Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2005

Paulo Jacinto Correia de Almeida

Probabilidades: teoria e computadores

Universidade de Aveiro
2005

Departamento de Matemática

Paulo Jacinto Correia de Almeida

Probabilidades: teoria e computadores

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática, realizada sob a orientação científica da Professora Doutora Adelaide de Fátima Baptista Valente Freitas, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

o júri

presidente

Doutora Paula Cristina Supardo Machado Marques Cerejeiras
Professora Associada da Universidade de Aveiro

vogais

Doutora Eugénia Santos Lino Pires da Graça Martins
Professora Associada do Departamento de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Doutora Adelaide de Fátima Baptista Valente Freitas
Professora Associada da Universidade de Aveiro

agradecimentos

À minha orientadora, Professora Doutora Adelaide de Fátima Baptista Valente Freitas, pela orientação deste trabalho, por todo o apoio prestado e pela forma compreensiva e encorajadora com que me foi estabelecendo metas e objectivos.

Aos meus colegas de Mestrado Sylvie Marques, Ana Salgado, Fátima Vinagre e Vítor Sousa, pelo espírito salutar com que ultrapassamos a parte curricular.

A todos os professores do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro que de algum modo me apoiaram na parte curricular e na realização deste trabalho, em especial, ao Prof. João Carlos David Vieira.

Ao senhor Agostinho, da Biblioteca do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, pela forma sábia com que me foi orientando na procura de material.

Aos meus amigos pela forma compreensiva com que souberam tolerar as minhas falhas. Em especial às minhas amigas, Susana Nascimento, Lizabet Cavadas, Maria Dulce Sabóia, Ivone Almeida, Patrícia Santos e Carla Realinho por todas as dicas, sugestões e ajudas que me deram. Ao João Ramos e ao David Freitas pelas suas imprescindíveis colaborações.

Ao grupo de Matemática da Escola Secundária D. Inês de Castro, ao seu Conselho Executivo e a todos os seus alunos, pela forma como contribuíram na parte prática deste trabalho, em especial, ao Carlos Carvalho e ao António Vieira pelo entusiasmo com que sempre me presentearam.

E, em especial,

aos meus pais e irmãos, pelo apoio, carinho e amor oferecidos nos momentos mais difíceis. E a ti Luísa…cuja partida, deste mundo, deixou um enorme vazio e me fez ver que o mais importante da vida é, sem a menor dúvida, o amor dos amigos. A eles dedico este trabalho.

resumo

O principal objectivo deste trabalho consiste em dar algumas contribuições, para o estudo das Probabilidades, utilizando o computador. Para tal realizamos e propomos algumas actividades recorrendo a software diverso e ao Projecto Matemática Ensino (PMatE) do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro. Procurou-se, sempre que possível, testar estes materiais com a realização efectiva das tarefas em algumas turmas do 12º ano da Escola Secundária D. Inês de Castro de Alcobaça.

O segundo capítulo desta tese é dedicado a algumas reflexões sobre o computador e a Internet no ensino, em particular no ensino das Probabilidades. Neste capítulo pode-se também encontrar o resultado de uma busca, feita na Internet, de páginas que contivessem contributos importantes para o ensino das Probabilidades. No entanto, para poder contribuir para o ensino das Probabilidades era necessário possuir uma visão panorâmica e a mais alargada possível da Teoria das Probabilidades.

Os terceiro e quarto capítulos são dedicados ao estudo da Teoria Axiomática de Kolmogorov e às suas ligações com alguns dos mais conhecidos conceitos de Probabilidades. Este estudo teve por base a procura de exemplos, contra-exemplos, paradoxos e opiniões críticas que permitissem o conhecimento efectivo da Teoria.

No quinto e último capítulo são analisadas algumas actividades que se foram realizando, com o objectivo de tentar compreender a importância do computador no ensino das Probabilidades. Destacam-se aqui actividades em Excel, Hot Potatoes e Free Pascal, assim como, as contribuições para o Projecto Matemática Ensino (PMatE) e os testes realizados tendo por objectivo avaliar a importância dos modelos construídos para o efeito.

abstract

The main purpose of this work is to give some contributions for the study of Probability using the computer. For such purpose some activities are presented and put into practice with help of varied software and "Projecto Matemática Ensino (PMatE)" from Department of Mathematics in the Univrsity of Aveiro. Whenever possible it was an attempt to test these materials by really performing the tasks in some classes of the 12th grade in Escola Secundária D. Inês de Castro in Alcobaça.

The second chapter of this thesis reflects upon the use of the computer and Internet in education, particularly when teaching Probability. In this chapter one can also find the result of a search while surfing the Internet of some pages that provide important contribution to the teaching of Probability. However, in order to accomplish this aim, it was necessary to have the widest and most extensive knowledge possible of Theory of Probability.

The third and fourth chapter study the Axiomatic Theory of Kolmogorov and its links with some of the most well-known concepts of Probability-This study was grounded on the search for examples, counter-examples, paradoxes and critical opinions which could allow a real knowledge of the theory.

The fifth and last chapter analyses some of the activities that were achieved when trying to understand the importance of the computer while teaching Probability. To this one can emphasize activities in Excel, Hot Potatoes and Free Pascal, not forgetting the contributions to Projecto Matemática Ensino (PMatE) and tests which were carried to evaluate the importance of the models.

Conteúdo

1 Introdução **1**

1.1 Contextualização 1

1.2 Motivação, objectivo geral e metodologia 2

1.3 Organização da dissertação 3

2 O computador no Ensino das Probabilidades **5**

2.1 O papel do computador na Matemática e no Ensino 5

2.2 A Internet - uma ferramenta pedagógica 11

2.3 Probabilidades e a Internet 14

3 Probabilidades - Espaço mensurável e famílias de conjuntos **19**

3.1 Breve referência histórica 19

3.2 Espaço dos possíveis 22

3.3 Álgebras - um primeiro passo 25

3.4 Medidas de probabilidade em álgebras 33

3.5 σ-álgebras - o consolidar de uma teoria 36

3.6 Medidas de probabilidade em σ-álgebras 44

3.7 Probabilidade condicional e independência 49

3.7.1 Propriedades da probabilidade condicionada 51

3.7.2 Independência de famílias de acontecimentos 57

4 Conceitos de Probabilidades **67**

4.1 O Princípio de Borel 67

4.2 Probabilidade segundo Laplace 69

4.3 Conceito geométrico de probabilidade 78

4.4 Conceito frequencista de probabilidade 83

4.5 Conceito subjectivista de probabilidade 88

4.6 Conceito comparativo de probabilidade 90

4.6.1 Compatibilidade do conceito comparativo com a aditividade finita 94

4.6.2 Compatibilidade do conceito comparativo com a σ-aditividade . 96

4.7 Algumas reflexões sobre a axiomática de Kolmogorov 97

4.8 Odds ou racio de probabilidades 102

4.9 Reuniões e intersecções de acontecimentos utilizando mintermos 104

5 Contribuições para o ensino da Teoria das Probabilidades **113**
5.1 Actividade com recurso a folhas de cálculo 113
5.1.1 Actividade e metodologia implementada 114
5.1.2 Resultados e conclusões 115
5.2 Actividade utilizando Hot Potatoes 116
5.2.1 Actividade e metodologia implementada 116
5.2.2 Resultados e conclusões 117
5.3 Colaboração com o PMatE. Criação de modelos de questões 118
5.3.1 Em que que consiste o PMatE e o EquaMat? 118
5.3.2 Estudo da compactação de um modelo 119
5.3.3 Compactação de um modelo 126
5.4 Actividade com recurso ao EquaMat 128
5.4.1 Metodologia implementada 129
5.4.2 Resultados e conclusões 131
5.5 Java Applets e algumas actividades não avaliadas 134
5.5.1 Introdução 134
5.5.2 O que é um applets ? 135
5.5.3 Actividades com recurso a Applets 135

6 Conclusões **137**

A Modelos compactados **141**
A.0.4 Modelo A 141
A.0.5 Modelo B 147
A.0.6 Modelo C 153
A.0.7 Modelo D 159
A.0.8 Modelo E 166

B Actividade em Excel **173**

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contextualização

Durante décadas o sistema de ensino não superior português considerou o estudo da Teoria das Probabilidades como algo de acessório e facilmente descartável. Desde a introdução da apelidada nova reforma, no ano de 1997, que os programas de Matemática, e apenas para os 9º e 12º anos de escolaridade, contemplam o estudo efectivo desse tema. No 9º ano, o estudo recai sobre situações simples e bastante óbvias, próprias de um ensino obrigatório e por isso mesmo destinado a massas diferenciadas, com diferentes objectivos para o futuro. No 12º ano, o estudo da Teoria das Probabilidades é já algo aprofundado indo mais além do que o simples estudo do conceito clássico; do conceito frequencista de probabilidade e do conceito geométrico, abordando a axiomática de Kolmogorov, embora somente no seu caso finito. Porém, na última década, e desde que o espírito presente nos referidos novos programas foi sendo assimilado por parte dos docentes o modo como a Teoria das Probabilidades tem sido tratada no sistema de ensino português tem mudado. Esta teoria tem ganho a importância que lhe é devida, embora um pouco ofuscada pela demasiada Análise Combinatória, que os discentes tanto confundem com Teoria das Probabilidades.

Actualmente os programas da disciplina de Matemática fazem, cada vez mais, apelo ao uso das novas tecnologias no ensino requerendo às escolas Laboratórios de Matemática devidamente equipados e dinamizados. Contudo, a mudança de mentalidades por parte dos docentes, habituados a aulas expositivas e por vezes um pouco relutantes em alterar metodologias, assim como, a própria falta de verbas necessária para equipar as escolas com o material adequado, não tem permitido que, na realidade, a introdução das novas tecnologias no ensino não passe, salvo honrosas e cada vez mais numerosas excepções, de uma mera utopia.

Como tecnologia de excelência, o computador, assume um papel que pode ser fulcral no ensino da Matemática e, em particular, no ensino das Probabilidades. Desde 1992, como se verá no próximo capítulo, criaram-se projectos com o propósito de equipar as escolas com computadores ligados à internet e assim tornar o mundo virtual acessível à maioria dos alunos. Quando se fala de computador como ferramenta pedagógica não se pode dissociar a utilização da internet e dos seus infindáveis recursos. O próprio ensino da Teoria das Probabilidades tem sofrido constantes mutações resultantes da utilização destas duas ferramentas: na realização de trabalhos, na exploração de actividades didácticas, na pesquisa de informação ou até na troca de experiências.

Cada vez mais se encontram páginas na internet dedicadas à Teoria das Probabilidades com material pedagógico interessante e passível de ser manuseado, nomeadamente actividades simulatórias e jogos didácticos onde se recorre à aprendizagem com recurso ao erro sistemático.

1.2 Motivação, objectivo geral e metodologia

Todo o professor de Matemática tem, cada vez mais, de sentir a necessidade de se formar formando. Actualmente, a maioria dos docentes que leccionam Matemática não teve, na sua formação base, qualquer tipo de contacto com as novas ferramentas de ensino e, por isso mesmo, reina entre eles o descrédito por tais utensílios.

Esta dissertação procura dar alguns contributos para o ensino da Teoria das Probabilidades com recurso ao computador e à internet. Porém, não seria plausível construir tais recursos sem que a base do saber fosse enriquecida, sem que o conhecimento fosse alicerçado em pilares sólidos, sem que a visão geral da teoria fosse ampliada. É do senso comum, mas nunca é de mais realçá-lo, que só pode ensinar bem quem sabe o que ensina. O conhecimento será, portanto, a melhor das metodologias.

Com base nestas ideias, aprofundaram-se conhecimentos teóricos em diferentes conceitos de Probabilidade, de modo que todos estes convergissem para um mesmo sistema axiomático. Em cada conceito foram integrados contra-exemplos, falhas ou críticas feitas por cépticos e, inclusive, alguns paradoxos que durante anos foram toldando as mentes dos estudiosos da Teoria das Probabilidades. Convém, contudo, realçar, que o termo *paradoxo* não é utilizado nesta dissertação com o mesmo significado que nas esferas filosóficas, onde se entende por paradoxo toda a situação que origina o confronto dos dois valores de verdade. Um exemplo claro, do que no entender dos puristas da paradoxologia é um paradoxo, é a célebre frase *Esta frase é falsa.* No contexto desta dissertação entende-se por paradoxo toda a situação que origine ou tenha originado uma opinião contrária da opinião comum, ou ao sentir comum; uma contradição ou contra-senso, pelo menos aparente; uma discordância ou discrepância e desarmonia. A propósito do conceito de paradoxo e do interesse do estudo de alguns paradoxos serão de realçar as palavras sábias de Wittgenstein:

"O paradoxo é a paixão do pensamento".

Em relação ao conceito de Probabilidade será de relembrar as palavras de Bruno de Finetti (1989), encontradas em [24] e que relatam a opinião de um estudioso da teoria que chega mesmo a equacionar a existência do termo *probabilidade* associado às noções usuais do cidadão comum:

"··· [à] pergunta ··· a probabilidade na realidade ≪existe≫ ··· responderia que não ···. Mas ··· poderei também dizer o contrário e sem qualquer espécie de contradição, ou seja, que a probabilidade reina em toda a parte, e que é, ou pelo menos deveria ser, o nosso ≪guia no pensar e no agir≫··· . Só que me parece impróprio e chocante, vê-la assim concretizada num substantivo, ≪probabilidade≫, portanto me parece mais aceitável e mais apropriado que seja usado somente um adjectivo, ≪provável≫, ou melhor ainda, somente um advérbio, ≪provavelmente≫".

1.3 Organização da dissertação

Esta dissertação é constituída, para além desta introdução, por mais cinco capítulos e dois apêndices.

Começa-se no Capítulo 2 por apresentar algumas reflexões relativas ao uso do computador e da internet no ensino. Essas reflexões são acompanhadas por um breve apanhado resultante de uma busca levada a cabo na internet, com o intuito de analisar o material existente na rede como material complementar ao estudo da Teoria das Probabilidades. Essa síntese não pretende ser nem exaustiva nem uma mera listagem, mas sim fornecer o endereço e uma descrição das características principais de algumas páginas que possam, por outro lado, projectar novas contribuições no âmbito da presente dissertação.

No Capítulo 3 é elaborado um estudo da axiomática de Kolmogorov, assim como algumas propriedades e características. Essa exposição é acompanhada de alguns contra-exemplos elucidativos que tentam mostrar a importância de um estudo cuidado dessa teoria.

No Capítulo 4, partindo da axiomática de Kolmogorov analisada no capítulo anterior, são apresentados diversos conceitos de Probabilidades, assim como algumas das suas principais propriedades. A apresentação desses conceitos é acompanhada de comentários, da abordagem de questões menos claras e rigorosas e de alguns paradoxos que pretendem reflectir o modo de pensar de quem estudou estes conceitos em épocas transactas. Está incluída também, nesse capítulo, uma secção dedicada ao estudo de uma ferramenta bastante útil no trabalho com reunião e/ou intersecção de acontecimentos, os *mintermos*.

No Capítulo 5 são apresentadas as colaborações deste trabalho no projecto PMatE do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro. Este projecto tem uma filosofia própria baseada na construção de modelos de questões sobre os mais diversos temas do conteúdo programático leccionado actualmente no sistema de ensino português. Os modelos construídos, e apresentados no Apêndice B, são os primeiros sobre o tema Teoria das Probabilidades no âmbito do PMatE e foram testados através da realização de duas actividades em turmas do 12º ano da Escola Secundária D. Inês de Castro de Alcobaça. Ainda no capítulo 5 são discutidas outras propostas de actividades para o estudo da Teoria das Probabilidades no Ensino Secundário executadas recorrendo aos programas informáticos Excel, Hot Potatoes, Free Pascal e Java. Algumas dessas actividades foram também postas em prática. Os resultados e algumas reflexões sobre as mesmas são apresentadas no Capítulo 5.

No Capítulo 6 são descritas algumas conclusões globais sobre o trabalho realizado, assim como algumas reflexões pertinentes decorrentes de toda a aprendizagem tida com a elaboração da presente dissertação.

Capítulo 2

O computador no Ensino das Probabilidades

2.1 O papel do computador na Matemática e no Ensino

A aquisição do conhecimento matemático por parte da classe discente é, em geral, de baixo nível, sendo poucos aqueles que conseguem apropriar-se verdadeiramente deste saber. Os altos índices de reprovação e o baixo desempenho dos alunos no actual sistema de ensino comprovam esta assertiva. A falta de paradigmas de ensino coloca a Matemática como uma disciplina bastante problemática em todos os níveis de ensino.

Em Portugal, de um modo geral, o contacto directo com a Matemática é pouco mais do que a pura aritmética calculatória[1]. Quando o aluno é confrontado com problemas que envolvem a construção de raciocínio lógico deixa transparecer toda a fragilidade e deficiência dos conhecimentos e habilidades supostamente apreendidos em anos lectivos anteriores. Essas deficiências, quando aliadas a uma abordagem tradicional há muito praticada na disseminação da Matemática na sala de aula, tem provocado conflitos no processo ensino-aprendizagem, principalmente na exposição de teorias, objectivos e conceitos e na assimilação dos mesmos.

As formas de trabalho mais utilizadas, por parte do docente na sala de aula, continuam a ser o uso de um livro de texto, a exposição oral e o resumo de conteúdos, complementadas com a realização de exercícios repetitivos que permitam consolidar técnicas. Tais técnicas são de facto necessárias, e em alguns casos imprescindíveis. Contudo, não será conveniente restringir o ensino da Matemática à aprendizagem dessas técnicas. A maioria dos professores não propõe pesquisas aos alunos ou, quando o

[1]Embora e em abono da verdade, se tenham verificado francas mudanças de mentalidades e de modos de acção. Mudanças estas fruto também de alterações nos programas da disciplina e na própria formação inicial dos docentes.

fazem, o incentivo dado ao aluno sobre essa procura é quase nulo.

A desmotivação, aliada a toda uma cultura social de que a Matemática é um saber só possível de ser alcançado por alguns eleitos, emana a necessidade de renovar o processo de aprendizagem da Matemática. Mas, certamente que, qualquer concepção transformadora do ensino da Matemática deve passar por indagações sobre o que se está a ensinar, o seu significado, a sua génese, a sua estrutura, a produção desse conhecimento, e se o que se está a ensinar é, realmente, Matemática. Se cada conteúdo a abordar pudesse ser analisado minuciosamente sob cada um desses aspectos, concerteza que, além de uma mera transmissão de saberes transmitidos como dados prontos se conseguiria chegar, com mais proximidade, a um processo de construção do conhecimento.

O professor deve ter uma postura em relação à Matemática que proporcione ao aluno um ambiente de aprendizagem onde este tenha a oportunidade de investigar, de experimentar, de simular situações, de (re)descobrir os seus *teoremas*. Um dos caminhos que enseja a possibilidade de gerar maior produtividade no processo ensino-aprendizagem pode estar na diversificação das formas de abordagem de cada tema a ser apresentado a partir da qual se adapta o nível de aprofundamento desejado. Assim, algumas opções viáveis podem ser encontradas fazendo uso da simulação, das aplicações e da computação. Neste contexto, a informática assume um papel de suma importância, principalmente quando funciona como agente de propagação do conhecimento, ou seja, quando se coloca a informática ao serviço da Educação. O computador é um instrumento excepcional que torna possível simular, praticar ou vivenciar verdades matemáticas (podendo até sugerir conjecturas abstractas), de visualização difícil por parte daqueles que desconhecem determinadas condições técnicas, mas fundamentais à compreensão plena do que está sendo exposto.

Existem dois tipos essenciais de software utilizados em Matemática: os *programas de cálculo simbólico* e os *programas educacionais*.

Os *programas de cálculo simbólico* foram concebidos primordialmente para investigação em Matemática, no entanto, devido às suas características são por vezes também utilizados no ensino. Ferramentas deste tipo podem efectuar em minutos cálculos que por via estritamente humana demorariam meses ou até anos, com a clara vantagem de poderem confirmar cálculos já efectuados e testar possíveis conjecturas. Apesar de todas estas vantagens estes programas não são imunes a críticas nem a reflexões preocupadas de diversos investigadores.

Os *programas educacionais* são especificamente concebidos para o ensino e uma realidade em diversos países economicamente mais desenvolvidos. Este tipo de software vai-se construindo, na sua maioria, tendo em conta os objectivos que correntemente mais estão no centro da prática educativa: a aquisição de técnicas de cálculo, resolução de exercícios de rotina, resolução de problemas, simulação de situações reais e a parte lúdica. Alguns têm uma predominância essencialmente informativa (programas tutoriais), outros proporcionam sequências de exercícios (programas de prática), outros têm um caracter predominantemente lúdico (jogos educacionais), outros são programas orientados para a resolução de problemas e outros ainda são instrumentos de demonstração cuja utilização recai essencialmente sobre professores.

Outro tipo de software potencialmente útil para a actividade Matemática são os chamados utilitários. Os utilitários são programas de natureza geral, elaborados com fins comerciais de forma a serem utilizados essencialmente no mundo empresarial. São exemplos deste tipo de ferramenta as folhas de cálculo, os programas de tratamento estatístico ou os programas de construção gráfica. Apesar de pouco utilizados na sala de aula a sua utilização pode recair tanto sobre a actividade de investigação como em trabalhos de projecto. A utilização deste tipo de software requer uma compreensão dos mais diversos conceitos matemáticos e uma noção exacta do modo como estes podem ou não ser aplicados. Com algumas características em comum com os utilitários existe o software de natureza aberta, criado com o propósito único de ser utilizado no ensino da Matemática. Um exemplo clássico deste tipo de ferramenta são os programas para a representação gráfica de funções e estudo das suas propriedades. Existe ainda a possibilidade do ensino da Matemática recorrer às linguagens de programação, encaradas como uma ferramenta geral que serve para resolver todo o tipo de problemas mediante o conhecimento de alguns requisitos de ordem técnica. São exemplos de linguagem de programação o Basic e o Pascal. No entanto, a linguagem de programação que nos primeiros tempos mais se impôs no mundo da educação foi o Logo.

James Fey tem-se debruçado sobre o impacto do computador no ensino da Matemática e é um acérrimo defensor de que o computador e os projectos educacionais nele inspirados constituem uma das mais importantes e poderosas forças de mudança actuando sobre a Educação Matemática.

O computador e o estilo mental que este acarreta já há algum tempo começaram a ser uma presença constante na sociedade, na cultura, no ensino. Esta presença tem influenciado a visão que o cidadão comum tem da cultura, da arte, da ciência, e em particular, da Matemática. Obviamente que tal ferramenta oferece múltiplas vantagens as quais não devem ser ignoradas nem desaproveitadas, no entanto, acarreta igualmente algumas possíveis consequências negativas que merecem ser reflectidas por forma a serem minoradas.

Existem muitos casos de sucesso envolvendo a Matemática e o computador, inclusive na própria investigação Matemática. O surgimento e contínuo aperfeiçoamento dos computadores deve muito à ciência Matemática, nomeadamente aos trabalhos desenvolvidos entre 1930 e 1940 por Turing e Church em torno da Teoria da Computação. Cada vez se torna mais patente que o progresso em certos ramos da Matemática começa a beneficiar significativamente com a existência dos computadores, apesar de tais progressos não serem assumidos por todos e, em alguns casos, serem mesmo controversos. Na Teoria dos Números todo o processo de codificação e descodificação de mensagens, a própria procura de novos números primos ainda não conhecidos tem no computador um auxiliar de extrema importância. Na Análise Combinatória onde surgem, com bastante frequência, problemas ligados à computação ou por ela resolvidos. No estudo de Sistemas Dinâmicos não lineares onde o trabalho experimental com computador desempenhou um papel ímpar. No estudo de Fractais, onde os computadores tornam possível a construção de figuras, algumas com aspecto de paisagens reais, tendo já sido usadas em filmes de ficção científica. Apesar de todos estes progressos terá sido o ensino da Matemática uma das áreas que mais logrou com a inserção do computador na rotina diária. Segundo a visão de Vygostsky [2], o conhecimento resulta da interiorização pelos indivíduos de ferramentas culturais já preexistentes na sociedade.

Para além de dar ênfase a aspectos positivos que o computador pode trazer ao

[2]Psicólogo soviético cujas ideias no estudo da aprendizagem têm vindo a ser bastante reconhecidas.

ensino da Matemática, e que de uma forma sumária já foram enumerados, convém realçar factores negativos a ter em conta na utilização deste instrumento no ensino.

Em 1984, C. Truesdell exprimiu alguns desses factores num artigo dedicado a analisar os impactos do computador como ruína da ciência e ameaça para a humanidade. Alguns dos pontos chave enumerados por Truesdell prendem-se com:

- O computador não estabelece cálculos com o rigor clássico e tal é perigoso.
- A Matemática é a ciência dos infinitos e a computação é essencialmente finita.
- O computador promove a alteração dos factos. Prejudicou a Ciência Experimental e Aplicada no passado e pode atrasar a descoberta básica ou reduzir o campo de aplicações no futuro.
- As teorias clássicas usaram modelos indutivos e dedutivos. A computação promove modelos flutuantes.
- O computador fomenta a fraude lógica sendo programado para confirmar teorias falsas que podem destruir a humanidade.

Em suma, segundo Truesdell, os computadores põem em risco o pensamento, o idioma, a ciência e a sobrevivência humana. Como qualquer outra ferramenta perigosa, deveriam ser postos sob controlo estrito.

Esta visão desapaixonada e fatalista de Truesdell sobre o uso do computador pode ser demasiado derrotista mas não deixa de alertar para a necessidade da inserção do computador na Matemática ser feita de uma forma cuidada e cautelista. Se esses cuidados terão de ser tidos em conta em relação a toda a actividade matemática, terão ainda mais de ser acautelados em relação ao ensino da mesma. Este é um dos temas que tem despertado mais atenção dos estudiosos da Didáctica da Matemática sendo de realçar os trabalhos de Atiyah e Halmos.

Em 1986, Atiyah redige um artigo onde descreve os problemas da inserção do computador com o sistema de ensino. Segundo o autor a pressão económica, o desenvolvimento gigantesco da indústria informática são lobbies que tentam inserir no sistema mudanças demasiadamente bruscas e drásticas, às quais a inércia do próprio sistema não é capaz de responder, numa transformação perigosa de recursos mais vocacionados para um ensino tradicional. Do ponto de vista de Atiyah corre-se o perigo de que a tão necessária aritmética já não seja uma destreza de aquisição obrigatória, o que implicaria dar um maior ênfase à compreensão dos processos e menos aos cálculos rotineiros. Interpretado correctamente, pode-se considerar este facto como uma vantagem em termos educativos, no entanto, a Ciência não é assim tão redutora e uma utilização abusiva traduzir-se-ia numa atrofia das faculdades humanas. Porém o referido autor não deixa de ter sobre este assunto uma reflexão curiosa que se pode traduzir numa das suas afirmações:

Talvez a reacção que tornou tão popular o jogging em anos recentes venha a converter, a seu devido tempo, o exercício da aritmética mental numa forma de terapia mental!

Por outro lado, Atiyah não deixa de alertar para a concorrência que a Matemática vai tendo por parte da Informática:

Deixar-se-á de se poder contar com as grandes mentes criativas que optarão pela Informática, o que será desastroso para uma ciência tão dependente do talento.

P. Halmos, num artigo de 1991, assinala também alguns inconvenientes que podem advir do uso do computador na aprendizagem da Matemática. O resumo do artigo de Halmos, que se pode encontrar em [15], reflecte com precisão as suas ideias e serve de orientação e fomento de reflexão para alguns fatalistas do destino e descrentes das vantagens do uso da tecnologia:

É o ensino mediante o computador realmente prejudicial? Eu tinha a certeza que o era, mas quando me propus a escrever esta nota perguntei a opinião a uns tantos amigos, e algumas das respostas que recebi abalaram as minhas opiniões. O resultado é o seguinte:

1. *como usar o computador para ensinar conceitos abstractos;*
2. *como é que os cálculos numéricos podem ajudar o ensino;*
3. *de que modo é que um computador pode controlar o pensamento conjectural.*
4. *o ensino de conceitos abstractos num momento incorrecto pode ser perigoso.*

   A conclusão, a minha conclusão é que:

5. *assim como a simples existência de programas pode melhorar a qualidade do nosso ensino, também pode criar uma forte possibilidade de substituir o bom ensino pelo mau e, portanto, devem ser usados com sabedoria ou não serem usados em absoluto.*

Sobre as vantagens e desvantagens do uso do computador no Ensino da Matemática, Miguel de Guzmán (1991) tenta dar uma resposta baseada numa espécie de roteiro ou de plano de actuação, onde estabelece algumas linhas de orientação para a sua utilização. Em resumo, Guzmán, baseia o seu plano essencialmente nos seguintes pontos:

a) Insistir no carácter padrão dos teoremas até chegar a estabelecer a sua utilização com base em algoritmos que inicialmente poderão ser realizados manualmente e posteriormente, com o auxílio do computador.

b) Procurar experimentar um pouco com esses algoritmos, de modo que, ainda que não se adquira um domínio magistral deles, em rapidez e segurança, cada um possa ser capaz de reproduzi-los, por ter entendido de onde provêm e o que lhes deu origem, e se necessário, de adquirir uma prática aceitável deles.

c) Trabalhar bastante para que os próprios alunos tenham um forte interesse em conseguir o domínio dos meios informáticos já existentes, a fim de conseguir fazer mecanicamente, mediante computador, os processos rotineiros.

d) Depois, haveria que desenhar práticas adequadas com o computador, a fim de tornar-se plenamente familiarizado com o seu modo de operação e as suas possibilidades em relação a tais conteúdos e problemas. Para tudo isto, e é talvez o ponto mais interessante que segundo creio não se tem trabalhado suficientemente, haveria que pensar numa boa série de problemas bem desafiantes, que pudessem ser atacados com as ferramentas conceptuais de que se impõe e com os elementos de ajuda informática que se dominam.

e) Haveria que ter especial cuidado com as consequências perigosas para o aluno deste modo de proceder. Se num curso se estimula os alunos a trabalhar deste modo e não chegam a possuir estes mesmos alunos a destreza que actualmente se julga suficiente destas rotinas do cálculo, pode suceder que as possuam e fracassem ante outros agentes de ensino que não lhes permitam usar os meios que eles sabem e puderam utilizar noutras circunstâncias.

Depois de analisar textos ainda de vários autores, nomeadamente de Michelle Rothestein, John Fitch, Seymour Papert, Derek Ball, John Higgo, Adrian Oldknow e John Wood, uns defensores da inserção do computador na actividade matemática outros nem tanto, de uma reflexão própria e a experiência de alguns anos de ensino podem-se reforçar alguns pontos no meio desta encruzilhada de opiniões.

É evidente que a utilização do computador no Ensino da Matemática pode ser uma realidade muito diversa conforme a concepção que se tenha desta ciência, as concepções pedagógicas que se assumam, os objectivos educacionais que se pretendam atingir, a metodologia de trabalho adoptada e as condições que possam ter à disposição. De qualquer modo, desde que sejam feitos os investimentos necessários, tanto em recursos materiais como em recursos humanos, as novas tecnologias podem ser o motor para um verdadeiro progresso dos sistemas educativos.

De uma experiência própria adquirida ao longo de alguns anos como docente é possível extrair duas realidades bem distintas: o ensino da Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e o ensino da Matemática no Ensino Secundário.

No Ensino Secundário, e fruto de uma reformulação dos programas das diversas disciplinas apelando cada vez mais para o uso das novas tecnologias, as escolas têm-se vindo a equipar com mais e melhor material tecnológico. Na maioria das escolas é já possível ter uma actividade pedagógica que faça uso do computador e das novas tecnologias. Em muitos casos repara-se que a existência de tais recursos não é uma mais valia para as escolas, em muito devido à formação de docentes não acompanhar a implementação dessas ferramentas. Consequentemente, são muitas as escolas secundárias relativamente bem equipadas e cuja rentabilidade retirada desse investimento é baixa. Porém, é cada vez maior o número de docentes e de projectos que recorrem ao uso do computador. A Matemática é uma das disciplinas onde o número de docentes cuja actividade pedagógica recorre ao uso do computador é maior. Pode-se comprovar esta afirmação tendo em conta a quantidade de docentes de Matemática do Ensino Secundário com páginas pessoais na Internet.

No 3º Ciclo do Ensino Básico, a realidade é um pouco distinta. São poucas as escolas bem equipadas com material informático e a utilização do pouco material existente tem de ser repartida por diversas disciplinas e projectos, o que torna muito difícil o uso desse material. No entanto, tem havido um grande esforço no sentido de satisfazer as necessidades desses estabelecimentos de ensino.

O desenvolvimento tecnológico tem modificado as expectativas do jovens adolescentes que se sentem cada vez mais atraídos pelo mundo da informática. A própria sociedade de consumo tem incentivado um constante contacto com as novas tecnologias. Consequentemente, toda a actividade pedagógica que recorra a essas ferramentas tem, por parte dos discentes, uma maior aceitação. Os alunos sentem-se fascinados por métodos de ensino que recorram ao computador e assim sendo os níveis de motivação e pre-disposição para a aprendizagem são efectivamente maiores.

2.2 A Internet - uma ferramenta pedagógica

Em 1969, em plena guerra fria, os Estados Unidos da América resolveram construir uma Rede informática que lhes permitisse trocar informações confidenciais entre instituições militares de modo rápido e simples. A solução foi a ARPANet, uma Rede desenvolvida pela Advanced Research Projects Agency, que ligava quatro supercomputadores. Em 1971 contava já com quinze dessas máquinas e, em 1972, atingia o número de trinta e sete supercomputadores que se dedicavam a fazer circular as comunicações.

Depois de estabelecidos mundialmente os protocolos de comunicação que os computadores utilizariam, os conhecidos TCP/IP, a sua ligação à Rede aumentou gradualmente, dando azo ao aparecimento de programas informáticos com vista a facilitar a utilização da Rede por indivíduos com poucos conhecimentos de informática. Surgiu assim o Mosaico e, posteriormente, o Netscape e o Internet Explorer, softwares específicos que acedem facilmente à informação disponível na Internet[3]. Embora se tivesse iniciado com intuitos militares, a Rede rapidamente entrou nos meios académicos transformando-se, posteriormente, numa imensa biblioteca heterogénea em conteúdos e suportes, virtualmente inesgotável e potencialmente acessível ao cidadão comum. Com a vulgarização dos computadores, entre 1980 e 1990, a Web passou a abrigar também locais de troca de informações e novidades, inaugurando assim as primeiras "mailing lists" e "news groups", ou seja, grupos de discussão.

O ano de 1992 foi, em Portugal, o da verdadeira globalização. Apareceram os primeiros prestadores de serviço Internet (Internet Service Providers, ISP) que proporcionaram o acesso à Rede mediante o pagamento de uma taxa mensal.

Entre 1985 e 1994, Portugal esteve envolvido no primeiro grande projecto de utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC). Este projecto, denominado MINERVA, pretendeu introduzir os computadores nas escolas através da formação pedagógica e técnica de professores, procurando a introdução curricular das TIC. Posteriormente, em 1996 e, por recomendação do Livro Verde para a Sociedade da Informação surgem, em Portugal, dois novos projectos institucionais: Programa Internet na Escola, e o Programa Nónio Século XXI. O primeiro, lançado pelo Ministério da

[3]Os termos Web, Internet, Rede ou net são no contexto desta dissertação tomados como sinónimos.

Ciência e da Tecnologia, pretendeu e conseguiu introduzir o acesso gratuito à Internet em todas as escolas do 2º e 3º ciclos do Ensino Básico e do Ensino Secundário. O segundo, lançado pelo Ministério da Educação e com o patrocínio da Comunidade Europeia, visava disponibilizar verbas para a aquisição de material (informático e outro) de suporte a projectos de escolas, devidamente acompanhados por Centros de Competência (Universidades, Escolas Superiores da Educação, entre outros), no âmbito da utilização didáctica e pedagógica das TIC na Educação.

Actualmente, e em muito devido a estes projectos, a Internet encontra-se já acessível à maioria da população estudantil estando quase todas as Escolas Básicas e Secundárias ligadas à Rede. A facilidade de acesso à Web não fica por aqui, dado que são já vários os bares, bibliotecas, shopping's e outros sítios públicos com ligação à Rede. Haverá, até quem se ligue à Web através de telefone móvel, em qualquer parte do globo. Muitas escolas e universidades optaram pela aquisição de equipamento que permita a montagem de um sistema wireless, sistema esse que permite o acesso à Internet sem necessidade de qualquer tipo de ligação física desde que a conexão com a Rede esteja a ser efectuada dentro de um determinado raio de acção.

Os recursos disponíveis na Rede têm, por isso mesmo, a vantagem de estarem acessíveis vinte e quatro horas por dia ao longo de todo o ano. Esta característica é particularmente útil, por exemplo, para quem estuda em horário pós-laboral, permitindo-lhe assim estudar fora da hora de expediente, ou mesmo, para o estudante em geral possibilitando-lhe o recurso rápido a outras fontes de informação.

Podem-se encontrar na Web recursos para estudos básicos ou avançados. Basta que para isso existam autores que editem na Rede os seus trabalhos sobre as mais diferentes áreas. Através da Internet os professores podem tomar contacto com diferentes realidades e estratégias, conhecer e divulgar vários tipos de material didáctico e de experiências.

Quando um recurso é registado e lançado na Web, este torna-se disponível para todos os cibernautas, o que possibilita uma melhor avaliação do trabalho por terceiros e sua eventual correcção ou até aprofundamento. A contínua actualização da Web, dos seus respectivos sites [4] e dos seus conteúdos é muito mais fácil que qualquer outro modo de publicação, nomeadamente, livros e CD's.

Porém, muito do material disponível na Web é de qualidade duvidosa. Os utilizadores necessitam de ter confiança nos recursos que têm à disposição mas tal nem sempre é aconselhável. Nem todos os autores são devidamente qualificados nas áreas sobre as quais editam informação ou em muitos casos esta está completamente desactualizada.

Para além desses inconvenientes, os endereços da Web são constantemente alterados e outros simplesmente desaparecem sem aviso prévio, o que não facilita uma assídua consulta. Um outro problema que se observa frequentemente é o plágio de muitas das páginas da Internet, que não passam senão de cópias de outras já existentes, o que prejudica a diversidade de recursos e a procura na Rede.

Apesar de a Internet poder ser, de facto, um óptimo meio de propagação para

[4] Utiliza-se o termo, em inglês, site para definir um lugar ou sítio disponível na Internet. Tal como os lugares de uma qualquer cidade, os sites são identificados por um endereço, através da qual se tem acesso ao mesmo. Um outro termo utilizado usualmente é o de página que, na sua essência, representa o mesmo.

materiais didácticos e afins, existem vários perigos na sua utilização abusiva e desadequada. Um dos problemas mais frequentes, segundo [18], demonstrados por alunos que recorrem à Web, é o da escolha imprópria de material a usar. Tem-se observado que em grande parte das situações, os estudantes não estão alertados para a mais diversa informação desadequada e incompleta disponível na Rede. E, desse modo, reduzem o seu trabalho a simples cópias de extractos de textos, carenciados de espírito crítico, que a maior parte das vezes não reproduzem o que se pretende. Em alguns casos, e nomeadamente na realização de trabalhos escritos, esta ferramenta pode ser um *pau de dois bicos*. Por um lado, o material existente pode contribuir para a realização de uma boa tarefa. A existência de documentos disponíveis na Rede que abordem os mesmos temas pode contribuir para que o trabalho seja uma mera cópia dos vários trabalhos encontrados.

A utilização da Internet, não acarreta, nos dias de hoje, grandes despesas financeiras, contudo, pode trazer grande dispêndio de tempo. O acesso a certos sites pode ser bastante lento, a certas horas específicas do dia, concretamente à denominada hora de expediente, por exemplo. Os alunos podem ser facilmente levados a consultar outras páginas e assim ocuparem demasiado tempo com assuntos acessórios. Quase todos os sites têm ligações a outros sites e estes, por sua vez, a outros. Deste modo, passado algum tempo os estudantes estão mais preocupados com o último sucesso musical do que com o assunto inicialmente sob pesquisa!

Muito do material disponível na Web é estático e não proporciona interactividade com o cibernauta que o consulta. Não passam de páginas sem vida cheias de texto onde os estudantes podem simplesmente imprimir os seus conteúdos para uma leitura posterior. Um ensino baseado essencialmente neste tipo de ferramenta poderia tornar-se desastroso, o mesmo acontece se a utilização deste tipo de material for uma constante. O perigo desta utilização abusiva surge quando o contacto impessoal com um monitor de computador sem qualquer tipo de reacção substitui o contacto entre professor e aluno. A interactividade pode funcionar como uma espécie de *professor virtual* permitindo assim outro tipo de relacionamento entre aluno e máquina. Ao nível do Ensino Básico e Secundário o contacto aluno-professor é essencial. Os alunos destas idades ainda não têm maturidade para serem puramente auto-didactas. Todo o entusiasmo e dedicação do professor no ensino de um determinado assunto que em muitos casos motiva e entusiasma o aluno pode ser dado ao mesmo através da Rede. Necessariamente, o ensino recorrendo à Web, tem de ser o mais possível interactivo entre aluno e computador ou entre aluno e professor. Por exemplo, as aplicações em Java podem ser utilizadas para introduzir um elemento interactivo no material existente na Rede. Muitas destas aplicações estão disponíveis para uso corrente e podem ser utilizadas por professores e incorporadas no material que disponibilizam na Rede, de acordo com as suas preferências e necessidades. Um dos programas bastante utilizado na elaboração de material didáctico interactivo na Web é o Excel. Não será, porventura, aquele que mais diversidade proporciona, contudo é de fácil utilização. Na recolha apresentada de seguida são enumerados alguns sites com aplicações em Java, Excel, Xlisp-stat, entre outros, sendo mencionadas as suas principais características.

Existem vários sites na Internet dedicados à discussão das vantagens e desvantagens da utilização da Internet como uma ferramenta de ensino, como por exemplo:

http://home.edu.conventry.ac.uk/Volume.

2.3 Probabilidades e a Internet

Como resultado de uma pesquisa levada a cabo na Rede, na procura de páginas que apresentassem aspectos relevantes no estudo da Teoria das Probabilidades, apresentam-se de seguida os endereços de alguns sites encontrados. Seria um pouco fastidioso fazer uma listagem exaustiva de todos os sites visitados, pelo que se decidiu proceder a uma seriação dos mesmos. Muitas das páginas consultadas não são aqui referidas por pelo menos uma entre várias razões: porque são cópias parciais ou totais de outras páginas, porque o tema é encarado com muita leviandade, porque o autor parece não merecer uma total confiança e, esta foi uma das principais razões, por possuírem uma imensidão de textos sem a preocupação de estabelecer um qualquer relacionamento entre o cibernauta e a própria página, que permita uma aprendizagem motivadora e interactiva e permita proceder a uma auto-avaliação dos conhecimentos adquiridos. Foram inúmeras as páginas encontradas com textos interessantes sobre Probabilidades, sendo a maioria destes, extractos de livros ou de artigos, que podem ser encontrados num outro local. Esta pesquisa foi levada a cabo em várias etapas repartidas pelo tempo. A pesquisa de tais páginas ocorreu nos meses de Fevereiro, Março, Maio e Setembro de 2003 e Janeiro de 2004. Convém, no entanto, realçar que não se pretende aqui estabelecer uma listagem pormenorizada de todos os sites encontrados mas alguns exemplos interessantes. A ordem pela qual os sites serão apresentados é aleatória pelo que não lhe deve ser atribuída qualquer importância. Todavia, os sites são referenciados com as suas características básicas. No decorrer, desta pesquisa e tendo em conta o interesse demonstrado pela Escola Secundária D. Inês de Castro de Alcobaça, e pelos seus alunos do 12º ano, foram produzidas algumas ferramentas que estarão, assim que possível, disponíveis na página da escola, ainda em construção, e às quais terão acesso todos os alunos da escola e também todos aqueles que consultem a referida página. De qualquer modo encontram-se já disponíveis num site, da responsabilidade do autor da presente dissertação, construído para este e outros efeitos em www.prof2000.pt/users/pjca, assim como no portal electrónico da escola.

Endereço:*http://math.uah.edu//psol*

Neste endereço podem-se encontrar excelentes recursos para alunos e professores nas áreas da Teoria das Probabilidades e da Estatística. Os recursos são essencialmente de dois tipos: *applets* (aplicações) e *components* (componentes). Enquanto que as aplicações são pequenos ficheiros contidos na própria página e têm a intenção de ilustrar conceitos e técnicas de uma forma interactiva e dinâmica, as componentes são construídas através de blocos de várias aplicações e/ou de outras componentes. Estas podem conter objectos em Java que sejam representações virtuais de objectos reais, tais como moedas, cartas, dados, entre outros. A ferramenta Java pode ser utilizada por professores e alunos com alguma experiência de programação para criar aplicações sem terem de programar todos os detalhes da situação que pretendem programar. Neste endereço, podem-se encontrar várias aplicações e várias componentes de experiências usualmente retratadas em qualquer livro de Probabilidades, desde, modelos geométricos (por exemplo, experiência de Buffon, experiência de Bertrand), as experiências de Bernouli (experiências com modelos de espaços finitos), Diagramas de Venn para o estudo de propriedades de conjuntos, entre outros. Cada uma destas aplicações e/ou componentes são acompanhadas de uma descrição detalhada da experiência em causa, assim como, das características essenciais do ficheiro.

Endereço:_http://www.explorelearning.com_
Pode-se encontrar nesta página um canto dedicado ao estudo das Probabilidades. Através de seis actividades interactivas que exploram o conceito geométrico, clássico e frequencista de Probabilidade, a noção de acontecimentos independentes e a comparação entre o conceito clássico de Probabilidade e o valor obtido experimentalmente, por simulação computacional de uma dada experiência. Para cada uma das actividades propostas, existem guias contendo linhas orientadoras para a exploração de programas, um plano de aula e, ainda, uma opção de material extra.

Endereço: _http://strix.ciens.ucv.ve/ matcomp/probabilidades/index.html_
Esta página é a página oficial de Probabilidades e Estatística da Venezuela. Possui apontamentos teóricos no campo da Teoria das Probabilidades e Estatística e alguns tutoriais em excel. Contém ainda, um conjunto formado por algumas folhas práticas de exercícios diversos e actividades a serem realizadas num Laboratório de Probabilidades e Estatística.

Endereço:_http://www.math.uah.edu/stat_
Este é o endereço do _"Virtual Laboratories in Probability and Statistics"._ É possivelmente, uma das mais completas páginas dedicadas ao estudo/ensino de Probabilidades. Para além dos resumos teóricos, que na parte das Probabilidades envolve espaço de probabilidades, combinatória, distribuições e valor esperado, a página contém um número significativo de aplicações que contribuem para a assimilação dos conceitos teóricos já mencionados. Apresenta também, vários modelos especiais, nomeadamente, modelos geométricos com simulação computacional (do problema da agulha de Buffon, do paradoxo de Bertrand), das experiências de Bernoulli, modelos em espaços finitos, jogos de sorte, entre outros. Esta página é da responsabilidade do Departamento de Ciências Matemáticas da Universidade do Alabama.

Endereço: _http://www.teatcherlink.org_
Esta página é a página do _Center for Tecnology and Teatcher Education_ da Universidade da Virginia. Esta página possui uma ligação interna a uma parte destinada à Educação em Matemática. Aqui, podem encontrar-se várias reflexões sobre a introdução das tecnologias no ensino da Matemática, assim como, alguns projectos de actividades desenvolvidos em Geometer's Sketchpad, Microsoft Excel e noutros programas. Em Microsoft Excel, podem-se encontrar variadas actividades, que vão desde o estudo de análise de sucessões ao estudo de relações entre áreas e perímetros e, em particular, à simulação de experiências aleatórias. Nesta área, podem-se encontrar, detalhadamente, instruções que levam o cibernauta a construir neste programa a simulação do lançamento de uma ou mais moedas equilibradas, assim como, estender os seus conhecimentos e criar rotinas que permitam simular experiências aleatórias, por exemplo rodar uma roleta numerada e observar o número sobre o qual fica situado o ponteiro. Este site é recomendado a todos aqueles que pretendam utilizar o Microsoft Excel como base para desenvolver actividades na sala de aula.

Endereço: *http://www.mis.coventry.ac.uk/ nhund/dice/index.html*
Este site é da responsabilidade da Universidade de Coventry e é dedicado à discussão de conceitos básicos de Probabilidades utilizando dados. Os autores justificam o recurso unicamente aos dados com o facto de já os egípcios, há cerca de cinco mil anos, se dedicarem ao estudo de situações de jogo envolvendo tais objectos. Nesta página, é possível encontrar, vários ficheiros elaborados em Excel os quais simulam experiências envolvendo o lançamento de vários dados. Cada um dos ficheiros vem acompanhado de uma breve descrição que permite, a quem o consulta, atingir os objectivos a que o mesmo se propõe. Deste site obtém-se ligações a outros sites onde se pode encontrar, por exemplo, um artigo sobre a história e evolução do dado, assim como, actividades todas elas desenvolvidas tendo por base dados. Uma dessas ligações, permite aceder à página cujo endereço é: *http://www.stat.sc.edu/ west/javahtml/CLT.html*, onde se pode encontrar um ficheiro em Java, com a *demonstração experimental* o Teorema do Limite Central, utilizando a simulação de um número seleccionado de dados à escolha.

Endereço: *http://alea-estp.ine.pt*
Esta página é um projecto que nasceu das colaborações da Escola Secundária Tomás Pelayo e do Instituto Nacional de Estatística. O seu objectivo é o de combater a Literacia Estatística, tendo em vista a prestação de um importante serviço de utilidade pública, por um lado, enquanto que por outro, pretende fomentar a aprendizagem recorrendo ao uso de novas tecnologias. Esta página dispõe, em particular, de uma colecção de ficheiros, com informação sobre Probabilidades, leccionada nos Ensinos Básico e Secundário (alguns deles ainda em construção). É ainda possível encontrar um dossier em Excel completo sobre Teoria das Probabilidades leccionada nos Ensinos Básico e Secundário contendo informação teórica e ficheiros auxiliares que complementam o estudo das noções teóricas. É possível fazer o download destes ficheiros, assim como, da totalidade do dossier. Esta é uma das principais páginas portuguesas dedicadas ao estudo de Probabilidades e Estatística.

Endereço:*http://www.educ.fc.ul.pt/icm/98/icm42*
Esta página foi construída no âmbito da cadeira de Interdisciplinariedade Ciências Matemáticas no ano lectivo 1998/99, por três alunos. Aqui pode-se encontrar uma breve resenha histórica da Teoria das Probabilidades, assim como, alguns célebres paradoxos e um espaço lúdico, denominado por Casino, onde é pedido ao cibernauta que vá respondendo sucessivamente a algumas questões com a contribuição de algumas dicas.

