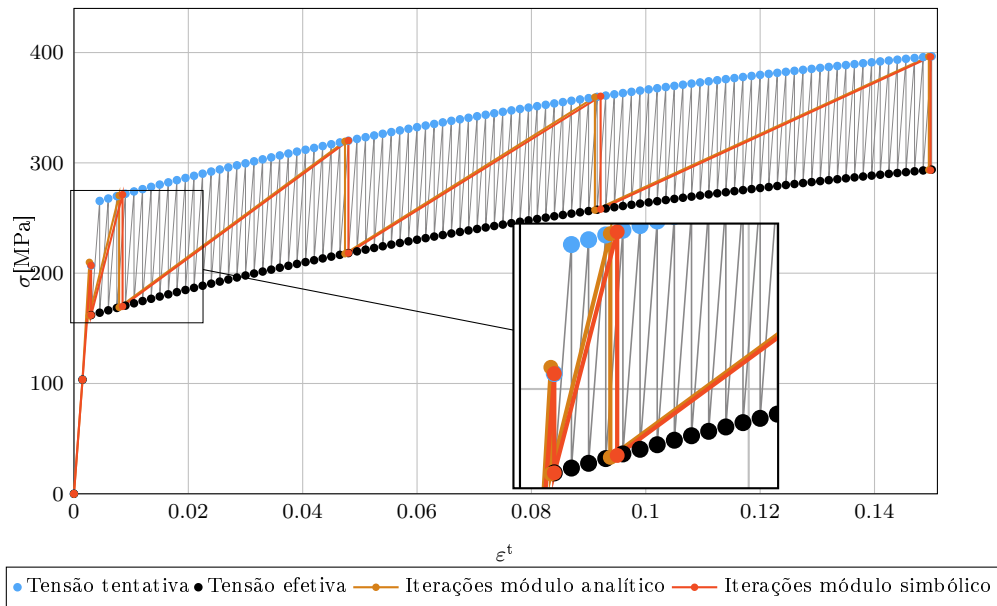


Figura 6.19: Comparação das iterações obtidas no ensaio T0 recorrendo a múltiplas rotinas.

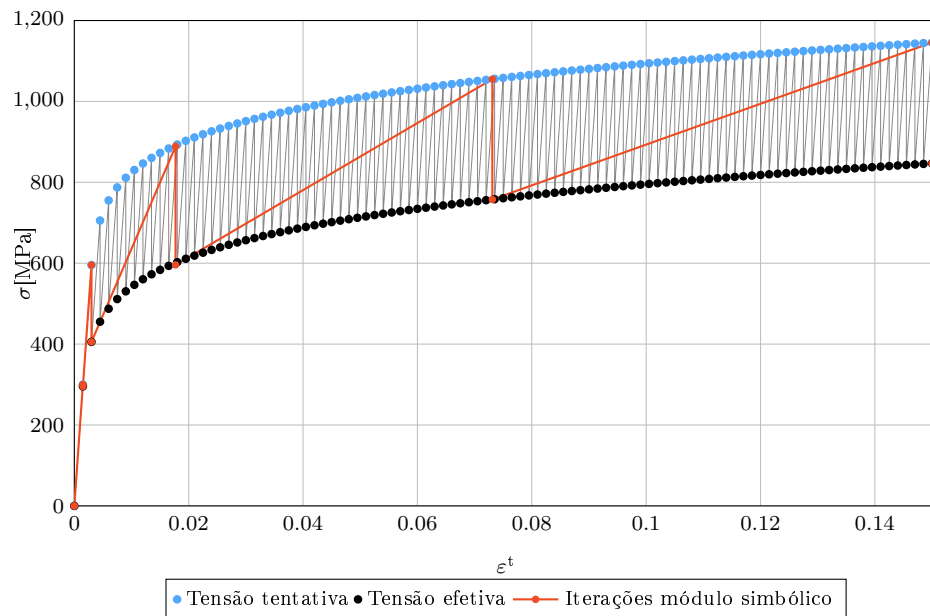


Figura 6.20: Comparação das iterações obtidas no ensaio T0 com várias rotinas para o Aço DP600.

