



**Universidade de  
Aveiro  
Ano 2015**

Departamento de Matemática

**Teresa de Jesus Costa  
Pereira Caracol Clain**

**A Matemática e o comércio em Portugal através das obras  
de três aritméticos do século XVI: Gaspar Nicolas, Ruy  
Mendes e Bento Fernandes**



**Universidade de  
Aveiro  
Ano 2015**

Departamento de Matemática

**Teresa de Jesus Costa  
Pereira Caracol Clain**

**A Matemática e o comércio em Portugal através das obras  
de três aritméticos do século XVI: Ruy Mendes, Gaspar  
Nicolas e Bento Fernandes**

Tese apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Matemática, realizada sob a coorientação científica dos Professores Doutor Helmuth Robert Malonek, Professor Catedrático do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro e Doutora Maryvonne Spiesser-Charrier, Professora Associada da Universidade Paul Sabatier, Toulouse.

Este trabalho teve apoio financeiro  
da FCT através de uma Bolsa de  
Doutoramento com referência  
SFRH/BD/66637/2009.

À memória do Professor Santos Guerreiro. Foi pela sua mão que dei os primeiros passos na História da Matemática.

## **o júri**

presidente

Professor Doutor Fernando Manuel dos Santos Ramos, Professor Catedrático da Universidade de Aveiro

Professora Doutora Elena Esther Ausejo Martínez, Professora Catedrática, Faculdade de Ciências, Universidade de Zaragoza, Espanha

Professor Doutor Helmuth Robert Malonek, Professor Catedrático, Universidade de Aveiro (orientador)

Professora Doutora Maryvonne Spiesser-Charrier, Professora Associada, Institut de Mathématique de Toulouse, Université Paul Sabatier, Toulouse, França (coorientadora)

Professor Doutor Jaime Maria Carvalho e Silva, Professor Associado da Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra

Professora Doutora Maria Fernanda Oliveira Gonçalves Estrada, Professora Associada Aposentada, Escola de Ciências, Universidade do Minho

Professor Doutor Henrique José Sampaio Soares de Sousa Leitão, Investigador Principal, Centro Universitário de História das Ciências e da Tecnologia, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa

Professor Doutor Carlos Manuel Correia de Sá, Professor Auxiliar Aposentado, Faculdade de Ciências, Universidade do Porto



## agradecimentos

Quero expressar a minha gratidão a todos os que me apoiaram na realização desta dissertação:

Os professores Helmuth Malonek e Maryvonne Spiesser, por orientarem este trabalho, pela confiança que depositaram em mim, pelos seus incentivos e apoios. A professora Maryvonne Spiesser respondeu às minhas questões e os seus comentários ajudaram-me a progredir na investigação. Sem o seu apoio teria sido difícil abordar algumas temáticas e obter grande parte da bibliografia apresentada. O professor Helmuth Malonek acompanhou o desenvolvimento do trabalho, apoiou-me na participação em seminários e congressos e ajudou-me a obter bibliografia. Para eles vai o meu reconhecimento.

O António Canas que se mostrou disponível para me apoiar, os seus comentários e sugestões foram muito úteis. Foi por intermédio do António que conheci o professor Marques de Almeida.

O professor Marques de Almeida pelas suas sugestões, recomendações e pela força que me deu para avançar com este estudo.

Os professores João Oliveira e Joaquim Romero da FEUC pelas sugestões bibliográficas para a Primeira Parte da dissertação.

Os professores Michel Guillemot, Carlos Sá e Fernanda Estrada pelo apoio dado em termos de materiais, pelas suas sugestões e pelas cartas de recomendação junto da FCT.

À Marie-Hélène Labarthe e ao Javier Docampo agradeço as cópias que me enviaram das suas teses.

À Maria do Céu Silva agradeço as sugestões e os materiais que me enviou.

Ao Henrique Leitão a sua disponibilidade em receber-me, as sugestões e as informações.

Ao António José, coordenador do Agrupamento de Exames de Guimarães, por me ter libertado da tarefa de classificadora na 1ª fase dos exames em 2014.

Aos colegas, aos amigos e à minha família pelas suas palavras encorajadoras.

Um agradecimento muito especial aos meus filhos, Alexandre e Constantino e ao meu marido Stéphane. Foi o Alexandre que me apresentou aos professores João Oliveira e Joaquim Romero da FEUC, me sugeriu alguns trabalhos em História da Economia e me atendeu nos problemas informáticos. O Constantino zelou pelo meu descanso. Com ele partilhei algumas ideias e discussões em temas da Matemática. O Stéphane caminhou comigo neste percurso que chega ao fim, ouviu as minhas «histórias» com muita paciência, deu-me muita força, amor e carinho. A eles agradeço de um modo especial.



## palavras-chave

Algoritmos, aritmética, baratas, câmbio, comércio, companhias, Fernandes, História da Matemática, ligas, Mendes, Nicolas, Portugal, problemas, século XVI.

## resumo

Esta dissertação tem como objetivo a divulgação de temas e de algoritmos presentes nos tratados de aritmética prática do século XVI. Pretendemos delinear a atuação dos seus autores face aos desafios do mundo mercantil envolvente. Sendo o nosso «ator principal» Ruy Mendes, esta escolha deve-se a dois motivos: entre os três autores é aquele que tem sido menos mencionado e estudado; os interesses de Mendes parecem-nos mais distantes do mundo mercantil. Assim, no desenrolar deste estudo apresentaremos a *Pratica* do ponto de vista da estrutura e organização, contemplando os seguintes pontos: uma Matemática básica; a Matemática «pour elle Mème»; uma Matemática para o comércio. Neste último ponto incluiremos as «regras locais» do comércio português: a regra de quarto e vintena e a regra da conta de Flandres. Para cada assunto é realizado um estudo comparativo com os dois tratados da mesma época: o *Tratado da Pratica d'Arismetica* de Gaspar Nicolas e o *Tratado da Arte d'Arismetica* de Bento Fernandes. Apesar de se tratar de autores já referidos por alguns historiadores, consideramos que não foram ainda estudados do ponto de vista do interesse intrínseco presente no conhecimento histórico da Matemática, bem como na sua atuação relativamente à divulgação do cálculo aritmético e do seu contributo para o desenvolvimento da Matemática através de problemas práticos.



**keywords**

Algorithms, alloys, arithmetic, barter, 16<sup>th</sup> century, change, commerce, compagnies, history of mathematics, Fernandes, Mendes, Nicolas, Portugal, problems

**abstract**

In this dissertation, we aim to present a study about the subjects and algorithms contained in the arithmetic treatise of the XVIth century highlighting the authors' posture face to the new economic challenges of the period. Following our main character Ruy Mendes, our choice derives from two major motivations: among the three authors, he is the less mentioned and studied; the interests of Mendes seem to be much distant from the merchant world. We present a *Pratica* from the point of view of the structure and organization addressing the following issues: a basic Mathematic, a Mathematic «par elle même»; a Mathematic for the trade. This last issue tackles the local and specific commercial rules of the Portuguese trade such as the «quarto e vintena» rule and the «Flandres account» rule. For each item, a comparative study is realized between the two major arithmetic treatises of the epoch: the *Tratado da Pratica d'Arismetica* of Gaspar Nicolas and the *Tratado da Arte d'Arismetica* of Bento Fernandes. Despite the authors have been yet studied in an historical perspective, we here propose a new approach based from the point of view of the mathematical history where we realise an analyse of the documents in the context of the arithmetic calculus disseminations and their contribution to Mathematics development.

# CONTEÚDO

Notas sobre as transcrições e traduções.....	6
--	---

<b>INTRODUÇÃO GERAL .....</b>	<b>7</b>
-------------------------------	----------

I. Definição do projeto .....	8
II. Método de investigação escolhido .....	11
III. Estado da questão tratada .....	12
IV. Razões que levaram à realização deste estudo.....	15

## PRIMEIRA PARTE

### OS AUTORES NO ENQUADRAMENTO SOCIOECONÓMICO DO SEU TEMPO

#### CAPÍTULO 1 – Sociedade, expansão e economia

I. Introdução .....	19
II. Situação geográfica de Portugal .....	20
III. Navegação e comércio: os pilares da aritmética mercantil em Portugal? .....	21
IV. O Império português e a expansão comercial.....	27

#### CAPÍTULO 2 – Instituições e personagens da teia comercial

I. Introdução .....	35
II. Estruturas e personagens: a Casa da Índia, a Casa dos Contos, as feitorias e os mercadores	
1. A Casa da Índia .....	36
2. A Casa dos Contos.....	44
3. As feitorias.....	46
4. Os mercadores .....	47
III. Os contactos com as cidades estrangeiras.....	56

## CAPÍTULO 3 – O desabrochar de uma aritmética comercial em Portugal

I.	Introdução.....	61
II.	O que nos dizem os aritméticos portugueses sobre as suas motivações.	
1.	Gaspar Nicolas .....	63
2.	Ruy Mendes.....	68
3.	Bento Fernandes .....	73

## SEGUNDA PARTE

### A *PRATICA D'ARISMETICA* DE RUY MENDES COMPARADA AOS TRATADOS DOS SEUS CONTEMPORÂNEOS, GASPAR NICOLAS E BENTO FERNANDES

#### CAPÍTULO 1 - Os temas da Matemática e a Matemática comercial

I.	Introdução .....	81
II.	A organização da <i>Pratica</i> : uma estrutura pensada para servir interesses comerciais? .....	82

#### CAPÍTULO 2 – A Matemática «pour elle même»

I.	Introdução .....	89
II.	As bases matemáticas necessárias: o cálculo aritmético	
1.	Os números.....	89
2.	As regras das operações básicas da aritmética .....	91
2.1.	Somar .....	92
2.2.	Demenuir.....	95
2.3.	Multiplicar.....	99
2.4.	Repartir segundo Ruy Mendes, Gaspar Nicolas e Bento Fernandes .....	104
2.5.	A aritmética dos números quebrados .....	107
III.	Os temas da Matemática	
1.	As progressões.....	112
2.	Raízes quadradas e raízes cúbicas .....	116
3.	Problemas com números .....	122
	Conclusão .....	135

## CAPÍTULO 3- A Matemática mercantil e as suas regras

I.	Introdução .....	137
II.	A Matemática para o comércio	
1.	A regra de três, regra de ouro fundamental .....	138
1.1.	A regra de três na <i>Pratica d'Arismetica</i> de Ruy Mendes .....	139
1.2.	A regra de três no <i>Tratado da Pratica d'Arismetyca</i> de Gaspar Nicolas .....	146
1.3.	A regra de três no <i>Tratado da arte d'Arismetica</i> de Bento Fernandes .....	150
2.	A regra de cinco, a regra sem nome e a regra de mudar na <i>Pratica</i> de Ruy Mendes	
2.1.	A regra de cinco.....	154
2.2.	A regra sem nome.....	155
2.3.	A regra de mudar .....	156
3.	As regras partilhadas com outros países	
3.1.	Regras de companhias .....	159
3.1.1.	As regras de companhias segundo Ruy Mendes .....	160
3.1.2.	O que nos dizem sobre «companhias» Gaspar Nicolas e Bento Fernandes	
3.1.2.1.	As regras de companhias no <i>Tratado da Pratica d'Arismetica</i> .....	172
3.1.2.2.	As regras de companhias no <i>Tratado da Arte de Arismetica</i> .....	176
3.2.	Regras de baratas .....	188
3.2.1.	As regras das baratas segundo Ruy Mendes.....	191
3.2.2.	Os <i>baratos</i> de Gaspar Nicolas .....	206
3.2.3.	As regras de baratas por Bento Fernandes.....	206
3.3.	Regras de câmbio.....	213
3.3.1.	A regra de câmbio miúdo .....	214
3.3.2.	A regra de câmbio real.....	216
3.4.	Regras da liga da prata e da liga do ouro.....	218
3.4.1.	As ligas da prata e do ouro segundo Ruy Mendes.....	221
3.4.2.	A liga de prata segundo Gaspar Nicolas.....	231
3.4.3.	As ligas da prata e do ouro segundo Bento Fernandes .....	233
4.	As regras específicas do comércio português.....	236
4.1.	Regra de quarto e vintena .....	237

4.1.1. A regra de quarto e vintena por Ruy Mendes.....	238
4.1.2. A regra de quarto e vintena segundo Gaspar Nicolas .....	241
4.1.3. A regra de quarto e vintena segundo Bento Fernandes .....	251
4.2.Regra da conta de Flandres .....	256
4.2.1. A regra da conta de Flandres por Ruy Mendes .....	257
4.2.2. A regra da conta de Flandres por Gaspar Nicolas .....	260
4.2.3. A regra da conta de Flandres por Bento Fernandes .....	262
Conclusão .....	281

## TERCEIRA PARTE

### AS FONTES

#### CAPÍTULO 1 – A herança

I. Introdução .....	287
II. O que nos dizem os aritméticos portugueses de Quinhentos acerca das suas fontes nacionais .....	289

#### CAPÍTULO 2 – Fontes explícitas e fontes implícitas

I. Introdução .....	291
II. As referências a Luca Pacioli por Gaspar Nicolas.....	292
III. A «influência» do <i>Sumario</i> de Juan Andrés na <i>Pratica</i> de Ruy Mendes .....	294
IV. A Geometria de Juan Ortega e de Gaspar Nicolas: um tema e uma fonte em comum? .....	303
Conclusão .....	310

<b>CONCLUSÃO GERAL E PERSPETIVAS .....</b>	<b>313</b>
--	------------

### ANEXOS

Anexo 1. Conteúdos do <i>Tratado da Pratica d'Arismetica</i> .....	321
Anexo 2. Tavoada da <i>Pratica d'Arismetica</i> .....	325
Anexo 3. Tavoadas do <i>Tratado da Arte de Arismetica</i> .....	333
Anexo 4. Prologo de Gaspar Nicolas .....	337

Anexo 5. Prologo de Ruy Mendes.....	339
Anexo 6. Prologo de Bento Fernandes .....	341
Anexo 7. Vocabulário matemático .....	345
Anexo 8. Tabelas (Quintal e Cruzado) .....	349
Anexo 9. Problemas de falsa posição simples de Ruy Mendes.....	351
Anexo 10. «Cristãos e mouros» de Bento Fernandes.....	357
Anexo 11. Publicação na <i>Revue d'Histoire des Mathématiques</i> da SMF .....	359
Anexo 12. Livros de aritmética do século XVI. Fontes portuguesas .....	399
<b>BIBLIOGRAFIA .....</b>	<b>i-viii</b>

## **Notas sobre transcrições e traduções**

As transcrições dos extratos dos tratados referidos no texto são feitas seguindo o texto original. Encontram-se entre aspas se vêm no interior do texto ou destacadas do corpo de texto, no caso das transcrições mais extensas.

As transcrições dos textos franceses encontram-se traduzidas no corpo de texto e na língua original em rodapé. Os textos em castelhano encontram-se na língua de origem.

## Introdução Geral

O nosso contacto com os assuntos relacionados com a aritmética mercantil em Portugal iniciou-se com o trabalho *Aritméticos portugueses dos séculos XVI e XVII* [Costa, 2009, pp.155-176], com especial destaque para alguns aspetos da obra de Gaspar Cardozo Sequeira, *Thesouro de Prudentes* [Sequeira, 1612] escrita em 1612. Não se tratando propriamente de um tratado de aritmética, esta obra contém uma secção dedicada àquela *Arte*, tendo sido um trabalho que gozou de grande popularidade, dado o elevado número de edições<sup>1</sup> que conheceu. Na mesma ocasião, interessou-nos conhecer os antecessores de Cardozo Sequeira com trabalhos produzidos na aritmética. Referimo-nos aos tratados escritos em Portugal nos séculos XVI: o *Tratado da Pratica d'Arismetica* [Nicolas, 1963] de Gaspar Nicolas, publicado pela primeira vez em 1519, a *Pratica d'Arismetica* [Mendes, 1540], de Ruy Mendes de 1540 e o *Tratado da arte de Arismetica* [Fernandes, 1555], de Bento Fernandes de 1555. Estas obras pertencem a uma família de aritméticas mercantis redigidas em vernáculo, que apareceram na Europa no fim da Idade Média e que, procuraram responder às necessidades do comércio, sob a influência das matemáticas árabes e usando um instrumento poderoso - os números indo-árabes. Estes tratados tiveram o seu berço na Itália, onde a partir do século XIV se começaram a produzir. Contudo, ganharam certas características locais, também presentes nos tratados portugueses, como veremos no Capítulo 3, secção 4, da Segunda Parte.

A presente introdução contém as linhas condutoras do estudo que nos propomos realizar e encontra-se dividida em quatro partes. Na primeira definimos o projeto, na segunda apresentamos o método de investigação escolhido, na terceira abordamos, em linhas gerais, o estado da questão tratada e na quarta expomos os motivos que levaram à escolha da temática abordada.

---

<sup>1</sup> O *Thesouro de Prudentes* de Gaspar Cardozo Sequeira teve uma primeira edição em 1612, seguindo-se outras no mesmo século e no século XVIII (anos das edições que são conhecidas: 1626, 1651, 1664, 1673, 1675, 1686, 1700, 1701, 1712).



## I. Definição do projeto

A herança italiana no domínio da aritmética mercantil parece dominante tendo em conta o número avultado de obras produzidas e a reclamada influência do *Liber abbaci* como fio condutor de uma linha temática que dominou a produção de obras em certos países da Europa. Esta influência é contudo discutível dado que, em trabalhos recentes, se mostraram alguns resultados que a contrariam. É o caso do trabalho apresentado por Jens Høyrup que desmistifica o papel central da obra de Fibonacci na produção dos tratados em aritmética mercantil na região Ibero-Provençal, destacando as fortes ligações às tradições da cultura matemática árabe não escolarizada presente na região Ibérica<sup>2</sup>. Maryvonne Spiesser considera que o *Liber abacci* marcou algumas gerações de aritméticas práticas italianas, ultrapassando as fronteiras da atual Itália, tendo sido um vetor fundamental na transmissão de problemas de origem muito antiga [Spiesser, 2003, p.17]. As vias de transmissão da aritmética na Europa é um tema que deixa algumas questões sem resposta. Sobre este assunto Paul Benoit tece algumas considerações a propósito das influências nas aritméticas escritas em França.

À certeza da via italiana juntam-se outras passagens através do Mediterrâneo, em particular por Espanha. As aritméticas do Midi em França, sejam escritas em francês ou em occitano, apresentam características que se encontram ausentes nos textos italianos.<sup>3</sup>

M. Spiesser evoca a influência dos tradutores e matemáticos judeus do sul de França e da Espanha na produção e difusão de textos. Entre os judeus destaca-se Abraham Bar Hiyya e Abraham Ibn Ezra. O primeiro assumiu uma dupla faceta, autor e tradutor de árabe ao hebreu e ao latim. Escreveu um livro de geometria para agrimensores e, pensa-se que viveu em Barcelona entre os anos 1133 e 1145 [Spiesser, 2003, p.17]. Abraham Ibn Ezra viveu nas Espanhas do século XII e viajou por algumas cidades da Europa. Considerado com uma

---

<sup>2</sup> Jens Høyrup, *Fibonacci-Protagonist or Witness? Who Taught Catholic Europe about Mediterranean Commercial Arithmetic?* (Paper presented at the workshop «Borders and Gates or Open Spaces? Knowledge Cultures in the Mediterranean During the 14 th and 15 th Centuries» (Universidad de Sevilla, 17-20 December 2010)

<sup>3</sup> Paul Benoit citado por Marie-Hélène Labarthe: «A la certitude de la voie italienne s'ajoutent d'autres passages à travers la Méditerranée, en particulier par l'Espagne. Les arithmétiques du Midi de la France, qu'elles soient en français ou en occitan, présentent des caractéristiques absentes dans les textes italiens» [Labarthe 2004, vol. I, p.35].

ampla cultura, dominava o árabe, o latim e o hebreu. Entre as suas obras encontram-se livros de aritmética, onde o autor usa o sistema decimal [Casas, 2011, pp.379-389].

Na Espanha medieval não é de subestimar o legado de uma cultura multifacetada que marcou a produção científica e projetou-se para fora da sua fronteira. A Espanha é ainda o berço de um tratado de aritmética mercantil, conhecido até ao presente como o mais antigo da Península Ibérica, escrito em castelhano e dado como *Manuscrito 46 da la Real Colegiata de San Isidoro de León*. O manuscrito foi estudado por Betsabé Caunedo del Potro e por Ricardo Córdoba de la Llave [Caunedo e Córdoba, 2000], não apresenta nome de autor e considera-se a possibilidade de ter sido escrito por um judeu, já que tem uma estrutura semelhante à adotada por Abraham Ibn Erza na sua obra *Os fundamentos do número* [Casas, 2011, p. 338].

Não será de estranhar que a cultura dos reinos vizinhos chegasse também a Portugal. Nos estudos realizados sobre a aritmética mercantil na Península Ibérica, a referência aos autores portugueses é tímida ou mesmo inexistente. Não se conhece qualquer tratado de aritmética anterior ao de Gaspar Nicolas, editado pela primeira vez no início do século XVI. Que matemática se fazia em Portugal até à edição da obra de Nicolas é uma dúvida que persiste.

Sabe-se que, comparativamente ao que ocorreu em Itália, a produção nacional de obras em aritmética mercantil foi mais escassa. Sobre as vivências nesta temática apenas podemos contar com o testemunho dos autores. Muitos documentos importantes teriam desaparecido com o terramoto de Lisboa em 1755, o que contribuiu para dificultar algumas pesquisas.

Contando com as primeiras obras de aritmética publicadas entre nós, esta dissertação centra-se numa questão principal: mostrar que temas da matemática estão presentes nos tratados de aritmética de Quinhentos, bem como, divulgar a atuação dos seus autores face aos desafios do mundo mercantil envolvente, dando-lhes o lugar que lhes é devido na historiografia da Matemática em Portugal. Para o efeito apresentamos alguns eixos sobre os quais desenvolveremos o nosso estudo:

- **Uma abordagem em torno de um enquadramento socioeconómico visando as questões seguintes:** Qual era o contexto económico, social e geográfico? Quem são os autores? Que nos dizem eles sobre si próprios e sobre as suas motivações? Qual é o público visado?
- **Uma abordagem global:** Qual é a organização das obras? Quais são os temas abordados?

- **Uma abordagem analítica:** Quais são os procedimentos matemáticos utilizados? Quais são as diferenças/semelhanças entre os procedimentos de cada autor?
- **Uma abordagem em torno da linguagem matemática:** Quais são os conceitos abordados? Qual é o vocabulário científico utilizado?
- **Uma abordagem ligada a características locais:** De que modo as temáticas expostas foram adaptadas à realidade portuguesa? Quais são as regras específicas no comércio português?
- **Uma abordagem ligada às fontes:** O que nos dizem os aritméticos portugueses de Quinhentos sobre as suas fontes?

Ainda que as três obras aqui em estudo pertençam ao mesmo corpus aritmético, distinguem-se por certas características mais ou menos marcantes que assentam no estilo de exposição e escrita, nos temas matemáticos que abordam, no vocabulário matemático utilizado, na metodologia associada à resolução dos problemas, na pertinência dos temas tratados relativamente à realidade económica portuguesa da época. Os objetivos dos três autores aparecem sob diferentes facetas. Por um lado mostram uma preocupação em desenvolver algoritmos eficazes para os problemas concretos com que se deparam os mercadores. Por outro lado, abordam temas da matemática que não estão diretamente ligados com a prática mercantil, como o são os problemas sobre *números*, tema este tão querido a Ruy Mendes.

Alguns estudiosos classificaram os problemas presentes nas aritméticas mercantis. Jean-Claude Martzloff estabeleceu três categorias: os problemas reais, os problemas pseudorreais e os problemas recreativos [Martzloff, 1988]. Para Johannes Tropfke existem duas categorias: os problemas da vida quotidiana e os problemas recreativos [Tropfke, 1980, p. 513]. M. Spiesser chama a atenção para um certo grau de arbitrariedade na escolha entre problemas pseudorreais e problemas recreativos [Spiesser, 2003, p.57]. Os tratados portugueses apresentam problemas que se enquadram nas categorias descritas. No caso da *Pratica* de Ruy Mendes, os problemas com temáticas mais ligadas à diversão não existem, o mesmo não se passa nos tratados de Gaspar Nicolas e de Bento Fernandes que nos relatam histórias, bastante caricaturais, na forma de problemas, como as heranças ou o confronto entre cristãos e mouros.

## II. Método de investigação escolhido

O nosso estudo centra-se na *Pratica d'Arismetica* de Ruy Mendes face aos tratados de Gaspar Nicolas e de Bento Fernandes. Partindo dos temas propostos pelo primeiro, procuramos mostrar semelhanças ou diferenças entre as abordagens dos três autores.

Esta dissertação é composta por três partes. Na primeira procuramos um enquadramento dos autores no ambiente socioeconómico da sua época. Esta primeira parte apresenta três capítulos. O primeiro começa por situar Portugal numa teia comercial de grande dimensão, sem esquecer os conhecidos progressos na navegação. O segundo capítulo centra-se no papel das personagens e instituições então criadas com o advento dos descobrimentos. No terceiro e último capítulo procuramos respostas, na forma de motivações, que tivessem levado os aritméticos portugueses de Quinhentos a interagir com o mundo mercantil envolvente, de modo a responderem às exigências da prática mercantil, com modelos aritméticos que servissem estruturas e personagens. A segunda parte é dedicada a um estudo detalhado da *Pratica d'Arismetica* de Ruy Mendes, comparativamente aos tratados de Gaspar Nicolas e de Bento Fernandes. É composta por três capítulos, sendo o primeiro consagrado à organização da *Pratica* pondo em destaque uma matemática para o comércio de uma matemática «pour elle même». O segundo capítulo trata das bases do cálculo aritmético e dos temas mais ligados à matemática fora do mundo mercantil. Podemos dizer que o terceiro capítulo é o «coração» da tese dado que, trata das regras comerciais partilhadas por um conjunto de países com tradições na aritmética mercantil onde situamos Portugal. Um destaque especial é dado a duas regras que só encontrámos nos tratados portugueses: a regra de quarto e vintena e a regra da conta de Flandres. O conjunto dos três capítulos visa mostrar a importância da matemática comercial, ligada a problemas entendidos como reais, contudo apresentando, em certas situações, um cariz mais genérico e abstrato. As temáticas ligadas aos problemas denotam cenários ligados à vida económica portuguesa, como os próprios autores o referem e, sublinham a ideia da «Aritmética como descrição do real» [Almeida, 1994] que A. Marques de Almeida estudou.

Embora seja difícil determinar que obras matemáticas teriam inspirado os aritméticos portugueses para a redação dos seus tratados, na terceira e última parte, pretendemos estudar possíveis fontes subjacentes à aritmética portuguesa de Quinhentos, seguindo, por um lado, o discurso dos autores e, por outro algumas pistas dadas por Marques de Almeida [Almeida,

1994, v. I, p. 85]. Interessa-nos, sobretudo, estudar o «grau de parentesco» entre a *Pratica d'Arismetica* de Ruy Mendes e o *Sumario breve de la pratica de Aritmetica* de Juan Andrés, publicado em Valência em 1515.

A estrutura para cada capítulo é idêntica para as Segunda e Terceira partes. Começamos com uma introdução que visa um enquadramento histórico. De seguida apresentaremos um estudo detalhado das temáticas a abordar pelo «autor principal», Ruy Mendes, e um estudo comparativo entre os temas e métodos, com os outros dois autores, Gaspar Nicolas e Bento Fernandes. O nosso objetivo é procurar tópicos e objetivos comuns aos três autores, esclarecer, do ponto de vista matemático, os métodos utilizados para avaliar até que ponto existe ou não um grau de familiaridade entre os autores em estudo, em termos de temas, linguagem e metodologia. A conclusão dada no final de cada parte terá por base as ideias mais pertinentes associadas a cada tópico. A conclusão geral espelhará as ideias que dominam o estudo realizado nas três partes apresentadas.

### **III. Estado da questão tratada**

As grandes mudanças políticas na Europa no fim do século XVI são bem conhecidas e o lugar central que Portugal, neste século dos descobrimentos, conseguiu ocupar não deixa dúvidas que, em questões do comércio, bem como em questões da transferência do saber tecnológico de então (em particular na construção de navios, na cartografia e navegação, nas novas técnicas da impressão- para mencionar algumas das áreas mais relevantes), a posição periférica de Portugal no extremo ocidental da Europa não representou nenhuma barreira significativa nas relações com os outros países.

Os estudos sobre a História da Matemática em Portugal não são de modo algum recentes. Alguns estudiosos publicaram trabalhos nesta área. Por exemplo, Francisco Gomes Teixeira publicou a *História das Matemáticas em Portugal*, editada no ano de 1934. Na atualidade existem estudos que vieram completar alguns dos assuntos referidos por Gomes Teixeira, contudo, relativamente ao século XVI, onde o autor refere «Álvaro Tomás e Gaspar Nicolas, aritméticos» e onde são apenas mencionados os nomes de Gaspar Nicolas, Bento Fernandes, Álvaro Tomás, D. Francisco de Melo e, mais à frente, Pedro Nunes como cosmógrafo, apenas o último se tornou o mais conhecido através de vários estudos realizados quer a nível nacional, quer internacional.

Pedro Nunes gozando de um merecido reconhecimento a nível mundial, teve acesso a todas as fontes essenciais da matemática do seu tempo e deixou uma obra muito notável. Em contrapartida são quase desconhecidas fora do país as obras dos aritméticos portugueses e os seus eventuais contributos originais para a divulgação de conhecimentos e técnicas do cálculo aritmético, o que parece bastante estranho face aos numerosos estudos realizados sobre este assunto, desde há muitos anos, em França<sup>4</sup>, Itália<sup>5</sup>, Espanha<sup>6</sup> e Alemanha<sup>7</sup>.

Constata-se que, nas obras clássicas de referência em História da Matemática, não são mencionados os aritméticos portugueses. Assim o confirma a *História da Matemática* de Victor J. Katz, quando o autor se refere ao *Livro de álgebra* de Pedro Nunes.

Inclui dúzias de problemas mas, ao contrário da maioria dos outros textos de álgebra mencionados, a sua exposição é toda abstrata. Não se incluem problemas comerciais ou recreativos [Katz, 2010, pp. 429-448].

Katz não faz qualquer referência às aritméticas quinhentistas de Gaspar Nicolas, Ruy Mendes e Bento Fernandes, que incluem problemas comerciais e recreativos. Também Julio Rey Pastor na sua obra *Los Matemáticos españoles del siglo XVI* [Rey Pastor, 1934, pp.38, 82-89] na secção dedicada a *Los aritmeticos* faz referência ao matemático português Álvaro Tomás entre os aritméticos espanhóis tais como Gaspar Lax e Juan Ortega e outros. No caso de Álvaro Tomás, a sua obra *Liber de triplici motu* [Tomás, 1509], foi escrita em latim e contém algoritmos ligados ao que era costume ensinar-se nos ambientes universitários da época. Na secção dedicada aos algebristas, Rey Pastor dedica um capítulo a Pedro Nunes e refere-se a Álvaro Tomás como precursor de Nunes. Não há qualquer menção a Gaspar Nicolas, Ruy Mendes ou Bento Fernandes no grupo de aritméticos considerados por Rey Pastor.

---

<sup>4</sup> Para esta temática ver os trabalhos: [Lamassé, 2007], [Spiesser, 2003b], [Spiesser, 2006], [Spiesser, 2008a].

<sup>5</sup> Consultar [Franci, 1982].

<sup>6</sup> Ver os estudos realizados por [Massa, 2006], [Docampo, 2004], [Docampo, 2006].

<sup>7</sup> Consultar [Wußing, 1992].

Para o trabalho que pretendemos desenvolver, foram muito úteis os estudos já realizados por A. Marques de Almeida, *Aritmética como descrição do real* (1519-1679) [Almeida, 1994], na medida em que este autor nos retrata Gaspar Nicolas, Ruy Mendes e Bento Fernandes que, com a aritmetização do real, contribuíram para a *formação da mentalidade moderna em Portugal* [Almeida, 1994, vol.I , p.3]. Marques de Almeida deixou em aberto algumas questões para as quais procuramos contribuir com alguns resultados. Referimo-nos a possíveis fontes<sup>8</sup> e influências na aritmética portuguesa de Quinhentos que trataremos na Terceira Parte desta dissertação, bem como uma análise dos procedimentos matemáticos utilizados, a tratar na Segunda Parte.

Outros estudos foram realizados sobre algumas temáticas presentes nos tratados de aritmética portuguesa de Quinhentos. É o caso do trabalho *The algebraic content of Bento Fernandes's Tratado da arte de arismetica* (1555) de Maria do Céu Silva [Silva, 2008], bem como *Notas complementares sobre a biografia de Bento Fernandes e sobre o Tratado da arte de arismetica* [Silva, 2011, pp. 503-509]. Sobre o primeiro estudo, a autora mostra que Bento Fernandes não refere o *Summa* de Pacioli e que as suas fontes têm outra origem que não a «clássica» via italiana.

Como já o referimos, o nosso estudo centra-se na aritmética de Ruy Mendes, tendo também como cenário, as aritméticas de Gaspar Nicolas e Bento Fernandes, explorando as várias vertentes ligadas aos seus interesses ao nível da matemática calculatória, algorítmica e comercial, não descurando temas que, aparentemente, nada têm a ver com os aspetos comerciais. O grande poder associado aos algoritmos das operações básicas e da consolidação da sua prática através de problemas diversos, no sentido de um bom domínio para quem os utiliza, é uma vertente de uma importância didático-pedagógica crucial e está presente nos tratados e nas preocupações de bem ensinar dos seus autores.

Pretendemos repor os aritméticos portugueses de Quinhentos no contexto que lhe é devido nos circuitos das aritméticas mercantis europeias e contribuir para um melhor conhecimento dos nossos autores e das suas obras, numa época caracterizada pelo desenvolvimento ao nível não só comercial, mas ainda da náutica, onde é reconhecido o pioneirismo português.

---

<sup>8</sup> É conhecida a circulação de portugueses pelos grandes centros internacionais do saber no decurso do século XV, não é de negligenciar a presença de mercadores estrangeiros em Portugal e os laços de união entre os reinos ibéricos. Será então de prever uma circulação de personagens e saberes.

Recorrendo ao que nos dizem os prólogos e as introduções aos assuntos abordados, podemos pensar que as atividades comerciais, tais como as viagens marítimas, também seriam preparadas. O mercador não devia agir sem um conhecimento prévio das situações, antes seria aconselhável apoiar-se num sistema que lhe desse garantias de fazer negócios com benefícios e de forma honesta. Nas práticas comerciais era recomendado o conhecimento e rigor e, os nossos aritméticos trabalharam no sentido de dotar o mercador nacional com as ferramentas necessárias para uma prática correta e «sem enganar», como muitas vezes o referem nas suas obras.

Os algoritmos apresentados, embora na forma de simples operações básicas, são a base de uma prática indispensável àqueles que se movimentavam na teia comercial. Bento Fernandes mencionou, em alguns extratos da sua obra, a ignorância dos mercadores nacionais face aos italianos e flamengos. Ora este facto, mostra-o conhecedor de uma realidade e levou-o a compor um tratado com base numa forte motivação: atribuir um estatuto aos mercadores nacionais que os tornasse conhecedores da sua arte, atuando com segurança e sabedoria.

#### **IV. Razões que levaram à realização deste estudo**

Este estudo foi motivado por razões pessoais e profissionais. No quadro pessoal, o gosto pelos temas da Matemática numa perspetiva histórica. A nossa atividade no âmbito da docência, da formação de docentes e dos estudos desenvolvidos no seio do Grupo de História da Matemática da Universidade de Aveiro, estão na base dos motivos profissionais que nos levaram à escolha do tema. Acreditamos que um conhecimento consistente da História da Matemática contribui para um enriquecimento das práticas pedagógicas e das metodologias ligadas ao ensino da Matemática e enriquece a formação cultural dos alunos, sendo este um objetivo essencial na Educação.

O tema que nos propomos estudar é muito abrangente em termos de práticas algorítmicas e calculatórias. Consultando as obras dos aritméticos portugueses do século XVI, facilmente se constata o grande poder associado aos algoritmos e à consolidação da sua prática através de problemas diversos. Esta vertente deverá fazer parte das práticas letivas, uma vez que os



alunos desde muito cedo devem adquirir bons hábitos na prática algorítmica. Uma abordagem histórica é neste caso particularmente enriquecedora. Para além do interesse intrínseco presente no conhecimento histórico da Matemática, o estudo de textos constitui uma importante base de trabalho para fundamentar os métodos de cálculo regularmente utilizados no ensino.

Esta dissertação remete-nos para a divulgação de algoritmos presentes nos tratados de aritmética de Quinhentos. Torna-se ainda pertinente averiguar a atuação dos seus autores face aos desafios do mundo mercantil envolvente. Sendo o nosso «ator principal» Ruy Mendes, esta escolha deve-se a dois motivos: entre os três autores é aquele que tem sido menos mencionado e estudado; os interesses de Mendes parecem-nos mais distantes do mundo mercantil. Assim, no desenrolar deste estudo apresentaremos a *Pratica* do ponto de vista da estrutura e organização, contemplando os seguintes pontos: uma Matemática básica; a Matemática «pour elle même»; uma Matemática para o comércio. Neste último ponto incluiremos as «regras locais» do comércio português: a regra de quarto e vintena e a regra da conta de Flandres. Para cada assunto é realizado um estudo comparativo com os dois tratados da mesma época: o *Tratado da Pratica d'Arismetica* de Gaspar Nicolas e o *Tratado da Arte de Arismetica* de Bento Fernandes. Apesar de se tratar de autores já referidos por alguns historiadores, consideramos que não foram ainda estudados do ponto de vista do interesse intrínseco presente no conhecimento histórico da Matemática, bem como na sua atuação relativamente à divulgação do cálculo aritmético e do seu contributo para o desenvolvimento da Matemática através de problemas práticos.

## **PRIMEIRA PARTE**

### **OS AUTORES NO ENQUADRAMENTO SOCIOECONÓMICO DO SEU TEMPO**



## Capítulo 1 - Sociedade, expansão e economia

*Povo de camponeses e de pastores, que vende para o estrangeiro os seus azeites e os seus vinhos, os seus coiros e a sua grande tinturaria, a sua cortiça e os seus frutos. Mas povo também das gentes da ribeira do mar, que se consagram à produção de sal e à pesca, ao tráfico marítimo até Bruges e Londres, duma banda, até ao Mediterrâneo levantino, doutra banda [Godinho, 1963-1971, vol.I, pp. 45,46].*

---

### I. Introdução

Desde a sua «existência» que Portugal se depara com uma realidade, estar entre os reinos vizinhos e o mar. As conflitualidades constantes com os reinos de Espanha motivaram uma viragem em direção ao oceano em vez da busca de caminhos de ligação à Europa.

Já no século XIII, Lisboa e Porto eram importantes pontos comerciais e, ao mesmo tempo, cidades de fácil acesso marítimo. A posição estratégica destas cidades levou à criação de ligações regulares com a Europa do Norte e com o Mediterrâneo Ocidental [Ramos, 2010, p. 173]. À política do reino não foi indiferente a importância do mar em dois fatores essenciais: as questões de defesa e o comércio.

A conquista do oceano não era uma tarefa fácil contudo, como afirma Henrique Leitão, «a expansão portuguesa caracterizou-se, numa fase inicial, por uma clara superioridade técnica relativamente às outras nações marítimas [Leitão, 2009, p. 10]» e teve um reconhecido impacto por toda a Europa. A este respeito afirmou Luís de Albuquerque,

O século XVI irá ser para o Europeu uma época de enriquecimento cultural e de um rasgar de horizontes, em grande parte devido às viagens marítimas que culminaram com a chegada de Colombo às Antilhas, de Vasco da Gama à Índia e de Pedro Álvares Cabral ao Brasil [Albuquerque, 1987, p. 1].

As navegações de Quinhentos tiveram por base fortes motivações comerciais. Até que ponto o aspeto comercial vai servir de motor para o desenvolvimento de modelos aritméticos que sirvam os mercadores e confirmem ao mercador nacional «habilitações» que o coloquem

numa posição de vantagem na teia do comércio internacional? Vamos procurar respostas para esta questão nas aritméticas mercantis portuguesas do século XVI.

Este capítulo tem como objetivo o enquadramento de Gaspar Nicolas, Ruy Mendes e Bento Fernandes, como homens e autores dessas obras, no ambiente socioeconómico do seu tempo. Para o efeito não podemos deixar de referir a «sua época», também um tempo de expansão com impacto geográfico, económico e científico em Portugal e na Europa.

## II. A situação geográfica de Portugal



Fig. 1 Mapa de Portugal do século XVI<sup>9</sup>

Na imagem fica-nos um retângulo, atualmente com uma superfície de 96631 Km<sup>2</sup>, «à beira do Atlântico». É também o país europeu com fronteiras mais antigas a quem Camões chamou a «ocidental praia Lusitana». A história da fundação de Portugal remonta ao ano de 1143. As suas fronteiras continentais encontram-se praticamente inalteradas desde o século XIII.

Já no século XIV os portugueses frequentavam a rota do comércio que ligava o Mediterrâneo ao norte da Europa, devido, em parte, a uma posição geográfica bastante favorável. Ao nível geográfico Portugal apresentava condições para se lançar à conquista do oceano. Alguns historiadores consideram que o oceano estava mais próximo do que os grandes centros da Europa [Ramos, 2010]. Os portugueses ficariam célebres pela descoberta dos caminhos marítimos para a Índia, Brasil, China e Japão, rasgando os limites do mundo

<sup>9</sup> Mapa de Portugal do século XVI de Fernando Álvares Seco [Garcia, 2010, pp. 363-368].

e permitindo um encontro de culturas e, como é hábito dizer-se, a ação portuguesa caracterizou-se por dar «novos mundos ao mundo».

### **III. A navegação e o comércio: os pilares da aritmética mercantil em Portugal?**

Os navegadores portugueses souberam tirar partido do «convite» feito pelo mar para se lançarem em viagens e negócios muito para além das atividades descritas na breve introdução que inicia o presente capítulo. Vitorino Magalhães Godinho [Godinho, 1963-1971, v.I, p. 46] refere uma população de um milhão e quatrocentos mil habitantes<sup>10</sup> num país que edificou um império à escala do globo. O seu trabalho dá-nos uma panorâmica interessante, tal como o título indica, do impacto dos descobrimentos na economia mundial.

Em «Navegação, comércio e relações políticas: os portugueses no Mediterrâneo ocidental (1385-1466)» [Barata, 1998], Filipe Themudo Barata foca alguns aspetos importantes sobre a presença portuguesa no mundo, nomeadamente no mundo dos negócios internacionais. Segundo este autor, há fontes que situam os portugueses em vários pontos da Europa já a partir do século XII. É o caso de Bruges, onde há registos da presença portuguesa em 1184. Nesta cidade viria a ser fundada a primeira feitoria. Sabe-se que em 1203 há portugueses que obtêm autorização para aí se estabelecerem. Também no Norte de França, alguns portugueses, acompanhados por mercadores de outras nações, frequentaram, em inícios do século XII, as feiras de Lille [Barata, 1998, p. 185]. Os estudos realizados por Vitorino Magalhães Godinho e por Filipe Themudo Barata [Barata, 1998; Godinho, 1963-1971, vol. I] revelam a presença portuguesa nos circuitos comerciais do Mediterrâneo no século XIII, ainda que de forma limitada dada a hegemonia dos mercadores italianos. Como estudioso da região mediterrânica, Filipe Barata [Barata, 1998, p. 185-191] destaca alguns pontos que consideramos mostrarem um envolvimento comercial de mercadores nacionais, no porto de Marselha e em Montpellier e ainda, na feira de Outubro na Tessalónica (Grécia). A presença de mercadores nacionais foi mais significativa na região mediterrânica nos finais do século XIV e início do século XV, sendo os navios portugueses habituais frequentadores dos portos italianos, em especial Génova e Porto Pisano. As embarcações faziam

---

<sup>10</sup> Número de habitantes relativo ao ano de 1527.

essencialmente fretes e, eram os mercadores italianos que controlavam os preços desse serviço, por faltar capacidade económica e financeira aos mercadores e proprietários dos navios nacionais, segundo refere Filipe Themudo Barata [Barata, 1998, pp. 279, 408-411]. O mesmo autor salienta que o reino português multiplicou a sua oferta de transporte numa altura em que se começou a desenhar a decadência de vastas regiões no Mediterrâneo Ocidental. E que a falência das grandes casas bancárias catalãs forneceu a grande oportunidade aos nossos mercadores para passarem a controlar uma parte substancial do comércio do Mediterrâneo, em especial, aquele que realizavam com as praças de Barcelona e Valência.

Podemos constatar que os portugueses eram frequentadores da Rota do Levante, contudo, a sua presença em cidades mediterrânicas não se confinou unicamente aos interesses comerciais mas ainda a missões diplomáticas e aos estudos como o relatam Virgínia Rau, Luís de Matos e de Joaquim Veríssimo Serrão [Matos, 1950; Rau, 1972; Serrão, 1954].

No caso do comércio externo, qualquer mercador que se quisesse movimentar nos circuitos comerciais europeus tinha que estar a par dos sistemas monetários em cada região, bem como das equivalências entre moedas. Também das equivalências entre as unidades de «pesos» e «medidas». As «aritméticas» escritas em Portugal no século XVI são ricas em problemas relacionados com o sistema de câmbio e com a utilização das unidades de «pesos» e «medidas», mencionando uma falta de uniformização neste sector, o que era uma característica da época. Sobre este assunto, cada autor refletiu, na sua obra, a sua experiência no contexto comercial. Por exemplo, Gaspar Nicolas diz que «...muytos sam arysmeticos e has vezes se embaraçam na conta das mytas e estes digo que sam alguñs portugueses que nam hos flamenguos [Nicolas, 1963, f. 35v]». O autor refere-se às dificuldades sentidas pelos portugueses na manipulação da moeda na feitoria da Flandres e, ao mesmo tempo, reforça a importância de estabelecer uma regra – a regra da conta de Flandres<sup>11</sup> – como resposta às dúvidas dos mercadores nacionais. Passados trinta e cinco anos, as dúvidas persistiam. Bento Fernandes reforçou as dificuldades dos mercadores quando afirmou no *Tratado da Arte de Arismetica*,

---

<sup>11</sup> A regra da conta de Flandres encontra-se desenvolvida no Capítulo 3, secção 4.2. da Segunda Parte.

Porque algũs mercadores sobre ho tomar ou dar dinheiro ha câbio ã Inves pera pagar ã Medina del Câpo ou ã outra qualquer feira d’Espanha ou tomado ou dâdo em Espanha pera lhe responderẽ ã Inves nã sã tam esportos nẽ esprimẽtados nesta cõta como ho sã os framẽgos e italianos que andã mais corrẽtes neste contratar. E por ser cousa muy necessaria aos tratãtes e mercadores farei aqui declaração pera saber a maneira que se ha de ter no fazer de semelhãtes cõtas e no dar e tomar do dinheiro que nã sejais enganados e para melhor ãtenderdes vos darei aqui hũa rezã [Fernandes, 1555, f. 41].

Sabe-se que, no caso de Fernandes, a ligação ao mundo dos negócios internacionais assume uma importância a destacar. O autor tem consciência da falta de experiência de alguns mercadores face aos seus concorrentes no negócio do câmbio. A regra que pretende expor<sup>12</sup> vem como resposta a uma necessidade de colocar os mercadores nacionais numa posição de igualdade com os mercadores flamengos e italianos.

Pensa-se que as transações referidas nos livros de aritmética de Quinhentos não reportavam somente situações presentes mas também passadas. Nestas obras são referidos os produtos comercializados – o açúcar, os panos, as especiarias, o azeite, entre outros – assim como eventuais praças estrangeiras onde se realizavam os negócios, como Medina del Campo e Antuérpia. Filipe Themudo Barata considera que os cidadãos ligados ao comércio internacional foram os grandes responsáveis pela viragem marítima e comercial de Portugal a partir dos finais do século XIV. Estes grupos estão na origem da expansão portuguesa [Barata, 1998, p. 215]. O mesmo autor refere as ligações existentes entre mercadores portugueses e os mercadores de sociedades e casas comerciais estrangeiras que, viriam a induzir alguma solidez nos negócios dos mercadores do reino.

Era hábito os mercadores contraírem empréstimos para negociar e celebrarem contratos de seguros para navios e mercadorias. A prática de impostos a mercadores nacionais e internacionais era corrente. A legislação e as instituições então existentes mostram a importância que o comércio viria a ter na economia do reino. Themudo Barata analisa ainda o aparecimento de sociedades ou companhias comerciais, mais típicas no século XVII e seguintes [Barata, 1998, p. 239]. No entanto, registaram-se já algumas companhias no século XV. É o caso da Companhia de Lagos que funcionou entre 1440-50. As companhias tinham negócios diversos, tais como, peixe, cortiça, coral. A definição de «companhia» está assente

---

<sup>12</sup> Referimo-nos à regra da conta de Flandres.



numa associação de homens com vista a obter lucros. Que responsabilidade podemos associar às «regras de companhias», presentes nos tratados portugueses de aritmética, na formação destas sociedades? Podemos afirmar que «as companhias» eram populares nos tratados nacionais, dada a importância de se saber distribuir os lucros entre os intervenientes num negócio, o que nos leva a crer na sua vasta utilização entre os mercadores, incluindo mesmo situações que ilustram diferentes partes de investimento no negócio, seguidas da partilha de lucros, o que pode conduzir a operações mais complexas. Bento Fernandes enunciou o princípio básico da regra de companhias, tão usual entre «tratantes» e «mercadores», do ponto de vista da distribuição dos «ganhos». Nas suas palavras está implícita uma motivação para abordar este tema na sua obra.

A regra de cõpanhias se chama assi por rezã dos cõtratos e companhias que tratãtes e mercadores fazẽ hũs cõ outros de mercadorias ou dinheiro que metem em algũs cõtratos e parcerias. E depois de acabada a parceria e cõpanhia querem saber ho que tem ganhado\ e repartido per todos ho que vira a cada hũ do dito ganho a segũdo ho que cada hũ mete na dita cõpanhia. E pera ho melhor etẽderdes vos darei aqui ãexẽpro [Fernandes, 1555, f. 41].

Embora as regras de companhia aparecessem já em tratados italianos do século XV, no caso português, podem-nos conduzir a uma forma de organização resultante da intervenção na vida económica nacional. Dados os riscos e os elevados investimentos nas viagens marítimas, seria natural a associação dos envolvidos, no transporte de mercadorias, no equipamento, na manutenção e construção dos navios. Filipe Themudo Barata refere um exemplo: no início da primeira navegação às costas africanas a sul das Canárias havia regras a respeitar. Uma delas implicava a realização de uma sociedade com o Infante D. Henrique. Este armaria a caravela (presume-se que além do navio, equipava-o incluindo a tripulação), enquanto o interessado entrava no negócio com as mercadorias. A partilha de lucros, seria dividir ao meio tudo o que viesse daqueles lugares, correndo o risco, segundo parece, por conta do Infante [Barata, 1998, p. 263]. Este exemplo é interessante na medida em que, reforça a ideia de que as regras de companhia constituíam uma situação de modelação matemática presente na vida económica portuguesa à semelhança do que acontecia com a regra de quarto e vintena, então utilizada nas grandes instituições económicas e financeiras nacionais.

Outra situação corrente no comércio ligava-se ao empréstimo de dinheiro. Em muitas ocasiões, os mercadores nacionais viram-se obrigados a recorrer ao crédito como meio de assegurar a sua atividade de investidores. Eram bem conhecidos os empréstimos a juros e o negócio dos câmbios. São assuntos que ocupam um lugar de destaque nas «aritméticas» quinhentistas portuguesas o que, viria a motivar a sua vulgarização nos meios comerciais, dada a importância de conseguir bons negócios. Na realidade, mesmo sem uma estrutura física com o nome de «banco», as transações de capitais assumiram um papel de destaque no mundo dos negócios, sendo necessário um bom domínio de toda a aritmética inerente às operações para «não ser enganado nem ficar com a fama de enganar os outros». Martins Paulo<sup>13</sup> refere uma notícia sobre o que se pode considerar as primeiras transações bancárias em Portugal: Rafael Vivas, grande comerciante oriundo da zona do Levante ibérico, operava em Portugal já em 1465 e é referido num contrato de cedência de câmbios feita por D. Afonso V a D. Afonso de Vasconcelos, senhor de Penela, em 10 de Julho de 1465. Podemos considerar que emergia uma atividade bancária, associada a necessidades cambiais, a pagamentos no local ou à distância, que advinha da circulação de mercadorias. Do movimento de capitais provinham, naturalmente, lucros que, em muitos casos, seriam geridos tendo em conta as limitações impostas pela condenação religiosa da usura.

O facto de não existirem bancos, não impedia um conjunto de operações que configuravam uma atividade própria das instituições bancárias. Apesar da proibição da usura, os empréstimos a juros entre particulares eram uma prática corrente. Os mercadores recorriam com frequência e empréstimos. Há mesmo exemplos disso, para além do que nos é relatado nos livros de aritmética. Uma grande parte dos negócios dos séculos XIV e XV envolviam problemas cambiais e monetários, daí a grande referência a problemas deste tipo pelos nossos aritméticos. Por exemplo Ruy Mendes dedica um capítulo da sua obra ao «câmbio real» que, tal como o próprio define é

...huũ cambo de moeda que se faz de hũa cidade pera outra ou de hũ reyno pera outro  
mediante hũa letra de cambo ho qual se costuma de fazer antre mercadores e outras

---

<sup>13</sup> Martins Paulo, *O Primeiro Banco Fundado em Portugal: Uma Perspectiva Histórica* [Internet]. Version 1. Estudos de Gestão. (<http://estudosdegestao.wordpress.com/article/o-primeiro-banco-fundado-em-portugal-3izcsg4rn0awp-6/>) (Consultado em 17 de Março de 2011).

muytas pessoas e esto assi sabido digo pera decraraçam da dita regra...[Mendes, 1540, f. 97].

Das suas palavras ficamos a saber o que é o «câmbio real» e quem o pratica: mercadores e outros. Os problemas que propõe conduzem-nos a operações financeiras entre Portugal e Castela. Bento Fernandes alargou a zona de «câmbio» a Antuérpia e a algumas cidades italianas como Florença e Veneza.

Filipe Themudo Barata [Barata, 1998, p. 347] considera que, o que distinguia os mercadores-banqueiros portugueses dos italianos era, em primeiro lugar, o volume dos depósitos aceites mas, acima de tudo, o facto de, em princípio, lhes estar vedada a atividade de cambistas, o que tornava a gestão de depósitos menos interessante em Portugal do que, por exemplo, na Flandres. Relembremos a regra da conta de Flandres bem presente nas aritméticas mercantis portuguesas, o que vem reforçar, mais uma vez o papel da modelação matemática no mundo dos negócios, à semelhança do que já referimos com outras regras. Esta regra assume particular destaque no tratado de Bento Fernandes, mercador do Porto com experiência internacional, numa teia comercial ligada ao banqueiro António Fonseca. Segundo Amândio Barros, «Fernandes faz parte de uma elite de comerciantes com nova mentalidade: negociantes organizados e influentes, produtores de ciência...» [Barros, 2013, p.51]. Os negócios nos reinos vizinhos referidos no *Tratado da Arte de Arismetica* não são mera ficção. O autor movimentou-se numa teia de mercadores influentes e cujos nomes figuram nas feiras de Medina del Campo [Vega, 2004, pp. 273-371]. Veremos no Capítulo 3, 4.2. da Segunda Parte, o tipo de problemas que elaborou a propósito das referidas feiras.

Os tratados portugueses de aritmética mercantil entraram em cena numa época marcada pela emancipação das línguas vernáculas relativamente ao latim, pela eclosão da imprensa e pela vulgarização do cálculo com os números indo-árabes, numa época de mudança e com necessidades de modelos que respondessem aos novos desafios ligados à grande dinâmica comercial. Ainda que os números indo-árabes dessem tímidos passos entre nós no decurso do século XV, eles ganharam estatuto em obras técnicas e na contabilidade pública durante o século XVI, embora com alguns recuos, como o assinala Vitorino Magalhães Godinho<sup>14</sup>.

---

<sup>14</sup> O autor refere o caso de «entrave» ao uso dos números indo-árabes ainda em 1633 quando os provedores da Fazenda de Lisboa mencionaram que «se não pode dar crédito ao caderno que veio das ditas despesas da Índia por virem em algarismo», exigindo que Goa remetesse os livros originais, segundo a norma tradicional dos Contos, ou seja, em numeração luso-romana e por extenso [Godinho, 1963-1971, vol. I, p. 31].

A dependência de um passado ligado ao uso da numeração luso-romana<sup>15</sup> foi dando origem a novos utensílios de cálculo, baseados nos algoritmos e modelos mercantis para os quais contribuíram os tratados de aritmética escritos em Quinhentos, também vetores de difusão de uma matemática baseada em modelos que foram pilares das vivências comerciais como o afirmam os seus autores.

#### **IV. O Imperio português e a expansão comercial**

Paul Teyssier no seu artigo *Cem anos gloriosos* [Teyssier, 1990, p. 9], marca a data de 21 de Agosto de 1415, a tomada de Ceuta por D. João I e ao mesmo tempo o início da expansão portuguesa. Uma figura tradicionalmente responsável pelos descobrimentos foi o filho daquele monarca, D. Henrique (1394-1460) de cognome o «Navegador».

Os navegadores eram já frequentadores do mar Mediterrâneo e de algumas cidades do norte de África, no decurso do século XIV. A partir de 1415, com a tomada de Ceuta, outros desafios se apresentavam. Inicialmente foi estabelecido o patamar de alcançar o Cabo Bojador, o que foi conseguido por Gil Eanes em 1434, após algumas tentativas falhadas [Teyssier, 1990, p. 11].

São apontadas, pelos historiadores várias motivações para as viagens marítimas, desde motivos militares, posse de territórios e razões comerciais. A expansão marítima portuguesa tornou-se também um vetor de aprendizagens e de experiências ligadas às lides da navegação. É reconhecido o pioneirismo português no domínio de novas técnicas e no aperfeiçoamento de instrumentos de navegação, como o mostrou António Canas nos estudos que realizou sobre a navegação astronómica em Portugal. São também conhecidas as questões de Pedro Nunes sobre a determinação da latitude pela observação do Sol a qualquer hora do dia e os obstáculos com que se deparou relativamente à formação de pilotos, sem que isso fosse factor impeditivo no sucesso das viagens marítimas [Canas, 2009, pp. 115-142]. Uma expansão marítima pensada, planeada e com sucesso é também referida por Henrique Leitão.

---

<sup>15</sup> Entenda-se por numeração luso-romana, os números romanos traçados em cursivo minúsculo de mistura com algumas letras do alfabeto. Por exemplo, i e j valem 1, b vale 5, X vale 10, R vale 40, l vale 50 e c vale a centena. O traço horizontal sobre os números mostrava a sua multiplicação por mil [Almeida, 1994, vol. I, p. 70].

A expansão marítima portuguesa entre o século XV e o XVI envolveu claramente a melhoria de muitos procedimentos técnicos e o aperfeiçoamento de muitos instrumentos. O sucesso das navegações desses séculos ficou a dever-se a muitos factores, mas certamente também ao número imenso de aperfeiçoamentos técnicos levados a cabo por marinheiros, pilotos e cosmógrafos, em áreas que foram da construção naval à cartografia, passando por inúmeros aspectos da marinharia, navegação e construção de instrumentos. Estes avanços num processo de contínuo apuramento tecnológico, de inovações sucessivas, foram o resultado de um esforço concertado, com um apreciável nível de organização. Como Nunes fez questão de sublinhar, os descobrimentos não foram feitos «indo a acertar» [Leitão, 2009, p. 10].

No nosso entender, também os grandes negócios associados à expansão não foram realizados «indo a acertar». Os tratados de aritmética são testemunho de uma preparação para o quotidiano do mercador nacional no sentido de «desbravar» os mercados internacionais. A expansão territorial foi também sinónimo de expansão comercial e de novas realidades sociais e naturais. Os tratados de aritmética de Quinhentos referem alguns pontos de negócio e tratam problemas ligados ao «Novo Mundo». São exemplo disso os problemas sobre o negócio de especiarias com as respetivas quebras na mercadoria devido às más condições das viagens. A juntar ao prejuízo sofrido, vinha o «peso» do imposto de quarto e vintena sobre mercadorias tantas vezes perdidas, como o afirma Gaspar Nicolas.

Aynda quero tirar quarto e vintena com sua quebra a segundo respondem as naos aqui huñas quebram .6. por .100. e assi ate .12. por .100. que he a mais alta quebra assi pera saberes aquella quebra de qualquer quantidade de pimenta que he necessario que saybas açerteza de quãtos quebra por .100. [Nicolas, 1963, f. 17 v].

A regra de quarto e vintena permitiu ao mercador saber «fazer as contas». Os problemas propostos visavam hipotéticos modelos que procuravam esclarecer as dúvidas sobre «quanto pagar» à instituição e qual a quantidade de produto a negociar.

Dado que o nosso trabalho é sobre a aritmética mercantil da época de Quinhentos, interessa-nos sobretudo referir as motivações comerciais da expansão portuguesa.

Como se pode constatar na historiografia portuguesa, os mercadores eram, em muitos casos, também exploradores<sup>16</sup>. Com a conquista da costa africana foram sendo construídos pontos estratégicos para o comércio, como o foi o forte de São Jorge da Mina, na costa do golfo da Guiné, mandado construir no reinado de D. João II<sup>17</sup>. No cerne desta fortaleza surgiu uma povoação que, recebeu o estatuto de cidade em 1486, sendo também um ponto importante do comércio de uma parte do ouro africano [Teyssier, 1990, p. 14]. A «descida» da costa ocidental africana continuou com o objetivo de ultrapassar o Cabo da Boa Esperança, feito realizado por Bartolomeu Dias e a sua armada entre 1487-1488. Ficou então a saber-se que era possível uma ligação marítima entre a Europa e a Ásia [Teyssier, 1990, p. 19]. Também por terra se realizavam viagens para se recolherem informações sobre novas civilizações e estabelecer contatos, que poderiam abrir novas portas ao comércio. Em finais do século XV, D. João II enviou ao Oriente, por via terrestre, Afonso de Paiva e Pêro da Covilhã. Estes dois homens partiram com a missão de conhecer as terras de Preste João, chefe de uma cristandade, com o qual o monarca português pretendia estabelecer relações de amizade [Teyssier, 1990, p. 15]. Pêro da Covilhã era já conhecido e considerado nos papéis de diplomacia e contactos na Europa. Eram já conhecidos os seus contactos com o rei de França, Luís XI, o duque de Borgonha e os Reis Católicos. Viajara também pela África do Norte, sendo especialista em matéria de comércio, possuindo, além de mais, o conhecimento da língua árabe o que iria facilitar os contactos no mundo do Islão [Teyssier, 1990, p. 15]. O início da viagem destes dois aventureiros portugueses deu-se a 27 de Maio de 1487, partindo de Santarém. Depois de passarem por Valência, Barcelona, Nápoles e Rodes, atravessaram o Mediterrâneo rumo a Alexandria. Viajaram até ao Cairo, Suez e Adém, onde chegaram no Verão de 1488. Adém era então um centro comercial de grande importância onde se efetuavam trocas e o escoamento de diversos produtos para o Mediterrâneo [Teyssier, 1990, p. 17]. Foi em Adém que os dois se separaram, partindo Afonso Paiva em direção à Etiópia e Pêro da Covilhã para a Índia, onde chegou rapidamente, dado que era fácil apanhar um navio no Mediterrâneo e atingir aquele território. Uma vez em território hindu, visita Calecute, Goa e Ormuz, onde recolheu informações importantes

---

<sup>16</sup> Com vista à exploração da costa africana, o rei D. Afonso V (com o cognome de *Africano*) assinou um contrato com um mercador de Lisboa, de nome Fernão Gomes, em 1469, dando-lhe o direito de navegar e de comerciar na costa africana, para lá da Serra Leoa. O mercador deveria descobrir cem léguas de costa por ano, durante cinco anos e, pagar ao rei uma renda anual de duzentos mil reais [Teyssier, 1990, p. 13].

<sup>17</sup> Este forte foi construído a partir de 1481 [Teyssier, 1990, p. 14].

sobre a navegação e o comércio no oceano Índico, o que abriu uma porta a novas perspectivas comerciais e ligações ao oriente [Teyssier, 1990, p. 17]. Pêro da Covilhã partiu de Ormuz em finais de 1489, rumo a Sofala<sup>18</sup>, na costa oriental da África e conhecida pelo comércio do ouro vindo do interior do continente africano.

A viagem de Pêro da Covilhã e Afonso de Paiva, mostra quanto eram ainda importantes as ligações terrestres que, com a conquista da passagem do Cabo da Boa Esperança passaram para outro plano, conquistando as grandes navegações uma posição de relevo no transporte e comércio de produtos do oriente que dificilmente chegariam ao ocidente por via terrestre, tendo em conta as condições de morosidade das viagens e as dificuldades em transportar grandes cargas por terra. Nos tratados de aritmética aparecem problemas de viagens que envolvem assuntos recreativos ou transporte de mercadorias em viagens longas, com respetiva perda de produtos. Aham-se os benefícios ou perdas para os mercadores e a quantia a «arrecadar» para o rei. A descoberta do caminho marítimo para a Índia deu nome a uma instituição – a Casa da Índia, onde eram cobrados impostos sobre as mercadorias do Oriente, tal como já referimos a propósito da regra de quarto e vintena.

Um factor determinante na expansão ultramarina foi a viagem marítima de Vasco da Gama à Índia<sup>19</sup>. Esta viagem realizou-se entre 1497-1499, já no reinado de D. Manuel I. Vasco da Gama foi escolhido pelo monarca português como capitão-mor de uma armada de quatro navios<sup>20</sup>, acumulando ainda funções militares e diplomáticas. Com passageiros das mais diversas origens<sup>21</sup>, a armada de Vasco da Gama contava com dois intérpretes: Fernão Martins e Martim Afonso<sup>22</sup>. Foi por intermédio de Fernão Martins que os contactos foram estabelecidos com os mercadores árabes, conhecidos como intervenientes no negócio das especiarias, do ouro, da prata, das pérolas e das pedras preciosas. Estes produtos são com frequência referidos nos livros de aritmética de Quinhentos, nos problemas ligados à regra de quarto e vintena da Casa da Índia.

---

<sup>18</sup> Sofala foi uma feitoria, fortaleza e povoação construída pelos portugueses na costa da atual província de Sofala em Moçambique.

<sup>19</sup> Entre os passageiros estava um homem de nome Álvaro Velho que elaborou um diário de bordo através do qual ficamos a conhecer os detalhes desta viagem [Teyssier, 1990, p. 21].

<sup>20</sup> Nau São Gabriel (comandada por Vasco da Gama), nau São Rafael (sob o comando de Paulo da Gama), caravela Bérrio (sob o comando de Nicolau Coelho), o navio de mantimentos (sob o comando de Gonçalo Nunes).

<sup>21</sup> Entre os passageiros encontravam-se religiosos, marinheiros, calafates, soldados e degredados [Teyssier, 1990, p. 21].

<sup>22</sup> Fernão Martins que sabia árabe e Martim Afonso vivera no Congo.

Aquando da primeira viagem à Índia, os navegadores nacionais permaneceram em Calecute três meses, tendo sido Vasco da Gama portador de uma carta de D. Manuel I que, foi entregue ao Samorim<sup>23</sup> na qual constava uma proposta de aliança tendo em vista o estabelecimento de relações comerciais com o reino português. Esta cidade era sem dúvida um ponto estratégico de muito interesse para os portugueses dado que, era aqui que vinham muitos mercadores árabes negociar as especiarias [Teyssier, 1990, p. 25]. A enorme influência dos mercadores muçulmanos na região não facilitou a vida aos portugueses expondo-os a um ambiente hostil na forma de confrontos. Estavam em causa interesses comerciais e uma forte concorrência que viria a desviar na direção de Lisboa o tráfico das especiarias, até então nas mãos dos mercadores árabes. Bento Fernandes não deixou de relatar os confrontos entre cristãos e mouros num problema que apresentou sobre o assunto e que se encontra transcrito no Anexo 10.

Aberta a passagem para o Oriente e devido ao ambiente febril das navegações, Lisboa converteu-se num porto marítimo rico e com uma atividade mercantil de dimensão internacional. Em Portugal estavam os marinheiros considerados mais audazes, experimentados e com maiores conhecimentos em náutica na época. Pensa-se que foi este ambiente que atraiu o genovês Cristóvão Colombo<sup>24</sup>. Na verdade os portugueses não estavam sós na corrida ao Oriente e as «rivalidades» com os reinos vizinhos eram conhecidas. Sabe-se que Colombo liderou uma frota que alcançou a América em 12 de Outubro de 1492, sob as ordens dos Reis Católicos contudo, o objetivo inicial era chegar à Índia na direção do oeste. Em vez disso Colombo descobriu as ilhas Caraíbas e mais tarde a costa do Golfo do México na América Central. Abria-se assim a porta à corrida pela descoberta de novos territórios entre os dois países ibéricos.

---

<sup>23</sup> Samorim significa senhor do mar e era um título usado pelo rajá de Calecute, principal porto da costa do Malabar (a costa do Malabar fica no sudoeste da Índia).

<sup>24</sup> Cristóvão Colombo (República de Génova, 1451 — Valladolid, 20 de Maio de 1506).





Fig. 2 As viagens de Colombo ao «Novo Mundo» - mapa dos territórios descobertos<sup>25</sup>

Na corrida à ocupação e exploração das novas terras descobertas, viria a surgir a necessidade de definir quais os territórios eram pertença de Espanha e de Portugal. O Tratado de Tordesilhas (1494) definiu uma «separação» entre as terras descobertas [Teyssier, 1990, pp. 19, 20]. A fronteira entre os territórios é o meridiano que passa 370 léguas a oeste do arquipélago de Cabo Verde, o que se traduziu por incluir como domínios portugueses não só toda a África como também a costa do Brasil, desde a embocadura do Amazonas até ao Rio Grande do Sul.<sup>26</sup>



Fig. 3 Meridiano designado no Tratado de Tordesilhas (Planisfério de Cantino de 1502)<sup>27</sup>

<sup>25</sup> (<http://fabiopestanaramos.blogspot.pt/2011/03/os-reis-catolicos-inquisicao-e-colombo.html>) (Consultado em 20 de Março de 2011)

<sup>26</sup> O Brasil será oficialmente descoberto em 1500.

<sup>27</sup> ([abcblogs.abc.es/espejo-de-navegantes/2014/04/19/los-mapas-autenticos-del-tratado-de-tordesilhas/](http://abcblogs.abc.es/espejo-de-navegantes/2014/04/19/los-mapas-autenticos-del-tratado-de-tordesilhas/)) (Consultado em 20 de Maio de 2014)

Aos novos territórios descobertos, nas viagens ibéricas, juntou-se o que viria a ser o Brasil<sup>28</sup>, numa viagem realizada por Pedro Alvares Cabral com destino à Índia para negociar. Nesta viagem o sucesso comercial foi conseguido nos reinos de Cochim e Cananor. Nestes territórios, os portugueses conseguiram estabelecer relações comerciais e também obter proveitos para a coroa ao transportar, na então reduzida frota, as especiarias - canela, gengibre e, principalmente, pimenta. Para além de a viagem ter sido proveitosa, as perspectivas sobre relações comerciais contínuas entre o Oriente e o Ocidente, passando por Lisboa, eram muito positivas [Teyssier, 1990, pp. 27-29].

A rotina da rota da Índia iniciada com a viagem de Vasco da Gama alterou as rotas comerciais das especiarias. Antes as mercadorias orientais eram adquiridas na Índia pelos muçulmanos, que as transportavam por mar através do Oceano Índico, do Mar Vermelho e do Golfo Pérsico, seguindo depois em caravanas até aos portos do Mediterrâneo Oriental. Os mercadores venezianos e genoveses eram intermediários, vendendo-as posteriormente em toda a Europa. As mercadorias atingiam assim preços elevados, devido a vários fatores, entre os quais o monopólio árabe-italiano. Os portugueses ao adquiri-las na origem garantiram preços mais baixos e ainda uma elevada margem de lucro o que viria a contribuir para a riqueza da nação e dos seus mercadores. Virou-se uma página na história da economia mundial, na qual Portugal foi um dos protagonistas. A expansão marítima atuou em dois sentidos: impulsionou o desenvolvimento do comércio de grande porte e o desenvolvimento científico. Houve uma aprendizagem do regime dos ventos, do cálculo da latitude a partir da observação do sol ao meio dia e dos contornos da costa ocidental africana [Ramos, 2010, p.210]. Os novos conhecimentos, aliados à nova visão do mundo e do homem, preconizada pelo espírito do Renascimento, ampliaram os horizontes europeus, motivando em pleno o investimento e desenvolvimento da expansão marítima. Surgiu então, um mercado mundial, baseado no capital gerado pelas atividades comerciais, que fortaleceu o Reino português e reforçou a sua posição no comércio europeu. No século XVI, Portugal e as Espanhas, como nações pioneiras prosseguiram as suas viagens por territórios na América, na África e na Ásia.

Ainda no decurso do século XVI, os portugueses chegaram à China e ao Japão. Pensa-se que foram os primeiros europeus naquelas paragens a chegar por via marítima, na sequência do interesse de D. Manuel I em estabelecer relações oficiais com a China. Somente

---

<sup>28</sup> Ilha de Vera Cruz.

em 1554 os portugueses são autorizados a fazer comércio na província de Cantão. O comércio na China é reforçado com a ocupação de Macau em 1557 [Teyssier, 1990, pp. 41,42]. As tentativas, nem sempre com êxito, de aproximação à China, levaram os portugueses a tentar o comércio com o Japão. A partir da data de permanência de nacionais em Macau, as trocas comerciais com o Japão intensificaram-se [Teyssier, 1990, p. 47]. Com objetivos largamente comerciais, os portugueses construíram uma rede comercial e um império que, já no século XVI, se estendia por três continentes: África, Ásia e América. Surgiu a necessidade de gerir e tirar proveito económico de um tão vasto domínio e dos novos produtos e iguarias tão apreciadas na Europa. Pela primeira vez na história, os portugueses encontravam-se «a braços» com um vasto império de negócios a gerir.

Podemos observar que a prosperidade dos negócios de grande porte em Portugal é da mesma época das aritméticas escritas por autores portugueses. Poder-se-á colocar a hipótese de que o comércio impôs a criação de modelos matemáticos aplicados a uma realidade económica que então emergia. Estamos de acordo com Marques de Almeida quando refere a «modelação aritmética»

...como sejam os cálculos dos impostos na Casa da Índia, (quarto e vintena), as associações de mercadores para a feitura de negócios (regras de companhias) e a confluência de várias formas de cabedal na prossecução de um dado negócio (regras de baratar) [Almeida, 1994, v. I, p. 255].

A modelação matemática espelhada nos tratados de Quinhentos foi concebida para as operações financeiras e comerciais, tais como as operações de conversão, de associação, de tributação, entre outras. Os modelos então criados, funcionaram no sentido de «trabalhar» cenários conducentes ao planeamento das atividades comerciais, procurando minimizar riscos e obter os ganhos desejados, como veremos com mais detalhe no Capítulo 3 da Segunda Parte.

## Capítulo 2 – Instituições e personagens da teia comercial

*Todo ho que nas ditas naos vier de partes fara ho dito guoarda mor llevar diretamente a casa da Jmdja pera nella paguarem hos direitos ordenados e se despachar segum<sup>do</sup> a mjnha ordenação he somem<sup>te</sup> poderão as ditas partes llevar as ditas naos per<sup>a</sup> sua casa ho fato de seu serujço he vestir he dormir pelo mar he mamtmem<sup>tos</sup> he a casa jra todo ho mais per<sup>a</sup> ser despachado he amtes de ho llevarem ho dito fato per<sup>a</sup> suas casas ser vis<sup>to</sup> na não pelos guordas he no quais per hum esprivão da casa que nelle am d'estar*  
[Neves, 2004, p. 541].

---

### I. Introdução

A expansão ultramarina deu início a uma revolução ao nível do grande comércio, com ela a procura de novas terras que trouxessem o ouro e a prata que viriam revitalizar as economias europeias, em crise no decurso do século XIV. Pela primeira vez na história, o mundo seria totalmente interligado. Portugal peça determinante nesta mudança, em parte, também devido ao desenvolvimento na construção de navios e nas técnicas de navegação. O destaque do nosso país não passou despercebido aos aritméticos de Quinhentos. Assim o referiu Bento Fernandes no prólogo do seu tratado.

E com esta se pode bem comparar a grandeza nobrecimento boa governança destes reynos de Portugal onde florece ho trato da mercancia e outros moores cōtratos e de mais calidade como sam os da Índia\ Mina\ e Guiné e outras muytas contratações e vay em tanto crescimento sua fama e grande poder que excede a todos os reynos do mundo  
[Fernandes, 1555, prologo].

O reino português viu-se a braços com um comércio intenso, sobretudo com o estabelecimento da Rota do Cabo que trouxe à Europa as especiarias a preços mais atraentes e converteu Lisboa num ponto de comércio muito intenso, onde, como refere Bento Fernandes, floresceu o trato de mercancia, fomentando o crescimento do reino e o seu reconhecimento a nível internacional.

Com o povoamento dos arquipélagos da Madeira e dos Açores também veio a exploração daqueles territórios e produtos muito apreciados. Da Madeira vinham os cereais, o açúcar, o vinho, o gado e os frutos. Dos Açores, para além do trigo e do gado, a urzela<sup>29</sup> e o pastel<sup>30</sup>. Da costa ocidental africana veio o ouro, o marfim e a malagueta. Para marcar a presença portuguesa nos pontos de comércio e facilitar a atividade comercial, foram criadas feitorias<sup>31</sup>. Na costa ocidental Africana surgem então, as feitorias de Arguim e da Mina.

Com o monopólio do comércio do Oriente apareceram novas estruturas comerciais e reforçaram-se algumas já existentes. Surgiram também as feitorias de Sofala, Moçambique, Ormuz, Diu, Cochim, Malaca e Macau. Os produtos comercializados nestes pontos eram a pimenta, o gengibre, a cânfora, os perfumes, o ébano, as pedras preciosas, as pérolas, o ouro e a prata, os panos de seda, o algodão e as porcelanas.

Um papel determinante no negócio das mercadorias do Oriente na Europa tiveram as feitorias portuguesas da Flandres. Na base da distribuição, armazenamento e comércio das especiarias para a Europa estava a Casa da Índia. Vejamos qual era o papel destas estruturas na teia comercial então criada.

## **II. Instituições e personagens: a Casa da Índia, a Casa dos Contos, as feitorias e os mercadores**

### **1. A Casa da Índia**

A Casa da Índia foi uma organização portuguesa criada por volta de 1503 em Lisboa para administrar os territórios portugueses além-mar, assim como todos os aspetos do comércio externo, navegação, desembarque e venda de mercadorias. Assegurava o monopólio régio da navegação e comércio do Império português desenvolvido na sequência dos descobrimentos do século XVI. Funcionava como feitoria, alfândega e arquivo central, tendo

---

<sup>29</sup> A urzela é uma planta que produz um corante de cor púrpura (ou azul violáceo) que antes da invenção das anilinas sintéticas atingia grande valor para tingir têxteis.

<sup>30</sup> Pastel é o nome comum da planta *Isatis tinctoria* e do extrato fermentado das suas folhas, usado como corante azul em tinturaria e pintura. Bento Fernandes apresenta problemas do comércio do pastel para o uso da regra de uma falsa posição, no fôlio 68 do seu tratado.

<sup>31</sup> As feitorias eram locais de comércio, incluindo armazéns para o depósito de mercadorias.

sido a mais importante instituição económica de Portugal na época. Entre 1503 e 1755 esteve sediada no Paço da Ribeira, em Lisboa (atual Praça do Comércio).

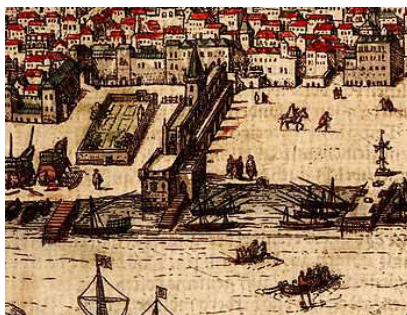


Fig. 4 O Paço da Ribeira onde a Casa da Índia estava localizada. Perpendicular ao rio Tejo, possuía uma torre central e um terraço frente ao rio (gravura de Braun e Hogenberg in *Civitates Orbis Terrarum*, 1572).

O que se conhece da Casa da Índia é através do Regimento publicado em 1947 por Damião Peres que se baseou, segundo o próprio afirma, em dois exemplares manuscritos, dos quais um guardado na Biblioteca da Marinha e o outro na Biblioteca Nacional de Portugal [Peres, 1947]. O regimento reparte-se por diferentes secções, desde os regulamentos promulgados em 1509, às alterações realizadas até 1530 e ainda os diplomas publicados entre 1575 e 1697. O documento descreve a composição do pessoal nas Casas das Índias, da Guiné e da Mina, salientando-se uma estrutura administrativa importante com diferentes categorias de funcionários.

Tabela 1 Composição do quadro de pessoal

<b>Estrutura Comum</b>	<b>Casa da Guiné e da Mina</b>	<b>Casa das Índias</b>
Feitor	Tesoureiro	Tesoureiro da especiaria
Contador	2 Escrivães do Tesoureiro	Tesoureiro do dinheiro
Juiz da balança	Almoxarife dos escravos	3 Escrivães do Tesoureiro
Comprador	Escrivão do Almoxarife	
Porteiro	6 Guardas das caravelas	
Cerca de 30 guardas		

O regimento divide-se em capítulos, que constituem os regimentos dos intervenientes nas operações comerciais. Assim, temos

Titullo do Regimento do Feittor dambas as Cazas de Guiné y da India – cap.1.º – 105.º

Titullo do Regimento do thezoureiro de Caza de Guiné – cap.106.º- 120.º

Titullo do Regimento dos escriptaens do Thezoureiro y feittoria da Caza da Mina – cap. 121.º- 127.º

Titullo do Regimento do Thezoureiro de Caza da Índia – cap. 128.º-139.º

Titullo do Regimento dos escriptaens da Feytoria y Thesouro da India – cap. 140.º- 146.º

Alvará per que se declara o que ham daver os goardas, dos descaminhos que acharem - cap. 147.º

Titullo do Regimento do Almoxarife dos Escravos - cap. 148.º- 150.º

Titullo do Regimento do escriptão do Almoxarife dos Escravos - cap. 151.º

Titullo do Regimento do porteiro da Caza de Guiné - cap. 152.º- 153.º

Titullo do Regimento do Comprador das Cazas de Guiné y India - cap. 154.º

Titullo do Regimento das goardas das caravellas da Mina dos outros tractos de Guiné - cap. 155.º

Titullo do Regimento do Juiz da Balança da Casa das Indias y da Mina - cap. 156.º

Através do regimento, podemos reconhecer algumas operações ligadas à instituição, como as compras, as vendas e outras operações comerciais, tais como, a contabilidade, a auditoria e o controlo interno, para além da sua estrutura em termos de pessoal. Tudo é fiscalizado, num sistema em que todos os funcionários trabalham no sentido de não haver lugar a fraudes e incumprimento de tarefas e deveres, sempre no sentido de bem servir os mercadores, tal como se pode constatar no capítulo 59 [Peres, 1947, p. 50].

CAP. 59.<sup>o</sup> — *Que sejam bem trautados os mercadores.*

ITEM. Hũa das principais couzas em que conciste nosso serviço hé que os mercadores y pessoas que trautam em nossas Caazas y em expecial na Caza da Índia sejam favorecidos em seus negocios, bem ouvidos, respondidos, y despachados de todos nossos officiaes y de modo que sempre possam hir contentes y do seu bem livrados, y com rezam y justissa, e que em nenhũa couza possam receber aggravo nem escandallo. Porem, antre todas as couzas, emcomendamos e mandamos ao ditto nosso Feyttor que sempre tenha nisso tal temperansa y resgoardo como assy se faça, y que sempre os mercadores y pessoas que nas dittas Cazas trautam y negocearem louvem o modo de que sam trautados y se nam escandalizem de couza algũa, porque conciste nisto muyto nosso serviço; e aquelles que mais grossamente trautarem sejam com mais favor trautados, porque assy hé muyta rezam; nem consentam que por nenhum official da Caza o contrario se faça, aos quaes emcomendamos y mandamos que nisto, como em todas outras couzas de seus officios, nos sirvão assy bem como delles confiamos.

O volume avultado de negócios ligados à Rota do Cabo inspirou a redação do documento onde tudo é considerado com pormenor, tal como se observa na apresentação do documento.

D. MANOEL, POR GRAÇA DE DEOS REY DE PORTUGAL E DOS ALGARVES DAQUEM E DALEM MAR EM AFRICA, SENHOR DE GUINÉ E DA CONQUISTA, NAVEGAÇÃO, COMERCIO DA ETHYOPIA, ARABIA, PÉRCIA E DA INDIA: A quantos esta nossa carta de Regimento, virem fazemos saber que conciderando nos quam grandes couzas sam os nossos trautos de Guiné e das Indias, a Deos louvores, y quão proveito delles se segue a nossos Regnos, e naturaes delles, y assi a outras muntas partes da Christandade, e como somos obrigados trabalhar, quanto em nos for, de as taes couzas serem sempre bem regidas e governadas y conservadas, e parecendo nos que por o negocio ser grande, e de munta importancia y occupação, se nam podia tudo isto bem fazer por hum Feittor, Thezoureiro, y trez Escrivaens, que hy havia, Ordenamos, sentindo assy por munto nosso serviço, y por darmos melhor ordem, forma y aviamento as couzas que se ham de fazer em cada trauto, y pera que hũa nam possam embaraçar nem fazer impedimento ás outras, e que houvesse hum Feittor dambas as dittas Cazas, y tres Thezoureiros, convem a saber, hum Thezoureiro da Especearia, e outro do dinheiro da venda della, y o outro da Caza de Guiné e da Minha (*sic*), y cinco Escrivãens, convem a saber, tres pera a Caza das Indias e dous pera a Caza da Mina y de Guiné, pera o qual Feittor, Thezoureiro y Escrivaens ordenamos y mandamos fazer os Regimentos adiente declarados, pera por elles cada hum saber o modo e maneira em que nos ditos officios nos ham e devem de servir, conformando nos com os Regimentos que the gora hy houve das couzas de Guiné como



athe agora se pratica nas dittas Cazas, despachos y couzas dellas, e acrescentando algũas, segundo o que nos bem pareceo. E aos sobredittos mandamos que os dittos Regimentos vejam muy bem, y leyam continuadamente, pera melhor entenderem y saberem como nos dittos officios nos ham de servir.

Fig 5 Regimento das Cazas das Índias e Mina<sup>32</sup> [Peres, 1947, p.3].

A Casa da Índia depressa se tornou uma instituição económica muito importante em Portugal. A formação de funcionários era uma tarefa que se impunha e mereceu mesmo algumas considerações de Pedro Nunes, na carta ao Cardeal D. Henrique, quando nas primeiras páginas do *Libro de Algebra* se referiu aos quarenta contadores da fazenda.

E ha porem em Italia algũs homens muy exercitados nesta arte (álgebra), porque em todallas cidades ha mestres salariados de conta em Arithmetica & Geometria, & se daeste partido poroposição. Por aqui vera V. A. quanta mais razão seria, que ouuesse esta doctrina nesta opulentissima cidade de Lixboa, onde tanto negocio ha desdo extremo oriente, & occidente, & ilhas do mar Oceano, & onde elRey nosso Señor tem corenta contadores de sua fazenda [Nunes, 2010, p.8].

Segundo Pedro Nunes não estava institucionalizada a figura do «mestre de aritmética» em Lisboa, à semelhança do que acontecia nas cidades italianas. Sabe-se que na ocasião em que esta carta foi escrita era já conhecida a primeira edição do tratado de Gaspar Nicolas sobre aritmética, geometria e «oposição». Se o próprio Nicolas era «mestre em aritmética» não o sabemos, no entanto, este autor refere na sua obra algumas das suas visitas à Casa da Índia e as questões que lhe foram colocadas da primeira vez que aí se deslocou: «Tanta era a pimêta que quebrou a .10. por .100. e ficaranme .3600. quintaes. Esta he ha primeira regra

---

<sup>32</sup> À antiga Casa de Ceuta, sucedeu nos fins do século XV ou nos princípios do século XVI a Casa da Guiné que depois se denominou da Mina e mais tarde da Índia, destinando-se às mercadorias da África e da Ásia. Teve regimento em 1495 e em 3 de Julho de 1509, acrescentado pela lei de 2 de Agosto de 1537. Pela provisão régia de 11 de Abril de 1519 foi designada para o despacho dos escravos trazidos de África e que, até aí, eram despachados na casa da sisa das herdades. Em 1592, 1593 ou 1594 (v. n.º IX) foi criado o Consulado, imposto que se destinava a fazer face às despesas com a defesa dos portos e contra os piratas. Este imposto que era cobrado em todas as alfândegas, tinha mesa própria na Casa da Índia. O decreto de 20 de Julho de 1767 mandou observar, no despacho das fazendas pertencentes a esta Casa, o foral da Alfândega de Lisboa. Foi extinta pelo decreto de 17 de Setembro de 1833, ficando reunido o seu despacho ao da Alfândega Grande de Lisboa. ([http://www.dgaiec.minfinancas.pt/pt/quem\\_somos/arquivo\\_historico/notas\\_historicas/](http://www.dgaiec.minfinancas.pt/pt/quem_somos/arquivo_historico/notas_historicas/)) (Consultado em 25 de Março de 2011)

que me daram a primeira vez que entrey na Casa da Yndia desde que estou nesta cidade [Nicolas, 1963, f. 47 f]».

Podemos pensar que os aritméticos de Quinhentos foram sensíveis ao desenvolvimento económico da capital portuguesa. Os progressos económicos então sentidos constituíram uma forte motivação para conceção dos tratados, como veremos pela análise de cada prólogo no Capítulo 3, II, da Primeira Parte.

### O quarto e vintena da Casa da Índia

Para as mercadorias chegadas a Lisboa, na posse de privados era exigido a cobrança de direitos de quarto e vintena, como é referido no regimento.

*CAP. 68.º—Que se quartejem y vintenem as caixas as partes sem o Feyttor, quando nom for presente, tirando joias, y pedraria.*

*ITEM.* Por quanto no despacho das partes que vem da India, a quem se ham de quartejar e vintenar as couzas que de lá trazem em suas caixas, de que se ha de recadar pera noos quarto y vintena, ou qualquer outro direito que ordenadamente nos hajam de pagar, convem que se dê o mais breve despacho que seja possivel, havemos por bem que não vindo vos, ditto nosso feyttor, à Caza, às horas ordeinnadas por nosso Regimento, por algũa necessidade ou couza que pera elle tenhaes, que naquelle tempo que na Caza nam esteverdes os thezoureiros e recebedores com os escrivaens da Caza pos-sam sem vos despachar as dittas caixas das partes, e quarte-jar e vintenar as couzas dellas sómente, ou recadar pera noos

qualquer outro direito que disso hajamos daver, ora se haja daver por penas, ora por avaliação, pera pagarem a dinheiro, nam se entendendo poreem nisto, joyas y pedraria, de qual-quer sorte que sejam, porque pera isto sempre se esperará por vos, ditto nosso Feyttor; e no mais se fará como ditto he. Pero como vos, ditto Feittor, fordes na Caza, nom se fa-rão sem vos; e assim mandamos que em tudo se cumpra e goarde como aqui hé contheudo.

Fig. 6 Regimento das Cazas das Índias e Mina [Peres, 1947, pp. 56, 57]

CAP. 71.º—*Que os quintos e vintenass das couzas das partes se nom lancem em imentas, mas que logo se lancem em livro.*

ITEM. Por quanto soubemos agora que quando se quartejavão as couzas da Índia y vintenavão, ou se recadavão quaesquer outros direitos que hajamos daver, se lançavam em as imentas os dittos direittos que se pera noos recadavão, pera dellas serem levados aos livros das receitas dos thezoueiros y recebedores, ora se recadarem nas mesmas couzas, ora a dinheiro pollas avaliações que dellas se fazem, aquellas em que a avaliação se pode fazer por nossa ordenança; e porque nas dittas imentas se nam deve lançar, salvo aquello que logo não poder ser findo y acabado, pera logo poder ser levado aos proprios livros, o que visto se pode bem fazer, mandamos

que daqui em diante os escrivães não lancem nas dittas imentas os direitos que se assy recadarem dos dittos quartos y vintenass, ou quaesquer outros direitos que hajamos daver, mas que logo o lancem y escrevão nos proprios livros, pois logo se pode fazer, y pera isso nam há pejo algum nem couza porque se deve assy leixar de fazer; e assy mandamos ao ditto nosso Feyttor que o faça goardar y comprir, y aos dittos escrivaens que o cumpram, como por este o mandamos.

Fig. 7 Regimento das Cazas das Índias e Mina [Peres, 1947, pp. 58, 59]

A regra de quarto e vintena está bem patente nos livros de aritmética escritos em Portugal no século XVI, sendo um assunto comum a Gaspar Nicolas, Ruy Mendes e Bento Fernandes e exclusivo dos tratados portugueses. Podemos observar a especificidade que lhe confere Ruy Mendes ao referir «tirar quarto e vintena segundo se tira na Casa da Índia [Mendes, 1540, f. 80]».

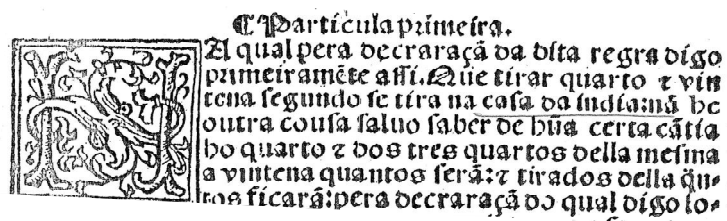


Fig. 8 Introdução à regra de quarto e vintena na *Pratica* de Ruy Mendes

Os aritméticos portugueses desta época não ficaram indiferentes ao conteúdo e aplicação dos direitos de quarto e vintena. Podemos depreender das suas próprias palavras o quanto importante era que todos ficassem familiarizados com esta regra da Casa da Índia. Os motivos só os poderemos deduzir pelos exemplos apresentados. Poder-se-á pensar que Gaspar Nicolas ou mesmo Ruy Mendes trabalhassem naquela instituição, dado que falavam dela com muito à vontade. Estaria algum destes aritméticos ligados à formação dos funcionários na Casa da Índia? Infelizmente não possuímos provas que nos permitam encontrar uma resposta. Marques de Almeida afirma que o facto do *Tratado da Pratica d'Arismetica* apresentar um carácter utilitário e imediatista reforça a probabilidade de Nicolas ter sido funcionário da Casa da Índia [Almeida, 1998, p. 102]. Dos três autores é Nicolas que denota uma tendência para apresentar os assuntos como «receitas» prontas a aplicar, como teremos oportunidade de analisar no Capítulo 3 da Segunda Parte. Esta característica pode levar-nos a pensar que concebeu as regras comerciais para que outros, com menos preparação, as pudessem aplicar no quotidiano da Casa da Índia.

Conjugando funções com a Casa da Índia<sup>33</sup>, a Feitoria Portuguesa de Antuérpia, fazia o comércio e distribuição dos produtos vindos do oriente na Europa. A grande casa de controlo e auditoria das operações financeiras é a Casa dos Contos, como referenciado no próprio regimento.

CAP. 81.º — *Que se concertem os livros quando forem para os Contos.*

ITEM. E quando os livros da despeza do thezoureiro sahirem da Caza para os Contos, mandamos aos dittos escriptaens que concertem as addicoens delles com o livro dos pagamentos que na Caza ha-de ficar, e que nos dittos livros assignem como foi feito por elles o ditto acerto.

Fig. 9 Regimento das Cazes das Índias e Mina [Peres, 1947, p. 64]

<sup>33</sup> Com um papel semelhante ao da Casa da Índia de Lisboa, foi criada, a Casa de Contratação, em 1503 e sediada em Sevilha, era responsável pelo controle de todo o comércio realizado com as colónias da América.

## 2. A Casa dos Contos

Desde as origens da monarquia em Portugal que se assiste ao registo das contas do reino. Contudo, durante muitos anos, a organização financeira do Estado apareceu assente numa contabilidade rudimentar, associada a um arquivo real ambulante, tendo em conta as deslocações frequentes do rei. Competia ao monarca a verificação das contas públicas, função que, era habitualmente delegada em funcionários, sem preparação específica, chefiados por um mordomo-mor. Com estes trabalhavam os funcionários realmente especializados em contabilidade, sabiam contar e escrever para além do grande à vontade com os procedimentos contabilistas. Segundo Virgínia Rau, eram estes os homens dos «contos» [Rau, 2009, p. 6].

Com o passar do tempo, a tendência evoluiu para fixar do rei em Lisboa, o que, motivou uma sedentarização dos diferentes órgãos da administração pública, incluindo a contabilidade nacional. Segundo Virgínia Rau, já no reinado de D. Dinis surgiu um esboço de repartição onde se concentravam as contas da fazenda del-Rei. A designação de «contos» está presente em vários documentos, nomeadamente no reinado de D. João I, onde as certidões das escrituras conservadas na Torre do Tombo eram dadas em cartas seladas, com o selo dos «contos».<sup>34</sup> Quais eram as atividades nos Contos? Segundo afirma Virgínia Rau,

Nos Contos reuniam-se todos os documentos e contas que diziam respeito aos proventos e fontes de receita da coroa (rendas, direitos, etc.) assim como todos os que diziam respeito às despesas públicas. Ao lado destes, e intimamente relacionados com eles, amontoavam-se as cartas de Quitação, os regulamentos dos câmbios, toda a legislação concernente à administração económica e financeira do país, os contratos de arrendamento das sisas e de quantos outros direitos e tributos reais [Rau, 2009, p.14].

Os profissionais dos Contos eram os contadores e os escrivães. No reinado de D. Manuel I é criado o cargo de provedor. Todos estes funcionários encontravam-se sob a tutela do mordomo-mor e vedor da Casa Real. Nesta época coexistiam os Contos da cidade de Lisboa e os Contos do Reino e Casa.

Nos Contos do Reino e Casa, tomavam-se contas dos ourives do rei, do almoxarife da Casa dos Escravos de Lisboa, do feitor de S. Jorge da Mina, do tesoureiro e escrivão da

---

<sup>34</sup> Pensa-se que os «Contos» de Lisboa tinham um lugar físico já a partir do século XV. Situavam-se junto da alfândega, junto ao rio Tejo [Rau, 2009].

fazenda real, do recebedor de sisa do pescado de Lisboa, entre outros. Os Contos de Lisboa manipulavam volumes mais avultados e relacionados com o império então em pleno florescimento. Os Contos da cidade de Lisboa e os Contos do Reino e Casa acabariam por se fundir já no reinado de D. Sebastião.

O reinado de D. Manuel I trouxe reformas nas finanças, tal como naturalmente se impunha, devido ao alargamento do império e das rotas comerciais. O Regimento da Fazenda de 1516 veio como resposta às novas necessidades dos sistemas de coordenação e escrita financeira do Estado. Assiste-se a uma separação entre a contabilidade central e a local. Os vedores da fazenda superentendiam toda a administração da fazenda e, na pirâmide da administração, situavam-se logo abaixo do rei. As regras administrativas pareciam severas e assentes na fiscalização dos atos dos funcionários administrativos, o que se verifica também na Casa da Índia. O sentimento de confiança/desconfiança estava bem presente nas estruturas ligadas às receitas da nação. D. Manuel I chegou a nomear, em 1504, João Mendes Ciçioso para vigiar os contadores dos Contos [Rau, 2009, p. 73], o que nos pode levar a pensar num sistema que desejava, a todo o custo, evitar situações de corrupção. A dimensão dos negócios do oriente, a variedade e multiplicidade das receitas levaram à criação de uma máquina administrativa complexa. Tudo deveria acontecer no sentido de controlar as receitas e despesas do Estado sendo de evitar as fugas de materiais e de capitais.

O regimento inicial dos Contos foi sofrendo alterações no sentido de aperfeiçoar a máquina contabilística do Estado, primando quer pela qualidade moral dos funcionários, quer pelo bom funcionamento de uma atividade comercial que viria a ligar três continentes e, com as raízes nas praças comerciais portuguesas ou sob o domínio de Portugal. Com um sistema administrativo que respondesse às exigências de uma teia comercial vasta e bem coordenada, somos levados a pensar na existência de funcionários especializados e com uma considerável experiência nas operações do trato comercial e contabilístico. Que papel tiveram os livros de aritmética escritos em Portugal no século XVI na formação dos «homens dos contos» e da administração comercial? Infelizmente não possuímos dados que nos permitam responder a esta questão, contudo, sabe-se que designação «Casa dos Contos» parece estar associada à numeração, tema apresentado pelos três autores. Na verdade, «um conto» na linguagem aritmética significava «um milhão», em linguagem atual. Neste sentido, poder-se-á supor o trato de quantias avultadas e implicadas nos negócios da época. Contudo, um «conto» é ainda um disco de metal para fazer contas, objeto em uso nos

«Contos» de Lisboa do reinado de D. Fernando ao de D. João III [Guimarães, 2012, p. 267]. A palavra «conto» aparece assim com dois significados distintos o que nos deixa dúvidas sobre a verdadeira origem do nome dado à instituição.