Endereço: *http://Geocities.com/Paris/Rue/5045/2A0.htm*
Esta página é da responsabilidade da Faculdade de Ciências Económicas de Vitoria. Contém um curso de aulas sobre Probabilidades e Estatística a leccionar online. Este curso está acompanhado de uma componente prática para treino.

Endereço: *http://terravista.pt/MeiaPraia/5079*
Esta página foi construída para dar informação sobre História do Cálculo das Probabilidades. Possui algumas ligações a sites internacionais, assim como, alguns proble-

mas clássicos da Teoria das Probabilidades e a biografia de alguns dos matemáticos que mais contribuíram para o desenvolvimento desta ciência. É uma página essencialmente dedicada à História das Probabilidades não possuindo qualquer tipo de interactividade.

Endereço: *http://www.stat.berkeley.edu/users/stark/SticiGui/Text/index.htm*
Nesta página podem-se encontrar textos sobre Probabilidades e Estatística, os quais são acompanhados de exercícios interactivos e auto-corrigíveis , o que permite, a qualquer cibernauta que a consulte, uma auto-avaliação dos conceitos adquiridos em tempo real e sempre online.

Endereço: *http://www.mathcs.carleton.edu/probWeb/probWeb.html*
Este site é inteiramente dedicado ao estudo da Teoria das Probabilidades. Foi concebido por Phil Pollett, da Universidade de Queensland. Possui vários campos de trabalho que vão desde livros, jornais, conferências, grupos de trabalho, ligações a outras páginas com o mesmo tema, software e ainda recursos na área do ensino, onde se podem encontrar demonstrações interactivas de vários tipos, incluindo diversas aplicações, algumas delas, sobre situações paradoxais da Teoria das Probabilidades.

Endereço: *http://www.math.csusb.edu/faculty/stanton/m262*
Esta página contém dez aplicações, em Java, que abordam vários conteúdos de Probabilidades e de Estatística. Na área das Probabilidades, há a realçar uma aplicação dedicada à introdução dos modelos probabilísticos, um outro modelo dedicado ao estudo do Teorema do Limite Central e uma aplicação que simula a experiência da agulha de Buffon.

Endereço: *http://archives.math.utk.edu/topics/probability.html*
Esta página contém arquivos das mais diversas áreas da Matemática, incluindo a Teoria das Probabilidades. Estes arquivos podem ser textos, exercícios, jornais electrónicos, Web sites ou inclusive aplicações que, aliás, já foram referidos em endereços anteriores.

Endereço: $http : //www.mathgoodies.com/lessons/vol6/intro_probability.html$
Este site é uma boa ferramenta para iniciação ao estudo das Probabilidades. Contém todas as definições necessárias e ilustradas com a realização na própria página de experiências aleatórias. Contém, ainda, uma série de exercícios interactivos que permitem ao observador proceder a uma auto-avaliação no final do visionamento da página. Os itens abordados são adequados ao actual Ensino das Probabilidades em Portugal, ao nível do 9º ano de escolaridade e constituem bons pré-requisitos para o ensino das mesmas no 12º ano do Ensino Secundário, exceptuando as noções relacionadas com probabilidade condicionada. Saliente-se ainda o facto da página conter uma série de exercícios, em forma de desafio, no qual os cibernautas podem testar os conhecimento adquiridos. Contudo, nem todas as operacionalidades da página estão disponíveis, embora se possam obter com a aquisição de um CD-Rom, que se encontra à venda na própria página.

Endereço: *http://www.math.bgsu.edu/albert/m115/probability/outline.html*

Esta página contém uma extensa introdução do conceito de Probabilidade sob dois pontos de vista: clássico e frequencista. Contém ainda, uma interpretação de Probabilidade em termos de odds. Os exercícios vêm acompanhados, não só, do estudo das regras básicas usuais em Probabilidades, como também, de algumas actividades envolvendo os referidos conceitos.

Endereço: *http://cne.gmu.edu/modules/dau/stat/*

Este site contém um curso online interactivo sobre Probabilidades e para além de outros temas da Estatística (Distribuições, Regressão Linear, Regressão Linear Múltipla, Análise de Clusters).

Endereço: *http://www.prof2000.pt/users/pjca*

Esta página é da responsabilidade do autor da presente dissertação. Apresenta uma secção inteiramente dedicada ao ensino Teoria das Probabilidades. Nesta secção podem-se encontrar algumas aplicações, desenvolvidas no âmbito do trabalho desenvolvido na presente dissertação, aplicações em Java, assim como ficheiros em Excel e em FreePascal com actividades específicas. O site contém também um programa/jogo construído em Hot Potatoes onde os alunos podem autonomamente desenvolver o seu trabalho pessoal assim como procederem a uma avaliação formativa dos seus conhecimentos. Podem ser encontrados igualmente fichas de trabalho e testes de avaliação sobre os mais diversos conteúdos probabilísticos. Alguns dos ficheiros mencionados simulam alguns dos paradoxos que em capítulos seguintes merecerão uma abordagem especial.

Capítulo 3

Probabilidades - Espaço mensurável e famílias de conjuntos

A Estatística é um dos ramos da Matemática com mais aplicação no quotidiano diário e baseia muitos dos seus resultados na Teoria das Probabilidades que, por sua vez encontra, na Teoria da Medida grande parte da sua existência.

Este capítulo pretende apresentar a Teoria das Probabilidades baseada na axiomática [1] deixando, um pouco de parte, a sua noção enraizada do senso comum abordando-a como um ramo da Matemática de inquestionável valor. No entanto, será de esperar que todas as noções de Probabilidade que geralmente são aceites e compreendidas pelo cidadão comum, encaixem na axiomática.

3.1 Breve referência histórica

A génese das Probabilidades está ligada aos jogos de sorte/azar, já conhecidos dos Egípcios 3500 anos a.C.. Os Gregos e os Romanos eram grandes entusiastas dos jogos de dados. O próprio Imperador Claudius (10 a.C.-54 d.C.) jogava habitualmente e terá até escrito um livro sobre o assunto denominado *Como ganhar os dados*. Também no Oriente foram encontrados escritos de matemáticos chineses, do século I, referentes à importância das probabilidades na condução da vida.

Durante a Idade Média, a Igreja Católica lançou uma campanha proibindo o jogo de dados e de cartas, em grande parte, devido ao vício da bebida e à linguagem menos erudita que acompanhavam os mesmos. Na maioria das situações, por exemplo, durante a Terceira Cruzada (1190), apenas os cavaleiros e o clero podiam jogar mas na condição de não perderem mais de *vinte xelins* por dia. Talvez, devido a esta e outras razões não se tenha dado, durante este período, o verdadeiro aparecimento da

[1] Para simplificar a linguagem usar-se-á a palavra axiomática para referir o sistema de axiomas de Kolmogorov. Deixam-se, no entanto, para o capítulo 4 considerações gerais sobre a pretenda axiomática apresentada.

Teoria das Probabilidades. Na realidade só no século XVI se assiste a um desenvolvimento concreto desta teoria. Cardano (1501-1576), considerado por muitos como um dos verdadeiros cientistas do Renascimento, escreveu alguns textos onde analisa e descreve os jogos de azar, ensina a jogar e a detectar batoteiros. Em *De ludo alea*, publicado tardiamente já após a sua morte, tece algumas considerações sobre o cálculo da probabilidade de ganhar um determinado jogo, embora o faça, por vezes, de uma forma incorrecta. Também Galileu (1554-1642) se debruçou sobre esta temática, nomeadamente ao tentar dar resposta a uma questão que muito intrigava os jogadores da época *Quando se lançam três dados, o total de 10 pontos ocorre mais vezes que um total de 9 pontos. No entanto estes dois resultados teriam seis combinações diferentes para aparecer.* Galileu mostrou que este facto se devia ao esquecimento da ordem das parcelas, uma vez que enquanto a soma 10 teria 27 possibilidades de ser obtida; a soma 9 só teria 25 possibilidades. O que ainda hoje intriga alguns entusiastas da História da Matemática é o facto dos jogadores terem detectado tão pequena diferença. Galileu é considerado o primeiro matemático a utilizar a noção de equiprobabilidade de acontecimentos.

A verdadeira origem da Teoria das Probabilidades surge no século XVII e deve-se à correspondência trocada entre Pascal (1623-1662) e Fermat (1601-1665). Essa correspondência relata e tenta dar resposta às questões colocadas a Pascal por Antoine Gambaude, conhecido como Chevalier De Méré (1607-1684) (ou Cavaleiro De Méré). O Cavaleiro De Méré era um grande adepto do jogo assim como um filósofo e homem das letras da corte de Luís XIV. O principal problema colocado a Pascal e a Fermat pelo Cavaleiro De Méré assentava em interrupções de apostas antes de se completar um jogo. Alguns autores atribuem também a De Méré o problema atrás descrito e respondido por Galileu. Desta época há também a realçar os contributos de Huygens (1629-1695) a quem se deve o primeiro livro sobre Cálculo de Probabilidades, com o título *De Ratiocinis in Ludo Álea*, cuja tradução poderá ser *Racionalização do Jogo dos Dados.* Nessa obra Huygens, apresenta de uma forma clara, a noção de valor médio levando muitos autores a acreditarem que Huygens teve certamente acesso à correspondência trocada entre Fermat e Pascal dada a forma como trata os conceitos. A sua obra é considerada, por muitos como, uma das mais influentes no desenvolvimento da Teoria da Probabilidades. Na realidade, a seguir a Teoria das Probabilidades teve um desenvolvimento acelerado onde muito contribuíram Leibniz (1649-1716), que aplica a Teoria das Probabilidades ao Cálculo Financeiro; Jacques Bernoulli [2] (1654-1705) com a demonstração da Lei Fraca dos Grandes Números, sendo o primeiro matemático a distinguir probabilidades objectivas, ou *a priori* e probabilidades subjectivistas, ou *a posterior*; De Moivre (1667-1754), a quem se deve, embora num caso mais simples, o aparecimento da "Lei Normal"e o primeiro Teorema do Limite Central; e o reverendo Thomas Bayes (1702-1761), o probabilístico mais notável antes do aparecimento de Laplace, especialmente com os seus trabalhos em probabilidade inversa. Mais tarde aparecem Laplace (1749-1827) e Gauss (1777-1855) responsáveis pelo aparecimento da conhecida Lei de Laplace e do não menos importante Teorema do Limite Central. Poisson (1781-1840) demonstrou uma forma mais geral da Lei dos Grandes Números

[2] Existe uma curiosidade em torno do primeiro nome de Bernoulli que difere podendo ser ou Jacques ou James ou Jacob.

e introduziu uma "Lei de repartição "que ainda hoje é conhecida pelo nome de Lei de Poisson.

A Teoria das Probabilidades teve um impulso significativo durante os séculos XIX e XX, nomeadamente com as contribuições, na Teoria da Medida, por Lesbegue (1902) e com axiomatização da teoria, por Kolmogorov (1933).

Muitas foram as escolas que contribuíram para o desenvolvimento axiomático da Teoria das Probabilidades, mas foram as escolas europeias que mais se destacaram neste campo. A escola Francesa principalmente com as contribuições de Henri Lebesgue (1875-1941) no estudo de conjuntos de funções aditivas e no estudo de uma medida que trata matematicamente e de uma forma bastante satisfatória os conceitos de comprimento, área e volume, bastante úteis em alguns conceitos de Probabilidade. Com as contribuições de Maurice Fréchet (1878-1973) com o aprofundamento dos estudos de Lebesgue em espaços métricos, com os trabalhos de C. Carathéodory (1873-1950) numa qualquer topologia e no Teorema da Extensão de Medidas, ao qual deu o seu próprio nome, e com os estudos de Emile Borel (1871-1956), pupilo de Lesbegue e que foi um dos fundadores da Teoria da Medida, a quem se deve uma das mais famosas σ-álgebras e dois importantes teoremas, os Teoremas de Borel-Cantelli. Outro francês cujas contribuições para o desenvolvimento da Teoria das Probabilidades são de realçar é Paul Lévy (1886-1971) com o aparecimento dos Processos Estocásticos. Aliás são notórias as diferenças entre Borel e Lévy e evidenciam duas formas distintas de encarar esta teoria. A propósito de tal diferença Lévy refere na sua autobiografia:

> *"(Lévy) felt that probability had to be based on rigorous analysis, while Borel felt that it should be studied from the point of view of applications. Thus, Borel may actually have delayed the acknowledgement of probability as a proper mathematical discipline".*

Uma outra escola em destaque foi a escola Polaca, nomeadamente no espaço de tempo delimitado pelas duas grandes guerras mundiais. São de destacar os trabalhos de Hugo Steinhaus (1887-1972) que em 1923 tentou axiomatizar a Teoria das Probabilidades, Jozef Marcinkiewicz (1910-1940) e Antoni Zygmund (1900-1992) responsáveis pela desigualdade de Marcinkiewicz-Zygmund e pela lei de Marcinkiewicz-Zygmund para o Logaritmo Iterado. Um dos detalhes bastante estudados pela escola Polaca centra-se na independência de funções como ponte entre a Teoria das Probabilidades e a Análise. Kuratwoski e Stefan Bannach (1892-1945) foram dois matemáticos polacos considerados como fundadores da moderna Análise Funcional.

A escola Russa também teve um papel de destaque, nomeadamente na aplicação com sucesso da Teoria da Medida à Teoria das Probabilidades. Os trabalhos de Sergei Bernstein (1880-1968), em Probabilidades e em Análise e as aplicações que fez à Lei dos Grandes Números, são disso exemplo, assim como as maiores descobertas de Alexander Khinchin (1894-1956), que se prendem com a Lei do Logaritmo Iterado, a Lei dos Grandes Números e o Teorema do Limite Central, o trio de teoremas clássicos de limites na Teoria das Probabilidades. Outro resultado importante devido a Khinchin é a forma definitiva da Lei Fraca dos Grandes Números. Mas, sem dúvida alguma, o matemático russo de maior destaque na área da Teoria das Probabilidades é Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987). Em 1933, Kolmogorov editou o seu clássico

Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung dando assim início a uma nova era no estudo das Probabilidades, a denominada Era Moderna. Kolmogorov colocou a Teoria das Probabilidades numa posição de rigor axiomático, servindo-se para isso de um ramo auxiliar: a Teoria da Medida.

Uma outra escola em evidência foi a escola Italiana com contribuições de Paolo Cantelli (1906-1985), nomeadamente com os dois Teoremas de Borel-Cantelli em 1917, depois com o Teorema de Glivenko-Cantelli em 1933 conhecido também como Teorema Fundamental da Estatística; e de Bruno Finetti (1906-1985) um dos matemáticos mais críticos de toda a Era Moderna. É de Finetti a célebre frase *A probabilidade não existe*.

Também a escola Germânica teve o seu contributo nomeadamente com Felix Hausdorff (1868-1942), com o estudo da Lei do Logaritmo Iterado e com a primeira prova rigorosa da Lei Forte dos Grandes Números; George Pólya (1887-1985) a quem se deve a designação *Teorema do Limite Central* e Richard von Mises (1833-1953) que tentou construir uma teoria baseada em sucessões aleatórias em contraste com a teoria de Kolmogorov baseada na Teoria da Medida. Destaquem-se ainda os trabalhos da escola Americana com William Feller (1906-1970) e Norbert Wiener (1894-1964) e da escola Inglesa com os estudos de John Keynes (1883-1946), R. Fisher (1890-1962) e Harold Jeffreys (1891-1989).

3.2 Espaço dos possíveis

A axiomática da Teoria das Probabilidades, apesar de ser definida, hoje em dia, sobre um qualquer espaço não vazio, sob certas condições, foi motivada por situações de índole prático. A essas situações estão subjacentes noções importantes: as noções de experiência aleatória e de espaço dos possíveis. Estas noções são actualmente abordadas no ensino das Probabilidades no sistema de ensino não superior português e estão imensamente relacionadas com o conceito de *acaso*.

A complexidade do conceito de *acaso* pode ser deduzida da quantidade de palavras que surgem no dia a dia e que se relacionam ou se confundem com ele: sorte, azar, coincidência, acidente, contingência, indeterminação, destino, causa fortuita. É bastante nítido como o *acaso* assume com frequência, e cada vez mais, o centro de debates em áreas como Filosofia, Matemática, Física, Biologia, Desporto e outras. Mas, mesmo no interior de cada uma dessas disciplinas, está-se longe de poder observar um consenso sobre o significado desse termo.

Em síntese, todas as suas definições parecem ter em comum, algo que lhe pode definir a essência: é o facto de o *acaso* ser sempre denominado a partir da impossibilidade de localizar as determinações de um qualquer fenómeno. Daí, outros factores decorrem: a imprevisibilidade desse fenómeno, a falta de controle sobre ele, etc. Mas quando as várias disciplinas que abordam o *acaso*, ou ainda, quando o julgamento quotidiano afirma a impossibilidade de localização dessas determinações, pode-se estar perante aspectos distintos do processo fenomenológico: as causas do fenómeno são desconhecidas, as causas do fenómeno são desconexas ou o fenómeno não possui qualquer causa. A Teoria das Probabilidades, na sua génese, mais do que se debruçar sobre o conceito de *acaso* assume-o como algo de imprevisível e tenta trabalhar com o conceito de uma forma exterior, ou seja, tenta estabelecer relações sobre a possibilidade de ocorrência de algo a que habitualmente se associa o *acaso*.

Aquando da sua origem, a Teoria das Probabilidades requereu algumas considerações sobre noções ligadas ao *acaso*, nomeadamente, a noção de experiência aleatória. Esta noção e suas consequentes foram um forte contributo para o aparecimento de uma Axiomática para as Probabilidades.

Definição 3.2.1 (Experiência)

Uma experiência é um procedimento que permite a obtenção de observações. É denominada de aleatória se for impossível prever o seu resultado sem a ocorrência da mesma.

É usual referir-se aos resultados das experiências aleatórias como fruto do acaso, embora, sejam conhecidos todos os resultados possíveis de ocorrer.

A noção de experiência[3] tem, no contexto da Teoria das Probabilidades, um significado que ultrapassa o que lhe é atribuído nas consideradas ciências experimentais. De facto, esta noção deve ser entendida como um conjunto de procedimentos ou de circunstâncias que conduzam a resultados observáveis.

O termo aleatório significa *de resultado incerto* e tem origem no vocábulo latino *alea* usado para designar os dados utilizados em jogos de azar. O antónimo de aleatório é determinista. A designação experiência determinista é utilizada para definir experiências onde o resultado é completamente conhecido antes da realização da experiência.

Convém, no entanto, ter em conta que para uma dada experiência ser considerada como *aleatória*, esta terá de apresentar as seguintes características:

- Poder repetir-se indefinidamente nas mesmas condições, ou pelo menos em condições tão similares que, dentro dos limites de precisão experimental, não possam ser responsáveis pela alteração dos resultados.

- Não ser possível, partindo da definição de procedimento experimental, fazer uma antevisão fiável do resultado a obter.

- Possuir resultados individuais imprevisíveis mas, quando tomados no seu conjunto, mostrarem uma clara regularidade estatística.

[3]No Dicionário da Língua Portuguesa, da Porto Editora, 7ª edição, de J. Almeida Costa e A. Sampaio e Melo, editado em Maio de 1994, pode ler-se como significado de experiência: *acto ou efeito de experimentar, quer esta palavra se entenda como conhecimento imediato de uma realidade dada (observação), quer como conhecimento de uma realidade provocada, no propósito de saber algo, particularmente o valor de uma hipótese científica (experimentação); observação; prova; ensaio; tentativa; conhecimento obtido pela prática; conjunto de modificações vantajosas trazidas pelo exercício às nossas faculdades, das aquisições que faz o nosso espírito pela observação e comprovação de factos, em geral, de todos os progressos mentais proporcionados pela vida.*E em experimentar: *verificar por meio de experiência, pôr à prova; tentar; analisar; ensaiar; dar conta de; provar; sentir.*

Saliente-se que a noção de experiência aleatória é um paradigma uma vez que realizada exactamente sob as mesmas condições, o resultado obtido será necessariamente o mesmo, deixando assim de ser imprevisível. Todavia, são muitas as variáveis que influenciam a realização de uma dada experiência e, apesar de toda a tecnologia já disponível, é impossível controlá-las, o que torna plausível afirmar-se que tais experiências são de resultado imprevisto.

Pense-se, por exemplo, na experiência que consiste em lançar ao ar uma moeda equilibrada e observar a face voltada para cima quando esta cai no solo. O resultado obtido será, ou escudo ou cara, porém este resultado dependerá da intensidade da força exercida sobre a moeda, do ângulo de inclinação da moeda aquando do lançamento, do espaço físico onde se está a realizar a experiência, de uma possível intensidade do vento, entre outras. Algumas destas variáveis são de difícil ou até impossível controlo, o que leva a assumir esta experiência como aleatória. Veja-se um outro exemplo cuja experiência consiste em largar um corpo de uma determinada altitude e observar o tempo que este demora a atingir o solo. Novamente existem certas perturbações inerentes à própria experiência, como no exemplo atrás exposto, que fazem variar o resultado. Neste caso, há muitos anos atrás, Galileu tomou como deterministas os valores médios dos tempos obtidos, deixando de assumir o tempo que um objecto demora a cair de uma determinada altura como algo de aleatório, aquilo que hoje assumimos sem interrogações.

Note-se que, em caso extremo, a noção de experiência aleatória não passaria de uma utopia, uma vez que se for levada a discussão para um campo meramente físico (ou mecânico) pode-se sempre pensar numa possibilidade, embora remota, de controlar tais variáveis, basta para isso reflectir um pouco sobre a evolução da ciência e dos problemas que esta tem solucionado. A célebre frase de A. Einstein em que este diz *Deus não joga aos dados com o Universo* ilustra bem esta problemática.

Muitos autores referem que será este um mal necessário, no entanto, baseiam-se na regularidade estatística para justificar a validade desta noção. De um modo geral existem padrões mais *prováveis* que outros, como se houvesse um padrão dominante afectado por influências aleatórias. Um dos autores que escreveu sobre o assunto foi Abraham Moivre (1667-1754), no prefácio do seu *Doctrine of Chances*, de 1718, onde se pode ler:

> *"Further, the same arguments which explode the notion of luck may, on the other side, be useful in some cases to establish a due comparison between chance and design: We may imagine chance and design to be as if it were in competition with each other, for the production of some sorts events, and may calculate what Probability there is, that those events should be rather owing to one to the other".*

Definição 3.2.2 (Espaço dos possíveis)

Dada uma experiência aleatória, denomina-se por universo, espaço dos possíveis, espaço fundamental ou espaço dos resultados, e usualmente denotado pela letra Ω, *o conjunto formado por todos os resultados possíveis à realização da experiência aleatória.*

Para este conceito, os exemplos mais trabalhados, no Ensino, estão associados a experiências aleatórias do lançamento de um dado cúbico com as faces numeradas de 1 a 6 e o registo do número da face voltada para cima ($\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) e lançamento ao ar de uma moeda equilibrada e posterior observação da face que fica voltada para cima ($\Omega = \{C, E\}$, denominando por C a obtenção de cara e por E a obtenção de escudo).

Usualmente, alguns dos conceitos probabilísticos leccionados no actual sistema de Ensino Básico (9º ano de escolaridade) e Secundário (12º ano de escolaridade) recaem sobre a totalidade dos subconjuntos de Ω, denominado por $\mathcal{P}(\Omega)$, no entanto, em muitas situações, utilizar a totalidade desses subconjuntos para estudo de determinada probabilidade de ocorrência de um acontecimento é uma perda inútil de tempo e em muitos casos muito difícil de manusear.

Por exemplo, no lançamento de um dado cúbico, se se considerarem apenas como possibilidades aceitáveis à realização de um determinado jogo, apostas em "obter número par"ou "obter número ímpar", apenas teria interesse considerar os acontecimentos $\{\}$; $\{1, 3, 5\}$; $\{2, 4, 6\}$ e $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Seria portanto desnecessário fazer recair o estudo sobre a totalidade de $\mathcal{P}(\Omega)$, poder-se-ia fazer recair o estudo sobre aquilo que denomina como álgebra de acontecimentos.

Observe-se, também que, neste caso concreto, o conjunto formado pelos acontecimentos desta experiência é equivalente [4] ao conjunto de todos os possíveis acontecimentos associados ao lançamento ao ar de uma moeda equilibrada, em que $\mathcal{P}(\Omega) = \{\{\}; \{C\}; \{E\}; \{C, E\}\}$. Foram exemplos como este que motivaram o aparecimento de uma Axiomática para as Probabilidades e que tornaram assim a disciplina de Probabilidades como um ramo mais credível da Matemática deixando de parte o seu descrédito fundado, em parte, na incapacidade humana de trabalhar sustentavelmente sobre conceitos que envolvem o acaso.

3.3 Álgebras - um primeiro passo

Esta secção tem como objectivo construir uma primeira noção necessária para definir espaço de probabilidade. Álgebra pretende-se que seja uma estrutura que mantenha as propriedades básicas de conjuntos já existentes em $\mathcal{P}(\Omega)$, nomeadamente o facto de ser fechado para a união, intersecção e complementaridade, e que seja o domínio de uma determinada função $\mathbb{P}$ com propriedades específicas.

Definição 3.3.1 (Álgebra, Espaço probabilizável, Acontecimento)

Seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de um conjunto não vazio Ω. $\mathcal{F}$ denomina-se por álgebra sobre Ω [5] *se:*

[4] Pode-se facilmente definir uma bijecção entre estes dois conjuntos. Por outras palavras, os conjuntos serão o mesmo, diferindo apenas no aspecto dos seus elementos.

[5] Utiliza-se simplesmente a denominação de *álgebra* quando não houver ambiguidade sobre o espaço que se está a considerar.

1. *$\Omega \in \mathcal{F}$;*

2. *Se $A \in \mathcal{F}$ então $\Omega \backslash A \in \mathcal{F}$;*

3. *Se $A, B \in \mathcal{F}$ então $A \cup B \in \mathcal{F}$.*

Ao par $(\Omega, \mathcal{F})$ chama-se espaço probabilizável ou mensurável. Os elementos de uma álgebra são denominados por acontecimentos.

Exemplo 3.3.1 (Alguns exemplos de álgebras)

1. *Seja Ω um conjunto não vazio. Então*

   (a) *$\{\emptyset, \Omega\}$ é uma álgebra sobre Ω, sendo denominada, por muitos autores, de álgebra pobre.*

   (b) *$\mathcal{P}(\Omega)$ é uma álgebra sobre Ω. Aliás é a maior álgebra sobre Ω, no sentido da inclusão; sendo habitualmente denominada por como álgebra rica, ou ainda, no âmbito da Teoria das Probabilidades por espaço dos acontecimentos.*

   (c) *se $A \subseteq \Omega$, então $\{\emptyset, \Omega, A, \Omega \backslash A\}$ é uma álgebra sobre Ω;*

   (d) *se $\Omega = \{a, b, c, d\}$ então $\{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}\}$ é uma álgebra sobre Ω;*

2. *Dado $n \in \mathbb{N}$, a família de subconjuntos do intervalo real aberto $(0,1)$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, (0,1), (0, \frac{1}{n+1}), [\frac{1}{n+1}, 1)\}$ é uma álgebra sobre $(0,1)$;*

3. *A família de subconjuntos do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, que ou são finitos ou têm complementar finito, é uma álgebra sobre $\mathbb{N}$.*

Em síntese, álgebra é uma estrutura que partilha com o espaço dos acontecimentos, $\mathcal{P}(\Omega)$, também ele uma álgebra, a característica de ser fechado para as operações usuais entre conjuntos, mas mais manipulável do que $\mathcal{P}(\Omega)$.

Apesar da definição de álgebra exigir apenas três condições são muitas as propriedades que dela se podem deduzir.

Teorema 3.3.1 (Propriedades elementares sobre álgebras)

Seja Ω um conjunto não vazio e $\mathcal{F}$ uma álgebra sobre Ω. Então

1. *$\emptyset \in \mathcal{F}$;*

2. Dado $n \in \mathbb{N}$, se $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ então $\bigcap_{i=1}^{n} A_i, \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$;

3. Se $A, B \in \Omega$ então $A \backslash B \in \mathcal{F}$;

4. Se $A, B \in \Omega$ então a diferença simétrica [6] $A \triangle B \in \mathcal{F}$.

São numerosas as questões que se levantam aquando do estudo deste item. Pretende-se aqui enumerar algumas dessas questões, justificá-las quando estas tiverem uma resposta positiva e apresentar contra-exemplos quando a resposta for negativa.

Questão 3.3.1

Seja Ω um conjunto não vazio e $\mathcal{F}$ o conjunto formado por todos os subconjuntos finitos de Ω. Será $\mathcal{F}$ assim definida uma álgebra sobre Ω?

Resposta:
Se Ω for um conjunto infinito, então $\Omega \notin \mathcal{F}$ e portanto $\mathcal{F}$ não é uma álgebra. ■

Questão 3.3.2

Seja $I_0 = \emptyset$ e $I_n = \{1, \cdots, n\}$ para $n \geq 1$. Seja $\mathcal{F}$ o conjunto formado por todos os conjuntos contendo os n primeiros números naturais, com $n \in \mathbb{N}$, pelos seus complementares e pelo conjunto vazio, ou seja, $\mathcal{F} = \{I_n : n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\mathbb{N} \setminus I_n : n \in \mathbb{N}_0\}$. Será $\mathcal{F}$ assim definida uma álgebra sobre $\mathbb{N}$?

Resposta:
Esta família $\mathcal{F}$ não é fechada para a união. Por exemplo, $I_1, \mathbb{N} \setminus I_2 \in \mathcal{F}$ no entanto $I_1 \cup (\mathbb{N} \setminus I_2) = \mathbb{N} \setminus \{2\}$ não é elemento de $\mathcal{F}$.■

Questão 3.3.3

Será que se $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ forem duas álgebras sobre um mesmo conjunto não vazio Ω, também $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ o será?

Resposta:
A resposta é afirmativa. De facto, a intersecção de álgebras é ainda uma álgebra. Por definição, $\Omega \in \mathcal{F}_1$ e $\Omega \in \mathcal{F}_2$; deste modo $\Omega \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. Se $A \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ então $A \in \mathcal{F}_1$ e $A \in \mathcal{F}_2$. Como $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são álgebras então também $\Omega \backslash A \in \mathcal{F}_1$ e $\Omega \backslash A \in \mathcal{F}_2$ e portanto $\Omega \backslash A \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. De igual modo, se $A, B \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, então $A, B \in \mathcal{F}_1$ e $A, B \in \mathcal{F}_2$ e portanto $A \cup B \in \mathcal{F}_1$ e $A \cup B \in \mathcal{F}_2$; logo $A \cup B \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. Ficam então assim satisfeitos os ponto 1, 2 e 3 da

[6] Entende-se por diferença simétrica o conjunto $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ e denota-se por $A \triangle B$.

definição 3.3.1. ■

Generalizando, a intersecção de um qualquer número finito de álgebras sobre o mesmo conjunto não vazio é ainda uma álgebra sobre esse conjunto.

Questão 3.3.4

Será que o mesmo sucede para a união finita de álgebras sobre um mesmo conjunto não vazio?

Resposta:

Neste caso a resposta é negativa. Veja-se o seguinte contra-exemplo:

Seja $\Omega = \{a, b, c\}$ e sejam $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b, c\}\}$ e $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{b\}, \{a, c\}\}$ duas álgebras sobre Ω. É óbvio que $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$ que não é uma álgebra, uma vez que, por exemplo, $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$ não está em $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$, apesar de $\{a\} \in \mathcal{F}_1$ e $\{b\} \in \mathcal{F}_2$.

Deste modo fica demonstrado que a união de álgebras sobre um mesmo conjunto não vazio não é necessariamente uma álgebra sobre esse mesmo conjunto. ■

Questão 3.3.5

Considere-se um conjunto não necessariamente finito, Ω, e seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de Ω que contém todos os subconjuntos finitos de Ω e todos os subconjuntos de Ω cujo complementar é finito. $\mathcal{F}$ assim definida será uma álgebra sobre Ω?

Resposta:

Dado que $\emptyset$ é um conjunto finito então o seu complementar é um elemento de $\mathcal{F}$, isto é, $\Omega \in \mathcal{F}$.

Se $A \in \mathcal{F}$ então ou A é um conjunto finito ou $\Omega \backslash A$ é um conjunto finito. Em ambos os casos $\Omega \backslash A \in \mathcal{F}$. Sejam $A, B \in \mathcal{F}$. Se A e B forem finitos então $A \cup B$ é finito e consequentemente $A \cup B \in \mathcal{F}$. Suponha-se que pelo menos um dos conjuntos, por exemplo, A (sem perda de generalidade) não é finito então, por definição de $\mathcal{F}$, $\Omega \backslash A$ é finito. Deste modo, o complementar de $A \cup B$ é finito, uma vez que $\Omega \backslash (A \cup B) \subseteq \Omega \backslash A$. Logo $A \cup B \in \mathcal{F}$. Consequentemente $\mathcal{F}$ é uma álgebra sobre Ω. ■

Apresentam-se agora algumas propriedades de álgebras sobre $\mathbb{Z}$, estas para além de algumas propriedades interessantes têm o benefício de serem de fácil visualização. Uma das famílias de subconjuntos do conjunto dos números inteiros relativos é a família dos conjuntos periódicos. Essa família é uma álgebra sobre $\mathbb{Z}$ e uma das suas principais propriedades é o facto de não admitir elementos (não vazios) que contenham outros elementos da mesma família, isto é, não admitir *átomos*.

Definição 3.3.2 (Conjunto periódico)

Diz-se que $A \subseteq \mathbb{Z}$ *é um conjunto periódico se existir um número natural* n *e um conjunto* $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ *tal que:*

$$A = \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} (I + jn) \tag{3.1}$$

onde $I + jn = \{i + jn : i \in I\}$*. Ao valor de* n *é usual chamar-se período de* A*.*

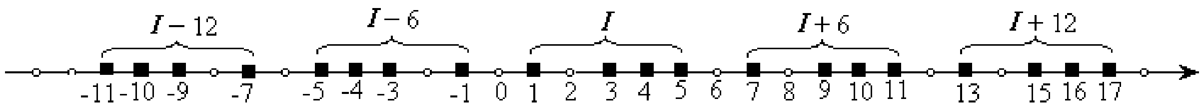

Figura 3.1: Esquema que ilustra como obter um conjunto periódico de período 6, sendo $I = \{1, 3, 4, 5\}$

Exemplo 3.3.2 (Álgebra de conjuntos periódicos)

O conjunto $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{Z} : A$ *é um conjunto periódico*$\}$ *é uma álgebra sobre* $\mathbb{Z}$*.*

Tanto $\emptyset$ como $\mathbb{Z}$ são conjuntos periódicos. De facto, considerando $I = \emptyset$ e tomando qualquer $n \in \mathbb{N}$ tem-se $\emptyset = \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} (I + jn)$ e portanto $\emptyset$ é um conjunto periódico. Para mostrar que $\mathbb{Z}$ é um conjunto periódico basta tomar $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ para um qualquer $n \in \mathbb{N}$; deste modo $\mathbb{Z} = \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} (I + jn)$.

Seja $A \in \mathcal{F}$, então por (3.1), $A = \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} (I + jn)$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e para algum $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$.

Tomando o mesmo inteiro n e fazendo $\tilde{I} = \{1, 2, \ldots, n\} \backslash I$ tem-se que $\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} (\tilde{I} + jn)$ contém todos os números inteiros que não estão em $\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} (I + jn)$, logo $\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} (\tilde{I} + jn) = \mathbb{Z} \backslash A$, donde, $\mathbb{Z} \backslash A \in \mathcal{F}$.

Finalmente sejam A e B dois conjuntos periódicos. Assim sendo, pela definição 3.3.2, existem $n, m \in \mathbb{N}$ e $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ e $L \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ tais que:

$$A = \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} (I + jn) \quad \text{e} \quad B = \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} (L + jm).$$

Tomando $k = m{\cdot}n$ e $K = \left(\bigcup_{j=0}^{m-1} (I + jn)\right) \cup \left(\bigcup_{j=0}^{n-1} (L + jm)\right)$, tem-se que $K \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$ e consegue-se provar que $A \cup B = \bigcup_{t=-\infty}^{+\infty} (K + tk)$, o que significa que $A \cup B$ é um conjunto periódico.

De facto, mostre-se primeiro que $A \cup B \supseteq \bigcup_{t=-\infty}^{+\infty} (K + tk)$. Para isso basta mostrar que todo o conjunto do tipo $K + tk$, para qualquer $t \in \mathbb{Z}$, está contido em $A \cup B$. Existem duas situações possíveis: ou K é da forma $I + jn$, com $0 \leq j \leq m - 1$; ou K é da forma $L + jm$, com $0 \leq j \leq n - 1$. Assim, qualquer elemento do conjunto $K + tk$ seria da forma

$i + jn + tk = i + jn + tnm = i + n(\underbrace{j + tm}_{\in \mathbb{Z}}) \in A$ ou $l + jm + tk = l + jm + tnm = l + m(\underbrace{j + tn}_{\in \mathbb{Z}}) \in B$, onde $I \in I$ e $l \in L$.

Consequentemente, $A \cup B \supseteq \bigcup_{t=-\infty}^{+\infty} (K + tk)$.

Mostre-se agora que $A \cup B \subseteq \bigcup_{t=-\infty}^{+\infty} (K + tk)$. Pretende-se mostrar que os subconjuntos do tipo $I + jn$ de A e $L + jm$ de B, para qualquer $j \in \mathbb{Z}$, estão contidos em $\bigcup_{t=-\infty}^{+\infty} (K + tk)$.

Prove-se a inclusão de $I + jn$ para todo $j \in \mathbb{Z}$.

Se $0 \leq j \leq m - 1$ então $I + jn \subseteq K$ e portanto $I + jn \subseteq \bigcup_{t=-\infty}^{+\infty} (K + tk)$. Se $j > m - 1$ ou $j < 0$, então $j = tm + x$, para algum $t \in \mathbb{Z}$ e $x : 0 \leq x \leq m - 1$, donde $I + jn = \underbrace{I + xn}_{\subseteq K} + t\underbrace{mn}_{=k} \subseteq K + tk \subseteq \bigcup_{t=-\infty}^{+\infty} (K + tk)$.

Consequentemente, pode-se concluir que $A \subseteq \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} (K + jk)$. Por raciocínios análogos se mostraria que $B \subseteq \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} (K + jk)$.

Deste modo estão satisfeitas as três condições da definição 3.3.1 e portanto $\mathcal{F}$ é uma álgebra sobre $\mathbb{Z}$. ∎

Definição 3.3.3 (Átomo)

Seja $\mathcal{F}$ uma álgebra. Todo o elemento não vazio de $\mathcal{F}$ que não contenha um outro elemento de $\mathcal{F}$ é designado de átomo ou célula.

Exemplo 3.3.3 (Átomo)

Considerem-se as seguintes álgebras:

$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$, *sobre* $\Omega = \{1,2,3,4\}$;

$\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, (0,1), (0, \frac{2}{3}), [\frac{2}{3}, 1)\}$, *sobre* $\Omega = (0,1)$.

Os únicos átomos de $\mathcal{F}_1$ *são* $\{1\}, \{2\}$ *e* $\{3,4\}$. *Todos os restantes elementos de* $\mathcal{F}_1$ *contêm pelo menos um destes conjuntos. Os átomos de* $\mathcal{F}_2$ *são* $(0, \frac{2}{3})$ *e* $[\frac{2}{3}, 1)$.

Obviamente que os átomos de uma álgebra que contém todos os subconjuntos de um dado conjunto finito Ω, não vazio, são os conjuntos da álgebra com um só elemento de Ω, ou seja, os conjuntos singulares. Por outro, lado qualquer álgebra que contenha conjuntos singulares estes serão necessariamente átomos, porém nem todo o átomo é um conjunto singular como se pode observar no exemplo 3.3.3.

Teorema 3.3.2

Dois átomos distintos de uma mesma álgebra são necessariamente disjuntos.

Demonstração:
Sejam A, B, dois átomos distintos de uma mesma álgebra $\mathcal{F}$; logo também $A \cap B \in \mathcal{F}$. Mas $A \cap B \subseteq A$ e $A \cap B \subseteq B$, pelo que atendendo a que A e B são átomos, necessariamente ou $A \cap B = A$ ou $A \cap B = B$ ou $A \cap B = \emptyset$. Mas se $A \cap B = A$ significa que A está contido em B, o que é impossível. Se $A \cap B = B$ significa que B está contido em A, o que é impossível. Consequentemente, $A \cap B = \emptyset$. ∎

No exemplo 3.3.3 pode observar-se que todo o conjunto não vazio de uma álgebra finita contém um átomo, e em alguns casos mais do que um átomo.

Teorema 3.3.3

Todo o conjunto não vazio de uma álgebra finita contém pelo menos um átomo.

Demonstração:
Seja A é um conjunto não vazio de uma álgebra finita $\mathcal{F}$ e escolha-se $x \in A$ qualquer. Como $\mathcal{F}$ é uma álgebra finita, existe um número finito de elementos de $\mathcal{F}$, a saber $X_1, X_2, \ldots, X_n$, que contêm x. Faça-se $X = \bigcap_{i=1}^{n} X_i$; pelo Teorema 3.3.1 tem-se que $X \in \mathcal{F}$. Como $x \in A$ então $A = X_i$ para algum $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e portanto $X \subseteq A$. Se existisse $C \in \mathcal{F}$ tal que $x \in C$ e $C \subseteq X$ ter-se-ia $C = X$, já que X é o menor conjunto (*em termos de inclusão*) satisfazendo tais propriedades. Deste modo X é um átomo e $X \subseteq A$. ∎

Teorema 3.3.4

Qualquer elemento (não vazio) de uma álgebra finita pode ser representado, de uma forma única, por uma união finita de átomos, dessa álgebra.

Demonstração:

Seja $\mathcal{F}$ uma álgebra finita e $A_1, A_2, \ldots, A_k$, $k \in \mathbb{N}$ os átomos de $\mathcal{F}$ contidos em $A \in \mathcal{F}$ (não vazio). Note-se que o Teorema 3.3.3 garante a existência de pelo menos um átomo contido num dado subconjunto, A, de $\mathcal{F}$. Claramente se tem $\bigcup_{i=1}^{k} A_i \subseteq A$. Por outro lado, mostra-se que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} A_i$, por redução ao absurdo.

De facto, suponha-se que $A \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{k} A_i$. Assim, $A \backslash \bigcup_{i=1}^{k} A_i \neq \emptyset$ sendo $A \backslash \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ um elemento $\mathcal{F}$. Pelo Teorema 3.3.3, $A \backslash \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ conterá um átomo. Deste modo, $A \backslash \bigcup_{i=1}^{k} A_i$, que está contido em A, não conterá nenhum dos átomos A_i, $\; i = 1, \ldots, k$, o que é absurdo. Consequentemente, $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$, isto é, A pode ser representado pela união de todos os átomos de $\mathcal{F}$ que contêm A.

Mostre-se agora, por redução ao absurdo, a unicidade desta representação.

Seja $\{B_1, \ldots, B_t\}$ um outro conjunto de átomos de $\mathcal{F}$, distinto do conjunto $\{A_1, \cdots, A_k\}$ (não necessariamente contidos em A), tal que $A = \bigcup_{i=1}^{t} B_i$. Como esses dois conjuntos de átomos de $\mathcal{F}$ são distintos então, necessariamente, existe pelo menos um átomo contido num desses conjuntos que não está contido no outro conjunto. Suponha-se, sem perda de generalidade, que A_1 é esse átomo; portanto $A_1 \notin \{B_1, \cdots, B_t\}$. Então, pelo Teorema 3.3.2 $A_1 \cap B_i = \emptyset, \forall i = 1, 2, \cdots, t$ e portanto $A_1 \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{t} B_i$; consequentemente, $\bigcup_{i=1}^{k} A_i \neq \bigcup_{i=1}^{t} B_i$, ou seja, $A \neq A$, o que é um absurdo, donde resulta a unicidade pretendida.$\blacksquare$

Os resultados atrás enunciados contribuem para determinar a cardinalidade de toda a álgebra finita.

Teorema 3.3.5

Uma álgebra finita com n átomos distintos contém 2^n elementos.

Demonstração:

Seja $\mathcal{F}$ uma álgebra finita e seja $\mathcal{A}$ o conjunto de todos os átomos de $\mathcal{F}$. Para mostrar que, se $\mathcal{A}$ contiver n elementos então $\mathcal{F}$ tem o mesmo número de elementos que $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, provar-se-á que existe um isomorfismo $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Na realidade, a aplicação φ pode ser definida fazendo corresponder a cada elemento não vazio de $\mathcal{F}$ a sua representação única como união de átomos, isto é, $\varphi(A) = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$, $\forall A \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ e $\{A_1, \cdots, A_k\}$ o conjunto de átomos contidos em A; e $\varphi(\emptyset) = \emptyset$. O facto de φ ser um isomorfismo é garantido pelo Teorema 3.3.4. Fica assim demonstrado que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ têm o mesmo cardinal, ou seja, 2^n.$\blacksquare$

Teorema 3.3.6

A álgebra de conjuntos periódicos não admite átomos.

Demonstração:

Seja A um conjunto periódico não vazio, de período i, para algum natural i de forma que $A = \bigcup_{l=-\infty}^{+\infty} (I + li)$, com $I \subseteq \{1, \ldots, i\}$.

Considere-se, por exemplo, o conjunto $B = \bigcup_{l=-\infty}^{+\infty} (I + 2li)$. Uma vez que $A \neq \emptyset$, então também $I \neq \emptyset$, assim sendo, facilmente se observa que B é um conjunto periódico de período $2i$ e que $I \subseteq B$.

Dado que $I + li \subseteq A$, para todo $l \in \mathbb{Z}$, tem-se que $B \subseteq A$, contudo $(I + i) \cap B = \emptyset$, o que mostra que $B \neq A$. Assim sendo, A não é um átomo o que mostra que não existem átomos na álgebra de conjuntos periódicos.$\blacksquare$

3.4 Medidas de probabilidade em álgebras

O conceito de *medida* resulta como uma natural extensão das noções de comprimento, área, ou volume dos subconjuntos de espaços euclidianos de várias dimensões. É, no entanto, necessário ser preciso na definição desta extensão, no contexto da Teoria das Probabilidades. Como já havia sido referenciado aquando da introdução da noção de álgebra, definição 3.3.1, pretende-se que a medida de probabilidade seja uma função que a cada acontecimento faça corresponder um número real pertencente ao intervalo $[0, 1]$. A ideia básica por trás da definição de medida de probabilidade é a de *medir* um conjunto qualquer decompondo-o num número finito de subconjuntos, *medir* cada um desses subconjuntos e juntá-los para obter a *medida* do conjunto. Esta ideia vai ser expandida, na secção 3.6 deste capítulo, de um número finito para um número infinito numerável de subconjuntos.

Definição 3.4.1 (Medida de probabilidade finitamente aditiva)

Seja $\mathcal{F}$ uma álgebra sobre Ω. Uma função $\mathbb{P} : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$, denomina-se por medida de probabilidade finitamente aditiva se:

a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

b) *para todo $A, B \in \mathcal{F}$, tal que $A \cap B = \emptyset$, se tem $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ - aditividade.*

É usual designar por $\mathbb{P}(A)$ a probabilidade do acontecimento A. O terno $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é usualmente designado por espaço de probabilidade ou modelo probabilístico, porém existem autores que utilizam esta designação somente no sentido mais abrangente e para outro tipo de famílias de conjuntos e de medidas de probabilidade.

Exemplo 3.4.1 (Exemplos de medidas de probabilidade finitamente aditivas) *As seguintes funções $\mathbb{P}$ são medidas de probabilidade finitamente aditiva de uma álgebra $\mathcal{F}$ sobre $\Omega \neq \emptyset$ em $[0,1]$. Apresenta-se a demonstração do último exemplo por ser o menos evidente.*

1. *A função $\mathbb{P}$ definida por:*

$$\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 0 & se \quad A \neq \Omega \\ 1 & se \quad A = \Omega \end{cases} ; \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

2. *Para Ω finito, a função definida por $\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$.* [7]

3. *Considere-se a álgebra $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ sobre $\Omega = \{a,b\}$, com $\mathbb{P}$ dada por:*
   $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$; $\mathbb{P}(\Omega) = 1$; $\mathbb{P}(\{a\}) = \dfrac{1}{3}$; $\mathbb{P}(\{b\}) = \dfrac{2}{3}$.

4. *Considere-se a álgebra $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{4\}, \{2,3\}, \{1,4\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ sobre $\Omega = \{1,2,3,4\}$, com $\mathbb{P}$ dada por:*
   $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$; $\mathbb{P}(\Omega) = 1$; $\mathbb{P}(\{1\}) = \dfrac{1}{8}$; $\mathbb{P}(\{4\}) = \dfrac{3}{8}$;
   $\mathbb{P}(\{2,3\}) = \dfrac{1}{2}$; $\mathbb{P}(\{1,4\}) = \dfrac{1}{2}$; $\mathbb{P}(\{1,2,3\}) = \dfrac{5}{8}$; $\mathbb{P}(\{2,3,4\}) = \dfrac{7}{8}$.

5. *Seja $\Omega = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ e $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. A função $\mathbb{P}$ dada por $\mathbb{P}(\{x_i\}) = p_i$ tal que $p_i \geq 0$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.* [8]

6. *Para a álgebra $\mathcal{F}$ dos conjuntos periódicos da definição 3.3.2. A função $\mathbb{P}$ de $\mathcal{F}$ em $[0,1]$ definida por $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\#I}{i}$, onde $A = \displaystyle\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} (I + ji)$ para algum $i \in \mathbb{N}$ e algum $I \subset \{1, \cdots, i\}$.*

   Demonstração:

   Mostre-se, em primeiro lugar, que $\mathbb{P}$ está bem definida, ou seja, $\mathbb{P}(A)$ é independente da escolha de i e de I que satisfaçam a igualdade (3.1). Suponha-se que $A \subseteq \mathbb{Z}$ pode ser representado por:

[7] Em determinadas condições, que mais tarde serão analisadas, esta medida representa o conhecido conceito de probabilidade segundo Laplace, ou conceito clássico de probabilidade.

