



**FLÁVIO MENDES
MARTINS**

**ANÁLISE DINÂMICA DE UM CAPOT DE
AUTOMÓVEL**



**Universidade de
Aveiro 2015**

Departamento de Engenharia Mecânica

**FLÁVIO MENDES
MARTINS**

**ANÁLISE DINÂMICA DE UM CAPOT DE
AUTOMÓVEL**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica, realizada sob a orientação científica do Prof. Doutor Francisco José Malheiro Queirós de Melo do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro

Dedico este trabalho à minha falecida mãe, ao meu pai e em particular à minha família, pelo apoio e compreensão

o júri

Presidente: Prof. Doutor Rui António da Silva Moreira
Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro

Vogal - Arguente Principal: Doutor Jaime Miranda Monteiro
Investigador da Universidade do Porto, Faculdade de Engenharia – Inegi – Instituto de Engenharia
Mecânica e Gestão Industrial

Vocal – Orientador: Prof. Doutor Francisco José Malheiro Queirós de Melo
Professor Associado da Universidade de Aveiro

Agradecimentos

Ao Prof. Doutor Francisco José Malheiro Queirós de Melo pelo o seu útil apoio na conclusão deste trabalho e ao João Torrão pelo os resultados de vibração com o osciloscópio digital

palavras-chave

Técnicas de Vibrações, Frequências Próprias, Capot, Placas Finas, Cascas Finas, PERSPEX, Aço, Sensor Piezoelétrico.

resumo

Como já frequentemente divulgado por investigadores e projectistas em estruturas, as vibrações são um fenómeno presente em praticamente todos os casos de projeto estrutural, mesmo que a frequência associada ao fenómeno vibratório seja muito baixa. Sempre que há uma variação no tempo da causa perturbadora (sendo esta de origem mecânica, como forças ou momentos), é expectável que a estrutura vibre, mesmo que fenómenos dissipativos desta energia dinâmica (amortecimento) acabem por anular a vibração. Neste trabalho não serão desenvolvidos estudos e análise estrutural de componentes da carroçaria, mas sim, apenas um deles, que é o protector do motor, vulgarmente conhecido por *capot* (termo derivado do francês, contudo muito utilizado tanto por pessoal técnico como qualquer utente de um automóvel). Com este trabalho de investigação pretende-se estabelecer uma relação de resultados entre os Métodos Numéricos, Simulação Dinâmica e Método Experimental.

keywords

Vibration techniques, Natural Frequency, Hood, Thin Plates, Thin Shells, plastic PERSPEX, piezoelectric sensor.

abstract

As frequently reported by researchers and designers of structures, vibration is a phenomenon present in nearly all cases of mechanical disturbance, even if the vibration frequency associated with the cause is very low. Whenever there external force system changes with time (involving forces or moments), it is expected that the structure vibrates, even during small time interval due to the effect of dissipative phenomena where damping energy will cancel soon the vibration. This work will not develop studies and structural analysis of body components, but only one of them that is the protector of the engine boot, commonly known as "hood" or *capot* in French. In countries with spoken latin origin language that term still is frequently to mention that component. This research study aims to establish a comparison between the results of natural frequencies with numerical methods in dynamic simulation and an elementary experimental method using piezoelectric sensors.

Índice

0	Estrutura da Tese.....	3
1.	Estado do Conhecimento: Soluções de projeto e modelos de investigação	6
1.1	Introdução; objetivos da engenharia de componentes da carroçaria automóvel	6
1.2	Elementos constituintes de um <i>capot</i> automóvel: materiais e técnicas de fabrico	7
1.3	Métodos de projeto e análise estrutural	10
2.	Introdução ao modelo de deformação de Placas e Cascas	12
2.1	Conceito de Placa Fina: Parâmetros.....	12
2.2	Equações de Equilíbrio.....	14
2.3	Lei de Hooke: relações Tensão-Deformação	16
3.	Cascas	17
3.1	Geometria: Parâmetros Geométricos.....	17
3.2	Modelo de Membrana	18
3.3	Modelo Geral: forças de Membrana e de flexão	20
3.4	Equações de Equilíbrio	20
4.1	Introdução	22
4.2	Estrutura do Método de Ritz aplicado ao problema de flexão de placas retangulares finas	25
4.2.1	Breve referência à solução com séries trigonométricas (solução de Navier) 25	
4.2.2	Método de Ritz: função potencial quadrática em problemas de placas retangulares. Forma variacional.....	27
4.2.3	Aplicação do Método de Ritz à Análise Modal de Placas	31
4.3	Conclusões e síntese do método	43
5.	Análise Dinâmica de Estruturas utilizando o Método de Elementos Finitos	44
5.1	Objetivos	44
5.2	Exemplos e procedimentos de análise.....	45
5.2.1	Análise dinâmica da Placa Quadrada fina e homogénea	45
5.2.2	Análise dinâmica da Placa quadrada com reforços no bordo.....	49
5.2.3	Análise dinâmica da Placa com reforço Circular.....	53
5.2.4	Análise dinâmica do Capot Simples com dobras.....	57
5.2.5	Análise dinâmica do Capot Com Reforços	61
5.2.6	Análise Estática do Capot.....	65

5.2.7	Análise dinâmica do Tubo Circular Oco.....	67
6.	Forma de Ritz para a vibração de uma placa curva	71
6.1	Introdução	71
6.2	Análise de um Exemplo.....	78
6.2.1	Análise dinâmica de uma Casca Circular	78
6.2.2	Resultados da simulação da Casca Circular	81
6.2.3	Conclusão.....	83
7.	Técnicas experimentais em vibrações de estruturas	83
7.1	Introdução	83
7.2	Métodos experimentais de análise de vibrações.....	84
7.2.1	Conceitos essenciais	84
7.3	Técnicas Experimentais de Vibrações	88
7.4	Análise dinâmica de uma Placa Retangular de PERSPEX	91
7.4.1	Dados Geométricos e Estruturais	91
7.4.2	Resultados da simulação da Placa Retangular de PERSPEX	92
7.5	Procedimento experimental de vibrações	95
8.	Conclusões e futuro desenvolvimento	99
	Referências.....	100

0 Estrutura da Tese

Esta tese constitui uma introdução a técnicas numéricas e experimentais de análise vibratória de um capô de automóvel, componente que pela sua importância estrutural, estética e elemento de eficiência aerodinâmica, merece posição de destaque na investigação de modelos de concepção e validação de integridade.

O capô (antigamente *Capot*, pela forte influencia que as línguas associadas a países de referencia na área da industria e investigação aplicada, neste caso França) é um elemento de importância estrutural secundária, pois o veículo pode perfeitamente circular sem ele, não se notando influência de destaque no comportamento estrutural em marcha. Contudo, o papel do capô é bem importante, sobretudo pela proteção aos sistemas de propulsão (motor) e também pela melhoria que a sua instalação e um bom desenho significam na aerodinâmica da carroçaria. A estrutura da tese pode resumir-se aos seguintes pontos

1 - Estado do Conhecimento: Soluções de projeto e modelos de investigação

Neste capítulo justifica-se de certo modo a oportunidade e escolha do tema. Dado que os dos veículos automóveis fazem atualmente parte de qualquer comunidade, rural ou urbana, com mais destaque para estes ultimo, claro), o seu fornecimento a clientes tem justificado a constante investigação devotada à concepção de novos desenhos, materiais muito mais leves e duráveis e métodos de fabrico avançados, permitindo o mínimo de desperdício de material e trabalho com formas complexas, o estado de conhecimento sobre esta área não tem conhecido pausas.

2 - Introdução ao modelo de deformação de placas e cascas

Este capítulo justifica-se pelo modo como se geram os esforços internos num capot quando submetido a cargas transversais. Aqui resumem-se as equações de equilíbrio, apresentam-se as deformações. Estabelece-se a Lei de Hooke e para as relações tensão-deformação

3 - Cascas Geometria: Parâmetros Geométricos

Este capítulo resume as equações de equilíbrio e os modelos de deformação de cascas finas; tal como o anterior, este estabelece as condições de equilíbrio para um elemento, agora com dupla curvatura, eventualmente. A dupla curvatura necessita que esforços de membrana (normais ou de corte) sejam adicionados às equações de equilíbrio, assegurando que o elemento tenha agora a capacidade de resistir a esforços no próprio plano.

4 - Placas finas como elementos integrantes de estruturas de veículos automóveis

Este capítulo trata de geometrias em que partes ou zonas de um capot podem ser assimiladas a estruturas tipo casca. Tal como já acima mencionado, os elementos tipo placa têm uma geometria plana; não há pois praticamente qualquer raio de curvatura, como é o caso de certos veículos construídos com métodos de baixo custo, prescindindo os fabricantes de optar por soluções mais dispendiosas. O modelo de aproximação proposto por W. Ritz é aplicado ao estudo da deformação de elementos de placa em regime estático e dinâmico.

5 - Análise Dinâmica de Estruturas utilizando o Método de Elementos Finitos

Neste capítulo analisa-se resumidamente as técnicas e procedimentos com o programa de elementos finitos *Catia V5®* aplicado à modelação de um *capot* de desenho muito simplificado, aparecendo apenas como uma estrutura fina e curva. As condições de fronteira, modo de carga e análise de resultados são pormenorizadas. Os resultados são comparados com os obtidos no capítulo anterior para os mesmos exemplos.

6- Forma de Ritz para a vibração de uma placa curva

Este capítulo retoma a aplicação do Método de Ritz agora no caso de uma placa evoluída para casca cilíndrica de pequena curvatura. O conceito de inextensibilidade da casca na direcção circunferencial foi introduzido, o que sendo fisicamente uma constatação (a rigidez circunferencial é muito maior do que a devida a termos de flexão ou torção espacial), torna a solução mais simples, dispensando a introdução de mais incógnitas associadas ao deslocamento na direcção circunferencial. Um exemplo analisado (referente a frequências próprias de modos de vibração apenas de flexão) é comparado com a solução obtida com *Catia V5®*

7 - Técnicas experimentais em vibrações de estruturas

Neste capítulo resumem-se os principais procedimentos experimentais de maior difusão em análise de estruturas. O objetivo é o de propor meios de baixo custo e exatos, contudo de informação técnica muito limitada, ficando-se apenas pela análise em tempo real do primeiro e segundo modos de vibração de uma placa retangular de material polímero.

8 – Conclusões e futuro desenvolvimento

Resume as conclusões quanto aos métodos apontados e resultados obtidos; Propõe também procedimentos para melhorar as técnicas e estender os objetivos deste trabalho

1. Estado do Conhecimento: Soluções de projeto e modelos de investigação

1.1 Introdução; objetivos da engenharia de componentes da carroçaria automóvel

Ao observarmos a evolução do veículo automóvel (de passageiros ou mercadorias) há um conceito que se associa inequivocamente ao veículo: revestir a estrutura portadora da unidade motriz e da acomodação dos passageiros: a carroçaria. Esta tem como papel essencial o de proporcionar a rigidez estrutural ao veículo, o qual é submetido a um complexo sistema de forças em regime dinâmico. Em condições extremas, tal como em situação de acidente, a carroçaria é a principal entidade de proteção/sobrevivência dos ocupantes, devendo promover de modo bem controlado a desaceleração do veículo de modo a não provocar ferimentos aos passageiros.

A carroçaria além de proteger o grupo motor e os passageiros dos efeitos do ambiente (agentes atmosféricos como sol, chuva, vento, poeiras e poluentes), insonorizar a marcha e proporcionando conforto biomecânico, é um elemento de destacado papel estético, a tal ponto que, o trabalho dos estilistas é muitas vezes mais demorado do que o dos projetistas do grupo motor, segurança ativa e passiva. A estética da carroçaria promove ou destrói a aceitação de um veículo pelos clientes. Com a geometria básica do automóvel vinculada a “volumes” (designação que perdura desde que o automóvel surgiu), o grupo de engenharia projetista tem que destinar ao desenho, dois ou três volumes na geometria tradicional: *corpo* (área dos passageiros, ou *habitáculo*; *volume do motor* (*vão do motor*) e *volume de bagagens* (*bagageira*). Em veículos para mercadorias ou para transporte de maior número de passageiros do que o habitual (4 a 5) é mais prático o desenho chamado de monovolume.

Neste trabalho não serão desenvolvidos estudos e análise estrutural de componentes da carroçaria, mas sim, apenas um deles, que é o protetor do motor, vulgarmente conhecido por *capot* (termo derivado do francês, contudo muito utilizado tanto por pessoal técnico como qualquer utente de um automóvel).

O *capot* do motor, não constituindo exatamente um elemento de proteção ativa (uma vez que não deve ter demasiada rigidez estrutural), deve ter a adequada resistência a vibrações e adequada resistência a impactos, sem no entanto constituir um elemento suscetível de perigo para os passageiros se soltar-se em caso de colisão.

1.2 Elementos constituintes de um *capot* automóvel: materiais e técnicas de fabrico

Esta é uma simples chapa fina metálica estampada com formas curvas, para concretizar o *design*. Trata-se pois de uma estrutura pouco rígida e muito flexível, de certo modo projetada para minimizar o impacto em caso de colisão. Esta é normalmente feita de aço, mas o alumínio tem ganho popularidade neste importante e competitivo sector. Também há um número cada vez maior de projetos realizados em material compósito, por exemplo poliéster reforçado com fibras de vidro ou fibras de carbono.

O módulo principal do *capot* (o fabricado em chapa fina) é frequentemente reforçado por perfis fechados ocos de parede fina, a fim de lhe aumentar a rigidez à flexão e torção. Os reforços devem sempre ter em conta uma razoável flexibilidade em caso de colisão. Uma solução de compromisso entre a desejada rigidez e o controlo da flexibilidade como elemento de absorção de energia cinética pode advir de um desenho cuidadoso das articulações do *capot* para sua abertura/fecho, sendo possível tirar partido da sua flexibilidade como absorções de energia cinética em caso de colisão.

Antigamente a ligação dos reforços eram rebitadas, (ainda usada em alguns veículos que pretendem manter métodos de fabrico clássicos como o Land Rover Defender), mas com os mais recentes avanços tecnológicos, os processos de soldadura têm dominado como método de ligação entre elementos de chapa fina, conforme a Figura 1.1, para aplicar um melhor aspeto visual ao próprio elemento. Estes reforços ocos são aplicados furos, para libertar tensões internas.

Como referido, na estrutura do *capot* acrescentam-se articuladores (dobradiças) ao longo de uma aresta apenas, por processos de soldadura, que basicamente permitem o melhor acesso ao compartimento do motor para a

manutenção e reparação. Houve lugar a tendências para instalar as dobradiças tanto na frente do veículo como na linha junto ao pára-brisas, conforme a opção de alguns fabricantes. O facto é que, articulando o capot na parte dianteira do veículo, permitia-se uma melhor segurança contra o risco de abertura accidental durante a marcha do veículo; contudo esta opção era de facto pouco ergonómica para trabalho no vão do motor, o que levava muitos mecânicos a desmontar o capot. A tendência atual é mesmo articular o capot junto à linha do para brisas, não havendo riscos de abertura accidental em marcha uma vez que há dois fechos, sendo um deles de segurança: só de abrindo com intervenção da mão.



Figura 1.1: Capot do Fiat *Palio Siena Strada* (anos 2001 2002 2003) Weekend G2 sem Furo (Arsenal Car)

A questão dos acidentes por colisão com obstáculos ou outros veículos, continua a ser uma preocupação no campo da segurança e integridades dos passageiros; com efeito, o capot pode em caso de colisão, soltar-se por quebra das dobradiças e entrar pelo para brisas. A fim de evitar este evento, o *capot*

deve ser flexível a ponto de se dobrar, se necessário, não se soltando das dobradiças. Tal consegue-se, fabricando o capot em alumínio eventualmente dispendo de modo sobreposto de laminas em material polímero termoplástico ou reforçado a fibras (compósitos). Pode assim obter-se uma estrutura de elevado fator rigidez-massa sem deixar de ser adequadamente flexível em caso de acidente.

Na face interna (lado do vão do motor) pode ser adicionado um forro de isolamento, conforme a Figura 1.2, que basicamente serve para isolar o som, principalmente proveniente do funcionamento do motor. Também podem incluir aberturas, normalmente localizado sobre o pára-brisas, a fim de melhorar o arrefecimento ou a entrada de ar para ventilação do habitáculo.



Figura 1.2: Forro de Isolamento do Capot Gol E Parati G3, E Versão Gti G3
(Mercado Livre)

É interessante referir em crêscimo ao atributo estético que o capot representa para o veiculo (de facto, os estilistas dizem que a primeira impressão da estética de um carro obtém-se olhando-o de frente (ou seja, apanhando o enquadramento da frente do veiculo com o capot); contudo, o grafismo de ordem estética pode (e deve) estar associado a eficiência aerodinâmica por duas razoes:

a) – Maior eficiência energética (menos arrasto aerodinâmico);

b) – Redução do peso de *capot* sobre a carroçaria por efeito da força aerodinâmica: com efeito, pode gerar-se uma pressão negativa sobre a superfície do *capot* do mesmo modo que ocorre na corda da asa do avião (perfil *Gotha*)

1.3 Métodos de projeto e análise estrutural

O capot é essencialmente uma estrutura tipo casca fina contendo reforços. Os reforços são essenciais porque a chapa fina, eventualmente com dupla curvatura, constituía uma estrutura muito flexível, eventualmente com comportamento aceitável quando fechada mas apresentando demasiada distorção quando aberta (para manutenção do motor ou outra ação). A distorção mais severa resulta da muita baixa rigidez torsional quando a chapa principal está sem reforços. A primeira ação de melhoria do projeto consiste pois em colocar reforços na linha dos bordos e segundo as diagonais. Esta ultima opção confere um importante aumento da rigidez à torção uma vez que é segundo a direção das diagonais que se verifica a máxima tensão de corte quando a chapa do capot se submete a torção segundo os eixos de simetria (eixo do veículo ou na direção normal a esse eixo).

Não é objetivo deste trabalho propor a melhor geometria dos reforços, mas sim justificar os efeitos estruturais quando eles são colocados; também pouca menção será feita aos processos tecnológicos relacionados com os processos de soldadura e conformação dos reforços e chapa, ainda que tal seja importante para se fazer ideia do processo que permite obter geometria mais ou menos complexa neste componente da carroçaria. A presença de reforços permite o uso de modelos simples tipo viga associados a uma estrutura tipo casca fina, contudo, a modelação analítica fica mais difícil quando a superfície média da placa não coincide com o plano dos eixos principais de inercia do reforço (muitas vezes assemelhado a uma viga oca de parede fina). Com a disponibilidade de eficiente e rigoroso software comercial, assim como computadores cada vez mais rápidos e eficientes, o projetista nem deverá perder tempo a desenvolver e utilizar soluções analíticas disponíveis ou especificamente desenvolvidas para este tipo de problemas. Os resultados

obtidos com software comercial são de facto muito mais rápidos de obter e a capacidade interpretativa é muito mais atrativa e rápida de concretizar.

Os procedimentos a levar a cabo para um projeto de um capot são assim resumidos:

- a) Adoção de uma forma envolvente global (contorno projetado, curvaturas e linha de abertura)
- b) Modelação numérica: levantamento de forma (ficheiro de coordenadas referente à superfície global), agora usada como camada média de uma estrutura tipo casca de múltipla curvatura.
- c) Inclusão de reforços; agrupamento dos módulos gráficos como estruturas “fundidas”
- d) Geração de malha de elementos finitos
- e) Condições de fronteira (modelação de fechos, vedantes e dobradiças)
- f) Vetor de cargas: peso próprio e sobrecarga. Neste último item pode ser considerado o peso de uma pessoa, não porque isso seja realista mas sim estudar o efeito de colhida e prevenção de lesões. De facto o capot não deve nestas circunstâncias ser uma estrutura muito rígida, estando esta exigência em apurada e constante investigação
- g) Análise modal: esta etapa é muito importante para questões de conforto/ruído pois um desenho adequado pode evitar que durante a marcha do veículo se excitem modos de vibração relativamente baixos, pondo em causa não só o conforto da marcha (indução do ruído no veículo, geração de reflexos luminosos, que podem tornar perigosa a condução e danificar a própria estrutura do capot por solicitações de fadiga. Este item constitui uma preocupação deste trabalho, o qual terá modelação numérica e verificação experimental a partir de captadores piezoelétricos.

2. Introdução ao modelo de deformação de Placas e Cascas

2.1 Conceito de Placa Fina: Parâmetros

As Placas finas são sólidos delimitados por duas superfícies inicialmente planas, designada por faces e separadas a curta distância, que define a espessura (h) da placa, (Ventsel, 2001). Por fim, a placa fica delimitada por arestas ou contornos. Será assumido que a espessura da chapa é pequena em comparação com outras dimensões características das faces (uma relação entre a espessura e comprimento, largura, diâmetro, etc. inferior a 1/50). Quando essas faces tiverem curvatura, as placas passam a ser designadas por cascas. As placas podem no entanto, ter contornos (fronteiras) não necessariamente retas, pelo que tendo contornos curvos continuam a ser consideradas placas, conforme a Figura 2.1. As cargas estáticas ou dinâmicas suportadas por placas são perpendiculares às faces da placa.

A placa, sendo originalmente plana, desenvolve curvaturas por efeito de forças interiores de flexão e torção, por ação de forças transversais ou momentos externos. As placas finas combinam em certa medida, uma rigidez elevada em relação ao baixo peso. Quando é necessário aumentar esta relação, recorre-se a combinação de placas rígidas com uma estrutura intermédia com capacidade de resistir a forças transversais mas não a momentos. Esta associação designa-se por placas *sandwich*, por combinar de modo empilhado de estruturas do tipo placa, de características diferentes, em que cada componente tem função bem definida: a placa intermédia, geralmente de menor resistência à flexão, mas com adequada resistência aos esforços transversos, designa-se como *núcleo* (*core*, em língua inglesa). Este núcleo pode ser em espuma estrutural (por exemplo, poliestireno, poliuretano ou até em aglomerado de cortiça). As placas periféricas são rígidas e bem mais finas do que o núcleo, geralmente são metálicas ou em material compósito com fibras naturais ou sintéticas, que são designadas por *peles*.

As placas finas são extensivamente utilizadas em todos os campos da engenharia. As placas são utilizadas em estruturas arquitetónicas, pontes,

hidráulicas estruturas, pavimentos, contentores, aviões, mísseis, navios, instrumentos, peças de máquinas, etc., ilustradas na Figura 2.2.

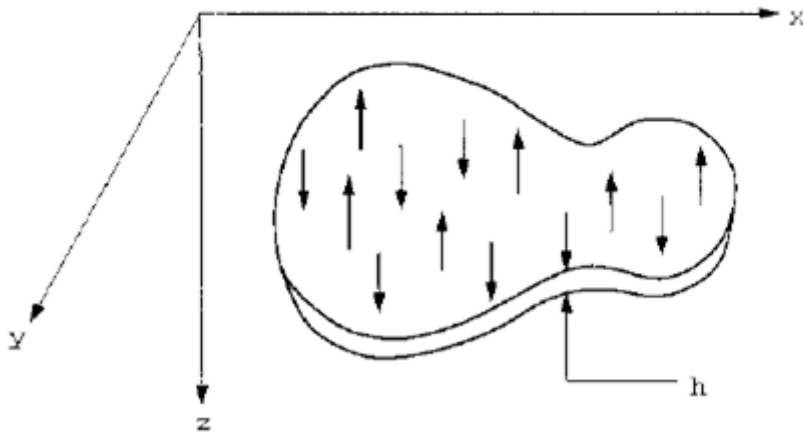


Figura 2.1: Placa Fina, nos sistemas de coordenadas, com espessura (h) (Ventsel, 2001)

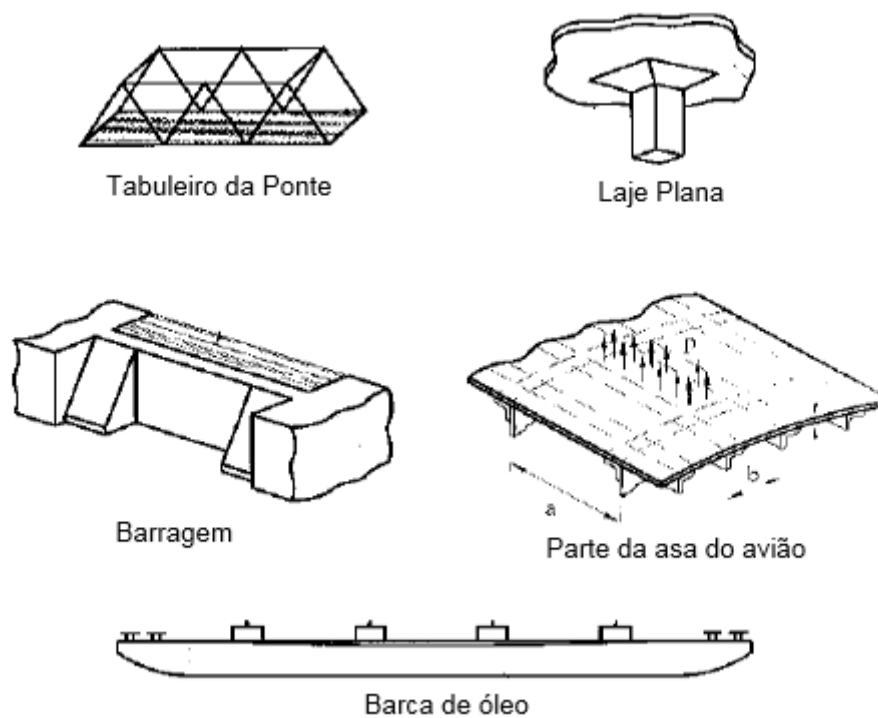


Figura 2.2: Aplicações das Placas Finas (Ventsel, 2001)

2.2 Equações de Equilíbrio

Considerando um corpo elástico de forma geral, sujeito a cargas externas que sejam em equilíbrio (Ventsel, 2001). Considerando um ponto do material em qualquer lugar no interior do corpo. Atribuir coordenadas cartesianas com os eixos X, Y e Z, como mostrado na Figura 2.3, e considerar um elemento infinitesimal em forma de paralelepípedo ($dx; dy; dz$), com faces paralelas aos planos coordenados. Salienta que atua nas faces deste elemento, intensidades das forças internas. Estas tensões podem ser divididas em componente normal (tensão normal) e componente tangente (tensão de corte) na face particular.

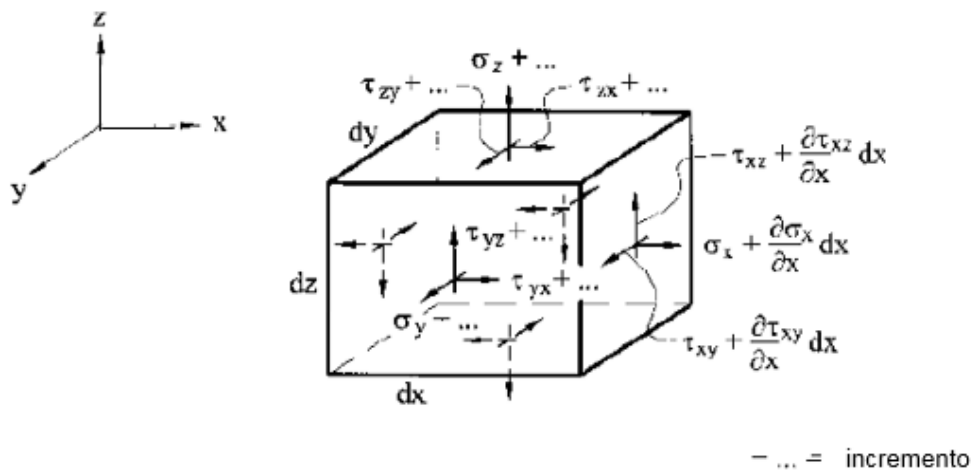


Figura 2.3: Distribuição das Tensões, num elemento infinitesimal em forma de paralelepípedo (Ventsel, 2001)

Os componentes de tensão devem satisfazer o seguinte diferencial de equações de equilíbrio:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x = 0 ; \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y = 0 ; \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + F_z = 0 ; \quad (2.3)$$

Onde F_x ; F_y ; e F_z são as forças do corpo (por exemplo, as forças gravitacionais, magnéticos).

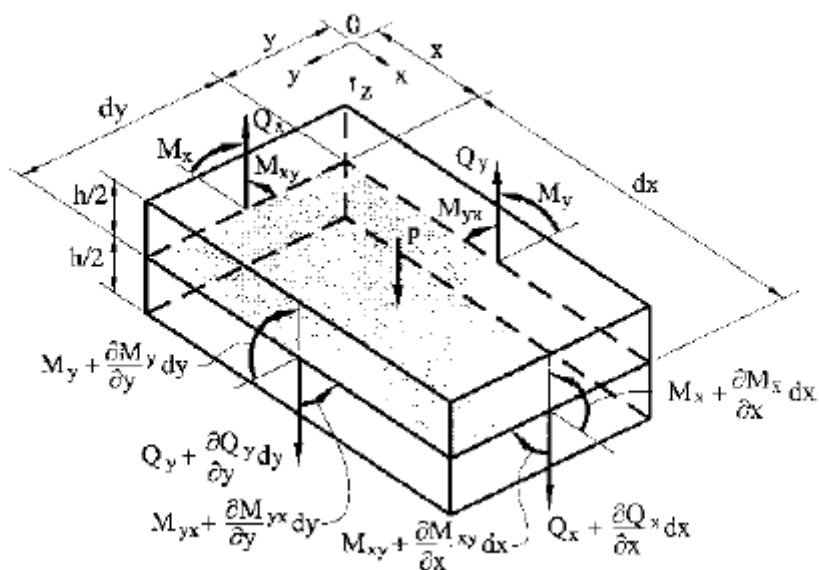


Figura 2.4: Distribuição das Forças e dos Momentos, num elemento infinitesimal em forma de paralelepípedo (Ventsel, 2001)

Considerando uma placa em equilíbrio sujeita a carga distribuída vertical de intensidade p , aplicado a uma superfície superior da placa, como mostrado na Figura 2.4. Fornecem intensidades de Forças resultantes Q_x , Q_y e momentos designados por M_x e M_y .

Para o sistema de forças e momentos indicados na Figura 2.4, recorre as seguintes três condições independentes de equilíbrio:

O somatório das forças segundo o eixo z:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy + p dx dy = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \quad (2.5)$$

O somatório dos momentos em torno do eixo x:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_y}{\partial y} dx dy - Q_y dx dy = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (2.7)$$

O somatório dos momentos em torno do eixo y:

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \quad (2.8)$$

2.3 Lei de Hooke: relações Tensão-Deformação

Lei generalizada de Hooke, no caso de um corpo isotrópico tridimensional (Ventsel, 2001), as equações constitutivas são dadas pela:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)] \quad (2.11)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (2.12)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} \quad (2.13)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \quad (2.14)$$

As deformações ε em relação às tensões normais σ e as deformações γ em relação às tensões de corte τ . Com (E) o módulo de elasticidade, (ν) o coeficiente de Poisson e (G) Módulo de corte. Existe a seguinte relação entre E e G:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.15)$$

3. Cascas

3.1 Geometria: Parâmetros Geométricos

As cascas são estruturas delimitadas por duas superfícies curvas, em que a distância entre as superfícies (h) (Ventsel, 2001), é pequena em comparação com outras dimensões do corpo, conforme a Figura 3.1.

Estas têm todas as características das placas, juntamente com a adicional curvatura. A curvatura pode ser escolhida como o classificador principal de uma casca porque o comportamento dela sob uma carga aplicada, tem a forma curvada. São divididos em forma cilíndrica, cônica, esférica, elipsoidal, parabolóide, toroidal e cascas parabolóides hiperbólicas. Devido à curvatura da superfície, são mais complexas do que as placas planas porque a sua flexão não pode, em geral, ser separados do seu alongamento. Por outro lado, uma placa pode ser considerada como uma casca que não tem curvatura.

Existem duas classes diferentes de cascas: grossas e finas. Esta é tratada como fina, sempre que o valor máximo da razão h/R seja muito menor que a unidade (sendo R o raio de curvatura da superfície média da casca). Valores usuais para a considerar como fina são, $\max\left(\frac{h}{R}\right) \leq \frac{1}{20}$.

Não observando esta desigualdade são referidas como espessas. Para grande número de aplicações práticas, a espessura das cascas encontra-se no

intervalo, $\frac{1}{1000} \leq \frac{h}{R} \leq \frac{1}{20}$.

Note-se também que a desigualdade define aproximadamente a fronteira entre cascas mais finas e grossas. Na realidade, depende também de outros parâmetros geométricos, o carácter de suas condições de contorno, suavidade de uma variação de cargas externas sobre a superfície, etc.

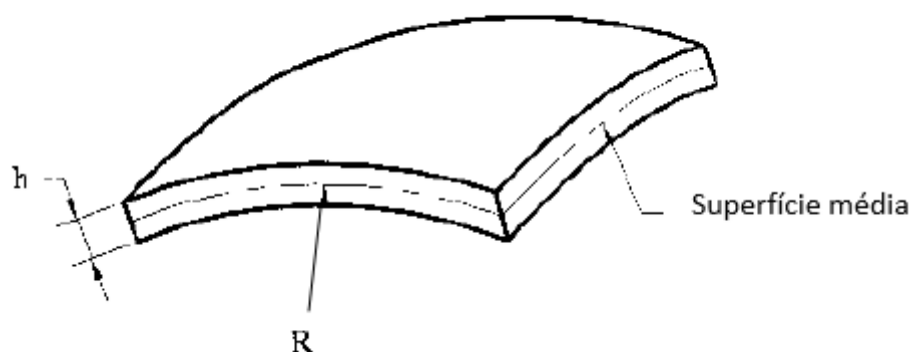


Figura 3.1: Casca Fina com espessura h e com raio de curvatura R

3.2 Modelo de Membrana

A casca é uma estrutura em que o sistema de forças internas pode em grande parte de casos, assegurar o equilíbrio apenas com forças tangenciais à superfície média da casca. Quer dizer que momentos fletores e torsores têm valores desprezáveis, exceto em bordos de fixação ou junto a apoios (Ventsel, 2001). Este modelo de equilíbrio, em que dominam as forças internas do tipo tangencial (normais e de corte) designa-se modelo sob a teoria da membrana de cascas. Decorre do exposto que a teoria membrana negligencia todos os momentos, isto é, $M_1 = M_2 = 0$. Com os momentos da casca indicadas na Figura 3.2.