Através da observação dos resultados pode constatar-se que a rotina na qual foi implementado o módulo elastoplástico foi muito mais eficiente, tendo sido obtido o mesmo estado de deformação para o ensaio T0. Este fato leva à conclusão que, apesar da ligeira

diferença obtida na primeira iteração da figura 6.19, o comportamento da subrotina é constante e resulta na obtenção dos mesmos resultados que se obtém usando uma subrotina com módulo elástico.

Capítulo 7

Considerações Finais

7.1 Conclusões

No decorrer deste trabalho foi desenvolvida uma ferramenta em ambiente MatLab de integração de modelos elastoplásticos em programas comerciais do MEF. Para o efeito foi escolhido o programa Abaqus, para o qual se efetuou o desenvolvimento da ferramenta e da metodologia de implementação dos modelos material.

Esta implementação, no Abaqus, é conseguida com recurso à criação de subrotinas de utilizador, UMAT's. Sendo geradas de forma automática com recurso ao cálculo simbólico, as subrotinas, constituem um dos *output's* da ferramenta numérica. Esta, além de gerar rotinas completas e válidas para utilizar no programa de elementos finitos Abaqus, proporciona ao utilizador a possibilidade de visualizar o comportamento representativo do material e a evolução da plasticidade deste.

Os ensaios realizados pela ferramenta numérica sobre um ponto de integração infinitesimal são importantes uma vez que refletem o comportamento do modelo material inserido. Os resultados destes ensaios são então exibidos graficamente e exportados sob a forma de curvas tensão-deformação para posterior utilização.

Esta ferramenta foi testada com vários tipos de modelos constitutivos de material, podendo estes ser ou não representativos de materiais existentes. Foram utilizados critérios de plasticidade contínuos isotrópicos e anisotrópicos na composição dos modelos de material que permitiram a validação da ferramenta. Nestes modelos a evolução da plasticidade do material foi assegurada por leis de encruamento isotrópico e cinemático.

Foi validada também a implementação do módulo elastoplástico consistente que assegura a convergência do método de integração implícito. Esta foi conseguida com recurso à comparação de resultados entre uma subrotina obtida de forma analítica e uma obtida de forma automática pela ferramenta. Foram também comparados os resultados obtidos com o mesmo modelo de material com e sem a implementação do módulo elastoplástico consistente.

Todas as partes integrantes da ferramenta numérica foram sujeitas a uma análise cuidada e todas assumiram um comportamento dentro do esperado, validando desta forma a metodologia e a ferramenta desenvolvidas. É então possível afirmar que os resultados obtidos foram de encontro ao que seria expectável, tendo sido cumpridos os objetivos do trabalho.

7.2 Trabalhos Futuros

Na sequência do trabalho realizado, surgem algumas propostas de trabalhos futuros que visam a continuidade deste trabalho e maior abrangência:

- Criação da possibilidade do utilizador definir o programa ao qual se destina a subrotina gerada de entre uma pré-seleção, através da generalização e compatibilização da ferramenta com outros programas comerciais do MEF para além do Abaqus.
- Criação da possibilidade de introdução de múltiplos encruamentos cinemáticos.
- Desenvolvimento e implementação de uma metodologia que permita a introdução de critérios de plasticidade descontínuos, de modo a superar uma atual limitação da ferramenta.
- Possibilidade de introdução de modelos de material tendo em conta a temperatura, de modo a poder alargar a aplicabilidade da ferramenta de implementação a modelos viscoplásticos.