### **3. As feitorias**

O nome feitoria, está associado a entrepostos comerciais europeus em territórios estrangeiros que se foram adaptando às possessões coloniais. A primeira feitoria portuguesa foi fundada em Bruges, na Flandres, em fins do século XIV, após quase dois séculos de presença e atividade de mercadores portugueses no Norte da Europa. De facto, desde o século XIII, registou-se a presença regular de comerciantes portugueses a negociar produtos nacionais (azeite, frutos, peixe, cortiça, mel, sal, vinhos, couros) nas feiras e portos franceses, nas praças comerciais flamengas, em cidades inglesas, no Norte do Sacro Império Romano Germânico e até na região do mar Báltico, com incentivos régios - esquema de segurança em caso de acidentes ou danos na mercadoria. Alguns desses comerciantes fixavam mesmo residência em certas cidades, facto que está na origem dos núcleos de mercadores portugueses que propiciariam a criação de feitorias [Rau, 1965].

As feitorias contavam com o trabalho de vários funcionários. O feitor era um funcionário nomeado pelo rei, representando, em território estrangeiro, os interesses da Coroa. Acumulava ainda funções administrativas, diplomáticas, económicas e financeiras. Estava ainda encarregado de gerir o comércio e a comunidade de mercadores. Para além do feitor, poderiam existir outros funcionários como escrivães, almoxarifes, tesoureiros, juízes, cônsules e militares (os militares estavam presentes no caso das novas terras descobertas ou conquistadas). A feitoria de Bruges funcionava simultaneamente como uma associação de mercadores e uma embaixada, exercendo mesmo a justiça na comunidade de mercadores. O feitor alugava espaços aos mercadores, para além de arbitrar o comércio e implementar um sistema de seguros.

A feitoria de Bruges foi transferida para Antuérpia entre 1488 e 1498 e a este ponto, chegaram não só o açúcar da Madeira, como os produtos orientais e africanos. Estes produtos são referidos com frequência nos livros portugueses de aritmética, encontram-se associados a múltiplos problemas de regra de três, das regras de companhias, das regras de baratas e da regra de quarto e vintena. Observamos nos tratados uma regra com a designação de «Regra

da Conta de Flandres», como referimos no Capítulo 1, o que demonstra bem o papel da feitoria de Antuérpia no circuito comercial da época.

Coexistiam, a partir de certa altura, a feitoria de Antuérpia, feitorias na África, na Índia e na América do Sul, com contactos entre polos de comércio, como era o caso das cidades italianas, entre outros centros comerciais importantes da Europa. As feitorias portuguesas foram peças de relevo numa teia comercial a nível planetário na época de Quinhentos. No fluxo comercial associado às feitorias nacionais circulavam, ouro e pedras preciosas, especiarias, açúcar, madeiras, cavalos, aves exóticas, cereais, sedas, porcelanas, e ainda capitais, como o refere Bento Fernandes sobre «o tomar dinheiro em Inves (Antuérpia)», entre outros produtos em constante movimento no triângulo comercial que envolvia os três continentes europeu, americano e africano.

#### **4. Os mercadores**

Desde o século XIII que se assiste em Portugal a uma atividade comercial ligada a um comércio interno e externo. Como protagonistas temos os vendedores com produção artesanal própria, vendedores ambulantes, negociantes de feira e ainda os donos de tendas.

Com o desenvolvimento do comércio externo, surgiu a necessidade da uma organização a larga escala que, incluísse as despesas com a armação de navios, o investimento nas cargas e um acordo entre as partes envolvidas (companhia). Tornou-se ainda necessário a implementação de um sistema de seguros para cobertura de eventuais danos nas viagens. No período que separa os séculos XIII e XVI, assistiu-se a uma evolução no sentido da profissionalização da atividade mercantil.

No comércio interno, as feiras viriam a desempenhar o papel de grande relevo [Rau, 1983]. As feiras poderiam ser francas, periódicas e regionais. Para além dos pontos de comércio fixos, coexistiam separadamente, espaços para o comércio ocasional. Ao nível interno são comercializados produtos que nem sempre passam pelas mãos dos mercadores de profissão. São os próprios produtores que comercializam objetos variados. Entre eles encontramos ferreiros, oleiros, carpinteiros e outros artesãos que vendem diretamente nas suas tendas. Já no século XIV a variedade de produtos comercializados nas feiras tornou-se cada vez mais rica. Abundavam vários tipos de cereais, vinhos, fruta, azeite, cordame, produtos para a tinturaria, leite, ovos, animais de grande e pequeno porte, couros, peixe e



marisco, mel e tecidos. Também se comercializava, nestes locais, produtos importados, tais como, diversos objetos em olaria, pimenta, adornos, ouro e utensílios metálicos.

A atividade mercantil de importação e exportação desenvolveu-se essencialmente nos portos, com especial destaque o de Lisboa. O movimento mercantil marítimo está fortemente ligado à marinha mercante portuguesa. Com o desenvolvimento de um comércio intraeuropeu com intervenientes em rotas comerciais importantes, como a Rota da Seda, as cidades desenvolveram-se e com elas uma classe burguesa ligada ao comércio que, enriqueceu e adquiriu poder económico e social. Habitualmente, estes burgueses mercadores fixavam-se em pontos do comércio de grande porte.

Em território nacional e, em particular Lisboa, o seu porto tornou-se muito ativo comercialmente e a cidade atraiu mercadores estrangeiros. Entre estes há que distinguir os que vinham a Portugal negociar e os que se fixavam na cidade. Para além de Lisboa, e já a partir do século XIV, podemos encontrá-los noutros pontos comerciais, como na cidade do Porto e em alguns pontos comerciais no Algarve. Quem eram os mercadores portugueses? Filipe Themudo Barata cita António Sérgio que se refere a uma burguesia comercial e cosmopolita que já atuava a partir de finais do século XIV [Barata, 1998, pp. 215, 216]. O mesmo autor refere António Borges Coelho que caracteriza uma alta burguesia marítima agrícola na base da expansão ultramarina, como forma de impor aos senhores o seu próprio reconhecimento.

Themudo Barata refere que muitos mercadores nacionais se ficavam no pequeno negócio, muito mais fácil de gerir. Considera ainda este autor que, no caso do comércio internacional, as ligações à Coroa e a sociedades e mercadores estrangeiros foram determinantes para dar alguma solidez nos negócios dos mercadores nacionais [Barata, 1998, pp. 222-237].

### **O mercador Bento Fernandes**

Um caso conhecido é o de Bento Fernandes que, para além de aritmético, foi mercador no Porto. Pertenceu ainda à rede do banqueiro António da Fonseca e associados, como já referimos. A atividade comercial de Bento Fernandes data de 1552, época de mudança na economia da cidade do Porto, época que também marcou o início da exploração do mercado do açúcar do Brasil. Fernandes dedicava-se à importação e distribuição de têxteis ingleses,

flamengos e castelhanos, armazenando estes produtos na sua loja da rua da Ponte de São Domingos [Barros, 2013, p. 62]. O comércio dos têxteis está bem presente no *Tratado da Arte de Arismetica* nos problemas que envolvem estes produtos.

...a medida de Inves se chama ãna per òde se medẽ todas as mercadorias de panos e tapeçarias e sedas e todo o genero de medida a qual he como ho covado de Portugal ainda que he mayor a ãna que ho covado e em panos haa que crece .30. ãnas .1. còvado...[Fernandes, 1555, f. 40 f].

Os fólhos 54 e 55 do *Tratado da Arte de Arismetica* são dedicados a problemas de negócio de panos, dos quais transcrevemos outro exemplo: «Hum mercador vëdeo hũa peça de pano por .8. cruzados e ganha nelas a .15. por .100. . Pregũto se a ele vëderã por .14. cruzados quãto ganhara por .100. » [Fernandes, 1555, f. 54 v].

Bento Fernandes viria a casar com Genebra Fonseca, irmã de António Fonseca, por volta de 1530. António Fonseca estava já inserido numa rede de negócios familiar de mercadores cristãos-novos que atuava em Lisboa e no Porto e à qual se juntou Fernandes através do casamento. A rede, então existente, projetou os seus negócios nas comunidades portuguesas do Mediterrâneo, especialmente a que se fixou em Roma [Barros, 2013, p. 63]. O tratado de Fernandes menciona também equivalências monetárias em território italiano tais como o exemplo da troca de moeda entre Florença e Veneza: «Hũ mercador ha d'aver d'outro .320. cruzados de Florêça e elle quer que lhos de venezianos e os venezianos valẽ mais .4. e  $\frac{1}{2}$  por .100. pregũto quãtos lhe deve dar venezianos» [Fernandes, 1555, f. 53 v].

Bento Fernandes, associado a António Fonseca, atuava numa rede com patronos influentes entre os quais o Infante D. Luís a quem dedicou o *Tratado da Arte de Arismetica*. O negócio de Fernandes rapidamente se transformou na movimentação de letras, no cálculo de câmbios e o seu tratado espelha muitas destas operações: «Hum mercador tẽ posto em câbio .750. cruzados e quer tiralos do câbio ã tres sortes de moedas porque vay caminhado pera logares deferêtes...» [Fernandes, 1555, f. 49 v]. Também os pedidos de crédito se encontram entre as situações propostas pelo aritmético.

A regra de rezã de descôto reduzido a hũ dia se entêde quãdo algũ mercador deve a outro qualquer cãtidade de dinheiro a hum tẽpo certo e antes do tẽpo certo lha faz pagamẽto dalgũa parte e quer saber per rezã de descôto a que tẽpo lhe dara ho reste cõtãto que fique reduzidos a hũ dia descõtãdo ho tẽpo que lhe pagou antes do que lhe era obrigado... [Fernandes, 1555, f. 49 v].

Todos estes negócios parecem ter confluído no sentido de colocar Fernandes na posição de um mercador abastado que ampliou a sua rede de atuação também ao nível da Flandres por intermédio de Tristão Rodrigues Vila Real, um cristão-novo do Minho, com negócios no Porto. Este mercador liderava uma rede que abrangia muitos setores, tais como, importação de têxteis europeus, açúcar, livros e pastel dos Açores. O tratado de Fernandes também inclui alguns problemas sobre o comércio de pastel. Um enunciado para aplicação da regra de uma falsa posição menciona aquele produto.

E digo que tres homẽs tẽ pastel ã hũa casa nã se sabe quãto porẽ disse ho primeiro se eu tivera  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{1}{4}$  mais do que tenho e meu cõpanheiro tivera mais  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{5}$  do que tẽ e o outro cõpanheiro terceiro tivera mais  $\frac{1}{5}$  e  $\frac{1}{6}$  do que tẽ tiveramos entre todos .80. quintaes de pastel [Fernandes 1555, f. 66 v].

Os negócios do açúcar e da seda são também temas contemplados por Fernandes.

Hum mercador ãpregou .100. cruzados ã duas mercadorias .s. ã açucre e ã seda e cõprou ha arroba do açucre a .6. cruzados e tornou ho a vêder a .8. cruzados e cõprou a livra da seda a .12. cruzados e vêdeos a .9. cruzados e cõprou e vêdeo tãto açucre e tãta seda que fez entre ganho e cabedal .110. cruzados. Pregũto quãto açucre cõprou e quãta seda [Fernandes, 1555, f. 56 v].

Entre os negócios de Tristão Rodrigues encontrava-se a transferência de ouro da Mina para a Flandres. Os negócios do ouro e da prata são temas do tratado de Fernandes:

Hum mercador ãpregou .200. cruzados ã duas mercadorias .s. ã prata e ouro e cõprou a õça do ouro a .15. cruzados he vëdeo ho a .12. cruzados e cõprou ho marco da prata ha .8. cruzados e vëdeo ho a .12. cruzados e comprou e vëdeo tãta prata e tãto ouro que fez entre propio ganho .180. cruzados. Pregũto quãta prata cõprou e quãto ouro [Fernandes, 1555, f. 57 f].

Tristão Rodrigues dedicava-se ainda à finança e à banca, estando presente em muitas transações que envolveram Bento Fernandes, participando como testemunha em atos notariais [Barros, 2013, p. 68].

### **A formação dos mercadores**

Sobre a formação dos mercadores nacionais, não dispomos de dados concretos. Pensa-se que parte da formação seria realizada no meio familiar. É o próprio Bento Fernandes que refere a fraca formação dos mercadores nacionais face a italianos e flamengos, nos negócios da Flandres

Porque algũs mercadores sobre ho tomar ou dar dinheiro ha câbio ã Inves pera pagar ã Medina del Câpo ou ã outra qualquer feira d’Espanha ou tomado ou dãdo em Espanha pera lhe responderẽ ã Inves nã sã tam espertos nẽ esprimẽtados nesta cõta como ho sã os framẽgos e italianos que andã mais corrẽtes neste contratar [Fernandes, 1555, f. 41 f].

Fernandes é ao mesmo tempo aritmético e mercador e, sobre a sua formação como mercador Amândio Barros afirma:

Não devia ser muito diferente da que se fazia um pouco por toda a “Europa de mercadores” quinhentista. Entre os 14 e os 16 anos o futuro mercador começava a familiarizar-se com o funcionamento da empresa familiar ou entraria ao serviço de um tutor, de preferência homem de negócios experimentado e com casa aberta (firma ou companhia comercial), onde faria a sua formação “escrevendo nos livros e fazendo contas”, durante um período de tempo que se podia estender entre os dois e os cinco anos [Barros, 2013, p. 60].

É reconhecido o sucesso de Bento Fernandes como mercador e aritmético. As suas vivências no mundo mercantil levaram-no a escrever uma obra para mercadores com o objetivo evidente de colocar os mercadores nacionais a par com os seus congéneres, italianos e flamengos, que o próprio considerava mais espertos e experimentados nas contas na Flandres [Fernandes, 1555, f. 41].

Os estudos realizados sobre a formação dos mercadores nacionais não nos conduzem à existência de instituições para o efeito e, apontam desconhecimento de provas. As evidências estão ligadas a casos particulares como o de Bento Fernandes. Rodrigo da Costa Dominguez relata-nos algumas etapas da formação mercantil e remete-nos para a classe mercantil judaica, em particular dos judeus de Leiria, que usufruíam de uma escola elementar para a instrução dos jovens, o que os colocava em vantagem sobre os cristãos, que, na sua maioria, não sabiam ler nem escrever [Dominguez, 2006, pp. 11-16]. Este exemplo pode levar-nos a crer que, Bento Fernandes, enquanto cristão-novo usufruiu de uma instrução que não era vulgar entre os cristãos da sua idade.

Os estudos realizados por Javier Docampo Rey sobre a formação dos mercadores catalães podem, de certo modo, levar-nos a inferir o que se passava, sobre a mesma temática, em Portugal, dado que, os dois países partilhavam situações semelhantes como foi o caso da expansão marítima e da presença de mercadores estrangeiros nos seus territórios [Docampo, 2004]. Javier Docampo descreve-nos a formação dos mercadores florentinos como uma das mais completas da época [Docampo, 2004, p.22], o que reforça às considerações de Bento Fernandes sobre o saber e experiência dos italianos. Javier Docampo afirma que está documentada a presença de um professor de aritmética mercantil em Barcelona na primeira metade do século XV. Sobre a formação dos mercadores catalães, Docampo diz que existia um grau de continuidade profissional por parte dos filhos dos mercadores. Os pais assumiam um papel muito importante na formação dos filhos, sempre que os seus afazeres o permitissem. De um modo geral, os professores que ensinavam a aritmética mercantil eram mercadores, que não eram considerados oficialmente mestres [Docampo, 2004, p. 125].

## **Mercadores estrangeiros em Portugal**

Os contactos com os mercadores italianos não se faziam somente na Flandres. Sabe-se que muitos italianos operavam em Portugal. Existem registos de genoveses e venezianos no final do século XIII em Portugal e, no segundo quartel do século XIV, encontram-se cerca de meia centena de mercadores estrangeiros em Portugal. No decurso deste século é ainda concedida carta de privilégios aos italianos residentes em Lisboa [Castro, 1983, p. 251].

No século XV assistiu-se a uma expansão da atividade mercantil de estrangeiros em Portugal. Entre eles encontrava-se uma importante casa florentina – os Bardi. Sabe-se que Jacome Bardi se estabeleceu no Porto, onde também casou. Também a família Lomellini se estabeleceu em Lisboa e conseguiu obter o monopólio da exportação de cortiça em 1456. Nas transações de capitais salienta-se Tropel de Vivaldi que se ocupava essencialmente de capitais na praça de Bruges. O florentino Lucas Giraldi chegou a possuir variados ramos de negócios em Portugal, incluindo o negócio de rendas reais. Há ainda registos de mercadores estrangeiros nas colonizações dos arquipélagos da Madeira e dos Açores, bem como em certas expedições a novos territórios [Castro, 1983, p. 251].

No sentido inverso, regista-se também uma presença significativa de mercadores portugueses em importantes centros de comércio da Europa, tais como em Harfleur, Baiona e Inglaterra, no século XIII. Há ainda registo de portugueses em Bruges a partir de 1459 e, em algumas cidades de Espanha como é o caso de Sevilha, Valência e Barcelona [Castro, 1983, p. 253].

Os mercadores poderiam acumular outras funções. Alguns, devido ao grande capital que possuíam, tornavam-se, banqueiros, concedendo empréstimos e intervindo em diversas atividades económicas, como o fez Simon Ruiz em Medina del Campo. As feiras de Medina são referidas com frequência por Bento Fernandes quando trata dos problemas da regra da conta de Flandres. Os enunciados de Fernandes não são mera ficção. Sabe-se que Simon Ruiz incluía nas suas atividades negócios com Portugal [Barrio, 2007, p. 5], encontrando-se bem documentada a presença de mercadores nacionais nas feiras de Medina del Campo no decurso do século XVI [Vega, 2004, pp. 273-379].

A concessão de empréstimos é já conhecida e praticada desde o século XIII. Contudo instituições semelhantes a casas bancárias não são vulgares na Europa. Podemos encontrar bancos nos grandes centros de comércio italianos. Na Península Ibéria, apenas em 1401

apareceu o primeiro banco público.<sup>35</sup> Mesmo sem instituições bancárias, as operações financeiras não deixaram de se efetuar. Estão essencialmente ligadas a empréstimos e câmbios. Sabe-se que existiam cambistas oficiais, com ação regulamentada pela lei de 5 de Março de 1415, com atividades nas cidades de Lisboa e do Porto. Nos finais do século XV os dois italianos Tropel de Vivaldi e João de Bardi foram autorizados a cambiar em território nacional [Castro, 1983, p. 255]. As aritméticas escritas em Portugal no século XVI são ricas em problemas sobre esta temática. A feitoria na Flandres deu mesmo nome à regra da conta de Frandes, entre outras regras de câmbio que aparecem nos tratados.

O alargamento dos territórios «conquistados» implicou uma expansão comercial (com rotas marítimas, terrestres e fluviais), onde o eixo Lisboa-Antuérpia veio a desempenhar um papel fundamental. As especiarias orientais, partindo da feitoria de Antuérpia, chegavam aos mercados do interior da Alemanha, da França e da Itália do norte. Tal como nos é relatado nos variados problemas apresentados nos livros de aritmética da época, correm nos circuitos comerciais especiarias, matérias-primas, metais, dinheiro, cereais, vinhos, tecidos, entre outros.

Lisboa desempenhou um papel ímpar na economia mundial, como ponto de chegada de produtos «cobiçados» do oriente, aos quais se junta o açúcar da Madeira e o ouro africano. E, como já referimos, a capital portuguesa também atraiu mercadores de diferentes nacionalidades. Em território nacional estavam presentes italianos<sup>36</sup>, flamengos, alemães e burgaleses. Na mesma época em que apareceram os produtos da feitoria da Mina, surgiram, no panorama comercial português, as famílias italianas dos Marchione, dos Frescobaldi e dos Gualterrotti, como financeiros do comércio asiático a que se seguiram os Affaitadi e os Giraldi. Também alguns mercadores alemães ocorreram a Lisboa. Os Welser estabeleceram-se na Rua Nova em 1476 e dedicaram-se ao tráfego de têxteis e de especiarias. Os Fugger tinham escritório em Lisboa mas muitos dos seus negócios passavam por Antuérpia.<sup>37</sup>

---

<sup>35</sup> Embora em Portugal o Banco de Lisboa aparecesse em 1821 [Castro, 1983, p. 253].

<sup>36</sup> Os italianos já operavam em Lisboa desde o século XIII.

<sup>37</sup> Sobre a presença de mercadores estrangeiros em Portugal, consultar [Almeida, 1993].

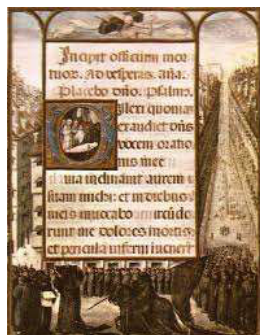


Fig. 10 Rua Nova dos Mercadores em Lisboa

(Iluminura do *Livro de Horas* de D. Manuel I, Torre do Tombo, Lisboa) [Castro, 1983, p. 255]

Entre os mercadores flamengos, temos Martim Leme<sup>38</sup>, estabelecido em Lisboa a partir de meados do século XV.<sup>39</sup> Também os mercadores de Burgos afluíram a Portugal. A Lisboa chegaram os Haro e os Malvenda, esta última família com negócios em vários pontos da Europa, com especial destaque no eixo Medina del Campo-Antuérpia. Há ainda registos da sua presença na rota do Índico através do financiamento e preparação direta de algumas das naus incluídas nas armadas.

Aos mercadores capitalistas estrangeiros juntaram-se também portugueses que, poderiam ou não, interagir com os estrangeiros em território nacional. Saliente-se entre os mercadores nacionais os Mendes, descendentes de uma família judaica. Francisco Mendes era um mercador sediado em Lisboa e Diogo Mendes, seu irmão, estava estabelecido em Antuérpia, ambos ligados ao negócio das especiarias [Almeida, 1993, pp. 45-47].

Os aritméticos portugueses de Quinhentos são sensíveis às atividades dos mercadores na Flandres. Estas atividades estão na base da criação de regras, nomeadamente a regra da conta de Flandres que já mencionamos. É Bento Fernandes que, como mercador, deu mais ênfase a esta regra, relativamente ao que fizeram os dois autores antecessores<sup>40</sup>, que motivos

<sup>38</sup> Nome original Maerten Lem.

<sup>39</sup> Dos estudos realizados por [Leme, 2008], sabe-se que Martim Leme foi um importante elemento da comunidade flamenga em Lisboa aparecendo como procurador dos mercadores flamengos, holandeses e zelandeses em 1457. No ano de 1463, juntamente com os sócios, empresta ao rei 3.000.000 de reais. Adquiriu uma casa na rua Nova dos Mercadores e teve sete filhos com Leonor Rodrigues. Martim Leme empreende muitas viagens entre a Flandres e Portugal, acabando por regressar ao seu país por volta do ano de 1466, continuando contudo, os contactos comerciais com Portugal. Alguns dos seus filhos estão ligados a negócios na Madeira, essencialmente no comércio do trigo e do açúcar. O quinto filho legitimado de Martim Leme, de nome Rui Leme, foi testemunha, em 1494, juntamente com Duarte Pacheco Pereira, do Tratado de Tordesilhas, onde é designado como “contínuo” da casa de D. João II. A família Leme estava perfeitamente integrada nos negócios em Portugal e gozava de influência junto dos monarcas portugueses.

<sup>40</sup> Referimo-nos a Gaspar Nicolas e Ruy Mendes. O primeiro dedica o fôlio 35 do seu tratado com três problemas, o segundo apresenta o fôlio 83 também com o mesmo número de problemas. Bento Fernandes



estariam adjacentes à sua atuação? Como mercador internacional e inserido numa rede que atuava em diferentes áreas do mundo mercantil, Fernandes pode ter atuado não só por interesse próprio mas também como formador, o que era um hábito na época a que nos reportamos, tal como refere Javier Docampo.

### **III. Os contactos com as cidades estrangeiras**

A presença de portugueses nos grandes centros europeus já era habitual mesmo antes do vaivém ligado aos descobrimentos e à consequente expansão comercial e territorial. O movimento de nacionais deveu-se a vários motivos, entre os quais negociar e estudar.

#### **Estudar no estrangeiro**

Virgínia Rau apresentou um estudo sobre *Alguns estudantes e eruditos em Itália no século XV* [Rau, 1972] e Filipe Themudo Barata descreve casos de sucesso entre os estudantes portugueses nas instituições universitárias italianas<sup>41</sup>. Os estudantes nacionais frequentaram ainda os estudos noutras cidades como Paris, Toulouse e Montpellier. Luís de Matos e Joaquim Veríssimo Serrão estudaram a presença de portugueses em universidades francesas, onde recebiam diversas formações, entre as quais Teologia, Medicina e Artes [Matos, 1950; Serrão, 1954].

Nos meios universitários por toda a Europa era habitual ensinar-se a aritmética do *quadrivium* com aplicações nos cálculos ligados à Astronomia e ao cômputo religioso. A aritmética mercantil parece ter funcionado fora das universidades. Os escassos dados que temos sobre os três aritméticos portugueses quinhentistas não nos permitem enquadrá-los em qualquer ambiente de estudo quer em Portugal, quer no estrangeiro. Nem sequer sabemos que «tipo» de aritmética se ensinava em Portugal, para além da tradicionalmente ligada ao *quadrivium*. O pouco que se sabe neste domínio e para esta época, vem de testemunhos indiretos, como a Oração de Sapiência de D. Pedro de Menezes, onde se invocam os assuntos lecionados no Estudo Geral de Lisboa em 1504. Sobre o saber matemático diz-se o seguinte:

---

refere as variantes da regra em dois fólhos, 40 e 41, apresentando variados problemas, num total de nove, incluindo situações de câmbio por aplicação da regra.

<sup>41</sup>As instituições universitárias italianas, em especial nas tuteladas pela Igreja, são múltiplos os exemplos da frequência de portugueses. Por exemplo, o colégio de S. Clemente de Bolonha conheceu, na centúria de quatrocentos, três reitores de Portugal e viu eleger, em 1440 e 1443, dois vice-reitores [Barata, 1998, p. 197].

Restam as duas Matemáticas. Recordando-as, a nossa oração atingirá rapidissimamente a meta. Uma é a Aritmética, a outra a Geometria. Ambas são muito necessárias, não só aos letrados, mas também a todos os mercadores e negociantes [Carvalho, 1996, p. 132].

Até que ponto a «Aritmética» invocada por D. Pedro de Menezes respondia às exigências de uma sociedade onde o comércio se desenvolvia ao nível internacional, pondo em jogo quantias avultadas de capitais e operações financeiras «exigentes»? Desconhecemos qualquer registo de escolas, em Portugal, ligadas à prática das atividades comerciais e financeiras, ainda que existissem estruturas administrativas ligadas ao comércio internacional, como a Casa da Índia e a Casa dos Contos.

Com o conhecido movimento de portugueses pela Europa, a probabilidade dos tratados de aritmética mercantil estrangeiros chegarem a Portugal é elevada. Marques de Almeida afirma, «com alguma cautela», que há quatro autores subjacentes ao desenvolvimento dos aritméticos portugueses quinhentistas: Luca Pacioli (com o *Summa*), Bradwardine (autor da *Arithmetica et Geometria*, publicada em Veneza em 1503), Juan Andrés e Juan Ortega. Aponta ainda uma possível influência do *Triparty* (1484) de Chuquet na aritmética portuguesa [Almeida, 1994, v. I, p. 101]. Sobre a questão das fontes e influências na aritmética portuguesa vamo-nos deter na Terceira Parte deste estudo, onde, em linhas gerais, daremos uma panorâmica sobre a produção de tratados de aritmética mercantil numa época que antecedeu a produção portuguesa. Para o efeito vamos considerar um espaço geográfico adjacente ao nosso país.

A Itália, onde muitos eruditos portugueses realizaram estudos no século XV, segundo nos relata Virgínia Rau, foi o «berço» das aritméticas mercantis desde o século XIV. Em França os tratados de aritmética mercantil apareceram no decurso do século XV. Um domínio geográfico com uma produção importante neste tipo de obras estendia-se desde as regiões de Lião, da Provença, do Languedoque, continuando para oeste através dos Pirenéus e da Catalunha. Entre as primeiras obras conhecidas temos:

- *Compendi del art del algorisme* de 1430, também conhecido por *Manuscrito de Pamiers* (autor desconhecido);
- *L'art d'arismetique*, de 1460 (autor desconhecido);
- *Traité de la pratique d'algorisme*, Lião, (antes de 1471), autor Mathieu Préhoude;

- *Compendy de la pratique des nombres*, Lião, 1471, autores, Barthélemy de Romans e Mathieu Préhoude;
- *Suma de la art de aresmetica*, Barcelona, 1482, autor, Francesc Sanctcliment;
- *Triparty en la science des nombres*, Lião, 1484, autor, Nicolas Chuquet;
- *Le Kadran aux marchans*, Bilbao e Marselha, 1485, autor, Jehan Certain;
- *Compendion de lo abaco*, Turim, 1492, autor, Francés Pellos;
- *Arithmetique*, região de Paris (?), 1488, autor desconhecido.

A cidade de Lião, em França, era na época conhecida pelas suas feiras que duravam várias semanas. Foi ainda uma praça económica e financeira importante.

M. Spiesser afirma que a Itália, como região vizinha, teve um papel determinante na produção de tratados de aritmética comercial em França. Registou-se ainda, a presença de dois «mestres de aritmética» florentinos que ensinaram em Montpellier no século XIV. Esta autora considera que a França também recebeu influências da Espanha, sobretudo através do eixo Barcelona-Toulouse [Spiesser, 2003, pp.59-61]. Marie-Hélène Labarthe estudou os pontos comuns entre a aritmética de Sanctcliment e o *Manuscrito de Pamiers* e concluiu que a presença dos Pirenéus não foi um obstáculo físico à circulação de ideias e de saberes [Labarthe, 2004].

No caso de Portugal, seria de estranhar que as obras em aritmética mercantil produzidas na Europa passassem despercebidas aos «interessados» que se deslocassem pelo estrangeiro e sobretudo, por regiões onde o comércio era intenso, onde realizavam estudos, onde negociavam nas feiras, enfim, a probabilidade de fazer circular estes livros não era de todo negligenciável.

A produção de obras em aritmética mercantil parece ter acompanhado um movimento no «sentido do sul» dado que, ao trabalho de Sanctcliment, a primeira aritmética impressa em Espanha, se seguiram outras, onde encontrámos os trabalhos citados por M. Almeida.

Antes da primeira edição do *Tratado da Pratica d'Arismetica* de Gaspar Nicolas foram ainda publicados:

- *Tratado subtilissimo de Arismetica y Geometria*, Lião, 1512, autor, Juan Ortega;
- *Sumario Breve de la Pratica de Arithmetica*, Valência, 1515, autor, Juan Andrés;

Podemos prever para Portugal e os reinos vizinhos de Espanha um cenário idêntico ao que M. Spiesser nos descreveu entre a França e a vizinha Itália. Assim não é de estranhar que a Espanha tivesse um papel determinante na produção de tratados de aritmética comercial em

Portugal e que existissem vias de transmissão do «saber aritmético» fora da clássica linha italiana com o *Summa* de Pacioli, como veremos com mais detalhe na Terceira Parte deste trabalho.

As ligações de Portugal aos reinos de Espanha foi sempre muito forte, apesar das tradicionais rivalidades. O reinado de D. Manuel I ficou conhecido pela determinação do bilinguismo (português-castelhano) e também pela concessão de bolsas a quem pretendesse estudar no estrangeiro [Buescu, 2007, p. 161]. Para o efeito, eram procurados os sítios considerados de excelência. A Universidade de Salamanca foi um dos centros de estudos muito procurado pelos estudantes nacionais. É bem conhecido que Pedro Nunes estudou nesta universidade, onde fez a sua formação de médico. Rómulo de Carvalho descreve um ambiente pouco atrativo<sup>42</sup> na Universidade de Lisboa, o que levou muitos portugueses a frequentarem universidades estrangeiras. Em contrapartida, vinham professores estrangeiros ensinar em Portugal.

Convém ainda referir que a presença dos portugueses fora do reino esteve também ligada à saída dos judeus no reinado de D. Manuel I. Alguns grupos de judeus especializaram-se num certo tipo de comércio, eram comunidades organizadas e cultas e muito ligadas aos negócios e ao saber<sup>43</sup>. Um caso conhecido é o de Abraão Zacuto<sup>44</sup>, astrónomo de mérito reconhecido, que chegou a Portugal, e mais tarde viria a ser expulso do reino. Muitos outros seguiram um destino idêntico, como Amato Lusitano, Garcia de Orta, Francisco Sanches e, tantos outros que, enfrentaram o exílio, foram admirados no estrangeiro, pelo seu talento e pelos seus contributos para o desenvolvimento da filosofia, da medicina, da ciência e da cultura. Muitos rumaram, no decurso do século XVI, a Antuérpia, então ponto de encontro

---

<sup>42</sup> Rómulo de Carvalho cita o Professor Joaquim Carvalho que considera a história da Universidade de Lisboa durante o século XV, anónima e obscura, para justificar a partida dos estudantes portugueses em busca de um saber que o Estado não lhes oferecia [Carvalho, 1996, p. 115].

<sup>43</sup> Marques de Almeida salienta o papel das comunidades judaicas da Península Ibérica na difusão da informação científica e mesmo da criação do saber em Portugal [Almeida, 1998, p. 17].

<sup>44</sup> Abraham bar Samuel Abraham Zacut, conhecido em Portugal por Abraão Zacuto, terá nascido em Salamanca em meados do século XV, onde teria ensinado astrologia e astronomia — como se sabe, na altura as duas disciplinas confundiam-se. Não há muitas certezas sobre a sua atividade em Salamanca, existindo referências, não confirmadas, ao facto de ter estudado e lecionado na Universidade de Salamanca. Teve que se refugiar em Lisboa na sequência da promulgação do decreto dos reis católicos, Isabel e Fernando, reis de Castela e Aragão, que obrigava os judeus à conversão ao cristianismo ou ao exílio. Há notícias de que já estaria em Portugal em Junho de 1493, ao serviço do rei D. João II. Viveu em Portugal apenas seis anos, uma vez que em 1496 o rei D. Manuel seguia o exemplo dos reis católicos e decretava a expulsão do país de todos os judeus que recusassem a conversão ao catolicismo através do batismo. Zacuto refugiou-se em Tunes, no Norte de África, tendo depois passado para a Turquia, vindo a morrer na cidade de Damasco em ano posterior a 1522. (<http://cvc.instituto-camoes.pt/ciencia/p29.html>)(Consultado em 10 de Abril de 2011)

de comunidades judaicas, para além de um verdadeiro centro comercial das especiarias [Curado e Pereira, 2014, pp. 7,8].

### **Negociar no estrangeiro**

O movimento de gentes na época de Quinhentos fazia-se também no sentido inverso. Deslocações de grandes figuras para território nacional, como as grandes companhias comerciais, entre as quais as casas Cambini e Medici, com negócios na corte portuguesa [Barata, 1998, pp. 231-235].

Nas linhas do comércio ficava o circuito mediterrânico com polos nas cidades italianas de Génova, Florença, Pisa e Milão, mas também em Valência e Barcelona, já muito ativas no decurso do século XV. É sabido que foram mercadores os grandes responsáveis pelo desenvolvimento das comunidades portuguesas no estrangeiro. Marques de Almeida refere circuitos comerciais importantes que se reforçaram com a Rota do Cabo, juntando algumas cidades do reino vizinho como a de Medina del Campo [Almeida, 1993, p. 18]. Nestes pontos fervilhava uma vida comercial intensa e Lisboa, em conjunto com Sevilha, foram centros importantes nesta teia de movimentos. Os tratados de aritmética mercantil apareceram, precisamente, nos grandes polos comerciais. As cidades de Valência, Barcelona, Lião são berços de algumas «Aritméticas mercantis» fora do território italiano. No caso português temos Lisboa e Porto como centros de edição deste tipo de obras.

No *Tratado da Pratica d'Arismetica*, Gaspar Nicolas refere como fonte o *Summa* de Luca Pacioli [Nicolas, 1963, f. 54 v]. No vaivém de gentes e saberes, não é de admirar que o *Summa* de Pacioli tenha chegado a Portugal com uma certa rapidez. Outros tratados de aritmética marcam presença nas bibliotecas portuguesas. Referimo-nos aos trabalhos de Juan Andrés, Juan Ortega, entre outros autores dos reinos vizinhos que, viram aparecer as suas obras em cidades onde o fluxo comercial era abundante, como o foram Valência, onde foi impressa a obra de Andrés, Barcelona e Lião, no caso do tratado de Ortega, ao mesmo tempo, cidades onde a presença de comunidades portuguesas era considerável.

### Capítulo 3- O desabrochar de uma aritmética comercial em Portugal

*O Tratado da pratica darismetyca de Gaspar Nicolas é a primeira obra de Matemática escrita em língua portuguesa que correu impressa, tendo sido editada em 1519 por “Germã Galharde franças” [Nicolas, 1963, Nota sobre a obra e o autor de Luís Mendonça de Albuquerque].*

---

#### I. Introdução

As novas rotas comerciais, com uma enorme quantidade e variedade de produtos em circulação, bem como o aparecimento de técnicas comerciais cada vez mais complexas exigiam que os intervenientes agissem com sabedoria. Os mercadores, necessitavam de registar, calcular os ganhos e prever os riscos. Para o efeito era necessário o domínio de conhecimentos, pelos menos básicos, em aritmética. De que aritmética se tratava? De uma aritmética dos algoritmos no sentido do cálculo escrito com a utilização e vulgarização dos números indo-árabes.

Numa cidade muito ligada às transações comerciais, como o foi Lisboa quinhentista, surgiu, no ano de 1519, o primeiro tratado de aritmética mercantil, escrito em português. Referimo-nos ao *Tratado da Pratica d’Arismetica* de Gaspar Nicolas. Seguiram-se a *Pratica d’Arismetica* de Ruy Mendes (1540) e o *Tratado da Arte de Arismetica* de Bento Fernandes (1555).

No nosso entender, as mudanças e as necessidades organizacionais do reino careciam de instrumentos aritméticos eficazes na resposta aos desafios de um comércio efervescente e próspero, que projetou o reino para o centro das atenções na teia comercial mundial. Gaspar Nicolas foi uma peça vital deste puzzle, o seu livro procurou responder, tal como o próprio afirmou, às necessidades de bem servir o seu país e, fê-lo com sucesso, atendendo à popularidade da sua obra. Como refere Luís Albuquerque,

O tratado da pratica darismetyca desfrutou de uma grande aceitação, que seria em parte consequência da copiosa soma de problemas, com as correspondentes soluções, que incluía nas suas páginas; mas é também possível que o sucesso inicial não menos se

ficasse a dever ao prestígio que parece ter rodeado o seu autor [Nicolas, 1963, Nota sobre a obra e o autor de Luís Mendonça de Albuquerque].

Sobre o reconhecido prestígio, Luís Albuquerque remete-nos para Valentim Fernandes que no seu livro *Reportório dos tempos*, menciona o «hõnrrado Gaspar Nicolas», a propósito de uma tábua das declinações solares que Nicolas tinha elaborado a partir do trabalho de Abrão Zacuto [Nicolas, 1963, Nota sobre a obra e o autor de Luís Mendonça de Albuquerque].

Não bastou a Nicolas ter sido respeitado e escrever um livro para que se atingissem as tão almejadas mudanças na formação dos mercadores, das instituições e da mentalidade portuguesa, em geral. O ambiente quinhentista era propício à criação, numa interação constante entre o meio envolvente e o Homem, como o refere, Pedro Calafate quando cita Lucien Febvre<sup>45</sup>

O homem que vive num mundo onde a matemática é elementar ou inexistente, não tem a razão formada do mesmo modo que aquele que, mesmo ignorando a matemática, vive numa sociedade afeita, no seu conjunto, aos hábitos de precisão dos modos de cálculo e à retidão das formas de demonstrar.

Gaspar Nicolas esteve no palco das transformações induzidas pelos Descobrimentos. Foi um divulgador do saber matemático da época quinhentista em Portugal, em conjunto com Ruy Mendes e Bento Fernandes.

## **II. O que nos dizem os aritméticos portugueses sobre as suas motivações**

Uma leitura dos três tratados leva-nos a crer que os três autores apresentaram temas semelhantes através de diferentes metodologias para servir os mesmos objetivos. Gaspar Nicolas refere com frequência as questões que lhe foram colocadas na Casa da Índia quando chegou à cidade de Lisboa. Ruy Mendes, tratando os mesmos assuntos, fã-lo com um espírito «mais académico», pela organização dos assuntos, pelo gosto em problemas com números, pelo modo como introduz os temas. Bento Fernandes transmitiu-nos, através da sua obra, a

---

<sup>45</sup> Lucien Febvre citado por Pedro Calafate em Duarte Pacheco Pereira, Instituto Camões, 1998-2000. (<http://cvc.instituto-camoes.pt/filosofia/renl.html>) (Consultado em 20 de Abril de 2013)

sua vivência de mercador, escreveu um tratado para mercadores e deu especial destaque a regras comerciais, focando a importância da formação dos mercadores.

Nada melhor que os próprios autores para nos dizerem o que os levou à escrita dos tratados. Para tal passamos à análise dos prólogos das três obras, numa tentativa de conhecermos as suas motivações.

## 1. Gaspar Nicolas

Considera-se que o primeiro livro de Matemática impresso em Portugal foi o *Tratado da Prática d'Arismetica* de Gaspar Nicolas, em 1519. Num livro dedicado à História das Matemáticas em Portugal, Francisco Gomes Teixeira menciona aquela obra,

O livro mais antigo consagrado em Portugal à Aritmética tem por título Tratado da pratica Darismetica, e foi publicado pela primeira vez em 1519 e o seu autor chamava-se Gaspar Nicolas. Diz-se que era natural de Guimarães [Teixeira, 1934, p. 98].

Deste tratado existe um exemplar da primeira edição na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto que em 1963, foi publicado em edição fac-similada pela Livraria Civilização do Porto e prefaciada pelo Professor Luís de Albuquerque. A edição de 1519 saiu da oficina de Germão Galharde<sup>46</sup>. No *Tratado da Pratica d'Arismetica* o prólogo ocupa as duas primeiras páginas. Seguem-se as *tavoadas*: *Tavoada* da prata, *tavoada* pequena e *tavoada* grande. Não há qualquer espaço com as funções de índice. Os temas encontram-se bem demarcados ao longo do texto, sem que este esteja dividido em capítulos. Encontra-se no Anexo 1 um índice dos conteúdos.

Sobre o autor os dados são escassos, contudo pensa-se que viveu entre o último quartel do século XV e o segundo do século XVI. A. A. Marques de Almeida remete-nos para Luís de Albuquerque que admite a possibilidade de Gaspar Nicolas ser de origem judaica [Almeida, 1994, v. I, p. 79]. Na nota bibliográfica presente na edição fac-similada de 1963, Luís de Albuquerque completa a informação de Gomes Teixeira,

Nascido talvez em Guimarães, Gaspar Nicolas, cujos dados biográficos são escassos, tem o seu nome ligado aos aspectos científicos dos descobrimentos Portugueses, pois

---

<sup>46</sup> Sobre outras edições da obra consultar o Anexo 12.



atribui-se-lhe parte activa na realização de tábuas náuticas [Nicolas, 1963, Nota sobre a obra e o autor de Luís Mendonça de Albuquerque].

Diogo Barbosa Machado deu-o como natural de Guimarães e atribuiu-lhe a categoria de aritmético, como podemos constatar na descrição da figura 11.

**GASPAR NICULAS** natural da Villa de Guimaraens em a Provincia do Minho, e insigne Arithmetico de cuja sciencia deixou para instrução de quem a quizesse saber.  
*Tratado da Prática da Arithmetica.* Lisboa por Luiz Alvres 1541. 4. & ibi 1594. Dedicado ao Conde de Tentugal; & ibi por Victorino Alvres. 1613. Do author como da obra faz memoria Joan. Soar. de Brito *Theatr. Lusit. Liter.* lit. G. n. 25.

Fig. 11 Gaspar Nicolas segundo Diogo B. Machado [Machado, 1741-1759, t. II, p. 364]

O que sabemos de Gaspar Nicolas está ligado à obra que nos deixou. No prólogo do *Tratado da Pratica d'Arismetica* o autor refere as suas ligações à cidade de Guimarães onde encontrou, numa dada ocasião, D. Rodrigo, Conde de Tentúgal<sup>47</sup> que aqui aparece no papel de um mecenas com interesse pela Aritmética, segundo nos relata Nicolas.

E porque Senhor, nã ha muytos tẽmpos que eu vi ha V. S. em Guimaraẽs e me fez algũuas preposições e pregũtas nesta arte de Arismetycas me ficou dahy hũu desejo de servir V. S.  
[Nicolas, 1963, prologo].

O habitual discurso de agrado ao mecenas conjuga-se com o reconhecimento do papel da Aritmética entre «as outras artes»: «Arismetica pella qual se alcança as outras artes (...) pera viir o propio conheçymento das sciencias e artes em particular. Convem peso e medida numero...» [Nicolas, 1963, prologo].

<sup>47</sup> O Conde de Tentúgal era D. Rodrigo de Melo (1488-1545) também 1º Marquês de Ferreira. Era filho de D. Álvaro (filho dos segundos Duques de Bragança) e de sua mulher, D. Filipa de Melo. Pressume-se que nasceu em Castela durante o exílio do seu pai. Foi agraciado com o título de Conde de Tentúgal por D. Manuel em 1504 [Almeida, 1994, v. I, p. 77].

O reconhecimento da necessidade de um livro de aritmética no reino, dado o elevado volume de negócios, com a Índia, a Pérsia, a Arábia e a Etiópia e outros domínios mais próximos do reino, é ainda um ponto de destaque no discurso do autor.

Muy Manifyco Senhor, por ser cousa muy neçessaria nestes regnos e senhorios de Portugal por bem de em eles florecerem os tratos das mercadarias da India e Persia e Arabia e Thyopia e outras partes mays chegadas a nos e os tratadores multiplicarem nos dytos Reynos me moveo ha fazer e cõpor este breve tratado de Arismetyca [Nicolas, 1963, prologo].

Gaspar Nicolas admite apresentar um tratado de aritmética breve, com um estilo muito claro, «per estyllo muy claro pera que facilmente possa aprobeytar e aprobeyteahos que ha virem e lerẽ» [Nicolas, 1963, prologo]. Uma leitura da obra realça o caracter breve e imediatista do seu autor, quer em termos de introdução aos temas, quer na prática algorítmica, como veremos ao longo do desenvolvimento deste estudo.

O *Tratado da Pratica d'Arismetica* foi muito popular no reino de Portugal dado que, sem contar com a edição de 1519, foi impresso nos séculos XVI, XVII e XVIII (apenas uma edição), num total de nove vezes [Nicolas 1963, Nota sobre a obra e sobre o autor de Luís de Albuquerque], o que demonstra um certo reconhecimento e agrado pela obra. Por exemplo, Gomes Teixeira reconheceu a qualidade do trabalho de Nicolas considerando um excelente manual de Aritmética prática,

Percorrendo-o com atenção, nota-se que o livro mencionado é um excelente manual de Aritmética prática, muito claro e simples na exposição das doutrinas, sem teorias, que certamente prestou bons serviços no século XVI [Teixeira, 1934, p. 98].

Gaspar Nicolas ficou ainda conhecido, tal como referimos na introdução deste capítulo, pelas suas ligações à náutica. Antes da publicação da sua obra em aritmética, Nicolas foi autor das *Tábuas Quadrienais* de declinação para 1517-1520. Estas tábuas aparecem em trabalhos da época, entre os quais no *Reportório dos Tempos* de Valentim Fernandes, também responsável pela divulgação do nome do autor: «A qual declinaçã foi tirada putualmente del Zacuto pello hõrrado Gaspar Nicolás mestre suficiente nesta arte [Almeida,

1998, p. 103]. Segundo afirma Marques de Almeida, estas tábuas tiveram onze edições no século XVI, foram muito utilizadas na prática náutica, tendo sido reproduzidas em diferentes obras quer em Portugal quer no estrangeiro [Almeida, 1998, p. 103]. O envolvimento de Gaspar Nicolas neste tipo de trabalhos mostra o quanto estava implicado nas práticas da sua época. No prólogo do seu tratado sublinha o papel da aritmética, «senhora das outras Ciências», implicada nas relações do real, através de uma noção poderosa: a noção de «medida», no sentido de «medir» tudo o que é «material».

He necessário que sejamos inclynados a ella como senhora das outras sciencias porque ella abre as portas do entendimento e imprime huũ desejo de natural especulaçam pera viir na realidade das cousas que della dependem como seja verdade que pera viir o proprio conheçymto das sciencias e artes em particular: Convem peso e medida número [Nicolas, 1963, prologo].

Marques de Almeida caracteriza a Aritmética do dealbar da época Moderna como uma disciplina cuja aceitação social não suscitou qualquer contestação, que sobreviveu porque se tornou necessária e se comportou como um sistema de comunicação [Almeida, 1994, v. I, pp. 49, 50]. Foi com base na «necessidade da aritmética», como o refere no prólogo, que Gaspar Nicolas alicerçou o seu tratado e abriu o caminho a uma vulgarização do algoritmo na forma de cálculo escrito e ferramenta essencial na construção de modelos que viriam a servir o saber matemático e a prática mercantil.



Figura 12: Página de rosto da *Pratica d'Arismetica* de Ruy Mendes (1540)



## 2. Ruy Mendes

Ruy Mendes é também conhecido por Rodrigo Mendes. Pouco se sabe sobre a sua vida. Pensa-se que nasceu em Mourão, Inocêncio associa-lhe uma formação em Direito, contudo, pelas referências no seu livro à Casa da Índia, Marques de Almeida, admite uma atividade ligada à máquina administrativa do reino [Silva, 1862, t. VII, p. 176; Almeida, 1994, v. I, p.85]. Da *Pratica d'Arismetica* só é conhecida uma edição em 1540 [Mendes, 1540], saída da oficina de Germão Galharde. Encontra-se um exemplar desta edição na Biblioteca Nacional de Portugal. Diogo Barbosa Machado atribui a Ruy Mendes a autoria de *Preguntas em matéria de Arithmetica que se fazem e que se soltão* e que hoje são desconhecidas.

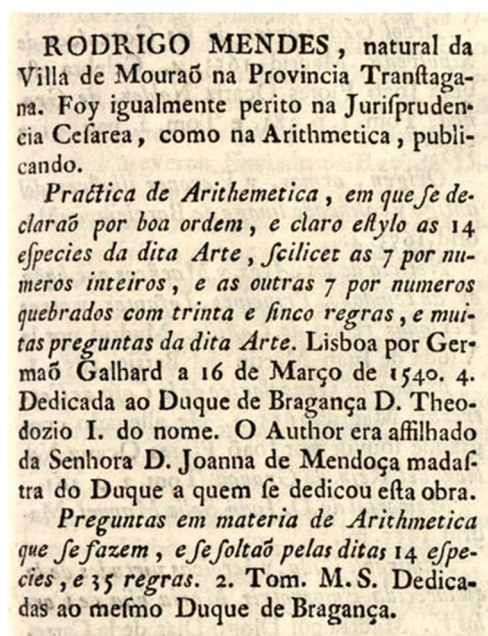


Figura 13: Ruy Mendes por Diogo Barbosa de Machado [Machado, 1741-1759, t. III, p. 649]

O próprio Ruy Mendes afirma no prólogo ter realizado outros trabalhos: «E, por eu pera este presente livro, e assi pera outros dous de perguntas<sup>48</sup> que tenho feyto» [Mendes, 1540, prologo]. Esta informação em conjugação com a organização e rigor presentes na *Pratica* podem-nos levar a crer que Ruy Mendes ensinava. O estilo de escrita associada aos assuntos tratados remete-nos para as qualidades associadas a boas práticas pedagógicas. Também este

---

<sup>48</sup>*Preguntas* são o atualmente designamos por *problemas*.

autor refere a necessidade de um livro de aritmética no reino, afirmando que se sente em condições de o elaborar, mesmo sendo especialista noutra área

...vendo a necessidade que nestes reynos avia hũ livro d' Arismetica: sentindo-me a meu parecer abil na dita arte pera o poder fazer sem embargo de [ser]<sup>49</sup> fora de minha faculdade dos dereytos e leys que aprendi determiney compor ho presente livro...[Mendes, 1540, prologo].

A motivação demonstrada, também baseada na necessidade de um livro de aritmética no reino é comum, como vimos, a Gaspar Nicolas, bem como a enunciada clareza da obra de modo a facilitar a aprendizagem de quem a utilize, discurso habitual nos tratados de aritmética mercantil da época.

Salientamos uma preocupação de Ruy Mendes. Trata-se de perpetuar num livro o conhecimento transmitido oralmente:

E posto que pera isso achassem muytas maneyras nenhũa delas acharã ser melhor que cõpor algũ livro porque mediante ho tal livro durava sua memoria pera sempre como nos he manifesto por muytas escrituras de muytos antigos que oje em dia trazemos na boca como se ainda ontem foram: avendo tã grande numero de annos que passaram [Mendes, 1540, prologo].

A questão em torno da transição da mensagem oral para a escrita, denuncia, ao mesmo tempo, um saber e aprendizagem pouco escolarizados mas antes, passados de boca em boca. No caso dos mercadores, esta parece ter sido uma prática corrente, entre membros de uma mesma família ou entre os mercadores e os seus aprendizes.<sup>50</sup>

Ruy Mendes admitiu a utilização de fontes sem mencionar quais,

...ho presente livro: no qual declararey as cousas que pelo reportório avante parecem: posto que com muyto trabalho e vigilancia, tirando as forças e ho melhor e mais necessario de outros muytos livros que avia visto...[Mendes, 1540, prologo].

---

<sup>49</sup> Texto incompreensível. Reconstrução do texto entre os parenteses [...].

<sup>50</sup> A ausência das escolas de formação de mercadores em Portugal, ao contrário da sua abundância em algumas cidades da Itália, pode levar-nos a crer que o mercador português fez a sua formação trabalhando e aprendendo com as experiências vivenciadas no ambiente mercantil.

As primeiras páginas da *Pratica d'Arismetica* contêm o prólogo. Segue-se o índice (*tavoadada*), com uma apresentação bem detalhada. O autor refere que a obra contém sete tratados, cada tratado tem sete capítulos e cada capítulo certas partículas. No Anexo 2 transcrevemos a *tavoadada* da *Pratica*. As semelhanças entre a *Pratica* de Ruy Mendes e o *Sumario* de Juan Andrés são denunciadas por Marques de Almeida [Almeida, 1994, v. I, p. 85]. Debruçar-nos-emos sobre este assunto na Terceira Parte deste trabalho.

A *Pratica d'Arismetica* foi dedicada a D. Teodósio I, duque de Bragança e enteado da madrinha do autor, D. Joana de Mendonça. É ainda referida a figura de Pero de Mendonça, irmão de D. Teodósio I, que motivou Mendes a procurar a proteção do duque, seu irmão. Nas palavras do autor, depreende-se que a sua relação com o mecenas vem por intermédio da sua madrastra e do irmão.

E posto que a isto me atrevesse sem ate ora V. S. de mi ter tanta notícia: tomeý ousadia em me lembrar e saber como a senhora duquesa Dona Joana de Mendonça<sup>51</sup> que V. S. tẽ em lugar de mãy era minha madrinha. E assi o senhor Pero de Mendonça<sup>52</sup> seu irmão: o qual me incitou pera o aver de fazer [Mendes, 1540, prologo].

É conhecido o interesse de D. Teodósio I<sup>53</sup> pela cultura tendo no seu convívio eruditos da época, contudo, não é conhecida nenhuma ligação documentada com Ruy Mendes. As afirmações do autor fazem-nos pensar que a sua ligação mais próxima era à família Mendonça, com forte presença em Mourão, então terra natal de Ruy Mendes. A sua ligação ao duque de Bragança terá vindo da parte de D. Joana.

O autor refere no prólogo dois livros de problemas que fizera. Estas publicações permanecem desconhecidos, contudo fazem parte do pacote de trabalhos para os quais é solicitado o apoio de D. Teodósio I.

E por eu pera este presente livro: e assi pera outros dous de perguntas que tenho feyto ter necessidade de hũa tal pessoa a quem pela dita causa os oferecese e dirigise cuydando em

---

<sup>51</sup> D. Joana de Mendonça foi esposa, em segundas núpcias, de D. Jaime I, pai de D. Teodósio I. Era filha de Diogo de Mendonça, fidalgo do Conselho do Rei e Alcaide-mor do Castelo da Vila de Mourão. (Chancelaria de D. Manuel I, liv. 8, f. 34 v) (digitalq.dgarq.gov.pt/) (Consultado em 23 de Agosto de 2013)

<sup>52</sup> Pero de Mendonça era filho de D. Joana de Mendonça.

<sup>53</sup> D. Teodósio I de Bragança (1505-22 de Setembro 1563) foi o quinto Duque de Bragança. Foi um homem culto e bem enquadrado nos ideais do Renascimento. O Professor Henrique Leitão apresentou uma comunicação sobre «Interesses e práticas científicas no inventário de D. Teodósio I», no âmbito do encontro sob o tema «De todas as partes do Mundo- o património do 5º Duque de Bragança, D. Teodósio I», que decorreu na FCSH-UNL, nos dias 29 e 30 de Setembro de 2011 e, sobre D. Teodósio I, informou-me da vontade do Duque em fundar uma universidade em Vila Viçosa.

qual seria: achey por muytas causas e razões ñ aver nestes reynos outra pessoa a quem com mais rezã os oferecesse e dirigisse que V. S. [Mendes, 1540, prologo].

Admite-se a hipótese dos livros mencionados serem as *Preguntas em materia de Arithmetica que se fazem e que se soltão* referidas por Diogo Barbosa Machado.

Ainda no prólogo, Ruy Mendes demonstra alguma preocupação com as críticas ao seu trabalho,

E porque ho louvor ñã parece bem na boca da [quele ... que toca]<sup>54</sup> nom insisto em louvar mais a obra o qual deixo pera fazerem aquellas pessoas que ho dito livro lerem e entenderem nas quaes confio que sendo pessoas virtuosas diram bem do que for pera dizer: e do que ñã ao menos como taes pessoas o calarã e encobrirã: o que nam hã de fazer outros muytos que eu sey que ham de querer remorder e mormurar de tudo movidos ou por enveja ou por malícia: ou por ser seu natural de tudo dizerem mal. E cõ temor destes taes que sempre no mundo ouve: tiverã por costume assi os antigos escritores como os presentes dirigirem e oferecerem suas escrituras a pessoas de estima e alto estado pera que avendo as por suas e tomando-as debayxo de seu amparo nenhũas pessoas das assi malivolas e murmuradoras ousasse murmurar nem maldizer das taes escrituras [Mendes, 1540, prologo].

Há um manifesto temor às críticas negativas da obra, ou antes, dos maldizentes e, o Duque de Bragança é o protetor desejado pelo autor também para o por a salvo das «más línguas». Sabemos que a *Pratica* só conheceu uma publicação. Estaremos perante um julgamento severo dos leitores, ainda que o tratado fosse apadrinhado por D. Teodósio I, figura de grande destaque na cultura portuguesa da época? O *Tratado da Pratica d'Arismetica* de Gaspar Nicolas foi republicado durante dois séculos e teve uma popularidade em nada comparável ao trabalho de Ruy Mendes. Numa análise das duas obras, a presença de uma aritmética mercantil é evidente, contudo, o modo como são introduzidos os assuntos por Mendes, bem como certos temas abordados, remetem-nos para uma boa organização, ainda que muitas vezes ligada a uma exposição «seca» a tender para uma espécie de «teorização». Teria sido esta característica um fator de afastamento de potenciais interessados? Estaremos em presença de um autor incompreendido pelo público de que se queixa no prólogo?

---

<sup>54</sup> Texto incompreensível. Reconstrução do texto entre os parenteses [...].



A *Pratica d'Arismetica* e os dois livros de *Preguntas* mencionados podem-nos levar a pensar num projeto de obra à semelhança do que hoje conhecemos como «livro de texto» e «caderno de exercícios»<sup>55</sup> destinados aos estudantes. Também a preocupação pedagógica sempre presente nas exposições de Ruy Mendes, em forma de motivação na introdução aos assuntos, como é o caso da introdução aos números quebrados. Ainda as explicações detalhadas dos temas, bem como a sugestão de metodologias diferentes, como é o exemplo da resolução de equações do primeiro grau por falsa posição ou, em alternativa, por redução de monómios semelhantes. Sem descurar o gosto do autor pelos problemas com números, e por assuntos, de certa maneira, desligados do mundo mercantil, são razões que nos levam a pensar que Ruy Mendes ensinava e que pretendia uma instrução mais abrangente para os seus aprendizes, fossem mercadores ou outros. A metodologia que demonstra liga-se ao pormenor e mantém-se afastada da «prática imediata» denotada por Gaspar Nicolas em múltiplos cenários.

---

<sup>55</sup> Na *Pratica* de Mendes está ausente a secção de «preguntas» que caracterizam os outros dois tratados de Gaspar Nicolas e de Bento Fernandes. Por exemplo, não aparecem problemas de carácter lúdico, à semelhança do que observamos noutros tratados.

### 3. Bento Fernandes

Bento Fernandes é-nos apresentado por Diogo Barbosa Machado como um mercador e um aritmético natural do Porto.

**BENTO FERNANDES** natural do  
Porto onde exercitou a mercancia, sendo  
hum dos mais celebres Arithmeticos do seu  
tempo compondo, e dedicando ao Sereni-  
ssimo Infante D. Luiz.  
*Arte de Arithmetica. Porto 1555. fol.*

Fig. 14 Bento Fernandes por Diogo Barbosa de Machado [Machado, 1741-1759, t. I, p. 501]

A sua obra em aritmética conheceu duas edições. *Arte de Arismetica*, editada em 1541 e o *Tratado da Arte de Arismetica* de 1555. Sobre a edição de 1541, Marques de Almeida diz-nos que saiu dos prelos de Vasco Dias Tanco de Frexenal e que não se conhece nenhum exemplar desta edição [Almeida, 1994, v. I, p. 92]. Do *Tratado da Arte de Arismetica* de 1555, existem três volumes que pertencem à Biblioteca Pública Municipal do Porto, à Biblioteca Pública de Évora e à «livraria particular d'El-rei» segundo o refere Maria do Céu Silva [Silva, 2011, p. 503].

No *Tratado da Arte de Arismetica* as páginas iniciais incluem o *Prologo* e as *Tavoadas*, que têm a função de índice dos temas da obra e do fôlio correspondente a cada um deles. O referido tratado apresenta-se como um texto composto por uma sequência de temas, não se encontrando dividido em capítulos. No Anexo 3 encontra-se a transcrição das *Tavoadas*.

Estudos recentes [Barros, 2013] mostram a atividade deste aritmético e mercador, também com uma posição de destaque no comércio da cidade do Porto e com ligações a redes internacionais de comércio como já referimos no Capítulo 2, na secção dedicada aos mercadores.

No prólogo, o autor refere a Matemática como a base das outras Ciências: «...a Mathematica he ho assento fundamento e escada segura pera sobir aas outras sciencias» [Fernandes, 1555, prologo]. Menciona ainda as áreas da Matemática, entre as quais, a Aritmética, a Música, a Geometria e a Astrologia, enaltecendo a primeira, dado que, considera ser importante para alcançar as outras ciências, conta, peso e medida.

E das quatro partes desta sciencia que sam Arismetica\ Musica\ Geometria\ Astrologia a mais principal dellas he a Arismetica porque pera alcançar as outras sciencias he necessario conta peso e medida [Fernandes, 1555, prologo].

Bento Fernandes usa a palavra «Matemática», mais abrangente do que a «Aritmética» a que se refere Gaspar Nicolas, ambos confluindo numa necessidade de aprender aritmética e na importância da «medida» no mundo material.

A grandeza do reino português e os polos de grande comércio, Índia, Mina e Guiné não são indiferentes a este autor.

E com esta se pode bem comparar a grandeza nobrecimento boa governança destes reynos de Portugal onde florece ho trato da mercancia e outros moores cõtratos e de mais qualidade como sam os da Índia\ Mina\ e Guiné e outras muytas contratações e vay em tanto crescimento sua fama e grande poder que excede a todos os reynos do mundo [Fernandes, 1555, prologo].

Invoca as teias comerciais e menciona a importância de saber Aritmética, «tam principal e proveytosa» [Fernandes, 1555, prologo], como motivação principal para a elaboração do tratado,

Pelo que por ser tam necessaria cousa a arte da Arismetica pera augmentaçam do trato que he serviço de Deos e d'el-Rey nosso senhor vosso irmão e pelo fruyto que fara ao povo me moveo compoer e ordenar este livro assi por ser esta arte tam principal e proveytosa como pela necessidade de que della haa [Fernandes 1555, prologo].

Bento Fernandes garante que no seu tratado se encontra tudo o que é necessário aprender e qualquer pessoa o poderá entender e aprender. O autor justifica ainda que dedica o *Tratado da Arte de Arismetica* ao Infante D. Luís<sup>56</sup> porque sabe que é alguém entendido e com gosto pelas artes liberais. Sobretudo para esta arte (a Aritmética) «que consiste em conta peso medida...» [Fernandes, 1555, prologo]. O Infante D. Luís, para além de ser irmão do rei D.

---

<sup>56</sup> O Infante D. Luís (1506-1555) era filho de D. Manuel I e de sua segunda mulher, a rainha D. Maria. D. Luís era tido como um jovem inteligente e interessado no saber. Teve lições do professor Pedro Nunes, com quem aprendeu filosofia, aritmética, geometria e astronomia. (<http://www.arqnet.pt/dicionario/luisinf2.html>) (Consultado em 12 de Maio de 2014)

João III era um dos protetores da rede comercial de Bento Fernandes e de António da Fonseca, como já referimos no Capítulo 2. O tratado de Fernandes gozou de privilégio real para o exclusivo de impressão por tempo de doze anos [Barros, 2013, p. 68].

Podemos encontrar traços comuns entre os prólogos de Gaspar Nicolas e de Bento Fernandes. Salientemos aqui a referência dada pelos dois autores a uma Aritmética pela qual se alcançam as outras artes. A motivação para a elaboração dos tratados prendeu-se, sobretudo, com a divulgação da aritmética no reino dada a grande teia comercial envolvente. Contudo, invocar a necessidade de conhecimentos em aritmética prática, foi também um motivo para valorizar as obras produzidas. Ambos publicitam uma apresentação dos assuntos de forma clara de modo a que todos consigam aprender. Bento Fernandes salientou ainda que, a Matemática se diferencia de muitos outros saberes dado que, «sem ser muy experimentado doutor nam pode ser comprehendida, nem entendida» [Fernandes, 1555, prologo], o que confere um estatuto especial a esta área e justifica tamanha «obra». Ruy Mendes refere que tirou muita coisa de outros livros que vira e realça a necessidade de um livro de aritmética no reino. Vai ao encontro de Nicolas e de Fernandes ao afirmar que apresenta o seu tratado e de forma tão organizada, que não será necessário mestre. Este tipo de discurso que estimula a autoaprendizagem, marca presença habitual neste tipo de obras.

Pela leitura dos três prólogos podemos concluir os três autores manifestaram acesa preocupação com as necessidades do reino que seriam evidentes, tendo em conta o incremento económico e a eventual escassez de «formação em contas», também obstáculo a uma boa prática comercial. No entanto os discursos apresentados nos prólogos de Gaspar Nicolas e de Bento Fernandes exibem semelhanças significativas e, dada a popularidade da obra de Nicolas, podemos pensar que Bento Fernandes a lera. Quanto a Ruy Mendes, o seu discurso coloca-nos em presença da necessidade de um livro de aritmética no reino, quando já eram conhecidas duas edições do *Tratado da Prática d'Arismétyca* de Gaspar Nicolas. Será difícil acreditar que Ruy Mendes não conhecesse estas obras. Muito provavelmente encontram-se entre os muitos livros que o autor afirma ter consultado. Cabe-nos averiguar até que ponto, aritmética de Gaspar Nicolas foi uma das fontes de Mendes.

À primeira vista, a grande diferença entre as três obras, deve-se sobretudo ao número de edições. Da aritmética de Mendes é apenas conhecida uma edição, do tratado de Bento Fernandes são conhecidas duas edições. O trabalho de Nicolas é o mais popular e com várias edições ao longo de dois séculos, como já referimos. A que serão devidas estas diferenças

dado que as motivações dos três autores apresentam pontos comuns? A obra de Ruy Mendes marcou a transição entre o tratado de Gaspar Nicolas, assente numa prática utilitária e muito necessária, sobretudo nas atividades da Casa da Índia e o de Bento Fernandes, destinado à formação aos mercadores, com o objetivo de os colocar em igualdade com os mercadores flamengos e italianos, como o próprio refere ao apresentar a regra da conta de Flandres.

Podemos aqui traçar um hipotético cenário para os três autores: Gaspar Nicolas ligado à Casa da Índia, no papel de «formador» naquela instituição; Ruy Mendes, um mestre de Arimética com contributos para a formação de mercadores; Bento Fernandes um mercador e um formador que pertenceu a uma classe de mercadores bem posicionada na sociedade portuguesa e que Amândio Barros designa por «comerciantes com nova mentalidade: negociantes organizados e influentes, produtores de ciência» [Barros, 2013, p. 51].

Três autores, três obras, um objetivo comum-ensinar aritmética prática no reino. Infelizmente nenhum deles refere no prólogo qualquer aspeto da formação de mercadores em Portugal, que é ainda um assunto envolto numa certa «neblina». Na época de Quinhentos era vulgar as famílias de posses recorrerem a professores particulares que ensinavam em casa de quem os contratava. A probabilidade de que estes três aritméticos tivessem essa função é bastante considerável. Quando consultamos as aritméticas publicadas em Portugal nesta época e analisamos o tipo de problemas que são colocados, somos levados a pensar que os mercadores, em especial os que estavam ligados a um comércio de grande porte, deviam saber calcular os custos das viagens, os impostos a pagar, os seguros, os investimentos a realizar, os lucros a obter ou mesmo, os prejuízos e riscos no negócio, para além de ser importante dominarem o sistema de pesos e medidas, o sistema monetário local, o sistema de registos contabilísticos. Contudo, aparecem-nos também assuntos de Matemática desligados do mundo mercantil, o que nos leva a pensar numa formação mais abrangente ou destinada a diferentes recetores.

No discurso dos autores é valorizada a autoapendizagem. Os próprios são autodidatas e, transmitem as suas vivências, nas obras produzidas. Dão-nos os seus testemunhos nos prólogos e ao longo dos textos. Não esqueçamos a vontade de Gaspar Nicolas em esclarecer as dúvidas de Arimética que lhe foram colocadas por D. Rodrigo de Tentúgal, uma «resposta isolada» que se viria a estender a um público mais alargado como o mostrou o sucesso da sua obra.

Ainda que a aritmética mercantil fosse, na sua essência, distinta da aritmética do *quadrivium*, mais ligada ao mundo universitário, não temos dados que nos permitam concluir que as duas coexistiam em separado e em ambientes distintos. Afinal encontramos traços de uma Matemática desligada do mundo mercantil nas obras em estudo, o que poderá estar ligado a uma tradição, a um objetivo de servir dois tipos de recetores ou oferecer uma formação mais abrangente, ou ainda, exibir conhecimento que refletisse um gosto pessoal, todos confluindo no desejo de partilhar conhecimento na forma de um registo que perpetuasse no tempo.



## **SEGUNDA PARTE**

### **A PRÁTICA D'ARISMETICA DE RUY MENDES COMPARADA AOS TRATADOS DOS SEUS CONTEMPORÂNEOS, GASPAR NICOLAS E BENTO FERNANDES**





## Capítulo 1 - Os temas da Matemática e a Matemática comercial

*Determiney cõpor ho presente livro no qual decrararey as cousas que pelo reportorio avãte parecem posto que com muyto trabalho e vigilancia tirando as forças e ho melhor e mais necessário de outros muytos livros que avia visto as quaes cousas a meu parecer vam tambem decraradas e tam bem divididas e por tam boa ordem que qualquer pessoa como pouco princípio que tenha podera por si mesmo tirar todo ho demais sem nenhũa outra pessoa lho ensinar porque o mesmo livro lho vai decrarando tam craramente que nom teraa necessidade de mestre [Mendes, 1540, prologo].*

---

### I. Introdução

A ideia de compor um livro onde os assuntos se distribuem segundo uma boa ordem está bem patente nas palavras de Ruy Mendes quando faz a apresentação do seu tratado no prólogo. Sendo a maioria das temáticas comuns aos três tratados aqui em estudo, a forma como se articulam e intercalam depende da configuração que cada autor lhes confere. Depende certamente do que cada um entende como fundamental para servir os objetivos que se propõem alcançar. Assim, deparamo-nos com três autores e três índices com ordenações diferentes para os mesmos assuntos<sup>57</sup>.

Confrontando as três obras, no nosso entender, é o tratado de Ruy Mendes que exhibe uma arrumação que espelha um tratamento de temas básicos, como as operações com números inteiros e com números fracionários, na base dos temas da Matemática. Aos problemas com números, segue-se uma Matemática dedicada às lides do comércio. Esta separação está patente no índice da obra e assenta numa estrutura que prevê uma extensão no conceito de número, a abordagem de temáticas sobre os números enquanto entidades abstratas, separadas das temáticas com fins comerciais. O tratado de Mendes parece-nos refletir o objetivo de ensinar as bases (o que pressupõe trabalhar com o número enquanto ente abstrato<sup>58</sup> ou enquanto entidade associada a algo concreto ou ator nas lides comerciais) e aplicar os conceitos básicos nas regras explanadas. Esta característica denota uma organização pensada para a dupla ensino-aprendizagem ou, como o próprio refere, a autoaprendizagem.

---

<sup>57</sup> Nos Anexos 1, 2 e 3 encontram-se descritos os índices propostos pelos três autores.

<sup>58</sup> Nas operações básicas da aritmética, os números vêm aplicados a «falsos» problemas comerciais, como a soma ou diferença de certas quantias de dinheiro. Os problemas com números referem o número como ente abstrato.

Os tratados de Gaspar Nicolas e de Bento Fernandes apresentam como pilar a regra de três, regra básica para os mercadores e pedra basilar das regras comerciais como as companhias e baratas. Será errado dizermos que estes autores não manifestaram qualquer interesse por temas da Matemática fora do mundo mercantil. Na obra de Nicolas temos a Geometria e para Fernandes a regra da *cosa*, contudo estes temas aparecem no final dos respetivos tratados, o que nos leva a encará-los como assuntos complementares pondo-se a hipótese de estarem destinados àqueles que tivessem, de algum modo, vontade de os aprender.

## **II. A organização da *Pratica*: uma estrutura pensada para servir interesses comerciais?**

Quando Ruy Mendes publicou a sua obra já eram conhecidas as edições de 1519 e de 1530 do *Tratado da Pratica d'Arismetica* de Gaspar Nicolas. Digamos que o caminho estava aberto para a publicação dos tratados de aritmética em Portugal. Contudo, a *Pratica d'Arismetica* não gozou de grande popularidade dado que só se conheceu uma única edição, como já referimos, e provavelmente com um número reduzido de exemplares<sup>59</sup>.

Sobre a estrutura da *Pratica*, as primeiras páginas contêm o prólogo. Segue-se o índice (tavoada) dos assuntos, com uma descrição bem detalhada. O autor refere que a obra contém sete tratados, cada tratado tem sete capítulos e cada capítulo certas partículas. Os conteúdos<sup>60</sup> mencionados são os seguintes:

- 1- A numeração e as operações (com as respetivas provas) com números inteiros - fol. 1 f - fol. 23 f;
- 2- Progressões com números inteiros – fol. 23 f - fol. 26 v;
- 3- Raiz quadrada e raiz cúbica com inteiros – fol. 26 v - fol. 33 f;

---

<sup>59</sup> Informação disponibilizada pelo Professor A. Marques de Almeida atendendo ao número reduzido de exemplares nas bibliotecas nacionais, «Há exemplares na BNL e na BPADE. Citada por Viterbo, p. 130; Anselmo nº621; Guimarães, p. 176, Barbosa III, p. 649; Inocêncio, VII, p. 176 e Pinto de Matos, p.391.» [Almeida, 1994, vol. I, p.92].

<sup>60</sup> O índice detalhado encontra-se no Anexo 2.

- 4- A numeração e as operações com números quebrados - fol.33 f - fol. 47 v;
- 5- Progressões com quebrados – fol. 47 v – fol. 50 f;
- 6- Raiz quadrada e raiz cúbica com quebrados – fol. 50 f – fol. 52 v;
- 7- Problemas com números – fol. 52 v – fol. 59 f;
- 8- Moedas, pesos e medidas – fol. 59 f - fol.61 f;
- 9- Regras de três com *preguntas*- fol. 61 f - fol. 67 v;
- 10- Regra de cinco – fol. 68 f, v;
- 11- Regra sem nome- fol.68 v, fol. 69 v;
- 12- Regra de mudar – fol. 69 v- fol. 70 v;
- 13- Regras de companhias – fol. 70 v – fol. 76 f;
- 14- Regras de baratas – fol. 76 f – fol. 80 f;
- 15- Regra de quarto e vintena (também tirar a quebra e quarto e vintena) – fol. 80 f – fol. 83 f;
- 16- Regra da conta de Flandres- fol. 83 f, v;
- 17- Regra de falsa posição (simples e dupla) – fol. 84 f – fol. 94 v;
- 18- Regras de câmbio – fol. 94 v – fol. 98 v;
- 19- Regras da liga de prata – fol. 98 v – fol. 107 f;
- 20- Regras da liga de ouro – fol. 107 f – fol. 110 f.

Dos sete tratados anunciados, o primeiro trata das sete «especies» da aritmética de números inteiros, a saber, numeração, adição, subtração, multiplicação, divisão, progressões, raízes quadradas e cúbicas. O segundo tratado apresenta as mesmas sete «especies» para números quebrados e ainda as provas para as operações. A introdução ao terceiro tratado descreve sete regras: quatro regras de três, a regra de cinco, a regra sem nome e a regra de mudar. A regra de três prevê também uma aplicação aos números quebrados que é concretizada através de dois problemas de conversão monetária, por aplicação da regra de três sem tempo somente. São os únicos exemplos da dita regra com números fracionários. Qualquer uma das outras regras anunciadas não é aplicada a números quebrados. No quarto tratado figuram outras sete regras: quatro regras de companhias e três regras de baratas. As regras são introduzidas e aplicadas a problemas com características comerciais. Entre as sete regras do quinto tratado, encontram-se a regra de tirar quarto e vintena, a regra de tirar a quebra e quarto e vintena, a regra da conta de Flandres, a regra de uma falsa posição, a regra

de duas falsas posições, a regra de câmbio miúdo e a regra de câmbio real. Neste tratado há uma mistura de assuntos ligados ao comércio da especiaria com temas relacionados com uma prática matemática mais distante dos temas comerciais. Referimo-nos aos problemas com números, usando as regras de falsa posição que, ao mesmo tempo, ocupam uma posição de destaque, tendo em conta o considerável número de fólhos que o autor lhes dedica. Para problemas associados às regras de quarto e vintena e da conta de Flandres temos quatro fólhos (80-83), contra os seis fólhos (84-89) dedicados aos problemas de falsa posição, simples ou dupla.

As regras de quarto e vintena e da conta de Flandres são específicas do comércio português ligado à especiaria e outros bens que chegavam à Casa da Índia e que seguiam para a Flandres. Ruy Mendes dedicou-lhes uma parte reduzida da sua obra, comparativamente ao que fizera para problemas de natureza «mais abstrata». Tanto Gaspar Nicolas como Bento Fernandes abordam as regras consideradas comerciais e são igualmente sensíveis aos problemas de falsa posição, designados por «oposição» na obra de Nicolas. Bento Fernandes dedica cinco fólhos do seu tratado às regras de quarto e vintena e da conta de Flandres (38-42), dando especial destaque à última regra, na forma de uma maior diversidade dos problemas. Este assunto será desenvolvido no Capítulo 3 da Segunda Parte. Sobre os problemas com números e as questões resolvidas por falsa posição, este autor destaca problemas «mascarados» com um enunciado comercial, como o exemplo que transcrevemos.

Quatro homens tem hũa quãtidade de trigo. Dise o primeiro, eu ã sey quãto trigo temos porem sey que se eu tevera mais  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{5}$  do que tenho e o segũdo meu tevera mais  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{5}$  e  $\frac{1}{6}$  do que tem e ho outro terceiro tevera mais  $\frac{1}{5}$  e  $\frac{1}{6}$  e  $\frac{1}{7}$  do que tem e ho outro quarto cõpanheiro tevera mais  $\frac{1}{6}$  e  $\frac{1}{7}$  e  $\frac{1}{8}$  do que tẽ que teveramos todos quatro .8960. moyos de trigo. Pregũto, quãto trigo temos todos e quãto tem cada hũ [Fernandes, 1555, f. 68 f].

Na *Pratica* de Ruy Mendes, o sexto tratado é sobre as sete regras da liga de prata e o sétimo tratado sobre as sete regras da liga de ouro. Está bem patente a importância do número

sete<sup>61</sup>. O autor apresenta-nos os sete tratados que compõe a sua obra e, por sua vez, cada tratado retoma o mesmo número de temas. Nos dois primeiros tratados temos as sete «especies» para inteiros e para quebrados. O terceiro tratado tem sete regras, o mesmo se verifica com todos os outros. Podemos prever uma intenção em arrumar sempre os assuntos de modo a conseguir os grupos de sete temas. Esta tendência não é de todo manifestada quer por Gaspar Nicolas, quer por Bento Fernandes.

Vejamos em paralelo a ordem dada por cada autor aos assuntos explanados.

Tabela 2: Distribuição dos temas nos tratados de Gaspar Nicolas (G. N.), de Ruy Mendes (R. M.) e de Bento Fernandes (B. F.)

G.N.	R.M.	B.F.
Operações com inteiros	Operações com inteiros	Operações com inteiros
Regras de três	Progressões com inteiros	Regra de três e de cinco
Regras de companhias	Raízes (quadrada e cúbica) com inteiros	Regras de companhias
Quarto e vintena	Operações com quebrados	Provas reais
Operações com quebrados	Progressões com quebrados	Outras regras de companhia
Regra de três com quebrados	Raízes (quadrada e cúbica) com quebrados	Operações com frações
Regra das oposições	Problemas com números	Regras de três com frações
Regra da conta de Flandres	Moedas, pesos e medidas	Regras de companhias com frações
Progressões	Regras de três com <i>preguntas</i>	Regra da menos diminuição
Baratos	Regra de cinco	Regra de quarto e vintena
Números	Regra sem nome	Regras da conta de Frandes

<sup>61</sup> O número sete tinha um significado muito especial na Antiguidade: sete maravilhas do mundo, sete os planetas do sistema cosmológico ptolemaico. Mesmo nas religiões, cristã e judaica, aparecia associado a tradições. Segundo a Bíblia, a criação do mundo demorou sete dias. A importância deste número para os judeus era elevada, dado que, o livro sagrado instituiu o ano sabático de sete em sete anos. Neste ano as terras repousavam. Também o símbolo da Velha Aliança entre Deus e os homens, o arco-íris ou "arco-da-velha", é composto por sete cores [Guimarães, 2012, p. 117].

<i>Preguntas</i>	Regra de mudar	Regra de baratas
Raiz quadrada e raiz cúbica	Regras de companhias	Regra das progressões
Geometria	Regras de baratas	Regra de pagamentos em diferentes moedas
Liga da prata	Regras de quarto e vintena	Regra de desconto reduzido a um dia
	Regra da conta de Flandes	Regras e razões de mercadores
	Regra de falsa posição (simples e dupla)	Regra de duas falsas oposições
	Regras de câmbio (miúdo e real)	Problemas para a determinação de números usando a falsa posição (oposição)
	Regras da liga de prata	Raízes (todo o género e modo de raiz)
	Regras da liga de ouro	Quatro regras de raízes
		Regra da zibra moquavel

Na tabela da Tabela 2 observamos que a base comum são as operações aritméticas com os números inteiros, embora com algumas variantes. Ruy Mendes exhibe as sete «especies» para os números inteiros num primeiro bloco. Para além das quatro operações aritméticas básicas, inclui, as progressões e as raízes, quadradas e cúbicas. Gaspar Nicolas trata apenas as cinco operações aritméticas básicas: «numerar, conta de assomar, conta de demenuir, conta de multiplicar e repartir» [Nicolas, 1963, ff. 1f-10f]. Bento Fernandes usa um modelo idêntico ao de Gaspar Nicolas, deixando as progressões e as raízes para outra etapa. Ruy Mendes trata dos números inteiros e em seguida dos números fracionários. A sua organização remete-nos para a tendência de, numa primeira fase, apresentar as bases das duas categorias de números, inteiros e quebrados, antes de passar a outros assuntos que dependam de um bom conhecimento e de uma manipulação eficaz destes números nas regras que se seguem e que perfazem as restantes partes da sua obra. Gaspar Nicolas e Bento Fernandes apresentam as regras comerciais nas primeiras páginas dos seus tratados e, dentro destas temáticas, seguem uma ordenação muito semelhante. O primeiro trata da regra de

quarto e vintena antes da regra da conta de Flandres. Pela variedade dos problemas exibidos, bem como das referências à Casa da Índia, somos levados a crer que era um assunto de destaque para o autor. Teria sido obra do acaso, uma necessidade ou um estatuto especial para uma regra tão necessária a quem a utilizasse na administração portuguesa? Gaspar Nicolas passa às operações com quebrados e à regra da conta de Flandres, às progressões, deixando para depois a regra de baratas. Parece haver uma vontade de intercalar temas de aritmética mercantil com assuntos matemáticos desligados do ambiente dos negócios. O seu tratado inclui ainda um conjunto de problemas que abordam as regras enunciadas, numa secção denominada «Números e Perguntas». Trata-se, não só, de um conjunto de enunciados para consolidação das regras mas também um meio de abordar outros temas.

Um assunto singular neste corpus aritmético é o tema «Geometria» presente no tratado de Gaspar Nicolas. Ruy Mendes deixa claro, em certas passagens da sua obra, que não se vai dedicar ao tema, como o refere no tema «raiz quadrada».

...Este tal numero que assi de acha se chama rayz quadrada do outro: e o outro se chama numero quadrado: e nõ deçraro aqui porque se chamã assi porque nõ faz nosso proposito e entra ã materia de geometria [Mendes, 1540, f. 26 v].

Bento Fernandes não menciona qualquer capítulo sobre geometria, contudo introduz um tema «novo», a «regra da cousa» que está ausente nos tratados dos seus antecessores. A organização temática exibida por Fernandes dá primazia às regras mercantis, tal como Gaspar Nicolas o fizera, contudo, há um bloco dedicado às regras de quarto e vintena e da conta de Flandres, que figura depois das regras de companhia e antes das baratas. As progressões parecem «perdidas» no meio de temas comerciais e entre todas as regras que o autor dedica aos mercadores. No final do tratado figuram temas de matemática desligados do mundo mercantil, como os problemas com números, já presentes nos trabalhos dos outros autores, e as «raízes de todos os tipos», como o próprio afirma.

A maioria dos temas abordados nas três obras são os mesmos contudo, detetámos diferenças em termos de organização. Rui Mendes exhibe uma divisão em partes, e cada uma procura ter uma estrutura homogênea. A obra em si, desenvolve-se no sentido de trabalhar as bases (neste caso as operações com números inteiros e com números fracionários) para atingir um bom domínio das regras. O autor evitou uma mistura de assuntos que, à partida, tivessem pouca relação entre si, agrupando temáticas com afinidades em tratados.



Recordemos o que nos diz no prólogo: «...as quaes cousas a meu parecer vam tambem decraradas e tam bem divididas e por tam boa ordem» [Mendes, 1540, prologo]. Podemos observar na Tabela 2 que conseguiu uma organização única entre os três tratados.

## Capítulo 2 - A Matemática «pour elle même»

*Primeiramête: te he neçeesario cõhecer as letras e despoys de conheçidas saber numerar cõvẽ asaber cõhecer estas mesmas letras quãto vallẽ* [Nicolas, 1963, f. 1].

---

### I. Introdução

A aritmética comercial assenta nas técnicas de cálculo, os números tornam-se entidades de «medida» e a sua anterior «figura» especulativa, perdeu-se no mundo mercantil. Os aritméticos portugueses de Quinhentos, apesar das suas supostas fontes conterem aspetos boecianos sobre o conceito de número, como o observamos no *Summa* de Pacioli e no *Sumario* de Juan Andrés, souberam entrar com êxito na modernidade numérica. M. Spiesser refere uma mudança no cenário numérico e uma nova organização dos números em «inteiros», «quebrados» e «mistos» [Spiesser, 2008b]. É precisamente esta tipologia que encontrámos nas aritméticas nacionais do século XVI, ou seja, os números inteiros exceto o zero, representados no sistema decimal indo-árabe; os números fracionários (quebrados), da forma  $\frac{a}{b}$ , tal que  $a$  e  $b$  são números inteiros naturais e  $0 < a < b$ ; os números mistos, representados por  $a\frac{b}{c}$  tal que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são inteiros naturais e  $a > 0$  e  $0 < b < c$ . Estes números assim escritos correspondem a  $a + \frac{b}{c}$ .

A introdução aos números ou letras da aritmética é semelhante nos três autores e como já mencionámos, é um assunto que dá início a cada um dos três tratados.

### II. As bases matemáticas necessárias: o cálculo aritmético

#### 1. Os números

Na *Pratica*, Ruy Mendes começou por apresentar as dez «letras» da aritmética, os algarismos de 0 até 9, escrevendo por extenso o nome de cada algarismo. Em seguida, fez a leitura dos números por classes e ordens. São exibidos vários exemplos, ao longo de quatro fôlios, que incluem ainda uma secção dedicada ao «zero (cifra)» e ao seu valor consoante a posição que

Nesta partícula quero poer alguĩs enxemplos pera decrarar como a dezena letra que he esta .0. a qual se chama cifra nam tem valia algũa salvo que faz valer as outras estando em algũ grao diante delas [Mendes, 1540, f. 3 v].

[illegible]

Relativamente aos números quebrados, Ruy Mendes descreve a sua origem.

<sup>62</sup> Um conto é igual a um milhão, usando a terminologia atual.

Gaspar Nicolas expõe uma introdução às «letras» da aritmética de modo idêntico à de Ruy Mendes, exibindo um esquema da mesma natureza para a leitura dos números. Sobre os números quebrados o autor não faz qualquer introdução antes passa de imediato às operações com quebrados, considerando o leitor já familiarizado com estes números.

Sobre a introdução das «letras» da aritmética, Bento Fernandes segue os passos dos seus antecessores, nomeadamente salienta as características de um sistema de posição, onde também o algarismo zero pode «aumentar» a valia dos outros algarismos quando colocado à direita dos mesmos. O autor não exhibe qualquer tabela de leitura de números por classes e ordens. Aos números quebrados não é dedicada, qualquer introdução. Bento Fernandes inicia a secção de números quebrados com as operações aritméticas básicas, denotando também a mesma característica «immediatista» de Nicolas.

## **2. As regras das operações básicas da aritmética**

O aritmético Ruy Mendes habitua sempre o leitor a uma introdução aos assuntos que pretende abordar. Depois da numeração, apresenta as «especies» da aritmética, ou seja, «Nomear. Somar. Demenuir. Multiplicar. Repartir. E progressão. E tirar raízes quadradas e cubecas» [Mendes, 1540, f.1 f]. Dos três autores é o único a referir «especies». Por exemplo, Bento Fernandes não usa a palavra «especies» mas sim «regras» da aritmética: «Aqui adiante vos mostrarey todas as regras desta arte» [Fernandes, 1555, f. 7 f]. Antes de passarmos à descrição de cada operação vamo-nos deter sobre a palavra «especia» então utilizada para as operações aritméticas enunciadas.

«Especia» é uma designação muito antiga e corresponde a uma divisão já presente num texto composto em castelhano entre 1393 e 1400, conhecido por *El Arte del Alguarismo* (*Ms. 46 de la Real Colegiata de San Isidoro de León*) [Caunedo e Córdoba, 2000], estudado e editado por Betsabé Caunedo del Potro e Ricardo Córdoba de la Llave. Nesta obra aparecem sete operações aritméticas fundamentais que correspondem às sete «especies»: adicionar, subtrair, multiplicar, dividir, repartição proporcional<sup>63</sup>, regra de três e frações. Sobre esta estrutura afirmam os autores: «El libro estructura la obra en siete “especies”, partes, que nos

---

<sup>63</sup> A repartição proporcional consiste em dividir uma quantidade em várias partes segundo critérios de proporcionalidade simples [Caunedo e Córdoba, 2000, p. 71].

recuerdan las siete “puertas” en que distribuye el contenido de su obra Fundamentos del Número, Abraham ibn Ezra (1140-1167)» [Caunedo e Córdoba, 2000, p. 63].

No *Suma* (1482) Santcliment exhibe, na introdução ao tratado, quinze «partes» também denominadas «especies» que são: contar, adicionar, subtrair, multiplicar, dividir, dividir por dois, regra de três, regra de companhias, regra de baratas, regra de troca, frações, ligas, regra de uma ou duas falsas posições, progressões e proporções. M. Labarthe, que estudou o tratado de Santcliment, afirma que o autor, no desenvolvimento do texto, omitiu a divisão por dois e as proporções e, ainda, acabou por considerar somente como «especies», contar, adicionar, subtrair, multiplicar, dividir, regra de três e as frações. M. Labarthe afirma que a divisão em sete «especies» mostra a ligação a uma tradição da qual Santcliment não se afastou [Labarthe, 2004, vol. I, p. 65].

A designação de «especia» encontra-se ausente nos tratados de Juan Ortega e de Ventaloll [Labarthe, 2004, vol. I, pp. 72-74], contudo é retomada por Juan Andrés no *Sumario* publicado em 1515. Andrés introduziu, no segundo tratado, as sete «especies» da aritmética: contar, somar, subtrair, multiplicar, dividir, progressões e extração de raízes (quadradas e cúbicas). Ruy Mendes menciona as mesmas sete «especies» que Juan Andrés. Este não é o único ponto comum aos dois autores. Na Terceira Parte debruçar-nos-emos sobre alguns pontos de ligação entre a *Pratica* e o *Sumario*.

## 2.1.Somar

Primeyramente digo assi: que somar nom he outra cousa, salvo ajuntar muytos numeros em hũ soo ou em muytos e saber o que se mōta em todos. E digo huũ soo por causa da primeyra maneira de somar que adiante decrararei que he a mais universal: na qual sempre os numeros vẽ ajuntar em hũ soo. E digo mais, em muitos por causa da segũa maneyra de somar que assi mesmo adiante decrarey na qual posto que os numeros algũas vezes se vem ajũtar em hũ soo: poreu pola mayor parte se vem ajuntar em outros muitos: a qual maneira nam he tam universal como a primeira. E por esta causa se chama esta especia somar porque por ella se vẽ ajũtar os taes números como dito he: por que somar quer dizer ajũtar [Mendes, 1540, f. 4f].

Esta introdução, embora à primeira vista confusa, refere, para além do significado do que é *somar*, as duas maneiras de fazê-lo. A primeira maneira diz respeito a somas com parcelas

de uma só «qualidade» por exemplo, somar «reais», ou «arrobas». A segunda maneira aplica-se a números que envolvam múltiplos e submúltiplos das unidades em causa, como somar «reais» e «vintães» e «tostões», no caso das unidades monetárias. Não estão aqui em causa dois algoritmos diferentes, como poderia parecer à primeira vista, mas antes exemplos com parcelas referentes a unidades distintas o que fica longe de uma definição genérica e aplicada a entes abstratos, tal com poderíamos esperar à partida. Como exemplo numérico da primeira maneira Mendes exhibe um esquema ligado a um enunciado que introduz o algoritmo.

Da qual pera decraçam da primeira maneira digo assi que a primeyra cousa que aveis de fazer he assentar todos los números que quiserdes somar hũs debayxo dos outros ordenadamente .s. unidade debaxo de unidade e dezena debaxo de dezena e centena de centena e milhar de milhar e assi avante: e depois fareys o que embayxo decrarey: pera entendimento do qual ponho hũ tal exemplo: e digo assi somando .3589. reaes cõ .7898. reaes cõ .8599. e cõ .886. e cõ .98. e com mais .5. que sam todos numeros de hũa calidade somente .s. de reaes quantos reaes se mōtarã ã todos [Mendes, 1540, f. 4 v].

3589	5		6
7898	2	De nove	6
8599	3		
886	4		
98	0		5
5	5	De sete	5
21075			

Figura 16: A figura associada ao algoritmo para a primeira maneira de somar

A importância de verificar a veracidade da soma é comprovada pela apresentação de duas provas: a prova dos sete e a prova dos nove.

A segunda maneira de somar referida por Ruy Mendes é ilustrada através de dois exemplos, um referente a unidades monetárias e o outro a unidades de massa. Reproduzimos aqui o segundo problema<sup>64</sup>:

<sup>64</sup>q.-quintais; arro.-arrobas; arra.-arráteis; on.-onças.

Somãdo .235. quintaes e .3. arrovas e .10. arratês e .5. onças cõ .3227. quintaes e .2. arrovas e .30. arratês e .15. õças e cõ .357. quintaes e hũa arrova e .28. arratês e .13. õças quantos quintaes e arrovas e arratês e õças formarã [Mendes, 1540, f. 6 v].

q. arro. arra. on.	
235 e 3 e 10 e 5	2 De nove $\frac{3}{3}$
3227 e 2 e 30 e 15	0
3575 e 1 e 28 e 13	6
<hr/> 7039 e 0 e 6 e 1	De sete $\frac{1}{1}$

Figura 17: A figura associada ao algoritmo da segunda maneira de somar

Mendes sublinha a importância da presença de uma «figura» para um melhor entendimento do procedimento algorítmico,

Digo que para o saberdes fazer poreis primeiramête os ditos numeros ã ordẽ como he dito e aqui na figura parece .s. quintaes debaxo de quintaes e arrovas d'arrovas e arratês d'arratês e onças d'õças direis assi .3. e .5. sã .8. e .5. sã .13. e duas dezenas sam .33. onças que fazem dous arrateês e hũa onça porque cada arratal tem .16. polo que poreis a hũa onça debayxo das onças como parece na figura... [Mendes, 1540, f. 7 f].

O processo descrito tem por base não só somar mas também converter. A conversão é um tema do terceiro tratado, «...no terceiro tratado deste presente livro no capitulo final parecera a dõde determino de decrarar as moedas pesos e medidas que mays comũmente nestes reinos se costumã» [Mendes, 1540, f. 7 f]. No Anexo 7 encontram-se as tabelas com as equivalências sugerias.

Ruy Mendes propõe ainda exemplos ligados a supostos problemas reais, usando unidades de massa ou unidades monetárias, além de mais, apresenta a prova de nove e, dedica alguns parágrafos à descrição das provas que utiliza, incluindo a prova real, utilizada na subtração. A conceção de *somar* para este autor assenta no pressuposto de que o número existe enquanto ente com o significado ligado ao que representa, daí as duas maneiras de somar exibidas.

## **A «conta de assomar» segundo Gaspar Nicolas a «regra d’assomar inteiros» de Bento Fernandes**

A principal diferença entre a «conta de assomar» de Gaspar Nicolas e o «somar» de Ruy Mendes, consiste no facto do primeiro usar os números sem mencionar qualquer unidade. Está em causa a prática do algoritmo e não o trabalho com eventuais unidades associadas. Vejamos um exemplo:

Enxêpro digo que quero assomar .2345676. e mais .497630. e mais .46987. e mais .2739. e mais .947. e mais .84. e mais .9. digo que assentes como aqui esta afegurado e começas sempre da mão derecha pera a mão esquerda e nã faz mais começar em çima que em baxo [Nicolas, 1963, f. 2 f].

No tratado de Bento Fernandes, a «regra d’assomar inteiros» [Fernandes, 1555, f. 7f] aparece com uma breve introdução sobre a designação «assomar», referindo que outros lhe dão outro nome, contudo não nos diz qual. O algoritmo é o mesmo que encontrámos nos dois autores antecedentes e assente no princípio de «juntar muitos numeros a hũ soo» [Fernandes, 1555, f. 7 f] sem apresentar qualquer esquema antes tudo é descrito em retórica. É dado o exemplo que consiste em somar os números 8240, 6420, 8562 e 19428, acompanhado de uma descrição retórica do algoritmo da soma. Seguem-se exemplos de enunciados comerciais, como aquele que diz respeito à soma de 2000 reais, 4000 reais e 3000 reais. Para confirmar os resultados da operação somar, o autor utiliza a prova dos nove.

### **2.2.Demenuir**

A definição de «demenuir» dada por Mendes é, de certo modo, condensada e engloba vários exemplos de números aos quais pode ser aplicado o algoritmo:

...demenuir nã he outra cousa salvo tirar hũ numero doutro e saber quãto he o que fica ou tirar hũ numero doutros muitos ou outros muitos de hũ: ou muitos de muitos: e saber assi mesmo que he ho que fica [Mendes, 1540, f. 7 v].



O autor clarifica as suas afirmações procurando explicar «todos os modos» de subtrair.

E digo que tirar hũ numero doutro e saber ho que fica por causa da primeira maneira de demenuir principalmente porque nella sempre se tira hũ numero doutro somête a qual é a mais universal como adiante decrararey [Mendes, 1540, f. 7 v].

Sobre a primeira maneira de *demenuir*:

Na qual pera decração da dita primeira maneira de demenuir que he a mais universal: digo primeiramête assi que aqueçe de serem duas maneiras: a primeira he quãdo o numero que queremos tirar acerta de ter todas suas letras tamanhas ou mays pequenas que as do outro que queremos tirar como se de .6578. reaes quiséssemos tirar .5456. as quais letras sam todas mais pequenas que as do primeiro numero. A segunda he quando ho numero que queremos tirar acerta de ter suas letras dellas mayores e dellas mais pequenas que as do outro ou todas mayores: salvo as que nom alcançar a ter encima: como se de .18625. quisessemos tirar .9836. as quais letras sã todas mayores que as que ham de estar en cima dellas e fica fora dellas o hũ como pareceria se as posesemos debayxo [Mendes, 1540, f. 8 v].