[8] Caso $p_1 = p_2 = \cdots = p_n$ então $p_i = \frac{1}{n}, i = 1, 2, \cdots, n$. Esta medida de probabilidade é conhecida como medida uniforme e serve de base ao conceito clássico de probabilidade.

$$A=\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty}(I+ji) \text{ e } A=\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty}(N+jn)$$

onde $i,n\in\mathbb{N}$, $I\subset\{1,\cdots,i\}$ e $N\subset\{1,\cdots,n\}$. Faça-se $K=A\cap\{1,\cdots,in\}$ então também $K=\bigcup_{j=0}^{n-1}(I+ji)$ e $K=\bigcup_{j=0}^{i-1}(N+jn)$, donde $\#K=n(\#I)$ e $\#K=i(\#N)$, uma vez que os conjuntos $I,I+i,I+2i,\cdots,I+(n-1)i$ são dois a dois disjuntos assim como $N,N+n,J+2n,\cdots,N+(i-1)n$.

Deste modo, $\dfrac{\#I}{i}=\dfrac{n(\#I)}{ni}=\dfrac{\#K}{in}=\dfrac{i(\#N)}{in}=\dfrac{\#N}{n}$. Assim se prova que $\mathbb{P}$ está de facto bem definida.

Mostre-se agora que $\mathbb{P}$ é uma medida de probabilidade finitamente aditiva. Como $\Omega=\mathbb{Z}$ se pode escrever na forma $\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty}(\{1\}+1\cdot j)$ tem-se $\mathbb{P}(\Omega)=\dfrac{\#\{1\}}{1}=1$.

Sejam A,B dois conjuntos periódicos disjuntos tais que $A=\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty}(I+ji)$ e

$B=\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty}(N+jn)$, onde i e n são números naturais quaisquer, $I\subseteq\{1,\cdots,i\}$ e $N\subseteq\{1,\cdots,n\}$. Fazendo $M=\bigcup_{j=0}^{n-1}(I+ji)$ e $L=\bigcup_{j=0}^{i-1}(N+jn)$, pode escrever-se

$A=\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty}(M+jin)$ e $B=\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty}(L+jin)$ e consequentemente

$$A\cup B=\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty}(M\cup N+jin).$$

Como $M=A\cap\{1,\cdots,in\}$ e $L=B\cap\{1,\cdots,in\}$ e $A\cap B=\emptyset$ tem-se $M\cap L=\emptyset$. Deste modo,

$$\mathbb{P}(A\cup B)=\frac{\#(M\cup L)}{in}=\frac{\#M+\#L}{in}=\frac{n(\#I)+i(\#N)}{in}=\frac{\#I}{i}+\frac{\#N}{n}=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B).$$

Do exposto conclui-se que $\mathbb{P}$ dada é uma medida de probabilidade finitamente aditiva.$\blacksquare$

Em muitas situações o manuseamento de uniões e intersecções de acontecimentos são um pouco complicadas e bastante trabalhosas. Numa próxima secção apresenta-se uma ferramenta extremamente útil no cálculo de probabilidades envolvendo reuniões e intersecções finitas de acontecimentos: *os mintermos*. Antes porém salientam-se algumas propriedades básicas das medidas de probabilidade finitamente aditivas.

Teorema 3.4.1 (Propriedades)

Sejam Ω *um conjunto não vazio,* $\mathcal{F}$ *uma álgebra sobre* Ω, $\mathbb{P}$ *uma medida de probabilidade e* $A, B \in \mathcal{F}$*.Tem-se:*

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;

2. *Se* $A \subset B$ *então* $\mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$ *e* $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$;

3. $\mathbb{P}(\Omega \backslash A) = 1 - \mathbb{P}(A)$;

4. *Se* $A \cap B = \emptyset$ *então* $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$;

5. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$;

6. $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$; [9]

7. $\mathbb{P}(A \Delta B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$;

8. $\mid \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) \mid \leq \mathbb{P}(A \triangle B)$;

9. *Se* $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 0$ *então* $\mathbb{P}(A \cup B) = 0$;

10. *Se* $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1$ *então* $\mathbb{P}(A \cap B) = 1$.

3.5 σ-álgebras - o consolidar de uma teoria

Considerem-se agora famílias de conjuntos com requisitos semelhantes aos da definição de álgebra mas um pouco mais fortes, os quais permitam efectuar cálculos com probabilidades que envolvam a união infinita de acontecimentos.

Definição 3.5.1 (σ-álgebra)

Uma família $\mathcal{A}$ *de subconjuntos de um conjunto não vazio* Ω *diz-se ser uma* σ*-álgebra* [10] *sobre* Ω *se:*

1. $\Omega \in \mathcal{A}$;

2. *Se* $A \in \mathcal{A}$ *então* $\Omega \backslash A \in \mathcal{A}$;

[9] Esta propriedade é conhecida como sub-aditividade de $\mathbb{P}$.

[10] *Tribo* ou *field* são outras denominações atribuídas a σ-álgebra.

3. *Se* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ *então* $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Ao par $(\Omega, \mathcal{A})$ *chama-se espaço probabilizável ou espaço mensurável.*

Acontecimento é um qualquer elemento de uma σ-álgebra, aliás em conformidade com o significado dado a acontecimento em álgebras. Uma sucessão de acontecimentos é uma sucessão em que os termos da sucessão são elementos de uma dada σ-álgebra.

Observação 3.5.1

1. *Toda a* σ*-álgebra é também uma álgebra;*

2. *Toda a álgebra finita é também uma* σ*-álgebra;*

3. $\mathcal{P}(\Omega)$, *família de todos os subconjuntos de* Ω, *é uma* σ*-álgebra;*

4. *Seja* $\mathcal{A}$ *uma* σ*-álgebra sobre* $\Omega \neq \emptyset$ *então:*

   a) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

   b) *Todas as uniões e intersecções finitas de elementos de* $\mathcal{A}$ *são elementos de* $\mathcal{A}$;

   c) *A intersecção numerável de elementos de* $\mathcal{A}$ *é um elemento de* $\mathcal{A}$.

A reunião e intersecção infinita numerável de acontecimentos facilitam a representação de certos acontecimentos como, por exemplo, os que se apresentam a seguir:

Exemplo 3.5.1 (Uniões e intersecções infinitas numeráveis de acontecimentos) *Considere-se a experiência aleatória que consiste em lançar sucessivamente um dado com as faces numeradas de 1 a 6. Associado a esta experiência define-se o espaço dos possíveis,* Ω, *como sendo o conjunto de todas as sucessões* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *com* $x_i \in \{1,2,3,4,5,6\}, i \in \mathbb{N}$.

Seja A_n *é o acontecimento "sair 5 no n-ésimo lançamento"; então o acontecimento "sair o número 5 em todos os lançamentos"é definido por* $A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$.

O acontecimento "não sair 5 em todos os lançamentos"é o acontecimento contrário de A, por outro lado, $\Omega \setminus A = \overline{A} = \overline{\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right)} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \overline{A_n}$, *assim sendo o acontecimento contrário de A pode ser traduzido por "não sair 5 pelo menos num dos lançamentos".*

O acontecimento $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_{2n} = \{(x_1, 5, x_2, 5, x_3, \cdots) : x_n \in \{1,2,3,4,5,6\}, n \in \mathbb{N}\}$ *é o acontecimento "sair 5 nos lançamentos de ordem par".*

Definição 3.5.2 (Limite superior de uma sucessão de acontecimentos)

Define-se limite superior de uma sucessão $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de acontecimentos de um mesmo espaço dos possíveis* Ω *como sendo o conjunto* $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$ *e usualmente representa-se por* $\displaystyle\limsup_{n\to+\infty} A_n$.

Observação 3.5.2

O acontecimento $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$ *ocorre quando se realiza simultaneamente uma infinidade de acontecimentos, uma vez que se:*

$\displaystyle x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \geq n : x \in A_k \Leftrightarrow x \in A_n$ *para uma infinidade de números naturais* n.

Definição 3.5.3 (Limite inferior de uma sucessão de acontecimentos)

Define-se limite inferior de uma sucessão $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de acontecimentos de um mesmo espaço dos possíveis* Ω *como sendo o conjunto* $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_n$ *e usualmente representa-se por* $\displaystyle\liminf_{n\to+\infty} A_n$.

Observação 3.5.3

O acontecimento $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_n$ *ocorre quando se realizam todos os acontecimentos* A_n, $n \in \mathbb{N}$, *com excepção de um número finito, uma vez que se:*

$\displaystyle x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}\quad \forall k \geq n : x \in A_k \Leftrightarrow x \in A_n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *com excepção de um número finito de acontecimentos.*

Definição 3.5.4 (Limite de uma sucessão de acontecimentos)

Se $\displaystyle\liminf_{n\to+\infty}\ A_n = \limsup_{n\to+\infty} A_n$ *diz-se que a sucessão de acontecimentos* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tem limite e o acontecimento limite designa-se por* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} A_n$.

Observação 3.5.4

Facilmente se verifica que $\displaystyle\liminf_{n\to+\infty}\ A_n \subseteq \limsup_{n\to+\infty}\ A_n$. *Então para que exista* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ A_n$ *bastará verificar a inclusão* $\displaystyle\liminf_{n\to+\infty}\ A_n \supseteq \limsup_{n\to+\infty}\ A_n$.

Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão de acontecimentos de um dado espaço mensurável* $(\Omega, \mathcal{A})$. *Se* $A_i \cap A_j = \emptyset$, *para todo* $i \neq j$; *então* $\displaystyle\liminf_{n\to+\infty}\ A_n = \limsup_{n\to+\infty}\ A_n = \emptyset$.

Exemplo 3.5.2

Considere-se a experiência aleatória definida no exemplo 3.5.1, em que $\Omega = \{(x_n : x_n \in \{1, \cdots, 6\})_{n\in\mathbb{N}}\}$. *Considere-se a sucessão* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de acontecimentos:*

$$B_n = \begin{cases} \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} : x_n \in \{1,3,5\}\} & se \quad n = 1,3,5,\cdots \\ \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} : x_n \in \{2,4,6\}\} & se \quad n = 2,4,6,\cdots \end{cases}$$

Assim sendo,

$$\limsup_{n\to+\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} B_k = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \Omega = \Omega$$

e

$$\liminf_{n\to+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} B_k = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n = \Omega,$$

onde

$$C_n = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \begin{cases} x_i \in \{1,2,\cdots,6\}, & se & i < n \\ x_i \in \{1,3,5\}, & se & i \geq n \wedge i\ impar \\ x_i \in \{2,4,6\}, & se & i \geq n \wedge i\ par \end{cases} \right\}.$$

Este exemplo demonstra que a existência do limite de uma sucessão de acontecimentos é possível no entanto, não é um dado adquirido, existindo casos em que tal limite não existe.

Exemplo 3.5.3

Considere-se a sucessão de subconjuntos de $\mathbb{R}$ *definida por:*

$$A_n = \begin{cases} (-\frac{1}{n}, \frac{2}{3} - \frac{1}{2n}) & se \quad n = 1,3,5,\cdots \\ (\frac{1}{3} - \frac{1}{5n}, 1 + \frac{1}{n}) & se \quad n = 2,4,6,\cdots \end{cases}$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to+\infty} A_n &= \bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \\
&= \bigcap_{n=1}^{+\infty}\left(\bigcup_{\substack{k=n \\ \text{n } par}}^{+\infty} A_k \cup \bigcup_{\substack{k=n \\ \text{n } impar}}^{+\infty} A_k\right) \\
&= \bigcap_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5n}, 1+\frac{1}{n}\right) \cup \left(-\frac{1}{n}, \frac{2}{3}\right)\right) \\
&= \bigcap_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right) \\
&= [0,1]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to+\infty} A_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k \\
&= \bigcup_{n=1}^{+\infty}\left(\bigcap_{\substack{k=n \\ \text{n } par}}^{+\infty} A_k \cap \bigcap_{\substack{k=n \\ \text{n } impar}}^{+\infty} A_k\right) \\
&= \bigcup_{n=1}^{+\infty}\left(\left[\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{n}\right] \cap \left[0, \frac{2}{3}-\frac{1}{2n}\right)\right) \\
&= \bigcup_{n=1}^{+\infty}\left(\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}-\frac{1}{2n}\right)\right) \\
&= \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

Teorema 3.5.1 (Monotonia)

Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de subconjuntos de um mesmo espaço dos possíveis Ω.

1. *Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão decrescente, isto é, tal que $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$, então $\liminf_{n\to+\infty} A_n = \limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty} A_n$.*

2. *Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão crescente, isto é, tal que $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$, então $\liminf_{n\to+\infty} A_n = \limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty} A_n$.*

Exemplo 3.5.4

Considere-se a sucessão de acontecimentos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *definida pelos intervalos reais da forma* $A_n = \left(0, 2-\frac{1}{n}\right]$. *Esta sucessão é uma sucessão crescente,* $A_{n+1} \supseteq A_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *pelo que*

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \liminf_{n\to+\infty} A_n = \limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty}\left(0, 2-\frac{1}{n}\right] = (0,2).$$

Os limites superior e inferior de uma qualquer sucessão de elementos de uma σ-álgebra são elementos dessa σ-álgebra.

Colocam-se agora algumas questões similares às colocadas na aquando do estudo de álgebras.

Questão 3.5.1

Será que uma família $\mathcal{A}$ *constituída por todos os subconjuntos finitos de um conjunto não vazio* Ω *e pelos seus complementares é uma* σ*-álgebra?*

Resposta

A resposta é negativa. Veja-se o seguinte contra-exemplo:

Seja $\Omega = \mathbb{N}$ e A o conjunto dos números pares.

Então, $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ não é finito e o seu complementar $\overline{A} = \{2n-1 : n \in \mathbb{N}\}$ não é finito; logo A não pertence a $\mathcal{A}$. No entanto, A pode ser representado por uma união numerável de elementos de $\mathcal{A}$, $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty}\{2n\}$.

Do exposto conclui-se que $\mathcal{A}$ não é fechada para a união numerável e portanto não é uma σ-álgebra.■

Questão 3.5.2

Seja $\mathcal{A}$ *a família formada por todos os subconjuntos numeráveis de um conjunto não vazio* Ω *e por todos os seus complementares. A família* $\mathcal{A}$ *assim definida é uma* σ*-álgebra?*

Resposta

A questão tem uma resposta afirmativa. De facto, $\Omega \in \mathcal{A}$ uma vez que é o complementar do conjunto numerável $\emptyset$ ($\emptyset$ é finito logo é um conjunto numerável).

Seja $A \in \mathcal{A}$. Então ou A é um conjunto numerável ou $\Omega \setminus A$ é um conjunto numerável, mas em ambos os casos $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.

Sejam agora $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$. Se todos os A_i forem numeráveis então $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ é uma união numerável, consequentemente um elemento de $\mathcal{A}$.

Se pelo menos um dos A_i (para algum $i \in \mathbb{N}$) não for um conjunto numerável significa que, para esse i, $\Omega \setminus A_i$ é numerável. Uma vez que $\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ está contido em $\Omega \setminus A_i$, assim também $\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ será numerável pelo que $\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Deste modo, $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra.$\blacksquare$

Uma das questões que motivou o aparecimento de uma das mais importantes σ-álgebras de conjuntos, a *σ-álgebra de Borel* foi a interrogação acerca do que se passará com a intersecção de σ-álgebras. De facto a intersecção de σ-álgebras é ainda uma σ-álgebra.

Definição 3.5.5 (σ-álgebra gerada)

Seja $\mathcal{C}$ uma família de subconjuntos de um conjunto não vazio Ω.

O conjunto $\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap\{\mathcal{A} : \mathcal{A}$ é uma σ-álgebra e $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}\}$ é uma σ-álgebra denominada por σ-álgebra gerada por $\mathcal{C}$.

Uma condição necessária e suficiente para que uma dada família de conjuntos, $\mathcal{A}$, seja uma σ-álgebra é que a σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$ coincida com a própria família, ou seja, $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

No caso de $\Omega = \mathbb{R}$ e $\mathcal{A}$ ser a família de intervalos abertos de números reais, então $\sigma(\mathcal{A})$ é denominada por σ-álgebra de *Borel*, e denotada por $\mathcal{B}$, sendo os seus elementos chamados de *conjuntos de Borel* ou *borelianos*.

Questão 3.5.3

Será que a σ-álgebra gerada pela família de intervalos abertos de números reais coincide com a σ-álgebra gerada pela família de intervalos fechados de números reais?

Resposta

De facto, a σ-álgebra gerada pela família de intervalos de números reais abertos ou fechados é a mesma, pelo que é independente do facto dos intervalos serem abertos ou fechados.

Em primeiro lugar, mostre-se que todos os intervalos abertos estão na σ-álgebra gerada pela família de intervalos reais fechados, $\sigma(\mathcal{A})$. Qualquer intervalo aberto (a, b), com $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, se pode escrever na forma $(a, b) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right]$. Como, para todo $n \in \mathbb{N}$, os intervalos $\left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right] \in \sigma(\mathcal{A})$ então o mesmo acontece com a sua união numerável. Se o intervalo aberto for da forma $(a, +\infty)$, com $a \in \mathbb{R}$, pode-se escrever o intervalo do seguinte modo $(a, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[a + \frac{1}{n}, a + n\right]$ e daqui concluir que $(a, +\infty) \in \sigma(\mathcal{A})$. O mesmo acontece no caso do intervalo ser da forma $(-\infty, b)$, com $b \in \mathbb{R}$. Deste modo, a família de intervalos reais abertos está contida em $\sigma(\mathcal{A})$. Por definição, $\mathcal{B}$ é a menor σ-álgebra que contém a família de intervalos reais abertos, assim sendo, $\mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$.

Reciprocamente, todo o intervalo fechado $[a, b]$ é um boreliano uma vez que $[a, b] = \mathbb{R} \setminus [(-\infty, a) \cup (b, +\infty)]$. Portanto, a família $\mathcal{A}$ de intervalos reais fechados está contida em $\mathcal{B}$. Como $\sigma(\mathcal{A})$ é a menor σ-álgebra contendo $\mathcal{A}$, tem-se $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}$.

Consequentemente $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.$\blacksquare$

Exemplo 3.5.5 (Borelianos)

O conhecido conjunto de Cantor [11] *é um conjunto de Borel pois pode ser escrito como a intersecção numerável de intervalos fechados contidos em* $[0, 1]$.

Questão 3.5.4

Será que a álgebra dos conjuntos periódicos de $\mathbb{Z}$ *é uma* σ*-álgebra?*

Resposta

De facto essa família não é uma σ-álgebra. Considere-se a sucessão de conjuntos periódicos definida por:

$$A_n = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} (I_n + k i_n)$$

onde $I_n = \{n\}$ e $i_n = 2^n$ para $n = 1, 2, \cdots$. Faça-se $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Será A um conjunto periódico?

Como $I_n = \{n\}$ então $n \in A$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Contudo, $0 \notin A$, caso contrário, $0 \in A_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, o que implicaria que $n = k \cdot 2^n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, o que é impossível.

[11] O conjunto de Cantor pode ser construído do seguinte modo:

1. ao intervalo $[0, 1]$ remova-se o intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, subdividindo o intervalo inicial em dois intervalos $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$ cuja união se denominará por C_1, ou seja, $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$;

2. divida-se cada um dos intervalos que compõe C_1 em três partes e novamente remova-se o do meio, a saber $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ e $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. A união dos intervalos não removidos denominar-se-á por C_2, ou seja, $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cap [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$;

3. continue-se o processo atrás descrito indefinidamente, resultando o conjunto de Cantor $C = \bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n$.

Assim sendo, A não pode ser um conjunto periódico. Se o fosse então $A = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} (I + ni)$ para algum inteiro positivo i e para algum $I \subseteq \{1, \cdots, i\}$. Mas qualquer inteiro positivo está em A, portanto $i \in A$ e logo $i \in I$. Deste modo tomando $n = -1$ resultaria $0 \in A$, o que já se mostrou ser impossível.$\blacksquare$

Definição 3.5.6

Sejam $\mathcal{A}_1$ uma σ-álgebra sobre $\Omega_1 \neq \emptyset$ e $\mathcal{A}_2$ uma σ-álgebra sobre $\Omega_2 \neq \emptyset$. Define-se produto cartesiano $\Omega_1 \times \Omega_2$ como sendo o conjunto $\{(x, y) : x \in \Omega_1 \wedge y \in \Omega_2\}$.

Seja $A \in \Omega_1 \times \Omega_2$ e denote-se por A_x o conjunto $\{y \in \Omega_2 : (x, y) \in A\}$ denominado por secção de A contendo x. Analogamente se pode definir A_y como sendo o conjunto $\{x \in \Omega_1 : (x, y) \in A\}$.

Sejam $A \in \mathcal{A}_1$ e $B \in \mathcal{A}_2$. O conjunto $A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$ é denominado por rectângulo mensurável.

A σ-álgebra gerada pela família de todos os rectângulos mensuráveis é denominada por σ-álgebra produto de $\mathcal{A}_1$ por $\mathcal{A}_2$, é denotada por $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ e é constituída por todas as uniões finitas de rectângulos mensuráveis disjuntos.

Observação 3.5.5

Seja $A \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, x \in \Omega_1$ e $y \in \Omega_2$, então as secções A_x e A_y são elementos de $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_1$ respectivamente. No entanto, o recíproco já não é válido. Considere-se Ω um conjunto não numerável e $\mathcal{A}$ a menor σ-álgebra de subconjuntos de Ω contendo todos os conjuntos elementares. O conjunto $\{(x, x) : x \in \Omega\}$ conhecido por conjunto diagonal não é um acontecimento de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$, contudo qualquer secção deste conjunto pertence a $\mathcal{A}$.

3.6 Medidas de probabilidade em σ-álgebras

Nesta secção estende-se a definição de medida de probabilidade finitamente aditiva a reuniões/intersecções numeráveis de acontecimentos. Essencialmente, esta nova definição permite estender a noção de probabilidade a experiências com um número infinito de resultados possíveis. Assim a definição de espaço de probabilidade será expandida a ternos com outro tipo de propriedades mais abrangentes.

Considere-se a experiência que consiste em lançar uma moeda equilibrada ao ar, tantas vezes quantas as necessárias, contando o número de lançamentos efectuados antes de sair a face *cara* voltada para cima. Esta experiência pode ser modelada pelo terno $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, onde $\Omega = \{0, 1, 2, \cdots\}$ e $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{2^{n+1}}$ é a probabilidade de obter n escudos antes de aparecer uma cara.

Considerando o acontecimento A: "sair cara num lançamento de ordem ímpar", tem-se $A = \{1\} \cup \{3\} \cup \{5\} \cup \cdots$, sendo natural pensar que $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \cdots$. A ideia principal é permitir o cálculo da probabilidade de acontecimentos que se decompõem numa união numerável de outros acontecimentos disjuntos através do cálculo das probabilidades de cada um destes últimos e somá-las. Este processo é utilizado em medidas de probabilidade finitamente aditivas para um número finito de acontecimentos. A nova definição de medida permitirá alargar o processo a situações que envolvam uma infinidade numerável de acontecimentos. [12]

Definição 3.6.1 (Medida de probabilidade)

Seja $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaço probabilizável. Uma função $\mathbb{P} : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ é uma medida de probabilidade se e somente se:

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

2. *Para qualquer sucessão de acontecimentos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$, disjuntos dois a dois (ou seja, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$), se tem $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)$-$\sigma$-aditividade.*

Ao terno $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ chama-se espaço de probabilidade ou modelo probabilístico.

Observação 3.6.1

Seja $\mathcal{F}$ uma álgebra sobre um conjunto não vazio Ω e μ uma medida de probabilidade sobre $\mathcal{F}$. O teorema de Carathéodory estabelece a possibilidade de estender, de modo único, a função μ ao espaço probabilizável $(\Omega, \sigma(\mathcal{F}))$ de modo que as duas medidas coincidam em $\mathcal{F}$.

Exemplo 3.6.1 (Funções definidas numa σ-álgebra)

1. *Considere-se o espaço probabilizável $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ em que $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra de Borel. Seja ψ uma função definida em $\mathcal{A}$, não negativa e σ-aditiva, que verifique as seguintes condições:*

[12] Um exemplo da aplicação deste tipo de medidas, embora não seja no contexto de probabilidades, é o de medir a área de um círculo através da sua decomposição num número infinito numerável de rectângulos ou de outros polígonos.

- $\psi(I) > 0$, *para todo o intervalo* I *de amplitude não nula;*
- $\psi(]n, n+1[) = \frac{1}{n(n+1)}, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

A função ψ *não é uma medida de probabilidade sobre* $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$*, já que* $\psi(\mathbb{R}) \neq 1$ *.*

De facto, observe-se que:

$$\psi(\mathbb{R}) = \psi\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}(n, n+1) \cup \mathbb{N} \cup (-\infty, 1)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\psi\left((n, n+1)\right) + \psi(\mathbb{N}) + \psi\left((-\infty, 1)\right).$$

Como $\sum_{n=1}^{+\infty}\psi\left((n, n+1)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$, uma vez que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ é uma série de Mengoli, $\psi(\mathbb{N}) \geq 0$, dado que ψ é não negativa, e $\psi\left((-\infty, 1)\right) > 0$, por ser um intervalo de amplitude não nula, assim sendo $\psi(\mathbb{R}) > 1$.■

2. *Considere-se o espaço probabilizável* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *a função* μ*, de domínio* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$*, definida por* $\mu(A) = \liminf_{n\to+\infty}\frac{\#(A \cap \{1, \cdots, n\})}{n}$*. Esta função* μ *não é uma medida de probabilidade, uma vez que não satisfaz a* σ*-aditividade.*

   Na realidade, para esta função μ, tem-se $\mu(\mathbb{N}) = \liminf_{n\to+\infty}\frac{\#\{1, \cdots, n\}}{n} = \limsup_{n\to+\infty}\frac{n}{n} = 1$.

   Consequentemente $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}\{i\}\right) = \mu\left(\mathbb{N}\right) = 1$. Porém, $\sum_{i=1}^{+\infty}\mu\left(\{i\}\right) = \sum_{i=1}^{+\infty}\liminf_{n\to+\infty}\frac{\#\{i\}}{n} = 0$, pelo que a condição 2 da definição 3.6.1 não é satisfeita. ■

Exemplo 3.6.2 (Medida de probabilidade)

Considere-se o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *e* $B \in \mathcal{A}$ *tal que* $\mathbb{P}(B) > 0$*. Defina-se a função* $\mathbb{P}(.|B) : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ *de modo que* $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$*. Facilmente se prova que esta função, conhecida como probabilidade condicionada por* B*, é uma medida de probabilidade.*

De facto, $\mathbb{P}(\Omega|B) = \frac{\mathbb{P}(\Omega\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$*. Por outro lado, seja* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão de elementos de* $\mathcal{A}$ *dois a dois disjuntos. Então*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n|B\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\right)\cap B\right)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}(A_n \cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Como $(A_n \cap B)_{n\in\mathbb{N}}$ *é também uma sucessão de acontecimentos de* $\mathcal{A}$*, dois a dois disjuntos, e* $\mathbb{P}$ *é uma medida de probabilidade, resulta:*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n|B\right) = \frac{\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(A_n\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathbb{P}(A_n\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(A_n|B).\blacksquare$$

Questão 3.6.1

Se Ω for um conjunto infinito não numerável[13] *será que existirá sempre uma medida de probabilidade em $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$?*

Resposta:

Tal é falso. De facto, se $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, não existe uma função $\mathbb{P}$, diferente da função nula que verifique a σ-aditividade pretendida para ser medida de probabilidade. Note-se, por exemplo, que no caso de $\Omega = \mathbb{R}$ e de a σ-álgebra ser corpo dos borelianos, $\mathcal{B}$, o conjunto é não numerável de cardinal igual à potência do contínuo enquanto $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ tem potência superior à do contínuo [14]. A única função que verifica a σ-aditividade é a função nula que obviamente não verifica a condição $\mathbb{P}(\Omega) = 1$[15]. $\blacksquare$

Teorema 3.6.1 (Propriedades)

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade[16]. *Então,*

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;

2. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$;

3. *se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sucessão de acontecimentos então* $P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{x=1}^{+\infty}\mathbb{P}(A_n) -$ *sub* $- \sigma -$ *aditividade;*

4. *se $\mathbb{P}(A_n) = 0$, para $n = 1, 2, \cdots$, então* $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = 0$;

5. *se $\mathbb{P}(A_n) = 1$, para $n = 1, 2, \cdots$, então* $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = 1$;

6. *se* $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_n \Delta A) = 0$, *então* $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$.

7. *Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de elementos de $\mathcal{A}$ crescente (respectivamente decrescente) no sentido lato para $A \in \mathcal{A}$, isto é, $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subseteq A_{n+1}$ e $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = A$*

---

[13] Estes conjuntos também são usualmente denominados por *infinitos transnumeráveis.*

[14] Este resultado é garantido pelo *Teorema de Cantor*

[15] Veja-se [30] na página 20 exemplo 1.31.

[16] A propriedade referida na alínea 7. é conhecida por continuidade monótona de uma probabilidade

(respectivamente $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \supseteq A_{n+1}$ *e* $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = A$*), então* $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *é também crescente (respectivamente decrescente) no sentido lato e* $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$*.*

Uma das propriedades da medida de probabilidade mais conhecidas e utilizadas é dada pelo seguinte enunciado:

Teorema 3.6.2 (Primeiro Teorema de Borel-Cantelli)

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *um espaço de probabilidade e* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão de acontecimentos deste espaço. Se* $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ *converge então* $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = 0$*.*

Demonstração:

Tem-se sempre $\limsup_{n\to+\infty} A_n \subseteq \bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i$, para qualquer $k = 1, 2, \cdots$. Assim sendo, $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=k}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)$, utilizando a $sub-\sigma-aditividade$ de $\mathbb{P}$. Consequentemente $0 \leq \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) \leq \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$. Como $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$ é o resto de ordem n da série convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$, então este limite terá necessariamente de ser zero. Logo, pelo teorema das sucessões enquadradas $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = 0$.■

Vejam-se agora alguns exemplos interessantes de medidas de probabilidade definidas em $\mathcal{B}$. Estes exemplos baseiam-se numa medida específica, a *medida de Lebesgue*. A *medida de Lebesgue* é uma extensão da noção de comprimento. Esta extensão pode ser considerada também em $\mathbb{R}^n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, representando nestes casos uma extensão da noção de área, volume, $\cdots$, consoante $n = 2, 3, \cdots$, respectivamente.

Definição 3.6.2 (Medida de Lebesgue)

Define-se medida de Lebesgue como sendo uma função m*, da* σ*-álgebra de Borel* $\mathcal{B}$ *em* $[0, +\infty]$*, que a cada intervalo real finito faz corresponder a sua amplitude,*

$$m([a,b]) = m([a,b)) = m((a,b]) = m((a,b)) = b - a, \forall a \leq b,$$

de modo que $m\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} m(A_i)$*, para toda a sucessão* $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *de borelianos disjuntos dois a dois.*

Esta função não é uma medida de probabilidade em $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ uma vez que o seu contradomínio não é [0,1], no entanto quando restringida ao intervalo $[0, 1]$ é de facto uma medida de probabilidade, já que $m([0,1]) = 1 - 0 = 1$. No entanto, observe-se que $([0,1], \mathcal{B})$ não é um espaço probabilizável uma vez que o conjunto de Borel não contém somente os subconjuntos de $[0,1]$. Para ultrapassar este problema considera-se a σ-álgebra formada pelos borelianos contidos em $[0,1]$, $\mathcal{B}_{[0,1]} = \{B \subseteq [0,1] : B \in \mathcal{B}\}$. Deste modo, $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, m)$ é um espaço de probabilidade.

Exemplo 3.6.3 (Exemplo da utilização da medida de Lebesgue)

Seja C o conjunto de Cantor. Este conjunto é da forma $C = \bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n$, já atrás definido, $m(C) = m\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n\right) = \lim_{n\to+\infty} C_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$. *Este facto ocorre devido a C_n consistir na união de 2^n intervalos disjuntos todos de amplitude igual a $\frac{1}{3^n}$.*

A medida de Lebesgue é particularmente útil para demonstrar que a afirmação recíproca do primeiro Teorema de Borel-Cantelli não é válida.

Questão 3.6.2

Será o recíproco do primeiro teorema 3.6.2 verdadeiro?

Resposta:

Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão decrescente de acontecimentos do espaço de probabilidade $\big([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, m\big)$, onde m designa a medida de Lebesgue, com $A_n = [0, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}$. Assim sendo, $\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{j=n}^{\infty}\left[0, \frac{1}{n}\right) = [0,0]$ sendo que $m([0,0]) = 0 - 0 = 0$. No entanto, $m(A_n) = \frac{1}{n}$ pelo que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} m(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ diverge, donde o recíproco do teorema de Borel-Cantelli não é verdadeiro.■

3.7 Probabilidade condicional e independência

O conhecimento da realização de um determinado acontecimento pode influenciar a probabilidade da ocorrência de outro acontecimento. Nomeadamente, quando se sabe que um de dois acontecimentos disjuntos, ocorreu com probabilidade positiva, então a probabilidade do outro acontecimento ocorrer é certamente nula.

Por outro, lado se for conhecido que determinado acontecimento contido noutro ocorreu, então a probabilidade do segundo acontecimento ocorrer vai com certeza aumentar.

Estabelece-se uma nova *medida de probabilidade* que depende do que dois acontecimentos tiverem de comum, ou seja, da sua intersecção. Concretamente, dados A e B acontecimentos de um dado espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, a probabilidade de A sabendo que B ocorreu, denotada $\mathbb{P}(A|B)$, será proporcional a $\mathbb{P}(A \cap B)$, ou seja, $\mathbb{P}(A|B) = \alpha\mathbb{P}(A \cap B)$, com $\alpha \in [0,1]$. Se B for um acontecimento com probabilidade positiva deverá ter-se $\mathbb{P}(B|B) = 1$, donde pode se concluir que $\mathbb{P}(B|B) = \alpha\mathbb{P}(B \cap B) = \alpha\mathbb{P}(B) = 1$ e portanto $\alpha = \frac{1}{\mathbb{P}(B)}$. Será, portanto, legítimo definir probabilidade condicionada do seguinte modo:

Definição 3.7.1 (Probabilidade condicionada)

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e seja B um acontecimento de $\mathcal{A}$ de probabilidade não nula. Chama-se probabilidade condicionada por B, ou probabilidade de A dado B[17] *à função $\mathbb{P}(.|B)$ definida em $\mathcal{A}$ e dada por:*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \forall A \in \mathcal{A}.$$

Observação 3.7.1

Se $\mathbb{P}(B) = 0$, a probabilidade de A condicionada por B pode ser arbitrariamente definida. Esta situação tem algum interesse. Por exemplo, em Medicina, são habitualmente realizados testes para tirar conclusões sobre, por exemplo, a probabilidade de um dado doente melhorar partindo da observação de um conjunto finito de pontos isolados, ou seja, de um conjunto finito de pontos de probabilidade nula. O Paradoxo de Borel mostra algumas das contradições a que se pode chegar quando se calculam probabilidades condicionadas por acontecimentos de probabilidade nula. No entanto, este paradoxo envolve o conceito de valor médio, situação não estudada no contexto da presente dissertação.

Grande parte dos autores consideram que, no caso de $\mathbb{P}(B) = 0$, deveria ter-se $\mathbb{P}(A|B) = 0$, no entanto, é mais útil considerar $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A), \forall A \in \mathcal{A}$, uma vez que assim $\mathbb{P}(.|B)$ é uma medida de probabilidade. Outro factor que torna esta atribuição mais interessante é a independência, que se estudará numa próxima secção.

Popper propôs uma convenção, totalmente desadequada, que atribuía o valor 1 à probabilidade de um qualquer acontecimento condicionado por outro de probabilidade nula. Isto é, pretendia que $\mathbb{P}(A|B) = 1$, no caso de $\mathbb{P}(B) = 0$. No entanto, Popper só utilizou esta convenção em situações em que o espaço dos possíveis era finito, não se conhecendo ainda correcções, elaboradas pelo autor, a tal facto.

Certamente que a proposta de Popper vinha ao encontro de tentar convencionar um valor a atribuir ao quociente $\frac{0}{0}$, que segundo o autor seria 1.

[17] O conceito de probabilidade condicionada também pode ser definido sobre uma qualquer medida de probabilidade finitamente aditiva.

O inconveniente desta proposta de Popper relaciona-se com o facto de se pretender que a probabilidade condicional com condicionante fixa seja uma medida de probabilidade. Ora, caso $\mathbb{P}(B) = 0$ ter-se-ia, pela convenção de Popper, $\mathbb{P}(A|B) = 1$ e, pelo mesmo facto, também $\mathbb{P}(\overline{A}|B)$ seria igual a 1. Este facto contraria a σ-aditividade uma vez que $\mathbb{P}(A \cup \overline{A}|B) = \mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(\overline{A}|B) = 1 + 1 = 2$, mostrando-se assim que a convenção de Popper é incompatível com a aditividade da medida.

Pode-se então definir probabilidade de A condicionada por B, de um modo geral, por:

$$\mathbb{P}(A|B) = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} & se \quad \mathbb{P}(B) \neq 0 \\ \mathbb{P}(A) & se \quad \mathbb{P}(B) = 0 \end{cases} ; \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

3.7.1 Propriedades da probabilidade condicionada

Teorema 3.7.1 (Teorema da probabilidade composta ou regra do produto)

Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $A_1, \cdots A_n$, n acontecimentos de $\mathcal{A}$ tais que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0$. Então,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_2 \cap A_1)\cdots\mathbb{P}\left(A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right).$$

Exemplo 3.7.1 (Aplicação do teorema 3.7.1)

Considere-se a experiência aleatória que consiste em tirar, sucessivamente e sem reposição, três cartas de um baralho com 52 cartas. Seja E o conjunto constituído pelas 52 cartas do baralho. O modelo probabilístico associado a esta experiência aleatória pode ser definido pelo espaço de probabilidades, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, onde $\Omega = \{(i, j, k) : i, j, k \in E \wedge i \neq j \neq k\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ e $\mathbb{P}$ a medida de probabilidade dada por $\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}, \forall A \in \mathcal{A}$.

Denomine-se por $A_i, i = 1, 2, 3$, o acontecimento "tirar ás na i-ésima extracção". Assim, a probabilidade de obter três ases é dada por:

$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_2 \cap A_1) = \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{2}{50}$.

Uma consequência imediata do teorema anterior e da σ-aditividade da medida é a propriedade que se segue:

Teorema 3.7.2 (Teorema da probabilidade total generalizado)

Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *um espaço de probabilidade e* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão de acontecimentos de* $\mathcal{A}$*, todos com probabilidade positiva e dois a dois disjuntos. Se* B *é um acontecimento tal que* $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$*, então* $\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B|A_n)$*.*

Como consequência deste teorema resulta: o teorema de Bayes generalizado.

Corolário 3.7.1 (Teorema de Bayes generalizado)

Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *um espaço de probabilidade e* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão de acontecimentos de* $\mathcal{A}$*, todos com probabilidade positiva e dois a dois disjuntos. Se* B *é um acontecimento tal que* $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$*, então:*

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B|A_n)}.$$

Exemplo 3.7.2 (Aplicação do Corolário 3.7.1)

Imagine-se uma caixa com três dados equilibrados D_1, D_2, D_3*, tendo* D_1 *e* D_2 *as faces numeradas de 1 a 6 e* D_3 *três faces numeradas com 1, duas com 2, e uma com 3. Considere-se a experiência aleatória composta que consiste em retirar aleatoriamente um dado da caixa e lançar esse dado. Seja* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *o modelo de probabilidade associado a esta experiência aleatória, em que* $\Omega = \{(x, y) : x \in \{D_1, D_2, D_3\} \wedge y \in \{1, \cdots, 6\}\}$*,* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ *e* $\mathbb{P}$ *a medida de probabilidade definida por:* $\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}, \forall A \in \mathcal{A}$*.*

Qual será o valor da probabilidade de ter sido escolhido o dado D_3*, dado que o resultado final foi 1?*

Sejam A_1 *o acontecimento "retirar o dado* D_1 *ou* D_2*",* A_2 *o acontecimento "retirar o dado* D_3*", e* B *o acontecimento "obter um resultado final igual a 1".*

Pelo teorema de Bayes, a probabilidade pedida, $\mathbb{P}(A_2|B)$*, pode ser escrita como:*

$$\mathbb{P}(A_2|B) = \frac{\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B|A_2)}{\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1)+\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B|A_2)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3}{7}.$$

Tem-se observado que a Modelação e a interpretação de situações concretas envolvendo probabilidades condicionadas nem sempre é fácil de assimilar conduzindo, por vezes, a conclusões erróneas. Os dois paradoxos que se seguem são exemplos desse tipo de situações.

O paradoxo da probabilidade condicional pode ser encontrado em [35] com este mesmo nome, no entanto convém realçar que esta falácia resulta meramente de interpretações erradas da definição e das propriedades da probabilidade condicionada.

Paradoxo 3.7.1 (Paradoxo da probabilidade condicional)

Considerem-se três acontecimentos, A, B e C sobre um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*, dos quais se sabe que:*

i) $\mathbb{P}(A|B) < \mathbb{P}(A|\overline{B})$;

ii) $\mathbb{P}(A|B \cap C) > \mathbb{P}(A|\overline{B} \cap C)$;

iii) $\mathbb{P}(A|B \cap \overline{C}) > \mathbb{P}(A|\overline{B} \cap \overline{C})$.

Estas 3 condições dão impressão de serem de facto um paradoxo, uma vez que é usual pensar-se erradamente que $\mathbb{P}(A|B)$ *é a soma de* $\mathbb{P}(A|B \cap C)$ *e* $\mathbb{P}(A|B \cap \overline{C})$ *e, da mesma forma,* $\mathbb{P}(A|\overline{B})$ *será a soma de* $\mathbb{P}(A|\overline{B} \cap C)$ *e* $\mathbb{P}(A|\overline{B} \cap \overline{C})$*.*

Assim sendo, a soma de dois valores inferiores seria maior que a soma de dois valores superiores, de onde resultaria então o paradoxo. Este paradoxo é bastante relevante uma vez que o erro aqui relatado é frequentemente efectuado por discentes do Ensino Secundário.

A explicação deste mal entendido está no facto de $\mathbb{P}(A|B)$ *e* $\mathbb{P}(A|\overline{B})$ *serem de facto a soma ponderada das probabilidades referidas, mas os pesos de cada uma das somas ser diferente. Veja-se:*

$$\mathbb{P}(A|B) = \underbrace{\mathbb{P}(C|B)}_{\substack{\textit{factor de}\\ \textit{ponderação}}} \cdot \mathbb{P}(A|B \cap C) + \underbrace{\mathbb{P}(\overline{C}|B)}_{\substack{\textit{factor de}\\ \textit{ponderação}}} \cdot \mathbb{P}(A|B \cap \overline{C})$$

$$\mathbb{P}(A|\overline{B}) = \underbrace{\mathbb{P}(C|\overline{B})}_{\substack{\textit{factor de}\\ \textit{ponderação}}} \cdot \mathbb{P}(A|\overline{B} \cap C) + \underbrace{\mathbb{P}(\overline{C}|\overline{B})}_{\substack{\textit{factor de}\\ \textit{ponderação}}} \cdot \mathbb{P}(A|\overline{B} \cap \overline{C})$$

O Paradoxo de Monty Hall ganhou fama com a realização de um concurso televisivo de nome *Let´s Make a Deal* cujo apresentador, Monty Hall, oferecia a oportunidade do concorrente ganhar um prémio mediante a escolha de uma de três portas por detrás da qual se escondia o prémio.

A fama deste problema ficou consolidada com sucessivos episódios envolvendo vários matemáticos de valor reconhecido e Marilyn vos Savant. Marilyn auto proclamava-se a pessoa com maior coeficiente de inteligência (QI) de sempre e escrevia uma coluna semanal na revista "Parade"sobre assuntos relacionados com ciência. Marilyn era particularmente não querida entre matemáticos e físicos em muito devido a ela ter colocado publicamente em causa, de uma forma não científica, a demonstração do último Teorema de Fermat estabelecida por Andrew Wiles [18] e a Teoria da Relatividade de Einstein.

Em 9 de Setembro de 1990, na referida coluna semanal, Marilyn respondeu a um leitor que lhe havia colocado precisamente o problema de Monty Hall e a sua resposta originou controvérsia.

Paul Erdös, um dos maiores matemáticos do século XX, não só não conseguiu chegar à solução como se recusou a aceitá-la, só ficando convencido da veracidade da mesma quando observou uma simulação do problema pelo método de Monte Carlo.

A razão estava do lado de Marilyn e pelo menos neste problema a escritora fez jus ao QI que afirmava deter.

Paradoxo 3.7.2 (Paradoxo de Monty Hall)

As regras do concurso[19] *apresentam-se de seguida:*

Suponha-se que existem três portas; por trás de uma e só uma das portas está um prémio e por trás das outras duas portas não se encontra qualquer prémio. O concorrente escolhe uma das portas. Mediante a escolha do concorrente, o apresentador que sabe onde se encontra o prémio, pede para abrir uma de entre as outras duas portas que não contenha o prémio. Chegado a este passo o apresentador dá então a oportunidade ao concorrente de escolher entre a porta inicialmente por ele seleccionada e a outra que permanece fechada.

A questão que se coloca é se o facto de trocar ou não de porta influenciará a probabilidade do concorrente ganhar o prémio?

Designem-se as três portas por A, B e C. À priori, a probabilidade do prémio estar por trás de qualquer uma das portas é a mesma, pelo que, denominando por A (respectivamente, B ou C) o acontecimento "o prémio estar por trás da porta A (respectivamente, B ou C)", tem-se $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{3}$.

[18] Primeira tentativa da demonstração tornada publica em 1993. Porém esta "demonstração"continha erros. Em Março de 1995 foi publicada a definitiva demonstração do Último Teorema de Fermat

[19] Existem outras versões deste problema, nomeadamente uma envolvendo condenados à morte, *Paradoxo do prisioneiro*, mas a essência do problema é a mesma.

Segundo [22], num inquérito realizado 90% dos inquiridos responderam que seria indiferente trocar ou não de porta. Aparentemente, a probabilidade do concorrente ganhar o prémio depois de aberta a dita porta seria, em qualquer um dos casos, igual a $\frac{1}{2}$.

Esta interpretação do problema está porém errada, uma vez que não tem em conta o facto do apresentador saber onde está o prémio e assim não ser aleatória a escolha da porta que mandou abrir.

Sem perda de generalidade, suponha-se que o concorrente opta inicialmente pela porta A e que, mediante esta escolha, o apresentador abre a porta B, pois sabe que o prémio não está em B.

Designe-se por A_m, *(respectivamente,* B_m *ou* C_m*), o acontecimento "o apresentador abrir a porta A, (respectivamente, B ou C)". Assim:*

- $\mathbb{P}(B_m|A) = \frac{1}{2}$;
- $\mathbb{P}(B_m|B) = 0$;
- $\mathbb{P}(B_m|C) = 1$.

Consequentemente, a probabilidade do apresentador abrir a porta B é:

$$\mathbb{P}(B_m) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B_m|A) + \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(B_m|B) + \mathbb{P}(C) \cdot \mathbb{P}(B_m|C) = \tfrac{1}{6} + 0 + \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{2}.$$

E assim

$$\mathbb{P}(A|B_m) = \frac{\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B_m|A)}{\mathbb{P}(B_m)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \quad e \quad \mathbb{P}(C|B_m) = \frac{\mathbb{P}(C)\cdot\mathbb{P}(B_m|C)}{\mathbb{P}(B_m)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Por outras palavras, a probabilidade do concorrente ganhar o prémio dobra se o concorrente mudar a sua escolha inicial.

Quando se generaliza este problema considerando um número arbitrário de portas, superior a 3, verifica-se que a troca de portas continua a favorecer o concorrente embora esse benefício, em termos de probabilidades, decresça com o aumento do número de portas.

Na realidade, considere-se o problema atrás com n portas: $A_1, \cdots, A_n$ *e represente-se o acontecimento "o prémio estar por trás da i-ésima porta", por* A_i *e por* A_i^m *o acontecimento "o apresentador abrir a porta* A_i*".*

O apresentador, em caso algum, revelará a porta onde está o prémio, e portanto, $\mathbb{P}\left(A_i^m|A_i\right) = 0, \forall i \in \mathbb{N}$. À priori a probabilidade do prémio estar por trás de qualquer uma das n portas é a mesma, consequentemente, $\mathbb{P}\left(A_i\right) = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Suponha-se, sem perda de generalidade, que o concorrente opta inicialmente pela porta A_1 de entre as n portas disponíveis. Assim sendo, e uma vez que o apresentador não abre a porta seleccionada pelo concorrente, a probabilidade do apresentador abrir a porta A_1 será nula, isto é, $\mathbb{P}\left(A_1^m\right) = 0$.

A probabilidade do apresentador abrir uma dada porta sabendo que o prémio está por trás de outra porta não depende da escolha da mesma, acautelando os casos da porta A_1 já escolhida e da porta que contem o prémio, que em caso algum serão abertas. Consequentemente, $\mathbb{P}\left(A_i^m|A_j\right) = \frac{1}{n-2}$.

Desta forma tem-se que se o concorrente mantiver a sua escolha a probabilidade de ganhar o prémio é $\frac{1}{n}$ se trocar de porta terá uma probabilidade igual a:

$$\mathbb{P}(A_i|A_j^m) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap A_j^m)}{\mathbb{P}(A_j^m)} = \frac{\frac{1}{n(n-2)}}{\frac{1}{n-1}} = \frac{n-1}{n \cdot (n-2)} \text{ para todo } i \neq j, \; i, j \neq 1.$$

Através de cálculos elementares mostra-se que para $n > 3$:

i) $\frac{n-1}{n(n-2)} > \frac{1}{n}$;

ii) $\frac{n-1}{n(n-2)} < \frac{1}{2}$;

iii) $\frac{n-1}{n(n-2)} < \frac{n_0-1}{n_0(n_0-2)}, \qquad 3 < n_0 < n$

Pode-se então afirmar que para $n > 3$ a probabilidade de ganhar o prémio é inferior a $\frac{1}{2}$ e que a mesma vai decrescendo com o aumento do número de portas e deste modo o concorrente estará sempre em desvantagem em relação ao concurso.

Este problema é um excelente exemplo contra-intuitivo de grande valor pedagógico, pois evidencia a importância de factos inerentes ao problema que parecem, no senso comum, irrelevantes (aquilo que em princípio parece óbvio), no entanto, são de extremo valor. Neste caso concreto o conhecimento revelado com a escolha da porta pelo apresentador muda completamente a forma de encarar o problema pelo concorrente.

Podem-se encontrar, na Internet, algumas páginas com simuladores do Paradoxo de Monty Hall, como por exemplo http://math.ucsd.edu/ crypto/Monty/Montytitle.html ou http://www.prof2000.pt/users/pjca.

3.7.2 Independência de famílias de acontecimentos

Associado ao conceito de probabilidade condicionada tem-se o de independência (estocástica) de dois acontecimentos.