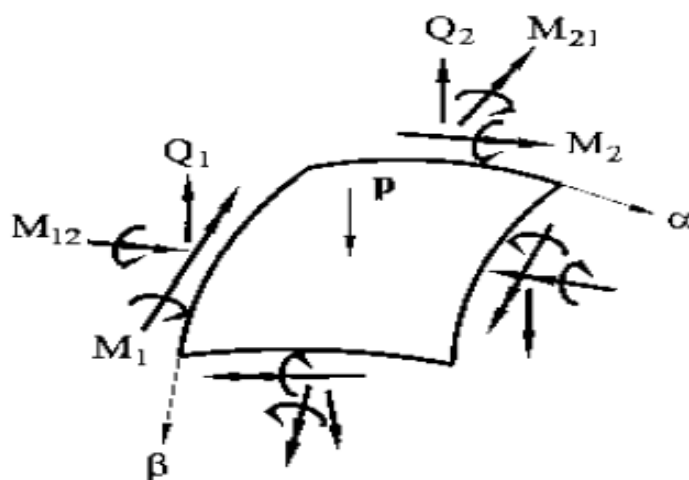


Figura 3.2 – Distribuição de momentos numa casca fina

Por sua vez, segue-se a partir das relações dos momentos correspondentes

$$M_1 = D(\chi_1 + \nu\chi_2) \quad (3.1)$$

$$M_2 = D(\chi_2 + \nu\chi_1) \quad (3.2)$$

Os momentos são desprezados quando a casca tiver pequena rigidez à flexão D , ou quando as alterações na curvatura e na torção do meio superfície, χ_1 e χ_2 forem muito pequenas. No primeiro caso, lidamos em absoluto com uma casca flexível à membrana, no segundo caso, com a membrana no estado de tensão apresenta elevada rigidez à flexão, embora finita. Ambos os problemas são descritos pela mesma teoria, contudo deverá ser feita uma distinção entre eles, porque eles resistem à carga aplicada de forma diferente. Um corresponde a invólucro flexível (por exemplo, feito a partir de tecidos) que não é capaz de sustentar as forças de compressão ou flexão localizadas, pois que quaisquer pequenas forças de compressão provocam perda de estabilidade da sua forma. Por sua vez, uma casca com rigidez à flexão, apresenta esforços internos do tipo membrana como dominantes, podem as equações de equilíbrio contemplar apenas este tipo de forças.

Portanto, essas podem resistir às cargas aplicadas apenas em tensão tangencial à superfície média, com rigidez finita à flexão, em contraste com cascas absolutamente flexíveis, podendo resistir em ambos os estados de membrana de compressão, bem como as forças de tração, mas perdem a

estabilidade apenas quando as forças de compressão excedam um certo valor crítico, para absolutamente cascas flexíveis, uma vez que não possuem uma resistência à flexão

3.3 Modelo Geral: forças de Membrana e de flexão

Como ilustrado na Figura 3.3, as forças de membrana N_1 e N_2 e as forças de flexão N_{12} e N_{21} , (Ventsel, 2001).

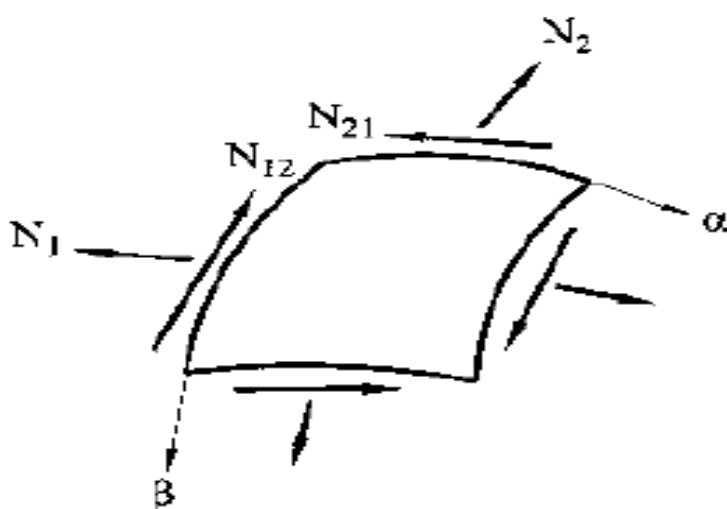


Figura 3.3: Distribuição das forças de membrana numa placa fina

3.4 Equações de Equilíbrio

Através de um elemento diferencial aproximado da forma da casca e delimitada por dois pares de seções normais que passam através das coordenadas α e β da Figura 3.4. As forças externas compreenderão algumas cargas superficiais aplicadas nas superfícies superior e inferior do elemento, as componentes de tensão, distribuídas de forma contínua em toda a espessura da casca, são substituídas por forças internas estaticamente equivalentes e momentos aplicado à superfície do meio da Figura 3.2 e da Figura 3.3. A carga p composta no sistema de coordenadas por p_1 , p_2 e p_3 . Especificando o seu equilíbrio em todas as forças externas e internas com as seguintes equações:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(N_1 B) + \frac{\partial}{\partial \beta}(N_{21} A) + \frac{\partial A}{\partial \beta} N_{12} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_2 - \frac{AB}{R_1} Q_1 + AB p_1 = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta}(N_2 A) + \frac{\partial}{\partial \alpha}(N_{12} B) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_{21} - \frac{\partial A}{\partial \beta} N_1 - \frac{AB}{R_2} Q_2 + AB p_2 = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(Q_1 B) + \frac{\partial}{\partial \beta}(Q_2 A) + \frac{AB}{R_1} N_1 + \frac{AB}{R_2} N_2 + AB p_3 = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(M_{12} B) + \frac{\partial}{\partial \beta}(M_2 A) - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_1 + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_{21} - AB Q_2 = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta}(M_{21} A) + \frac{\partial}{\partial \alpha}(M_1 B) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_2 + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{12} - AB Q_1 = 0 \quad (3.7)$$

$$N_{12} - N_{21} - \frac{M_{12}}{R_1} + \frac{M_{21}}{R_2} = 0 \quad (3.8)$$

Em que: $A = (a_{11})^{1/2}$; $B = (b_{11})^{1/2}$;

$$a_{11} = (r_{,\alpha} \cdot r_{,\alpha}); \quad b_{11} = e_3 \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial \alpha^2};$$

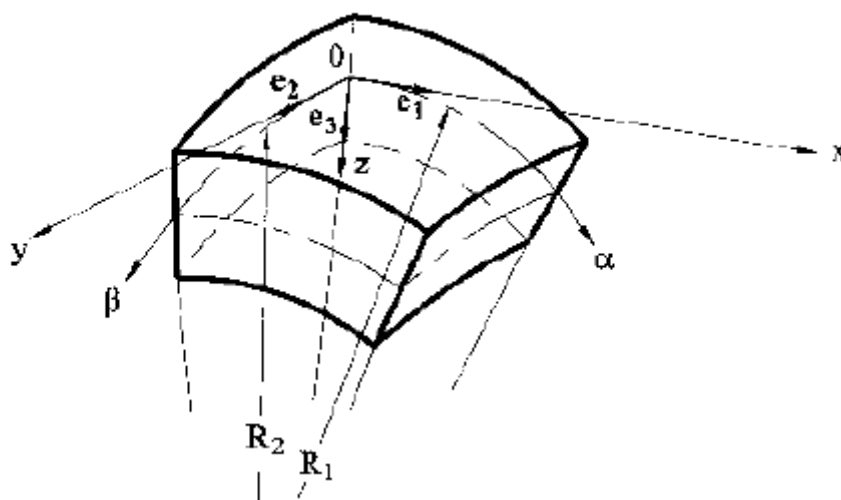


Figura 3.4: Elemento diferencial aproximado de uma casca, num sistema de coordenadas

4. Placas finas como elementos integrantes de estruturas de veículos automóveis

4.1 Introdução

As placas retangulares ou circulares não constituem por si só elementos isolados para aplicação em estruturas de construção mecânica, embora haja casos menos frequentes em que um reduzido número de componentes podem ser montados em sistemas aplicados na indústria automóvel, como painéis de carroçaria rebitados (caso do veículo “SUV”, o “Jeep Land Rover” da Figura 4.1)

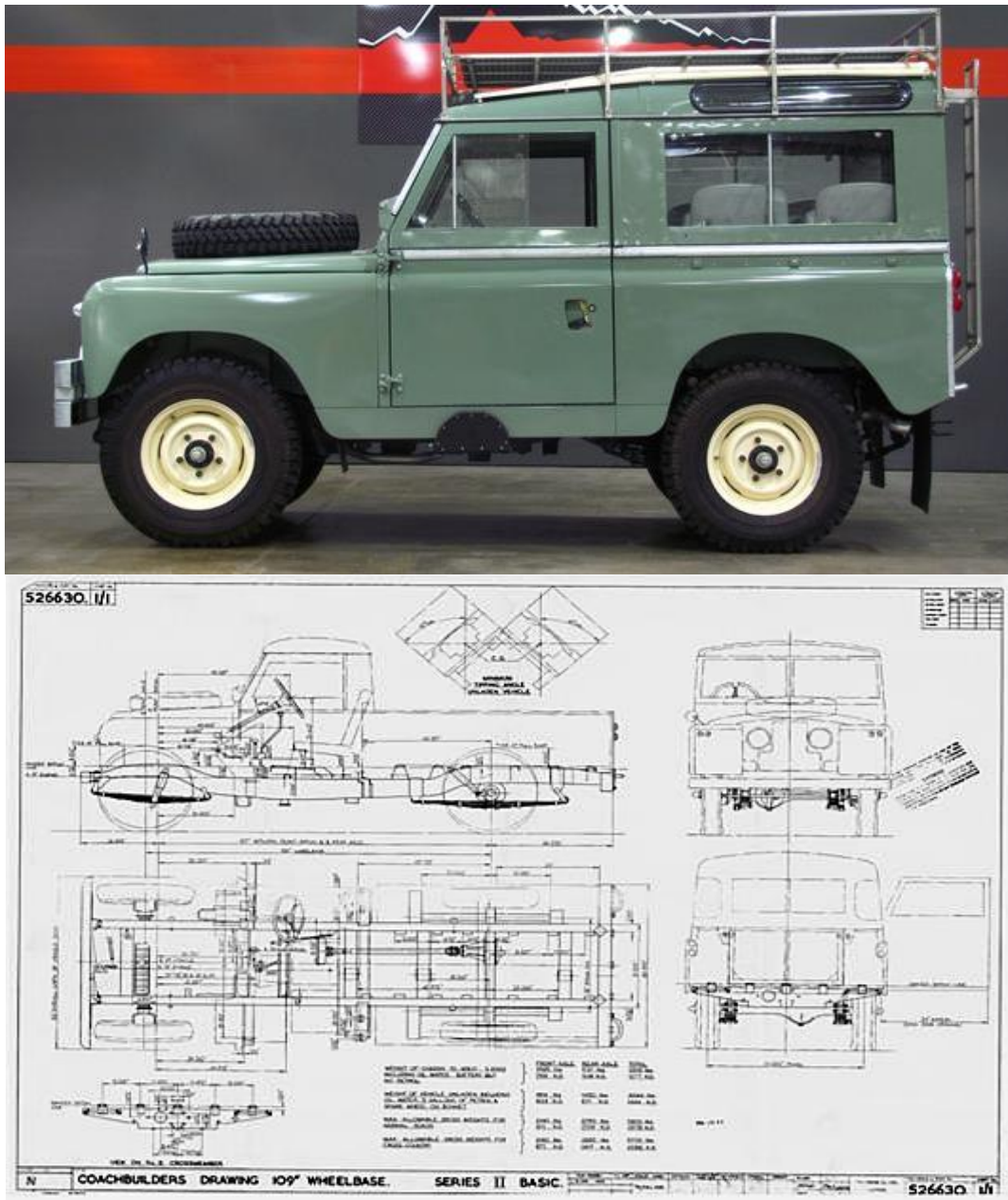


Figura 4.1: Land Rover “Jeep”, modelo dos anos 60, ainda em fabrico em reduzida série. Grande parte de componentes da carroçaria são em alumínio e com geometria aproximadamente semelhante a placas planas finas (elementos não destinados a esforços principais, mas como revestimento; embora submetidos a esforços dinâmicos)

Nesta secção será abordado o método proposto por Walter Ritz (fig. 4.2) destinado a resolver equações diferenciais em derivadas parciais em que a solução pode ter a forma de uma expressão dependentes de coordenadas e parâmetros desconhecidos sob a forma (4.1)

$$U = \Phi(x, y, z, a_i, b_i)_{i=1,n} \quad (4.1)$$

Aqui, U pode ser uma função escalar, dependente das coordenadas x, y, z (no caso do referencial ser cartesiano; podia ser noutra tipo de coordenadas) e de parâmetros desconhecidos a_i e b_i (não são funções). Considerando que a equação diferencial em análise caracteriza as condições de equilíbrio e de deformação de um sólido ou componente estrutural, não se pode obter a solução por simples derivação parcial da solução sob a forma (4.1), uma vez que esta deverá satisfazer condições de fronteira de tipo natural (em força ou momentos, no caso de se tratar de um sólido ou estrutura) e do tipo essencial (deslocamentos ou rotações). É preciso incluir uma função associada a uma propriedade física do domínio em que a equação diferencial em estudo valide condições de equilíbrio ou deformação.



Figura 4.2 – Walter Ritz, matemático suíço (1878, 1909), faleceu com apenas 31 anos, contudo deixou trabalho de grande valor em aplicações de matemática para engenharias, nomeadamente o seu método de solução aproximada de equações de derivadas parciais em que a solução seja uma função potencial dependente de parâmetros desconhecidos, a determinar

4.2 Estrutura do Método de Ritz aplicado ao problema de flexão de placas retangulares finas

4.2.1 Breve referência à solução com séries trigonométricas (solução de Navier)

As placas retangulares deformam-se sobretudo por variação de curvatura e torção quando são submetidas a forças normais ao seu plano (ditas forças transversais). Seja uma placa retangular de dimensões principais da Figura 4.3

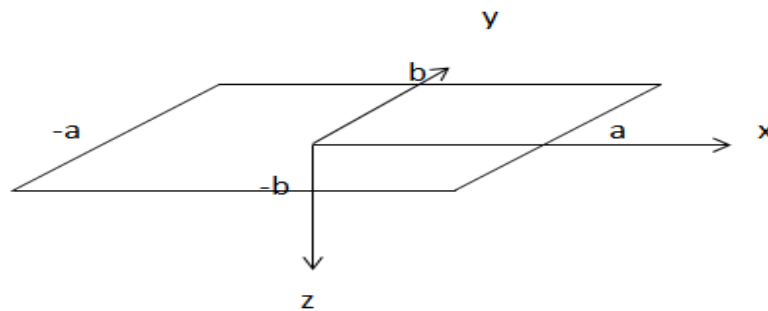


Figura 4.3: Placa retangular em coordenadas cartesianas

Consideremos que a placa está submetida a uma carga contínua transversal da forma $q(x,y)$. A equação fundamental de solução do problema de placas retangulares deve-se a Sophie Germain (França, 1776-1831), matemática francesa, discípula de Lagrange. Foi de facto Sophie quem chegou à forma bi-harmónica da equação de solução do problema de flexão de placas retangulares; contudo a Academia das Ciências de França privilegiou Lagrange, atribuindo-lhe o mérito.

A equação bi-harmónica tem a forma:

$$\nabla^4 w(x, y) = -q(x, y) \Leftrightarrow \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{q(x, y)}{D} \quad (4.2)$$

Onde $w(x,y)$ é o deslocamento transversal da placa sob carga $q(x,y)$ e D é a constante de rigidez à flexão. O deslocamento terá que obedecer a condições de fronteira do tipo essencial; quer dizer, ser coerente com o tipo de restrições. Deste modo, a expressão do deslocamento $w(x,y)$ tem que ter a forma possibilitando a observância das referidas condições de fronteira.

A solução da equação (4.2) pode ser obtida de modo aproximado utilizando desenvolvimentos em dupla série trigonométrica (quer dizer, em x e y), tanto

para o deslocamento como para a carga contínua aplicada. Esta solução é devida a Navier, matemático francês (Claude Navier, 1785-1836, foi aluno de Jean Batiste de Fourier)



Figura 4.4: Claude Louis de Navier, (1785-1836)



Figura 4.5: Jean Batiste de Fourier, (1768, 1830)

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{j=1}^{N_\theta} \sum_{m=1}^{N_\theta} a_{jm} \cos\left(\frac{j\pi x}{2a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{2b}\right) \\ q(x, y) &= \sum_{j=1}^{N_\theta} \sum_{m=1}^{N_\theta} q_{jm} \cos\left(\frac{j\pi x}{2a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{2b}\right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Tendo em conta a notação usada na geometria da placa na Figura 4.3, verifica-se que as funções trigonométricas em cosseno satisfazem automaticamente as condições de fronteira, pois não só o deslocamento é nulo no bordo como, graças à periodicidade do cosseno, as curvaturas são também nulas no bordo (não há pois momento fletores ou torsões). O facto de usarmos as mesmas funções trigonométricas para $w(x,y)$ e $q(x,y)$ permite que as eqs. (4.2) se transformem num sistema de equações algébricas, podendo ser resolvido sem dificuldade. Esta solução não serve contudo, para o caso de placas retangulares com o bordo encastrado, em que tanto os senos como cossenos não permitem 1ª derivada nula nos bordos. Para tal ser aproximadamente possível, deveria recorrer-se a formas quadráticas de senos ou cossenos, o que traria dificuldades nas derivadas e possibilidade de resolução algébrica da

forma (4.2). Para isto, o Método de Ritz é bem mais eficaz, como se descreve a seguir.

4.2.2 Método de Ritz: função potencial quadrática em problemas de placas retangulares. Forma variacional

Foi referido que uma função potencial da qual se derive uma equação diferencial em derivadas parciais permite obter a solução à forma diferencial (Clough, 2003).. Consideremos a equação em derivadas parciais bi-harmónica, caracterizando as condições de equilíbrio e a lei de Hooke no caso de placas retangulares planas. Supondo um pequeno elemento de placa retangular sujeito a uma carga transversal continua $q(x,y)$, em coordenadas cartesianas, o seu equilíbrio é assim assegurado, conforme a Figura 4.6:

a) – para os momentos flectores e torsores

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} &= Q_x \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} &= Q_y \end{aligned} \quad (4.4)$$

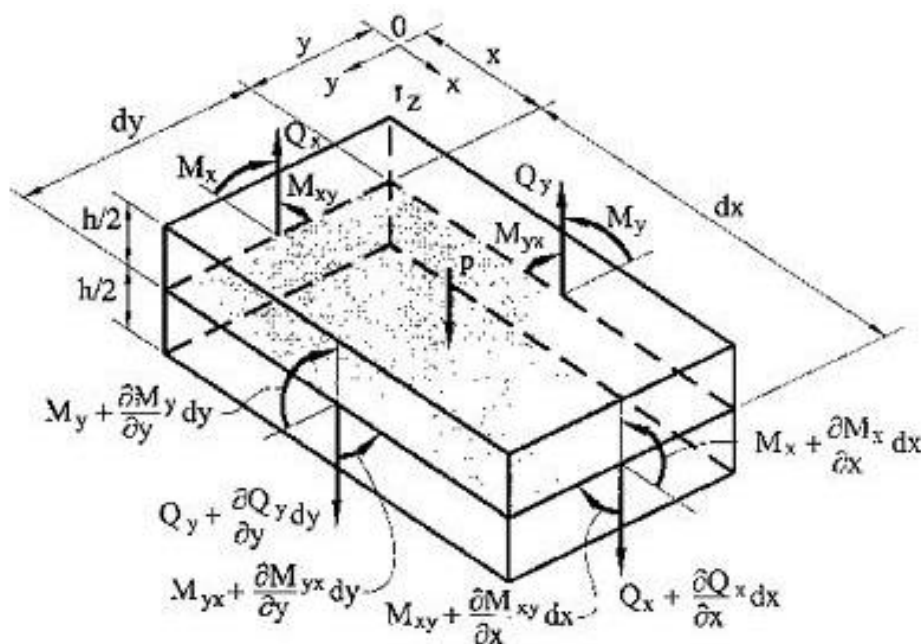


Figura 4.6: Elemento de placa retangular em equilíbrio (Ventsel, 2001)

b) – Para as forças atuando transversalmente ao plano x-y do elemento:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = q(x, y) \quad (4.5)$$

Recorrendo às eqs. (4.4) e substituindo em (4.5) vamos obter a forma de 2ª ordem:

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{2\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} = -q(x, y) \quad (4.6)$$

Onde M_{xx} , M_{yy} e M_{xy} são respetivamente, os momentos fletores internos, na direção dos eixos xx e yy, sendo M_{xy} ($=M_{yx}$) o momento torsor contínuo atuando sobre os bordos do elemento $dx dy$

Com a forma diferencial anterior não seria possível resolver problemas de flexão de placas, uma vez que temos três incógnitas no problema; eventualmente pode reduzir-se esse número a partir da inclusão de condições de fronteira e equilíbrio em contornos específicos, contudo não se consegue que o problema fique determinado. Para resolver esta dificuldade, inclui-se a lei de Hooke para a flexão de placas:

$$\begin{aligned} M_{xx} &= -D(k_{xx} + \nu k_{yy}) \\ M_{yy} &= -D(k_{yy} + \nu k_{xx}) \\ M_{xy} &= -Sk_{xy} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Onde nas expressões (4.7), k_{xx} , k_{yy} , k_{xy} e D representam as curvaturas e a torção segundo as direções coordenadas e D e S são respetivamente a rigidez da placa à flexão e à torção (considerada isotrópica neste estudo):

$$\begin{aligned} k_{xx} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ k_{yy} &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ k_{xy} &= k_{yx} = \frac{2\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; S = \frac{D(1-\nu)}{2} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Introduzindo estas expressões em (4.7) obtemos:

$$\begin{aligned}
 M_{xx} &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\
 M_{yy} &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\
 M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Por sua vez, a sua substituição em (4.6) dá:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} &= -D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right) \\
 \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} &= -D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2}\right) \\
 \frac{2\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} &= -2D(1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\
 \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{2\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} &= -q(x, y) \Leftrightarrow \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{q(x, y)}{D}
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

É assim obtida a equação bi-harmónica já mencionada atrás; para a resolver, pode-se recorrer à solução assumida sob a forma de séries trigonométricas como descrito; contudo, o tipo de problemas é limitado, nomeadamente quanto à condição de bordo paralelo às direções das coordenadas.

Walter Ritz propôs uma solução de fácil implementação em computadores e até em máquinas de calcular com capacidade de solução de sistemas de equações algébricas lineares. Para isto necessita-se de obter uma função potencial escalar obtida de forma quadrática e associada á equação bi-harmónica em (4.6) ou (4.10). Considere-se a lei de Hooke sob forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = -D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \tag{4.11}$$

Ou em notação simplificada:

$$\{M\} = [E]\{\varepsilon\} \tag{4.12}$$

Onde $\{\mathbf{M}\}$ é o vetor dos momentos fletores e torsões; $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$, é o vetor das deformações (aqui são as curvaturas e torção da superfície deformada da placa) e $[E]$ é a matriz de elasticidade da placa (contém as propriedades mecânicas do material da placa, nomeadamente o módulo de Young E , a espessura h e o fator de Poisson ν)

Efetuando o produto interno (\bullet) entre o vetor dos momentos $\{\mathbf{M}\}$ pelo vetor das deformações $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ (curvaturas e torção) e integrando este produto ao volume da placa, obtemos um escalar que corresponde à energia de deformação (energia interna) armazenada na referida placa sob flexão:

$$U_{Interna} = \frac{1}{2} h \int_{-a}^a \int_{-b}^b \{\mathbf{M}\}^T \bullet \{\boldsymbol{\varepsilon}\} dx dy \quad (4.13)$$

Esta função escalar $U_{interna}$ é a função potencial associada à equação bi-harmónica de equilíbrio das placas retangulares; esta forma $U_{interna}$ é quadrática quanto às expressões das curvaturas e torção como se pode verificar:

$$U_{Interna} = \frac{1}{2} h \int_{-a}^a \int_{-b}^b \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T [E] \bullet \{\boldsymbol{\varepsilon}\} dx dy \quad (4.14)$$

Já que $\{\mathbf{M}\} = [E] \{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ e na forma transposta é $\{\mathbf{M}\}^T = \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T [E]$, sendo que $[E]$ é simétrica.

A expressão integral em (4.14) é quadrática, na medida em que a expressão das deformações (curvaturas) fica quadrada. Por extenso, vamos ter:

$$U_{Interna} = \frac{D}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left(k_{xx}^2 + k_{yy}^2 + 2\nu k_{xx} k_{yy} + \frac{1-\nu}{2} k_{xy} \right) dx dy \quad (4.15)$$

Por sua vez, as forças aplicadas à placa (contínuas ou discretas) efetuam trabalho de deformação, o qual deve ser igual à energia interna armazenada na placa como consequência da deformação devida à ação do sistema de forças externas. Contudo, como o campo de deslocamentos $w(x,y)$ é uma expressão aproximada, a Energia Total armazenada no sistema físico (placa) não é zero, mas sim um valor residual:

$$U_{Total} = U_{Interna} + U_{Externa} \quad (4.16)$$

Se as expressões k_{xx} , k_{yy} e k_{xy} forem derivadas de uma forma polinomial assumida para $w(x,y)$, em que esse polinómio tem coeficientes desconhecidos a_i , então a solução obtida com o método de Ritz busca o mínimo estacionário para a energia de deformação U desta forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_{Total}}{\partial a_1} = 0 \\ \frac{\partial U_{Total}}{\partial a_2} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial U_{Total}}{\partial a_n} = 0 \end{array} \right. \quad (4.17)$$

Uma vez que a forma da função $w(x,y)$ pode ser polinomial, as derivadas parciais em (4.16) levam à formação de um sistema de equações lineares de fácil resolução. Como foi referido, a forma polinomial para $w(x,y)$ tem que satisfazer as condições de fronteira apenas. O exemplo a seguir descreve em pormenor o procedimento aplicado à determinação de dois primeiros modos de vibração de uma placa retangular de bordos simplesmente apoiados.

4.2.3 Aplicação do Método de Ritz à Análise Modal de Placas

Numa placa submetida a um sistema de forças generalizadas, quando o processo de carregamento se efetua, o trabalho realizado pelas forças externas deve igualar a energia potencial de deformação armazenada na placa, quando se atinge o equilíbrio em regime estático (Clough, 2003). Assim, a energia total (4.17), deve de facto ser zero (sob o ponto de vista algébrico, o facto é que o trabalho realizado pelo sistema de forças externas deve igualar a energia potencial armazenada no corpo a deformar). Trata-se de uma leitura convencional do modelo físico associado ao processo de deformação de um sólido em que se pode simplesmente refazer o problema estabelecendo a igualdade das duas formas de energia e assim passar de novo à condição de estacionaridade:

$$U_{Interna} = U_{Externa}$$

$$\left\{ \frac{\partial U_{Interna}}{\partial a_i} = \frac{\partial U_{Externa}}{\partial a_i} \right. \quad (4.18)$$

O sistema de equações gerado em (4.19) tem como 2º membro o sistema de forças aplicado em pontos (ou domínios) bem definidos do sólido; podem ser discretas ou contínuas, como já mencionado.

Numa primeira parte do problema, vamos calcular a deformação numa placa retangular (dimensões $2a \times 2b$) submetida a carga distribuída uniforme q . A placa está simplesmente apoiada.

Como foi acima referido, o polinómio para aproximar a função deslocamento $w(x,y)$ deve satisfazer as condições de fronteira. Sendo quadrangular e ortogonal a geometria da placa, o mais natural é assumir a forma de $w(x,y)$ como definível pelo produto de duas funções independentes em x e y :

$$w(x, y) = F(x) \times G(y) \quad (4.19)$$

Esta função de deslocamento deve satisfazer às seguintes restrições:

Em 2 direções:

1º: polinómio segundo x

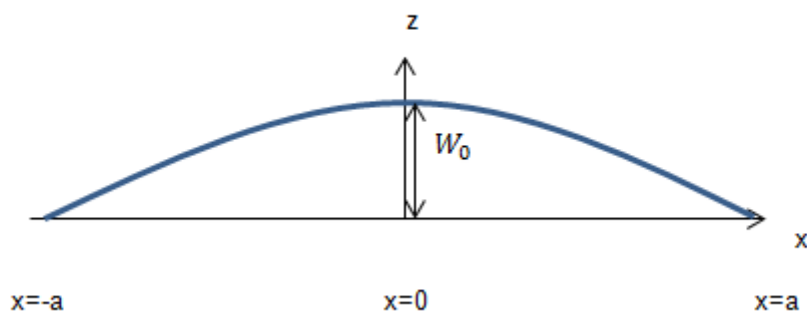


Figura 4.7: Forma do perfil da placa deformada em condições de carga simétrica e bordos simplesmente apoiados

A Deformação da Placa segundo x , condições de Fronteira da placa da Figura 4.5:

$$\text{Função de forma } F(x) = \begin{cases} F(0) = W_0 \\ F'(0) = 0 \\ F''(a) = 0 \\ F''(-a) = 0 \\ F(a) = 0 \\ F(-a) = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

Essencialmente deseja-se que esta função seja par, quer dizer que $F(a)=F(-a)$, que, com as condições $F(0)=1$ e $F'(0)=0$, acaba a primeira por ser redundante. Deste modo temos 5 condições a satisfazer, o que implica um polinómio de 4º Grau para $F(x)$:

$$F(x) = K_0 + K_1x + K_2x^2 + K_3x^3 + K_4x^4 \quad (4.21)$$

As constantes K_0, K_1, K_2, K_3 e K_4 são determinadas através das condições de fronteira em (12).

Processando as derivadas:

$$F'(x) = K_1 + 2K_2x + 3K_3x^2 + 4K_4x^3 \quad (4.21)$$

$$F''(x) = 2K_2 + 6K_3x + 12K_4x^2 \quad (4.22)$$

Chega-se à solução para a função $F(x)$:

$$F(x) = 1 + \frac{-6}{5a^2}x^2 + \frac{1}{5a^4}x^4 \quad (4.23)$$

A Deformação da Placa segundo y

Condições de fronteira semelhantes servem para a função de forma $G(y)$, contudo para as dimensões $-b$ e b sobre a largura:

$$\text{Função de forma } G(y) = \begin{cases} G(0) = W_0 \\ G'(0) = 0 \\ G''(b) = 0 \\ G''(-b) = 0 \\ G(a) = 0 \\ G(-a) = 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

$$G(y) = 1 + \frac{-6}{5b^2}y^2 + \frac{1}{5b^4}y^4 \quad (4.25)$$

Resultado para o deslocamento $w(x,y)$: é obtido pelo produto de $F(x)$ e $G(y)$ incluindo w_0 como um fator de escala:

$$w(x, y) = w_0 \left(1 + \frac{-6x^2}{5a^2} + \frac{x^4}{5a^4} \right) \times \left(1 + \frac{-6y^2}{5b^2} + \frac{y^4}{5b^4} \right)$$

$$\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = w_0 \left(\frac{-12x}{5a^2} + \frac{4x^3}{5a^4} \right) \times \left(1 + \frac{-6y^2}{5b^2} + \frac{y^4}{5b^4} \right) = w_{,x}(x, y) \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} = w_0 \left(1 + \frac{-6x^2}{5a^2} + \frac{x^4}{5a^4} \right) \times \left(\frac{-12y}{5b^2} + \frac{4y^3}{5b^4} \right) = w_{,y}(x, y)$$

Curvaturas e torção da superfície deformada:

a) Curvatura segundo xx; k_{xx}

$$\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} = w_0 \left(\frac{-12}{5a^2} + \frac{12x^2}{5a^4} \right) \times \left(1 + \frac{-6y^2}{5b^2} + \frac{y^4}{5b^4} \right) = w_{,xx}(x, y) = k_{xx} \quad (4.27)$$

b) Curvatura segundo yy; k_{yy}

$$\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} = w_0 \left(1 + \frac{-6x^2}{5a^2} + \frac{x^4}{5a^4} \right) \times \left(\frac{-12}{5b^2} + \frac{12y^2}{5b^4} \right) = w_{,yy}(x, y) = k_{yy} \quad (4.28)$$

c) Torção espacial da superfície: soma das derivadas cruzadas em x e y; k_{xy}

$$\frac{2\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} = 2w_0 \left(\frac{-12x}{5a^2} + \frac{4x^3}{5a^4} \right) \times \left(\frac{-12y}{5b^2} + \frac{4y^3}{5b^4} \right) = 2w_{,xy}(x, y) = k_{xy} \quad (4.29)$$

Por este resultado há um único parâmetro a determinar com o método de Ritz, que é justamente w_0 . Para tal, deve ser processa o cálculo da função integral em (4.30):

$$U = \frac{D}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left(k_{xx}^2 + k_{yy}^2 + 2\nu k_{xx} k_{yy} + \frac{1-\nu}{2} k_{xy} \right) dx dy \quad (4.30)$$

Efetuando o integral com as expressões obtidas:

$$U = \frac{1}{2} \times \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} w_0^2 \left(\frac{14,057b}{a^3} + \frac{14,057a}{b^3} + \frac{9,271\nu}{ab} + \frac{3,092}{ab} \right) \quad (4.31)$$

Ao efetuar a variação de U em ordem a w_0 , obtemos esta expressão configurada de modo mais conveniente:

$$Kw_0 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{14,057b}{a^3} + \frac{14,057a}{b^3} + \frac{9,271\nu}{ab} + \frac{3,092}{ab} \right) w_0 \quad (4.32)$$

Esta constante K corresponde à rigidez à deformação de uma placa retangular sob força distribuída de intensidade q como mencionado. Por sua vez, a carga total equivalente (força derivada de $\partial U_{\text{externo}}/\partial w_0$) é dada pela expressão integral:

$$Q = q_0 \int_{-a}^a \int_{-b}^b F(x)G(y) dx dy \quad (4.33)$$

Onde $F(x)$ e $G(x)$ são dadas por (4.29) e (4.30)

Caso de uma placa quadrada axa: para um carregamento de força distribuída e uniforme, o deslocamento máximo (centro da placa) é:

$$w_0 = \frac{2q_0a^4}{16 \times (31,206 + 9,271\nu)D} \quad (4.44)$$

Autores como Timoshenko e Woinovski-Krieger referem o lado total do quadrado como sendo a ; neste caso, para que as expressões sejam comparáveis, aqui a passa a ser $a/2$ (do resultado de Timoshenko-Krieger), e então a expressão (4.44) passa a ser:

$$w_0 = 0.00367 \frac{qa^4}{D} \quad (4.45)$$

Timoshenko e Krieger, usando a solução de Navier com apenas dois termos em x e y , obtiveram um resultado muito semelhante a (17-a):

$$w_0 = 0.004 \frac{qa^4}{D} \quad (4.46)$$

Análise modal: primeiro modo de vibração

A análise anterior permitiu estruturar o método de Ritz em problemas estáticos. O tratamento do algoritmo para permitir a análise modal de placas retangulares é semelhante, exceção feita ao facto que a carga continua aplicada sobre a placa é consequência da massa da placa, uniforme por unidade de área (caso

muito frequente em que a placa é considerada isotrópica), contudo essa massa desenvolve forças de inércia como consequência da aceleração transversal da superfície da placa quando em vibração (livre ou forçada). Supondo agora que o deslocamento tem a expressão obtida (4.47):

$$w(x, y) = w_0 \left(1 + \frac{-6x^2}{5a^2} + \frac{x^4}{5a^4} \right) \times \left(1 + \frac{-6y^2}{5b^2} + \frac{y^4}{5b^4} \right) \quad (4.47)$$

Mas agora, $w_0 = w_0(t)$ é a amplitude (deslocamento máximo no centro da placa) é uma função do tempo; deste modo, é possível obter o campo de velocidades e acelerações por derivação sucessiva em ordem a t . Assim, a forma “dinâmica” do problema agora analisado é:

$$Kw_0 = \rho h \ddot{w}_0 \int_{-a}^a \int_{-b}^b F^2(x)G^2(y) dx dy \quad (4.48)$$

Em que a forma quadrática no integral (4.48) se deve ao trabalho que as forças de inércia contínuas realizam sobre os deslocamento transversais explicado mais adiante. Combinando uma função do tempo com as funções de forma $F(x)$ e $G(x)$, é possível obter o campo de velocidades e acelerações. Para o equilíbrio de um elemento de casca, vale a equação de modo reduzido:

$$Kw_0 = M_{Equiv} \ddot{w}_0$$

(onde \ddot{w}_0 é a 2ª derivada temporal da amplitude $w_0(t)$, na notação de Newton)

Onde $M_{Equiv} = \rho h \int_{-a}^a \int_{-b}^b F^2(x)G^2(y) dx dy$ é a massa total equivalente para o 1º modo de vibração.