Os dois enunciados são em seguida realizados com todo o pormenor sendo exibidos os esquemas de cálculo. Vamos ilustrar o primeiro exemplo, dado que o segundo é muito idêntico em aspeto e realização, diferindo somente nas unidades que se vão «emprestando», na concretização do algoritmo, quando o algarismo do aditivo é inferior ao do subtrativo.

		8	
d. 6578	De nove	6	6
t. 5456		2	
f. 1122	De sete	5	
p. 6578	real	2	2
		3	

Fig. 18: Primeira maneira de «demenuir»

São exibidos algoritmos que envolvem unidades monetárias. Todos os resultados são confirmados pelas provas dos sete e dos nove, contudo, o autor considera que a prova real é a mais fiável. A filosofia utilizada para «somar» repete-se no caso de «demenuir» relativamente ao uso de números que representam «quantidades concretas».

## O «demenuir» segundo Gaspar Nicolas e Bento Fernandes

Gaspar Nicolas designa a operação por «conta de demenuir» e a introdução aos procedimentos para subtrair aparece simplesmente assim:

Se quiseres demenuir huia conta poeras primeyramente assoma maior em cima e de baxo desta poeras aquella quantidade que quiseres tirar. E começas sempre a mão direita como em assomar [Nicolas, 1963, f. 3 f].

O algoritmo é validado pela operação inversa, ou seja, utilizando a terminologia atual, a diferença é somada ao subtrativo tendo-se como resultado o aditivo. Os casos explanados reportam-se a situações em que cada algarismo do aditivo é maior do que o algarismo correspondente do subtrativo. A situação em que «as letras de baxo sejam maiores [Nicolas, 1963, f. 3]» é tratada segundo outra regra. Vejamos o que nos diz o autor:

Se quiseres saber demenuir huia conta desta maneyra que sejam mayores as letras de baxo que as deçyma faras desta maneira. Quando a letra de baxo nã poder sair da letra de cima pediras huñ ponto emprestado a mais perto letra que achares e este ponto que tu pedes emprestado val .10. e as de ajuntar este .10. com a outra letra que estiver diante. s. daquela que tu nam podeste tirar a letra de baxo e acordate que este huñ que tu pedes emprestado sempre o as de descontar daquela letra que tu pedes emprestado .s. se for .9. valera .8. e de for .8. valera .7. e se for .7. valera .6. e se for .6. valera .5. e se for .5. valera .4. e se for .4. valera .3. e se for .3. valera .2. e se for .2. valera huñ e se for huñ nã valera nada [Nicolas, 1963, f. 3 v].

Dada a regra é de imediato exibido um exemplo: «Quero tirar de .42324., .19798. Começas sempre da mão direita contra a mão esquerda...» [Nicolas, 1963, f. 3 v]. O algoritmo é retórico e acompanhado do esquema que transcrevemos e que inclui a prova real.

$$\begin{array}{r}
 42324 \\
 \hline
 19798 \\
 \hline
 22526 \\
 \hline
 42324
 \end{array}$$

Figura 19: A «conta de demenuir» segundo Gaspar Nicolas

Quando figuram zeros entre os algarismos, quer no aditivo quer no subtrativo, é aplicada a mesma regra.

Bento Fernandes diz que o nome «demenuir» vem de «tirar um numero de outro» [Fernandes, 1555, f. 8 v] ficando o primeiro número diminuído. Não deixa de ser uma ideia intuitiva de subtração muito terra-a-terra para o leitor bem entender. Contudo não traz nada de novo relativamente ao que já conhecemos. Para esta regra aparece um esquema algorítmico que, devido ao mau estado do tratado neste fólio, parece incompleto. Vamos então reproduzir o exemplo descrito:

E digo que quero tirar de .6846. reaes .3634. reaes e quero saber o que me resta. E p o saberdes poreis ha mayor soma encima que he os .6846. reaes e abaixo do risco poreis a menor soma que he o .3634. reaes como aqui vedes....

$$\begin{array}{r}
 6846 \\
 \hline
 3634 \\
 \hline
 (3212) \text{ }^{65}
 \end{array}$$

....s. falareis a primeira letra da mão direita dizendo (assi de .6. tirã) do .4. restan .2. e este .2. poreis debaixo do risco em [cima do]<sup>66</sup> .4. na primeira casa da unidade [Fernandes, 1555, f. 9 f].

Os enunciados são comerciais e o autor não deixa de referir o caso em que deve «pedir emprestado» uma letra a outras casas para efetuar os cálculos. Os casos explanados não diferem do que vimos em Gaspar Nicolas e em Ruy Mendes. Mudam apenas os enunciados.

<sup>65</sup> Esta última linha não é visível no texto. Resulta do que é descrito pelo autor.

<sup>66</sup> Texto incompreensível. Reconstrução do texto entre os parênteses [...].

### 2.3. Multiplicar

A quarta *especia* é multiplicar e vejamos como Ruy Mendes a introduz:

Na qual pera decraraçam da dita especia: digo primeiramente assi: que multiplicar nã he outra cousa salvo saber em tantas vezes tantos sem os por todos em figura quantos seram: como quẽ dissesse em .40. vezes .50. quantos sera: e obrãdo pola dita especia achariades que seriam .2000. sem pordes em figura os ditos .50. quarenta vezes pera os aver de somar: e aveis de saber que a hũ dos taes dous numeros chamamos numero multiplicado: que he o que se costuma por en cima como a diante pareceraa: e ao outro que se põe debaixo chamamos multiplicador: e sempre ho numero terceyro que sae da tal multiplicaçam ha de ser da calidade do multiplicador: e nam dado outro como nas seguintes partículas pareceraa. E aveys mais de saber: que porque sempre ho numero terceyro sae mayor e mais acrecentado que qualquer dos dous primeyros ou tamanho: porẽ nunca menor por isso se chama esta especia multiplicar: porque multiplicar quer dizer acrescentar [Mendes, 1540, f. 13 f].

Os fatores, 40 e 50, não traduzem qualquer quantidade o que mostra uma «evolução» relativamente às operações anteriores. O autor prossegue este assunto referindo que há muitas maneiras de multiplicar mas acaba por exemplificar apenas três. As suas escolhas vão para «multiplicar em asa<sup>67</sup>», a mais utilizada pelos mercadores, segundo o próprio afirma; «multiplicar mourisco», utilizada pelos mouros e mais segura, por sugestão dada ao leitor. Por último o «multiplicar em quadra» (gelosia). Como instrumento de trabalho Mendes expõe uma tabela de multiplicação que diz ser muito útil.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Figura 20: Tabela da multiplicação<sup>68</sup> de Ruy Mendes

<sup>67</sup> Também designada por multiplicar em «ala».

<sup>68</sup> Uma tabela semelhante encontra-se no *Summa* de Pacioli, com a diferença de incluir a linha e coluna para a multiplicação por 10.

O primeiro tipo de multiplicar assemelha-se ao algoritmo vulgarizado no ensino básico. Vamos aqui reproduzi-lo para saber o custo de «...7365. côvados de pano vendidos a .435. reais cada côvado...» [Mendes, 1540, f. 13 v].

7365		3
435	De nove	0 — 0
		3
36825		1
22095	De sete	1 — 1
29460		1
32033775		

Figura 21: Algoritmo da primeira maneira de multiplicar de Ruy Mendes

Ruy Mendes mostra mais um exemplo do multiplicar em «asa», que corresponde a multiplicar 305 por 50, figurando no algoritmo uma linha de zeros, correspondendo ao produto do zero (do 50) por 305. Só mais à frente é que vai tratar dos produtos particulares com zeros no algarismo das unidades e das dezenas.

O «multiplicar mourisco» é introduzido com um enunciado que retoma as situações comerciais: «...ẽ.73. covados de pano vẽdidos a .385. reaes o côvado quantos reaes se montarã» [Mendes, 1540, f. 15 f]. Vejamos a explicação do algoritmo que se caracteriza por uma extensão considerável:

...poreis primeiramẽte os ditos dous numeros em figura: da maneira que aqui parecem .s. o numero dos covados primeiro com hũa risca por cima e logo o preço debayxo de tal maneyra que sua unidade va a ter debaixo da primeyra letra do numero de cima contra a mão ezquerda como aqui parece: ao qual fareys outro risco por cima e começareis a multiplicar cõ a derradeira letra do multiplicador contra a mão ezquerda que he .3. pola do cabo do numero de cima que he .7. e direis assi .3. vezes .7. sam .21. e estes aveis de assentar logo todos encima do risco do multiplicador . s. a unidade que he hũ encima dos .3. que falã e a dezena que he .2. hũ grao avante como na figura parece. e esto feyto cõ os .3. aveis de fazer logo ho mesmo com a seguinte letra que he .8. e direis assi .8. vezes .7. sam .56. assentareys logo todos como dito he .s. a unidade que he .6. encima dos .8. que falam: e a dezena que he .5. hũ grao avante que sera sobelo hũ dos .21. e esto feyto com os .8. fareis o mesmo cõ a seguinte que he .5. e direis assi .5. vezes .7. sam .35. que

assentareis todos como dito he: e tendo assi acabado dareys hũ rasguinhos a todalas letras do multiplicador: e aa primeyra do numero de cima por final que ja falaste com ellas: e tambe por menos embaraço: e ficara entam a figura da maneira que acima aprarece. Agora mudareys o multiplicador hũ grao avãte pera mão dereyta . s. que sua unidade que he .5. vaa ter debaixo dos .3. tambe unidade do numero de cima: e as outras letras a tras por sua ordẽ como aqui na figura seguinte parecem e fazendo como dito he direys assi .3. vezes .3. sã .9. que poreys sobelos .3. por ser unidade: e entam direys .8. vezes .3. sam .24. que assentareis como he dito .s. os .4. sobelos .8. e os .2. atras e direis avante .5. vezes .3. sam .15. que poreis encima da maneira sobredita: e assi tereys a multiplicaçam acabada: porque indo assi mudando ho multiplicador e em chegando sua unidade a unidade do de cima nõ aveis de proceder mais. Agora lãçareis hũ risco por bayxo de todo e formareys as letras que estã encima das primeyras duas riscas e acahreys que somã .28105 [Mendes, 1540, f. 15 v].

O autor dá primazia a este algoritmo por considerá-lo muito seguro dado que, não é necessário memorizar as dezenas, o que traduz uma vantagem sobre o multiplicar em asa. Vejamos a «figura» elaborada para o efeito.

$$\begin{array}{r}
 21 \\
 94 \\
 5355 \\
 \hline
 216 \quad 73 \\
 \hline
 \cancel{3855} \\
 \quad \cancel{38} \\
 \hline
 28105
 \end{array}$$

Figura 22: O «multiplicar mourisco» de Ruy Mendes

Este algoritmo pressupõe um conhecimento da ordem de grandeza quer dos factores, quer do produto e tem por base uma decomposição dos factores em somas de modo a ter parcelas «mais simples de multiplicar». Assim,  $73 = 70 + 3$  e  $385 = 300 + 80 + 5$ . Os produtos intermédios advêm do conhecimento da distributividade da multiplicação em relação à adição e da ordem de grandeza dos resultados então obtidos.

Mendes considera ainda outras formas mais abreviadas de se chegar a um resultado pelo produto. Referimo-nos a casos em que um dos factores é 10, 100, 1000 ou mesmo, 200, 400, entre outros números com zero no algarismo das unidades, das dezenas, das centenas e por

aí adiante. Nas operações associadas aos exemplos dados, observamos uma preocupação constante na verificação da veracidade do resultado, utilizando para tal as provas.

### Multiplicar segundo Gaspar Nicolas e Bento Fernandes

Um *multiplicar* comum a Ruy Mendes e Gaspar Nicolas é o *multiplicar em quadra*, designado por *gelozia* ou *graticola*, para Nicolas. A figura que aqui apresentamos é de Nicolas, para o produto de 769 por 496.

	7	6	9	
	2	2	3	
	8	4	6	4
	6	5	8	9
	3	4	1	
	4	3	5	6
	2	6	4	
	Soma 3 8 1 4 2 4			

Figura 23: Um exemplo de multiplicar em gelozia por Gaspar Nicolas [Nicolas, 1963, f. 7 f]

Esta é uma regra que evita guardar em memória os números resultantes de somas intermédias, antes exhibe todos os produtos dos algarismos envolvidos com a particularidade de no final, se realizarem as somas dos algarismos constantes nas diagonais.

Gaspar Nicolas marca algumas diferenças relativamente a Mendes com a exibição do *multiplicar em cruz*:

Se queres saber outro modo de multiplicar mas que quer grande memoria e chamasse multiplicar em cruz que say toda a soma em huã regra teras este modo tomar as letras de çima e multipricallas cõ a de baxo e assentras as unidades e teras as dezenas na cabeça e

depois multiplicaras com esta mesma de çima a outra mesma letra de baxo e ajuntaras as dezenas que levavas com esta mesma multiplicaçam e tellos a todos na cabeça sem assentar nada. Ora tomaras a outra letra de çima e multipricallaas em cruz a de baxo e com a multiplicaçã que fazer ajuntaras os que dantes tinhas e todos juntos veras quantos sam. E poeras hos que passarem das dezenas ao pee e os outros guardaras. Ora multiprica a mesma letra que agora multipricaste cõ a outra de baxo convem a saber multiprica huña com a outra e com a multiplicaçam ajuntaras hos que levavas e assoma ho que todo fezer e assentalloas na derradeira .s. encontra a mão esquerda segundo a usanssa e modo de multiplicar [Nicolas, 1963, f. 6].

O esquema exibido pelo autor é muito simples e indica os fatores separados por um risco do produto. Para finalizar nota que, se os fatores têm mais do que dois algarismos, por exemplo, quatro algarismos cada um, terá que ser grande a memória de quem a realiza [Nicolas, 1963, f. 6 f]. Este tipo de multiplicar em cruz pressupõe uma decomposição dos números e a utilização do que hoje designamos por propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, para traduzirmos o que foi realizado e uma certa arrumação dos resultados nas respectivas classes e ordens. Vamos esquematizar o algoritmo apresentado, ou seja, efetuar o produto  $34 \times 23$ , considerando fatores escritos na forma da soma de dois números  $(30 + 4)(20 + 3)$

Centenas	Dezenas	Unidades
		2
	8	0
	9	0
6	0	0
7	8	2

O resultado 782 obtém-se somando os valores das colunas relativas a unidades, dezenas e centenas.

Bento Fernandes não introduz qualquer novidade relativamente ao que fizeram os seus antecessores. A «regra de multiplicar» compreende uma «definição» de multiplicação



semelhante à dada por Ruy Mendes, evitando passar de súbito ao algoritmo, como o faz Gaspar Nicolas. Os tipos de multiplicar que Fernandes propõe são em «asa», em «quadrado» («gelozia» para Nicolas e «quadra» para Mendes) e «abreviado» («multiplicar em cruz» de Nicolas). O autor desenvolve preferencialmente este último tipo. Estes algoritmos são acompanhados da verificação dos resultados utilizando a prova dos sete.

## 2.4.Repartir segundo Ruy Mendes, Gaspar Nicolas e Bento Fernandes

Sobre a divisão, Ruy Mendes faz uma breve introdução a alguns termos utilizados, por exemplo, sobre o que é dividir: «Na qual pera decraram da dita espezia digo primeiramête assi que reparti nã he outra cousa salvo saber em hũ numero quantas vezes entra outro [Mendes, 1540, f. 18 v]». Os algoritmos da divisão estão associados às situações descritas como «aquecer de várias maneiras», que passamos a referir:

...pode aquecer de duas maneyras das quais a primeira he quando ho partidor acerta de ser de hũa letra somente: assi como se fosse .2. ou .3. ou .4. ou .5. ou .6. ou .7. ou .8. ou .9. . a segunda he quando acerta de ser de duas letras ou de tres e dahi para cima: como se fosse .10. ou .324. ou .4572. e assi outros de mais letras [Mendes, 1540, f. 18 v].

A classificação a que o autor se refere assenta no número de algarismos do divisor. Para um divisor com um algarismo, Mendes exhibe um enunciado que consiste em dividir 324 reais por duas pessoas [Mendes, 1540, f. 18], no esquema que aqui reproduzimos

$$\begin{array}{r} 100 \\ 324 \\ \hline 162 \\ 222 \end{array}$$

O dividendo é 324 e o divisor 2, temos um quociente 162 e resto zero. Este mesmo exemplo é utilizado para outros divisores, como 3, 4 ou 5. Quando o divisor («partidor»<sup>69</sup>) tem três algarismos o autor recorre ao «dividir em galera»<sup>70</sup>, tal como o fizera o seu antecessor Gaspar

<sup>69</sup> Designação usada por Ruy Mendes para o divisor.

<sup>70</sup> Habitualmente referida por «divisão em galera» este método foi usado desde o século IX por Al-Khwarizmi e ainda se encontrava em uso no século XVI. Também conhecida por «divisão de Galley» (do nome de um monge veneziano). O esquema da divisão sugere a forma de um navio e, segundo consta, os mestres venezianos levavam os seus discípulos a desenhar em volta da apresentação do cálculo depois de o terem efetuado [Neves, 2007, p.44].

Nicolas, sem que a expressão «dividir em galera» figure no texto de qualquer um deles. Um exemplo deste processo é-nos descrito de forma minuciosa por Gaspar Nicolas e acompanha-o e esquema da divisão.

...querêdo tu repartir .43684. por .23. pessoas cõvem que ponhas o partidor a mão esquerda de baxo das derradeiras letras. Ora poem .43684. e daras huũ risco assi como aqui esta afegurado e digo que ponhas ho partidor de baxo das primeiras letras a mão esquerda ora poem .23. de baxo de .43. e diras em .4. quantas vezes a hy .2. bem avia a hy duas mas por estas duas an se de multiplicar cõ a outra letra que ficou do partidor que he .3. onde as de dizer .2. vezes .3. sam .6. e am de sair da letra que esta diante do .4. que he .3. e bem ves que nõ podem sair .6. de .3. e por esta rezam nã a hy em .4. 2. Vezes .2.. Porem avera huũa onde diras huũa vez .2. sam .2. quem os tira de .4. ficam .2. e este mesmo .2. poeras em çima do .4. como aqui ves na mesma conta ora poys torna com este huũ a dizer huũa vez .3. e .3. quem os tira de três nam fica nada poeras huũa cifra em çima do mesmo três. Ora mudaras o partidor adiante huũa so casa e hiras pelo .2. acima e acharas huũa cifra escontra a mão esquerda em direyto do mesmo .2. e porque atras da cifra estan .2. as de notar que valem .20. e diras em .20. quãtas vezes a hy .2. bem averia ahy .9. e ficariam .2. que valeriam .20. e .6. que estan diante sam .26. ora tem estes .26. em memoria e por que dixe que avia ahi .9. vezes .2. as de dizer com este .9. três vezes .9. sam .27. e tu bem ves que nam podem sair de .26. que te mandey guardar e por esta rezam nama vera hi .9. vezes .2. se nã avera .8. onde diras .8. vezes .2. sam .16. quem os tira de .20. ficam .4. e diras .8. vezes .3. sam .24. quem os tira de .46. ficam .22. ora muda o partidor huũa so casa adiante e hiras por elle acima e ebm ves que esta .2. em fronte e atras estan outros .2. assi que valem .22. e assi diras em .22. quantas vezes a hy .2. e que aja quantas quiserem nam lhe podes dar mais de .9. ora dalhe .9. e ficam .4. ora torna com este .9. a falar com o .3. do partidor onde diras .9. vezes .3. sam .27. quem os tira de .48. ficam .21. e acordate sempre que tires as unidades das unidades e as dezenas das dezenas pois tira .7. de .8. fica huũ assenta este huũ en çima do .8. ora tira duas dezenas de .4. que estan atras do .8. e ficam .2. assenta esta .2. em çima do .4. ora muda o partidor que he .23. e diras em .21. quantas vezes a hy .2. e bem ves que ahy .9. e ficam .3. que valem .30. onde diras com este .9. nove vezes .3. sam .27. quem os tira de .34. ficam .7. poeras .7. en çima do .4. e este .7. fica por partir e teës sabido que quem parte .43684. por .23. pessoas que vem a cada pessoa .1899. reaes se quiseres provar multiprica .1899. por .23. e ajuntalhe 7 depois que for multiplicada .s. o .7. que te ficou por partir e faras justamente aproia soma de que primeiro fezeste

mençam que sam .43684. e oulha da maneira que aqui esta feyta a conta com sua prova  
[Nicolas, 1963, f. 9 v].

00			
220		1899	
0443		23	
20217		<hr/>	5697
43684	1899		37987
23333		Prova	<hr/> 43684
222			

Figura 24: Dividir 43684 por 23 [Nicolas, 1963, f. 9 v] usando a «divisão em galera»

À semelhança do que considerou para a multiplicação, Mendes menciona um «dividir abreviado». A ideia é a mesma da multiplicação, considerando os casos particulares em que o divisor é 10, 100 ou 1000. A «receita» é simples: quando o divisor for 10, tirar ao dividendo uma «letra» à direita (o algarismo das unidades); quando o divisor for 100, tirar ao dividendo duas letras à direita (os algarismos das dezenas e das unidades). O processo é semelhante para 1000. Tudo é ilustrado com exemplos. O objetivo sempre presente é praticar para aprender. Na verdade ao longo da sua obra, Ruy Mendes manifesta muitas qualidades pedagógico-didáticas, o que nos leva a crer que escreveu o seu livro a pensar na arte de bem ensinar e bem aprender.

Bento Fernandes diz que a regra de «repartir inteiros» é a quarta regra da arte da aritmética. A primeira regra para repartir envolve uma divisão em que o divisor tem um só algarismo. Para ilustrar o autor apresenta o problema seguinte: «...9 homens ganharão .2486. reaes e querem partir este dinheiro por todos ha igual parte. Pregũto quanto vira a cada hum» [Fernandes, 1555, f. 14 v]. O algoritmo utilizado é comum aos seus antecessores. Bento Fernandes apresenta casos da divisão em que o divisor é 10, 100 e 1000, como o fizeram os autores precedentes. Encontrámos um enunciado para repartir 2832 cruzados por 12 pessoas. O divisor 12 fora também usado por Gaspar Nicolas para repartir 15600 reais por 12 pessoas. Como última regra para repartir, Fernandes mostra o «repartir mudando o partidor», referindo que se trata de uma regra trabalhosa. Esta regra é a «divisão em galera» já encontrada nas outras aritméticas. A diferença está na ordem de grandeza o dividendo que é superior ao dos casos anteriormente descritos. Trata-se de dividir 86326 por 19 o que requer

um maior número de operações intermédias. Há um cuidado por parte do autor em referir que nesta divisão, devemos experimentar as «letras» para o quociente até encontrar a certa e isto faz-se «descendo» depois de se experimentar uma «letra» que não serviu [Fernandes, 1555, f. 17 f]. A ideia da tentativa erro é uma prática pedagógica muito enriquecedora para o aprendiz, o que mostra que Fernandes não dá imediatamente uma receita mas indica um caminho a seguir.

No tratado dedicado aos números inteiros, Ruy Mendes continua com o estudo das progressões e das raízes quadradas e cúbicas. Nesta etapa não é acompanhado por Gaspar Nicolas e por Bento Fernandes que o deixam para uma fase posterior. Abordaremos aqueles assuntos no próximo capítulo.

### **2.5.A aritmética dos números quebrados**

Ao longo desta exposição vimos em paralelo os assuntos dos três tratados, relativamente à aritmética básica, observando-se uma notória continuidade apresentada por Ruy Mendes às bases do cálculo. Terminada a apresentação das sete «especies» para números inteiros, Mendes aborda este mesmo assunto para números quebrados, considerando as mesmas sete «especies». Nesta secção ficarão por analisar as progressões e raízes de quebrados sobre as quais nos deteremos na secção III deste capítulo.

Uma característica de Mendes consiste em fazer uma introdução antes de abordar os assuntos. A definição de número quebrado não escapa a esta regra,

...numero quebrado nõ he al: salvo hũ numero que tẽ algũa parte ou partes doutro numero inteiro: o ql numero quebrado se acha ã totalas cousas assi de moeda como de peso e medida: e outras quaisquer e dizemos hũ meyo de hũ cruzado ou de hũ quintal ou de hũ alqueire: e assi de totalas cousas [Mendes, 1540, f. 33 v].

Esta definição pressupõe uma certa «utilidade» para estes números, ou seja, são encarados como instrumentos de «medida». Mendes reforça ainda a utilidade dos números quebrados quando afirma:

...hũ meyo de hũ cruzado he parte de cruzado e nam todo e dous terços de hũ quintal ou de hũa vara sam partes do quintal ou da vara: porẽ nam todo ho quintal ou a vara: e portanto sã números quebrados [Mendes, 1540, f. 33 v].

Usando a máxima de «ver para crer», as partes das unidades conhecidas devem ser representadas por entes matemáticos. Admitindo as partes das unidades, os resultados das operações comerciais terão sentido. Este modo de atuar vai estar presente nos problemas de baratas e companhias, como veremos no Capítulo 3 da Segunda Parte. O autor pretende dar «sentido real» aos números quebrados, contudo, até que ponto, na prática comercial, serão utilizadas frações do «quintal», do «real», entre outros? O pensamento denotado por Ruy Mendes parecer oscilar entre a noção de número como ente abstrato e a ideia de número associado ao «concreto».

Uma introdução detalhada aos números quebrados está ausente quer no tratado de Gaspar Nicolas<sup>71</sup>, quer no de Bento Fernandes. Os dois começam a secção dedicada aos números quebrados com a adição e sem qualquer motivação que conduza à sua natureza e utilidade.

Podemos considerar que Mendes introduz toda a linguagem associada aos números quebrados, tais como simplificar quebrados<sup>72</sup>, antes de passar aos problemas e operações. Nos quatro fólios dedicados à introdução aos números quebrados, o autor inclui uma explicação sobre a origem destes números.

Na qual quero decrarar a quarta cousa que sera saber donde naceo ho tal numero quebrado e donde foy seu primeyro principio: pera o qual aveis de saber que ho numero quebrado naceo e principiou da especia de repartir por inteiro quando ficou algũa por repartir como tendes visto atras na dita especia: porque como ficou numero por repartir por causa de nom poder ho partidor ja nelle entrar foy necessário quebrar o que assi ficava pera o acabar de repartir: e como assi fez começou logo dali ho tal numero quebrado: e nam de nenhũa especia das de atras [Mendes, 1540, f. 33 f].

Para reforçar a ideia «do que ficou por repartir», Mendes propõe: «repartir 285 reais por 7 pessoas e saber quanto vem a cada uma» [Mendes, 1540, f. 35 v]. Vem a resposta «40 reaes

---

<sup>71</sup> Para além da designação «quebrado», Gaspar Nicolas usa também a expressão «roto» para designar um número fracionário [Nicolas, 1963, f.22 f].

<sup>72</sup> Neste contexto referimo-nos a tornar uma fração irredutível.

e  $\frac{5}{7}$  do real... nẽ mais nẽ menos» [Mendes, 1540, f. 35 v]. O que vem reforçar a ideia de que a representação fracionária é perfeita e poderá ser usada com confiança, sem contudo apresentar qualquer equivalência monetária para os  $\frac{5}{7}$  do real, o que é natural, uma vez que o autor admitiu as partes das unidades consideradas. Mesmo noutras situações, como as companhias e baratas, veremos que são admissíveis as partes fracionárias das moedas. São entendidos como valores exatos nas operações e a presença da expressão «nem mais, nem menos» garante o «bom resultado». Será lícito negociar com  $\frac{5}{7}$  do real? No Capítulo 3, a propósito das regras comerciais, veremos que é Gaspar Nicolas que tem a preocupação de reduzir as frações a unidades monetárias concretas, mesmo com alguns «erros» nos arredondamentos. Ruy Mendes continuará fiel às partes fracionárias de qualquer unidade de «medida».

As sete «especies» para quebrados são exatamente as mesmas que Mendes considerou para números inteiros. O «nomear» consiste em «saber dar ho nome a cada numero quebrado<sup>73</sup>». Sobre a soma de quebrados, Ruy Mendes considera cinco maneiras [Mendes, 1540, f. 37 v] consoante «natureza» dos números que figuram nas parcelas: somar quebrado com quebrado; somar quebrado com inteiro; somar quebrado com inteiro e quebrado; somar inteiro e quebrado com inteiro e quebrado; somar inteiro com inteiro e quebrado. Os cinco tipos são exemplificados para que o leitor entenda bem e saiba fazer. Um caso particular, é aquele em que as frações têm todas o mesmo denominador. O algoritmo utilizado é o encontrado em Gaspar Nicolas, embora com exemplos numéricos diferentes e com mais detalhe. Descrevemos o caso referente à soma de « $\frac{4}{5}$  avos com 7 inteiros e  $\frac{2}{3}$  avos<sup>74</sup>» e ao esquema utilizado, pondo 7 de parte e trabalhando unicamente com as partes fracionárias.

---

<sup>73</sup> Por exemplo, uma parte de quatro de um número inteiro, ou seja,  $\frac{1}{4}$ . avo [Mendes, 1540, f. 37 f].

<sup>74</sup> Este exemplo corresponde à soma de quebrado com inteiro e quebrado.

$$\begin{array}{rcccl}
 12 & & 10 & & \\
 4 & \searrow & 2 & \nearrow & 8 \\
 5 & \nearrow & 3 & \searrow & 15 \\
 \hline
 & 22 & & & \\
 & c\tilde{o} & & & \\
 & 15 & & & 
 \end{array}$$

Figura 25: Soma de quebrados por Ruy Mendes [Mendes, 1540, f. 38 f].

Depois de exemplificar todos os tipos previamente definidos para a soma de quebrados, Ruy Mendes parece querer «arrumar a casa» no sentido em que, dedica uma partícula às «quatro dições» [Mendes, 1540, f. 39 f]. Trata-se de quatro expressões, com/de/por/a que correspondem às operações aritméticas adição/subtração/multiplicação/divisão. Dos três aritméticos é o único a referi-las e a usá-las nos esquemas elaborados.

Após o preâmbulo dedicado às «dições», Mendes aborda as restantes «especies». A subtração (*demenuir*) apresenta seis modos («aquecer em seis maneiras [Mendes, 1540, f. 40 f]»), consoante o aspeto dos números, tal como aconteceu para a adição. Assim temos: subtrair dois números quebrados; subtrair quebrado de inteiro; subtrair quebrado de quebrado e inteiro; subtrair inteiro e quebrado de inteiro e quebrado; subtrair inteiro de inteiro e quebrado; subtrair inteiro e quebrado de inteiro. Para esta operação é utilizada a prova real para verificar se os valores obtidos estão corretos. O esquema apresentado é idêntico ao da adição com a diferença da presença do «de» em vez do «com», associado à expressão «tirar tantos de tantos» [Mendes, 1540, f. 42 f].

Multiplicar quebrados é um assunto explicado por Ruy Mendes de forma clara e sempre com muitos exemplos ligados à atividade comercial. São multiplicados números tendo em conta se são fracionários ou mistos (inteiro e quebrado) dando origem aos vários tipos de multiplicar: multiplicar quebrado por quebrado; multiplicar quebrado por inteiro; multiplicar quebrado por inteiro e quebrado; multiplicar inteiro e quebrado por inteiro e quebrado; multiplicar inteiro por inteiro e quebrado. Vejamos o exemplo de um enunciado que invoca uma hipotética situação comercial.

Na qual pera declaração da segunda maneira que he quãdo se que multiplicar quebrado so por inteiro so digo assi: em .5/6. avos de uma vara de pano vendidos a .30. reais a vara: quãtos se mōtarã. Digo que ho sabereis assi poreis primeiramente estes números em figura da sorte acyma decrarada: pondo hũ debaixo dos .30. como já tenho dito e aqui se demonstra

e obrado como acima he decrarado achareys que vem na repartição .25. e tãtosreaes direis que se montará [Mendes, 1540, f. 42 v].

O esquema inclui o «por» para a multiplicação<sup>75</sup>.

$$\begin{array}{r} 5 \quad \frac{150}{\text{por}} \quad 30 \\ 6 \quad \frac{6}{1} \end{array} \quad 25$$

Figura 26: Multiplicação de quebrados por Ruy Mendes

Podemos encontrar semelhanças com a atual expressão do produto de frações, se tivermos em conta que o «por» tem o mesmo significado do símbolo  $\times$ , admitindo que o autor está mais próximo de uma linguagem simbólica

$$\frac{5}{6} \times \frac{30}{1} = \frac{150}{6} = 25$$

A terminar o capítulo da multiplicação, Mendes introduz o «multiplicar por muitos números» [Mendes, 1540, f. 44 v], o que se traduz por considerar mais do que dois fatores.

A divisão dos números fracionários («repartir quebrados» [Mendes, 1540, f. 44 v]) acontece em «doze maneiras» [Mendes, 1540, f. 45 f], divididas em dois grupos, consoante «o número de repartir seja menor que o partidor» [Mendes, 1540, f. 45 f] ou o «número de repartir ser maior que o partidor» [Mendes, 1540, f. 45 f]. Cada um destes grupos contem seis variantes: dividir quebrado por quebrado; dividir quebrado por inteiro; dividir quebrado por inteiro e quebrado; dividir inteiro e quebrado por inteiro e quebrado; dividir inteiro por inteiro e quebrado; dividir inteiro e quebrado por inteiro. À semelhança do que se passa nas outras operações, Ruy Mendes utiliza «a<sup>76</sup>»ao dividir as frações. Exibimos o esquema para o caso da divisão de «quebrado só a quebrado só», entre as doze enunciados propostos pelo autor.

<sup>75</sup> A expressão do texto corresponde a «multiplicando tantos por tantos» [Mendes 1540, f. 39 f].

<sup>76</sup> A expressão dada corresponde a «repartir tantos a tantos» [Mendes, 1540, f. 39 f].



$$\begin{array}{ccc}
 4 & & 3 \\
 & \nearrow \quad \nwarrow & \\
 \frac{2}{3} & \text{a} & \frac{1}{2} \quad 1 \frac{1}{3}
 \end{array}$$

Figura 27: Divisão de quebrados por Ruy Mendes

A propósito das operações que temos vindo a referir, quer Nicolas quer Fernandes, não as desenvolvem de maneira tão exaustiva como Mendes. Antes abordam o essencial de modo mais abreviado e usando expressões como «assomar quebrados de todas has maneiras» [Nicolas, 1963, f. 21 f], como o refere Gaspar Nicolas. As variações dizem respeito a exemplos numéricos diferentes contudo semelhantes em termos de procedimentos. Quer Nicolas quer Fernandes introduzem casos particulares da divisão em que o divisor seja alguma das frações  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$  ou  $\frac{1}{5}$ , embora associados à regra de companhia, mesmo que não explícito<sup>77</sup>. Estes divisores particulares não são considerados por Ruy Mendes.

### III. Os temas da Matemática

#### 1. Progressões

Os tratados de aritmética prática escritos em Portugal acompanharam uma tendência, já manifestada noutras obras anteriores, para enquadrar temas ligados ao «fazer matemática pelo gosto de o fazer» (que designamos por matemática «pour elle même») através de assuntos à partida desligados do mundo mercantil. Começamos por enquadrar nesta categoria as progressões e a raiz quadrada e a raiz cúbica. Deixaremos para o próximo capítulo outras práticas, que aparentemente ligadas ao mundo mercantil, através de enunciados comerciais, servem também objetivos matemáticos.

Começamos esta abordagem com as progressões. Qual é o significado de «Progressão» segundo os três autores? Podemos observar que o tema localiza-se em momentos distintos em cada um dos três tratados<sup>78</sup>, o que por si só nos poderá levar a crer que seria um tema

<sup>77</sup> O trabalho de Gaspar Nicolas inclui, nos fólhos 25 e 26 uma miscelânea de assuntos onde encontrámos o *Repartir por meo e terço e quarto*. Este tipo de dividir conjuga-se com exemplos da regra de companhias já desenvolvida em secção própria [Nicolas, 1963, f. 13].

<sup>78</sup> Consultar a tabela relativa aos temas em II-Cap. 1.

para servir objetivos diferentes. Na *Pratica*, as progressões fazem parte do pacote das «especies» da aritmética, propondo-nos o autor a definição seguinte:

Progressam nam he outra cousa: salvo poer muitos numeros hũ avãte doutro: de tal maneira que o que exceder ho segundo ao primeiro: eyceda ho terceyro ao segundo: e ho quarto ao terceyro: e o quinto ao quarto: e assi avante e saber o que somã todos. E por esta causa progressão que quer dizer ir avante por degraos [Mendes, 1540, f. 23 v].

Ruy Mendes acrescenta que há muitas maneiras de representar as progressões, contudo, por uma questão de «nã alargar muyto no presente livro<sup>79</sup>», apresenta apenas dois tipos. O primeiro corresponde ao que atualmente designamos por progressões aritméticas (com as respetivas razões 1, 2 ou 3), o segundo corresponde a exemplos de progressões geométricas (com razão 2 (dobrando), 3 (três dobrando) ou 4 (quatro dobrando)). A definição é acompanhada por uma tabela com alguns termos consecutivos de progressões aritméticas com razões, 1, 2, 3 e 4, respetivamente, que passamos a reproduzir.

1	2		2
2	4	4	6
3	6	7	10
4	8	10	14
5	10	13	18
6	12	16	22
7	14	19	26
<hr/>			
28	56	69	98

Figura 28: Progressões: «Um excesso, dois excesso, tres excesso e quatro excesso [Mendes, 1540, f. 23 v]»

<sup>79</sup> O autor usa com frequência esta razão para justificar a ausência do desenvolvimento de certos temas [Mendes, 1540, f. 23 v].

Sem grandes justificações, Mendes dá a regra para a soma de termos consecutivos, mais concretamente, a que corresponde à soma de  $n$  termos consecutivos de uma progressão aritmética<sup>80</sup>, com uma descrição detalhada da regra.

...ajuntareys sempre ho numero do cabo debaixo cõ o primeiro de cima em que se a tal começar: e tal soma partilaeis polo meyo e tomareis hũa das metades e multiplicalaeis polo numero que fezerẽ as regras da tal progressão: e quanto sair tanto direid que se monta nella: e se ao ajuntar dos taes numeros sair sua soma numero ão par .s. que se ão possa partir polo meyo sem quebrar: entã digo que ho deixareis todo he partireis polo meyo ho numero que as regras fezerẽ: e por hũa das metades ho multiplicareis: e o que sair direis que se mõta na tal progressã [Mendes, 1540, f. 24 f].

Para os dados da tabela são calculadas as somas dos termos também mencionados e os resultados são comprovados pela prova dos nove. Os exemplos que correspondem às progressões geométricas são-nos relatadas seguindo um processo idêntico. É exibido um quadro com os primeiros termos consecutivos e em seguida procede às somas dos termos, segundo a regra,

...a primeira coisa que aveis de fazer ha de ser tiralo primeiro numero do derradeiro: o que feyto cuidareis logo que letra ou que numero he aquele que estaa no nome da tal progressã e a hũ menos quele repartireis logo o que ficou: e ho que vier somareis cõ o derradeiro: e ho que somarẽ ambos direis que que he ho que se mõta na tal progressão sem duvida nenhũa [Mendes, 1540, f. 25 v].

1	2	3
2	6	12
4	18	48
8	54	192
16	162	768
32	486	3072
<hr/>		
63	728	4095

Figura 29: Progressões: «dois dobrada, três dobrada e quatro dobrada» [Mendes, 1540, f. 25 f]

<sup>80</sup>O valor das somas encontra-se na última linha da tabela.

Se pensarmos na fórmula da soma de  $n$  termos consecutivos de uma progressão geométrica, podemos dizer que Mendes utiliza-a para somar  $n-1$  termos consecutivos e, ao que vier desta soma, adiciona-lhe o último termo. Este processo é aplicado a todos os casos que exhibe.

A abordagem de Mendes às progressões inicia-se com a «definição», conta com um desenvolvimento baseado em exemplos e termina com a regra da soma de  $n$  termos consecutivos. Esta abordagem difere daquela que nos apresenta quer Gaspar Nicolas, quer Bento Fernandes. No tratado de Gaspar Nicolas o assunto aparece sob o título «Aqui começam as progressões» [Nicolas, 1963, f. 36 v]. «Definição» não existe mas antes, o objetivo claro de determinar as somas dos termos. Por exemplo, somar os termos 2, 4, 8, 16, 32, 64 e 128, usando o mesmo algoritmo que Mendes usou. Nicolas não apresenta qualquer tabela mas dá ao leitor outros exemplos<sup>81</sup>. No nosso entender, Nicolas quis dar as bases para a resolução dos problemas de «Caminhadas», que aparecem num conjunto de enunciados a partir do fôlio 42, e que são resolvidos recorrendo à regra da soma de  $n$  termos consecutivos de uma progressão. Estes problemas inserem-se no tema «Números» e abordam temas diversos. Temos o exemplo de dois homens que caminham, sendo usadas as progressões aritméticas 9, 18, 27, 36, ... e 1, 2, 3, 4, ... dado que um dos homens anda cada dia 9 léguas e o outro, 1 légua. Pretende o autor saber quando se encontram pela primeira vez. A solução dada consiste em dobrar 9 e tirar 1, tendo-se 17. Em linguagem atual, podemos resolver a equação do segundo grau  $9n = \frac{n(n+1)}{2}$ . Para «fugir» à resolução da equação de grau dois, Nicolas<sup>82</sup> pensa na expressão equivalente  $9 = \frac{n+1}{2}$ , onde  $n = 9 \times 2 - 1 = 17$ .

Na obra de Bento Fernandes as progressões figuram no fôlio 45: «Aqui adiãte vos mostrarey rezões da regra de progressã» [Fernandes, 1555, f. 45 f]. Há uma ligeira diferença de linguagem relativamente aos dois autores anteriores. O nome «Progressão» é para Fernandes «Regra de progressão», contudo os conteúdos explanados são os mesmos. O autor começa por referir uma variedade de progressões. Em termos de exemplos, descreve um maior número que os seus antecessores, contudo a sua explicação inicial é confusa. Os exemplos incluem progressões geométricas e progressões aritméticas com números inteiros,

---

<sup>81</sup> Nestes exemplos encontrámos progressões aritméticas ou geométricas.

<sup>82</sup> Nicolas apresenta outros problemas de "Caminhadas" e, no último desses problemas, refere que tirou este assunto da obra de Frei Lucas, frade de S. Francisco, acrescentando que «...tirey muytas destas questões que o meu engenho nom abastaria ha fazer obra sem primeyro ho nom veer muyto bem» [Nicolas, 1963, f. 54 v].

com uma diferença significativa em termos de «extensão». Trata-se da progressão de números ao «galalim» [Fernandes, 1555, f. 45 v]: «Ainda assomarei hũa progressã de numeros prosseguindo a dobrar sêpre ho numero seguinte como he a regra do galalim .s. 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512. 1204. » [Fernandes, 1555, f. 45 v]. O termo «galalim»<sup>83</sup> não é referido por Nicolas nem por Mendes. Fernandes manifesta uma vontade de abordar números maiores «...quantos numeros quiseses ao galalim» [Fernandes, 1555, f. 45 v], o que pressupõe a ideia de uma infinidade de números que também poderão ser somados «...podeis fazer a soma de quantos números quiseses ao galalim por grandes que sejam»<sup>84</sup> [Fernandes, 1555, f. 45 v]. Nesta aproximação aos «grandes números» Fernandes manifesta, numa visão alargada da «infinidade» de números que poderá considerar, o que o singulariza relativamente aos seus antecessores. Contudo há um elo entre Nicolas e Bento Fernandes, as «Caminhadas» e a «Progressões» que as servem, ao contrário de Mendes que estende a sua abordagem a progressões geométricas com razões fracionárias<sup>85</sup>, usando uma metodologia idêntica à então apresentada para os números inteiros, o que nos leva a crer num maior gosto pelo entretenimento no caso dos dois primeiros autores e numa abordagem mais «seca» no caso de Mendes.

## 2. Raízes quadradas e raízes cúbicas

«Tirar raízes» é a última das sete «especies» da aritmética segundo Mendes. Na introdução ao assunto há uma «definição»,

...tirar rayzes quadradas nõ he al: salvo sabermos achar hũ tal numero que multiplicado por si mesmo faça tanto como outro que nos quisermos ou o que mais puder: e este tal numero que assi se acha se chama rayz quadrada do outro: e ho outro se chama numero quadrado [Mendes, 1540, f. 26 v].

<sup>83</sup> A técnica de cálculo muito utilizada no domínio dos grandes números era designada por *progressam de numeros ao galalim*. Progressão de números ao galalim significa elevá-los ao ponto mais alto, ao galalim.

<sup>84</sup> A mesma ideia de progressão ao galalim está presente na obra do Padre António Vieira: «Tudo sabeis aquele modo de conta, que vulgarmente se chama “ao galarim”, em que tudo o que se possui, e precede em um número se dobra no seguinte» em José Eduardo Franco e Pedro Calafate, *Obra Completa de Padre António Vieira (Sermões de Nossa Senhora)*, Tomo II, Vol. VII (Círculo de Leitores, 2013)

<sup>85</sup> As progressões descritas têm razões  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$  [Mendes, 1540, f. 49].

O autor junta uma nota importante sobre os números que não sejam quadrados perfeitos. Os quadrados perfeitos têm «raiz quadrada própria», todos os números que não se enquadrem naquela categoria têm «raiz quadrada não própria». Sempre utilizando o mesmo algoritmo, são dados dois exemplos para raízes quadradas próprias e um exemplo de uma raiz quadrada não própria. São exibidos três casos para determinar a raiz cúbica que se reportam a cubos perfeitos.

A preceder o algoritmo para determinar a raiz quadrada de um número, Mendes tem o cuidado de alertar o leitor para o facto de se desconhecer, à partida, se a raiz é própria ou não. O primeiro procedimento a respeitar é colocar uns pontinhos, pondo sempre o primeiro por baixo do algarismo das unidades e proceder contra a mão esquerda. Terminada a descrição do algoritmo, há exemplos, procedimento habitual ao longo da obra. Vamos transcrever o esquema associado a um dos problemas apresentados. Trata-se de determinar a raiz quadrada de 55225. O algoritmo assenta em operações de quadrar e duplicar. Sendo 55225 é um quadrado perfeito e a sua raiz quadrada é 235.

$$\begin{array}{r}
 0 \\
 020 \\
 13300 \\
 55225 \\
 \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 \hline
 24365
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 | \\
 | \\
 | \\
 | \\
 | \\
 | \\
 |
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 235 \\
 \\
 \\
 \end{array}$$

Figura 30: Esquema do algoritmo para determinar a raiz quadrada de 55225 segundo Ruy Mendes

A propósito da raiz quadrada de uma fração, Mendes começa por usar a fração  $\frac{9}{16}$  composta por dois números que são quadrados perfeitos. Quanto aos números que não são quadrados perfeitos, o exemplo descrito diz respeito à determinação da raiz quadrada de 47. «Quero decrarar hũa maneira pera saberdes tirar a raiz quadrada mais chegada que se possa a qualquer numero inteiro que nõ seja quadrado nẽ a tenha perfeita» [Mendes, 1540, f. 51 f]. Para o efeito, em primeiro lugar propõe o quadrado perfeito mais próximo de 47 (por defeito), seja 6.

Temos  $6 \times 6 = 36$ . Soma 6 com 1

$$6 + 1 = 7$$

Efetua em seguida o produto

$$7 \times 7 = 49$$

E a diferença  $49 - 47 = 2$ . O dobro de 7 é 14. Então escreve a fração  $\frac{2}{14} = \frac{1}{7}$ .

$$7 - \frac{1}{7} = \frac{48}{7} = 6\frac{6}{7} \quad (1)$$

Considera  $\sqrt{47} = 6\frac{6}{7}$

A expressão (1) é uma aplicação de um procedimento já conhecido e utilizado como fórmula de Herão de Alexandria, que pode ser traduzida, em linguagem atual, pela expressão

$$a + \frac{A - a^2}{2a}$$

No exemplo,  $A = 47$  e  $a = 7$  para uma aproximação por excesso de  $\sqrt{47}$ .

O algoritmo descrito é um excelente exemplo da importância de uma matemática calculatória e do sentido que ela tinha para os nossos aritméticos, não só para Ruy Mendes como para Gaspar Nicolas que, por um processo semelhante determina um valor aproximado de  $\sqrt{6}$  [Nicolas, 1963, f. 70 f].

Utilizando a linguagem das funções, determinar a raiz quadrada de um número corresponde à aplicação de um método – o método de Newton – que consiste em conseguir a aproximação de uma curva pela sua tangente, sendo a intersecção desta com o eixo dos  $xx$  tomada como o novo valor da aproximação do zero da função. Para determinar  $\sqrt{47}$ , consideramos a função  $f(x) = x^2 - 47$ . O nosso objetivo é conhecer a solução positiva da equação  $x^2 - 47 = 0$ . A equação da tangente à curva  $y = f(x)$  que passa no ponto  $x_k$  é

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$

A sua intersecção com o eixo dos  $xx$  dá-se na posição  $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ . Substituindo  $f(x)$  pela expressão em jogo, temos

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - A}{2x_k} \quad \text{ou ainda} \quad x_{k+1} = \frac{x_k^2 + A}{2x_k}.$$

A fórmula de Herão prevê apenas uma iteração com  $x_0 = a$ , do algoritmo de Newton.

Podemos traduzir a situação descrita por Ruy Mendes com  $x_1 = 7 - \frac{49-47}{14} = 7 - \frac{1}{7}$  um valor aproximado de  $\sqrt{47}$  o que equivale ao uso do algoritmo de Newton com condição

inicial  $x_0 = a = 7$ . É exibida uma iteração e verificada a solução encontrada, embora de modo abreviado. O autor refere, de modo breve, que o processo poder-se-á repetir, até termos uma melhor aproximação, contudo afirma: «he bem trabalhosa de achar» [Mendes, 1540, f. 51 v] e ainda justifica não pretender desenvolver o assunto: «pera o qual ñ ponho enxemplo por ñ alargar» [Mendes, 1540, f. 51 v]. A persistência do interesse por este género de assuntos, mesmo em livros redigidos para outros fins, é prova da elevada importância que estes temas mantiveram muito para além da época em que surgiram.

No tratado de Gaspar Nicolas os temas raiz quadrada e raiz cúbica aparecem antes da secção dedicada à geometria. O algoritmo para determinar a raiz quadrada utilizado é o mesmo que Ruy Mendes utiliza contudo, Gaspar Nicolas inicia o assunto referindo:

Pera saberes tirar as rayzes quadradas de qualquer numero primeiro debes de numerar aquelle numero de que queres tirar a rayz e veer se sam has feguras pares ou empares e se forem empares começaras na derradeira de todas escontra amaão esquerda [Nicolas, 1963, f. 78 f].

O processo descrito equivale à colocação dos pontinhos por Ruy Mendes.

Sobre a raiz cúbica, assiste-se a uma diferença significativa entre o que é tratado por cada um dos dois autores, dado que, Nicolas refere apenas alguns exemplos de cubos perfeitos como o são 8 e 27, num curto parágrafo dedicado ao assunto. Ruy Mendes apresenta exemplos e um algoritmo com um aspeto semelhante ao utilizado para a raiz quadrada, notando que em vez de dois dobrados teremos, neste caso, três dobrados, descrevendo o algoritmo com muito detalhe.

...qual sera a rayz cubeca deste numero que na figura parece que he .10970. cōtos e .645048.. E pera achardes ho assenteis primeiramente e apontareys e fareis sua risca como acima fica dito: e aqui perece: e obrando como dito he .s. pondouos debayxo do primeyro pōto cōtra a mão esquerda e buscando hũ tal numero que multiplicado cubicamēte faça tanto como quanto ho ponto tem sobre si que sam dez: ou quanto mais possa ser: acahreis que sera dous que poreis debaixo do ponto: o qual multiplicado cubicamente faz .8. que tirado dos dez que tem encima fica .2. como parece: agora tresdobraloeis e fara .6. que assentareis onde he dito: e como aqui parece e a elle fora da risca. E passando ao seguinte ponto: e obrando como he decrarado ho numero sera outro .2. que poreis debaixo do ponto e junto ao primeiro de atras como fica decrarado



farã .22. que multiplicados polo tresdobrado que he .6. faram .132. e estes por elle mesmo fazẽ .264. que tirados de .297. que ho tresdobrado tem sobre si ficam .33. e agora por si mesmo cubicamente faz .8. que tirados de .330. que ho p̃to tẽ sobre si fica .322. e esto feyto e faraa outros seys que poreis donde tenho dito: e na figura parece: e a elle fora alem do outro. E entã passarvoseys ao terceiro ponto buscando hũ tal numero que junto aos dous números de a tras: e o que assi fezerẽ multiplicado polos dous tresdobrados : e detras e depois elle por si mesmo e cetera: o qual achareis que he outro .2. que poris debaixo do p̃to e jũto aos de atras da maneira ja dita farã .222. que multiplicados polos .2. tresdobrados fazẽ .66. juntos como dito he vẽ a fazer .14652. e esto por elle mesmo farã .29304. que tirados do que ho derradeiro tresdobrado tinha sobre si que erã .32264. fica .2960. e agora por si mesmo cubicamente fara .8. que tirareis do que o ponto tẽ sobre si: o qual todo assi feyto tresdobraloeys: e fara outro .6. que assentareis em seu lugar e a elle fora alem dos outros e passarvos eys a p̃to quarto e final: e buscando outro numero que junto aos tres de a tras e o que assi fezerẽ multiplicado polos tresdobrados que a tras ficã: e ho que fays por elle mesmo faça tãto ou quanto mais possa ser como quanto o terceiro tresdobrado sobre si tẽ que sam .2959704. e depois elle por si mesmo cubicamente e c. o qual buscado e rebuscado achareis que sera outro .2. que poreis debayxo do p̃to: e junto aos tres de atras faram .2222. e estes multiplicados polos tres tresdobrados que ficã a tras que jũtos como he dito fazẽ .666. farã .1479852. e estes por elle mesmo farã .2959704. que tirados do que ho derradeiro tresdobrado tem sobre si: que sam outros tantos nam fica nada: e por si mesmo cubicamente fara .8. que tirados doutros tantos que ho ponto tẽ sobre si nã fica nada: agora ho poreis fora e assi tereis acabado: e acahreis fora da risca .2222. e tanto direis que he a rayz cubeca do dito numero e perfeyta poys nam ficou nada sobela figura: e a prova que he multipricada cubecamente há de vir a fazer outro tanto como ho dito numero nem mais nẽ menos: e desta maneira tirareys as semelhantes em que os tresdobrados acertẽ de ser todos de hũa letra somente [Mendes, 1540, ff. 31 v-32 f].

$$\begin{array}{r}
 000 \\
 0029090 \\
 0233250700 \\
 10970645048 \\
 \hline
 2222
 \end{array}$$

Figura 31: Esquema do algoritmo da raiz cúbica de Ruy Mendes

Repare-se que a raiz encontrada é um caso muito particular em que os Algarismos são todos iguais a dois e o processo descrito é extenso e complexo e, não terá certamente cativado os potenciais utilizadores. Por exemplo, Bento Fernandes optou por dar exemplos simples, como é o caso da raiz cúbica de 125. Este autor introduziu uma novidade no tema «tirar raízes» para além das quadradas e cúbicas. Trata-se da «raiz de raiz»<sup>86</sup> [Fernandes, 1555, f. 81 f], a «raiz de raiz promica»<sup>87</sup>, a «raiz relata»<sup>88</sup> e «raiz sorda». A «raiz sorda» consiste em determinar um valor aproximado da raiz quadrada de um número que não seja um quadrado perfeito, como já o fizeram os seus antecessores, contudo este autor procura uma melhor aproximação através do cálculo de um valor aproximado de  $\sqrt{12}$ . Relativamente ao algoritmo utilizado, Bento Fernandes remete-nos para uma filosofia diferente da apresentada quer por Gaspar Nicolas, quer por Ruy Mendes, colocando-se num patamar mais próximo de objetivos puramente matemáticos, sem referir o assunto com brevidade. Seguindo as ideias do autor, observamos que ao cálculo desenvolvido, Bento Fernandes junta sempre a ideia de estar o mais perto possível do valor  $\sqrt{12}$ . Começou por calcular  $3^2 = 9$  e  $4^2 = 16$ , concluiu que o número procurado deve estar entre 3 e 4. Aplicou o algoritmo já conhecido, ou seja, usou  $a - \frac{a^2 - A}{2a}(1)$ , com,  $A = 12$  e  $a = 4$  e chegou ao valor de  $3\frac{1}{2}$ . De seguida calculou o quadrado deste valor e obteve  $12\frac{1}{4}$ . Seria de esperar que seguisse os passos dos seus antecessores, afinal, como mercador, não estaria mais próximo dos objetivos de uma matemática mercantil? Não foi o que aconteceu, antes repetiu a aplicação do algoritmo para encontrar um valor ainda mais próximo de  $\sqrt{12}$ . Usou de novo a expressão (1) mas, desta vez com  $a = 3\frac{1}{2}$ . Repetiu todo o processo e chegou a um valor aproximado igual a  $3\frac{13}{28}$  que, ao quadrado faz  $12\frac{1}{784}$ , bastante «mais próximo» de 12 dado que  $\frac{1}{784} < \frac{1}{4}$ , pelo que,  $3\frac{13}{28}$  é «a mais perfeyta raiz de 12» [Fernandes, 1555, f. 81 v]. Não ficou por aqui, voltou à regra para encontrar «outra mais perfeyta raiz» [Fernandes, 1555, f. 81 v] e propõe ao leitor continuar, «esta he a mais achegada raiz de .12. ainda que se quisesseis hir mais por diãte

<sup>86</sup> Em linguagem atual é a raiz quarta de um número positivo.

<sup>87</sup> O autor dá o exemplo da raiz prômica de 84. Seja  $84 = 81 + 3 = 9^2 + 3$ , sendo  $\sqrt{81} = 9 = 3^2$  e a raiz prômica de 84 é 9. De um modo geral, o autor procura soluções naturais da equação  $x^2 + \sqrt{x} = a, a \in \mathbb{N}$  [Fernandes, 1555, f. 81 f].

<sup>88</sup> Poder-se-ia pensar que se trata da raiz quinta de um número natural contudo, nos exemplos propostos o autor usa  $(\sqrt[5]{x})^2$ , como por exemplo a raiz relata de 243 é 9, segundo indica o autor.

podeis ir ate onde quiserdes per esta regra. E todavia nã pode vir outra raiz que seja pontualmente» [Fernandes, 1555, f. 81 v].

O algoritmo de Newton, à semelhança do que vimos nos autores precedentes, volta a estar presente, mas desta vez com três iterações efetivas e o convite a prosseguir com outras. Por outro lado, se consideramos a função  $f(x) = x^2 - 12$ , podemos antever o raciocínio seguinte: Bento Fernandes começou por referir o enquadramento de 12 entre dois quadrados perfeitos, 9 e 16, concluindo que a raiz de 12 se deverá situar entre 3 e 4. A primeira aproximação conseguida,  $3\frac{1}{2}$ , poder-nos-ia levar a pensar na aplicação do método da bisseção no intervalo [3,4], contudo tratar-se-á apenas de uma coincidência ou um «pressentimento» do teorema dos valores intermédios como resposta a uma solução cada vez mais perfeita? O labor de Fernandes é marcado por diferenças de atuação em vários aspetos: um maior número de iterações da regra já conhecida e, a noção do erro cometido ao utilizar os valores que, como o próprio indica, são os «mais chegados» («a mais chegada raiz» [Fernandes, 1555, f. 81 f]). Sempre com a noção de melhorar as aproximações, o que é a base da noção de convergência e de erro, dois assuntos fundamentais da Análise Numérica. No seu modo de agir está presente uma determinação para conseguir uma aproximação com um erro minorado, o que marca um ideal muito próximo do pensamento matemático.

### **3. Problemas com números**

Fora do mundo dos negócios, as regras de falsa posição parecem impor a sua utilização em múltiplos problemas relacionados com números. Não é a primeira vez que laivos de uma Matemática sem aplicações diretas na vida dos mercadores aparece, o que demonstra uma vontade em conhecer e transmitir conteúdos «mais abstratos». Ao introduzir a regra de uma falsa posição, Ruy Mendes afirma que os números que por esta regra se podem achar aparecem em dezasseis modos, que são explanados ao longo de dez fólhos (ff. 84-94):

somando somente; somando e diminuindo; somando e multiplicando; somando e repartindo; diminuindo somente; diminuindo e somando; diminuindo e multiplicando; diminuindo e repartindo; multiplicando somente; multiplicando e somando; multiplicando e diminuindo; multiplicando e repartindo; repartindo somente; repartindo e somando; repartindo e

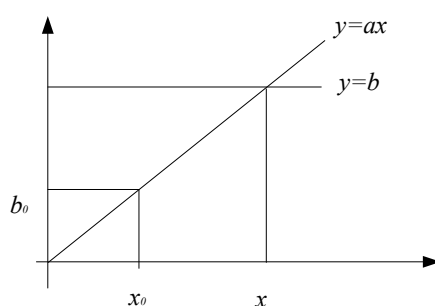
diminuindo; repartindo e multiplicando. A cada classificação dada corresponde um enunciado. Vejamos alguns exemplos transcritos do texto e que figuram na Tabela 3:

Tabela 3: Problemas para aplicação do método de uma falsa posição

Tipo	Enunciado	Equação em linguagem atual
Somando somente	Qual seraa ho numero que somado com o seu terço e cõ o seu quarto e com seu quinto, somem todos .9.(?) [Mendes, 1540, f. 84 v]	$x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x = 9$
Somando e diminuindo	Que numero sera aquelle que somado cõ seu terço e da tal soma é diminuído ou tirado quatro fiquem .28. [Mendes, 1540, f. 85 f]	$x + \frac{1}{3}x - 4 = 28$
Somando e multiplicando	Que numero averaa que somado com seu terço e a tal soma multiplicada por .6. façam .20. [Mendes, 1540, f. 86 f]	$\left(x + \frac{1}{3}x\right) \times 6 = 20$
Somando e repartindo	Qual sera ho numero que somado com ho seu quinto e o que somarem repartido a .6. venhã na partiçã .25. [Mendes, 1540, f. 86 v]	$\left(x + \frac{1}{5}x\right) \div 6 = 25$
Diminuindo somente	Qual numero averaa que demenuindo ou tirando delle a metade e o terço e o oitavo fiquem .24. [Mendes, 1540, f. 87 f]	$x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{8}x = 24$
Diminuindo e somando	Que numero averaa que tirando-lhe ho quarto e o que ficar somando com o seu quinto, somem .30. [Mendes, 1540, f. 87 v]	$x - \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}\left(x - \frac{1}{4}x\right) = 30$
Diminuindo e multiplicando	Qual sera ho numero que tirado delle seu terço e o que ficar multiplicado por .2. façã .3. [Mendes, 1540, f. 87 v]	$\left(x - \frac{1}{3}x\right) \times 2 = 3$
Diminuindo e repartindo	Que numero seraa aquelle que tirando-lhe seu terço e o que ficar repartido a 4, venham na repartiçã .5. [Mendes, 1540, f. 87 v]	$\left(x - \frac{1}{3}x\right) \div 4 = 5$
Multiplicando somente	Que numero averaa que multiplicado por 6 faça .78. [Mendes, 1540, f. 88 f]	$6x = 78$
Multiplicando e somando	Que numero seraa que multiplicado por .3. e o que fizer somado cõ seu terço, somem .10. [Mendes, 1540, f. 88 f]	$3x + \frac{1}{3}(3x) = 10$

Multiplicando e diminuindo	Se averaa algum numero que multiplicado por .4. e do que fazerem demenuido ou tirado ho terço, fiquem .5. [Mendes, 1540, f. 88 f]	$4x - \frac{1}{3}(4x) = 5$
Multiplicando e repartindo	Que numero avera que multiplicado por .4. e o que fazerem repartido a .3. venha na repartiçã .2. [Mendes, 1540, f. 88 v]	$4x \div 3 = 2$
Repartindo somente	Qual sera ho numero que repartido a .5. venhã da partiçam .40. [Mendes, 1540, f. 88 v]	$x \div 5 = 40$
Repartindo e somando	Qual sera ho numero que repartido a 5 e o que vier na repartiçã somado cõ seu quarto, somem .30. [Mendes, 1540, f. 88 v]	$\frac{x}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{x}{5} = 30$
Repartindo e diminuindo	Que numero sera aquele que repartido a 4 e o que vier na partiçam tirado o seu terço, fiquem.5. [Mendes, 1540, f. 89 f]	$\frac{x}{4} - \frac{1}{3} \times \frac{x}{4} = 5$
Repartindo e multiplicando	Qual numero sera que repartido a .4. e do que vier na repartiçã multiplicado por .5., façam .25. [Mendes, 1540, f. 89 f]	$\frac{x}{4} \times 5 = 25$

A regra de falsa posição é um procedimento muito antigo para resolver problemas que atualmente traduzimos por equações do tipo  $ax = b$ , ( $a \neq 0$ ). A regra de três aplicada à falsa posição pode ilustrar-se geometricamente pela semelhança de triângulos.



Observando a figura podemos deduzir a relação  $\frac{x}{x_0} = \frac{b}{b_0}$ . Segundo Ruy Mendes, «Aveis de tomar hũ numero falso qualquer (...) pera mediante elle achareis o verdadeiro pola primeira regra de tres» [Mendes, 1540, f. 84 v]. Na figura,  $x_0$  é o número falso e  $b_0$  o resultado que advem de considerar um «número falso qualquer». Todos os problemas enunciados na Tabela 3 se reduzem a uma equação do tipo  $ax = b$ , ( $a \neq 0$ ). Os problemas

que conduzem a equações do primeiro grau são numerosos na literatura matemática, em particular nos tratados de aritmética prática, tendo sido Leonardo de Pisa um dos responsáveis pela sua divulgação. Este tipo de problemas foi passando de obra em obra através dos tempos e, os tratados portugueses não fugiram a esta tradição.

O capítulo cinco do quinto tratado refere a regra de dupla falsa posição. O autor menciona que na regra de duas falsas posições usamos dois números falsos para, através deles, achar o verdadeiro. Por aplicação da regra temos as situações que decorrem do uso de dois números «falsos» partindo do princípio que, cada um dos números utilizados pode fazer mais do que o que se pretende ou cada um dos números pode fazer menos do que se pretende, ou ainda, um número faz mais e o outro menos. Para as três possibilidades descritas Ruy Mendes aplica uma regra. Se cada um dos números utilizados pode fazer mais do que o que se pretende então

Multiplicareis cada numero polo mais do outro e das multiplicações tirareis a menor da maior e o que ficar poreis de parte e depois tirareis o menos mais do mayor mais e ao que ficar repartireis o que fica de parte e o número que vier sera o que se busca [Mendes, 1540, f. 89 v].

Para praticar a regra é dado um problema: «Qual sera aquelle numero que somado com o seu terço e mais .9. e do que somar é tirado o quinto e mais .15. fiquem .3. » [Mendes, 1540, f. 90 f]. Podemos traduzir o enunciado pela equação

$$\left(x + \frac{1}{3}x + 9\right) - \left[\frac{1}{5}\left(x + \frac{1}{3}x + 9\right) + 15\right] = 3$$

E seguiremos os procedimentos descritos pelo autor. Sendo 27 o número falso, efetuamos as operações sucessivas.

$$27 \times \frac{1}{3} = 9$$

$$27 + 9 + 9 = 45$$

$$45 \times \frac{1}{5} = 9$$

$$9 + 15 = 24$$

$$45 - 24 = 21$$

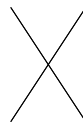
$21 - 3 = 18$ , concluímos que utilizando 27 sobram 18.

Seja agora 12 o número falso. Repetindo o processo temos um resultado igual a 5 e

$$5 - 3 = 2.$$

Então é apresentado o esquema (pelo autor)

Por 27 mais 18



Por 12 mais 2

Tal como o sugere

$$27 \times 2 = 54$$

$$12 \times 18 = 216$$

E, recordando a regra inicial vamos subtrair, pondo de parte

$$216 - 54 = 162$$

Tirando o menor mais ao maior mais

$$18 - 2 = 16$$

Vamos dividir o que está de parte pelo último resultado  $162 \div 16 = 10\frac{1}{8}$ , sendo este o número procurado.

Se cada um dos números pode fazer menos do que se pretende, o enunciado apresentado conduz-nos a uma situação idêntica: «Qual sera aquele numero que tirado dele o terço e mais .6. e do que ficar tirado o quarto e mais .7. fiquem .50. » [Mendes, 1540, f. 90 v]. Começamos por escrever a equação

$$x - \frac{1}{3}x - 6 - \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{3}x - 6\right) - 7 = 50$$

E seguir os passos do autor utilizando 27 como número falso.

Depois de efetuar as operações pela ordem indicada

$$27 \times \frac{1}{3} = 9$$

$$27 - 9 = 18$$

$$18 - 6 = 12$$

$$12 \times \frac{1}{4} = 3$$

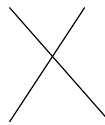
$$12 - 3 - 7 = 2$$

$$50 - 2 = 48$$

Tomando 33 como o segundo número falso e repetido todo o processo para um resultado igual a 5 e  $50 - 5 = 45$ .

Então é apresentado de novo o esquema mas desta vez referindo a palavra «menos»

Por 27 menos 48



Por 33 menos 45

(esquema do autor)

Efetuem-se os produtos

$$27 \times 45 = 1215$$

$$33 \times 48 = 1584$$

Efetuem-se as diferenças e por último o quociente que dá a verdadeira solução

$$1584 - 1215 = 369$$

$$48 - 45 = 3$$

$$369 \div 3 = 123$$



Quanto à terceira possibilidade, ou seja, um número faz mais e o outro menos, Mendes considera o enunciado: «Qual sera aquelle numero que multiplicado por .3. e o que fizerem multiplicado por .5. façam .50. » [Mendes, 1540, f. 91 f]. Os números «falsos» são 10 e 3, com os respectivos cálculos

$$3 \times 10 = 30$$

$$30 \times 5 = 150$$

$$150 - 50 = 100$$

e

$$3 \times 3 = 9$$

$$9 \times 5 = 45$$

$$50 - 45 = 5$$

Utilizando o esquema o autor encontra a solução

$$\begin{array}{r}
 300 \\
 \hline
 \text{Por 10 mais } 100 \\
 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \\
 \text{Por 3 menos } 5 \\
 \hline
 50
 \end{array}$$

Depois de efetuados os produtos soma os dois resultados

$$300 + 50 = 350$$

$$100 + 5 = 105$$

E a solução

$$305 \div 105 = 3 \frac{1}{3}$$

A regra de dupla falsa posição tem por princípio: «...pondo dois números falsos pera que mediãte eles achemos outro verdadeiro que buscamos» [Mendes, 1540, f. 89 v]. Se

usarmos a linguagem atual, podemos dizer que se aplica a equações do tipo  $ax + b = c$ , ( $a \neq 0$ ) (1). Se  $x_0$  é o primeiro número falso, temos  $ax_0 + b = c_0$  (2). Se  $x_1$  é o segundo número falso então  $ax_1 + b = c_1$  (3). Subtraindo membro a membro as duas expressões (1) e (2), temos  $a(x - x_0) = c - c_0$ . Subtraindo também, membro a membro, as expressões (1) e (3), temos  $a(x - x_1) = c - c_1$ . Fazendo  $d_0 = c - c_0$ ,  $d_1 = c - c_1$  e dividindo as igualdades  $a(x - x_0) = d_0$  e  $a(x - x_1) = d_1$  membro a membro e resolvendo em ordem a  $x$  temos

$$x = \frac{d_0x_1 - d_1x_0}{d_0 - d_1}$$

As precauções do autor encontram-se ligadas aos valores das diferenças no numerador e no denominador, daí mencionar, com detalhe, todas as possibilidades. Para consolidar as regras descritas existe no tratado uma secção intitulada «como se acham muitos numeros alem de se poderem também achar polas ditas regras» [Mendes, 1540, f. 91 v], num total de catorze enunciados de problemas com números e de natureza diversa.

Uma questão a notar nesta secção é a «simplificação» da regra apresentada. Por exemplo, para o enunciado, «Quais seram aquelles dous numeros que somem tanto o quarto e o quinto de hũ deles como o seisto e o sétimo do outro» [Mendes, 1540, f. 91 v]. Podemos traduzir o problema pela equação

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x = \frac{1}{6}y + \frac{1}{7}y$$

Temos duas incógnitas (os dois números desconhecidos,  $x$  e  $y$ ). Ruy Mendes começa por resolver o problema por falsa posição, considerando um dos números igual a 20 e sem exemplificar, mas referindo novo a falsa posição, encontra o segundo número ( $29\frac{1}{13}$ ). A certa altura, o autor diz que se pode resolver o problema de outra maneira:

Porem por outra maneira os achareis assi: somai primeiramente as partes de que se fazem mença que aqui primeiramente sam hũ quarto e hũ quinto e somarã .9/20. avos e depois hũ seisto cõ hũ setimo e somarã .13/42. avos [Mendes, 1540, f. 91 v].

A regra pressupõe soma de monómios semelhantes.

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x = \frac{9}{20}x$$

$$\frac{1}{6}y + \frac{1}{7}y = \frac{13}{42}y$$

O autor prossegue:

Agora poreis estes dous quebrados em figura como se põe na especia de repartir e como aqui parecem e multiplicareis os nomeados polos nomeadores e o que fezerem poreis sobre os nomeados que sera .260. e .378. e estes serão os ditos números [Mendes, 1540, f. 91 v].

O esquema sugere as soluções  $x = 260$  e  $y = 378$ .

260		378
$\frac{9}{20}$	$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \times \end{array}$	$\frac{13}{42}$

Ruy Mendes conclui ser este um melhor processo do que o de falsa posição o que denota uma evolução importante no algoritmo de resolução. Contudo há uma nota final na qual o autor salienta que o método descrito apresenta vantagens sobre a falsa posição mas somente no caso de soluções inteiras e falha quanto se considera ambos os números quebrados o que denota uma falta de segurança na manipulação das «modernas» regras algébricas.

Aveis de notar que pera os achares ambos inteiros he a dita maneira boa que polas ditas regras de hũa e de duas falsas posições ñ se podem achar tã perfeitamente: e assi pera os achardes ambos quebrados ñ vale esta maneira se ñ as ditas regras [Mendes, 1540, f. 91 v].

Um problema semelhante envolve as frações  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$  na variável  $x$  e  $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$  na variável  $y$ , se pensarmos na linguagem atual. O enunciado é este: «Quaes serão os dous numeros que somem tanto o meyo e o terço e o quarto de hũ deles como o quinto e o seisto e o setimo do outro» [Mendes, 1540, f. 92 f]. Ruy Mendes continua a referir a falsa posição mas apresenta

um algoritmo mais simplificado, tal como no caso anterior. Equivale à soma de monómios semelhantes em cada membro da equação

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = \frac{1}{5}y + \frac{1}{6}y + \frac{1}{7}y \quad (1)$$

Adicionando os termos em  $x$  e  $y$  vem então a habitual figura dada no texto

$$\begin{array}{r} 1284 \\ 13 \\ \hline 12 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2730 \\ 107 \\ \hline 210 \end{array}$$

E os números procurados são 1284 e 2730.

Os problemas exibidos vão estender-se a um maior número de incógnitas. Como exemplo temos: «Quaes seram os tres numeros que somem tanto a metade e o terço de huũ deles, como o quarto e o quinto de outro e o seisto e o sétimo de outro» [Mendes, 1540, f. 92 f]. Talvez por segurança, Ruy Mendes começa referir de novo a falsa posição mas não se alonga nas suas explicações, contudo volta à redução dos termos semelhantes na equação pela qual podemos traduzir o problema.

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = \frac{1}{4}y + \frac{1}{5}y = \frac{1}{6}z + \frac{1}{7}z$$

Que, por palavras o autor converte numa expressão simplificada, aplicando de novo a «figura».

$$\frac{5}{6}x = \frac{9}{20}y = \frac{13}{42}z$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ \hline 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \\ \hline 20 \end{array} \quad \begin{array}{r} 13 \\ \hline 42 \end{array}$$

(esquema do autor)

Efetua-se os produtos cruzados e temos

$$6 \times 9 = 54$$

$54 \times 13 = 702$  é o primeiro número procurado

$$5 \times 20 = 100$$

$100 \times 13 = 1300$  é o segundo número

$$5 \times 9 = 45$$

$45 \times 42 = 1890$  é o terceiro número.

Para dar credibilidade à regra, as soluções são verificadas e o autor sente-se em condições de afirmar que o processo de resolução mantém-se para outros números quaisquer, sejam três, quatro ou cinco, sem contudo, exhibir esses casos. De notar ainda, o uso de frações do tipo  $\frac{1}{n}$ , de tal modo que os seus denominadores sejam números consecutivos que, figuram por ordem crescente para uma mesma «variável».

Observamos no texto problemas associados a situações que conduzem a métodos de resolução mais simplificados: «Com que numero somarey .10. que somem .57. » [Mendes, 1540, f. 93 f]. Ruy Mendes começa por afirmar que habitualmente estes problemas resolvem-se pela regra de duas falsas posições, contudo pode simplesmente usar a «especia de demenuir» tirar 10 de 57 e teremos o resultado: «...assi achareis os semelhantes quer inteiros quer quebrados» [Mendes, 1540, f. 93 f]. Assiste-se, de novo, a uma mudança no sentido de simplificar o algoritmo a utilizar. Se pensarmos uma equação que traduza o problema, temos

$$x + 10 = 57$$

O que é dito para determinar  $x$  equivale, a adicionar a ambos os membros da equação o simétrico de 10 e, assim, simplificar o procedimento, habitualmente associado à regra de falsa posição.

Quando a equação não se encontra na forma canónica, como para o enunciado: «Com quantos quatros somarey .5. que somem todos .20. » [Mendes, 1540, f. 93 f], que podemos traduzir por  $4x + 5 = 20$ , Mendes remete-nos para o problema anterior para justificar que  $5 + 15 = 20$ . Então, resta saber em 15 quantos quatros haverá, donde  $\frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$  é a solução do problema. O que traduz de novo um algoritmo mais simplificado.

O capítulo termina com múltiplos problemas do mesmo tipo que são resolvidos pelos métodos mais simplificados, continuando o autor a referir a falsa posição, sem contudo a

utilizar nestes exemplos finais. Poderemos pensar numa simplificação algébrica realizada timidamente a par com o método da falsa posição. São ainda descritos outros problemas com números que envolvem produtos particulares tais como:

Quaes serão os taes dous numeros que multiplicados hũ polo outro façã hũ numero que tenha seis hũs ou seis douses ou .6. treses ou seys quatros e assim até seis noves ou seja, tenha seis letras, desta maneira .212121. ou .131313. ou desta .474747. ou de outra qualquer maneira semelhante [Mendes, 1540, f. 94 f].

Na resolução, o autor refere de novo as regras de falsa posição, sem a usar. Antes exhibe um dos fatores e o outro é encontrado pelo algoritmo da divisão.

### **Alguns problemas com números segundo Gaspar Nicolas**

Na secção dedicada aos números, Gaspar Nicolas trata de problemas muito idênticos aos que Mendes resolveu por uma falsa posição. No caso do primeiro, a regra designa-se por «Oposição<sup>89</sup>». A regra é enunciada de modo breve e aparece como uma receita de aplicação imediata. Por exemplo, no enunciado: «Dame huũ numero que tyrando delle ho terço e ho quarto fycam .73. » [Nicolas, 1963, f. 39 v], o autor encontra o número 12 que, é precisamente o produto dos denominadores e afirma que o processo consiste em «multiplicar sempre polas feguras de baxo» [Nicolas, 1963, f. 39 v]. Este número assim encontrado é aquele a que Mendes chama o número «falso». Os procedimentos posteriores relatados por Nicolas são os mesmos a que Mendes chamou uma falsa posição, com o uso da regra de três para encontrar a solução.

Nicolas menciona situações de impossibilidade, por exemplo no enunciado, «Buscame hũ numero que lhe tirando dous terços e o meo fiquem .10. » [Nicolas, 1963, f. 42 v]. Para justificar que a «conta é falsa» o autor afirma: «...tu bem ves que ho meo e dous terços que passa de cousa inteira e não podes tirar este meo e dous terços de nenhuũ numero que fique

---

<sup>89</sup>A «oposição» é também uma designação para a «falsa posição» que encontrámos noutros autores, nomeadamente no tratado de Bento Fernandes.

alguũa cousa minguar» [Nicolas, 1963, f. 42 v]. Para reforçar as suas afirmações, usa o número 6, assim determina um meio e dois terços de 6 que somados fazem 7. O «minguar», neste caso, quer dizer que  $6 - 7 = -1$ . A partir deste exemplo são enunciados outros cuja resposta vem pela regra de três. Por exemplo, «se de .6. minguaram huũ de quantos me minguaram .20. » [Nicolas, 1963, f. 42 v]. Usando, implicitamente a regra de três, o autor conclui que a resposta é 120, ou seja, se somarmos um meio e dois terços de 120, temos 140 e  $120 - 140 = -20$  («minguar te am .20.» [Nicolas, 1963, f. 42 v]). À impossibilidade denunciada à partida o autor «dá a volta» aplicando a proporção e, desta maneira, o «minguar» é admitido.

Os enunciados de problemas com números do fôlio 42 v incluem números e raízes, tais como este: «Dame huũ numero que partido o seu terço por sua rayz venham .19. » [Nicolas, 1963, f. 42 v]. Podemos-lhe associar uma a equação

$$\frac{1}{3}x = 19\sqrt{x}$$

O autor vai agir, de modo retórico, no sentido de transformar a expressão noutras tais como  $x = 57\sqrt{x}$  e por elevação de ambos os membros ao quadrado vem  $x^2 = 3249x$ . As duas soluções são 0 e 3249, sendo esta última a única solução considerada.

Gaspar Nicolas exhibe outros problemas dedicados aos números contudo, verifica-se uma certa mistura entre situações que reportam aspetos dos números e outras de carácter mais lúdico, ou sobre regras comerciais e sob os três títulos diferenciados: «Numeros», «Oposiçam» e «Preguntas». No capítulo «Oposiçam», Nicolas resolve muitos dos problemas clássicos, que não encontrámos na *Pratica* de Ruy Mendes. Esses problemas abordam temas diversos, tais como, o homem que parte de Lisboa com uma certa quantidade de dinheiro e passa por Sacavém, Vila Franca e Santarém, dobrando sempre a quantia. O mesmo problema apresenta outras variantes com outras localidades envolvidas. Nesta secção encontrámos ainda um problema tradicional nas aritméticas da época. Trata-se dos três homens que querem mercar um cavalo, também com outras variantes como mercar uma casa ou outra coisa indefinida, no sentido da prática do algoritmo. A organização presente na *Pratica* de Mendes contrasta com uma certa miscelânea e confusão de assuntos que Nicolas aborda, passando constantemente de um algoritmo a outro, misturando enunciados de natureza diferente, ora sobre números, mas também de entretenimento ou sobre regras comerciais.

No *Tratado da Arte de Arismetica*, Bento Fernandes segue um percurso muito idêntico ao de Gaspar Nicolas sobre questões de «Números» e regras de falsa posição. Fernandes refere uma e duas falsas posições («Oposições» [Fernandes, 1555, f. 59 f]) enunciando e resolvendo falsos problemas comerciais e com cariz de entretenimento tal como o fizera o seu antecessor, repetindo os temas já enunciados pelo primeiro. Contudo, aproxima-se de Ruy Mendes quando dedica um total de dez fólhos (ff. 70 v-80 v) da sua obra a problemas com números usando a falsa posição.

O capítulo que Bento Fernandes dedica aos problemas com números merece uma análise mais cuidadosa e não é nosso objetivo apresenta-la aqui, queremos antes referir a persistência deste tema, aparentemente desligado do mundo mercantil e comum aos três autores.

## **Conclusão**

O entendimento sobre as operações básicas da aritmética ficou marcado por uma diferença entre os três autores. Temos Ruy Mendes que retomou a tradição das sete «especies» da aritmética para trabalhar com «inteiros» e com «quebrados» alicerçando o seu tratado na prática das bases para outros fins, quer fossem temas comerciais quer fossem temas da matemática.

Alguns procedimentos de Mendes ficam marcados por avanços e recuos, como por exemplo, definir duas maneiras diferentes de somar o que demonstra alguma hesitação em lidar com os números «despidos» do que representam como o fizera o seu antecessor Gaspar Nicolas que procura a prática dos algoritmos independentemente das unidades utilizadas.

Podemos verificar que entre os três autores, é Ruy Mendes o que, com mais frequência, propõe uma introdução aos assuntos antes de passar ao desenvolvimento. Um exemplo diz respeito à origem dos números fracionários.

Em alguns casos estudados, Ruy Mendes usa o que, em linguagem atual significa adicionar monómios semelhantes, para substituir a resolução pela regra de falsa posição. Nota-se então, uma evolução no sentido de simplificar a linguagem e consequentemente o algoritmo de resolução, que não é totalmente assumida e a ligação à falsa posição manifesta-se muito forte, a pontos de, na introdução à regra o autor afirmar: «...e nō he de maravilhar que mediāte falso numero achemos o verdadeiro que buscamos, porque segūdo diz



Aristotelis muitas vezes polo falso conhecemos o verdadeiro e comumente se foy dizer, dize mentira e saberas verdade» [Mendes, 1540, f. 84 f].

Os temas «clássicos» como as progressões e raízes quadradas e cúbicas, embora desligados do mundo mercantil, assumiram um lugar de destaque nos tratados portugueses. Estes temas estão associados a processos calculatórios, contudo, apresentando esboços de um ideal muito próximo do pensamento matemático, como a determinação dos valores aproximados das raízes quadradas e a noção de progressão ao «galalim» de Bento Fernandes. Destacam-se enunciados sobre a procura de números nas obras de Gaspar Nicolas, Ruy Mendes e Bento Fernandes. O método de resolução é, em muitas situações, a falsa posição também conhecida por oposição. Está patente em Ruy Mendes a ideia de generalização dos problemas a um maior número de variáveis, três, quatro, cinco ou daí para cima, contudo não ilustra esses exemplos. Através da resolução de problemas com números foram levantadas algumas questões para as quais se procuraram respostas coerentes. Por exemplo, Gaspar Nicolas que usa a expressão «minguar» para expressar uma situação que à partida terá significado quando se consideram soluções negativas e portanto fora do sistema numérico definido, mas as regras das proporções assim o garantem.

No que diz respeito aos problemas, os três autores têm em comum enunciados enraizados na temática dos «Números». Os problemas com um cariz mais lúdico, como os dedicados a enigmas, a jogos ou ao relato de situações «engraçadas», não são exibidos por Ruy Mendes. Ao contrário, tanto Nicolas como Fernandes demonstram alguma predileção pelo «aprendendo brincando».

## Capítulo 3-A Matemática mercantil e as suas regras

*A regra de quarto e vintena se diz asi por rezã que na Casa da Índia da cidade de Lixboa se paga ho quarto e vintena de toda a especiaria e mercadoria que vê da Índia .s. tira se primeiro ho quarto e depois a vintena pa el rei nosso senhor [Fernandes, 1555, f. 38 v].*

---

### I. Introdução

A grande vocação dos tratados de aritmética que consideramos aqui era essencialmente comercial. Numa matemática mais virada para o comércio, a regra de três dominava os procedimentos a utilizar a tal ponto que também era conhecida por regra de ouro, tal como afirma Maryvonne Spiesser<sup>90</sup>:

A expressão «regra de três» pressupõe que, a partir de três números dados, um dado procedimento vai permitir encontrar um quarto número, ou seja, aquele que é procurado. Enfim, a regra de três é muito útil aos mercadores, no cálculo dos pesos e das medidas, a tal ponto que ficou conhecida por «regra dourada» ou ainda «regra de ouro do mercador».

Esta regra não era de todo inocente apesar de simples. Assente na noção de proporcionalidade, está na base de outras regras, nomeadamente de falsa posição a par com uma presença na base das regras também dirigidas para os negócios, tais como as companhias e baratas. Não é nosso objetivo percorrer a história da regra de três e das outras regras comerciais, antes nos propomos estudar o seu enquadramento nos tratados portugueses de aritmética mercantil. Nesta ótica, interessa-nos ver como Ruy Mendes explicou as regras comerciais e até que ponto Gaspar Nicolas e Bento Fernandes o acompanharam. Usando uma estratégia de descrição e comparação, abordaremos, para além da regra de três, outras regras, tais como as baratas, companhias, câmbios, ligas de prata e

---

<sup>90</sup> «L'expression «règle de trois» met en valeur le fait que, à partir de trois nombres donnés, une procédure va permettre de trouver le quatrième nombre, celui qui est recherché. Enfin, la règle de trois est très utile aux marchands, pour leus calculs de poids et mesure, ce qui vaut la belle expression de «règle dorée», voir aussi de «règle d'or du marchand» [Spiesser, 2001, p. 85].

de ouro que, sendo transversais aos tratados da época, marcam também uma presença nos tratados portugueses. Este conjunto de regras mais dirigidas a situações comerciais mostram uma forte motivação de fazer uma matemática utilitária no mundo dos negócios, daí a escolha de «A Matemática para o comércio» como tema desta secção. No caso português este título aparece reforçado pela presença de duas regras: quarto e vintena e conta de Flandres, pilares nas transações do comércio português das especiarias.

## **II. A Matemática para o comércio**

### **1. A regra de três, regra de ouro fundamental**

Não se sabe ao certo a origem da expressão «regra de três». Luca Pacioli, cujo trabalho teve reconhecido impacto na aritmética prática, é um dos responsáveis pela divulgação daquela regra no *Summa*. O papel da regra é tão importante para a aritmética mercantil que António Pereira, um aritmético português do século XVII, compara-a ao alecrim, uma erva medicinal para «todas as enfermidades do corpo». «Quem sabe a regra de três talvez não saiba tudo, mas sem dúvida, aquele que a domina, sabe muito. De entre todas as utilizações aritméticas a regra de três é um deslumbramento<sup>91</sup>».

Interessa-nos averiguar que importância concederam os nossos aritméticos à regra de três, como a explicaram e enquadraram nos saberes matemáticos da sua época. Se compararmos a ordem dada aos assuntos por Ruy Mendes com as ordens propostas por Nicolas e Fernandes, respetivamente, e como já referimos, o primeiro dá prioridade a uma aritmética para inteiros e para quebrados. A regra de três aparece a partir do fólho 61 e, podemos observar a ordenação concebida por Mendes, exibindo na «base» a regra de três, e percorrendo um caminho que termina nas regras de câmbio, ou seja,

Regra de três → Regra de cinco → Regra sem nome → Regra de mudar

→ Regras das companhias → Regras das baratas → Regra de quarto e vintena

---

<sup>91</sup> António Pereira citado por [Almeida, 1994, vol. I, p. 136]. M. Almeida afirma ainda que confirma este estatuto o envolvimento que a regra tem nos cálculos intermédios associados a outras regras comerciais ou às regras de falsa posição.

→ Regra da conta de Flandres → Regras de falsa posição → Regras de câmbio

Gaspar Nicolas exhibe em primeiro lugar a aritmética para números inteiros à qual se seguem as regras:

Regra de três → Regras de companhias → Regra de quarto e vintena

Esta ordenação é interrompida pela aritmética dos quebrados à qual se segue a regra de três com quebrados,

Regra de três → Regra das oposições

→ Regra da conta de Flandres → Regra de baratas

Para Bento Fernandes temos em primeiro lugar a aritmética para números inteiros, tal como Nicolas o fez, seguindo-se

Regra de três e de cinco → Regra de companhias

Depois da aritmética dos quebrados temos um modelo idêntico ao de Nicolas

Regra de três com quebrados → Regras de companhias com frações

→ Regra da menos diminuição → Regra de quarto e vintena →

Regras da conta de Flandres → Regra de baratas

Ruy Mendes «arruma» as regras com uma certa sequência que descrevemos no capítulo 1, II da Segunda Parte, Gaspar Nicolas e Bento Fernandes exibem uma miscelânea de assuntos, contudo destaque-se a primazia da regra de três tanto nos quebrados como nos inteiros e as intenções dos autores quanto ao tipo de números que vão usar nos problemas enunciados.

### **1.1. A regra de três na *Pratica d'Arismetica* de Ruy Mendes**

No terceiro tratado da *Pratica d'Arismetica*, Ruy Mendes introduz sete regras: quatro regras de três, a regra de cinco, a regra sem nome e a regra de mudar. Interessa-nos nesta secção as quatro regras de três. Mais à frente, trataremos das restantes regras.

No primeiro capítulo do referido tratado, Mendes diz que vai apresentar a «regra de três sem tempo somente» em onze partículas. Na primeira partícula começa por explicar em que consiste a regra:

...regra de tres não he outra cousa salvo hũa tal pregũta que entra cõ a diçã/se/e tras cõsigo tres numeros sabidos preguntãdo por outro que ainda se não sabe: porẽ vem se a saber como quẽ dissesse assi: se .5. vintẽs ganhassem .7. reaes .10. vintẽs quantos reaes ganharia: na qual pergunta se acha ho sobredito .s. primeiramente entra cõ a diçã /se/ e tras logo cõsigo os ditos sabidos .s. .5. e .7. e .10. e pregũta por outro de que ainda se não sabe porẽ vẽse a saber pola obra da dita regra como a diante parecera: o qual numero ha de ser o que os .10. ganhariam [Mendes, 1540, f. 61 v].

Observa-se, nas palavras do autor, a insistência no uso de «dições», tal como o fizera nas quatro operações básicas com os quebrados. A «diçã», como lhe chama, apropriada para esta regra é o «se» que vai estar presente em todos os exemplos explanados ao longo do capítulo. Os procedimentos associados à regra de três são dados na segunda partícula e constam de vários passos que passamos a descrever [Mendes, 1540, f. 61 v]:

- 1º Conhecer os três números envolvidos;
- 2º Multiplicar o segundo número pelo terceiro e dividir tudo pelo primeiro;
- 3º Verificar a qualidade do número que vem da multiplicação;
- 4º O primeiro e o terceiro números devem ser da mesma qualidade.

Quais são os números envolvidos?

Podemos considerar três tipos de números segundo o que foi dito no Capítulo 2 desta Segunda Parte. Os números inteiros, exceto o zero, as frações próprias e os números mistos. Na partícula terceira é dada uma descrição sucinta dos quatro tipos da regra de três [Mendes, 1540, f. 62 f]:

- Regra de três sem tempo somente;
- Regra de três sem tempo somente por ganhar ou perder à razão de tanto por tanto;
- Regra de três com tempo somente;

-Regra de três com tempo somente por ganhar ou perder à razão de tanto por tanto.

Ainda na terceira partícula, Mendes retoma o enunciado dado na introdução: «...se .5. vintês ganhassem .7. reaes .10. vintês quantos reaes ganharia» [Mendes, 1540, f. 62 f] e propõe um esquema que consiste em apresentar os três números envolvidos por uma determinada ordem (primeiro passo enunciado na segunda partícula) e assim concretizar a regra de três sem tempo somente

$$5 \quad \text{—————} \quad 7 \quad \text{—————} \quad 10$$

A resolução do problema proposto é muito detalhada e organizada. O autor dá cumprimento a cada um dos quatro passos enunciados na segunda partícula: «esto feyto<sup>92</sup> multiplicareys logo ho segũdo numero que he .7. pelo terceiro que he .10. e fará .70. e estes repartireis ao primeiro que he .5. » [Mendes, 1540, f. 62 f] . Cumpre-se assim o segundo passo da regra. Resta verificar a «qualidade do número»: «os ditos .14. reaes» [Mendes, 1540, f. 62 f] já que, com a ordenação apresentada está garantido o quarto passo. Na mesma partícula Mendes afirma que com estes princípios se fazem as semelhantes e reforça a aplicação dos quatro parâmetros estabelecidos na segunda partícula o que nos leva mais uma vez a um processo de execução e repetição associado à prática do ensino.

Ruy Mendes expande este assunto em mais oito partículas articulando cada exemplo com uma espécie de jogo de aplicação das quatro regras enunciadas no início. Por exemplo, «Se .2. vintês ganhassem .7. reaes .10. reaes quanto ganhariam» [Mendes, 1540, f. 62 f]. O autor remete-nos para a quarta nota, dado que, o primeiro e o terceiro número não são da mesma qualidade. O primeiro refere vinténs e o terceiro reais. A sugestão dada consiste em converter os 2 vinténs (40 reais) em reais e prosseguir as regras com os três números todos referentes a reais e usando o esquema de ordenação 40---7---10.

---

<sup>92</sup> O autor refere-se ao esquema apresentado com os três números ordenados.

Todos os casos explanados até à partícula onze dão especial destaque a uma aplicação das leis previamente estabelecias, quer para números inteiros quer para quebrados. Para os últimos o esquema algorítmico realça os números em forma de fração. Vejamos um exemplo: «Se .2. reaes e .1/2. avo ganhassem .3. vintês e .1/3. avo .6. reaes e .1/4. avo quantos vintês ganharia» [Mendes, 1540, f. 64 f]. Os números são convertidos em fração, «Fazendo cada numero na maneira de seu quebrado» [Mendes, 1540, f. 64 f], e é exibido um esquema explicado com detalhe.

$$\frac{5}{2} \times \frac{10}{3} = \frac{25}{4}$$

Mendes diz que deste modo evita a multiplicação e a divisão de quebrados

...a qual figura com sua decaraçã notareys por que nos escusa muitas vezes ho multiplicar por quebrados e as vezes ho repartir por quebrados e as vezes tudo .s. ho multiplicar e ho repartir [Mendes, 1540, f. 63 v].

O algoritmo consiste no seguinte: dadas as frações  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{c}{d}$ ,  $\frac{e}{f}$  e o esquema proposto,

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

as operações a realizar até obter o resultado pretendido são:  $\frac{b \times c \times e}{a \times d \times f}$ . O autor termina esta secção da regra de três sem tempo somente com uma observação sobre outros exemplos que poderia considerar para quebrados, tal como o fizera para inteiros, contudo refere que não o faz para não se alargar. Esta observação é uma constante na obra de Mendes que reforça sempre a preocupação de sintetizar ou remeter o leitor para outros exemplos semelhantes.

Depois de introduzir a primeira regra de três, Mendes trata da regra de três sem tempo somente por ganhar ou perder à razão de tanto por tanto. Os exemplos exibidos são antecidos de uma explicação do que é ganhar ou perder à razão de tanto por tanto:

E âtes de entrar na decaraçã da dita regra quero primeiro decrarar que quer dizer ganhar ou perder a rezã de tão por tanto: pera o qual aveis de saber que ganhar a rezã de dez por cento nom quer dizer aal salvo que cada cento se façam .110. e perder a mesma

rezam quer dizer que cada cento se tornẽ .90. e assi ho aveis dentender e assi a outro qualquer ganhar ou perder a rezã doutro qualquer tanto por tanto [Mendes, 1540, f. 64 v].

A partir da noção de percentagem, Ruy Mendes generaliza a outros casos de proporção que acabam por não ser exibidos. Os exemplos enunciados são doze. Os seis primeiros dizem respeito a ganhos e os seis últimos a perdas. Vejamos um problema de ganho: «Se uma vara de pano custou .75. reaes por quantos se tornara a vender pera ganhar nela a rezã de doze por cento» [Mendes, 1540, f. 64 v]. A resolução assenta no princípio então estabelecido: «Se .100. reaes se fizessem .112. ganhado a rezã de doze por cento» [Mendes, 1540, f. 64 v]. Esta foi a regra dada pelo autor na introdução quando explicou o que era ganhar à razão de tanto por cento. Segue-se uma etapa que visa a aplicação regra de três sem tempo somente:

...obrãdo pola regra de tres sem tẽpo somente achareis que vem na partiçã .84. por tãtos reaes direis que se ha de tornar a vender per aver de ganhar nella dita rezã de doze por cento e assi sabereys outras quaisquer semelhantes [Mendes, 1540, f. 64 v].

Todos os enunciados referentes a ganho referem a razão de tanto por cento o mesmo se verifica para os casos de perda. Escolhemos o último enunciado referente a perda à razão de tanto por cento: «Comprãdo ho alqueire do trigo por .25. reaes e vẽdẽdo o por .23. a rezã de quãtos se perde por çẽto» [Mendes, 1540, f. 66 f]. A resposta é sucinta: «Se em .25. se perdẽ .2. em .100. quãtos se perderã e achareis que .8. e a esta rezã se perderia e assi sabereis as semelhãtes» [Mendes, 1540, f. 66 f].

Mendes termina esta secção observando que os exemplos que tratou são suficientes «ho dito abaste pera a decraraçã desta segũda regra de tres» [Mendes, 1540, f. 66 f], passando à terceira regra, ou seja, a regra de três com tempo somente, desenvolvida em seis partículas, mais propriamente, através de seis exemplos. A introdução é um misto entre uma regra geral e uma motivação «prática» na forma de problema: «...se .35. reaes ã .7. meses ganhasẽ .50 reaes .85. reaes em .13. meses quãtos ganhariã» [Mendes, 1540, f. 66 f]. Segue-se a regra geral:



A decaraçam desta regra pera responder a esta pregũta e aas semelhãtes he aquesta aveis primeiramente de multiplicar ho primeyro numero por seu tẽpo<sup>93</sup> e ho que fizerem poreis de parte e logo o quarto polo seu e ho que fizerẽ poreis tambẽ de parte e entã cõ estes dous numeros e cõ o do ganho que seram tres formareis a regra [Mendes, 1540, f. 66 v]

Cumprindo o estipulado na dita regra, o autor resolve o problema então enunciado.