Definição 3.7.2

Sejam A e B dois acontecimentos de um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Os acontecimentos dizem-se independentes se o conhecimento sobre a ocorrência de um dos acontecimentos não influencia a probabilidade de ocorrência do outro acontecimento, ou seja, se $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ ou $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$.

No caso de pelo menos um dos acontecimentos ter probabilidade nula a condição de independência é trivialmente verificada.

Se $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ e B um acontecimento de probabilidade positiva então, pela definição de probabilidade condicionada, tem-se $\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$. Se $\mathbb{P}(B) = 0$ então também $\mathbb{P}(A \cap B) = 0 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$. O mesmo sucede se $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(A)$. Assim sendo, pode-se concluir que a condição A e B serem independentes é equivalente à condição: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

A independência de acontecimentos não é uma propriedade intrínseca dos acontecimentos mas sim uma característica da medida de probabilidade. Tal facto é ilustrado nos seguintes exemplos:

Exemplo 3.7.3

Considerem-se o conjunto $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, a álgebra $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e as medidas de probabilidade finitamente aditivas $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$, tais que $\mathbb{P}_1(A) = \frac{\#A}{4}$ e $\mathbb{P}_2(\{1\}) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}_2(\{2\}) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}_2(\{3\}) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}_2(\{4\}) = \frac{1}{6}$. Considerem-se os acontecimentos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{2, 3\}$. Em relação à medida $\mathbb{P}_1$, os acontecimentos são independentes, uma vez que $\mathbb{P}_1(A \cap B) = \mathbb{P}_1(\{2\}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}_1(A) \cdot \mathbb{P}_1(B)$. Tomando a medida de probabilidade $\mathbb{P}_2$, a independência já não é uma característica destes dois acontecimentos uma vez que $\mathbb{P}_2(A \cap B) = \mathbb{P}_2(\{2\}) = \frac{1}{4}$, no entanto $\mathbb{P}_2(A) \cdot \mathbb{P}_2(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{24}$. Deste modo A e B são independentes em relação à medida de probabilidade $\mathbb{P}_1$ mas já não o são quando a medida é $\mathbb{P}_2$.

Exemplo 3.7.4

Considere-se a experiência aleatória que consiste em retirar ao acaso uma carta de um baralho, não viciado, de 52 cartas. Denomine-se por E o conjunto constituído pelas 52 cartas do baralho. Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ o espaço de probabilidade associado a esta experiência aleatória, em que $\Omega = E$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ e $\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{52}$.

Considerem-se os acontecimentos:

A: "sair uma carta de espadas";

B: "sair uma carta contendo uma figura";

C: "sair uma carta de espadas ou uma figura".

Os acontecimentos A e B são independentes uma vez que:

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{3}{52}$.

Considere-se agora o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}(.|C))$, *onde* $\mathbb{P}(.|C)$ *representa a probabilidade condicionada por* C. *Os acontecimentos* A *e* B *atrás definidos não são independentes no espaço* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}(.|C))$.

De facto, $\mathbb{P}(A \cap B|C) = \frac{3}{22}$, *no entanto* $\mathbb{P}(A|C) \cdot \mathbb{P}(B|C) = \frac{13}{22} \cdot \frac{12}{22} = \frac{39}{121}$.

Para o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, com Ω finito e a medida uniforme é possível relacionar os cardinais de dois quaisquer acontecimentos independentes:

Teorema 3.7.3

Seja o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, *onde* Ω *é um conjunto finito com* n *elementos e* $\mathbb{P}$ *a medida uniforme, dada por* $\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{n}, \forall A \in \mathcal{A}$. *Sejam* $A, B \in \mathcal{A}$ *dois acontecimentos independentes. Se* A *tiver* i *elementos e* B *tiver* j *elementos, então*

$$j = k\frac{n}{mdc(i,n)},$$

para algum $k \in \{0, 1, \cdots, mdc(i,n)\}$, *onde* $mdc(i,n)$ *representa o máximo divisor comum entre* i *e* n.

Demonstração:

Dado que A e B são independentes então $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$. Sendo $x = \#A \cap B$, tem-se $\frac{i}{n} \cdot \frac{j}{n} = \frac{x}{n}$ e portanto $i \cdot j = x \cdot n$. Dividindo ambos os membros desta igualdade por $mdc(i,n)$ obtém-se:

$$j \cdot \frac{i}{mdc(i,n)} = x \cdot \frac{n}{mdc(i,n)}.$$

Como $\frac{i}{mdc(i,n)}$ e $\frac{n}{mdc(i,n)}$ não têm divisores comuns para além da unidade, então j terá de ser um múltiplo de $\frac{n}{mdc(i,n)}$, ou seja, $j = k \cdot \frac{n}{mdc(i,n)}$, para algum inteiro k.
Como $0 \leq j \leq n$ então $k \in \{0, 1, \cdots, mdc(i,n)\}$.■

Exemplo 3.7.5 (Aplicação do teorema 3.7.3)

1. *Seja* $\Omega = \{a, b, c, d\}$. *Com a medida de probabilidade uniforme o acontecimento* $A = \{a, b\}$ *é independente dos seguintes acontecimentos:*

   $B_1 = \emptyset$, $B_2 = \Omega$, $B_3 = \{a, c\}$, $B_4 = \{a, d\}$, $B_5 = \{b, c\}$, $B_6 = \{b, d\}$.

2. *Seja* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *com a medida de probabilidade uniforme. Se* $A \subseteq \Omega$ *for um conjunto com 4 elementos e independente de* $B \subseteq \Omega$ *relativamente à medida de probabilidade uniforme então,* B *deverá ter necessariamente 0, 3 ou 6 elementos.*

O conceito de independência de dois acontecimentos pode ser estendido a um qualquer número finito de acontecimentos e, inclusivamente, a um número numerável de acontecimentos.

Definição 3.7.3 (Independência de um número finito de acontecimentos)

Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *um qualquer espaço de probabilidade e* $A_1, A_2, \cdots A_n \in \mathcal{A}$. *Os acontecimentos* $A_1, A_2, \cdots A_n$ *dizem-se mutuamente independentes se e só se :*

$$\forall \{k_1, \cdots k_i\} \subseteq \{1, \cdots, n\}, \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{i} A_{k_j}\right) = \prod_{j=1}^{i} \mathbb{P}(A_{k_j}), \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Observação 3.7.2

Para verificar a independência de n *acontecimentos há que verificar:*

$$\tbinom{n}{2} + \tbinom{n}{3} + \cdots + \tbinom{n}{n} = \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} = 2^n - \binom{n}{0} - \binom{n}{1} = 2^n - 1 - n$$

condições.

Uma das consequências imediatas da definição é que se n acontecimentos são mutuamente independentes então quaisquer dois desses acontecimentos também o são. No entanto, o recíproco não é verdadeiro, ou seja, n acontecimentos podem ser independentes dois a dois e não serem mutuamente independentes. Um dos exemplos mais utilizados na literatura para ilustrar esta afirmação é a conhecida experiência aleatória do tetraedro de Bernstein.

Exemplo 3.7.6

Considere-se a experiência aleatória que consiste em lançar um tetraedro regular com 3 faces numeradas com o número 1, 2 e 3 respectivamente e a quarta face contendo os três números, e observar o número da face sobre a qual fica assente o tetraedro.

Considerem-se os seguintes acontecimentos:

$$A_i\text{:"o tetraedro cair sobre uma face contendo o número i"}, \; i = 1, 2, 3.$$

Assim sendo, $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$ *e* $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$. *Donde, de cálculos elementares se conclui que* A_1, A_2 *e* A_3 *são acontecimentos independentes dois a dois e, no entanto, não são mutuamente independentes.*

Pode também ocorrer que acontecimentos não sejam mutuamente independentes mas o produto das suas probabilidades seja igual à probabilidade da sua intersecção.

Considere-se o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, *onde* $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ *e a medida de probabilidade* $\mathbb{P}$ *é dada por* $\mathbb{P}(\{1\}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(\{2\}) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(\{3\}) = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ *e* $\mathbb{P}(\{4\}) = \frac{1}{4}$. *Definam-se os acontecimentos* $B_1 = \{1, 3\}$, $B_2 = \{2, 3\}$ *e* $B_3 = \{3, 4\}$.

Assim sendo $\mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B_2) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ *e* $\mathbb{P}(B_3) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. *Consequentemente*

$$\mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}(B_2) \cdot \mathbb{P}(B_3) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3).$$

A probabilidade da intersecção dos três acontecimentos é o produto das respectivas probabilidades, no entanto estes três acontecimentos não são independentes dois a dois. De facto, e por exemplo:

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \neq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}(B_2).$$

Este último exemplo mostra que a definição de independência de uma cadeia de acontecimentos tem de evitar a situação intuitiva de serem consideradas como independentes sequências de acontecimentos que contenham subsequências dependentes.

Existem várias versões do denominado Problema do Aniversário, sendo atribuídas a algumas dessas versões características paradoxais. Na sua essência, o problema consiste em determinar a probabilidade de num qualquer grupo de indivíduos existir um subconjunto desses indivíduos cuja dia de aniversário seja o mesmo.

Exemplo 3.7.7 (Uma versão do Problema do Aniversário)

Considere-se que num dado local estão N *pessoas das quais* M *festejam o seu aniversário no mesmo dia* X *e as restantes em dias diferentes. Suponha-se que se seleccionam aleatoriamente* n *pessoas de entre as* N *aí presentes. Qual é a probabilidade de obter, nessa amostra, exactamente* k *pessoas que festejem o seu aniversário no mesmo dia, com* $k \leq M$ *e* $k \leq n$. *Designe-se por* A *o acontecimento "obter exactamente*

k pessoas que festejem o seu aniversário no dia X numa amostra seleccionada de n indivíduos". Há duas situações a considerar:

Caso 1: *A selecção é feita sucessivamente e com reposição dos indivíduos.*

Neste caso, qualquer indivíduo questionado sobre a data do seu nascimento pode novamente voltar a ser interrogado, sendo, portanto, as selecções independentes entre si. Designe-se por U o conjunto de todos os indivíduos presentes no local e por B o conjunto dessas pessoas que festejam aniversário no dia X. Assim sendo, o modelo probabilístico associado à experiência aleatória é definido pelo espaço dos possíveis $\Omega = U^n$, a σ-álgebra $\mathcal{P}(\Omega)$ e a medida de probabilidade uniforme.

Designe-se por $A_{1,2,\cdots,k}$, o acontecimento correspondente a escolher n indivíduos, dos quais exactamente os k primeiros indivíduos obtidos na selecção fazem anos no dia X. Este acontecimento pode ser definido pela intersecção (finita) de n acontecimentos mutuamente independentes do seguinte modo:

$$\begin{aligned} A_{1,2,\cdots,k} &= B^k \times \overline{B}^{n-k} \\ &= \bigcap_{i=1}^{k} \left(U^{i-1} \times B \times U^{n-i}\right) \cap \bigcap_{i=k}^{n-1} \left(U^{i} \times \overline{B} \times U^{n-i-1}\right). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{1,2,\cdots,k}) &= \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(U^{i-1} \times B \times U^{n-i}) \cdot \prod_{i=k}^{n} \mathbb{P}(U^{i} \times \overline{B} \times U^{n-i-1}) \\ &= p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \end{aligned}$$

onde $p = \frac{M}{N}$, é a probabilidade de seleccionar um indivíduo do grupo que festeje o seu aniversário no dia X.

Esta probabilidade mantém-se independentemente da ordem como os k indivíduos com aniversário no dia X são seleccionados na amostra dos n indivíduos. Considerem-se os acontecimentos: $A_{i_1,i_2,\cdots,i_k} = \{(i_1, i_2, \cdots, i_n) : \{i_{j_1}, \cdots, i_{j_k}\} \subseteq B \wedge \{i_1, i_2, \cdots, i_n\} \setminus \{i_{j_1}, \cdots, i_{j_k}\} \subseteq \overline{B} \wedge j_1, \cdots, j_k \in \{1, 2, \cdots, n\}\}$. Estes acontecimentos correspondem às diferentes possibilidades de obter entre os n indivíduos da amostra, exactamente k pessoas que festejem o aniversário no dia X. Por conseguinte, $A = \bigcup_{i_1,i_2,\cdots,i_k} A_{i_1,i_2,\cdots,i_k}$.

Ora, os acontecimentos $A_{i_1,i_2,\cdots,i_k}$ são disjuntos dois a dois e equiprováveis. Uma vez que o número total de acontecimentos distintos da forma $A_{i_1,i_2,\cdots,i_k}$ é dado pelo *número de modos distintos de escolher k elementos de entre n elementos dados, não interessando a ordem pela qual eles resultam, tem-se então que*

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i_1,i_2,\cdots,i_k} A_{i_1,i_2,\cdots,i_k}\right) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Concluindo, a probabilidade de, ao seleccionar com reposição n indivíduos de entre um universo de N, onde M fazem anos num mesmo dia, obter k que festejam o seu aniversário no dia X é dada por $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, *onde* $k \in \{0, \cdots, n\}$ *e* $p = \frac{M}{N}$.

Caso 2: *A selecção é feita sucessivamente e sem reposição de indivíduos*

Neste caso, os n indivíduos questionados são todos distintos e o espaço dos possíveis é $\Omega = \{(p_1, p_2, \cdots, p_n) : p_i \in U,$ *com* $i = 1, \cdots, n$ *e* $p_j \neq p_k$ *para* $j \neq k\}$. *A notação considerada é a mesma da utilizada no caso anterior.*

Definam-se os acontecimentos A_j *e* C_j, *para* $j = 1, \cdots, n$, *do seguinte modo:*

$A_j = \{(i_1, i_2, \cdots, i_n) \in U^n : i_j \in B \;\; e \;\; i_k \in U, \quad \forall k \neq j\}$

$C_j = \big\{(i_1, i_2, \cdots, i_n) : i_j \in \overline{B} \;\; e \;\; i_k \in U, \quad \forall k \neq j\big\}.$

Por conseguinte, A_j *é o acontecimento "o j-ésimo indivíduo seleccionado para a amostra festejar o seu aniversário no dia X"e* C_j *é o acontecimento "o j-ésimo indivíduo seleccionado para a amostra não festejar o seu aniversário no dia X".*

Para $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$, *tem-se* $A_{1,2,\cdots,k} = \underbrace{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k}_{k \text{ elementos de } B} \cap \underbrace{C_{k+1} \cap \cdots \cap C_n}_{n-k \text{ elementos de } \overline{B}}$.

Deste modo,

$\mathbb{P}(A_{1,2,\cdots,k}) =$

$$\mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdots \mathbb{P}\left(A_k|\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i\right) \cdot \mathbb{P}\left(C_{k+1}|\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \cdots \mathbb{P}\left(C_n|\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^{n-1} C_i\right)\right).$$

Como, para qualquer $j = 1, \cdots, n$, *se tem:*

$$\mathbb{P}(A_j) = \tfrac{M(N-1)!}{N!} = \tfrac{M}{N} \quad e \quad \mathbb{P}(C_j) = \tfrac{(N-M)(N-1)!}{N!} = \tfrac{N-M}{N}.$$

Então,

$\mathbb{P}(A_{1,2,\cdots,k}) = \overbrace{\dfrac{M}{N} \cdot \dfrac{M-1}{N-1} \cdots \dfrac{M-k+1}{N-k+1}}^{k \quad termos} \cdot \overbrace{\dfrac{N-M}{N-k} \cdots \dfrac{N-M-n+k+1}{N-n+1}}^{n-k \quad termos}$, *para* $k = 0, 1, 2, \cdots, n.$

Assim sendo, como $A = \bigcup_{i_1,i_2,\cdots,i_k} A_{i_1,i_2,\cdots,i_k}$ *e como o número total de acontecimentos distintos da forma* $A_{i_1,i_2,\cdots,i_k}$ *é dado pelo número de modos diferentes de escolher* k *elementos de entre* n *elementos dados, não interessando a ordem pela qual eles resultam, pode-se escrever:*

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i_1,i_2,\cdots,i_k} A_{i_1,i_2,\cdots,i_k}\right) = \binom{n}{k} \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{M-1}{N-1} \cdots \frac{M-k+1}{N-k+1} \cdot \frac{N-M}{N-k} \cdots \frac{N-M-n+k+1}{N-n+1}.$$

Ou de um modo equivalente, obtido através de cálculos elementares com factoriais, $\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

O problema do aniversário é um clássico na Teoria das Probabilidades. São algumas as revelações menos esperadas com que se depara um observador menos atento.

Paradoxo 3.7.3 (Paradoxo do Problema do Aniversário)

Suponha-se, sem perda de generalidade, que não se está na presença de um ano bissexto.

Se num dado local estiverem menos de 365 pessoas é possível que todos festejem o seu aniversário em dias diferentes, no entanto, se estiverem 366 pessoas ou mais, certamente se encontram no grupo duas pessoas cujo dia de aniversário coincide.

Denote-se por x *o número de pessoas de um dado grupo, com* $x < 365$. *A probabilidade de não existirem no grupo duas pessoas que festejem o seu aniversário no mesmo dia é* $\frac{365 \cdot 364 \cdot \cdots \cdot (365-x+1)}{365^x}$.

Designado por p *a probabilidade de no grupo existirem duas pessoas cujo dia de aniversário é o mesmo, tem-se:*

$$\frac{365 \cdot 364 \cdot \cdots \cdot (365-x+1)}{365^x} = \prod_{i=0}^{x-1}\left(1 - \frac{i}{365}\right) = 1 - p.$$

Este valor pode ser aproximado por $1 - e^{-\sum_{i=0}^{x-1}\frac{i}{365}} = 1 - e^{-\frac{x(x-1)}{730}}$.

Surpreendentemente num grupo com apenas 55 pessoas a probabilidade de que duas dessas pessoas festejem o seu aniversário no mesmo dia é de 0,99 crescendo para 0,999 se o grupo contiver 68 pessoas.

x	p
2	*0.003*
...	...
10	*0.12*
...	...
22	*0.48*
23	*0.51*
...	...
55	*0.99*
...	...
68	*0.999*

É quase inacreditável que tão pequena diferença, entre 0,999 e 1, possa conduzir a tão grande diferença entre o número de pessoas dos grupos. Este fenómeno paradoxal é de bastante interesse uma vez que, no dia a dia é, por vezes, importantíssimo que pequenas diferenças conduzam a grandes diferenciais.

A independência de uma sucessão infinita de acontecimentos de um espaço de probabilidade é feita à custa da independência de todas as possíveis famílias finitas de acontecimentos da sucessão.

Definição 3.7.4 (Independência de uma família numerável de acontecimentos) *Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de acontecimentos de um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Os acontecimentos desta família dizem-se independentes se e só se*

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \forall B_1, \cdots, B_i \in \{A_n : n \in \mathbb{N}\}, \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{i} B_j\right) = \prod_{j=1}^{i} \mathbb{P}(B_j).$$

Uma das consequências imediatas da definição é o teorema que se segue.

Teorema 3.7.4

Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de acontecimentos independentes de um dado espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, então

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n).$$

Demonstração:

Sendo $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de acontecimentos independentes então, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, tem-se $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$. Por outro lado, a sucessão $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão decrescente de limite $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Consequentemente, aplicando o Teorema 3.6.1 resulta: $\lim_{n\to+\infty} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\lim_{n\to+\infty} \bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$. Assim, a sucessão $\left(\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. Como o limite, quando existe, é único então, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$.■

Uma questão que se coloca é se a afirmação recíproca do teorema anterior também é verdadeira. De facto, o exemplo que se segue mostra que tal afirmação é falsa.

Exemplo 3.7.8

Considere-se o espaço de probabilidade $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, m)$ *e a sucessão de acontecimentos* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $A_n = \left(0, \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, $m\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = m(\{0\}) = 0$ *e* $\prod_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) = \prod_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} = 0$. *Porém* A_1 *e* A_2 *não são acontecimentos independentes e consequentemente a sucessão* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *não é uma sucessão de acontecimentos independentes.*

Teorema 3.7.5 (Segundo Teorema de Borel-Cantelli)

Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sucessão de acontecimentos independentes de um dado espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *tal que* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$ *então* $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = 1$.

Demonstração:

Como $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de acontecimentos independentes, também a sucessão formada pelos acontecimentos contrários, $\left(\overline{A}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, o é[20]. Por outro lado,

$$\overline{\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right)} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A}_k = \liminf_{n\to+\infty} \overline{A}_n.$$

[20]Se uma família numerável de acontecimentos é independente então qualquer família cujos elementos são combinações booleanas dos elementos da primeira família é independente.

A sucessão $\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A}_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente; logo, pelo Teorema 3.6.1 pode-se concluir que:

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to+\infty} \inf \overline{A}_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A}_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(\overline{A}_k) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=n}^{\infty} (1 - \mathbb{P}(A_k)).$$

Do facto de $1 - x \leq e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}_0^+$, decorre que

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to+\infty} \overline{A}_n\right) \leq \lim_{n\to+\infty} e^{-\sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)} = 0.$$

Uma vez que $\mathbb{P}$ é uma medida de probabilidade, e consequentemente só toma valores no intervalo $[0,1]$, conclui-se que $\mathbb{P}(\lim_{n\to+\infty} \inf \overline{A}_n) = 0$, ou de um modo equivalente, $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = 1$, como se pretendia. ■

A conjugação do primeiro e do segundo teorema de Borel-Cantelli permite afirmar que, para qualquer sucessão de acontecimentos independentes, a probabilidade de ocorrer uma infinidade destes acontecimentos só pode ser ou 0 ou 1. Mais a probabilidade de se realizarem um número finito de acontecimentos dessa sucessão ou é 0 ou 1.

Exemplo 3.7.9

Considere-se a experiência aleatória que consiste em lançar ao ar uma infinidade de vezes, e nas mesmas condições, uma moeda equilibrada, observando em cada lançamento a face voltada para cima. Suponha-se que as realizações sucessivas de cada lançamento são independentes. O espaço dos possíveis é $\Omega = \{E, C\} \times \{E, C\} \times \{E, C\} \times \cdots$. *Considere-se a* σ*-álgebra* $\mathcal{A}$ *gerada pelos acontecimentos do tipo* $A_1 \times A_2 \times \cdots$*, com* $A_n \subseteq \{E, C\}$*, e onde apenas um número finito de elementos dessa família são diferentes de* $\{E, C\}$*.*

Seja A *o acontecimento da* σ*-álgebra* $\mathcal{A}$ *correspondente à ocorrência de escudo uma infinidade de vezes e considere-se a sucessão* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde* $A_n \in \mathcal{A}$ *é o acontecimento "ocorrer escudo no lançamento de ordem n." Nestas circunstâncias,* $A_n = \{E, C\}^{n-1} \times \{E\} \times \{E, C\} \times \cdots$ *e* $A = \limsup_{n\to+\infty} A_n$*.*

Como $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{2}$ *então* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$*. Por outro lado,* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sucessão de acontecimentos independentes, donde pelo segundo teorema de Borel-Cantelli pode-se concluir que* $\mathbb{P}(A) = 1$*. Por outras palavras, é quase certo que o acontecimento "ocorrer escudo uma infinidade de vezes" aconteça quando realizada a experiência de lançar uma moeda infinitas vezes.*

Capítulo 4

Conceitos de Probabilidades

Em [25] afirma-se que probabilidade é uma noção primitiva e consequentemente é somente um ponto de partida não sendo consequentemente definível. Na verdade, só depois de várias "tentativas"de definição, em que cada "tentativa"tentava colmatar os defeitos de outras "tentativas"se chegou à conclusão que, de facto, probabilidade é um conceito primitivo como, por exemplo, em Geometria o conceito de ponto o é, pelo menos na abordagem mais comum.

4.1 O Princípio de Borel

Um dos problemas que se coloca é o da atribuição de probabilidade aos acontecimentos. Este problema tem mais de Filosofia do que propriamente de Matemática e ainda hoje alimenta algumas controvérsias.

Antes da definição axiomática dada por Kolmogoroff, Borel deu algum contributo no sentido de atribuir um valor numérico à probabilidade de certos acontecimentos. O princípio da atribuição de probabilidade estabelecido por Borel aplica-se a acontecimentos resultante de sequências de Bernoulli.

Qualquer número $x \in [0,1]$ pode ser escrito na forma $x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i}{2^i}, x_i \in \{0,1\}$. Considerando os valores x_i referentes a x pode-se introduzir a notação $x \doteq 0.x_1x_2x_3\cdots$, que denotará a expansão binária do número $x \in [0,1]$. Mediante esta representação pode-se associar a este número uma sequência de Bernoulli atribuindo a 1 a obtenção de sucesso e a 0 a obtenção de insucesso, na realização da experiência.

Esta representação não é única uma vez que, por exemplo, o número real $\frac{1}{2}$ pode ser representado por exemplo por 0.1 ou por $0.0111\cdots$, dado que a soma da série geométrica $\sum_{i=2}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$. O facto desta representação não ser única deve-se às expansões finitas denominadas como degeneradas. Dever-se-á considerar apenas as expansões infinitas, ou seja, excluir as expansões degeneradas cujo seu conjunto tem medida de Lebesgue nula, dado que é numerável. Na realidade, existe uma bijecção entre o conjunto das expansões infinitas e os pontos do intervalo real (0,1]. Este processo permite, através de um isomorfismo, identificar o intervalo $(0,1]$ com o conjunto $\mathbb{B}$ das sequências de Bernoulli. Utilizando a medida de Lebesgue pode-se formular um princípio de atribuição de probabilidade que se denomina como Princípio de Borel.

Definição 4.1.1 (Princípio de Borel)

Sejam A um acontecimento associado a uma sequência de Bernoulli e $\mathbb{B}_A$ o subconjunto de $\mathbb{B}$ associado à realização de A e seja $\mathcal{B}_A$ o subconjunto de $(0,1]$ correspondente a $\mathbb{B}_A$. O princípio de Borel diz que a probabilidade da ocorrência de A é $m(\mathcal{B}_A)$, onde m denota a medida de Lebesgue.

Exemplo 4.1.1

Considere-se a experiência aleatória que consiste em lançar uma infinidade de vezes, uma moeda equilibrada ao ar e observar a face voltada para cima.

1. *Seja A o acontecimento: "ocorrer face escudo no primeiro lançamento da moeda". Faça-se corresponder o valor 1 à obtenção de escudo no lançamento de uma moeda e o valor 0 à obtenção de cara na mesma experiência.*

   O acontecimento A está associado ao conjunto de números reais da forma

   $x \circeq 0.1x_2x_3\cdots$, *com* $x_i \in \{0,1\}, i \geq 2$. *Por conseguinte,* $\mathcal{B}_A = \{x \in (0,1] : x \circeq 0.1x_2x_3\cdots\} = (\frac{1}{2},1]$, *razão pela qual a probabilidade do acontecimento A é* $m((\frac{1}{2},1]) = \frac{1}{2}$

2. *Seja B o acontecimento que consiste na ocorrência de face escudo num dos n primeiros lançamentos da moeda. Assim sendo, e mantendo a notação,* $\mathcal{B}_B = \{x \in (0,1] : x = 0.x_1x_2\cdots x_{n-1}1x_{n+1}\cdots\}$. *Fixe-se* $x = 0.x_1x_2\cdots x_{n-1}10000\cdots$. *Então* $\mathcal{B}_B$ *consiste nos intervalos da formas* $\left(x, x+\left(\frac{1}{2^n}\right)\right]$. *Como se pode escolher* $x_1,\cdots,x_{n-1}$ *de* 2^{n-1} *modos diferentes e cada um dos intervalos assim obtidos são disjuntos uns dos outros, tem-se que a probabilidade do acontecimento B é:*

   $2^{n-1}\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2}$

Obviamente que é muito simplista pensar que, no exercício 4.1.1, x_i toma os valores 0 ou 1 com a mesma probabilidade, embora seja bastante intuitivo pensar deste modo. No entanto, a abordagem elaborada por Borel tem a vantagem de estabelecer, de forma rigorosa e genérica, um modo de atribuir probabilidade a um dado acontecimento.

4.2 Probabilidade segundo Laplace

No quotidiano diário o termo probabilidades está ligado à proporção entre o número de resultados favoráveis à realização de determinado fenómeno aleatório e o número total de resultados possíveis de ocorrer na realização experiência que origina esse fenómeno.

A primeira definição conhecida de probabilidade parece dever-se a De Moivre, em 1718, embora só tenha sido claramente explicitada por Laplace, em 1812, com o seu trabalho intitulado *Théorie Analytique des Probabilités* onde enunciou os princípios que devem reger a atribuição de probabilidades a um acontecimento.

Porém, Laplace estabeleceu a noção de probabilidade em casos muito restritos, obedecendo a determinados requisitos:

L_1 : O espaço dos possíveis, Ω, terá de ser necessariamente finito.

L_2 : Os resultados elementares, ou seja, os conjuntos singulares de Ω terão de ter possibilidades iguais de ocorrer. Esta característica é conhecida como *princípio de simetria.*

De facto, Laplace em vez de "supondo os casos igualmente possíveis"prefere dizer "quando nada nos faz esperar que qualquer um dos casos ocorre mais do que qualquer um dos outros, o que os torna, igualmente possíveis". Terão, porventura, sido afirmações como esta última que levaram vários autores, como por exemplo Maistrov, em 1974, a afirmar que Laplace atribui à sua definição um significado subjectivo.

Nestas condições, Laplace definiu probabilidade do seguinte modo:

Definição 4.2.1 (Definição clássica de Probabilidades)

Nas condições L_1 e L_2, a probabilidade de um dado acontecimento associado a uma determinada experiência aleatória é igual ao quociente entre o número de resultados favoráveis à realização desse acontecimento e o número total de resultados possíveis à realização da experiência.

Esta noção encaixa dentro da axiomática atrás exposta no capítulo 3. De facto, nas condições L_1 e L_2 pode-se tomar como modelo de probabilidade o terno $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ onde $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ e $\mathbb{P}$ designa a medida de probabilidade uniforme.

De qualquer modo, e apesar deste conceito modelar com relativo sucesso algumas situações práticas, outras questões técnicas se levantam. Uma primeira questão difícil de contornar envolve a necessidade de verificar o princípio de simetria L_2. Laplace ultrapassou esta questão com os princípios da razão insuficiente e de razão suficiente. Em 1814, Laplace numa das suas obras afirma:

> "Le premier de ces principes est la définition même de la probabilité qui, comme on l'a vu, est rapport du nombre decas favorables à celui de tous les cas possibles.
> Mais celá suppose les divers cas également possibles. S'ils ne le sont pas, on déterminera d'abord leurs possibilités respectives dont la juste appréciation est un des points les plus délicats de la théories des Hasards".

Definição 4.2.2 (Princípio da razão insuficiente)

Se não houver razões objectivas suficientes para considerar que os resultados elementares não são igualmente possíveis, devem ser então considerados como igualmente possíveis[1].

Definição 4.2.3 (Princípio da razão suficiente)

Quando se examinam todos os conhecimentos que se possuem em relação ao acontecimento cuja probabilidade se estuda e o resultado é uma simetria de possibilidades para todos os casos então os resultados elementares devem ser então considerados como igualmente possíveis.

No entanto, existem situações onde a aplicação dos princípios da razão suficiente e da razão insuficiente para verificar o princípio da simetria parece bastante fiável mas na prática prova-se o contrário. Por exemplo, tudo levaria a crer que o nascimento de crianças de ambos os sexos fosse equiprovável, no entanto, nascem mais crianças do sexo feminino do que masculino. Outra situação onde o princípio de simetria parece aplicável e na prática não o é, prende-se com a escolha de um número entre 1 e 10. Todos os 10 números parecem ter a mesma probabilidade de serem escolhidos. Porém nota-se maior tendência em seleccionar o número 7 do que qualquer um dos outros números. Este facto, tem sido justificado por várias situações míticas que foram durante várias épocas transformando o número 7.

Para comprovar tal facto foi elaborado um pequeno estudo em que era pedido aos alunos que escolhessem individualmente um de dois números. Os números propostos foram o 4 e o 7. O estudo teve como população alvo os alunos das Escolas Secundárias D. Inês de Castro e D. Pedro I de Alcobaça, as Escolas Básicas da Nazaré e Frei Estevão Martins de Alcobaça. No total foram inquiridos 668 alunos dos quais 417 escolheram o número 7 e 251 escolheram o número 4. Estes exemplos mostram que os princípios da razão insuficiente e da razão suficiente devem ser aplicados com precaução!

Apesar do conceito de probabilidade de Laplace ser um dos mais utilizados em situações concretas do quotidiano diário, existem algumas questões interessantes que durante anos e anos intrigaram quem se dedicava ao estudo da Teoria das Probabilidades.

Uma questão que se coloca muitas vezes perante os problemas de aplicação do conceito de Laplace é o facto de existirem vários processos para calcular probabilidades de um mesmo acontecimento. Frequentemente é possível, para um mesmo fenómeno aleatório, construir distintos modelos de probabilidade de onde surjam fracções equivalentes para representar a probabilidade de um acontecimento e para se concluir que ambos os modelos estão de acordo com os princípios da razão suficiente e da razão insuficiente. Veja-se um exemplo:

[1] Também conhecido como Princípio da igual distribuição da ignorância

Exemplo 4.2.1

Oito amigos sentam-se ao longo dos lados maiores de uma mesa rectangular, quatro de cada lado. O João e a Maria são dois desses amigos e pretendem ficar sentados frente a frente. Qual é a probabilidade de tal facto acontecer?

1	2	3	4
5	6	7	8

Existem pelo menos dois processos diferentes de modelar o problema e portanto de o resolver.

1º Processo

Pense-se que qualquer uma das oito pessoas se pode sentar em qualquer um dos oito lugares disponíveis. O espaço dos possíveis é o conjunto formado por todas as possibilidades das oito pessoas se sentarem nos oito lugares. Designando cada pessoa por um número entre 1 e 8, o espaço dos possíveis será:

$\Omega = \{(i_1, i_2, \cdots, i_8) : i_j = 1, 2, \cdots 8; i_j \neq i_k \forall j \neq k \in \{1, 2, \cdots, 8\}\}$

Assim sendo, o número de casos possíveis é igual a $8!$. *Os casos favoráveis são as possibilidades que o João e Maria têm de ficar sentados de frente um para o outro podendo os restantes lugares ser ocupados de qualquer maneira. O João e a Maria podem sentar-se de frente um para o outro, em quatro situações distintas, trocarem de lado da mesa um com o outro e deixar os restantes seis amigos ocupar qualquer posição. Assim sendo o número de casos favoráveis é igual a* $4 \cdot 2 \cdot 6!$ *Deste modo, a probabilidade do João e da Maria ficarem sentados em frente um do outro é igual a* $\frac{4 \cdot 2 \cdot 6!}{8!} = \frac{1}{7}$.

Esta abordagem do problema está associada ao princípio da razão suficiente uma vez que foram analisadas todas as possibilidades de colocar os oito amigos e daí resultaram simetrias em todas as possibilidades.

2º Processo

A aplicação directa do princípio da razão insuficiente conduz directamente ao resultado $\frac{1}{7}$. *De facto, assumindo que qualquer pessoa se pode sentar em qualquer lugar* *e colocando o problema na perspectiva do João qualquer uma das outras sete pessoas poderia sentar-se de frente para ele, porém só uma é favorável à realização do acontecimento em questão.*

É bastante frequente que uma mesma situação seja modelada por diferentes modelos de probabilidades consoante distintas interpretações da experiência em causa e consequentemente diferentes espaços dos possíveis. Veja-se um exemplo:

Exemplo 4.2.2

Uma professora resolveu levar os seus 15 alunos a ver um filme. Como o cinema tem filas de precisamente 15 cadeiras, comprou os bilhetes correspondentes a uma fila inteira e distribuiu-os ao acaso pelos alunos. A Ana, a Bela e a Carla gostavam de ficar as três juntas e numa das pontas da fila. Qual é a probabilidade de isso acontecer?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

As três amigas querem ficar nos lugares 1, 2 e 3 ou 13, 14 e 15. Existem pelo menos três processos de modelar o problema e portanto de o resolver. Associados a cada um dos espaços dos posssíveis descritos em cada processo deve ser considerada a σ-álgebra constituída por todos os subconjuntos do respectivo espaço dos possíveis e a medida de probabilidade uniforme.

1º Processo

Pense-se apenas nos três bilhetes destinados às três amigas, não interessando a ordem como elas ocuparão depois esses três lugares. O espaço dos possíveis é o conjunto dos ternos não ordenados $\Omega = \{\{i, j, k\} : i, j, k = 1, 2, \cdots, 15; i \neq j \neq k\}$. *Assim sendo, o número de casos possíveis é o número de diferentes maneiras de elas receberem os 3 bilhetes de um conjunto de 15, ou seja,* $\binom{15}{3} = 455$. *O número de casos favoráveis é apenas 2:* $\{1, 2, 3\}$ *e* $\{13, 14, 15\}$. *Assim sendo, a probabilidade das três amigas ficarem juntas numa das pontas é* $\frac{2}{455}$.

2º Processo

Pense-se nos três bilhetes destinados às três amigas, mas interessando agora a ordem como elas ocuparão depois esses três lugares. Continua-se a ignorar os restantes

12 bilhetes. O espaço dos possíveis é o conjunto dos ternos ordenados $\Omega = \{(i, j, k) : i, j, k = 1, 2, \cdots, 15; i \neq j \neq k\}$. *O número de casos possíveis é portanto o número de maneiras distintas de elas receberem 3 bilhetes de um conjunto de 15, mas em que a ordem por que recebem os bilhetes é importante. Assim sendo, o número de casos possíveis é* $\frac{15!}{12!}$*= 2730. Se os bilhetes que elas receberem forem 1, 2 e 3, como a ordem interessa, há seis maneiras de elas ocuparem os lugares (permutações de 3). O mesmo se passa para os bilhetes 13, 14 e 15. Logo, o número de casos favoráveis é igual a* $2 \cdot 3!$, *ou seja, 12. Assim sendo, a probabilidade das três amigas ficarem juntas numa das pontas é* $\frac{12}{2730} = \frac{2}{455}$.

3º Processo

Desta vez, considere-se todas as maneiras como os 15 alunos se podem sentar nos 15 lugares. O espaço de possíveis é constituído por todas as permutações dos 15 alunos pelas cadeiras, ou seja, $\Omega = \{(i_1, i_2, \cdots, i_{15}) : i_1, i_2, \cdots, i_{15} = 1, 2, \cdots, 15; i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_{15}\}$ *Os casos possíveis são portanto as permutações de 15, ou seja,* $15!$. *Se as três amigas ficarem nos lugares 1, 2 e 3, podem permutar entre si, e os outros 12 alunos também. O mesmo se passa se ficarem nos três últimos lugares. Então, o número de casos favoráveis é dado por* $2 \cdot 3! \cdot 12!$. *Assim sendo, a probabilidade das três amigas ficarem juntas numa das pontas é* $\frac{2 \cdot 3! \cdot 12!}{15!} = \frac{2}{455}$.

Um erro bastante frequente na maioria dos discentes das escolas portuguesas é o de não verificar a aplicabilidade do conceito de probabilidade de Laplace dando como adquirido o princípio da simetria. A questão da equiprobabilidade dos resultados tomados como elementares tem tanto de importante como por vezes de discutível.

Paradoxo 4.2.1 (Paradoxo do dado)

Considere-se a experiência aleatória que consiste em lançar dois dados equilibrados com as faces numeradas de 1 a 6 e somar os dois números contidos nas faces voltadas para cima. Obviamente que as somas possíveis de ocorrer são os números inteiros compreendidos entre 2 e 12. É também claro que nem todas as possíveis somas têm o mesmo número de possibilidades de ocorrência.

O problema que se coloca de seguida foi apresentado a Galileu (1564-1642), mas resolvido por Gerolamo Cardano (1501-1576).

As somas 9 e 10 podem ser obtidas de dois modos diferentes cada:

$$9{=}3{+}6{=}4{+}5 \qquad e \qquad 10{=}6{+}4{=}5{+}5$$

No entanto, pode-se observar que obter uma soma igual a 9 é mais frequente do que obter soma igual a 10, facto que leva a crer contradiria o conceito clássico de probabilidade, colocando em confronto o conceito clássico de probabilidade e a intuição que advém da repetição da experiência.

O erro que Galileu cometeu, e que também Cardano começou por cometer consistia em ignorar a ordem dos factores nas respectivas somas, dito de outra forma, não foi respeitada a condição L_2 para a aplicação do conceito de probabilidade segundo Lapalace.

Na realidade, existem quatro maneiras diferentes de obter uma soma igual a 9 (3+6, 6+3, 4+5, 5+4) e apenas três formas de obter uma soma igual a 10 (6+4, 4+6, 5 +5). Deste modo, é natural esperar que a soma 9 seja mais frequente.

Uma outra questão paradoxal envolve a transitividade e a atribuição de probabilidade a determinados acontecimentos.

Definição 4.2.4 (Intransitividade)

Considerem-se n sacos iguais, $S_1, S_2, \cdots, S_n$, com $j \in \mathbb{N}$ bolas cada, indistinguíveis ao tacto . Cada bola contem um e um só número. Diz-se que o saco S_i ganha ao saco S_j se o número da bola retirada do saco S_i for superior ao retirado em S_j.

Considere-se a experiência aleatória que consiste em retirar uma e uma só bola de cada um dos referidos sacos e observar os números contidos nas bolas saídas.

Diz-se que os sacos são intransitivos se a probabilidade do saco S_i ganhar ao saco S_{i+1}, para todo $i \in \{1, \cdots, n-1\}$, for superior a $\frac{1}{2}$ e o mesmo ocorrer com a probabilidade do saco S_n ganhar ao saco S_1.

Paradoxo 4.2.2 (Paradoxo da transitividade)

Considere-se a seguinte experiência aleatória que consiste na realização de um jogo com três sacos, S_1, S_2 e S_3 com seis bolas (indistinguíveis ao tacto) cada um, entre dois concorrentes X e Y obedecendo aos seguintes passos:

- P_1: *O jogador X inscreve, como entender e de livre vontade, todos os números inteiros de 1 a 18, um em cada uma das bolas dos três sacos, sem repetir nenhum número;*

P_2: *O jogador Y analisa as bolas presentes nos três sacos numeradas pelo jogador X e escolhe um dos sacos;*

P_3: *O jogador X escolhe um dos dois sacos que restam.*

P_4: *Os jogadores X e Y retiram uma bola de cada um dos seus sacos e o jogador que obtiver o maior número na bola retirada ganha.*

Parece normal pensar que o jogo será mais favorável a Y uma vez que este pode escolher o ou um dos "melhores"sacos. Deste modo, Y teria maior probabilidade de vencer. Contudo, paradoxalmente o oposto pode efectivamente acontecer, desde que X numere as bolas de tal forma que ganhe com maior probabilidade do que Y, independentemente da escolha que Y fizer. De facto, tal numeração é possível. Na realidade para tal acontecer X deverá numerar as bolas de cada saco de forma que qualquer um dos três sacos tenha maior probabilidade de ganhar sobre um dos outros dois e menor sobre o terceiro, o que é possível. Veja-se um exemplo:

Bolas do saco $S_1 \Rrightarrow$ *18, 10, 9, 8, 7 e 5;*

Bolas do saco $S_2 \Rrightarrow$ *17, 16, 15, 4, 3 e 2;*

Bolas do saco $S_3 \Rrightarrow$ *14, 13, 12, 11, 6 e 1.*

Desta forma denotando por $G_{i,j}$ *o acontecimento "o saco* S_i *ganhar ao saco* S_j *resulta:*

$\mathbb{P}(G_{1,2}) = \frac{21}{36}$; $\quad \mathbb{P}(G_{2,3}) = \frac{21}{36}$; $\quad \mathbb{P}(G_{3,1}) = \frac{21}{36}$

Assim, se o jogador X numerar os dados daquela forma, ou de outra similar, estará em melhor posição para vencer o jogo do que o jogador Y. Basta para isso que o jogador X escolha o dado com mais possibilidades do que o escolhido pelo jogador Y.

Pode-se construir uma "espécie de generalização" deste problema para um qualquer número de sacos cada um com tantas bolas quantos os sacos disponíveis. Existem várias formas de numerar as referidas bolas de modo a que os sacos verifiquem a intransitividade, a que se apresenta é uma das que utiliza menos números para numerar as bolas.

Exemplo 4.2.3

Considerem-se n *sacos de modo que o saco* S_i *contenha* $n-i+1$ *bolas numeradas com o número* $n-i+1$ *e as restantes* $i-1$ *bolas com o mesmo número* $2n-i+1$. *Assim sendo,*

- *o saco* S_1 *tem todas as bolas numeradas com o número* n.
- *o saco* S_2 *tem* $n-1$ *bolas numeradas com o número* $n-1$ *e* 1 *bolas numeradas com o número* $2n-1$;
- *o saco* S_3 *tem* $n-2$ *bolas numeradas com o número* $n-2$ *e* 2 *bolas numeradas com o número* $2n-2$;
- $\cdots$
- *o saco* S_i *tem* $n-i+1$ *bolas numeradas o número* $n-i+1$ *e* $i-1$ *bolas numeradas com o número* $2n-i+1$;
- $\cdots$
- *o saco* S_n *tem 1 face numerada o número 1 e* $n-1$ *bolas numeradas com o número* $n+1$.

Considere-se a experiência aleatória que consiste na realização de um jogo com os n *sacos com os passos e notações do exemplo anterior.*

Pode-se calcular a probabilidade do acontecimento $G_{i,i+1}$, *para* $i = 1, \cdots, n-1$, *utilizando uma tabela de dupla entrada, como a da figura onde a parte assinalada com o símbolo* ■ *representa o acontecimento em questão.*

Nestas circunstâncias, para $n > 2$, *tem-se:*

$\mathbb{P}(G_{i,i+1}) = \frac{n\cdot(i-1)+(n-i+1)\cdot(n-i)}{n^2} = \frac{1}{2} + \frac{n^2-2in+2i(i-1)}{2n^2}$, *como se deduz de forma simples da tabela 4.1.*

Se o numerador do segundo termo for positivo tem-se que a probabilidade do acontecimento $G_{i,i+1}$ *é superior a* $\frac{1}{2}$.

Para $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$, *o numerador* $n^2-2in+2i(i-1)$ *é igual a* $n(n-2i)+2i(i-1)$ *e assim sendo é positivo. Consequentemente a probabilidade pretendida é maior que* $\frac{1}{2}$.

<table>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="6">S_i</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="3">$n-i+1$ vezes</td><td colspan="3">$i-1$ vezes</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td>$n-i+1$</td><td>$\cdots$</td><td>$n-i+1$</td><td>$2n-i+1$</td><td>$\cdots$</td><td>$2n-i+1$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">S_{i+1}</td><td rowspan="3">$n-i$ vezes</td><td>$n-i$</td><td>■</td><td>■</td><td>■</td><td>■</td><td>■</td><td>■</td></tr>
<tr><td>$\cdots$</td><td>■</td><td>■</td><td>■</td><td>■</td><td>■</td><td>■</td></tr>
<tr><td>$n-i$</td><td>■</td><td>■</td><td>■</td><td>■</td><td>■</td><td>■</td></tr>
<tr><td rowspan="3">i vezes</td><td>$2n-i$</td><td></td><td></td><td></td><td>■</td><td>■</td><td>■</td></tr>
<tr><td>$\cdots$</td><td></td><td></td><td></td><td>■</td><td>■</td><td>■</td></tr>
<tr><td>$2n-i$</td><td></td><td></td><td></td><td>■</td><td>■</td><td>■</td></tr>
</table>

Tabela 4.1: Tabela de dupla entrada para cálculo da probabilidade do acontecimento $G_{i,i+1}$

Para $\frac{n}{2} < i \leq n-1$, *o numerador* $n^2 - 2in + 2i(i-1)$ *é igual a* $n^2 - n(i+1) - n(i-1) + 2i(i-1) = n(n-i-1) + (i-1)(2i-n)$ *e deste modo também é positivo. Pelo que a probabilidade pretendida é maior que* $\frac{1}{2}$.

Assim sendo, $\mathbb{P}(G_{i,i+1}) > \frac{1}{2}$, *para* $i = 1, \cdots, n-1$.

Construindo uma tabela de dupla entrada parecida com a Tabela 4.1 conclui-se que: $\mathbb{P}(G_{n,1}) = \frac{n(n-1)}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}$, *que também é superior a* $\frac{1}{2}$, *uma vez que* $n > 2$.

Tem-se então a intransitividade de n *sacos cada um com* n *bolas,* $n > 2$, *utilizando apenas* $2n-1$ *números para numerar as bolas dos referidos sacos.*

Apesar de bastante criticado o conceito clássico de probabilidades continua a ser aceitável em numerosos casos em que a simetria das situações em causa a justificam. Na realidade, este modelo probabilístico é de grande utilidade quando ajustado a uma realidade concreta e tem a vantagem de ser um modelo particular bastante intuitivo inserido numa teoria axiomática geral, como aliás já foi referenciado. Porém, muitos autores, como por exemplo Terrence Fine em 1973 (veja-se [8]) criticam este conceito sob diversos pontos de vista que ainda hoje são controversos. Alguns desses pontos são abaixo descritos:

1. *O que significam casos elementares equiprováveis?*

   De facto, cai-se num ciclo vicioso quando se considera o conceito clássico de probabilidade como definição e não como uma regra de cálculo, o que levaria a que a definição clássica de probabilidade envolvesse o próprio conceito de probabilidade, aquilo que se denomina como definição circular. Um dos modos de ultrapassar este problema é considerar o termo "casos elementares equiprováveis" como uma noção primitiva e portanto não envolvendo a própria ideia de probabilidade.

2. *Como é que se pode reconhecer se os casos elementares são ou não equiprováveis?*

   A resposta a esta questão passa pelos princípios já apresentados. Alguns autores, como [24], apresentam outro princípio: o princípio da indiferença. Este princípio faz apelo às propriedade de simetria e de homogeneidade da experiência em causa, em tudo este princípio parece igual ao princípio da razão suficiente denominado de outra forma.

3. *Existirão, na prática, casos elementares equiprováveis?*

   Parece bastante aceitável afirmar que não existem dados perfeitos, moedas equilibradas, etc. Deste modo, o conceito clássico é, na maioria das vezes, aplicável a situações idealizadas. Portanto, apesar de bastante intuitivo e de parecer um dos modelos mais aplicáveis no quotidiano diário o conceito clássico de probabilidades não é aplicável à maioria das situações concretas não idealizadas.

4. *Como calcular probabilidades de acontecimentos quando o número de casos possíveis não for finito, nem sequer numerável?*

   Em variadas situações, e apesar do número de casos possíveis não ser finito, pode-se entender o mesmo problema sob outro prisma que permita, fazendo apelo ao princípio de simetria, aplicar o conceito clássico. No entanto, na maioria das situações tal processo não é possível, não sendo por isso mesmo possível aplicar este conceito.