Anexo A

Segmentos de Código Desenvolvido

A.1 Conversão das Leis

```
1 function [cc_inline,cc_sym,e_iso_inline,e_iso_sym,e_cin_inline,...
2         e_cin_sym]=multiple_manipulation(cc,e_iso,e_cin)
3 %%Conversão de string para inline
4 cc_inline=inline(cc);%%(Critério de Cedência)
5 e_iso_inline=inline(e_iso);%%(Lei de encruamento isotrópico)
6 e_cin_inline=inline(e_cin);%%(Lei de encruamento cinemático)
7 %%Conversão de inline para sym
8 cc_sym=inline_to_sym(cc_inline);%%(Critério de Cedência)
9 e_iso_sym=inline_to_sym(e_iso_inline);%%(Lei de encruamento isotrópico)
10 e_cin_sym=inline_to_sym(e_cin_inline);%%(Lei de encruamento cinemático)
11 end
```

A.2 Conversão *Inline* Para Simbólico

```
1 function f_sym=inline_to_sym(f_inline)
2 string=argnames(f_inline)%%(Argumentos da função de entrada)
3 [K,~]=size(string);%%(Número de argumentos.)
4 AUX=string{1};
5 eval(['syms ',string{1}])%%(Declaração dos argumentos)
6 if K>1
7     for k=2:K
8         eval(['AUX=[',AUX,',',char(string{k}),',',']']);
9         eval(['syms ',string{k}])
10    end
11 end
12 ([f_sym=f_inline(',AUX,');]);
```

A.3 Cálculo Simbólico de Derivadas

```

1  function [V,H,KA]=sym_cal(cc_sym,e_iso_sym,e_cin_sym)
2  syms sx sy sz txy txz tyz
3  S=[sx sy sz txy txz tyz];
4  syms eqplas deqpl
5  %% V -> Primeira derivada do critério de cedência e ordem a S
6  V=jacobian(cc_sym,S);
7  %% H -> A'i
8  H=diff(e_iso_sym,eqplas,1);
9  %% KA -> A'k
10 KA=diff(e_cin_sym,deqpl,1);
11 end

```

A.4 Leitura Automática de Variáveis

```

1  function [S_a,S_cc,S_iso,S_cin]=StringReading(props,cc,e_iso,e_cin,...
2  cc_inline,e_iso_inline,e_cin_inline)
3  S_a=''; %% Parâmetros gerais
4  for k=3:length(props)
5      S_a=strcat(S_a,sprintf('a%d=%d',k-2,props(k)),',');
6  end
7  aux=argnames(cc_inline); %% Critério de cedência
8  S_cc='';
9  for k=1:length(aux)
10     S_cc=strcat(S_cc,char(aux(k)),',');
11 end
12 S_cc=S_cc(1:length(S_cc)-1);
13 aux=argnames(e_iso_inline); %% Lei de ncruamento isotrópico
14 S_iso='';
15 for k=1:length(aux)
16     S_iso=strcat(S_iso,char(aux(k)),',');
17 end
18 S_iso=S_iso(1:length(S_iso)-1);
19 if 0==inline2sym(e_iso_inline)
20     S_iso='0';
21 end
22 aux=argnames(e_cin_inline); %% Lei de ncruamento cinemático
23 S_cin='';
24 for k=1:length(aux)
25     S_cin=strcat(S_cin,char(aux(k)),',');
26 end
27 S_cin=S_cin(1:length(S_cin)-1);
28 if 0==inline2sym(e_cin_inline)
29     S_cin='0';
30 end
31 end