...fazendo agora desta maneira na dita pregũta multiplicareis logo o primeiro numero que he .35. por seu tẽpo que he .7. meses e faram .245. reaes e meses que poreis de parte e asi y multiplicareis o quarto que he .85. por seu tẽpo que he .13. meses e faram .1105. reaes e meses que poreis de parte agora cõ estes dous numeros e cõ os .50. do ganho poreis a regra em forma dizendo assi: se .245. reaes e meses ganhaste .50. reaes .1105. reaes e meses quãtos ganhariã. E obrando como sabeis achareis que ganharia .225. reaes e .3. ceitis e .3/49. avos de ceitil trazendo a repartição a perfeiçam e assi respondereis a outras semelhãtes que sejam por quebrados [Mendes, 1540, f. 66 v].

O algoritmo envolve três números conhecidos, contudo dois deles,  $a.b$  e  $d.e$ , na forma de produto onde um dos fatores é o tempo ( $b$ ,  $e$  designam tempo). A regra assenta no esquema

$$a.b \quad \text{—————} \quad c \quad \text{—————} \quad d.e$$

Donde o valor pretendido

$$\frac{c.d.e}{a.b}$$

Como afirma o autor, o primeiro e o terceiro números são da mesma natureza: «reais» e «meses», enquanto o segundo número se associa a «reais». Aplica-se a primeira regra de três e vem pelo quociente o resultado. Para consolidar a aplicação da dita regra são dados mais cinco problemas.

Na quarta versão da regra de três, os exemplos considerados começam a escassear. Apenas são exibidos dois problemas, um relativo a um ganho e o outro a uma perda. O

---

<sup>93</sup> A expressão «multiplicar o primeiro número por seu tempo» é muito vulgar entre os autores desta época. Está presente nos autores franceses, italianos e espanhóis. Por exemplo, encontramos-la no *Sumario* de Juan Andrés [Andrés, 1515, f. 82 r].

segundo é resolvido de um modo abreviado e sempre remetendo para situações anteriores. Um problema proposto para praticar da regra de três com tempo para ganhar ou perder à razão de tanto por tanto é o seguinte: «Se com .20. reaes em .4. meses a rezã de dez por cêto ganhey .2. vintês cõ .30. reaes em .5. meses a rezã de .12. por cento quãtos vintês ganharey» [Mendes, 1540, f. 67 v]. É descrito o algoritmo: «Aveis primeiramente de multiplicar ho primeiro numero por seu tẽpo e o que fezerẽ polo seu tãto por tãto» [Mendes, 1540, f. 67 v]. E de seguida, «...multiplicareis o quarto numero assi mesmo por seu tempo e por seu tãto por tãto e cõ o que fica de parte e cõ ho que daqui fayz e cõ o ganho formareis a regra» [Mendes, 1540, f. 67 v]. Aplica-se a primeira versão da regra de três aos dois números que resultam dos produtos e ao outro que é sempre um dado inicial. Ou seja,

Multiplicãdo o primeiro numero que he .20. polo seu tẽpo que he .4. farã .80. reaes e meses e estes polo seu tãto por cêto que he .10. farã .800. reaes e meses e dez por çento que poreis de parte e assi multiplicareis o quarto numero que he .30. reaes polo seu tẽpo que he .5. e farã .150. reaes e meses e estes polo seu tanto que he .12. e farã .1800. reaes e meses e doze por cêto: agora direys assi se cõ .800. reaes e meses e dez por çento ganhey .2. vintês cõ .1800. reaes e meses e doze por cêto quãtos ganharey [Mendes 1540, f. 67 v].

O autor dá-nos o resultado remetendo-nos sempre para o procedimento já conhecido da primeira regra de três. Esta variante não difere da anterior. A ordem do produto é cuidadosamente escolhida bem como da divisão para se conseguir cumprir os princípios enunciados para a regra e, «cortar» as unidades que não vão interessar no resultado assim temos:

$$\frac{d.e.f.g}{a.b.c} \times \frac{\text{vintêns.reaís.meses.por cento}}{\text{reaís.meses.por cento}} = x \text{ vintêns}$$

## 1.2. A regra de três no *Tratado da Pratica d'Arismetypa* de Gaspar Nicolas

Gaspar Nicolas refere esta regra quase no início do seu tratado (fólios 11 e 12), depois das operações básicas com números inteiros, como já referimos. Será este enquadramento obra do acaso ou uma intenção do autor, dado o conhecido papel da regra na base das operações comerciais? Sabemos que a regra de três é a base de todas as questões ligadas ao comércio como o são as companhias, as baratas, as trocas de moeda, entre outros, e Nicolas parece ter-lhe reconhecido este estatuto.

Começemos com as regras de três para inteiros. A regra aparece subdividida em cinco regras: regra de três chaã; regra de três com tempos; regra de três com tempo à razão de tanto por cento; regra de três chaã em que a da metade é o partidor; regra de três em que a derradeira é partidor. Todos os enunciados ocupam apenas os fólios 11 e 12. A regra de três chaã corresponde à primeira regra de três enunciada por Ruy Mendes e, Nicolas diz-nos que: «...a principal regra de tres he desta maneyra multiplicar a segunda com a terceyra e repartir com a primeyra» [Nicolas, 1963, f. 11 f], o que denota um manifesto entendimento do principal princípio da regra, uma vontade de simplificar e de abreviar. Numa frase curta Gaspar Nicolas define a regra e, dá a entender ao leitor que todos os outros casos estão sujeitos a esta lei. Esta definição não é de todo uma novidade dado que já a encontramos noutros autores. Por exemplo, Chuquet descreve este mesmo algoritmo: «O modo da regra é o seguinte: multiplica o terceiro número pelo segundo e depois divide pelo primeiro<sup>94</sup>». Contudo, Chuquet explica a regra com argumentos ligados à noção de proporcionalidade: «A regra de três tem este nome porque envolve sempre três números, dos quais os dois primeiros estão em proporção, e a proporção que estabelece a regra serve para encontrar para o terceiro número, o quarto proporcional do mesmo modo que, o segundo é proporcional ao primeiro<sup>95</sup>». Gaspar Nicolas apresenta a regra de três sem qualquer referência à proporcionalidade. Na sua atuação está patente um interesse por uma prática imediata onde a dita regra aparece como uma receita.

---

<sup>94</sup> Chuquet citado por Marie-Hélène Labarthe «Le mode de cette règle est le suivant: multiplie le troisième nombre par le second et puis divise par le premier» [Labarthe, 2004, vol. I, p. 123].

<sup>95</sup> «La règle de trois est ainsi appelée parce qu'elle requière toujours trois nombres, desquels les deux premiers sont toujours constitués en certaine proportion, et en telle proportion qui établie cette règle sert pour trouver au troisième nombre son quatrième à lui proportionné ainsi qu'est le second au premier» [Labarthe, 2004, vol. I, p. 123].

O primeiro exemplo enunciado por Nicolas é o seguinte: «...se .70. valẽ .97. que valeram .240. a este mesmo respeyto» [Nicolas, 1963, f. 11 f]. Este é um tipo de enunciado muito comum nas aritméticas práticas e centra-se em dois aspetos. O primeiro é o uso do «se»<sup>96</sup>, o segundo é a apresentação dos dados desembaraçando-se de todas as unidades para destacar a regra e assim, apresentar como prioridade o funcionamento do algoritmo. Esta segunda característica está ausente no discurso de Ruy Mendes que, antes procura um «contexto real» para os enunciados escolhidos. Retomando o problema enunciado, a resposta é dada de um modo simples e rápido: «...multiplica .97. por .240. e faras .23280. e parteos por .70. e virteam em partiçam .332. e  $\frac{4}{7}$  e tantos diras que ganham .240. » [Nicolas, 1963, f. 11 f]. Não há qualquer esquema a acompanhar o algoritmo, nem qualquer chamada de atenção quanto à natureza das quantidades utilizadas nem à sua ordem, tal como Mendes o fizera, o que mais uma vez denota o perfil prático e «despachado» de Nicolas.

A regra de três com tempo é brevemente referida ao contrário de Mendes que exhibe seis enunciados. O algoritmo mantém-se,

...multiplica os tempos com a primeyra e este sera teu partidor e pera saberes qual he a partiçam multiplica ho ganho com a terceira e com os tempos que esta de baixo della e parte pelo partidor e o que vier tanto ganha [Nicolas, 1963, f. 11 f].

Mais uma vez, o autor enaltece o algoritmo em detrimento das unidades que, certamente estão presentes na sua memória. Note-se que existe uma diferença de nomenclatura relativamente às regras de três para Mendes e Nicolas. Por exemplo, o primeiro tem a «regra de três sem tempo somente» e a uma regra equivalente a esta, Nicolas chama-lhe «regra de três chaã». A designação «regra de três com tempos» é comum aos dois, contudo Mendes acrescenta o «somente». Sobre os outros tipos, Nicolas refere a regra de três com tempo à razão de tanto por cento. Vejamos como a descreve:

---

<sup>96</sup> Sobre a formulação de um enunciado com o «se» não é dada qualquer nota pelo autor sobre o uso desta expressão à semelhança do que Mendes o fizera.

...se faz desta maneyra multiplicar hos tempos com o tanto por .100.. E com a primeyra e este sera ho teu partidor e pera saberes qual he a partiçam multiplicaras ha segũa com ha terçeyra e com os tempos e com a rezam de tanto por .100. e aquilo que te sair partiras polo teu partidor [Nicolas, 1963, f. 11 v].

A ideia é a mesma que nos descreveu Ruy Mendes embora dita de um modo mais desarrumado. A questão proposta para praticar a dita regra é apenas uma e diz respeito ao uso de percentagem, tal como é indicado no nome da regra. Ruy Mendes generaliza o nome da regra para tanto por tanto, o que nos pode levar a crer noutras situações, no entanto todos os caso se reduzem também ao tanto por cento.

Gaspar Nicolas enuncia uma «regra de três chaã em que a da metade é o partidor». A introdução é breve: «...se com .20. ganho .6. com quantos ganharey .30. » [Nicolas, 1963, f. 12 f]. O autor propõe um algoritmo que designa por regra geral: «tem regra jeral multiplica sempre as dos cabos e parte pella da metade» [Nicolas, 1963, f. 12 f]. Podemos pensar na ordenação dos números em jogo

$$a \text{ ————— } b \text{ ————— } c$$

Os «cabos» são  $a$  e  $c$ . O «da metade» é o valor central, ou seja,  $b$ . Não só esta linguagem está ausente no tratado de Mendes, como também a questão nunca é colocada por esta ordem. São propostos dois problemas. No primeiro enunciado Nicolas coloca a seguinte questão: se  $a$  vale  $b$ ,  $c$  quantos valerão? Na segunda questão o sentido é outro: se com  $a$  ganho  $b$ , com quantos ganharei  $c$ ? Pensando em termos de relação entre  $a$ ,  $b$  e  $c$  temos, na primeira questão, para o número  $d$  desconhecido:

$$bc = ad \Leftrightarrow d = \frac{bc}{a}$$

E no segunda,

$$ac = bd \Leftrightarrow d = \frac{ac}{b}$$

Para finalizar a regra de três com inteiros, Nicolas exhibe a «regra de três em que a derradeira é partidor». A esse respeito afirma o autor,

Outra regra de três em que ha derradeira he ho partidor e a segûda com a primeira multiplicada hũa pella outra he a partiçam assy como se te perguntassem quãto ho alqueire de trigo valia a .60. reaes me davam huũ pão por .2. reaes que pesava .7. onças veyo ho trigo a valer .48. pregunto de quantas onças me daram huũ pão e se o saber quiseses multiprica .7. vezes .60. e faras .420. estes parte por .48. e vem .8. onças e  $\frac{3}{4}$  e tantas onças te daram valendo ho trigo a .48. reaes e por esta regra podes fazer quantas quiseses. E oulha como aquy esta feyto [Nicolas, 1963, f. 12 f].

O algoritmo conduz-nos a um esquema que o autor não exhibe

$$a \text{ ————— } b \text{ ————— } c$$

A regra consiste em efetuar o produto  $a.b$  que é dividido por  $c$ , o «derradeiro», como lhe chama Nicolas. No exemplo proposto, os 2 reais relativos ao custo do pão vão manter-se quando baixa o preço do alqueire do trigo contudo, peso do pão  $b$  é alterado na razão  $\frac{a}{c}$ . Assim temos o «novo peso»,  $d$ , como consequência da descida do alqueire de trigo de  $a$  para  $c$  dado por

$$d = b \times \frac{a}{c}$$

No fólio 26, Gaspar Nicolas volta ao tema «regra de três» mas desta vez com quebrados. A primeira abordagem contém uma nota introdutória sobre «reduzir todos os quebrados ha huũa qualidade .s. os que foram terços faz lo as terços» [Nicolas, 1963, f. 26 v]. Isto quer dizer que todas os quebrados compostos de uma parte inteira e de uma parte fracionária serão reduzidos a uma única fração. O exemplo, dado à partida, consiste em considerar os quebrados  $12\frac{1}{4}$ ,  $20\frac{1}{3}$  e  $18\frac{3}{4}$  que, vão ser reduzidos a uma só fração. Aqueles números estão envolvidos num enunciado: «.12. e  $\frac{1}{4}$  valem .20. e  $\frac{1}{3}$  que valeram .18. e três quartos» [Nicolas, 1963, f. 27 f]. A apresentação de Nicolas é muito confusa, contudo, as três frações são postas no esquema:  $\frac{49.61.75}{4 \ 3 \ 4}$ . Segue-se a aplicação da regra de três com quebrados e as operações que passamos a descrever em notação atual

$$12 \times 49 = 588 \text{ (partidor)}$$

$$4 \times 61 = 244$$

$$244 \times 75 = 18300,$$

$$18300 \div 588 = 31 \frac{6}{49}$$

Tentemos generalizar o que é proposto: são dados três números mistos que são reduzidos a frações próprias. Temos  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ , em seguida o autor diz «multiplicaras as duas feiras de baxo huña pella outra .s. da mão direita pera a esquerda» [Nicolas, 1963, f. 27 f], ou seja,  $f.d$ . Este resultado é multiplicado em cruz por  $a$ , e, tem-se  $a.f.d$ , este é o partidor. Continua o autor: «...pera saberes qual he a partiçam toma ho quebrado que esta de baxo da adiçam que esta escõtra mão esquerda e multiplica lo as em cruz como as duas adiçoões de çima» [Nicolas, 1963, f. 27 f], ou seja,  $b.c.e$ . O valor pretendido vem do quociente  $\frac{b.c.e}{a.f.d}$ . Embora não seja exibido, um esquema em cruz como o faz Ruy Mendes, está aqui presente.

Gaspar Nicolas enuncia um segundo exemplo com quebrados, muito semelhante ao primeiro mas, nesta secção, nada figura sobre as variantes desta regra que apresentou para números inteiros, ou seja, os casos com tempo ou ainda à razão de tanto por cento. Podemos mesmo verificar um modo abreviado e por vezes confuso, de explicação da regra de três, comparativamente ao que fizera Mendes que, caracterizou as suas explicações por um cuidado e detalhe, fornecendo ao leitor um número considerável de exemplos de consolidação dos diferentes tipos que propôs para a prática da regra. Uma qualidade ligada a Nicolas é a capacidade de se referir aos números em jogo «despindo-os» das unidades associadas para evidenciar o algoritmo, o que pressupõe uma vontade de generalização a múltiplas situações e uma apresentação mais fácil para a aprendizagem dado que a regra fica mais clara.

### 1.3. A regra de três no *Tratado da arte d'Arismetica* de Bento Fernandes

O caminho percorrido por Bento Fernandes em termos de enquadramento da regra no tratado é muito semelhante ao que faz Gaspar Nicolas. Ou seja, apresenta a aritmética dos inteiros, a regra de três para estes números e, depois de passar aos quebrados, apresenta a mesma regra para estes. Diz-nos Bento Fernandes: «Agora que vos tenho mostrado todas as [...] regras de inteiros que som fundamêto desta [...] vos mostrarey regra de tres per muitos

Modos» [Fernandes, 1555, f. 17 v]. Quais são então os modos que o autor refere? Temos os «nomes» da regra e respetivo número de problemas propostos para os números inteiros: regra de três chaã (quatro problemas); regra de três com tempos (dois problemas); regra de três com tempo à razão de tanto por cento (dois problemas); regra de três em que a segunda é o partidor (dois problemas); regra de três em que a terceira é o partidor (dois problemas). A classificação mencionada segue a que Gaspar Nicolas utilizou, com outros exemplos e, em alguns casos, a apresentação de uma prova para confirmar os resultados obtidos.

Para a regra de três chaã, Fernandes explica a razão deste nome:

...se diz assi porque poemos tres cousas diante pera por elas avermos noticia doutra que desejamos saber e por esta rezã se chama tâbẽ esta regra a regra das três cousas que parece ho seu verdadeiro nome [Fernandes, 1555, f. 18 f].

O primeiro exemplo é enunciado de modo breve: «...se .10. ganhã .8. --.24. que ganharã ao mesmo respeito» [Fernandes, 1555, f. 18 f]. Faz parte do enunciado o «se» mas o autor nada comenta sobre o uso desta expressão na regra, contrariamente a Ruy Mendes. Entenda-se que todos os autores usam o «se» mas não o notam. Ruy Mendes marca a diferença quando afirma que é importante a «dição se».

Sobre o problema proposto por Fernandes, a ordem entre os números é marcada por um esquema do tipo

$$a \text{ ————— } b \text{ ————— } c$$

que é exibido. Diz o autor que neste caso a regra geral é: «...multiplicar a segũa com a terceira e partir pela primeira» [Fernandes, 1555, f. 18 f]. É de notar a presença de uma prova que vai confirmar o resultado encontrado. Vejamos em que consiste. Aplicada a regra tem-se o resultado que vem de  $\frac{b.c}{a}$ . A prova consiste em aplicar o contrário pela mesma regra de três, tendo-se agora o esquema

$$c \text{ ————— } \frac{b.c}{a} \text{ ————— } a$$

Pretende-se chegar ao valor de  $b$ . Por aplicação da regra de três chaã, como refere o autor, e efetuando as operações necessárias



$$\frac{b \cdot c}{a} \cdot a = b \cdot c$$

E, por fim,  $\frac{b \cdot c}{c} = b$ .

As regras de três com tempo e à razão de tanto por cento assentam no mesmo algoritmo já dado quer por Nicolas, quer por Mendes. Infelizmente, nesta secção, o tratado de Bento Fernandes encontra-se em mau estado e os esquemas realizados encontram-se pouco perceptíveis. No texto associado à maior parte dos enunciados, o procedimento final das duas regras conduz-nos sempre à regra de três chaã tal como acontecia nas situações propostas quer por Nicolas quer por Mendes. É de salientar a explicação dada pelo autor para a regra de três em que a segunda é o partidor. Fernandes atribui-lhe também o nome de «regra de tres desvairada» [Fernandes, 1555, f. 19 v]. Vejamos o que nos diz sobre esta designação:

A regra de tres ã he que ha segũda he o partidor que se chama tãbẽ regra de tres desvairada a rezã he porque he desvairada da outra regra de tres que atras vos mostrei ã que a primeira he o partidor e tãbem a outra em que a terceira he o partidor e por esta ser desvairada das outras se chama assi [Fernandes, 1555, f. 19 v].

Na verdade, Fernandes é mais claro na aplicação deste algoritmo do que Nicolas. Para esta regra os procedimentos aplicam-se na forma de uma relação entre três números  $a$ ,  $b$  e  $c$ , tais que,  $a$  e  $c$  são de natureza diferente e  $b$  e  $c$  semelhantes (ou da mesma natureza).

$$\begin{array}{ccc} a & \text{————} & b \\ x & \text{————} & c \end{array}$$

Contudo, o autor pensa que, relativamente à ordem «natural» há um «desvio»

$$a \text{ ————— } b \text{ ————— } c$$

dado que o resultado será dado por  $\frac{a \cdot c}{b}$ , e não por  $\frac{b \cdot c}{a}$  como na regra de três chaã<sup>97</sup>. Mas a razão da mudança é óbvia e já vimos um caso idêntico com Gaspar Nicolas.

---

<sup>97</sup> No esquema  $x$  designa o número que se pretende determinar.

Quanto à regra de três em que a terceira é o partidor, um dos problemas incide no mesmo tema que exibiu Nicolas, ou seja, a venda de pão. Fernandes usa um enunciado semelhante que envolve outros números.

No fôlio 32, o autor faz a abordagem da regra de três aos números quebrados: «Aqui adiante vos mostrarey a regra de tres de quebrados de toda sorte» [Fernandes, 1555, f. 32 f]. A regra deve cumprir várias etapas, sendo a primeira sobre a redução de números mistos a frações. São dadas três possibilidades para execução da regra: a regra de três de quebrados faz-se do mesmo modo que a regra de três para inteiros; a regra de três com tempo de quebrados faz-se como a regra de três com tempo com inteiros; a regra de três com tempo e à razão de tanto por cento de quebrados faz-se como a mesma regra com inteiros. Para todos os casos são dados quatro problemas que Bento Fernandes resolve com todo o detalhe.

Se analisarmos o que nos dizem os três aritméticos sobre a regra de três, temos discursos diferentes. Ruy Mendes afirma ser necessário usar o «se» com três números conhecidos para determinar outro número desconhecido e ainda, ter em atenção a «qualidade» dos números antes multiplicar o segundo número pelo terceiro e dividir tudo pelo primeiro. Gaspar Nicolas evidencia uma certa evolução baseada num discurso muito abreviado e assente na principal regra de três: multiplicar a segunda com a terceira e repartir pela primeira, sem especificar a «qualidade» dos entes a que se refere. O importante é a prática do algoritmo. Bento Fernandes usa a regra para a partir de três «cousas» determinar uma outra. Através do que vimos no discurso dos autores está patente o que cada percebe como número. Para o primeiro, o número confunde-se com o que representa, daí a necessidade de mencionar a «qualidade». O segundo manipula o número sem mencionar as unidades, que lhe ficam na memória. O terceiro não usa a designação de número mas «cousa», no sentido de definir um princípio, que se aplica a qualquer ente desconhecido.

## **2. A regra de cinco, a regra sem nome e a regra de mudar na *Prática* de Ruy Mendes**

A regra de cinco, a regra sem nome e a regra de mudar são auxiliares na resolução de alguns problemas a tratar no parágrafo 3 do presente capítulo. Ruy Mendes inclui-as na sua obra daí optarmos por uma breve abordagem.

## 2.1. A regra de cinco

A regra de cinco assume um papel idêntico ao da regra de três, embora de um modo mais tímido. Na regra de cinco entram cinco números que é necessário colocar em ordem, consoante os dados a utilizar. A exemplificar a regra Ruy Mendes apresenta seis problemas, todos «mascarados» com enunciados comerciais. Vejamos o primeiro desse conjunto:

Quando a peça de pano custa .37. tostões me dê .4. covados dele por .7. vintês quando a tal peça custase .43. tostões que he mais. quãtos covados me dariã por .15. vinteês [Mendes, 1540, f. 68 f].

O primeiro passo consiste em ordenar os dados: «Aveis primeiramête de por em ordem os tais cinco numeros hũ avãte doutro da forma que aqui nos cinco sobredito parece [Mendes, 1540, f. 68 f]». Segue-se o esquema (apresentado pelo autor)

37      4      7      43      15

que antecede as operações

$37 \times 4 = 148$ , produto dos dois primeiros números

$148 \times 15 = 2220$ , produto do resultado anterior pelo quinto número

$7 \times 43 = 301$ , produto dos terceiro e quarto números

Finalmente o resultado

$$2220 \div 301 = 7 \frac{113}{301} \text{côvados}$$

Repare-se que os dados são cuidadosamente dispostos de modo a termos o resultado pretendido e na unidade conveniente.

Os enunciados propostos levam-nos a situações que se vão repetindo embora referentes a diferentes produtos. Enquanto o primeiro problema envolve o comércio de panos, o segundo já envolve o comércio de cereais. A finalidade é a prática para compreender o algoritmo. Este princípio é confirmado nos dois últimos enunciados que aparecem de um modo muito abreviado sem mencionar qualquer unidade.

## 2.2. A regra sem nome

Na «regra sem nome» figuram sete números e esta regra aplica-se à conversão de unidades de *moeda*, *peso* e *medida*. Para o enunciado «Se .20. tostões valem .5. cruzados e .3. cruzados valem .60. vintês e .5. vintês valem .20. decincos e .160. decincos quantos tostões valeram (1)» [Mendes, 1540, f. 68 v]. Ruy Mendes começa por dizer que «aveis primeiramête de assentar os taes numeros quâtos quer que forem hûs avâte doutros: da sorte que aqui os sobreditos se demostram» [Mendes, 1540, f. 68 v]

$$20 \text{ — } 5 \text{ — } 3 \text{ — } 60 \text{ — } 5 \text{ — } 20 \text{ — } 160$$

A regra consiste em multiplicar todos os números que estão em posição ímpar.

$$20 \times 3 \times 5 \times 160 = 48000$$

Em seguida os números que estão em posição par

$$5 \times 60 \times 20 = 6000$$

Dividindo o primeiro produto pelo segundo

$$48000 \div 6000 = 8$$

Como resposta: «... e tantos tostões (8) direis que valeram os ditos .160. decincos» [Mendes, 1540, f. 68 f]. A ordem em que os números aparecem é cuidadosamente escolhida para que, ao efetuar-se a divisão, cortem as unidades e fiquem no final os tostões. É ainda de notar que é utilizada uma sequência com um número ímpar de números.

O segundo exemplo envolve de novo unidades monetárias: «Se .3. vintês valê .12. decincos e .2. decincos valê .10. reaes e .5. reaes valê .30. ceytis os mesmos .30. ceitis quantos vintês valerã» [Mendes, 1540, f. 69 f]. Como se trata de um caso muito idêntico ao primeiro, o autor limita-se a mostrar o esquema com os números nas respetivas posições e remete-nos para o exemplo anterior dando-nos apenas a resposta. O terceiro enunciado é sobre «medida»: «Ponho outro em medida e digo assi se .6. côvados dos de Lisboa fossem .7. dos de Tavira e .12. dos de Tavira fossem .11. dos Devora .70. Devora quantos seriã dos de Lisboa» [Mendes, 1540, f. 68 f]. Observamos a referência a três cidades portuguesas e salienta-se, através do enunciado, a problemática da uniformização das unidades consideradas. Há mais um exemplo idêntico ao último mas com «varas», envolvendo as

mesmas cidades, o que nos leva a crer que a valia da «vara» variava nestas três cidades tal como acontecera com o «côvado» no exemplo anterior. A pergunta reporta-se sempre a Lisboa.

O último enunciado envolve números fracionários,

Nesta quinta e final partícula quero por hũ enxêpro por quebrados e digo assi: se .4. tostões e .1/2. avo valẽ .22. vintês e .1/2. avo e .2. vintês e .1/5. avo valẽ .8. decincos e .4/5. avo .40. decincos quantos tostões valerã [Mendes, 1540, f. 69 f].

contudo, não é resolvido. O autor remete o leitor para os exemplos anteriores e para as regras de multiplicar quebrados, dado que os procedimentos são semelhantes.

De entre os três aritméticos estudados é Ruy Mendes que menciona esta regra «sem nome» que é uma extensão das regras atrás referidas. A estrutura exibida assemelha-se à dada por Juan Ortega que na secção intitulada «Reglas de tres cõ tiêpo por êtero» [Ortega, 1512, ff. 88-93], onde descreve uma regra com sete números, sem contudo lhe chamar «regra sem nome», à semelhança do que fizera Mendes. Um dos exemplos apresentados por Ortega é o seguinte: «Si quisieres saber si .5. hombres en .6. dias cõ .8. machos ganã .9. ducados .10. hombres en .11. dias cõ .12. machos quãtos ducados ganaran» [Ortega, 1512, f. 88 v]. O autor propõe multiplicar os três primeiros números ( $5 \times 6 \times 8 = 240$ ). A este produto chama «primeiro número», ao 9 chama segundo número, o terceiro número é o produto de 10 por 11 e por 12 (1320). A partir desta etapa forma a regra de três com estes três números: «diras por tu regla de tres si .240. valẽ .9. que valdrã .1320. » [Ortega, 1512, f. 88 v]. Deste modo não é de estranhar que a regra a que Ruy Mendes chama «sem nome» apareça na secção da regra de três em Ortega, dado que, este autor faz apelo a esta regra, ao contrário de Mendes que, destaca o uso dos sete números como uma regra própria. Se a ordenação dos números no enunciado (1) de Mendes for 5 cruzados - 60 vintens - 20 decincos - 20 tostões - 3 cruzados - 5 vintens - 160 decincos, aplicando a regra de três, tal como o fez Ortega, chegamos à solução de Ruy Mendes.

### 2.3. A regra de mudar

A regra de mudar é uma regra de conversão e um pré-requisito na resolução de alguns problemas propostos. Aparece aqui como informação e não como assunto central das regras comerciais estabelecidas pelos três autores, daí só referirmos a abordagem de Ruy Mendes. Sabemos que a regra se chama assim «porque por ella se sabe mudar hũ numero e sua calidade em outro numero doutra calidade» [Mendes, 1540, f. 69 v]. Por exemplo

.3. tostões quantos vintês terá e obrando por ella da sorte que adiante decrarey achariades que terá .15. vintês na qual obra se mudaria ho primeiro numero que he .3. e sua calidade que he tostões em outro numero que he .15. vintês [Mendes 1540, f. 69 f].

Esta regra vai permitir estabelecer equivalências não só entre moedas mas unidades de «peso» e «medida» como refere o autor na primeira partícula. Mendes nota que a regra pode aparecer através da multiplicação e divisão contudo vai usar como algoritmo a primeira regra de três. Qual é a razão desta escolha? Para um melhor entendimento, segundo o autor. A linguagem sugerida do maior para o menor número é a seguinte: «Se hũ val ou tẽ tantos: tãtos quantos terá» [Mendes, 1540, f. 70 f]. De um modo semelhante, temos do menor para o maior número: «Se tãtos valẽ ou tem hũ: tãtos quantos valerã» [Mendes, 1540, f. 70 f]. Os enunciados são repartidos de acordo com esta classificação. Por exemplo: «.10. portugueses quantos tostões valerã» [Mendes, 1540, f. 69 v]. Trata-se de mudar um número de «grande qualidade», os 10 portugueses, em outro de «menor qualidade», os tostões. É estabelecida a igualdade: 1 português = 40 tostões, logo a resposta é 400 tostões através do princípio previamente estabelecido.

Os outros exemplos exibidos são semelhantes embora com unidades de «peso» e «medida». Mendes não termina a regra sem exemplificar um caso contrário «mudar números de pequena calidade em outros de mayor» [Mendes, 1540, f. 70 v]. Para o efeito propõe um enunciado inverso, ou seja, «ẽ .400. tostões quantos portugueses avera» [Mendes, 1540, f. 70 v]. A resposta é imediata: «se ẽ .40. ay hũ português nos ditos .400. (...) achareis que .10. » [Mendes, 1540, f. 70 v].

A «regra de mudar» assume um papel básico entre as regras comerciais. Tem por base a regra de três simples que é aplicada a «mudanças» através de técnicas calculatórias. As

regras enunciadas neste parágrafo 2 antecedem as companhias e as baratas tendo uma função de suporte daquelas dado que, em muitos casos, aparecem em cálculos intermédios.

### **3. As regras partilhadas com outros países**

#### **3.1. Regras de Companhias**

As regras de companhias tiveram a sua origem em associações comerciais, as companhias, com forte presença na vida económica da Europa mediterrânica. De que modo os portugueses se envolveram em *companhias*? Segundo Filipe Themudo Barata [Barata, 1998, p.239], as ligações existentes entre mercadores portugueses e outros mercadores, sociedades e casas comerciais estrangeiras não é uma mera hipótese. Para a região do Mediterrâneo, facilmente se comprovam através das listas de produtos negociados em algumas praças. As ligações à Coroa e a sociedades e mercadores estrangeiros foram os principais vetores que permitiram aos mercadores portugueses alguma solidez nos seus negócios. Registam-se já algumas companhias no século XV. É o caso da Companhia de Lagos que funcionou entre 1440-50. As companhias tinham negócios diversos, tais como, peixe, cortiça, coral. Num códice pertencente ao Mosteiro de Alcobaça, certamente do século XV, encontram-se vários formulários para a formação de diferentes tipos de sociedades comerciais [Barata, 1998, p.254]. Também no início da primeira navegação à costa africana a sul das Canárias havia regras a respeitar. Uma delas implicava a realização de uma sociedade com o Infante D. Henrique: este armaria a caravela (presume-se que além do navio, equipava-o incluindo a população), enquanto o interessado entrava no negócio com as mercadorias. A partilha de lucros, neste caso, seria dividir ao meio tudo o que viesse daqueles lugares, correndo o risco, segundo parece, por conta do Infante. A associação do rei a gentes do mar para a partilha do lucro de mercadorias, mesmo exportadas, não seria de todo inédita. Fernand Braudel menciona um acordo realizado em Portugal no ano de 1578 que define dois contratos de companhia, estabelecendo o princípio entre duas pessoas, «quando um põe o dinheiro e outro o trabalho» [Braudel, 1992, vol. 2, p.384]. Segundo este autor, o monopólio de uma companhia depende da confluência de três realidades: o Estado, o mundo mercantil e a zona de comércio a explorar [Braudel, 1992, vol. 2, p.392].

A definição de «companhia» está assente numa associação de homens com vista a obter lucros. Uma prova da divulgação e popularidade das companhias comerciais podemos obtê-



-la nos tratados de aritmética mercantil aqui em estudo. Os problemas de partilha de lucros, tal como nos relatam os aritméticos de Quinhentos, seriam uma prática corrente entre todos os envolvidos nas transações comerciais e disso são testemunho os enunciados que visam determinar a distribuição de ganhos pelos associados. Começemos por descrever o que Ruy Mendes nos diz sobre esta regra e vamos procurar um paralelo entre o seu trabalho e os tratados de Gaspar Nicolas e de Bento Fernandes relativamente ao mesmo tema.

### **3.1.1. As regras de companhias segundo Ruy Mendes**

No quarto tratado da *Pratica* Ruy Mendes introduz quatro regras de companhias «...aveys de saber que assi como temos quatro regras de três assi mesmo temos quatro regras de companhias» [Mendes, 1540, f. 71 f]: regra de companhia sem tempo somente; regra de companhia sem tempo somente e com condição de levar ao ganho ou perda à razão de tanto por tanto; regra de companhia com tempo somente; regra de companhia com tempo somente e com condição de levar ao ganho ou perda à razão de tanto por tanto.

O capítulo um deste tratado mostra como esta regra era fundamental nos negócios como bem o ilustram os problemas variados que são resolvidos.

#### **Regra de companhia sem tempo somente**

Uma versão mais simples desta regra é a «companhia sem tempo somente». O objetivo é determinar o ganho num negócio. Um enunciado proposto para esta regra é o seguinte:

Tres mercadores, Pedro, Luys e Andre fezerã hũa companhia na qual pos Pedro .56. cruzados e Luys .78. e Andre .85. e tratando todos três cõ elles ganharã cem tostões preguntasse agora quantos virã a cada hũ segundo o cabedal que pos na companhia [Mendes, 1540, f. 71 f].

Mendes alicerça a resolução do problema em várias etapas. A primeira fase consiste em conhecer o investimento de cada associado: «Aveis primeiramente de assentar o que cada hũ pos» [Mendes, 1540, f. 71 f]. Para o efeito o autor elabora um esquema onde consta o que cada um dos envolvidos investiu

Pedro pos	56.c.
Luys pos	78.c.
Andre pos	85.c.
<hr/>	
Soma todo	219.c.

Figura 32: Esquema apresentado por Ruy Mendes (f. 71 f, exemplo 1, partícula segunda)

Numa segunda etapa entra o ganho realizado pela companhia, neste caso, 100 cruzados. A soma dos ganhos dos associados deve ser igual ao ganho total e os ganhos respectivos devem ser repartidos de forma proporcional ao investimento de cada associado.

...direys pola primeira regra de tres assi: se tantos soma e cabedal de todos ganharam tantos: tantos cabedal de foam e tantos de foão e tantos de foão e cetera quantos ganhariam: e quantos vier a cada hũ na sua repartiçã tâtos direis que vira a cada hũ [Mendes, 1540, f. 71 f].

Com os passos enunciados os ganhos são distribuídos pelos três associados. Se designarmos por  $i_j$  ( $1 \leq j \leq 3$ ) o investimento de cada um, temos:

$$i_1 = 56, i_2 = 78, i_3 = 85$$

Seja  $g = 100$  o ganho da companhia. Designemos por  $g_j$  os respectivos ganhos para cada associado, então

$$\sum_{j=1}^3 g_j = g$$

Os ganhos devem ser repartidos proporcionalmente tendo em conta as seguintes condições:

$$\frac{g_1}{i_1} = \frac{g_2}{i_2} = \frac{g_3}{i_3} = \frac{100}{219}$$

Depois de aplicada três vezes a regra de três, Mendes dá-nos os valores dos ganhos para cada um dos envolvidos:

$$g_1 = 25 \frac{125}{219}, g_2 = 35 \frac{135}{219}, g_3 = 38 \frac{178}{219}$$

com  $g_j$  e  $i_j$  nas unidades convenientes tal como o autor refere: «...he necessário trazer a prefeyça as repartições para respõderes craramente quanto ganhou cada hũ» [Mendes, 1540, f. 71 v]. Também não deixa de notar: «...he assi respõdereys a outras quaisquer semelhãtes ã mais pessoas» [Mendes, 1540, f. 71 v], o que nos sugere uma generalização deste modelo. Sejam agora  $n$  associados, vamos designar por  $i_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) o investimento de cada um e por  $g_j$  os respetivos ganhos, temos então as condições

$$\sum_{j=1}^n g_j = g$$

e

$$\frac{g_1}{i_1} = \frac{g_2}{i_2} = \dots = \frac{g_n}{i_n} = \frac{g}{\sum_{j=1}^n i_j}$$

Por aplicação da regra de três, tal como recomenda o autor, temos para um certo  $m$ :

$$\sum_{j=1}^n i_j \quad \text{-----} \quad g \quad \text{-----} \quad i_m$$

Donde

$$g_m = \frac{g i_m}{\sum_{j=1}^n i_j}$$

Mendes considera um exemplo de perda, ou seja, um negócio que não correu bem: «Pedro e Diogo fazerã hũa companhia na qual pos Pedro .25. cruzados he Diogo pos .30. e tratado cõ elles perderã dez tostões: preguntase quãtos perdera a cada hũ» [Mendes, 1540, f. 72 f]. Este enunciado carece de uma resolução detalhada, sendo o leitor remetido para o exemplo anterior.

As incógnitas podem não ser o ganho ou a perda de cada associado. Há enunciados que visam determinar o ganho de cada um e ainda, o valor do investimento individual, estabelecidas certas condições.

Pedro e Diogo fizeram hũa cõpanhia na qual poserã ambos .500. cruzados e tratado cõ elles ganharã .300. e assi fazerã todos .800. e depois que repartirã achou Pedro que tinha .500. ãtre cabedal e ganho e Diogo .300. preguntase agora quãtos pos segũdo esto cada hũ por si e quantos lhe vierã de ganho [Mendes 1540, f. 72 f].

Seja  $i = 500$  o investimento<sup>98</sup> dos dois sócios e  $g = 300$  o ganho neste negócio. Designemos por  $i_1 + g_1 = 500$ , a soma do investimento e do ganho de Pedro. Pretende-se saber o valor de  $i_1$ . A resposta apresentada por Mendes é a seguinte:

Se .800. cruzados cabedal e ganho d'ambos vierã de .500. cabedal somente os .500. cruzados cabedal e ganho de Pedro quãtos vierã he obrãdo achareis que de .312. e .1/2. avo e tãtos direys que pos Pedro [Mendes, 1540, f. 72 f].

O valor obtido vem do seguinte esquema 800---500---500 para a aplicação da regra de três. Utilizando a nossa notação temos

$$g + i \quad \text{---} \quad i_1 + g_1 \quad \text{---} \quad i$$

O valor pretendido,  $i_1$  é igual a  $\frac{i(i_1+g_1)}{g+i}$ . Do mesmo modo vem o valor investido por Diogo, como nos diz o autor, será uma questão de agora considerarmos  $i_2 + g_2$ , na mesma regra, onde  $i_2, g_2$ , designam, respetivamente, o investimento e o ganho de Diogo.

---

<sup>98</sup> O investimento inicial é designado no enunciado por cabedal.

### Regra de companhia sem tempo somente e com condição de levar ao ganho ou perda à razão de tanto por tanto

A regra de companhias sem tempo somente e com condição de levar ao ganho ou perda à razão de tanto por tanto apresenta-se sob a forma de problemas. Vejamos uma primeira situação:

Tres homens .s. Pedro. Luys e Diogo fizeram hũa companhia na qual pos Pedro .136. cruzados com tal condição que avia de levar do ganho a rezam de .10. por cêto. E Luys pos .235. cõ tal condição que avia de levar a rezã de .8. por cento. E Diogo pos .297. cõ tal condiçã que avi de levar a rezam de .13. por cento. Os quaes tratando cõ os ditos cruzados ganharã .150. tostões: pregũtasse agora quãtos virã a cada hũ segundo o cabedal e a condiçã que pos [Mendes,1540, f. 72 v].

Figura no enunciado uma outra condição relativa à percentagem de cada um dos envolvidos que passamos a designar por  $c_j$  ( $1 \leq j \leq 3$ ). O enunciado dá-nos os elementos seguintes:

$i_1 = 136$  (investimento do Pedro),  $i_2 = 235$  (investimento do Luys),  $i_3 = 297$  (investimento do Diogo),  $c_1 = 10\%$ ,  $c_2 = 8\%$ ,  $c_3 = 13\%$ ,  $g = 150$  tostões. Pretende-se determinar  $g_1, g_2, g_3$ . A primeira etapa da resolução consiste em efetuar os produtos  $i_j c'_j$  ( $1 \leq j \leq 3$ ) ( $c'_1 = 10$ ,  $c'_2 = 8$ ,  $c'_3 = 13$ )

para cada associado: «...aveis primeiramente de multiplicar ho cabedal que pos cada hũ por sua condição» [Mendes, 1540, f. 72 v]. Efetuados os produtos somam-se os três resultados obtidos: «...agora poreys estas multiplicações em figura da maneyra que aqui parecem as quaes somareys e somarã .7101. cruzados» [Mendes, 1540, f. 72 v].

Pedro	pos	1360.c. e cõd.
Luys	pos	1880.c. e cõd.
Diogo	pos	<u>3861.c. e cõd.</u>
Soma todo		7101.c. e cõd.

Figura 33: Esquema do autor

Para chegar aos valores pedidos, Mendes coloca a questão seguinte: «...entã direys assi: se .7101. cruzados e condições de todos ganharã .150. tostões os cruzados e condiçã de cada

hũ por si quãtos ganharia» [Mendes 1540, f. 72 v]. O que vem a cada um aparece numa resposta muito abreviada: «...obrando achareis que ganharia Pedro .28. e .5172/7101. avos e tantos direis que lhe virã dos .150.. E Luys .39. e .5061/7101. avos. E Diogo .81. e .3969/7101. avos e tantos direis que virã a cada hũ» [Mendes, 1540, f. 72 v]. Usando as condições estabelecidas e sabendo que as percentagens são substituídas pelos números que as representam, ou seja, 10, 8 e 13, o ganho de cada um dos associados vem sob a forma

$$g_1 = \frac{gi_1c'_1}{\sum_{j=1}^3(i_jc'_j)}$$

$$g_2 = \frac{gi_2c'_2}{\sum_{j=1}^3(i_jc'_j)}$$

$$g_3 = \frac{gi_3c'_3}{\sum_{j=1}^3(i_jc'_j)}$$

Para a regra de companhias sem tempo somente e com condição de levar ao ganho ou perda à razão de tanto por tanto, queremos dizer que este «tanto por tanto» refere-se sempre a «tanto por cento». Queremos ainda referir que para a «regra de companhia sem tempo somente», o total do investimento correspondia à soma das quantias envolvidas e cada um, tinha como ganho, o produto do seu investimento inicial pela fração  $\frac{g}{\sum_{j=1}^n i_j}$ . No último problema da «companhia sem tempo somente e com condição de levar ao ganho ou perda à razão de tanto por tanto», a situação torna-se mais complexa em termos de enunciado e, é na resolução que detetamos o que se pretende. O total investido é a soma das percentagem calculadas sobre os montantes dados à partida. Cada um dos três intervenientes entra no negócio com uma certa percentagem de uma quantia de dinheiro. As quantias iniciais são diferentes bem como as respectivas percentagens que lhes estão associadas. O ganho obtido por cada um dos associados vem de acordo com a percentagem que cada um investiu. Se fizermos  $i_jc'_j = i'_j$  ( $1 \leq j \leq 3$ ) temos cada ganho como o produto do investimento inicial  $i'_j$ , pela fração  $\frac{g}{\sum_{j=1}^n i'_j}$  o que nos conduz ao resultado do ganho para cada um como na companhia simples.

Uma variante da regra que temos vindo a descrever vem num enunciado que Ruy Mendes propõe. Trata-se de um problema de sociedade entre dois mercadores onde entra um terceiro interveniente, o feitor. Pretende-se determinar o ganho de cada associado incluindo o do feitor.

Dous mercadores .s. Luys e Andre fezerã hũa cõpanhia na qual o pos Luys .200. cruzados e Andre pos .300. que erã .500. por todos os quais derã a hũ seu feitor pera que tratasse com elles cõ tal condiçam que do ganho levasse a rezã de .12. por cêto e eles segũdo o que cada hũ pos e o tal feitor trata do que ganhou .300. tostões: preguntase agora quãtos virã ao feitor segũdo a dita cõdiçã e quãtos a cada hũ dos outros [Mendes,1540, f. 73 f].

A resolução remete-nos para a regra de três, tendo em vista saber o proveito do feitor segundo o princípio: «...se de .100. avia de levar .12. (...) dos .300. quantos levará» [Mendes, 1540, f. 73 f]. Deste modo temos os 36 tostões destinados ao feitor. De seguida, o autor calcula a diferença,  $300 - 36 = 264$ , sendo esta a parte a repartir pelos outros dois envolvidos no negócio. Para saber o que cabe a cada um, o Mendes recorre à primeira regra de companhias: «...pola primeira regra atras decrarada» [Mendes, 1540, f. 73 f]. Deste modo, esta situação vai utilizar o algoritmo já usado na primeira regra enunciada<sup>99</sup>.

### **Regra de companhias com tempo somente**

Para esta versão das companhias são exibidos mais problemas que naturalmente visam obter os ganhos da cada um dos envolvidos no negócio. Vejamos o primeiro exemplo:

...dous mercadores .s. Pedro e Joane fezerã hũa companhia na qual pos Pedro .30. cruzados e andou tratado .12. meses e Joane pos .40. e ãdou .16. meses e no cabo deles acharã de ganho .50. tostões: preguntase agora quãtos virã a cada hũ segũdo o cabedal que pos e segũdo o tempo que andou tratando [Mendes,1540, f. 73 v].

---

<sup>99</sup> O autor dá-nos somente os valores sem detalhar a resolução.

Desde logo Ruy Mendes esclarece que vai apresentar uma resposta extensível a problemas que sejam semelhantes. Segue-se uma resolução assente em várias etapas: «...aveis primeiramête de multiplicar ho cabedal de cada hũ polo tẽpo que tratou» [Mendes 1540, f. 73 v] e, seguindo o que é descrito, efetuar os produtos

$$30 \times 12 = 360$$

$$40 \times 16 = 640$$

Estes valores intermédios vão permitir chegar ao resultado pretendido, contando com o auxílio da regra de três: «...com a soma das taes multiplicações e cõ o ganho e cõ ellas formar a terceira regra de três e o que vier em cada repartiçã direis que vira a cada hũ<sup>100</sup>». Podemos considerar que este é um problema elementar onde se conhece o investimento, o tempo passado na companhia para cada associado e o ganho total. Pretende-se determinar o ganho de cada um. Estão envolvidos dois associados, contudo, Mendes dá-nos outros exemplos com mais do que dois. Vejamos em que consiste o algoritmo aplicado  $n$  associados: seja  $i_j (1 \leq j \leq n)$ , o investimento de cada um,  $t_j (1 \leq j \leq n)$ , o tempo de duração da companhia para cada um dos associados e  $g$  o ganho da companhia. Pretende-se saber o ganho  $g_j (1 \leq j \leq n)$  de cada interveniente no negócio. Para tal sabe-se que

$$\sum_{j=1}^n g_j = g$$

e que os ganhos devem ser proporcionais ao produto do investimento pelo respetivo tempo para cada associado, ou seja,

$$\frac{g_1}{i_1 t_1} = \frac{g_2}{i_2 t_2} = \dots = \frac{g_n}{i_n t_n}$$

Para o problema que envolve o Pedro e o Joane, temos

$$\sum_{j=1}^2 g_j = 50$$

e

---

<sup>100</sup> O autor refere-se à «regra de três com tempo somente» [Mendes, 1540, f. 73 v].



$$\frac{g_1}{i_1 t_1} = \frac{g_2}{i_2 t_2} = \frac{g}{\sum_{j=1}^2 i_j t_j} = \frac{50}{1000}$$

Cada ganho vem das repartições referidas, assim

$$g_1 = \frac{g i_1 t_1}{\sum_{j=1}^2 (i_j t_j)} = 18$$

$$g_2 = \frac{g i_2 t_2}{\sum_{j=1}^2 (i_j t_j)} = 32$$

Ainda nesta secção Ruy Mendes enuncia um caso diferente. As incógnitas deixam de ser os ganhos de cada um para se tornarem os investimentos na companhia.

Lopo e Fernão e Vasco fizeram outra cõpanhia por hũ ano .s. de janeiro a janeiro na qual pos Lopo .20. cruzados e andou todo o ano no trato que forã .12. meses e Fernão não sabe quantos cruzados pos e sabese que entrou a tratar o primeiro de abril e tratou ate o fim do ano que forã .9. meses e assi mesmo não se sabe quãtos cruzados pos Vasco porẽ sabese que tratou desde o primeiro d'agosto ate o fim do ano que foram .5. meses e no fim do dito ano acharã .300. cruzados de ganho os quaes repartirã antre si segũdo o cabedal e tẽpo de cada hũ e vierã a cada hũ deles çẽ cruzados que era por igual parte. Pregũtase agora quantos cruzados segũdo esto pos Fernão na tal cõpanhia e quanto Vasco [Mendes, 1540, f. 74 v].

Quanto à resolução exibida no tratado: «...vereis quantos cruzados e meses pos Lopo que sera multiplicãdo os cruzados que sã .20. polos .12. meses que tratou e farã .240. cruzados e meses» [Mendes 1540, f. 74 v]. Sendo  $i_1 = 20$  cruzados, o investimento de Lopo e  $t_1 = 12$  meses, o tempo na companhia, a primeira operação consiste em efetuar o produto  $i_1 t_1 = 20 \times 12 = 240$  cruzados e meses. A próxima etapa, explica o autor: «...repartireis primeiro aos .9. meses» [Mendes, 1540, f. 74 v]. Sendo  $t_2 = 9$  meses o tempo de Fernando na companhia, Mendes propõe o quociente

$$i_2 = \frac{i_1 t_1}{t_2} = \frac{240}{9} = 26 \frac{2}{3} \text{ cruzados}$$

Para determinar o investimento de Vasco, «...repartireis (240) aos .5. meses» [Mendes, 1540, f. 74 v], ou seja,

$$i_3 = \frac{i_1 t_1}{t_3} = \frac{240}{5} = 48 \text{ cruzados.}$$

Dado que se verifica a proporção

$$\frac{g_1}{i_1 t_1} = \frac{g_2}{i_2 t_2} = \frac{g_3}{i_3 t_3}$$

Embora não exibida pelo autor, que nos conduz a

$$\frac{100}{20 \times 12} = \frac{100}{9i_2} = \frac{100}{5i_3}$$

$$20 \times 12 = 9i_2 = 5i_3$$

donde os resultados apresentados por Mendes para os investimentos desconhecidos,

$$\begin{cases} 9i_2 = 240 \\ 5i_3 = 240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i_2 = 26\frac{2}{3} \\ i_3 = 48 \end{cases}$$

O último enunciado para regra de companhias com tempo, diz respeito a uma situação em que as incógnitas são os tempos: «Esta pergunta he deferente da de acima na questo: que nela preguntavase pollo cabedal que aviam posto e nesta pregūtase polo tempo que andaram tratado» [Mendes, 1540, f. 74 v].

Os sobreditos<sup>101</sup> fezerã outra cõpanhia por seis meses .s. de janeiro ate ao fim de junho na qual pos Lopo .20. cruzados e tratou todos .6. meses e Fernão pos .30. cruzados e não se sabe quãtos meses tratou e Vasco pos .24. e assi mesmo não sabe quantos meses andou no trato porem sabe se que no fim dos ditos .6. meses acharam de ganho .60. cruzados os quais repartiram antre si segũdo os cruzados e tempo de cada hũ e vieram tantos a huũ como a outro convem a saber a cada hũ .20. pergunta se agora quantos meses segundo esto tratou Fernando e quantos Vasco [Mendes 1540, f. 74 v].

---

<sup>101</sup> Ruy Mendes refere-se a Lopo, Fernando e Vasco.

A resolução dada é a seguinte:

...vereis primeiramente quãtos cruzados pos Lopo e achareis que .120. agora repartilos eis primeiramente aos cruzados que pos Fernãdo que erã .30. e viram .4. e tãtos meses direys que tratou e assi os repartireis aos cruzados que pos Vasco que eram .24. e virã .5. e tantos meses direis que tratou...[Mendes,1540, f. 75 f].

O método utilizado parte da mesma proporção

$$\frac{g_1}{i_1 t_1} = \frac{g_2}{i_2 t_2} = \frac{g_3}{i_3 t_3}$$

Neste caso particular

$$\frac{20}{20 \times 6} = \frac{20}{30t_2} = \frac{20}{24t_3}$$

Pelas propriedade das proporções, devem ser verificadas as igualdades  $20 \times 6 = 30t_2 = 24t_3$ , temos então as soluções que o autor nos dá

$$\begin{cases} 30t_2 = 120 \\ 24t_3 = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_2 = 4 \\ t_3 = 5 \end{cases}$$

Para esta versão da regra de companhias, Ruy Mendes abordou problemas que versavam três tipos de incógnitas, ganhos, tempos e investimentos, num total de quatro questões. A próxima versão das companhias é-nos apresentada em duas partículas que correspondem a dois problemas.

### **Regra de companhia com tempo somente e com condição de levar ao ganho ou perda à razão de tanto por tanto**

A primeira situação envolve de novo os hipotéticos mercadores Pedro e Luys e pretende-se saber o ganho destes num determinado negócio que envolve tempo e ganho à razão de «tanto por cento»:

Dous mercadores .s. Pedro e Luys, fezerã uma cõpanhia por .6. meses .s. desde Março ate ao fim de d'agosto na qual Pedro pos .20. cruzados, cõ tal cõdiçam que avia de levar do ganho à rezam de .5. por çêto e andou tratando todos os seis meses. E Luys pos .30.

cruzados cõ tal cõdiçã que avia de levar à rezam de .6. por çêto e entrou o primeiro de mayo e tratou ate o fim de d'agosto que forã .4. meses e no fim acharã de ganho de .80. tostões pregũte se agora quantos virã a cada hũ segũdo o cabedal e condiçã que pos e segũdo os meses que tratou [Mendes 1540, f. 75 f].

Que dados temos neste enunciado?

Temos para o Pedro:  $t_1 = 6, i_1 = 20, c_1 = 5\%$ . Para o Luys sabemos que:  $t_2 = 4, i_2 = 30, c_2 = 6\%$ . Temos outra informação:  $g = 80$ . Pretende-se saber qual é o ganho de cada um, ou seja, os valores de  $g_1, g_2$ . Para chegar aos valores pretendidos, Mendes diz «...aveis primeiramẽte de multiplicar o cabedal de cada hũ por sua condiçã e o que fezerẽ outra vez por seu tẽpo e somareis as taes multiplicações» [Mendes, 1540, f. 75 f].

Numa primeira fase, e para este caso concreto, temos

$$\sum_{j=1}^2 i_j c'_j t_j = 1320^{102}$$

O autor invoca a quarta regra de três: «...formareis a quarta regra de três (...) se .1320. cruzados e cõdições e meses ganharã .80. tostões os .600. cruzados e cõdiçã e meses de Pedro quantos ganhariã» [Mendes 1540, f. 75 v]. Para o Pedro: «...se .1320. cruzados e cõdições e meses ganharã .80. tostões os .600. cruzados e cõdiçã e meses de Pedro quantos ganhariã...obrado achareis que virã a Pedro» [Mendes 1540, f. 75 v]. Ou seja, o ganho de Pedro é

$$g_1 = \frac{g i_1 c'_1 t_1}{\sum_{j=1}^2 (i_j c'_j t_j)} = 36 \frac{4}{11}$$

O mesmo para o outro mercador: «E a Luys .43 e 7/11. avos» [Mendes, 1540, f. 75 v]

$$g_2 = \frac{g i_2 c'_2 t_2}{\sum_{j=1}^2 (i_j c'_j t_j)} = 43 \frac{7}{11}$$

Esta secção tem mais um problema muito idêntico a este que acabamos de descrever e que tem o propósito de consolidar a regra apresentada.

---

<sup>102</sup> O resultado vem em cruzados e condições e meses. Os  $c'_j$  correspondem às condições que são usadas sem percentagem.

Em todos os problemas de companhias expostos por Ruy Mendes vimos que o mais usual é a incógnita reportar-se ao ganho individual, o que nos parece óbvio na realidade dos negócios. Interessava aos mercadores conhecer o ganho nas transações comerciais e, neste sentido, podemos considerar que os enunciados espelham modelos simplificados de situações reais. No entanto, o autor não deixou de apresentar outras variantes, tais como os investimentos individuais e os tempos na companhia. Será muito estranho pensar que alguém fez um investimento e que não sabe de quanto ou durante quanto tempo. Assim sendo, os problemas que visam determinar investimentos ou tempos nas companhias parecem-nos descrever situações descontextualizadas do real, sendo o principal objetivo a manipulação das propriedades da proporção então estabelecida.

### **3.1.2. O que nos dizem sobre «companhias» Gaspar Nicolas e Bento Fernandes**

#### **3.1.2.1. As companhias no *Tratado da Pratica d'Arismetica***

As regras de companhias figuram nos fólhos 12, 13, 14 e 15 do tratado de Nicolas. O autor não faz qualquer apresentação das «companhias» que vai tratar, tal como Mendes o fizera. Inicia o assunto com a regra de companhias chaãs:

Regra de cõpanhias chaãs faras desta maneira assomaras a quãtidade que cada huũ dos cõpanheiros poem toda em huũa soma e depois que o tiveres assomado saberas que esta soma he o teu partidior e pera saberes qual ha de ser a tua partiçã multiprica o ganho que ganharã pelo que cada huũ poos e o que sair da multiplicação sera tua partiçam [Nicolas, 1963, f. 12 v].

No primeiro exemplo descrito as incógnitas são os ganhos de cada um:

...sam .3. companheiros e fizeram companhia em esta maneira .s. que ho primeiro pos .74. cruzados e o outro pos .89. e outro pos .93. e ganharam todos tres .62. cruzados. Ora eu demando quanto vem há cada huũ tirãdo o cabedal fora [Nicolas, 1963, f. 12 v].

Seguindo o algoritmo que enunciou no início, passa à sua concretização: «...assomaras .74. e .89. e .93. e faras .256. este he ho teu partidor» [Nicolas, 1963, f. 12 v]. Este procedimento corresponde à soma dos investimentos de cada um, ou seja,

$$\sum_{j=1}^3 i_j = 256$$

Para determinar o ganho de cada investidor:

...pera saberes qual he a partiçã multiprica .62. que ho ganho de todos por .74. que he a quantidade que ho primeiro pos e faras .4588. estes parte por .256. e vem da partiçam .17. e ficam .236. por partir [Nicolas, 1963, f. 12 v]

Assim o ganho do primeiro é

$$g_1 = \frac{g i_1}{\sum_{j=1}^3 i_j}$$

Para os outros, o processo repete-se.

O grau de parentesco entre este algoritmo e o de Mendes, para a regra de companhias sem tempo somente, é grande. Uma diferença significativa é que Nicolas não quer apresentar soluções em forma de número misto, tal como o fizera Mendes, dedicando-se antes a uma redução exaustiva do resto da divisão, a submúltiplos do cruzado. Por exemplo, para o caso do ganho, os 236 que ficam por partir serão convertidos por operações multiplicações sucessivas:

...236. por partir que he parte de cruzado e se queres saber que parte he este de cruzado (...) multiplica .236. por .390. e faras .92040. e estes parte por .256. que he teu partidor e vem .359. reaes e ficam por partir .136. que ja nom he real [Nicolas, 1963, f. 13 f].

Sem que o autor o mencione, deduz-se que 1 «cruzado» são 390 «reais», logo o resultado em reais para a fração  $\frac{236}{256}$ . Do mesmo modo, os 136 «que ficam por partir» são convertidos em «ceitis»: «...sam .816. çeytis estes parte por .256. » [Nicolas, 1963, f. 13 f]. Deduz-se assim que o autor considera 1 real igual a 6 ceitis e o resultado final vai até aos  $\frac{3}{16}$  do ceitil. Os outros ganhos são encontrados de modo semelhante e este autor não se poupa nas

reduções aos submúltiplos do cruzado. Esta vontade de não «partir» o cruzado vai estar presente em todos os problemas de companhias que Nicolas exhibe, o que mostra uma forte contextualização real dos enunciados tendo em conta o sistema monetário adotado. Observamos ainda a presença uma prova detalhada das companhias para confirmar os resultados obtidos:

...ajuntaras ho que ficou por partyr do primeyro companheyro que sam .236. com .142. do segundo companheyro e .134. do terçeyro e faras .512. parteos por ho teu partidior que he .256. e vem .2. e nam fica nada por partir e se ficar alguña cousa por partyr nam serem çertas [Nicolas, 1963, f. 13 f].

Para finalizar, Nicolas soma aqueles 2 cruzados com os ganhos inteiros de cada um: «...Ora asoma estes .2. com .17. que ganha ho primeyro e .21. do segundo e .22. do terçeyro e faras justamente .62. cruzados» [Nicolas 1963, f. 13 f]. A preocupação de chegar a um resultado sem erros mostra uma vontade de esclarecer os pontos que levem a um negócio sem erros e porque não, para evitar queixas entre os envolvidos e facilitar uma manipulação monetária adequada. É interessante a observação final: «...desta maneyra podes fazer quãtas quyseres e oulha que aqui estam feytas todas as contas como dizemos» [Nicolas, 1963, f. 13 f]. Na verdade, mais de metade do fôlio 13 v exhibe os cálculos efetuados para esta companhia, para bem ensinar todos os procedimentos a respeitar.

Quais são as outras regras de companhias que Gaspar Nicolas descreve? Observamos a presença das «Companhias com tempo e da regra de companhias com tempos e com tanto por cento». Sobre a primeira, o autor vai direito ao assunto com muita brevidade: «...As companhias cõ tẽpos se fazem assy desta maneyra. Multiprica os tẽpos cõ ho que cada hũ poẽ e entã serem assy como as primeyras» [Nicolas, 1963, f. 13 f]. Não vamos entrar em detalhe sobre os exemplos descritos na obra, apenas queremos referir que as incógnitas são os ganhos de cada um dos três intervenientes e são da forma

$$g_j = \frac{g_i t_j}{\sum_{j=1}^3 (i_j t_j)}, (1 \leq j \leq 3)$$

Ao contrário de Mendes, Nicolas nunca refere a regra de três «correspondente» mas antes a companhia anterior, «...agora ficã como as cõpanhias chaãs» [Nicolas, 1963, f. 14 f].

O enunciado ligado à «regra de companhias com tempos e com tanto por cento» visa determinar os ganhos de cada um dos envolvidos na companhia. Vejamos o que nos diz o autor sobre esta regra:

Companhias cõ tempos e tantos por .100. se fazẽ desta maneyra assy como te dicessem sã .2. cõpanheiros e fezerã cõpanhia nesta maneira que ho primeiro pos .72. cruzados e servio .4. meses a rezam de .3. por çento e o outro pos .57. e servio .5. meses a rezam de .6. por .100. e ganharã ambos .84. cruzados. Pregũto quanto vem a cada huũ [Nicolas, 1963, f. 14 v].

Segundo o enunciado proposto temos 
$$\begin{cases} i_1 = 72, i_2 = 57 \\ t_1 = 4, t_2 = 5 \\ c'_1 = 3, c'_2 = 6 \end{cases}$$

Os resultados pretendidos vêm pela regra de companhias chaãs: «...Faze agora como cõpanhias chaãs e diras sam .2. companheyros ho primeyro pos .864<sup>103</sup>. e o outro meteo .1710<sup>104</sup>. e ganharam ambos .84. cruzados demãdo quanto vem a cada hũ» [Nicolas, 1963, f. 14 v]. O valor de cada ganho, podemos encontra-lo usando a notação que temos vindo a adotar, tendo-se

$$g_j = \frac{gi_jt_jc'_j}{\sum_{j=1}^2(i_jt_jc'_j)}$$

Não parece ser o objetivo de Gaspar Nicolas dar muitos exemplos desta regra e, os poucos casos que exhibe, têm como variáveis os ganhos. Contudo, antes de finalizar as companhias, o autor confronta-nos com um problema que designa por «Outras companhias» e que vai conter como incógnitas um dos ganhos e os investimentos de cada um dos três envolvidos na companhia.

Se te dicessem tres companheiros fezeram cõpanhia em esta maneira. Que meteram antre todos .736. cruzados e ganharam .254. e ho primeiro veio de ganho .43. cruzados

---

<sup>103</sup>  $864 = 72 \times 4 \times 3 = i_1 t_1 c'_1$

<sup>104</sup>  $1710 = 57 \times 5 \times 6 = i_2 t_2 c'_2$



e ao segundo veio .75. Ora eu demãdo quãto vem ao terceiro e quanto meteo cada huũ na cõpanhia [Nicolas,1963, f. 15 f].

Temos os dados seguintes:

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 = 736 \\ 43 + 75 + g_3 = 254 \end{cases}$$

O autor propõe determinar  $g_3, i_1, i_2, i_3$ .

«...assoma .43. cruzados do primeiro e .75. do segundo e faras .118. tira os de .254. que foy o ganho e ficam .136. » [Nicolas, 1963, f. 15 f] . O primeiro cálculo a efetuar dá o valor  $g_3 = 254 - 118 = 136$ . Quanto aos investimentos individuais: «...se .254. cruzados sam ganhados com .736. com quantos seram ganhados .43. cruzados que veio ao primeiro» [Nicolas, 1963, f. 15 f]. Vem então a resposta: «...se ho saberes quiseses multyprica .736. por .43. e faras .31648. parte os por .254. e vẽ em partiçam .124. » [Nicolas, 1963, f. 15 f] . De um modo semelhante, determinam-se os outros valores. O algoritmo dá-nos cada investimento  $i_j (1 \leq j \leq 3)$

$$i_j = \frac{(\sum_{j=1}^3 i_j)g_j}{g}$$

### 3.1.2.2. As companhias no *Tratado da Arte de Arismetica* de Bento Fernandes

A introdução que Bento Fernandes faz às regras de companhias envolve um aspeto comercial forte:

A regra de cõpanhias se chama assi por rezã dos cõtratos e cõpanhias que tratãtes e mercadores fazẽ hũs cõ [...] e parceiros. E depois de acabada a parceria e cõpanhia querem saber [...] que tem ganhado e repartido por todos ho que vira a cada hũ de ganho segũdo ho que cada hũ mete na dita cõpanhia [Fernandes, 1555, f. 21 f].

O autor realça alguns tipos de personagens: os tratantes e os mercadores. Temos ainda os contratos, as parcerias e as companhias como operações comerciais entre os envolvidos o que situa a regra num contexto real.

Quais são as companhias que Fernandes nos mostra? De um modo geral, a sua abordagem é próxima da realizada por Gaspar Nicolas, dado que trata os mesmos tipos e de modo muito semelhante. Na introdução refere as «Regras de cõpanhias de toda a sorte» [Fernandes, 1555, f. 21 f], a saber, companhias chaãs, companhias com tempo e companhias com tempo e à razão de tanto por cento. Podemos dizer que o primeiro exemplo dado consiste numa companhia que envolve três homens e as incógnitas são os ganhos. Contudo, antes deste problema o autor descreve o algoritmo:

...poreis ã ordẽ ho que cada hũ mete na cõpanhia (...) e a soma que fazer sera ho partidor. E para a partiã multiplicareis ho ganho que todos ganharẽ pela cõtia que cada hũ mete e ho que fazer sera a partiã e partida cada partiã pelo partidor ho que vier sera ho ganho que ha de aver cada hũ [Fernandes, 1555, f. 21 v].

Segundo a notação que adotamos, temos para o ganho  $g_j (1 \leq j \leq n)$  de cada um dos  $n$  envolvidos na companhia

$$g_j = \frac{g i_j}{\sum_{j=1}^n i_j}$$

O que equivale ao algoritmo que nos foi dado por Gaspar Nicolas. Nas suas resoluções Bento Fernandes usa o cruzado e partes dele, tal como o fizera Ruy Mendes, não indo ao pormenor da redução aos submúltiplos do cruzado como o fizera Nicolas. Para a «regra de companhias chaãs» são explanados dois problemas e o segundo, tal como o primeiro, tem como objetivo obter o ganho de cada um dos intervenientes na companhia.

Sobre a regra de companhias com tempo, Fernandes começa por nos dizer:

...nã ha outra deferẽça da cõpanhia chaã somẽte acrescẽtaes mais ho tempo ho qual aveis multipricar cõ ho que cada hũ mete e depois de multiplicado tornareis ha fazer a cõpanhia chaã [Fernandes, 1555, f. 22 f].

Esta nota do autor pressupõe que se pretende determinar o ganho  $g_j (1 \leq j \leq n)$  de cada uma das  $n$  pessoas que fazem a companhia. Fernandes refere-se aos produtos  $i_j t_j$ . Com o recurso à companhia chaã pressupõe-se que cada  $g_j$  é dado por

$$g_j = \frac{g i_j t_j}{\sum_{j=1}^n (i_j t_j)}$$

Este algoritmo é confirmado nos dois exemplos exibidos e ambos referentes aos ganhos individuais.

A última regra trata as companhias com tempo e à razão de tanto por cento. Na introdução a esta variante o autor refere que: «Na regra de cõpanhias cõ tẽpo e ha rezã de tãto por cẽto podeis fazer da maneira que vos mostrei na regra de tres cõ tẽpo e a rezã de tãto por cẽto» [Fernandes, 1555, f. 22 f]. Há aqui uma diferença relativamente ao que fizera Gaspar Nicolas, que nunca invocou a regra de três nas companhias. Verifica-se antes, uma proximidade do algoritmo de Ruy Mendes. Prossegue Fernandes: «...aveis primeiramẽte de multiplicar ho tẽpo pelo tãto por cẽto e depois de multiplicado tornareis a multiplicar ho que fezer pelo proprio que cada hũ mete» [Fernandes, 1555, f. 22 v]. O autor refere os produtos  $t_j c'_j i_j (1 \leq j \leq n)$  e conclui «E depois de feito tornareis a regra de companhias chaãs» [Fernandes, 1555, f. 22 v], o que parece não estar de acordo com o que afirmou logo no início quando fez alusão à regra de três com tempo à razão de tanto por cento. Vejamos o exemplo que nos dá a fim de esclarecermos qual foi o caminho escolhido na resolução.

.3. homẽs fazẽ cõpanhia ã esta maneira .s. ho primeiro meteo .20 cruzados e servio na cõpanhia .4. meses e davã lhe a rezã de .5. por cẽto e ho segũdo meteo .15. cruzados e servio na cõpanhia .6. meses e davã lhe a rezã de .8. por cẽto e ho terceiro meteo na cõpanhia .12. cruzados e servio .3. meses e davã lhe a rezã de .6. por cẽto e ganharõ todos tres .86. cruzados pregũto quanto vẽ a cada hũ [Fernandes, 1555, f. 22 v].

De modo sucinto, vamos descrever as operações que o autor propõe:

Para o primeiro  $\rightarrow 4 \times 5 \times 20 = 400$

Para o segundo  $\rightarrow 6 \times 8 \times 15 = 720$

Para o terceiro  $\rightarrow 3 \times 6 \times 12 = 216$

Diz ainda «...tornai a fazer a regra como se fossẽ companhias chaãs» [Fernandes, 1555, f. 22 v] e é ao algoritmo desta regra que recorre para encontrar as soluções: «...assomayos fazẽ .1336. e este he ho vosso partidor depouys fazei a multiplicaçaõ .s. ho que todos ganharã pelo que cada hũ meteo e ho que fezer partireis pelo partidor» [Fernandes, 1555, f. 22 v]. Fica assim clara a opção de pelas companhias chaãs.

Bento Fernandes exhibe ainda outra variante da regra de companhias. Trata-se da «regra de companhias de meyo e terço e quarto e quinto» [Fernandes, 1555, f. 24 f] assente no princípio

...aveis de buscar hũ numero ã que aia os quebrados que buscardes ou quiseres partir.  
E do tal numero tomareis os quebrados que tiverdes necessidade de depois poerlos eis  
ẽ regra de cõpanhias chaãs [Fernandes, 1555, f. 24 f].

Vejamos então o enunciado que acompanha a regra descrita:

...tres homens ganharã .86. cruzados e ho seu cõtrato deles he que o primeiro homẽ aia  
deles  $\frac{1}{3}$  e o segũdo  $\frac{1}{4}$  e o terceiro  $\frac{1}{5}$ . Pregũto quãto vira a cada hũ segũdo seu cõtrato  
[Fernandes, 1555, f. 24 f].

A primeira etapa da resolução, tal como o autor o menciona na introdução a esta regra, consiste em encontrar um número e pelo processo descrito, esse número vai ser um múltiplo dos números que se encontram nos denominadores. Será então necessário multiplicar os denominadores das frações envolvidas: «multiplicay as nomeações dos quebrados hũas pelas outras e o que fezerẽ este sera o numero que vos buscais» [Fernandes, 1555, f. 24 f]. Neste caso concreto, 60 é o produto dos números em denominador. Segue-se a determinação das respetivas partes de 60, ou seja,

$$\frac{1}{3} \times 60 = 20$$

$$\frac{1}{4} \times 60 = 15$$

$$\frac{1}{5} \times 60 = 12$$

A resolução continua com o pressuposto de que os três homens investiram na companhia 20, 15 e 12 cruzados. Segue-se a aplicação, da «regra de companhias chaãs»,

...ireis a regra de cõpanhias chaãs dizendo assi: tres homens ganharã ã hũa cõpanhia .86. cruzados .s. hũ mete .20. cruzados e outro mete .15. cruzados e outro mete .12. cruzados: pregũto quãto vira a cada hũ [Fernandes,1555, f. 24 f].

A próxima etapa da resolução não a vamos descrever aqui. Trata-se, como o próprio autor afirma, da já conhecia «regra de companhias chaãs» para determinar o ganho de cada um, donde

$$g_j = \frac{g i_j}{\sum_{j=1}^3 i_j}$$

Este problema tem com objetivo repartir os ganhos proporcionalmente a  $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$  segundo figura no contrato realizado. Note-se que a soma das parte envolvidas, ou seja,  $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60} \neq 1$ . A soma destas partes não corresponde ao todo a repartir. Cada parte indica os coeficientes da proporcionalidade atribuída a cada um dos associados na repartição do ganho total. De um modo geral se tivermos  $n$  sócios da companhia, sejam  $\frac{1}{p_1}, \dots, \frac{1}{p_n}$  as diferentes partes e  $g_1, \dots, g_n$  os respetivos ganhos individuais. A resolução proposta assenta nas etapas seguintes:

1ª Procurar um múltiplo  $M$  comum a  $p_1, \dots, p_n$  (eventualmente, podemos pensar no mínimo múltiplo comum);

2ª Encontrar os números inteiros<sup>105</sup>  $i_1 = \frac{M}{p_1}, \dots, i_n = \frac{M}{p_n}$ ;

3ª Reduzir ao caso das «companhias chaãs» e obter os ganhos individuais:

$$g_j = \frac{g i_j}{\sum_{j=1}^n i_j}$$

O problema proposto conduz-nos às seguintes condições

---

<sup>105</sup> Os  $i_j (1 \leq j \leq n)$  vão corresponder aos supostos investimentos de cada um e voltamos a um problema de partes inteiras como os anteriores.

$$\begin{cases} g_1 + g_2 + g_3 = 86 \\ 3g_1 = 4g_2 = 5g_3 \end{cases}$$

e com algumas manipulações algébricas obtemos os valores dos ganhos. Contudo, Bento Fernandes usa a noção de proporção. Assim sendo, a soma das partes é inferior a 1 e o ganho total é superior ao valor dado (86). O autor parte de um número «virtual», ou seja, 60, reenuncia o problema de modo a ter os investimentos individuais convenientes, 20, 15 e 12 para ter um investimento total também «virtual», 47, e aplicar as «companhias chaãs» sendo verificadas as igualdades seguintes:

$$\frac{g_1}{20} = \frac{g_2}{15} = \frac{g_3}{12} = \frac{86}{47}$$

Outro exemplo da mesma natureza é ainda relatado. Bento Fernandes descreve-o como «regras de cōpanhias deferêtes» [Fernandes, 1555, f. 24 v]. Não é introduzida qualquer regra geral mas antes um enunciado:

Tres homens ganharã .20. cruzados e ho primeiro ha daver dous tão que ho segũdo e ho segũdo a daver dous tão que ho terceiro: pregũto quãto vira a cada hũ segũdo seu cõtrato [Fernandes, 1555, f. 24 v].

Para esclarecer o autor dá uma solução:

E se quereis saber fareis deste modo .s. primeiramẽte vos dizeis que ho primeiro avera dous tanto que ho segũdo ponde que ho primeiro ouvesse .4. porque ho segundo a daver dous tanto que ho terceiro: ponhamos que o segũdo ouvesse .2. per onde convẽ que o terceiro ouvesse .1. [Fernandes, 1555, f. 24 v].

As condições no enunciado proposto levam-nos a estabelecer que:

$$(*) \begin{cases} g_1 + g_2 + g_3 = 20 \\ g_1 = 2g_2 \\ g_2 = 2g_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g_1 + g_2 + g_3 = 20 \\ g_1 = 2g_2 = 4g_3 \end{cases}$$

Esta situação é muito semelhante às anterior. Pretende-se determinar os valores  $g_1, g_2, g_3$ . Para o efeito Fernandes recorre ao mesmo processo e diz-nos: «Ora formai a regra de

côpanhias dizendo assi: sam .3. homens que ganharã .20. cruzados ho primeiro mete .4. e ho segũdo mete .2. e o terceiro mete .1. quãto vira a cada hũ» [Fernandes,1555, f. 25 f].

Nas palavras do autor podemos estabelecer as condições seguintes:

$$\begin{cases} g = g_1 + g_2 + g_3 = 20 \\ i_1 = 4, i_2 = 2, i_3 = 1 \end{cases}$$

Recorrendo de novo às «companhias chaãs», os ganhos individuais são dados para os valores de  $j = 1, j = 2, j = 3$  tendo em conta a expressão  $g_j = \frac{gi_j}{\sum_{j=1}^3 i_j}$

Assim,

$$g_1 = \frac{20 \times 4}{7} = 11 \frac{3}{7}$$

$$g_2 = \frac{20 \times 2}{7} = 5 \frac{5}{7}$$

$$g_3 = \frac{20 \times 1}{7} = 2 \frac{6}{7}$$

As frações referentes ao investimento de cada um dos envolvidos são respetivamente,  $\frac{4}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}$  e temos  $\frac{4}{7} + \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = 1$ . Estamos a calcular os ganhos referentes àquelas partes. O autor confirma que entre os ganhos individuais há a proporção estabelecida no início:

...e como vedes ao primeiro vẽ .11. cruzados e  $\frac{3}{7}$  e ao segũdo vem .5. cruzados e  $\frac{5}{7}$  que he o meyo do que vẽ ao primeiro e ao terceiro vem .2. cruzados e  $\frac{6}{7}$  ao segũdo vem .5. cruzados e  $\frac{5}{7}$  que he o dobro do terceiro: e assi esta a conta certa com sua prova [Fernandes,1555, f. 25 f].

As soluções são precisamente do sistema (\*). Podemos tê-las usando o método de substituição. Contudo, mais uma vez é necessário ter em conta que o instrumento matemático de que o autor dispõe assenta na noção de proporção ligada, neste caso, à regra de companhias. Note-se a insistência neste tipo de situações o que nos pode levar a questionar sobre a sua utilidade nas transações comerciais.

Bento Fernandes completa as regras de companhias com enunciados de outras situações que se enquadram no tema «Outras companhias deferentes». Vejamos o que o nos é dito sobre estas regras:

Tres homens ganharã .1000. cruzados e ho ganho do primeiro multiplicado por .3. a de fazer tão quãto ho ganho do segundo partido por .2. e quãto ho do terceiro multiplicado por .4. pregũto quãto vira a cada hũ [Fernandes,1555, f. 25 v].

As condições do enunciado levam-nos a estabelecer que

$$\begin{cases} g = 1000 \\ 3g_1 = \frac{g_2}{2} \\ 3g_1 = 4g_3 \end{cases}$$

A «novidade» consiste em atribuir ao ganho do segundo um coeficiente fracionário. Mais uma vez o autor vai arranjar uma suposta «solução» para os  $i_j (1 \leq j \leq 3)$  de modo a poder aplicar de novo a regra de companhias chaãs e determinar os ganhos respetivos. Então, apresenta respetivamente 1, 6 e  $\frac{3}{4}$  para cada investimento e aplica as «companhias chaãs», como o fizera nos casos anteriores, chamando a atenção para a natureza do partidador que é, neste caso,  $\sum_{j=1}^3 i_j = 7\frac{3}{4}$ . Note-se que Bento Fernandes poderia ter escolhido a sequência 4, 24 e 3 para os investimentos, contudo não o fez. Questionamo-nos sobre esta opção dado que, nesta etapa, o autor ainda não tratara da aritmética dos números «quebrados».

Outra situação descrita diz respeito a «Outra companhia a tempo logo decrarado» [Fernandes, 1555, f. 25 v]:

Dous homens fazem companhia em esta maneira .s. ho primeiro entrou o primeiro dia de janeiro de .1551. e mete na companhia .1260. cruzados e o segundo entrou no primeiro dia de novembro de .1551. e mete na companhia .3128. cruzados. E quando vem em fim dagosto de .1553. anos se querem apartar da parceria e acham de ganho .2768. cruzados: pergunto quanto vem a cada hum do ganho a segundo o que meteo e o tempo que servio [Fernandes,1555, f. 25 v].



Trata-se de um problema de companhias com tempo: «Agora fazei a regra de cõpanhias cõ tẽpo como atras vos decrarey» [Fernandes, 1555, f. 26 f]. A originalidade está apenas ligada ao enunciado que invoca datas próximas da publicação do tratado, o que nos leva a crer que estas situações eram presentes e não passadas.

Queremos ainda referir um enunciado de companhias onde observamos alterações relativamente ao que fora previsto no contrato inicial, ou seja, está em jogo uma situação de ruptura de contrato.

Dous homens fazẽ cõpanhia ã esta maneira .s. hã de ter a cõpanhia .12. meses que he hũ ãno inteiro e hũ deles a de meter .100. cruzados e o outro a de meter .200. cruzados. E aquele que mete .100. cruzados se entẽde que ha de ganhar tãto como ho que mete .200. e esta he a cõdiçã que a cabo do ãno hã de partir ho propio e ganho per meyo. E acõteceo que a cabo de seis meses estes dous cõpanheiros se querẽ apartar e achã de ganho .100. cruzados: pregũto como se devẽ partir que nhũ nã vaa enganado [Fernandes, 1555, f. 26 f].

No enunciado há algumas informações sobre as condições no negócio:

- O homem que investiu 100 cruzados entende que deve ganhar tanto como o que investiu 200 cruzados e esta condição leva à partilha na mesma proporção do investimento e do ganho ao fim do ano;
- Ao fim de seis meses a associação entre os dois companheiros dissolve-se.

A solução que Bento Fernandes propõe é a seguinte:

...eles devẽ estar na companhia hũ anno inteiro e a cabo do anno hã de partir ho propio e ho ganho per meyo. Ora ponhamos que a cabo do ãno eles nã ouvessem ganhado nẽ perdido: assi que aviã de partir pelo meyo os .300. cruzados dãbos que vẽ a cada hũ .150. cruzados [Fernandes, 1555, f. 26 f].

É considerada uma hipotética situação: o negócio durou um ano sem ganho então, resta juntar os valores dos dois investimentos e dividir por dois, cabendo metade daquela quantia a cada um dos associados. Acontece que o negócio durou seis meses e com um ganho de 100 cruzados e aqui, o autor propõe o seguinte: «...vos vedes que ho primeiro homẽ meteo .100. cruzados em hũ anno ganharia .50. cruzados e ele nã esteve na cõpanhia mais que .6. meses

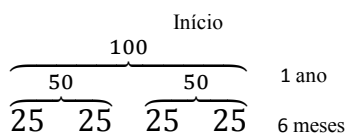
que lhe viriã .25. cruzados» [Fernandes, 1555, f. 26 f]. Neste ponto o enunciado é confuso dado que se entende que o ganho de 100 cruzados é obtido ao fim dos seis meses, contudo, o autor diz que se a razão do ganho ao fim de um ano é  $\frac{1}{2}$  ao fim dos seis meses será  $\frac{1}{4}$ , ou seja,  $100 \times \frac{1}{4} = 25$  cruzados do ganho para o primeiro homem. Prossegue Bento Fernandes:

Ora pôde estes .25. cruzados sobre .100. e fazem .125. e ireis a companhia dizendo assi .s. sam dous homens e fezerã cõpanhia ã esta maneira .s. o primeiro mete .125. cruzados e o segũdo mete .175. cruzados e ganharã .100. cruzados: pregũto quãto vẽ a cada hũ [Fernandes, 1555, f. 26 f].

Nada nos é dito sobre o valor 175 do segundo homem. Seguindo o autor, a primeira etapa proposta consiste em partir ao meio a soma dos investimentos, como se não houvesse qualquer ganho. Então teríamos, ao fim de um ano, 150 cruzados para cada homem. Como se trata de seis meses de companhia, este valor seria ainda dividido ao meio? Neste caso teríamos 75 cruzados para cada um dos envolvidos, tendo em conta os investimentos iniciais. Houve lucro de 100 cruzados, partidos ao meio dariam 50 a cada um. O autor neste ponto não é claro dado que atribui 25 cruzados ao primeiro e sobre o segundo nada nos diz. Só sabemos que fica com 175 cruzados. Vejamos algumas hipóteses da distribuição do dinheiro:

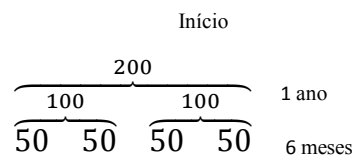
- O primeiro homem fez um investimento inicial de 100 cruzados. Esta quantia deve ser partida ao meio ao fim de um ano e por quatro ao fim de seis meses.

1º Homem



A mesma situação aplica-se ao segundo homem.

2º Homem



- O primeiro homem tem direito a 25 cruzados relativos aos seis meses:  $100 \times \frac{1}{4} = 25$ . O autor usa a soma  $100 + 25 = 125$  e constrói um «novo investimento»

$$i'_1 = i_1 + 25 = 100 + 25 = 125$$

Quanto ao segundo homem, nada nos é dito sobre a proveniência do valor do «novo investimento»,  $i'_2 = 175$ . Vejamos que soluções dá Fernandes para a regra de companhias proposta: «...assomay .125. do primeiro e .175. do segũdo fazẽ .300. e este he o partidor» [Fernandes, 1555, f. 26 f]. Partimos do mesmo total inicial para valor do investimento. No primeiro caso tínhamos  $100 + 200 = 300$  e agora temos  $125 + 175 = 300$ , o que nos pode levar a colocar a hipótese de uma transferência de capital do segundo para o primeiro homem. Prossegue o autor com a regra já conhecida:

...multiplicay .100. cruzados do ganho por .125. que o primeiro mete fazem .12500. e party por .300. vẽ .41. cruzados e  $\frac{2}{3}$  de cruzado e tanto avera o primeiro do ganho. E pera ho segũdo multiplicay .100. por .175. fazẽ .17500. partyos por .300. vẽ .58. cruzados e  $\frac{1}{3}$  de cruzado e tâtos avera o segũdo do ganho. Assi direis que ho primeiro que meteo .100. cruzados avera .41. cruzados e  $\frac{2}{3}$  de ganho e .125. fazẽ cabedal e ganho .166. e  $\frac{2}{3}$  e o segũdo que meteo .200. cruzados avera .58. cruzados e  $\frac{1}{3}$  e do propio .175. fazẽ .233. e  $\frac{1}{3}$  e se queres ver se he certa vede se o propio e ganho dãbos somã .400. cruzados .300. do próprio e .100. que ganharã [Fernandes, 1555, f. 26 v].

Parece-nos ter havido uma mudança de condições quanto à distribuição do ganho tendo em conta os investimentos iniciais. Numa primeira situação temos as partes respetivas para o primeiro e segundo homens:  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{3}$ . Na etapa seguinte passamos a ter  $\frac{5}{12}$  e  $\frac{7}{12}$  que nos traduzem as proporções dos ganhos de cada um.

Sem a imposição inicial do primeiro homem e aplicando os ganhos nas condições iniciais tínhamos, por aplicação da regra de companhias chaãs,

$$g_1 = \frac{i_1 g}{\sum_{j=1}^2 i_j} = \frac{100 \times 100}{300} = 33\frac{1}{3}$$

$$g_2 = \frac{i_2 g}{\sum_{j=1}^2 i_j} = \frac{200 \times 100}{300} = 66\frac{2}{3}$$

tal que,  $\frac{g_2}{g_1} = 2$

Com as alterações nas condições vamos ter «novos ganhos», sejam

$$g'_1 = \frac{i'_1 g}{\sum_{j=1}^2 i'_j} = \frac{125 \times 100}{300} = 41\frac{2}{3}$$

$$g'_2 = \frac{i'_2 g}{\sum_{j=1}^2 i'_j} = \frac{175 \times 100}{300} = 58\frac{1}{3}$$

E ainda, o ganho final que impõe a partilha dos capitais iniciais mais o ganho na companhia

$$g''_1 = 125 + 41\frac{2}{3} = 166\frac{2}{3} \left( = \frac{5}{12} \times 400 = \frac{5}{12} \times (300 + 100) \right)$$

$$g''_2 = 175 + 58\frac{1}{3} = 233\frac{1}{3} \left( = \frac{7}{12} \times 400 = \frac{7}{12} \times (300 + 100) \right)$$

e

$$\frac{g''_2}{g''_1} = \frac{7}{5}$$

Sendo uma distribuição que dá mais vantagem ao primeiro homem que pretendia, desde o início, ganhar tanto como o segundo homem, contudo, nada nos é dito sobre as condições deste último. Regista-se, uma alteração nas partes a distribuir o que não é claro na leitura do enunciado. A mudança das condições inclui, nos ganhos finais de cada um, o «cabedal» e a repartição do ganho propriamente dito. Note-se que dos três autores, Bento Fernando é o que aborda os problemas de ruptura do contrato. Trata-se de problemas com um grau de complexidade mais elevado e sobretudo, os dados à partida podem não ser claros. Por exemplo, Chuquet trata este tipo de problemas no *Triparty*, propondo três soluções diferentes

para um mesmo problema e conclui que «cada um escolha a solução que lhe parece mais jurídica<sup>106</sup>», o que vem reforçar a complexidade das situações propostas.

A diversidade de problemas propostos pelos três aritméticos mostra questões ligadas à distribuição dos «ganhos» usando as propriedades das proporções. Como pilar dos procedimentos algorítmicos temos a regra de três ou as «companhias chaãs» em vez de «novos» métodos algébricos. Os problemas propostos estão arrumados de modo a permitir a construção de um saber matemático, uma vez que começam pela aplicação direta das regras previamente estabelecidas, prosseguindo com metodologias que conduzem, quer à determinação de outras variáveis, que não os «ganhos», quer a situações complexas como as que vimos em Bento Fernandes. As «companhias» aplicam-se também a problemas de cariz não comercial. Gaspar Nicolas e Bento Fernandes utilizam-nas para resolver alguns problemas de «heranças»<sup>107</sup>. Esta situação não é de todo inédita entre os aritméticos renascentistas que, habitualmente, conjugaram a apresentação de problemas concretos com outros pseudo-concretos e longe das «companhias de mercadores».

### 3.2. Regras de baratas

Desde o fim da Idade Média que os «baratos» estão incluídos nas transações comerciais nos países mediterrânicos. Os «baratos»<sup>108</sup> fazem parte de um sistema complexo de compra e de venda utilizada pelos mercadores, como nos diz Bento Fernandes [Fernandes, 1555, f. 43 f], particularmente quando os mercadores percorriam grandes distâncias para negociar. No caso português, a atividade comercial além fronteiras está bem documentada.

Eric Vallet, no estudo sobre *Marchants vénitiens en Syrie à la fin du XV<sup>ème</sup> siècle*<sup>109</sup>, descreve com precisão as diferentes modalidades de compra e venda praticadas pelos mercadores venesianos instalados na Síria. Os mercadores italianos compravam os produtos locais e, ao mesmo tempo, vendiam os seus próprios produtos. Na Síria eram praticadas três

---

<sup>106</sup> Informação disponibilizada por Maryvonne Spiesser numa sessão de trabalho.

<sup>107</sup> Veja-se, sobre este assunto, as «Preguntas da aritmética portuguesa de Quinhentos» em <https://sites.google.com/site/teresacostahm/>

<sup>108</sup> Designação utilizada por Gaspar Nicolas para esta regra.

<sup>109</sup> Eric Vallet citado por M. Labarthe [Labarthe, 2004, vol. II, p. 261].

tipos de transações: a venda a dinheiro, as baratas e a venda a termo. A venda a dinheiro só acontecia quando existia liquidez monetária suficiente. E Vallet explica que,

A escolha do meio da troca dependia, sobretudo, da disponibilidade sempre em mudança e incerta dos diferentes meios de pagamento, e sobretudo dos metais preciosos. As compras a dinheiro e a termo eram vantajosas quando o ouro e a prata eram raros. Em Fevereiro de 1483 (1484), a seda era vendida entre 290 e 300 dirhams a dinheiro e entre 310 e 315 a termo. A diferença entre os dois preços é importante, e corresponde a uma situação de falta de meios monetários. Em contraste, a venda a dinheiro, a compra na barata e a termo eram preferíveis quando o ouro e a prata eram relativamente abundantes.<sup>110</sup>

A regra aparece como resposta a uma falta de liquidez de capital, dado que, numa transação comercial, permite trocar um produto por outro (barata simples) ou ainda, uma parte de um produto por dinheiro e outra parte por outro produto (barata composta). M. Labarthe refere ainda um primeiro traço dos «baratos» na Península Ibérica no manuscrito catalão do século XIV, *Libre de conexenses de spícies e drogues e de avissaments de pessos, canes e massures de diverses terres* [Labarthe, 2004, v. II, pp. 262, 263]. Também no *Libro de arismética que es dicho algarismo* escrito entre 1393 e 1400 aparece um enunciado de um problema de «baratos»: «Son dos omes e quieren trocar el uno com el outro. El uno tiene paño y el outro pimienta...» [Caunedo, 2000, p. 157]. Outras obras posteriores referem o assunto tais como os tratados de Santcliment, Ortega e Ventallol.

A prática de baratas está bem presente nas aritméticas portuguesas de Quinhentos, à semelhança do que se verifica noutros tratados da mesma natureza que foram aparecendo um pouco por toda a Europa. Segundo M. Almeida foi uma prática que persistiu devido à baixa velocidade da circulação monetária, a partir de 1530 e ao disparo por toda a Europa da subida dos preços e da inflação [Almeida, 1994, v. I, pp. 264, 265].

---

<sup>110</sup> «Le choix du moyen de l'échange dépendait surtout de la disponibilité changeante et incertaine des différents moyens de paiement, et notamment des métaux précieux. Les achats au comptant et à terme étaient avantageux lorsque l'or et l'argent se faisaient rares. En février 1483 (1484), la soie était vendue entre 290 et 300 dirhams au comptant et entre 310 et 315 dirhams à terme. La différence entre les deux prix est importante, et elle correspond à une situation où manquaient les moyens monétaires. En revanche, la vente au comptant, l'achat au troc et à terme étaient préférables lorsque l'or et l'argent étaient en relative abondance» [Labarthe, 2004, v. II, p. 262].

Na arte de baratar é importante negociar com honestidade e justiça entre as partes envolvidas. É importante que os mercadores possam «baratar» as mercadorias sem que nenhum deles seja enganado. A este respeito diz-nos Ruy Mendes:

...se agora baratarẽ cõ os ditos preços quanto quer que Andre achar que encarrega mays na mercadoria que der a Joane por lha dar a mayor preço do que val a dinheiro tanto ha de achar Joane que lhe encarrega a elle na que lhe der por ella nem mais nẽ menos de maneyra que sempre fica ho engano ygual e nõ vai nenhũ enganado e assi respõdereis a outras semelhantes [Mendes, 1549, f. 76 v].

A insistência num negócio honesto é uma constante nos enunciados dos problemas. Por exemplo Bento Fernandes diz: «Pregũto a quãto se deve meter a livra da seda no barato pera que o barato seja igual e nenhũ deles nã va ãganado» [Fernandes, 1555, f. 43 f]. Juan Ortega afirma o seguinte no seu tratado:

Quiero agora poner aqui adelãte el .13. capitulo de la arismética enel qual porney declarare en que manera ha de tratar qualquer mercader com su faziẽda agora trocãdo o baratando en manera que segun conciẽcia el no pueda enganar a ningũo ni ser enganado del lo qual demostrare breve y sutilmẽte en los enxemplos siguientes [Ortega, 1512, f. 137 v].

Estava em jogo a valorização da imagem do mercador, numa época de reconhecimento das suas atividades como pilares essenciais no desenvolvimento económico-social.

Ao longo deste capítulo vamo-nos ocupar desta regra segundo o que nos dizem os três aritméticos aqui em estudo. Debruçar-nos-emos sobre os problemas propostos bem como os tipos de regras de baratas enunciadas, seguindo as propostas de Ruy Mendes, e procurando um enquadramento sobre o mesmo assunto nos tratados de Gaspar Nicolas e Bento Fernandes. Interessa-nos também averiguar que produtos eram sujeitos a um comércio assente na dita prática.

### 3.2.1. As regras das baratas segundo Ruy Mendes

Ruy Mendes diz-nos que temos três regras de baratas: regra de baratas simples; regra de baratas composta; regra de baratas com tempo.

#### A regra de baratas simples

Sobre a primeira regra, a definição dada esclarece a natureza de baratar:

...a simprez he aquella que se faz antre duas pessoas quando querẽ baratar hũa mercadoria por outra somente e algũa delas quer meter sua mercadoria na barata a mayor preço do que ella entam val a dinheiro e por ser de mercadoria por mercadoria somente se chama barata simprez [Mendes, 1549, f. 76 f].

Como ilustração desta regra, o autor descreve-nos o seguinte problema:

...dous mercadores .s. Andre e Joane querẽ baratar açafã por pimẽta em que Andre tẽ açafã que o arratal val a dinheiro a .30. vintẽs e na barata o quer meter a .32. e Joane tẽ pimẽta que o arratal val a dinheiro .20. vintẽs: pregũtase a quantos mais o metera na tal barata pera que nom va enganado [Mendes, 1540, f. 76 f].

Mendes começa por nos propor a regra de três como o algoritmo a utilizar para a resolução do problema:

...pola primeira regra de tres assi se .30. vintẽs preço justo do arratal do açafã se querẽ fazer .32. na barata os .20. vintẽs preço justo do arratal da pimenta de Joane em quantos se faram e obrãdo achareis que em .21. e .1/3. avo [Mendes, 1540, f. 76 v].

O autor é muito sucinto na sua resposta, dado que utiliza um algoritmo de cálculo já bem conhecido e praticado, a regra de três simples. Os produtos em negociação são especiarias e podemos pensar que se trata de uma situação típica de negócio entre dois mercadores envolvidos nos negócios do Oriente.

O tipo de problemas ligados à regra de baratas simples parece muito básico. Um primeiro mercador propõe um preço do seu produto (na unidade considerada) na barata que, será mais alto que o preço a dinheiro inicialmente previsto. O segundo mercador deve poder responder a esta proposta, sobreavaliando também o seu produto e de tal modo que os preços na



transação estabeleçam um equilíbrio na troca efetuada. Assim, para o caso descrito, temos os dados seguintes:

-o preço de cada um dos produtos em dinheiro, na unidade considerada:  $p_1, p_2$ <sup>111</sup>

-o preço de cada um dos produtos na barata, na unidade considerada:  $p'_1, p'_2$

Pretende-se calcular o valor de  $p'_2$  de tal modo a que o negócio seja equilibrado para os dois mercadores. Pela regra de três temos

$$p_1 \quad \text{—————} \quad p'_1 \quad \text{—————} \quad p_2$$

O valor de  $p'_2$  é obtido segundo as relações de proporcionalidade

$$p'_2 = \frac{p'_1 p_2}{p_1}$$

Os enunciados podem apresentar variantes como é o exemplo de um problema com os mesmos dados mas por uma ordem diferente, ou seja, são dados  $p'_1, p'_2, p_2$ , pretende-se calcular  $p_1$ .