A razão de termos funções em forma quadrática resulta do facto da força de inércia num elemento de massa ser:

$$dF_{inercia} = \rho h \ddot{w}(x, y, t) dx dy \quad (4.49)$$

Onde $\ddot{w}(x, y, t) = w_0(t)F(x)G(y)$

Esta força de inércia, associada ao elemento de placa, exerce trabalho externo sobre o deslocamento no ponto de coordenadas do referido elemento:

$$dU_{Ext(inercia)} = \rho h \ddot{w}(x, y, t) \times w(x, y, t) dx dy \quad (4.50)$$

Obtemos deste modo uma forma quadrática para o integral do trabalho realizado pelas forças de inércia contínuas.

De novo, aplicando esta expressão ao caso de uma placa quadrada de aço, com 1m×1m; espessura h=1mm, a 1ª frequência natural obtém-se com as funções F(x) e G(x) modelando a forma de vibração associada ao 1º modo para o caso de uma placa de bordos simplesmente apoiados. As funções (4.20) e (4.24) modelam bem a forma expectável para o modo de vibração referido. A substituição das dimensões e propriedades mecânicas e físicas em (4.31) permite obter a frequência f_1 :

$f_1=5,2\text{Hz}$ (os autores Eduard Ventsel e Theodor Krauthammer, “Theory of Plates and Shells with Applications”, Marcel Dekker Inc. NY, 2001, ISBN: 0-8247-0575-0) obtiveram $f_1=4,9\text{Hz}$, usando desenvolvimento em dupla série com apenas um termo em x e y; verifica-se pois uma boa concordância de resultados)

No 2º Modo de Vibração, como foi referido, a utilização do Método de Ritz impõe logo à partida que as funções polinomiais satisfaçam as condições de fronteira; contudo elas devem refletir a forma fisicamente expectável da geometria da estrutura em vibração.

Sendo a placa retangular, é um princípio físico natural que o modo de vibração de ordem 2 se distribua com a seguinte configuração:

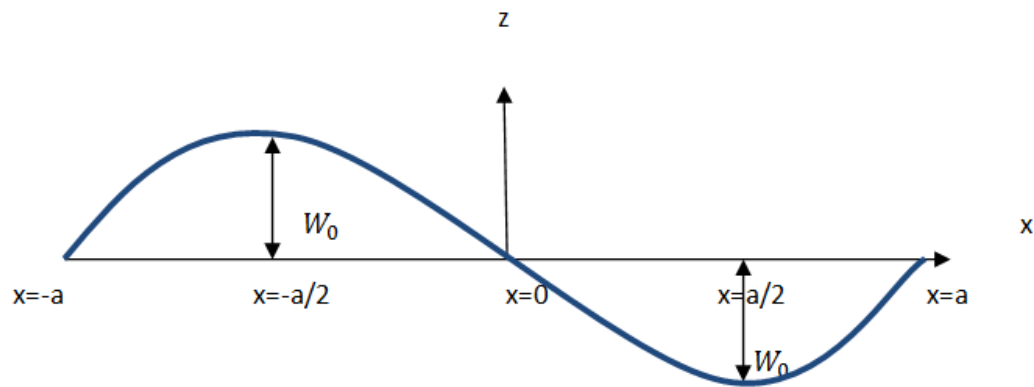


Figura 4.8: Segundo modo de vibração, segundo x

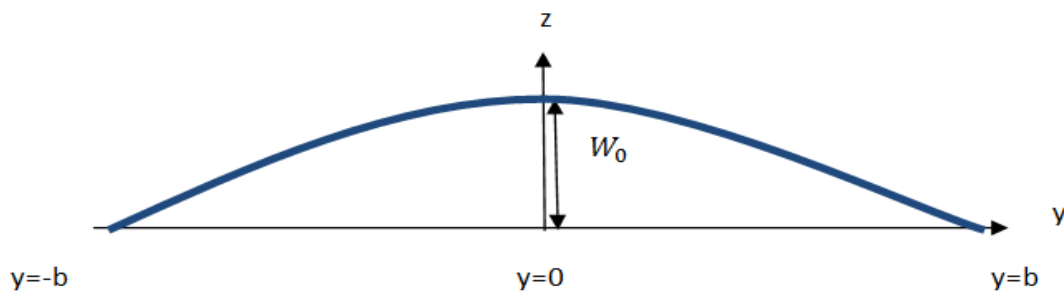


Figura 4.9: Segundo modo de vibração, segundo y

Lado a maior do que b : há uma senoide completa segundo o lado a (mais longo) e uma senoide incompleta segundo b :

Lado a :

Condições de fronteira:

Condições de Fronteira da placa, para o 2º Modo:

$$\text{Deslocamento, } w(x) = \begin{cases} w(-a) = 0 \\ w(0) = 0 \\ w(a) = 0 \\ w(-a/2) = W_0 \\ w(a/2) = -W_0 \\ w''(-a) = 0 \\ w''(a) = 0 \end{cases} \quad (4.51)$$

A condição $w(0)=0$ acaba por ser redundante, na medida em que será automaticamente satisfeita com a imposição de anti-simetria: $w(a/2) = -w(-a/2) = W_0$.

Implica um polinómio de 4º Grau para o deslocamento:

$$w(x) = K_0 + K_1x + K_2x^2 + K_3x^3 + K_4x^4$$

A expressão para a função de forma associada ao 2º modo é:

$$w(x) = W_0 \left(\frac{-80}{39a}x + \frac{16}{13a^2}x^2 + \frac{80}{39a^3}x^3 + \frac{-16}{13a^4}x^4 \right) \quad (4.52)$$

2º: polinómio segundo y

Com o mesmo do 1º Modo x, com as condições de fronteira:

$$\text{Deslocamento, } w(y) = \begin{cases} w(0) = W_0 \\ w'(0) = 0 \\ w''(b) = 0 \\ w''(-b) = 0 \\ w(b) = 0 \\ w(-b) = 0 \end{cases} \quad (4.53)$$

Chegando com:

$$w(y) = W_0 + \frac{-6W_0}{5b^2}y^2 + \frac{W_0}{5b^4}y^4 \quad (4.54)$$

Por fim determinar $w(x, y) = w(x) * w(y)$

$$w(x, y) = W_0 \left(\frac{-80}{39a}x + \frac{16}{13a^2}x^2 + \frac{80}{39a^3}x^3 + \frac{-16}{13a^4}x^4 \right) * \left(W_0 + \frac{-6W_0}{5b^2}y^2 + \frac{W_0}{5b^4}y^4 \right) \quad (4.55)$$

As curvaturas e torção da superfície deformada:

Derivadas:

a) A curvatura segundo xx

$$k_{xx} = \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \quad (4.56)$$

$$k_{xx} = W_0 \left(\frac{32}{13a^2} + \frac{160}{13a^3}x + \frac{-192}{13a^4}x^2 \right) * \left(1 + \frac{-6}{5b^2}y^2 + \frac{1}{5b^4}y^4 \right) \quad (4.57)$$

b) A curvatura segundo yy

$$k_{yy} = \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \quad (4.58)$$

$$k_{yy} = W_0 \left(\frac{-80}{39a} x + \frac{16}{13a^2} x^2 + \frac{80}{39a^3} x^3 + \frac{-16}{13a^4} x^4 \right) * \left(\frac{-12}{5b^2} + \frac{12}{5b^4} y^2 \right) \quad (4.59)$$

c) A torção espacial da superfície: é dada pela soma das derivadas cruzadas em x e y

$$k_{xy} = \frac{2\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} =$$

$$= 2W_0 \left(\frac{80}{21a} + \frac{16}{7a^2} x + \frac{-80}{7a^3} x^2 + \frac{64}{7a^4} x^3 \right) * \left(\frac{-12}{5b^2} y + \frac{4}{5b^4} y^3 \right) \quad (4.60)$$

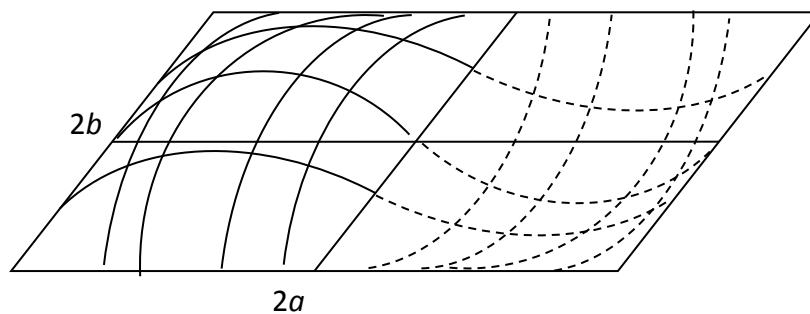


Figura 4.10: 2º Modo de vibração de uma placa rectangular 2ax2b

A energia de deformação U armazenada:

$$U = \frac{1}{2} \times \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left\{ \begin{matrix} k_{xx} & k_{yy} & k_{xy} \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{Bmatrix} dx dy \quad (4.62)$$

$$U = \frac{1}{2} \times \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} w_0^2 \left(\frac{347,506b}{a^3} + \frac{4,411a}{b^3} + \frac{29,839\nu}{ab} + \frac{9,947}{ab} \right) \quad (4.63)$$

Para uma placa quadrada com a=b, aplicando uma pressão p uniforme, o trabalho realizado por esta força é U= pabw₀, com $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$.

$$pa^2 w_0 = \frac{1}{2} \times D \times w_0^2 \left(\frac{347,506a}{a^3} + \frac{4,411a}{a^3} + \frac{29,839\nu}{aa} + \frac{9,947}{aa} \right) \quad (4.64)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2pa^2}{D\left(\frac{347,506}{a^2} + \frac{4,411}{a^2} + \frac{29,839\nu}{a^2} + \frac{9,947}{a^2}\right)} = w_0 \quad (4.65)$$

$$\Leftrightarrow w_0 = \frac{2pa^2}{D\left(\frac{361,864 + 29,839\nu}{a^2}\right)} \quad (4.66)$$

$$\Leftrightarrow w_0 = \frac{2pa^4}{(361,864 + 29,839\nu)D} \quad (4.67)$$

Neste caso $a_{verd} = a/2$, então $W_0 = \frac{2pa^4}{16 \times (361,864 + 29,839\nu)D}$

$$F(x) = \left(\frac{-80}{39a}x + \frac{16}{13a^2}x^2 + \frac{80}{39a^3}x^3 + \frac{-16}{13a^4}x^4\right) \quad (4.68)$$

$$G(y) = 1 + \frac{-6}{5b^2}y^2 + \frac{1}{5b^4}y^4 \quad (4.69)$$

O deslocamento da placa é $w(x, y) = w_0 F(x)G(y)$

As curvaturas

a) A curvatura segundo xx, conforme (4.56)

$$k_{xx} = W_0 \left(\frac{32}{13a^2} + \frac{160}{13a^3}x + \frac{-192}{13a^4}x^2\right) * \left(1 + \frac{-6}{5b^2}y^2 + \frac{1}{5b^4}y^4\right) \quad (4.70)$$

b) A curvatura segundo yy, conforme (4.58)

$$k_{yy} = W_0 \left(\frac{-80}{39a}x + \frac{16}{13a^2}x^2 + \frac{80}{39a^3}x^3 + \frac{-16}{13a^4}x^4\right) * \left(\frac{-12}{5b^2} + \frac{12}{5b^4}y^2\right) \quad (4.71)$$

c) A torção espacial da superfície: é dada pela soma das derivadas cruzadas em x e y, conforme (4.60)

$$k_{xy} = 2W_0 \left(\frac{-80}{39a} + \frac{32}{13a^2}x + \frac{80}{13a^3}x^2 + \frac{-64}{13a^4}x^3\right) * \left(\frac{-12}{5b^2}y + \frac{4}{5b^4}y^3\right) \quad (4.72)$$

A rigidez da placa para este modo de vibração (2º modo) é

$$K(w) = D \int_{-a}^a \int_{-b}^b (k_{xx}^2 + k_{yy}^2 + 2\nu k_{xx}k_{yy}) dx dy + \frac{D(1-\nu)}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b k_{xy}^2 dx dy \quad (4.73)$$

Aqui $a=b=0.5m$; $h = 1mm$ e $E=210GPa$, $\nu = 0.3$

Por sua vez, a massa equivalente é dada por:

$$M_{equiv} = \rho h \int_{-a}^a \int_{-b}^b F^2(x)G^2(y)dx dy \quad (4.74)$$

Substituindo os polinómios acima escritos e considerando que $\rho = 7800\text{Kg/m}^3$, temos:

a) – Rigidez à flexão para a forma do 2º modo:

$$K(w) = D \int_{-a}^a \int_{-b}^b (k_{xx}^2 + k_{yy}^2 + 2\nu k_{xx}k_{yy}) dx dy + \frac{D(1-\nu)}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b k_{xy}^2 dx dy \square 9085.27\text{N} / \text{m} \quad (4.75)$$

$$M_{equiv} = \rho h \int_{-a}^a \int_{-b}^b F^2(x)G^2(y)dx dy = 1.95\text{Kg} \quad (4.76)$$

Frequência:

$$\begin{cases} K(w) \square 9085.27\text{N} / \text{m} \\ M_{equiv} = 1.95\text{Kg} \end{cases} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K(w)}{M_{equiv}}} = 68.26\text{rad} / \text{s} \Rightarrow f_{2^\circ\text{modo}} = 10.86\text{Hz}$$

os autores Ventsel e Krauthammer, assim como Flávio Martins (com CatiaV5) obtiveram cerca de 12Hz

Como se pode verificar, existe boa concordância nos resultados analisados; os dois autores referidos usaram desenvolvimento em série de senos (x e y) retendo apenas dois termos.

Seguidamente vai-se considerar a análise modal de estruturas de chapa fina; contudo agora com geometria mais complexa, deixando a regular e uniforme geometria elementar (quadrangular) a qual raríssimas vezes tem existência real. De facto, por razões estéticas e também pela necessidade de proporcionar ao veiculo uma marcha com o mínimo de arrasto aerodinâmico, o *capot* desempenha um papel fundamental não só na economia de combustível, mas também na velocidade máxima. Assim, o capot acaba por ser uma combinação de formas geométricas simples, como cilíndricas, cónicas (bastante raro) e planas.

4.3 Conclusões e síntese do método

O método de Ritz é uma eficaz e compreensível ferramenta de modelação estrutural em aplicações estáticas e dinâmicas, sobretudo na análise estrutural de placas. Contudo, este método é bastante mais trabalhoso do que o equivalente, devido a Navier (apenas em aplicações de carga estática), em que se usam termos trigonométricos. A vantagem do Método de Ritz reside na possibilidade de desenvolver o polinómio de aproximação (funções de forma) de certo modo “à medida” da ordem desejada para a solução; por exemplo, no caso de placas sob flexão uniforme, o polinómio basta ser do 2º grau, enquanto no caso de esforço transversal, é necessário chegar-se pelo menos ao 3º grau.

Quanto ao método, baseado no princípio variacional da mínima energia de deformação, ele permite a solução com mínimo erro para casos de geometria ortogonal (placas retangulares). Casos em que um contorno não seja retangular são de tratamento geométrico mais difícil pelas funções de forma, assim como as cargas e condições de fronteira, que são igualmente mais complicadas de modelar.

5. Análise Dinâmica de Estruturas utilizando o Método de Elementos Finitos

5.1 Objetivos

Esta etapa do trabalho constitui uma aplicação do *software* CATIA® V5, bastante difundido entre investigadores, projetistas e estudantes nas áreas de engenharia estrutural e projeto mecânico. O CATIA é um *software* muito popular e versátil para a modelação de estruturas. Neste capítulo descrevem-se aplicações à análise modal de estruturas tipo placa fina (no módulo disponível usou-se a “frequency analysis”, que consiste na determinação de frequências características de estruturas usando mo módulo CATIA.

Esta análise revela-se muito útil ao projetista por razões já apontadas anteriormente mas que vale a pena ter em mente no desenvolvimento do produto encontrando o melhor desempenho e durabilidade, a saber:

- O conhecimento rigoroso das frequências próprias de componentes estruturais de veículos automóveis permite prever a sua durabilidade, pois quando um elemento estrutural é excitado em regime de forças externas harmónicas, com frequência próxima de valores característicos para o componente em estudo, a ressonância leva a amplitudes de vibração danosos para o componente, que pode ter a sua resistência à fadiga severamente afetada;
- As frequências características podem realçar a emissão sonora do componente excitado perto da frequência de ressonância, podendo igualmente excitar componentes adjacentes, tornando desconfortável a “vida a bordo” pelo incómodo nos passageiros. Há inúmeros métodos de amortecer estas vibrações, sendo os mais difundidos os materiais tipo espuma de polímeros ou materiais fibrosos com alta capacidade de dissipação de energia mecânica em térmica.

O método dos elementos finitos é uma poderosa e útil ferramenta de simulação de modelos estruturais, permitindo conhecer de modo realista e bastante exato o estado mecânico de complexos estruturais em regime de forças estáticas e dinâmicas. Para além destas potencialidades, apenas associadas ao efeito de

forças em estruturas, é também possível, entre outras aptidões, conseguir o estudo de tensões de origem térmica em componentes estruturais submetidos a campos de temperaturas variáveis no espaço e no tempo.

Neste estudo vamos aplicar o software CATIA à determinação de frequências características do capot de um automóvel, como elemento com bastante influencia na proteção da carroçaria e elemento eventualmente responsável pela emissão de ruído durante a marcha.

Os exemplos a seguir descritos não constituem casos reais nem tampouco traduzindo um desenho muito profissional, uma vez que isso não acrescentaria muito mais ao realce das potencialidades do método de elementos finitos (particularmente o módulo CATIA) em aplicações estruturais; aqui o objetivo concentrou-se em demonstrar que os resultados estavam concordantes tanto com modelos analíticos e semi-analíticos como com procedimentos experimentais em estruturas simples.

5.2 Exemplos e procedimentos de análise

5.2.1 Análise dinâmica da Placa Quadrada fina e homogénea

5.2.1.1 Dados Geométricos e Estruturais

Estudo da análise dinâmica de uma Placa quadrada 1m×1m e com 1 mm de espessura simplesmente apoiada nos bordos de uma face, conforme a Figura 5.1. Placa composta de Aço com propriedades: $E=210\text{GPa}$, $\nu = 0.3$ e $\rho = 7800 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$.

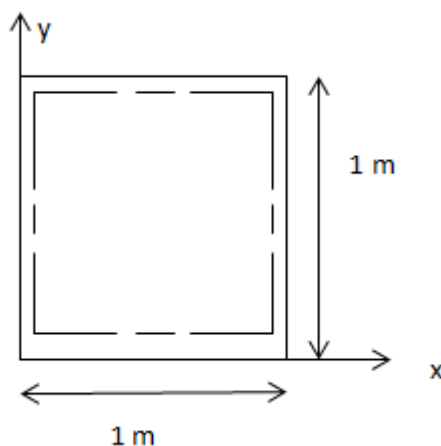


Figura 5.1: Placa Quadrada 1m/1m e 1mm de espessura, simplesmente apoiada

Aplicando este estudo através da ferramenta do software CATIA, “*frequency analysis*”. Uma simulação dinâmica com malha composta com elementos finitos tetraédricos parabólicos com 10 nós e com dimensão média de 5mm conforme a Figura 5.2.

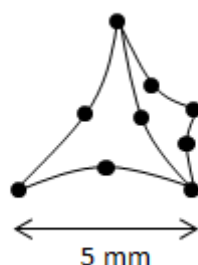


Figura 5.2: Elemento Tetraédrico Parabólico com 10 nós, com dimensão de 5 mm

5.2.1.2 Resultados da simulação da Placa Quadrada simplesmente apoiada

O modo de vibração fundamental é semelhante os fisicamente esperado para uma placa simplesmente apoiada no bordo e submetida a uma carga uniforme (força de inércia neste caso). A frequência fundamental para o 1º modo foi $f_1 = 4,941 \text{ Hz}$

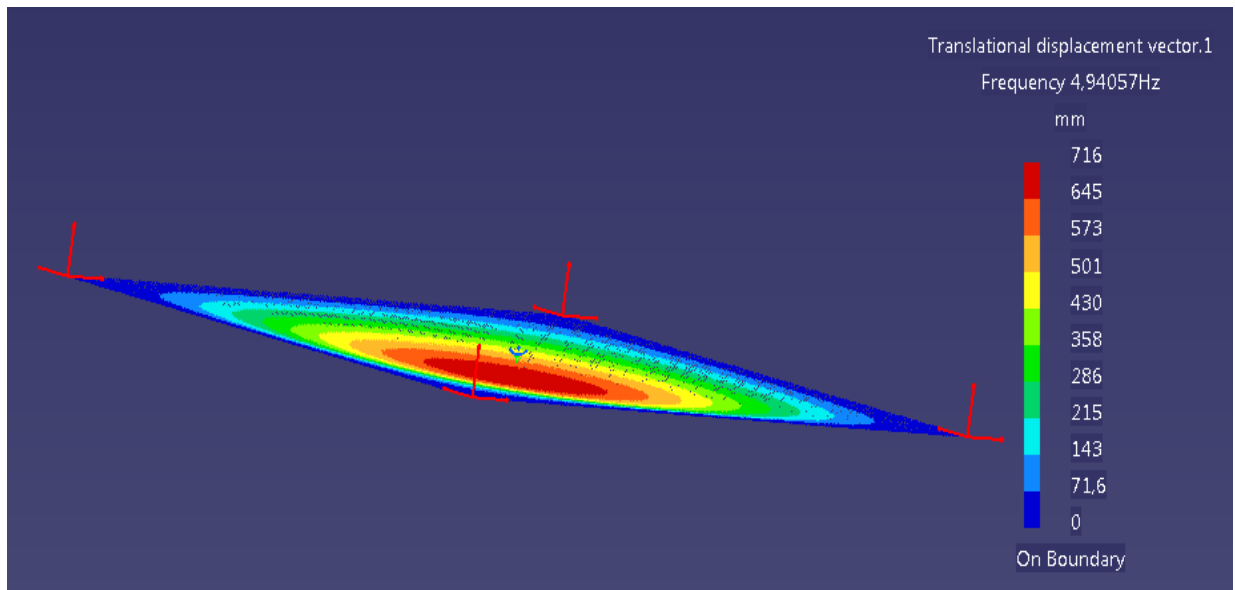


Figura 5.3: Resultado da simulação para o 1º modo com frequência $f_1 = 4.941 \text{ Hz}$

Prosseguindo a análise, o 2º e 3º modos são “diagonais”, o que equivale a dizer que são modos homologos ou acoplados, pois embora estejam ordenados, eles são iguais, registando-se anti-simetria segundo as diagonais (os vetores próprios continuam ortogonais como não podia deixar de ser).

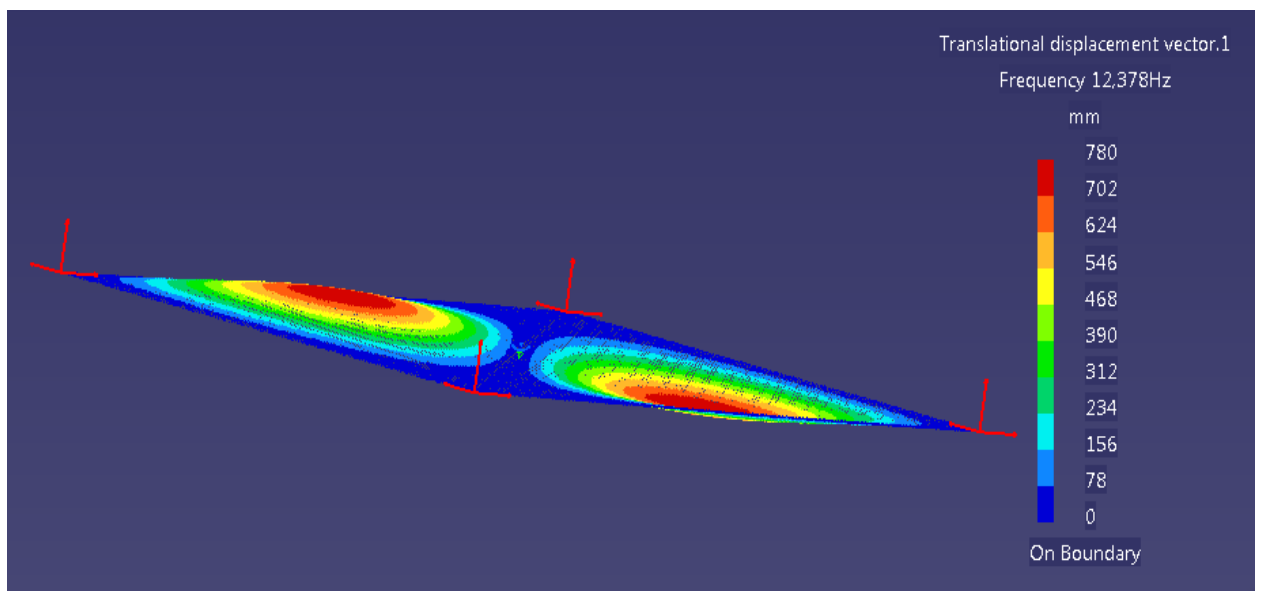


Figura 5.4: Resultado da simulação para o 2º modo com frequência $f_2 = 12,378 \text{ Hz}$

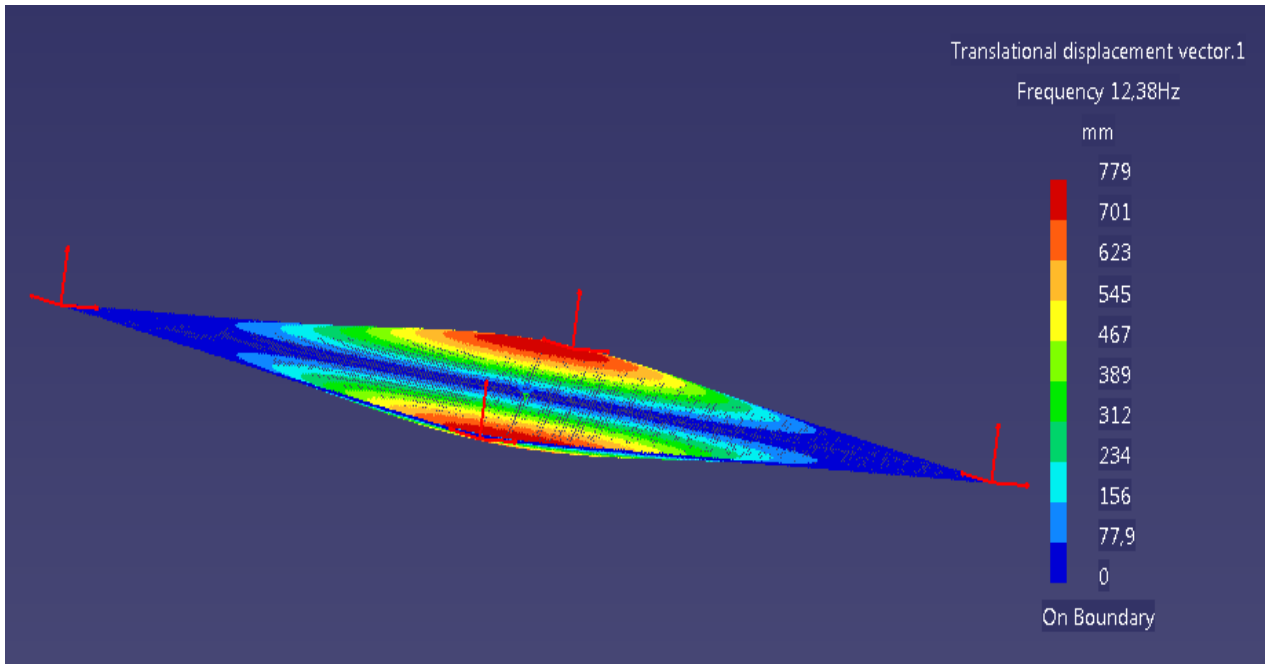


Figura 5.5: Resultado da simulação para o 3º modo com frequência $f_3 = 12,38 \text{ Hz}$

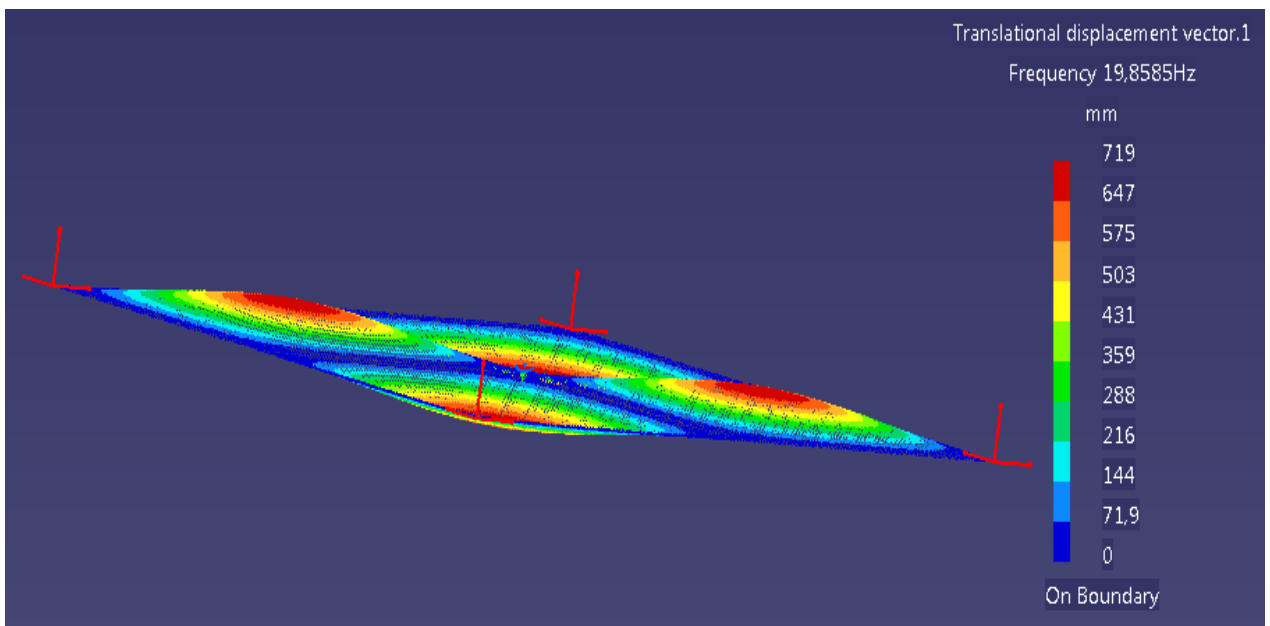


Figura 5.6: Resultado da simulação para o 4º modo com frequência $f_4 = 19,859 \text{ Hz}$

5.2.1.3 Conclusão sobre esta modelação

A concordância entre este modelo estrutural e a formulação analítica foi bastante boa como se pode observar. O método de elementos finitos tem enorme versatilidade, na medida em que as condições de fronteira e regime de cargas se especificam sem nenhuma dificuldade. Como ferramenta de projeto estrutural é pois um método de trabalho imprescindível.

No próximo ponto a simples estrutura homogénea, tipo casca, será combinada com reforços do tipo perfil oco fechado. A modelação analítica seria muito trabalhosa, contudo usando elementos finitos, tal tarefa fica muitíssimo simplificada como se demonstra.

5.2.2 Análise dinâmica da Placa quadrada com reforços no bordo

5.2.2.1 Dados Geométricos e Estruturais

Estudo da análise dinâmica de uma placa de 1 mm de espessura com reforço quadrado oca e apoiada, conforme a Figura 5.7 e com desenho técnico conforme a Figura 5.8. Elemento composto de Aço com propriedades: $E=210\text{GPa}$, $\nu = 0.3$ e $\rho = 7800 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$.

Como foi mencionado anteriormente, foram aqui testados casos com geometria extremamente simples, a fim de possibilitar a comparação com exemplos formulados com meios analíticos ou semi-analíticos. Exemplos mais complexos não seriam didaticamente elegíveis, tal como a análise de um capot com geometria real. A Figura 5.3 mostra a geometria e reforços colocados na placa quadrada.