```


Bibliografia

- [1] O. Cazacu and B. Revil-Baudard, "New three-dimensional plastic potentials for porous solids with a von mises matrix," *Comptes Rendus Mecanique*, vol. 343, no. 2, pp. 77 – 94, 2015. Mechanics of granular and polycrystalline solids.
- [2] J. Bishop and R. Hill, "Xlvi. a theory of the plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stresses.," *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 42, no. 327, pp. 414–427, 1951.
- [3] W. Gambin and F. Barlat, "Modeling of deformation texture development based on rate independent crystal plasticity," *International Journal of Plasticity*, vol. 13, no. 1, pp. 75–85, 1997.
- [4] B. Revil-Baudard and O. Cazacu, "Role of the plastic flow of the matrix on yielding and void evolution of porous solids: Comparison between the theoretical response of porous solids with tresca and von mises matrices," *Mechanics Research Communications*, vol. 56, pp. 69 – 75, 2014.
- [5] A. Maniatty, J.-S. Yu, and T. Keane, "Anisotropic yield criterion for polycrystalline metals using texture and crystal symmetries," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 36, no. 35, pp. 5331–5355, 1999.
- [6] F. Barlat, D. J. Lege, and J. C. Brem, "A six-component yield function for anisotropic materials," *International Journal of Plasticity*, vol. 7, no. 7, pp. 693–712, 1991.
- [7] S.-I. Oh and T. Altan, *Metal forming and the finite-element method*. Oxford university press, 1989.
- [8] F. Teixeira-Dias, J. Pinho-da Cruz, R. A. Fontes Valente, and R. J. Alves de Sousa, *Método dos Elementos Finitos, Técnicas de Simulação Numérica em Engenharia*. ETEP - Edições Técnicas e Profissionais, 2010.
- [9] A. S. Khan and S. Huang, *Continuum theory of plasticity*. New York : Wiley, 1995. "A Wiley-Interscience publication."
- [10] F. Dunne and N. Petrinic, *Introduction to Computational Plasticity*. Oxford series on materials modelling, OUP Oxford, 2005.
- [11] H. Tresca, *Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions*. Gauthier-Villars, 1864.

- [12] R. v. Mises, "Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand," *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, vol. 1913, pp. 582–592, 1913.
- [13] T. J. a. Grilo, *Estudo de Modelos Constitutivos Anisotrópicos Para Chapas Metálicas*. Msc, Universidade de Aveiro, 2011.
- [14] F. Barlat, H. Aretz, J. W. Yoon, M. E. Karabin, J. C. Brem, and R. E. Dick, "Linear transformation-based anisotropic yield functions," *International Journal of Plasticity*, vol. 21, pp. 1009–1039, 2005.
- [15] P. Prates, *Inverse Methodologies for Identifying Constitutive Parameters of Metal Sheets Dissertation*. Phd, Faculty of Sciences and Technology, University of Coimbra, 2014.
- [16] J. Salençon, *De l'élasto-plasticité au calcul à la rupture*. Editions Ecole Polytechnique, 2002.
- [17] J. A. M. de Pinho-da Cruz, *Caracterização Termomecânica de Materiais Multifásicos Utilizando Procedimentos de Homogeneização*. Phd, Universidade de Aveiro, 2007.
- [18] J. L. D. C. M. Alves, *Simulação numérica do processo de estampagem de chapas metálicas - Modelação mecânica e métodos numéricos*. Phd, Universidade do Minho, 2003.
- [19] X. Yu, W. Cheng, and J. Chen, "A yield criterion for isotropic porous media for the meso-scale range," *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, vol. 59, no. 1, pp. 57 – 61, 2012.
- [20] D. Banabic, F. Barlat, O. Cazacu, and T. Kuwabara, "Advances in anisotropy and formability," *International journal of material forming*, vol. 3, no. 3, pp. 165–189, 2010.
- [21] J. Z. Vinuela and J. Pérez-Castellanos, "The anisotropic criterion of von mises (1928) as a yield condition for pmmcs. a calibration procedure based on numerical cell-analysis," *Composite Structures*, vol. 134, pp. 613 – 632, 2015.
- [22] R. W. Logan and W. F. Hosford, "Upper-bound anisotropic yield locus calculations assuming pencil glide," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 22, pp. 419–430, 1980.
- [23] J. B. Stewart and O. Cazacu, "Analytical yield criterion for an anisotropic material containing spherical voids and exhibiting tension-compression asymmetry," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 48, no. 2, pp. 357 – 373, 2011.
- [24] F. Kabirian and A. S. Khan, "Anisotropic yield criteria in stress space for materials with yield asymmetry," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 67 - 68, pp. 116 – 126, 2015.
- [25] N. M. Souto, *Caracterização do Comportamento Mecânico de Aços de Alto Desempenho*. Msc, Universidade de Aveiro, 2011.