O último problema de baratas simples que o autor nos propõe envolve dois mercadores que querem baratar cera e açúcar:

Andre tinha cera que ho quintal della valia a .10. cruzados a dinheiro e na barata ho meteo a .15.. E Joane tinha açucare e meteo ho quintal delle na dita barata .3. cruzados mais do que valia a dinheiro e assi foy a barata boa e sem engano de nenhũ: pregütasse agora a como foy metido na barata [Mendes, 1540, f. 76 v].

Na situação descrita

-o preço em dinheiro do quintal de cera:  $p_1 = 10$

-o preço na barata da cera:  $p'_1 = 15$

É-nos dito que  $p'_2 = p_2 + 3$ . Qual é o valor de  $p'_2$ ?

---

<sup>111</sup> Tendo em conta o problema proposto,  $p_1 = 30$  vinténs do açafraão e  $p_2 = 20$  vinténs da pimenta.

A regra de três, embora não referida, é a base para encontrar um dos valores pedidos.

$$p'_1 - p_1 \quad \text{—————} \quad p_1 \quad \text{—————} \quad p'_2 - p_2$$

...direys assi: se .5. de mais vem de .10. preço justo a dinheiro os ditos .3. demais do quintal de Joane de que preço justo a dinheiro virã [Mendes, 1540, f. 77 f].

Se considerarmos as diferenças entre os preços a dinheiro e na barata, temos

$$d_1 = p'_1 - p_1 \text{ e } d_2 = p'_2 - p_2.$$

E o valor procurado será

$$p_2 = \frac{d_2 p_1}{d_1} = \frac{3 \times 10}{5} = 6$$

$$\text{E conseqüentemente, } p'_2 = 6 + 3 = 9$$

Por proporcionalidade é estabelecida a igualdade seguinte

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{(p'_1 - p_1)}{(p'_2 - p_2)}$$

Donde

$$p_2 = \frac{d_2 p_1}{d_1} = \frac{(p'_2 - p_2) p_1}{(p'_1 - p_1)}$$

Todos os problemas propostos assentam nos dados  $p_1, p_2, p'_1, p'_2$ , em que três deles são conhecidos e um quarto é desconhecido. Neste último problema tínhamos dois valores dados e dois desconhecidos mas relacionados entre si.

### A regra de baratas composta

Há problemas que nos conduzem a situações onde se «barata» uma mercadoria por outra e também por uma parte em dinheiro. Neste contexto, Mendes define a regra das baratas composta:

...a cõposta he aquela que se faz antre duas pessoas quando baratã hũa mercadoria por outra e algũa das ditas pessoas quer que lhe dê algũa certa parte ou parte em dinheiro e o al em mercadoria e por esto se chama cõposta [Mendes, 1540, f. 76 f].

A descrição remete-nos para dois mercadores. Algum deles quer uma parte do seu produto em dinheiro e a outra parte troca-a pelo produto do outro. Vejamos o primeiro problema que o autor nos propõe.

Dous mercadores .s. Pedro e Joane querẽ baratar papel e trigo em que Pedro tẽ ho papel que a mão delle vala .20. reaes a dinheiro e na barata a quer por .24. e quer que lhe pague Joane a metade cõ que lhe tomar em dinheiro e a outra metade em trigo. E ho trigo de Joane val ho alqueyre a .50. reaes: preguntasse agora quãtos mays o metera na tal barata para nõ ser enganado nenhũ deles avendo de pagar a metade do papel que tomar em dinheiro e a outra metade em trigo [Mendes, 1540, f. 77 f].

Os dados do enunciado levam-nos a considerar

$$\begin{cases} p_1 = 20 \\ p'_1 = 24 \\ p_2 = 50 \end{cases}$$

A condição imposta visa tomar metade do papel em dinheiro e a outra metade em trigo. Mendes propõe a resolução:

...aveis de ver primeiramente que parte he a que diz Pedro que quer em dinheiro que he a metade e entã vereis logo que he a metade do segũdo preço da mão do seu papel e quanto for tanto tirareys do primeiro e justo preço e assi mesmo do segundo e cõ os números que ficarem formareis a regra como abayxo pareceraa [Mendes, 1540, f. 77 v].

Segundo o autor, esta regra vai ser aplicada a todos os casos semelhantes ao descrito. Vamos então ver a resolução proposta: «...a metade do segũdo preço que he .24. achareis que .12. [Mendes, 1540, f. 77 f]». Note-se que há vantagem para Pedro em tomar a metade que quer em dinheiro sobre o valor do produto na barata dado que, o seu produto estará mais valorizado. Considera-se então  $c_1 = \frac{p'_1}{2} = \frac{24}{2} = 12$ . «estes tirareis do primeiro que he .20. » [Mendes, 1540, f. 77 f].

$$p_1 - 12 = 20 - 12 = 8$$

Vem então a regra (regra de três simples): «Se .8. se fazẽ .12. na barata os .50. do alqueire de trigo de Joane em quãtos se farã: e achareis que em .75. [Mendes, 1540, f. 77 f]». Podemos pensar no esquema 8---12---50, ou usando a notação que temos vindo a adotar

$$p_1 - \frac{p'_1}{2} \quad \text{---} \quad \frac{1}{2}p'_1 \quad \text{---} \quad p_2$$

Pretende-se determinar  $p'_2$  e temos

$$p'_2 = \frac{p'_1 p_2}{2p_1 - p'_1} = 75 (*)$$

Ou ou ainda

$$p'_2 = \frac{p'_1 p_2}{2p_1 - p'_1} \Leftrightarrow \frac{p'_2}{p_2} = \frac{p'_1}{2p_1 - p'_1} \neq \frac{p'_1}{p_1}$$

Mendes aborda um problema em que, em condições semelhantes, pretende calcular  $p_2$ , ou seja, o valor do produto antes de ser colocado na barata. O enunciado envolve os dois mercadores Pedro e Joane e os mesmos produtos, papel e trigo:

Pedro tinha ho papel que a mão valia .20. reaes a dinheiro e na barata pos a .24. e levou a metade em dinheiro e a outra metade em trigo. E o alqueire do trigo de Joane foy posto na barata a .75. reaes: preguntase agora a como valia segundo esto ho alqueire de trigo de Joane a dinheyro [Mendes, 1540, f. 77 v]».

Na resposta dada vemos que aplicou a regra de três, tendo-se agora 12---8---75. O valor de  $p_2$  é 50. Na igualdade (\*) facilmente se chega a este valor, considerando para o efeito,  $p'_2 = 75, p_1 = 20, p'_1 = 24$ .

Alguns problemas de baratas compostas dizem respeito a outras parte dos produtos que não as metades. Por exemplo, temos situações onde se pretende dividir a quantidade em três partes iguais.

Pedro tem a cevada que ho alqueire val a a .15. reaes a dinheiro e na barata quer por a .21. e quer que lhe de Joane ho terço da que lhe tomar em dinheyro e os dous terços em trigo e ho alqueire do trigo de Joane val a .23. reaes pergunta se agora como ho poraa na dita barata pera nõ aver engano avêdo de dar e pagar como dito he [Mendes, 1540, f. 77 v].

Consideremos para os valores em jogo

$$\begin{cases} p_1 = 15 \\ p'_1 = 21 \\ p'_2 = 23 \end{cases}$$

Acresce ainda a condição imposta pelo primeiro mercador  $p'_1 = (p'_1 - c_1) + c_1$ , em que  $c_1$  é a parte que Pedro vai receber em dinheiro e, segundo é enunciado,  $c_1 = \frac{1}{3}p'_1$ . A parte  $(p'_1 - c_1)$  vai ser trocada pelo produto do segundo mercador, o trigo do Joane. O algoritmo que nos é proposto consiste em vários passos, entre os quais calcular um terço do preço na barata da cevada: «...ho terço do seu segundo preço e achareis que he .7. » [Mendes, 1540, f. 77 v]. Temos então um primeiro valor a calcular

$$c_1 = \frac{p'_1}{3} = 7$$

Prossegue o autor: «...estes tirareis do primeiro preço e ficarã .8. » [Mendes, 1540, f. 77 v]. Ou seja, o cálculo de  $p_1 - c_1$

$$p_1 - c_1 = 8$$

«...e assi do mesmo segũdo e ficarã .14. » [Mendes, 1540, f. 77 v], ou seja, calcular

$$p'_1 - c_1 = 14$$

Por aplicação da regra é utilizado o esquema 8---14---23 para encontrar o valor pretendido ( $p'_2 = 40\frac{1}{4}$ ).

Voltamos a uma situação idêntica à divisão da mercadoria em duas partes e podemos verificar uma certa semelhança entre os dois casos usando outras frações. Temos

$$p_1 - c_1 \quad \text{—————} \quad p'_1 - c_1 \quad \text{—————} \quad p_2$$

Donde das regras de proporcionalidade vem

$$p'_2 = \frac{(p'_1 - c_1)p_2}{p_1 - c_1}$$

Pode acontecer que num problema de baratas as incógnitas sejam o preço a dinheiro e o preço na barata de um mesmo produto e ainda com condições de partilha da mercadoria em partes desiguais. Vejamos um enunciado que Ruy Mendes nos propõe.

Os mesmos fizeram uma barata de cavada e trigo e Pedro tinha a cevada que ho alqueire valia a .15. reaes a dinheiro e na barata ho pos a .21. e levou ho terço em dinheiro: e os dous terços em trigo: e o alqueire do trigo de Jaone foy posto na barata .17. reaes e .1/4. avo de real mais do que valia a dinheiro e sayo a tal barata sem engano: pregũta se agora a como valia segundo esto ho alqueire de trigo de Joane a dinheiro e como foy metido na barata [Mendes, 1540, f. 78 f]».

Os dados são os seguintes:

$$\begin{cases} p_1 = 15 \\ p'_1 = 21 \\ p'_2 = p_2 + 17\frac{1}{4} \end{cases}$$

Temos  $p'_1 = (p'_1 - c_1) + c_1$  e  $c_1 = \frac{p'_1}{3}$ . O autor remete-nos para o algoritmo nos passos que passamos a descrever: «...tirareys o terço do preço segundo do alqueyre da cevada de Pedro que seraa .7. do primeiro preço que foy .15. e ficarã .8. » [Mendes, 1540, f. 78 f]. Temos

$$p_1 - c_1 = 15 - \frac{21}{3} = 8$$

«...e assi do mesmo segundo preço e ficarã .14....» [Mendes, 1540, f. 78 f]. Isto quer dizer calcular a diferença

$$p'_1 - c_1 = 14$$

«...8. se fezerã .14. de maneira que hiam .6. demays...» [Mendes, 1540, f. 78 f].

Então vejamos

$$p'_1 - c_1 - (p_1 - c_1) = 6$$

«...Se .6. demais vem de .8. de quantos viram os ditos .17. e .1/4. avo...» [Mendes, 1540, f. 78 f]. Será esta a condição para a aplicação da regra de três com esta ordem  $6---8---17\frac{1}{4}$ .

Quanto aos valores encontrados: «...achareis que de .23. e a tãtos reaes direys que valia o alqueyre do trigo de Joane e foy metido a .40. e .1/4. » [Mendes, 1540, f. 78 f].

Podemos pensar no esquema, usando a nossa notação, para encontrar o valor de  $p_2$  com a proporção estabelecida com base nas diferenças

$$p'_1 - c_1 - (p_1 - c_1) \quad \text{—————} \quad p_1 - c_1 \quad \text{—————} \quad p'_2 - p_2$$

Sendo  $d_1 = p'_1 - p_1$  e  $d_2 = p'_2 - p_2$  temos

$$p_2 = \frac{(p'_2 - p_2)(p_1 - c_1)}{p'_1 - c_1 - (p_1 - c_1)}$$

Os problemas que temos vindo a tratar tinham sempre as condições referentes ao primeiro mercador, no caso Pedro. Contudo esta ordem pode mudar. Pode ser o segundo mercador a impor as condições. Uma dessas situações é descrita por Ruy Mendes.

Pedro tem a laã que o quintal della val a dinheyro .8. tostões e na barata ho quer por a .10. e Joane tem o açucare que ho quintal delle val a .12. tostões e quer que lha pague Pedro a metade do que lhe tomar em dinheyro e a outra metade em laã: pregûtase agora a como ho meteraa segundo esto na tal barata pera que nom aja engano [Mendes, 1540, f. 78 f].

Os dados do autor são estes:

$$\begin{cases} p_1 = 8 \\ p'_1 = 10 \\ p_2 = 12 \end{cases}$$

Procura-se o valor de  $p'_2$  e a condição, digamos  $c_2$ , dado que neste enunciado é Joane que a impõe,  $c_2 = \frac{p'_2}{2}$  (Pedro deve pagar metade da quantidade do açúcar em dinheiro e a outra metade em lã). A resolução é-nos dada pelo autor:

Vereys primeyramente que parte quer Joane que lhe seja paga em dinheiro e achareis que a metade como dito he pelo que vereis logo que he metade da diferença que ay antre o primeiro preço do quintal da lã de Pedro e o segũdo e acahreis que he hũ [Mendes, 1540, f. 78 v].

Numa primeira fase Mendes propõe a seguinte operação

$$\frac{p'_1 - p_1}{2}$$

«...o tal hũ ajũtareis agora ao primeiro preço somẽte que he .8. farã .9. [Mendes, 1540, f. 78 v]». Temos a soma

$$p_1 + \frac{p'_1 - p_1}{2} = 9$$

«...se .9. se fazẽ .10. na barata os .12. do quintal do açucare de Joane em quãtos se farã e achareys que em .13. e .1/3. avo. » [Mendes, 1540, f. 78 v]. Mendes estabelece a proporção 9---10---12 para encontrar o valor de  $p'_2$ . No caso Usando a notação que estabelecemos temos

$$p_1 + \frac{p'_1 - p_1}{2} \quad \text{-----} \quad p'_1 \quad \text{-----} \quad p_2$$

Da proporcionalidade vem

$$p'_2 = \frac{2p'_1 p_2}{p'_1 + p_1}$$



## A regra de barata com tempo

Ruy Mendes não faz qualquer introdução a esta versão de baratas no entanto, pelos problemas exibidos, podemos constatar que dois produtos são trocados mas com condições especiais quanto ao pagamento, uma vez que o tempo intervém. A presença do tempo subentende a existência de um crédito que um dos mercadores envolvidos na barata concede ao outro, logo prevê-se um aumento do preço unitário do seu produto. O novo preço então estabelecido, será o preço unitário do produto na barata. Assim vamos considerar os dados seguintes:

-os preços unitários em dinheiro:  $p_1, p_2$ ;

-os preços unitários na barata:  $p'_1, p'_2$ ;

-os tempos:  $t_1, t_2$ .

Os problemas propostos apresentam cinco dos dados supra citados e pretende-se calcular um sexto dado. Vejamos uma dessas situações:

Luys e Andre querẽ baratar pimẽta por açucare e Luis tẽ pimẽta que o quintal della val a dinheiro .25. tostões e na barata o quer por a .32. e quer .4. meses despaço e Andre tẽ o açucare que o quintal dele val a dinheiro a .6. tostões e na barata o quer por a .10. pregũtase que tempo tomaraa despaço pera que nõ aja engano na tal barata [Mendes, 1540, f. 79 f].

Do enunciado vem:

$$\begin{cases} p_1 = 25, p'_1 = 32 \\ p_2 = 6, p'_2 = 10 \\ t_1 = 4 \end{cases}$$

Pretendemos conhecer o valor de  $t_2$ .

A resolução do autor assenta nas etapas que passamos a descrever:

...vereys primeyramente quãto encarrega cada hũ deles metendo sua mercadoria na barata como dito he: e achareys que Luys êcarrega .7. tostões em .4. meses despaço e Andre encarrega .4. [Mendes, 1540, f. 79 f].

Para estes resultados são realizadas as diferenças

$$p'_1 - p_1 = 32 - 25 = 7$$

$$p'_2 - p_2 = 10 - 6 = 4$$

...direys pola regra de cinco assi. Se .25. tostões em .4. meses despaço encarrega .7. tostões os .6. tostões dantre em quantos meses encarregarã .4. que elle quer encarregar: e obrando achareys que em .9. e .11/21. avos e tâtos meses e partes direys que ha de tomar despaço Andre pera nom aver engano na barata [Mendes, 1540, f. 79 f].

A regra de cinco<sup>112</sup> é aplicada segundo o esquema 25---4---7---6---4, ou seja,

$$p_1 \quad \text{---} \quad t_1 \quad \text{---} \quad p'_1 - p_1 \quad \text{---} \quad p_2 \quad \text{---} \quad p'_2 - p_2$$

Donde

$$t_2 = \frac{p_1 t_1 (p'_2 - p_2)}{(p'_1 - p_1) p_2}$$

Uma situação em que a variável é  $p'_2$  (preço na barata do produto do segundo mercador) é a seguinte:

Os sobreditos querem fazer uma barata de pimenta por açafam e Luis tẽ a pimẽta que a arrova dela val a dinheyro a .4. cruzados e .1/2. E na barata a quer poer a .8. e quer .6. meses despaço e Andre tẽ ho açafã que arrova delle val a dinheiro a .20. cruzados e quer .3. meses despaço: preguntasse agora a quantos cruzados a poraa na tal barata pera nom aver nella engano [Mendes, 1540, f. 79 f].

Temos as respetivas condições:

$$\begin{cases} p_1 = 4\frac{1}{2}, p'_1 = 8 \\ p_2 = 20 \\ t_1 = 6, t_2 = 3 \end{cases}$$

---

<sup>112</sup>A regra de cinco encontra-se na parte II, Capítulo 3, II, 2.

Desconhece-se o valor de  $p'_2$ .

A solução proposta é descrita assim:

A esta respondereys pola regra de tres com tẽpo somente dizendo assi. Se .4.cruzados e .1/2. avo de Luis em .6. meses encarregã .3. cruzados e .1/2. avo que sam os que a quer meter mais do que val a dinheiro os .20 cruzados d'Andre em .3. meses quantos encarregarã: e achareis que .7. e .7/9. avos e a tantos cruzados e partes direis que ha de por Andre a arrova do açafra na barata [Mendes, 1540, f. 79 f].

Registemos uma referência à regra de três com tempo. Assim, temos o esquema da regra de três com tempo e o valor de  $p'_2$ .

$$p_1 t_1 \quad \text{—————} \quad p'_1 - p_1 \quad \text{—————} \quad p_2 t_2$$

$$p'_2 = \frac{(p'_1 - p_1)p_2 t_2}{p_1 t_1}$$

Para a regra de baratas com tempo Ruy Mendes apresenta outros problemas e as variáveis a determinar vão mudando. Um exemplo descrito tem como incógnita  $p_2$ .

Luys e Andre fezerã hũa barata de pimenta por açucare e Luys tinha a pimẽta que ho quintal della valia a dinheiro a .25. tostões e na barata foy metido a .32. e levou .4. meses despaço e Andre tinha ho açucare e meteo o quintal delle na barata a 10. Tostões e levou .9. meses e .11/21. avos de mês d'espaco: e assi foy a barata sã engano: pregũtase a quãtos tostões segundo esto valia o quintal do açucare d'ãdre a dinheiro [Mendes, 1540, f. 79 v].

Recolhemos os dados seguintes:

$$\begin{cases} p_1 = 25, p'_1 = 32 \\ p'_2 = 10 \\ t_1 = 4, t_2 = 9 \frac{11}{21} \end{cases}$$

O objetivo é determinar  $p_2$ . Nas palavras do autor: «...vereis primeiramête que deferença ay do preço primeiro de Luys que he .25. ao segũdo que he .32. achareis que ay .7. e estes poreis de parte» [Mendes, 1540, f. 79 v]. O que Mendes nos propõe é o cálculo de  $p'_1 - p_1$ .

$$p'_1 - p_1 = 32 - 25 = 7$$

«...vereis que diferença ay dos seus meses que sam .4. aos meses d' Ædre que sam .9. e .11/21. E achareis que ay .5. e .11/21. avos» [Mendes, 1540, f. 79 v]. Temos agora a diferença

$$t_2 - t_1 = 9\frac{11}{21} - 4 = 5\frac{11}{21}$$

...estes repartilos eis aos ditos meses de Luys que são .4. e virã hũ e .8/21. e estes multiplicareis agora polos .7. que deixaste de parte e farã .9 e .14/21. Os quaes ajuntareis ao preço segũdo de Luys que he .32. e somarã .41. e .14/21. avos [Mendes, 1540, f. 79 v].

Segundo é dito podemos considerar

$$\frac{(t_2 - t_1)}{t_1} (p'_1 - p_1) + p'_2 = 1\frac{8}{21} \times 7 + 32 = 41\frac{14}{21}$$

...direys assi. Se .41. e .14/21. avos vẽ de .25. primeyro preço os .10. d' Andre de quãtos virã e achareis que de .6. e a tantos tostões direis que valia o quintal do açucare d' Andre a dinheiro [Mendes, 1540, f. 79 v].

Seguindo a ordem que nos é dada pelo autor, temos,

$$\frac{(t_2 - t_1)(p'_1 - p_1)}{t_1} + p'_2 \quad \text{-----} \quad p_1 \quad \text{-----} \quad p'_2$$

Donde

$$p_2 = \frac{p_1 p'_2}{\frac{(t_2 - t_1)(p'_1 - p_1)}{t_1} + p'_2}$$

Depois deste problema, Ruy Mendes enuncia outro, que ele próprio considera muito semelhante, contudo, regista uma diferença dado que agora  $t_2 < t_1$ .

...ho tempo de Luys he menos que ho de Andre (...) e por esta causa mudareis aqui hũa so cousa aa decraraçaã ahi feyta e he esta que o que ahi disse que se juntasse ao segũdo preço: aqui digo que se tire e entam formar a dita regra (...) a dita arrova do açafã d'Andre valia a .20 cruzados a dinheiro [Mendes, 1540, f. 79 v].

Para este enunciado, os dados são os seguintes:

$$\begin{cases} p_1 = 4\frac{1}{2}, p'_1 = 8 \\ p'_2 = 7\frac{7}{9} \\ t_1 = 6, t_2 = 3 \end{cases}$$

O valor desconhecido é o de  $p_2$ .

A regra de três é estabelecida com os elementos para obter o valor pretendido

$$\frac{(t_1 - t_2)(p'_1 - p_1)}{t_1} \quad \text{-----} \quad p_1 \quad \text{-----} \quad p'_2$$

$$p_2 = \frac{p_1 p'_2}{\frac{(t_1 - t_2)(p'_1 - p_1)}{t_1}}$$

Note-se que a ordem pela qual é feita a diferença também muda para não termos um resultado negativo. Contudo, quando o autor refere a diferença entre os tempos de ambos, subentende-se que tira o maior ao menor tempo.

No último problema de baratas as variáveis são  $p_2, p'_2$ .

Os sobreditos fizerã outra barata de pimêta por açafã e Luys tinha pimêta que ho arratal valia a .10. vintês e na barata o pos a .15. cõ .8. meses d'espaco e Andre tinha açafã e meteo ho arratal na barata .5. vintês mais do que valia a dinheiro e cõ .10. meses d'espaco e foy a barata sem engano: preguntase como valia segundo esto a dinheiro e a como foy metido na barata [Mendes, 1540, f. 80 f].

Já na regra de baratas composta vimos um enunciado com as mesmas variáveis desconhecidas,  $p'_2, p_2$ . Na situação enunciada temos

$$\begin{cases} p_1 = 10, p'_1 = 15 \\ p'_2 = p_2 + 5 \\ t_1 = 8, t_2 = 10 \end{cases}$$

As etapas de resolução são descritas por Mendes: «...primeiramente vereis quâtos vintês ganhou Luys na tal barata e acahreis que .5. em .8. meses d'espço como parece» [Mendes, 1540, f. 80 f]. Temos uma primeira operação  $p'_1 - p_1 = 5$ , seguindo-se a utilização da regra de cinco.

«...se .8. meses d'espço cõ .10. vintês ganharã .5. vintês os .10 meses de Andre cõ quâtos ganhariã os ditos .5. vintês e achareis que cõ .8. » [Mendes, 1540, f. 80 f], ou seja, na notação que adotamos

$$t_1 \quad \text{—————} \quad t_2 \quad \text{—————} \quad p'_1 - p_1 \quad \text{—————} \quad t_2 \quad \text{—————} \quad p'_2 - p_2$$

Donde

$$p_2 = \frac{t_1 t_2 (p'_2 - p_2)}{t_2 (p'_1 - p_1)}$$

Como temos vindo a observar, os conhecimentos matemáticos ligados à regra de três e à regra de cinco são úteis a um bom domínio das regras de baratas e os mercadores devem tê-los, a fim de, dar ou receber o que é justo e sem enganar para os envolvidos. Ruy Mendes explana uma hierarquia de problemas que vão desde a regra de baratas simples, passam pela regra de baratas composta terminando na regra de baratas com tempo. São problemas que focam trocas comerciais realizadas por mercadores no exercício da arte mercantil. Os produtos comercializados são diversos: açafrão, pimenta, cera, açúcar, papel, trigo, cevada e lã. As situações descritas remetem-nos para casos de uma prática em contexto real, embora com uma tendência para fazer a matemática por si mesma, como o são os problemas em que temos duas incógnitas em jogo.

Para completar o tema que temos vindo a abordar, as regras de baratas, veremos como Gaspar Nicolas e Bento Fernandes nos falam destas regras.

### 3.2.2. Os *baratos* de Gaspar Nicolas

Gaspar Nicolas apresenta-nos quatro problemas das regras de *baratas*. Este autor não dá qualquer classificação para os tipos das regras à semelhança do que fizera Ruy Mendes, contudo, podemos considerar que, os dois primeiros enunciados dizem respeito à regra de *baratas* simples<sup>113</sup>, enquanto os dois últimos são sobre a regra de *baratas* composta. No primeiro enunciado há uma referência à regra de três chaã e Nicolas tece o seguinte comentário: «Ysto nam he outra cousa se nam regra de tres chaã» [Nicolas, 1963, f. 38 f], ou seja, há uma identificação entre a regra enunciada para «baratar» e a «regra de três chaã». As variáveis desconhecidas são de várias naturezas: o preço na barata (primeiro, terceiro e quarto problemas), o preço a dinheiro (segundo problema). Os produtos anunciados são: pano, lã, cravo e canela. Tal como nos problemas de Mendes, há uma forte presença de *baratos* associados aos negócios das especiarias, o que não nos admira tendo em conta o papel de Portugal no comércio das especiarias na época a que se reportam estas obras.

### 3.2.3. As regras de *baratas* por Bento Fernandes

Bento Fernandes não se poupa a explicações sobre o que é a regra de *baratas*: «A regra de *baratas* se diz assi por rezã do trocar e baratar que se costuma fazer âtre mercadores» [Fernandes, 1555, f. 43 f]. Esta afirmação é muito interessante na medida em que, sendo o autor um mercador, ele reconhece que esta regra está associada a uma prática usual entre mercadores. Prossegue o autor com outras informações: «...que baratã suas mercadorias a troco doutras parte delas a dinheiro de cõtado e outra parte a troco a segũdo he o cõtrato» [Fernandes, 1555, f. 43 f]. Há aqui uma alusão ao tipo de *baratas* que podem ocorrer, e que já vimos no tratado de Ruy Mendes, e ainda uma referência a um contrato. Quanto ao nome da regra diz-nos Fernandes: «...se chama *baratas* porque cada hũ barata sua mercadoria a menos preço a dinheiro cõtado do que a cõta notro cõ e para ho melhor êtêderdes vos darei aqui ãxẽpro» [Fernandes, 1555, f. 43 f]. Segundo o autor, quando uma parte da mercadoria é recebida a dinheiro, a quantia apurada diz respeito ao preço da mesma mercadoria na barata que se supõe mais alto que o seu valor inicial. Vejamos então o primeiro exemplo:

---

<sup>113</sup>Adotamos a classificação de Ruy Mendes.

Dous mercadores baratã .s. hũ tẽ laã e ho outro seda ho cẽto das livras da laã val a dinheiro de cõtado a .21. cruzados d'ouro e  $\frac{1}{3}$  e no barato se conta a .24. cruzados e o mercador da laã adaver  $\frac{1}{6}$  ã dinheiro de cõtado. E a livra de seda val há dinheiro de contado a .4. cruzados e  $\frac{1}{8}$  de cruzado. Pregũto a quãto se deve meter a livra da seda no barato pera que o barato seja igual e nenhũ deles nã va ãganado [Fernandes, 1555, f. 43 f].

Temos uma situação semelhante à que nos foi apresentada por Ruy Mendes, no primeiro problema referente à regra de baratas composta, contudo, Bento Fernandes não usa esta designação e, usa a fração  $\frac{1}{6}$  em vez de  $\frac{1}{2}$ . Se usarmos a notação que temos vindo a adotar, os dados do problema são os seguintes

$$\begin{cases} p_1 = 21\frac{1}{3} \\ p'_1 = 24 \\ p_2 = 4\frac{1}{8} \end{cases}$$

Temos ainda a condição  $c_1 = \frac{p'_1}{6}$ , como já referimos. O valor desconhecido é  $p'_2$ . O autor tem o cuidado de mencionar a quantidade dos produtos a baratar: «...ponhamos que ho mercador da laã barate hũ cẽto de livras» [Fernandes, 1555, f. 43 f]. Nos enunciados de Mendes as quantidades não eram declaradas. Na resolução apresentada, Fernandes propõe a regra de três: «...ireis a regra de tres dizendo assi» [Fernandes, 1555, f. 43 f]. Na verdade esta regra é aplicada à sequência  $17\frac{1}{3}$ ---20--- $4\frac{1}{8}$ , ou usando a nossa notação

$$p_1 - \frac{p'_1}{6} \quad \text{-----} \quad \frac{5}{6}p'_1 \quad \text{-----} \quad p_2$$

Donde

$$p'_2 = \frac{5p'_1p_2}{6p_1 - p'_1}$$

Para os valores dados



$$p'_2 = 4 \frac{79}{104}$$

A regra de baratas simples está ausente das propostas de Bento Fernandes. Antes temos um caso descrito, sem qualquer designação e que é usado para introduzir o assunto e que corresponde ao que Mendes designou por «regra de baratas simples».

Fernandes usa a designação «baratas a termo» para o que Mendes designou por «baratas com tempo». Sobre este tipo de regra são dados três problemas, semelhantes aos já tratados por Ruy Mendes.

A «novidade» que Bento Fernandes propõe são as «Baratas pela regra da cousa». Nesta temática vemos dois problemas. Vejamos o primeiro enunciado:

Dous mercadores baratã hũ tẽ pano de Lõdres e outro tẽ algodã ha peça do pano de Lõdres val a dinheiro de cõtado .19. cruzados e no barato se mete a hũa certa câtidade que se nã sabe e quer  $\frac{1}{4}$  em dinheiro cõtado e o quitai do algodã val a dinheiro cotado ha .10. cruzados e no barato se cõta há .13. cruzados e a de ser ho barato igual pregũto a quãto se deve de meter ha peça do Lõdres no barato [Fernandes, 1555, f. 44 f].

Quanto à resolução proposta: «...ponhamos que a peça de Lõdres valesse no barato hũa cousa» [Fernandes, 1555, f. 44 f]. Vamos designar esta *cousa* por  $x$ , ou seja,  $x$  passa a ser a incógnita  $p'_1$ . Os dados do problema são estes

$$\begin{cases} p_1 = 19 \\ p_2 = 10 \\ p'_2 = 13 \end{cases}$$

A condição é a seguinte:  $c_1 = \frac{1}{4}p'_1$ , ou seja,  $c_1 = \frac{1}{4}x$

Prossegue o autor com a tradução do enunciado usando a regra que enuncia: «...direis assi .19. cruzados menos  $\frac{1}{4}$  de cousa se mete  $\frac{3}{4}$  de cousa que se meterã .10 cruzados» [Fernandes, 1555, f. 44 f] que corresponde à regra de três. Assim temos,

$$p_1 - \frac{1}{4}p'_1 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad p'_1 - \frac{1}{4}p'_1 = \frac{3}{4}p'_1 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 10$$

Recordemos que Bento Fernandes negociava em tecidos. Esta era uma situação que lhe era familiar, contudo, seria um caso de um problema pseudo-real. É natural que o mercador conheça o valor do produto antes de o colocar na barata, contudo, é este o valor desconhecido. O enunciado proposto demonstra mais uma vontade de «fazer Matemática» do que resolver uma situação corrente entre mercadores.

Na «nova linguagem» associada à «regra da cousa» e atendendo aos dados que temos, podemos introduzir então o esquema,

$$19 - \frac{1}{4}x \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad \frac{3}{4}x \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 10$$

antes de seguirmos a resolução proposta. Para o efeito sugerimos a tabela que estabelece um paralelo entre as informações no texto e a tradução algébrica.

Tabela 4: As «baratas» pela regra da cousa segundo Bento Fernandes

O que diz Bento Fernandes <sup>114</sup>	Tradução em linguagem simbólica
...como vedes elle pede $\frac{1}{4}$ em dinheiro cotado e $\frac{1}{4}$ de hũa cousa tirado de hũa cousa ficã $\frac{3}{4}$ de cousa...	$x - \frac{1}{4}x = \frac{3}{4}x$
...tiray $\frac{1}{4}$ de cousa de .19. cruzados ficã .19. cruzados menos $\frac{1}{4}$ de cousa...	$19 - \frac{1}{4}x$
...direis assi .19. cruzados menos $\frac{1}{4}$ de cousa se mete $\frac{3}{4}$ de cousa que se meterã .10 cruzados...	$19 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}x = 10$ <sup>115</sup>
...multiplicay .10. por $\frac{3}{4}$ fazem .7. cousas e $\frac{1}{2}$ ...	$10 \times \frac{3}{4}x = \left(7\frac{1}{2}\right)x$
...estas avemos de partir por .19. cruzados menos $\frac{1}{4}$ de cousa e devẽ vir .13. cruzados...	$\left(7\frac{1}{2}\right)x \div \left(19 - \frac{1}{4}x\right) (= 13)$
...se multiplicassemos .19. cruzados menos $\frac{1}{4}$ de cousa per .13. cruzados se igualaria a .7. cousas e $\frac{1}{2}$ assi diremos que .13. vezes .19. cruzados menos $\frac{1}{4}$ de cousa fazẽ .247. menos .3. cousas e $\frac{1}{4}$ e estes sã iguaes a .7. cousas e $\frac{1}{2}$ ...	$\left(19 - \frac{1}{4}x\right) \times 13 = \left(7\frac{1}{2}\right)x$ $\left(247 - 3\frac{1}{4}x\right) = \left(7\frac{1}{2}\right)x$
...agora desfaz o debito he ãprestay .3. cousas e $\frac{1}{4}$ a cada parte e aquela parte que ha menos desfazey ho seu debito e aquela que ha .7. cousas e $\frac{1}{2}$ avera .10. cousas e $\frac{3}{4}$ ...	$247 - 3\frac{1}{4}x + 3\frac{1}{4}x = \left(7\frac{1}{2}\right)x + 3\frac{1}{4}x$ $= \left(10\frac{3}{4}\right)x$
...e estas .10. cousas e $\frac{3}{4}$ sã iguaes a .247....	$\left(10\frac{3}{4}\right)x = 247$
...diz a regra da cousa que quãdo as cousas sã iguaes ao numero devemos partir o numero pela cousa e aquilo que vier sera numero e tãto valera a cousa...	$ax = b$ $x = \frac{b}{a}$
...seguido a regra partireis .247. por .10. e $\frac{3}{4}$ vẽ .22. e $\frac{42}{43}$ ...	$x = \frac{247}{10\frac{3}{4}} = 22\frac{42}{43}$

Bento Fernandes «deu vida» a uma nova entidade na regra de baratas - a *cousa* - com um significado abstrato mas, ao mesmo tempo, ator principal nos problemas que o autor diz serem usuais entre os mercadores. Põe-se aqui uma questão: até que ponto os mercadores teriam conhecimentos da álgebra que então emergia no mundo matemático? O próprio Bento

<sup>114</sup> Uma observação do autor: «...pera mais certo fazey esta cõta pela regra da cousa que he muy sutil...». [Fernandes, 1555, f. 44 f]

<sup>115</sup> A regra dada é a seguinte: «...direis assi .19. cruzados menos  $\frac{1}{4}$  de cousa se mete  $\frac{3}{4}$  de cousa que se meterã .10 cruzados...» [Fernandes, 1555, f. 44 f].

Fernandes era mercador. O seu negócio era essencialmente dedicado ao comércio de panos, como já referimos. Esses produtos fazem parte dos enunciados dos seus problemas: o pano de Londres, a seda e a lã. Também encontrámos outros produtos, tais como açafrão e azeite, nos enunciados da regra de baratas que exhibe, embora os negócios dos tecidos predominem. Além de mercador, este autor mostra um grande interesse por assuntos de cariz «mais matemático» e, no fôlio 83 do *Tratado da Arte de Arismetica*, são apresentadas as

Regras da zibra moquavel a qual vulgarmête se chama regra da cousa e çêso de çêso e de cubi e raiz da cousa e raiz de numero e de toda a valia de regra e rezã pera quem tiver delicado engenho e memoria [Fernandes, 1555, f. 83 f].

Fernandes quis partilhar com aqueles que denotassem «delicado engenho e memoria» outros saberes que ultrapassassem o estritamente necessário às lides quotidianas dos mercadores.

O último enunciado relata um caso em que a incógnita passa a ser a parte que foi dada a dinheiro e quem a teve:

Dous mercadores baratã .s. hũ tẽ açeito e outro açafrã ho quintal do açeito val a dinheiro cõtado ha .10. cruzados e no barato se mete a .12. cruzados e ho quintal do açafrã vende a dinheiro de cõtado .40. cruzados e no barato se mete a .60. cruzados pergunto quãta parte tiveram em dinheiro de contado he qual das partes ho ouve [Fernandes, 1555, f. 44 v].

Os dados do problema são os seguintes:

$$\begin{cases} p_1 = 10 \\ p'_1 = 12 \\ p_2 = 40 \\ p'_2 = 60 \end{cases}$$

Pretende-se determinar uma das condições  $c_1, c_2$ .

Vamos acompanhar a resolução do autor.

«...multiplicareis ho cõtado do mercador do açeito que sã .10. per ho barato do mercador do açafrã que sã .60. e fazem .600. » [Fernandes, 1555, f. 45 f], temos o cálculo de  $p_1 p'_2$ .

«...multiplicay ho contado do mercador de açafrã que sã .40. pelo barato do mercador de

azeito que sã .12. e fazem .480. » [Fernandes, 1555, f. 45 f] , o cálculo de  $p_2p'_1$ . «...tiray .480. de .600. restã .120. » [Fernandes, 1555, f. 45 f]. Segue-se o cálculo da diferença:  $p_1p'_2 - p_2p'_1$ . Como  $p_1p'_2 > p_2p'_1$ , será o segundo mercador que está em vantagem então, será este mercador, ou seja, o que tem açafão que vai dar ao primeiro uma parte em dinheiro para equilibrar a barata. Para a situação exposta, o valor a determinar será o de  $c_1$ : «...vede agora quãto ha de .40. cruzados que ho do açafã poẽ a dinheiro cotado seu açafã ha .60. cruzados que ho mete no barato e bẽ vedes que há .20. » [Fernandes, 1555, f. 45 f]. Quanto ao cálculo de  $p'_1(p'_2 - p_2)$ : «...estes .20 multipriay per .12. que ho do azeito meteo no barato ho seu azeito fazem .240. » [Fernandes 1555, f. 45 f]. E ainda, «...ora party .120 que restarõ dos .600. per .240. vem  $\frac{120}{240}$  aos que he  $\frac{1}{2}$  e assi direys que ametade ã dinheiro ouve ho mercador do azeito e a outra ametade em açafã » [Fernandes, 1555, f. 45 f].

Temos então

$$\frac{p_1p'_2 - p_2p'_1}{(p'_2 - p_2)p'_1} = \frac{1}{2}$$

Donde

$$c_1 = \frac{p_1p'_2 - p_2p'_1}{(p'_2 - p_2)}$$

Uma vez que,

$$c_1 = \frac{1}{2}p'_1$$

Em termos de quantidade e variedade dos problemas propostos verificamos uma desigualdade entre os três aritméticos. Segundo os autores, as baratas, tais como as companhias, tinham por base conhecimentos matemáticos úteis aos mercadores na realização dos negócios. A noção de justiça está patente nas transações comerciais de tal modo que a cada um dos envolvidos cabesse uma parte justa.

Sobre o método de exposição, encontrámos uma hierarquia de problemas cuja base é a regra de baratas simples, no caso de Ruy Mendes e de Gaspar Nicolas. Bento Fernandes trata

as baratas compostas e com tempo. Como regras auxiliares nos cálculos intermediários temos a regra de três e a regra de cinco. Os problemas propostos evoluem no sentido de problemas mais simples para os mais complexos, ligados às baratas compostas e às baratas com tempo. Até que ponto os problemas «mais complexos» seriam aplicados pelos mercadores no seu quotidiano? Segundo M. Labarthe [Labarthe, 2004, v. II, p.377], as questões mais complexas estariam fora da prática comercial, contudo mais ligadas ao desejo de «fazer matemática» de modo a variar tanto os enunciados como os métodos. Os aritméticos portugueses espelham esta motivação nas situações que propõem. Saliente-se neste contexto as «baratas pela regra da cousa» de Bento Fernandes.

Não encontramos enunciados comuns nos três textos estudados, contudo, os produtos a baratar nas três obras referem com frequência as especiarias provenientes do Oriente, o que confere uma contextualização real ao tema exposto.

### **3.3. Regras de câmbio**

O sistema monetário português na época de Quinhentos era complexo, dada a grande variedade de moedas em circulação, bem como as constantes alterações de valores devido ao deficiente *stock* de metais preciosos, como o refere M. Almeida [Almeida, 1994, v. I, p. 174]. O sistema de conversão entre moedas europeias poderia apresentar dificuldades a quem não demonstrasse uma certa habilidade nas operações básicas. Existia ainda um fator moral ligado aos câmbios, tratava-se do problema da usura, que, em muitas ocasiões, poderia estar ligado a abuso e à prática de atos desonestos. Os aritméticos de Quinhentos não foram alheios a este assunto quando referem a justiça nos negócios. Ruy Mendes introduziu dois tipos de regras de câmbio: o câmbio miúdo e o câmbio real. Sobre o primeiro, o autor não apresenta qualquer definição contudo, pelos enunciados expostos vemos que este tipo de operação consistia em trocar uma moeda por outra, ou por outras, utilizando como instrumento de cálculo a «regra de mudar». Quanto ao câmbio real, diz-nos o autor que é um câmbio de moeda que se faz de uma cidade para outra ou de um reino para outro mediante uma letra de câmbio e acrescenta «...ho qual se costuma de fazer antre mercadores e outras muytas pessoas» [Mendes, 1540, f. 97]. Nos problemas expostos confirmamos as operações descritas e as frequentes referências aos reinos de Castela e de Portugal.

### 3.3.1. A regra de câmbio miúdo

A regra de câmbio miúdo parece confundir-se com a regra de mudar também exposta por Mendes. O câmbio, neste contexto, é sinónimo de troca. Vejamos algumas questões:

Hũ homẽ quer cambar hũ tostã e quer por elle tres sortes de moeda .s. vintês e reaes e ceitis e quer que lhe dê tantos reaes como vintês em numero e tãtos ceitis como reaes. Pregũtase quãtos vintês e reaes e ceitis segũdo esto lhe darã por elle [Mendes, 1540, f. 94 v]. (1)

Para o efeito o autor começa por supor que lhe dão 2 de cada moeda e, em seguida, usa o método de uma falsa posição. Começa por verificar se o conjunto de todas as moedas valem 1 tostão. É dada a informação adicional 1 tostão = 600 ceitis. Aparecem, no texto, algumas conversões que conduzem a 2 vinténs + 2 reais = 252 ceitis, tendo-se mais dois ceitis o que perfaz um total de 254 ceitis. Contudo o tostão vale 600 ceitis. A partir deste passo assiste-se a três aplicações sucessivas da regra de três simples para encontrar o número de reais vinténs e ceitis, usando esquemas semelhantes ao primeiro, (254---600---2), embora para encontrar entidades diferentes. No final é proposta a prova da operação realizada pela regra de mudar. A regra de câmbio miúdo é um caso particular da regra de mudar aplicada a unidades monetárias. Uma informação disponibilizada no texto leva-nos a considerar as equivalências monetárias que constam na Tabela 5.

Tabela 5: Conversão monetária

1 cruzado = 4 tostões
1 tostão = 5 vinténs
1 vintém = 20 reais
1 real = 6 ceitis

O problema proposto pode ser traduzido pelas condições seguintes:

$$\begin{cases} 1\ t = xv + yr + zc \\ x = y = z \end{cases}$$

$t$ -tostões,  $v$ -vinténs,  $r$ -reais,  $c$ -ceitis

Se reduzirmos tudo a ceitis temos o sistema que nos vai dar as soluções pretendidas.

$$\begin{cases} 600 = 120x + 6y + z \\ x = y = z \end{cases}$$

Na quarta partícula dedicada a esta regra Ruy Mendes expõe um problema mais complexo que resolve pelo método de duas falsas posições.

Ho mesmo quer cambar hũ tostã e quer por elle tres sortes de moeda .s. vintês e reaes e ceytis: e quer tãtos reaes como vintês e hũ real mais e tãtos ceytis como reaes e hũ ceartil mais: preguntase agora quantos vintês segũdo esto e quantos reaes e quantos ceytis lhe darã por elle [Mendes, 1540, f. 96 v]. (2)

Podemos prever agora o sistema

$$\begin{cases} 600 = 120x + 6y + z \\ y = x + 1 \\ z = x + 2 \end{cases}$$

Com todas as unidades em ceitis e com a sua resolução, temos as soluções que o autor nos dá por dupla falsa posição.

Podemos constatar que a regra de dupla falsa posição dada para os problemas (1) e (2) no fôlio 94 vai agora servir problemas «concretos» ligados às trocas de moedas. O autor parece reconhecer a «utilidade» deste método nas operações de câmbio, uma vez que propõe mais dois problemas onde se justifica a sua utilização.

Na obra de Bento Fernandes temos uma regra semelhante ao «câmbio miúdo» com a designação de «regra de pagamentos em diferentes moedas» [Fernandes, 1555, f. 48 f]. Os problemas são também resolvidos por uma falsa posição. Os exemplos que podemos observar são idênticos ao problema (1) de Mendes, ou seja, pretende-se trocar uma dada quantia em três moedas diferentes com a condição do número de moedas diferentes ser o mesmo. O autor insiste neste tipo de enunciados e resolve seis problemas que invocam uma prática repetida do método de uma falsa posição. A falsa posição é um tema que vemos no fôlio 67 e o próprio autor afirma, nos problemas que entretanto resolve por este método, que mais à frente trata do assunto «...fareis pela regra de hũa falsa oposiçã da qual adiãte ã seu titulo farey declaração» [Fernandes, 1555, f. 48 f]. É de admirar que Fernandes aborde a



dupla falsa posição antes da falsa posição simples. No fólho 59 temos o tema «Duas falsas oposições de todo o género» e entre os problemas dados não figura qualquer enunciado idêntico ao problema (2) de Mendes. No nosso entender, Bento Fernandes trata dos «câmbios» na regra da conta de Flandres, como teremos oportunidade de ver em II, 4.1.3 do presente capítulo. O tema «câmbios» não aparece no tratado de Gaspar Nicolas.

### **3.3.2. A regra de câmbio real**

Ruy Mendes introduz a regra de câmbio que é antecedida pela definição,

Cambo real nom he al salvo huñ cambo de moeda que se faz de hũa cidade pera outra ou de hũ reyno pera outro mediante hũa letra de cambo ho qual se costuma de fazer antre mercadores e outras muytas pessoas [Mendes, 1540, f. 97 f].

O primeiro problema relata uma situação de câmbio entre Portugal e Castela:

Hũ mercador de Portugal leva .300. cruzados em hũa letra de cambo os quaes lhe ham de ser dados em Castela pollo outro cambiador em moeda portuguesa com sua quebra ou perda preguntase agora quãtos cruzados segũdo esto lhe seram dados polos ditos .300. [Mendes, 1540, f. 97].

Da resolução descrita no texto podemos tirar algumas informações:

1-Em cada 16 cruzados de Portugal levados para Castela perde-se um cruzado inteiro;

2-Em Portugal 1 cruzado vale 400 reais e em Castela o mesmo cruzado vale 375 reais.

Os dados vão permitir aplicar a regra de três: «...se .16. cruzados de Portugal se tornam .15. em Castela perdendo a rezã de hũ dezaseys os ditos .300. em quãtos se tornarã e achareis que .281. e .1/4. » [Mendes, 1540, f. 97 v].

Os problemas expostos referem situações muito semelhantes à que acabamos de descrever. Cada enunciado é ainda um meio de obter informações a partir das quais se aplica a regra de três para atingir os resultados pretendidos. Por exemplo, ficamos a saber que em cada 10 vinténs levados de Portugal para Castela perde-se um vintém inteiro e que em Portugal 1 vintém vale 20 reais e em Castela vale 18 reais.

Mendes propõe outros problemas afirmando que são contrários aos primeiros. Este contrário quer dizer que os valores percorrem um caminho inverso, ou seja, de Castela para Portugal.

Hũ castelhano traz .500. cruzados em hũa letra os quaes lhe hã ca de dar em moeda castelhana com seu ganho. Preguntase agora quantos cruzados segundo esto lhe seram ca dados por elles [Mendes, 1540, f. 98 f].

As informações 1 e 2 vão ser úteis na resolução do problema. Os 15 cruzados de Castela valem 16 em Portugal e 375 reais (1 cruzado) de Castela valem 400 em Portugal. Resta aplicar a regra de três com o seguinte esquema: 15---16---500 para ter o resultado: 533 e  $\frac{1}{3}$ .

Existem outros enunciados com o objetivo de praticar a regra estabelecida. O assunto termina com uma situação relativa a uma quantia que vem de Castela e interessa saber por que moeda deve ser trocada para obter um melhor ganho. Esta parece ser uma questão importante para os mercadores e cambistas.

Ponhamos que trazia .40000. reaes os quaes lhe ham caa de ser dados em moeda castelhana cõ seu ganho: pregũtase em que moeda destas duas .s. cruzados e vintês lhe seram dados pera que leve mayor ganho [Mendes, 1540, f. 98 v].

A avaliação do melhor ganho é realizada tendo em conta duas conversões. A primeira diz respeito aos vintês e baseia-se no facto de 18 reais (1 vintém) de Castela valerem 20 reais em Portugal, logo os 40000 valerão 44444 e  $\frac{4}{9}$  reais. Para ensaiar a conversão em cruzados ter-se-á em conta que 375 reais (1 cruzado) em Castela valem 400 em Portugal. Então os 40000 vão valer 42666 e  $\frac{2}{3}$  cruzados em Portugal. Donde se conclui ser vantajosa a troca por reais.

Dos três aritméticos é Ruy Mendes quem destaca o tema «câmbios». Este assunto encaixa-se no seu tratado logo após as regras de falsa posição (simples e dupla). O que vem reforçar a ideia de um tratado com uma organização pensada, à partida, para dar os pré-requisitos aos temas «mais complexos». Esta característica é evidente na estruturação da obra como já o observámos no capítulo 1, II, Parte II.

### 3.4. Regras da liga da prata e da liga do ouro

A palavra «liga» é também sinónimo de «mistura», Legendre diz que «liga é toda a mistura que se pode fazer, seja de um conjunto de metais, seja de trigo, vinho ou outros» [Legendre, 1781, p.227]. Jules Tannery corrobora esta ideia, afirmando que os princípios matemáticos utilizados não dependem dos materiais. Este autor enuncia dois problemas semelhantes ainda que relativos a dois materiais diferentes. O primeiro problema é sobre uma mistura de diferentes lotes de vinho: « $A_1, A_2, \dots, A_p$ , representam os diferentes volumes de vinhos de qualidade diferente, os preços da unidade de volume são respetivamente  $n_1, n_2, \dots, n_p$ . Misturamos os diferentes lotes; qual será o preço da unidade de volume da mistura?<sup>116</sup>». O problema é idêntico no caso dos metais: «Alguns pedaços de ligas metálicas contendo o mesmo metal precioso têm pesos representados pelos números  $A_1, A_2, \dots, A_p$ , e as leis representadas pelos números  $n_1, n_2, \dots, n_p$ . Fundimos os metais numa só liga, qual será a sua lei?<sup>117</sup>».

Os problemas de «misturas» fazem parte, desde longa data, dos saberes matemáticos. O papiro de Rhind apresenta um problema sobre a mistura de cerveja com água. É ainda famoso um problema conhecido sob o nome de «coroa de Arquimedes», divulgado por Vitruvius na sua obra *De architectura* (Livro IX, Prefácio 9). Tal como o título sugere, trata-se do fabrico de uma coroa em ouro por ordem do rei Hierão. Conta-se que coroa foi entregue ao rei por um artesão de pouca confiança. Assim, o rei duvidou que a coroa contivesse todo o ouro que tinha entregado e, suspeitou que o artesão tivesse substituído uma parte desse ouro por prata. Para comprovar a sua suspeita, o rei procurou Arquimedes e encarregou-o de provar a fraude. Arquimedes determinou experimentalmente a massa volúmica da coroa, do ouro e da prata. Para o efeito, concebeu duas massas de igual peso e igual ao peso da coroa, uma de ouro e a outra de prata. Mergulhou a massa de prata numa taça cheia de água e mediu a quantidade de água que transbordou. Retirou a prata da taça voltou a enche-la e repetiu a experiência com a massa de ouro. Concluiu que a massa de ouro não fez transbordar tanta

---

<sup>116</sup> «On a des volumes de vins,  $A_1, A_2, \dots, A_p$ , de qualités différents; les prix de l'unité de volume sont respectivement  $n_1, n_2, \dots, n_p$ . On les mélange ensemble; quel sera le prix de l'unité de volume du mélange?» [Tannery, 1904, p. 361].

<sup>117</sup> «Divers morceaux d'alliages contenant le même metal précieux ont des poids représentés par les nombres  $A_1, A_2, \dots, A_p$  et des titres représentés par les nombres  $n_1, n_2, \dots, n_p$ . On fond tous ces morceaux en un seul alliage; quel sera son titre?» [Tannery, 1904, p. 362].

água como a de prata e que a diferença entre as quantidades de água deslocadas era igual à diferença entre os volumes da massa de ouro e da massa de prata em igual peso. Voltou a encher a taça de água, onde colocou a coroa e observou que transbordou mais água do que a massa de ouro de igual peso mas menos que a massa de prata. Com base nestas experiências, calculou em quanto a quantidade de água que a coroa deslocava era maior que aquela deslocada pela massa de ouro, o que lhe dava condições para saber qual a quantidade de prata que fora misturada ao ouro e mostrar, deste modo, a fraude do artesão [Labarthe, 2004, vol. II, pp. 381, 382]. O texto de Vitruvius não menciona se Arquimedes determinou a repartição dos volumes de prata e de ouro na coroa. Sejam  $V_1, V_2$  esses volumes, eles são soluções do sistema

$$\begin{cases} a_1V_1 + a_2V_2 = aV \\ V_1 + V_2 = V \end{cases}$$

Onde  $a_1, a_2, a$  são as massas volúmicas respetivas da prata, do ouro e da coroa. Os problemas das ligas podem conduzir à resolução de sistemas lineares<sup>118</sup> o que se encaixa mais naturalmente num contexto matemático.

Os problemas das «ligas» também figuram nas obras de Diofanto, dos árabes e de Alcuíno, como o afirma Johannes Tropfke [Tropfke, 1980, pp. 569-572]. Este tema está ainda presente no *Liber abbaci*, no *Summa* de Pacioli e em várias aritméticas escritas na época da Renascença na Península Ibérica, tais como os tratados de Santcliment, Ventallol, Ortega e Juan Andrés. Interessa-nos sobretudo, o que nos dizem os três aritméticos portugueses de Quinhentos sobre este tema.

Habitualmente designamos por moeda-mercadoria aquela que tem um valor intrínseco igual ao seu valor monetário [Fonseca, 2010, p. 18]. Este conceito baseia-se na ideia de que a economia monetária se desenvolveu a partir de uma economia de troca direta, onde as moedas teriam um valor igual ao das mercadorias. Os metais apresentavam qualidades que contribuíram para que a moeda tivesse características tais como: a divisibilidade, a homogeneidade e a durabilidade. A prata e o ouro são metais preciosos usados nas transações comerciais e apresentam-se em peças compostas por uma parte do metal precioso, ouro ou prata, e de outra parte de um metal de valor reduzido, de um modo geral cobre. As peças

---

<sup>118</sup> Estes sistemas poderão ser indeterminados como teremos oportunidade de ver no desenvolvimento desta secção.

assim compostas apresentam uma «mistura» de metais que têm associados alguns elementos numéricos tais como o «peso», a «lei», a «fineza». Nas aritméticas portuguesas, as regras de prata e de ouro remetem-nos para uma realidade ligada ao fabrico de moeda ou de lingotes com metais preciosos e onde alguns conhecimentos em aritmética eram necessários. As atividades ligadas à produção monetária são de uma importância fundamental na vida económica da época. Ruy Mendes explica assim a liga da prata:

...quero primeiramente declarar que quer dizer liga da prata e ley da prata pero o qual aveis de saber que se costuma com prata fina mesturar cobre (...) chamase aquesta tal prat de liga .s. de ligamento e jūtamento por assi estar ajūtada e ligada cõ ho cobre que a faz ser menos fina do que era [Mendes, 1540, f. 99 f].

Sobre a fineza da prata dá-nos outra informação «...a mais fina prata (...) se chama prata de doze dinheiros de fineza» [Mendes, 1540, f. 99 f]. Em seguida detalha a informação:

Que quer dizer se toda ela se fizesse em doze partes seriam todas doze de prata fina sem ajūtamento de algum cobre. Assi que dinheyro neste caso mōta tãto como o dozavo: porem se te dissesse prata de .11. dinheiros de ley ja a tal prata nom sera toda fina porque quer dizer que se toda ela fosse feita em .12. partes seriã as .11. de prata fina e a hũa de cobre e desta liga he a prata de Portugal assy que ley neste caso significa a fineza que tal prata tẽ [Mendes, 1540, f. 99 f].

O peso do metal é dado em marcos. A fineza é o peso de prata ou ouro puros presentes na peça (moeda), associados ao outro metal não precioso. A lei é um número que permite avaliar a quantidade de metal precioso, ouro ou prata, presente na peça.

Sobre a as ligas de prata e de ouro, os três aritméticos portugueses produziram alguns resultados nas suas obras e explicam-nos em que consistem as ligas.

Gaspar Nicolas dedica um anexo da sua obra com um total de vinte e quatro fólhos à liga de prata. Ruy Mendes descreve-nos sete regras da liga de prata e sete regras da liga de ouro (fólhos 98-110). Das mesmas ligas nos fala Bento Fernandes (fólhos 107-118).

### 3.4.1. As ligas da prata e do ouro segundo Ruy Mendes

A metodologia utilizada na abordagem às ligas da prata tem por base a definição de liga,

...liga de prata e ley de prata pera o qual aveis de saber que se costuma com prata fina  
mesturar cobre e porque a tal prata cõ esta mestura de cobre já nom he toda prata fina:  
chamase aquesta tal prata prata de liga [Mendes, 1540, f. 99 f].

A definição é acompanhada das equivalências que descrevemos na Tabela 6. A divisibilidade da moeda impunha um conhecimento dos submúltiplos das unidades consideradas daí ser importante definir, à partida, o marco e as relações com os seus submúltiplos.

Tabela 6: «Pesos» para as moedas

1 marco de prata = 8 onças = 12 dinheiros
1 onça = 8 oitavas
1 oitava = 4 grãos e meio dos grandes
1 grão grande = 16 grãos pequenos
1 dinheiro = 24 grãos grandes

As sete regras da liga de prata que Mendes nos descreve são as seguintes:

- 1- Regra de mudar a lei ou leis em outra juntando outra prata de lei ou de liga;
- 2-Regra de mudar a lei ou leis em outra juntando prata fina;
- 3-Regra de mudar a lei ou leis em outra juntando cobre;
- 4-Regra de mudar a lei ou leis em outra tirando outra prata de lei ou de liga;
- 5- Regra de mudar a lei ou leis em outra tirando prata fina;
- 6- Regra de mudar a lei ou leis em outra tirando puro cobre;
- 7- Regra de mudar a fineza em lei nova juntando cobre a prata fina.

Optamos por tratar ao mesmo tempo as ligas de ouro já que os procedimentos algorítmicos são os mesmos, segundo afirma o autor. Temos as seguintes regras da liga do ouro:

- 1- Regra de mudar os quilates em outros juntando outro ouro de outros quilates;

- 2- Regra de mudar os quilates em outros juntando ouro fino;
- 3- Regra de mudar os quilates em outros juntando prata ou cobre;
- 4- Regra de mudar os quilates em outros tirando outro ouro de outros quilates;
- 5- Regra de mudar os quilates em outros tirando ouro fino;
- 6- Regra de mudar os quilates em outros tirando prata ou cobre;
- 7- Regra de mudar a fineza em quilates novos juntando prata ou cobre.

Sobre a regra de ouro o texto apresenta a informação adicional:

... que quer dizer liga do ouro e ouro de tantos quilates. E pera o primeiro aveys de saber que se costuma com ouro fino ajuntar prata ou cobre e por que ja ho tal ouro com esta liga e ajuntamento nõ he todo fino: chamase este tal ouro ouro de liga .s. de ajuntamento e ligamento por estar assi ajuntado e ligado com a tal prata ou cobre que ho faz ser menos fino do que dantes era. E pero ho demais aveys de saber que ho mais fino ouro .s. o que nam tem liga nenhũa se chama ouro de .24. quilates de fineza: que quer dizer que se todo elle fosse feyto em .24. partes seriã todas .24. d'ouro fino sem ajuntamento de algũa liga [Mendes, 1540, f. 107 v].

A fim de facilitar a à descrição e análise dos problemas propostos vamos considerar a nomenclatura seguinte para as ligas da prata e do ouro:

*P*-peso do metal em marcos

*F*-peso da prata/ouro (fineza da prata/fineza do ouro)

*C*-peso do outro metal pouco valioso

*L*-lei da prata/lei do ouro

Para a peça de metal é válida a relação seguinte:  $P = F + C$ . A lei,  $L$ , permite avaliar a quantidade de metal precioso na liga (para a prata  $0 \leq L \leq 12$ , para o ouro  $0 \leq L \leq 24$ ). Na liga da prata se  $L = 12$  então  $F = P$ , desde que ambos estejam na mesma unidade de peso. O quociente  $\frac{F}{P}$  é proporcional à lei,  $L$  (as unidades de medida são diferentes para a prata e para o ouro), temos  $F = \frac{LP}{12}$  (ou  $F = \frac{LP}{24}$  na liga do ouro), onde o quociente  $\frac{F}{P}$  é igual a  $\frac{L}{12}$  e dá

a proporção de metal fino (prata) presente na liga. Se o metal precioso é o ouro,  $L = 24$  e o quociente  $\frac{L}{24}$  que dá a proporção do ouro na liga.

Nos problemas propostos por Mendes encontrámos vários tipos de incógnitas, a saber, a nova lei  $L$ , quando se fundem duas peças, se junta ouro ou prata ou cobre a uma dada peça. Mas também, pode ser desconhecido o peso do metal a juntar para se conseguir uma lei de metal precioso estabelecida à partida. Passaremos a alguns exemplos contemplados pelo autor.

### Quando a incógnita é $L$

Na «regra de mudar a lei ou leis em outra juntando outra prata de lei ou de liga», temos o problema seguinte:

Tenho .8. marcos de prata de .11. dinheiros de ley e tenho .4. marcos doutra prata de .7. dinheiros de ley pregũto se os ajuntar com os .8. primeiros em que outra lei se mudaram [Mendes, 1540, f. 99 v].

Pretende-se misturar as duas peças e determinar a nova lei,  $L$ . A resolução baseia-se na regra geral dada pelo autor:

Aveis primeiramente de multiplicar cada peso por sua lei e esto feito somareis as taes multiplicações e o numero que somarem poreis de parte e depois somareis os pesos e ao numero que somarem repartireis ho que focar de parte e em quantos vierem na repatição em tal ley direys que se mudará [Mendes, 1540, f. 99 v].

Temos os dados seguintes:

$$\begin{cases} P_1 = 8 \\ L_1 = 11 \\ P_2 = 4 \\ L_2 = 7 \end{cases}$$

Segundo a regra dada, a lei média da prata é

$$L = \frac{P_1 L_1 + P_2 L_2}{P_1 + P_2} = \frac{88 + 28}{12} = \frac{116}{12} = 9 \frac{2}{3}$$



«...virã na repartiçam .9. e .2/3. avos e em tantos dinheiros e partes do dinheiro de outra ley direis que se mudaram» [Mendes, 1540, f. 99 v]. Os  $\frac{2}{3}$  ainda vão ser convertidos:

...se quiseses saber a questes .2/3. avos de dinheiro quantos grãos dos grandes serem multiplicareys os .2. dinheiros que ficavam por repartyr por .24. grãos que tem cada dinheiro e farão .48. estes repartireis aos .3. e viram .16. e assi direis logo que se mudaram em outra ley de .9. dinheiros e .16. grãos grandes e assi respondereis aas semelhantes [Mendes, 1540, f. 100 f].

Ainda no capítulo dedicado a esta regra Mendes propõe outros enunciados para uma prática eficaz. Um exemplo, na partícula quarta, prevê a mistura de três ligas diferentes e a regra dada é semelhante à anterior, com 4 marcos de prata de 8 dinheiros de lei, 5 marcos de prata de 9 dinheiros de lei e 6 marcos de prata de 10 dinheiros de lei. A resolução remete-nos para a média da lei de prata com as três ligas

$$L = \frac{P_1 L_1 + P_2 L_2 + P_3 L_3}{P_1 + P_2 + P_3}$$

E o autor procura generalizar: «...assi respõdereis aas semelhantes ou seja hũa (...) quer sejã duas (...) quer seja .3. quer .4. quer .5. e day pera cima» [Mendes, 1540, f.100 f]. Com esta «generalização» proposta para a mistura de  $n$  ligas podemos escrever a lei  $L$  como

$$L = \frac{\sum_{i=1}^n P_i L_i}{\sum_{i=1}^n P_i}$$

Sobre a «regra de mudar a lei ou leis em outra juntando prata fina», há situações onde se pretende determinar  $L$ . Esta regra está associada a outra vertente da liga. Trata-se de juntar prata fina a uma mistura e, desta maneira, aumentar a lei de prata na peça metálica. Para esta prática, Ruy Mendes propõe quatro partículas, cada uma delas com um enunciado. Vejamos o primeiro:

Tenho .5. marcos de prata de .6. dinheiros de ley aos quaes queria ajũtar quatro marcos de prata fina: pergunto se os ajũtar em que outra ley se mudaraa s sobredita [Mendes, 1540, f.101 f].

Consideremos os dados do autor,

$$\begin{cases} P_1 = 5 \\ L_1 = 6 \\ P_2 = 4 \end{cases}$$

Pretendemos conhecer  $L$ . Mendes diz que o procedimento é idêntico ao da regra anterior (primeiro problema):

A decaração desta segūda regra pera saberdes responder a esta pergunta he a mesma que a da primeyra regra atras no primeyro capitulo decrarada cō mais esta decaração que sempre multiplicareis ho peso da prata fina por .12. que he a sua fineza: poys obrando agora pola dita decaração achareis que as multiplicações somã .78. que repartidos aa soma dos ditos marcos que he .9. achareis que vñ na repartição .8. e .2/3. Avos e em tal outra ley direys que se mudaraa a sobredita e assi respondereis a outras quaesquer semelhantes [Mendes, 1540, f.101 f].

Temos de novo

$$L = \frac{P_1 L_1 + P_2 L_2}{P_1 + P_2} = \frac{30 + 48}{9} = \frac{78}{12} = 8 \frac{2}{3}$$

Com a afirmação adicional: 1 marco de prata = 12 dinheiros, logo 4 marcos de prata correspondem aos 48 dinheiros. O algoritmo é idêntico ao primeiro enunciado que aqui apresentámos.

A lei da prata pode ser alterada juntando cobre. Na «regra de mudar a lei ou leis em outra juntando puro cobre», temos situações onde a lei volta a ser a incógnita. Esta regra tem como efeito baixar a lei de prata numa liga, aumentando a presença de cobre puro. Os problemas, em termos de algoritmos dados, não diferem muito dos anteriores.

«...tenho dez marcos de prata de .11. dinheiros de ley pregūto se ajuntar cō elles quatro marcos de cobre em que outra ley se mudaraa a sobredita» [Mendes, 1540, f.102 f]. Onde se considera  $P_1 = 10$ ,  $L_1 = 11$  e  $P_2 = 4$  para determinar o valor  $L$ . A resposta que o autor nos dá

...multiplicareis os ditos marcos que sam dez por sua ley que he .11. e fará .110. que poreis de parte (...) somareys os ditos dez marcos de prata cō os .4. de cobre e somam .14. aos quaes repartireys os .110. e virã na partiçã .7. e .6/7. [Mendes, 1540, f.102 f].

Temos assim

$$L = \frac{P_1 L_1}{P_1 + P_2} = \frac{110}{14} = 7\frac{6}{7}$$

Podemos escrever  $LP = L_1 P_1$  (onde  $P = P_1 + P_2$ ) o que traduz a conservação da quantidade de prata existente na liga.

As regras de quatro a sete, tanto para a liga de prata como para a liga do ouro, tal como o nome indica, visam diminuir a lei do metal precioso. Também nestes enunciados a incógnita pode ser  $L$ , dado que, esta operação vai alterar a lei. Vejamos um problema da quarta regra («Regra de mudar a lei ou leis em outra tirando outra prata de lei ou de liga»):

...tenho dez marcos de prata de ley de nove dinheiros e tenho mais .8. marcos outros de .7. dinheiros de ley dos quaes .18. queria tirar doze marcos de ley de .10. dinheiros: pergunto os .6. que hã de ficar em que outra ley ficarã mudados [Mendes, 1540, f.103 f].

Temos os dados seguintes:

$$\begin{cases} P_1 = 10 \\ L_1 = 9 \\ P_2 = 8 \\ L_2 = 7 \\ P_3 = 12 \\ L_3 = 10 \end{cases}$$

Desconhecemos a nova lei  $L$ . A resolução assenta nos passos seguintes: «...multiplicareis (...) cada peso dos sobreditos por sua ley e somareis as multiplicações achareis que somam .146. » [Mendes, 1540, f.103 f]. A afirmação refere os produtos  $P_1 L_1, P_2 L_2$  e a soma respetiva:  $P_1 L_1 + P_2 L_2 = 146$ . «...multiplicareys os .12. marcos que quero tirar pola sua que he .10. e faram .120. e estes tirareis logo dos .146. » [Mendes, 1540, f.103 f], temos o produto  $P_3 L_3 = 120$  e  $P_1 L_1 + P_2 L_2 - P_3 L_3 = 26$ . «...repartireis aos .6. marcos que ham de ficar e virã .4. e .1/3. » [Mendes, 1540, f.105 f].

Na presente situação temos

$$L = \frac{P_1 L_1 + P_2 L_2 - P_3 L_3}{P_1 + P_2 - P_3}$$

A lei da prata pode mudar quando tiramos cobre puro da liga. Esta possibilidade é descrita no problema dois referente à sexta regra («Regra de mudar a lei ou leis em outra tirando puro cobre»).

...tenho .10. marcos de prata de ley de .4. dinheiros e tenho mais .12. marcos outros de ley .2. dinheiros: pregũto se os poser ao fogo e lhe tirar .16. marcos de cobre os .6. que ficarẽ com que lei ficarã [Mendes, 1540, f.105 v].

Note-se a descrição do procedimento real que consiste em fundir as peças metálicas. Até à sexta regra nada fora dito a este respeito. Os dados levam-nos a considerar

$$\begin{cases} P_1 = 10 \\ L_1 = 4 \\ P_2 = 12 \\ L_2 = 2 \\ P_3 = 16 \\ L_3 = 0 \end{cases}$$

Nas palavras do autor temos de novo um valor do tipo

$$L = \frac{P_1 L_1 + P_2 L_2}{P_1 + P_2 - P_3}$$

Como o produto  $P_3 L_3 = 0$  nem sequer é referido: «...multiplicareis os ditos .10. marcos por sua ley e assy os .12. pola sua e somadas as multiplicações (...) estes repartireis logo aos .6.» [Mendes, 1540, f.105 v].

No caso das ligas de ouro temos as mesmas «receitas» para determinar a «lei» e, o próprio autor remete-nos sempre para as situações equivalentes na liga de prata: «A decraraçaõ desta primeira regra da liga do ouro pera respõder a esta pergunta digo que he a mesma que a da primeira regra da liga de prata» [Mendes, 1540, f.108 f]. Estas referências são uma constante e o número de problemas para a liga de ouro é muito menor do que o seu equivalente para a liga de prata, o que se justifica, conhecida a semelhança dos procedimentos algoritmicos. Contudo queremos referir uma mudança ao nível da linguagem. Trata-se de substituir a expressão «com que lei ficaram» por outra própria para a regra do ouro, «em quantos quilates ficaram».

### Quando a incógnita é $P$

Os enunciados propostos podem ter como objetivo outras incógnitas, a saber o peso, em marcos de prata, a juntar a uma liga para se obter um determinado valor da lei da prata. Um exemplo é o enunciado da partícula quinta da «regra de mudar a lei ou leis em outra juntando outra prata de lei ou de liga», que prevê uma outra incógnita, digamos  $P_2$ .

Tenho .7. marcos de prata de .8. dinheiros de ley pregũto quantos marcos de prata de .4. dinheiros de ley ajũtarey cõ elles pera mudar sua ley em outra de .5. dinheiros [Mendes, 1540, f.100 f].

Para os dados

$$\begin{cases} P_1 = 7 \\ L_1 = 8 \\ L_2 = 4 \\ L = 5 \end{cases}$$

a resolução: «...vereys primeiramẽte que diferença ay da ley em que quero que se mude que he .5. aa ley da prata que quero ajũtar que he .4. e achareis que hũ o qual poreis de parte [Mendes, 1540, f.100 f]». Temos  $L - L_2 = 5 - 4 = 1$ . «...vereis que diferẽça ay dela a ley da prata que tenho que he .8. e achareis que .3. » [Mendes, 1540, f.100 f], ou seja, temos o cálculo de  $L_1 - L = 3$ .

...agora cõ estes dous números .s. cõ o que fica de parte e cõ este e cõ mais o numero dos ditos marcos de prata que tenho que he .7. formareis a primeira regra de tres dizẽdo assi: se hũ marco de prata de sete dinheiros de ley quer tres marcos de prata de de quatro dinheiros de ley pera se mudar sua ley em outra de cinco dinheiros os ditos .7. marcos quantos querera [Mendes, 1540, f.100 f].

A regra de três é proposta com o esquema 1---3---7 que, não é exibido. A resposta é dada: 21 marcos de prata de 4 dinheiros. Usando a nomenclatura que adotamos temos

$$L - L_2 \quad \text{-----} \quad L_1 - L \quad \text{-----} \quad P_1$$

$$P_2 = \frac{P_1(L - L_2)}{L - L_1}$$

Observamos outra variante, referente à «regra de mudar a lei ou leis em outra juntando cobre», e que consiste em saber o peso de cobre a juntar a uma dada peça de modo a termos uma lei de prata que é dada à partida

...tenho dez marcos de prata de .11. dinheiros de ley: pergunto quantos marcos lhe ajūtarey de cobre pa lhe mudar sua ley em outra de .7. dinheiros e .6/7. avos de dinheiro [Mendes, 1540, f.102 f].

As informações remetem-nos para os valores seguintes:

$$\begin{cases} P_1 = 10 \\ L_1 = 11 \\ L_2 = 0 \end{cases}$$

Pretendemos saber  $P_2$ . A resposta nas palavras do autor:

... vereis primeiramête que diferença ay da ley do cobre que quero ajūtár e achareys que todos .7. e .6/7. avos porque elle nã tẽ ley nenhũa os quaes poreis de parte e assi vereis que diferença ay dela a ley da prata que tenho que he .11. e achareis que .3. e .1/7. avo [Mendes, 1540, f.102].

A primeira etapa da resolução consiste no cálculo das diferenças

$$L - L_2 = 7\frac{6}{7}, \quad L_1 - L = 11 - 7\frac{6}{7} = 3\frac{1}{7}$$

No próximo passo aplica-se da regra de três: «Se .7. e .6/7. avos querem .3. e .1/7. avo os ditos .10 quãtos querera e obrãdo achareis que saẽ na repartição .4. » [Mendes, 1540, f.102 v]. A regra vai funcionar segundo o esquema  $7\frac{6}{7} \text{---} 3\frac{1}{7} \text{---} 10$  para obter 4. De um modo geral temos

$$L \quad \text{---} \quad L_1 - L \quad \text{---} \quad P_1$$

Donde

$$P_2 = \frac{P_1(L_1 - L)}{L}$$

Note-se que o valor da lei para a nova mistura não é inteiro, contudo o valor de  $P_2 = 4$  já é um inteiro.

Temos um processo inverso previsto. Trata-se de tirar cobre tal como podemos ver num problema relativo à «regra de mudar a lei ou leis em outra tirando puro cobre». «...tenho .6. marcos de prata de .5. dinheiros de ley e tenho .4. marcos outros de .3. dinheiros de ley: pergunto quantos marcos de cobre tirarey deles para que os que ficarẽ fiquẽ em outra ley de .9. dinheiros» [Mendes, 1540, f.106 f].

Tomemos os dados do enunciado

$$\begin{cases} P_1 = 6 \\ L_1 = 5 \\ P_2 = 4 \\ L_2 = 3 \\ L = 9 \\ L_3 = 0 \end{cases}$$

Seja  $P_3$  o valor desconhecido. A resolução apresenta duas etapas. A primeira consiste em determinar uma lei intermédia que vamos designar por  $L'$ , sendo

$$L' = \frac{P_1 L_1 + P_2 L_2}{P_1 + P_2}$$

Nas palavras do autor:

...vêdo porem primeiramẽte os ditos .6. marcos juntos aos .4. pola primeira regra atras decrarada em que outra ley se mudaram e achareys que em outra de .4. dinheiros e .1/5. avo [Mendes, 1540, f.106 f].

Ou seja,

$$L' = \frac{P_1 L_1 + P_2 L_2}{P_1 + P_2} = 4 \frac{1}{5}$$

A próxima etapa permite determinar o valor pretendido,  $P_3$ .

...vereys primeiramente que diferença ay da ley em que quero que fiquẽ os que ficarẽ que he .9. aa ley do cobre que quero tirar e achareis que todos .9. porque ele nom tẽ ley

nenhã como dito he os quaes poreis de parte e assi vereis que differença ay dela mesma ley da prata que agora tenho que he .4. e .1/5. avo e achareis .4. e .4/5. avos [Mendes, 1540, f.106 f]. Podemos pensar nas seguintes operações  $L - L_3 = 9$  e  $L - L' = 4\frac{4}{5}$ . Vem o momento de aplicar a regra de três simples: «...se de .9. marcos se ham de tirar .4. e .1/5. avo dos ditos .10. quantos se tiraram e obrando achareis que vem na repartição .5. e .1/3. avo [Mendes, 1540, f.106 f]». Temos então a regra de três assente no esquema  $9 \text{ --- } 4\frac{4}{5} \text{ --- } 10$ . Usando a nomenclatura adotada

$$L - L_3 \quad \text{---} \quad L - L' \quad \text{---} \quad P_1 + P_2$$

Donde

$$P_3 = \frac{(P_1 + P_2)(L - L')}{L - L_3} = \frac{(P_1 + P_2)(L - L')}{L}$$

Nos algoritmos dos enunciados da liga de ouro, Ruy Mendes remete-nos sempre para o equivalente na liga da prata. Excluindo algumas questões de linguagem ou unidades utilizadas, estamos perante procedimentos de cálculo equivalentes, como já referimos. Não vamos aqui descrever estes problemas.

### 3.4.2. A liga de prata segundo Gaspar Nicolas

Recordemos que Gaspar Nicolas dedica um apêndice do seu tratado à liga da prata. Logo no início temos a afirmação seguinte: «Agora te quero mostrar a liga da prata em Portugall» [Nicolas, 1963, f. i f], o que nos leva a crer que o assunto prende-se com a realidade nacional. Ao contrário de Ruy Mendes, Nicolas não apresenta qualquer divisão tipológica para a liga da prata mas antes, um numeroso conjunto de enunciados.

As incógnitas são praticamente as mesmas, ou seja, a lei final, quando se misturam ligas, prata fina ou cobre, os pesos de prata ou de cobre a juntar para obter uma determinada lei da prata. Os algoritmos apresentados são, em alguns casos, idênticos aos de Mendes, contudo, observamos alguns enunciados de maior complexidade. Escolhemos um desses problemas que passamos a descrever.



Se te dicesem bulhão tenho de duas sortes huï he de ley de .7. dinheiros e o outro de ley de .9. dinheiros e destas duas sortes quero fazer hũa liga que seja de ley de .11. dinheiros e quero fazer .50. marcos e quero tomar tres tanto de ley de .7. ora eu demandando quãto tomarey de cada hũa sorte e quanta prata fyna lhe ey de lançar [Nicolas, 1963, f. x f].

A resolução dada é muito extensa mas dá-nos informações necessárias para uma melhor compreensão do enunciado. O autor propõe misturar duas ligas de prata e cobre com prata fina, ou seja, três tipos diferentes de misturas<sup>119</sup>. Se usarmos a nomenclatura anterior e face ao exposto, temos os dados seguintes

$$\begin{cases} L_1 = 7 \\ L_2 = 9 \\ L_3 = 12 \\ L = 11 \\ P_1 + P_2 + P_3 = 50 \\ P_1 = 3P_2 \end{cases}$$

Pretende-se determinar os valores de  $P_1, P_2, P_3$ . Queremos referir que se trata de uma situação não abordada por Mendes. Este enunciado, leva-nos a pensar no seguinte sistema

$$\begin{cases} P_1 + P_2 + P_3 = P \\ P_1L_1 + P_2L_2 + P_3L_3 = LP \\ P_1 = 3P_2 \end{cases}$$

Onde para o problema proposto

$$\begin{cases} P_1 + P_2 + P_3 = 50 \\ P_1L_1 + P_2L_2 + P_3L_3 = 550 \\ P_1 = 3P_2 \end{cases}$$

A resolução do sistema conduz-nos aos resultados do autor. Vejamos o que nos diz:

...se ho saber quiseres tem esta regra geral vee ho cobre que tem cada huï onde aquelle bulham de .7. tera .5. dinheyros de cobre e ho de nove terá tres de cobre. E por que diz que quer .3. tanto do de .7. e tu sabes que ho de .7. tem .5. dinheiros de cobre multiplica tres vezes .5. e faras .15. ajuntalhe hos .3. que tem o bulham de .9. e sam .18. Ora este he ho teu partidor e por que diz que quer .50. marcos de ley de .11. e tu bem ves que

---

<sup>119</sup>A palavra *bulhão* é usada como designação para a liga de prata e cobre.

pera .12. faltam huũ onde mostra que cada marco há de ter huũ dinheiro de cobre e .50. marcos ham de teer .50. dynheiros de cobre. Ora parte estes .50. por .18. vem .2. e sete noveavos e tanto ha de tomar do bulham que he de ley de .9. e por que diz que quer tomar tres tanto do bulham de ley de .7. multiplica estes .2. e sete noveavos por .3. e faras .8. e huũ terço e tão has de tomar daquele bulham de ley de .7. e pera saberes quantos marcos de prata fina lhe as de lançar assoma .8. e huũ terço em .2. e sete noveavos e sã por todos onze e huũ novavo estes tyra .50. marcos que dyzes que queres fazer e fycam .38. e oyto novavos e tantos lhe as de lançar de prata fina [Nicolas, 1963, f. x f].

Ruy Mendes tratou da mistura de três ligas diferentes, contudo o problema resumia-se à determinação de uma incógnita. No caso de Nicolas, observamos enunciados que nos remetem para problemas que vão do mais simples ao mais complexo, como o é a situação que acabamos de descrever.

### **3.4.3. As ligas de prata e de ouro segundo Bento Fernandes**

Numa primeira abordagem ao que Bento Fernandes expõe ficamos com a ideia que segue uma metodologia semelhante à de Ruy Mendes, ou seja, a exibição das mesmas sete regras da liga da prata («sete partidas<sup>120</sup>»). Percorrendo os enunciados, as incógnitas são a lei da prata, quando se juntam vários tipos de ligas, e ainda, o peso a juntar de um metal ou liga para se conseguir uma lei dada à partida. Há sempre um cuidado de referir a situação em Portugal e de ligar cada enunciado a um problema concreto que poderá ter a ver com um ourives com determinada prática: «Hum orivez tẽ .19. marcos de prata de ley .10. dinheiros e quer lhe ajũtar .5. marcos de cobre. Pregũto de que ley se tornara esta prata assi jũta cõ cobre...» [Fernandes, 1555, f. 109 v]. Sobre a lei da prata em Portugal ficamos a saber que: «...a prata deste reino de Portugal he de ley de .11. dinheiros (...) a câtidade de prata fina he de ley .12. dinheiros...<sup>121</sup>».

Um problema muito direto e que diz respeito a um bom conhecimento da situação nacional é o seguinte:

---

<sup>120</sup> Esta é a expressão que o autor usa com o mesmo significado das sete regras da liga da prata de Ruy Mendes [Fernandes 1555, f. 108 f].

<sup>121</sup> Esta informação é comum aos três autores aqui em estudo [Fernandes, 1555, f. 113 f].

Digo que eu tenho hũ marco de prata fina que he de ley .12. dinheiros e quero ligala ao modo deste reyno. Pregũto quãto lhe lãçarey de liga pera via a ser dos .11. dinheiros que he a fineza que se costuma [Fernandes, 1555, f. 113 f].

Para além dos enunciados que acompanham a lei exposta, este autor dá-nos uma coleção de problemas em «Pregũtas sobre a liga da prata» que podemos considerar mais complexos. O primeiro desses enunciados é idêntico a um já encontrado no tratado de Gaspar Nicolas e que nos levava a um sistema.

Hũ homẽ tẽ duas sortes de prata .s. hũa de ley de .8. dinheiros e a outra de ley .10. dinheiros e quer reduzila toda a ley de .11. dinheiros e quer fazer .40. marcos de ley e quer tomar da ley de .8. dinheiros tres tãto que da ley de .10. dinheiros hum tanto. Pregunto quantos marcos deve tomar de cada ley pera fazer os ditos .40. de ley de .11. dinheiros e outro si quãta prata fina lhe haa d'ajũtar [Fernandes, 1555, f. 112 v].

Ainda outra situação semelhante, tem a ver com a mistura de três ligas:

Eu tenho .3. sortes de prata hũa delas de ley de .6. dinheiros e outra de .8. dinheiros e outra de .10 dinheiros queria fazer .60. marcos de prata que tenha .9. dinheiros de fineza por marco. Pregũto quãtos marcos tomarey de cada sorte [Fernandes, 1555, f. 112 v].

Podemos pensar que as incógnitas são  $P_1, P_2, P_3$  e temos um sistema do tipo

$$\begin{cases} P_1 + P_2 + P_3 = P \\ P_1L_1 + P_2L_2 + P_3L_3 = LP \end{cases}$$

No problema em causa

$$\begin{cases} P_1 + P_2 + P_3 = 60 \\ 6P_1 + 8P_2 + 10P_3 = 540 \end{cases}$$

Este sistema é indeterminado e uma das soluções é a que o autor nos apresenta  $P_1 = 10$ ,  $P_2 = 10$  e  $P_3 = 40$ . A sua resolução é a que passamos a descrever:

Aveis de notar que sêpre aveis de ligar ho mais cõ ho menos e aveis de poer hũ êçima do outro e pera o melhor entenderdes escreverei aqui as sortes da prata .s. .10. dinheiros he .8. dinheiros he .6. dinheiros e poreis debaixo deles a liga que quereis fazer que he de .9. dinheiros per marco. E ligareis ho menos cõ ho mais que he .9. e sã mais .3. que

.6. e poreis este .3. sobre .10. que he a mayor liga e direis assi .9. he menos que .10. 1. pôde este .1. ãcima do .6. e direis assi .9. he menos .1. que .10. pôde este .1. ãcima do .8. e direis .8. he menos .1. que .9. pôde este .1. ãcima do .3. que esta ãcima dos .10. agora assomay todos s. .1. que esta ãcima do .6. he .1. que esta ãcima do .8. e .3. que estão ãcima dos .10 he .1. que estaa ãcima do .3. e fazẽ assi .6.. Agora ireis a regra de tres dizẽdo assi se .6. me dã .60. que me dará .4.. E digo que sam .4. por que os que estsm encima sam .3. e mais .1. que fazem .4. que estam encima dos .10. e seguindo a regra aveis de multiplicar .4. per .60. fazẽ .240. estes pary por .6. vẽ .40. de maneira que direis que .40. marcos de prata ha de tomar da sorte de .10. dinheiros e pera saber quãto tomareis da prata de ley de .8. dinheiros ireis outra vez ha regra de tres dizẽdo assi se .6. me dã .60. quantos me dará .1. multiplicay .1. per .60. fazem os ditos .60. partyos per .6. vem .10. assi que direis que ha de tomar da prata de ley de .8. dinheiros .10 marcos e pera saber quãtos tomareis da prata de ley de .6. dinheiros ireis outra vez ha regra de tres dizẽdo se .6. me dã .60. que me dará .1. he fazẽdo a regra achareis que vos dará .10. de maneira que outros .10. marcos ha de tomar da prata de ley de .6. dinheiros. E assi direis que a de tomar .40. marcos de prata de ley de .10. dinheiros e .10. marcos de ley de .8. dinheiros he outros .10. marcos de ley de .6. dinheiros e fará .60. marcos de ley de .9. dinheiros por marco de fineza como he a pregũta [Fernandes, 1555, f. 113 f].

A resolução é muito extensa e invoca a regra de três para encontrar as incógnitas. Queremos referir esta dupla designação «ley» e «fineza», presentes no enunciado e que parecem ambas referir-se à proporção de metal precioso presente na liga. No caso da prata temos  $0 \leq L \leq 12$ , onde  $L = 0$  corresponde à lei para um metal de baixo valor, como o é o cobre e  $L = 12$  corresponde à prata pura.

No que diz respeito à lei do ouro, a abordagem de Bento Fernandes é idêntica à de Ruy Mendes, partindo do princípio que ouro puro corresponde a 24 quilates e neste caso  $0 \leq L \leq 24$ , sendo  $L = 0$  para outro metal que não ouro e  $L = 24$  para o ouro puro.

Uma característica do *Tratado da Arte d'Arismetica* é a presença de extensas tabelas com preços, tais como a «Tavoada pera saber quãto say a õça da prata a a oytava vendida a rezam do marco .s. ao preços seguintes» [Fernandes, 1555, f.113 f, v] e a «Tavoada da valia do ouro pelas dobras» [Fernandes, 1555, f.114 f]. Gaspar Nicolas exhibe uma tabela da mesma natureza para a prata. Este tipo de tabelas estão ausentes na *Pratica* de Mendes e, sem dúvida, seriam de grande utilidade nos negócios.

Sobre as ligas, vimos com Ruy Mendes e Bento Fernandes duas abordagens muito próximas em termos de tipos de metais a usar: o ouro e a prata. Já Gaspar Nicolas apenas menciona a regra da prata. Na verdade os procedimentos são idênticos para as duas ligas. Contudo as unidades de medida da lei são diferentes para o ouro e para a prata. No primeiro caso temos  $0 \leq L \leq 24$  e no segundo  $0 \leq L \leq 12$ . Os problemas visam atuações diversas entre as quais juntar ligas e determinar a lei resultante, saber o peso de um metal a juntar para ter uma lei desejada e, nos casos mais complexos, determinar os «pesos» das ligas a juntar para ter uma determinada lei.

Sobre as unidades utilizadas temos o «marco» e os seus submúltiplos. Como auxiliares nos cálculos aparecem tabelas com a valia dos metais preciosos nas obras de Gaspar Nicolas e de Bento Fernandes.

Do ponto de vista matemático, as ligas podem conduzir a sistemas lineares indeterminados, como nos mostrou Bento Fernandes. A determinação da «lei», pelos três aritméticos estudados, é baseada em instrumentos de cálculo que visam servir uma prática ligada a fundição de metais e aos trabalhos dos ourives, mais uma vez estão em jogo modelos aritméticos num contexto real.

#### **4. As regras específicas do comércio português**

No contexto da Matemática para o comércio temos duas regras que designaremos por «regras específicas»: a regra de quarto e vintena e da regra da conta de Flandres, dado que não se conhecem outros tratados que as contenham, para além dos tratados portugueses.

Como referimos no capítulo 2, II da Parte I, a Casa da Índia e a feitoria da Flandres eram peças fundamentais da teia comercial então criada e foram também o berço destas regras. Os três aritméticos fazem alusão à Casa da Índia quando introduzem a regra de quarto e vintena e aos negócios na Flandres que justificam uma regra própria.

De um modo geral, os tratados de aritmética escritos um pouco por toda a Europa caracterizam-se por um tronco comum constituído por um conjunto de regras como as que tratamos na secção 3 do presente capítulo, entre as quais temos as regras de companhias e as regras de baratas. As regras comerciais, poderão apresentar algumas características locais e, no caso dos tratados portugueses, consideramos que a presença da regra de quarto e

vintena e da regra da conta de Flandres é um contributo «local» no corpus aritmético e uma via de modelização aritmética utilizada pelos mercadores de Quinhentos, tal como o indicam os três autores aqui em estudo.

#### 4.1. Regra de quarto e vintena

A regra de quarto e vintena ocupa uma posição de destaque nas aritméticas portuguesas. Está presente em todos os tratados e foi certamente uma das bases de motivação para a elaboração dos tratados lusitanos, dado que, do ponto de vista fiscal, era uma fonte geradora de avultadas receitas para o reino.

Podemos confirmar a importância da regra nas palavras dos próprios autores quando introduzem o assunto. Começemos por observar o que nos diz Ruy Mendes:

Que tirar quarto e vintena segundo se tira na Casa da Índia nã he outra cousa salvo saber de hũa certa câtia ho quarto e dos tres quartos della mesma a vintena quantos sera e tirados della quantos ficarã [Mendes, 1540, f. 80 v].

Também Bento Fernandes faz uma introdução semelhante:

A regra de quarto e vintena se diz asi por rezã que na Casa da Índia da cidade de Lixboa se paga ho quarto e vintena de toda a especiaria e mercadoria que vê da Índia .s. tira se primeiro ho quarto e depois a vintena pa el rei nosso senhor [Fernandes, 1555, f. 38 v].

A regra assenta num princípio concreto ligado à existência de um imposto cobrado na Casa da Índia. Baseando-se nesta realidade fiscal, Gaspar Nicolas, Ruy Mendes e Bento Fernandes abordaram o assunto através de um conjunto de problemas que traduzem vários cenários, desde a simples aplicação do modelo para o cálculo do imposto, até aos casos em que se confirmam quebras nas mercadorias transportadas durante as longas viagens marítimas, com consequente prejuízo para os mercadores. Neste capítulo descreveremos e analisaremos os enunciados que nos são propostos.

O quarto e vintena é um imposto que tem por base a cobrança de um quarto mais a vintena dos restantes três quartos, ou seja,  $\frac{1}{4} + \frac{1}{20} \times \frac{3}{4} = \frac{23}{80}$  da quantidade inicial. Podemos questionar sobre as motivações dum processo de cálculo tão complexo, dado que,

simplesmente a cobrança de um quarto do valor simplificaria o procedimento. A vintena de uma quantidade era um cálculo usual na determinação de certos impostos ou mesmo na troca de moeda <sup>122</sup>. Poderemos então supor que o quarto e o valor suplementar da vintena correspondessem a duas cobranças de imposto sucessivas. De qualquer modo, estamos de acordo com Marques de Almeida [Almeida, 1994, v. I, p. 255] ao afirmar que os tratados de aritméticos portugueses propõem modelos (algoritmos) aritméticos concretos aplicados a situações concretas e objetivas das realidades mercantil.

A nossa abordagem à regra enunciada basear-se-á na descrição e análise dos problemas sobre o tema quarto e vintena propostos pelos três aritméticos.

#### 4.1.1. A regra de quarto e vintena por Ruy Mendes

Começemos por analisar o princípio abstrato apresentado por Ruy Mendes na introdução [Mendes, 1540, f. 80 v]: «Tendo uma quantia, saber  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{3}{4}$  da mesma, a vintena quantos será? E tirados dela quanto ficará?» O primeiro exemplo proposto pelo autor é uma simples aplicação do princípio descrito: «Do quarto de .155. cruzadose a vintena dos seus tres quartos quanto sera» [Mendes, 1540, fol. 80 v]. O autor vai então explicar o princípio a utilizar:

Aveis de buscar um numero que tenha quarto e que seus tres quartos tenha vintena ou vintavo que he ho mesmo e ver quantos serão: o qual numero achareis pola regra geral atras no fim dos quebrados declarada que sera multiplicando os nomeadores destes dous quebrados que sam .4. e .20. hũ por outro e fará .80. e este seraa do qual ho quarto sam .20. e a vintena de seus tres quartos sam .60. he .3. jũtos aos .20. fazẽ .23. assi que o quarto de .80. e a vintena dos seus tres quartos sam .23. agora formareys a regra de tres sem tẽpo somente [Mendes, 1540, f. 80 v].

Vamos reproduzir a resolução do problema descrita por Ruy Mendes. Consideramos as frações  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{20}$ . Multiplicamos 4 por 20 e vem 80. Em seguida efetuamos os produtos seguintes  $\frac{1}{4} \times 80 = 20$  e  $\frac{3}{4} \times 80 = 60$ . A vintena dos seus  $\frac{3}{4}$  (de 80) é 3 e  $20 + 3 = 23$ ,

---

<sup>122</sup> Na feitoria da Flandres a moeda era a libra que se subdividia em 20 dinheiros. Esta divisão é mencionada no tratado de Ruy Mendes na regra da conta de Flandres [Mendes, 1540, f. 83].

que é  $\frac{1}{4}$  de 80 e a vintena dos seus  $\frac{3}{4}$  (de 80). Relativamente à quantia em jogo, 155 cruzados, é aplicada a regra de três segundo o esquema 80---23---155 para encontrar a resposta: 44 cruzados 2 tostões e  $\frac{1}{25}$  reais. A segunda parte do problema diz respeito à determinação da quantidade que fica após a aplicação de quarto e vintena segundo o algoritmo que apresentamos e tendo em conta as equivalências monetárias.

	c.	t.	v.	rs
d.	155	e 0	e 0	e 0
t.	44	e 2	e 1	e 5
f.	110	e 1	e 3	e 15

Figura 34: Esquema do autor [Mendes, 1540, fol. 80 v]

É importante conhecer o valor do imposto a pagar, através do modelo 80---23--- $x$  e também o que resta para benefício do mercador que poderá ser determinado se usarmos a regras com o que resta, ou seja, 80---57--- $x$ .

O segundo problema é relativo ao comércio da pimenta, um tema que não é de estranhar tendo em conta a comercialização das especiarias provenientes da Índia.

Na qual pera decraraçã ponho outra em peso e digo assi: o quarto de .146. quintaes de pimêta e a vintena dos seus tres quartos quantos será: e tirados deles mesmos quãtos ficará [Mendes, 1540, f. 81 f].

Mendes vai aplicar o algoritmo anteriormente estabelecido para nos dar uma resolução muito detalhada:

Digo que ho sabereis como dito he e dizêdo cõ o mesmo tema assi: se o quarto de .80. quintaes e a vintena dos seus tres quartos sam .23. quintaes o quarto dos ditos .146. e a vintena de seus tres quartos quantos será e obrado pola regra e trazêdo a repartiçã aperfeiçã acahareis que sam .41. quintaes e .3. arrobas e .28. arratês e .11. onças a rezã



de quatorze é cada arratal porque não têm mais ho arratal da Casa da Índia e hũa oytava e .43. grãos a rezã de .72. em cada oytava e .1/5. de avo de grão. Agora pa saberdes tirãdose dos mesmos .146. quintaes quãtos ficarã tiralos eis pola sobredita maneira e achareis que ficarã .104. quintaes e nenhũa arrova e .3. aratês e .2. onças e .6. oytavas e .28. grãos e .4/5. avos de grão e a prova he a sobredita: e assi respõdereis a outras quaisquer semelhãtes sendo a tal cõtia de hũa so calidade quer seja de moeda como foi a da partícula primeira quer de peso como foy esta quer de medida quer doutra qualquer cousa: e se nom quiserdes trazer as repartições a perfeiçam deixalas eis na primeira ou em qual quiserdes [Mendes, 1540, f. 81 f].

O autor estabelece um modelo (um algoritmo) fácil de aplicar a uma grande variedade de problemas, como o que apresentamos e que consta na *Pratica d'Arismetica*. Este problema relata uma situação bem real que, ao mesmo tempo, está na origem à «regra de tirar a quebra e quarto e vintena»:

Hũa nao partio da India com .500. quintaes de pimenta: e chegando a Portugal achouse nella de quebra a razam de .6. por cento: preguntase primeiramente com quantos quintaes chegou a Portugal e esto sabido preguntase mais o quarto deles e a vintena dos seus tres quartos quantos seram: e tirados deles mesmos quãtos ficarã [Mendes, 1540, f. 82 f].