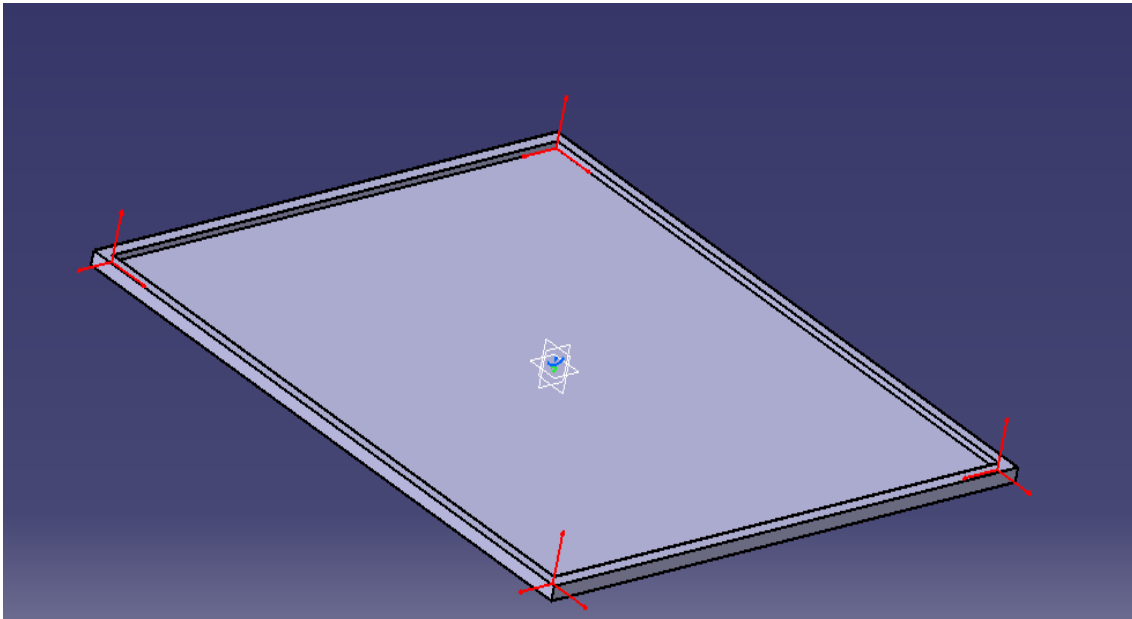


Figura 5.7: Placa com reforço quadrado oco de 1 mm, com apoios

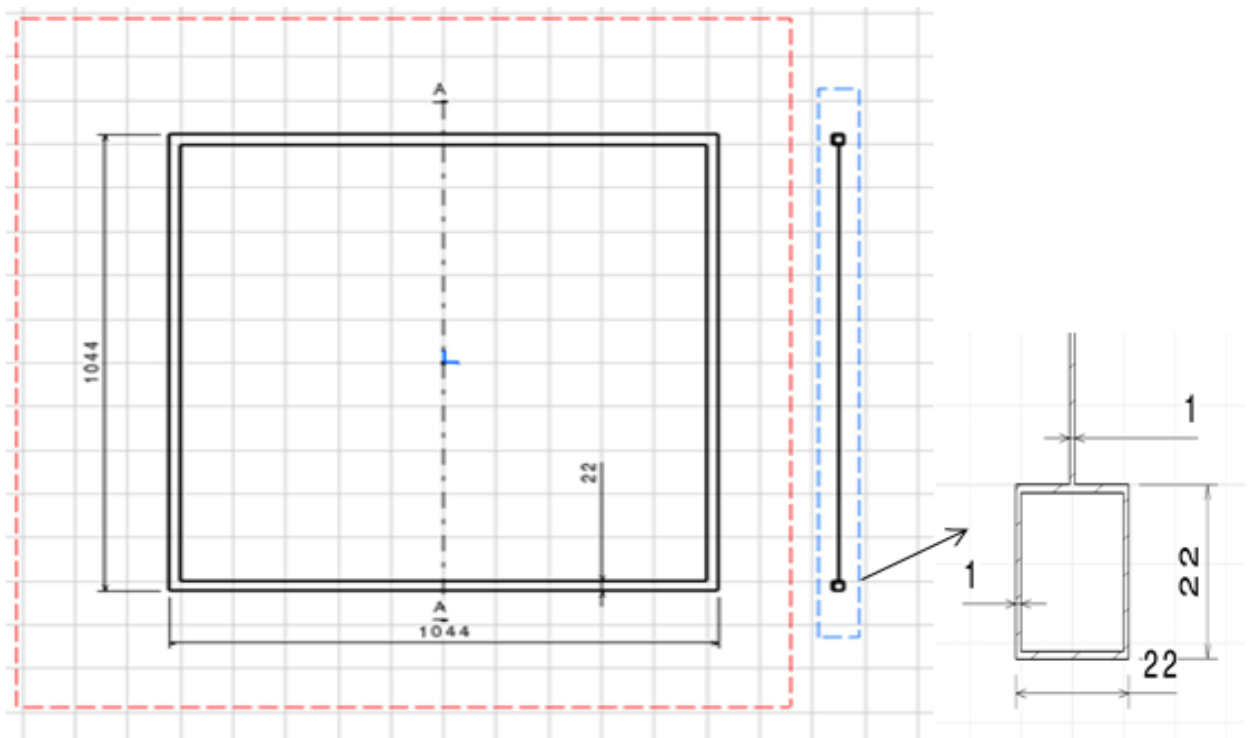


Figura 5.8: Desenho da Placa com reforço quadrado oco de 1 mm

Aplicando este estudo através da ferramenta do software CATIA, “frequency analysis”. Uma simulação dinâmica com malha composta com elementos finitos

tetraédricos parabólicos com 10 nós e com dimensão de 5mm conforme a Figura 5.2.

5.2.2.2 Resultados da simulação da Placa com reforço Quadrado

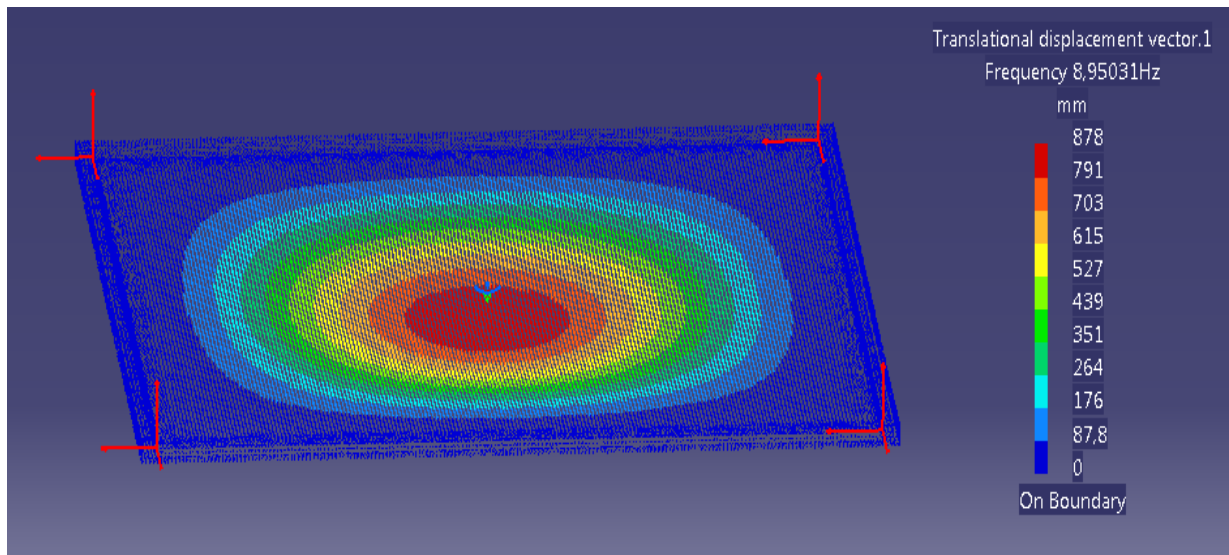


Figura 5.9: Resultado da simulação para o 1º modo com frequência $f_1 = 8,9503 \text{ Hz}$

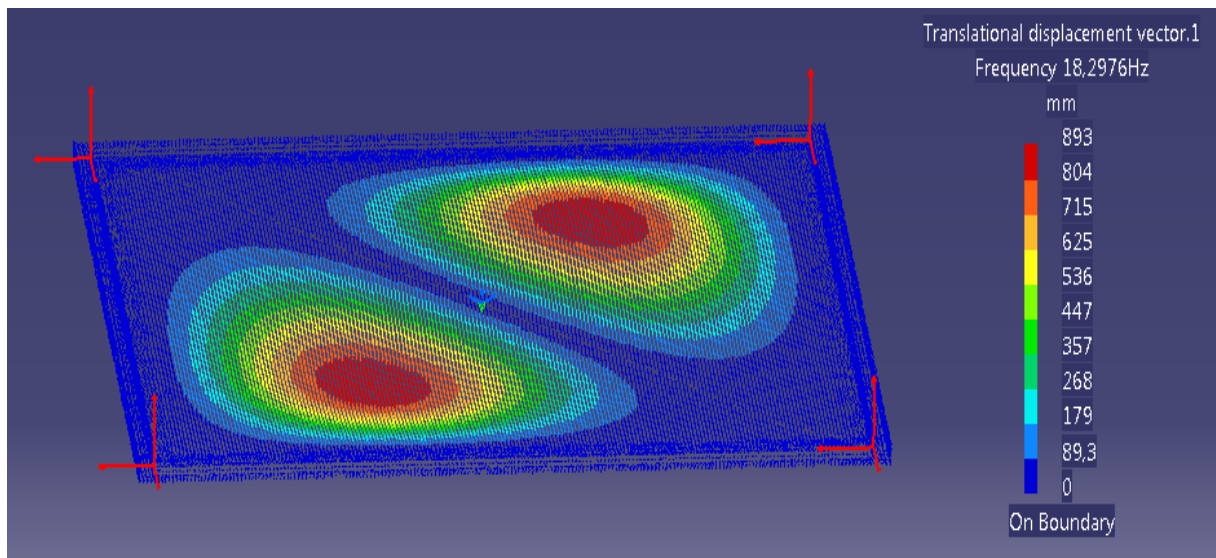


Figura 5.10: Resultado da simulação para o 2º modo com frequência $f_2 = 18,298 \text{ Hz}$

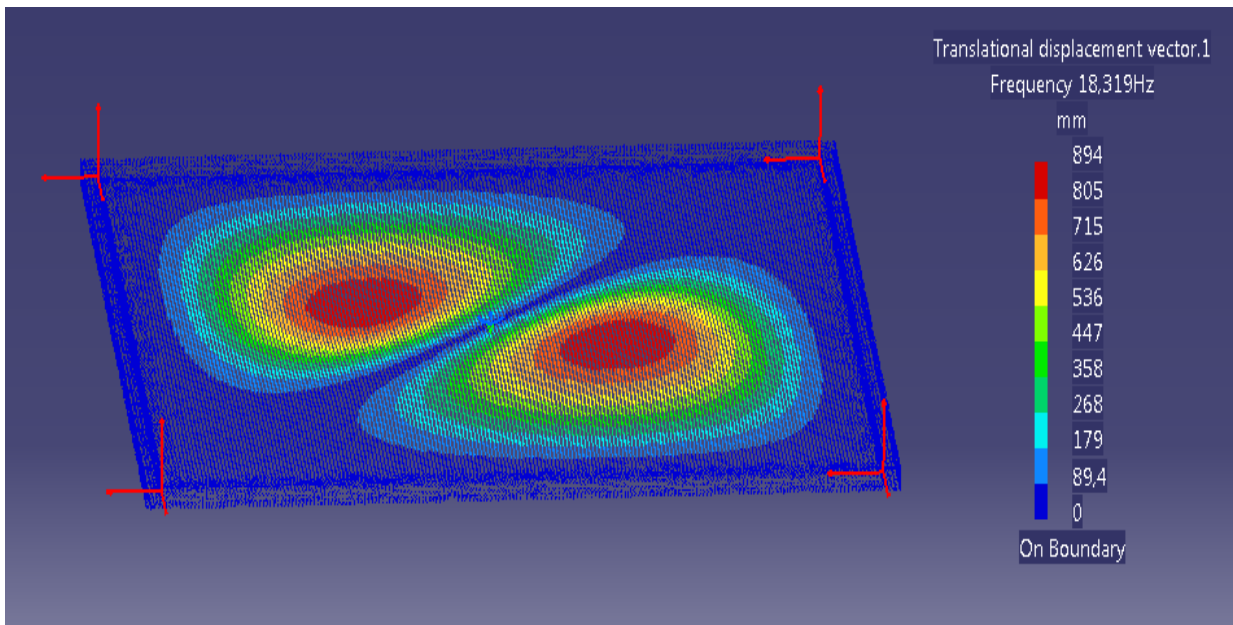


Figura 5.11: Resultado da simulação para o 3º modo com frequência $f_3 = 18,319 \text{ Hz}$

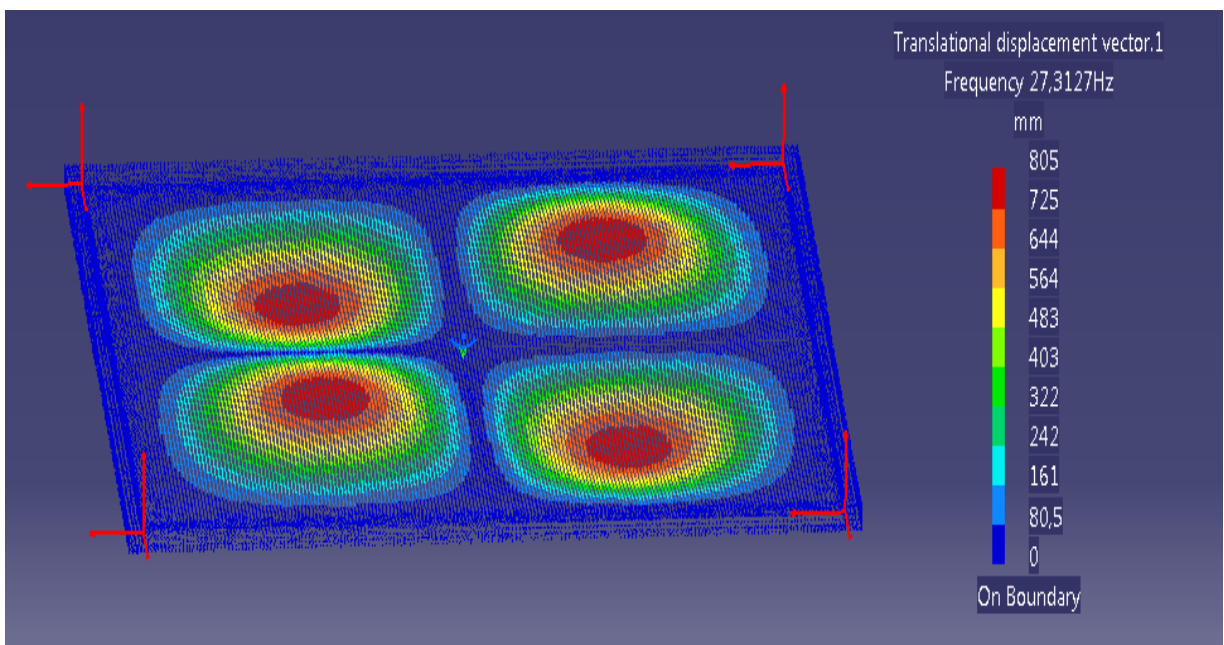


Figura 5.12: Resultado da simulação para o 4º modo com frequência $f_4 = 27,313 \text{ Hz}$

5.2.3 Análise dinâmica da Placa com reforço Circular

5.2.3.1 Dados Geométricos e Estruturais

Estudo da análise dinâmica de uma placa de 1 mm de espessura com reforço circular oca apoiada, conforme a Figura 5.13 e com desenho técnico conforme a Figura 5.14. Elemento composto de Aço com propriedades: $E=210\text{GPa}$, $\nu = 0.3$ e $\rho = 7800 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$.

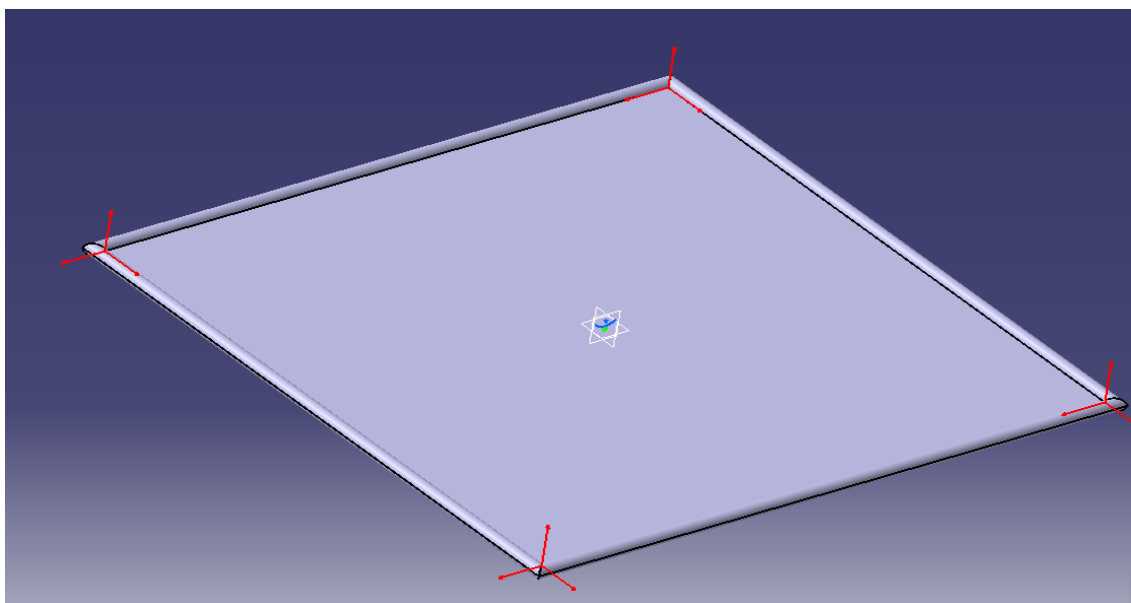


Figura 5.13: Placa com reforço circular oca de 1 mm, com apoios

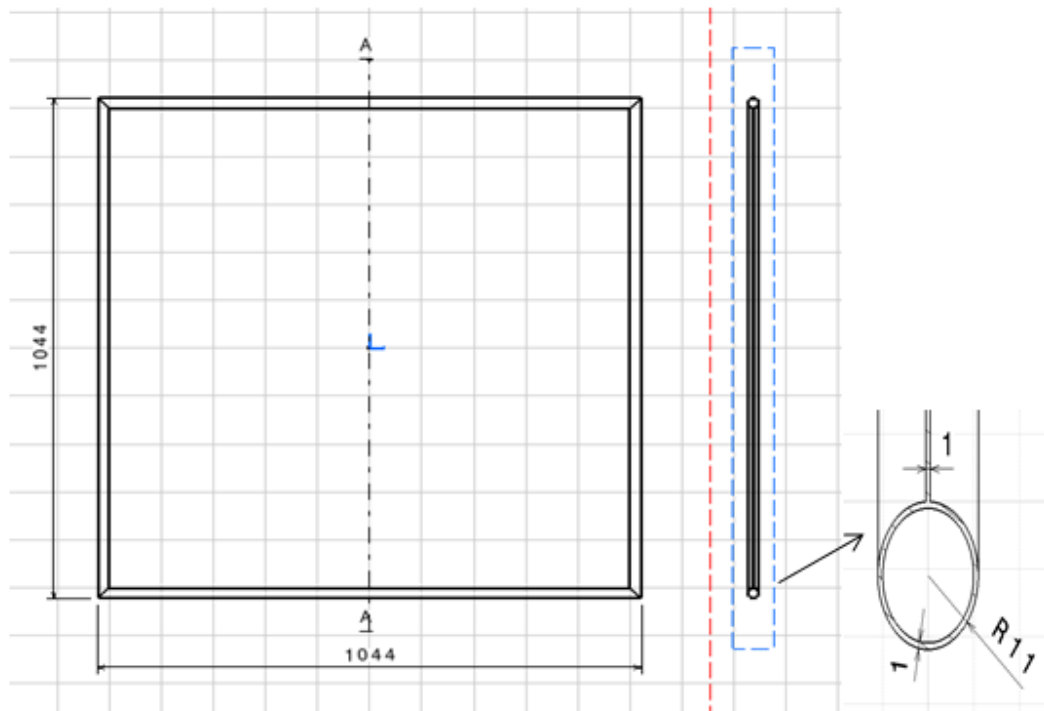


Figura 5.14: Desenho da Placa com reforço circular oca de 1 mm

Aplicando este estudo através da ferramenta do software CATIA, “frequency analysis”. Uma simulação dinâmica com malha composta com elementos finitos tetraédricos parabólicos com 10 nós e com dimensão de 5mm conforme a Figura 5.2.

5.2.3.2 Resultados da simulação da Placa com Reforço Circular

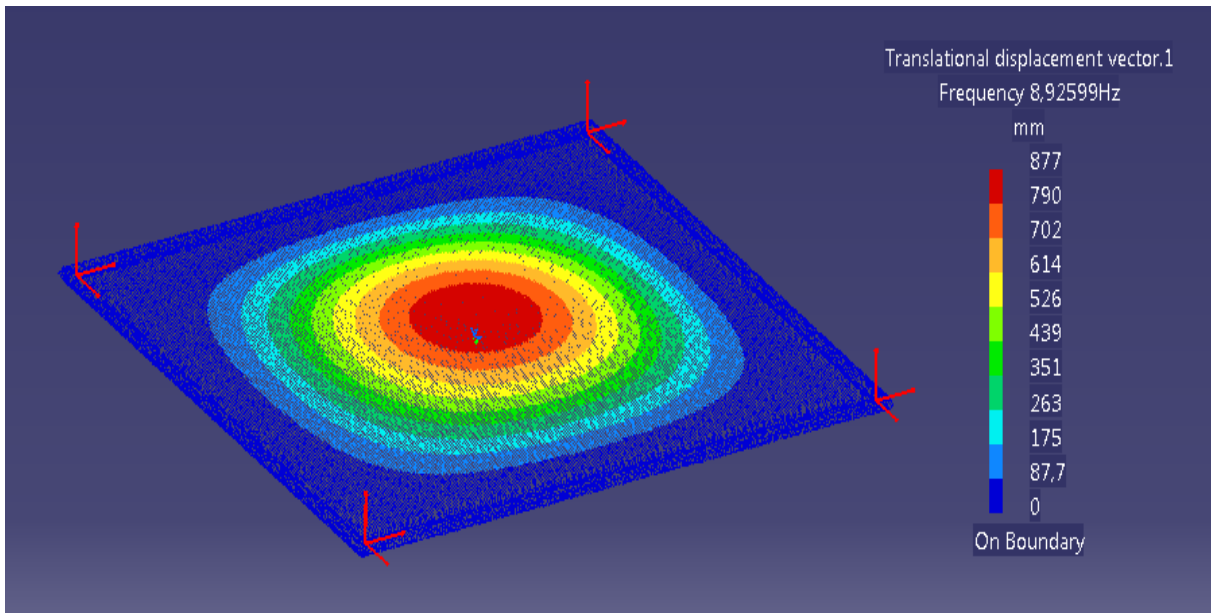


Figura 5.15 - Resultado da simulação para o 1º modo com frequência $f_1 = 8,926 \text{ Hz}$

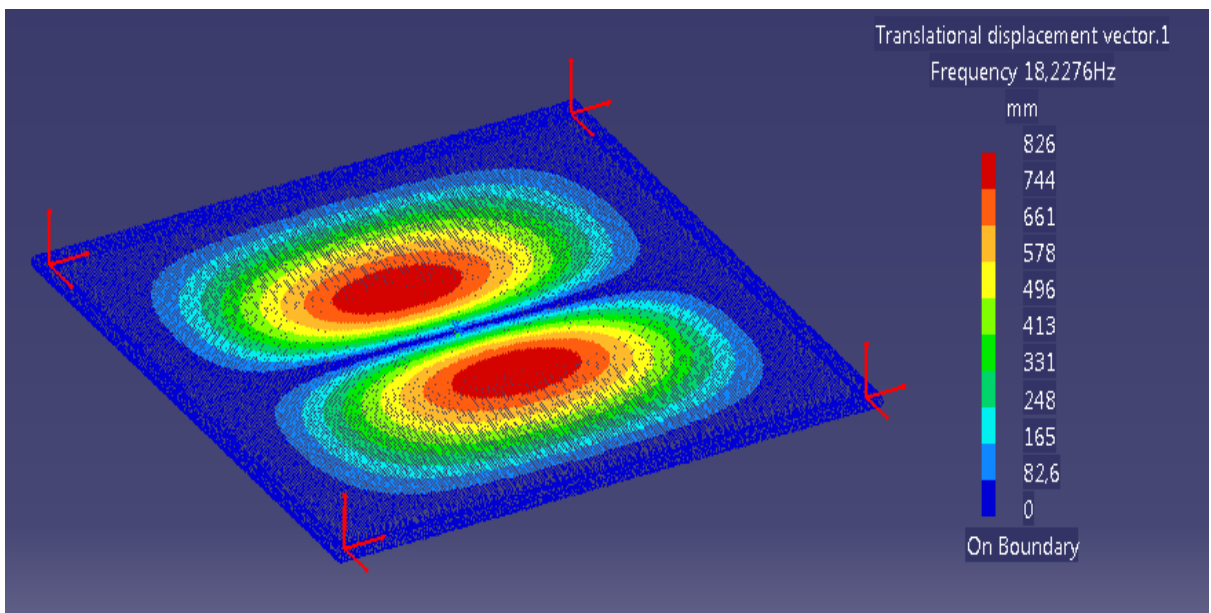


Figura 5.16 - Resultado da simulação para o 2º modo com frequência $f_2 = 18,228 \text{ Hz}$

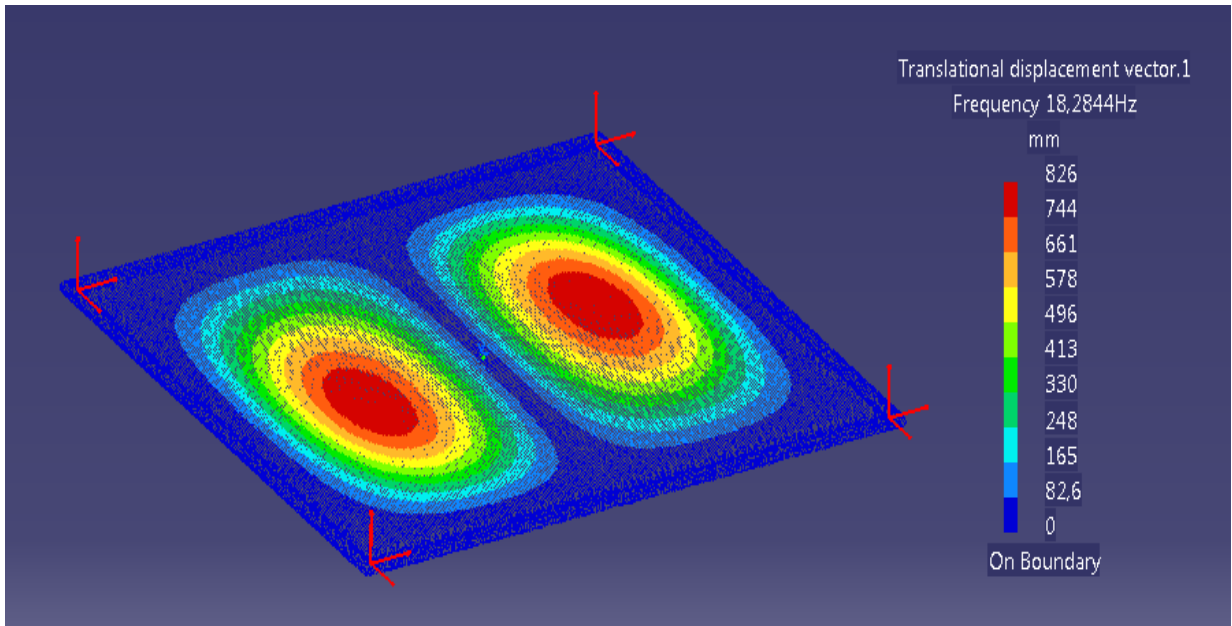


Figura 5.17 - Resultado da simulação para o 3º modo com frequência $f_3 = 18,284 \text{ Hz}$

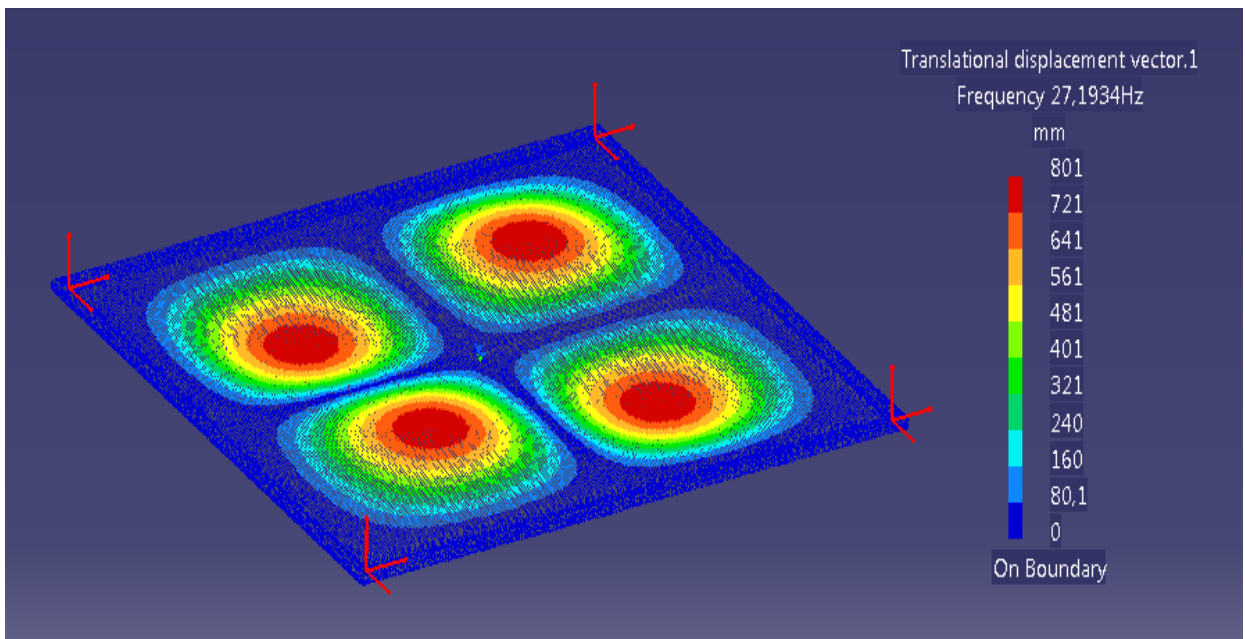


Figura 5.18 - Resultado da simulação para o 4º modo com frequência $f_4 = 27,193 \text{ Hz}$

5.2.4 Análise dinâmica do Capot Simples com dobras

5.2.4.1 Dados Geométricos e Estruturais

Estudo da análise dinâmica do capot com dobras nos perfis laterais curvos. Esta casca está apoiada, conforme a Figura 5.19 (linha reta superior, que serve de dobradiça e linha reta inferior) e com desenho técnico conforme a Figura 5.20. Elemento estrutural feito de aço com propriedades: $E=210\text{GPa}$, $\nu = 0.3$ e $\rho = 7800 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$. A título informativo, aços de tratamentos térmicos por arrefecimento escalonado em duas etapas e a diferentes velocidades de arrefecimento (*dual phase steel*), assegurando martensite nodular numa matriz de austenite e perlite, têm elevada tensão de cedência e rotura, permitindo finas espessura e mais leveza, atributos fundamentais para a indústria automóvel

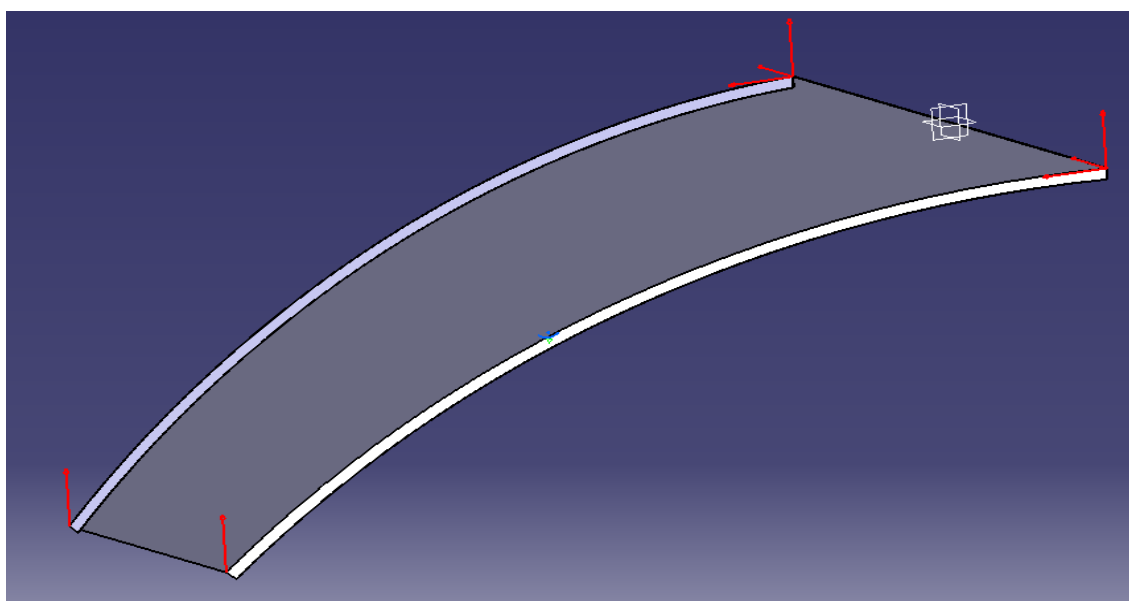


Figura 5.19: Capot Simples com dobras, apoiada nos bordos superior e inferior

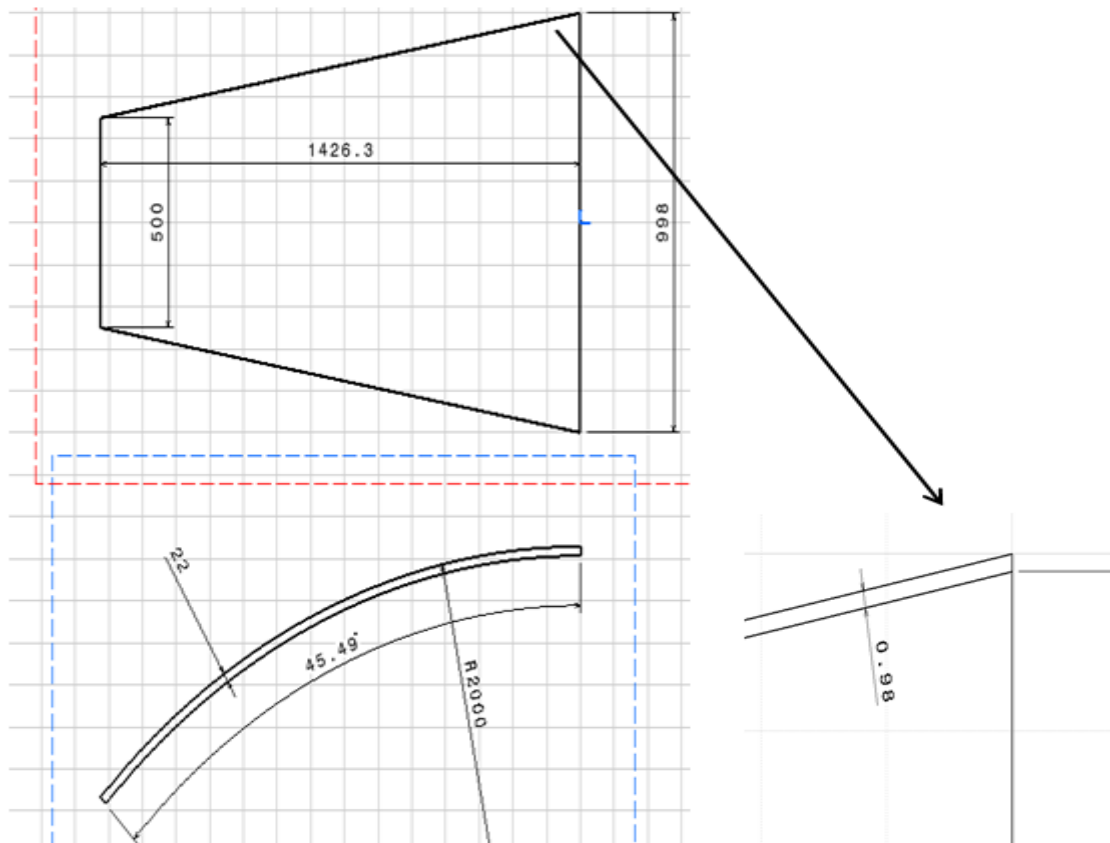


Figura 5.20: Desenho do Capot Simples com dobras

Aplicando este estudo através da ferramenta do software CATIA, “frequency analysis”. Uma simulação dinâmica com malha composta com elementos finitos tetraédricos parabólicos com 10 nós e com dimensão de 5mm conforme a Figura 5.2.