- [26] D. Banabic, *Sheet Metal Forming Processes*. 2010.
- [27] Y. Yan, H. Wang, and Q. Li, “The inverse parameter identification of hill 48 yield criterion and its verification in press bending and roll forming process simulations,” *Journal of Manufacturing Processes*, vol. 20, Part 1, pp. 46 – 53, 2015.
- [28] H. Wang, M. Wan, X. Wu, and Y. Yan, “The equivalent plastic strain-dependent yld2000-2d yield function and the experimental verification,” *Computational Materials Science*, vol. 47, no. 1, pp. 12 – 22, 2009.
- [29] L. Taylor, J. Cao, A. Karafillis, and M. Boyce, “Numerical simulations of sheet-metal forming,” *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 50, no. 1-4, pp. 168 – 179, 1995. 2nd International Conference on Numerical Simulation of 3-D Sheet Metal Forming Processes.
- [30] B. Barroqueiro, *Modelação e Análise Numérica de Tratamentos Térmicos*. Msc, Universidade de Aveiro, 2013.
- [31] J. L. Chaboche, “A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories,” *International Journal of Plasticity*, vol. 24, pp. 1642–1693, 2008.
- [32] M. A. Crisfield, *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Advanced Topics*. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1st ed., 1997.
- [33] R. W. Clough, “Original formulation of the finite element method,” *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 7, no. 2, pp. 89–101, 1990.
- [34] S. Silva, *Simulação numérica e optimização em conformação plástica de chapas metálicas*. PhD thesis, Universidade de Aveiro, 2010.
- [35] F. Pantke, S. Edelkamp, and O. Herzog, “Symbolic discrete-time planning with continuous numeric action parameters for agent-controlled processes,” *Mechatronics*, pp. –, 2015.
- [36] G. Migoni, M. Bortolotto, E. Kofman, and F. Cellier, “Linearly Implicit Quantization-Based Integration Methods for Stiff Ordinary Differential Equations,” *Simulation Modelling Practice and Theory*, vol. 35, pp. 118–136, 2013.
- [37] C. L. Dym and I. H. Shames, *Solid mechanics: a variational approach [by] Clive L. Dym [and] Irving H. Shames*. McGraw-Hill New York, 1973.
- [38] Y. Zhou, Z. Lun, E. Kalogerakis, and R. Wang, “Implicit integration for particle-based simulation of elasto-plastic solids,” *Comput. Graph. Forum*, vol. 32, no. 7, pp. 215–223, 2013.
- [39] K.-J. Bathe, “Advances in finite element procedures for nonlinear dynamic response,” 2009.
- [40] G. Green, *An Essay on the Application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism*. July 1828.
- [41] K.-J. Bathe, *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 1st ed., June 1995.