4.3 Conceito geométrico de probabilidade

George Buffon (1707-1788), famoso cientista francês, fundou um novo ramo da Teoria das Probabilidades. Num dos seus escritos de 1733, editado somente em 1777, Buffon discute a solução do problema da agulha (Needle problem) recorrendo a um método geométrico em detrimento do método combinatório utilizado no conceito clássico de Laplace.

Este tipo de problemas consiste na escolha de um conjunto de pontos seleccionados aleatoriamente de um determinado domínio, onde os pontos se encontram uniformemente distribuídos.

A probabilidade de seleccionar aleatoriamente uma porção de um dado domínio será dada pela proporção entre a medida da porção escolhida e a medida total do domínio[2]. Aparece então um conceito de probabilidade envolvendo medidas geométricas.

Este conceito podia ser entendido como uma extensão do conceito clássico de probabilidade. De qualquer modo, o conceito clássico de probabilidade não pode ser aplicado quando Ω não for finito, mas existem situações onde o princípio de simetria continua a prevalecer embora com outros acontecimentos que não os elementares, ou seja, identificando a situação com outra similar em que o espaço seja finito.

[2]Entendia-se por medida, o comprimento, a área, o volume ou o hipervolume conforme a dimensão do domínio em causa.

Exemplo 4.3.1

Considere-se um círculo dividido em quatro partes geometricamente iguais, segundo dois diâmetros perpendiculares, numerados e pintados de quatro cores diferentes azul, amarelo, vermelho e verde. Qual é a probabilidade de ao escolher, ao acaso, um ponto deste círculo, escolher um ponto do sector pintado de verde?

O problema de Ω ser infinito pode ser facilmente ultrapassado pensando que o problema em causa é equivalente a escolher uma de quatro secções do círculo geometricamente iguais, pelo que a probabilidade pedida é $\frac{1}{4}$.

Porém se os sectores não fossem geometricamente iguais não seria possível aplicar a definição 4.2.1 no exemplo acima.

Definição 4.3.1 (Conceito geométrico de probabilidade)

Seja R um certo domínio e dentro dele considere-se um outro domínio D com uma fronteira bem definida. Admitindo que a probabilidade de acertar em qualquer porção de R é proporcional à medida do seu domínio e é independente da sua posição e forma, então a probabilidade de que um ponto lançado aleatoriamente sobre R cair em D é dado por

$$\mathbb{P}(D) = \tfrac{m(D)}{m(R)},$$

onde m designa a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$, com n convenientemente escolhido.

Seja $R \subseteq \mathbb{R}^n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, então o espaço de probabilidade associado a este conceito de probabilidade é $(R, \mathcal{B}_R, m_{\mathbb{R}^n})$, onde $\mathcal{B}_R$ representa a σ-álgebra constituída pela intersecção dos elementos da σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}^n$ com o domínio R e $m_{\mathbb{R}^n}$ designa a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$. Nestas circunstâncias, é fácil verificar que o conceito geométrico de probabilidade encaixa na axiomática de Kolmogorov.

À definição 4.3.1 estão também associados alguns paradoxos e questões de interpretação menos claras.

Por exemplo, sabe-se que a probabilidade de acertar num determinado ponto fixo de um dado alvo (determinada região do plano) é zero[3]. Mais, é estranho que a probabilidade de acertar num determinado número finito de pontos seja precisamente a mesma que acertar num só desses pontos[4]. Por outro lado, o próprio alvo é a união de conjuntos de probabilidade nula, ou seja, pode-se obter 1 como soma de zeros, aquilo que em linguagem usual se diz *de vários nadas se pode fazer muita coisa.* Questões

[3]Uma vez que é um ponto isolado de uma variável aleatória contínua, no entanto, não é impossível acertar nesse ponto

[4]Uma vez que uma soma finita de zeros é ainda zero

como esta estão condensadas no paradoxo que se segue e que é similar ao paradoxo de Zenão sobre impossibilidade do movimento há 2500 anos [5]. A questão é precisamente a mesma: *como é que juntando muitos nadas se pode formar algo?* A resposta a este tipo de paradoxos foi estudada durante anos, tendo encontrado respostas satisfatórias com os trabalhos de Abraham Robinson.

Paradoxo 4.3.1 (Paradoxo da probabilidade nula)

Escolha-se aleatoriamente um ponto do intervalo $(0,1)$*. A probabilidade de escolher o ponto* $\frac{1}{2}$ *é zero, assim como a probabilidade de escolher um qualquer dos pontos* $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \cdots$*, embora pareça que a escolha destes últimos seja mais provável.*

Será possível diferenciar as probabilidades destes dois acontecimentos?[6]

A resposta é sim e a sua explicação pode ser dada através da noção de infinitésimo. A resposta à questão consiste em diferenciar o zero de um infinitésimo. Usando a noção de infinitésimo pode-se afirmar que em qualquer modelo de probabilidade o único acontecimento de probabilidade nula é o acontecimento impossível, os restantes acontecimentos de probabilidade nula são afinal acontecimentos cuja probabilidade é um infinitésimo. Além disso, para qualquer acontecimento A *com probabilidade* $\mathbb{P}(A) \in [0,1]$*, poderão existir vários acontecimentos cuja probabilidade difere de* $\mathbb{P}(A)$ *apenas por um infinitésimo. Pode-se assim afirmar que a probabilidade de escolher um qualquer ponto de um dado intervalo é menor do que a probabilidade de escolher dois pontos distintos desse mesmo intervalo, uma vez que as duas probabilidades diferem por um infinitésimo.*

Existem outras curiosidades interessantes na atribuição de probabilidades, como as transformações biunívocas, que podem mudar completamente o valor da probabilidade. Suponha-se, por exemplo, que se pretende escolher aleatoriamente um ponto do intervalo $(0,1)$. A probabilidade do número escolhido ser inferior a $\frac{1}{2}$ é $\frac{1}{2}$. No entanto se todos os números do intervalo (0,1) forem elevados ao quadrado, a probabilidade do acontecimento anterior é $\frac{1}{4}$. A escolha da razoabilidade da atribuição de probabilidade a um dado acontecimento não é sempre possível só em termos da básica e pura lógica da experiência. Esta essência está presente no próximo paradoxo publicado, em 1889, no livro "Calcul des probabilités"de Joseph Louis Bertrand.

[5] Podem ser encontradas mais informações sobre os paradoxo de Zenão no endereço electrónico http://plato.stanford.edu/entries/paradox-zeno/

[6] A teoria de Robinson constitui uma firme fundamentação sobre a utilização de infinitésimos. Depois dos trabalhos de Robinson acredita-se que observando um qualquer ponto da recta real podemos examinar não só esse ponto mas também uma grande quantidade de outros números reais, infinitesimamente próximos desse ponto, ou seja, não é zero mas sim um infinitésimo.

Paradoxo 4.3.2 (Paradoxo de Bertrand)

Escolha-se uma corda num dado círculo. Qual é a probabilidade, de que o comprimento dessa corda exceda o lado de um triângulo equilátero inscrito no círculo?

Esta questão estabelece um paradoxo pois a sua resolução sugere que o valor daquela probabilidade não é univocamente determinado. Ou seja, diferentes métodos conduziram a diferentes resultados. Pode-se encontrar uma versão bastante interessante deste paradoxo em [25] em que o autor faz substituir o lado do triângulo inscrito pelo próprio raio. A questão que se coloca é: como é que o mesmo acontecimento pode ter diferentes atribuições de probabilidade?

Método 1

Escolha-se uniformemente [7] *e ao acaso um ponto P do círculo dado. Este ponto determina uma única corda paralela à corda inicial de ponto médio, M, casualmente escolhido. Esta corda é maior que o lado do triângulo inscrito se o ponto médio M for interior ao círculo inscrito no dito triângulo. O raio do círculo inscrito é metade do original pelo a sua área é $\frac{1}{4}$ da do círculo original. Consequentemente, a probabilidade de escolher um ponto dentro do círculo escolhido é $\frac{1}{4}$.*

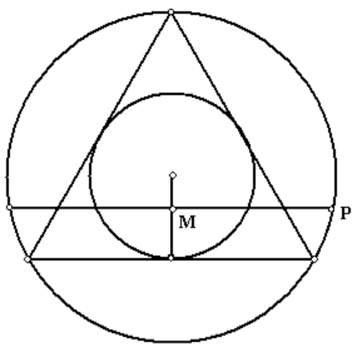

Figura 4.1: Método 1

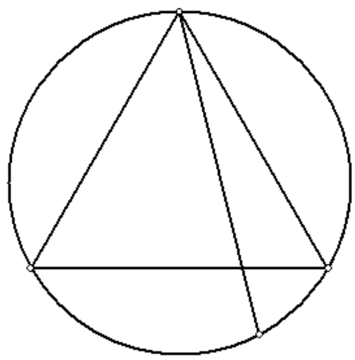

Figura 4.2: Método 2

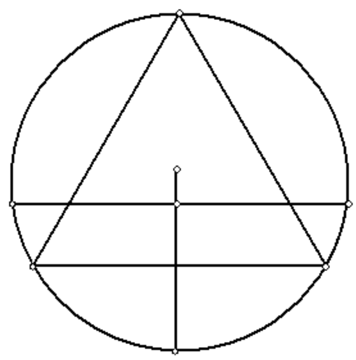

Figura 4.3: Método 3

Método 2

Devido ao princípio de simetria, um dos extremos da corda pode ser um qualquer ponto fixo da circunferência que delimita o círculo. Então fixe-se esse extremo num

[7] Admitir que a escolha é uniforme é o mesmo que dizer que o modelo é equidistribuído.

dos vértices do triângulo. Escolha-se o outro extremo da corda uniformemente e ao acaso. Os três vértices do triângulo dividem a referida circunferência em três arcos geometricamente iguais. A corda escolhida aleatoriamente terá um comprimento superior ao lado do triângulo equilátero se a corda intersectar o triângulo noutro ponto para além do vértice inicialmente escolhido, ou seja, se pertencer ao arco menor do ângulo inscrito na circunferência definido pelos lados do triângulo que se intersectam no referido vértice. Deste modo a probabilidade pedida é $\frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} = \frac{1}{3}$.

Método 3

Escolha-se uniformemente e ao acaso um ponto num raio do círculo e considere-se a corda que é perpendicular a esse raio por esse ponto. Então a corda escolhida será maior que o lado do triângulo equilátero inscrito se o ponto escolhido estiver contido na metade do raio mais próxima do centro do círculo. Assim, pelo princípio de simetria não interessa qual foi o raio inicialmente escolhido pelo que a probabilidade pedida é $\frac{1}{2}$.

Os diferentes resultados obtidos neste problema são considerados um paradoxo se se acreditar que a escolha uniforme e aleatória determina univocamente a probabilidade em questão. O paradoxo faz alusão a três diferentes escolhas uniformes de pontos o que, no senso comum, parece natural. Na opinião de Poincaré, em Calcul des Probabilités, Paris, 1912, se não existirem mais informações preliminares deverá ser o terceiro método o adoptado. Esta escolha deve-se ao facto de que se se tiver dois conjuntos de cordas que são geometricamente equivalentes então ter-se-á a mesma probabilidade de se escolher aleatoriamente uma corda num conjunto ou no outro. Rény, em 1970, no seu tratado de probabilidades, Probability, adverte que muitos erros, ocorridos em diversos problemas, são devidos a uma má descrição do espaço dos possíveis associado à experiência aleatória em causa ou à forma pouco explícita de como essa experiência vai ser realizada ou até mesmo por um condicionamento indevido. Na realidade este paradoxo advém da ambiguidade existente em expressões frequentemente utilizadas como escolher ao acaso ou extrair ao acaso, interpretações estas legítimas mas que conduzem a distintas atribuições de probabilidade.

4.4 Conceito frequencista de probabilidade

Autores como Kolmogoroff, Cramer, Neyman ou Fréchet entre outros, utilizaram um outro conceito de probabilidade. O conceito frequencista de probabilidade foi aceite e adoptado por muitos estatísticos, nomeadamente Venn, von Mises, Reichenbanch ou Salmon, durante a primeira metade do século passado, de forma quase unânime e é ainda hoje aceite por muitos. Este conceito baseia-se na ideia que a probabilidade de um de determinado fenómeno aleatório pode ser medida pela frequência relativa desse fenómeno numa sucessão numerosa de experiências idênticas e independentes. De acordo com o princípio da regularidade estatística é de esperar que à medida que o número de realizações da experiência aumente as frequências relativas de determinado fenómeno tendam a estabilizar em torno de um determinado valor [8] Esta intuição é suportada pela conhecida Lei dos grandes números de Bernoulli[9].

A primeira versão desta Lei é devida a Jacob Bernoulli (1654-1705) e publicada, em 1713, alguns anos após a sua morte. O próprio Bernoulli não usou a noção de Lei dos grandes números, foi Poisson que em 1837 o fez pela primeira vez.

Teorema 4.4.1 (Lei dos grandes números de Bernoulli)

Considere-se uma determinada experiência aleatória e seja A um acontecimento associado a essa experiência. Denomine-se por $f_n(A)$ a frequência relativa de A em n realizações da experiência sempre nas mesmas condições. Então,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|f_n(A) - p| \leq \varepsilon) = 1,$$

onde $p \in [0,1]$ é a probabilidade do acontecimento A.

Da Lei dos Grandes Números resulta o conceito frequencista para a Probabilidade: a probabilidade de um acontecimento A é dado pelo valor limite da frequência relativa do acontecimento A quando o número de realizações da experiência, sempre nas mesmas condições, aumenta indefinidamente. Este conceito de probabilidade é aquele, de entre os conceitos atrás expostos, que permite sair de um quadro restringido a determinadas propriedades sem as quais não seria possível aplicar tais conceitos. Por outro lado esta é sem dúvida, do ponto de vista prático, o conceito mais trabalhoso e, por vezes, até um pouco utópico.

Uma das primeiras abordagens do conceito frequencista de probabilidade deve-se a Venn, em 1866, ao tentar exprimir probabilidade através do limite de frequências relativas de sequências de tamanho considerável em situações possíveis de repetição em idênticas condições.

O conceito frequencista de probabilidade verifica a axiomática de probabilidade descrita no Capítulo 3. De facto, tendo em conta as propriedades da função frequência relativa, prova-se que a função $\mathbb{P}$ definida do seguinte modo $\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to+\infty} f_n(A)$ é uma medida de probabilidade.

[8] Alguns autores, como [13], designam este conceito por definição estatística de probabilidade.

[9] Não é ainda universalmente aceite que tal Lei exista, veja-se [35].

Algumas das críticas apontadas ao conceito frequencista de probabilidades prendem-se com a falta de suporte empírico da noção de independência que este conceito requer, assim como, ao carácter finito da experiência humana em contraste com o carácter infinito da sequência indefinidamente grande de realizações da experiência.

Apesar de todas estas condicionantes, em 1920, von Mises apresentou um trabalho onde construiu um sistema axiomático associado ao conceito frequencista de probabilidade, baseado em *colectivos*. Um colectivo é uma sucessão de 0 e 1 onde os elementos 1 e 0, estabelecem a ocorrência ou não (respectivamente) do acontecimento em estudo em cada realização da experiência.

Segundo von Mises a frase *a probabilidade de obter escudo no próximo lançamento de uma moeda é* $\frac{1}{2}$ não é relativa ao próximo lançamento da moeda mas a toda uma classe (colectivo) da qual o próximo lançamento é apenas um e só um elemento.

Segundo von Mises um colectivo deve verificar os dois axiomas seguintes:

M_1 *Axioma do limite*: a frequência relativa do elemento 1, f_n, tende, no sentido da análise, para um valor limite p, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = p$.

M_2 *Axioma da aleatoriedade*: quando se escolhe uma subsucessão infinita por meio de um método em que a escolha de cada elemento não depende da natureza desse elemento, a frequência relativa do elemento 1 na subsucessão tende para o mesmo número p.

O limite comum das frequências relativas no colectivo e nas subsucessões obtidas em conformidade com M_2 é o valor da probabilidade do elemento 1, e portanto do acontecimento em estudo definido pelo elemento 1.

O axioma M_2 desempenha um papel fundamental, a sua importância é bem patente no seguinte exemplo:

Exemplo 4.4.1

Considere-se a sucessão $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots$*, em que* $f_n \longrightarrow \frac{1}{2}$*, mas na subsucessão que se obtém suprimindo o (i+1)-ésimo termo se e só se o i-ésimo termo for 1, escolha que de facto é independente da natureza do i-ésimo termo, obtém-se deste modo a sucessão* $1, 1, 1, 1, \cdots$ *e assim* $f_n \longrightarrow 1 \neq \frac{1}{2}$.

A noção de von Mises não é imune a críticas. Pode-se ler em [24]:

> "As dificuldades que envolvem a teoria de von Mises referem-se, essencialmente, à definição e possibilidade de existência de colectivos. A definição de von Mises, através de um limite de sentido algébrico, compreende uma mistura de elementos empíricos e teóricos que as modernas teorias axiomáticas se empenham em evitar; como afirma Cramer (1946), um tanto ironicamente, definir probabilidade como limite de frequências é o mesmo que definir um ponto geométrico como limite de um ponto de giz com dimensões infinitamente decrescentes".

São duas as objecções fundamentais colocadas ao trabalho de von Mises e seus continuadores. Por um lado o conceito de von Mises apela ao conceito de limite quando o número de provas tende para infinito, o qual certamente não é realizável e representa uma séria lacuna na intenção de tentar fundamentar o conceito. Também parece impossível encontrar um modo de prolongar o processo, uma vez que processos regidos pelo acaso não podem ser racionalmente prolongados sem que seja posto em causa o carácter aleatório que forma a sua essência. A segunda objecção prende-se com a dificuldade que existe em provar a segunda condição de colectivo, a aleatoriedade, pois ao ser postulada introduz-se um elemento subjectivo que rompe com o fundamento da posição empirista. Uma outra característica bastante criticada por [36] reside no facto do conceito de von Mises suprimir o conceito de probabilidade de um caso isolado e a probabilidade a priori.

Conceito de propensão de probabilidade

Como forma de ultrapassar os problemas na teoria de von Mises alguns autores, como Copeland, Popper, Wald, Church e Doob, sugeriram modificações nos axiomas propostos por von Mises. Devem-se aos trabalhos realizados por Popper entre 1974 e 1987 o aparecimento de um outro conceito de probabilidades, o conceito de propensão que diferindo do conceito clássico e do frequencista tem algo a ver com ambos os conceitos. O conceito de propensão mantém a ideia de medir as possibilidades de ocorrência de determinados fenómenos, no entanto, não está preso a uma regra de cálculo que o obriga a obedecer a determinados requisitos. O conceito rege-se por uma perspectivação de possibilidades que foge à obrigatoriedade dos acontecimentos elementares terem de ser igualmente possíveis sem que, no entanto, seja uma simples atribuição abstracta, mas sim uma tendência ou propensão para a realização de algo tão real e físico como forças ou campos de forças. Obviamente que esta tendência ou propensão deve ter reflexo em termos de frequência relativa com que se realiza o fenómeno em causa. O próprio Popper, em 1987, afirma:

> "$\cdots$ as frequências relativas podem ser consideradas o resultado, ou a expressão exterior, ou a aparência de uma disposição, tendência ou propensão física oculta e não directamente observável $\cdots$".

O aparecimento do conceito frequencista de probabilidade gerou alguns problemas de ordem filosófica ou de interpretação do conceito. Apesar do conceito frequencista de probabilidade estar bem enraizado no senso comum, muitas são as confusões que se estabelecem em torno do conceito.

Paradoxo 4.4.1 (Paradoxo da frequência relativa e da probabilidade) *Este paradoxo pode ser encontrado em [27] e exemplifica como a interpretação da frequência relativa, como sendo igual à probabilidade de um dado acontecimento, pode ser falaciosa.*

Neste paradoxo é relatada uma conversa entre um médico e um seu paciente. O médico informa o doente que este padece de uma doença rara onde somente 1 em *cada 10 doentes sobrevive. Obviamente o doente fica aterrorizado com tal notícia. O médico consola então o seu doente dizendo-lhe que este teve muita sorte em ser seu paciente, uma vez que já consultara nove doentes com a mesma efermidade e todos eles morreram. Como este doente era o décimo com toda a certeza iria sobreviver! Obviamente que esta conclusão tem tanto de absurda como de errada mas é frequente nos alunos do ensino secundário.*

Paradoxo 4.4.2 (Paradoxo da Lei dos grandes números de Bernoulli)

São muitos os jogadores de jogos de azar, entre outros, que com muita frequência acreditam que, de acordo com a Lei dos grandes números, se uma moeda equilibrada é lançada um determinado número de vezes e se se obtém sempre a face escudo então a probabilidade de obter face escudo nos próximos lançamentos certamente aumentará. Por outro lado, é obvio que as moedas não possuem qualquer "tipo de inteligência"que as faça lembrar do número escudos e de caras já obtidos. Assim sendo, em qualquer lançamento a probabilidade de obter escudo é $\frac{1}{2}$*, mesmo que a moeda já tenha sido lançada mil vezes e tenha sempre saído escudo.*

Será que este facto contradiz a Lei dos grandes números de Bernoulli?

De acordo com a Lei dos grandes números de Bernoulli, quando uma moeda equilibrada é lançada um grande número de vezes, o número de escudos e caras obtidos deverá ser aproximadamente o mesmo. A questão que aqui se coloca é então saber qual o significado de aproximadamente o mesmo, neste contexto, claro.

De facto, não é da diferença entre o número de escudos e de caras ser reduzido que dá sentido ao termo aproximadamente utilizado no contexto atrás descrito. Esse termo fará sentido quando o quociente entre o número de escudos e o número total de lançamentos for aproximadamente $\frac{1}{2}$ *ou, de outra forma, quando o quociente entre o número de escudos e o número de caras for aproximadamente 1 ou, por outras palavras, a diferença entre os logaritmos dos números de escudos e de caras se aproximar de 0, obviamente desde que o número de lançamentos aumente indefinidamente.*

Como afirma o autor em [35], se a diferença entre o número de escudos e de caras obtidos permanecer pequena isso contradiz o facto das moedas não terem "memória".

Paradoxo 4.4.3 (Paradoxo de De Moivre)

Este paradoxo é devido a um dos maiores matemáticos de sempre o francês Abraham De Moivre. O seu principal trabalho The Doctrine of Chances foi publicado em 1718. Na terceira edição, editada em 1756, embora De Moivre já o tivesse dito a alguns amigos por volta de 1733, de Moivre afirma que as suas descobertas vão muito além da Lei dos grandes números de Bernoulli:

$\cdots$ *I´ll take the liberty to say, that this is the hardest problem that can be posed on the subject of Chance* $\cdots$.

Designe-se por E_n e C_n o número de escudos e de caras, respectivamente, obtidos em n lançamentos de uma moeda equilibrada. Segundo a Lei dos grandes números de Bernoulli, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|E_n - C_n| < \varepsilon\right) = 1, \forall\varepsilon > 0$. Por outras palavras, quando uma moeda equilibrada é lançada várias vezes, a probabilidade de obter um número de escudos e um número de caras aproximadamente iguais tende para um quando o número de lançamentos aumenta indefinidamente.

Por outro lado, prova-se que a probabilidade de que o número de escudos seja exactamente o mesmo que o de caras tende para zero quando o número de experiências aumenta. Veja-se que ao lançar, por exemplo, $2n$, com $n \in \mathbb{N}$, vezes uma moeda equilibrada, a probabilidade de obter o mesmo número de escudos e de caras é igual a $\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$. Quando n é suficientemente grande facilmente se verifica, utilizando a fórmula de Stirling[10]*, que aquele quociente aproximadamente igual a $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$, o qual tende para zero quando $n \longrightarrow +\infty$.*

Concluindo, quando se realiza a experiência aleatória que consiste em lançar uma moeda equilibrada um grande número de vezes tem-se que:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|E_n - C_n| < \varepsilon\right) = 1, \forall\varepsilon > 0$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(E_n = C_n\right) = 0$.

O problema deste paradoxo reside num aspecto observado por de Moivre, este reparou no facto do termo $|E_n - C_n|$ não pode ser negligenciado quando comparado com $\sqrt{n}$. Por exemplo, de Moivre notou que quando $n = 3600$, tem-se que $\mathbb{P}\left(|E_n - C_n| < \sqrt{3600}\right)$

[10]Quando $n \to +\infty$ então o valor de $n!$, $n \in \mathbb{N}$ pode ser aproximado por $\sqrt{2\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

era aproximadamente igual a 0.683, bastante distante do valor 1 esperado quando $n \to +\infty$.

Existem diferenças substanciais entre o conceito frequencista de von Mises e o conceito de propensão. O conceito de von Mises é aplicável a acontecimentos individuais ou singulares quando inseridos numa sequência concreta de acontecimentos, como por exemplo, em expressões do tipo *há probabilidade $\frac{1}{2}$ de que no próximo lançamento desta moeda saia a face escudo.* Por seu lado, o conceito de propensão associa probabilidade a um qualquer acontecimento individual.

4.5 Conceito subjectivista de probabilidade

Em muitas situações, a atribuição de probabilidade a um determinado acontecimento não pode ter em conta, nem a equiprobabilidade dos acontecimentos elementares, nem a repetição de experiências, enviabilizando assim a utilização quer do conceito clássico de probabilidade quer do conceito frequencista.

Uma dessas situações pode prender-se, por exemplo, com as decisões de um júri sobre a inocência de um réu. Não parece plausível acreditar que a probabilidade do réu ser culpado seja igual à de ser inocente, isto é, igual a $\frac{1}{2}$, para todos os jurados. Existem muitas condicionantes de variados aspectos subjectivos que tornam a atribuição de probabilidade a este acontecimento numa decisão pessoal de quem a realiza e que poderá diferir de indivíduo para indivíduo. Todas as vivências, experiências, crenças ou influências sociais podem modificar a atribuição da probabilidade ao acontecimento.

O conceito subjectivista de probabilidade, segundo o ponto de vista de Finetti, Savage, Ramsey, entre outros, representa uma relação quase-lógica entre a evidência e a hipótese, ou seja, a probabilidade mede o grau de credibilidade com que dado observador, com base na evidência, dá à hipótese. Este conceito implica um papel activo e predominante da pessoa que analisa o fenómeno e requer, acima de tudo, que seja coerente. É a exigência desta coerência que torna possível a verificação dos axiomas de Kolmogorov. É quando se deseja aplicar um sistema formal, como o de Kolmogorov, a problemas reais do quotidiano, que se torna indispensável um elo de conexão entre o abstracto e a interpretação do valor prático da probabilidade a atribuir a determinada fenómeno. Suponha-se, por exemplo, que se pretende atribuir probabilidade ao acontecimento *O clube de futebol X ganhar a próxima liga profissional de futebol*, não parece que a atribuição de probabilidade a este acontecimento seja consensual. Tem de existir um método coerente e lógico que permita que a atribuição de probabilidade a acontecimentos deste tipo seja válida e numericamente diferente, dependendo de quem a atribui. Esta situação gera muitas vezes alguma controvérsia, embora este conceito permita limar algumas dessas divergências.

Seja Ω o espaço dos possíveis associado a determinada experiência aleatória. As condições necessárias e suficientes para a consistência da noção subjectivista de probabilidades são as seguintes:

S_1 : $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(\Omega) = 1$;

S_2 : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$, $\forall A, B \subseteq \mathcal{A}$, tal que $A \cap B = \emptyset$, para alguma σ-álgebra, $\mathcal{A}$, sobre Ω.

Nestas condições, ou pelo menos adicionando certos requisitos, é plausível afirmar que este conceito encaixa na axiomática de Kolmogorov. Na verdade, e assim colocado o conceito, podem-se colocar algumas objecções que não permitam concluir a verificação dos axiomas de Kolmogorov por parte do conceito subjectivista de probabilidade. Essas objecções prendem-se com a possibilidade da medida subjectivista não verificar a σ-aditividade. Segundo opinião própria este problema não se coloca uma vez que o objectivo do conceito tem uma predominância tipicamente finita das experiências aleatórias em causa e ao agente humano necessariamente envolvido. Mas mesmo que tais justificações não fossem tomadas como aceites poder-se-ia sempre reformular S_2 de modo a garantir a σ-aditividade. No entanto, convém realçar, que não será estritamente necessário exibir a σ-álgebra, para que o modelo probabilístico esteja completo. Dado um determinado fenómeno aleatório, A, contido num espaço dos possíveis Ω, e ao qual se pretende atribuir probabilidade, pode-se utilizar a σ-álgebra $\mathcal{A} = \{A, \overline{A}, \Omega, \emptyset\}$ e a medida de probabilidade subjectivista verificando S_1 e S_2. Deste modo, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ é um espaço de probabilidade.

Os subjectivistas encontram na fórmula de Bayes a expressão da ideia base por detrás das suas convicções, por esta razão eles e os seus resultados são chamados de Bayesianos.

Dados os acontecimentos $A, B \subseteq \Omega$, do teorema de Bayes resulta:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\overline{A}) \cdot \mathbb{P}(\overline{A})}$$

E, segundo o ponto de vista dos Bayesianos, a informação B (obtida de experiências anteriores, crenças, presentimentos, entre outros) influência a atribuição do valor da probabilidade de ocorrência de A. O valor de $\mathbb{P}(A)$ no segundo membro da igualdade é a chamado probabilidade subjectiva original ou à priori. Por seu lado, a probabilidade condicionada do primeiro membro é uma segunda versão da probabilidade subjectivista ou probabilidade à posteriori, utilizando a informação adicional dada por B.

Exemplo 4.5.1 (Uma questão de paternidade)

Um homem, que apresenta uma marca genética que só aparece 1 vez em cada 100 homens adultos, é acusado da paternidade de uma criança . Esta marca foi encontrada na criança e só pode ter sido transmitida pelo pai. No caso do pai apresentar a marca é certo que o filho também a apresentará. A questão é encontrar a probabilidade da criança ser filha do dito homem, transmitindo assim a referida marca.

Definam-se os seguintes acontecimentos:

A: "o homem ser o pai";

B: "a criança ter a marca".

Na realidade o que se pretende é saber qual o valor da probabilidade condicionada $\mathbb{P}(A|B)$. *Como o pai transmite sempre a dita marca pode-se concluir que* $\mathbb{P}(B|A) = 1$. *Contudo,* $\mathbb{P}(B|\overline{A}) = 0.01$, *uma vez que se o homem acusado não é o pai da criança, pode-se supor que o aparecimento da marca na criança é equivalente ao aparecimento da marca num adulto da população. Agora vem a parte de controvérsia. Para usar a fórmula de Bayes tinha de se saber a probabilidade à priori* $\mathbb{P}(A)$.

Suponha-se que esse valor é 0.5 conclui-se da fórmula de Bayes que:

$$\mathbb{P}(A|B) = \tfrac{1 \cdot 0.5}{1 \cdot 0.5 + 0.01 \cdot 0.5} \approx 0.99.$$

Este resultado pode ser interpretado como se inicialmente fosse assumido que a probabilidade do homem ser o pai da criança era 0.5, então a probabilidade de a criança apresentar a marca será aproximadamente 0.99.

Suponha-se agora que a probabilidade à priori não era 0.5 mas sim 0.001. Utilizando novamente na fórmula de Bayes conclui-se que:

$$\mathbb{P}(A|B) = \tfrac{1 \cdot 0.001}{1 \cdot 0.001 + 0.01 \cdot 0.999} \approx 0.09.$$

Deste modo, a probabilidade do homem ser de facto pai da criança passa de 0.99 para 0.09. Este exemplo mostra a importância da probabilidade à priori.

Um interessante caso legal este tipo de questões pode ser encontrado em [34]. A fórmula de Bayes foi utilizada com uma probabilidade à priori de 0.5 para o acontecimento *o réu ser culpado*. A acusação ficou então convencida que de facto o réu era culpado. Contudo esta convicção mudou num ápice uma vez que foi usado uma probabilidade grande do réu ser culpado para provar que este cometeu o crime ainda com maior probabilidade. Este é um exemplo de como o uso das probabilidades nos tribunais tem se ser feita com muito cuidado. O valor de 0.5 para probabilidade à priori foi utilizado porque o investigador desconhecia o seu verdadeiro valor. E assim se perdeu a presunção de inocência, assumindo que o facto do réu ser culpado ou inocente era igualmente provável. Uma das principais críticas apontadas à teoria defendida pelos Bayesianos é precisamente a necessidade de obtenção da probabilidade à priori e do modo como esta é determinada.

4.6 Conceito comparativo de probabilidade

Afirmações do tipo "O acontecimento A é menos provável do que B"induzem a construção de modelos matemáticos que descrevam a relação entre acontecimentos sem que, no entanto, seja imperativo atribuir um dado valor quantitativo à probabilidade de qualquer acontecimento .

Pode-se estabelecer uma divisão primária entre os mais diversos conceitos de probabilidade: aqueles cuja probabilidade de determinado fenómeno é dada por uma quantidade, ditos conceitos quantitativos de probabilidade, e os restantes que constroem os seus modelos sem recorrer à quantificação numérica da probabilidade.

O conceito comparativo de probabilidade, apesar de não ter uma aplicabilidade prática tão notória quanto os conceitos quantitativos e consequentemente não ser tão conhecida, fornece alguns pontos de vista de bastante interesse.

Este conceito fornece modelos mais realistas e credíveis para descreverem determinados fenómenos aleatórios sobre os quais não existe informação à priori suficiente para estimar, quantitativamente e de uma forma razoável, a probabilidade de ocorrência de acontecimentos associados ao fenómeno.

Considere-se, por exemplo, a experiência aleatória que consiste em lançar uma moeda não equilibrada ao ar e observar a face voltada para cima. Se a experiência for repetida 100 vezes e nessas 100 vezes se obtiver escudo 80 vezes, parece mais fiável afirmar que o acontecimento sair cara é mais provável do que o acontecimento sair escudo, do que afirmar que a probabilidade de obter escudo é 0,8.

Por outro lado, o conceito comparativo de probabilidade é aplicável a determinados fenómenos que não são compatíveis com conceitos quantitativos de probabilidade, nomeadamente aqueles fenómenos que não possibilitam que este se repita indefinidamente e de uma forma independente e onde ainda não existam conhecimentos do fenómeno que tornem aceitável uma qualquer atribuição quantitativa de probabilidade, nomeadamente através do conceito subjectivista.

Uma outra razão que torna o estudo deste conceito importante é a forma como o seu conhecimento ajuda a alicerçar os conceitos quantitativos e nomeadamente a axiomática de Kolmogorov, mais à frente vai estabelecer-se uma relação entre estes dois conceitos.

O conceito comparativo está alicerçado numa relação binária entre os elementos de uma σ-álgebra de acontecimentos de um dado espaço dos possíveis, Ω, ou entre representações desses acontecimentos como conjuntos ou proposições.

Definição 4.6.1 (Relação comparativa)

Sejam A, B e C quaisquer acontecimentos de uma σ-álgebra de acontecimentos sobre um dado espaço dos possíveis. Denotando por:

- $A \succeq B$ *a afirmação "o acontecimento A é pelo menos tão provável como o acontecimento B, ou em alternativa $B \preceq A$ que significa "o acontecimento B não é mais provável do que o acontecimento A";*
- $A \approx B$*, a afirmação "o acontecimento A é tão provável quanto o acontecimento B"(ou seja, $A \approx B$ se e somente se $A \succeq B$ e $B \succeq A$);*

- $A \succ B$, *a afirmação o acontecimento* A *é mais provável do que o acontecimento* B*, ou seja,* $A \succ B$ *se* $A \succeq B$ *for verdadeiro e* $B \succeq A$ *for falso,*

a relação binária acima referida é usualmente denominada por relação comparativa de probabilidade e os axiomas que a caracterizam são:

A_1 *:* $\Omega \succ \emptyset$ *(Axioma da não - trivialidade)*

A_2 *:* $A \succeq B$ *ou* $B \succeq A$ *(Axioma da comparatividade)*

A_3 *:* $A \succeq B, B \succeq C \Rightarrow A \succeq C$ *(axioma da transitividade)*

A_4 *:* $A \succeq \emptyset$ *(axioma da improbabilidade do impossível)*

A_5 *:* $A \cap (B \cup C) = \emptyset \Rightarrow (B \succeq C \Leftrightarrow A \cup B \succeq A \cup C)$ *(Axioma da união disjunta)*

Os axiomas A_2 e A_3 garantem que a relação $\succeq$ (relação comparativa de probabilidade) na qual assenta o conceito comparativo de probabilidade é linear e completa.

Como consequência destes axiomas podem-se extrair algumas propriedades da relação comparativa de probabilidade bastante úteis na demonstração de outros resultados:

Teorema 4.6.1 (Propriedades da relação comparativa)

Considerem-se $A, B, C, D \subseteq \Omega$*, então:*

a) $\Omega \succeq A$*;*

b) $A \succeq B$ *então* $\overline{B} \succeq \overline{A}$*;*

c) $A \supseteq B$ *então* $A \succeq B$*;*

d) $A \succeq B, C \succeq D$ *e* $A \cap C = \emptyset$ *então* $A \cup C \succeq B \cup D$*;*

e) $A \cup B \succeq C \cup D$*,* $C \cap D = \emptyset$ *então ou* $A \succeq C$*,* $A \succeq D$*,* $B \succeq C$*, ou* $B \succeq D$*.*

Os cinco axiomas enunciados são suficientes para caracterizar o conceito no caso em que a σ-álgebra é finita, no entanto, não são suficientes para que o conceito seja compatível com a usual Teoria das Probabilidades definida por Kolmogorov.

Compatibilidade com o conceito quantitativo

Definição 4.6.2 (Probabilidade quantitativa)

Diz-se que uma dada função $\mathbb{P}$ está de acordo com a relação $\succeq$ se:

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \hookrightarrow \mathbb{R}, A \succeq B \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) \geq \mathbb{P}(B)$$

Quando $\succeq$ for uma relação comparativa de probabilidade é usual referir-se $\mathbb{P}$ como probabilidade quantitativa.

Questão 4.6.1

Será que os cinco axiomas descritos permitem concluir que para qualquer relação comparativa de probabilidade satisfazendo esses cinco axiomas exista uma probabilidade quantitativa?

Resposta:

A resposta é esta questão é negativa. De facto os cinco axiomas acima enunciados não são suficientes para garantir a existência de uma probabilidade quantitativa como demonstra o seguinte contra-exemplo: Sejam $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{B}_{[0,1]}$ a σ-álgebra de Borel, m a medida de Lebesgue e μ a medida de densidade triangular $2w$ sobre $[0, 1]$. Defina-se a relação $\succeq$ como:

$$A \succeq B \text{ se ou } m(A) > m(B) \text{ ou } (m(A) = m(B) \text{ e } \mu(A) \geq \mu(B)).$$

É fácil verificar que $\succeq$ satisfaz os axiomas A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, pelo que $\succeq$ assim definida é uma relação comparativa. No entanto, não existe nenhuma probabilidade quantitativa de acordo com a relação comparativa $\succeq$. Por exemplo, considere-se os conjuntos de números reais $A_x = (1 - x, 1)$ e $B_x = (0, x)$, para qualquer $x \in (0, 1)$. É evidente que $m(A_x) = m(B_x) = x$, $\mu(A_x) = x(2 - x)$, $\mu(B_x) = x^2$. Logo, para $x < y$ tem-se $A_y \succ B_y \succ A_x \succ B_x$. Assim, para qualquer função, $\mathbb{P}$, de acordo com a relação comparativa $\succeq$ o intervalo $(\mathbb{P}(B_x), \mathbb{P}(A_x))$ é não nulo e se $x < y$ então $(\mathbb{P}(B_x), \mathbb{P}(A_x)) \cap (\mathbb{P}(B_y), \mathbb{P}(A_y)) = \emptyset$. Deste modo, estabeleceu-se uma relação biunívoca entre os números reais do intervalo $(0, 1)$ e os intervalos disjuntos de $\mathbb{R}$, que a cada número real $x \in [0, 1]$ faz corresponder o intervalo $(\mathbb{P}(B_x), \mathbb{P}(A_x))$. Contudo, este facto é uma contradição, uma vez que existe uma infinidade não numerável de números reais em [0,1] e uma infinidade numerável de intervalos disjuntos em $\mathbb{R}$. Desta forma, é impossível definir uma função $\mathbb{P}$ nas condições pedidas.

Na realidade é necessário propor um sexto axioma sobre a relação comparativa que garanta a existência de uma probabilidade quantitativa, recorrendo a algumas noções topológicas. Um espaço topológico $(\mathcal{F}, \mathcal{T})$ é um par ordenado formado por um conjunto $\mathcal{F}$ e por uma família de subconjuntos (abertos) de $\mathcal{F}$. Assim $\mathcal{T}$ denomina-se por topologia. Uma família $\mathcal{B}$, de subconjuntos de uma topologia $\mathcal{T}$, é dita base para a essa topologia se qualquer elemento da topologia se pode escrever como reunião de elementos dessa colecção. Uma sub-base de $\mathcal{F}$ é uma família de subconjuntos de $\mathcal{F}$ de modo que a intersecção finita de elementos da su-base geram uma base. A uma relação $\prec$ completa, transitiva e irreflexiva pode-se associar uma topologia cuja sub-base contem os elementos da forma $\{A : A \prec B\}$, $\{A : B \prec A\}$ para algum $B \in \mathcal{F}$.

$A_6 : (\mathcal{F}, \mathcal{T})$ é um espaço topológico com uma base contendo um número numerável de elementos.

Teorema 4.6.2

Se uma relação binária $\succeq$ satisfizer os axiomas A_2, A_3, A_4, A_5, então o conceito de probabilidade comparativa associado a $\succeq$ admite uma representação quantitativa se e somente se a relação $\succeq$ satisfizer o axioma A_6.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada ser encontrada em [7]. O Teorema 4.6.2 garante a existência de uma função $\mathbb{P}$ que represente quantitativamente o conceito comparativo de probabilidade, no entanto, tal função não é única. Qualquer função $\mathbb{P}^\star$ que resulte da composição de uma função estritamente crescente, f, com a função $\mathbb{P}$, ou seja, $\mathbb{P}^\star = f(\mathbb{P})$, é ainda uma representação quantitativa do conceito comparativo de probabilidade. Deste modo, é possível encontrar, em particular, uma função $\mathbb{P}$ que satisfaça $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ e $\mathbb{P}(A) \geq 0, \forall A \subseteq \Omega$. De qualquer modo ainda não está garantida a σ-aditividade desta função.

O próximo axioma foi proposto por Villegas para com o objectivo de estabelecer uma conexão entre o conceito comparativo de probabilidade e a σ-aditividade de uma medida de probabilidade.

$A_8 : \forall i \in \mathbb{N} \quad A_i \supseteq A_{i+1} \quad A_i \succeq B, \quad \lim_{n\to+\infty} A_n = A \Rightarrow A \succeq B.$

Este axioma é denominado por axioma da continuidade monótona.

4.6.1 Compatibilidade do conceito comparativo com a aditividade finita

Teorema 4.6.3

Se a relação $\succeq$ satisfizer os axiomas $A_1, \cdots, A_6$, então existe uma função $\mathbb{P}$ que representa quantitativamente o conceito comparativo de probabilidade associado à relação $\succeq$ e existe uma função $\mathcal{R}$, de duas variáveis, tal que

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathcal{R}(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)).$$

Além disso, $\mathcal{R}$ é simétrica (ou seja, $\mathcal{R}(x,y) = \mathcal{R}(y,x), \forall x, y \in \mathbb{R}$) é estritamente crescente em x, verifica a condição $\mathcal{R}(x, \mathbb{P}(\emptyset)) = x$ e é associativa (isto é, $\mathcal{R}(\mathcal{R}(x,y),z) = \mathcal{R}(x, \mathcal{R}(y,z)), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$).

Demonstração:

A existência de $\mathbb{P}$ é comprovada pelo Teorema 4.6.2. A existência de $\mathcal{R}$ fica demonstrada se se demonstrar que para quaisquer conjuntos A, B, C e D tais que $A \cap B = C \cap D = \emptyset$, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(C)$ e $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(D)$, implicam $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(C \cup D)$. Para demonstrar este facto repare-se que $\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y)$ equivale a escrever $X \approx Y$. Como consequência do Teorema 4.6.1 resulta $A \approx B, C \approx D, A \cap C = \emptyset$ e $B \cap D = \emptyset$ então $A \cup C \approx B \cup D$. Assim, $A \cup B \approx C \cup D$ e por definição de $\mathbb{P}$ tem-se $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(C \cup D)$, como desejado.

Como $A \cup B = B \cup A$ a simetria de $\mathcal{R}$ é óbvia, se se fizer $\mathbb{P}(A) = x$ e $\mathbb{P}(B) = y$.

Para verificar que $\mathcal{R}$ é crescente, seja $A \cap C = \emptyset$, $B \cap D = \emptyset$, $\mathbb{P}(A) = x$, $\mathbb{P}(B) = x^*$, $\mathbb{P}(C) = y$ e $\mathbb{P}(D) = y^*$ com $x^* > x$ e $y^* \geq y$. Pelas propriedades evocadas no Teorema 4.6.1 tem-se $B \cup D \succ A \cup C$ e logo $\mathcal{R}(x^*, y^*) = \mathbb{P}(B \cup D) > \mathbb{P}(A \cup B) = \mathcal{R}(x,y)$.

Se $A \cap B = \emptyset$, $\mathbb{P}(A) = x$, $\mathbb{P}(B) = 0$, então $B \approx \emptyset$; logo pelo axioma A_5 tem-se $A \cup B \preceq A \cup \emptyset = A$. Analogamente, como $B \succeq \emptyset$ então pelo axioma A_5 $A \cup B \succeq A$. Assim, $A \cup B \approx A$ e deste modo $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathcal{R}(x, \mathbb{P}(\emptyset)) = \mathbb{P}(A) = x$.

Finalmente para verificar a associatividade assuma-se que $A \cap (B \cap C) = \emptyset, B \cup C = \emptyset, \mathbb{P}(A) = x, \mathbb{P}(B) = y$ e $\mathbb{P}(C) = z$. Então, $\mathbb{P}(A \cap (B \cup C) = \mathcal{R}(x, \mathcal{R}(y,z))$. Note-se também que $A \cap (B \cup C) = \emptyset, B \cap C = \emptyset$ e logo $C \cap (A \cup B) = \emptyset$ e $A \cup B = \emptyset$. Então,

$\mathbb{P}((A \cup B) \cup C) = \mathcal{R}(\mathcal{R}(x,y),z)$.

Por fim a associatividade da união garante o pretendido, ou seja, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ implica $\mathcal{R}(x, \mathcal{R}(y,z)) = \mathcal{R}(\mathcal{R}(x,y),z)$.■

Poderia pensar-se que com uma pequena transformação em $\mathbb{P}$ para $\mathbb{P}^\star$ poderia corresponder a uma transformação de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{R}^*$ de modo que $\mathcal{R}^*(x,y) = x + y$. Este facto não se verifica sempre como o exemplo seguinte mostra:

Exemplo 4.6.1

Seja $\Omega = \{a,b,c,d,e\}$ e $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ contendo todos os subconjuntos de Ω. Considere-se a relação $\prec$ tal que:

$\emptyset \prec \{a\} \prec \{b\} \prec \{c\} \prec \{a,b\} \prec \{a,c\} \prec \{d\} \prec \{a,d\} \prec \{b,c\} \prec \{e\} \prec \{a,b,c\} \prec \{b,d\} \prec \{c,d\} \prec \{a,e\} \prec \{a,b,d\} \prec \{b,e\} \prec \{a,c,d\} \prec \{c,e\} \prec \{b,c,d\} \prec \{a,b,e\} \prec$

$\{a,c,e\} \prec \{d,e\} \prec \{a,b,c,d\} \prec \{a,d,e\} \prec \{b,c,e\} \prec \{a,b,c,e\} \prec \{b,d,e\} \prec \{c,d,e\} \prec$
$\{a,b,d,e\} \prec \{a,c,d,e\} \prec \{b,c,d,e\} \prec \Omega$

Esta relação $\prec$ verifica os axiomas $A_1, \cdots, A_6$ e portanto pelo teorema 4.6.2 a relação admite uma representação quantitativa $\mathbb{P}$. Contudo, não existe uma representação quantitativa que seja finitamente aditiva.

Para verificar este facto, considere-se:

$\mathbb{P}(\{a\}) = \alpha, \quad \mathbb{P}(\{b\}) = \beta, \quad \mathbb{P}(\{c\}) = \gamma, \quad \mathbb{P}(\{d\}) = \delta, \quad \mathbb{P}(\{e\}) = \epsilon.$

Assim sendo, e tomando em consideração a definição de $\prec$, tem-se:

$$\alpha + \gamma < \delta, \quad \alpha + \delta < \beta + \gamma, \quad \gamma + \delta < \alpha + \epsilon.$$

Deste modo, adicionando as três desigualdades e simplificando os termos semelhantes obtem-se $\alpha + \gamma + \delta < \beta + \epsilon$. Pelo que $\{a,c,d\} \prec \{b,e\}$, o que contradiz a definição da relação $\prec$ dada. Logo não existe uma representação quantitativa de acordo com $\prec$ que seja finitamente aditiva.

4.6.2 Compatibilidade do conceito comparativo com a σ-aditividade

Como é conhecido, da Teoria das Probabilidades, a σ-aditividade é equivalente à aditividade finita em conjunto com seguinte condição de continuidade:

$$A_i \supseteq A_{i+1} : \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = \emptyset \Rightarrow \lim_{i \to +\infty} \mathbb{P}(A_i) = 0.$$

Esta condição sugere o aparecimento de uma versão mais fraca do axioma A_8.

$A_9 : \forall i \in \mathbb{N} A_i \supseteq A_{i+1}, {}_{i=1}^{+\infty} = \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{+\infty} \{A : A_i \succeq A \succ \emptyset\} = \emptyset.$

A importância deste axioma é evidente no teorema que se segue:

Teorema 4.6.4

Se uma relação comparativa $\succeq$ admitir uma representação quantitativa finitamente aditiva (isto é, que verifique a aditividade finita) $\mathbb{P}$, então $\mathbb{P}$ é σ-aditiva se e somente se $\succeq$ satisfizer o axioma A_9.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [8].

Luce propôs uma condição com o objectivo de garantir a existência de uma representação quantitativa σ-aditiva para o conceito comparativo de probabilidade:

$L : (A \cap B = \emptyset, A \succeq C, B \succeq D) \Rightarrow (\exists C^*, D^*, E : C^* \cap D^* = \emptyset, E \approx A \cup B, C^* \approx C, D^* \approx D, E \supseteq C^* \cup D^*)$.

Teorema 4.6.5 (Teorema de Luce)

Se uma relação comparativa $\succeq$ satisfizer $A_1, \cdots, A_5$, A_8 e L, então existe uma única representação quantitativa $\mathbb{P}$ satisfazendo os axiomas de Kolmogorov.