5.2.4.2 Resultados da simulação do Capot Simples com dobras

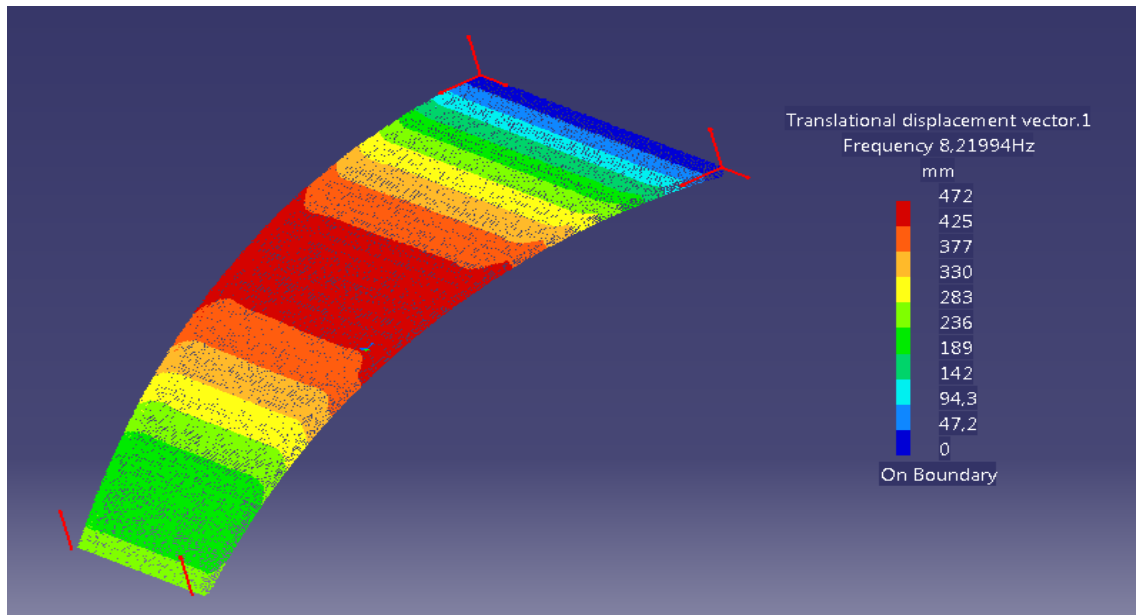


Figura 5.21: Resultado da simulação para o 1º modo com frequência $f_1 = 8,220 \text{ Hz}$

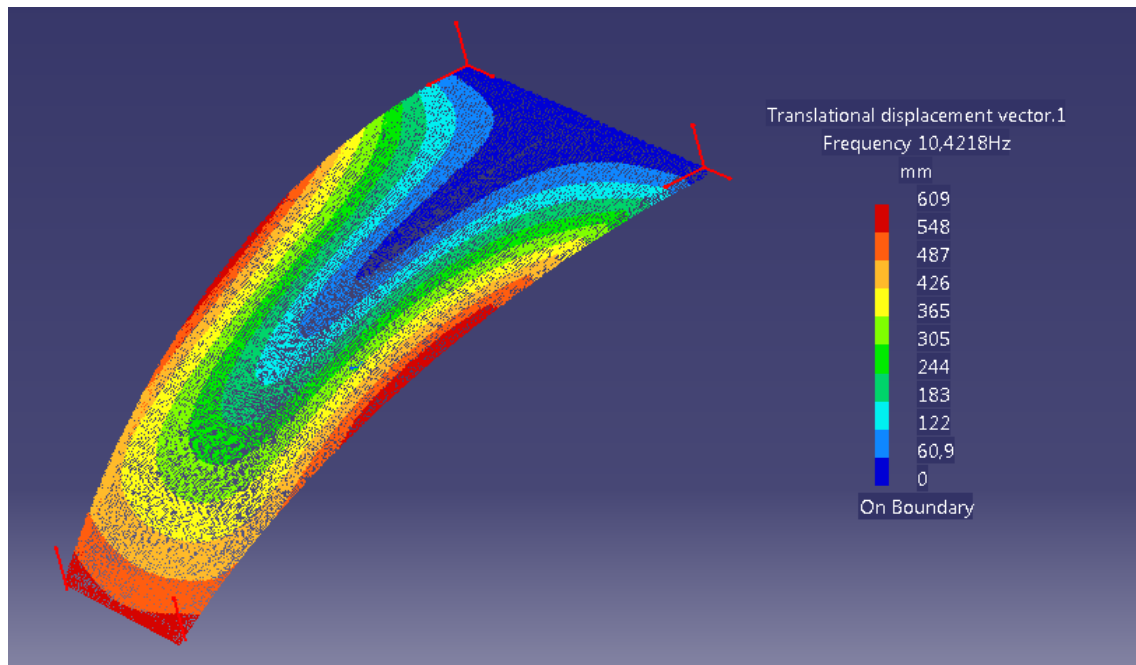


Fig. 5.22: Resultado da simulação para o 2º modo com frequência $f_2 = 10,422 \text{ Hz}$

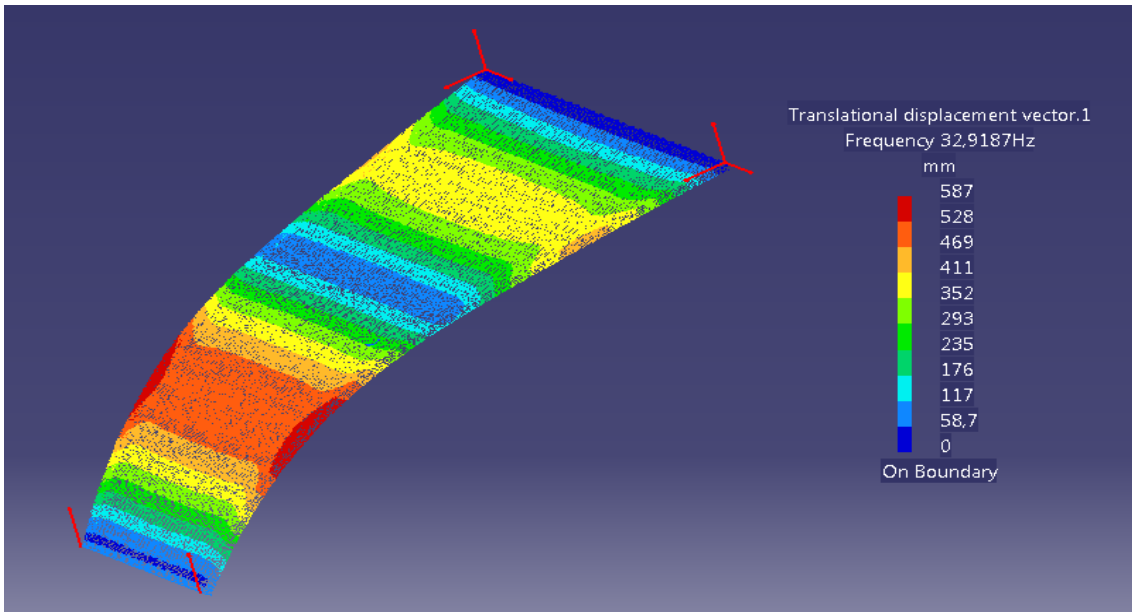


Fig. 5.23: Resultado da simulação para o 3º modo com frequência $f_3 = 32,919 \text{ Hz}$

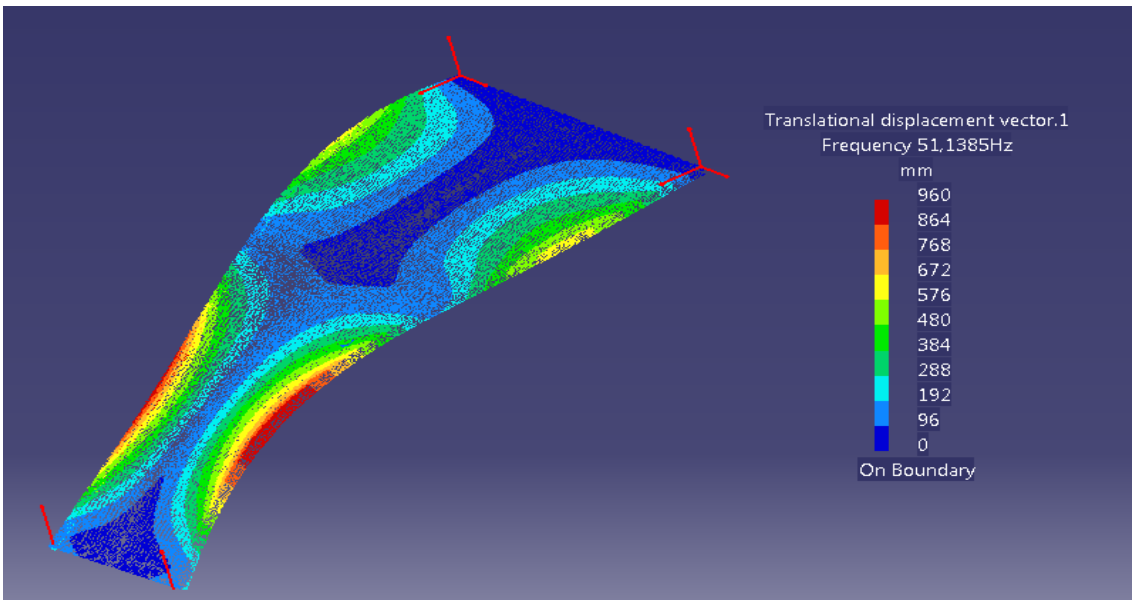


Fig. 5.24 - Resultado da simulação para o 4º modo com frequência $f_4 = 51,139 \text{ Hz}$

5.2.5 Análise dinâmica do Capot Com Reforços

5.2.5.1 Dados Geométricos e Estruturais

Estudo da análise dinâmica do capot com reforços apoiada, conforme a Figura 5.25 e com desenho técnico conforme a Figura 5.26. Elemento composto de Aço com propriedades: $E=210\text{GPa}$, $\nu = 0.3$ e $\rho = 7800 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$.

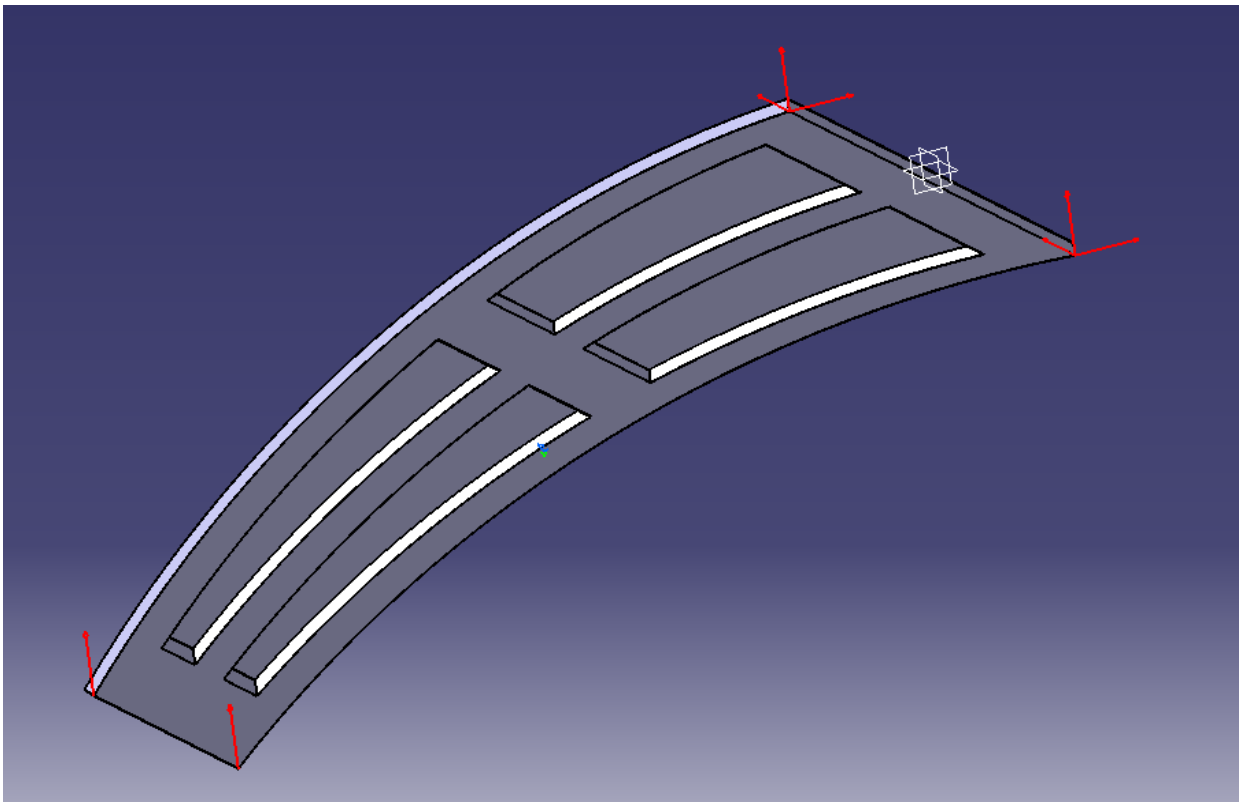


Figura 5.25: Capot Com Reforços, apoiada

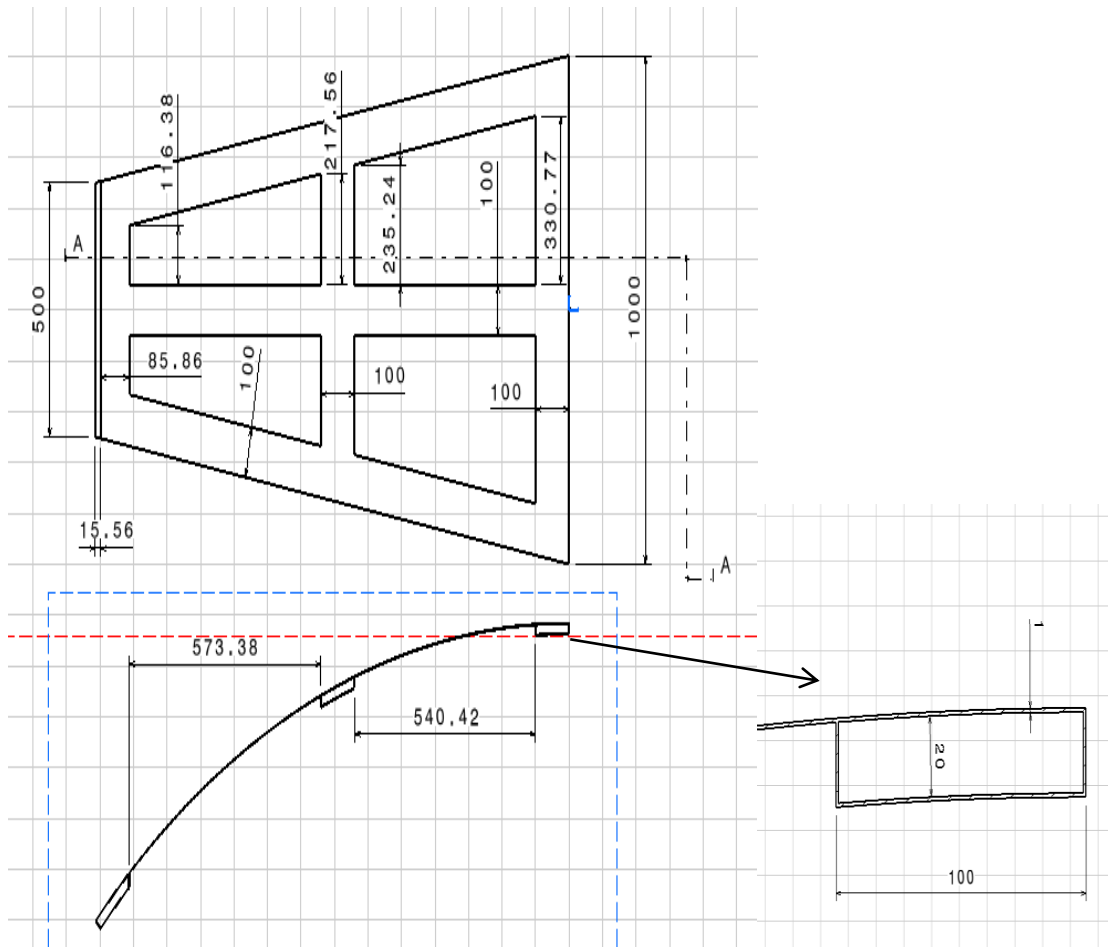


Fig. 5.26: Desenho do Capot com reforços

Aplicando este estudo através da ferramenta do software CATIA, “frequency analysis”. Uma simulação dinâmica com malha composta com elementos finitos tetraédricos parabólicos com 10 nós e com dimensão de 5mm conforme a Figura 5.2.

5.2.5.2 Resultados da simulação do Capot Com Reforços

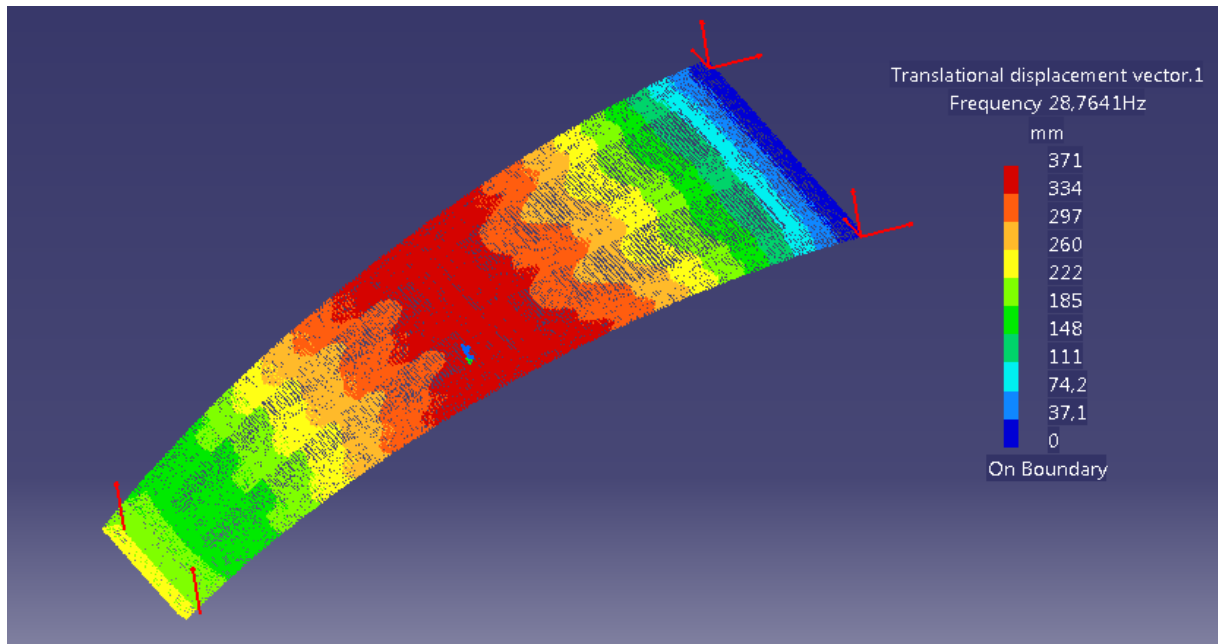


Figura 5.27: Resultado da simulação para o 1º modo com frequência $f_1 = 28,764 \text{ Hz}$

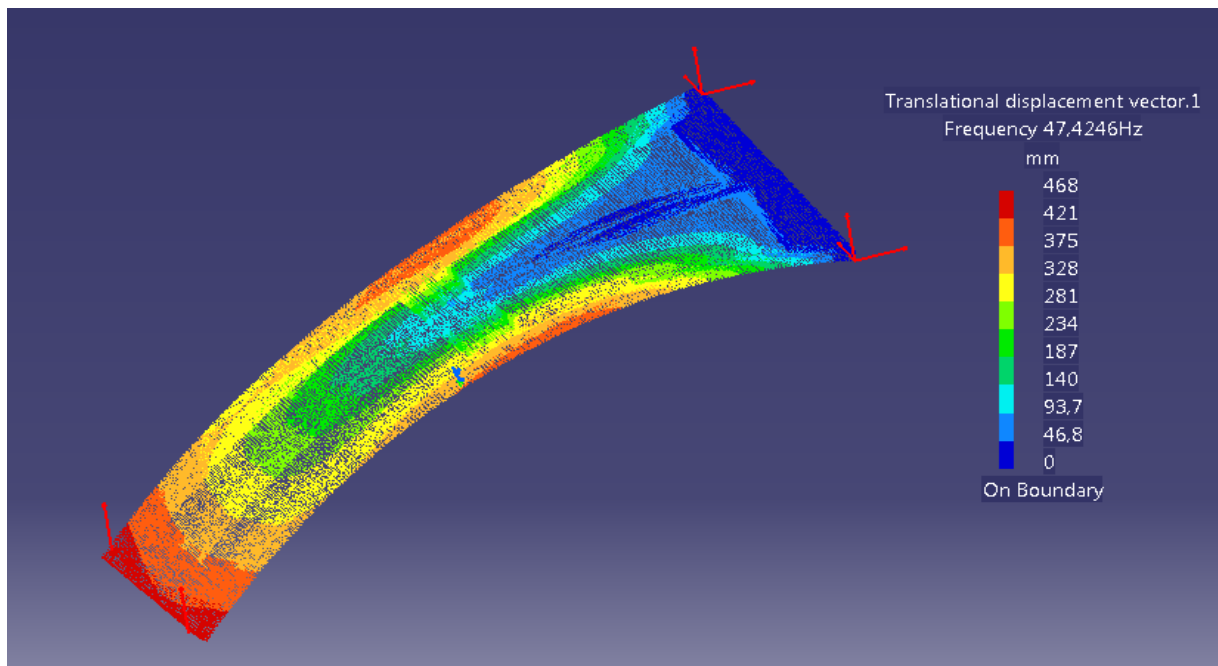


Figura 5.28: Resultado da simulação para o 2º modo com frequência $f_2 = 47,425 \text{ Hz}$

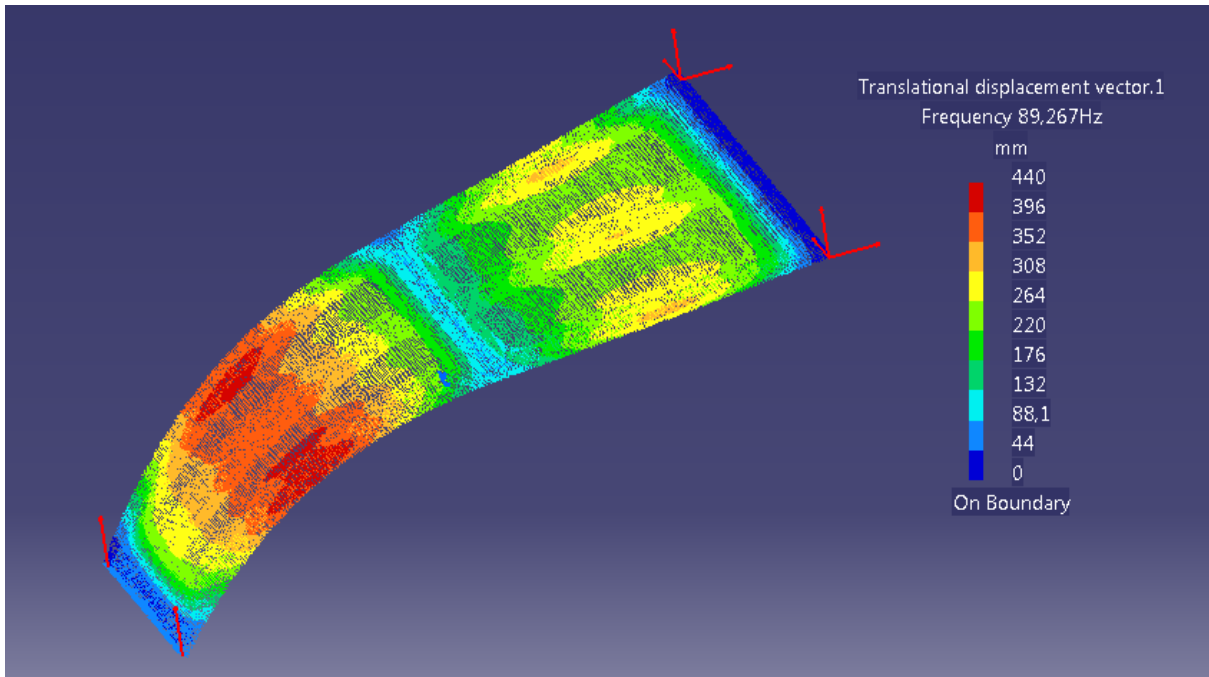


Figura 5.29: Resultado da simulação para o 3º modo com frequência $f_3 = 89,267 \text{ Hz}$

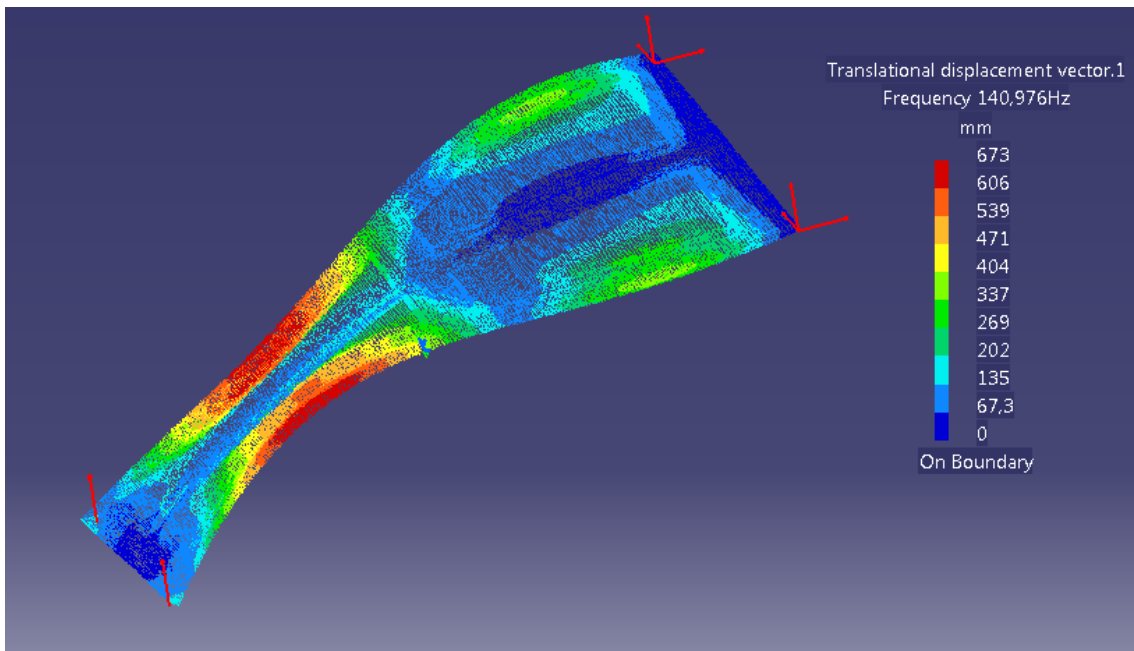


Figura 5.30: Resultado da simulação para o 4º modo com frequência $f_4 = 140,976 \text{ Hz}$

5.2.6 Análise Estática do Capot

5.2.6.1 Dados Geométricos e Estruturais

Comparar os resultados das simulações estática do Capot Simples e do Reforçado, já analisado dinamicamente. Olhando para a Figura 5.31: Na região 2, em termo de condições de contorno, restringindo as direções nas setas a vermelho; Na região 3, aplicando o seu peso próprio com aceleração da gravidade de $9,8 \text{ m/s}^2$. Na região 1 o deslocamento a determinar após a simulação. Elemento composto de Aço com propriedades: $E=210\text{GPa}$, $\nu = 0.3$ e $\rho = 7800 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$.

Tal e qual como a simulação dinâmica, aplicando este estudo através da ferramenta do software CATIA, "frequency analysis". Uma simulação estática com malha composta com elementos finitos tetraédricos parabólicos com 10 nós e com dimensão de 5mm conforme a Figura 5.2.

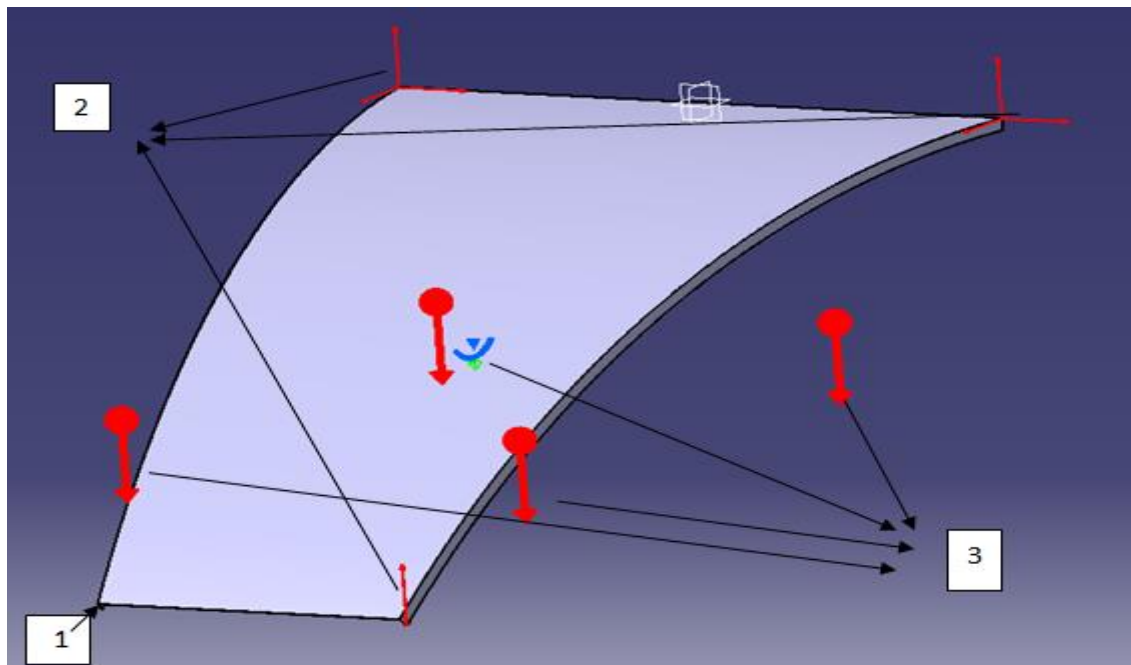


Figura 5.31: Capot Simples, com as restrições de deslocamento e o peso próprio

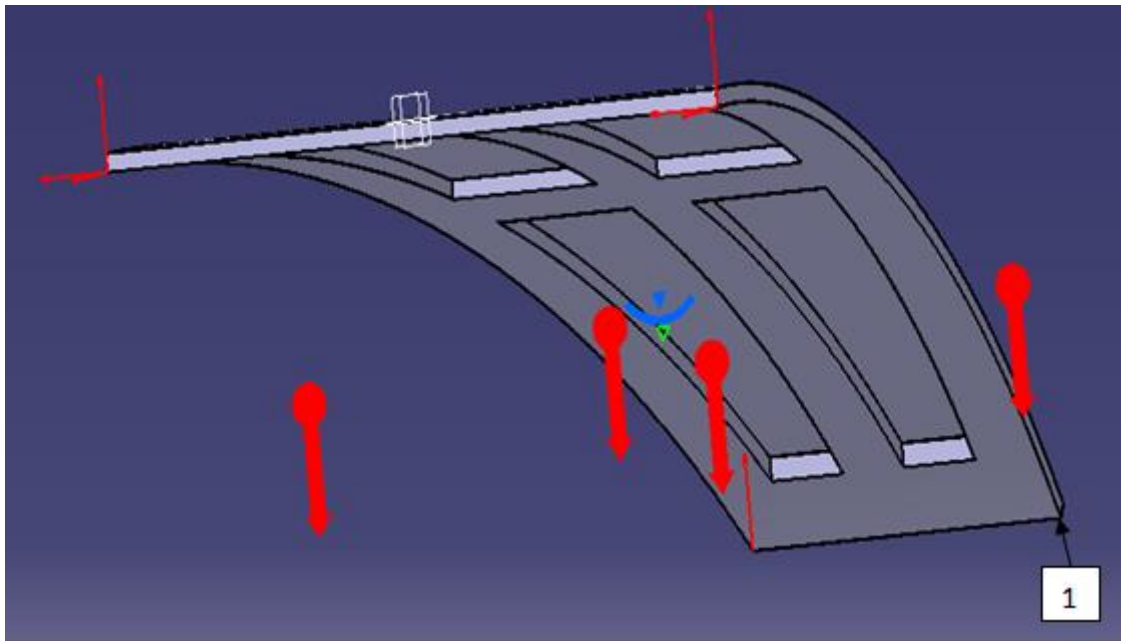


Figura 5.32: Capot com reforços, com as restrições de deslocamento e o peso próprio

5.2.6.2 Resultados da Análise Estático do Capot

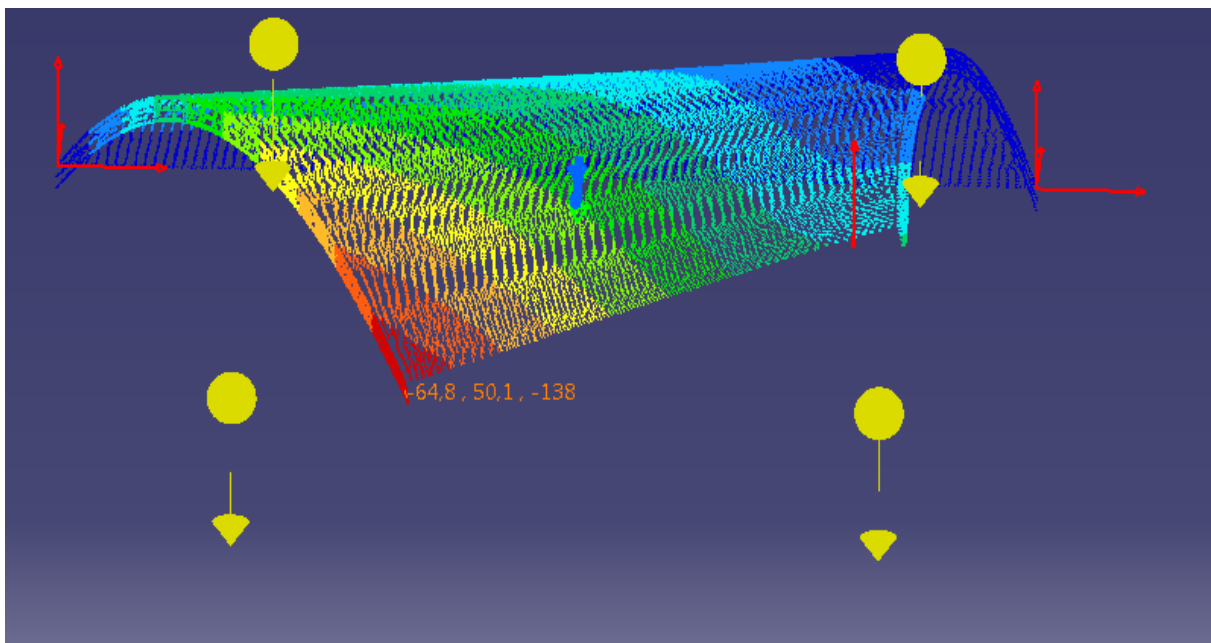


Figura 5.33: Resultado da simulação do Capot Simples com o deslocamento do ponto a 138 mm

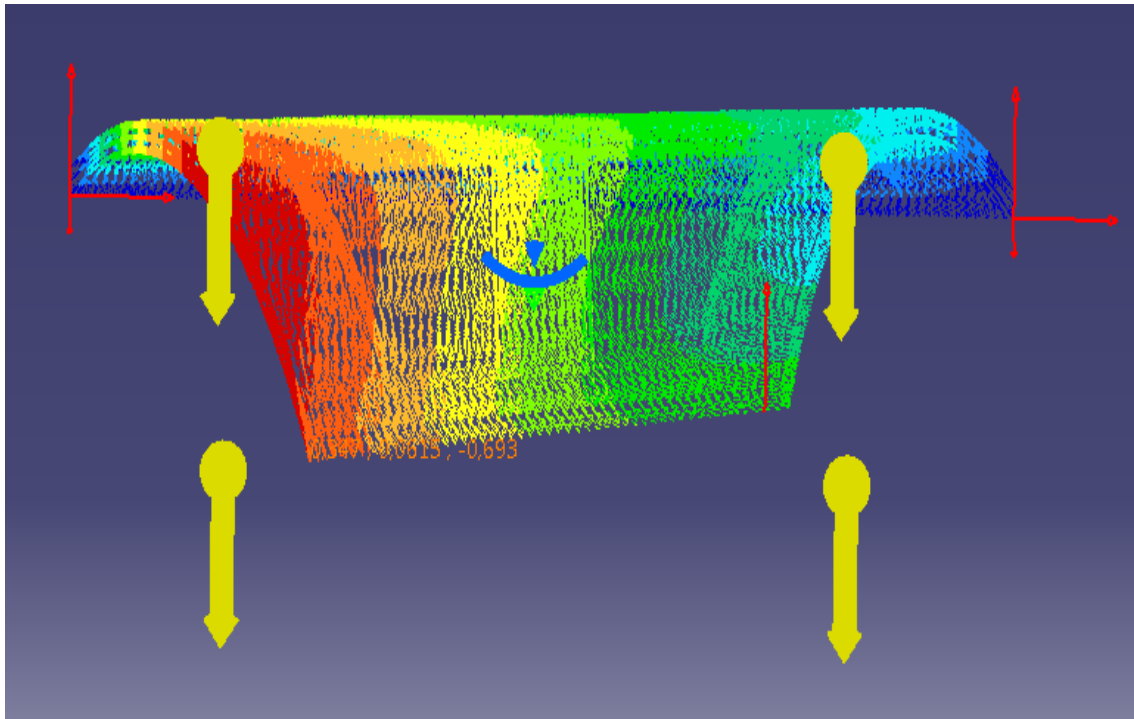


Figura 5.34: Resultado da simulação do Capot Reforçado com o deslocamento do ponto a 0,693mm

Como já era de prever que o Capot Reforçado iria obter um deslocamento muito menor, por obter mais rigidez estrutural.