O enunciado aborda um assunto que diz respeito à perda de uma parte da carga de pimenta na viagem entre a Índia e Portugal, o que era um acontecimento previsível e habitual na época das viagens marítimas, tal como já referimos. Os produtos transportados poderiam sofrer danos ou uma parte desaparecer por atos de pirataria, daí estarem previstas situações de quebra. Segundo Marques de Almeida [Almeida, 1994, v. I, pp. 255, 256], os direitos de quarto e vintena cobrados na Casa da Índia eram cobrados antes de ser deduzida a quebra que as mercadorias sofriam no decurso das viagens e os mercadores queixavam-se contra esta medida. Os livros de aritmética relatam casos de perda da mercadoria. Na *Pratica*, Ruy Mendes, ao descrever a «regra de tirar a quebra e quarto e vintena» [Mendes, 1540, f. 82 f] informa que a mercadoria transportada pode sofrer uma quebra de 6%, 8%, 9% ou até 12%. Se pensarmos que o imposto da Casa da Índia correspondia a uma taxa de 28,75%, uma

perda entre 6% e 12% acarretava grandes prejuízos para os mercadores. Não temos informações que nos permitam ter certezas se os mercadores teriam obtido uma resposta positiva por parte da Casa da Índia às suas queixas, contudo, a criação da regra de tirar a quebra e quarto e vintena parece mostrar-nos alguma sensibilidade sobre o assunto e uma resposta dos nossos aritméticos ao problema. A importância de proteger os mercadores e os seus bens, levou Pedro de Santarém (também conhecido como Pedro Santerna) a escrever o primeiro tratado sobre seguros marítimos em 1552.

#### 4.1.2. A regra de quarto e vintena segundo Gaspar Nicolas

Gaspar Nicolas começa por enunciar o princípio da regra:

Se quiseses tirar quarto e vyntena todo em hũa regra faras por esta maneyra dize quarto faz mēçam de .4. e vyntena faz mēçam de .20. ora multiprica huũ per outro .s. .4. vezes .20. e faras .80. ora dize o quarto de .80. .sam .20. tiraos de .80. e ficam .60. ora dize a vintena de .60. sam .3. tiraos de .60. e ficam .57. e pera esta regra podes fazer todas as outras [Nicolas, 1963, f. 15 v].

O princípio enunciado por Nicolas refere o que fica para o mercador (57). Mendes refere o que deve ser pago (23). Vejamos um problema que Nicolas resolve com muito detalhe:

Pois ja sabes que de .80. pagando quarto e vintena ficam .57. faze de .37. quintaes pagando quarto e vintena quanto te fica neto e pera o saberes já sabes a regra de que de .80. ficam netos .57. ora faze per regra de tres que ficaram de .37. e se o saberes quiseses multiprica .57. por .37. e faras .2109. estes parte por .80. e vem .26. quintaes e ficam .29. nesta repartição este multiprica por quatro arrobas que tẽ huũ quintall e faras .116. estes parte por .80. e vem huũa arroba e ficam .36. por partir nesta partiçã multiprica estes .36. por .32. aratẽs que tem huũa arroba e faras .1152. estes reparte por .80. que sempre he teu partidor e vẽ em partiçã .14. aratẽs e ficã .32. por partyr multypricaos por .14. onças que tem hũ aratel da Casa da India e faras .448. parteos por .80. e vẽ .5. onças e ficã .48. por partir multipricaos por .8. oytavas que tem hũa onça e fazẽ .384. parteos por .80. e vẽ .4. oytavas e fica .64. por partir e estes multipricaos por .72. grãos que tem hũa oitava e faras .4608. parteos por .80. e vẽ .57. grãos e fica .48. por patir que trazidos a menos demenuiçã sam  $\frac{3}{5}$ . de grãos e assi teẽs sabido que pagãdo ho quarto e

As «contas feitas» figuram na margem direita do fólio 16 do tratado e dizem respeito a alguns dos cálculos apresentados retoricamente.

					48
					8
					384
					48
		37	64	14	88
		57	72	32	24
26	48	259	128	28	40
4	8	185	448	42	3
116	384	2109	4608	448	5

Gaspar Nicolas propõe-nos a regra de três e podemos traduzir as suas ideias aplicando o usual esquema 80---57---37 para termos a resposta:  $\frac{57 \times 37}{80} = 26 \frac{29}{80}$ . O resultado é dado em quintais e os 29 do resto são convertidos em arrobas, considerando que cada quintal tem 4 arrobas

As 116 arrobas são agora divididas por 80

$$116 \div 80 = 1\frac{36}{80}$$

$$1152 \div 80 = 14\frac{32}{80}$$

Os 32 arráteis vão ser convertidos em onças e, a este propósito, Gaspar Nicolas refere a Casa da Índia, nomeadamente, vai utilizar a equivalência em uso naquela instituição 1 arrátel = 14 onças, tendo-se um total de 448 onças que, por sua vez vão ser divididas por 80, tendo-se

$$448 \div 80 = 5 \frac{48}{80}$$

As 48 onças são convertidas em oitavas segundo a equivalência 1 onça = 8 oitavas . Temos 384 oitavas que vão ser divididas por 80.

$$384 \div 80 = 4 \frac{64}{80}$$

As 64 oitavas são convertidas em grãos pela equivalência 1 oitava = 72 grãos. O produto resultante, 4608 é ainda dividido por 80, tendo-se

$$4608 \div 80 = 57 \frac{48}{80}$$

Aos 57 grãos junta-se a fração  $\frac{48}{80}$  que vai ser simplificada na fração irredutível  $\frac{3}{5}$  pela regra de «menos diminuição<sup>123</sup>» referida pelo autor. Juntando tudo, fica o mercador com 26 quintais 1 arroba 14 arráteis 5 onças 4 oitavas e  $57 \frac{3}{5}$  grãos. Para el-Rei o que resulta da subtração de 37 pelo valor acima, o que dá 10 quintais 2 arrobas 17 arráteis 8 onças 3 oitavas e  $14 \frac{2}{5}$  grãos. No final, o autor reforça a ideia que estas são as boas contas a fazer sobretudo para o «aljofra<sup>124</sup>», o que nos leva a pensar em variantes da regra conforme os produtos em causa. Sobretudo é de sublinhar a minúcia das reduções efetuadas, o que já se verificou noutras regras comerciais anteriores. Na realidade o mercador deve recuperar os seus produtos nas unidades correntes e conhecer os cálculos necessários que o livrem de situações enganosas. O bom conhecimento demonstrado por Nicolas na aplicação dos direitos de quarto e vintena na Casa da Índia, pode levar-nos a supor que se dirigia a um público trabalhador nessa instituição mas também ao mercador com muito interesse em saber o que iria arrecadar.

---

<sup>123</sup> Esta regra consiste em tornar uma fração irredutível.

<sup>124</sup> Designação para a pérola miúda.

O último problema não menciona qualquer produto. Foca-se apenas sobre a aplicação dos direitos de quarto e vintena sobre 37 quintais de uma dada mercadoria. Gaspar Nicolas vai insistir sobre este tipo de enunciados que visam a prática do algoritmo, como podemos observar no seguinte:

Ainda quero tirar quarto e vintena de .73. quintaes e quero saber quanta me fica fora e pera o saberdes fazer diras que de .80. me ficam .57. quantos me ficarã de .73. e pera o saberdes multiplica .73. por .57. e faras .4161. repartiras estes por .80. e vem .52. quintaes e fica huũ por partir nesta conta: multiplica este huũ por .4. e sam .4. e bem ves que se nom podem partir por .80. e montepricaos por .32. e faras .128. parteos por .80. e vem huũ aratel e ficam .48. por partir estes multiplica por quantas onças tem huũ aratel na Casa da Mina que sam .14. e faras .672.. Estes parte por .80. e vem .8. onças e ficam .32. por partir estes multiplica por .8. oytavas que tem huũa onça e faras .256. parteos por .80. e vem .3. e ficam por partir .16. estes multiplica por .72. grãos que tem huũa oytava e faras .1152. parteos por .80. e vem .14. grãos e ficam  $\frac{32}{80}$  avos que trazidos a menos demenuiçam sam  $\frac{2}{5}$  de grão e assi respõderas que de .73. quintaes pagando quarto e vintena sem quebra te fica neto .52. quintaes e huũ aratel e .8. onças e  $\frac{3}{8}$  e .14. grãos e  $\frac{2}{5}$  de grão e assi esta çerta a conta [Nicolas, 1963, f. 16 f].

Na margem direita do fólio 16 v aparecem algumas das operações descritas pelo autor, bem como os resultados das operações intermédias. Também a relação entre 80: 57:73 para a aplicação da regra de três. Os cálculos intermédios envolvem as multiplicações e as divisões descritas. Não é referido qualquer bem ou produto mas antes opera-se sobre as unidades de «peso». É ainda referida a Casa da Mina sobre a equivalência entre o arrátel e a onça.

O terceiro caso exibido diz respeito a tirar quarto e vintena de uma quantidade expressa em quintais e arrobas o que vem confirmar a persistência do autor neste tipo de situações.

Ainda quero tirar quarto e vintena de .29. quintaes e .3. arobas e pera o saberes fazer faras assi multiplica sempre por .57. assi os quintaes como as arobas e depois que forem multiplicados parte logo os quintaes por .80. e ho que te ficar multiplica por .4. e esta multiplicaçã ajuntaras cõ há multiplicaçam das arrobas e partiras por .80. e o que te vier serem arobas ora pois multiplica .57. por .29. e faras .1653. estes parte por .80. e vem .20. quintaes e ficam .57. por partir multiplicaos por .4. e faras .212. e por que sam .3. arrobas multiplica .3. por .57. e faras .171. ajuntaos com .212. e faras .383. parteos por .80. vem

.4. arobas que he huũ quintal e .20. que tu tynhas sam .21. ora multiprica .63. que ficaram por partir nesta partiçã onde te veio as .4. arobas por .32. e faras .2016. parteos por .80. e vem .25. arateẽs e ficam .16. por partyr multipricaos por .14. onças que tem huũ aratell da Casa da Índia e faras .224. parteos por .80. e virteham .2. onças e ficam .64. por partir estes multipricaos por .8. oytavas que tem huũa onça e faras .512. parteos por .80. e vem .6. oytavas e ficam por partyr .32. multipricaos por .72. grãos que tem huũa oytava e faras .2304. parteos por .80. e vem .28. groãos e ficam .64. pot partyr que ja nõ he grão mas he parte de grão .s.  $\frac{4}{5}$  e assi responderas que pagando quarto e vintena de .29. quintaes e .3. arobas ficam neto .21. quintaes e .25. arateẽs e .2. onças e .6. oytavas e .28. grãos e  $\frac{4}{5}$  de gram e assy tes a conta feita como aqui esta [Nicolas, 1963, f. 17 f].

Este é mais um problema onde se aplica a regra de três e, o autor parte para uma série de conversões exaustivas das unidades de «peso». Em jeito de anotações, Gaspar Nicolas exhibe nas margens do livro alguns números e cálculos intermédios, como multiplicações e divisões indicadas no texto.

A próxima situação reporta-nos um caso de quarto e vintena com quebra de mercadoria, onde encontrámos uma informação sobre percentagem das quebras que já vimos em Mendes. Neste enunciado há uma alusão ao produto comercializado: a pimenta.

Aynda quero tirar quarto e vintena com sua quebra a segundo respondem as naos aqui huũas quebram .6. por .100. e assi ate .12. por .100. que he a mais alta quebra assi pera saberes aquella quebra de qualquer quantidade de pimenta que he necessário que saybas açerteza de quãtos quebra por .100. por tantos as de multipricar a quantidade da pimenta e depois que for multiplicada repartiras por .100. e aquilo que te vier em repartiçam tanto he ho que quebra toda a pimenta em arateẽs e depois que for feita em arateẽs multiplicas por quanto quebrar por .100. assi como acima he dito e depois que lhe teẽs fora a quebra tiraras ho quarto e vintena ainda que ho nom tyram desta maneira na Casa da Índia ora pois tira o dito quarto e vintena da maneira que te emsiney nos capítulos que falã de tirar quarto e vintena singelo .s. sem quebra. Enxemplo digo que quero tirar quarto e vintena de .31. quintaes e .3. arrobas a rezam de .12. por .100. e pera ho fazeres

faras de .31. quintaes todo arrateës .s. multiplicaos por .128. arrateës que tem huũ quintal e sam em arrateës .3968. ajuntalhe .3. arrobas em arrateës e sam em arrateës .96. ajuntaos com .3968. e faras .4064. arrateës estes multiplica por .12. e faras .48768. estes parte por .100. e vẽ .487. e por que ficam .68. por partir que pasa de meo arratel diras que vem .488. arrateës de quebra tira os de .4064. arrateës e ficam .3576. e destes tiraras quarto e vintena .s. multiplicalas por .23. r faras .82248. estes parte por .80. e vem em partiçam .1028. tira os de .3576. e ficam .2548. arrateës e ysto he ho que fica aparte e ão fallo aqui nos .5. de mea sysa. Ora pois faze estes arrateës quintaes e arrobas .s. parte .2548. por .32. e vem .79. arrobas e .20. arrateës que sam .19. quintaes e .3. arrobas e .20. arrateës e assi esta çerta [Nicolas, 1963, f. 17 v].

Vamos transcrever os cálculos apresentados.

128			
31			
128			
384		4064	
3968		488	
96		3576	
4064		3576	
12		23	
8128	32	10728	3576
4064	3	7152	1028
487   68	96	82248	2578

Figura 33: Cálculos auxiliares dados por Gaspar Nicolas

A resolução começa por nos dar a regra geral para a aplicação dos direitos de quarto e vintena com quebra na mercadoria, o exemplo refere a pimenta, transportada pelas naus que chegam à Casa da Índia. Temos a informação de que a quebra na mercadoria pode situar-se entre 6% e 12%. Utilizando a notação atual seja  $y \in [6,12]$ , o autor propõe-nos o produto da quantidade  $x$  de mercadoria por  $y$  e, em seguida a divisão por 100. Assim  $\frac{xy}{100}$  será o valor da quebra da mercadoria. A quantidade sujeita a quarto e vintena será  $x - \frac{xy}{100}$ . Se bem que Gaspar Nicolas diz que não é exatamente este o procedimento na Casa da Índia, sem informar

o leitor do procedimento naquela instituição, no caso de quebra<sup>125</sup>. De seguida remete-nos para um exemplo. Trata-se de tirar quarto e vintena de 31 quintais e 3 arrobas, não sabemos de que produto, que sofreu uma quebra de 12%. A primeira etapa leva-nos a uma série de conversões a arráteis, tendo-se 4064 arráteis do produto em causa. De seguida, o autor aplica a regra enunciada

$$4064 \times 12 = 48768$$

$$48768 \div 100 = 487 \frac{68}{100}$$

Gaspar Nicolas refere que o quociente é 487, ficando 68 por partir e, vai arredondar às unidades o resultado obtido, justificando que passa o meio arrátel a fração  $\frac{68}{100}$ . Tem-se como quociente 488.

Quanto à quantidade de mercadoria sujeita a quarto e vintena

$$4064 - 488 = 3576$$

Aos 3576 arráteis aplica-se quarto e vintena, tendo-se

$$3576 \times 23 = 82248$$

$$82248 \div 80 = 1028 \frac{1}{10}^{126}$$

Finalmente o que fica para o mercador,  $3576 - 1028 = 2548$ , sem ter em conta os 5 de sisa, como refere o autor.

Nos problemas anteriores a este, Gaspar Nicolas optou por indicar a proporção 80: 57:  $x$ , sendo  $x$  a quantidade de mercadoria sujeita a quarto e vintena. No presente caso a mesma proporção é substituída por 80: 23:  $x$ , o que dá logo ao mercador o valor que vai perder, em conjunto com a quebra que já sofreu a sua mercadoria. Os próximos problemas vão incidir sobre a prática das duas proporções estabelecidas. Para o caso 80: 23:  $x$  temos

---

<sup>125</sup> Podemos pensar que na data de edição da sua obra, os mercadores deparavam-se com o problema das perdas sem que a Casa da Índia fosse sensível a este prejuízo, não sabemos o que aconteceu entre 1519 e 1540, ano da publicação do tratado de Mendes dado que o autor nada nos diz a este respeito.

<sup>126</sup> Gaspar Nicolas despreza o resto da divisão apresentando somente o valor inteiro 1028.



Aynda quero tirar quarto e vintena de .48. quintaes e huia arroba e .19. arratees da maneira que acima he escripto ora faze todo arratees .s. multiplica .48. que sam os quintaes por .128. e faras .6144. arratees ajuntalhe .32. arratees que tem huia arroba e sam .6176. arratees ajuntalhe .19. e faras .6195. estes multiplica por .12. e faras .74340. reparteos por .100. e vem .743. teraos de .6195. e ficam .5452. estes multiplica por .23. e faras .125396. estes reparte por .80. e virteam em repartiçam .1567. tirados de .3885. e ficarteam .3691. parteos por .128. arratees que tem huil quintal e virteam em partiça .28. quintaes e ficam nesta conta por partir .107. estes parteos por .32. arratees que tem hua aroba e virteam em partiçam .3. arobas e ficam por partir nesta conta .11. arratees e assy que tees feyta a conta onde diras que vem a parte .28. quintaes e .3. arobas e .11. arratees e oulha da maneyra que a fegurado [Nicolas, 1963, f. 18].

É notória a insistência numa prática que garante um bom domínio das unidades de massa e da proporção estabelecida. Para o outro modelo estabelecido,  $80:57:x$ , a metodologia repete-se para  $x = 13$ :

Aynda quero tirar quarto e vintena de .13. quintaes e huia arroba e huil aratell pela regra de .57. s. que multiplicam por .57. digo que multipriques .57. vezes .13. e faras .741. estes parte por .80. e vem .9. quintaes e porque ficaram .21. por partir multiplica por .4. arobas que tem huil quintal e faras .84. e porque dissemos huia arroba diras huia vez .57. sam .57. ajuntaras com .84. e faras .141. parteos por .80. e vem huia aroba e ficam por partir .61. multiplica por .32. arratees que tem huia arroba e faras .1952. e porque dissemos huil aratell diras huia vez .57. sam .57. ajuntaos com .1952. e faras .2009. estes reparte por .80. e vê .25. arates e fica .9. por partir bem os podes fazer onças: multiplica por .14. onças que tem huil aratel dos da Casa da Índia e partiras por .80. q aquyllo que vier em partiçam seram onças mas que ja diguo que neste quarto e vintena nam fallo de ratees pera baxo porem ao diante se dira de onças e oytavas e graos. assy que quem paga quarto e vintena de .13. quintaes e huia arroba e huil aratell fica neto pera aparte .9. quintaes e hua arroba e .25. arratees e huia onça e oulha da maneira que aquy esta feyto e vem a el rei quarto e vintena .3. quintaes e .3. arobas e .7. arratees e .13. onças e oulha como aqui esta [Nicolas, 1963, f. 18 v].

No próximo enunciado Gaspar Nicolas diz que há um modo mais abreviado de tirar quarto e vintena: «Aynda te quero mostrar outro modo de quarto e vintena mais breve que nenhuil dos que sam atras escriptos mas nom he tam certo como os outros modos

passados...» [Nicolas, 1963, f. 18 v]. No entanto é considerado menos certo do que os outros: «mas nom he tam certo como os outros modos passados...» [Nicolas, 1963, f. 18 v]. Vejamos o caso a que se refere:

...por enxemplo que queres tirar quarto e vintena de .10 quintaes com sua quebra e pera ho fazeres faras .10. quintaes todo em arrateões .s. que multiplicas por .128. e faras .1280. arrateões estes multiplica por .57. e faras .72960. estes parte por .80. e vem em partiçam .912. estes multiplica por .83. e faras .75696. estes parte por cento e vem em partiçam .756. e ficam .96. por partir que he casy huũ arratel e por tanto diras que sam .757. arrateões fazeos quintaes .s. parte por .128. e ho que vier sam quintaes .s. sam .5. quintaes e .3. arobas e .20. arrateões e assy que diras que pagando quarto e vintena de .10. quintaes a rezam de .12. por .100. e .5. por .100. de outro cabo que fica neto aparte .5. quintaes e .3. arobas e .20. arrateões e se tirares a regra pella maneira que atras he escripta acharas .6. arrateões de diferença. E oulha da maneyra que aquy esta feyto [Nicolas, 1963, f. 18 v].

A resposta é confusa, no entanto a primeira parte consiste em aplicar a 10 quintais, depois de os reduzir a 1280 arrateis, o modelo  $80:57:x$ . Se seguirmos a resolução e deixando de parte as reduções efetuadas ao que resta, é aplicado 12% e 5%. A primeira percentagem corresponde à quebra e a segunda a outro imposto que não o quarto e vintena<sup>127</sup>. Este enunciado assemelha-se a um «apontamento» do autor uma vez que alguns dados são omissos.

Gaspar Nicolas insiste em simplificar a regra de quarto e vintena com quebra, contudo a sua atuação nem sempre é esclarecedora. Esta característica está patente no próximo enunciado em que deseja aplicar uma única regra, ou seja, uma regra que inclua já a quebra e possivelmente outro imposto:

Se quiseres tirar quarto e vintena todo em hũa regra e que fique tanto a parte neto como no primeiro modo faras per esta maneira. Multiplica sempre os quintaes e as arrobas de que queres tirar quarto e vintena por .4767. e repartiras por .8000. e o que te vier em

---

<sup>127</sup> Deduz-se que 5% corresponda a meia sisa, tendo em conta um próximo enunciado onde este assunto é referido.

partičam tanto fica neto aparte. Enxemplo digo que quero tirar quarto e vintena dos ditos .10. quintaes que atras falamos e quero ho tirar todo em huũa regra digo que multipliques .4767. por .10. e faras .47670. estes parte por .8000. e vem .5. quintaes e ficam por partir .7670. multiplicaos por .4. arrobas que tem huũ quintal e faras .30680. estes parte por .8000. e vem em partiçam .26. arrateẽs assi que diras que pagando quarto e vintena de .10. quintaes com sua quebra que fica neto há parte .5. quintaes e .3. arrobas e .26. arrateẽs que são mais .6. arrateẽs que no outro quarto e vintena passado e oulha como aqui esta [Nicolas, 1963, f. 19 f].

No modelo 80: 57:  $x$  temos o que cabe ao mercador, ou seja, 71,25%, no caso relatado temos um modelo 800: 4767:  $x$ , cabe ao mercador cerca de 59,58% o que é uma diferença bastante considerável. Deduz-se daqui uma perda bastante importante ou um imposto que não o inicialmente descrito de quarto e vintena.

O próximo enunciado é mais esclarecedor dado que é referida a quebra e o imposto de sisa:

Se tu quiseres tirar quarto e vintena de .13. quintaes e huũa arroba e .7. arrateẽs e o quiseres tirar sem arrar arratel nem meo cõvem que os faças todo onças e pera ho fazeres faze todo arrateẽs da maneira que te ensyney ha fazelos e acharas que sam .1703. arrateẽs estes as de fazer onças .s. multiplica por .14. onças que tem huũ aratel dos da Casa da Yindia e faras .23842. onças. Ora destas has agora de tirar todos os direitos .s. ho quarto e vintena e .12. por çento de quebra e .5. por .100. de mea sysa. Ora tira logo a quebra .s. multiplica .23842. por .12. que he ho que quebra por .100. e faras na multiplicaçam . 286104. Estes parte por .100. e vem em partyçam .2861. tyraos de .23842. e ficam .20981. estes multiplica por .57. e faras .1195917. estes parte por .80. e vem em partiçã .14948. estes multiplica por .5. e faras .74740. parteos por .100. e vẽ .747. tiraos de .14948. e fica .14201. estas sam as onças que ficam netas aparte se as quiseres fazer quintaes reparte estes .14201. por .14. onças que tem huũ aratell e vem .1014. arrateẽs e .5. onças estes faze quintaes .s. parteos por .128. arratẽs que tem huũ quintall e vẽ .7. quintaes e ficam por partir .118. arrateẽs fazeos arrobas .s. reparteos por .32. arrateẽs que tem huũa arroba e sam .3. arrobas e .22. arrateẽs. E assy teẽs feyta a conta e responderas que quem paga quarto e vintena de .13. quintaes e huũa arroba e .7. arrateẽs e ysto com todas suas quebras que fica neto aparte .7. quintaes e .3. arrobas e .22. arrateẽs e .5. onças e assy teẽs feyto sem arrar arratell nem meyo e oulha da maneyra que aqui esta afegurado [Nicolas, 1963, f. 19].

A metodologia de resolução assenta nos passos seguintes:

- Determinar a quebra de 12%;
- Aplicar o modelo  $80:57:x$  para encontrar o que vem ao mercador depois de aplicar os direitos de quarto e vintena;
- Aplicar os 5% de sisa ao que resta ao mercador.

O que cabe ao mercador resulta de aplicar estes três passos.

#### 4.1.3. A regra de quarto e vintena segundo Bento Fernandes

Para Bento Fernandes a regra de quarto e vintena assenta num princípio simples: «...tira se primeiro ho quarto e depois a vintena» [Fernandes, 1555, f.38 v]. O princípio da regra de quarto e vintena é o mesmo que consta nos dois autores anteriores: «E pera saber tirar este quarto e vintena per regra geral de toda soma ou de qualquer numero por grãde que seja aveis de buscar hũ numero em que aia  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{20}$ » [Fernandes, 1555, f.38 v]. O número escolhido é o 80 que resulta do produto de 4 por 20. Note-se que este autor afirma que o que vai estabelecer aplica-se a qualquer número por maior que seja o que manifesta uma vontade de aumentar o espectro de aplicação da regra estabelecida. São ainda apresentados dois modelos já conhecidos:  $80:57:x$  para o que cabe ao mercador e  $80:23:x$  para o imposto.

No *Tratado da Arte d'Arismetica* o capítulo dedicado à regra de quarto e vintena é composto por problemas que visam a prática. Vejamos então as situações que são exibidas por este autor.

E digo que eu quero pagar quarto e vintena de .64. quĩtaes de pimẽta e quero saber quãto eyde pagar a sua alteza e ho que me resta pera o que como vos já declarey acima tẽdes sabido que de .80. quintaes pagãdo quarto e vintena vos restã .57. per regra geral. E por tãto ireis a regra de tres chaã dizẽdo assi de .80. quintaes pagãdo quarto e vintena me restã .57. de .64. quintaes pagãdo estes dereitos de quarto e vintena que me restara agora multiplicay .57. por .64. fazẽ .3648. partios por .80. vẽ .45. quintaes e  $\frac{3}{5}$  de quintal. E assi direis que vos restã .45. quintaes e  $\frac{3}{5}$  de quintal e ho mais pagaste a sua alteza que sã .18.

quintaes e  $\frac{2}{5}$ . E se quereis fazer a prova pera ver se he certa assomay .45. quintaes e  $\frac{3}{5}$  que vos restam he .18. quintaes e  $\frac{2}{5}$  que pagastes fazem os primeiros .64. quintaes e asi he certa e asi fareis outras muytas[Fernandes, 1555, f.38 v].

Trata-se de um problema sobre o comércio da pimenta que visa a aplicação direta do modelo 80:57:  $x$  através da regra de três, como refere o autor. O próximo enunciado é ainda sobre o comércio da pimenta e aplica o mesmo princípio embora com o quintal e os seus submúltiplos. Está ainda em causa uma situação onde a quebra na mercadoria não é mencionada, tal como no caso anterior. A extensão aplicada à sua resolução justifica-se pelas reduções a efetuar:

Ainda quero pagar quarto e vintena de .123. quintaes e .3. arrobas e .15. arrateis de pimêta e quero saber o que me fica e ho que ey de pagar a sua alteza e se ho quereis saber fazey como vos mostrey na regra passada e porque nesta pregûta haa tres deferêças de pesos .s. quintaes arrobas e arrateis: he necessario antes de proseguir a regra fazerdes tudo no derradeiro peso e mais pequeno .s. reduzilo todo arráteis. Digo que fareis .123. quintaes tudo em arrateis .s. fazey os arrobas e sã .492. arrobas ajuntai lhe mais as .3. arrobas fazê .495. estas multiplicay por .32. arrateis a arroba fazê .15840. arrateis ajûta lhe os .15. arrateis e fazem assi .15855. arrateis. E pois os tendes todos reduzidos a arrateis que he o menor peso que nesta conta tratais: agora yreis há regra de tres chaã dizendo assi se de .80. arrateis pagãdo quarto e vintena me ficã .57. de .15855. arrateis quãtos me ficarã fazey a regra multiplicãdo .15855. por .57. fazem .903735. estes party por .80. vê .11296. e  $\frac{11}{16}$  aos d'arratel e se os quereis fazer arrobas party os por .32. arrateis que tẽ a arroba e vê .353. arrobas party as por .4. arrobas que tẽ ho quintal vê .88. quintaes e hũa arroba e  $\frac{11}{16}$  aos d'arratel e pera saberdes o que há d'aver Sua Alteza tiray de .123. quintaes e .3. arrobas e .15. arrateis .88. quintaes e hũa arroba e  $\frac{11}{16}$  aos d'arratel e restã .35. quintais e .2. arrobas e .14. arrateis e  $\frac{5}{16}$  aos d'arratel\asi que direis que pagareis a Sua Alteza .35. quintais e .2. arrobas e .14. arrateis e  $\frac{5}{16}$  aos d'arratel de pimêta de quarto e vintena dos .123. quintaes e .3. arrobas e .15. arrateis ficar vos há netos pera vos .88. quintaes e hũa arroba e  $\frac{11}{16}$  aos d'arratel como podereis provar e deste modo fareis as que quiserdes e se quereis saber  $\frac{11}{16}$  aos d'arratel que parte sera d'õça

multiplicai .11. por 14. onças que tẽ ho arrátel da Casa da Índia fazẽ .154. estes party por .16. que he ho partidor vẽ .9. onças e  $\frac{1}{16}$  d'õça. E se quereis saber  $\frac{1}{16}$  d'õça que parte he d'oytava multiplicai .1. por .80. oytavas que tẽ a onça fazẽ .8. partios por .16. que he o partidor ou nomeaçã do quebrado que tudo he hũa cousa e nã se pode partir pera vir numero inteiro e vẽ  $\frac{8}{16}$  aos que he  $\frac{1}{2}$  oytava e asi direis que  $\frac{11}{16}$  aos d'arratel da cõta atras sã .9. onças e  $\frac{1}{2}$  oytava como podeis provar e asi fareis as semelhãtes [Fernandes, 1555, f.39 f].

Os enunciados de quebra são tratados e a primeira situação descrita é sobre um carregamento de gengibre na Índia:

Eu carreguey na Índia .26. quintais e .2. arrobas e .12. arrateis e .11. onças e .6. oytavas de gẽgivre\e quero pagar deles ho quarto e vintena na Casa da Índia \ho qual acho que me quebra a .10. por cento\pregũto pagãdo ho que devo a Sua Alteza abatẽdo sua quebra quãto me resta e quãto ey de pagar de quarto e vintena. E se ho quereis saber primeiro aveis de reduzir tudo ao mais pequeno peso que sã oytavas. Ora fazey de .26. quintaes\arrobas a rezã de .4. arrobas ho quintal e fazẽ .104. arrobas ajũtay lhe mais as .2. arrobas fazẽ asi .106. arrobas fazeyas\ arrateis .s. multiplicai as por .32. arrateis que tẽ a arroba e fazẽ .3392. arrateis ajũtailhe mais os .12. arrateis e fazẽ .3404. arrateis e pera os fazer onças multiplicayos por .14. õças que tẽ ho arratel da Casa da Índia como vos ja dise e fazẽ .47656. õças ajũtaylhe mais onze onças fazẽ assi .47667. onças e pera as fazer oytavas multipricayas por .8. oytavas que tẽ a onça fazẽ .381336. oytavas ajũtailhe mais as .6. oytavas primeiras fazẽ asi .381342. oytavas. E pois tẽdes feito tudo ã oytavas\tiray agora os .10. por cẽto da quebra primeiramẽte que sã .38134. oytavas e  $\frac{1}{5}$  d'oytava tiray estes da soma das .381342. restã .343207. oytavas e  $\frac{4}{5}$  d'oytava. E pera tirar destes ho quarto e vintena ireis a regra de tres dizẽdo assi .s. se de .80. pagãdo quarto e vintena me restã .57. de .343207. oytavas e  $\frac{4}{5}$  d'oytava que me restar\fazey a regra .s. multiplicando .57. por .343207. r partindo por .80. e achareis que vos resta .244535. oytavas e  $\frac{223}{400}$  aos d'oytava e se quereis saber o que paga de quarto e vintena tiray de .343207. oytavas e  $\frac{4}{5}$  .244535. oytavas e  $\frac{223}{400}$  aos d'oytava e restã .98672. oytavas e  $\frac{97}{400}$  aos de oytava e tãto pagastes de quarto e vintena e se quereis saber quãto fazẽ estas oytavas asi da quebra como do que pagaste a Sua Alteza como das que vos restã tornay

a repartir ho que multiplicaste e achareis que as .38134. e  $\frac{1}{5}$  da quebra sã .2. quintaes e .2. arrobas e .20 arrateis e .6. onças e .6. oytavas e  $\frac{1}{5}$  de oytava. E assi achareis que as .98672. oytavas e  $\frac{97}{400}$  aos de oytava que pagastes na Casa da Índia do quarto e vintena sã .6. quintaes e .3. arrobas e .17. arrateis e  $\frac{97}{400}$  aos de oytava\ e assi acahreis que as .244535. oytavas e  $\frac{223}{400}$  aos d'oytava que vos restã sã .17. quintaes e .7. arrateis e .4. onças e .7. oytavas e  $\frac{223}{400}$  aos d'oytava e asi he certa como podeis provar. A prova da pregûta acima he de ver se assomado .2. quintaes e .2. arrobas e .20 arrateis e .6. onças e .6. oytavas e  $\frac{1}{5}$  de oytavaque quebrou o gëgivre a rezã de .10. por .100. de quebra e assomado os .6. quintaes e .3. arrobas e .17. arrateis e  $\frac{97}{400}$  aos de oytavaque se pagarã na Casa da Índia de dereitos de quarto e vintena. E assomãdo os .17. quintaes e .7. arrateis e .4. onças e .7. oytavas e  $\frac{223}{400}$  aos d'oytava que vos restã se ssomam tão to como os 26. quintais e .2. arrobas e .12. arrateis e .11. onças e .6. oytavas de gëgivre que arregraste na Índia e se assi for a conta he çerta. Ora assomay todas estas tres adições e como vedes a ssoma he a sobredita justamête e asi he çerta a cõta cõ sua prova [Fernandes, 1555, f. 40 f].

Depois de reduzir tudo a «oitavas» segundo a informação: 1 quital = 4 arrobas, 1 arroba = 32 arráteis, 1 arrátel = 14 onças ( na Casa da Índia) e 1 onça = 8 oitavas, é deduzida a quebra dos 10% e aplicado o modelo  $80:57:x$ , para  $x = 343207\frac{4}{5}$ . São determinados dois valores: a quantidade referente ao imposto e o que resta ao mercador. Todos os resultados obtidos são confirmados pela prova final.

O último enunciado difere do anterior apenas na quebra que corresponde a 6% e no produto escolhido, de novo a pimenta o que nos pode levar a pensar que as especiarias sofriam perdas consideráveis no transporte do Oriente até Lisboa.

Ainda quero tirar quarto e vintena cõ sua quebra de .12. quintaes e .2. arrobas .6. arrateis de pimenta a qual quebrou a .6. por .100. e quero saber o que me resta e o que ey de pagar de dereitos na Casa da Índia pera o que vos he necessario reduzir todos estes pesos ao mais pequeno peso antes que entreis na regra como vos tenho decrarado nas cõtas atras. E porque ho mais pequeno peso sam arrateis fazey de .12. quintais arrateis a rezã

de .128. arrateis que tẽ ho quintal e fazẽ .1536. arrateis ajũtailhe mais as .2. arrobas e .6. arrateis que sã .70. arrateis e fazẽ assi .1606. arráteis e destes aveis de tirar a quebra a rezã de .6. por .100. pera a regra de tres dizẽdo assi se em .100. acho de quebra .6. ẽ .1606. arrateis que avera de quebra fazey a regra de tres chaã e acahareis que quebra .96. arrateis e  $\frac{9}{25}$  aos d'arratel estes tirareis dos .1606. arrateis que he a soma e fica .1509. arrateis e  $\frac{16}{25}$  aos d'arratel. E agora que tẽdes sabido ho que vos fica liquedo fareis a regra dizẽdo assi .s. se de .80. pagãdo quarto e vintena pago .23. de .1509. arrateis e  $\frac{16}{25}$  aos d'arratel que pagarei de dereitos\fazey a regra e achareis que pagareis .434. arrateis e  $\frac{43}{2000}$  aos d'arratel e pera saber o que vos resta tiray estes .434. arrateis e  $\frac{43}{2000}$  da soma dos .1509. arrateis e  $\frac{16}{25}$  e restã .1075. arrateis e  $\frac{1237}{2000}$  d'arratel e se quereis saber quantos quintaes e arrobas sã todos estes arrateis e partes d'arratel tornayos a repartir pelo modo que os multiplicaste a principio .s. partindo por .32. arrateis que tem arroba e depois partyos por .4. arrobas que tẽ quintal e acahreis que sã .3. quintais e hũa arroba e .18. arrateis e  $\frac{43}{2000}$  aos d'arratel\e pera ver o que vos resta que sã .1075. arrateis e  $\frac{1237}{2000}$  d'arratel fazey como vos disse e achareis que sã .8. quintais e hũa arroba. E .19. arrateis e  $\frac{1237}{2000}$  aos d'arratel e a quebra sã .3. arrobas e  $\frac{9}{25}$  aos d'arratel como podeis provar. A prova da rezã escripta he assomar todos estes inteiros e quebrados e se fazẽ a primeira soma dos .12. quintaes e .2. arrobas .6. arráteis\direis que he certa. Ora assomay .3. arrobas he  $\frac{9}{25}$  aos d'arratel da quebra he .434. arrateis e  $\frac{43}{2000}$  aos d'arratel que pagastes de dereitos e assomay .8. quintais e .1. arroba e .19. arráteis e  $\frac{1237}{2000}$  aos d'arratel que vos resta e achareis que somã asi os ditos .12. quintaes e .2. arrobas .6. arráteis que he a primeira soma e assi esta certa a cõta cõ sua prova e por agora nã direi mais da regra de quarto e vintena [Fernandes, 1555, f.40 f].

Observamos uma insistência na manipulação das unidades de massa no sentido de garantir uma utilização eficaz e a certeza de que o mercador não sairá a perder porque deve conhecer todos os procedimentos a seguir.

Como sublinha Marques de Almeida [Almeida, 1994, v. I, p. 255], os tratados de aritmética portugueses quinhentistas apresentam modelos (algoritmos) aritméticos concretos aplicados a situações concretas e objetivas. Trata-se da cobrança de impostos pelas instituições com esse fim, tais como a Casa da Índia, referida nos textos, com a supervisão



da Casa dos Contos, verdadeiro Tribunal de Contas da época. Realcemos o modo como cada autor apresenta os problemas de quarto e vintena. A escolha das questões deixa no ar três objetivos. Com efeito, cada problema é redigido para calcular três valores distintos: Um quarto da mercadoria  $a$ , a vintena dos três quartos do restante  $b$  e finalmente o que o mercador vai guardar depois de liquidados os impostos  $c$ . Podemos testemunhar a presença desta tricotomia  $a, b, c$  nos enunciados dos problemas sobre quarto e vintena. Será um simples efeito do algoritmo proposto baseado no cálculo de resultados intermédios, como  $a$  e  $b$  ou estaremos perante uma subdivisão intencional resultante de uma divisão particular do imposto cobrado? Uma interpretação possível estará ligada a um procedimento pedagógico dos autores no sentido de decompor a resolução de cada problema em três cálculos elementares e portanto, de maior alcance para aprendiz.

## 4.2. Regra da conta de Flandres

Uma regra «local» dos tratados de aritmética de Quinhentos é «regra da conta de Flandres», como já referimos. A feitoria da Flandres, sediada em Antuérpia fazia então a distribuição e o comércio dos «novos» produtos do Oriente, que chegavam a Lisboa pela mão dos portugueses. Acontece que a moeda em uso naquela feitoria era diferente da utilizada em Portugal mas também, como afirma Bento Fernandes, os «pesos» e as «medidas» [Fernandes, 1555, f. 40]. Na feitoria circulava como moeda a «livra», o «soldo» e o «dinheiro». Na praça de Lisboa a moeda era o «real». A equivalência monetária é apresentada nos quadros que se seguem e vem da informação dos autores.

Tabela 7: Moeda na feitoria da Flandres

	<i>Livra</i>	<i>Soldo</i>	<i>Dinheiro</i> <sup>128</sup>	<i>Mita</i> <sup>129</sup>
<i>Livra</i>	1	20	240	5760
<i>Soldo</i>	1/20	1	12	288
<i>Dinheiro</i>	1/240	1/12	1	24
<i>Mita</i>	1/5760	1/288	1/24	1

<sup>128</sup> O «dinheiro» pode também designar-se por «grosso».

<sup>129</sup> A «mita» foi emitida na Flandres a partir de 1418.

Tabela 8. Equivalência entre a moeda na Flandres e em Portugal

Moeda na feitoria Flandres	Moeda portuguesa ( <i>Real</i> <sup>130</sup> )
<i>Livra</i>	1200
<i>Soldo</i>	60
<i>Dinheiro</i>	5
<i>Mita</i>	1 e 1/4 <i>cetil</i> <sup>131</sup>

Para os três aritméticos as equivalências monetárias antecedem os enunciados abordados. O objetivo da regra é dar os instrumentos necessários aos mercadores para realizarem com segurança os negócios na Flandres. Podemos considerar que é Bento Fernandes o que mostra uma maior motivação através de um conjunto de problemas mais diversificados e que parecem espelhar a sua experiência como mercador.

#### 4.2.1. A regra da conta de Flandres por Ruy Mendes

Ruy Mendes propõe quatro «partículas» do fólio 83 da *Pratica d'Arismetica* sobre a «regra da conta de Frandres». A introdução ao assunto requiere o conhecimento das conversões monetárias como já referimos e este autor trabalha no sentido de as utilizar. Sobre os problemas, observamos estilos semelhantes embora com enunciados diferentes. O primeiro problema é sobre a venda de açúcar na Flandres.

Na qual digo primeiramête assim: pode por caso que arrova de frâdes tẽ 25 arrates ou livras como la se chamã e que hũ homẽ qr vêder laa 16 arrovas d'açucare a 5 dinheiros o arratal. Pregũta se quantas livras se montaria nelas [Mendes, 1540, f. 83].

A resolução proposta pelo autor é muito detalhada:

<sup>130</sup> O sistema «libra-soldo-dinheiro» existiu em Portugal até 1435, altura em que a libra foi abolida e substituída pelo real branco.

<sup>131</sup> O início da expansão ultramarina portuguesa em 1415 foi assinalado com a criação de uma nova moeda: o *cetil* de Ceuta.

Sabeloeis desta maneira: ja sabeis que cada livra tẽ.240. dinheyros como fica atras decrarado pelo que he cada dinheyro .1/240. avo de livra e .2. sã .2/240. e .3. sam .3. e assi avãte: e portãto mōta tãto na dita pergũta dizer a .5. dinheyros o arratal como dizer a .5/240. avos de livra: agora fareis as .16. arrovas ã arratẽs ao dito respeito e fara .400. arratẽs os quaes agora multiplicareis polos ditos .5/240. avos de livra que sam os .5. dinheyros: e trazẽdo a repartiçam à perfeiçam achareis que se montam .8. livras e .6. soldos e .8. dinheyros e se quiserades abreviar os ditos .5/240. antes que multiplicareis vierã a ser .1/48. avo polo qual podereis multiplicar os ditos arratẽs mais prestemente e viera o mesmo e assi respondereis aas semelhãtes [Mendes, 1540, f.83 v].

Podemos observar que Mendes percorre várias etapas:

- Converter «dinheiros» em «libras» tendo em conta a informação da Tabela 7;
- Converter arrobas em arrátéis sabendo que 1 arroba = 25 arrátéis;
- Calcular o valor da venda.

Não é dado qualquer esquema, tudo é realizado em retórica e, a dada altura, é referida a simplificação da fração  $\frac{5}{240}$  para  $\frac{1}{48}$  o que manifesta um conhecimento do assunto e a oferta de uma ferramenta que trará resultados mais simplificados.

O segundo problema proposto por Ruy Mendes aparece com o objetivo de praticar a regra e envolve duas unidades de «peso»:

Da qual ponho outra e digo assi. Em .5. arrovas e .2. arratẽs d'açucare vẽdidos ay mesmo a .2. dinheiros e .19. mitas cada arratal: quantas livras se mōtarã [Mendes, 1540, f.83 v].

A resolução dada passa por um conjunto de conversões para chegar ao resultado pretendido:

A esta respõdereis assi: fareis primeiramẽte as .5. arrovas em arratẽs e com os .2. mais farã .127. e assi fareis os .2. dinheiros em mitas e com as .19. mais farã .67. que sã .67/5760. avos de livra que se nã podem mais abreviar: polos quaes multiplicareis agora os ditos .127. arratẽs e vira hũa livra e .9. soldos e .6. dinheiros e .9. mitas e tantas livras e soldos e dinheiros e mitas direis que se montaram e assi etc[Mendes, 1540, f.83 v].

Voltamos a ter um problema de venda de açúcar na Flandres, pretende-se apurar o que rende  $x$  arrobas e  $y$  arráteis de açúcar, vendidos a  $z$  dinheiros e  $w$  mitas o arrátel. As  $x$  arrobas são convertidas em  $25x$  arráteis que são adicionados a  $y$ , num total de  $(25x + y)$  arráteis. Os  $z$  dinheiros são convertidos em  $24z$  mitas que são adicionados a  $w$ , num total de  $(24z + w)$  mitas o arrátel. Segue-se a operação

$$(25x + y) \times (24z + w)$$

que nos dá o total apurado em mitas. Resta converter em libras e nos seus submúltiplos, subentende-se que o processo consiste em divisões («repartiçam») sucessivas, tal como no problema anterior. Uma característica deste autor é não apresentar alguns passos de resolução, talvez considerados triviais dadas as equivalências iniciais.

A regra da conta de Flandres termina, na *Pratica d'Arismetica*, com o terceiro e último problema, tal como o autor afirma.

Daquí ponho outra e final e digo assi em .19. arratês vêdidos a .5. dinheiros e .2. mitas o arratal: quantas livras se montará. Digo que sabereis como a de acima .s. (scilicet) multiplicareis os .19. arratês por .122/5760. avos da livra que sã as mitas que fazê os .5. dinheiros cõ as duas mais: ou por .61/2880. avos que fazê abreviados e fará .8. soldos e .14. mitas e tãtos soldos e mitas direis que se montará e assi respõdereis a outras semelhãtes: e o dito abaste pera em quãto a esta regra [Mendes, 1540, f.83 v].

Digamos que este último problema não acrescenta nada de novo relativamente aos dois primeiros, antes omite os cálculos intermédios e, Ruy Mendes afirma que disse o essencial sobre esta regra, «...e o dito abaste pera em quãto a esta regra» [Mendes 1540, f.83 v], remetendo-nos sempre para as situações semelhantes, contudo sem apresentar problemas relacionados com outras unidades, como as de medida ou da capacidade ou outros produtos para além do açúcar vendido na feitoria da Flandres.

#### 4.2.2. A regra da conta de Flandres por Gaspar Nicolas

Gaspar Nicolas exhibe três problemas mas antes, fornece-nos as equivalências monetárias tal como consta na Tabela 7. O assunto é tratado nos fôlios 35 e 36 do *Tratado da Pratica d'Arismetica* e os problemas relatam a venda de açúcar. O primeiro enunciado refere-se a quantidades desconhecidas estando subentendido que o autor quer ensinar a realizar as conversões através do princípio geral enunciado.

Ora dizes tu que vendeste em Frandes çertas arrobas d'açuquere que hũ arroba tem çertas livras (unidade de massa). Ora tu vendes a lyvra ha tres grossos. Ora eu demando: quanto se monta [Nicolas, 1963, f. 35 v].

Este é o tipo de questão a tratar, seja qual for a quantidade de produto: vender na Flandres  $x$  arrobas de açúcar a um preço  $y$ . Pretende-se saber  $x \cdot y$ . Gaspar Nicolas concretiza o valor de  $x$  e começa por supor que são 50 arrobas de açúcar e pela multiplicação converte 50 arrobas em 1250 libras, com o pressuposto que cada arroba vale 25 libras. Em linguagem atual temos  $50 \times 25 = 1250$  libras. Em seguida o autor calcula a receita num total de 3750 dinheiros  $1250 \times 3 = 3750$  dinheiros. Este montante é convertido em 15 libras, 12 soldos e 6 dinheiros, tendo em conta as equivalências apresentadas na Tabela 1.

O único esquema apresentado pelo autor é o seguinte [Nicolas, 1963, f. 35].

$$\begin{array}{r} 50 \\ 25 \\ \hline 250 \\ 100 \\ \hline 1250 \\ \hline 3750 \end{array}$$

Figura 37: Os cálculos auxiliares para a regra da conta de Flandres

O segundo problema é ainda sobre a venda de açúcar. Na época os portugueses tinham o monopólio do comércio do açúcar na Europa dado que era um produto produzido na ilha da Madeira, o que não é de admirar de encontrar este produto nos enunciados.

Ora vende .736. lyvras d'auquere ha .3. dinheyros ou grossos como tu quiseses chamar que todo he huũ. Ora poys digo que has vendas ha .3. dinheyros e .18. mytas e tu bem ves que .18. mitas sam tres quartos de .24. Ora pois que sam tres quartos multiplica .736. lyvras por .3. dinheyros e três quartos de dinheyros e faras .2760. dinheyros pontualmente parteos por .240. dinheyros que tem huũa lyvra e vem .11. lyvras e fycam .120. dinheyros fazeos soldos convem asaber parteos por .12. dinheyros que tem huũ soldo e vem .10. soldos justamente. Assi que diras que em .736. lyvras d'auquere vendido a .3. dinheyros e .18. mytas que sam .3. quartos de dinheyro diras que se monta .11. lyvras e mea que sam .10. soldos justamente [Nicolas, 1963, f. 36 f].

Junto ao enunciado aparece o algoritmo que apenas traduz o produto de 736 libras de açúcar por 15, numerador da fração que resulta da conversão do numeral misto  $3\frac{3}{4} = \frac{15}{4}$ .

$$\begin{array}{r}
 736 \\
 15 \\
 \hline
 3680 \\
 736 \\
 \hline
 11040
 \end{array}$$

Figura 38: Os cálculos de Gaspar Nicolas para a regra da conta de Flandres

Quando o autor afirma que «faras 2760 dinheiros» [Nicolas, 1963, f. 36 f], só depois de dividir 11040 por 4, o que não é exibido no algoritmo. O resultado final vem da aplicação das equivalências monetárias. Os enunciados conduzem a resoluções que envolvem um número elevado de conversões de várias naturezas. A insistência numa prática da conversão das unidades é propositada tal como o próprio autor afirma sobre a manipulação das «mitas»: «...muytos sam arysmeticos e as vezes se embaraçam na conta das mytas» [Nicolas, 1963, f. 35]. O próximo problema é um caso desses.

Outra conta de Frandes assi como querendo tu vender .146. arrobas d'auquere vendida ha livra ha três dinheiros e .19. mytas e pera ysto fazeres das arrobas lyvras scilicet multiplica por .25. lyvras ou por quantas lyvras tiver a arroba. Ora poys multiplica .146.

por .25. e faras .3650. e tâtas lyvras se montam em .146. arrobas a .25. lyvras por arroba. Ora por que diz tres dinheiros e 19 mytas e tu ves que .19. nã he terço nẽ he quarto nẽ oitavo de .24. onde te he necessario fazeres todo mytas de tres dinheiros e .19. mytas que faras multiplicando tres por .24. e sam .72. ajuntalhe mays .19. mytas. Estes digo que multiplicaras por .3650. lyvras d'açuquere que tu dizes que queres vender e faras .332150. e tantas mytas se monta nas lyvras d'açuquere. Ora fazeas lyvras scilicet partir .332150. por .5760. mytas que tem huã livra. E vem em partiçam .57. lyvras e fycam por partir .3830. mytas que fazeas soldos que se fazem partindo por .288. mytas que tem huã soldo. E vem em partiçam .13. soldos. E ficam .68. mytas por partir fazeas dinheiros e parte por .24. e faras .3. dinheiros e .14. mytas. E assi que diras que .146. arrobas d'açuquere vendido há lyvra a .3. dynheiros e .19. mytas que se montam .57. lyvras e .13. soldos e .3. dinheiros e .14. mytas. E desta maneyra faras as semelhantes [Nicolas 1963, f. 36 f].

A «regra da conta de Flandres» consiste em realizar conversões entre unidades, neste caso de massa, e unidades monetárias. Gaspar Nicolas propõe-se resolver questões que envolvem as «mitas», moeda estrangeira para os mercadores nacionais. Tal como o autor afirma, os problemas exibidos procuram responder às dúvidas dos mercadores e facilitar-lhes as operações na Flandres. No nosso entender a abordagem de Nicolas à regra está muito próxima da que realizou Ruy Mendes. Os dois tratam de problemas de vendas e da prática das unidades. Também observamos uma pobreza na informação sobre os produtos comercializados na Flandres dado que apenas vem referenciado o açúcar e certamente existiriam outros produtos e outras transações. É Bento Fernandes que nos dá outra visão dos negócios na Flandres que, no nosso entender, espelha melhor a realidade da atividade dos mercadores naquela praça.

#### **4.2.3. A regra da conta de Flandres por Bento Fernandes**

Relativamente ao número de casos explanados por Gaspar Nicolas e por Ruy Mendes, a quantidade e variedade de problemas proposta por Bento Fernandes é superior à dos dois primeiros. As regras da conta de Flandres figuram nos fólhos 40 e 41 e, pela extensão proposta, três fólhos, podemos antever a importância desta regra para o autor, ao mesmo

tempo aritmético e mercador. As situações descritas (problemas) vêm com o título de *Regras da cõta de Frandes* e com a introdução seguinte:

E pera vos dar a êtêder as regras da cõta de frâdes aveis primeiramête de saber a valia das moedas e pesos e medidas que mais corrê na terra porque como ho souberdes logo podereis fazer qualquer cõta e razã sabêdo primeiramête as regras que nesta arte vos tenho decrarado ou ao menos a mayor parte delas. E para que tenhais ã vossa memoria as moedas que mais sã corrêtes ã Inves (o autor refere-se a Antuérpia, designada também por Anvers, no francês atual [Almeida, 1994, v. II, p. 197]) hõde he a principal contratação de Frâdes e os pesos e medidas vos farey aqui decraraçamd'algũas delas .s. (scilicet) as mais correntes e necessarias aos portugueses. Sabereis que hũa livra de grossos val .1200. reaes e hũ soldo val .60. reaes e hum grosso val .5. reaes e um dinheiro val tão como hũ grosso e cada grosso tem .24. mittas e cada mitta val hũ cetil e  $\frac{1}{4}$  de cetil. E a livra tẽ .20. soldos e cada soldo val .12. grossos assi que o grosso tem. mittas e a livra tem .5760. mittas [Fernandes, 1555, f. 40 f].

Este texto é semelhante nos três autores e foi a base para a elaboração das Tabelas 7 e 8. Bento Fernandes prossegue com a equivalência entre pesos e medidas

E outros sy sabereis que ho peso de Inves se chama livra que he hũ arratel de Portugal e tem a livra .16. onças como o arratel e cada onçatẽ .8. oytavas e ha um peso que pesa .100. libras que he como o quintal de Portugal porẽ pesa menos .28. libras e a arroba de Inves pesa .25. libras que he menos .7. libras que a arroba de Portugal. E outrosi a medida de Inves se chama ãna per onde se medẽ todas as mercadorias de panos e tapeçarias e sedas e todo o genero de medida a qual he como o covado de Portugal ainda que he mayor a ãna que ho covado e em panos haa que crece .30. ãnas .1. covado e nos trofís mais e ã tũs e liões nã crece tanto \ho qual he segũdo a medida dos logares . Agora que vos tenho decrarado a valia das moedas e pesos e medidas que sam mais corrêtes e nomeadas ã Inves vos quero mostrar regra pera poderdes fazer qualquer genero de cõta que vos for necessario ã Inves achãdo vos laa querẽdo comprar ou vẽder qualquer mercadoria ou querẽdo contratar em cambio pera dar ou tomar dinheiro as feiras como he costume [Fernandes, 1555, f. 40 f].



Vamos resumir na Tabela 9 o que nos é dito por Bento Fernandes relativamente aos pesos e medidas na Flandres e em Portugal.

Tabela 9: «Pesos» na feitoria da Flandres e em Portugal

<i>Pesos na feitoria Flandres</i>	<i>Pesos em Portugal</i>
<i>Libra</i>	<i>Arrátel</i>
<i>(100-28) Libras</i>	<i>Quintal</i>
<i>Arroba = 25 Libras</i>	<i>Arroba = 32 Libras</i>
<i>Libra = 16 Onças</i>	<i>Arrátel = 16 Onças</i>

Sobre as «medidas», as informações dadas pelo autor resumem-se a dizer que a «ãna» utilizada para panos finos e tapeçarias, é equivalente ao «côvado» português, mas, em certos casos, a sua ordem de grandeza depende da medida dos lugares.

Vejamos os problemas que nos são propostos por Bento Fernandes.

Cõprey em Inves .122. ãnas de toalhas a preço de .42. dinheiros a ãna e quero saber o que mōta nelas. E pera o saberes aveis de multiplicar as .122. ãnas pelos .42. dinheiros como vos mostrei na regra de multiplicar que atras fica e achareis que fazẽ assi .5124. dinheiros ou grossos que tudo he hũa cosa se quereis saber quãtas libras ou soldos serã partireis ao .5124. dinheiros por .240. dinheiros que tem a libra e vem .21. libras de grossos e ainda ficam .84. dinheiros os quais partireis por .12. dinheiros que tẽ o soldo e vẽ .7. soldos e nã fica nada por partir assi que direis que cõprãdo ã Inves .122. ãnas de toalhas a .42. dinheiros a ãna se mōtã .21. libras de grosso e .7. soldos e se quereis saber quãto valẽ ã Portugal as ditas .21. libras e .7. soldos multiplicareis as .21. libras por .1200. reaes que val cada libra e fazẽ .25200. reaes e multiplicareis os .7. soldos por 60 reaes que val cada soldo e fazẽ .420. reaes e assi fazẽ em soma .25620. reaes e assi he feita como podeis provar [Fernandes, 1555, f. 40 f].

O problema retrata uma venda de tecidos na Flandres e sabe-se que esta atividade era muito familiar ao autor que, para além de aritmético, também se dedicava ao negócio dos tecidos,

como já referimos. Quanto à resolução, podemos observar duas partes. Na primeira apura-se o valor da venda na Flandres e na segunda determina-se o resultado em moeda portuguesa. A primeira operação consiste no produto

$$122 \text{ (ãnas)} \times 42 \text{ (dinheiros/ãna)} = 5124 \text{ (dinheiros)}$$

A quantia apurava vai ser convertida na unidade monetária da Flandres (ver Tabela 1) por divisões sucessivas, de tal modo que

$$5124 \text{ (dinheiros)} \div 240 \text{ (dinheiros (1 libra))} = 21 \text{ (libras)} + 84 \text{ (dinheiros)}$$

$$\text{Por sua vez } 84 \text{ (dinheiros)} \div 12 \text{ (dinheiros)} = 7 \text{ (soldos)}$$

O valor apurado na moeda da Flandres é 21 libras e 7 soldos. Este valor vai ser convertido para a moeda portuguesa, numa primeira etapa multiplicando 21 libras por 1200 reais (ver Tabela 2) e os 7 soldos por 60 reais, vindo o total de 25620, o que podemos traduzir em linguagem atual por

$$21 \text{ (libras)} \times 1200 \text{ (reais/1 libra)} + 7 \text{ (soldos)} \times 60 \text{ (reais/ 1 soldo)} = 25620 \text{ (reais)}$$

Trata-se de um problema essencialmente de conversão monetária ligada ao comércio de tecidos.

O problema seguinte aborda o comércio do açúcar, tema comum a Gaspar Nicolas e a Ruy Mendes, como vimos em 4.2.1. e em 4.2.2. . Trata-se de determinar, na venda do açúcar, o valor apurado na moeda da Flandres (também as unidades de «peso» não são as nacionais).

Um mercador vendeu em Inves .623. libras e .8. onças e .6. oytavas d'açucres a preço de .15. dinheiros a livra pregũto quãto se mōta nele. E se quereis saber primeiramẽte multiplicay as .623. libras por os .15. dinheiros e fazem .9345. dinheiros e pera as .8. onças bẽ vedes que he mea livra que ha razã dos .15. dinheiros a livra vẽ amedade que sã .7. dinheiros e  $\frac{1}{2}$  e sã assi no meyo dinheiro .12. mittas he somados aos .9345. dinheiros fazẽ .9352. dinheiros e .12. mittas e pera as .6. oytavas porque cada livra tẽ .128. oytavas e ao respeito valẽ .6. oytavas  $\frac{6}{128}$  aos da livra\ agora multiplicai  $\frac{6}{128}$  por .15. dinheiros que val a livra e fazẽ assi  $\frac{45}{64}$  aos de dinheiro e feitos em mittas .s. (scilicet) multiplicareis .45. por .24. mittas que tẽ o dinheiro e fazẽ .180. parteos por .64. e vẽ .16. mittas e  $\frac{7}{8}$  de mitta e assi direis que se mōtã nas .623. libras d'açucres e .8. onças e .6. oytavas a .15.

dinheiros a libra .9353. dinheiros e .4. mittas e  $\frac{7}{8}$  de mitta. E pera saberdes quantas libras  
 de grossos sã partireis estes .9353. dinheiros por .240. dinheiros que tẽ a libra e vẽ .38.  
 libras e restam .233. dinheiros os quaes partireis por .12. dinheiros que tẽ o soldo e vẽ  
 .19. soldos e restã .5. dinheiros e .4. mittas e  $\frac{7}{8}$  avos da mitta de modo que direis que se  
 mõtã .38. libras de grosso e .19. soldos e .5. dinheiros e .4. mitta se  $\frac{7}{8}$  de mitta e assi he  
 certa [Fernandes, 1555, f. 40 v].

O enunciado refere a quantidade de açúcar vendida em Antuérpia, 623 libras e 8 onças e 6  
 oitavas de açúcar a 15 dinheiros a libra. Tal como no caso anterior a resolução é feita na  
 forma retórica sem recurso a qualquer esquema algorítmico. O primeiro passo trata-se do  
 produto

$$623 \times 15 = 9345$$

É estabelecida a equivalência de 8 onças a  $\frac{1}{2}$  libra que terão um valor total de 7 dinheiros e  
 $\frac{1}{2}$ . Por sua vez  $\frac{1}{2}$  dinheiro equivale a 12 mitas. As 6 oitavas são convertidas em  $\frac{6}{128}$  avos da  
 libra (dado que cada libra tem 128 oitavas (informação dada na resolução do problema pelo  
 autor). Efetuando o produto

$$\frac{6}{128} \times 15 = \frac{45}{64} \text{ dinheiros.}$$

Este valor é convertido em «mitas» (ver Tabela 1), usando o produto,

$$\frac{45}{64} \times 24 = \frac{180}{64} = 16 + \frac{7}{8}.$$

Resta adicionar todos os valores encontrados tendo-se no final apurado: 9353 dinheiros + 4  
 mitas +  $\frac{7}{8}$  mitas.

Embora o autor não manifeste expressamente a mesma preocupação de Gaspar Nicolas sobre  
 o hábito dos mercadores portugueses na manipulação da moeda de Antuérpia, não deixa de  
 exemplificar a conversão em «mitas» neste segundo problema, o que nos pode levar a  
 concluir que era também um assunto sensível para Bento Fernandes.

Todos os problemas enunciados envolvem uma vasta teia de conversões e o autor parecer  
 reparar que alguns são muito trabalhosos: «pera ho saber vos he necessario ter boa memoria

porque ainda a cõta he pequena he hũ pouco trabalhosa» [Fernandes, 1555, f. 40 f]. Um caso desses é o próximo enunciado.

Eu vendy ã Inves .283. livras e .12. onças e .4. oytavas de pasa a .2. soldos e .9. dinheiros e .14. mitas a livra e quero saber quãto se mõta e pera ho saber vos he necessario ter boa memoria porque ainda a cõta he pequena he hũ pouco trabalhosa. E tornãdo a ela digo que primeiro aveis de reduzir ho preço da venda ao menor preço que sã mittas assi que aveis de fazer de .2. soldos e .9. dinheiros e .14. mittas tudo mittas .s. ho soldo tẽ .288. mittas e em .2. soldos sã .576. mittas e os .9. dinheiros tẽ .216. mittas a razã de .24. mittas ho dinheiro e jũtãdo assi .576. e .216. fazem .792. mittas e ajũtãdo as .14. mittas sã assi .806. mittas agora multiplicareis estas .806. mittas pelas .283. livras e fazẽ .228098. E multiplicareis as .12. onças que sã  $\frac{3}{4}$  de uma livra por as .806. mittas que val cada livra e fazẽ .604. mittas e  $\frac{1}{2}$  e juntas assi as .228098. mittas fazẽ .228702. mittas e  $\frac{1}{2}$ . E pera saberes as oytavas tomareis os  $\frac{4}{128}$  aos de .806. mittas que sã .25. mittas e  $\frac{3}{16}$  aos (avos) de mitta e ajũtayos as .228702. e  $\frac{1}{2}$  e fazẽ .228727. mittas e  $\frac{11}{16}$  aos de mitta. E pera saber quãtas livras de grossos será partireis estas .228727. mittas por .5760. mittas que tẽ cada livra de grosso e vẽ .39. livras de grosso e restã .4087. mittas estas partireis por .288. mittas que tẽ cada soldo e vẽ .14. soldos e restã ainda .55. mittas as quaes partireis por .24. mittas que tẽ o dinheiro e vẽ .2. dinheiros e restã .7. mittas e  $\frac{11}{16}$  aos de mitta e assi direis que se mõtã nas ditas .283. livras e .12. onças e .4. oytavas de pasa a razã de .2. soldos e .9. dinheiros e .14. mitas a livra .39. livras de grosso e .14. soldos e .2. dinheiros e .7. mittas e  $\frac{11}{16}$  aos de mitta e assi he certa e deste modo fareis as semelhãtes [Fernandes, 1555, f. 40 f].

Estão presentes várias etapas que Bento Fernandes cumpre com detalhe. A primeira etapa consiste em reduzir o preço unitário da libra a mitas, tendo em conta as equivalências já conhecidas e que passamos a traduzir em linguagem atual.

Reduzir 2 soldos 9 dinheiros e 14 mitas tudo em mitas:

$$2 \text{ soldos} \times 288 \text{ mitas/soldo} = 576 \text{ mitas (1)}$$

$$9 \text{ dinheiros} \times 24 \text{ mitas/dinheiro} = 216 \text{ mitas (2)}$$

Adicionando os valores em (1) e (2) com as 14 mitas, temos um total de 806 mitas.

Retomando o enunciado, vendeu-se em Antuérpia «.283. libras e .12. onças e .4. oytavas de passa». O próximo passo consiste em apurar o valor das 283 libras em mitas:

$$283 \times 806 = 228098$$

Resta-nos as 12 onças. Aqui o autor nota que 12 onças são  $\frac{3}{4}$  da libra e prossegue com o produto  $\frac{3}{4}$  libra  $\times$  806 mitas/libra = 604 mitas e  $\frac{1}{2}$

Em seguida é realizada a soma dos valores apurados (em mitas) até ao momento, ou seja,

$$228098 + 604 \frac{1}{2} = 228702 \frac{1}{2}$$

As 4 oitavas são convertidas em  $\frac{4}{128}$ , dado que cada oitava é  $\frac{1}{128}$  da libra. Multiplica-se pelo valor de cada libra em mitas

$$806 \times \frac{4}{128} = 25 \frac{3}{16}$$

Finalmente temos 228702. e  $\frac{1}{2}$  e fazê .228727. mittas e  $\frac{11}{16}$  aos de mitta.

$$228702 + 25 \frac{3}{16} = 228727 \frac{11}{16}, \text{ o valor da venda em mitas.}$$

O autor passa à conversão do valor da venda em libras e nos seus submúltiplos, estabelecendo uma série de conversões tendo em conta a tabela da Tabela. 1,

$$228727 \div 5760 \rightarrow 39 \text{ libras e } 4083 \text{ mitas}$$

$$4087 \div 288 \rightarrow 14 \text{ soldos e } 55 \text{ mitas}$$

$$55 \div 24 \rightarrow 2 \text{ dinheiros e } 7 \frac{11}{16} \text{ mitas}$$

$$\text{Valor da venda } 39 \text{ libras } 14 \text{ soldos } 2 \text{ dinheiros e } 7 \frac{11}{16} \text{ mitas}$$

Com este problema e a sua resolução pretende trabalhar as equivalências das unidades monetárias e de pesos na Flandres, prática sem dúvida muito útil aos mercadores. A referência à necessidade de ter boa memória, pode levar-nos a crer que o autor dominava bem os cálculos que propunha considerando conveniente que outros também o fizessem.

O próximo problema é idêntico ao anterior e pode pensar-se que vem consolidar o a habilidade das conversões monetárias. Neste exemplo, o que muda é a unidade que em vez de ser de peso é de medida.

Comprey em Inves .124. ãnas e  $\frac{1}{2}$  de querpa de preço de .32. dinheiros e .8. mittas a ãna e quero saber ho que se mōta. E pera o saber aveis primeiramēte de reduzir tudo a mittas e fazey de .32. dinheiros e .8. mittas tudo mittas e fazē assi .776. mittas e depois de as terdes feyto mittas multiplicayas por as .124. ãnas e  $\frac{1}{2}$  e fazē assi .96612. E tão direis que se mōta nas .124. ãnas e  $\frac{1}{2}$  de querpa de preço de .32. dinheiros e .8. mittas a ãna e se ho quereis fazer ã livras party .96612. mittas por .5760. mittas que tē hũa livra de grossos e vê .16. livras de grossos e .15. soldos e .5. dinheiros e .12. mittas que he  $\frac{1}{2}$  dinheiros e assi he feita [Fernandes, 1555, f. 41 f].

O problema que se segue enquadra-se nos mesmos objetivos dos anteriores, contudo a unidade de peso em Portugal é convertida na sua equivalente de Antuérpia e, como o próprio autor afirma, são retomadas as mesmas contas dos outros problemas.

Eu vendi ã Inves .286. arrobas e .12. livras e .8. onças de pimēta a preço de .9. soldos e .15. dinheiros a livra e quero saber o que se mōta e seguindo a regra fazey como vos mostrey nas cōtas atras. primeiramēte fareis de .286. arrobas e .12. livras multiplicãdoas por .25. livras que tē a arroba de Inves e fareis .7150. livras ajuntaylhe .12. livras e assi as .8. onças que he  $\frac{1}{2}$  fazē .7162. livras e  $\frac{1}{2}$ . Ora fazey nove soldos e .15. dinheiros tudo dinheiros arrezã de .20. dinheiros ho soldo e fazē .123. dinheiros estes multiplicay per .7162. livras e  $\frac{1}{2}$  fazē .880987. dinheiros e  $\frac{1}{2}$  fazeyos livras de grosso partido os por .240. dinheiros que tē a livra fazē .3670. livras de grossos e .15. soldos e .7. dinheiros e .12. mittas que he  $\frac{1}{2}$  dinheiro e assi direis que se mōtã em .286. arrobas e .12. livras e .8. onças de pimēta a preço de .9. soldos e .15. dinheiros a livra .8670. livras de grossos e .15. soldos e .7. dinheiros e .12. mittas como podeis provar [Fernandes, 1555, f. 41 f].

Sob o tema regra da conta de Flandres aparecem operações de câmbio. Assiste-se a relatos de transações entre a Flandres e Medina del Campo, em Espanha. Este problema e os

seguintes são interessantes na medida em que o autor nos transmite as suas vivências como mercador e cambista.

Outra conta de Frâdes sobre ho tomar do dinheiro a pagar em Medina (Medina del Campo – Espanha)

Porque algũs mercadores sobre ho tomar ou dar do dinheiro ha câbio ã Inves pera pagar ã Medina del Câpo ou ã outra qualquer feira d’Espanha ou tomado e dado ã Espanha pera lhe respõderẽ ã Inves nã sã tam espertos nẽ esprimẽtados nesta cõta como ho sã os framẽgos e italianos que andã mais corrẽtes neste cõtratar. E por ser cousa muy necessaria aos tratãtes e mercadores farei aqui declaraçã pera saber a maneira que se ha de ter no fazer de semelhãtes contas e no dar e tomas do dinheiro que nã sejais enganados e pera melhor ãtenderdes vos darei aqui hũa rezã. E digo que eu tomei ã Inves .124. libras de grossos pera pagar ã Medina del Câpo a rezã de .69. grossos o ducado e pera melhor vos declarar digo que eu tomei ã Inves .69. grossos pera dar em Medina por cada .69. grossos hum ducado e quero saber quãtos ducados ey de pagar em Medina pelas ditas .124. libras de grossos e quãto perco por .100. em tomar o dito dinheiro. Pera o que vereis: primeiro quantos grossos haa em .124. libras a razã de .240. grossos que tẽ a libra e achareis que há .29760. grossos e estes party per .69. grossos que vos tomais ho ducado há pagar ã Medina e achareis que vẽ a ser .431. ducados e  $\frac{7}{23}$  aos do ducado. Assi que direis que .431. ducados e  $\frac{7}{23}$  aos de ducado aveis de pagar ã Medina del Câpo pelas .124. libras de grossos que recebestes ã Inves como podeis provar. E se quereis saber a quãto perdeis por cẽto vede quãto valẽ .124. libras de grossos a razã de .3. cruzados a libra e achareis que sã .372. cruzados que valẽ .148800. reaes he por eles aveis de pagar .431. cruzados e  $\frac{7}{23}$  aos de cruzado ã Medina agora tiray de .431. cruzados e  $\frac{7}{23}$  aos de cruzado .372. cruzados restã assi .59. cruzados e  $\frac{7}{23}$  aos de cruzado e tatos cruzados perdestes\e pera saber quãto vẽ por .100. ireis há regra de tres dizẽdo assi\se em .372. cruzados que recebi ã Inves perdi .59. cruzados e  $\frac{7}{23}$  aos de cruzado quãto perco por .100. fazey a regra e achareis que perdeis a .15. por .100. e  $\frac{65}{69}$  aos de cruzado como podeis provar e deste modo fareis as semelhãtes [Fernandes, 1555, f. 41].

Bento Fernandes começa por referir que vai apresentar uma situação de câmbio, onde os mercadores mais experimentados são os flamengos e os italianos, sendo de extrema importância que os outros mercadores intervenientes façam esta operação sem enganar. O

problema consiste em usar moeda (124 libras) de Antuérpia para pagar em Medina del Campo à razão de 69 grossos o ducado. É uma operação de câmbio<sup>132</sup> que assenta sobre dois pilares:

1º Conversão monetária;

2º Determinar uma percentagem (Perder/ganhar no câmbio, neste caso o autor refere uma perda).

Na resolução do problema, Bento Fernandes inicia uma série de operações básicas que se traduzem em produtos e divisões e que passamos a esquematizar.

$$124 \times 240 \rightarrow 29760 \text{ grossos}$$

$$29760 \div 69 \rightarrow 431 \frac{7}{23} \text{ ducados}$$

As 124 libras de Antuérpia encontram o seu equivalente em  $431 \frac{7}{23}$  ducados de Medina del Campo.

O autor passa à etapa seguinte, ou seja, saber quanto perdeu por 100. E inicia este passo com a conversão de libras em cruzados e, estes em reais

$$124 \times 3 \rightarrow 372 \text{ cruzados} \rightarrow 148800 \text{ reais}^{133}$$

Acrescenta que por esta quantia há que pagar  $431 \frac{7}{23}$  cruzados<sup>134</sup> em Medina del Campo. Em seguida, estabelece a diferença entre a conversão direta de libras em cruzados e aquela que resulta do preço de 69 grossos o ducado, como moeda intermediária, tendo-se

$$431 \frac{7}{23} - 372 = 59 \frac{7}{23} \text{ (valor em cruzados)}$$

Para achar a percentagem, é referida a regra de três que passamos a esquematizar, em linguagem atual, tendo-se o valor pretendido:  $15 \frac{65}{69}$  cruzados

O enunciado descrito é claro, no entanto, a resolução proposta leva-nos a sucessivos esquemas de conversões, nem sempre claros e sem serem explicitados os objetivos intermediários.

---

<sup>132</sup> Embora se trate de câmbio não no sentido que esta operação tem atualmente.

<sup>133</sup> O autor não explica como chegou a este valor.

<sup>134</sup> Bento Fernandes muda a designação de ducados para cruzados.



Os problemas dedicados ao câmbio vão aumentando o seu grau de complexidade, vejamos um outro exemplo:

Eu tomei em Medina del Câpo .500. ducados para pagar em Inves a rezã de .390. maravedis ho escudo pagos pela maneira que agora pagã em Inves em moeda avaliada e o escudo val .6. soldos e mais tres e meio por ceto do avaliado. Pregũto quãtos escudos eyde pagar em Inves pelos ditos .500. ducados que recebi em Medina a pagar aos pagamẽtos da feira fria. E outrosi quero saber a quãto ganho por ceto em tomar estes .500. ducados em Medina e mãdalos pagar em Inves para ho saber fazey primeiro dos .500. ducados maravedis a rezã de .375. maravedis que val ho ducado em Medina e fazẽ assi .187500. maravedis os quaes partireis por .390. maravedis que vos a vos dã pelo escudo de Inves e vẽ .480. e  $\frac{10}{13}$  aos e .480. escudos e  $\frac{10}{13}$  aos de escudo aveis de pagar em Inves pelos .500. cruzados<sup>135</sup> que recebestes em Medina e para saberdes quãtas libras de grossos serã estes .480. e  $\frac{10}{13}$  d'escudos multiplicayos per .6. soldos que val ho escudo e fazẽ .2884. soldos e  $\frac{8}{13}$  aos do soldo e para os fazerdes libras partyos por .20. soldos que tẽ a libra e vẽ .144. libras de grossos e 4 soldos e  $\frac{8}{13}$  aos do soldo e depois de feyto sabereis ho que se mõta mais nos .3. e  $\frac{1}{2}$  por ceto do avaliado que cada escudo val mais que os .6. soldos ho qual sabereis per regra de tres dizẽdo assi .s. se .100. ganhã .3. e  $\frac{1}{2}$  que ganharã .144. libras de grossos e 4 soldos e  $\frac{8}{13}$  aos do soldo e achareis que ganharã .5. libras e  $\frac{25}{26}$  aos de soldo e ajuntãdo estas .5. libras e  $\frac{25}{26}$  aos de soldo as outras .144. libras de grossos e 4 soldos e  $\frac{8}{13}$  aos do soldo fazẽ assi em soma .149. libras de grossos .5. soldos e  $\frac{15}{26}$  aos de soldo. E assi direis que aveis de pagar .149. libras de grossos .5. soldos e  $\frac{15}{26}$  aos de soldo em Inves ao tẽpo dos pagamẽtos da feira fria pelos .500. cruzados que recebestes em Medina del Câpo. E se quereis saber a quanto por ceto vede o que vay a dizer dos .500. ducados que recebestes a .149. libras de grossos .5. soldos e  $\frac{15}{26}$  aos de soldo que aveis de dar e bẽ vedes que cada libra tẽ .3. cruzados e fazẽ .149. libras .447. cruzados e .5. soldos e  $\frac{15}{26}$  aos de soldo agora tiray estes .447. cruzados e .5. soldos e  $\frac{15}{26}$  aos de soldo dos .500. ducados restã assi .52. ducados e .13. grossos e  $\frac{1}{13}$  do grosso e se quereis saber quãto ganhais por ceto ireis a regra de tres dizẽdo assi em .447. cruzados que eu eyde pagar em

---

<sup>135</sup> Subentende-se que o cruzado e o ducado tẽm o mesmo valor.

Inves ganho .52. ducados e .13. grossos e  $\frac{1}{13}$  do grosso a quãto ganho por cêto fazey a regra de tres de quebrados como vos mostrey na regra que atras fica declarada e achareis que vê a ganhar a .11. e  $\frac{2}{3}$  por cêto como podeis provar e assi he feyta [Fernandes, 1555, f. 41 v].

A resolução envolve várias moedas e a aplicação da regra de três duas vezes. Não é apresentado qualquer esquema de algoritmo e, visto aos nossos olhos, parece que o autor resolve o problema, descrevendo-nos, em linguagem natural os seus procedimentos, numa teia complexa de conversões monetárias nem sempre explícitas. Vejamos então os passos que apresenta, tendo em conta o que se pretende saber:

1º Quantos escudos a pagar em Antuérpia pelos 500 ducados de Medina del Campo?

2º Qual é a percentagem de ganho nesta operação?

O processo de resolução é longo e vamos apresenta-lo em linguagem atual. Vamos descrever o sistema monetário utilizado, tanto o que está explícito como o que parece ser utilizado pelo autor, embora não exibido.

1 cruzado = 1 ducado

1 ducado = 375 maravedis

1 escudo = 390 maravedis

1 escudo = 6 soldos

1 libra = 3 cruzados

1 ducado = 69 grossos (dinheiros)

A primeira etapa consiste em converter os 500 ducados em maravedis

$500 \times 375 \rightarrow 187500$  maravedis, tendo em conta que um ducado vale 375 maravedis.

Esta mesma quantia vai ser convertida em escudos, partindo da equivalência entre um escudo e 390 maravedis e utilizando a divisão.

$$187500 \div 390 \rightarrow 480 \frac{10}{13} \text{escudos}$$

A resposta à primeira questão parece dada, contudo o autor parte para uma sequência de operações de conversão monetária. A quantia (em escudos) é convertida em soldos, tendo em conta que um escudo equivale a 6 soldos.

$$480 \frac{10}{13} \times 6 \rightarrow 2884 \frac{8}{13} \text{soldos}$$

Atendendo a que uma libra vale 20 soldos, pela divisão é encontrado um equivalente da última quantia em libras, utilizando de novo a divisão

$$2884 \frac{8}{13} \div 20 \rightarrow 144 \text{ libras } 4 \frac{8}{13} \text{ soldos}$$

A certa altura o autor refere que cada escudo vale mais do que 6 soldos, «o escudo val .6. soldos e mais tres e meo por cêto do avaliado», o que conduz a uma aplicação da regra de três

$\left(144 \text{ (libras)} 4 \frac{8}{13} \text{ (soldos)}\right) \times 3,5\% = 5 \text{ (libras)} 4 \frac{2}{25} \text{ (soldos)}$ , tendo em conta as respetivas equivalências monetárias que não são exibidas pelo autor.

O valor da percentagem então calculado é adicionados a 144 libras  $4 \frac{8}{13}$  soldos, tendo-se

$144 \text{ libras } 4 \frac{8}{13} \text{ soldos} + 5 \text{ libras } 4 \frac{2}{25} \text{ soldos} = 149 \text{ libras } 5 \frac{15}{16} \text{ soldos}$ , sendo este o valor dos 500 ducados na moeda de Antuérpia.

Mas as conversões continuam multiplicando as 149 libras por 3 cruzados, estabelecendo que cada libra vale 3 cruzados tendo-se 447 cruzados  $5 \frac{15}{16}$  soldos. O próximo passo consiste numa subtração

$$500 \text{ ducados} - 447 \text{ cruzados } 5 \frac{15}{26} \text{ soldos} = 52 \text{ ducados } 13 \frac{1}{13} \text{ grossos (1)}$$

Nesta operação como é conhecida a equivalência entre ducados e cruzados, os 500 cruzados (ducados) passam a ser 499+1 para se operar com os  $5 \frac{15}{26}$  soldos. Estes cálculos não são exibidos pelo autor, que opta por dar o resultado final. Passemos aos cálculos intermédios, segundo a nossa interpretação

$$(499 - 447)(\text{cruzados}) + 1(\text{cruzado}) - 5\frac{15}{26}(\text{soldos}) =$$

$$52(\text{cruzados}) + \left(\frac{20}{3} - \frac{145}{26}\right)(\text{soldos}) =$$

$$52(\text{cruzados}) + \frac{85}{78}(\text{soldos})$$

Convertendo os soldos em grossos, necessitamos do cálculo auxiliar

$$\frac{85}{78} \times 12 = \frac{170}{13}(\text{grossos})$$

Com o algoritmo da divisão inteira temos  $\frac{170}{13} = 13\frac{1}{13}$ , daí o resultado apresentado pelo autor em (1).

A percentagem de ganho vem por aplicação da regra de três, como mencionado pelo autor e estabelecendo a correspondência 447 cruzados 5 15/26 soldos --- 52 ducados 13 1/13 grossos.

Quanto ganha por 100?

Convertendo cada quantia numa mesma moeda, por exemplo em grossos, temos

$$\left(447 \times 69 + \frac{170}{13}\right) = \frac{401129}{13}(\text{grossos}) \quad (2)$$

Também

$$\left(52 \times 69 + 13 + \frac{1}{13}\right) = \frac{46814}{13}(\text{grossos}) \quad (3)$$

Dividindo (3) por (2) e multiplicando por 100 vem o valor pretendido, ou seja, a percentagem de  $11\frac{2}{3}$ .

O próximo problema apesar de partir de condições idênticas ao anterior mostra algumas diferenças, como o próprio autor aponta.

Digo que eu dou ã Medina del Câpo .500. ducados pera mos pagarem ã Inves ao tẽpo dos pagamẽtos da feira de Inves a rezã de .390. maravedis ho escudo pagos ã moeda avaliada a qual cõta he toda hũa esta e ha passada porẽ em algũa cousa he diferẽte porque ho que toma ho dinheiro ã Medina pera ho pagar ã Inves ganha e o que ho daa ã Medina

pera receber ã Inves perde e porque sãpre haa deferãça do que ganha \ao que perde faço esta decaraçaõ pera quẽ o quiser aprẽder e tornãdo a cõta digo que quero saber quantos escudos ey d'aver ã Inves por estes .500. ducados que dou ã Medina e a quãto perderei por cẽto nesta remessa. E como vedes pela cõta atras que he tudo hũa cousa achareis que aveis d'aver . 480. escudos e  $\frac{10}{13}$  aos d'escudo que sã .144. livras e .4. soldos e  $\frac{8}{13}$  aos de soldo. E mais .5. livras e  $\frac{25}{26}$  aos de soldo do avaliado que somã assi ao todo .149. livras de grossos e .5. soldos e  $\frac{15}{26}$  aos de soldo os quais feitos ã ducados a rezã de .3. ducados a livra, fazẽ .447. ducados e .5. soldos e  $\frac{15}{26}$  aos de soldo. E tãto aveis de receber ã Inves pelos .500. ducados que destes ã Medina\e se quereis saber a quãto perdeis por cẽto yreis a regra de tres dizẽdo assi se ã .500. ducados que eu dou em Medina recebo .447. ducados e .5. soldos e  $\frac{15}{26}$  aos de soldo ã que perco .52. cruzados .13. soldos e  $\frac{1}{13}$  aos do soldo pregũto a quãto perco por cẽto\fazey a regra e achareis que perdereis a .10. e  $\frac{2}{5}$ . E como vedes ainda que a conta he toda hũa vay deferẽte esta da passada porque na outra se ganhou .11. e  $\frac{2}{3}$  por cento e nesta se perde a .10. e  $\frac{2}{5}$  por cẽto e a rezã he porque como vos ja disse haa deferãça quãto a pregũta he ganhãdo d'outra que se diz perdẽdo e por isso sãdo a cõta toda hũa o que ganha sãpre ganha mais do que he a perda. E deste modo fareis as semelhãtes sãdo cotratado assi como nesta cõta he decrarado porque assegũdo for ho contrato assi seguireis esta regra assi na valia dos soldos como no tomar do dinheiro [Fernandes, 1555, f. 42 f].

Sublinhemos as afirmações do autor, «a qual cõta he toda hũa esta e ha passada» [Fernandes, 1555, f. 42 f], ou seja, temos dados idênticos, contudo há uma diferença importante

...porẽ em algũa cousa he diferẽte porque ho que toma ho dinheiro ã Medina pera ho pagar ã Inves ganha e o que ho daa ã Medina pera receber ã Inves perde e porque sãpre haa deferãça do que ganha \ao que perde faço esta decaraçaõ pera quẽ o quiser aprẽder [Fernandes, 1555, f. 42 f].

Na resolução estão presentes alguns passos da anterior, contudo estabelece-se uma equivalência entre os 500 ducados dados em Medina e o valor a receber pelos mesmos em Antuérpia, 447 ducados e  $5 \frac{15}{26}$  soldos, sendo a diferença entre as duas quantias retomada

$$500 \text{ ducados} - 447 \text{ cruzados } 5 \frac{15}{26} \text{ soldos} = 52 \text{ ducados } 13 \frac{1}{13} \text{ grossos}$$

Sendo este o valor que se perde no negócio, em seguida é indicada a regra de três para calcular a percentagem pretendida, neste caso 10 e  $\frac{2}{5}$ . Não são apresentados detalhes nem esquema da regra, mas podemos converter os valores em grossos, por exemplo e passar à correspondência da regra de três. Assim

$$500 \times 69 = 34500 \text{ (grossos)}$$

$$52 \text{ ducados } 13 \frac{1}{13} \text{ grossos} = \frac{46814}{13} \text{ grossos}$$

Por aplicação da regra de três aos valores 34500---46814/13---100, vem a perda de  $10 \frac{2}{5}$  que é referida no texto.

No texto dos enunciados há as referências constantes a Medina del Campo e a Antuérpia. No último problema que vimos Bento Fernandes fala-nos da feira de «Inves». Este enquadramento dos problemas no espaço e no tempo é muito interessante e é uma característica do autor tal como o podemos constatar no próximo enunciado.

Hum mercador daa ã Inves .450. livras de grossos a receber ã Espanha na feira d'Outubro ã Medina del Câpo ao tẽpo dos pagamẽtos .s. a .67. grossos e  $\frac{1}{2}$  ducado d'Espanha. Pregunto quãtos ducados avera ã Medina por estas .450. livras de grossos as quais se pagã ã Medina cõ mais .6. al milhar que he assi agora o cõtrato e quãto ganha por cẽto. E se ho quereis saber fazey de .450. livras tudo grossos . s. multiplicayas por .240. grossos que tẽ cada livra e fazẽ .108000. grossos estes partireis por .67. grossos e  $\frac{1}{2}$  que tomaís o ducado vẽ .1600. he .1600. ducados vos serã pagos em Medina cõ mais seis ducados al milhar e pera saberdes quãto se mõta nos seis por milhar ireis a regra de tres dizendo assi\se cõ .1000. ganho .6. cõ .1600. que ganharei fazey a regra e achareis que ganhais .9. ducados e  $\frac{3}{5}$  do ducado ajũtayos aos .1600. ducados fazẽ .1609. ducados e  $\frac{3}{5}$  as .450. livras de grossos que destes ã Inves que valẽ a rezã de .3. cruzados a livra .1350. cruzados e restã assi .259. cruzados e  $\frac{3}{5}$  tãto ganhais e pera saber a quãto vẽ por .100. ireis a regra de tres dizẽdo assi\ se ã .1350. cruzados que dou ganho .259. cruzados e  $\frac{3}{5}$  . pregũto quãto ganho por .100. fazey a regra e achareis que ganhais a .19. por .100.

e  $\frac{31}{135}$  aos .s. ã cada .100. cruzados ganhais .19. cruzados e  $\frac{31}{135}$  aos de cruzado he assi  
 he certa como podeis provar e deste modo fareis as desta calidade [Fernandes, 1555, f.  
 42 v].

Este é mais um problema de transação de capital, usando as palavras do autor «Hum mercador daa ã Inves .450. libras de grossos a receber ã Espanha» no cenário da feira de Outubro em Medina del campo. O que se pretende é determinar

1º Quantos ducados são 450 libras a  $67\frac{1}{2}$  grossos o ducado com mais seis ducados por mil, em Medina del Campo;

2º Qual é a percentagem de ganho nesta transação.

A proposta de resolução tem uma aparência menos complexa que as anteriores, nomeadamente no que concerne às unidades monetárias utilizadas. O primeiro passo consiste em converter as 450 libras em grossos, que passamos a esquematizar em linguagem atual.

$$450 \times 240 \rightarrow 108000 \text{ grossos}$$

Que por sua vez correspondem a uma certa quantidade de ducados, pela divisão que se apresenta

$$108000 \div 67\frac{1}{2} \rightarrow 1600 \text{ ducados}$$

Com o acréscimo de 6 ducados por mil em Medina del Campo, é referenciada a regra de três para encontrar o valor  $9\frac{3}{5}$  ducados. As 450 libras de Antuérpia correspondem a  $1609\frac{3}{5}$  ducados. Em seguida o autor propõe uma conversão das 450 libras em cruzados, à razão de 3 cruzados por libras tendo-se

$$450 \times 3 \rightarrow 1350 \text{ cruzados}$$

Tendo em conta a igualdade entre o cruzado e o ducado, é efetuada a diferença

$$1609\frac{3}{5} - 1350 = 259\frac{3}{5} \text{ (cruzados)}$$

Que corresponde ao ganho (que corresponde à «passagem» pela moeda de Medina del campo) tendo-se a percentagem que deriva da aplicação da regra de três:  $19\frac{31}{135}$ .

O último enunciado da regra da conta de Flandres é muito semelhante ao anterior. Contudo, neste exemplo há perda e não ganho na transação. Os procedimentos são os mesmos e vem como uma consolidação da regra da conta de Flandres. O assunto termina com a frase «agora nam direi mais das cõtas de Frãdes» [Fernandes 1555, f. 42 v].

Um mercador toma em Inves .720. libras de grossos a pagar ã Espanha em feira de Mayo ã Medina ao tẽpo dos pagamẽtos .s. a rezam de .68. grossos e  $\frac{1}{2}$  ho ducado cõ mais .5. al milhar que se pagã do contado. Pregũto quãtos ducados este mercador ade dar ã Medina e quãto perde por cẽto e se o quereis saber vede ã .720. libras quãtos grossos haa a rezã de .240. grossos ho ducado e acahreis que sã .172800. grossos estes party por .68. grossos e  $\frac{1}{2}$  que ã Inves recebeis pelo ducado vẽ .2522. e  $\frac{86}{137}$  e .2522. ducados e  $\frac{86}{137}$  aos do ducado aveis de dar ã Medina per as .720. libras de grossos que recebestes ã Inves e pera saber quãto se mõtã mais nos .5. por milhar que mais aveis de pagar ireis a regra de tres dizẽdo\ se ã .100. ducados pago .5. ã .2522. e  $\frac{86}{137}$  aos de ducado que pagarei fazey a regra de tres de quebrados e achareis que pagareis .12. e  $\frac{46}{75}$  aos que sã .12. ducados e  $\frac{46}{75}$  aos de ducado\agora ajũtay estes aos .2522. ducados e  $\frac{86}{137}$  aos fazẽ assi .2535. ducados e  $\frac{1}{5}$  de ducado. E pera saber o que perdeis por .100. vede quãtos ducados fazẽ .720. libras que recebeste ã Inves a rezã de .3. cruzados a livra e acahreis que sã .2160. ducados tirayos de .2535. e  $\frac{1}{5}$  que aveis de dar ã Medina restã .375. ducados e  $\frac{1}{5}$  e tãtos perdeis nas .720. libras e pera saberdes quãto perdeis por .100. fazey a regra de tres dizẽdo assi se ã .2160. ducados perco .375. ducados e  $\frac{1}{5}$  quãtos perco por .100. e seguindo a regra achareis que perdeis a .17. por .100. he  $\frac{10}{27}$  aos de maneira que ã cada .100. cruzados perdereis .17. cruzados e  $\frac{10}{27}$  aos do cruzado e assi he feita e por agora nam direi mais das cõtas de Frãdes [Fernandes, 1555, f. 42 v].



Como já afirmámos, dos três autores é Bento Fernandes que apresenta mais problemas da regra da conta de Flandres e as situações de câmbio, no âmbito desta regra, não são contempladas quer por Gaspar Nicolas quer por Ruy Mendes. Podemos aqui antever que os três teriam vivências profissionais diferentes, não existindo diferenças significativas entre as situações exibidas quer por Gaspar Nicolas quer por Ruy Mendes, mas o mesmo não se pode dizer acerca de Bento Fernandes. Há uma referência considerável a Flandres mas também a Medina del Campo, centro de negócios muito frequentado por mercadores nacionais e talvez, por Bento Fernandes ou por outros mercadores que lhes fossem próximos.

No século XVI, em Medina del Campo operava Simon Ruiz onde se iniciou no comércio dos panos nas feiras. As feiras de Medina tornaram-se um importante ponto de circulação de mercadores, mercadorias e crédito o que motivou aquele mercador a envolver-se em parcerias nas atividades comerciais. Com vista a alargar os seus lucros investiu em vários tipos de negócio, entre os quais o azeite e as especiarias. Mas a importância da sua firma foi mais além quando se iniciou como banqueiro especializando-se em câmbios. Simon Ruiz deixou bem documentada a sua atividade como mercador e cambista. Nesta documentação encontra-se a referencia a mercadores nacionais que operavam em Medina del Campo e provinham de diferentes partes de Portugal, tais como Coimbra, Lisboa, Porto, entre muitas outras cidades portuguesas. A fama de Simon Ruiz saiu mesmo da Península Ibérica, tornando-se uma figura importante na economia europeia de Quinhentos [Barrio, 2007]. Os problemas de câmbio que Bento Fernandes resolve não são uma mera ficção, relatam uma realidade ligada à vida do mercador que frequentava as feiras de Medina. Fernandes atuou no sentido de dar aos mercadores nacionais os instrumentos necessários para as operações nas principais praças financeiras.

## Conclusão

Os tratados de aritmética portuguesa quinhentista exibem um conjunto de regras que visam a prática comercial. Entre as regras consideradas clássicas, como as baratas, as companhias e as ligas, temos regras particulares do comércio português, como o são o quarto e vintena e a regra da conta de Flandres.

Ainda que a noção de percentagem seja conhecida em alguns tratados escritos nas cidades italianas, não é contudo, um assunto vulgarizado. Nos reinos de Espanha estão presentes problemas de «companhias» que envolvem o «tanto por cento» nos tratados de Juan Ortega, Juan Andrés e Joan Ventallol. Os aritméticos portugueses vulgarizaram a «percentagem» nos múltiplos problemas enunciados e resolvidos com as regras de companhias, sem contudo traduzirem o imposto de quarto e vintena por uma percentagem. É Guiral Pacheco que «transforma» o cálculo do quarto e vintena na aplicação de um «tanto por cento», no seu tratado *Flor da Arismetica Necessaria*, publicado em 1624.

Quanto à estrutura das obras, e em termos do enquadramento das regras comerciais, Ruy Mendes apresenta como pilares as «regras básicas» para chegar às «regras mais complexas», tal como o fizera com a aritmética para inteiros e depois para quebrados, considerados números mais «complexos». O terceiro tratado da *Pratica d'Arismetica* espelha esta organização quando Ruy Mendes introduz as sete regras: quatro regras de três, a regra de cinco, a regra sem nome e a regra de mudar, ou seja, explora os instrumentos que vão ser necessários aos cálculos intermédios nas regras de companhias, nas regras de baratas, nos câmbios, na regra de quarto e vintena e na regra da conta de Flandres. No reconhecimento de uma base assente na regra de três, Mendes é acompanhado por Gaspar Nicolas e por Bento Fernandes que, situam este tema entre os primeiros temas expostos nos seus trabalhos. Quanto ao uso de uma linguagem própria associada aos procedimentos na regra de três, Ruy Mendes é o único a notar a importância do uso do «se», isto não quer dizer que esta palavra esteja ausente nos enunciados de Nicolas e Fernandes, contudo, Mendes preocupa-se com este pormenor. Sobre os «nomes» para a regra de três, estão mais próximas as designações de Nicolas e Fernandes, tendo em conta a semelhança dos termos utilizados. No caso dos quebrados, tanto Mendes como Nicolas dão um algoritmo que «evita» a multiplicação e a divisão de quebrados. Ainda que a regra de três possa assumir diferentes designações, como o referimos no início do presente capítulo, os aritméticos portugueses de Quinhentos optaram por utilizar a expressão «regra de três» em vez de «regra das proporções» ou «regra

dourada», como também era conhecida. A primeira expressão parece ser a mais comum entre os tratados de aritmética escritos nos séculos XV e XVI [Labarthe, 2004, v. I, p. 131]. Nos três autores, estão presentes enunciados mercantis que dão sentido à aplicação da regra.

Mergulhando mais no mundo mercantil, temos as regras de companhias como tema comum aos três aritméticos. Ruy Mendes estabelecer um paralelo entre regras de companhias e regras de três. Gaspar Nicolas não refere a regra de três nas companhias e Bento Fernandes afirma que é uma regra usual entre mercadores, estabelece as «companhias chaãs» e recorre a estas sempre que necessário. Todos os autores tratam as companhias à razão de «tanto por cento/tanto por tanto» à semelhança do que fora feito para a regra de três. Sendo estas regras um meio de partilha proporcional, as propriedades das proporções não figuram nestes tratados mas são «identificadas» através das resoluções e dos enunciados, nem sempre claros, como o observamos em algumas situações: notámos hipóteses implícitas e mudanças de condições nem sempre descritas. A diversidade de problemas propostos visa, sobretudo, conhecer os ganhos individuais dos sócios na companhia, o que nos parece ser natural no seio dos negócios. Nos enunciados expostos deparamo-nos, com outras «incógnitas», tais como os investimentos individuais ou tempos na companhia entendidos como questões «menos naturais» e que, visam sobretudo, uma vontade de manipular os entes matemáticos pondo em jogo quantidades proporcionais. Há uma manivesta intenção de estender a Matemática para o comércio à Matemática «pour elle-même».