Villegas propôs uma caracterização do conceito comparativo de probabilidade compatível com a σ-aditividade, em certos casos, em que se verificava a propriedade da relação comparativa não admitir átomos.

Definição 4.6.3

Diz-se que a relação comparativa $\succeq$ não admite átomos se $\forall A \succ \emptyset \exists B \subset A : A \succ B \succ \emptyset$.

Teorema 4.6.6 (Teorema de Villegas)

Se uma relação comparativa $\succeq$ satisfizer os axiomas $A_1, \cdots, A_5$ e A_8 e não admitir átomos, então existe uma única representação quantitativa $\mathbb{P}$ de acordo com $\succeq$ que satisfaça os axiomas de Kolmogorov.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [38].

4.7 Algumas reflexões sobre a axiomática de Kolmogorov

Só recentemente, em 1933, é que a Teoria das Probabilidades ficou munida de um sistema de axiomático, sistema esse fruto de uma evolução de vários séculos mas mesmo assim não imune a críticas.

Uma das principais lacunas apontadas a este sistema de axiomas, ou mais correctamente dito, a esta pretensa axiomática, é o facto de não ser completo, isto é, para um mesmo espaço Ω e para uma mesma σ-álgebra, pode-se atribuir a probabilidade a um dado acontecimento de mais do que uma forma e distintas. Gnedenko, em [13], ilustra este facto com um exemplo da experiência aleatória que consiste em lançar um dado com as faces numeradas de 1 a 6 e observar o número da face voltada para cima. Representando os acontecimentos elementares por $A_i = \{i\}, i = 1, \cdots, 6$, as medidas $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$ dadas por:

$\mathbb{P}_1(A_i) = \frac{1}{6}, \quad i = 1, \cdots, 6$

e

$\mathbb{P}_2(A_1) = \mathbb{P}_2(A_2) = \mathbb{P}_2(A_3) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}_2(A_4) = \mathbb{P}_2(A_5) = \mathbb{P}_2(A_6) = \frac{1}{12}$

verificam todos os axiomas propostos por Kolmogorov, deste modo a axiomática é incompleta.

Gnedenko e Kolmogorov defendem que o facto do sistema não ser completo não é uma consequência de um trabalho menos cuidadoso na construção do sistema mas é simplesmente devido à essência dos problemas em estudo. De facto, em vários problemas, um mesmo espaço dos possíveis e uma mesma σ-álgebra conduzem a diferentes atribuições de probabilidade. Por exemplo, relativamente às medidas $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$ acima consideradas associadas ao lançamento de um dado com as faces numeradas de 1 a 6, a primeira medida poderia modelar o lançamento de um dado equilibrado enquanto a segunda medida traduziria um dado não equilibrado.

Terrence Fine em [8] rebate estes argumentos de Gnedenko e Kolmogorov defendendo que o modelo probabilístico proposto por Kolmogorov não indica um princípio orientador que permita indicar, sem restrições, qual o espaço dos possíveis em causa, tratando-o como se fosse um dado adquirido, e portanto, não correspondendo às expectativas daqueles que pretendiam que o sistema permitisse modelar, sem ambiguidades experiências aleatórias.

Uma outra crítica comum apontada por alguns autores foi a de que determinadas medidas de probabilidade não traduziam o que, em princípio se pretendia: um grau de certeza do acontecimento. Pense-se, por exemplo, no caso de $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e a medida de probabilidade $\mathbb{P}$ definida por $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ e $\mathbb{P}(A) = 0, \forall A \in \mathcal{F} \setminus \Omega$. De facto, sob um ponto de vista prático, esta medida de probabilidade é desprovida, à partida, de qualquer interesse mas não parece que por isso seja necessário julgá-la como inadequada.

O espaço dos possíveis

Quanto aos espaços dos possíveis a formulação de Kolmogorov pressupõe que o conjunto seja uma lista de todos os resultados possíveis sem que, no entanto, se possa omitir algum dos resultados ou seja plausível duplicar os mesmos e com um nível de detalhe suficiente. Também pressupõe que todos os resultados possíveis possam ser determinados com toda a certeza. No entanto, a capacidade de listar todos os possíveis resultados de uma experiência é uma hipótese não trivial, em alguns casos seria necessário provar que duas "etiquetas"identificariam o mesmo objecto. Uma exaustiva lista de resultados pode ser difícil de obter em determinadas situações incertas. Por exemplo, no lançamento de uma moeda, deve-se incluir a hipótese de a moeda cair sobre o seu bordo ou tal situação será de excluir e porquê?

B. Jouvenal, na sua obra *The art of conjecture*, apresenta alguns comentários sobre as dificuldades encontradas na construção de um completo espaço dos possíveis em fenómenos sociais ou económicos.

Como sugere, Terrence Fine em [8], pode-se pensar em evitar os problemas de enumeração de todos os resultados, apresentando apenas uma listagem dos resultados, a partida, com algum interesse, sejam $x_1, \cdots x_i$, e definir o resultado x_{i+1} como um outro resultado que não esteja em $\bigcup\limits_i x_i$. Esta forma de ultrapassar o problema torna, no entanto, difícil em geral determinar a probabilidade de x_{i+1}. Pode-se pensar, por exemplo, na probabilidade de obter um determinado número no caso do lançamento de um dado, no entanto não se conhecem pormenores que permitam indicar a probabilidade de perder o dado. Para mais, tendo em conta a essência de um conjunto universalmente bem definido, a introdução de x_{i+1} pode gerar paradoxos (Veja-se em [8]). É portanto preferível restringir Ω a um conjunto de resultados com interesse e quanto baste.

O grau de especificidade dos acontecimentos elementares depende da capacidade em discernir o que são acontecimentos plausíveis de ocorrerem durante a realização da experiência. Portanto, qualquer aplicação do modelo probabilístico à prática depende do julgamento do que se pode observar ou não e usar unicamente esse facto para apresentar o espaço dos possíveis. Desta forma, a presumível selecção dos acontecimentos elementares é determinada por um conceito vago de certeza, correspondente a uma inexplicável noção de incerteza que é distinta da noção de aleatoriedade e da qual depende a forma como a medida de probabilidade intervém no seio da σ-álgebra. Esta inexplicável incerteza é algo de bastante insatisfatório e que mina os fundamentos da teoria.

σ-álgebras de acontecimentos

Depois das questões apresentadas acerca do espaço dos possíveis e como uma σ-álgebra é uma família de acontecimentos do espaço dos possíveis, é natural aparecerem algumas questões aquando da análise de σ-álgebras. Por exemplo, pretende-se que uma σ-álgebra de acontecimentos seja fechada para a complementaridade de acontecimentos, no entanto, este facto mais uma vez depende da escolha do espaço dos possíveis. Assim sendo, pode acontecer que o complementar de um conjunto não corresponda à não ocorrência desse acontecimento, bastando para isso que o espaço dos possíveis contenha apenas os acontecimentos com interesse.

A definição de σ-álgebra obriga a que esta seja fechada para a união e para a intersecção de acontecimentos. Porém, existem ocasiões em que é razoável afirmar-se conhecer a probabilidade de cada um de dois acontecimentos sem que, no entanto, se conheçam as probabilidades da intersecção e da união desses acontecimentos. Terrence Fine em [8] apresenta um exemplo curioso deste facto. Suponha-se que uma classe de fotografias é tal que a probabilidade de encontrar uma foto com predominância escura é $\frac{1}{2}$ e a probabilidade de obter uma foto com textura granulada é também $\frac{1}{2}$. Contudo poderá ter pouco interesse trabalhar com fotos com textura granulada tendencionalmente escura ou simplesmente estas não terem o menor significado.

A razão central pela qual a noção de σ-álgebra é considerada, por alguns autores, pouco apropriada para descrever acontecimentos de uma dada experiência aleatória é que a noção realça o facto da colecção conter todos os acontecimentos com interesse que tem a desvantagem de obrigar a atribuir probabilidade a esses mesmos acontecimentos.

Se se pensar em acontecimentos de experiências aleatórias como subconjuntos de Ω, descrito intensivamente, ou seja, um acontecimento A é um conjunto de elementos de Ω para os quais uma dada proposição p é verdadeira, $A = \{x : p(x)\}$, então a validade da noção de σ-álgebra depende da aceitação das proposições $\sim p$, $p \wedge q$ e $p \vee q$ desde que p e q sejam também válidas ou, por outras palavras, forem proposições cujo interesse para o estudo seja relevante. Contudo este tipo de raciocínio tem um senão: podem-se incluir conjuntos de acontecimentos para os quais não se seja capaz de atribuir probabilidade, criando consequentemente, um conflito que limite a atribuição de probabilidade, mesmo depois do espaço dos possíveis ter sido convenientemente escolhido.

Kolmogorov, em 1956, na sua obra *Foundations of the theory of Probability*, tem uma frase emblemática a propósito do dilema entre a utilidade matemática da noção de σ-álgebra e a sua aplicabilidade a fenómenos concretos. A frase é a seguinte:

"Thus sets of $\mathcal{F}$ (σ-álgebras) are generally merely ideal events to which nothing corresponds in the outside world ".

E. B. Dinkyn, em 1965, [6], propõe duas alternativas a σ-álgebras, denominadas por Λ-álgebras e por π-álgebras.

A noção de Λ-álgebra evita os problemas acima descritos requerendo que se incluam apenas acontecimentos cuja probabilidade pode ser calculada através dos axiomas de Kolmogorov para a medida de probabilidade.

Definição 4.7.1 (Λ-álgebra)

Seja Ω um conjunto não vazio e $\mathcal{L}$ uma colecção de subconjuntos de Ω. $\mathcal{L}$ diz-se uma Λ-álgebra se:

1. $\Omega \in \mathcal{L}$

2. *Se* $A \in \mathcal{L}$ *então* $\overline{A} \in \mathcal{L}$

3. *Se* $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}$ *e* $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$, *então* $\displaystyle\bigcup_{i}^{+\infty} A_i \in \mathcal{L}$

Exemplo 4.7.1

Seja $\Omega = \{1,2,3,4\}$. Então o conjunto $\mathcal{L} = \{\emptyset, \Omega, \{1,2\}, \{3,4\}, \{1,4\}, \{2,3\}\}$ é uma Λ-álgebra sobre Ω.

A vantagem do uso de Λ-álgebras reside no facto da probabilidade de qualquer elemento desta colecção poder ser calculado através dos valores de $\mathbb{P}(A_i)$ e dos axiomas de medida de Kolmogorov. Além disso, Λ-álgebras são classes monótonas de conjuntos, isto é, sucessões monótonas, no sentido da inclusão, têm limites dentro dessa classe e admitem por isso o tratamento assimptótico. Contudo, a noção de Λ-álgebra não é particularmente feliz no que consta da probabilidade condicionada, uma vez que é possível que $A_1, A_2 \in \mathcal{L}$ mas $A_1 \cap A_2 \notin \mathcal{L}$ e deste modo seja impossível definir $\mathbb{P}(A_2|A_1)$.

Uma outra proposta de Dynkin, é a de π-álgebra.

Definição 4.7.2 (π-álgebra)

Uma família $\mathcal{L}$ de subconjuntos de Ω é dita uma π-álgebra se: $\forall A, B \subseteq \Omega$ então $A \cap B \in \mathcal{L}$.

A vantagem de π-álgebras sobre Λ-álgebras reside de no caso das primeiras ser possível definir probabilidade condicionada, a desvantagem é que se podem incluir conjuntos cuja probabilidade não pode de facto ser encontrada, uma vez que, por exemplo, estas classes não são fechadas para a união.

Os trabalhos de von Mises, nomeadamente com experiências aleatórias repetidas indefinidamente, com um número finito de possíveis resultados para cada realização da experiência, como por exemplo o lançamento repetido de uma moeda equilibrada, foram também motivadas pelas afirmações de Kolmogorov, em [20], onde Kolmogorov afirma que tais experiências e a frequência de ocorrência dos vários resultados entram por vezes em confronto com o sistema de Kolmogorov.

Os estudos de von Mises levaram-no a criar uma álgebra, $\mathcal{V}$-álgebra, que em geral difere da noção de σ-álgebra.

Definição 4.7.3 ($\mathcal{V}$-álgebras)

Denomine-se por Ω o espaço dos possíveis associado à realização de cada uma das indefinidas realizações das experiências então estas indefinidas realizações têm como espaço dos possíveis Ω^∞ que consiste em todas as sucessões com elementos $x_i \in \Omega$.

Todos os acontecimentos cujas ocorrências são determinadas pelas n primeiras realizações da experiência (conjuntos cilíndricos) estão na álgebra de von Mises, $\mathcal{V}$-álgebras.

Construa-se a σ-álgebra, $\mathcal{F}_n$, cujos elementos são uniões e complementares dos acontecimentos que dependem das $m \leq n$ saídas. Defina-se álgebra a $\mathcal{F}^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$. Esta álgebra pode ser estendida para uma $\mathcal{V}$-álgebra $\mathcal{V}$ do seguinte modo:

Seja $V \in \mathcal{F}^\star$. $\mathcal{V}$ é uma $\mathcal{V}$-álgebra tal que é a menor álgebra cujos elementos V satisfazem a condição:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists L_n, U_n \in \mathcal{F}_n : L_n \subseteq V \subseteq U_n, \lim_{n \to +\infty} (\mathbb{P}(U_n) - \mathbb{P}(L_n)) = 0.$$

Os acontecimentos de $\mathcal{V}$ verificam uma importante propriedade, as suas probabilidades podem ser calculadas por repetição de acontecimentos cujos resultados ficam definidos por um número finito de experiências. Os acontecimentos que não estão em $\mathcal{V}$ não têm avaliação experimental da sua probabilidade.

Para compreender melhor o facto dos axiomas de Kolmogorov serem restritivos e não formarem um sistema completo, é partir da axiomática comparativa de probabilidade e construir sobre ela o conceito de Kolmogorov de probabilidade.

Terrence Fine, em [8], constrói tal ligação, o que permite concluir, segundo o autor, que de facto o melhor sistema axiomático para descrever fenómenos aleatórios será usando o conceito comparativo de probabilidade. No entanto, o autor não esclarece se o objectivo primordial da Teoria das Probabilidades será o de descrever tais fenómenos ou essas descrições serão simples aplicações desta teoria. Se o for, é obvio que todas as reflexões atrás descritas deixam de fazer sentido uma vez que para aplicar a teoria será necessário ter uma contextualização completa do problema, sem a qual o fenómeno não fará sentido. Fica uma questão em aberto: Será que existe um conjunto de axiomas que possam descrever fenómenos aleatórios de uma forma precisa e coerente?

4.8 Odds ou racio de probabilidades

Em muitas situações do dia a dia são usuais afirmações do tipo: *o jogador X tem 3 contra 5 hipóteses de vencer.* Este tipo de frases pode induzir, num ouvinte mais distraído ou menos informado, a errada impressão que a probabilidade do jogador X ganhar é $\frac{3}{5}$. Porém, aquele tipo de afirmações corresponde a uma forma alternativa de trabalhar com probabilidades a que se dá o nome de *odds* [11]. Esta noção está intimamente ligada a problemas de jogos de azar. Embora se defina recorrendo a uma qualquer medida de probabilidade, ela tem mais visibilidade num modelo de probabilidade do tipo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, onde Ω é um conjunto finito, $\mathcal{F}$ uma σ-álgebra sobre Ω e $\mathbb{P}$ a medida de probabilidade uniforme.

Definição 4.8.1 (Odds ou racio de probabilidades)

Seja $\mathcal{F}$ uma σ-álgebra sobre $\Omega \neq \emptyset$ e $\mathbb{P}$ uma medida de probabilidade finitamente aditiva. Sejam $X, Y \in \mathcal{F}$; então

1. *o odds a favor de X contra Y é dado por $\frac{\mathbb{P}(X)}{\mathbb{P}(Y)}$, caso $\mathbb{P}(Y) \neq 0$ e é denotado por $\mathcal{O}(X : Y)$;*

2. *o odds a favor de X (contra $\overline{X}$) é dado por $\mathcal{O}(X : \overline{X}) = \frac{\mathbb{P}(X)}{\mathbb{P}(\overline{X})} = \frac{\mathbb{P}(X)}{1-\mathbb{P}(X)}$, desde que $\mathbb{P}(X) \neq 1$ e é denotado por $\mathcal{O}(X : \overline{X})$ ou simplesmente por $\mathcal{O}(X)$.*

Existe uma relação biunívoca entre o conceito de probabilidade e o de odds. Conhecida a probabilidade pode-se facilmente calcular o odds e conhecido o odds pode-se facilmente calcular a probabilidade. Na realidade, $\mathcal{O}(X) = \frac{\mathbb{P}(X)}{1-\mathbb{P}(X)}$ e através de simples manipulação algébrica se deduz que $\mathbb{P}(X) = \frac{\mathcal{O}(X)}{1+\mathcal{O}(X)}$.

Apesar desta relação biunívoca poder parecer indicar que odds também poderia ser uma medida de probabilidade, o mesmo não acontece. Basta pensar no caso em que $\mathbb{P}(X) = 0.8$, assim $\mathcal{O}(X) = \frac{0.8}{0.2} = 4$, o que mostra que $\mathcal{O}(X) \notin [0, 1]$. De facto, dado um acontecimento X de probabilidade diferente de 1, pode-se concluir que $\mathcal{O}(X) \in [0, +\infty)$.

É usual dizer-se que um determinado jogo de apostas, associado a uma dada experiência aleatória, é justo se quando o referido jogo for realizado um grande número de vezes o lucro obtido na aposta for igual ao prejuízo obtido. Suponha-se por exemplo que determinado acontecimento, A, tem probabilidade p de ocorrer e que um certo indivíduo resolve apostar sobre a sua ocorrência. A aposta é a seguinte: se A se realizar ele recebe r euros, se não se realizar paga s euros. Se o jogo for justo, ao se realizar a experiência um grande número vezes espera-se que o indivíduo ganhe r euros numa proporção p de vezes e perca s euros numa proporção $1-p$ de vezes. Como o odds a favor de A, $\mathcal{O}(A) = \frac{p}{1-p}$, se o jogo for justo, então $sp = r(1-p)$, ou de outro modo,

[11] A palavra odds tem sido traduzida de várias formas, por exemplo, *possibilidades* ou *chances* embora alguns autores prefiram o uso do termo de *vantagens*.

$sp - r(1-p)$ terá de ser igual a 0, ou de uma forma equivalente, $\mathcal{O}(A) = \frac{r}{s}$.

Exemplo 4.8.1

Um determinado corredor tem $\frac{1}{5}$ de probabilidade de vencer uma corrida, logo o odds a favor desse corredor é $\frac{1}{4}$. Assim será de apostar, por exemplo, 4 euros em como o corredor vence e 1 euro em como perde (ou múltiplos do racio 4:1 como 8:2 ou 12:3, etc).

Esta outra forma de ver probabilidades está intimamente relacionada com os jogos de sorte ou de azar. O problema que de seguida se apresenta, paradoxo da divisão, envolve a noção de odds e foi discutido durante um largo período de tempo. A primeira publicação deste paradoxo foi em Veneza e o autor foi Fra Luca Paccioli (1445-1509), embora existam manuscritos datados de 1380 onde já era aflorado este problema. Mais tarde, Tartaglia apresentou uma solução incorrecta do problema e só depois de várias tentativas Pascal e Fermat, com trabalhos autónomos, apresentaram em 1654 uma solução correcta para o problema.

Paradoxo 4.8.1 (Paradoxo da divisão)

Dois jogadores jogam um jogo onde ambos têm as mesmas possibilidades de ganhar e concordam que quem vencer primeiro 6 jogadas do dito jogo ganharia determinado prémio monetário. Suponha-se que o jogo foi dado por terminado por motivos imprevistos e que na altura em que o jogo foi interrompido o jogador A tinha ganho 5 vezes e o jogador B apenas 3. Nestas circunstâncias, qual seria a forma mais justa de distribuir o prémio?

Apesar deste problema não ser efectivamente um paradoxo as tentativas não conseguidas de o resolverem por parte de alguns grandes matemáticos e as suas erradas e contraditórias respostas criaram a lenda que este problema seria de facto um paradoxo.

Uma das propostas seria dividir o prémio na proporção de jogadas ganhas, neste caso 5 contra 3. Tartaglia sugeriu um racio 2:1 pois pensou que o jogador A tinha ganho mais duas jogadas do que o jogador B que é $\frac{1}{3}$ do número necessário para ganhar. Desta forma, o jogador A teria direito a $\frac{1}{3}$ do prémio e o restante seria dividido igualmente pelos dois jogadores.

Tanto Fermat como Pascal não concordaram com esta resposta e consideraram que a divisão mais justa seria o racio 7:1. No entender destes dois grandes matemáticos, a divisão mais justa seria o racio entre as hipóteses que o jogador A tinha contra o *jogador B. Repare-se que o jogador A precisa de somente uma jogada para ganhar e o jogador B precisa de 3. De acordo com a ideia de Fermat poder-se-ia continuar o jogo, com 3 supostas jogadas, mesmo no caso de supérfluas (caso o jogador A vencesse antes). Este prolongamento do jogo implica que o número de possibilidades a considerar para ganhos de jogadores seja* $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ *todas igualmente possíveis. Deste modo apenas um resultado é favorável a que o jogador B ganhe o prémio, os outros 7 dão todos o prémio ao jogador A. Assim sendo o racio mais justo seria 7:1.*

4.9 Reuniões e intersecções de acontecimentos utilizando mintermos

Por vezes o cálculo de probabilidades envolvendo um número finito de acontecimentos não é propriamente trivial. Existem variadas situações onde as probabilidades reveladas parecem não serem suficientes para conduzir às que de facto são pedidas. Sob condições especiais, os *mintermos*, são uma ferramenta bastante útil para auxiliar no cálculo da probabilidade de acontecimentos envolvendo reuniões e intersecções finitas de outros acontecimentos.

Tal sucede porque quando o acontecimento de que se pretende calcular a probabilidade se pode representar por meio de uma reunião e/ou intersecção finita de acontecimentos, a classe formada por esses acontecimentos é usual denominar-se por *classe geradora*, e seus complementares, pode-se utilizar uma representação do Diagrama de Venn especial com vista a ilustrar possíveis formas de cálculo da probabilidade pretendida.

A essa reunião e/ou intersecção de acontecimento e seus complementares chama-se *combinação booleana* de membros de uma classe geradora.

Suponha-se, por exemplo, que dado acontecimento se pode escrever como combinação booleana de membros da classe geradora (finita) $\{A, B, C, D\}$. Para esta classe geradora existe uma partição geradora da classe, ou seja, o conjunto formado por todos os acontecimentos do tipo $X \cap Y \cap Z \cap W$, onde $X \in \{A, \overline{A}\}$, $Y \in \{B, \overline{B}\}$, $Z \in \{C, \overline{C}\}$ e $W \in \{D, \overline{D}\}$. Se a classe geradora contiver n acontecimentos então a partição geradora da classe contem 2^n elementos. Cada membro da partição geradora da classe é designado de *mintermo*. Em termos de acontecimentos, os mintermos são acontecimentos mutuamente exclusivos.

Os mintermos da partição geradora da classe $\{A, B, C\}$ são:

$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$	$\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$	$A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$	$A \cap B \cap \overline{C}$
$\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$	$\overline{A} \cap B \cap C$	$A \cap \overline{B} \cap C$	$A \cap B \cap C$

Os mintermos da partição geradora da classe $\{A, B, C, D\}$ são:

$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{D}$	$\overline{A} \cap B \cap \overline{C} \cap \overline{D}$	$A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{D}$	$A \cap B \cap \overline{C} \cap \overline{D}$
$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap D$	$\overline{A} \cap B \cap \overline{C} \cap D$	$A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap D$	$A \cap B \cap \overline{C} \cap D$
$\overline{A} \cap \overline{B} \cap C \cap \overline{D}$	$\overline{A} \cap B \cap C \cap \overline{D}$	$A \cap \overline{B} \cap C \cap \overline{D}$	$A \cap B \cap C \cap \overline{D}$
$\overline{A} \cap \overline{B} \cap C \cap D$	$\overline{A} \cap B \cap C \cap D$	$A \cap \overline{B} \cap C \cap D$	$A \cap B \cap C \cap D$

Para auxiliar no manuseamento sistemático de mintermos introduz-se um sistema simples de numeração dos mintermos baseado no sistema binário. Vejam-se as Tabelas 4.2 e 4.3 para a ilustração de dois mapas de mintermos. Convém realçar o facto da ordem dos factores ser relevante e qualquer modificação no seu ordenamento produzir uma numeração não condizente com os mapas já elaborados.

O sistema numérico referido assenta na representação, em código binário, de cada um dos respectivos mintermos tal que:

- Ocorrência do acontecimento corresponde ao dígito 1;
- Não ocorrência do acontecimento corresponde ao dígito 0.

Por exemplo, o acontecimento $\overline{A} \cap B \cap \overline{C} \cap \overline{D}$ da partição geradora de mintermos para a classe geradora $\{A, B, C, D\}$, será representado nesse sistema por 0100.

000	010	100	110
001	011	101	111

Tabela 4.2: Correspondências binárias dos mintermos da partição geradora da classe $\{A, B, C\}$

0000	0100	1000	1100
0001	0101	1001	1101
0010	0110	1010	1110
0011	0111	1011	1111

Tabela 4.3: Correspondências binárias dos mintermos da partição geradora da classe $\{A, B, C, D\}$

As combinações de *zeros* e *uns* podem ser interpretadas como uma representação binária de um número inteiro o qual é utilizado para designar os mintermos, obtendo-se assim uma representação dos mintermos. Veja-se para ilustração as Tabelas 4.4 e 4.5 para os mintermos das partições geradoras das classes $\{A, B, C\}$ e $\{A, B, C, D\}$. Por exemplo, e relativamente à classe $\{A, B, C\}$, o mintermo $A \cap \overline{B} \cap C$ é representado pelo número 5.

0	2	4	6
1	3	5	7

Tabela 4.4: Representações numéricas para os mintermos da Tabela 4.2

0	4	8	12
1	5	9	13
2	6	10	14
3	7	11	15

Tabela 4.5: Representações numéricas para os mintermos da Tabela 4.3

Os mintermos gerados pela classe podem ser representados graficamente através de um *diagrama de Venn especial* conhecido por *gráfico mintermo*. Este representa-se com base nas representações binárias dos mintermos (atente-se às Tabelas 4.6 e 4.7).

	$\overline{A}$	$\overline{A}$	A	A
	$\overline{B}$	B	$\overline{B}$	B
$\overline{C}$	0	2	4	6
C	1	3	5	7

Tabela 4.6: Gráfico de mintermos relativos à classe geradora $\{A, B, C\}$

Uma vez que qualquer combinação booleana de membros da classe geradora se pode expressar como uma união (única) de mintermos, então a probabilidade da combinação booleana pode ser determinada através das probabilidades de todos os mintermos que determinam a combinação booleana. Este resultado é garantido pelo teorema que se segue denominado por Teorema da expansão dos mintermos.

Teorema 4.9.1 (Teorema da expansão dos mintermos)

Cada combinação booleana dos elementos numa classe geradora pode ser expressa, de forma única, como uma união disjunta de uma subclasse de mintermos apropriada. Esta representação é conhecida como expansão do mintermo para a combinação.

		$\overline{A}$	$\overline{A}$	A	A
		$\overline{B}$	B	$\overline{B}$	B
$\overline{C}$	$\overline{D}$	0	4	8	12
$\overline{C}$	D	1	5	9	13
C	$\overline{D}$	2	6	10	14
C	D	3	7	11	15

Tabela 4.7: Gráfico de mintermos relativos à classe geradora $\{A, B, C, D\}$

Uma demonstração deste Teorema pode ser encontrada em [26].

Em geral, se um acontecimento se pode representar por uma combinação booleana de uma classe de n acontecimentos, então pode-se representar os 2^n mintermos num gráfico de mintermos e verificar se as probabilidades conhecidas permitem determinar a probabilidade do acontecimento em estudo.

Frequentemente é útil referir os mintermos pelo seu número decimal. Se os membros da classe geradora forem trabalhados segundo uma ordem fixa, então cada número especifica unicamente um mintermo. Por exemplo, para a classe finita $\{A, B, C, D\}$, necessariamente por esta ordem, o mintermo $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D}$ é representado pelo número inteiro 0. Por outro lado, como os mintermos são disjuntos, então $\mathbb{P}(x, y) = \mathbb{P}(x)+\mathbb{P}(y)$ onde x e y denotam o número associado a dois mintermos distintos de uma mesma classe geradora.

Se a probabilidade de todos os mintermos pode ser determinada, então a probabilidade da combinação booleana é determinada. Vejam-se alguns exemplos práticos da utilização de mintermos:

Exemplo 4.9.1

Considere-se a classe de acontecimentos $\{A, B, C\}$. *Suponha-se que:*

$\mathbb{P}(B) = 0.5$; $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.2$; $\mathbb{P}(\overline{A} \cap (B \cup C)) = 0.4$

Qual será o valor de $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$*?*

Analisando o gráfico de mintermos da Tabela 4.6 e comparando com os dados do problema, conclui-se que:

- $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(2, 3, 6, 7)$
- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(6, 7)$
- $\mathbb{P}(\overline{A} \cap (B \cup C)) = \mathbb{P}(1, 2, 3)$

e que, portanto, $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = \mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(1, 2, 3) - \mathbb{P}(2, 3, 6, 7) + \mathbb{P}(6, 7) = 0.1$

Este modo de encarar as operações sobre acontecimentos e suas probabilidades pode também ser utilizado na demonstração de uma séria de propriedades básicas de medidas de probabilidade finitamente aditivas tornando-se mais sistemática.

Exemplo 4.9.2 (Aplicação de mintermos)

Sejam A, B e C três acontecimentos de um dado espaço de probabilidade. Utilizando mintermos consegue-se provar que:

$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$

Demonstração:

Na realidade analisando o mapa de mintermos para três variáveis tem-se que:

$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(1,2,3,4,5,6,7)$ e, por outro lado, verifica-se que:

$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$

$= \mathbb{P}(4,5,6,7) + \mathbb{P}(2,3,6,7) + \mathbb{P}(1,3,5,7) - \mathbb{P}(6,7) - \mathbb{P}(3,7) - \mathbb{P}(5,7) + \mathbb{P}(7)$

$= \mathbb{P}(1,2,3,4,5,6,7)$
$=\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$.■

Mintermos e independência

Teorema 4.9.2

Sejam $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ uma classe geradora de acontecimentos, M_i um qualquer mintermo da partição geradora da classe $\mathcal{A}$ e B uma qualquer combinação booleana de elementos de $\mathcal{A}$. Se C for um acontecimento tal que $\{M_i, C\}$ é um par de acontecimentos independentes para todo i, então $\{B, C\}$ também é um par de acontecimentos independentes.

Demonstração:

Pelo Teorema da expansão de mintermos existe uma subclasse de mintermos gerada por $\mathcal{A}$, $\{M_i : i \in J_B\}$ para algum J_B tal que $B = \biguplus_{i \in J_B} M_i$, $B \cap C = \biguplus_{i \in J_B} (M_i \cap C)$, onde $\biguplus$ representa a união disjunta.

Pela regra do produto e pela aditividade da medida tem-se:

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \sum_{i \in J_B} \mathbb{P}(M_i \cap C) = \sum_{i \in J_B} \mathbb{P}(M_i)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C) \sum_{i \in J_B} \mathbb{P}(M_i) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

Assim tem-se a pretendida independência entre os acontecimentos B e C.■

Corolário 4.9.1

Considerem-se duas classes finitas de acontecimentos, $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ *e* $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \cdots, B_m\}$. *Sejam* M_i *um qualquer mintermo gerado por* $\mathcal{A}$ *e* N_j *um qualquer mintermo gerado por* $\mathcal{B}$. *Sejam ainda* C *uma combinação booleana de acontecimentos de* $\mathcal{A}$ *e* D *uma combinação booleana de acontecimentos de* $\mathcal{B}$. *Se para todo* i, j *cada* $\{M_i, N_j\}$ *for um par de acontecimentos independentes, então* C *e* D *são independentes.*

Teorema 4.9.3

Seja $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ *uma classe de acontecimentos independentes. Se* B *for um acontecimento tal que o par* $\{B, D\}$ *é um par de acontecimentos independentes para cada combinação booleana* D *de acontecimentos de* $\mathcal{A}$*, então a classe* $\mathcal{A}^\star = \{A_1, A_2, \cdots, A_m, B\}$ *é uma classe de acontecimentos independentes.*

Demonstração:

Sejam J_D um qualquer subconjunto de $\{1, 2, \cdots, m\}$ e D uma combinação booleana de elementos de $\mathcal{A}$ dado por $D = \bigcap_{i \in J_D} A_i$. Como por hipótese o B e qualquer combinação booleana de elementos de $\mathcal{A}$ são um par de acontecimentos independentes e como os elementos de $\mathcal{A}$ são acontecimentos independentes, tem-se:

$$\mathbb{P}(B \cap D) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(D) = \prod_{i \in J_D} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B)$$

Como J_D é qualquer, fica assim garantida a independência de acontecimentos de qualquer subclasse da classe $\mathcal{A}^\star$.■

Teorema 4.9.4

Para cada $i = 1, 2, \cdots, n$*, com* $n \geq 2$*, seja* $\mathcal{A}_i$ *uma classe de acontecimentos, de modo que não existam duas classes distintas com acontecimentos em comum. Sejam* M_{i_j} *um qualquer mintermo gerado por* $\mathcal{A}_i$ *e* F_i *uma qualquer combinação booleana de acontecimentos de* $\mathcal{A}_i$. *Se cada classe* $\{M_{i_j} : 1 \leq j \leq n\}$ *for uma classe de acontecimentos independentes então a classe* $\{F_i : 1 \leq i \leq n\}$ *também o é.*

Demonstração:

Prove-se este teorema por indução sobre o número n de classes envolvidas.

O Corolário 4.9.1 garante a veracidade da afirmação no caso $n = 2$.

Suponha-se que a proposição é verdadeira para $n = k$ e mostre-se que também é verdadeira para $n = k + 1$.

Seja $\mathcal{B}_k = \bigcup_{l=1}^{k} \mathcal{A}_l$. Os mintermos utilizados em $\mathcal{B}_k$ são a intersecção de mintermos de vários $\mathcal{A}_i$. Sejam $M_{i_{k+1}}$ um qualquer mintermo gerado por $\mathcal{A}_{k+1}$ e N_r um qualquer mintermo gerado por $\mathcal{B}_k$. Por hipótese $M_{i_{k+1}}$ e N_r são dois acontecimentos independentes. Pelo Corolário 4.9.1, se G é uma qualquer combinação booleana de acontecimentos de $\mathcal{B}_k$, então F_{k+1} e G são acontecimentos independentes. Por hipótese, $\{F_1, F_2, \cdots, F_k\}$ é uma classe de acontecimentos independentes logo se F for uma qualquer combinação booleana de elementos desta classe e consequentemente também de $\mathcal{B}_k$, então $\{F_{k+1}, F\}$ é um par de acontecimentos independentes.

Pelo Teorema 4.9.3, a classe $\{F_1, F_2, \cdots, F_k, F_{k+1}\}$ é uma classe de acontecimentos independentes. Portanto a proposição é verdadeira para $n = k + 1$.

Pelo princípio da indução matemática, o teorema é verdadeiro para qualquer $n \geq 2$■.

Corolário 4.9.2

Para cada $i = 1, 2, \cdots, n$, seja $\mathcal{A}_i$ uma classe finita de acontecimentos tal que não existe nenhum acontecimento contido em mais do que uma das classes e seja F_i uma qualquer combinação booleana de acontecimentos de $\mathcal{A}_i$. Seja $\mathcal{B}_n = \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{A}_j$ a classe que contém todos os acontecimentos de todos os $\mathcal{A}_i$. Se $\mathcal{B}_n$ for uma classe de acontecimentos independentes então a classe $\{F_i : 1 \leq i \leq n\}$ também o é.

Demonstração:

Seja M_{r_i} um qualquer mintermo gerado por $\mathcal{A}_i$, $1 \leq i \leq n$. A independência dos acontecimentos de $\mathcal{B}_n$ implica a independência dos acontecimentos da classe $\{M_{r_i} : 1 \leq i \leq n\}$. Pelo Teorema 4.9.4, tem-se a independência dos acontecimentos de cada classe $\{F_i : 1 \leq i \leq n\}$■.

Exemplo 4.9.3

Considere-se a classe de acontecimentos independentes $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$, tal que:

$$\mathbb{P}(A_1) = 0.4; \qquad \mathbb{P}(A_2) = 0.2; \qquad \mathbb{P}(A_3) = 0.7; \qquad \mathbb{P}(A_4) = 0.5; \qquad \mathbb{P}(A_5) = 0.4.$$

Considere-se as combinações booleanas F e G de acontecimentos da referida classe tais que $F = A_1 \cap (A_2 \cup \overline{A_3})$ e $G = (\overline{A_4} \cap A_5) \cup (A_4 \cap \overline{A_5})$.

Assim, F é uma combinação booleana dos acontecimentos da classe $\mathcal{A}_1 = \{A_1, A_2, A_3\}$ e G é uma combinação booleana dos acontecimentos da classe $\mathcal{A}_2 = \{A_4, A_5\}$. A classe $\mathcal{B} = \mathcal{A}_1 \biguplus \mathcal{A}_2$ é uma classe de acontecimentos independentes. Logo, a classe $\{F, G\}$ é uma classe de acontecimentos independentes.

Reconstruindo os gráficos de mintermos para as classes geradas por dois e por três acontecimentos (vejam-se as Tabelas 4.8 e 4.9) com o preenchimento das respectivas probabilidades encontradas pela regra do produto tem-se:

	$\overline{A_1}$	$\overline{A_1}$	A_1	A_1
	$\overline{A_2}$	A_2	$\overline{A_2}$	A_2
$\overline{A_3}$	0.144	0.036	0.096	0.024
A_3	0.336	0.084	0.224	0.056

Tabela 4.8: Gráfico adaptado de mintermos para a classe $\{A_1, A_2, A_3\}$

	$\overline{A_4}$	A_4
$\overline{A_5}$	0.3	0.3
A_5	0.2	0.2

Tabela 4.9: Gráfico adaptado de mintermos para a classe $\{A_4, A_5\}$

Donde tendo em conta as representações numéricas dos mintermos (ver Tabelas 4.6 e 4.7, respectivamente) tem-se:

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(4, 6, 7) = 0.096 + 0.024 + 0.056 = 0.176$$

$$e$$

$$\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}^{\star}(1, 2) = 0.2 + 0.3 = 0.5$$

Como F e G são acontecimentos independentes tem-se $\mathbb{P}(F \cap G) = 0.176 \times 0.5 = 0.088$.

Capítulo 5

Contribuições para o ensino da Teoria das Probabilidades

O computador pode desempenhar um papel importante no ensino da Teoria das Probabilidades. São vários os programas informáticos a que se pode recorrer e de fácil acessibilidade, tais como, Excel, Free Pascal, Hot Potatoes ou Java. Neste capítulo apresentam-se as características essenciais de alguns destes programas para aplicações ao Ensino, assim como, possíveis actividades. Para além de implementar actividades que solicitassem o recurso ao computador tentou-se averiguar em alguma medida o contributo dessas actividades para a administração do tema de Probabilidade actualmente leccionado no 12º ano de escolaridade. Este capítulo contém outra vertente, a participação no Projecto Matemática Ensino, PMatE, da Universidade de Aveiro, nomeadamente, a criação de modelos de questões sobre a Teoria das Probabilidades em diferentes graus e níveis de ensino, a inserir no programa informático EquaMat.

5.1 Actividade com recurso a folhas de cálculo

As folhas de cálculo são um dos tipos de software mais utilizado não só no mundo empresarial como também na actividade científica. Estes programas possuem características adaptáveis à resolução de problemas numéricos e ao uso de processos iterativos, tornando-se possíveis instrumentos de trabalho no ensino de muitas áreas da Matemática, desde a Álgebra à Trigonometria, passando pelo estudo das Funções, ou mesmo, da Teoria das Probabilidades e Estatística.

As folhas de cálculo surgiram no final da década de setenta (entre 1970 e 1980), em simultâneo com os computadores pessoais. O primeiro grande sucesso comercial, em termos de folhas de cálculo, foi a Visicalc. Posteriormente, outras gerações deste tipo de ferramenta informática foram surgindo, cada vez mais sofisticadas e potentes. Actualmente, o mercado é dominado essencialmente, por duas folhas de cálculo, o Quattro e o Excel.

A escolha do tema não foi aleatória; deveu-se em muito ao desempenho pouco satisfatório observado nos alunos do 12º ano em situação de teste. Para uma amostra aleatória de alunos estes demonstraram não ter assimilado os conceitos. Por exemplo, num dos testes de avaliação verificou-se que continha a seguinte questão retirada de um exame nacional (Época Normal, 1995):

A tabela seguinte refere-se aos dados obtidos nos estudos clínicos realizados para avaliar a actividade terapêutica de um medicamento.

Fases da experiência	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª
Nº de doentes medicados	120	235	528	822	1099	2244
Nº de doentes que registaram melhoras	52	126	310	490	659	1346

Com base nos resultados obtidos, os investigadores concluíram que a probabilidade de obter êxito com o referido medicamento é de 0,60. Comente a conclusão a que chegaram os investigadores, referindo a lei em que se basearam.

A esta questão responderam correctamente 7 alunos num total de 55 alunos.

5.1.1 Actividade e metodologia implementada

A actividade é relativa ao conceito frequencista versus conceito clássico de Probabilidade que se encontra em anexo - Apêndice A - foi concebida em Excel e realizada pelos alunos do 12º ano da Escola Secundária D. Inês de Castro de Alcobaça, durante o primeiro período do ano lectivo de 2003/2004, entre meados do mês de Outubro e início do mês de Novembro de 2003, numa das salas de informática. Cada uma das turmas envolvidas foi dividida em grupos de dois ou três alunos, repartidos pelos doze computadores disponíveis na sala. Durante a realização da actividade os alunos foram acompanhados por dois professores que os iam orientando e informando das tarefas a realizar. A duração da actividade foi de cerca de cem minutos em cada turma.

A primeira tarefa a realizar nesta actividade consistia em escolher uma de entre cinco afirmações relativas ao tema em teste. Esta escolha iria permitir observar se os alunos já tinham ou não assimilado o conceito a testar. De seguida, e com a ajuda do computador, os alunos procederam à simulação de duas experiências (jogos) com dados e respondiam a algumas questões que pretendiam comparar o valor da probabilidade de ganhar o jogo através do conceito clássico e de um pretenso valor em torno do qual as frequências relativas iriam estabilizar. Realizadas estas duas simulações, foi pedido aos alunos que reflectissem sobre a opção que teriam escolhido no início da actividade e se ainda confirmavam tal escolha. Por fim, foi-lhes solicitado uma afirmação alternativa que substituísse as cinco afirmações iniciais e fosse a mais adequada, mesmo que tivessem confirmado a primeira opção.

5.1.2 Resultados e conclusões

Em relação à escolha feita no início da actividade, 73,2 % dos alunos demonstrou não dominar o conceito, enquanto 26,8 % escolheu a opção correcta.

<table>
<tr><td rowspan="4">Primeira opção correcta</td><td rowspan="4">26,8 %</td><td rowspan="2">Confirmaram, no final, a opção</td><td rowspan="2">93,3%</td><td>Sugeriram uma opção correcta</td><td>85,7 %</td></tr>
<tr><td>Sugeriram uma opção incorrecta</td><td>14,3 %</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Não confirmaram, no final, a opção</td><td rowspan="2">6,7 %</td><td>Sugeriram uma opção correcta</td><td>50%</td></tr>
<tr><td>Sugeriram uma opção incorrecta</td><td>50 %</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Primeira opção incorrecta</td><td rowspan="4">73,2 %</td><td rowspan="2">Não confirmaram, no final, a opção</td><td rowspan="2">85,4%</td><td>Sugeriram uma opção correcta</td><td>88,6 %</td></tr>
<tr><td>Sugeriram uma opção incorrecta</td><td>11,4 %</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Confirmaram, no final, a opção</td><td rowspan="2">14,6 %</td><td>Sugeriram uma opção correcta</td><td>57,1%</td></tr>
<tr><td>Sugeriram uma opção incorrecta</td><td>42,9 %</td></tr>
</table>

Tabela 5.1: Resultados globais relativos à actividade implementada sobre o conceito frequencista versus conceito de Laplace

Contudo, o facto da escolha da opção de 26,8 % dos alunos ser a correcta nem todos demonstraram conhecer a definição frequencista de probabilidade, facto que seria visível no final da actividade. Depois de realizada a actividade e novamente confrontados com a opção escolhida na primeira parte, 62,5 % dos alunos alteraram a sua escolha, enquanto 37,5 % confirmaram a escolha feita. No entanto, é de realçar que dos 73,2 % dos alunos, cuja primeira opção foi incorrecta, 85,4 % dos mesmos alteraram a sua resposta e 88,6 % destes demonstraram ter assimilado o conceito. Dos alunos, 14,6 % que continuaram a confirmar a opção feita, 57,1 % apesar de continuarem com a opção errada sugeriram uma nova opção correcta. Dos 26,8 % que responderam correcto à primeira parte da actividade, 93,3 % não alteraram a sua escolha e, destes, 85,7 % conseguiram formular uma opção correcta para substituir as primeiras, enquanto dos 6,7 % que alteram a sua opção 50 % dos alunos sugeriram uma correcta nova opção.

A primeira conclusão extraída desta actividade é que a motivação, factor importantíssimo no ensino, é de facto bastante maior quando se realizam este tipo de tarefas. Em relação ao ensino de Probabilidades, no ensino secundário, este recorre muito à intuição e à visualização dos conceitos, sendo por isso importante este tipo de actividades.

Globalmente a realização desta actividade foi muito bem sucedida: antes da realização desta actividade cerca de 75% dos alunos demonstraram não ter assimilado o conceito e no final cerca de 77% tinha de facto interiorizado os conceitos.

5.2 Actividade utilizando Hot Potatoes

Hot Potatoes é um pacote de seis ferramentas ou programas de autoria, desenvolvido pelo Grupo de Pesquisa e Desenvolvimento do Centro de Computação e Multimédia da Universidade de Victoria, Canadá. Possibilitam a criação de seis tipos de exercícios interactivos para a Web. As páginas criadas usam a programação Javascript para a interactividade, compatíveis com todas as versões dos navegadores Internet Explorer e Netscape.

Duas das ferramentas, JMath e JMix, produzem páginas com recursos DHTML (exercícios de clicar-arrastar-soltar), mas que só funcionam nas versões dos navegadores Internet Explorer 5.0 e Netscape 6 ou superiores. Outra das ferramentas, JQuiz, possibilita a criação de exercícios do tipo Verdadeiro/Falso generalizado, auto-corrigíveis e que, em cada questão respondida, pode atribuir ao aluno uma cotação predefinida ou configurada conforme o pretendido.

Embora os exercícios sejam construídos usando Javascript, não é necessário nenhum conhecimento sobre esta linguagem de programação. Tudo o que se precisa saber é introduzir dados - textos, questões, respostas, imagens, etc - e os programas criarão, automaticamente, a página Web. Desta forma, basta enviar a página criada para o servidor, para serem acedidos via Internet. Os programas são feitos de forma bastante intuitiva e de modo que quase todos os aspectos das páginas possam ser personalizados.

No caso de quem pretender utilizar esta ferramenta, ser uma instituição sem fins lucrativos e cujo objectivo seja o de disponibilizar exercícios de público acesso na Internet, então poderá usar o Hot Potatoes gratuitamente. Estes factores tornam o Hot Potatoes numa ferramenta a que alguns professores têm recorrido e cuja utilização pode ser uma mais valia no processo de aprendizagem.

5.2.1 Actividade e metodologia implementada

A actividade foi realizada por cinquenta alunos do 12º ano que demonstraram interesse em participar neste projecto. Com esta actividade indaga-se a importância da realização de tarefas interactivas com recurso ao computador, no processo de aprendizagem, neste caso, das Probabilidades, e consolidação do mesmo.

Para levar a cabo a realização desta actividade, foi construído um banco com oitenta questões de escolha múltipla, elaboradas em JQuiz. Cada questão apresenta quatro possibilidades de resposta, das quais, apenas uma é correcta. O aluno tinha três tentativas para responder a cada questão. Refira-se que se nenhuma das três tentativas seleccionadas fosse correcta, então seria a quarta alternativa, pelo que seria despropositado possibilitar uma quarta resposta. Em cada realização da tarefa o computador selecciona aleatoriamente dez das oitenta questões, baralhando a ordem das perguntas e a ordem das respostas. Como forma de optimizar o trabalho levado a cabo com a realização destas tarefas, os itens a testar, com a realização desta actividade, abordavam todo o conteúdo programático do capítulo denominado por Probabilidades e actualmente leccionado no 12º ano. Devido a este facto, algumas questões estão relacionadas com Combinatória, Triângulo de Pascal e Distribuições de Probabilidades, embora em reduzido número.

A cada aluno foi pedido que respondesse às dez questões fornecidas pelo computador, registasse as respostas e repetisse o processo. Numa primeira vez a actividade foi realizada em três etapas e numa segunda vez repetida por mais três etapas. A actividade decorreu durante o 3º período do ano lectivo 2003/2004[1].

5.2.2 Resultados e conclusões

A tabela seguinte sumaria as percentagens de questões respondidas correctamente nas três possíveis tentativas por questão e nas seis diferentes etapas em que decorreu a actividade:

Tentativa	1ª Etapa	2ª Etapa	3ª Etapa	4ª Etapa	5ª Etapa	6ª Etapa
Primeira tentativa	40%	30%	50%	60%	70%	90%
Segunda tentativa	30%	40%	30%	30%	10%	10%
Terceira tentativa	20%	30%	10%	10%	10%	0%

A realização desta actividade foi de facto uma experiência bastante enriquecedora quer para os alunos que nela participaram quer para os professores que tomaram um papel activo na sua implementação.

Os alunos puderam fazer uma auto-avaliação desprovida da possível influência nefasta da figura Professor como factor de avaliação [2], puderam consolidar conhecimentos e conceitos básicos da Teoria das Probabilidades, puderam exercitar a resposta a questões de escolha múltipla que tão fraco índice de aceitação apresentam e puderam treinar o raciocínio e a ligação entre diversos conceitos. Outro factor positivo prende-se com condicionantes motivacionais. Os alunos demonstraram uma maior predisposição para actividades que fujam da rotina diária, que usem tecnologia, que estimulem o saber. Para o docente, este tipo de tarefa tem também algumas conveniências, nomeadamente, a facilidade de correcção das questões (auto-corrigíveis), o feedback que pode advir dos resultados obtidos, o estímulo à criatividade na construção deste tipo de questões, o trabalho de grupo sempre importante neste tipo de tarefa, entre outros.