5.2.7 Análise dinâmica do Tubo Circular Oco

5.2.7.1 Dados Geométricos e Estruturais

Estudo da análise dinâmica de um tubo circular oco de 1 mm de espessura, fixo os pontos A, A', B e B' nos eixos conforme a Figura 5.35 e com desenho técnico conforme a Figura 5.36. Elemento composto de Aço com propriedades: $E=210\text{GPa}$, $\nu = 0.3$ e $\rho = 7800 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$.

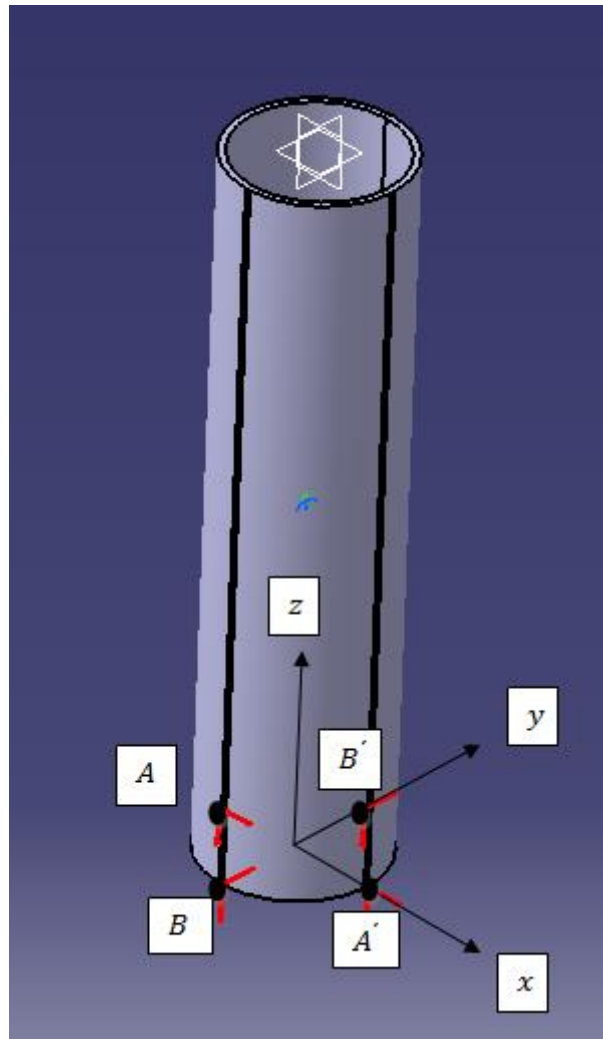


Figura 5.35: Tubo Circular Oco, com apoios

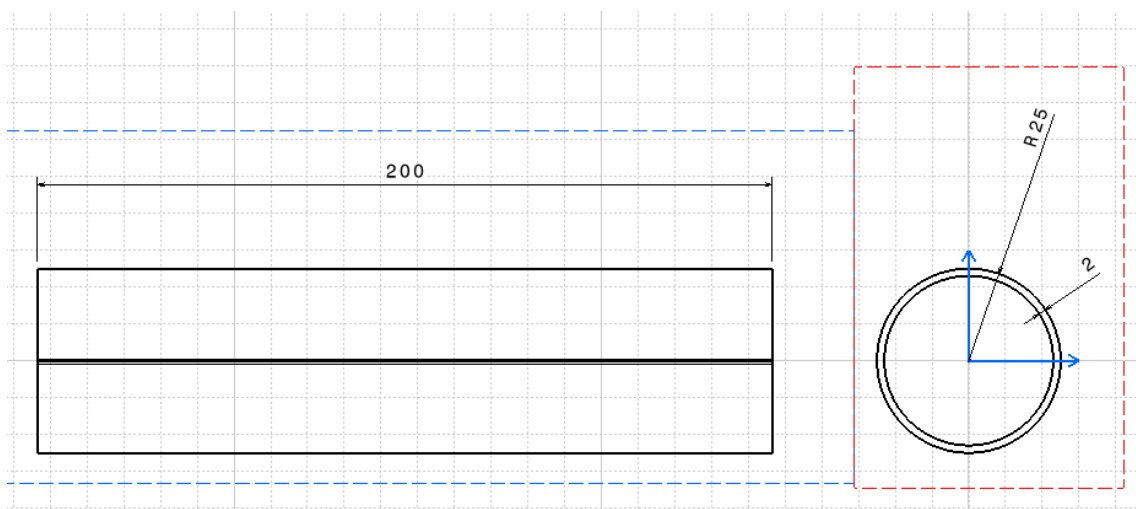


Figura 5.36: Desenho do Tubo Circular Oco

Aplicando este estudo através da ferramenta do software CATIA, “frequency analysis”. Uma simulação dinâmica com malha composta com elementos finitos tetraédricos parabólicos com 10 nós, conforme a Figura 5.2, mas com dimensão de 2mm de lado.

5.2.7.2 Resultados da simulação do Tubo Circular Oco

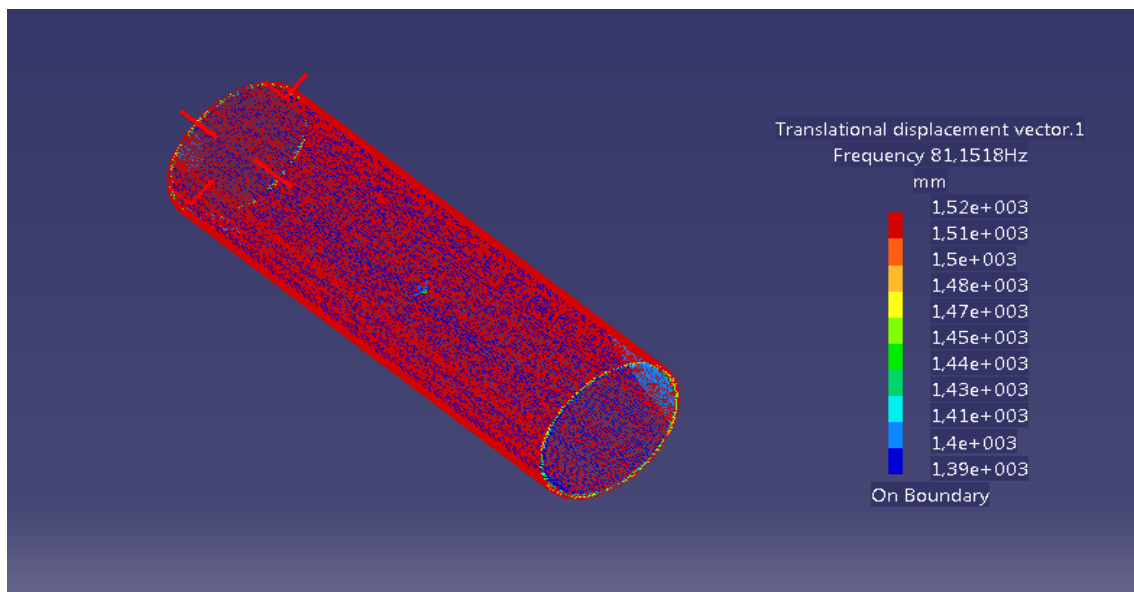


Figura 5.37: Resultado da simulação para o 1º modo com frequência $f_1 = 81,152 \text{ Hz}$

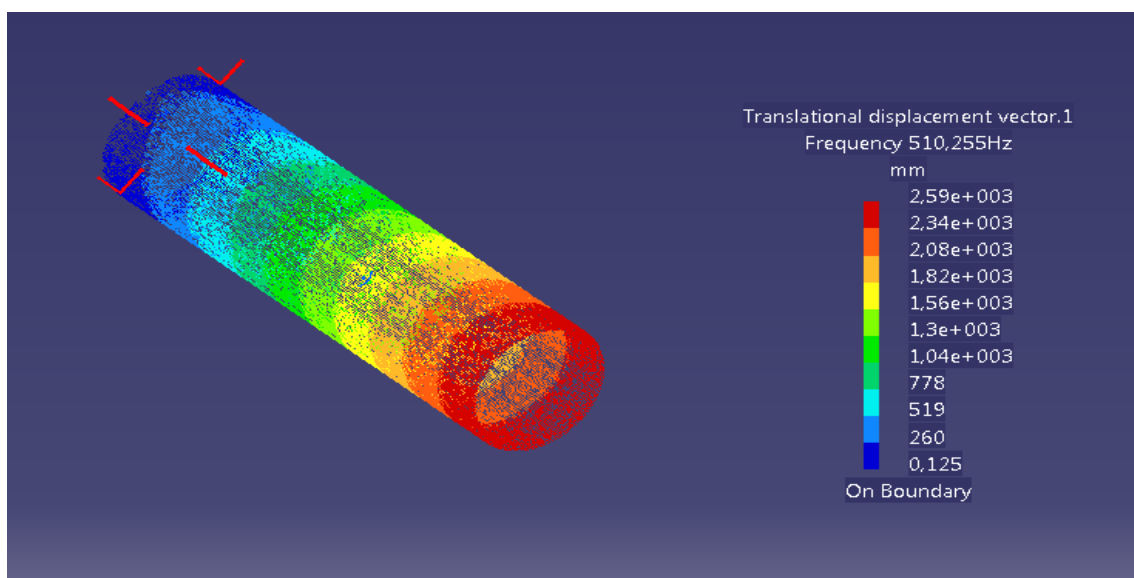


Figura 5.38: Resultado da simulação para o 2º modo com frequência $f_2 = 510,255 \text{ Hz}$

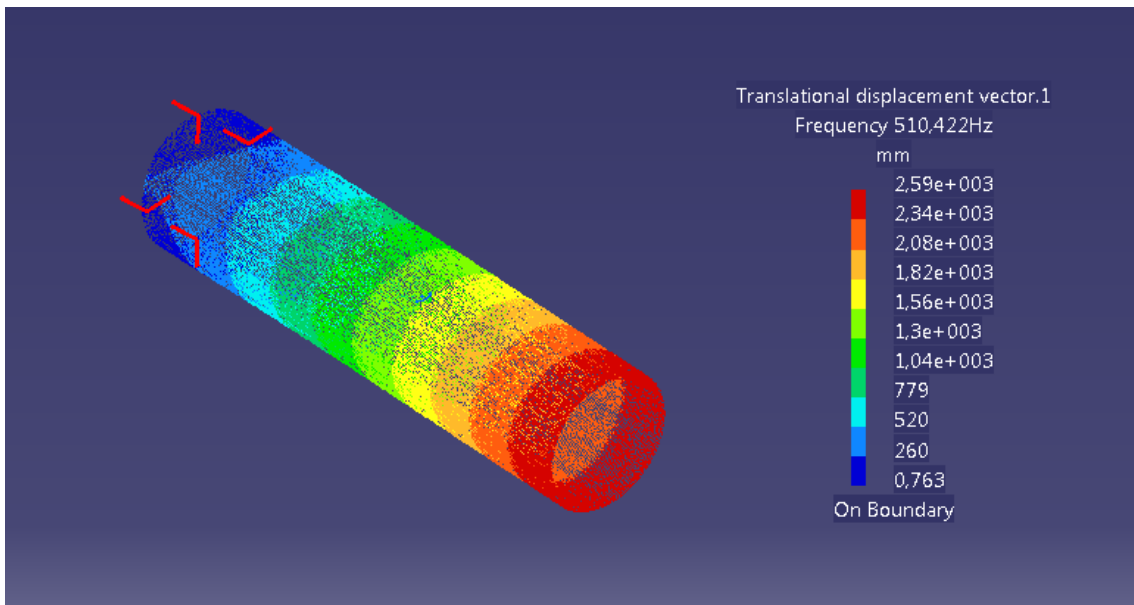


Figura 5.39: Resultado da simulação para o 3º modo com frequência $f_3 = 510,422 \text{ Hz}$

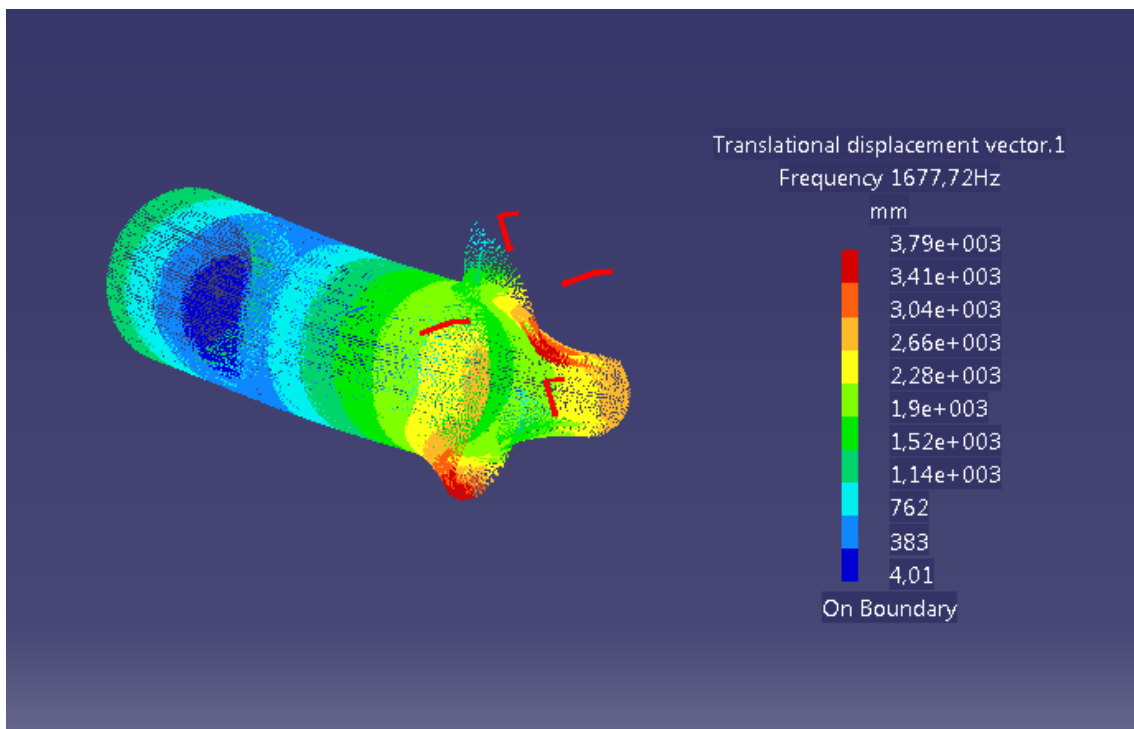


Figura 5.40: Resultado da simulação para o 4º modo com frequência $f_4 = 1677,72 \text{ Hz}$

6. Forma de Ritz para a vibração de uma placa curva

6.1 Introdução

A fim de demonstrar as capacidades da solução de Ritz, agora aplicada a uma placa de curvatura cilíndrica (quer dizer, dispondo de uma curvatura principal apenas), vamos utilizar o método *variacional* anteriormente descrito para placas planas, mas agora aplicado a uma casca fina. Neste caso, há deslocamentos que se encontra acoplados, uma vez que a casca é curva. Com efeito, fletindo a casca segundo o plano da curvatura cilíndrica, esta não só apresenta deslocamentos transversos w , mas também deslocamentos de membrana, ou circunferenciais. A solução a seguir descrita serve para a análise modal de uma placa curva; a geometria de um capô aproxima-se mais desta forma. Esta solução não é a melhor ferramenta de análise estrutural quando a geometria seja a de um capô, pois este não tem geralmente formas simples. O principal objetivo desta análise é o de mostrar que com funções de forma adequadas, se pode aplicar o método de Ritz também no caso de cascas curvas. Consideremos o caso de uma casca cilíndrica vibrando no plano de curvatura em apenas com modos simétricos (não é sempre assim, contudo aqui, dada a complexidade da solução geral, ficamos apenas por dois modos simétricos e no plano de curvatura como explicado a seguir)

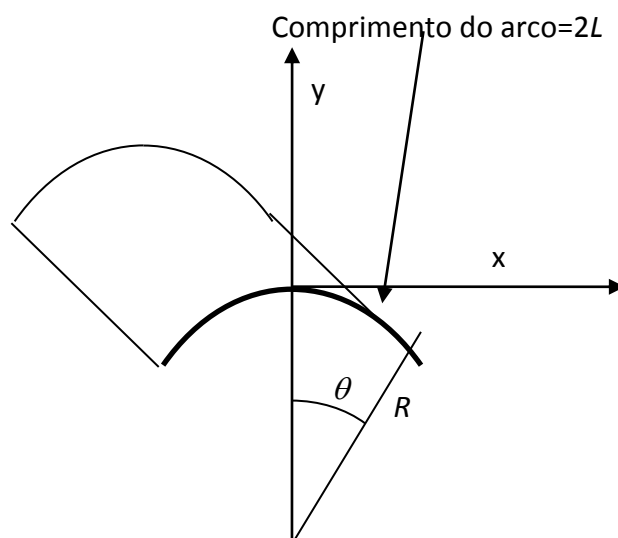


Figura 6.1: Casca cilíndrica medianamente rasa, como modelo aproximado de um capô

Considerando a flexão apenas no plano de curvatura (sem torção da casca), precisamos de considerar apenas dois deslocamentos em regime de simetria geométrica; o campo de deslocamentos será formado por w que é perpendicular (ou *transversal*) à superfície; por sua vez, v é tangencial à superfície. Para casos de flexão em cascas finas, podemos usar estas funções de forma polinomiais cúbicas (Ventsel, 2001):

$$w = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (6.1)$$

Onde x é a coordenada curvilínea segundo a direção angular θ . A razão do polinómio cubico justifica-se pelo número de condições de fronteira, a saber:

- Especificar um deslocamento no extremo livre $w(x=L)=w_0$
- Especificar uma rotação no bordo livre, $w'(x=L)=\theta_0$
- Deslocamento e 1ª derivada na origem $x=0$

Há pois 4 condições pelo que é necessário um polinómio do 3º grau

Por sua vez, o deslocamento circunferencial v gera-se por inextensibilidade da placa curva; quer dizer que quando a placa sofre flexão, o deslocamento v é tal que não deve haver deformação circunferencial- Esta deformação tal como se prevê na teoria de cascas finas de pequena curvatura, é dada pela expressão:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{w}{R} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (6.2)$$

Para que a placa tenha flexão inextensível, dever ser:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{w}{R} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow v(x) = -\frac{1}{R} \int w(x) dx \quad (6.3)$$

Voltando à expressão de $w(x)$, as condições de fronteira são:

$$w(0)=0;$$

$$w'(0)=0$$

Estas duas condições dão $a_0=a_1=0$. Fica o deslocamento reduzido à expressão:

$$w = a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (6.4)$$

O deslocamento circunferencial é

$$v(x) = -\frac{1}{R} \int (a_2 x^2 + a_3 x^3) dx = -\frac{1}{R} \left(a_2 \frac{x^3}{3} + a_3 \frac{x^4}{4} \right) \quad (6.5)$$

Condições de fronteira:

O que se pretende na deformação desta estrutura é que no bordo livre (problema simétrico; de facto são dois bordos livres em $x=\pm L$) se registre:

$$a) - x=L \Rightarrow w(L)=w_0$$

$$b) - x=L \Rightarrow w'(x=L)=0$$

O sistema de equações é:

$$\begin{cases} a_2 L^2 + a_3 L^3 = w_0 \\ 2a_2 L + 3a_3 L^2 = \varphi_0 \end{cases} \quad (6.6)$$

Dividindo a 1ª equação por L , os termos ficam semelhantes para a inversão da matriz:

$$\begin{cases} a_2 L + a_3 L^2 = \frac{w_0}{L} \\ 2a_2 L + 3a_3 L^2 = \varphi_0 \end{cases} \quad (6.7)$$

O resultado a partir da inversão da matriz é:

$$\begin{Bmatrix} a_2 L \\ a_3 L^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{Bmatrix} w_0 \\ L \\ \varphi_0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a_2 L \\ a_3 L^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} w_0 \\ L \\ \varphi_0 \end{Bmatrix}; \quad (6.8)$$

$$a_2 = \frac{3w_0}{L^2} - \frac{\varphi_0}{L}; \quad a_3 = -\frac{2w_0}{L^3} + \frac{\varphi_0}{L^2}; \quad (6.9)$$

As expressões para os deslocamentos principais são:

$$w = \left(\frac{3w_0}{L^2} - \frac{\varphi_0}{L} \right) x^2 + \left(-\frac{2w_0}{L^3} + \frac{\varphi_0}{L^2} \right) x^3 \quad (6.10)$$

$$v = -\frac{1}{R} \left[\left(\frac{3w_0}{L^2} - \frac{\varphi_0}{L} \right) \frac{x^3}{L} + \left(-\frac{2w_0}{L^3} + \frac{\varphi_0}{L^2} \right) \frac{x^4}{4} \right] \quad (6.11)$$

Podemos, com melhor vantagem para notação do tipo de funções de forma ou de interpolação, apenas para o deslocamento transversal $w(x)$ reescrever a sua expressão como segue:

$$w = \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \right) w_0 + \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^3} \right) \varphi_0 \quad (6.12)$$

Por sua vez, as rotações da normal da casca são agora:

$$\varphi(x) = \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{6x^2}{L^3} \right) w_0 + \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x}{L} \right) \varphi_0 \quad (6.13)$$

A curvatura por flexão é:

$$\begin{aligned} k_{xx} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{R \partial x} \\ &= 2 \left(\frac{3w_0}{L^2} - \frac{\varphi_0}{L} \right) + 6 \left(-\frac{2w_0}{L^3} + \frac{\varphi_0}{L^2} \right) x + \frac{1}{R^2} \left(\frac{3w_0}{L^2} - \frac{\varphi_0}{L} \right) x^2 \\ &\quad + \frac{1}{R^2} \left(-\frac{2w_0}{L^3} + \frac{\varphi_0}{L^2} \right) x^3 \end{aligned} \quad (6.14)$$

Com o objectivo de obter a forma variacional para a energia de deformação (ou energia interna), é necessário considerar a relação constitutiva (Lei de Hooke) associada ao modo de deformação que a estrutura permite. Aqui consiste apenas em flexão devida a esforço transversal ou momento no bordo livre.

Deste modo, as expressões seguintes permitem estabelecer a referida relação tensão-deformação, contudo só a referente ao momento M_{xx} será utilizada.

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \varepsilon_{xx} \quad (6.15)$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \varepsilon_{xx} = 0 \\ M_{xx} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} k_{xx} \end{cases} \quad (6.16)$$

A energia de deformação (ou energia interna da estrutura) deve-se à interação entre as reações internas por deformação da estrutura e o trabalho realizado para gerar essas deformações. Em notação simplificada, a energia de deformação interna resulta da expressão integral a resolver em coordenadas cartesianas (se for o caso):

$$U = \frac{1}{2} \int_{Vol} \{\boldsymbol{\sigma}\}^T \{\boldsymbol{\varepsilon}\} dx dy dz \quad (6.17)$$

$$M_{xx} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} k_{xx} \quad (6.18)$$

$$U = \frac{1}{2} \times \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \int_{-L/2}^{L/2} k_{xx}^2 dx$$

Os parâmetros desconhecidos neste problema são o deslocamento w_0 e a rotação φ_0 da normal no bordo livre. Efetuar agora o seguinte sistema:

$$U = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \int_{-L/2}^{L/2} k_{xx}^2 dx$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial w_0} = F_w \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi_0} = M_0 \end{cases} \quad (6.19)$$

Determinação das equações de mínimo da energia de deformação:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial w_0} = 2D \int_0^L k_{xx} \frac{\partial k_{xx}}{\partial w_0} dx = F_w \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi_0} = 2D \int_0^L k_{xx} \frac{\partial k_{xx}}{\partial \varphi_0} dx = M_0 \end{cases} \quad (6.20)$$

Onde:

$$\begin{cases} \frac{\partial k_{xx}}{\partial w_0} = \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} + \frac{3x^2}{R^2L^2} - \frac{2x^3}{R^2L^3} \\ \frac{\partial k_{xx}}{\partial \varphi_0} = -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} - \frac{x^2}{R^2L} + \frac{x^3}{R^2L^2} \end{cases} \quad (6.21)$$

Os integrais seguintes permitem obter a forma matricial de solução do sistema acima referido, contendo as equações de equilíbrio da placa curva sob força e momento no bordo livre:

$$\begin{cases} \int_0^L k_{xx} \frac{\partial k_{xx}}{\partial w_0} dx = k_{ww} w_0 + k_{w\varphi} \varphi_0 \\ \int_0^L k_{xx} \frac{\partial k_{xx}}{\partial \varphi_0} dx = k_{w\varphi} w_0 + k_{\varphi\varphi} \varphi_0 \end{cases} \quad (6.22)$$

As expressões para estes integrais são longas, contudo serão deixadas na forma final:

$$\int_0^L k_{xx} \frac{\partial k_{xx}}{\partial w_0} dx = \left(\frac{13L}{35R^4} - \frac{12}{5R^2L} + \frac{108}{L^3} \right) w_0 + \left(\frac{-11L^2}{210R^4} + \frac{6}{5R^2} - \frac{54}{L^2} \right) \varphi_0 \quad (6.23)$$

$$\int_0^L k_{xx} \frac{\partial k_{xx}}{\partial \varphi_0} dx = \left(\frac{-11L^2}{210R^4} + \frac{6}{5R^2} - \frac{54}{L^2} \right) w_0 + \left(\frac{1L^3}{105R^4} - \frac{4L}{15R^2} + \frac{4}{L} \right) \varphi_0 \quad (6.24)$$

O seu cálculo para exemplos numéricos, foi obtido através das expressões anteriores que deram origem à forma aqui apresentada por uso de calculadora com capacidades de algoritmos algébricos e integração numérica (Romberg/Simpson). A matriz de massa é obtida a partir do cálculo do trabalho de deformação efetuado pelas forças de inércia devido à *aceleração transversal* da placa curva em vibração. A aceleração é assim obtida:

O deslocamento é:

$$w = \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \right) w_0 + \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^3} \right) \varphi_0 \quad (6.25)$$

Efetuada a 2ª derivada em ordem ao tempo, supondo que as amplitudes do deslocamento e a rotação no bordo, respetivamente w_0 e φ_0 , são funções do tempo, fica então:

$$\ddot{w} = \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \right) \ddot{w}_0 + \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^3} \right) \ddot{\varphi}_0 \quad (6.26)$$

Deste modo, o trabalho realizado pelas forças de inércia é assim obtido:

$$W_{inércia} = \rho B h \int_0^L w(x) \times \ddot{w}(x) dx \quad (6.27)$$

Onde ρ , B e h , são respetivamente, a massa específica do material, a largura da placa e a espessura. O integral acima contém um produto da aceleração pelo deslocamento, tendo assim com a força de inércia, as dimensões de um trabalho mecânico. Ao efetuar este cálculo, fica-se com as parcelas da matriz de massa associadas a cada grau de liberdade envolvido no trabalho devido às forças de inércia; assim:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{ww} & m_{w\varphi} \\ m_{w\varphi} & m_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

Ou por extenso:

$$m_{ww} = \rho B h \int_0^L \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \right)^2 dx \quad (6.29)$$

$$m_{w\varphi} = \rho B h \int_0^L \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \right) \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^3} \right) dx \quad (6.30)$$

$$m_{\varphi\varphi} = \rho B h \int_0^L \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^3} \right)^2 dx \quad (6.31)$$

O termo $m_{w\varphi} = m_{\varphi w}$ é geralmente muito menor que os da diagonal principal da matriz de massa, com boa aproximação pode-se considerar a matriz de massa concentrada como dada pelo somatório de todos os termos anteriores e dividir por 2 para obter:

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} \bar{m}_{ww} & 0 \\ 0 & \bar{m}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

Temos assim a matriz de massa do tipo concentrado (*lumped*) que cumpre com a distribuição de massa total, pois a soma dos elementos diagonais corresponde à massa total do elemento.