- [42] J.-S. Kim and K. Wang, "On the asymptotic boundary conditions of an anisotropic beam via virtual work principle," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 48, no. 16 - 17, pp. 2422 – 2431, 2011.
- [43] T. Megson, "Chapter 15 - virtual work and energy methods," in *Structural and Stress Analysis (Third Edition)* (T. Megson, ed.), pp. 433 – 488, Boston: Butterworth-Heinemann, third edition ed., 2014.
- [44] A. Stern and E. Grinspun, "Implicit-Explicit Variational Integration of Highly Oscillatory Problems," *SIAM Multiscale Modeling and Simulation*, vol. 7, no. 4, pp. 1779–1794, 2009.
- [45] L. BÅrgeresson, "{ABAQUS}," in *Coupled Thermo-Hydro-Mechanical Processes of Fractured Media Mathematical and Experimental Studies* (L. J. Ove Stephansson and C.-F. Tsang, eds.), vol. 79 of *Developments in Geotechnical Engineering*, pp. 565 – 570, Elsevier, 1996.
- [46] G. Rio, H. Laurent, and G. BIAÑs, "Asynchronous interface between a finite element commercial software {ABAQUS} and an academic research code herezh++," *Advances in Engineering Software*, vol. 39, no. 12, pp. 1010 – 1022, 2008.
- [47] R. H. Pawtucket and S. Karlsson, *Documentação do Abaqus 6.10*, 2010.
- [48] S. Shiyekar and P. Lavate, "Flexure of power law governed functionally graded plates using {ABAQUS} {UMAT}," *Aerospace Science and Technology*, vol. 46, pp. 51 – 59, 2015.
- [49] R. A. Angélico, *Avaliação de modelos de falhas progressivas para estruturas em material compósito*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2009.
- [50] D. Petcu, D. Tepeneu, M. Paprzycki, and T. Ida, "Symbolic computations on Grids," *Engineering the Grid: status and perspective*, pp. 1–17, 2006.
- [51] H. Iwane, H. Yanami, H. Anai, and K. Yokoyama, "An effective implementation of symbolic-numeric cylindrical algebraic decomposition for quantifier elimination," *Theoretical Computer Science*, vol. 479, pp. 43 – 69, 2013. Symbolic-Numerical Algorithms.
- [52] P. Wang, "Symbolic computation and parallel software," in *Parallel Computation SE - 23* (H. Zima, ed.), vol. 591 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 316–337, Springer Berlin Heidelberg, 1992.
- [53] L. Leff and D. Y. Y. Yun, "The symbolic finite element analysis system," *Computers & Structures*, vol. 41, no. 2, pp. 227–231, 1991.
- [54] J. Nagabhushanam, C. J. Srinivas, and G. H. Gaonkar, "Symbolic generation of elemental matrices for finite element analysis," *Computers & Structures*, vol. 42, no. 3, pp. 375–380, 1992.
- [55] A. MinÃ©, "Backward under-approximations in numeric abstract domains to automatically infer sufficient program conditions," *Science of Computer Programming*, vol. 93, Part B, pp. 154 – 182, 2014. Special Issue on Invariant Generation.

-
- [56] J. Korelc, “Automatic generation of finite-element code by simultaneous optimization of expressions,” *Theoretical Computer Science*, vol. 187, no. 97, pp. 231–248, 1997.
- [57] J. Korelc, “AceGen Contents,” *Environments*, 2009.
- [58] J. M. Young, J. Yao, A. Ramasubramanian, L. A. Taber, and R. Perucchio, “Automatic Generation of User Material Subroutines for Biomechanical Growth Analysis,” *Journal of Biomechanical Engineering*, vol. 132, p. 104505, Sept. 2010.
- [59] J. Young, “Techniques for extended modeling of cardiac morphogenesis in the embryonic chick,” *Thesis*, 2010.
- [60] M. A. Crisfield, *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Essentials*. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1st ed., 1991.
- [61] S. Shima and M. Oyane, “Plasticity theory for porous metals,” *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 18, no. 6, pp. 285 – 291, 1976.
- [62] W. Spitzig, “Effect of hydrostatic pressure on plastic-flow properties of iron single crystals,” *Acta Metallurgica*, vol. 27, no. 4, pp. 523 – 534, 1979.
- [63] M. Vrh, M. Halilović, and B. Štok, “Improved explicit integration in plasticity,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 81, no. 7, pp. 910–938, 2010.
- [64] N. M. Souto, *Desenvolvimento computacional de um teste mecânico para caracterização do material através de análise inversa*. Phd, Universidade de Aveiro, 2015.