[1] O banco de questões permaneceu no portal electrónico da escola, no endereço http: esdica.paae.net, para que os alunos pudessem usufruir do mesmo. Actualmente este e outros bancos de questões pode encontrar-se no endereço http://www.prof2000.pt/users/pjca.

[2] Da experiência fica a sensação que a presença do professor pode ser um factor inibitório em situações de auto-avaliação, em muito devido, à errada impressão que o aluno tem de que esta actividade terá influência directa na sua classificação final. Esta opinião é fundamentada pela forma recorrente como os alunos questionavam o professor, antes do início das actividades, acerca da influência do desempenho nesta tarefa na avaliação e ao modo desinibido como se comportavam quando eram informados que seria apenas uma actividade de auto-avaliação realizada sob a forma de anonimato.

Os resultados obtidos demonstraram uma evolução bastante positiva com o decorrer das etapas. Poder-se-á dizer que praticamente à medida que o número de etapas ía aumentando o número de questões erradas ía diminuindo, o que leva a concluir que houve aprendizagem. Todavia, este tipo de tarefas, só por si, não substituem todos os outros processos de aprendizagem mas podem ser um complemento de inquestionável valor.

Após a realização destas tarefas foi opinião unânime, por parte dos docentes responsáveis pela execução das mesmas, que este tipo de actividades deve ser estendido, sempre que possível, a outros níveis de ensino e a todos os conteúdos leccionados. A avaliação sumativa pode inclusive reflectir, embora de forma indirecta, o trabalho individual do aluno neste tipo de aprendizagem, nomeadamente, através da inclusão de questões retiradas do banco de questões das actividades disponíveis. Porém, para que tal sistema seja implementado é necessário expandir o número de questões e incluir o máximo de conteúdos possível o que será uma tarefa a desenvolver no futuro.

Apesar das vantagens apresentadas existem algumas desvantagens/inconvenientes na realização deste tipo de actividades. Uma das desvantagens óbvias é a possibilidade de fraude na realização destas tarefas, factor que só prejudica o aluno e nunca o processo de aprendizagem; outra desvantagem é não permitir a avaliação do desenvolvimento de raciocínios e não testar a capacidade de expressão escrita. Refira-se, ainda, o favorecimento da resposta aleatória e o estímulo à memorização da resposta correcta sem a compreensão do sentido da opção.

Algumas destas desvantagens podem ser colmatadas quer com um trabalho junto dos alunos que vise a assimilação do espírito da tarefa, quer com a implementação na tarefa de ajudas que, em caso de resposta errada, conduzam o aluno à resposta correcta.

Em termos globais, os pontos fortes da realização deste tipo de actividade ultrapassam os inconvenientes da mesma, pelo que se recomenda a sua implementação. Porém, mais uma vez se realça que este tipo de actividade não substitui qualquer outro tipo de trabalho, serve simplesmente de complemento útil e facilitador na obtenção de uma aprendizagem efectiva do conhecimento, neste caso concreto e em particular, da Teoria das Probabilidades.

5.3 Colaboração com o PMatE. Criação de modelos de questões

5.3.1 Em que que consiste o PMatE e o EquaMat?

O Projecto Matemática Ensino (PMatE) está a ser desenvolvido no Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, desde o ano lectivo de 1990/91. O objectivo inicial prendia-se com a necessidade de proceder a um tipo de pré-avaliação sumativa em disciplinas com elevado número de alunos. Na sua filosofia é estabelecido que essa avaliação apenas permita o acesso dos alunos a provas de exame que tenham demonstrado a aquisição de conceitos e resultados básicos tomados como fundamentais.

O Equamat é um programa informático, uma espécie de base de dados de exercícios com propriedades próprias, que permite avaliar se as competências mínimas exigidas foram ou não adquiridas. Denominam-se por competências mínimas exigidas, não só o domínio de conceitos básicos, mas também a sua interpretação e aplicações elementares. Este processo pode ser levado a cabo com recurso a exemplos e contra-exemplos, devidamente ponderados. Para aceder a este tipo de pré-avaliação é permitido aos alunos um contacto prévio com o programa, de modo a estes se habituarem ao ambiente informático proposto.

Actualmente, o objectivo do programa não se resume só a uma pré-avaliação mas tem outro tipo de utilidades, nomeadamente, auto e hetero-avaliações para docentes e discentes e apresenta ainda uma componente lúdica, uma forma de aprender jogando.

A base de dados do EquaMat é construída através da criação de modelos que obedecem a uma filosofia própria do projecto e cujos resultados têm-se revelado bastante positivos (veja-se [22]). As questões apresentadas pelo programa são do tipo Verdadeiro-Falso-Generalizado e são geradas por aqueles modelos criados. Cada modelo é duplamente classificado: por nível de dificuldade e por objectivos. As questões devem ser geradas aleatoriamente por expressões parametrizadas (expressões geradoras), das quais serão seleccionadas, de modo aleatório, quatro delas. Cada modelo gerador originado por uma mesma expressão geradora deve conter, aproximadamente, o mesmo número de questões verdadeiras e falsas. As opções de resposta agrupam-se em três grandes grupos, do tipo formal, do tipo concreto, ou do tipo numérico-qualitativo.

Os tópicos dos modelos criados no âmbito do presente trabalho referem-se à Teoria das Probabilidades e têm como população alvo os alunos do 9º ano do Ensino Básico, do 12º ano do Ensino Secundário e por último, os alunos universitários que frequentem disciplinas de Probabilidades.

5.3.2 Estudo da compactação de um modelo

A construção de um modelo (modelo gerador) consiste em compactar vários modelos de questões (modelos base) e estabelecer uma metodologia de selecção de questões de cada modelo base. No entanto, nem todas as questões de um modelo base podem ter interesse para o modelo gerador. Por exemplo, um mesmo modelo gerador pode estar disponível a alunos que frequentem o 9º ano de escolaridade com um determinado grau de dificuldade e a alunos do 12º ano com outro grau. Este processo pode implicar a supressão de algumas questões num e noutro grau de dificuldade.

Para ilustrar a compactação de modelos base num modelo gerador, apresentam-se os vários modelos base e a consequente compactação do modelo gerador A criado para a presente dissertação e que se encontra em Apêndice. Esse modelo tem por objectivo testar a assimilação do conceito clássico de Probabilidade. O modelo deverá ser apresentado conjuntamente com uma figura que corresponde a uma roleta circular com sectores numerados de 1 até um número pré-fixado, todos com a mesma área, e permitir a escolha aleatória de um sector da roleta.

Modelo base 1

Tema:	Probabilidades
Sub-Tema:	Noção de Probabilidade de um acontecimento
Objectivo Principal:	Conceito de Probabilidade segundo Laplace
Objectivo Secundário:	Conceito Geométrico de Probabilidade
Objectivos micro:	Simplificação de fracções. Cálculo de percentagens
Notações e Abreviaturas	$\triangleleft \frac{a}{b}$ - significa que a fracção $\frac{a}{b}$ é apresentada sob a forma de fracção irredutível
Parâmetros:	$x \in \{5, \cdots, 12\}$; $k \in \{1, \cdots, x\}$.
Texto das questões:	Considera a experiência aleatória que consiste em rodar a roleta da figura (com x sectores circulares de igual área e numerados de 1 a x) e observar o número do sector sobre o qual fica situado o ponteiro. Então, a probabilidade de sair o número k é:

	Respostas	**Validação**
a)	$\frac{1}{x}$	V
b)	$\frac{k}{x}$	F se $k \neq 1$; V se $k = 1$
c)	$\frac{100}{x}$%, sob a forma de percentagem	V
d)	$\frac{1}{k}$	F
e)	(Área do sector numerado com k)/(Área do círculo)	V
f)	$\frac{x}{k}$	F
g)	(Área de um qualquer dos sectores circulares)/(Área do círculo)	V
h)	$\frac{k-1}{x}$	F

Avaliação diagnóstica:

No caso de resposta errada às alíneas a), b), d), f) e h) o aluno demonstra não conhecer o conceito clássico de probabilidade.
No caso de resposta errada às alíneas e) e g) o aluno demonstra não dominar o conceito geométrico de probabilidade.
No caso de responder incorrectamente à alínea c) pode significar que o aluno desconhece o conceito clássico de probabilidade ou não sabe transformar um número do intervalo [0,1] numa percentagem.

Modelo base 2

Tema:	Probabilidades
Sub-Tema:	Noção de Probabilidade de um acontecimento
Objectivo Principal:	Conceito de Probabilidade segundo Laplace
Objectivo Secundário:	Conceito geométrico de Probabilidade
Objectivos micro:	Simplificação de fracções; Cálculo de percentagens
Parâmetros:	$x \in \{5, \cdots, 12\}$, $y \in \{2, \cdots, x\}$ e $k \in \{1, \cdots, x\}$.
Notações e Abreviaturas	$\triangleleft \frac{a}{b}$ - significa que a fracção $\frac{a}{b}$ é apresentada sob a forma de fracção irredutível
Texto das questões:	Considera a experiência aleatória que consiste em rodar a roleta da figura (com x sectores circulares de igual área numerados de 1 a x) e observar o número do sector sobre o qual fica situado o ponteiro. Então, a probabilidade de sair um número inferior a y é:

	Respostas	**Validação**
a)	$\frac{1}{x}$	F
b)	$\frac{y-1}{x}$	F
c)	$\frac{y}{x}$	V
d)	$\frac{100y}{x}\%$, sob a forma de percentagem	V
e)	$y\times$(Área do sector numerado com k)/(Área do círculo)	V
f)	$\frac{x}{y}$	F
g)	$(y-1)\times$(Área de um qualquer dos sectores circulares)/(Área do círculo)	F
h)	$y\times$(Área de um qualquer dos sectores circulares)/(Área do círculo)	V
i)	$\triangleleft \frac{y}{x}$	V
j)	$\triangleleft \frac{x}{y}$	F

Avaliação diagnóstica: No caso de resposta errada às questões a), b), c) ou f) o aluno demonstra não conhecer o conceito clássico de probabilidade.
No caso de resposta errada às questões e); g) ou h) o aluno demonstra não dominar o conceito geométrico de probabilidade.
Se o aluno responder incorrectamente às questões i) ou j) demonstra não dominar a simplificação de fracções.
No caso de resposta incorrecta à questão d) pode significar que aluno desconhece o conceito clássico de probabilidade ou não sabe transformar um número do intervalo $[0, 1]$ numa percentagem.

Modelo base 3

Tema:	Probabilidades
Sub-Tema:	Noção de Probabilidade de um acontecimento
Objectivo Principal:	Conceito de Probabilidade segundo Laplace
Objectivo Secundário:	Probabilidade da reunião de acontecimentos
Objectivo micro:	Simplificação de fracções
Notações e Abreviaturas	$\triangleleft\frac{a}{b}$ - significa que a fracção $\frac{a}{b}$ é apresentada sob a forma de fracção irredutível
Parâmetros:	$x \in \{5, \cdots, 12\}$; $y \in \{2, \cdots, x\}$ e $k \in \{1, \cdots, x\}$ de modo que $y > k$.
Texto das questões:	Considera a experiência aleatória que consiste em rodar a roleta da figura (com x sectores circulares de igual área numerados de 1 a x) e observar o número do sector sobre o qual fica situado o ponteiro. Então, a probabilidade de sair um número inferior ou igual a k ou superior a y é:

	Respostas	**Validação**
a)	$\frac{k+x-y}{x}$	V
b)	$\frac{1}{x}$	F
c)	$\frac{k}{x} + \frac{x-y}{x}$	V
d)	$\frac{k}{x} \times \frac{x-y}{x}$	F
e)	$\frac{k}{x} \times \frac{y}{x}$	F
f)	$\triangleleft\frac{x-y+k}{x}$	V
g)	$\triangleleft\frac{k}{x} + \triangleleft\frac{x-y}{x}$	V
h)	$\triangleleft\frac{k}{x} \times \triangleleft\frac{x-y}{x}$	F

Avaliação diagnóstica: No caso de resposta errada às questões a), b), c), d) ou e) o aluno demonstra não conhecer a definição clássica de probabilidade ou desconhecer que a disjunção de condições corresponde à união de conjuntos.
No caso de resposta errada às questões f), g) ou h) o aluno demonstra não saber simplificar fracções.

Modelo base 4

Tema:	Probabilidades
Sub-Tema:	Noção de Probabilidade de um acontecimento
Objectivo Principal:	Conceito de Probabilidade segundo Laplace
Objectivo Secundário:	Probabilidade da intersecção de acontecimentos
Objectivo micro:	Simplificação de fracções
Parâmetros:	$x \in \{5, \cdots, 12\}$; $y \in \{2, \cdots, x\}$, $k \in \{1, \cdots, x\}$, $k < y$.
Notações e Abreviaturas	$\triangleleft\frac{a}{b}$ - significa que a fracção $\frac{a}{b}$ é apresentada sob a forma de fracção irredutível
Texto das questões:	Considera a experiência aleatória que consiste em rodar a roleta da figura (com x sectores circulares de igual área numerados de 1 a x) e observar o número do sector sobre o qual fica situado o ponteiro. Então, a probabilidade de sair um número superior ou igual a k e inferior ou igual a y é:

	Respostas	**Validação**
a)	$\frac{y-k+1}{x}$	V
b)	$\frac{1}{x}$	F
c)	$\frac{y}{x} - \frac{k-1}{x}$	V
d)	$\frac{y+k}{x}$	F
e)	$\frac{y-k}{x}$	F
f)	$\triangleleft\frac{y-k+1}{x}$	V
g)	$\triangleleft\frac{y}{x} - \triangleleft\frac{k-1}{x}$	V
h)	$\triangleleft\frac{y-k}{x}$	F

Avaliação diagnóstica: No caso de resposta errada às questões a), b), c), d) ou e) o aluno demonstra não conhecer a definição clássica de probabilidade ou desconhecer que a conjunção de condições corresponde à intersecção de conjuntos.
No caso de resposta errada às questões f), g) ou h) aluno demonstra não saber simplificar fracções.

Modelo base 5

Tema:	Probabilidades
Sub-Tema:	Noção de Probabilidade de um acontecimento
Objectivo Principal:	Conceito de Probabilidade segundo Laplace
Objectivo Secundário:	Probabilidade do acontecimento impossível/certo
Objectivo micro:	Simplificação de fracções
Parâmetros:	$x \in \{5, \cdots, 12\}$.
Notações e Abreviaturas	$\triangleleft\frac{a}{b}$ - significa que a fracção $\frac{a}{b}$ é apresentada sob a forma de fracção irredutível
Texto das questões:	Considera a experiência aleatória que consiste em rodar a roleta da figura (com x sectores circulares de igual área numerados de 1 a x) e observar o número do sector circular sobre o qual fica situado o ponteiro. Então, a probabilidade de sair um número superior a x é:

	Respostas	**Validação**
a)	1	F
b)	0	V
c)	$\frac{1}{x}$	F
d)	igual à probabilidade de sair um número inferior a 1	V
e)	igual à probabilidade do acontecimento Ω	F
f)	igual à probabilidade do acontecimento $\emptyset$	V

Avaliação diagnóstica: No caso de resposta errada às questões a), b) ou c) o aluno demonstra não relacionar os acontecimentos certos ou impossíveis com as suas respectivas probabilidades. No caso de resposta errada às questões e) ou f) o aluno demonstra não saber o que é o acontecimento certo e o acontecimento impossível.

Modelo base 6

Tema:	Probabilidades
Sub-Tema:	Noção de Probabilidade de um acontecimento
Objectivo Principal:	Conceito de Probabilidade segundo Laplace
Objectivo Secundário:	Cálculo dos múltiplos de um dado número inteiro
Objectivo micro:	Simplificação de fracções
Parâmetros:	$x \in \{5, \cdots, 12\}$, $w \in \{1, \cdots, x\}$. Designe-se por a, o quociente da divisão inteira de x por w
Notações e Abreviaturas	$\lhd\frac{a}{b}$ - significa que a fracção $\frac{a}{b}$ é apresentada sob a forma de fracção irredutível
Texto das questões:	Considera a experiência aleatória que consiste em rodar a roleta da figura (com x sectores circulares de igual área numerados de 1 a x) e observar o número do sector circular sobre o qual fica situado o ponteiro. Então, a probabilidade de sair um número que seja múltiplo de w é:

	Respostas	**Validação**
a)	$\frac{a}{x}$	v
b)	$\frac{a-1}{x}$	F
c)	$\frac{a+1}{x}$	F
d)	$\lhd\frac{a}{x}$	V

Avaliação diagnóstica: No caso de resposta errada às questões a), b), c) o aluno demonstra não conhecer o conceito clássico de probabilidade ou não dominar a noção de múltiplos de um dado número.
No caso de resposta errada à questão d) o aluno demonstra não saber simplificar fracções ou desconhecer o que são os múltiplos de um número.

5.3.3 Compactação de um modelo

Com a compactação de modelo pretende-se inserir o modelo gerador a construir na rede de modelos já existentes.

A compactação do modelo começa com a construção de diagramas de caixas que representem o conjunto de alíneas-respostas já elaboradas nos denominados modelos base.

Sejam X_α, Y_α conjuntos de termos ou frases e represente-se por $[X_\alpha]$ o vector constituído pelos elementos do conjunto X_α. Pode-se representar cada ligação $X_\alpha \longleftrightarrow Y_\alpha$ por um par ordenado do tipo (x_i, y_j), onde $x_i \in X_\alpha$ e $y_i \in Y_\alpha$, denotada pelo produto cartesiano $Z_\alpha = X_\alpha \times Y_\alpha$. A cada um dos pares (x_i, y_i) faça-se corresponder o elemento $x_i y_j$, ou seja, a concatenação da frase $x_i \in [X_\alpha]$ com a frase $y_j \in [Y_\alpha]$.

Por exemplo relativamente aos seis modelos bases descritos anteriormente criar-se um modelo gerador sobre o conceito clássico de probabilidade, compactando os seis modelos base com o auxílio de diagramas de caixas como se apresenta de seguida.

$X_1 =$
1. A probabilidade de sair o número k

$\longrightarrow$

$Y_1 =$
1. $\frac{1}{x}$
2. $\frac{k}{x}$
3. $\frac{100}{x}\%$, sob a forma de percentagem
4. $\frac{1}{k}$
5. (Área do sector numerado com k)/(Área do círculo)
6. $\frac{x}{k}$

$X_2 =$
1. A probabilidade de sair um número inferior ou igual a y

$\longrightarrow$

$Y_2 =$
1. $\frac{1}{x}$
2. $\frac{y-1}{x}$
3. $\frac{y}{x}$
4. $\frac{100y}{x}\%$, sob a forma de percentagem
5. $y\times$ (Área do sector numerado com k) /(Área do círculo)
6. $\frac{x}{y}$
7. $(y-1)\times$(Área de um qualquer dos sectores círculares)/(Área do círculo)
8. $y\times$(Área de um qualquer dos sectores circulares)/(Área do círculo)
9. $\triangleleft\frac{y}{x}$
10. $\triangleleft\frac{x}{y}$

$X_3 =$
1. A probabilidade de sair um número inferior ou igual a k ou superior a y

$\longrightarrow$

$Y_3 =$
1. $\frac{k+x-y}{x}$
2. $\frac{1}{x}$
3. $\frac{k}{x} + \frac{x-y}{x}$
4. $\frac{k}{x} \times \frac{x-y}{x}$
5. $\frac{k}{x} \times \frac{y}{x}$
6. $\triangleleft\frac{x-y+k}{x}$
7. $\triangleleft\frac{k}{x} + \triangleleft\frac{x-y}{x}$
8. $\triangleleft\frac{k}{x} \times \triangleleft\frac{x-y}{x}$

$X_4 =$
1. A probabilidade de sair um número superior ou igual a k e inferior ou igual a y

$\longrightarrow$

$Y_4 =$
1. $\frac{y-k+1}{x}$
2. $\frac{1}{x}$
3. $\frac{y}{x} - \frac{k-1}{x}$
4. $\frac{y+k}{x}$
5. $\frac{y-k}{x}$
6. $\triangleleft\frac{y-k+1}{x}$
7. $\triangleleft\frac{y}{x} - \triangleleft\frac{k-1}{x}$
8. $\triangleleft\frac{y-k}{x}$

$X_5 =$
1. A probabilidade de sair um número superior a x

$\longrightarrow$

$Y_5 =$
1. 1
2. 0
3. $\frac{1}{x}$
4. igual à probabilidade de sair um número inferior a 1
5. igual à probabilidade do acontecimento Ω
6. igual à probabilidade do acontecimento $\emptyset$

$X_6 =$
1. A probabilidade de obter um número que seja múltiplo de w

$\longrightarrow$

$Y_6 =$
1. $\frac{a}{x}$
2. $\frac{a-1}{x}$
3. $\frac{a+1}{x}$
4. $\triangleleft\frac{a}{x}$

Considere-se ainda, para cada modelo a compactar, o conjunto B_1 formado por expressões de ligação de frases nomeadamente pelas frases *é* e *não é* . Assim associado a este conjunto pode considerar-se o vector $[B_1]$=[*é* , *não é*].

Seja I_{X_α} o conjunto dos índices do vector $[X_\alpha]$. Deste modo $I_{X_i} = \{1\}, i = 1, \cdots, 6$, $I_{Y_1} = \{1, \cdots, 6\}$, $I_{Y_2} = \{1, \cdots, 10\}$, $I_{Y_3} = \{1, \cdots, 8\}$, $I_{Y_4} = \{1, \cdots, 8\}$, $I_{Y_5} = \{1, \cdots, 6\}$, $I_{Y_6} = \{1, \cdots, 4\}$ e $I_{B_1} = \{1, 2\}$.

O modelo gerador poderá então ser formado a partir de seis blocos $[X_1 \times Y_1]; \cdots; [X_6 \times Y_6]$. Estes blocos podem ser ampliados com a inserção dos termos de ligação de frases, nomeadamente ficando assim os blocos com a forma $[X_1 \times B_1 \times Y_1]; \cdots; [X_6 \times B_1 \times Y_6]$.

Pretende-se que o programa informático gere quatro questões escolhidas aleatoriamente de entre os possíveis modelos base.

Assim o modelo gerador pode ser representado do seguinte modo:

Enunciado + $([X_{\alpha_1} \times B_1 \times Y_{\alpha_1}]_{i_1,b_1,j_1} | [X_{\alpha_2} \times B_1 \times Y_{\alpha_2}]_{i_2,b_2,j_2} | [X_{\alpha_3} \times B_1 \times Y_{\alpha_3}]_{i_3,b_3,j_3} | [X_{\alpha_4} \times B_1 \times Y_{\alpha_4}]_{i_4,b_4,j_4})$,

onde $\alpha_1 \neq \cdots \neq \alpha_4 \in \{1, \cdots, 6\}$, $i_m \in I_{X_{\alpha_m}}$, $m = 1, \cdots, 4$ e $j_n \in I_{Y_{\alpha_n}}, n = 1, \cdots, 4, b_i \in I_{B_1}, i = 1, \cdots, 4$.

O número total de questões que o programa gera com base neste modelo gerador é dado por:

$$\sum_{\alpha=1}^{6} \#(X_\alpha \times B_1 \times Y_\alpha) = (1 \times 2 \times 6) + (1 \times 2 \times 10) + (1 \times 2 \times 8) + (1 \times 2 \times 8) +$$
$(1 \times 2 \times 6) + (1 \times 2 \times 4) = 76$. Neste número não são contabilizados os parâmetros que tornam o modelo bem mais aleatório.

Veja-se uma concretização possível do modelo em causa. As quatro questões a gerar sob o mesmo enunciado e considerando o seguinte conjunto de valores:

1.	$\alpha_1 = 1$	$i_1 = 1$	$b_1 = 1$	$j_1 = 4$
2.	$\alpha_2 = 4$	$i_2 = 1$	$b_2 = 1$	$j_2 = 3$
3.	$\alpha_3 = 3$	$i_3 = 1$	$b_3 = 2$	$j_3 = 8$
4.	$\alpha_4 = 6$	$i_4 = 1$	$b_4 = 1$	$j_4 = 1$

resulta o seguinte conjunto de perguntas:

Enunciado:

Considera a experiência aleatória que consiste em rodar a roleta da figura (com x sectores circulares de igual área numerados de 1 a x) e observar o número do sector circular sobre o qual fica situado o ponteiro.

	X_α	B_1	Y_α
1.	A probabilidade de sair o número k	é	$\frac{1}{k}$
2.	A probabilidade de sair um número superior ou igual a k e inferior ou igual a y	é	$\frac{y}{x} - \frac{k-1}{x}$
3.	A probabilidade de sair um número inferior ou igual a k ou superior a y	não é	$\triangleleft\frac{k}{x} \times \triangleleft\frac{x-y}{x}$
4.	A probabilidade de obter um número que seja múltiplo de w	é	$\frac{a}{x}$

Em anexo - Apêndice A - encontram-se os restantes modelos compactados construídos para a presente dissertação assim como a sua descrição sumária e respectivos objectivos. Tratam-se dos primeiros modelos construídos sobre o tema Probabilidades. Alguns destes modelos fazem já parte do programa informático EquaMat; os restantes aguardam oportunidade de serem implementados. De todos eles espera-se constante melhoramento.

5.4 Actividade com recurso ao EquaMat

Com a finalidade de aferir a importância da utilização deste tipo de instrumento de trabalho, na aprendizagem de conteúdos programáticos, procurou-se realizar um conjunto de tarefas que permitissem avaliar o trabalho desenvolvido. A actividade realizada consistia em duas tarefas: uma a ser realizada *online* e outra em suporte escrito, utilizando sempre os seis modelos de questões produzidos para o efeito. Na realidade, a tarefa realizada *online* não se limitou à utilização dos modelos construídos, foram-lhe incorporados modelos de Combinatória disponíveis na base de dados do projecto. Este facto deveu-se à importância do tema no percurso escolar dos discentes. Apesar destes modelos de Combinatória serem incorporados na tarefa, por razões óbvias, não será feita qualquer referência aos resultados obtidos nos mesmos. Para além dos modelos de Probabilidades e Combinatória foram colocados à disposição dos alunos dois testes, um referente a números complexos e o outro referente a funções. Todo este trabalho teve como objectivo a preparação dos alunos para o exame nacional do 12º ano.

A actividade proposta consistia em responder a seis níveis diferentes de questões. Cada questão consistia numa concretização dos modelos geradores elaborados, e os alunos teriam de atribuir um valor lógico a cada uma das quatro afirmações de cada questão. Na tarefa *online* o aluno dispunha de quatro possibilidades de errar (vidas), findas estas possibilidades o jogo era considerado acabado. Na tarefa elaborada em *suporte escrito* não havia restrições no número de respostas erradas e assim todos os alunos responderam à totalidade das questões.

A classificação por níveis teve em consideração a complexidade das questões de cada modelo gerador e o grau de profundidade do assunto a tratar.

A realização destas duas versões da mesma actividade ficou-se a dever a dois factores: por um lado averiguar se o facto do erro ser penalizado tinha influência nos resultados obtidos e por outro lado possibilitar a mais alunos o contacto com esta actividade dadas as constantes avarias no sistema informático.

Os modelos sobre Probabilidades utilizados nas duas tarefas que constituiam a actividade tinham objectivos diferenciados por nível de questão e podem-se resumir na tabela 5.2.

5.4.1 Metodologia implementada

Tarefa *Online*

Para implementar a tarefa *online* foi solicitado aos alunos que frequentavam o 12º ano que se inscrevessem, tendo-o feito cerca de 60 alunos. É de salientar que esta tarefa se realizou como actividade extra-curricular e, portanto, fora do horário lectivo dos alunos. Foi feita uma reunião com os alunos inscritos com o propósito de lhes fornecer as informações necessárias para que pudessem, via Internet, aceder ao programa EquaMat quando e como pretendessem.

Participaram nesta fase 32 alunos, a maioria dos quais repetiram os modelos por várias vezes, embora com diferentes concretizações. Como forma de analisar os resultados, apenas foi considerada a última realização da tarefa. Todas as outras realizações foram consideradas como experiências de teste, portanto, como ambientação ao sistema informático.

Tarefa em suporte escrito

Esta tarefa era em muito similar à realizada *online*. Foi transcrita para suporte escrito uma concretização de cada um dos seis modelos geradores que faziam parte da tarefa anterior. Os alunos teriam de assinalar o valor lógico de cada uma das questões. Foi neste ponto que as duas tarefas diferiram. Enquanto, na tarefa anterior

Nível	Objectivo principal	Objectivos secundários
1	Noção de operações sobre acontecimentos	Noção de espaço dos possíveis. Acontecimentos compatíveis, incompatíveis e contrários
2	Noção de probabilidade de um acontecimento	Definição de probabilidade segundo Laplace. Conceito geométrico de probabilidade
3	Noção de probabilidade de um acontecimento	Definição axiomática de probabilidade
4	Noção de probabilidade de um acontecimento	Definição de probabilidade segundo Laplace. Conceito geométrico de probabilidade
5	Noção de operações sobre acontecimentos	Noção de acontecimento
6	Noção de operações sobre acontecimentos	Noção de acontecimento

Tabela 5.2: Tabela de objectivos

os alunos tinham um feedback instantâneo da questão respondida, nesta fase, os alunos só souberam os resultados no final da tarefa. Realizaram esta actividade 30 alunos, alguns dos quais já tinham participado na actividade realizada *online*.

5.4.2 Resultados e conclusões

Os resultados abaixo descritos reflectem o desempenho dos alunos nas tarefas descritas. Devido à sua especificidade os resultados não permitem conclusões similares uma vez que na tarefa realizada *online* nem todos os alunos conseguiram alcançar os últimos níveis; o mesmo já não sucedeu na tarefa realizada em suporte escrito.

Uma das primeiras observações registadas com a realização desta actividade, prende-se com o fraco desempenho dos alunos em questões que envolvam negação. Esta conclusão é baseada unicamente na actividade feita por escrito e surgiu de uma análise mais global dos dados, menos perceptível, nas provas *online*. Este problema já tinha sido diagnosticado por vários professores e em várias ocasiões desde que se deixou de incluir nos diversos programas do Ensino Secundário um capítulo dedicado a Lógica Proposicional, passando esta a ser leccionada de forma dispersa e repartida pelos vários anos do ensino secundário, isto quando o cumprimento do programa o permite.

Os resultados da actividade realizada *online*, foram substancialmente melhores do que os resultados da actividade realizada em suporte escrito. Podem-se conjecturar vários factores que motivaram esta discrepância e que foram evocados pelos alunos quando inquiridos sobre esta temática: o facto de a versão *online* "obrigar"o aluno a acertar todas as respostas para passar para um nível superior; o facto de ser realizada em computador, factor que transmite maiores índices de confiança e motivação; a necessidade de um grau de concentração maior. Saliente-se ainda que a actividade escrita teve lugar numa fase mais avançada do processo, pelo que, os alunos já tinham tido contacto com os modelos de questões, embora com outras concretizações.

Analisando as respostas dadas em ambas as actividades foi possível fazer chegar aos docentes que leccionavam o 12º ano um feedback das dificuldades demonstradas pelos alunos para que assim se pudesse proceder de modo a que as mesmas fossem colmatadas. As principais dificuldades demonstradas, para além do problema da negação já evocado, prendem-se com operações e relações entre conjuntos, tratamento e visualização de experiências compostas, classificação de acontecimentos (nomeadamente a diferença entre acontecimentos incompatíveis e contrários), e quase todas as questões de modelos formais, em muito devido à fraca abstracção dos alunos e ao pouco treino em situações similares. Por outro lado, são de realçar alguns aspectos positivos, nomeadamente a facilidade de aplicação do conceito clássico de probabilidade; o bom desempenho demonstrado nas respostas às questões que envolvessem axiomática, no entanto, sem que esta apresentasse manipulação de conjuntos; um bom domínio das noções de acontecimento certo e impossível.

Apesar de bastante positiva, na opinião dos docentes e discentes, este tipo de tarefa carece ainda de uma aceitação geral por parte de todos e, o assumir, que esta deve ser também uma forma de aprendizagem.

Nível i	Número de tentativas	Percentagem de tentativas necessárias para ultrapassar o nível i	Percentagem de alunos que não ultrapassaram o nível i
1	1	50 %	6.25%
	2	25 %	
	3	18.75 %	
	4	0 %	
2	1	20 %	20%
	2	40 %	
	3	3.3 %	
	4	6.7 %	
3	1	25 %	33.3%
	2	8.3 %	
	3	16.7 %	
	4	16.7 %	
4	1	25 %	25 %
	2	37.5 %	
	3	12.5 %	
	4	0 %	
5	1	50 %	16.7%
	2	16.7 %	
	3	16,7 %	
	4	0%	
6	1	50 %	0 %
	2	30 %	
	3	20 %	
	4	0%	

Tabela 5.3: Resultados finais da actividade realizada *online*

Nível	Número de respostas erradas	Percentagem, por nível, de respostas erradas	Percentagem de questões que envolviam negação entre as questões erradas
1	0	13.3 %	40 %
	1	33.3 %	
	2	40 %	
	3	6.7 %	
	4	6.7 %	
2	0	6.7 %	39.1%
	1	46.7 %	
	2	33.3 %	
	3	13.3 %	
	4	0 %	
3	0	33.3 %	100%
	1	20 %	
	2	16,7 %	
	3	26.7 %	
	4	0 %	
4	0	13.3 %	100%
	1	60 %	
	2	26.7 %	
	3	0 %	
	4	0 %	
5	0	6.7 %	60.7%
	1	13.3 %	
	2	66.7 %	
	3	6.7 %	
	4	13.3 %	
6	0	20 %	100 %
	1	26.7 %	
	2	26.7 %	
	3	26.7 %	
	4	0 %	

Tabela 5.4: Resultados finais da actividade realizada em suporte escrito

5.5 Java Applets e algumas actividades não avaliadas

5.5.1 Introdução

Em 1991 foi lançado pela Sun o "Project Green"que foi apoiado pelos melhores programadores que receberam instruções para fazer o que desejassem. Os membros do projecto decidiram que uma boa ideia poderia ser a de integrar, digitalmente, dispositivos de aparelhos domésticos como televisores, leitores de CD e computadores. Para isto ser possível novas tecnologias tiveram que ser testadas ou inventadas. Entre elas, foi testada uma nova e inovadora linguagem de programação, C++. No entanto, esta não oferecia resposta às necessidades imediatas, especialmente portabilidade, confiabilidade e programas com um tamanho que coubessem em dispositivos pequenos. Assim Java, ou Oak como foi chamado naquela época, nasceu com o objectivo de satisfazer tais necessidades. Criado pelo arquitecto e programador James Gosling, Java foi meramente uma ferramenta para os programadores no Projecto Green naquela época. James Gosling chamou a linguagem inicialmente de Oak (carvalho) em homenagem a uma árvore que dava para a janela do seu escritório na Sun. Descobriu-se, mais tarde, que já havia uma linguagem de computador chamada Oak. Quando uma equipa da Sun visitou uma cafeteria local, o nome Java (cidade de origem de um tipo de café importante) foi sugerido e aceite por todos. Em Novembro de 1992, o Projecto Green mudou de nome para FirstPerson.

Dada a falta de sucesso do Java até então na indústria de componentes electrónicas de consumo, a direcção da companhia estava incerta. Sob a influência da Sun, a companhia começou a re-avaliar a sua missão. Em 1992 foi lançado um pequeno dispositivo portátil parecido com um controle remoto, com uma pequena tela, chamado Star-7. Para facilitar o uso do dispositivo, um pequeno personagem chamado "Duke"aparecia na tela. Duke é agora a mascote oficial do Java. Algumas pessoas abandonaram o projecto, e apenas uns poucos permaneceram tentando imaginar o que fazer com algumas boas ideias que detinham. Naquela época a Internet era mais para aficionados em computadores que sabiam como manipular protocolos como FTP e Telnet. Em 1993, foi construído um programa chamado Mosaic para o protocolo HTTP tornando possível a utilizadores normais a visualização de documentos HTML na Internet. Este foi um marco importante. Os restantes membros da equipa tentaram desenvolver um interface interativo, robusto, seguro e independente da arquitectura para dispositivos digitais e que igualmente pudesse ser usado na Internet. Durante 1994, a equipa criou seu próprio browser denominado "HotJava", que apresentava uma técnica que permitia aos utilizadores interagirem com as páginas Web. Aplicações diferentes como ter objectos 3D a fazerem rotações através do uso do rato eram agora possíveis. O applet nasceu e os cibernautas ficaram entusiasmados com as potencialidades desta nova ferramenta. Note-se que até então as páginas Web eram estáticas, como páginas em HTML, uma boa forma de compartilhar informação, mas nada interactiva.

Em 1995, a Sun tomou uma atitude importante e futurista, o código fonte do Java foi tornado público com o fim de ganhar a atenção dos programadores de todo o mundo. Foi um sucesso. Em pouco tempo os membros da equipa já passavam dias e noites a responder a emails, a consertar bugs e a preparar novas versões. A Netscape anunciou suporte para Java na versão 2.0 do seu browser, que se tornou disponível em Setembro de 1995. Era agora opinião unânime que estava construído um grande sucesso.

5.5.2 O que é um applets ?

Um applet é geralmente um pequeno programa Java destinado a ser executado num qualquer browser. Há uma tag HTML especial para ele: $< APPLET >$, que define uma "área de trabalho"semelhante à de um arquivo gif ou jpg. Dentro desta área, o applet, pode interagir com o utilizador. O browser faz o download do applet (que é um arquivo contendo bytecode) automaticamente. Se o applet é pequeno, raramente é notado, a menos que o browser tenha que carregar primeiro a Máquina Virtual. Mas um applet mais complexo pode levar tempo a carregar, e infelizmente alguns browsers não revelam o facto de estarem ocupados a carregar o applet, podendo o utilizador impaciente clicar em "stop"ou em recarregar, e acaba frustrado com o que ocorre. O que ficou imediatamente claro para muitos programadores Web, foi que eles agora tinham uma hipótese de fazer algo muito mais sofisticado. Poderiam implementar menus avançados, gráficos de negócio e objectos em três dimensões.

5.5.3 Actividades com recurso a Applets

Com recurso à linguagem Java foram construídos ou alterados diversos programas que simulam alguns dos paradoxos presentes nos Capítulos 4 e 5 e outras experiências bastante conhecidas. Estes applets encontram-se disponíveis no site cujo endereço é

http://www.prof2000.pt/users/pjca.

Dada a exiguidade de tempo não se realizaram actividades com recurso aos applets construídos. No entanto, estas ferramentas encontram-se disponíveis para futuras aplicações, provavelmente, no início do próximo ano lectivo, segundo a opinião dos docentes que irão leccionar o 12º ano na Escola Secundária D. Inês de Castro de Alcobaça.

Capítulo 6

Conclusões

Com o trabalho realizado nesta dissertação pretendia-se analisar alguns aspectos da Teoria das Probabilidades e implementar actividades envolvendo o uso do computador e da Internet analisando os seus contributos para o sucesso na aprendizagem dessa teoria. Para o efeito foram realizadas tarefas recorrendo a variados programas informáticos disponíveis ao docente tendo sempre em mente o objectivo proposto. Uma primeira análise cuidada do material já existente na Web deixou no ar a sensação que o computador poderia ser uma ferramenta pouco valorizada no ensino da Teoria das Probabilidades, principalmente quando comparado o que se faz em Portugal e noutros países. A importância do computador e da Internet foi então analisada à luz de algumas opiniões entre as quais se distinguem: Miguel Gúzman, João David Vieira, João Pedro da Ponte, Churchhouse, Halmos, Neville Hunt, Sidney Tyrrell, entre outros. Mediante esta análise, mais do que estabelecer tratados sobre a importância do computador no ensino das Probabilidades, era necessário também construir algo que fosse uma mais valia para o ensino da Teoria das Probabilidades.

Com base nas ideias de muitos livres pensadores, de que o primeiro passo para se ser um bom pedagogo terá necessariamente de passar pelo conhecimento intrínseco e o mais aprofundado possível daquilo que se pretende ensinar, partiu-se para uma análise de alguns aspectos fundamentais da Teoria das Probabilidades e de alguns dos seus conceitos.

Na realidade, o trabalho teórico realizado nos Capítulos 3 e 4 desta tese ajudou a aprofundar os conhecimentos sobre a Teoria das Probabilidades e a ter uma visão panorâmica da matéria. O estudo de exemplos e contra-exemplos tornou-se bastante útil na obtenção de perspectivas e alargamento de horizontes que em muito contribuíram para o evitar de problemas concretos na construção dos modelos propostos para o projecto PMatE.

O Capítulo 3 foi dedicado ao estudo das noções de espaço de probabilidade e de probabilidade condicionada. Primeiro procurou-se estabelecer a noção de espaço de probabilidade definido sobre um qualquer conjunto finito não vazio, prolongando-a de seguida para conjuntos infinitos. Foram estudadas propriedades, exemplos interessantes e contra-exemplos de relevante valor. Em relação aos exemplos apresentados, há a destacar os átomos e os conjuntos periódicos, cujo estudo possibilitou algumas conclusões relevantes. A visão global do Capítulo 3 permitiu um olhar panorâmico sobre a axiomática de Kolmogorov e instigou o estudo de alguns conceitos de probabilidade tentando inserir esses conceitos no sistema proposto por Kolmogorov. Este trabalho foi realizado e apresentado no Capítulo 4. No estudo de cada conceito de probabilidade procurou-se encontrar lacunas, falhas ou questões problemáticas e paradoxos que possibilitassem reflexões próprias sobre cada um dos conceitos. Foram também estabelecidas visões de alguns autores sobre o próprio sistema de Kolmogorov, algumas dessas visões bastantes críticas. Outra ferramenta estudada foram os mintermos; uma noção bastante útil no manuseamento de intersecções e uniões de acontecimentos.

Depois deste passo, muito mais útil do que teoricamente relevante, urgia intervir, fazer algo de diferente, inovar, enfim construir. Foram construídas tarefas e actividades a realizar com recurso ao computador e à Internet e dentro das possibilidades próprias de docentes e discentes em pleno decurso do trabalho lectivo, foram implementadas e avaliadas.

As actividades propostas podem dividir-se em dois tipos: as *formativas* e as *avaliativas*. As actividades denominadas formativas foram aquelas que se realizaram na sala de aula e que tiveram como propósito o ensino de um conceito, o explorar de um conteúdo (actividade referida na secção 5.1). As actividades ditas sumativas têm como objectivo consolidar conhecimentos e possibilitar vários tipos de avaliações, nomeadamente auto e hetero-avaliações (actividades referidas nas secções 5.2 e 5.4).

Os pontos positivos a retirar das actividades implementadas são muitos quer para docentes, quer para discentes.

Para os alunos foram experiências motivadoras, foi opinião unânime entre os alunos que as aulas com recurso às tecnologias são mais cativantes, a concentração dos alunos é maior e o empenho é, sem dúvida, redobrado. Outra opinião relevante foi o facto dos alunos manifestarem desagrado em não puderem usufruir deste tipo de actividades noutros anos lectivos. Segundo opinião dos alunos a própria avaliação foi um aspecto afectado positivamente pelas tarefas desenvolvidas, nomeadamente com as actividades incluídas no Projecto PMatE e com o banco de questões que foi construído em Hot Potatoes e que permitiu aos alunos manter o contacto efectivo com os conteúdos probabilísticos leccionados. Ao ter por base alunos do 12º ano, estas tarefas foram expandidas a outros conteúdos relativos ao actual programa em vigor, o que, num sentido estrito, não tem qualquer relação com esta dissertação, mas num sentido mais lato foi uma consequência da mesma. De qualquer modo, será sempre de realçar que à medida que as actividades foram sendo implementadas e o trabalho realizado foi-se denotando aprendizagem nos conteúdos e na tipologia dos diversos tipos de questão.

Para os docentes do grupo envolvidos foram muitos os pontos a realçar. Em primeiro lugar o próprio empenho dos alunos que ultrapassou em muito o esperado e que é sempre para os professores um factor de motivação e agrado. Por outro lado, o trabalho em grupo que foi necessário para levar a cabo as actividades propostas, trabalho este que se estendeu à própria preparação das aulas, testes e fichas de trabalho e à tão importante, e por vezes, tão descorada, uniformização de critérios. O conhecimento de outros métodos de trabalho e de outras ferramentas disponíveis para o Ensino foi um ponto positivo realçado pelos docentes. Mediante o sucesso deste trabalho de implementação de actividades com recurso aos computadores foi já proposto que o mesmo se realizasse no próximo ano lectivo e fosse o mais expandido possível a outros conteúdos e a outros anos, que não o 12º ano. Em relação aos docentes, mais do que o trabalho feito em prole do Ensino das Probabilidades, ficou uma mudança de atitude sempre salutar e de enaltecer, para bem do Ensino e para bem da Matemática.

Os resultados obtidos nos exames nacionais de Matemática do 12º ano são concerteza também um reflexo deste trabalho e deixaram o grupo bastante satisfeito. Por norma, a Escola Secundária D. Inês de Castro de Alcobaça apresentava uma média cerca de 1 a 2 valores inferior à média nacional. No ano lectivo 2003/2004 a média dos exames de Matemática da 1ª fase foi cerca de 1 valor superior à média nacional. Poderão haver outros factores que tenham influenciado estes resultados, todavia, todo o trabalho realizado e a sensação de que este foi feito com objectivos faz crer que este foi um factor fundamental.

Todo o trabalho desenvolvido seria em vão se não fosse o início de uma mudança, o princípio de um projecto, uma alteração de atitudes. Tal aconteceu pelo que esta dissertação atingiu os objectivos propostos.

Para dar continuidade ao trabalho realizado foi construída uma página, na Internet, no endereço http://wwww.prof2000.pt/users/pjca, que está à disposição de toda a comunidade escolar e em constante actualização. Esta página é dedicada ao ensino da Matemática e tem um espaço específico, *Cantinho das Probabilidades*, sobre a Teoria das Probabilidades, onde consta, entre outras, a maioria das actividades apresentadas nesta dissertação.

Em [32], na página 138 pode ler-se:

> *"Um grande desafio se coloca à educação matemática nos dias de hoje. Vai esta disciplina ser "esvaziada"pela entrada inevitável do computador no ensino? Se a Matemática é mais do que "contas e algoritmos"será necessário mostrá-lo aos alunos, por eles e por ela."*

Por tudo aquilo que já foi dito e feito em torno desta dissertação, e como resposta às interrogações acima colocadas, resta deixar um repto:

Use-se sempre que possível o computador no Ensino, mas este uso que seja ponderado, como tudo na vida, e que seja um complemento e nunca um agente de ensino, para bem dos alunos e da Matemática...

Apêndice A

Modelos compactados

A.0.4 Modelo A

Identificação do Modelo

Área	Estatística
Tema	Probabilidades
SubTema	Noção de Probabilidade de um acontecimento
Objectivo Principal	Definição de Probabilidade segundo Laplace
Objectivo Secundário	Probabilidade da intersecção/reunião de acontecimentos
Informação adicional	
Tipo de Modelo	4 - Texto com MathML alinhado à esquerda e SVG alinhado à direita, respostas com MathML
Ciclo de Ensino	3 e 4
Nível de Dificuldade	Nível: 3 Grau: 4

Objectivos das Respostas

R_1	Tema	Probabilidades
	SubTema	Noção de Probabilidade de um acontecimento
	ObjPrincipal	Definição de Probabilidade segundo Laplace
	ObjSecundário	Definição geométrica de Probabilidade
	Objmicro	Simplificação de fracções
	Objmicro	Cálculo de percentagens
R_2	Tema	Probabilidades
	SubTema	Noção de Probabilidade de um acontecimento
	ObjPrincipal	Definição de Probabilidade segundo Laplace
	ObjSecundário	Definição geométrica de Probabilidade
	Objmicro	Simplificação de fracções
	Objmicro	Cálculo de percentagens
R_3	Tema	Probabilidades
	SubTema	Noção de Probabilidade de um acontecimento
	ObjPrincipal	Definição de Probabilidade segundo Laplace
	ObjSecundário	Probabilidade da reunião de acontecimentos
	Objmicro	Simplificação de fracções
R_4	Tema	Probabilidades
	SubTema	Noção de Probabilidade de um acontecimento
	ObjPrincipal	Definição de Probabilidade segundo Laplace
	ObjSecundário	Probabilidade da intersecção de acontecimentos
	Objmicro	Simplificação de fracções
R_5	Tema	Probabilidades
	SubTema	Noção de Probabilidade de um acontecimento
	ObjPrincipal	Definição de Probabilidade segundo Laplace
	ObjSecundário	Probabilidade do acontecimento impossível/certo
	Objmicro	Simplificação de fracções
R_6	Tema	Probabilidades
	SubTema	Noção de Probabilidade de um acontecimento
	ObjPrincipal	Definição de Probabilidade segundo Laplace
	ObjSecundário	Cálculo dos múltiplos de um dado número inteiro
	Objmicro	Simplificação de fracções

MODELO A

Observações/indicações de programação

Este modelo deve apresentar uma roleta circular com um número predeterminado de sectores (x), todos com a mesma área e numerados de 1 a x. A roleta deve conter um ponteiro em que uma das extremidades é o centro da roleta e de comprimento igual ao raio da roleta.