Os «baratos» são outras regras de relevo no mundo mercantil. As regras de baratas podem ser simples ou compostas e com tempo (ou a «termo»). As abordagens de Ruy Mendes e de Gaspar Nicolas são muito próximas, contudo, este último identifica as baratas simples com a regra de três e não desenvolve o tema «baratas com tempo». Bento Fernandes não trata as baratas simples mas traz uma inovação: trata-se da regra das baratas pela «regra da cousa». Nos procedimentos que exhibe há uma mudança de linguagem que o leva a identificar o «preço no barato» com uma «cousa». No algoritmo dado aparece a regra de três e o autor manifesta habilidade em operar com o que atualmente designamos por «monómios semelhantes», embora envolvidos numa resolução extensa e bastante detalhada na forma retórica, o que traduz a persistência de uma ligação muito forte às palavras e uma dificuldade em adotar «novos modelos algébricos».

Os problemas de «câmbios» não são um exclusivo de Mendes, contudo este confere-lhe dois capítulos da sua obra. No «câmbio real» Ruy Mendes refere a letra de câmbio que, no

século XVI era o meio de pagamento e crédito usual nos circuitos comerciais europeus. Com a expansão ibérica, este era um mecanismo vital numa economia de grande dimensão espacial a nível dos negócios e dos investimentos e, Mendes não foi alheio a esta realidade.

As ligas da prata e do ouro conduzem-nos a uma realidade ligada ao fabrico de moedas e lingotes. Aparecem nos tratados na forma de enunciados e tabelas de valores. Os problemas abordados envolvem noções como a de mistura de metais, incluindo os preciosos, com vista a determinar uma «lei» da prata ou do ouro. Do ponto de vista matemático, estes problemas, no seu aspeto mais complexo, conduzem-nos a sistemas lineares indeterminados. São disso testemunho as situações propostas por Bento Fernandes. As variáveis em jogo encontram-se ligadas à ideia de «medir» quantidades para servir o objetivo de ter uma maior ou menor lei do metal precioso numa dada liga metálica.

As regras de companhias, as baratas, as ligas e os câmbios, diretamente ligadas ao mundo mercantil, como afirmam os próprios autores, são partilhadas por um conjunto de tratados escritos nos séculos XV e XVI, onde se enquadram as obras escritas na Península Ibérica. A conceção destas obras tem por base um conjunto de modelos que serviam mercados e mercadores, no seu quotidiano. Queremos ainda referir a presença de uma forte componente formativa, imprescindível aos que se queriam movimentar numa teia comercial com características bastante complexas de diversos pontos de vista: distribuição de lucros, valorização/desvalorização de produtos, câmbios, fabrico de metais preciosos, variações de valores, impostos, entre outros. As aritméticas portuguesas, à semelhança das obras escritas noutros países para o mesmo fim, apresentaram modelos aritméticos e acompanharam esta tendência para responder às necessidades através da formação dos mercadores como o referem os seus autores. A perceção da necessidade de modelos eficazes no quotidiano dos negócios levou os três aritméticos a escrever sobre dois temas «locais» e relativos aos negócios nacionais com projeção internacional, como o foi o comércio das especiarias. A regra de quarto e vintena propõe um modelo para o cálculo de um imposto na Casa da Índia sobre as mercadorias do Oriente. A regra da conta de Flandres aparece como um modelo aplicado à «viagem das mercadorias» pela Europa através da feitoria da Flandres. Viajar implicava variações de «preços», «pesos» e «medidas». O próprio capital vai até às praças mais famosas numa procura de aplicações financeiras com vista a um melhor rendimento. Os nossos aritméticos são atores neste palco de forte interação entre o mundo real e o modelo aritmético e, como afirma Bento Fernandes «...a Mathemática he ho assento, fundamento e

escada segura pera sobir aas outra sciencias... (...) porque pera alcançar as outras sciencias he necessário conta, peso e medida» [Fernandes, 1555, prologo]. As suas palavras traduzem uma forte compreensão do papel dos modelos aritméticos para uma representação da realidade comercial.

## **TERCEIRA PARTE**

### **AS FONTES**



## Capítulo 1 – A herança

*Frey Lucas de Sam Francisco que foi nesta arte grande mestre que compilou e compos huã obra d'arismetica e geometria* [Nicolas, 1963, f. 51 f].

---

### I. Introdução

Que obras matemáticas teriam inspirado os aritméticos portugueses de Quinhentos na redação dos seus tratados de aritmética prática? Será difícil determinar a legitimidade desta questão, dado que nos arriscamos a não encontrar uma resposta, a não ser que os próprios autores mencionem as suas fontes. Na generalidade as fontes são omissas, a noção de plágio não existia e os autores, como viria a referir Guiral Pacheco «comiam todos por mão alheia» [Pacheco, 1624, prologo]. O estado atual dos estudos sobre as fontes presentes nas aritméticas portuguesas não nos permite ter grandes certezas sobre quais foram os trabalhos que inspiraram dos nossos aritméticos. Sobre o *Tratado da Pratica d'Arismetica*, Gomes Teixeira diz o seguinte:

Dá-lhe um interêsse especial a circunstância de o autor do livro ter recolhido alguns problemas considerados nas obras de Frei Lucas de Burgo, como êle próprio diz, sendo assim talvez o primeiro a fazer notar a nossa Península o célebre matemático italiano que depois de Marco Aurel na Espanha, e principalmente Pedro Nunes, em Portugal, engrandeceram, ensinando as suas teorias algébricas [Teixeira, 1934, p.98].

Mesmo os estudos mais recentes mostraram que o *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et proportionalita* de Luca Pacioli, editado em 1494, parece ter sido uma fonte e um modelo de organização que predominou na arquitetura dos tratados ibéricos, tal como o sublinha Javier Docampo Rey, no seu artigo «Reading Luca Pacioli's *Summa* in Catalonia : An early 16th-century Catalan manuscript on álgebra and aritmetic» [Docampo, 2006]. Entre os três tratados aqui em estudo é na obra de Gaspar Nicolas que vem mencionado o nome de Luca Pacioli. Nem Ruy Mendes, nem Bento Fernandes reclamam este autor. No entanto Gomes Teixeira atribui fontes de inspiração ao último como podemos observar na sua obra sobre a *História da Matemática em Portugal*:



Os livros de Frei Lucas de Burgo e de Gaspar Nicolas inspiraram outro aritmético português, Bento Fernandes, na composição do seu Tratado da arte d'Arismetica, publicado em 1555... [Teixeira, 1934, p.99].

Recentemente, Maria do Céu Silva mostrou, no artigo «The algebraic contentes of Bento Fernandes' *Tratado da arte de arismética*» [Silva, 2008], resultados que nos levam a crer que aquele autor não conhecia o *Summa* e que as suas fontes têm uma outra proveniência.

No desenrolar desta secção vamos considerar uma «fonte segura» quando um autor cita outro e, para as obras aqui em estudo, é o que faz Gaspar Nicolas. Sendo este caso raro, recorreremos à comparação de textos sobre um mesmo assunto, que analisaremos em paralelo com o fim de avaliar semelhanças ou diferenças e assim determinar um certo «grau de parentesco» entre a obra e uma possível fonte. Vamos utilizar este critério para pôr em paralelo alguns extratos do *Sumario breve de la practica de Aritmetica*, de Juan Andrés, publicado em 1515 e da *Practica d'Arismetica* de Ruy Mendes. A razão desta escolha prende-se com a afirmação de Marques de Almeida sobre a semelhança entre as duas obras em termos de estrutura. Esta afirmação despertou a nossa curiosidade e vontade de averiguar se existem outros aspetos comuns às duas obras.

A fim de procurarmos alguma proximidade entre uma obra e as suas eventuais fontes, vamos ainda ter em conta os temas abordados que nos pareçam ter alguma especificidade dentro do corpus aritmético considerado. No caso português, a abordagem ao tema Geometria é realizada unicamente por Gaspar Nicolas. Tivemos então curiosidade de indagar se existiria também outra fonte para além daquela reclamada pelo autor. Numa linha condutora sobre a influência das Espanhas, escolhemos o *Tractado subtilissimo d'arismetica y de geometria* de Juan Ortega, edição de 1512, dado que este tratado contém o tema Geometria. Procuramos possíveis afinidades entre as duas abordagens ao mesmo tema, a de Nicolas e a de Ortega.

Dado que as obras portuguesas aqui em estudo distanciam-se no tempo em espaços consideráveis, seria de esperar que cada autor recorresse aos anteriores como fontes de inspiração. Pretendemos usar o que os próprios nos dizem para tentar montar um possível cenário.

## II. O que nos dizem os aritméticos portugueses de Quinhentos acerca das suas fontes nacionais

O *Tratado da Pratica d'Arismetica*<sup>136</sup> de Gaspar Nicolas marcou o início da edição deste tipo de obras em Portugal. O autor deixa claro quais foram as suas fontes, quando cita Frei Lucas de Borgo, tal como já referimos, contudo, há que observar que o livro de Nicolas está longe de ter as características enciclopédicas do *Summa*. Outra informação que se tem deste tratado é que conheceu múltiplas edições<sup>137</sup> o que nos leva a crer na boa aceitação, credibilidade e popularidade.

Seria de esperar que o texto de Gaspar Nicolas fosse uma fonte para os aritméticos vindouros, contudo, espanta-nos a afirmação de Ruy Mendes, de certo modo seu sucessor, quando faz alusão à necessidade de um livro de aritmética no reino, sem qualquer referência a trabalhos anteriores nesta área. Não cremos que Ruy Mendes desconhecasse o trabalho e o prestígio do seu antecessor mas não temos elementos que nos conduzam a afirmar que Nicolas está entre os aritméticos referidos por Mendes<sup>138</sup>. Recordemos o reconhecido prestígio do autor do *Tratado da Pratica d'Arismetica* mesmo no ambiente da náutica portuguesa, tal como o refere Valentim Fernandes na sua obra *Reportório dos Tempos*<sup>139</sup> onde apresenta uma tábuia com declinações solares que fora retirada de Zacuto pelo honrado Gaspar Nicolas. Estamos então perante alguém com competências reconhecidas nos saberes da época e bem enquadrado no meio da ciência que então desabrochava no reino português.

Ruy Mendes ao afirmar ser necessário um livro de aritmética no reino, «vendo a necessidade que nestes reynos avia hum livro d'Arismetica» [Mendes, 1540, prologo], pretende valorizar o seu trabalho. Esta ideia é reforçada quando diz que tirou «ho m[ilhor] e mais necessario de outros muytos livros» [Mendes, 1540, prologo]. Deduz-se que vai apresentar uma obra com qualidade. Ainda que a *Pratica* trate de temas muito próximos dos que encontramos no tratado de Nicolas, fá-lo com outro estilo, tal como já referimos. Há um cuidado pedagógico que se manifesta no modo de introduzir os assuntos, na estrutura da

---

<sup>136</sup> Referimo-nos à primeira edição (1519).

<sup>137</sup> Sem contar com a edição de 1519, a obra de Gaspar Nicolas conheceu múltiplas edições no século XVI: 1530, 1541, 1551, 1573, 1594). No século XVII registam-se as edições de 1607, 1613 e 1679. Já no século XVIII houve uma edição em 1716.

<sup>138</sup> Sobre o «Produto de quebrados», a afirmação que encontramos em Ruy Mendes e Juan Andrés, vinda de Pacioli, não se encontra no tratado de Nicolas [Mendes, 1540, f. 44], [Andrés, 1515, f. 65].

<sup>139</sup> O *Reportório dos Tempos* precedeu de um ano a primeira edição do tratado de aritmética de Nicolas.

obra, no deixar de lado alguns assuntos considerados clássicos, como por exemplos os problemas das heranças e das caminhadas. Constatamos que existem pontos de interseção entre os dois tratados, contudo, nada podemos concluir sobre uma transmissão no sentido de Nicolas para Mendes, dado que, observámos temas que também marcam presença noutros tratados e fazem parte de um conjunto de enunciados que foram passando de autor em autor ao longo dos tempos.

Bento Fernandes, não faz qualquer referência aos seus antecessores<sup>140</sup>. Embora a sua obra contenha temas comuns aos tratados portugueses anteriores. Verificamos uma organização diferente e abordagens com objetivos diferentes em muitos temas propostos, tal como descrevemos no estudo comparativo que temos vindo a apresentar. Ainda sobre este tratado, os temas clássicos presentes nas aritméticas práticas precedentes marcam a sua presença na obra de Fernandes, em conjunto com os relatos das vivências do autor como mercador, ou dos que lhe são próximos, nas feiras de Medina del Campo. Mas o autor denota ainda uma vontade de tratar assuntos da Matemática, que embora «mascarados» com enunciados comerciais não deixam de trazer novidades ao corpus aritmético português de Quinhentos, como a *regra da cosa* e as «baratas» por esta mesma regra.

Devemos ter cuidado em afirmar que existe uma linha de influência na aritmética portuguesa de Gaspar Nicolas para Ruy Mendes e destes para Bento Fernandes. A um leitor pouco atento, pode parecer que os nossos aritméticos falam todos do mesmo nas suas obras e, portanto, inspiraram-se uns nos outros. Estes autores, à semelhança de outros, partiram de um tronco de assuntos comuns, que abordaram, cada um à sua maneira, conjugando no testemunho escrito que nos deixaram, as suas vivências e a sua formação nos saberes matemáticos da época.

---

<sup>140</sup> Queremos dizer que não existem na sua obra referências explícitas a Gaspar Nicolas e Ruy Mendes.

## CAPÍTULO 2 – Fontes explícitas e fontes implícitas

*...determiney de cõpor ho presente livro no qual decretey as cousas que pelo reportorio avãte aparecem posto que muyto trabalho e vigilancia tirando as forças e ho m[filho]r e mais necessario de outros muytos livros [Mendes, 1540, prologo]*

---

### I. Introdução

M. Almeida afirma, ainda que «com alguma cautela» que existem quatro autores subjacentes ao desenvolvimento dos aritméticos portugueses quinhentistas: Luca Pacioli com o *Summa* (1494), Bradwardine (1290-1349), autor de *Arithmetica et Geometria*, republicada em Valência em 1503, Juan Ortega cujas sucessivas edições estão bem documentadas nas bibliotecas portuguesas e Juan Andrés com o *Sumario breve de la pratica Aritmetica*, publicado em Valência em 1515, influenciador direto de Ruy Mendes. Uma questão que M. Almeida deixa em aberto é a influência de Chuquet, com o *Triparty en la science des nombres* (1484) na aritmética portuguesa do século XVI e admite a existência de laivos da sua influência na Península Ibérica, feita por tradição oral, dado que Antich Rocha o cita na sua obra [Almeida, 1994, v. I, p. 101].

A referência a Pacioli e a Bradwardine é dada pelo próprio Gaspar Nicolas no seu tratado ao abordar o problema das laranjas [Nicolas, 1963, f. 72 f] como veremos com mais detalhe em II do presente capítulo. A par com Bradwardine vem o nome de Euclides e, segundo Nicolas, duas fontes de Pacioli.

Os nomes de Ortega e Andrés não são referidos nas obras portuguesas, no entanto, estamos de acordo com M. Almeida quando refere a presença de uma tradição oral forte. Ruy Mendes, no prólogo da sua obra menciona ser importante registar o saber, tal como vimos no Capítulo 3, II.2 da Primeira Parte, fazendo uma referência implícita a fontes que «andam de boca em boca».

No caso de Chuquet, estudos recentes, realizados por M. Spiesser, mostram que a sua obra ficou esquecida durante vários anos o que não contribuiu para um reconhecimento do autor na sua época. Étienne de la Roche, provavelmente aluno de Chuquet, foi o responsável pela divulgação do trabalho do mestre numa publicação de 1520, citada por alguns matemáticos renascentistas [Spiesser, 2005]. Se existiu uma influência de Chuquet em

Portugal ela terá vindo depois desta data, quando já tinha sido publicada a primeira edição do tratado de Gaspar Nicolas.

É reconhecida a influência de Chuquet na aritmética espanhola do século XVI. No artigo «Fray Juan de Ortega's approximations, 500 years after» de [Benito et al., 2012] são descritos métodos de aproximação dos valores das raízes quadradas, presentes nas publicações do tratado de Juan Ortega de 1552 e 1563. Os autores colocam a hipótese de Ortega se ter inspirado no método das «regras da mediação<sup>141</sup>» presente no *Triparty*. Sobre a influência deste tratado em Portugal, ainda que «pela mão» de Étienne de la Roche, a questão continua em aberto.

## II. As referências a Luca Pacioli por Gaspar Nicolas

O *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalità* de Pacioli era conhecido em Portugal no início do século XVI. Comprovam-no a existência de um exemplar da edição de 1494 [Pacioli, 1494] na Biblioteca Nacional de Portugal e, dos três tratados aqui em estudo, é na obra de Gaspar Nicolas que vem mencionado o nome de Luca de Borgo. Também Pedro Nunes não é indiferente ao tratado de Pacioli e cita-o no *Libro de Algebra*. Não é nosso objetivo apresentar uma comparação exaustiva entre o *Summa* e o *Tratado da Pratica d'Arismetica*, vamo-nos cingir à reprodução dos extratos onde Nicolas cita a sua fonte que, segundo o padrão que definimos, constitui uma fonte segura.

Um problema exposto por Nicolas e onde vemos uma alusão a Pacioli, encontra-se numa secção intitulada «Numeros» [Nicolas, 1963, ff. 50 v-51 f] e que diz respeito à distribuição de uma certa quantia de dinheiro entre quatro homens. O autor declara que vai usar a regra já dada por Luca Pacioli:

Se te dicessem .4. ham dinheyro os tres sem o quarto tem .40. os tres sem ho terçeyro tem .36. os tres sem ho segundo tem .32. os tres sem ho primeyro tem .27. demandando que tem cada huũ. Faze como na passada asoma todos estes números de que fezeste mençam

---

<sup>141</sup> «Règle des nombres mohines (mediation)».

e asoma parte por menos huñ dos companheyros segundo Lucas de Burgo frade de Sam Francisco [Nicolas, 1963, f. 51 f].

Outra passagem onde o nome do frade italiano é usado é na resolução de um problema de «caminhadas»:

Porem see avisado que quando ho numero que ho primeiro andou ho qual as de partir por ho que ho segundo vai creçêdo que quando ho repartires e na repartiçam vier quebrado há tal regra nam se poderá fazer por esta via mays antes por outra como logo veras segundo Frey Lucas de Sam Francisco que foi nesta arte grande mestre que compilou e compôs huña obra d'arismetica e geometria .s. decrarou .11. livros de geometria e .4. d'arismetica de euclides e he de muyta authoridade e chamase ho somario desta obra ho frade eu delle tyrey muytas destas questoões que ho meu engenho nom abastaria ha fazer bora sem primeyro ho nom ver muyto bem [Nicolas, 1963, f. 54 v].

Esta citação contém ainda uma confissão e um elogio da obra de Pacioli. Nicolas assume ter tirado muitos assuntos e manifesta uma atitude humilde perante o grandioso trabalho daquele que considera um grande mestre. A admiração do autor português pelo mestre italiano ainda está bem espelhada noutro problema que transcrevemos:

Huñ homem espalhou .100. laranjas e dyz ha outro que as apanha huña a huña todas em huña pinha. Ora eu demandando em quantos passos apanhara aquella pinha aquellas laranjas tu saberás que ho frade poem esta questam per estes mesmos termos e diz que has laranjas serem apanhadas em .10100. passos e por que hos passos de .100. laranjas nam sam tantos querem dizer alguñs que escreveu falso. E que ho nam sentio e eu diguo que ña que ña he de creer que quẽ tyrou tã sotys regras como elle que entendia todas as obras de Euclides assy de gyometrya como de arismetyca e reprendeo a Bernardyno na gyometrya como podes veer na sua obra. Nam posso creer que obra escrevesse falsa salvo nam entendem as regras hos que taes reprehensões fazem por que dyzem que .100. laranjas sam apanhadas em .9900. passos verdade he que assy seria se começasse apanhar da primeyra laranja mas há vello d'entender que estee .100. passos d'espaco conven asaber que quando elle começar a apanhar que se hada faltar huñ passo pera as apanhar todas .100. [Nicolas, 1963, f. 72 f].

Não é dado o nome do frade mas depreende-se ser Luca Pacioli. A situação relatada remete-nos para a análise de um resultado. Gaspar Nicolas não só se manifesta de acordo com a solução do *frade* como critica aqueles que põem em causa o seu saber. Mais uma vez são exaltados os grandes conhecimentos de Pacioli em detrimento dos seus críticos que, segundo Nicolas, não entenderam as regras.

### III. A influência do *Sumario breve de la pratica de Aritmetica* de Juan Andrés na *Pratica d'Arismetica* de Ruy Mendes<sup>142</sup>

Na obra de Ruy Mendes não podemos determinar fontes seguras. O autor afirma ter consultados muitos livros mas mergulha-nos numa certa escuridão quanto às suas fontes. É nosso objetivo procurar algumas possíveis fontes deste autor e, Marques de Almeida dá-nos uma luz quando afirma que, a principal fonte de Mendes foi o *Sumario breve de la pratica de Aritmetica* de Juan Andrés, publicado em Valência em 1515, dado que as duas obras encontram-se organizadas em tratados que se dividem em capítulos, apresentando uma estrutura semelhante. Na *Pratica*, a estrutura consiste em sete tratados, por sua vez, cada um dividido em capítulos constituídos por partículas, tal como vimos no capítulo I da Parte II. Uma estrutura semelhante apresenta o *Sumario* de Andrés cuja publicação antecede a da *Pratica* vinte e cinco anos.

A metodologia utilizada nesta secção do nosso trabalho, assenta na análise de uma seleção de extratos de textos das duas obras que nos pareçam ilustrar algum grau de familiaridade.

Juan Andrés é dado como um clérigo de Zaragoza e a sua obra, *Sumario breve de la pratica de Aritmética*, foi publicada em Valência 1515. Estudos recentes mostram que Andrés tem uma origem muçulmana, tendo-se convertido ao cristianismo em 17 de Agosto de 1487. Foi ordenado sacerdote e dedicou-se à conversão de muçulmanos em Valência<sup>143</sup>. Andrés apresenta-nos assim a sua obra: «...se cõtienẽ diez tratados y cada tratado cõtiene ciertos capítulos y cada capºcõtiene ciertos artículos» [Andrés, 1515, f. 3]. Esta é também a estrutura proposta por Ruy Mendes para a *Pratica*, tal como já mencionámos. Ainda que

---

<sup>142</sup> Este tema foi objeto de um artigo submetido à Revue d'Histoire des Mathématiques da SMF e encontra-se no Anexo 11.

<sup>143</sup> Elena Ausejo, *Nuevos datos sobre Mosén Juan Andrés, autor de Sumario Breve d'la Pratica dela Arithmetica (1515)*, Actas del XII Congreso de la SEHCYT (a publicar).

estruturalmente semelhantes, observam-se algumas diferenças. No caso de Mendes o documento divide-se em sete tratados, contra os dez tratados de Andrés. Vimos também que, na *Pratica*, cada tratado divide-se em sete capítulos e no caso do *Sumario* temos um número variável de capítulos por tratado. Uma outra diz respeito aos utensílios de cálculo que Andrés apresenta, como é o caso das tabelas relativas ao cálculo digital. Encontrámos estas mesmas tabelas no *Summa de Aritmética, Geometria, Proportioni et Proportionalita*, de Luca Pacioli, publicado em Veneza em 1494. O tratado de Mendes não faz qualquer alusão ao cálculo digital, nem a qualquer tabela relacionada com o assunto. Encontrámos ainda diferenças relativamente à introdução dos números. No primeiro tratado do *Sumario*, Juan Andrés apresenta elementos de aritmética especulativa. Define quantidades, discretas e contínuas, número primo e número composto, e um vasto leque de números, tais como, pares ímpares, lineares, retangulares, quadrados, sólidos, cúbicos, triangulares, circulares, supérfluos e perfeitos. A opção de introduzir elementos de aritmética especulativa em paralelo com o cálculo ensinado nos tratados de algoritmos é uma prática referida por Maryvonne Spiesser como o testemunho da divisão binária que, distingue por um lado as diferentes técnicas de cálculo, de outro os meios, através dos quais se pretende ensinar a calcular [Spiesser, 2003, pp. 9-10]. Ruy Mendes marca alguma «modernidade» dado que, uma abordagem boeciana aos números está ausente na *Pratica*. Este autor apresenta os algarismos<sup>144</sup>(as *letras*) da aritmética desde o primeiro tratado da *Pratica*, enquanto Andrés o faz no segundo tratado do *Sumario*. Ainda assim, podemos observar algumas semelhanças entre o segundo tratado de Andrés e primeiro da aritmética de Mendes. Por exemplo, as duas introduções são redigidas em termos semelhantes e ambos apresentam as sete *especies* da aritmética:

Seguese o primeiro tractado deste presente livro : no qual decrararey as sete especies d'arte darismetica por numeros inteiros: as quaes sam as seguintes. Nomear. Somar. Demenuir. Multiplicar. Repartir. E progressão. E tirar raízes quadradas e cubecas. O qual tractado tẽ sete capitulos e cada capitulo tẽ certas partículas [Mendes, 1540, f. 1].

para Ruy Mendes. Temos uma introdução semelhante segundo Juan Andrés:

---

<sup>144</sup> Referimo-nos aos algarismos de 0 até 9.



Segundo tractado deste presente libro tracta delas siete especias del arte dela arismetica asaber es nombrar sumar restar multiplicar y partir progresion y extracion de rayzes quadradas y cubicas enel qual tratado se contienen siete capitulos y en cada capitulo se contienen ciertos artículos [Andrés, 1515, f. 17].

Passemos à apresentação sucinta dos temas dominantes na obra de Juan Andrés, com o objetivos de estabelecer um paralelo com os assuntos explanados por Ruy Mendes. A Tabela 10 dá-nos uma lista resumida dos principais tópicos presentes no *Sumario*. Note-se que a regra da cousa é mencionada sem contudo, ser estudada ou utilizada no documento.

Tabela 10: Temas presentes no Sumario de Juan Andrés

<b>J.A.</b>
Definição de número (no sentido boeciano)
Operações com inteiros
Progressões com inteiros
Raíz quadrada e raíz cúbica com inteiros
Operações com quebrados
Regra de três
Regra de reduzir moedas
Regra de companhias
Regra de baratas
Regra de câmbio
Regras da liga de prata
Regra de falsa posição (simples e dupla)
Problemas

Podemos observar um conjunto de assuntos comuns às duas obras e que fazem parte dos temas tradicionalmente presentes nos tratados de aritmética mercantil. Contudo, sublinhamos a presença de regras ligadas à atividade comercial portuguesa na *Pratica*. Estas regras serão neste contexto, designadas por «regras locais», referimo-nos à regra de quarto e vintena e à regra da conta de Flandres, diretamente relacionadas com aplicação do imposto na Casa da Índia e o comércio português na Flandres.

Uma leitura do *Sumario* e a *Pratica* leva-nos a constatar que algumas passagens, lidas em paralelo, apresentam muitas semelhanças. Por exemplo, encontramos definições semelhantes, problemas enunciados de modo muito próximo, senão utilizando os mesmos termos linguísticos e numéricos. Esta familiaridade, que vai para além da estrutura dos dois tratados, vem reforçar a ideia que Ruy Mendes conhecia a obra de Andrés ou que ambos tiveram uma fonte comum.

Pretendemos ilustrar as nossas afirmações com alguns extratos de textos que nos mostram o grau de proximidade entre duas obras. Assim, vamos centralizar a nossa análise com base em textos, exemplos e enunciados «semelhantes», no uso das quatro expressões (dições) e na referência a Luca Pacioli que, embora explícita na palavra de Juan Andrés é omissa numa mesma argumentação apresentada por Mendes.

A palavra «semelhante» aparece aqui no sentido de exprimir as mesmas ideias, utilizar eventualmente as mesmas formas verbais, usar os mesmos valores numéricos, o mesmo método de resolução, um enunciado que, lido em paralelo entre os dois textos, apresenta diferenças ínfimas.

### **Textos semelhantes**

Escolhemos o exemplo do texto sobre a origem dos números quebrados. A versão dada por Ruy Mendes no seu primeiro tratado corresponde ao mesmo texto que encontramos no segundo tratado de Juan Andrés. Em termos de ideias e de vocabulário utilizado encontramos dois textos muito semelhantes e correspondem respetivamente ao que reproduzimos:

Na qual quero declarar a quarta cousa que sera saber donde naceo ho tal numero quebrado e donde foy seu primeyro principio: pera o qual aveis de saber que ho numero quebrado naceo e principiou da especia de repartir por inteiro quando ficou algũa por repartir como tendes visto atras na dita especia: porque como ficou numero por repartir por causa de nom poder ho partidor ja nelle entrar foy necessário quebrar o que assi ficava pera o acabar de repartir: e como assi fez começou logo dali ho tal numero quebrado: e nam de nenhũa especia das de atras [Mendes, 1540, f. 35].

e

Articulo terçero de donde nasce el numero quebrado: y has de saber que los números quebrados nascen de partir numeros enteros a numeros enteros asaber es quando el partidor no entra integralmente enla suma partidera [Andrés, 1515, f. 56].

O vocabulário utilizado nos dois casos é muito próximo e realce-se a escolha comum do verbo «nascer», o que vem confirmar uma mesma ideia e uma mesma base na definição dada. No nosso entender, esta escolha está longe de uma simples coincidência.

### Exemplos semelhantes

Um dos primeiros exemplos propostos por Andrés para por em prática o algoritmo da multiplicação é efetuar o produto de 7365 por 435. Este caso é apresentado sem referência a qualquer unidade. Pretende-se entender o «mecanismo» do algoritmo. Encontrámos exatamente a mesma operação na *Pratica* de Mendes embora num contexto ligeiramente diferente dado que está associado ao enunciado seguinte: «7365 côvados de pano a 435 reais cada côvado<sup>145</sup> quantos reais são» [Mendes, 1540, f. 13]. Esta abordagem ligada a um «caso concreto» mostra, mais uma vez, o cuidado que o autor manifesta com as aplicações pedagógicas. Um outro exemplo que queremos referir encontra-se ligado às raízes quadradas. Os dois autores propõem determinar a raiz quadrada de 55225 utilizando o mesmo algoritmo [Mendes, 1540, f. 28], [Andrés, 1515, f. 53]. Notamos algumas diferenças em termos de notação. Enquanto Juan Andrés utiliza a mesma abreviatura que Pacioli,  $\mathbb{R}^a$ , quando se refere à raiz quadrada de um número «y has de saber que extracion de  $\mathbb{R}^a$ » [Andrés, 1515, f. 51], Ruy Mendes usa a linguagem natural e exprime-a por extenso.

Ainda a propósito da raiz quadrada, verifica-se uma diferença de linguagem no que diz respeito à introdução do assunto dada por cada um dos autores. Ruy Mendes considera as raízes associadas aos números que são quadrados perfeitos e designa-as por raízes próprias e, aquelas que estão fora deste caso chama-lhes raízes impróprias. Mendes, quando se refere às primeiras, ou seja, à relação entre um quadrado perfeito e a sua raiz, declara que não vai explicar esta relação dado que considera ser um assunto da geometria e o seu objetivo é não referir este tema. Vejamos como se justifica:

e este tal numero que assi se acha se chama rayz quadrada do outro: e o outro se chama numero quadrado: e não declaro aqui porque se chamẽ assi porque nõ faz o nosso proposito e entra ã materia de geometria. E aveis de notar que se nõ pode achar rayz da dita maneira a todos los numeros ãtes a muito poucos e aos outros lhe tiramos a rayz do

---

<sup>145</sup> Unidade de medida utilizada para tecidos delicados, como a seda e equivalente a 66 cm.

mayor numero quadrado que neles esta: ou a mais chegada a elles: porẽ deles mesmos ã nenhuma maneyra se pode tirar a ponto: e aveis de notar que aquelasrayzes que multiplicadas por si mesmas fazẽ todo o tal numero chamamos rayzes propias e as que o nõ fazem chamamos nõ propias [Mendes, 1540, f. 26].

Sobre o mesmo tema Juan Andrés introduz as raízes discretas, para os números que são quadrados perfeitos e as raízes sordas ou indiscretas para os outros números «...aquellas rayzes que se pueden apõto dar son dichas discretas si quiere quadradas oracionales y aquellas rayzes apunto no se pueden dar sino impropiamẽte son ditas rayzes sordas /o indiscretas» [Andrés, 1515, f. 51].

Os extratos semelhantes que aqui reproduzimos não são únicos, contudo, não é nosso objetivo apresentar uma lista exaustiva de situações onde as ideias dos autores de cruzam, como é o caso de determinar a raiz quadrada da fração  $\frac{9}{16}$ <sup>146</sup>.

### Enunciados semelhantes

Vamos escolher alguns enunciados que nos parecem semelhantes nas duas obras. Um exemplo comum está ligado à manipulação do quadrado de números. Na secção dedicada aos números quadrados os dois apresentam oito problemas sobre este tema. No caso de Ruy Mendes, os enunciados fazem parte do capítulo «...algumas cousas sobre numeros quadrados e tem 8 particulas» [Mendes, 1540, ff. 52-54] e para Andrés, «Cap. tercero delos nũeros quadrados que contiene 8 articulos» [Andrés, 1515, ff. 13-16]. Cada uma das oito particulas (articulos) corresponde a um problema.

Em termos de redação e da escolha dos números utilizados, observamos que cinco dos oito enunciados propostos por Mendes são os mesmos que podemos encontrar no *Sumario*. Eis um caso representativo. Rui Mendes escreve: «Qual sera aquelle numero que tirando delle dez o que ficar seja numero quadrado e ajuntado lhe os mesmos dez: o que fizer seja tambẽ numero quadrado» [Mendes, 1540, f. 52]. Temos o mesmo problema no *Sumario* «Dame un numero que juntando con el .10. faça numero quadrado y quitando del .10. queda numero quadrado» [Andrés, 1515, f. 15]. Outro exemplo em comum nas duas obras é aquele

---

<sup>146</sup> Os dois autores apresentam este problema em secções diferentes. Para Ruy Mendes [Mendes, 1540, f. 50] o problema da raiz quadrada de 9/16 consta na secção da aritmética das frações, enquanto Juan Andrés [Andrés, 1515, f. 53] aborda o mesmo caso na secção dedicada às raízes quadradas para inteiros e para frações.

que Mendes põe nos termos seguintes: «Qual sera aquelle numero quadrado que tirãdo delle o que se montar nas tres rayzes suas fique numero quadrado e ajuntando lhe ho mesmo faça numero tambémquadrado» [Mendes, 1540, f. 53].

Há que referir uma extensão do mesmo enunciado na *Pratica* que não encontrámos no capítulo correspondente do *Sumario* e que é relativo ao caso das quatro raízes: «E se dissera que tirando delle o que se montasse nas quatro raízes suas ficasse quadrado: e ajuntando lhe ho mesmo fosse também quadrado» [Mendes, 1540, f. 53]. Assinalamos ainda a presença nos dois tratados [Andrés, 1515, f. 14], [Mendes, 1540, ff. 53, 54] de outros enunciados semelhantes como é o caso da soma de dois ou três números ao quadrado ser ainda um número ao quadrado.

Parece-nos que a influência da obra de Juan Andrés sobre o tratado de Ruy Mendes ultrapassa a questão da estrutura comum e manifesta-se ainda pelo uso direto de textos, enunciados e exemplos numéricos.

### **As quatro «dições»**

Um assunto que chamou a nossa atenção na *Pratica d'Arismetica* foi a presença de uma *partícula*, que precede as operações com números quebrados, onde Ruy Mendes introduziu as quatro expressões (dições) que vai associar às quatro operações aritméticas: «quatro dições que nos servem, cõ/de/por/a» [Mendes, 1540, f. 39]. Representam as quatro operações básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão, respetivamente. Estas quatro expressões encontram-se também no *Sumario* e com o mesmo significado. Na tabela transcrevemos o processo apresentado pelos dois autores na forma de exemplos que escolhemos e que apresentam os mesmos números, num e noutro caso.

Tabela 11: Operações com números quebrados

Prática <sup>147</sup>	Sumário <sup>148</sup>
<p><i>somando tantos <b>cõ</b> tantos</i></p> $\begin{array}{ccc} 8 & 17 & 9 \\ \frac{2}{3} & & \frac{3}{4} \end{array} \quad 1 \frac{5}{12}$ <p style="text-align: center;"><i>cõ</i></p>	<p><i>tanto <b>con</b> tanto</i></p> $\begin{array}{ccc} 2 & \text{con} & 3 \\ \frac{2}{3} & & \frac{3}{4} \end{array} \quad \text{pratica dela figura} \quad \begin{array}{ccc} 8 & 17 & 9 \\ \frac{2}{3} & & \frac{3}{4} \end{array} \quad \begin{array}{r} 05 \\ 17 \\ -12 \\ \hline 1 \frac{5}{12} \end{array}$
<p><i>tirando tantos <b>de</b> tantos</i></p> $\begin{array}{ccc} 9 & \text{de} & 20 \\ \frac{3}{4} & & \frac{5}{3} \end{array} \quad 2 \frac{11}{12}$ <p style="text-align: center;"><i>de</i></p>	<p><i><b>de</b> tanto qui en paga tãto</i></p> $\begin{array}{ccc} 3 & \text{de} & 5 \\ \frac{3}{4} & & \frac{5}{3} \end{array} \quad \text{pratica dela figura} \quad \begin{array}{ccc} 9 & \text{de} & 20 \\ \frac{3}{4} & & \frac{5}{3} \end{array} \quad 2 \frac{11}{12}$ <p style="text-align: center;"><i>de</i></p>
<p><i>multiplicãdo tantos <b>por</b> tantos</i></p> $\begin{array}{ccc} 5 & \frac{150}{6} & 30 \\ \frac{5}{6} & \text{por} & \frac{30}{1} \end{array} \quad 25$	<p><i>tanto <b>por</b> tanto</i></p> $\begin{array}{ccc} 5 & \frac{150}{6} & 30 \\ \frac{5}{6} & \text{por} & \frac{30}{1} \end{array} \quad \text{pratica en figura} \quad \begin{array}{ccc} 5 & \frac{150}{6} & 30 \\ \frac{5}{6} & \text{por} & \frac{30}{1} \end{array} \quad 25$
<p><i>tantos repartidos <b>a</b> tanto</i></p> $\begin{array}{ccc} 3 & & 4 \\ \frac{1}{2} & \text{a} & \frac{2}{3} \end{array} \quad \frac{3}{4}$	<p><i>partir tantos <b>a</b> tantos</i></p> $\begin{array}{ccc} 1 & \text{a} & 2 \\ \frac{1}{2} & & \frac{2}{3} \end{array} \quad \text{pratica de la figura} \quad \begin{array}{ccc} 3 & \text{a} & 4 \\ \frac{1}{2} & & \frac{2}{3} \end{array} \quad \frac{3}{4}$

Observamos uma forte semelhança entre a *Pratica* e o *Sumario*, quer na escolha das mesmas expressões, quer na linguagem e no esquema associados a cada exemplo. O tratado de Gaspar Nicolas, ainda que faça parte do mesmo corpus que a *Pratica d'Arismetica*, não apresenta qualquer referência a estas expressões que fazem o lugar dos símbolos que hoje utilizamos para denotar as quatro operações aritméticas básicas. Seria de esperar que o tratado de Nicolas tivesse sido um modelo o que, pelo menos neste assunto, não aconteceu. O facto de

<sup>147</sup>[Mendes, 1540, ff. 39-45]

<sup>148</sup>[Andrés, 1515, ff. 60-68]

Mendes dedicar uma secção completa a um tema desta natureza sublinha de novo o seu espírito pedagógico e uma valorização de um tratado de memorização quando argumenta «Aveis de saber que temos quatro dições que aveis de trazer na memoria» [Mendes, 1540, f. 39].

### **Referência a Luca Pacioli**

Juan Andrés faz explicitamente alusão a Lucas de Borgo (Luca Pacioli). Por exemplo, sobre a multiplicação de frações, o autor contradiz o que afirma Lucas de Borgo :

... multiplicando quebrado solo por quebrado solo nunca sale ningũ entero ni tanto quanto sea el menor delos extremos y multiplicando quebrado solo por entero y quebrado y asi mesmo multiplicando entero y quebrado por entero y quebrado puede salir el produzindo que sea entero com quebrado y puede salir el producido entero solo sin ningũ quebrado encara que Lucas de Burgo en su tratado mayor dize el cõtrario [Andrés, 1515, f. 65].

A aritmética de Lucas de Borgo é um verdadeiro modelo como o refere o próprio Andrés na sua obra: «La qual cosa se faze por la regla que Lucas de Burgo puso en su tratado mayor del qual tratado yo he sacado y cõpilado la mayor parte deste libro» [Andrés, 1515, f. 58]. Na *Pratica* de Ruy Mendes, o nome de Luca Pacioli (Lucas de Borgo) não aparece mesmo quando Mendes retoma o mesmo argumento de Andrés sobre o produto de frações e escreve:

E multiplicando por qualquer das outras quatro maneyras pode ho numero terceyro acertar de ser inteyro somente ou inteyro e quebrado juntamente. Dado caso que algũs aritmeticos disseram do contrayo na terceya e quarta maneya [Mendes, 1540, f. 44].

Ainda que os dois textos transmitam a mesma mensagem, há uma diferença notável. Enquanto o primeiro refere explicitamente Lucas de Borgo, o segundo menciona «alguns aritméticos» sem precisar quais. Por que razão Mendes não nos dá nomes? Uma ideia é certa para nós, o autor diz-nos que conhece o trabalho de outros aritméticos (note-se o plural). Referir-se-á implicitamente a Pacioli e a Andrés? Este extrato de texto é particular, dado que, é a única passagem do *Sumario* onde o autor contesta um resultado que é o mesmo onde Andrés marca o erro de Pacioli. Fica-nos uma questão: Mendes adota a crítica de Andrés ou ele próprio lera o *Summa*? Infelizmente não temos dados suficientes que nos conduzam a

uma resposta a esta questão. Não há dúvida que o *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalità* de Pacioli era conhecido em Portugal no início do século XVI. Ruy Mendes não menciona o nome de Lucas Borgo e a questão fica em aberto.

Na época a que o nosso estudo se reporta era usual utilizar resultados sem citar as fontes. Ruy Mendes admite ter tirado o que de melhor vira noutros livros como o próprio refere «assuntos já vistos em outras obras mas que serão mais detalhados e organizados no livro ao ponto de não haver necessidade de mestre para as ensinar» [Mendes, 1540, prologo]. Não sendo as suas fontes seguras, estamos de acordo com Marques de Almeida quando ele afirma que o *Sumario* de Juan Andrés, considerado um tratado mais modesto que o seu modelo italiano, foi uma fonte importante para a conceção da *Pratica*. Contudo Ruy Mendes não efetuou uma simples tradução do tratado de Andrés. Apesar das duas obras se distinguirem em vários assuntos, como já referimos, partilham uma estrutura semelhante, textos, problemas e exemplos semelhantes e ainda, no uso das quatro «dições», o que nos leva a reforçar a ideia de uma influência do tratado de Andrés neste tratado da aritmética portuguesa de Quinhentos.

#### **IV. A Geometria de Juan Ortega e de Gaspar Nicolas: um tema e uma fonte comum?**

É sabido que Juan Ortega exerceu clara influência nos aritméticos do seu tempo [Almeida, 1994, v. I, p. 100]. Não restam dúvidas que a obra de Juan Ortega teve uma influência clara, como refere Marques de Almeida nos aritméticos do seu tempo e esta ideia é também reforçada por Rey Pastor quando afirma,

La Aritmética de Ortega alcanzó merecida fama en toda Europa, como lo prueban los elogios a de sus contemporáneos y las numerosas ediciones que alcanzó. Esta favorable estimación se refiere al carácter práctico del libro, escrito como dice su autor, «porque no passassen tantos fraudes como pasan por el mundo acerca de las cuentas» [Rey Pastor, 1934, p. 71].

A popularidade do trabalho de Ortega é também reconhecida por M. Labarthe,



... Publicado sob o título *Tratado subtilíssimo de Arismetica y de geometria* (título dado em particular à edição de Sevilha de 1534). Foi, se tivermos em conta o número de edições imprimidas, a mais popular das aritméticas da época. É também, de longe, a mais volumosa<sup>149</sup>.

Podemos admitir que a popularidade de Ortega chegasse a Portugal e colocar a hipótese de que tenha sido uma fonte para Gaspar Nicolas, embora este nunca o tenha mencionado, focalizando-se antes na obra de Luca Pacioli através das múltiplas referências a este autor ao longo do seu trabalho. O tratado de Gaspar Nicolas é, entre as obras de aritmética em Portugal do século XVI, o único que tem uma parte dedicada à geometria.

Nos tratados ibéricos de aritmética prática escritos nos séculos XV e XVI não é muito comum a presença de uma secção de Geometria. Dos tratados ibéricos que antecederam a primeira edição da obra de Nicolas, o *Summa de l'art d'aritmética* (1482) de Francesc Santcliment e o *Sumario breve de la pratica de la Arithmetica* (1515) de Juan Andrés não abordam o tema. É Juan Ortega que o faz e escolhe apresentá-lo no capítulo final do tratado. Esta foi também a escolha de Gaspar Nicolas, considerando que as regras da liga da prata são um apêndice que merece uma paginação diferente.

Sobre a geometria prática no seio da aritmética comercial entre os séculos XIV e XVI<sup>150</sup>, M. Spiesser realizou um estudo onde mostrou que são poucas as obras de aritmética produzidas em França e em Espanha que contêm problemas de geometria. Esta característica está presente nas aritméticas portuguesas. Apenas Gaspar Nicolas abordou esta temática. Entre os autores que escolheram a parte final para abordar o tema, temos Francés Pellos, no *Compendion de l'abaco*, impresso em Turim em 1492. Já anteriormente Chuquet apresentara, com o *Triparty*, um apêndice *Commant le science des nombres peut se appliquer au mesures de geometrie* (ff. 211-262) que, Étienne de la Roche remodelou num capítulo a constar no fim do tratado que publicou a partir da obra de Chuquet. Outros trabalhos incluem, entre os múltiplos problemas, enunciados de geometria. É o caso de *El arte del algarismo* da Real Colegiata de San Isidoro de Leon (ms. 46), que apresenta oito problemas de geometria, próximo do fim do tratado mas dispersos [Spiesser, a publicar].

---

<sup>149</sup> «...Publié sous le titre de *Tratado subtilíssimo de Arismetica e geometria* (titre donné en particulier à l'édition de Séville de 1534). Il fut, si l'on se rapporte au nombre d'éditions qui ont été tirées, la plus populaire des arithmétiques de de l'époque. C'est aussi, de loin, la plus volumineuse» [Labarthe, 2004, v. I, p. 46].

<sup>150</sup> «La géométrie pratique dans le milieu de l'arithmétique commerciale (XIV-XVI)» (a publicar).

No tratado de Juan Ortega a geometria é introduzida como «Regla de geometria (ff. 193-203)». É uma geometria da «medida» aplicada a triângulos, quadrados, círculos, fortelezas e pavilhões. M. Spiesser afirma que o desenvolvimento de Ortega segue o de Pellos, na medida em que utiliza praticamente os mesmos exemplos mas, enquanto o último não usa unidades de medida, o primeiro utiliza-as<sup>151</sup> [Spiesser, a publicar].

Tendo presentes a estrutura do *Tratado da Pratica d'Arismetica* de Gaspar Nicolas e do *Tractado subtilisimo d'arismetica y de geometria* de Juan Ortega e sobretudo a parte final, que trata da Geometria nas duas obras, podemos ser levados a pensar que o segundo foi uma fonte de inspiração para o primeiro, confirmada a presença deste tema comum e sabendo que a primeira publicação da aritmética de Ortega antecedeu em sete anos a de Gaspar Nicolas. Gomes Teixeira suspeitou de alguma ligação entre os tratados de Nicolas e Ortega,

Na Espanha, antes de aparecer em Portugal o livro de Gaspar Nicolas, tinham sido publicados os tratados de Aritmética de Ciruelo, Frei João Ortega e Siliceo. Seria interessante comparar com eles os do aritmético português, mas não me foi possível fazê-lo, por não ter podido obter os tratados daqueles autores [Teixeira, 1934, p. 99].

Comecemos por examinar alguns tópicos de geometria abordados pelos dois autores. Ambos começam por tratar a área de quadrados. No caso de Gaspar Nicolas, os quadrados com lados 10 ou 3. Sobre o quadrado de lado 15, propõe a determinação da sua diagonal. Para este fim é utilizado o que hoje designamos por teorema de Pitágoras e o valor encontrado para a diagonal é «raíz sorda» [Nicolas, 1963, f. 80], segundo afirma o autor sendo levado a apresentar um valor aproximado, referindo que despreza uma pequena quantidade «ha quantidade he tam pequena que casy senam emxerga assi que diras que ho diâmetro de huñ quadrado que per cada faça tẽ .15. que he .21. e três e quatorzavos» [Nicolas, 1963, f. 80]. Casos semelhantes são aplicados a retângulos e alguns exemplos são os que aparecem no *Summa* de Pacioli. É o caso da determinação da diagonal de um retângulo  $8 \times 6$ , com diagonal igual a 10. Juan Ortega começa com exemplos semelhantes para determinar áreas de quadrados, como o quadrado  $12 \times 12$ . Segue-se a determinação da diagonal de um quadrado  $8 \times 8$ . O valor apresentado para a diagonal é  $11 \frac{7}{23}$  sendo o valor da raiz quadrada de 128, sem referir a existências de «raízes sordas» como o faz Gaspar Nicolas. Os exemplos

---

<sup>151</sup> Juan Ortega utiliza as «canas» como unidade de medida.

de Ortega são variados e relacionados com a quadratura, inclui outros quadriláteros para além do quadrado. Gaspar Nicolas não apresenta qualquer um destes enunciados.

Na parte referente aos triângulos os dois autores começam com um exemplo que difere apenas na medida do lado do triângulo equilátero exibido. Para Gaspar Nicolas o valor do lado é 10 e para Juan Ortega é 20. Nos dois exemplos pretende-se determinar a altura do triângulo. A esta altura Gaspar Nicolas chama cateto e Juan Ortega, uma vez que enuncia os problemas como se as figuras representassem terras, refere-se à corda que atravessa a terra e é perpendicular ao lado donde passa a meio [Ortega, 1512, f. 194]. Também aqui a solução é referida pelo autor português como sendo uma «raiz sorda» o mesmo não o faz o autor espanhol quando apresenta o seu resultado.



Figura 39: Triângulo de Juan Ortega

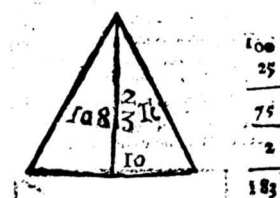


Figura 40: Triângulo de Gaspar Nicolas

Os valores das alturas dos triângulos que se propõem determinar e a resolução é feita de forma retórica, por aplicação do teorema de Pitágoras<sup>152</sup>. Relativamente a Gaspar Nicolas, a altura do triângulo em causa é  $8\frac{2}{3}$ . Se resolvermos o problema, em linguagem atual temos, para a altura  $h$  do triângulo

$$h^2 + 5^2 = 10^2 \Leftrightarrow h^2 = 75 \Leftrightarrow h = \sqrt{75}$$

Um valor aproximado de  $\sqrt{75}$ , com duas casas decimais é 8,66 que é também o valor aproximado de  $8\frac{2}{3}$  para o mesmo número de casas decimais, o que nos mostra que a solução de Gaspar Nicolas é «muito precisa», embora o autor não nos diga como chegou a este resultado.

Sobre a geometria dos triângulos, Juan Ortega propõe variados exemplos que traduzem a determinação da altura de triângulos, para além dos equiláteros, nomeadamente isósceles e escalenos, o mesmo não é realizado por Gaspar Nicolas que antes nos remete para um

<sup>152</sup> Utilizamos a designação atual.

problema que também encontramos no *Summa* de Pacioli. Trata-se de determinar a área do triângulo «desigual<sup>153</sup>» de lados 13, 14 e 15.

Sobre o círculo e a circunferência encontrámos figuras semelhantes e exemplos semelhantes nos dois autores, tal como evidenciamos através dos enunciados seguintes.

He huũ circulo que ho seu diâmetro .s. aquella linha que passa pelo meo he .7. demandando quanto he a sua circũferência .s. ha sua redondeza. Esta he a regra sempre ho diâmetro se multiplica por .3. e huũ setimo e atal multiplicação sera a redondeza do circulo. Ora multiplica .7. por .3. e huũ setimo e sam .22. justamente e tanto he a redõdeza ou circũferência [Nicolas, 1963, f. 82].

O problema corresponde à determinação do perímetro de uma circunferência de diâmetro igual a 7 unidades. O valor utilizado para  $\pi$  corresponde a  $3\frac{1}{7}$ . Se considerarmos valores aproximados de  $\pi$  e de  $3\frac{1}{7}$  com duas casas decimais, temos nos dois casos 3,14.

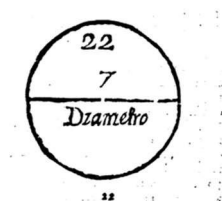


Figura 41: O círculo apresentado por Gaspar Nicolas

Juan Ortega exhibe um problema idêntico, sendo também o primeiro problema dedicado ao assunto,

<sup>153</sup> Designação utilizada por Gaspar Nicolas [Nicolas, 1963, f. 82].

Es una terra redonda la qual tiene por circuito .44. canas demandando quantas canas tendra por el diametro: y quãtas canas haura en toda la tierra: faras ansi: parte las .44. canas que tienan de redondez por tres y un setavo y vendrá ala partición .14. y tantas canas tendra el diámetro o sagita: pues para saber quantas canas tendrá la tal tierra faras ansi: multiplica la mitad del diámetro o sagita que son .7. por la mitad de las canas que tiene el circuito que son .22. y allaras que montan .154. canas y tantas diras que haura en tal tierra como veis figurado [Ortega, 1512, f. 197].



Figura 42: Círculo apresentado no enunciado do problema por Juan Ortega

Os enunciados baseados em situações ligadas ao real, são abundantes na obra de Ortega. Com frequência usa as «terras» e as suas dimensões.

Um problema comum aos dois autores e vindo de Pacioli, está relacionado com uma circunferência de diâmetro 14. Vejamos os dois enunciados. No caso de Juan Ortega temos

Es una tierra redonda la qual tiene por diámetro o sagita .14. canas: demandando que quantas canas tendrá la tal tierra por circuito. Y que quantas canas aura en toda la tal tierra: faras ansi para saber quantas canas tendrá en circuito que multiplicaras las .14. canas que tiene por diámetro por .3. e un setabo y montaran .44. canas: y ansi diras que tandra ala tal tierra por circuito .44. canas: pues para saber quantas canas haura en toda la tierra faras ansi. Multiplica la mitad de las canas que tiene el diámetro que son .7. por la mitad do circuito que son .22. y montaran .154. canas: y tantas aura en toda la tierra como veis figura [Ortega, 1512, f. 197].

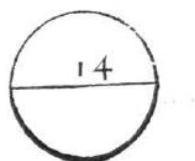


Figura 43: Círculo de Juan Ortega

O autor pretende fazer uma aplicação ao real, invocando de novo um terreno, para determinar o perímetro da circunferência de diâmetro igual a 14 unidades e a área do círculo com o

mesmo diâmetro. O enunciado correspondente de Gaspar Nicolas não menciona a «terra» antes propõe determinar a área de um círculo de diâmetro 14.

He huñ circulo que seu diâmetro he .14. pregũto quanta he a sua área .s. quãto he quando faze assi polo diâmetro sabes já buscar a circũferẽcia que se busca multiplicado por .3. e hũ setimo asi que teẽs sabido que um circulo de .14. braças de diametro que tem .44. braças de circunferẽcia. Ora sabido ho diametro e ha circunferẽcia se toma a metade de huñ e de outro . s. a metade da circunferẽcia com a metade do diametro e se multiplica huñ per outro e há tal multiplicaçam sera a area do dito circulo pois toma a metade de .14. que sam .7. e toma a metade de .44. que sam .22. e multiplica huñ pelo outro e sam .154. e tantas sam as braças em area do dito circulo ou redondeza como lhe quiseres chamar [Nicolas, 1963, f. 84].

Os dois autores dão-nos resoluções idênticas para os enunciados propostos.

Gaspar Nicolas propõe mais dois problemas relativos à determinação da área de círculos<sup>154</sup> e Juan Ortega dedica-se a problemas sobre a área de figuras que resultam de partes de um círculo e também da determinação do perímetro das mesmas, o que não observamos situações semelhantes na obra de Gaspar Nicolas.

Podemos observar que há problemas comuns até que os dois autores prolongam as suas «geometrias» manifestando interesses diferentes<sup>155</sup>. Juan Ortega resolve problemas, na sua maioria ligados a formas de terrenos que, podem ser variadas, desde elipses, pentágonos não regulares, trapézios, losangos, hexágonos, entre outros. Os enunciados estão sobretudo ligados à determinação de áreas e de perímetros. Dois problemas sem paralelo em Gaspar Nicolas dizem respeito à troca de terras com formas geométricas diferentes mas com a mesma área. Nomeadamente, trocar uma terra quadrada de lado 10 por uma terra circular ou por uma terra que tenha a forma de um triângulo equilátero. Estes problemas pressupõem a determinação da área do quadrado e consequentemente, a determinação do diâmetro de um

---

<sup>154</sup> Nestes casos o autor a apresenta uma alternativa para a determinação da área de um círculo. Trata-se de usar o que podemos traduzir pela fórmula  $A = d^2 \times \frac{11}{14}$  [Nicolas 1963, fol. 84, 85]. Luca Pacioli resolve o mesmo problema e usa a mesmo método de multiplicar o diâmetro ao quadrado por  $\frac{11}{14}$  [Pacioli, 1494, Geometria Cap. II, 30].

<sup>155</sup> Gaspar Nicolas resolve problemas com objetos tridimensionais e faz alusão a torres, escadas, pias, mós, chafarizes, paredes, entre outros. Neste mesmo tema, Juan Ortega refere nos seus problemas fortalezas, fontes, casas fortes e um problema com uma tenda. Os problemas apresentados pelos dois autores relatam situações que não podemos considerar semelhantes, que em termos numéricos quer de figuras utilizadas [Nicolas, 1963, f. 85 v-94 v], [Ortega, 1512, f. 202 f-203 v].

círculo, ou no outro caso, da medida do lado de um triângulo equilátero, as duas figuras com área igual à do quadrado inicial. Neste contexto, Juan Ortega determina raízes quadradas. Os valores aproximados que obtém, foram sofrendo ajustamentos segundo a edição considerada. Esta mudança ainda hoje é motivo de estudo dado que, em edições posteriores<sup>156</sup> à de 1512, o método que o autor teria utilizado para encontrar as boas aproximações<sup>157</sup> remetem-nos para o uso da «règle des nombres mohines» de Nicolas Chuquet e não da clássica fórmula de Herão. Este assunto é já referido por Rey Pastor<sup>158</sup> que salienta o trabalho de Juan Ortega no âmbito da determinação das raízes quadradas, como ímpar do seio dos aritméticos do seu tempo.

Ainda que seja reconhecida a influência de Juan Ortega nos aritméticos do seu tempo, seria abusivo concluir que Gaspar Nicolas conhecesse a sua obra. M. Labarte<sup>159</sup> afirma que, embora Ortega não refira o nome de Pacioli, a sua obra está impregnada da cultura aritmética italiana, da qual o *Summa* de Pacioli é o modelo. Gaspar Nicolas admitiu que a aritmética de Pacioli foi a sua fonte, o que nos permitirá situar Nicolas na mesma linha de Ortega, ou seja, com trabalhos motivados por uma fonte comum na tradição da aritmética italiana. As primeiras edições dos dois tratados aqui em estudo estão separadas por apenas sete anos, antecedendo o *Tractado subtilisimo d'arismetica y de geometria* de Ortega o primeiro tratado português de aritmética. Conhecidos os estreitos laços entre os reinos de Portugal e Espanha na época de Quinhentos, a circulação de gentes e saberes, não faltaram motivos para que Gaspar Nicolas, como homem experiente de saber e de vivências pudesse receber mesmos os ecos e saberes que Frei Juan Ortega.

## Conclusão

Neste breve estudo realizado sobre as fontes dos aritméticos portugueses de Quinhentos parece-nos ter encontrado dois caminhos: por um lado Gaspar Nicolas que cita uma fonte segura com origem na aritmética italiana e por outro, a presença de um certo «grau de parentesco» entre textos e ideias, embora as fontes sejam omissas. Esperávamos encontrar

---

<sup>156</sup> Referimo-nos às edições de 1547, 1537 e 1542.

<sup>157</sup> Sobre o assunto, consultar, Fray Juan Ortega's approximations, 500 years after- Manuel Benito, Jose Javier Escribano, Emilio Fernández e Mercedes Sánchez, <http://arxiv.org/pdf/1212.1125.pdf>

<sup>158</sup> *Los Matematicos Españoles del siglo XVI*, Biblioteca Scientia, Madrid 1934, [Rey Pastor, 1934, p. 71].

<sup>159</sup> Esta autora refere ainda que na obra de Juan Ortega outra influência se faz sentir: o *Compendion de lo abaco* de Pello, publicado em 1492 [Labarthe, v. I, 2004, p. 87], tal como M. Spiesser o afirmara a propósito do tema «Geometria».

uma ponte entre as obras de Nicolas e Ortega dado que ambos explanaram assuntos da Geometria. Ainda que iniciassem este capítulo com problemas semelhantes, prosseguiram rumos diferenciados pela natureza dos enunciados sobre uma geometria virada para objetos tridimensionais. Parece-nos contudo que, os dois tratados partilham uma fonte comum, confessada do caso de Nicolas e omissa para Juan Ortega.

O *Tratado da Pratica d'Arismetica* diferencia-se dos outros tratados portugueses por incluir as temáticas em geometria que referimos, e ainda outros problemas, neste tema, com características mais lúdicas, como os problemas das duas torres, da árvore que quebrou, do chafariz, entre outros que fazem parte de um passado herdado ao longo de gerações de sábios, sendo em muitos casos difícil determinar a sua proveniência.

Poucos anos antes da publicação da obra de Ruy Mendes, Pedro Nunes preparava também o *Libro de Algebra*. O próprio afirma na carta que dirigiu ao Cardeal D. Henrique, em 1564, que compôs o livro trinta anos antes. Ao contrário de Mendes que não cita qualquer fonte na *Pratica*, Nunes evidencia ao longo da sua obra conhecimentos de outras obras, «...libros de Algebra que hasta ora son venidos a España» [Nunes, 2010, p. 435], analisando-as e refutando algumas passagens. Há textos onde menciona Pacioli e a sua obra, «Fray Lucas de Burgo excellênte Arithmetico, de la qual todos despues nos auemos aprouechado» [Nunes, 2010, p. 435]. São ainda referidos Cardano e Tartaglia, «...Nicolao Tartalla muy gran maestro de cuenta y buẽ Geometra» [Nunes, 2010, p. 435]. Nas palavras de Pedro Nunes corriam na Península Ibérica obras que marcaram os saberes na época e podemos supor que outros autores teriam acesso às obras então em circulação.

Ruy Mendes, pretendendo apresentar um tratado «abreviado», escolheu uma estrutura idêntica à de Juan Andrés, sem nunca o citar, antes «partilhou» com este a refutação ao produto de frações apresentado por Pacioli. Se os dois trabalhos se distinguem na forma dos temas específicos ligados ao comércio português, como as regras de quarto e vintena e da conta de Flandres, vão-se cruzar numa estrutura comum, em textos, enunciados e exemplos semelhantes, o que vem dar força à ideia que o tratado de Andrés foi uma influência nesta aritmética portuguesa. Os mundos lusitanos e hispânicos desta época encontravam-se unidos por laços estreitos de partilha de negócios, saberes e objetivos em termos da expansão marítima. Um exemplo notável desta forte interação foi a introdução do bilinguismo (português e castelhano) por D. Manuel I no início do século XVI, por motivo dos seus sucessivos casamentos com princesas castelhanas. Esta vontade deliberada veio motivar



trocas ao nível do saber e da cultura, em particular uma circulação de livros entre as duas regiões, a *Pratica d'Arismetica* de Ruy Mendes poderá ser disso uma ilustração.

## CONCLUSÃO GERAL

O nosso estudo desenvolveu-se em torno dos tratados de aritmética prática produzidos em Portugal no século XVI, com particular incidência na *Pratica d'Arismetica* de Ruy Mendes.

À partida, a *Pratica* de Mendes pareceu-nos mais vocacionada para temas fora do mundo mercantil. O autor admitiu sentir-se maravilhado com as regras de falsa posição e exibiu um conjunto alargado de problemas para determinar números, onde são usadas as regras de falsa posição, simples e dupla. Não sendo um hábito de Mendes referir as suas fontes, sobre o alcançar a verdade pela mentira cita Aristóteles [Mendes, 1540, f. 84 f].

O gosto pelos números poder-nos-ia levar a pensar que Mendes concebe o número como ente abstrato, contudo assistimos a uma ambivalência entre o número por si só e pelo que representa. A estrutura da obra, com base na aritmética dos números inteiros, seguida da aritmética dos quebrados, distingue-se das apresentadas nos tratados de Gaspar Nicolas e de Bento Fernandes. O primeiro exhibe regras mais «utilitárias», como a regra de três, nas primeiras páginas e afirma, expor respostas a questões que lhe foram colocadas na Casa da Índia quando aí se deslocou. O modo como apresenta os assuntos é de certo modo «desarrumado», dado que, por vezes há temáticas diferentes que partilham espaços contíguos. Nicolas manifesta com frequência um carácter imediatista nas regras e nos problemas que expõe. Quanto a Bento Fernandes, o seu discurso apresenta uma frequência mais acentuada de vocábulos do mundo mercantil, ainda que, em alguns assuntos, como por exemplo, a determinação de um valor aproximado da raiz quadrada de um número, o autor se afaste do ambiente dos negócios.

Partindo dos temas propostos por Ruy Mendes, estabelecemos uma comparação entre a *Pratica* e as obras de Gaspar Nicolas e de Bento Fernandes. Interessou-nos estudar as temáticas comuns aos três autores, onde um carácter prático e muito técnico está presente.

As primeiras aritméticas mercantis portuguesas surgem numa época marcada por grandes mudanças no meio socioeconómico do reino, projetadas também na Europa. As inovações sentidas ao nível da navegação permitiram um desenvolvimento em múltiplas frentes sem espaços de retorno no conhecimento de novas realidades. Os aritméticos portugueses dizem-nos que é necessário ter conhecimentos para gerir uma empreitada tão grandiosa. O número enquanto entidade de medida impõe o seu estatuto e a aritmética é vista como uma «escada» para alcançar outros saberes. Quando os autores afirmam ser necessário

no reino um livro de aritmética, podemos entendê-lo como uma denúncia à fraca escolarização dos portugueses mas também, a auto valorização das suas obras. O ambiente nacional era propício à criação. Neste contexto, os tratados de aritmética mercantil nasceram em terreno fértil.

Os assuntos expostos nos três tratados são, na sua maioria, temas que fazem parte de uma tradição em aritmética prática, como as regras de companhias, as baratas, as ligas da prata e do ouro. Contudo, o corpus aritmético português integra duas regras comerciais, que designámos por «regras locais». Trata-se da regra de quarto e vintena e da regra da conta de Flandres. Estas duas regras têm a sua origem no comércio português com o Oriente e mostram bem a interação entre os saberes e a realidade envolvente através da presença de modelos aritméticos na vida económica.

Sobre os três autores estudados os dados biográficos são escassos. Dados recentes mostram alguns elementos da atividade de Bento Fernandes como mercador. Sobre Ruy Mendes, esperávamos encontrar algumas pistas nas suas ligações a D. Teodósio I, contudo, nada se vislumbrou até ao momento. Gaspar Nicolas é o mais referenciado dos autores, talvez por ter realizado «O livro mais antigo consagrado em Portugal à Aritmética» como afirma Gomes Teixeira [Teixeira, 1934, p. 98]. Muito do que conhecemos dos autores vem-nos através dos textos que escreveram. Mas para quem escreveram os aritméticos quinhentistas? Pondo-se parte a dedicatória ao mecenas, a quem por exemplo Gaspar Nicolas pretende esclarecer dúvidas? O público visado não aparece de forma explícita. Bento Fernandes refere mercadores e tratantes, Gaspar Nicolas dá respostas às dúvidas que lhe tinham sido colocadas quando se deslocava à Casa da Índia, onde há mercadores e ainda todos os funcionários daquela instituição. Ruy Mendes menciona os mercadores e outros, sem especificar quem, quando nos descreve as regras de câmbio. Podemos por a hipótese de estar perante três autores e também formadores no sentido de dotar os mercadores e todos os envolvidos na vida comercial, com instrumentos que os conduzissem a práticas sem enganos, realizadas com honestidade e através de modelos aritméticos credíveis. Pelo modo de atuar, esclarecer e ensinar, os autores preparavam os mercadores e as lides necessárias aos grandes negócios nas companhias, baratas, câmbios, impostos, entre outras atividades, tal como o fabrico de moeda e de lingotes. Os mercadores deviam ser esclarecidos e informados e estar a par com outros mercadores considerados mais sábios nas transações, como o diz Bento Fernandes sobre a mestria de flamengos e italianos. Para o mercador era

necessário aplicar a regra e para os menos instruídos, a regra deveria ser clara e simples. Os casos mais complexos cabia aos aritméticos resolvê-los, como por exemplo nos diz Gaspar Nicolas a propósito das dúvidas que lhe são colocadas.

Que conteúdos matemáticos eram necessários ensinar aos mercadores a fim de realizarem práticas comerciais honestas e sem enganar? Para começar, e como seria de esperar, o cálculo aritmético básico com números inteiros. Gaspar Nicolas e Bento Fernandes assim o entendem e apresentam as quatro operações aritméticas básicas para inteiros: adição, subtração, multiplicação e divisão. Ruy Mendes descreve-nos um «pacote básico» assente nas sete «especies» da aritmética que, para além das quatro operações aritméticas básicas, envolve as progressões e as raízes (quadrada e cúbica), exibindo uma organização da obra que, no início, parece afastar-se do mundo mercantil, sobretudo quando observamos que Nicolas e Fernandes prosseguem no sentido de uma abordagem que facilmente conduza às regras do comércio. O desvio de Mendes é aparente, dado que, depois de tratar da aritmética dos quebrados, entra no «mundo mercantil».

Sendo as primeiras obras de aritmética prática publicadas entre em Portugal, interessou-nos mostrar que temas da matemática estão presentes nos tratados. Temos uma Matemática pensada para o comércio, onde analisamos temas comuns aos três autores, tais como, a regra de três, as companhias, as baratas, os câmbios e as ligas. Assim, comparámos enunciados e algoritmos, traduzindo os processos descritos através de fórmulas. Para cada tema, deparamo-nos com situações comuns às três obras, no sentido da utilização do mesmo algoritmo mas também variantes que nos conduziram a processos mais complexos, como os problemas de rutura de contrato nas companhias e os sistemas lineares indeterminados das ligas, como nos mostrou Bento Fernandes. Os modelos aritméticos eram uma garantia aplicada à resolução das situações mais críticas embora, em alguns casos, elas fossem essencialmente académicas.

Cada regra está ligada a um vocabulário próprio. Este pode ser definido numa introdução, como habitualmente o faz Ruy Mendes mas, em muitas situações aparece nos enunciados e resoluções dos problemas. Por exemplo, através das regras de quarto e vintena e da conta de Flandres temos informações sobre a Casa da Índia, as viagens com perda de mercadoria, a insatisfação dos mercadores face à cobrança do imposto de quarto e vintena mesmo com quebra na mercadoria. Sabemos quais os produtos mais comercializados e quais os melhores modelos a usar tendo em conta os interesses dos mercadores. Ainda as percentagens de

quebra mais usuais. Na regra da conta de Flandres ficamos a conhecer quais eram os produtos negociados naquela feitoria e ainda, por Bento Fernandes, ficámos a conhecer as transações nas feiras de Medina del Campo. Este autor mostra-se conhecedor do meio onde se move, partilha a sua experiência, dá sugestões e conselhos aos mercadores.

Interessou-nos averiguar a presença de temas da Matemática fora do mundo mercantil e os três autores exibem processos e temas que podemos considerar fora dos objetivos mercantis, se bem que nada de novo, quando comparados a outros trabalhos em aritmética prática. Os processos algorítmicos podem estar enquadrados nas regras comerciais e os temas, apresentam-se, por vezes, mascarados com enunciados comerciais como as baratas pela regra da cousa de Bentos Fernandes.

Com exceção de Gaspar Nicolas, os outros autores não referem fontes. Esta característica marca presença nos tratados desta época. Procuramos ver os indícios da presença de fontes não declaradas na obra de Ruy Mendes e estamos de acordo com Marques de Almeida quando este afirma que o *Sumario* de Juan Andrés foi uma fonte de Mendes. Torna-se difícil determinar as fontes de uma obra quando não são declaradas pelo autor, contudo servimo-nos de textos que apresentavam um grau de semelhança muito forte, quase como que uma tradução um do outro quando lidos em paralelo. Tivemos ainda em atenção algumas expressões comuns e as formas verbais utilizadas para deduzir um grau de familiaridade entre os textos.

## PERSPETIVAS

Pretendemos contribuir com este estudo para tornar mais conhecidos os tratados quinhentistas de aritmética prática. Nomeadamente, os conteúdos matemáticos presentes na forma de problemas práticos e técnicas algorítmicas. Quisemos ainda averiguar de que modo a Matemática e o meio comercial interagiram através dos testemunhos dos autores, que procuraram modelos para os mercadores. Referimos fontes seguras e fontes implícitas.

Consideramos que muitas questões continuam em aberto. Tendo por base a obra de Ruy Mendes, algumas temáticas explanadas por Gaspar Nicolas ou por Bento Fernandes não foram estudadas. Referimo-nos, por exemplo, à secção dedicada a problemas diversos sobre heranças, caminhadas, jogos, entre outros, que não figuram na *Pratica*. Uma linha a continuar tem a ver com a análise e estudo dos temas ligados ao que alguns autores designam

por problemas pseudorreais e, averiguar a dimensão pedagógica das obras na sua época e na atualidade, em termos de vertente técnica não descurando o aspeto cultural.

Outra questão em aberto liga-se à circulação dos tratados portugueses fora do reino. Averiguar se as obras eram conhecidas noutros países, começando pelos reinos vizinhos, os locais por onde circulavam, nomeadamente ao nível das ordens religiosas, por onde se pensa ter circulado o saber.

Determinar se os tratados quinhentistas de aritmética figuram como raízes de um saber ou apareceram como um «ato isolado» é uma questão que importa esclarecer. Sabe-se que o tratado de Gaspar Nicolas conheceu outras edições. No século XVII foram publicados o *Thesouro de prudentes* de Gaspar Cardozo Sequeira, em 1612, e a *Flor da Arismetica Necessária* de Guiral Pacheco. Até que ponto estes dois tratados marcaram uma continuidade dos trabalhos produzidos no século XVI?



## **ANEXOS**





## ANEXO 1

### Conteúdos do *Tratado da Pratica d'Arismetica*

Gaspar Nicolas

Oficina de Germão Galharde, Lisboa, 1519

Tavoada pequena

Tavoada grande

Numerar .....	f.1
Conta se assomar .....	f.2
Conta de demenuir .....	f.3
Conta de multiplicar .....	f.4
Outro modo de multiplicar em cruz .....	f.5
Outro modo de multiplicar chamado gelozia ou per graticola .....	f.6
Repartir por hũa letra .....	f.8
Repartir por duas letras .....	f.9
Regra de tres chaãs .....	f.11
Regra de tres com tempos .....	f.11
Regra de tres com tempos arrezam de tanto por çento .....	f.11
Regra de tres em que a derradeira he partidor .....	f.12
Regra de companhias chaãs .....	f.12
Regra de companhias com tempos .....	f.14
Quarto e vintena .....	f.16
Quarto e vintena sem quebra .....	f.18
Assomar quebrados .....	f.19

Demenuir quebrados .....	f.21
Multiplicar quebrados .....	f.22
Repartir quebrados .....	f.23
Repartir por meo e terço e quarto .....	f.24
Repartir por terço e quarto e quinto .....	f.25
Regra de três com quebrados .....	f.26
Regra das oposições .....	f.27
Oposiçam.....	f.28
Regra da conta de Frandes .....	f.35
Pergressio .....	f.38
Baratos.....	f.38
Numeros .....	f.39
Preguntas .....	f.45
Numeros .....	f.47
Preguntas .....	f.57
Preguntas .....	f.74
Tirar rayzes.....	f.78
Rayz cubeca.....	f.80
Seguese algumas perguntas em pratica geometria .....	f.80

#### Tavoada

A liga da prata esta sobre sy no cabo do livro .s. passando as 94 folhas

#### Tavoada da prata

Quantas onças e oytavas e grãos grandes e pequenos tem ho marco na primeira.....	f.1
--	-----

Tenho prata e nom sey de que ley he e tomey della huñ dinheyro e boteyo no foguo as ...	f.1
Prata tenho e nom sey de que ley he tomey huña onça e boteya no fogoe quero saber de que ley he as .....	f.2
Tomey dela huña oytava as .....	f.3
Mesturo dous bulhoõs huñ com outro e quero saber de que ley he as .....	f.4
Mesturando prata fina com cobre as.....	f.5
Bulham tenho e quero fazer may baxo pera saber quanto cobre lhe lançarey as.....	f.6
Tenho duas sorte de bulhaão e quero fazer huñ que tenha .50. marcosou quanto quiseses as .....	f.8
Bulham tenho de duas sortes e quero tomar tanto de huña como de outra as .....	f.11
Bulham tenho de tres sortes deferentes e de todas tres quero fazer huña liga as .....	f.12
Outra da mesma sorte as .....	f.13
Huñ marco de prata tenho de ley de .6. dinheiros e estou em tal parte que nam tenho prata fina as.....	f.14
Do modo de ligar a prata aqui em Portugal as.....	f.15
Acaba as.....	f.19
Quanto val ho marco que passa de onze começa as .....	f.20
Quanto se monta em marcos e onças e oytavas há rezam de como tu quiseses as.....	f.22
Quanto val a prata de tantos dinheiros em tantos graõs conven a saber de .11. pera bayxo as .....	f.23
Pera saber quanto saaca o mea e oytava de .2340. atee .4000. as .....	f.24

Nota: A numeração dos fólhos com o texto sobre a liga de prata encontra-se em numeração romana. A *tavoadada da prata* que reproduzimos está de acordo com o que consta no texto.



## ANEXO 2

### Tavoadada da *Pratica d'Arismetica*

**Ruy Mendes**

Oficina de Germão Galharde, Lisboa, 1540

Segue-se a tavoadada deste presente livro

No primeiro capitulo se decraram as sete especies d'Arismética por numeros inteyros, scilicet: Nomear, somar, deminuir, multiplicar, Repartir, progressam, Tirar rayzes quadradas e cubecas, com todo ho necessario, e decraram-se onde a seguinte tavoadada ho demonstra

Nomear por numeros inteyros .....	f. 1
Os graos por ordem .....	f. 2
Somar por inteiros pela primeira maneyra .....	f. 4
A prova de nove da dita especia .....	f. 5
A prova de sete.....	f. 5
A prova real.....	f. 10
Somar por inteiro pola segunda maneyra .....	f. 6
Sua prova de Nove .....	f. 7
Sua prova de sete .....	f. 6
Sua prova real.....	f. 12
Demenuir por inteiros pola primeira maneyra.....	f. 6
Sua prova de nove .....	f. 9
Sua prova de sete .....	f. 10
Sua prova real.....	f. 10
Demenuir por inteiro pola segunda maneyra .....	f. 9
Sua prova de nove .....	f. 12
Sua prova de sete .....	f. 12
Sua prova real.....	f. 12
Multiplicar por inteiros pela primeira maneyra que se diz em asa .....	f. 14

A tavoada .....	f. 13
A prova dos nove da dita especia .....	f. 14
A prova de sete .....	f. 14
A prova real.....	f. 13
Multiplicar mourisco que he a segunda maneira .....	f. 15
Multiplicar em quadra que he a terceira maneira .....	f. 16
Hũa maneira de multiplicar abreviado .....	f. 16
Outra maneira de multiplicar abreviado .....	f. 17
Repartir por inteyros pola primeira maneyra .....	f. 18
Repartir pola segunda maneira.....	f. 19
A figura em outra maneira.....	f. 21
Sua prova de nove .....	f. 21
Sua prova de sete .....	f. 22
Sua prova real.....	f. 22
Hũa maneira de repartir abreviado .....	f. 22
Outra maneyra de repartir abreviado.....	f. 22
Progressam por inteyros pela primeira maneyra .....	f. 23
A maneira de como se somam brevemente .....	f. 23
Suas três provas, scilicet, de nove e sete e real.....	f. 24
Outra prova mais breve .....	f. 24
Progressam da segunda maneyra .....	f. 25
Como se somam brevemente .....	f. 25
Suas três provas de nove e sete e real .....	f. 25
Outra prova mais breve .....	f. 26
Tirar rayzes quadradas .....	f. 26
Sua prova .....	f. 28
Hũa maneira de somar os números quadrados.....	f. 29
Tirar rayzes cubecas .....	f. 30
Sua prova .....	f. 32

No segundo tratado deste presente livro se decraram as sete especias desta arte de arismetica por números quebrados, scilicet: Nomear, Somar, Demenuir, Multiplicar, Repartir, Progressam, Tirar rayzes quadradas e cubecas com suas provas e com ho mais necessário e cada cousa onde pela seguinte tavoada se demostra:

Nomear por numeros quebrados.....	f. 31
Que cosa he numero quebrado.....	f. 33
Como se pora o numero quebrado em figura.....	f. 33
Como se abreviam os números do quebrado .....	f. 34
Donde naceo o numero quebrado .....	f. 35
Repartir o que fica por repartir .....	f. 35
Perfeyçoar qualquer repartiçam.....	f. 36
A prova pera a tal repartiçã .....	f. 36
Somar por números quebrados .....	f. 37
Como acontece de ser em cinco maneiras.....	f. 37
Sua prova real.....	f. 38
As quatro dições que nos servem .....	f. 39
Outra maneira de somar por quebrados .....	f. 39
Demenuir por quebrados .....	f. 40
Como pode aquecer em seys maneiras .....	f. 40
Sua prova real.....	f. 41
Multiplicar por quebrados .....	f. 42
Como aquece em cinco maneyras .....	f. 42
Sua prova real.....	f. 47
Hũa maneira abreviada na quinta maneyra .....	f. 43
Multiplicar muytos numeros huns pelos outros.....	f. 44
Repartir por quebrados.....	f. 45
Como aquece em doze maneyras.....	f. 45
Sua prova real .....	f. 47
Progressam por quebrados em três maneiras.....	f. 47



A primeira maneyra.....	f. 48
Suas provas.....	f. 48
A segunda maneira .....	f. 49
Suas provas.....	f. 49
A terceyra maneira .....	f. 49
Sua prova.....	f. 50
Tirar rayzes quadradas por quebrados.....	f. 50
Tirar rayz quadrada mais chegada.....	f. 51
Hũa maneira de somar os números quadrados .....	f. 51
Tirar rayzes cubecas por quebrados .....	f. 52
Muytas perguntas acerca dos números quadrados .....	f. 52
Muytas perguntas acerca dos números quebrados .....	f. 55
Perguntas pera achar taes e taes números etc .....	f. 58
A decraraçam das moedas pesos e medidas .....	f. 59

No terceyro tratado se decraram sete regras, scilicet: quatro regras de três e a regra de cinco, e a regra sem nome, e a regra de mudar com suas provas, o ho mais necessário, e decraran-se avante onde a seguinte tavoada o demonstra:

A regra de três sem tempo somente .....	f. 61
Sua prova real.....	f. 63
A dita regra por quebrados .....	f. 63
A figura da dita regra com sua decraraçam.....	f. 63
A regra de três sem tempo e por ganhar ou perder a rezam de tanto por tanto .....	f. 64
Perguntas que se assolvem pela dita regra .....	f. 65
A regra de três com tempo somente .....	f. 66
Perguntas que se assolvem por ela .....	f. 67

A regra de três com tempo e por ganhar ou perder a rezam de tanto por tanto.....	f. 67
A regra de cinco.....	f. 68
Preguntas que se assolvem por ela .....	f. 68
A regra sem nome.....	f. 68
Preguntas que se assolvem por ela .....	f. 69
A regra de mudar .....	f. 69

No quarto tratado do presente livro se decraram outras regras, scilicet: as quatro regras de companhia e três regras de baratas e no logar que pela seguinte tavoada parece:

A regra de companhias sem tempo somente .....	f. 71
Preguntas pera decração della .....	f. 72
A regra de companhias sem tempo com condiçam de ganhar ou perder à rezam de tanto por tanto .....	f. 72
Preguntas pera decração della .....	f. 72
A regra de companhias sem tempo com condiçam de ganhar ou perder e cetera .....	f. 75
A regra de baratas simprez .....	f. 76
Preguntas pera decração della .....	f. 76
A regra de baratas composta.....	f. 77
Preguntas pera decração della .....	f. 78
A regra de baratas com tempo .....	f. 78
Preguntas pera decração della .....	f. 79

No quinto tratado se decraram outras sete regras, scilicet: a regra de tirar quarto e vintena e a regra de tirar a quebra e quarto e vintena, e a regra da conta de Frandes, e a regra de hũa falsa posiçam e de duas falsas posições, e a de cambo meudo e a de cambo real, e cada cousa onde pela seguinte tavoada se demonstra:

A regra de tirar quarto e vintena.....	f. 80
A regra de tirar a quebra e quarto e vintena .....	f. 82
A regra da conta de Frandes .....	f. 83
A regra de hũa falsa posição .....	f. 84
De como se acham por ella singularmente muytos numeros .....	f. 84
A regra de duas falsas posições que também hé singular (como se acham muytos números e cetera).....	f. 91
A regra de cambo meudo (Preguntas sotis que por ella se assolvem, aas) .....	f. 94
A regra de cambo real .....	f. 97
Perguntas por ella .....	f. 98

No seysto tratado se decraram outras sete regras da liga de prata e no lugar donde pola tavoada se demonstra:

A regra de mudar a ley ou leys em outra: ajuntando outra prata de ley ou de liga .....	f. 99
A regra de mudar a ley ou leys em outra ajuntando prata fina.....	f. 101
A regra de mudar a ley ou leys em outra ajuntando puro cobre.....	f. 102
A regra de mudar a ley ou leys em outra tirando outra prata de ley ou de liga.....	f. 103
A regra de mudar a ley ou leys em outra tirando prata fina .....	f. 104
A regra de mudar a ley ou leys em outra tirando puro cobre .....	f. 105

A regra de mudar a fineza em ley nova ajuntando cobre a prata fina ..... f. 106

No setimo e final tratado se deçará as sete regras da liga do ouro e donde parece pola seguinte tavoada:

A regra de mudar os quilates em outros ajuntando outro ouro doutros quilates ..... f. 107

A regra de mudar quilates em outros ajuntando ouro fino ..... f. 108

A regra de mudar quilates em outros ajuntando prata ou cobre ..... f. 108

A regra de mudar quilates em outros tirando outro ouro doutros quilates ..... f. 109

A regra de mudar quilates em outros tirando ouro fino..... f. 109

A regra de mudar quilates em outros tirando prata ou cobre..... f. 109

A regra de mudar a fineza em quilates novos ajuntando prata ou cobre ..... f. 110

Nota: Os fólhos com o texto encontram-se marcados em numeração romana.



### ANEXO 3

#### **Tavoadas do *Tratado da Arte de Arismetica***

**Bento Fernandes**

Oficina de Francisco Correa, Porto, 1555

Tavoadas das regras e perguntas deste presente livro da arte de Arismetica assi como vam declaradas cada hũa em seu título

A declaraçam de valia das letras da Arismetica, ho que valem cada hũa per si ou juntas.....	f.1
A tavoadada pequena.....	f.2
A tavoadada grande ate.100. vezes .100. ....	f.3
A regra d’assomar inteiros.....	f.7
A regra de demenuir .....	f.8
A regra de multiplicar.....	f.10
A prova dos setes.....	f.11
Outra regra de multiplicar em quadrado .....	f.12
Outra regra de multiplicar abreviado .....	f.13
A regra de repartir inteiros.....	f.14
Outra maneira de repartir mudando o partidor .....	f.16
A regra de tres chãa e a de tres com tempo .....	f.18
A regra de tres com tempo e a rezam de tanto por cento .....	f.19
A regra de três em que a segunda hé partidor e a regra de tres em que a terceira he partidor.....	f.19

A regra de cinco .....	f.20
A regra de companhias chãs .....	f.21
Companhias com tempo .....	f.22
Companhias com tempo e a rezam de tanto por cento .....	f.22
A declaraçam das provas reaes.....	f.23
A regra de companhia de meyo, terço, quarto e quinto.....	f.24
Regras de companhias deferentes .....	f.25
Outras regras de companhia a tempo logo declarado.....	f.26
A regra d'assomar quebrados .....	f.26
A regra de demenuir quebrados .....	f.28
A regra de multiplicar quebrados .....	f.29
A regra de repartir quebrados .....	f.30
A regra de tres de quebrados sem tempo e com tempo .....	f.32
A regra de tres de quebrados com tempo e a rezam de tanto por cento de quebrados .....	f.33
Companhia de quebrados e outra companhia de quebrados pela regra de três .....	f.33
Companhias com tempos de quebrados e companhias com tempo e a rezam de tanto por cento de quebrados .....	f.34
Outras regras de companhias deferentes e per outro modo.....	f.35
A regra da menos demenuiçam .....	f.37
A regra de quarto e vintena .....	f.38
Quarto e vintena com a sua quebra .....	f.39
As regras da conta de Frandes.....	f.40
Outra regra da conta de Frandes doutra sorte.....	f.41

A regra de baratas .....	f.43
Outras de baratas a termo .....	f.43
Outra de baratas pela regra da cousa .....	f.44
A regra da progressam.....	f.45
A regra de prosseguir caminhando .....	f.46
A regra de pagamentos em deferentes moedas.....	f.48
Outra de pagamentos per outro modo.....	f.49
Outra regra de desconto reduzido a hum dia .....	f.49
Outra regra de desconto reduzido a hum dia per muytas partes .....	f.51
Outra regra de desconto reduzido a hum dia per muytas partes per outro modo .....	f.52
Muitas regras e rezões de mercadores e perguntas sotiis pera os tratantes .....	f.53
Outra rezam de mercadores pela regra de desconto .....	f.55
Outras rezões de mercadores per outro modo .....	f.56
Outras rezões de mercadores doutra calidade.....	f.57
A regra de duas falsas oposições .....	f.59
Outras regras de oposições per outro modo.....	f.64
A regra de hũa falsa oposiçam.....	f.67
Outras regras de oposiçam deferentes .....	f.68
Preguntas e rezões de tirar números pela regra da oposiçam .....	f.70
Numeros deferentes .....	f.74
Outra de tirar numeros pela regra da cousa .....	f.78
A regra de tirar raízes de toda sorte .....	f.80
As quatro regras scilicet: assomar e demenuir, multiplicar e repartir per raiz .....	f.81



As regras da zibra de mocavel e da regra da cousa com a tavoada pera declaraçam das ditas regras .....	f.83
Regra da cousa .....	f.90
Regras de três deferentes com tempos e a rezam de tanto por cento .....	f.94
Muytas perguntas e razões sotiis de toda sorte .....	f.95
Regras e perguntas da liga de prata .....	f.107
Perguntas sobre a liga de prata .....	f.112
A regra da liga do ouro .....	f.113
Tavoada da valia da prata pera saber a como say a onça e a oytava a rezam do que for vendido o marco pelos preços que for .....	f.113
Tavoada da valia do ouro pelo peso das dobras .....	f.114
Perguntas sobre a liga do ouro .....	f.116
Tavoada da valia do ouro pelos pesos do marco a quanto say a onça e a oytava e ho grão vendida à rezam do que for vendido o marco .....	f.118

#### ANEXO 4

##### Prologo de Gaspar Nicolas

*Tratado da Prática d'Arismétyca*, Lisboa, Germão Galharde, 1519

**Prática d'Arismetica dirigida ao muy ylustre e manífycos senhor, ho senhor dom  
Rodrigo, conde de Tantuguel, e cetera.**

Todos hos homens naturalmente, ylustre senhor, desejam saber, segundo Aristoteles no prymeyro da Metafisyca, e como quer que as artes liberaes, ha Arismetica seja fundamento de todas. He neçessario que sejamos inclynados a ella como senhora das outras sciencias, porque ella abre as portas do entendimento e imprime hum desejo de natural especulaçam pera viir na realidade das cousas que della dependem, como seja verdade que, pera viir o proprio conheçymento das sciencias e artes em particular, convem peso e medida, numero, e pera essas deferenças os filosofos, a çerteza dos movimentos dos corpos super-çelestes e assy as obras ynferiores que he em utilidade da Reepublica, e assi pera saude dos homens. Foy neçessario este peso, esta medida, porque sem ysso se nam alcançaria aos graos pera que fizesse obra direita no corpo humano. E, portanto, sob esta rezam e industria vivemos, pelo qual se imprime estas matematicas, em nós ho que nam faz nos outros animais, porque careçem deste desejo natural, ainda que os Greguos mandaram insynar seus fylhos estas matematicas e lhe chamavam filosofos, negando ho fundamento que he nivel e regra de toda-llas outras artes que he Arismetica pella qual se alcança as outras artes, pontualmente ho fym dellas, assy como na Estrologia e Musyca e Geometria mediante ho numero que consyste na arte pratica d'Arismetica, a qual, Muy Manífycos Senhor, por ser cousa muy neçessaria nestes regnos e senhorios de Portugal, por bem de em eles florecerem os tratos das mercadarias da India e Persia e Arabia e Thyopia, e outras partes mays chegadas a nos, e os tratadores multiplicarem os dytos Reynos, me moveo ha fazer e compor este breve tratado de Arismetyca per estyllo muy claro, pera que facilmente possa aprobeytar e aprobeyte ahos que ha virem e lerem. E porque, Senhor nam ha muytos tempos que eu vi ha Vossa Senhoria em Guimaraes e me fez algũas preposições e perguntas nesta arte de Arismeyca, me ficou dahy hum desejo de servir Vossa Senhoria. E porque nom tive maneyra de manifestar meo desejo, considerey derigir-lhe este opusculo pedindo-lhe por merçee que, nam sendo cousa digna de receber esta pobre obra, seja recebido meo desejo e

serviço, porque aos principes e grandes senhores, como he Vossa Senhoria, honesta cousa he derigir toda-llas obras. E com esta, propria vontade e desejo beyjarey has mãos ha Vossa Senhoria pera recebe-la com anymo alegre, caso que digna nam seja, porque, assy este compendio recebido, será merçee que me faz Vossa Senhoria, ha quem Nosso Senhor prospere em estado com acreçentamento e dias de vida pera que se alegrem seos servidores e hos que desejo teem em servi-llo.

## ANEXO 5

### Prologo de Ruy Mendes

*Prática d'Arismética*, Lisboa, Germão Galharde, 1540

**Segue-se ho prologo do presente livro o qual vay deregido ao muyto ylustre e magnífico senhor, ho senhor Dom Theodósio, Duque de Bragança, e cetera.**

Os antigos Romanos, muy magnífico e ylustre senhor, tiveram em tanta estima ficar memória deles depois de sua morte, que nom avia cousa a que se nom pusessem e modos que nom buscassem, pera lhe ficar perpetuada pera sempre, como por suas istórias se manifesta. E era de maneyra que, por assi ser, nom estimavam suas pessoas, nem suas vidas, nem seus averes e riquezas. E, posto que pera isso achassem muytas maneyras, nenhũa delas acharam ser melhor que compor algum livro, porque, mediante ho tal livro, durava sua memória pera sempre, como nos hé manifesto por muytas escrituras de muytos antigos que oje em dia trazemos na boca, como se ainda ontem foram, avendo tam grande número de annos que passaram. E, portanto, tendo eu em algũa maneira respeyto a isto, e assi, vendo a necessidade que nestes reynos avia hum livro d'Arismética, sentindo-me, a meu parecer, ábil na dita arte pera o poder fazer, sem embargo de [ser]<sup>160</sup> fora de minha faculdade, dos dereytos e leys que aprendi, determiney compor ho presente livro, no qual decrararey as cousas que pelo reportório avante parecem, posto que com muyto trabalho e vigilância, tirando as forças e ho melhor e mais necessário de outros muytos livros que avia visto; as quaes cousas, a meu parecer, vam tambem decraradas e tam bem divididas, e por tam boa ordem, que qualquer pessoa como pouco princípio que tenha, poderá por si mesmo tirar todo ho demais, sem nenhũa outra pessoa lho ensinar, porque o mesmo livro lho vai decrarando tam craramente, que nom teraa necessidade de mestre. E, porque ho louvor nam parece bem na boca da[quele ... que toca]<sup>161</sup> nom insisto em louvar mais a obra, o qual deyxo pera fazerem aquellas pessoas que ho dito livro lerem e entenderem, nas quaes confio que sendo pessoas

---

<sup>160</sup> Texto incompreensível. Reconstrução do texto entre os parenteses [...].

<sup>161</sup> Texto incompreensível. Reconstrução do texto entre os parenteses [...].

virtuosas diram bem do que for pera dizer; e do que nam, ao menos, como taes pessoas, o calaram e encobriram; o que nam ham-de fazer outros muytos que eu sey que ham-de querer remorder e mormurar de tudo, movidos ou por enveja, ou por malícia, ou por ser seu natural de tudo dizerem mal. E com temor destes taes que sempre no mundo ouve, tiveram por costume, assi os antigos escritores como os presentes, dirigirem e oferecerem suas escrituras a pessoas de estima e alto estado pera que, avendo-as por suas e tomando-as debayxo de seu amparo, nenhũas pessoas das assi malévolas e murmuradoras ousasse murmurar nem maldizer das taes escrituras. E, por eu pera este presente livro, e assi pera outros dous de perguntas que tenho feyto, ter necessidade de hũa tal pessoa a quem pela dita causa os oferecese e dirigise, cuydando em qual seria, achei, por muytas causas e razões, nom aver nestes reynos outra pessoa a quem com mais rezam os oferecesse e dirigisse que Vossa Senhoria, assi por ser tam ylustre e magnífica e de tam alto estado, como a todos hé manifesto, como pela umana e tam benina condiçam que nelle se acha, mediante a qual aceytaria por sua dita obra, nom oulhando quam pequena e quam pouca cousa era. E, posto que a isto me atrevesse, sem até ora Vossa Senhoria de mi ter tanta notícia, tomei ousadia em me lembrar e saber como a senhora duquesa Dona Joana de Mendonça, que Vossa Senhoria tem em lugar de mãy, era minha madrinha; e assi, o senhor Pero de Mendonça seu irmão, o qual me incitou pera o aver de fazer. E, portanto, peço a Vossa Senhoria que com benino ânimo os receba e aceyte debaixo de seu amparo, pera que nenhũa pessoa lhe pareçam mal nem ouse mormurar, nem maldizer; antes, pelo contraryo, os maldizentes, com temor, se calem, e os virtuosos tomem mays atrevimento pera dizer bem. E, porque espero que Vossa Senhoria assi ho faraa, por ser natural incrinado a fazer mercês, nom quero mays importuno, nem prolixo; somente rogar a Deos a vida e estado de Vossa Senhoria acrecente como por Vossa Senhoria hé desejado.