6.2 Análise de um Exemplo

6.2.1 Análise dinâmica de uma Casca Circular

Estudo da análise dinâmica de uma Casca Circular de 1 mm de espessura, com condições de contorno conforme a Figura 6.2. Elemento composto de Aço com propriedades: $E=210\text{GPa}$, $\nu = 0.3$ e $\rho = 7800 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$.

a) – Solução com o elemento curvo anteriormente descrito:

Sistema de equações e matriz de rigidez:

$$\begin{cases} \int_0^L k_{xx} \frac{\partial k_{xx}}{\partial w_0} dx = k_{ww} w_0 + k_{w\varphi} \varphi_0 \\ \int_0^L k_{xx} \frac{\partial k_{xx}}{\partial \varphi_0} dx = k_{w\varphi} w_0 + k_{\varphi\varphi} \varphi_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 592.755 & -208.257 \\ -208.257 & 105.23 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_0 \\ \varphi_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{w_0} \\ M_{\varphi_0} \end{Bmatrix} \quad (6.33)$$

O 2º membro refere-se à amplitude de uma força e de um momento concentrados no bordo $x=L$. Se estas forças se deverem às forças de inércia, então o 2º membro será dado pela expressão:

$$\rho h B \begin{bmatrix} 2.04828 & 0 \\ 0 & 0.0262 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\ddot{w}_0 \\ -\ddot{\varphi}_0 \end{Bmatrix} \quad (6.34)$$

(o sinal trocado deve-se à observância da Relação Fundamental da Dinâmica, de Newton)

Verifica-se que, dada q pequena espessura da casca, a contribuição das acelerações rotacionais é diminuta, dada a massa equivalente associada a este grau de liberdade (o termo de rotação, quase 10 vezes menor que o do deslocamento transversal). Se admitirmos que os termos w_0 e φ_0 são do tipo harmónico, ou seja, da forma:

$$\begin{cases} w_0 = w_{0\max} \cos \omega t \\ \varphi_0 = \varphi_{0\max} \cos \omega t \end{cases} \quad (6.35)$$

A aceleração será:

$$\begin{cases} \ddot{w}_0 = -\omega^2 w_{0\max} \cos \omega t \\ \ddot{\varphi}_0 = -\omega^2 \varphi_{0\max} \cos \omega t \end{cases} \quad (6.36)$$

Deste modo, não havendo forças ou momentos exteriores para além das forças e momentos de inércia, a estrutura está em vibração livre e o sistema anterior é:

$$\begin{bmatrix} 592.755 & -208.257 \\ -208.257 & 105.23 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{0\max} \cos \omega t \\ \varphi_{0\max} \cos \omega t \end{Bmatrix} + \rho h B \begin{bmatrix} 2.04828 & 0 \\ 0 & 0.0262 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\omega^2 w_{0\max} \cos \omega t \\ -\omega^2 \varphi_{0\max} \cos \omega t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 592.755 - 2.04828\omega^2 & -208.257 \\ -208.257 & 105.23 - 0.0262\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{0\max} \cos \omega t \\ \varphi_{0\max} \cos \omega t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Para que este sistema tenha soluções diferentes da nula (trivial) deve o determinante associado ser nulo (problema de valores próprios) o que leva à equação de 2ª ordem:

$$0.053665\lambda^2 - 231.0707\lambda + 19004.63 = 0 \quad (6.37)$$

Onde $\lambda = \omega^2$ e $\omega = 2\pi f$, sendo f a frequência temporal (Hz)

As soluções correspondem aos modos de vibração apenas no plano da curvatura; não é possível com esta solução obter modos de torção. Os resultados são, respetivamente para a 1ª e 2ª frequência próprias:

$$f_1 = 1.454\text{Hz e}$$

$$f_2 = 10.34\text{Hz}$$

Análise do problema com modelação por elementos finitos Catia V5®

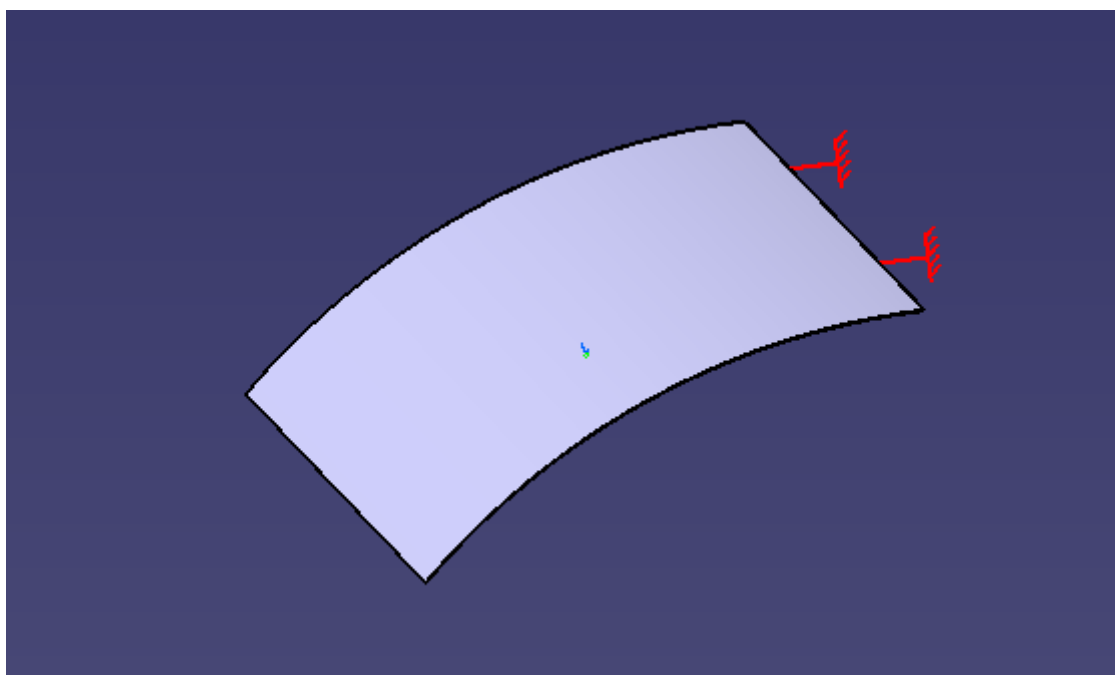


Figura 6.2: Casca Circular, com apoios

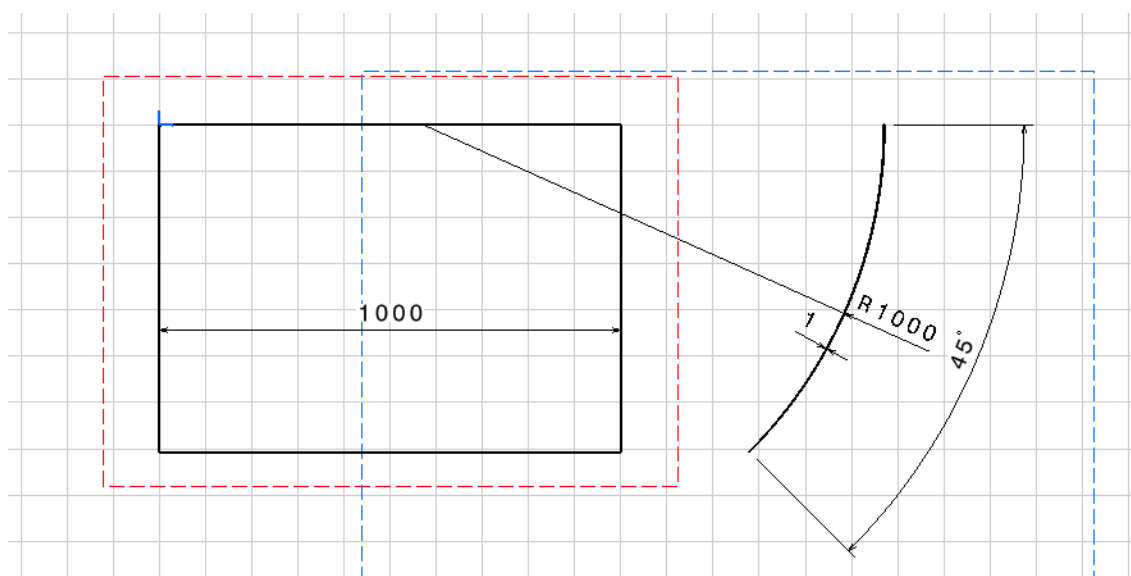


Figura 6.3: Desenho da Casca Circular

6.2.2 Resultados da simulação da Casca Circular

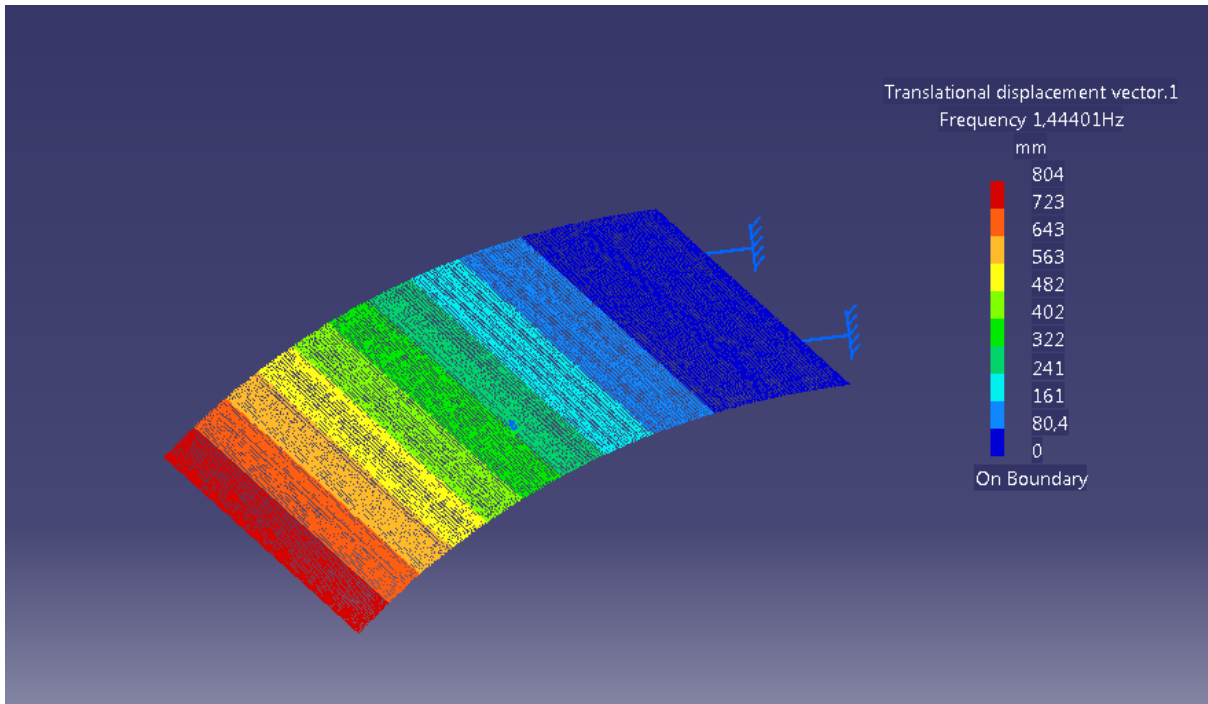


Figura 6.4: Resultado da simulação para o 1º modo com frequência $f_1 = 1,444 \text{ Hz}$

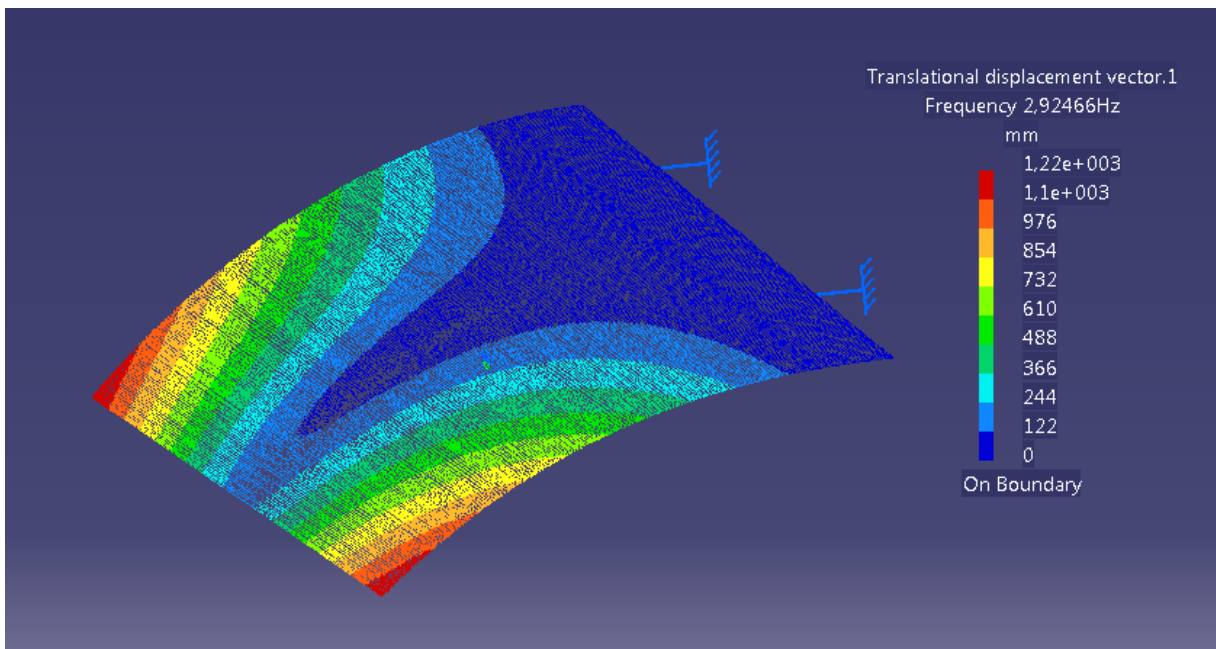


Figura 6.5: Resultado da simulação para o 2º modo com frequência $f_2 = 2,925 \text{ Hz}$

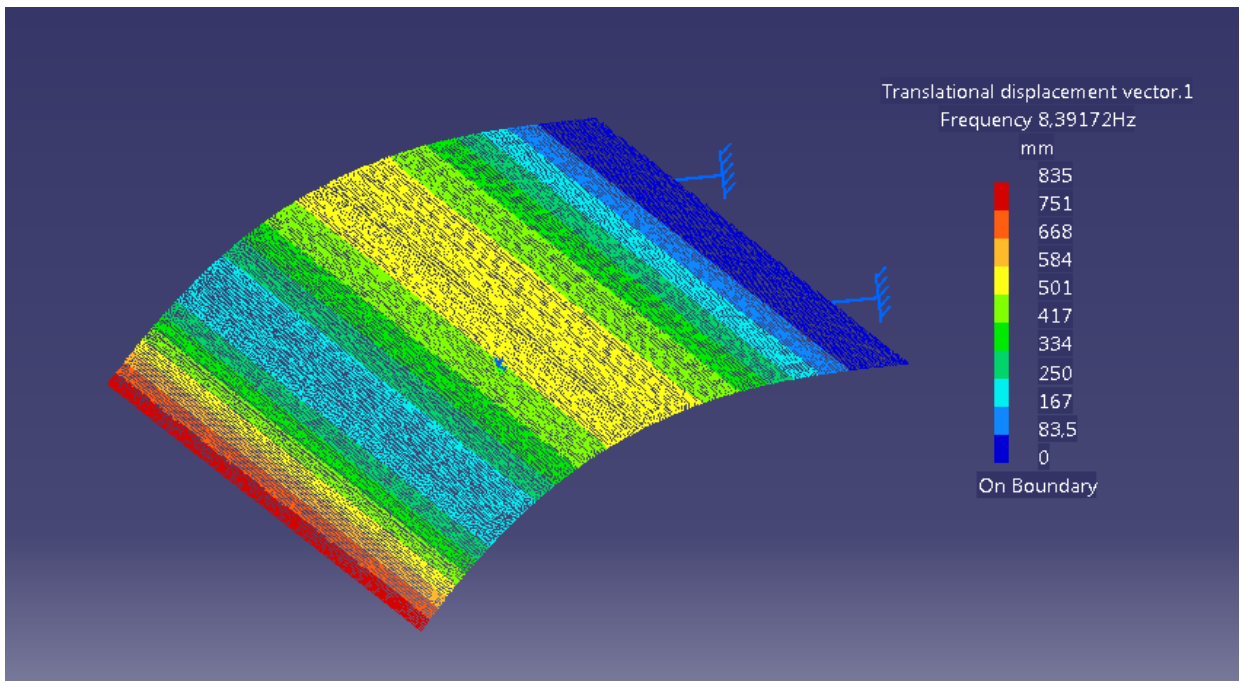


Figura 6.6: Resultado da simulação para o 3º modo com frequência $f_3 = 8,392 \text{ Hz}$

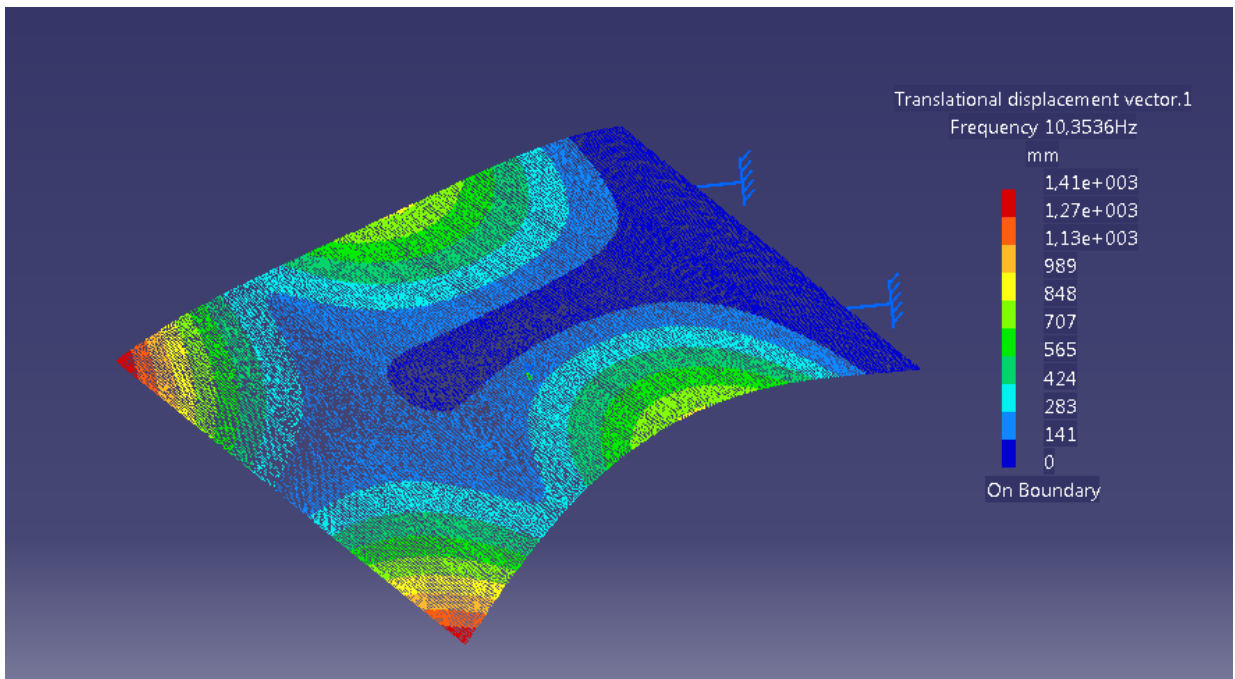


Figura 6.7: Resultado da simulação para o 4º modo com frequência $f_4 = 10,354 \text{ Hz}$

6.2.3 Conclusão

Para o 1º modo de vibração, a concordância entre os resultados foi bastante boa, como se verifica, sendo de 1,444Hz pela modelação Catia V5 e 1,454Hz pela solução analítica proposta; por sua vez, o chamado 2º modo para a solução analítica, com frequência $f_2 = 10.34\text{Hz}$, corresponde de facto ao modo nº 3 da modelação Catia com frequência $f_3 = 8,392\text{ Hz}$, pois o anterior e seguinte contém modo de flexão perpendicular ao assumido para a solução analítica, além de termos de torção.

Também neste ultimo caso, a concordância é razoável, se atendermos ao facto de ter sido obtida com apenas um único elemento (na solução analítica) de resto bastante longo e largo, sendo que no Catia a malha usada foi bastante refinada.

7. Técnicas experimentais em vibrações de estruturas

7.1 Introdução

Como já frequentemente divulgado por investigadores e projetistas em estruturas, as vibrações de estruturas são um fenómeno presente em praticamente todos os casos de projeto, mesmo que a frequência associada ao fenómeno vibratório seja muito baixa. Sempre que há uma variação no tempo da causa perturbadora (sendo esta de origem mecânica, como forças ou momentos), é expectável que a estrutura vibre, mesmo que fenómenos dissipativos desta energia dinâmica (amortecimento) acabem por anular a vibração.

O modo mais elementar de detetar vibrações mecânicas consiste em confiar na sensibilidade pelo tato, porém este método rudimentar porque não permite quantificar, além de não detetar vibrações aquém de um certo diferencial dito *inicial*. Em grande parte de casos, o tato pode constituir perigo para o avaliador, se as superfícies estiverem a alta temperatura, por exemplo. É pois evidente a

necessidade de desenvolver métodos de deteção e quantificação experimental. Quase sempre o sinal com mais potencial de ser detetado é a componente devida à aceleração do campo de deslocamentos mais evidente que a estrutura possa revelar sob perturbação. Por exemplo, ao analisar a vibração de uma placa fina, o deslocamento esperado é transverso ao plano da placa, sendo que os deslocamentos no plano da placa sejam previsivelmente de muito menor intensidade que os transversos. Assim, a aceleração é o parâmetro selecionado para medida e isto porque no caso de deslocamentos muito pequenos resulta de duas derivações sucessivas dos deslocamentos. Com efeito supondo que a amplitude do deslocamento é de pequena intensidade, a velocidade é a 1ª derivada em ordem ao tempo, $v(t)=du(x)/dt$, que pode ser muito maior do que a intensidade do deslocamento no ponto x em estudo; por sua vez, a aceleração $a(t)=dv(t)/dt$, pode ser muito maior que a velocidade, também.

O campo de acelerações pode representar numa estrutura a possibilidade desta ter ou não integridade durante o tempo a que está submetida ao fenómeno vibratório, pois as acelerações determinam forças de inércia, as quais se somam à ação de forças exteriores, podendo-se deste modo, gerar um sistema de forças suscetível de danificar a estrutura.

7.2 Métodos experimentais de análise de vibrações

7.2.1 Conceitos essenciais

Como foi mencionado, as acelerações são o parâmetro que exige menor sensibilidade ao sistema de deteção, pela intensidade que tal sinal pode dispor; contudo, este sinal só pode ser avaliado por detetores que sejam sensíveis às acelerações, como por exemplo, os acelerómetros ou detetores piezoelétricos.

Os acelerómetros são acessórios que podem ser de dimensões muito pequenas (o que os torna muito práticos para instalar) ou relativamente grandes. O princípio ativo de um acelerómetro é a sensibilidade que determinados materiais têm forças que lhes são aplicadas, emitindo um sinal elétrico (tensão), o qual pode ser amplificado. Os acelerómetros permitem determinar a configuração do componente estrutural em vibração quando com o acelerómetro se efetuam as medições de acelerações em vários pontos da

estrutura, sendo depois possível reconstruir a forma modal referente á estrutura em uso. O sensor piezoelétrico também pode ter um funcionamento inverso; isto é, aplica-se uma tensão elétrica em o acessório desenvolve força (equivalente a aceleração a partir da fixação deste acelerómetro a um elemento estrutural com determinada massa)

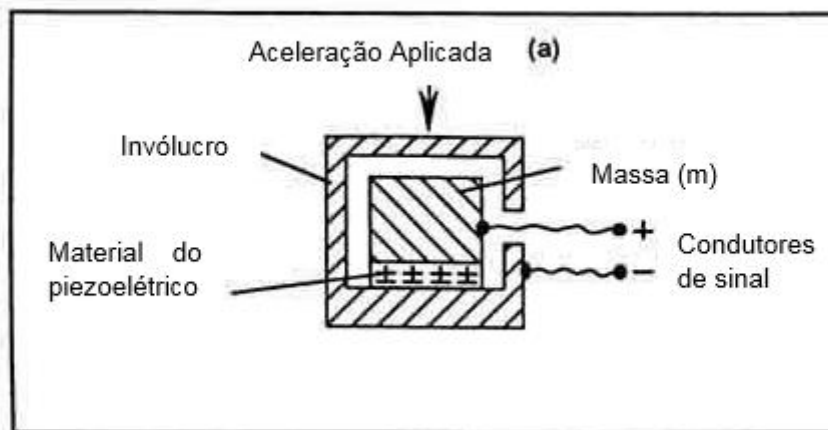


Figura 7.1: Esquema de um sensor piezoelétrico (PCB Piezotronics)

o campo de velocidades (derivada dos deslocamento é maior do que os deslocamentos e por sua vez, o campo de acelerações apresenta valores muito maiores do que os deslocamentos).

Um sensor capaz de medir deslocamentos em regime dinâmico, deve ter uma frequência natural o mais baixa possível, a fim de ter elevada sensibilidade. Considerando o modelo simplificado de um sensor de deslocamento como se apresenta na Figura 7.1, este transdutor capta os deslocamentos como um caso de transmissão passiva de vibração:

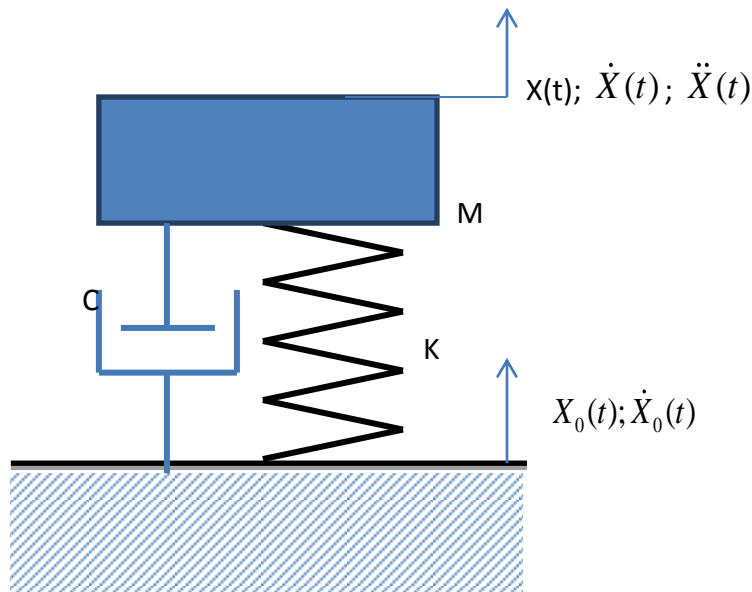


Figura 7.2: Esquema com Massa, mola e amortecedor

O equilíbrio do corpo livre (massa vibrante, do transdutor de deslocamento) refere-se à seguinte equação:

$$K(X_0(t) - X(t)) + C(\dot{X}_0(t) - \dot{X}(t)) = M\ddot{X}(t) \quad (7.1)$$

Onde K é a rigidez do elemento elástico e C é o fator de amortecimento (tipo viscoso) do transdutor de deslocamento.

Rearranjando os termos da equação anterior, a forma equivalente pode corresponder a uma equação mais comum de analisar:

$$KX(t) + C\dot{X}(t) + M\ddot{X}(t) = \underbrace{KX_0(t) + C\dot{X}_0(t)}_{F(t)} \Leftrightarrow KX(t) + C\dot{X}(t) + M\ddot{X}(t) = F(t) \quad (7.2)$$

Para a equação assim apresentada, a resposta dinâmica equivalente do sistema a 1 grau de liberdade é identificada no gráfico

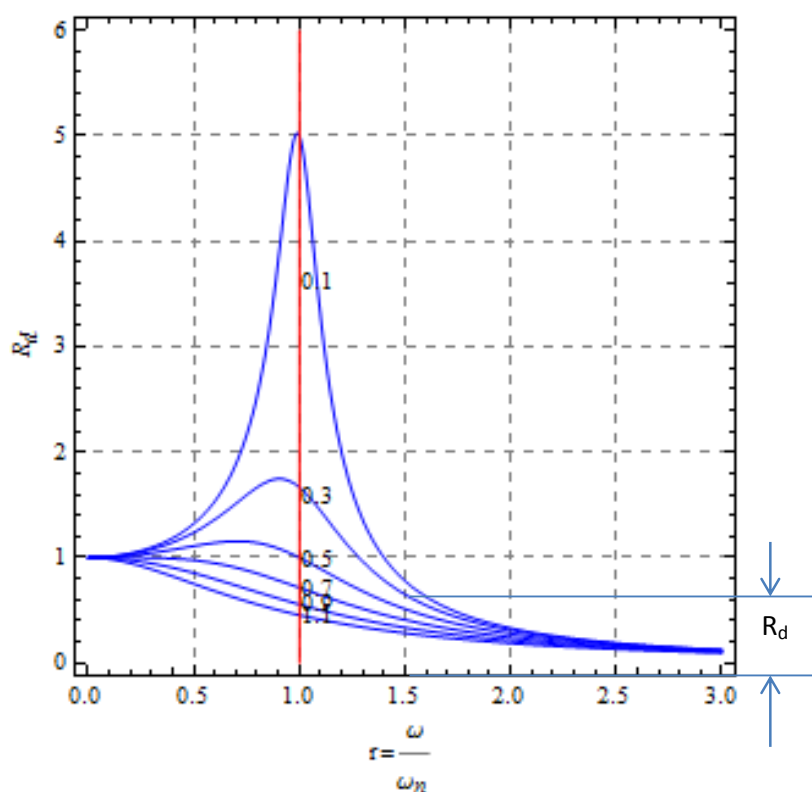


Figura 7.3: Gráfico da frequência exterior (PCB Piezotronics)

Tal como exemplificado no gráfico da Figura 7.3, para uma frequência exterior 1,5 vezes maior que a fundamental do transdutor, o erro que este mede é de 75% aproximadamente; contudo para frequências externas maiores, este erro atenua-se gradualmente

Por este gráfico avalia-se o erro que o transdutor de deslocamento teria ao ler o deslocamento da base (ou elemento estrutural) sobre a qual está montado. Para a máxima sensibilidade, o transdutor deve apresentar um deslocamento $X(t)$ mínimo quando comparado com o da base $X_0(t)$. Deste modo, o sistema deve ter frequência característica tão baixa quanto possível comparada com a frequência exterior.

Para a medição de acelerações de estruturas sob vibração as características do sensor (acelerómetro, neste caso), a elasticidade do sensor deve ser elevada pois desta forma o transdutor reproduz assim com mais rigor a aceleração da superfície em que esteja montado; a sua frequência característica deve pois ser bem mais elevada do que a do espectro das solicitações externas. Voltando ao modelo dinâmico acima representado, para

que o acelerómetro seja eficaz, o deslocamento diferencial $X_0(t) - X(t)$ deve ser o menor possível; assim a equação de equilíbrio em regime dinâmico passa a ser:

$$M\ddot{X}(t) = K(X_0(t) - X(t)) + C(\dot{X}_0(t) - \dot{X}(t)) \quad (7.3)$$

Entendendo que, tanto o deslocamento relativo $X_0(t) - X(t)$ como a velocidade relativa $\dot{X}_0(t) - \dot{X}(t)$ deverem ser o menor possível, então se o amortecimento C for pequeno, a parcela $C(\dot{X}_0(t) - \dot{X}(t))$ será desprezável face a $K(X_0(t) - X(t))$, o que mostra ser K bastante elevado para um valor finito da parcela $K(X_0(t) - X(t))$; assim, a aceleração lida será aproximadamente:

$$\ddot{X}(t) \approx \frac{K(X_0(t) - X(t))}{M} \quad (7.4)$$

Por esta expressão verifica-se que sendo a massa do acelerómetro previsivelmente pequena, a rigidez não pode ser muito pequena, caso contrário a sensibilidade do sensor seria comprometida pela pequena diferença requerida para $X_0(t) - X(t)$, sendo que se deseja que o deslocamento no elemento ativo do acelerómetro seja tão próximo quanto possível da base (componente estrutural a analisar)

7.3 Técnicas Experimentais de Vibrações

A análise modal pode ser efetuada a partir da leitura do campo de acelerações em pontos discretos da estrutura e interpolando os valores lidos por forma a modelar a configuração da estrutura em frequências características. De acordo com (Ribeiro, 2004), utilizando um acelerómetro piezoelétrico axial B&K 4366, fixado com cera e posicionado ao longo das colunas de sustentação, processa-se este método numa bancada de ensaios experimentais apresentada na Fig.1. Os Dados resultantes num analisador espectral de dois canais HP35665A com o qual foram estimadas as FRFs. Experimentalmente foi aplicado um modelo físico e pontos de medição da estrutura com 2 graus de liberdade. Para a estrutura com 2 graus de liberdade, foram avaliados 15 pontos ao longo da coluna I da Figura 7.4. São realizadas varreduras em seno abrangendo faixas de frequência entre 1 e 20 Hz.

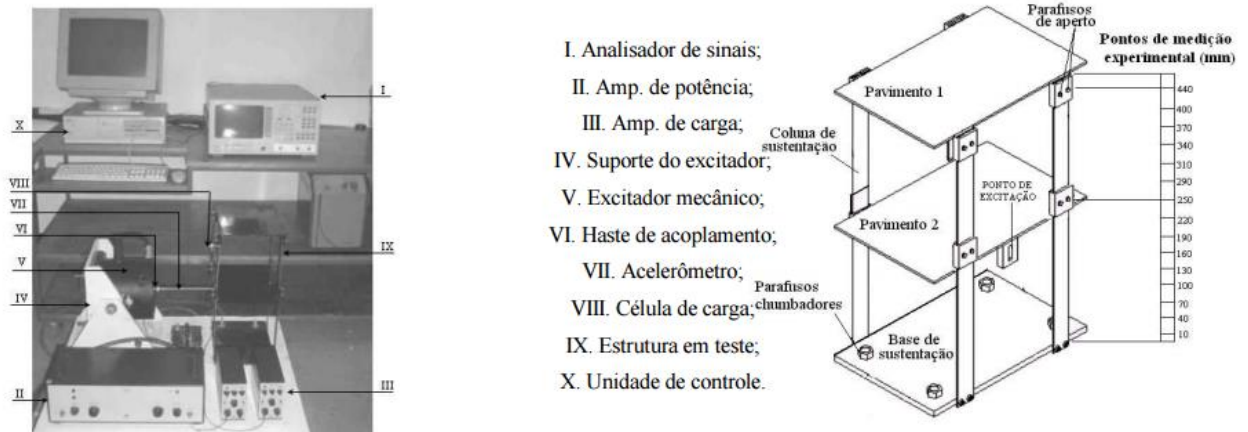


Figura 7.4: Montagem Experimental (Ribeiro, 2004),

Técnica de medição do deslocamento em vibrações, com a iluminação pulsada com gravação em duplo impulso (Lopes, 2007). Na Figura 7.5 está representada a configuração padrão de um interferômetro Speckle para medição dinâmica do deslocamento fora-do-plano. Um LASER gera um par de impulsos de elevada energia (1 Joule) separados no tempo desde $1\mu\text{s}$ a $800\mu\text{s}$. O curto tempo entre impulsos torna a técnica imune a vibrações externas de baixa frequência. Cada impulso tem a duração típica de 20ns, permitindo registrar nesse instante o movimento como que parado no tempo. Uma câmera rápida está sincronizada com o LASER para registrar os dois impulsos. Todo o sistema é comandado a partir de um sinal externo de sincronismo.

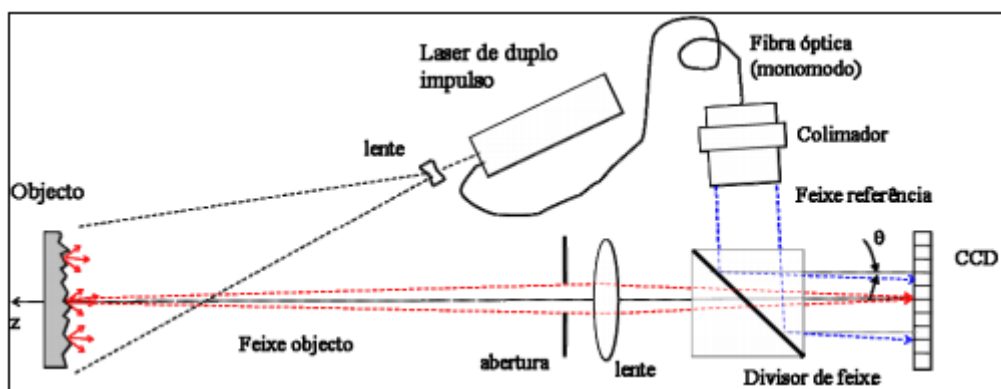


Figura 7.5: Configuração do interferômetro de Speckle para medição dinâmica do deslocamento fora-do-plano

Vibração ambiental (Bacelar, 2012), a resposta de uma estrutura às condições ambientais impostas é obtida por um ou mais sensores de referência, que em conjunto com um grupo de sensores móveis são colocados em diferentes pontos ao longo da estrutura em sucessivos "setups". O número de pontos de medição depende diretamente das configurações modais determinadas pelo modelo de elementos finitos preliminar, sendo que o mínimo admissível será aquele que conseguir traduzir, de forma representativa, a forma das configurações modais referidas. No entanto, são as configurações modais estimadas que influenciam a melhor localização dos sensores de referência.

Na Figura 7.6 a análise modal por impacto é provocada pelo martelo de impacto e a resposta é medida simultaneamente em três direções por três acelerómetros colocados no ponto escolhido (Salgado, 2012).. O software de análise modal apresenta a informação na forma de 3 FRFs (função de resposta em frequência). As 3 FRFs da estrutura são as relações entre a matriz quociente da aceleração com a matriz força de excitação. Depois a sobreposição das FRFs é tratada pelas funções de identificação modal permitindo obter os modos de vibração e as respectivas frequências naturais.

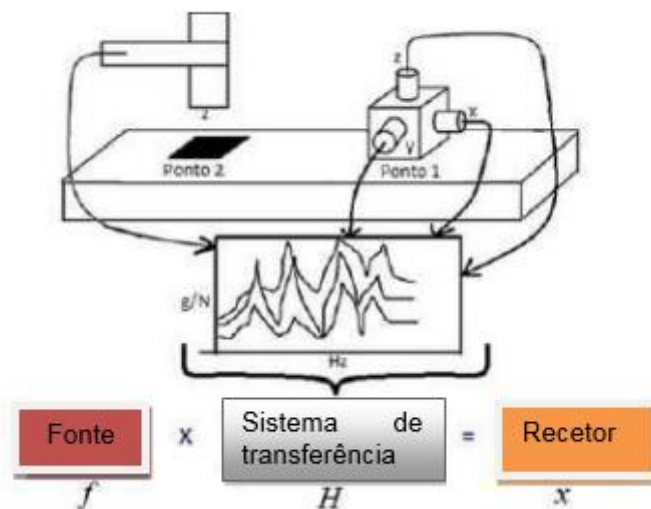


Figura 7.6: Análise modal por impacto

7.4 Análise dinâmica de uma Placa Retangular de PERSPEX

7.4.1 Dados Geométricos e Estruturais

Estudo da análise dinâmica de uma Placa Retangular de PERSPEX de 4 mm (Figura 7.7), sem condições de contorno (Livre). Elemento composto de PERSPEX com propriedades: $E=3,2\text{GPa}$, $\nu = 0.4$ e $\rho = 1180 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$.