Notações e Abreviaturas

$\lhd\frac{a}{b}$ - significa que a fracção $\frac{a}{b}$ é apresentada sob a forma de fracção irredutível

Domínio dos Parâmetros

$x \in \{5, \cdots, 12\}$; $k, y, w \in \{1, \cdots, x\}$ de modo que $y > k$ e designe-se por a, o quociente da divisão inteira de x por w

Texto

Considera a experiência aleatória que consiste em rodar a roleta da figura e observar o número do sector circular sobre o qual fica situado o ponteiro. Então

Respostas **Verdadeira se e só se:**

<table>
<tr>
<td>R1</td>
<td>a probabilidade de sair o número k
<table>
<tr><td>é</td><td>a1</td></tr>
<tr><td>não é</td><td>a2</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>$\frac{1}{x}$</td><td>b1</td></tr>
<tr><td>$\frac{k}{x}$</td><td>b2</td></tr>
<tr><td>$\frac{100}{x}\%$, sob a forma de percentagem</td><td>b3</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{k}$</td><td>b4</td></tr>
<tr><td>(Área do sector numerado com k)/(Área do círculo)</td><td>b5</td></tr>
<tr><td>$\frac{x}{k}$</td><td>b6</td></tr>
<tr><td>(Área de um qualquer dos sectores círculares)/(Área do círculo)</td><td>b7</td></tr>
<tr><td>$\frac{k-1}{x}$</td><td>b8</td></tr>
</table>
</td>
<td>Para $k \neq 1$
$a1 \wedge \ (b1 \vee b3 \vee b5 \vee b7)$
ou
$a2 \wedge (b2 \vee b4 \vee b6 \vee b8)$

Para $k = 1$
$a1 \wedge \ (b1 \vee b2 \vee b3 \vee b5 \vee b7)$
ou
$a2 \wedge (b4 \vee b6 \vee b8)$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>R2</td>
<td>a probabilidade de sair um número inferior ou igual a y
<table>
<tr><td>é</td><td>a1</td></tr>
<tr><td>não é</td><td>a2</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>$\frac{1}{x}$</td><td>b1</td></tr>
<tr><td>$\frac{y-1}{x}$</td><td>b2</td></tr>
<tr><td>$\frac{y}{x}$</td><td>b3</td></tr>
<tr><td>$\frac{100y}{x}$%, sob a forma de percentagem</td><td>b4</td></tr>
<tr><td>$y\times$ (Área do sector numerado com k) /(Área do círculo)</td><td>b5</td></tr>
<tr><td>$\frac{x}{y}$</td><td>b6</td></tr>
<tr><td>$(y-1)\times$(Área de um qualquer dos sectores circulares)/(Área do círculo)</td><td>b7</td></tr>
<tr><td>$y\times$(Área de um qualquer dos sectores circulares)/(Área do círculo)</td><td>b8</td></tr>
<tr><td>$\triangleleft\frac{y}{x}$</td><td>b9</td></tr>
<tr><td>$\triangleleft\frac{x}{y}$</td><td>b10</td></tr>
</table>
</td>
<td>$a1 \wedge \ (b3 \vee b4 \vee b5 \vee b8 \vee b9)$
ou
$a2 \wedge (b1 \vee b2 \vee b6 \vee b7 \vee b10)$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>R3</td>
<td>a probabilidade de sair um número inferior ou igual a k ou superior a y
<table>
<tr><td>é</td><td>a1</td></tr>
<tr><td>não é</td><td>a2</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>$\frac{k+x-y}{x}$</td><td>b1</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{x}$</td><td>b2</td></tr>
<tr><td>$\frac{k}{x}+\frac{x-y}{x}$</td><td>b3</td></tr>
<tr><td>$\frac{k}{x}\times\frac{x-y}{x}$</td><td>b4</td></tr>
<tr><td>$\frac{k}{x}\times\frac{y}{x}$</td><td>b5</td></tr>
<tr><td>$\triangleleft\frac{x-y+k}{x}$</td><td>b6</td></tr>
<tr><td>$\triangleleft\frac{k}{x}+\triangleleft\frac{x-y}{x}$</td><td>b7</td></tr>
<tr><td>$\triangleleft\frac{k}{x}\times\triangleleft\frac{x-y}{x}$</td><td>b8</td></tr>
</table>
</td>
<td>$a1 \wedge (b1 \vee b3 \vee b6 \vee b7)$
ou
$a2 \wedge (b2 \vee b4 \vee b5 \vee b8)$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>R4</td><td>a probabilidade de sair um número superior ou igual a k e inferior ou igual a y
<table><tr><td>é</td><td>a1</td></tr><tr><td>não é</td><td>a2</td></tr></table><table><tr><td>$\frac{y-k+1}{x}$</td><td>b1</td></tr><tr><td>$\frac{1}{x}$</td><td>b2</td></tr><tr><td>$\frac{y}{x} - \frac{k-1}{x}$</td><td>b3</td></tr><tr><td>$\frac{y+k}{x}$</td><td>b4</td></tr><tr><td>$\frac{y-k}{x}$</td><td>b5</td></tr><tr><td>$\lhd\frac{y-k+1}{x}$</td><td>b6</td></tr><tr><td>$\lhd\frac{y}{x} - \lhd\frac{k-1}{x}$</td><td>b7</td></tr><tr><td>$\lhd\frac{y-k}{x}$</td><td>b8</td></tr></table></td><td>$a1 \wedge (b1 \vee b3 \vee b6 \vee b7)$

ou

$a2 \wedge (b2 \vee b4 \vee b5 \vee b8)$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>R5</td><td>a probabilidade de sair um número superior a x
<table><tr><td>é</td><td>a1</td></tr><tr><td>não é</td><td>a2</td></tr></table><table><tr><td>1</td><td>b1</td></tr><tr><td>0</td><td>b2</td></tr><tr><td>$\frac{1}{x}$</td><td>b3</td></tr><tr><td>igual à probabilidade de sair um número inferior a 1</td><td>b4</td></tr><tr><td>igual à probabilidade do acontecimento Ω</td><td>b5</td></tr><tr><td>igual à probabilidade do acontecimento $\emptyset$</td><td>b6</td></tr></table></td><td>$a1 \wedge (b2 \vee b4 \vee b6)$

ou

$a2 \wedge (b1 \vee b3 \vee b5)$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>R6</td><td>a probabilidade de obter um número que seja múltiplo de w
<table><tr><td>é</td><td>a1</td></tr><tr><td>não é</td><td>a2</td></tr></table><table><tr><td>$\frac{a}{x}$</td><td>b1</td></tr><tr><td>$\frac{a-1}{x}$</td><td>b2</td></tr><tr><td>$\frac{a+1}{x}$</td><td>b3</td></tr><tr><td>$\lhd\frac{a}{x}$</td><td>b4</td></tr></table></td><td>$a1 \wedge (b1 \vee b4)$

ou

$a2 \wedge (b2 \vee b3)$</td></tr>
</table>

A.0.5 Modelo B

Identificação do Modelo

Área	Estatística
Tema	Probabilidades
SubTema	Noção de operações sobre acontecimentos
Objectivo Principal	Noções de espaço dos resultados e de acontecimentos
Objectivo Secundário	Classificação de acontecimentos
Informação adicional	
Tipo de Modelo	4 - Texto com MathML alinhado à esquerda e SVG alinhado à direita, respostas com MathML
Ciclo de Ensino	3 e 4
Nível de Dificuldade	Nível: 3, Grau: 4

Objectivos das Respostas

R_1	Tema	Probabilidades
	SubTema	Noção de operações sobre acontecimento
	ObjPrincipal	Noção de espaço dos resultados
	ObjSecundário	Cardinal de um conjunto
	Objmicro	Relações de ordem entre números naturais
R_2	Tema	Probabilidades
	SubTema	Noção de operações sobre acontecimentos
	ObjPrincipal	Noção de espaço dos resultados
	ObjSecundário	Relações entre conjuntos
	Objmicro	Reunião de conjuntos
R_3	Tema	Probabilidades
	SubTema	Noção de operações sobre acontecimentos
	ObjPrincipal	Classificação de acontecimentos
	ObjSecundário	Definição de um conjunto em extensão e em compreensão
	Objmicro	Números primos e números compostos
R_4	Tema	Probabilidades
	SubTema	Noção de operações sobre acontecimentos
	ObjPrincipal	Classificação de acontecimentos
	ObjSecundário	Definição de um conjunto em extensão e em compreensão
	Objmicro	
R_5	Tema	Probabilidades
	SubTema	Noção de Probabilidade de um acontecimento
	ObjPrincipal	Definição de Probabilidade segundo Laplace
	ObjSecundário	Probabilidade do acontecimento impossível/certo
	Objmicro	Simplificação de fracções
R_6	Tema	Probabilidades
	SubTema	Noção de Probabilidade de um acontecimento
	ObjPrincipal	Definição de Probabilidade segundo Laplace
	ObjSecundário	Cálculo dos múltiplos de um dado número inteiro
	Objmicro	Simplificação de fracções

MODELO B

Observações/indicações de programação

Este modelo deve apresentar uma imagem contendo dois dados com uma forma previamente escolhida, de entre as seguintes hipóteses

tetraédricos	d_1
cúbicos	d_2
octaédricos	d_3
dodecaédricos	d_4
icosaédricos	d_5

.

Para cada uma das refeidas opções o parâmetro x deverá assumir o valor respeitando a seguinte tabela:

tetraédricos	$x = 4$
cúbicos	$x = 6$
octaédricos	$x = 8$
dodecaédricos	$x = 12$
icosaédricos	$x = 20$

A imagem dos dados, com a forma já seleccionada, deve ser apresentada com as faces numeradas de 1 a x. Obviamente nem todas as faces estarão visíveis.

Notações e Abreviaturas

Domínio dos Parâmetros

$n, k, m \in \{2, \ldots, 2x\}$, de modo que $n > m > k$.

Texto

Considera a experiência, de espaço dos resultados Ω, que consiste em lançar dois dados

tetraédricos	d_1
cúbicos	d_2
octaédricos	d_3
dodecaédricos	d_4
icosaédricos	d_5

com as faces numeradas de 1 a x e em observar a soma dos números contidos nas faces voltadas para baixo. Então

Respostas **Verdadeira se e só se:**

<table>
<tr>
<td>R1</td>
<td>Ω tem
<table>
<tr><td>exactamente</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td>menos do que</td><td>a_2</td></tr>
<tr><td>mais do que</td><td>a_3</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>x elementos</td><td>b_1</td></tr>
<tr><td>$2x$ elementos</td><td>b_2</td></tr>
<tr><td>x^2 elementos</td><td>b_3</td></tr>
<tr><td>$2x-1$ elementos</td><td>b_4</td></tr>
<tr><td>$x(x-1)$ elementos</td><td>b_5</td></tr>
</table>
</td>
<td>$a1 \wedge b4$
ou
$a3 \wedge b1$
ou
$a2 \wedge (b2 \vee b3 \vee b5)$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>R2</td>
<td>Ω
<table>
<tr><td>$=$</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td>$\neq$</td><td>a_2</td></tr>
<tr><td>$\subseteq$</td><td>a_3</td></tr>
<tr><td>$\not\subseteq$</td><td>a_4</td></tr>
<tr><td>$\not\supseteq$</td><td>a_5</td></tr>
<tr><td>$\supseteq$</td><td>a_6</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>$\{1,2,\ldots,x\}$</td><td>b_1</td></tr>
<tr><td>$\{1,2,\ldots,x\} \cup \{1,2,\ldots,x\}$</td><td>$b_2$</td></tr>
<tr><td>$\{2,3,\ldots,x^2\}$</td><td>b_3</td></tr>
<tr><td>$\{1,2,\ldots,2x\}$</td><td>b_4</td></tr>
<tr><td>$\{2,3,\ldots,2x\}$</td><td>b_5</td></tr>
</table>
</td>
<td>$a1 \wedge b5$
ou
$a2 \wedge (b1 \vee b2 \vee b3 \vee b4)$
ou
$a3 \wedge (b3 \vee b4 \vee b5)$
ou
$a4 \wedge (b1 \vee b2)$
ou
$a5 \wedge (b3 \vee b4)$
ou
$a6 \wedge (b1 \vee b2 \vee b5)$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>R3</td>
<td>O acontecimento
<table>
<tr><td>$\{n\}$</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td>$\{n, k, m, \}$</td><td>a_2</td></tr>
<tr><td>$\{1, n, k, m, \}$</td><td>a_3</td></tr>
<tr><td>$\{n + 2x\}$</td><td>a_4</td></tr>
<tr><td>"Obter uma soma superior ou igual a 2"</td><td>a_5</td></tr>
<tr><td>"Obter uma soma que seja um número primo"</td><td>a_6</td></tr>
<tr><td>"Obter uma soma que seja um múltiplo de 3"</td><td>a_7</td></tr>
<tr><td>"Obter uma soma não superior a $2x$"</td><td>a_8</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>é</td><td>b_1</td></tr>
<tr><td>não é</td><td>b_2</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>um acontecimento impossível</td><td>c_1</td></tr>
<tr><td>um acontecimento elementar</td><td>c_2</td></tr>
<tr><td>um acontecimento composto</td><td>c_3</td></tr>
<tr><td>um acontecimento certo</td><td>c_4</td></tr>
</table>
</td>
<td>$a1 \wedge [(b1 \wedge c2) \vee b2 \wedge (c1 \vee c3 \vee c4)]$
ou
$a2 \wedge [(b1 \wedge c3) \vee b2 \wedge (c1 \vee c2 \vee c4)]$
ou
$a3 \wedge [(b1 \wedge c1) \vee b2 \wedge (c2 \vee c3 \vee c4)]$
ou
$a4 \wedge [(b1 \wedge c1) \vee b2 \wedge (c2 \vee c3 \vee c4)]$
ou
$a5 \wedge [(b1 \wedge c4) \vee b2 \wedge (c1 \vee c2 \vee c3)]$
ou
$a6 \wedge [(b1 \wedge c3) \vee b2 \wedge (c1 \vee c2 \vee c4)]$
ou
$a7 \wedge [(b1 \wedge c3) \vee b2 \wedge (c1 \vee c2 \vee c4)]$
ou
$a8 \wedge [(b1 \wedge c4) \vee b2 \wedge (c1 \vee c2 \vee c3)]$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>R4</td>
<td>Os acontecimentos
<table>
<tr><td>$A = \{2, 4, \cdots, 2x\}$
e
$B = \{3, 5, \cdots, 2x - 1\}$</td><td>$a_1$</td></tr>
<tr><td>$A = \{2, 4, \cdots, 2x\}$
e
B: "obter soma ímpar"</td><td>a_2</td></tr>
<tr><td>$A = \{2, 3, \cdots, x\}$
e
B: "obter soma superior ou igual a x "</td><td>a_3</td></tr>
<tr><td>A: " obter soma inferior ou igual a k"
e
B : " obter soma superior a m"</td><td>a_4</td></tr>
<tr><td>A : " obter soma $2x + 1$"
e
$B = \{n\}$</td><td>a_5</td></tr>
<tr><td>A : " obter uma soma inferior a $2x + 1$"
e
$B = \{m, n, k\}$</td><td>a_6</td></tr>
<tr><td>A: " obter soma superior a k"
e
B : " obter soma inferior a n"</td><td>a_7</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>são</td><td>b_1</td></tr>
<tr><td>não são</td><td>b_2</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>acontecimentos incompatíveis</td><td>c_1</td></tr>
<tr><td>acontecimentos contrários</td><td>c_2</td></tr>
<tr><td>acontecimentos compatíveis</td><td>c_3</td></tr>
</table>
</td>
<td>$a1 \wedge b1 \wedge (c1 \vee c2)$
ou
$a1 \wedge b2 \wedge c3$
ou
$a2 \wedge b1 \wedge (c1 \vee c2)$
ou
$a2 \wedge b2 \wedge c3$
ou
$a3 \wedge b1 \wedge c3$
ou
$a3 \wedge b2 \wedge (c1 \vee c2)$
ou
$a4 \wedge b1 \wedge c3$
ou
$a4 \wedge b2 \wedge (c1 \vee c2)$
ou
$a5 \wedge b1 \wedge c1$
ou
$a5 \wedge b2 \wedge (c2 \vee c3)$
ou
$a6 \wedge b1 \wedge c3$
ou
$a6 \wedge b2 \wedge (c1 \vee c2)$
ou
$a7 \wedge b1 \wedge c3$
ou
$a6 \wedge b2 \wedge (c1 \vee c2)$</td>
</tr>
</table>

A.0.6 Modelo C

Identificação do Modelo

Área	Estatística
Tema	Probabilidades
SubTema	Axiomática da Teoria das Probabilidades
Objectivo Principal	Aplicação das propriedades básicas das Axiomática
Objectivo Secundário	Classificação de acontecimentos
Informação adicional	
Tipo de Modelo	4 - Texto com MathML alinhado à esquerda e SVG alinhado à direita, respostas com MathML
Ciclo de Ensino	3 e 4
Nível de Dificuldade	Nível: 4, Grau: 2

Objectivos das Respostas

R_1	Tema	Probabilidades
	SubTema	Noção de operações sobre acontecimento
	ObjPrincipal	Noção de espaço dos resultados
	ObjSecundário	Cardinal de um conjunto
	Objmicro	Relações de ordem entre números naturais
R_2	Tema	Probabilidades
	SubTema	Noção de operações sobre acontecimentos
	ObjPrincipal	Noção de espaço dos resultados
	ObjSecundário	Relações entre conjuntos
	Objmicro	Reunião de conjuntos
R_3	Tema	Probabilidades
	SubTema	Noção de operações sobre acontecimentos
	ObjPrincipal	Classificação de acontecimentos
	ObjSecundário	Definição de um conjunto em extensão e em compreensão
	Objmicro	Números primos e números compostos
R_4	Tema	Probabilidades
	SubTema	Noção de operações sobre acontecimentos
	ObjPrincipal	Classificação de acontecimentos
	ObjSecundário	Definição de um conjunto em extensão e em compreensão
	Objmicro	
R_5	Tema	Probabilidades
	SubTema	Noção de Probabilidade de um acontecimento
	ObjPrincipal	Definição de Probabilidade segundo Laplace
	ObjSecundário	Probabilidade do acontecimento impossível/certo
	Objmicro	Simplificação de fracções
R_6	Tema	Probabilidades
	SubTema	Noção de Probabilidade de um acontecimento
	ObjPrincipal	Definição de Probabilidade segundo Laplace
	ObjSecundário	Cálculo dos múltiplos de um dado número inteiro
	Objmicro	Simplificação de fracções

MODELO C

Observações/indicações de programação

Notações e Abreviaturas

$\triangleleft\frac{a}{b}$ - significa que a fracção $\frac{a}{b}$ é apresentada sob a forma de fracção irredutível

Domínio dos Parâmetros

$n, m \in \{1, \ldots, 99\}$, de modo que $n > m$.

Texto

Seja Ω o espaço dos resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos de Ω , isto é, $A \subseteq \Omega$ e $B \subseteq \Omega$. Sabe-se que:

$P(A \cup B) = \frac{3m+n}{200}$;

$P(A) = \frac{n}{100}$;

$P(A \cap B) = \frac{n-m}{200}$;

Então,

Respostas **Verdadeira se e só se:**

R1 $P(B)$

é igual a	a1
é diferente de	a2

$\frac{m}{100}$	b1
$\frac{n-m}{200}$	b2
$\frac{3m-n}{200}$	b3
$\frac{n}{100}$	b4
$\frac{3m+n}{200} - P(A \cap B^c)$	b5
$P(B \cap \overline{A}) + \frac{n-m}{200}$	b6

$a1 \wedge (b1 \vee b5 \vee b6)$

ou

$a2 \wedge (b2 \vee b3 \vee b4)$

R2 $P(\overline{B})$

é igual a	a1
é diferente de	a2

$1 - \frac{m}{100}$	b1
$1 - \frac{n}{100}$	b2
$1 - \frac{m}{200}$	b3
$n - m$	b4
$1 - \frac{n-m}{200}$	b5
$P(A \cap \overline{B}) + P((A \cup B)^c)$	b6
$1 + P(A \cap B^c) - P(A \cup B)$	b7
$2 - P(\overline{A} \cup B) - P(A \cup B)$	b8

$a1 \wedge (b1 \vee b6 \vee b7 \vee b8)$

ou

$a2 \wedge (b2 \vee b3 \vee b4 \vee b5)$

<table>
<tr>
<td>R3</td>
<td>$P(A \cap \overline{B})$
<table>
<tr><td>é igual a</td><td>a1</td></tr>
<tr><td>é diferente de</td><td>a2</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>m</td><td>b1</td></tr>
<tr><td>$n + m$</td><td>b2</td></tr>
<tr><td>$\frac{n+m}{200}$</td><td>b3</td></tr>
<tr><td>$\frac{n-m}{200}$</td><td>b4</td></tr>
<tr><td>$P(B \cap \overline{A}) + P(A \cap B)$</td><td>b5</td></tr>
<tr><td>$P(A \cup B) - P(B)$</td><td>b6</td></tr>
<tr><td>$P(B \cap \overline{A})$</td><td>b7</td></tr>
<tr><td>$P(A) - P(A \cap B)$</td><td>b8</td></tr>
</table>
</td>
<td>$a1 \wedge (b3 \vee b5 \vee b6 \vee b8)$
ou
$a2 \wedge (b1 \vee b2 \vee b4 \vee b7)$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>R4</td>
<td>$P(\overline{A} \cap \overline{B})$
<table>
<tr><td>é igual a</td><td>a1</td></tr>
<tr><td>é diferente de</td><td>a2</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>$1 - \frac{3m+n}{200}$</td><td>b1</td></tr>
<tr><td>$1 - P(A \cup B)$</td><td>b2</td></tr>
<tr><td>$P(\overline{A}) - P(A \cap \overline{B})$</td><td>b3</td></tr>
<tr><td>$P(\overline{B}) - P(B \cap \overline{A})$</td><td>b4</td></tr>
<tr><td>$\frac{n-m}{200}$</td><td>b5</td></tr>
<tr><td>0</td><td>b6</td></tr>
<tr><td>1</td><td>b7</td></tr>
<tr><td>$1 - P(A \cap B)$</td><td>b8</td></tr>
</table>
</td>
<td>$a1 \wedge (b1 \vee b2 \vee b3 \vee b4)$
ou
$a2 \wedge (b5 \vee b6 \vee b7 \vee b8)$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>R5</td>
<td>

$P(\overline{A} \cup \overline{B})$

<table>
<tr><td>é igual a</td><td>a1</td></tr>
<tr><td>é diferente de</td><td>a2</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>$1 - \frac{n-m}{200}$</td><td>b1</td></tr>
<tr><td>$1 - P(A \cap B)$</td><td>b2</td></tr>
<tr><td>$P(A) - P(A \cap \overline{B})$</td><td>b3</td></tr>
<tr><td>$P(B) - P(B \cap \overline{A})$</td><td>b4</td></tr>
<tr><td>$\frac{3m+n}{200}$</td><td>b5</td></tr>
<tr><td>n</td><td>b6</td></tr>
<tr><td>m</td><td>b7</td></tr>
<tr><td>$1 - P(A \cup B)$</td><td>b8</td></tr>
</table>

</td>
<td>

$a1 \wedge (b1 \vee b2 \vee b3 \vee b4)$

ou

$a2 \wedge (b5 \vee b6 \vee b7 \vee b8)$

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>R6</td>
<td>

Os acontecimentos

<table>
<tr><td>A e B</td><td>a1</td></tr>
<tr><td>A e $\overline{B}$</td><td>a2</td></tr>
<tr><td>A e $A \cup B$</td><td>a3</td></tr>
<tr><td>B e $\overline{A \cup B}$</td><td>a4</td></tr>
<tr><td>A e $B \cap \overline{A}$</td><td>a5</td></tr>
<tr><td>$A \cup B$ e $\overline{A} \cap \overline{B}$</td><td>a6</td></tr>
<tr><td>$A \cap B$ e $\overline{B} \cup \overline{A}$</td><td>a7</td></tr>
<tr><td>$A \cap \overline{B}$ e $B \cap \overline{A}$</td><td>a8</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>são</td><td>b1</td></tr>
<tr><td>não são</td><td>b2</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>acontecimentos incompatíveis</td><td>c1</td></tr>
<tr><td>acontecimentos compatíveis</td><td>c2</td></tr>
<tr><td>acontecimentos contrários</td><td>c3</td></tr>
</table>

</td>
<td>

$a1 \wedge [(b1 \wedge c2) \vee b2 \wedge (c1 \vee c3)]$

ou

$a2 \wedge [(b1 \wedge c2) \vee b2 \wedge (c1 \vee c3)]$

ou

$a3 \wedge [(b1 \wedge c2) \vee b2 \wedge (c1 \vee c3)]$

ou

$a4 \wedge [(b1 \wedge c1) \vee b2 \wedge (c2 \vee c3)]$

ou

$a5 \wedge [(b1 \wedge c1) \vee b2 \wedge (c2 \vee c3)]$

ou

$a6 \wedge [(b2 \wedge c2) \vee b1 \wedge (c1 \vee c3)]$

ou

$a7 \wedge [(b2 \wedge c2) \vee b1 \wedge (c1 \vee c3)]$

ou

$a6 \wedge [(b1 \wedge c1) \vee b2 \wedge (c2 \vee c3)]$

</td>
</tr>
</table>

A.0.7 Modelo D

Identificação do Modelo D

Área	Estatística
Tema	Probabilidades
SubTema	Noção de Probabilidade de um Acontecimento
Objectivo Principal	Definição axiomática de probabilidade
Objectivo Secundário	Propriedades da Probabilidade
Informação adicional	
Tipo de Modelo	4 - Texto com MathML alinhado à esquerda e SVG alinhado à direita, respostas com MathML
Ciclo de Ensino	4
Nível de Dificuldade	<table><tr><td>Nível</td><td>Grau</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td></tr></table>

Objectivos das Respostas

R_1	Tema	Probabilidades
	SubTema	Noção de operações sobre acontecimentos
	ObjPrincipal	Noção de Acontecimento
	ObjSecundário	Relações entre conjuntos
	Objmicro	Conjuntos definidos em extensão e em compreensão
R_2	Tema	Probabilidades
	SubTema	Noção de operações sobre acontecimentos
	ObjPrincipal	Noção de Acontecimento
	ObjSecundário	Noção de acontecimento contrário
	Objmicro	Relações entre conjuntos
R_3	Tema	Probabilidades
	SubTema	Noção de operações sobre acontecimentos
	ObjPrincipal	Noção de Acontecimento
	ObjSecundário	Noção de acontecimento contrário
	Objmicro	Relações entre conjuntos
R_4	Tema	Probabilidades
	SubTema	Noção de operações sobre acontecimentos
	ObjPrincipal	Operações com acontecimentos
	ObjSecundário	Reunião de acontecimentos
	Objmicro	Relações entre conjuntos
R_5	Tema	Probabilidades
	SubTema	Noção de operações sobre acontecimentos
	ObjPrincipal	Operações com acontecimentos
	ObjSecundário	Intersecção de acontecimentos
	Objmicro	Relações entre conjuntos

MODELO D

Observações/indicações de programação

Faça-se $y := max\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$; $x := min\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ e k tal que $x \leq k < y$ Seja $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ e $B = \{k+1, \cdots, y\}$. Com base em A e B já definidos defina-se $C := A \cap B$ e $D := A \cup B$.

Este modelo deve gerar quatro questões escolhidas no máximo uma em cada um dos seis itens disponíveis.

Se possível, o modelo deve conter a imagem de um dado cúbico com as faces visíveis contendo alguns dos números inteiros já escolhidos.

Notações e Abreviaturas

$\lhd \frac{a}{b}$ - significa que a fracção $\frac{a}{b}$ é apresentada sob a forma de fracção irredutível

Domínio dos Parâmetros

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ são seis números inteiros escolhidos entre seis valores inteiros consecutivos compreendidos entre 1 e 20 inclusivé, com $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ e sejam $x_5 < x_6$ os dois valores ainda não atribuídos a x_1, x_2, x_3, x_4.

Texto

Considera a experiência aleatória, de espaço dos resultados Ω, que consiste no lançamento de um dado cúbico com as faces numeradas de x a y e posterior observação do número da face voltada para cima. Sejam A e B os seguintes acontecimentos:

$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

B : " sair um número maior que k".

Então:

Respostas **Verdadeira se e só se:**

<table>
<tr>
<td>R1</td>
<td>B
<table>
<tr><td>$=$</td><td>a1</td></tr>
<tr><td>$\neq$</td><td>a2</td></tr>
<tr><td>$\subseteq$</td><td>a3</td></tr>
<tr><td>$\supseteq$</td><td>a4</td></tr>
<tr><td>$\not\subseteq$</td><td>a5</td></tr>
<tr><td>$\not\supseteq$</td><td>a6</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>$\{k+1, \cdots, y\}$</td><td>b1</td></tr>
<tr><td>$\{x, \cdots, k\}$</td><td>b2</td></tr>
<tr><td>$\{k, \cdots, y\}$</td><td>b3</td></tr>
<tr><td>$\{x, \cdots, k+1\}$</td><td>b4</td></tr>
<tr><td>$\emptyset$</td><td>b5</td></tr>
<tr><td>Ω</td><td>b6</td></tr>
</table>
</td>
<td>$a1 \wedge \ b1$
ou
$a2 \wedge (b2 \vee b3 \vee b4 \vee b5 \vee b6)$
ou
$a3 \wedge (b1 \vee b3 \vee b6)$
ou
$a4 \wedge (b1 \vee b5)$
ou
$a5 \wedge (b2 \vee b4 \vee b5)$
ou
$a6 \wedge (b2 \vee b3 \vee b4 \vee b6)$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>R2</td>
<td>$\overline{B}$
<table>
<tr><td>$=$</td><td>a1</td></tr>
<tr><td>$\neq$</td><td>a2</td></tr>
<tr><td>$\subseteq$</td><td>a3</td></tr>
<tr><td>$\supseteq$</td><td>a4</td></tr>
<tr><td>$\not\subseteq$</td><td>a5</td></tr>
<tr><td>$\not\supseteq$</td><td>a6</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>$\{x, \cdots, k\}$</td><td>b1</td></tr>
<tr><td>$\{x, \cdots, k-1\}$</td><td>b2</td></tr>
<tr><td>$\{k, \cdots, y\}$</td><td>b3</td></tr>
<tr><td>$\{k-1, \cdots, y\}$</td><td>b4</td></tr>
<tr><td>$\emptyset$</td><td>b5</td></tr>
<tr><td>Ω</td><td>b6</td></tr>
</table>
</td>
<td>$a1 \wedge \ b1$
ou
$a2 \wedge (b2 \vee b3 \vee b4 \vee b5 \vee b6)$
ou
$a3 \wedge (b1 \vee b6)$
ou
$a4 \wedge (b1 \vee b5 \vee b6)$
ou
$a5 \wedge (b2 \vee b3 \vee b4 \vee b5)$
ou
$a6 \wedge (b3 \vee b4 \vee b6)$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>R3</td>
<td>$\overline{A}$
<table>
<tr><td>$=$</td><td>a1</td></tr>
<tr><td>$\neq$</td><td>a2</td></tr>
<tr><td>$\subseteq$</td><td>a3</td></tr>
<tr><td>$\supseteq$</td><td>a4</td></tr>
<tr><td>$\not\subseteq$</td><td>a5</td></tr>
<tr><td>$\not\supseteq$</td><td>a6</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>$\{x_5, x_6\}$</td><td>b1</td></tr>
<tr><td>$\{x, \cdots, x_5\}$</td><td>b2</td></tr>
<tr><td>$\{x_6, \cdots, y\}$</td><td>b3</td></tr>
<tr><td>$\Omega \backslash A$</td><td>b4</td></tr>
<tr><td>$\emptyset$</td><td>b5</td></tr>
<tr><td>Ω</td><td>b6</td></tr>
</table>
</td>
<td>$a1 \wedge (b1 \vee b4)$
ou
$a2 \wedge (b2 \vee b3 \vee b5 \vee b6)$
ou
$a3 \wedge (b1 \vee b4 \vee b6)$
ou
$a4 \wedge (b1 \vee b4 \vee b5)$
ou
$a5 \wedge (b2 \vee b3 \vee b5)$
ou
$a6 \wedge (b2 \vee b3 \vee b6)$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>R4</td>
<td>$A \cup B$

<table>
<tr><td>$=$</td><td>a1</td></tr>
<tr><td>$\neq$</td><td>a2</td></tr>
<tr><td>$\subseteq$</td><td>a3</td></tr>
<tr><td>$\supseteq$</td><td>a4</td></tr>
<tr><td>$\nsubseteq$</td><td>a5</td></tr>
<tr><td>$\nsupseteq$</td><td>a6</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>C</td><td>b1</td></tr>
<tr><td>D</td><td>b2</td></tr>
<tr><td>$\{x_5, x_6\}$</td><td>b3</td></tr>
<tr><td>$\emptyset$</td><td>b4</td></tr>
<tr><td>$B \cup A$</td><td>b5</td></tr>
<tr><td>$\{x_1, x_2, x_3\}$</td><td>b6</td></tr>
</table>
</td>
<td>Se $x_1 \neq y - 4 \vee k \neq y - 5$
$a1 \wedge (b2 \vee b5)$
ou
$a2 \wedge (b1 \vee b3 \vee b4 \vee b6)$
ou
$a3 \wedge (b2 \vee b5 \vee b6)$
ou
$a4 \wedge (b1 \vee b2 \vee b4 \vee b6)$
ou
$a5 \wedge (b3 \vee b4)$
ou
$a6 \wedge (b3 \vee b5)$

Se $x_1 = y - 4 \wedge k = y - 5$
$a1 \wedge (b1 \vee b2 \vee b6)$
ou
$a2 \wedge (b3 \vee b4 \vee b5)$
ou
$a3 \wedge (b1 \vee b2 \vee b5 \vee b6)$
ou
$a4 \wedge (b1 \vee b2 \vee b4 \vee b6)$
ou
$a5 \wedge (b3 \vee b4 \vee b7)$
ou
$a6 \wedge (b3 \vee b5)$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>R5</td>
<td>$A \cap B$
<table>
<tr><td>$=$</td><td>a1</td></tr>
<tr><td>$\neq$</td><td>a2</td></tr>
<tr><td>$\subseteq$</td><td>a3</td></tr>
<tr><td>$\supseteq$</td><td>a4</td></tr>
<tr><td>$\not\subseteq$</td><td>a5</td></tr>
<tr><td>$\not\supseteq$</td><td>a6</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>C</td><td>b1</td></tr>
<tr><td>D</td><td>b2</td></tr>
<tr><td>Ω</td><td>b3</td></tr>
<tr><td>$\{x_1; x_3\}$</td><td>b4</td></tr>
<tr><td>$\{x_2\}$</td><td>b5</td></tr>
<tr><td>$\{k\}$</td><td>b6</td></tr>
<tr><td>$B \cap A$</td><td>b7</td></tr>
<tr><td>$A \cup B$</td><td>b8</td></tr>
</table>
</td>
<td>Se $x_1 \neq y - 4 \vee k \neq y - 5$
$a1 \wedge (b1 \vee b7)$
ou
$a2 \wedge (b2 \vee b3 \vee b4 \vee b5 \vee b6)$
ou
$a3 \wedge (b1 \vee b2 \vee b3 \vee b7 \vee b8)$
ou
$a4 \wedge (b1 \vee b7)$
ou
$a5 \wedge (b4 \vee b5 \vee b6)$
ou
$a6 \wedge (b2 \vee b3 \vee b4 \vee b5 \vee b6 \vee b8)$

Se $x_1 = y - 4 \wedge k = y - 5$
$a1 \wedge (b1 \vee b2 \vee b7)$
ou
$a2 \wedge (b3 \vee b4 \vee b5 \vee b6)$
ou
$a3 \wedge (b1 \vee b2 \vee b3 \vee b7 \vee b8)$
ou
$a4 \wedge (b1 \vee b2 \vee b7)$
ou
$a5 \wedge (b4 \vee b5 \vee b6)$
ou
$a6 \wedge (b3 \vee b4 \vee b5 \vee b6 \vee b8)$</td>
</tr>
</table>

A.0.8 Modelo E

Identificação do Modelo

Área	Estatística
Tema	Probabilidades
SubTema	Noção de Probabilidade de um Acontecimento
Objectivo Principal	Definição axiomática de probabilidade
Objectivo Secundário	Propriedades da Probabilidade
Informação adicional	
Tipo de Modelo	4 - Texto com MathML alinhado à esquerda e SVG alinhado à direita, respostas com MathML
Ciclo de Ensino	3 e 4
Nível de Dificuldade	<table><tr><td>Nível</td><td>Grau</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td></tr></table>

Objectivos das Respostas

R_1	Tema	Probabilidades
	SubTema	Noção de operações sobre acontecimentos
	ObjPrincipal	Noção de Acontecimento
	ObjSecundário	Relações entre conjuntos
	Objmicro	Conjuntos definidos em extensão e em compreensão
R_2	Tema	Probabilidades
	SubTema	Noção de operações sobre acontecimentos
	ObjPrincipal	Noção de Acontecimento
	ObjSecundário	Noção de acontecimento contrário
	Objmicro	Relações entre conjuntos
R_3	Tema	Probabilidades
	SubTema	Noção de operações sobre acontecimentos
	ObjPrincipal	Noção de Acontecimento
	ObjSecundário	Noção de acontecimento contrário
	Objmicro	Relações entre conjuntos
R_4	Tema	Probabilidades
	SubTema	Noção de operações sobre acontecimentos
	ObjPrincipal	Operações com acontecimentos
	ObjSecundário	Reunião de acontecimentos
	Objmicro	Relações entre conjuntos
R_5	Tema	Probabilidades
	SubTema	Noção de operações sobre acontecimentos
	ObjPrincipal	Operações com acontecimentos
	ObjSecundário	Intersecção de acontecimentos
	Objmicro	Relações entre conjuntos

MODELO E

Observações/indicações de programação

Este modelo deve apresentar a planificação de um cubo com as faces pintadas de cores diferentes, uma em cada face. Essa face deve também conter uma letra que designe a cor atribuída se possível a inicial. Por exemplo, uma face pintada de branco deve conter a letra B. No entanto, convém que não existam duas cores, representadas pela mesma letra.
Este modelo deve gerar quatro questões escolhidas no máximo uma em cada um dos cinco itens disponíveis.

Notações e Abreviaturas

$\triangleleft\frac{a}{b}$ - significa que a fracção $\frac{a}{b}$ é apresentada sob a forma de fracção irredutível

Domínio dos Parâmetros

Sejam $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ as seis letras escolhidas para designar as cores das respectivas faces. Atribua-se a x uma letra do conjunto $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

Texto

Considera a experiência aleatória, de espaço de resultados $\Omega = \{x_1, \cdots, x_6\}$, que consiste no lançamento de um dado cúbico cuja planificação se apresenta na figura ao lado e posterior observação da cor da face voltada para cima, representada pela letra nela contida.
Sejam A e B os seguintes acontecimentos:

$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

B : " não obter x nem x_6"

Então:

Respostas **Verdadeira se e só se:**

R1	B	$a1 \wedge\ b4$ ou $a2 \wedge (b1 \vee b4 \vee b6)$ ou $a3 \wedge (b1 \vee b3 \vee b6)$ ou $a4 \wedge (b4 \vee b5)$ ou $a5 \wedge (b2 \vee b4 \vee b5)$ ou $a6 \wedge (b1 \vee b2 \vee b3 \vee b6)$

$=$	a1
$\neq$	a2
$\subseteq$	a3
$\supseteq$	a4
$\not\subseteq$	a5
$\not\supseteq$	a6

$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$	b1
$\{x_5, x_6\}$	b2
$\{x, x_6\}$	b3
$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \backslash \{x\}$	b4
$\emptyset$	b5
Ω	b6

R2	$\bar{B}$	$a1 \wedge\ b3$ ou $a2 \wedge (b1 \vee b2 \vee b4 \vee b5 \vee b6)$ ou $a3 \wedge (b1 \vee b3 \vee b4 \vee b6)$ ou $a4 \wedge (b3 \vee b5)$ ou $a5 \wedge (b2 \vee b5)$ ou $a6 \wedge (b1 \vee b2 \vee b4 \vee b6)$

$=$	a1
$\neq$	a2
$\subseteq$	a3
$\supseteq$	a4
$\not\subseteq$	a5
$\not\supseteq$	a6

$\{x, x_5, x_6\}$	b1
$\{x_5, x_6\}$	b2
$\{x, x_6\}$	b3
$A \cup \{x_6\}$	b4
$\emptyset$	b5
Ω	b6

<table>
<tr>
<td>R3</td>
<td>$\bar{A}$
<table>
<tr><td>$=$</td><td>a1</td></tr>
<tr><td>$\neq$</td><td>a2</td></tr>
<tr><td>$\subseteq$</td><td>a3</td></tr>
<tr><td>$\supseteq$</td><td>a4</td></tr>
<tr><td>$\not\subseteq$</td><td>a5</td></tr>
<tr><td>$\not\supseteq$</td><td>a6</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>$\{x_5, x_6\}$</td><td>b1</td></tr>
<tr><td>$\{x, x_5, x_6\}$</td><td>b2</td></tr>
<tr><td>$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$</td><td>b3</td></tr>
<tr><td>{ "cores diferentes da cor x" }</td><td>b4</td></tr>
<tr><td>$\emptyset$</td><td>b5</td></tr>
<tr><td>Ω</td><td>b6</td></tr>
</table>
</td>
<td>$a1 \wedge b1$
ou
$a2 \wedge (b2 \vee b3 \vee b4 \vee b5 \vee b6)$
ou
$a3 \wedge (b1 \vee b2 \vee b4 \vee b6)$
ou
$a4 \wedge (b1 \vee b5)$
ou
$a5 \wedge (b3 \vee b5)$
ou
$a6 \wedge (b2 \vee b3 \vee b4 \vee b6)$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>R4</td>
<td>$A \cup B$
<table>
<tr><td>$=$</td><td>a1</td></tr>
<tr><td>$\neq$</td><td>a2</td></tr>
<tr><td>$\subseteq$</td><td>a3</td></tr>
<tr><td>$\supseteq$</td><td>a4</td></tr>
<tr><td>$\not\subseteq$</td><td>a5</td></tr>
<tr><td>$\not\supseteq$</td><td>a6</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6\}$</td><td>b1</td></tr>
<tr><td>$\{x_5\}$</td><td>b2</td></tr>
<tr><td>$\{x\}$</td><td>b3</td></tr>
<tr><td>$\emptyset$</td><td>b4</td></tr>
<tr><td>$B \cup A$</td><td>b5</td></tr>
<tr><td>Ω</td><td>b6</td></tr>
</table>
</td>
<td>$a1 \wedge (b1 \vee b5 \vee b6)$
ou
$a2 \wedge (b2 \vee b3 \vee b4)$
ou
$a3 \wedge (b1 \vee b5 \vee b6)$
ou
$a4 \wedge (b1 \vee b3 \vee b4 \vee b5)$
ou
$a5 \wedge (b2 \vee b2 \vee b4)$
ou
$a6 \wedge (b2 \vee b6)$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>R5</td>
<td>

$A \cap B$

<table>
<tr><td>$=$</td><td>a1</td></tr>
<tr><td>$\neq$</td><td>a2</td></tr>
<tr><td>$\subseteq$</td><td>a3</td></tr>
<tr><td>$\supseteq$</td><td>a4</td></tr>
<tr><td>$\not\subseteq$</td><td>a5</td></tr>
<tr><td>$\not\supseteq$</td><td>a6</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6\}$</td><td>b1</td></tr>
<tr><td>$\{x_5\}$</td><td>b2</td></tr>
<tr><td>$\{x\}$</td><td>b3</td></tr>
<tr><td>$\{x, x_6\}$</td><td>b4</td></tr>
<tr><td>$\emptyset$</td><td>b5</td></tr>
<tr><td>$B \cap A$</td><td>b6</td></tr>
<tr><td>Ω</td><td>b7</td></tr>
</table>
</td>
<td>

$a1 \wedge (b1 \vee b6)$
ou
$a2 \wedge (b2 \vee b3 \vee b4 \vee b5 \vee b7)$
ou
$a3 \wedge (b1 \vee b3 \vee b4 \vee b6 \vee b7)$
ou
$a4 \wedge (b3 \vee b5 \vee b6)$
ou
$a5 \wedge (b2 \vee b5)$
ou
$a6 \wedge (b1 \vee b2 \vee b4 \vee b7)$
</td>
</tr>
</table>

Apêndice B

Actividade em Excel

ESCOLA SECUNDÁRIA D. INÊS DE CASTRO - ALCOBAÇA

Matemática - 12ºano

Actividade para Probabilidades usando a folha de cálculo Excel

---

1. Supõe que te perguntam como podes encontrar a probabilidade de obter cara no lançamento de uma qualquer moeda, não sabendo se se trata ou não de uma moeda equilibrada. Qual das seguintes afirmações te parece mais correcta:

   ☐ A probabilidade de obter cara é $\frac{1}{2}$, uma vez que existe um resultado favorável em dois possíveis.

   ☐ Lança-se a moeda 100 vezes e a probabilidade de obter cara será o quociente entre o número de caras obtído e 100.

   ☐ Lança-se a moeda 1000 vezes e a probabilidade de obter cara será o quociente entre o número de caras obtído e 1000.

   ☐ Todas as afirmações anteriores.

   ☐ Nenhuma das afirmações anteriores.

2. Considera o seguinte problema:

   Num certo jogo, lançam-se cinco dados. Para se ganhar, é preciso que saia o 5 mas não pode sair o 6. Qual é a probabilidade de se ganhar?

   Recorre ao programa Excel, escolhe o ficheiro *Problema 1* para simular a experiência descrita e responde às seguintes questões:

(a) Completa a seguinte tabela:

Número de experiências	Frequência relativa de ganhos	Frequência relativa de perdas	Total
50			
250			
500			
1000			
5000			

(b) Que conclusões podes tirar da análise do tabela anterior?

____

(c) Indica uma estimativa para a probabilidade pedida.

____

(d) Baseando-te na definição clássica de probabilidade, indica o valor exacto da probabilidade pedida.

____

(e) Compara os dois valores que indicaste nas alíneas anteriores e comenta.

____

____

3. Considera o seguinte problema:

Num certo jogo, lançam-se três dados equilibrados numerados de 1 a 6. Qual é a probabilidade das somas dos números das pintas ser igual ou superior a 14?

Recorre ao programa Excel, escolhe o ficheiro *Problema 2* para simular a experiência descrita e responde às seguintes questões:

(a) Completa a seguinte tabela:

Número de experiências	Frequência relativa de ganhos	Frequência relativa de perdas	Total
50			
250			
500			
1000			
5000			

(b) Que conclusões podes tirar da análise do tabela anterior?

____

(c) Indica uma estimativa para a probabilidade pedida.

____

(d) Baseando-te na definição clássica de probabilidade, indica o valor exacto da probabilidade pedida.

____

(e) Compara os dois valores que indicaste nas alíneas anteriores e comenta.

____

____

4. Em relação à questão 1. que te foi colocada, confirmas a opção escolhida?

☐ Sim ☐ Não

5. Sugere uma afirmação para a questão 1. que te pareça adequada.

____

____

Bibliografia

[1] Bartoszynski, R., Niewiadomska-Bugaj, M., *Probability and Statistical Inference* Wiley, NY., 1996.

[2] Capinski, Marek, Zastawniak, Tomasz, *Probability Through Problems*, Springer, New York, 1959.

[3] Chuaqui, Rolando, *Truth, Possibility and Probability*, North-Holland, New York, 1991.

[4] Chung, K. L., *Elementary Probability Theory with Stochastic Processes*, Springer, Berlin, 1974.

[5] Deheuvels, Paul, *La Probabilité, le Hasard et la Certitude*, PUF, New York, 1990.

[6] Dynkin, E. B., *Markov Processes*, Springer-Verlag, New York, 1965.

[7] Fine, Terrence L., *A Note of the Existence of Quantitative Probability*, Ann. Math. Statistic 42, pp. 1182-1186, 1971.

[8] Fine, Terrence L., *Theories of Probability, An examination of Foundations*, Academic Press, New York, 1973.

[9] Finetti, B. de, *Theory of Probability*, Willey, New York, 1974.

[10] Fisz, Marek, *Probability Theory and Mathematical Statistics*, Krieger Publishing, Florida, 1963.

[11] Galvão de Melo, F., *Probabilidades e Estatística. Conceitos e Métodos Fundamentais*,vol I, 2ª ed., Escolar Editora, Lisboa, 1993.

[12] Galvão de Melo, F., *Probabilidades e Estatística. Conceitos e Métodos Fundamentais*,vol II, 2ª ed., Escolar Editora, Lisboa, 1997.

[13] Gnedenko, B. V., *The theory of Probability*, Mir Publishers, Moscow, 1969.

[14] Gonçalves, E. e N. M. Lopes, *Probabilidades Princípios Teóricos*, Escolar Editora, Lisboa, 2000.

[15] Guzmán, M. de *Os perigos do computador no ensino da Matemática*, Actas de las jornadas sobre Enseñanza experimental de la Matemática en la Universidad, pp. 9-27, 1991.

[16] Guzmán, M. de *La Matematización de la Cultura*, Saber/Leer 16, pp. 12, 1988.

[17] Hald, Anders *A history of probability and statistics and their applications before 1750*, Wiley, New York, 1990.

[18] Hunt, Neville e Tyrrel Sidney *Learning Statistics on the web - Discuss*, Teaching Statistics, vol 22 nº 3, Spring, pp. 85-90, 2000.

[19] Isaac, Richard, *The Pleasures of Probability*, Springer, New York, 1995.

[20] Kolmogorov, A. N. *Basic Concepts of Probability Theory*, Chealsea, New York, 1956.

[21] Loeve, M., *Probability Theory*, Princeton, New Jersey, 1960.

[22] Mendes, Amélia M., *Números Complexos e o Teorema Fundamental da Álgebra, Parte II*, Tese de Mestrado, Universidade de Aveiro, 2000.

[23] Mises, R. von, Geiringer H., *Theories of Probability, An examination of Foundations*, Holden-Day, California, 1970.

[24] Murteira, Bento J., *Probabilidades e Estatística*, vol. I, 2ª ed., McGraw-Hill, Lisboa, 1990.

[25] Pestana, D. D. e S. F. Velosa, *Introdução à Probabilidade e à Estatística, Volume I*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2002.

[26] Pfeiffer, Paul E., *Probability for Aplications*, Springer-Verlag, New York, 1989.

[27] Polya, G., *Patterns of Plausible Inference*, Vol. II, Princeton Univ. Press, 1954.

[28] Ponte, João Pedro *O computador na Educação Matemática*, Cadernos de Educação e Matemática APM , Lisboa, 1991.

[29] Renyi, A., *Foundations of Probability*, Academic Press, New York, 1974.

[30] Romano, J.P. and A. F. Siegel, *Counterexamples in Probability and Statistics*, Wadsworth Brooks, Cole Advanced Books and Software, Montrey, 1986.

[31] Rudin, W., *Real and complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1987.

[32] Saraiva, M. J. *O computador na aprendizagem da geometria: uma experiência com alunos do 10º ano de escolariedade*, Quadrante nº 1, pp. 123-138, 1992.

[33] Stoyanov, J. M., *Counterexamples in Probability*, Mcmillan Ltd. Bangalore, New York, 1987.

[34] Sullivan, Joseph F., *Paternity Test at Issue in New Jersey Sex-Assault Case*, New York Times, New York, July 21, 1991.

[35] Székely, J. Gábor, *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1947.

[36] Toranzos, F. I. *Revista de la Faculdad de Ciencias Economicas*, Universidade Nacional de Cuyo, Mendoza, nº1, 1949.

[37] Vieira, J. D., Carvalho, M. P., Anjo, A. B., *Avaliação formativa - Uma experiência no 7º ano*, Quadrante nº1, pp. 149-161, 1992.

[38] Villegas, C., *On Qualitative Probability σ-Algebras*, Ann. Math. Statist. 35, pp. 1787-1796, 1964.

[39] Williams, D., *Weighting Odds. A course in Probability and Statistics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.