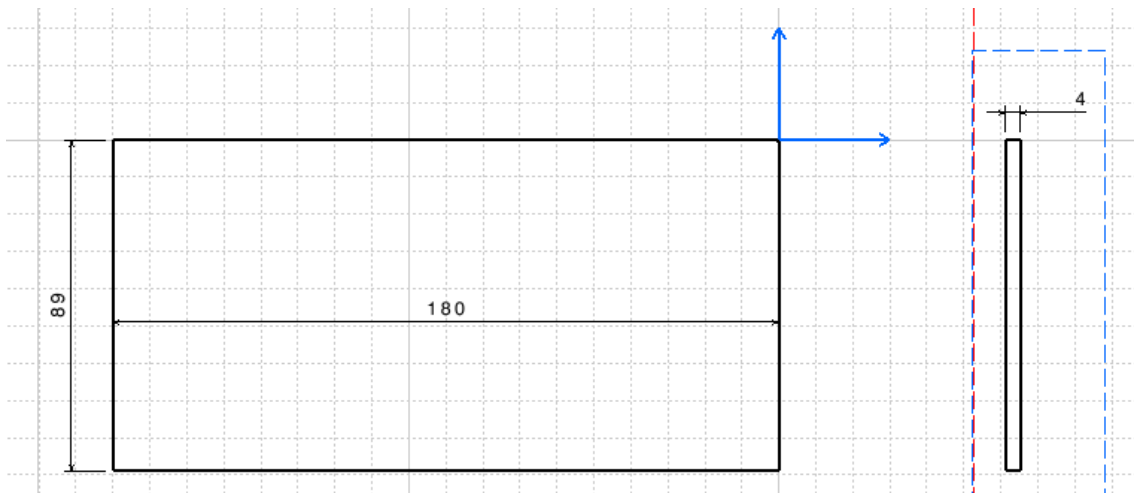


Figura 7.7: Desenho da Placa Retangular de PERSPEX

Aplicando este estudo através da ferramenta do software CATIA, “frequency analysis”. Uma simulação dinâmica com malha composta com elementos finitos tetraédricos parabólicos com 10 nós (Figura 5.2), mas com dimensão de 2mm de lado.

7.4.2 Resultados da simulação da Placa Retangular de PERSPEX

Entre o 1º e 6º Modo, a frequência é aproximadamente 0

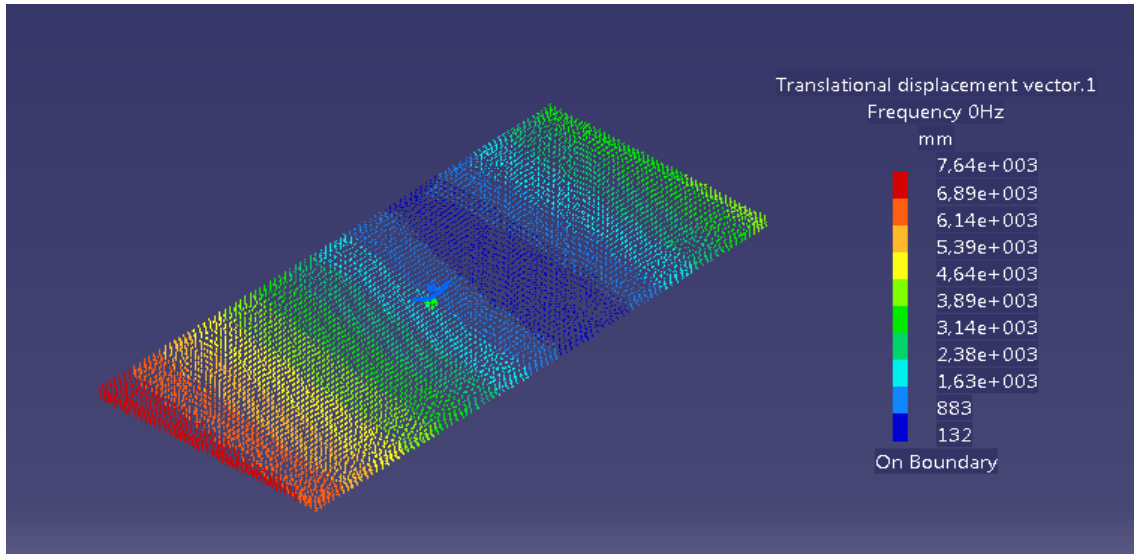


Figura 7.8: Resultado da simulação para o 1º modo com frequência $f_1 = 0 \text{ Hz}$

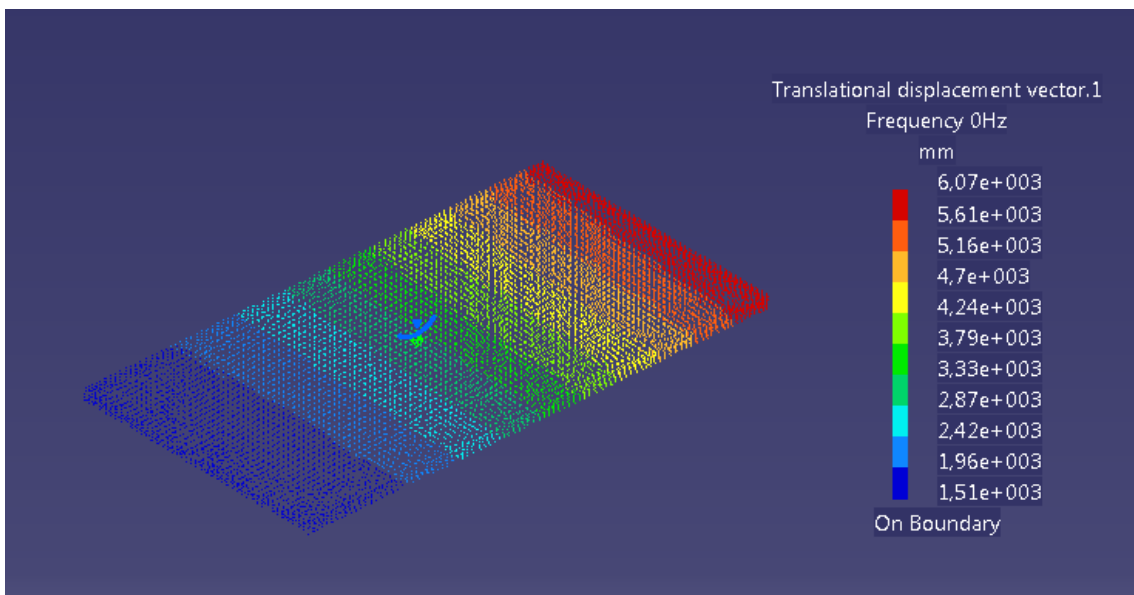


Figura 7.9: Resultado da simulação para o 2º modo com frequência $f_2 = 0 \text{ Hz}$

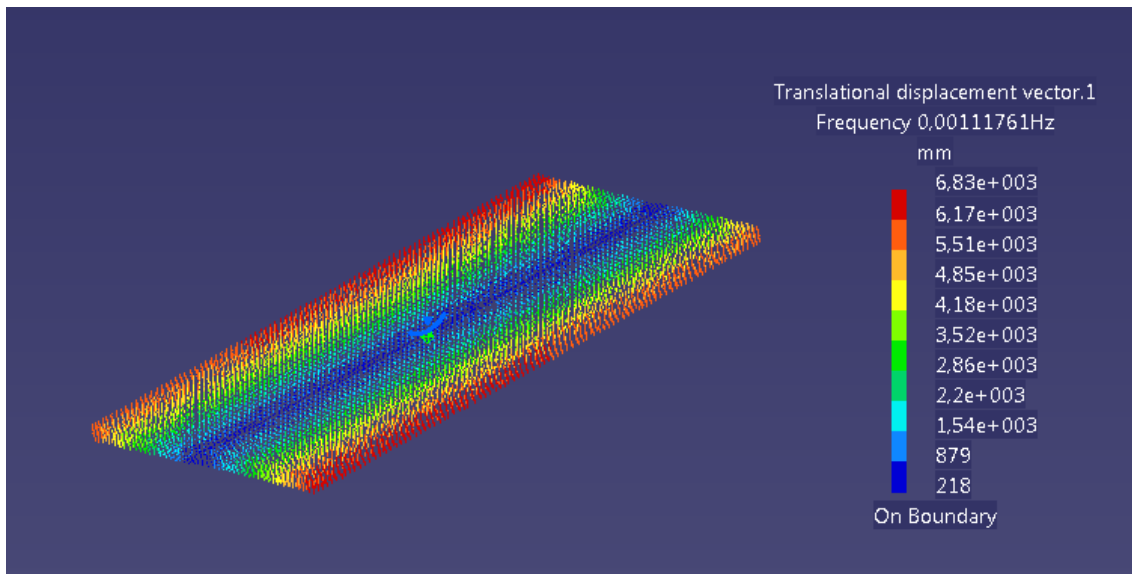


Figura 7.10: Resultado da simulação para o 6º modo com frequência $f_6 = 0,001118 \text{ Hz}$

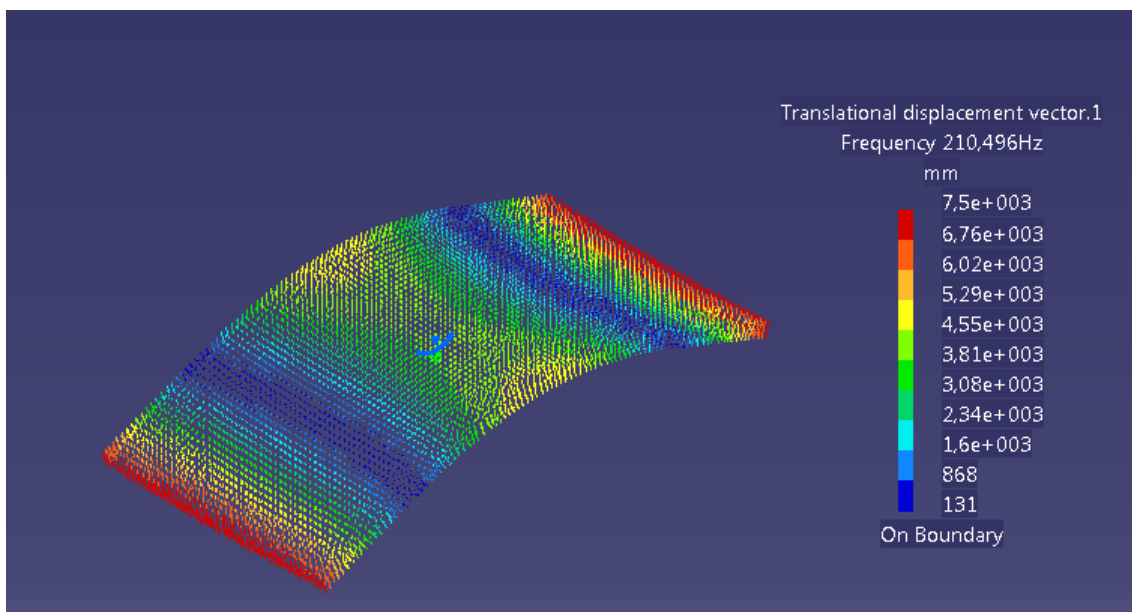


Figura 7.11: Resultado da simulação para o 7º modo com frequência $f_7 = 210,496 \text{ Hz}$

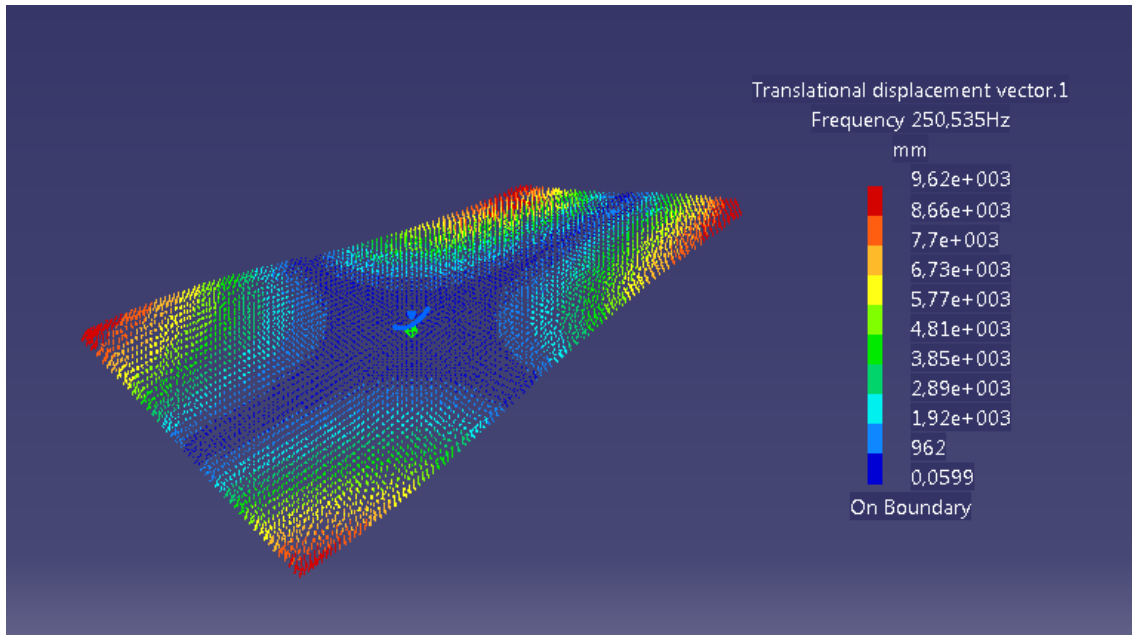


Figura 7.12: Resultado da simulação para o 8º modo com frequência $f_8 = 250,535 \text{ Hz}$

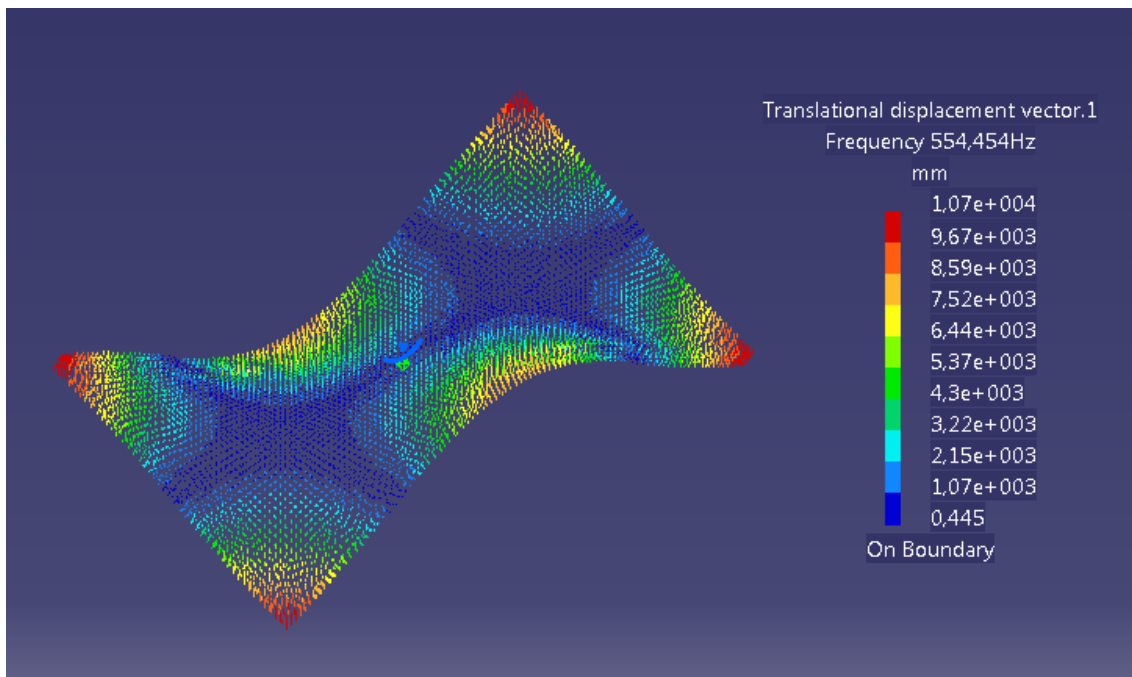


Figura 7.13: Resultado da simulação para o 9º modo com frequência $f_9 = 554,454 \text{ Hz}$

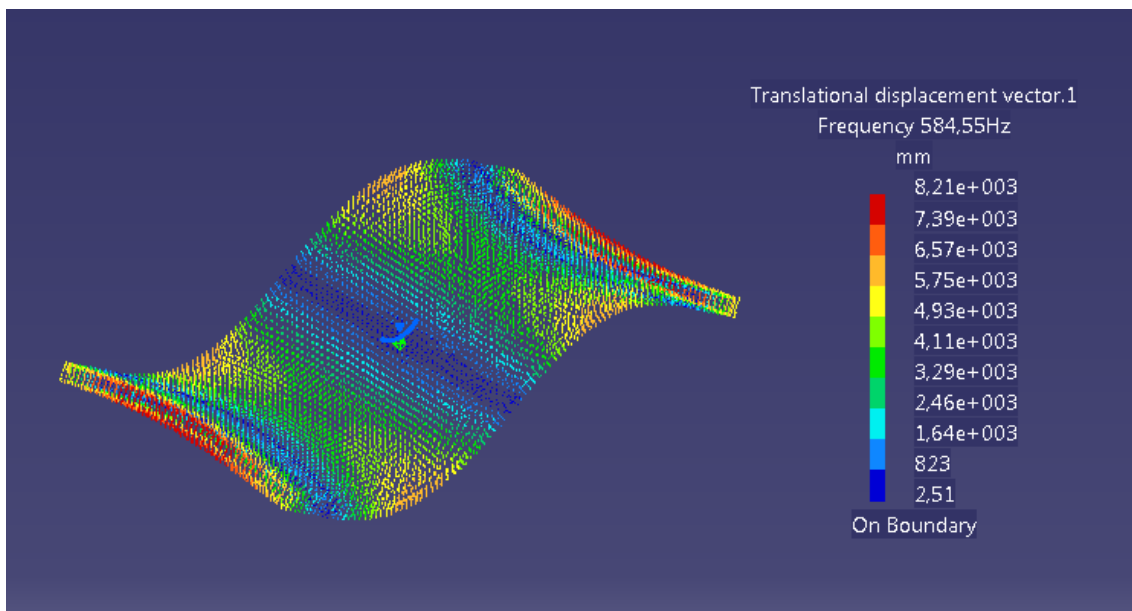


Figura 7.14: Resultado da simulação para o 10º modo com frequência $f_{10} = 584,55 \text{ Hz}$

7.5 Procedimento experimental de vibrações

Este consistiu em analisar por leitura direta da aceleração transversal de uma placa de PERSPEX utilizando um sensor piezoelétrico comercial. Leitura efetuada com o apoio de um osciloscópio indicadas na Figura 7.15

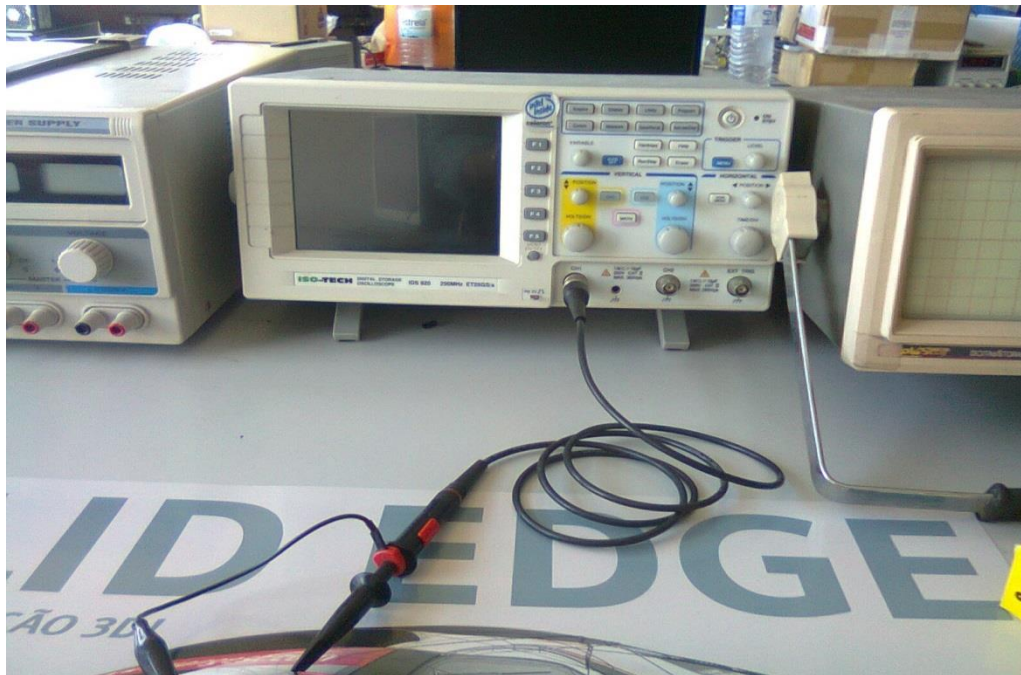


Figura 7.15: Procedimento experimental utilizando um sensor piezoelétrico, com o apoio de um osciloscópio

A placa PERSPEX foi apoiada numa esponja, indicada na Figura 7.16, de forma que a placa estivesse livre, ou seja, sem condições de contorno. Piezoelétrico, este colocado em cima da Placa.

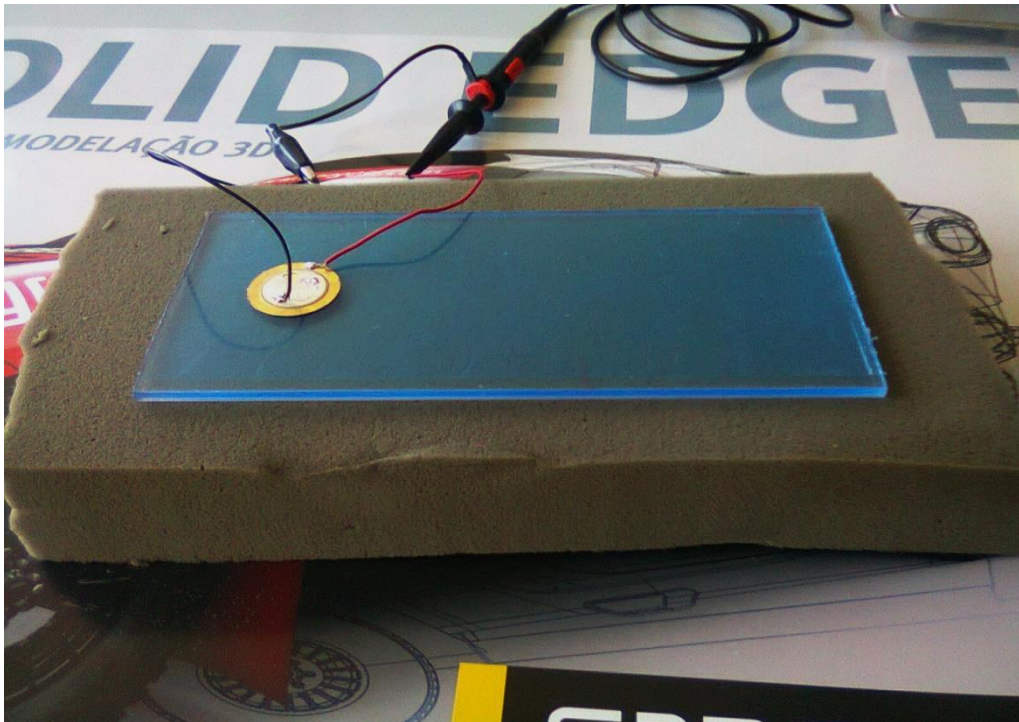


Figura 7.16: Placa PERSPEX apoiada numa esponja

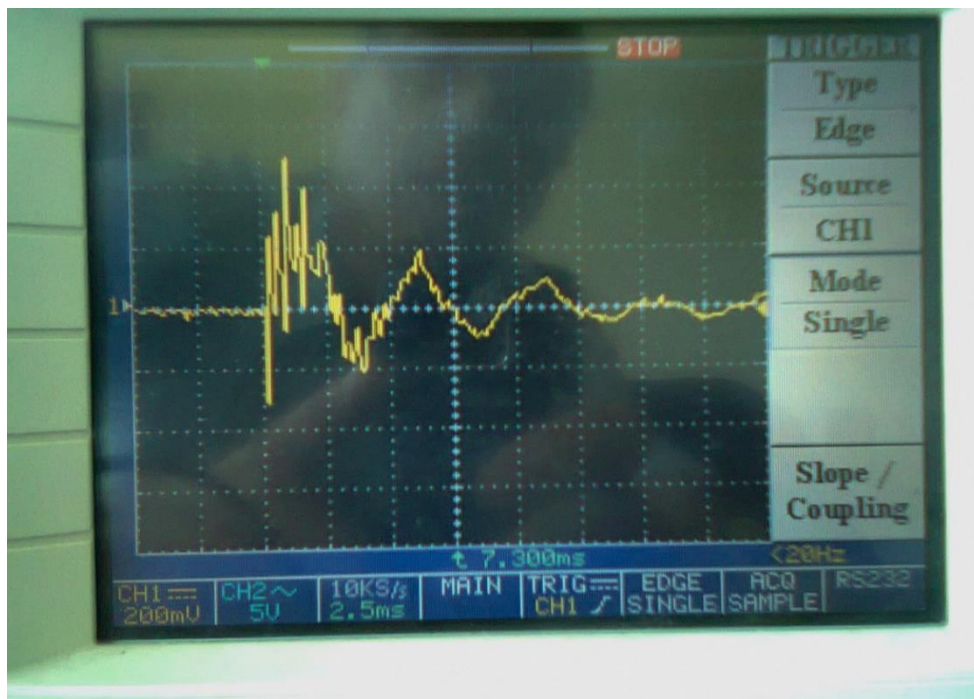


Figura 7.17: Resultado da aceleração transversal no Osciloscópio (2,5ms/div):
(1º modo)

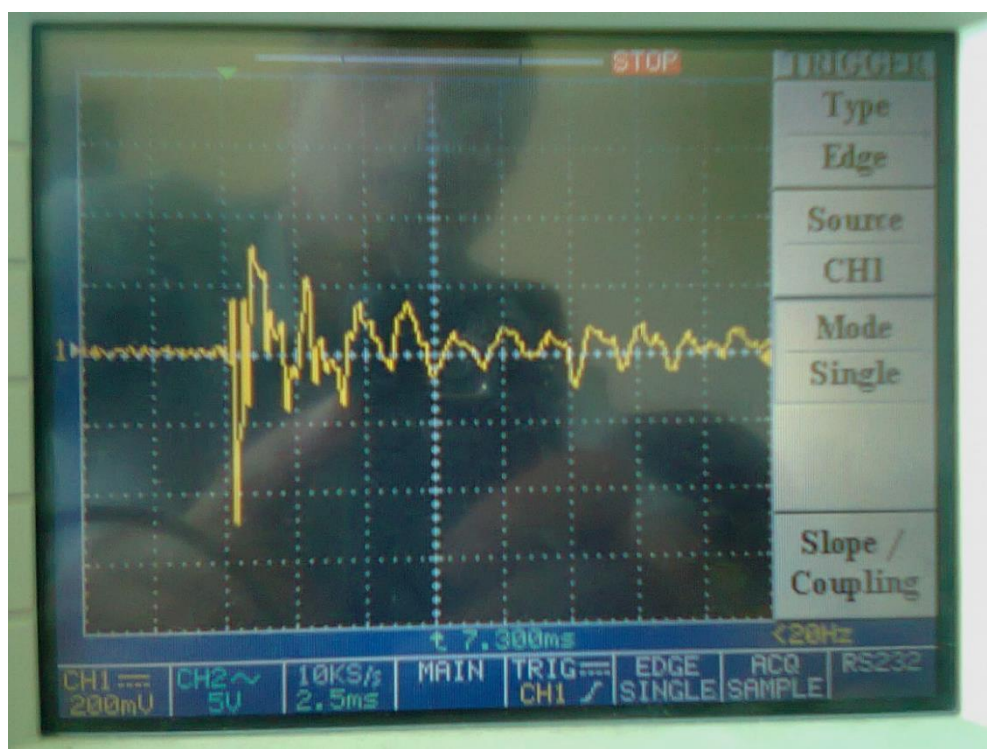


Figura 7.18: Resultado da aceleração transversal no Osciloscópio (2º modo)
(2,5ms/div)

Nas Figuras 7.17 e 7.18 apresentadas as saídas do sensor piezoelétrico representa uma tensão a qual para se associar ao valor efetivo da aceleração na superfície da placa onde foi colocado, precisava que houvesse um fator de calibração o que não estava disponível. Lembrando que um sensor piezoelétrico emite uma tensão quando é sujeito a uma pressão ou força de inercia (proveniente da interação de massa com aceleração a que esta submetida), o resultado obtido no osciloscópio tem exatamente um mesmo perfil de uma aceleração, contudo ele refere-se a uma tensão elétrica convertida em aceleração desde de que se conhecesse o fator de calibração. Para os objetivos do trabalho, os quais se ligam à determinação das frequências próprias, a escala vertical do osciloscópio (tensão do piezoelétrico) não tem interesse, sendo muito mais importante a escala horizontal que nos permite estimar as frequências próprias. Por exemplo na figura 7.17 em que o piezoelétrico foi colocado a meio comprimento do provete e este excitado nessa zona com uma pequena pancada a tensão emitida pelo piezoelétrico tem uma frequência dado por:

$$f_{1 \text{ Experimental}} = \frac{1}{\frac{9}{5} * 2.5 * \frac{1}{1000}} = 222,22 \text{ Hz} \quad (7.5)$$

$$f_{2 \text{ Experimental}} = \frac{1}{\frac{3,4}{5} * 2.5 * \frac{1}{1000}} = 588,24 \text{ Hz} \quad (7.6)$$

Como resultado da frequência do 1º Modo, 222,22 Hz do 1º Modo Experimental que relaciona com 210,50 Hz do Cátia, que corresponde à frequência própria do 7º Modo no próprio Cátia, com energia de deformação finita (acrescenta-se que a 6 modos anteriores são de deslocamento e rotação de corpo rígido, com energia de deformação nula). Em termos da frequência do 2º Modo, com 588,24 Hz do 2º Modo Experimental, que relaciona com 584,55 Hz do Cátia, que corresponde à frequência do 10º Modo. O modo 8º e 9º do Cátia são modos combinando flexão e torção.

8. Conclusões e futuro desenvolvimento

O trabalho realizado constou da aplicação de técnicas semianalíticas ao estudo da deformação de estruturas tipo placa e casca de pequena curvatura integradas em alguns elementos de construção de carroçarias de automóveis. Neste estudo foi considerado apenas o capô, que em modelos mais funcionais, era praticamente plano e com leve forma de contorno trapezoidal (caso do Land Rover *Defender*, por exemplo). Modelos de estética mais complexa foram rudimentarmente aproximados, tanto sem elemento de reforço como com elementos tipo perfis ocultos soldados sobre a chapa de dupla curvatura do capô.

Deste modo, os procedimentos usados na análise dinâmica do capô de um automóvel contaram com os modelos:

- Método de Ritz com funções polinomiais e distribuição contínua de massa: este modelo revelou-se mais prático quando a geometria da placa (ou casca) é simples; quer dizer, é de geometria plana ou de pequena curvatura
- Método de Navier (solução usando aproximação dos deslocamentos transversais com séries trigonométricas). Mais prático do que o método de Ritz, contudo mais difícil de satisfazer a todas as condições de fronteira (restrito a casos de bordo simplesmente apoiado)
- Método de elementos finitos: Catia V5®: este sem dúvida o melhor meio de efetuar aproximações de máxima precisão ao comportamento estático e dinâmico de componentes e conjuntos estruturais.
- Verificação experimental: a técnica que foi usada consistiu numa rudimentar deteção das duas primeiras frequências características a partir de uma placa de material polímero praticamente solta (livre de vibrar) pois foi testada sobre espuma macia. Os resultados obtidos estiveram em boa concordância com as análises efetuados com o módulo Catia® como foi relatado anteriormente.

O método experimental é um procedimento industrial de grande importância porque ao ser efetuado no próprio veículo (inclusive com o motor a trabalhar) permite a informação mais realista da contribuição do elemento em estudo para o ruído ambiental e eventual comportamento à fadiga. Não foi possível usar métodos mais rigorosos neste estudo, contudo demonstrou-se que o procedimento adotado, ainda que muito rudimentar, possibilitou informação de valor e a custo muito reduzido, se considerarmos que um piezoelétrico como o que se usou custa cerca de 1 a 2 Euros.

Procedimentos tecnicamente mais rigorosos devem envolver a análise modal com acelerómetros e excitadores eletrodinâmicos, sendo esta etapa associada à utilização de software permitindo definir a forma modal da estrutura em cada frequência própria.

Referências

Ventsel, E. & Krauthammer, T., “Thin Plates and Shells”, Marcel Dekker, Inc., 2001.

Clough, R.W. & Penzien J., “Dynamics Of Structures” 3rd Edition, Library of Congress Cataloging-in-Publication Data, 2003.

RIBEIRO, R.S.; MENIN, E.C.G., “Análise Experimental e Numérica como Metodologia de Ensino de Fenômenos Vibratórios em Estruturas” (aula de Vibrações Mecânicas, Dep^o de Eng^a Mecânica, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, 2004.

LOPES, H.M.R; “Desenvolvimento de Técnicas Interferométricas, Contínuas e Pulsadas, Aplicadas à Análise do Dano em Estruturas Compósitas”, 2007, Tese (Mestrado em Engenharia Mecânica), Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

BACELAR, J.L.A; “Técnicas de Ajuste de Modelos Numéricos com Base em Resultados Experimentais”, 2012, Tese (Mestrado em Engenharia Mecânica), Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

Salgado, J.M.S.O.; Análise Modal Experimental Aplicada a Um Componente Estrutural Automóvel , 2012, Tese (Mestrado em Engenharia Mecânica), Universidade do Minho.

Software: CATIA V5 R21, Dassault Systemes

Páginas Web Visitadas:

PCB Piezotronics, http://www.pcb.com/TechSupport/Tech_Accel.aspx

Arsenal Car, <http://www.arsenalcar.com.br/capo-palio-siena-strada-fire-2001-2002-2003-weekend-g2-sem-furo-pr-1645-315169.htm>

Mercado Livre, <http://veiculos.mercadolivre.com.br/acessorios/forro-isolante-de-capo-gol-g3>