## ANEXO 6

### Prologo de Bento Fernandes

*Tratado da Arte de Arismética*, Porto, Francisco Correa, 1555

#### **Prologo do presente tractado da arte de Arismética deregido ao sereníssimo e ilustríssimo príncipe o senhor Ifante Dom Luis irmão d’el-Rey nosso senhor**

Pequenas obras serem dedicadas a grandes reis e príncipes se lê em muytos autores. Vitruvius a Augusto Cesar deregio sua obra de *Architectura*. E a el-Rey de Yetaro offereceo Dióphano ho que escreveo de Agricultura. Este atrevimento que estes e muitos outros tiveram, Sereníssimo Príncipe, me deu ousadia a oferecer a Vossa Alteza este pequeno serviço e esforçou-me a ysso saber que hé dos espelhos hum per que todos os racionas se regem, e eyxo sobre que se ho mundo sostem por ser conta e com ella peso e medida que tudo resulta da arte Mathematica da qual Pithágoras, primeiro mestre da itálica Philosophia, segundo diz Célio em ho livro da *Antigas Lições*, foy inventor e em louvor della publicara que sem estas Mathematicas ninguem podia ser perfeyto philósofo, nem alcançar inteiramente a verdade das cousas, porque a Mathematica hé ho assento, fundamento e escada segura pera sobir aas outras sciencias. E, ainda que todas as outras com claro engenho, sem mestre, se possam alcançar, esta soo, sem ser muy experimentado doutor, nam pode ser comprehendida, nem entendida. E portanto, diz Plutharco ser sciencia d’alma em as cousas moraes, como a Especulativa em as espirituais. E das quatro partes desta sciencia que sam Arismética, Música, Geometria, Astrologia, a mais principal dellas hé a Arismética, porque pera alcançar as outras sciencias hé necessário conta, peso e medida. Segundo diz Platão, a Arismética experta os entendimentos e eleva a alma ao conhecimento das cousas divinas. E Patricio, em o seu segundo livro *Instituiçamda República*, diz ser esta sciencia muy necessária aos que governam a República, porque per ela se vem em conhecimento de todas as cousas que tem ser com sustancia immutável e da verdade e seguro e feyto dellas. Segundo escreve Ioducus em a *Arismética de Iaco o Sábio*, aquele que alcança os números aussolutos e certos, e os desejos e afeyções spirituaes, as cousas divinas determina, a qual assegura e compoem com esta a conta, número, peso e medida; e se conhece per ella ho seu certo e determinado ser, a proveito e utilidade universal, sem a qual nem o mundo tevera ser, nem soste se podera, segundo se escrepve pelo: *Espiritu Sancto sapientie*, XI. Todas as cousas Deos Omnipotente

despôs em número, conta, peso, medida; e onde isto falta nam se pode dizer República de varões, mas antes ajuntamento de animais. Donde se escrepve que Aristipo mostrou grande contentamento depois daquele grande e perigoso naufragio que, perdidas e desfeitas as naos, com os pedaços da madeira que ficaram derramados pela ágoa, elle e seus companheiros arribaram em ilha Rodiana donde, vendo os sinaes dos pesos, conta e medida, conheço ser terra bem governada e, com grande alegria, disse a seus companheiros: confiança! Temos de boa dita, pois nos Deos deitou em terra de gente de bom governo, nella devemos abitar, pois he sinal que a Republica della vive conforme a rezam. E com esta se pode bem comparar a grandeza, nobrecimento, boa governança destes reynos de Portugal onde florece ho trato da mercancia e outros moores contratos e de mais calidade, como sam os da Índia, Mina e Guiné, e outras muytas contratações; e vay em tanto crescimento sua fama e grande poder, que excede a todos os reynos do mundo. Pelo que, por ser tam necessária cousa a arte da Arismética pera augmentaçam do trato que he serviço de Deos e d'el-Rey nosso senhor vosso irmão, e pelo fruyto que fará ao povo, me moveo compoer e ordenar este livro, assi por ser esta arte tam principal e proveytosa, como pela necessidade de que della haa. E no dito livro acharam todo o género de conta e rezam per tam boa ordem, que qualquer pessoa ho poderá muy facilmente entender e aprender. O que determiney de offerescer a Vossa Alteza pelas razões já ditas e assi, porque ouvi dizer, geralmente, que a todas as artes liberaes era muy inclinado, principalmente a esta que consiste em conta, peso, medida, como foy em sua mocidade a Música de que teve muy grande notícia e em que tinha adquirido graos de muyta perfeiçam, o que estado grande e occupações deste Reyno lhe fizeram deyxar, como tambem por saber quanto respeyto e comta ele tem com rezam e com conta que, por a ter inteiramente conssigo e primeiro com Deos e com sua consciencia, e depois con quem ho servio dos ornamentos necessários a seu estado e casa, se tirou e os mandou vender pubricamente, per onde me pareceo que nam seria importuno serviço e escusado este meu livro de conta, medida e peso a Vossa Alteza que tamanha esperiência tem dado de folgar com ella, pois estando em hum cume de estado tam alto e logo tam achegado ao mayor, todavia, assi se quis someter a abaixar a conta he ter tanta com ellae tanta rezam como hé manifesto. Receba pois, Vossa Alteza este livro debaixo de seu amparo e ho favoreça pera que aprendam delle e de seu enxemplo e todos viver com medida e conta, porque onde isso se pratica e husa se acostuma tambem viver cada hum do seu e sem perjuyzo doutrem, com rezam, ordem e

fundamento. Nosso Senhor a sereníssima he muy excelente pessoa e estado de Vossa Alteza guarde e acrecente.





## **ANEXO 7**

### **Vocabulário matemático**

#### **1. Ler e escrever os números**

Cifra –Nome dado ao algarismo «zero»

Contar - contagem

Figura –algarismo. Também é o esquema auxiliar do algoritmo

Letras da aritmética – os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Numerar/Nomear – leitura de um número

Numero – número inteiro

Numeros dispaes – números ímpares

Um cõto – 1000 unidades

#### **2. As frações**

Abreviar/Menos diminuição – tornar uma fração irredutível

Inteiro e quebrado – número misto (composto por um número inteiro e por uma fração)

Nomeado – numerador

Nomeador - denominador

Quebrado – número fracionário

#### **3. Adição**

Com – mais (+)

Montar – exprimir o resultado da adição

Regra de assomar/somar - adição

#### **4. Subtração**

Conta de demenuir/demenuir – subtracção

De – menos (-)

Tirar - subtrair

## **5. Multiplicação**

Conta de multiplicar/multiplicar – multiplicação

Multiplicar Mourisco – um método de multiplicar usado pelos mercadores árabes na Península Ibérica.

Multiplicar em asa – um método de multiplicar muito próximo do algoritmo atual.

Multiplicar em quadra = multiplicar em quadrado = multiplicar em gelosia – método de multiplicar usado em Portugal no século XVI. Aparece nos três tratados quinhentistas.

Por – vezes ( $\times$ )

## **6. Divisão**

A – dividir ( $\div$ )

Partidor – divisor

Regra de repartir/repartir/repartição – divisão

## **7. Progressões**

Um/Dois/Três excesso – progressão aritmética de razão 1/2/3

Dois dobrada/Três dobrada – progressão geométrica da razão 2/3

Progressão ao galalim – Progressão geométrica de razão 2.

## **8. Raizes**

Raiz própria – a raiz quadrada de um número que seja um quadrado perfeito

Raiz não própria - a raiz quadrada de um número que não seja um quadrado perfeito

## **9. Vocabulário e regras comerciais**

Anna – unidade de medida de pano usada na Flandres (Em 30 annas há um côvado a mais)

Baratar – Trocar uma mercadoria por outra. Também trocar uma parte da mercadoria por dinheiro e a outra parte por outra mercadoria

Bolhão – Nome dado a uma liga de prata e cobre

Cabedal – Fundos financeiros que asseguravam o comércio do Oriente. Além da moeda corrente, o cabedal podia ser constituído por ouro, prata e cobre. No caso da prática de baratar, o cabedal também podia ser as letras de câmbio e as mercadorias

Ganância – lucro

Mercancia – Efeito de mercenciar

Mita – moeda da Flandres

Quebra – mercadoria perdida ou danificada

Tratante – Pessoa que trata de negócios

### **10. Outras regras**

Baratos – regras de baratas

Câmbio real – Faz-se entre uma cidade e outra mediante uma letra de câmbio

Oposiçam – regras de falsa posição

Regra da Cousa ou regra da zibra de moquavel– Regras para resolver equações de graus 1, 2, 3 ou 4



## ANEXO 8

### Tabelas (Quintal e Cruzado)

Tabela de equivalências da Quintal Português<sup>162</sup>

	<b>Quintal</b>	<b>Arroba</b>	<b>Arrátel</b>	<b>Onça</b>
<b>Quintal</b>	1	4	128	2048
<b>Arroba</b>	1/4	1	32	512
<b>Arrátel</b>	1/128	1/32	1	16
<b>Onça</b>	1/2048	1/512	1/16	1

Tabela de equivalências do Cruzado Português<sup>163</sup>

	<b>Cruzado</b>	<b>Tostão</b>	<b>Vintém</b>
<b>Cruzado</b>	1	4	20
<b>Tostão</b>	1/4	1	5
<b>Vintém</b>	1/20	1/5	1

<sup>162</sup> A tabela foi elaborada segundo os dados apresentados por Ruy Mendes [Mendes 1540, f. 7 f].

<sup>163</sup> A tabela foi elaborada segundo os dados apresentados por Ruy Mendes [Mendes 1540, f. 6 v].



## ANEXO 9

### Problemas da falsa posição simples de Ruy Mendes

Somando somente.

"Qual seraa ho numero que somado com o seu terço e cõ o seu quarto e com seu quinto, somem todos .9.(?)"<sup>164</sup>

Traduzindo em linguagem atual e designando por  $x$  o tal número desconhecido, temos

$$x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x = 9$$

O autor propõe encontrar um número que tenha terço, quarto e quinto e esse número é 60. Isto corresponde a determinar o mínimo múltiplo comum a 3, 4 e 5.

Em seguida vai calcular o terço, o quarto e o quinto de 60 e somar os resultados obtendo 107.

$$60 \times \frac{1}{3} = 20$$

$$60 \times \frac{1}{4} = 15$$

$$60 \times \frac{1}{5} = 12$$

$$60 + 20 + 15 + 12 = 107$$

Então, se escolhendo por falso o número 60 se obtém 107, qual será o número para termos um resultado 9?

É aplicada aqui a regra de três

---

<sup>164</sup>[Mendes 1540, f. 84 v]



$$\begin{array}{ccc} 107 & \text{-----} & 60 \\ 9 & \text{-----} & x \end{array}$$

Donde  $x = 5 \frac{5}{107}$

### Somando e diminuindo

"Que numero sera aquelle que somado cõ seu terço e da tal soma é diminuído ou tirado quatro fiquem .28.(?)"<sup>165</sup>

O enunciado corresponde à equação  $x + \frac{1}{3}x - 4 = 28$ , que é resolvida por falsa posição.

### Somando e multiplicando

Que numero averaa que somado com seu terço e a tal soma multiplicada por .6. façam 20 (?"<sup>166</sup>

Traduzindo em linguagem simbólica temos a equação

$$\left(x + \frac{1}{3}x\right) \times 6 = 20$$

O 3 será o número falso, o autor determina o terço de 3 que é 1, soma 3 com 1 e será 4. Segue-se o produto de 4 por 6 (24). Termina com a regra de três para se encontrar a verdadeira solução ( $2\frac{1}{2}$ ).

O primeiro exemplo apresentado para *somando e repartindo* (fo.86) é idêntico este último problema, com a diferença de se dividir por 6 em vez de multiplicar, tendo-se uma equação do tipo  $\left(x + \frac{1}{5}x\right) \div 6 = 25$ . O número escolhido para falso é o 5 e encontrar-se a solução 125.

Quanto à aplicação da regra em situações de *diminuindo somente* os problemas vão ser muito idênticos aos da soma. Por exemplo

---

<sup>165</sup>[Mendes 1540, f. 85 f]

<sup>166</sup>[Mendes 1540, f. 86 f]

"Qual numero averaa que demenuindo ou tirando delle a metade e o terço e o oitavo fiquem 24(?)"<sup>167</sup>

Em linguagem atual este problema conduz-nos à equação

$$x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{8}x = 24$$

O processo de resolução utilizado é idêntico ao da soma. Procura-se o mínimo múltiplo comum a 2, 3 e 8 que é 48. Em seguida encontra-se o meio, o terço e o oitavo de 48. Substitui-se na expressão e obtemos um resultado igual a 2. Como o resultado pretendido é 24, obtém-se o verdadeiro resultado utilizando uma regra de três. O número procurado é 576.

Já o caso de *diminuindo e somando* parece mais elaborado, relativamente ao aspecto da equação que traduz a situação. Vejamos um problema o exemplo dado por Mendes:

"Que numero averaa que tirando-lhe ho quarto e o que ficar somando com o seu quinto, somem .30. (?)"<sup>168</sup>

Podemos pensar na equação

$$x - \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}\left(x - \frac{1}{4}x\right) = 30$$

A técnica de resolução consiste mais uma vez em encontrar 20, como falso, que tem quarto e quinto, seguidamente obtém-se o seu quarto e o seu quinto, tendo-se respectivamente 5 e 4. Então

$$20 - 5 + \frac{1}{5} \times 15 = 18$$

Pela regra de três encontra-se a solução  $33\frac{1}{3}$ .

Sobre este tipo de falsa posição este é o único exemplo que aparece.

#### Diminuindo e repartindo

---

<sup>167</sup>[Mendes 1540, f. 87 f]

<sup>168</sup>[Mendes 1540, f. 87 v]

"Que numero seraa aquelle que tirando-lhe seu terço e o que ficar repartido a 4, venham na repartição .5.(?)"<sup>169</sup>

Temos uma situação que pode ser traduzida por  $\left(x - \frac{1}{3}x\right) \div 4 = 5$

Vamos por 6 por falso. Achamos o terço de 6 que é 2 e vem  $6 - 2 = 4$ .

E dividindo 4 por si próprio vem 1. Mais uma vez pela regra de 3 encontra-se a solução 30.

Coloca-se aqui uma questão. Porque não utilizar 3 por falso dado que existe o terço de 3? Admitir que o autor pretendesse evitar os números fraccionários parece contraditório com o facto de desenvolver uma aritmética que os contempla.

O problema seguinte reproduz uma situação de multiplicando somente.

"Que numero averaa que multiplicado por 6 faça .78. (?)"<sup>170</sup>

Este tipo de situação pode ser traduzido em linguagem actual, pela resolução de equações do tipo  $ax = b$  ( $a \neq 0$ ). Convém referir que nesta fase os exemplos da falsa posição apresentados por Ruy Mendes começam a rarear para o mesmo tipo de equação.

O Multiplicando e somando é-nos apresentado com um problema do tipo.

"Que numero seraa que multiplicado por .3. e o que fizer somado cõ seu terço, somem .10. (?)"<sup>171</sup>

Em linguagem actual, pretende-se resolver a equação  $3x + \frac{1}{3}(3x) = 10$ . Neste caso o número tomado por falso é 3 e, o processo é idêntico aos anteriores para encontrar a solução.

Multiplicando e demenuindo

"Se averaa algum numero que multiplicado por .4. e do que fazerem demenuido ou tirado ho terço, fiquem .5. (?)"<sup>172</sup>

---

<sup>169</sup>[Mendes 1540, f. 87 v]

<sup>170</sup>[Mendes 1540, f. 88 f]

<sup>171</sup>[Mendes 1540, f. 88 f]

<sup>172</sup>[Mendes 1540, f. 88 f]

Pretende-se encontrar a solução para a equação  $4x - \frac{1}{3}(4x) = 5$ , resolvida por falsa posição com o 3 "por falso"<sup>173</sup>.

Vejamos o que se passa com Multiplicando e repartindo. O problema proposto é o seguinte:

"Que numero avera que multiplicado por .4. e o que fezerem repartido a .3. venha na repartiçã .2. (?)"<sup>174</sup>

Pretende-se resolver a equação  $4x \div 3 = 2$ , pelo que é usado o número "falso"<sup>6</sup>.

As situações que nos remetem para a divisão aparecem sob quatro aspetos que passamos a descrever:

Repartindo somente, com o exemplo que passamos a enunciar, "Qual sera ho numero que repartido a .5. venhã da partiçam .40. (?)"<sup>175</sup>

Traduzindo em linguagem atual  $x \div 5 = 40$

Repartindo e somando, com o enunciado "Qual sera ho numero que repartido a 5 e o que vier na repartiçã somado cõ seu quarto, somem .30. (?)"<sup>176</sup>

Trata-se de resolver a equação  $\frac{x}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{x}{5} = 30$ , neste caso com o "faltoso" 20.

Repartindo e demenuindo, com o exemplo

"Que numero sera aquele que repartido a 4 e o que vier na partiçam tirado o seu terço, fiquem.5.(?)"<sup>177</sup>

O autor usa 12 como o número falso e, se traduzirmos o enunciado em linguagem atual temos a equação  $\frac{x}{4} - \frac{1}{3} \times \frac{x}{4} = 5$ , cuja solução é 30.

Repartindo e multiplicando

Este é o último caso apresentado e assume a forma do enunciado seguinte:

---

<sup>173</sup>[Mendes 1540, f. 88 f]

<sup>174</sup>[Mendes 1540, f. 88 v]

<sup>175</sup>[Mendes 1540, f. 88 v]

<sup>176</sup>[Mendes 1540, f. 88 v]

<sup>177</sup>[Mendes 1540, f. 89 f]

“Qual numero sera que repartido a .4. e do que vier na repartiçã multiplicado por .5., façam .25. (?)”<sup>178</sup>

Aqui o número falso é 12 e o processo a seguir é idêntico ao dos outros casos, tendo-se a solução 20.

---

<sup>178</sup>[Mendes 1540, f. 89 f]

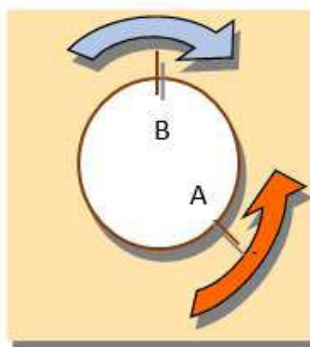
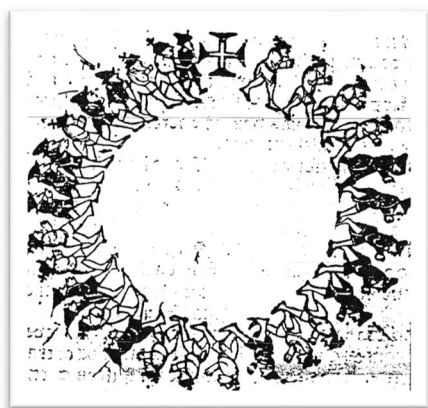
## ANEXO 10

### «Cristãos e mouros» de Bento Fernandes

A classificação dos problemas que figuram nos tratados de aritmética é referida por Maryvonne Spiesser<sup>179</sup> como delicada, na medida em que, não existe um padrão que permita categorizar os enunciados exibidos. Esta autora cita Vera Sanford que propõe duas categorias, os problemas da vida real, os problemas recreativos e os problemas pseudo-reais. Johannes Tropfke em *Geschichte der Elementar-Mathematik* de 1902, propõe uma divisão dos problemas em duas classes: problemas da vida quotidiana e problemas recreativos. Nas aritméticas portuguesas quinhentistas encontramos um número elevado de problemas. Por exemplo, já referimos que Ruy Mendes exhibe muitos problemas sobre a determinação de números, contudo, tanto Gaspar Nicolas como Bento Fernandes para além dos problemas dedicados aos números apresentam outros mais ligados a uma questão lúdica. São exemplo disso os problemas de herança, jogos, caminhadas, entre outros.

#### Os Cristãos e os Mouros

Um problema proposto por Bento Fernandes relata um confronto entre cristãos e mouros. A resolução do problema é acompanhada por uma roda, onde os cristãos figuram com uma cruz na cabeça e os mouros vestidos de preto com capelos nas cabeças, como mostra o esquema do autor.



Esquema utilizado na contagem de modo a eliminar os mouros.

<sup>179</sup>[Spiesser, 2003, pp. 55-57]

Quinze cristãos, navegando pelo mar, toparam uma galé de mouros que trazia 15 mouros. E pelejaram tanto de uma parte e de outra que se puderam vencer e abalroaram com os mouros e entraram dentro. E quando se acharam tantos de uma, vieram a partido, que se pusessem todos sobre uma roda, os mouros entre os cristãos, e que contassem desde 1 até 9 e em qualquer que acertasse, quer fosse cristão ou mouro, o lançassem ao mar, como chegasse a 9. E assim foram contando sempre por diante até chegar a 9, não voltando atrás. E se acertasse de cair nos cristãos, os deitassem ao mar e os mouros levassem a presa, e acertando nos mouros os deitassem ao mar e os cristãos levassem a presa. Pergunto: de que modo se devem por os cristãos e os mouros entre eles para que os mouros se deitem todos ao mar e os cristãos fiquem com a vitória?

Diz Bento Fernandes que entre os cristãos havia um homem experimentado na conta, pondo uma tal ordem que os mouros foram todos lançados ao mar, ficando os cristãos vivos e vencedores. Como fez o tal homem? Pôs primeiro 4 cristãos e depois um mouro; depois 2 cristãos e logo 1 mouro; 3 cristão e 1 mouro; 1 cristão e 2 mouros; 2 cristãos e 3 mouros; 1 cristão e 2 mouros; 2 cristão e 1 mouro. E assim ficam 30 entre cristãos e mouros. E estando todos nesta ordem numa roda, começando a contar primeiro os 4 cristãos por adiante até chegar a 9 e adiante até chegar a outro 9 e como chegar a 9 lança-lo ao mar. Deste modo se lançaram todos os mouros ao mar e os cristãos ficaram com a paz e com a vitória e partiram a presa entre todos.

Bento Fernandes refere um cristão experimentado em contas, que rapidamente resolveu o problema. Vejamos uma hipótese para o seu esquema: introduzir entre os 15 cristãos já dispostos na roda, os 15 mouros, numa posição que ocupem sempre lugares que sejam múltiplos de 9, tendo em conta todos os que vão figurando na roda. Se designarmos por  $M_1$  o primeiro mouro a ser colocado, ele estará na posição 9, iniciando a contagem em A e, após 8 cristãos. Os seguintes vão ocupando as outras posições, até o último mouro ser colocado,  $M_{15}$ , que corresponde ao múltiplo 135. A seta com sentido B, corresponde ao processo de eliminação e situa-se entre um mouro e um cristão, iniciando o processo inverso, ou seja, o primeiro a ser eliminado é  $M_{15}$ , continuando sucessivamente até  $M_1$  que, neste sentido será o último a ser eliminado.

## ANEXO 11

Publicação na Revue d'Histoire des Mathématiques da SMF

# La *Pratica d'arismetica* de Ruy Mendes dans le contexte des arithmétiques marchandes ibériques<sup>180</sup>

Teresa Costa Clain

Grupo de História da Matemática

Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações,

Campus Universitário de Santiago, Universidade de Aveiro, 3810-193 Aveiro, Portugal

costa.jesus.teresa@ua.pt

### Abstract

In the sixteenth century began the publication of mercantile arithmetic treatises printed in Portugal, such as the *Tratado da Pratica d'Arismetica* of Gaspar Nicolas, first published in 1519, the *Pratica d'Arismetica* of Ruy Mendes, with only one edition in 1540 and the *Tratado da arte d'Arismetica* published by Bento Fernandes in 1555. We can find, in these treatises, arithmetical models linked to financial transactions with specific rules of Portuguese trade of spices and its distribution in Europe. We will present a brief introduction of the *Pratica d'Arismetica* of Ruy Mendes and its place with respect to other works in mercantile arithmetic produced in Portugal. We also highlight sources and influences with respect to the Iberian context.

### Resumo

No século XVI iniciou-se a publicação de obras de aritmética mercantil impressas em Portugal, tais como o *Tratado da Pratica d'Arismetica*<sup>181</sup> de Gaspar Nicolas, publicado pela primeira vez em 1519, a *Pratica d'Arismetica*<sup>182</sup> de Ruy Mendes de 1540 e o *Tratado da arte d'Arismetica*<sup>183</sup>, de Bento Fernandes em 1555. Nos tratados encontramos uma modelação aritmética ligada às operações financeiras, na forma de regras próprias do comércio português das especiarias e da sua distribuição pela Europa. Faremos uma breve

---

<sup>180</sup> Artigo publicado na Revue d'Histoire des Mathématiques, (21) facicule 1, 2015.

<sup>181</sup>[Nicolas 1963]

<sup>182</sup>[Mendes 1540]

<sup>183</sup>[Fernandes 1555]



apresentação da *Pratica d'Arismetica* de Ruy Mendes e do seu enquadramento nas obras em aritmética mercantil produzidas em Portugal, referenciando ainda fontes e influências presentes tendo em conta o contexto ibérico.

## Résumé

Au XVI<sup>e</sup> furent publiés les premiers ouvrages sur l'arithmétique mercantile imprimés au Portugal tels que le *Tratado da Pratica d'Arismetica* de Gaspar Nicolas édité pour la première fois en 1519, la *Pratica d'Arismetica* de Ruy Mendes de 1540 et le *Tratado da arte d'Arismetica* de Bento Fernandes en 1555. Dans tous ces traités est présent des modèles arithmétiques liés aux opérations financières, sous la forme de règles propres issues du commerce portugais des épices et de sa distribution dans toute l'Europe. Nous donnerons une brève présentation de la *Pratica d'Arismetica* de Ruy Mendes que nous replacerons dans le contexte des œuvres d'arithmétique mercantile au Portugal, en indiquant les sources et les influences, relativement au contexte ibérique.

## 1. Introduction

Le Portugal fut un des principaux protagonistes des transformations économiques de l'Europe du XVI<sup>e</sup> siècle avec la création de la *Rota do Cabo*<sup>184</sup>. Les marchands nationaux sont devenus rapidement des éléments importants du commerce international réalisant voyages et transactions avec des régions éloignées à partir du futur grand centre de négoce que sera Lisbonne. Pour une grande part d'entre eux, la maîtrise du calcul arithmétique devint une nécessité non seulement pour évaluer les coûts et les bénéfices résultant des voyages, mais aussi pour réaliser une comptabilité rigoureuse associée aux transactions commerciales et au calcul des opérations financières telles que les intérêts et les lettres de crédit.

La réalisation des calculs sur la base du système de numération romain et la pratique arithmétique issue du quadrivium ont été usuellement enseignées à l'époque dans les institutions portugaises, comme ce fut le cas du monastère de Alcobaça<sup>185</sup> et du *Estudo*

---

<sup>184</sup> C'est la première route maritime régulière entre l'Europe atlantique et l'Inde.  
[Godinho 1963 – 1971, vol. I, p. 48]

<sup>185</sup> [Jaca 2007, p. 23]

*Geral*<sup>186</sup> à Lisbonne. Dans quelle mesure cet enseignement répondait aux besoins et exigences d'une société dont le commerce se développait à un niveau intercontinental et qui mettait en jeu des capitaux chaque fois plus importants? À notre connaissance, il n'a pas été découvert de document ou registre d'école au Portugal spécifiquement liée à la pratique des activités commerciales bien qu'il existât déjà des institutions administratives liées au commerce international telles que la *Casa da Índia*<sup>187</sup> et la *Casa dos Contos*<sup>188</sup>.

Nous n'avons pas, non plus, découvert de document précis sur les enseignements dispensés dans ces institutions, néanmoins certains témoignages indirects nous donnent des informations partielles sur le contenu des programmes. Par exemple, dans l'*oração de sapiência*<sup>189</sup>, D. Pedro de Meneses évoque les disciplines enseignées dans l'institution *Estudo Geral* de Lisbonne en 1504 et souligne leur intérêt : «*Restam as duas Matemáticas. Recordando-as, a nossa oração atingirá rapidissimamente a meta. Uma é a Aritmética, a outra a Geometria. Ambas são muito necessárias, não só aos letrados, mas também a todos os mercadores e negociantes*»<sup>190</sup>.

Un autre témoignage indirect est celui du règlement de la *Casa dos Contos*. Virgínia Rau<sup>191</sup> rappelle, qu'en général, les postes de fonctionnaire sans attribution spécifique ne requièrent pas une grande formation. Cependant dans une note que Pedro Nunes adresse au Cardinal D. Henrique et qui figure dans les premières pages du *Libro de Algebra*, il souligne l'importance d'une formation plus spécialisée pour les comptables du roi : «*E ha porem em Italia algũs homens muy exercitados nesta arte (álgebra), porque em todallas cidades ha mestres salariados de conta em Arithmetica & Geometria, & se da este partido por opposição. Por aqui vera V. A. quanta mais razão seria, que ouuesse esta doctrina nesta opulentissima cidade de Lixboa, onde tanto negocio ha desdo extremo oriente, & occidente,*

---

<sup>186</sup> Université fondée par le roi D. Dinis à Lisbonne en 1290. [Carvalho 1996, p. 132]

<sup>187</sup> [Peres 1947]

<sup>188</sup> [Rau 2009]

<sup>189</sup> Lors de la cérémonie d'ouverture officielle de l'année scolaire, une personnalité reconnue est invitée à donner un discours sur un sujet de son choix. Ce discours porte le nom de *oração de sapiência* et est usuellement publié.

<sup>190</sup> «Enfin, viennent les deux Mathématiques. En les citant, notre oraison atteindra très rapidement son objectif. L'une est l'arithmétique et l'autre la géométrie. Ensemble, elles sont indispensables, non seulement pour l'érudit, mais aussi pour tous les marchands et les négociants». [Carvalho 1996, p. 132]

<sup>191</sup> [Rau 2009, p. 6]

*& ilhas do mar Oceano, & onde elRey nosso Señor tem corenta contadores de sua fazenda*»<sup>192</sup>.

Dans le chapitre dédié à l'algèbre en France, en Allemagne, en Angleterre et au Portugal, Victor Katz fait référence à Pedro Nunes en tant qu'algébriste de la Renaissance et souligne que son *Libro de Algebra* «inclut quelques douzaines de problèmes mais, contrairement aux autres textes d'algèbre mentionnés, son exposé est entièrement abstrait. L'ouvrage ne contient pas de problème d'origine commerciale ou récréative»<sup>193</sup>. Katz ne fait pas référence aux ouvrages des auteurs antérieurs tels que Gaspar Nicolas, Ruy Mendes et Bento Fernandes qui ont pourtant écrit des traités d'arithmétique mercantile.

Cet étude vise à situer la *Pratica d'Arismetica* de Ruy Mendes parmi des arithmétiques mercantiles ibériques et à la placer dans son contexte historique caractérisé par l'époque d'expansion maritime et commerciale du Portugal. Nous présenterons les différents thèmes traités par la *Pratica*, en se focalisant plus particulièrement sur la règle de un quart et un vingtième et la règle des comptes de Flandre liées à une réalité commerciale du négoce des épices. En prenant comme point de départ l'affirmation de Marques de Almeida<sup>194</sup> faisant du *Sumario breve de la pratica de la Aritmethica*<sup>195</sup> de Juan Andrés, la principale source d'inspiration de Mendes, nous proposons de réaliser une étude comparative d'une sélection d'extraits de textes des deux œuvres afin d'évaluer jusqu'à quel point cette proposition est justifiée.

## **2. Voyage et commerce : une pratique arithmétique en gestation**

Dès le XIV<sup>e</sup> et le XV<sup>e</sup> siècle, les navires portugais furent présents dans les principaux ports de la méditerranée et établirent des liaisons maritimes régulières avec plusieurs pays de l'arc méditerranéen, tels que les royaumes de l'Espagne et les citées d'Italie, entre autres.

---

<sup>192</sup> «Et il y a aussi en Italie quelques personnes très expérimentées dans cet art (algèbre) parce que dans toutes les villes il se trouve des maîtres possédant une activité lucrative en réalisant des comptes en arithmétique et géométrie et se donne par opposition. De cette manière, vous pouvez constater, Votre Altesse, l'importance d'apprendre cette doctrine dans notre opulente ville de Lisbonne, où il se réalise beaucoup de négoce en provenance de l'Orient, de l'Occident, des îles de l'océan et où le Roi notre seigneur possède quarante comptables». [Nunes 2010, pp. 7,8]

<sup>193</sup>[Katz 2010, p. 449](Traduction libre en français de la version portugaise)

<sup>194</sup>[Almeida 1994, vol. I, p. 85]

<sup>195</sup>[Andrés 1515]

Par exemple, une route particulièrement prisée au XV<sup>e</sup> siècle par les navigateurs portugais en Méditerranée était la liaison entre Valence, Barcelone et Montpellier<sup>196</sup>.

Les communautés portugaises les plus importantes se situaient dans les villes de Barcelone, Valence, Gène et Florence où marins, marchands, propriétaires et capitaines de bateaux se côtoyaient régulièrement lors d'échanges commerciaux ou dans la préparation de futurs voyages.

S'appuyant sur une solide réputation de bon constructeur d'embarcation et d'une notoriété de grand voyageur, les armateurs portugais furent très tôt fortement impliqués dans la réalisation de fret parallèlement à la commercialisation de produits nationaux, renforçant ainsi leur présence dans le transport méditerranéen. Rapidement la flotte portugaise ne se limita plus au simple transport de marchands et de marchandises nationales mais devint un acteur important dans l'acheminement de voyageurs ou d'objets divers, favorisant les contacts et les échanges de savoirs.

Dans un registre différent, une autre catégorie de personnes amenées à voyager et qui était quotidiennement en prise avec une grande diversité de cultures fut celle des étudiants. Virgínia Rau souligne les influences culturelles d'origine italienne sur les étudiants, les érudits et les prélats portugais qui voyagèrent et visitèrent les villes Italiennes durant le XV<sup>e</sup> siècle.<sup>197</sup> Il est fait aussi référence à des voyages d'étudiants au XIII<sup>e</sup> siècle par Joaquim Veríssimo Serrão dans des villes telles que Toulouse<sup>198</sup> et Montpellier qui était à cette époque très prisée par les portugais pour les études de médecine. Mais la plupart des étudiants issus du Portugal se concentraient à Paris<sup>199</sup> dont le plus grand nombre suivaient les cours de théologie.

Dès le treizième siècle, on assiste à une sédentarisation des marchands et des professionnels en fret d'origine portugaise autour de l'arc méditerranéen. On passe alors progressivement d'un simple échange fondé sur le troc à de véritables transactions commerciales<sup>200</sup>. L'utilisation de systèmes de crédit, la constitution de registres comptables sont significatifs d'une pratique commerciale plus élaborée conduisant à un usage du calcul

---

<sup>196</sup>[Barata 1998, p. 32, 68 – 80]

<sup>197</sup>[Rau 1972, pp. 9 – 99]

<sup>198</sup>[Serrão 1954]

<sup>199</sup>[Matos 1950]

<sup>200</sup>[Barata 1998, p. 68 – 80]

plus intensif et à la recherche d'un système numérique plus simple et plus sûr. L'introduction d'une nouvelle arithmétique pratique et fiable ainsi qu'une réforme du système numérique devint une nécessité<sup>201</sup>.

Nous n'avons pas connaissance de l'existence de structures organisées en vue de délivrer un enseignement dans un cadre professionnel au Portugal<sup>202</sup>, comme nous l'avons mentionné dans l'introduction. L'enseignement dispensé était surtout lié aux besoins des religieux. Une des premières institutions fut le monastère de Santa Maria de Alcobaça (1269) qui devint une école ouverte aux religieux mais aussi aux laïcs<sup>203</sup>. Plusieurs moines de ce monastère furent attachés à la rédaction ou à la copie de documents regroupés sous le nom de *Códices de Alcobaça*.

La grande majorité des marchands nationaux ne ressentaient certainement pas la nécessité de maîtriser un système numérique ou de se livrer à des jeux d'écritures comptables dans le cadre de leurs activités. Au cours des XV<sup>e</sup> et XVI<sup>e</sup> siècles, on assiste au passage progressif d'un petit commerce national à de grandes transactions internationales se concentrant sur Lisbonne où résidaient déjà de nombreux marchands étrangers, en particulier des Italiens<sup>204</sup>. La présence de ces marchands et de leurs pratiques commerciales peut avoir incité les marchands portugais à réaliser cette transition entre une pratique rudimentaire et de véritables techniques commerciales avancées. Les mécanismes de cette transition restent encore incompris et s'inscrivent dans le contexte plus large du monde ibérique<sup>205</sup>.

---

<sup>201</sup>Au Portugal, les chiffres indo-arabes sont vulgarisés dans les traités d'arithmétique. Le premier traité connu a été publié en 1519.

<sup>202</sup>[Almeida 1994, vol. I, p. 245] La première institution d'enseignement dédié au commerce à ce jour répertoriée est le premier cours de commerce à Lisbonne, apparu à l'initiative du Marquis de Pombal en 1756. [Almeida 1994, vol. I, p. 245]

<sup>203</sup>[Jaca 2004, pp. 20 – 23]

<sup>204</sup>Au quinzième siècle, on assiste à une expansion des activités commerciales des étrangers au Portugal. Parmi eux se trouve une importante maison florentine – les Bardi – dont un des membres, Jacome Bardi, s'installe et se marie à Porto. De même, la famille Lomellini s'installe à Lisbonne et réussit à obtenir le monopole sur l'exportation du liège en 1456. Dans le domaine des transactions du capital, Tropol de Vivaldi était une personnalité importante sur la place de Bruges. Le Florentin Giraldo Lucas dirigeait différents secteurs d'activité au Portugal. On relève même des registres de marchands étrangers dans la colonisation des archipels de Madère et des Açores, et leur implication dans certaines expéditions à la découverte de nouveaux territoires. [Castro 1983, pp. 691 – 710]

<sup>205</sup>Ce sujet est présenté par Hilario Casado Alonso dans une note explicative sur le *Libro de contabilidad de la compañías burgalesa de Juan de Castro y Simón Díaz el Rico*, inserto en el Libro de Mayordomía nº 68 de la Catedral de Burgos, 1465-1511 (Manuscrito sobre papel/ 43 x 25 x 5 cm, Archivo de la Catedral de Burgos).

Les découvertes maritimes furent le moteur d'un formidable accroissement du développement économique du royaume du Portugal et plaça Lisbonne au centre d'un vaste commerce international. Le Portugal connut une période de forte prospérité et de grande activité commerciale durant cet âge doré du XVI<sup>e</sup> siècle. Le développement d'activités commerciales mettant en jeu des sommes considérables, et l'introduction d'un impôt lié au commerce des épices motivèrent et favorisèrent l'utilisation de nouvelles pratiques arithmétiques plus efficaces, répondant de manière plus adéquate aux nécessités d'un négoce sans cesse plus complexe et structuré. Marques de Almeida indique quelques exemples de modélisation arithmétique utilisés à cette époque : «comme furent les calculs des impôts de la *Casa da Índia (quarto e vintena)*, la règle des compagnies pour l'exécution des négoce et la confluence de diverses formes de *cabedal*<sup>206</sup> à la poursuite d'une entreprise particulière (*regras de baratar*)»<sup>207</sup>.

Ce fut précisément à ce moment qu'apparurent les premières œuvres de référence en arithmétique telles que le *Tratado da Pratica d'Arismetica* de Gaspar Nicolas, publié pour la première fois en 1519; la *Pratica d'Arismetica* de Ruy Mendes de 1540; le *Tratado da arte d'Arismetica*, de Bento Fernandes de 1555. Issus d'un besoin de formation des marchands et de la nécessité de construire des institutions royales adaptées au commerce international et à sa gestion (perception de l'impôt par exemple), la publication des traités en arithmétique représente une étape importante pour le développement et diffusion d'une pratique mathématique liée au monde des affaires au Portugal.

### 3. Les premiers traités imprimés d'arithmétique de la péninsule ibérique

La première publication imprimée connue d'un traité d'arithmétique dans la péninsule ibérique est le *Suma de la art de Arismetica* de Francesc Santcliment, en 1482. Suivirent ensuite le *Tratado subtilissimo de Arismetica y Geometria* de Juan Ortega, en 1512; le *Sumario Breve de la Pratica de Arithmetica* de Juan Andrés en 1515 et la *Pratica mercantil* de

---

<sup>206</sup>*Cabedal* – Fonds financiers pour assurer le commerce de l'Orient. Parfois, le *cabedal* se composait d'or, d'argent et de cuivre, en plus de la monnaie en vigueur. D'autres parties des lettres de change ou même des marchandises, ceci dans le cas spécifique du *troc*, étaient considérées comme faisant aussi partie du *cabedal*. [Almeida 1994, vol. II, p. 294]

<sup>207</sup>[Almeida 1994, vol. I, p. 255]

de Joan Ventallol en 1521. Entre temps, fut publié en 1519 à Lisbonne le premier traité lusitanien, le *Tratado da Pratica d'Arismeteyca* de Gaspar Nicolas, initiant une série de publications d'ouvrages d'arithmétique mercantile au Portugal.

De manière générale, les traités furent publiés dans les cités de grand négoce où se pratiquaient d'importantes transactions commerciales comme Valence (Juan Andrés), Léon (Juan Ortega), Lisbonne (Gaspar Nicolas). De par leur contenu lié à la pratique commerciale, ces ouvrages s'adressent principalement aux marchands ou aux comptables responsables de la gestion des biens royaux et des impôts, comme fut le cas des transactions à la *Casa da Índia*. Néanmoins, la présence de chapitres dédiés à des sujets plus « abstraits », comme les progressions, les racines carrées et cubiques sur entiers et fractions et les problèmes sur les nombres, laisse supposer que les ouvrages s'adressaient aussi à un autre public plus impliqué dans les études et l'enseignement des mathématiques pour elles-mêmes.

Entre 1521 et 1540 furent publiés quatre autres traités<sup>208</sup> d'arithmétique dans les Espagnes (deux sont des rééditions des traités de Juan Ortega et Juan Andrés) tandis qu'au Portugal on assiste à une nouvelle édition du *Tratado da Pratica d'Arismetica* de Gaspar Nicolas en 1530 et c'est finalement en 1540 qu'apparut la *Pratica d'Arismetica* de Ruy Mendes. À l'extérieur de la Péninsule Ibérique et plus spécifiquement dans les républiques italiennes, la publication de traités d'arithmétique mercantile était une tradition bien implantée depuis le XIV<sup>e</sup> siècle. En grande majorité, les traités d'arithmétique furent publiés en langue vernaculaire, élément déterminant dans le succès et la popularisation des œuvres et des algorithmes qu'elles contiennent. On peut citer en particulier, la *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et proportionalita* de Luca Paccioli, imprimée en 1494, qui sera une source d'inspiration essentielle et un modèle d'organisation très présent dans l'architecture des traités ibériques comme le souligne Javier Docampo Rey, dans l'article « Reading Luca Pacioli's *Summa* in Catalonia : An early 16th-century Catalan manuscript on algebra and arithmetic »<sup>209</sup>.

---

<sup>208</sup>*Tratado Subtilíssimo de Arithmetica* de Juan Ortega, 1537; *Arithmética* de Juan Andrés, 1537; *Arte del computo* de Jeronimo de València, 1539; *Arte breve e muy provechosa de cuēta Castellana y Arismetica* de Juan Gutiérrez de Gualda, 1539.

<sup>209</sup>[Docampo 2006]

Le XVI<sup>e</sup> siècle se révéla être la période la plus riche en publication de traités d'arithmétique commerciale dans la Péninsule Ibérique. Des trois traités imprimés durant ce siècle au Portugal, le plus populaire fut sans aucun doute l'œuvre de Gaspar Nicolas qui connut onze éditions successives s'étalant sur plus d'un siècle alors que le traité de Ruy Mendes ne fut publié qu'une seule fois en 1540 par le même éditeur Germão Galharde<sup>210</sup>.

À l'image des traités italiens, les ouvrages portugais s'articulent autour des sujets liés au négoce et une constante commune à tous les traités lusitaniens est la présence de règles spécifiques liées à la *Casa da Índia* et aux impôts résultant du commerce à grande échelle. Néanmoins d'autres aspects des mathématiques que l'on classifie de «classiques» ou «traditionnelles» comme les problèmes sur les nombres, les racines carrées et cubiques, les progressions sont aussi présents dans toutes les publications. La persistance de ces thèmes, qui ne sont pas les objectifs principaux du document, montre l'importance que leurs auteurs successifs y accordent.

#### **4. La *Pratica d'Arismetica* de Ruy Mendes**

Dans une première approche, nous allons analyser les aspects les plus importants de l'œuvre de Ruy Mendes en nous intéressant aux motivations qui ont conduit l'auteur à rédiger ce document. Ensuite, la structuration de l'ouvrage et les thèmes ainsi que le style et la méthodologie suivis par l'auteur dans la présentation des sujets seront présentés. La question de l'adaptation du manuel à la réalité économique portugaise de l'époque sera le point d'orgue de notre analyse. Finalement nous placerons la *Pratica d'Arismetica* dans le contexte ibérique en mettant en évidence l'impact du traité de Juan Andrés, dont la structure est semblable et qui fut publié à Valence vingt-cinq ans plus tôt.

On possède à ce jour très peu d'information sur Ruy Mendes (parfois appelé Rodrigo Mendes). On situe habituellement son lieu de naissance à Mourão (Portugal). Inocêncio<sup>211</sup> nous laisse penser que l'auteur reçut une formation en droit, et au vu des références à la

---

<sup>210</sup> G. Galharde est un typographe français installé à Lisbonne à partir de 1519. Il adopta le patronyme de German Galharde ou Germão Galharte et possédait des imprimeries à Lisbonne et Coimbra.

<sup>211</sup> Inocêncio Francisco da Silva (Lisbonne, 1810 – Lisbonne, 1876), aussi connu sous le nom Innocencio (dans le langage de l'époque) fut un bibliographe lusitanien très important. Il a écrit le monumental dictionnaire bibliographique portugais (*Dicionário Bibliográfico Português*). [Almeida 1994, vol. I, p. 84]



*Casa da Índia*, on peut supposer qu'il exerça des activités liées à l'administration royale en général et à cette institution en particulier.

De la *Pratica d'Arismetica*, nous ne connaissons qu'une seule édition. Dans son livre *Biblioteca Lusitana* publié entre 1741 et 1759, Diogo Barbosa Machado<sup>212</sup> attribue à Ruy Mendes la paternité d'un autre document intitulé «*Perguntas em matéria de Arithmetica que se fazem e que se soltão*»<sup>213</sup> mais qui reste introuvable actuellement. Ruy Mendes lui-même fait allusion dans son prologue à d'autres travaux publiés sur l'arithmétique : «*E por eu pera este presente livro e assim pera outros dous de perguntas que tenho feito ...*»<sup>214</sup>.

L'affirmation de Diogo Barbosa Machado «*Practica de Arithmetica, em que se declarão por boa ordem, e claro estylo as 14 especies da dita Arte*»<sup>215</sup> sur l'organisation et la rigueur du traité nous amène à penser qu'une partie des activités de Ruy Mendes était liée à l'enseignement et la formation. Le style de l'écriture, les sujets abordés et leur traitement mettent en lumière les qualités pédagogiques de l'auteur et son souci de proposer un ouvrage complet en arithmétique. Il est de fait intéressant de noter que l'auteur lui-même met en avant la nécessité de publier des livres d'arithmétique dans le royaume, affirmant qu'il est compétent pour le faire :

«*E por tanto tendo eu em alguma maneira respeito a isto e assim vendo a necessidade que nestes reynos avia de hũ livro darismetica sentindome a meu parecer abil na dita arte para o poder fazer...*»<sup>216</sup>

ce qui confirme l'implication de Ruy Mendes dans un travail de formation et de divulgation.

---

<sup>212</sup> Diogo Barbosa Machado (Lisbonne, 31 Mars, 1682 - Lisbonne, Août 9, 1772) était un religieux catholique, écrivain portugais et bibliographe. Il a réalisé un catalogue sur les livres conservés dans les bibliothèques portugaises avant le tremblement de terre de 1755. De nombreux ouvrages mentionnés dans ce catalogue ont été perdus lors de cette catastrophe.

<sup>213</sup> « Questions en matière d'arithmétique qui se forment et se libèrent [résolvent] »  
[Machado 1741 – 1759, vol. III, p. 649]

<sup>214</sup> « Et pour ce livre mais aussi pour deux autres [livres] de questions que j'ai fait ... »  
[Mendes 1540, *prologo*]

<sup>215</sup> « *Practica de Arithmetica, où se déclareront en bon ordre et en style clair, les 14 espèces du dit Art* ». [Machado 1741 – 1759, vol. III, p. 649]

<sup>216</sup> « Bien qu'ayant un grand respect pour cela [les œuvres anciennes et cultures transmises oralement qui sont encore très présentes à cette époque] il apparaît nécessaire que dans ce royaume il y ait un livre d'arithmétique et je me sens capable et suffisamment habile [compétent] pour le faire... » [Mendes 1540, *prologo*]

Si l'enseignement et la divulgation du savoir semblent être les principales motivations qui ont conduit Ruy Mendes à publier son traité, on peut aussi noter les appuis et les encouragements qu'il reçut. Ainsi, dans son prologue, l'écrivain rend hommage à D. Teodósio I, duc de Bragança et beau-fils de la marraine de l'auteur «*Segue-se ho prologo do present livro o qual vai dirigido ao muyto ilustre e magnifico senhor o senhor dom Theodosio Duque de Bragança e cetera*»<sup>217</sup>. On peut citer aussi Pero de Mendonça<sup>218</sup> qui l'a fortement encouragé à écrire le traité sous la protection du duc. Dans ce même prologue, Ruy Mendes déclare qu'il a consulté d'autres ouvrages mais malheureusement il n'en donne pas les références, laissant des doutes sur les documents qu'il a pu utiliser à l'époque. Néanmoins, en se basant sur le style et la structure de l'ouvrage, nous pouvons identifier les sources probables sur lesquelles l'auteur s'est appuyé dans l'élaboration du traité.

Le document est organisé en sept traités eux mêmes subdivisés en sept chapitres qui à leur tour sont découpés en un nombre variable de *particulas* comme l'indique l'auteur lui-même «*Segue-se a tavoada deste presente livro. No presente livro se contem sete tratados e cada tratado tẽ sete caplos e cada capitulo certas partículas*»<sup>219</sup>.

Le premier traité correspond à un texte de trente deux feuillets où Mendes introduit les sept *especies* d'*Arismetica* pour les nombres entiers et les opérations associées: *Nomear, somar, deminuir, multiplicar, repartir, progressam, tirar rayzes quadradas e cubecas*. Le deuxième traité de vingt-sept feuillets s'intéresse cette fois-ci aux fractions (nombres rompus) en suivant une méthodologie similaire. À partir du troisième traité, Ruy Mendes<sup>220</sup> aborde les règles qui composent l'essentiel de l'ouvrage et que nous détaillons dans l'annexe 1.

Les traités 3 et 4 contiennent les règles classiques qui se rencontrent dans toutes les arithmétiques de l'époque comme c'est le cas de la règle de trois et de la règle de change. Le *quatrième traité* aborde les règles liées au commerce : règle des compagnies, règle de

---

<sup>217</sup> «Voici le prologue de ce livre dédié à l'illustre et magnifique seigneur, le seigneur Dom Theodosio, duc de Bragança, et cetera». [Mendes 1540, *prologo*]

<sup>218</sup> Pero de Mendonça était le frère de D. Teodósio I.

<sup>219</sup> « Je donne la table des matières du présent livre. Le livre se compose de sept traités et chaque traité contient sept chapitres et chaque chapitre plusieurs particules ». [Mendes 1540, *tavoada*]

<sup>220</sup> Voir annexe 1 (Table de sujets de la *Pratica* de Ruy Mendes).

troc. Le cinquième traité tire son intérêt des règles spécifiques au commerce lusitanien comme la règle de un quartet un vingtième (*regra de quarto e vintena*) due à l'imposition des marchandises qui se pratiquait à la *Casa da Índia* de Lisbonne, ainsi que la règle des comptes de Flandre<sup>221</sup> associée au change. Ces deux règles locales résultent des liens commerciaux entre Lisbonne et les pays orientaux par la route du Cap (*Rota do Cabo*). On y trouve aussi un exposé sur les règles de fausses positions et finalement une présentation des règles de change de monnaie (*câmbio miúdo*) et de titre (*câmbio real*). Les sixième et septième traités sont liés aux règles d'alliage d'argent ou d'or (*regras de liga de prata ou de ouro*).

#### 4.1 Les règles locales

Avant de poursuivre plus en avant la description des règles arithmétiques composant l'œuvre de Ruy Mendes, nous allons détailler quelque peu cette institution qu'est la *Casa da Índia* et qui se révèle être une des pierres angulaires, avec la *Casa dos Contos*<sup>222</sup>, de l'organisation commerciale du Portugal (et plus particulièrement de Lisbonne) au XVI<sup>e</sup> siècle. Elle tient une position centrale dans le traité de Ruy Mendes (fig. 1) et est sans doute, comme nous l'avons mentionné plus haut, une des motivations qui a conduit l'auteur à publier ce document. Enfin, elle est à l'origine de règles spécifiques que l'on rencontre uniquement dans les traités d'arithmétique mercantile lusitaniens.

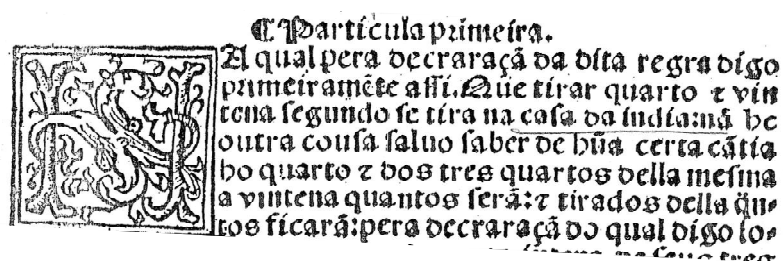


fig.1 Référence à la *Casa da Índia* dans la *Pratica*<sup>223</sup> de Ruy Mendes

<sup>221</sup>La première *feitoria* portugaise a été fondée à Bruges en Flandre puis transférée de Bruges à Anvers entre 1488 et 1498. Le nom *feitoria* est associé à des comptoirs commerciaux européens dans des territoires étrangers liés aux possessions coloniales.

<sup>222</sup>La *Casa dos Contos* était l'institution suprême de supervision et de contrôle des fonds publics et des valeurs du Portugal.

<sup>223</sup>[Mendes 1540, f. 80]

La principale source d'information que nous avons sur cette institution provient d'un manuscrit décrivant le règlement de la *Casa da Índia* dont un exemplaire se trouve à la Bibliothèque Centrale de la Marine et un autre à la Bibliothèque Nationale du Portugal. Une transcription de ce manuscrit fut réalisée par Damião Peres en 1947 [Peres 1947] qui en donne une reproduction exacte. La *Casa da Índia* fut créée en 1503 sous le règne de Dom Manuel I afin de gérer le commerce international avec l'Orient et garantir un monopole sur le transit des marchandises en faveur du roi. Elle englobe aussi deux autres institutions : la *Casa da Guiné* et la *Casa da Mina*, liées au commerce avec la côte ouest de l'Afrique. La *Casa da Índia* a pour mission de réaliser la manutention, le stockage et la vente des marchandises venant de l'Orient vers le reste de l'Europe (principalement les épices). On y maintenait une comptabilité sur les achats et les ventes, en particulier on y calculait l'impôt (la règle de un quartet un vingtième (*quarto e vintena*) que le marchand devait au roi. La *Casa da Índia* était localisée sur la rive nord du Tage dans l'actuel *Paço da Ribeira* et ses bâtiments étaient disposés perpendiculairement au fleuve.

L'accroissement rapide du commerce avec le port de Lisbonne et l'augmentation du volume de négoce qui en découlaient les principales motivations de la création de l'institution et de son règlement évoqués dès les premières pages :

*«...considerando nos quam grandes couzas sam os nossos traotos de Guiné e das Índias, a Deos louvores, y quãto proveito delles se segue a nossos Regnos, e naturais delles, y assi a outras partes da Christandade, e como somos obrigados a trabalhar, quanto em nos for, de as taes couzas serem sempre bem regidas e governadas e conservadas, parecendo nos que por ho negocio ser grande e de munta importancia e ocupação... »*<sup>224</sup>. De fait, en raison des découvertes maritimes, les routes commerciales avec l'Inde se trouvent modifiées en faveur de Lisbonne et la *Rota do Cabo* permet un transport de marchandise plus rapide, plus fiable, garant d'une meilleure qualité et surtout plus économique que le transit pédestre par la route traditionnelle de l'est via les pays du Moyen Orient et l'Italie. Lisbonne

---

<sup>224</sup>«Considérant comme une affaire importante nos positions en Guinée et en Indes, dieu soit loué, de retirer bénéfices et avantages pour notre royaume, notre peuple et les autres parties de la chrétienté, et comme nous devons travailler pour une bonne gestion, gouvernance et préservation, il nous apparait que les négoce sont importants et requièrent toute notre implication... ».[Peres 1947, p. 3]

devient une des principales plateformes d'un commerce mondial en pleine expansion, justifiant la création d'un outil de gestion adapté.

Un des principaux objectifs de la *Casa da Índia* est la perception de l'impôt. Deux articles du règlement sont dédiés aux règles de calcul de cet impôt spécifique à Lisbonne. L'article 68.º réglemente la valeur de la taxe<sup>225</sup>, basée sur la règle de un quartet un vingtième (*quarto e vintena*) pour toutes les marchandises tandis que l'article 71.º prévoit l'enregistrement et le contrôle de cette taxe pour la *Casa dos Contos*. La règle un quartet un vingtième est une des spécificités du traité de Ruy Mendes. Elle est issue d'un calcul des impôts au Portugal appliquée aux marchandises issues du commerce avec l'Orient. Elle correspond à un prélèvement de un quart (*quarto*) plus (*e*) un vingtième (*vintena*) des trois quarts restants, c'est-à-dire  $\frac{1}{4} + \frac{1}{20} \times \frac{3}{4} = \frac{23}{80}$  de la quantité initiale. On peut se demander quelles furent les motivations d'un procédé de calcul aussi complexe alors qu'un simple prélèvement du quart de la valeur aurait grandement simplifié le calcul de l'impôt. Le vingtième d'une quantité est un calcul qui se faisait usuellement dans la détermination de certains impôts ou de change<sup>226</sup> et se pose la question de savoir si le quart plus le vingtième supplémentaire ne correspond pas à deux prélèvements successifs.

Voici le principe tiré de l'ouvrage de Mendes<sup>227</sup> : «*Tendo uma quantia, saber  $\frac{1}{4}e\frac{3}{4}$  da mesma, avintena quantos será? E tirados dela quanto ficará?*»<sup>228</sup>.

L'auteur propose ensuite un exemple concret : «*O quarto de 155 cruzados e a vintena dos seus três quartos, quanto será?*»<sup>229</sup>. Nous reproduisons la résolution du problème telle quelle dans le traité par Ruy Mendes, mais traduit en langage mathématique actuel.

---

<sup>225</sup>[Peres 1947, pp. 56, 58]

<sup>226</sup> Dans le comptoir de Flandre, la monnaie était la livre qui se subdivisait en 20 sou. Cette subdivision est mentionnée dans le traité de Ruy Mendes sur la règles de Flandre (f. 83).

<sup>227</sup>[Mendes 1540, f. 80]

<sup>228</sup>«Étant donnée une quantité, et connaissant le quart et les trois quarts de cette même quantité, quel est le vingtième de cette dernière quantité ? Et retranché de cette dernière quantité, combien reste t'il ?»

<sup>229</sup>«Le quart de 155 *cruzados* et le vingtième de ses trois quarts cela fera combien?»

Considérons les fractions  $\frac{1}{4}$  et  $\frac{1}{20}$ . Multiplions 4 par 20 et il vient 80. Effectuons maintenant les produits suivants  $\frac{1}{4} \times 80 = 20$  et  $\frac{3}{4} \times 80 = 60$ . La vingtième de ses  $\frac{3}{4}$ [de 80] est 3, et  $20 + 3 = 23$ , qui est  $\frac{1}{4}$  de 80 et le vingtième de ses  $\frac{3}{4}$ [de 80].

Relativement aux 155 cruzados est appliquée la règle de trois

80 cruzados \_\_\_\_\_ 23 cruzados

155 cruzados \_\_\_\_\_ x

$X = 44$  cruzados 2 tostões 1 vintém 5 reais<sup>230</sup>.

Ruy Mendes établit un modèle (un algorithme) facile à appliquer à une grande variété de problèmes, tel que l'énoncé suivant tiré du traité<sup>231</sup>:

«*Hũa nao partio da India com 500 quintaes de pimenta: e chegando a Portugal achouse nella de quebra a razam de 6 por cento: preguntase primeiramente com quantos quintaes chegou a Portugal e esto sabido preguntase mais o quarto deles e a vintena dos seus tres quartos quantos seram: e tirados deles mesmos quãtos ficará*»<sup>232</sup>. Ce problème aborde le sujet de la perte d'une partie de la cargaison de poivre qui était à l'époque une situation habituelle. Les produits transportés pouvaient souffrir d'un mauvais conditionnement entraînant leur détérioration ou bien disparaissaient complètement à cause des actes de piraterie ou d'un naufrage.

Comme le souligne Marques de Almeida<sup>233</sup>, le traité a pour objectif de proposer des modèles (algorithmes) arithmétiques appliqués à des situations concrètes et objectives, ici en l'occurrence, le tribut dû à la *Casa dos Contos*, véritable Tribunal des Comptes de l'époque.

<sup>230</sup>Nous utilisons la notation actuelle de la règle de trois simple et la monnaie portugaise de l'époque. Les valeurs utilisées par l'auteur sont les suivantes :

1 cruzado = 4 tostões, 1 tostão = 5 vinténs, 1 vintém = 20 reais. [Mendes 1540, f. 7]

<sup>231</sup>[Mendes 1540, f. 82]

<sup>232</sup>« Un navire part des Indes avec 500 quintaux de poivre et, arrivant au Portugal, on déplore une perte de 6% de la marchandise. On demande premièrement combien de quintaux arrivent au Portugal. On demande encore quel est le quart et le vingtième des trois-quarts. Et retranché d'eux, combien reste t-il? » [Mendes 1540, f. 82]

<sup>233</sup>[Almeida 1994, vol. I, p. 255]

Un autre point intéressant est la manière dont l’auteur présente le problème. Le choix des questions peut laisser penser que chaque résultat obtenu a une destination propre. En effet le problème est rédigé afin de calculer trois valeurs distinctes : le quart de la marchandise  $a$ , le vingtième des trois quarts restants  $b$ , et finalement ce que le marchand va conserver après impôt,  $r$ . Ce triplet  $(a, b, r)$  se retrouve dans tous les énoncés de problèmes liés à la règle de un quartet un vingtième. Est-ce un simple effet de l’algorithme proposé qui implique le calcul de résultats intermédiaires comme  $a$  et  $b$  ou bien cette subdivision était-elle intentionnelle et résultait-elle d’une répartition particulière de l’impôt ? Une autre interprétation est que l’auteur décompose la résolution du problème en trois calculs élémentaires dans un souci pédagogique.

Nous allons maintenant aborder la deuxième règle locale : la règle des comptes de Flandre (*Regra da conta de Frandres*) qui correspond à une règle de conversion. En complément à la *Casa da Índia*, le comptoir d’Anvers (*feitoria de Antuérpia*) était à l’époque de juridiction portugaise et était dédié à la distribution en Europe des produits venant de l’Orient. La monnaie en usage à Anvers (*livra* (livre), *soldo* (sou), *dinheiro* (denier), *mita* (mite)) étant différente de celle de Portugal sur la place de Lisbonne, une conversion entre les deux systèmes a conduit à la définition de règles spécifiques regroupées sous le nom de *Regra da Conta de Frandres*. Nous reproduisons la résolution d’un problème telle quelle est faite dans le traité par Ruy Mendes.

Problème: «*Na qual digo primeiramẽte assim: póde por caso que arrova de frãdes tẽ 25 arratés ou livras como la se chamã e que hũ homẽ qr vëder laa 16 arrovas de açucar a 5 dinheiros o arratal. Pregũta se quantas livras se montaria nelas*»<sup>234</sup>.

La première information, «*Na qual digo primeiramẽte assim: pode por caso que arrova de frãdes tẽ 25 arrates*» est la suivante : l’arrova de Flandre (mesure de poids au comptoir de Flandre qui à cette l’époque dépendait du Portugal) correspond à 25 *arratéis* ou *livres*. La deuxième information, «*hũ homẽ qr vëder laa 16 arrovas de açucar a 5 dinheiros o arratal*»<sup>235</sup>, se traduit par : un homme souhaite vendre en Flandre 16 *arrovas* du sucre à 5

---

<sup>234</sup>[Mendes 1540, f. 83]

<sup>235</sup>[Mendes 1540, f. 83]

*dinheiros* (monnaie du comptoir de Flandre) l'*arratal* (unité de poids du comptoir de Flandre). Avec l'expression «*Pregũta se quantas libras se montaria nelas*»<sup>236</sup>, l'auteur pose la question de savoir combien sera le coût en livre. Comme on utilise différentes unités de poids et d'argent, le but est de réaliser deux conversions: unité de poids et unité monétaire afin de savoir ce que vaut le sucre en terme de poids et d'argent dans les unités du comptoir de Flandre.

La première étape consiste à opérer une conversion de denier en livres et 5 *dinheiros* sont  $\frac{5}{240}$  *libras*. Ensuite, on convertit *arrobas* en *arráteis* et 16 *arrobas* sont 400 *arráteis*. Finalement, on effectue le produit suivant

$$400 \text{ (arráteis)} \times \frac{5}{240} \text{ (libra o arrátel)} = 8 \text{ libras } 6 \text{ soldos } 8 \text{ dinheiros}$$

en tenant compte des correspondances données par l'auteur<sup>237</sup> et que nous reproduisons dans la table (fig. 2).

	Livre ( <i>Livra</i> )	Sou ( <i>Soldo</i> )	Denier ( <i>Dinheiro</i> )	Mite <sup>238</sup> ( <i>Mita</i> )
<i>Livre</i>	1	20	240	5760
<i>Sou</i>	1/20	1	12	288
<i>Denier</i>	1/240	1/12	1	24
<i>Mite</i>	1/5760	1/288	1/24	1

Fig. 2 Table monétaire au comptoir de Flandre

En complément, Mendes propose une conversion du résultat, initialement en monnaie du comptoir de Flandre, dans la monnaie de Portugal. Cette ultime conversion était très importante puisque l'on souhaitait connaître la valeur au Portugal du capital réalisé en Flandre<sup>239</sup>.

<sup>236</sup>[Mendes 1540, f. 83]

<sup>237</sup>[Mendes 1540, f. 83]

<sup>238</sup>La Mite fut émise en Flandre dès 1418.

<sup>239</sup>Des trois arithméticiens que nous référons, c'est Bento Fernandes qui propose le plus grand nombre de problèmes sur la règle de Flandres alors que les problèmes de changes ne sont pas mentionnés ni par Gaspar Nicolas, ni par Ruy Mendes. Son traité propose plusieurs problèmes en référence au négoce à Medina del Campo, centre très fréquenté par les marchands portugais.



Monnaie au comptoir de Flandre	Monnaie portugaise <i>Real</i> <sup>240</sup>
<i>Livre</i>	1200
<i>Sou</i>	60
<i>Denier</i>	5
<i>Mite</i>	1 e 1/4 <i>cetil</i> <sup>241</sup>

Pour conclure cette section, nous rappelons que ces deux règles apparaissent uniquement dans les ouvrages portugais<sup>242</sup> car elles sont liées au commerce international passant par Lisbonne et à sa gestion par la *Casa da Índia*. On ne trouve donc pas l'équivalent de ces règles dans les traités des autres pays, en particulier dans le *Sumario breve de la pratica de Aritmetica* de Juan Andrés.

#### 4.2 L'arithmétique traditionnelle

La *Pratica d'Arismetica* de Ruy Mendes est un ouvrage essentiellement dédié à l'arithmétique commerciale. Pour autant, il apparaît des thèmes qui sortent du contexte mercantile. Un exemple, commun à beaucoup de traités d'arithmétique, concerne la détermination d'une racine carrée. L'ouvrage de Ruy Mendes traite la racine carrée de nombres entiers ou de fractions de carrés parfaits comme  $\frac{9}{16}$ . Nous reproduisons ici, en langage mathématique moderne et en français, un exemple de calcul de racine carrée tel qu'il est donné par Ruy Mendes<sup>243</sup> : «*Quero de crarar hũa maneira pera saberdes tirar a raiz quadrada mais chegada que se possa a qualquer numero inteiro que nũ seja quadrado nẽ*

<sup>240</sup> Le système livre-sou-denier existait au Portugal jusqu'en 1435 quand la livre fut abolie au profit du real blanc.

<sup>241</sup> Le début de l'expansion ultra-marine portugaise, en 1415, fut commémoré par la création d'une nouvelle monnaie : le *ceitil* de Ceuta.

<sup>242</sup> [Nicolas 1963, ff. 16 – 19, 35, 36], [Mendes 1540, ff. 80 – 83], [Fernandes 1555, ff. 38 – 41]

<sup>243</sup> [Mendes 1540, f. 51]

*a tenha perfeita*»<sup>244</sup>. La question est de déterminer la racine carrée d'un nombre qui n'est pas un carré parfait. L'exemple porte sur le nombre 47.

En premier lieu, on détermine le carré parfait le plus proche de 47 (par valeur inférieure). Nous avons  $6 \times 6 = 36$ . Nous sommes 6 avec 1,  $6 + 1 = 7$ . Effectuons ensuite le produit  $7 \times 7 = 49$ . Et la différence  $49 - 47 = 2$ . Le double de 7 est 14. Alors nous écrivons la fraction  $\frac{2}{14} = \frac{1}{7}$ .

$$7 - \frac{1}{7} = \frac{48}{7} = 6\frac{6}{7} \quad (1)$$

On peut considérer que  $\sqrt{47} = 6\frac{6}{7}$ .

L'expression clef (1) correspond à un procédé déjà connu comme la formule de Héron d'Alexandrie<sup>245</sup> que l'on peut résumer ainsi  $a + \frac{A-a^2}{2a}$  où, dans notre cas,  $A = 47$  et

$a = 7$  est une approximation entière la plus proche de  $\sqrt{47}$ .

Ruy Mendes mentionne alors la possibilité de calculer des racines carrées pour les fractions qui ne sont pas issues d'un quotient de carrés parfaits. L'argumentation n'apparaît pas clairement mais il nous semble qu'il s'appuie sur l'idée d'effectuer le quotient des racines carrées des nombres entiers constituant la fraction. L'auteur ne présente pas d'exemple en avançant un argument commun : «*pera o qual ño ponho enxemplo por ño alargar*»<sup>246</sup>. Dans cette même thématique dédiée aux nombres, Mendes propose un vaste ensemble de problèmes résolus par les règles de fausse position, simple ou double<sup>247</sup>.

##### 5. L'influence du *Sumario breve de la pratica de Aritmetica* sur la *Pratica d'Arismetica*

Relativement aux sources qui sont présentes dans les traités d'arithmétique portugais écrits au XVI<sup>e</sup>, l'influence de Pacioli est uniquement revendiquée par Gaspar Nicolas dans quelques passages de son œuvre tandis que, Bento Fernandes ne le mentionne pas. Sur ce

<sup>244</sup> «Je veux déclarer une manière pour calculer une racine la plus proche possible pour n'importe quel nombre entier qui ne soit pas un carré parfait». [Mendes 1540, f. 51]

<sup>245</sup>[Charbert et al, 1994, pp. 231, 232]

<sup>246</sup>«Pour lequel je ne donne pas d'exemple afin de ne pas trop augmenter la taille de l'ouvrage». [Mendes 1540, f. 51]

<sup>247</sup>[Mendes 1540, ff. 84 – 94]

dernier, Maria do Céu Silva démontre, dans l'article «The algebraic content of Bento Fernandes' *Tratado da arte de arismetica*»<sup>248</sup>, que Bento Fernandes ne connaissait pas la *Summa* et que ses références ont une autre provenance. Ruy Mendes est plus singulier puisque cette référence à Luca Pacioli n'apparaît pas explicitement tandis que Marques de Almeida<sup>249</sup> affirme que la principale source d'inspiration de Mendes fut le *Sumario breve de la pratica de Aritmetica* de Juan Andrés qui servit de modèle pour organiser la *Pratica*. L'architecture de l'ouvrage, organisée en sept traités, eux-mêmes divisés en chapitres reprend l'organisation de l'œuvre du frère espagnol dont la publication fut réalisée vingt cinq ans avant l'édition de Ruy Mendes. L'objectif de cette section est d'examiner si le traité de Ruy Mendes est une adaptation de l'œuvre de Juan Andrés ou bien si nous sommes en présence d'un travail original, certes inspiré d'ouvrages antérieurs, mais présentant une approche novatrice et contenant un matériel nouveau. Dans cette optique, nous allons analyser quelques extraits des deux traités dans leur grandes lignes.

Sur Juan Andrés, nous savons peu de choses sinon qu'il fut religieux de Zaragoza et que son œuvre, *Sumario breve de la pratica de Aritmética*, fut publiée à Valence en 1515.

Sur la structure de son livre, Juan Andrés explique que «...se cõtienẽ diez tratados y cada tratado cõtiene ciertos capítulos y cada capº cõtiene ciertos artículos»<sup>250</sup>. Même s'il n'y a pas de référence explicite au *Sumario* dans l'œuvre de Ruy Mendes, on constate donc que celui-ci utilise une ossature similaire, composée de traités, chapitres et paragraphes (*tratados, capítulos e artículos*).

Néanmoins, on peut souligner quelques différences. L'arithmétique de Juan Andrés est constituée de dix traités contre sept pour Ruy Mendes. De même, alors que le portugais prend soin de diviser chaque traité en sept chapitres, le frère espagnol utilise un nombre variable de chapitres par traité. A ce sujet, la structure de la *Pratica d'Arismetica* est unique au vu des autres arithmétiques publiées au Portugal. Gaspar Nicolas ne présente pas de table de matière et organise le *Tratado da Prática d'Arismetica*<sup>251</sup> en fonction des sujets à

---

<sup>248</sup>[Silva 2008]

<sup>249</sup>[Almeida 1994, vol. I, p. 85]

<sup>250</sup> «...on trouve dix traités et chaque traité contient un certain nombre de chapitres et chaque chapitre réunit plusieurs articles.», [Mendes 1540, f. 3]

<sup>251</sup>[Nicolas 1963]

traiter. Pour sa part, Bento Fernandes<sup>252</sup> présente les «*Tavoadas das regras e perguntas deste presente livro da arte de Arismética assi como vam declaradas cada hũa em seu título*»<sup>253</sup>. Une autre différence notable entre les deux traités que nous comparons est la présence chez Andrés d'outils de calcul comme par exemple les tables relatives au calcul digital. On retrouve exactement les mêmes tables dans la *Summa de Aritmética, Geometria, Proportioni et Proporcionalita*, de Luca Pacioli, publiée à Venise en 1494 mais le traité de Ruy Mendes ne fait aucune référence à ce type de table ni même au calcul digital lui-même. Nous souhaitons aussi mettre en évidence une disparité entre les deux auteurs relativement à l'introduction des nombres. Dans le premier traité de son *Sumario*, Juan Andrés présente des éléments d'arithmétique spéculative. Il définit les quantités discrètes et continues, les nombres premiers et composés puis les nombres pairs, impairs, linéaires, rectangulaires, carrés, solides, cubiques sans oublier les nombres triangulaires, circulaires, superflus et parfaits.

Le choix d'introduire des éléments d'arithmétique spéculative mise en parallèle avec le calcul enseigné par les traités d'algorithme, est une pratique révélée par Maryvonne Spisser<sup>254</sup> comme un témoignage de la division binaire, qui distingue d'une part les différentes techniques de calcul, d'autre part l'objectif en vue duquel on désire enseigner à calculer. Cette approche des nombres à la Boèce n'apparaît absolument pas dans le texte de Ruy Mendes puisque celui-ci aborde les chiffres<sup>255</sup> (as *letras*) de l'arithmétique dès le premier traité alors que ces notions sont étudiées plus loin par Juan Andrés. Par contre, on peut noter quelques similitudes entre le deuxième traité de Juan Andrés et le premier traité lusitanien. Par exemple les deux introductions sont rédigées en termes très similaires et présentent les sept *species* de l'arithmétique :

«*Seguese o primeiro tractado deste presente livro : no qual decrararey as sete especies darte darismetica por numeros inteiros: as quaes sam as seguintes. Nomear. Somar. Demenuir. Multiplicar. Repartir. E progressão. E tirar raizes quadradas e cubecas. O qual*

---

<sup>252</sup>[Silva 2008]

<sup>253</sup> «Table des règles et des questions du présent livre de l'art de l'Arithmétique ainsi comme elles sont déclarés chacune dans son titre», [Fernandes 1555, tavoada ]

<sup>254</sup> [Spiesser 2003, pp.9-10]

<sup>255</sup> Nous nous référons aux chiffres de 0 jusqu'à 9.

*tractado tẽ sete capitulos e cada capitulo tẽ certas partículas*<sup>256</sup>», par Ruy Mendes. On a une introduction similaire par Juan Andrés :

«*Segundo tractado deste presente libro tracta delas siete especias del arte dela arismetica asaber es nombrar sumar restar multiplicar y partir progresion y extracion de rayzes quadradas y cubicas enel qual tratado se contienen siete capitulos y en cada capitulo se contienen ciertos artículos*»<sup>257</sup>.

Nous allons succinctement présenter les thèmes dominants de l'œuvre de Juan Andrés, en particulier les règles qui constituent l'essentiel de l'ouvrage, et les comparer à ceux de l'arithmétique de Ruy Mendes. La table (fig .3) donne une liste résumée des principaux sujets abordés dans le *Sumario*. Il convient de préciser que la règle de la Chose est mentionnée mais sans être étudiée ni utilisée dans le document.

1. La définition de nombre	6. La règle de troc
2. Les opérations arithmétiques	7. La règle d'alliage d'argent/alliage d'or
3. La règle de trois	8. La règle de change
4. La règle de subdivision de la monnaie	9. La règle de fausse position
5. La règle des compagnies	10. Les problèmes

fig. 3 Les sujets du *Sumario breve de la pratica d' Aritmetica*

Comme nous l'avons souligné antérieurement, la *Pratica d'Arismetica* contient un ensemble de règles locales spécifiques au traitement de l'impôt mais l'œuvre est essentiellement constituée des thèmes désormais traditionnels communs à tous les traités d'arithmétique en général et à celui de Juan Andrés en particulier. À ce titre, on retrouve de nombreuses parentés entre les deux traités puisqu'ils abordent les mêmes sujets classiques. On peut relever certains passages qui, lus en parallèle, ne présentent que d'infimes différences. On retrouve par exemple des définitions très similaires, exprimant

<sup>256</sup> «Voici le premier traité de ce livre : dans lequel je présenterai les sept espèces d'art de l'Arithmétique pour les nombres entier : lesquels sont les suivant. Nommer (dénombrer). Sommer. Diminuer. Multiplier. Diviser. Et progression. Et calculer les racines carrées et cubiques. Le présent traité a sept chapitres et chaque chapitre contient plusieurs paragraphes». [Mendes 1540, f. 1]

<sup>257</sup> «Le second traité de ce présent livre présente les sept espèces de l'art de l'Arithmétique à savoir dénombrer sommer multiplier et diviser les progressionset extraire des racines carrées et cubiques, lequel traité contient sept chapitres et chaque chapitre contient plusieurs articles». [Andrés 1515, f. 17]

les mêmes idées. Dans plusieurs situations, on rencontre des problèmes ou des exemples énoncés en termes très proches sinon identiques. Cela renforce l'idée que, soit Ruy Mendes a lu le traité de Juan Andrés, soit les deux auteurs se sont fondés sur une source commune. Afin d'étayer nos affirmations, nous mettons, ci-après, en parallèle des extraits des deux ouvrages.

### 5.1. Textes similaires

L'exemple choisi porte sur l'origine des nombres rompus (*números quebrados*). La version donnée par Ruy Mendes (fol. 35) dans son premier traité correspond au même texte dans le deuxième traité de Juan Andrés (fol. 56). La méthode d'introduction des fractions est identique avec une brève introduction que nous reproduisons ici, pour Ruy Mendes et Juan Andrés respectivement:

*«Na qual quero declarar a quarta cousa que sera saber donde naceo ho tal numero quebrado e donde foy seu primeyro principio: pera o qual aveis de saber que ho numero quebrado naceo e principiou da especia de repartir por inteiro quando ficou algũa por repartir como tendes visto atras na dita especia: porque como ficou numero por repartir por causa de nom poder ho partidor ja nelle entrar foy necessário quebrar o que assi ficava pera o acabar de repartir: e como assi fez começou logo dali ho tal numero quebrado: e nam de nenhũa especia das de atras»*<sup>258</sup>

et

*«Articulo terçero de donde nasce el numero quebrado: y has de saber que los números quebrados nascen de partir numeros enteros a numeros enteros asaber es quando el partidor no entra integralmente en la suma partidera»*<sup>259</sup>.

---

<sup>258</sup> «Dans lequel je souhaite déclarer la quatrième chose qui sera de savoir d'où provient le nombre rompu et quel fut son principe premier : pour lequel on doit savoir que le nombre rompu est né à partir de la division par un entier quand il reste quelque chose pour diviser comme on a put le voir dans les exemples précédents : comme il reste un nombre à diviser une fois que le diviseur n'entre pas dans le reste : et c'est ainsi que commence le nombre rompu». [Mendes 1540, f. 35]

<sup>259</sup> «...tu dois savoir que les nombres rompus proviennent de la division des nombres entiers par des nombres entiers et de savoir quand le diviseur n'entre pas intégralement dans la somme à diviser». [Andrés 1515, f. 56]

Il y a un lien proéminent entre les affirmations des deux auteurs qui ont choisis le même verbe : naître. Ce choix semble être loin d'être une simple coïncidence.

## 5.2. Exemples similaires

Un des premiers exemples proposés par Juan Andrés pour mettre en œuvre l'algorithme de la multiplication concerne le produit de 7365 par 435 (présenté de manière abstraite sans l'associer à un problème concret). On retrouve exactement la même opération chez Ruy Mendes mais dans un contexte différent «7365 *côvados de pano a 435 reais cada côvado*<sup>260</sup> *quantos reais são?*»<sup>261</sup>. Cette approche de Ruy Mendes, la présentation des opérations dans un cadre concret, montre une fois de plus le soin qu'apporte l'auteur à introduire une certaine application pédagogique. Un autre exemple concerne les racines carrées. Les deux auteurs se proposent de déterminer la racine carrée de 55225 en utilisant le même algorithme<sup>262</sup>. On note néanmoins quelques différences puisque Juan Andrés utilise la même abréviation que Pacioli,  $\mathbb{R}^a$  pour désigner la racine carrée d'un nombre «*y has de saber que extracion de  $\mathbb{R}^a$  ...*»<sup>263</sup> alors que Ruy Mendes la nomme en langage naturel de manière extensive.

À propos de la racine carrée, nous soulignons une différence de langage dans l'introduction de chaque auteur. Ruy Mendes considère les racines associées à des nombres qui sont des carrés parfaits (racines propres) et des racines qui n'entrent pas dans le premier cas (racines impropres). Ce qui est intéressant, c'est que l'auteur mentionne une relation entre un carré parfait et sa racine carrée, mais déclare qu'il n'expliquera pas cette relation car il considère que c'est une question de géométrie, et que son but n'est pas de traiter ce sujet :

*«e este tal numero que assi se acha se chama rayz quadrada do outro: e o outro se chama numero quadrado: e não declaro aqui porque se chamẽ assi porque não faz o nosso*

<sup>260</sup>Unité de mesure utilisée pour les beaux draps et soies ou égal à 3 pouces (66 cm).

<sup>261</sup> «7365 *côvados* de tissu à 435 *reais* chaque donne valeur combien de *reais*?» [Mendes 1540, f. 13]

<sup>262</sup>[Mendes 1540, fol. 28 ], [Andrés 1515, f. 53 ],

<sup>263</sup>[Andrés 1515, f. 51]

*proposito e entra ẽ materia de geometria. E aveis de notar que se nã pode achar rayz da dita maneira a todos los numeros ẽtes a muito poucos e aos outros lhe tiramos a rayz do mayor numero quadrado que neles esta: ou a mais chegada a elles: porẽ deles mesmos ẽ nenhũa maneyra se pode tirar a ponto: e aveis de notar que aquelas rayzes que multiplicadas por si mesmas fazẽ todo o tal numero chamamos rayzes propias e as que o nã fazem chamamos nã propias»<sup>264</sup>.*

Sur le même thème Juan Andrés introduit les racines discrètes (pour les nombres qui sont des carrés parfaits) et sourdes ou racines non discrètes, dans les autres cas «...*aquellas rayzes que se pueden apõto dar son dichas discretas si quiere quadradas oracionales y aquellas rayzes apunto no se pueden dar sino impropiamẽte son ditas rayzes sordas /o indiscretas*<sup>265</sup>...».

On trouve d'autres extraits, dont nous ne reproduisons pas la liste exhaustive, où les auteurs considèrent des problèmes identiques comme la cas de la racine carrée pour la fraction  $\frac{9}{16}$ .<sup>266</sup>

### 5.3. Énoncés similaires

Nous abordons maintenant les similitudes entre les énoncés présentés par les deux auteurs. Un exemple intéressant est la manipulation de carrés de nombres, qui est présente dans les deux livres. Dans la section dédiée aux nombres carrés les deux présentent exactement huit problèmes sur le même thème (pour Mendes, le thème proposé est «...*algumas cousas sobre numeros quadrados e tem 8 particulas*»<sup>267</sup> et pour

<sup>264</sup> «Et ce nombre qui ainsi se nomme racine carrée de l'autre et l'autre qui se nomme nombre carré : mais je n'expliquerai pas ici pourquoi il s'appelle ainsi parce que notre objectif n'est pas de traiter de la géométrie. Et on doit noter que l'on ne peut pas trouver la racine de cette manière pour tous les nombres puisqu' ils ne sont pas nombreux [les nombres qui sont des carrés parfaits]. Alors pour les autres nombres, nous calculons la racine du plus grand carré parfait ou du carré le plus proche : et pour ces nombres nous ne pouvons pas être plus précis et on doit encore noter que les racines multipliées par elles-mêmes qui donnent exactement le nombre s'appelle racine propre et que les autres s'appellent non propre [approchée]». [Mendes 1540, f. 26]

<sup>265</sup> «Et ces racines dont le carré donne le nombre initial sont les racines discrètes et les racines dont le carrés diffère [s'approche] du nombre initial sont dites sourdes ou non discrètes». [Andrés 1515, f. 51]

<sup>266</sup> Ils vont le présenter dans des sections différentes. Pour Ruy Mendes [Mendes 1540, f. 50], le problème de la racine carrée de  $\frac{9}{16}$  apparaît dans la section de l'arithmétique des fractions alors que Juan Andrés [Andrés 1515, f. 53] l'intègre et exemplifie dans la section dédiée aux racines carrées pour les entiers comme pour les fractions ; donc, de manière plus large, c'est la place des racines de fractions qui change.

<sup>267</sup> «...quelques résultats sur les nombres carrés en 8 particules». [Mendes 1540, ff. 52 – 54]



Andrés, «*Cap. tercero delos nũeros quadrados que contiene 8 articulos*»<sup>268</sup>), chacune des 8 particules ou articles correspond à un problème.

En tenant en compte de la rédaction et du choix des nombres utilisés, nous observons que cinq des huit énoncés proposés par Mendes sont les mêmes que ceux que l'on trouve dans le *Sumario*. Nous détaillons ci-après un cas représentatif : Rui Mendes ennonce : «*Qual sera aquella numero que tirando delle dez o que ficar seja numero quadrado e ajuntado lhe os mesmos dez: o que fizer seja também numero quadrado*»<sup>269</sup> et on trouve le même problème dans le *Sumario* «*Dame un numero que juntando con el .10. faça numero quadrado y quitando del .10. queda numero quadrado*»<sup>270</sup>.

Nous donnons autre exemple d'énoncé que les deux oeuvres ont en commun. Pour Mendes, le problème se présente sous la forme suivante :

«*Qual sera aquella numero quadrado que tirãdo delle o que se montar nas tres rayzes suas fique numero quadrado e ajuntando lhe ho mesmo faça numero tambémquadrado*»<sup>271</sup>.

On relève une extension de ce problème dans la *Pratica* que l'on ne trouve pas dans la section correspondante du *Sumario* traitant du cas des quatre racines : «*E se dissera que tirando delle o que se montasse nas quatro raizes suas ficasse quadrado: e ajuntando lhe ho mesmo fosse também quadrado*»<sup>272</sup>. On trouve aussi d'autres énoncés similaires comme la somme de deux nombres carrés ou la somme de trois nombres carrés donnant un nombre carré dans les deux traités<sup>273</sup>.

Nous relevons que l'influence de l'œuvre de Juan Andrés sur le traité de Ruy Mendes va au-delà de la structure que les deux auteurs ont en commun. Ce dernier s'en est inspiré à

---

<sup>268</sup>«Troisième chapitre sur les nombres carrés en 8 articles».[Andrés 1515, ff. 13 – 16]

<sup>269</sup>«Quel est le nombre qui, retranché de dix donnera un nombre carré et qui, ajouté à dix donne aussi un nombre carré».[Mendes 1540, f. 52]

<sup>270</sup>«Donne moi un nombre qui, ajoutant .10. fait un nombre carré et qui retranchant .10. reste un nombre carré».[Andrés 1515, f. 15]

<sup>271</sup>«Quel serait le nombre carré qui retranché de ses trois racines reste un nombre carré et qui ajouté de la même manière fait aussi un nombre carré».[Mendes 1540, f. 53] (au sujet de ce problème voir [Andrés 1515, f. 13]).

<sup>272</sup>«Et que peut on dire que retranchant de lui [du nombre carré] ses quatre racines, il reste carré et ajoutant les mêmes soit aussi carré».[Mendes 1540, f. 53]

<sup>273</sup>[Andrés 1515, f. 14],[Mendes 1540, ff. 53,54]

diverses reprises, reprenant les énoncés ou les thèmes lui paraissant les plus adéquats sans pour autant en faire une simple traduction.

#### 5.4. Les quatre prépositions

Un autre sujet intéressant de la *Pratica d'Arismeteycaest* la présence d'un paragraphe (*partícula*) qui précède les opérations sur les nombres rompus (*quebrados*). Ruy Mendes introduit les quatre expressions qu'il va utiliser pour décrire les quatre opérations arithmétiques: avec/de/par/a «*quatro dições que nos servem, cõ/de/por/a*»<sup>274</sup> et qui vont être utilisées pour représenter les quatre opérations basiques de l'arithmétique : l'addition, la soustraction, la multiplication et la division respectivement. Ces quatre prépositions se trouvent aussi dans le *Sumario* avec la même signification. Nous transcrivons dans le tableau la mise en pratique par les deux auteurs en proposant des exemples tirés des œuvres respectives où les nombres choisis sont exactement les mêmes.

<i>Pratica</i> <sup>275</sup>	<i>Sumario</i> <sup>276</sup>
<p>Sommant tant avec tant (<i>somando tantos cõ tantos</i>)</p> $\begin{array}{r} 8 \quad 17 \quad 9 \\ \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad 1 \frac{5}{12} \\ \text{cõ} \end{array}$	<p>Tant avec tant (<i>tanto con tanto</i>)</p> $\begin{array}{r} 8 \quad 17 \quad 9 \\ \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad 1 \frac{5}{12} \\ \text{con} \end{array}$
<p>Retranchant tant de tant (<i>tirando tantos de tantos</i>)</p> $\begin{array}{r} 9 \quad 20 \\ \frac{3}{4} \quad \frac{5}{3} \quad 2 \frac{11}{12} \\ \text{de} \end{array}$	<p>De tant qui paye tant (<i>de tanto qui en paga tãto</i>)</p> $\begin{array}{r} 9 \quad 20 \\ \frac{3}{4} \quad \frac{5}{3} \quad 2 \frac{11}{12} \\ \text{de} \end{array}$
<p>Mutiplicant tant par tant (<i>multiplicãdo tantos por tantos</i>)</p> $\begin{array}{r} 150 \\ \frac{5}{6} \quad \frac{30}{1} \quad 25 \\ \text{por} \end{array}$	<p>Tant par tant (<i>tanto por tanto</i>)</p> $\begin{array}{r} 150 \\ \frac{5}{6} \quad \frac{30}{1} \quad 25 \\ \text{por} \end{array}$
<p>Tant à repartir en tant (<i>tantos repartidos a tanto</i>)</p>	<p>Partager tant en tant (<i>partir tantos a tantos</i>)</p>

<sup>274</sup> «Les quatre mots que nous allons utiliser, avec/de/par/a». [Mendes 1540, f. 39]

<sup>275</sup> [Mendes 1540, ff. 39 – 45]

<sup>276</sup> [Andrés 1515, ff. 60 – 68]

$\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{array} \begin{array}{c} a \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array}$	$\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{array} \begin{array}{c} a \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \text{ pratica de la figura}$
---	--

On observe ici une forte similitude entre la *Practica* et le *Sumario* que ce soit en terme de langage ou que ce soit en terme de schéma. Le traité de Gaspar Nicolas, bien que faisant parti du même corpus que la *Practica d'Arismetica*, ne présentent aucune section dédiées aux prépositions. Le fait que Mendes dédie une section complète sur ce sujet souligne à nouveau son esprit pédagogique et l'auteur met en avant la valorisation d'un travail de mémorisation quand il argumente « *Aveis de saber que temos quatro dições que aveis de trazer na memoria*<sup>277</sup> ».

#### 5.5. Référence a Luca Pacioli

Juan Andrés fait explicitement référence à Lucas de Borgo (Luca Pacioli). Par exemple, au sujet de la multiplication des fractions, il énonce que, contrairement à ce qu'affirme Lucas de Borgo :

«*multiplicando quebrado solo por quebrado solo nunca sale ningũ entero ni tanto quanto sea el menor delos extremos y multiplicando quebrado solo por entero y quebrado y asi mesmo multiplicando entero y quebrado por entero y quebrado puede salir el produzindo que sea entero com quebrado y puede salir el producido entero solo sin ningũ quebrado encara que Lucas de Burgo en su tratado mayor dize el cõtrario*<sup>278</sup> ».

De fait, l'arithmétique de Lucas de Borgo est un véritable modèle comme l'a écrit lui-même le frère espagnol dans son ouvrage: «*La qual cosa se faze por la regla que Lucas de Burgo*

<sup>277</sup> « Il est nécessaire de connaître les quatre mots et de les mémoriser ». [Mendes 1540, f. 39]

<sup>278</sup> « Multiplier un nombre rompu seul par un autre nombre rompu seul ne donne pas un nombre entier et ne donne pas non plus que le plus petit des extrêmes et multiplier un nombre rompu seul par un nombre entier et rompu et aussi multiplier un nombre entier et rompu par un nombre entier et rompu on peut obtenir un produit rompu et il peut sortir un entier seul sans partie rompue contredisant ce que Luca de Burgo dit dans son traité ». [Andrés 1515, f. 65]

*puso en su tratado mayor del qual tratado yo he sacado y cõpilado la mayor parte deste libro...»*<sup>279</sup>.

Dans la *Pratica* de Ruy Mendes, le nom de Luca Pacioli (Luca de Borgo) n'est pas explicitement référencé mais l'auteur reprend exactement le même exemple et la même argumentation que Juan Andrés sur les produits de fractions lorsqu'il écrit :

*«E multiplicando por qualquer das outras quatro maneyras pode ho numero terceyro acertar de ser inteYRO somente ou inteYRO e quebrado juntamente. Dado caso que algũs aritmeticos disseram do contrayo na terceya e quarta maneya...»*<sup>280</sup>.

Bien que les deux textes transmettent la même idée, il y a une différence notable. Alors que le premier auteur réfère explicitement Lucas de Borgo, le second mentionne «quelques arithméticiens» sans autre précision. Quelles motivations ont poussé Ruy Mendes à ne pas donner de nom? Une chose est sûre, Mendes écrit qu'il connaît les travaux d'autres arithméticiens (notons le pluriel). Se réfère-t-il implicitement à Pacioli et à Andrés? Cet extrait est singulier car c'est l'unique passage où Mendes conteste un résultat qui est exactement le même que celui où Andrés attribue une erreur à Pacioli. Mendes reprend-t-il à son compte la critique de Andrés ou bien a-t-il lu la *Summa*? Nous ne possédons pas d'indices suffisants pour répondre à cette question. Il n'y a pas de doute que la *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalità* de Pacioli était connue au Portugal au début du XVI<sup>e</sup>. Il en existe un exemplaire à la Bibliothèque Nationale du Portugal dans l'édition de 1494<sup>281</sup> et Gaspar Nicolas, cite aussi le Frère Lucas de Borgo dans son *Tratado da Pratica d'Arismetica* (1519), admettant avoir extrait et utilisé beaucoup de problèmes de son œuvre et par la même montrant une bonne connaissance de son contenu<sup>282</sup>. Par ailleurs, Nunes le cite aussi au *Libro de Algebra*. Pour autant, Ruy Mendes ne mentionne pas le nom de Lucas de Borgo et la question reste ouverte.

---

<sup>279</sup> « laquelle chose se fait par la règle que Lucas de Burgos mise dans son traité majeur, duquel j'ai tiré et compilé une grande partie de ce livre... » [Andrés 1515, f. 58]

<sup>280</sup> « Et en multipliant par n'importe laquelle des quatre autres manières, on peut assurer que le troisième nombre sera un nombre entier ou un nombre entier et rompu. Compte tenu que quelques arithméticiens disent le contraire pour la troisième et la quatrième manière ». [Mendes 1540, f. 44 ]

<sup>281</sup> [Pacioli 1494 ]

<sup>282</sup> [Nicolas, 1963, f. 54]

## Conclusions

Le traité de Ruy Mendes est remarquable par son organisation et sa méthodologie. Le choix délibéré que prend l'auteur d'introduire les sujets, de souligner les motivations avant d'entrer dans le cœur du sujet, démontre une approche qui se veut pédagogique, orientée vers l'enseignement. Malgré ce soin apporté à la conception de l'ouvrage, celui-ci ne reçut qu'un succès très mitigé puisque l'on ne recense qu'une seule édition avec probablement un nombre réduit d'exemplaires. Ruy Mendes s'est adapté aux nécessités du marché de Lisbonne en développant des sujets spécifiques d'intérêts administratifs et commerciaux tels que les règles de compte de Flandre et la règle du *quarto e vintena* provenant de la *Casa da Índia*.

À l'époque que nous considérons, il était très usuel de copier sans citer ses sources et les auteurs d'arithmétique lusitaniens<sup>283</sup> n'ont pas dérogé à cette pratique. Des trois arithméticiens du XVI<sup>e</sup> siècle, Gaspar Nicolas est l'unique à mentionner explicitement Luca Pacioli dans certains passages de son œuvre. Analysant de plus près la *Pratica* et le *Sumario*, nous partageons le point de vue de Marques de Almeida lorsqu'il affirme que le *Sumario* de Juan Andrés, qui est considéré comme un traité plus modeste que son modèle italien<sup>284</sup>, fut une source directe importante pour la conception de la *Pratica*. Toutefois Ruy Mendes n'a pas effectué une simple traduction du traité de Andrés. Certes il s'appuie sur des ouvrages antérieurs en reprenant des thèmes, des problèmes et des exemples, comme il le reconnaît lui-même, «*assuntos já vistos em outras obras mas que serão mais detalhados e organizados no livro ao ponto de não haver necessidade de mestre para as ensinar*»<sup>285</sup>, mais il y insuffle un style tout personnel. Si les deux œuvres se distinguent sur la forme et sur les thèmes spécifiques au contexte lusitanien, elles se retrouvent dans une structure commune, dans les textes, les énoncés et dans les exemples similaires, aussi bien que dans d'autres sujets comme, par exemple, l'utilisation des quatre prépositions, ce qui nous conduit à renforcer l'idée de l'influence du traité de Juan Andrés dans cette arithmétique portugaise. Les mondes lusitanien et hispanique de cette époque sont unis par les liens

---

<sup>283</sup>[Nicolas, 1963], [Mendes, 1540], [Fernandes, 1555]

<sup>284</sup>[Labarthe 2004, vol. I, p. 34]

<sup>285</sup> «Sujets déjà vu dans d'autres œuvres mais qui seront détaillés et organisés dans son livre au point de ne pas avoir besoin d'un maître pour enseigner». [Mendes 1540, *prologo*]

étroits, partageant les mêmes préoccupations sur le développement du négoce outre-Atlantique et les mêmes objectifs en termes d'expansion maritime. Un exemple remarquable de cette forte interaction fut l'introduction du bilinguisme (portugais et castillan) imposée par Dom Manuel I au début du XVI<sup>e</sup> siècle, en raison de ses mariages avec des princesses castillanes. Ceci tend à démontrer qu'il existait des échanges importants du savoir et des cultures et particulièrement une circulation des livres entre les deux régions, la *Pratica d'Arismetica* de Ruy Mendes en est une illustration.

#### Remerciements

L'auteur remercie les professeurs Helmuth Malonek et Maryvonne Spiesser pour leurs suggestions dans l'élaboration de ce document. L'auteur est aussi redevable à la Fundação para a Ciência e Tecnologia pour son soutien financier sous la référence SFRH/BD/66637/2009.

This work was supported in part by *FEDER* funds through *COMPETE*-Operational Programme Factors of Competitiveness ("Programa Operacional Factores de Competitividade") and by Portuguese funds through the *Center for Research and Development in Mathematics and Applications* and the Portuguese Foundation for Science and Technology ("FCT-Fundação para a Ciência e a Tecnologia"), within project PEst-C/MAT/UI4106/2011 with *COMPETE* number FCOMP-01-0124-FEDER-022690.

#### REFERENCES

ALMEIDA (A. A. Marques)

- [1993]     *Capitais e capitalistas no comércio da especiaria*, Edições Cosmos, Lisboa, 1993
- [1994]     *Aritmética como descrição do real (1519-1679)*, Vols. I, II, Imprensa Nacional, Casa da Moeda, Lisboa, 1994
- [1998]     *A Matemática no tempo dos descobrimentos*, Grupo de trabalho do Ministério da Educação para as Comemorações dos descobrimentos Portugueses, Lisboa, 1998

ALONSO (Hilario Casado)

- [1990] Comercio Internacional y Seguros Marítimos en Burgos en la época de los Reyes Católicos, in *Actas do Congresso Bartolomeu Dias e a sua época*, pp. 221-238, Universidade do Porto, 1990

ANDRÉS (Juan Mossen)

- [1515] *Sumario breve de la práctica de la Aritmética de todo el curso del Arte mercantil bien declarada el qual se llama maestro de cuento*, Juan Joffre, Valência, 1515

AUBIN (Jean)

- [2006] *Le Latin et l'Astrolabe (Études inédites sur le règne de D. Manuel (1495-1521))*, Centre Culturel Calouste Gulbenkian, Paris, 2006

BARATA (Filipe Themudo)

- [1998] *Navegação, comércio e relações políticas: os portugueses no Mediterrâneo Ocidental (1385-1466)*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1998

BUESCU (Ana Isabel)

- [2007] Livros e livrarias de reis e de príncipes entre os séculos XV e XVI. Algumas notas, in *Humanista*: Vol. 8, pp.143-170, 2007

CARVALHO (Joaquim Barradas)

- [1983] *A la recherche de la specificité de la Renaissance Portugaise-L' "Esmeraldo de situ orbis" de Duarte Pacheco Pereira et la littérature portugaise de voyages à l'époque des grandes découvertes (Contribution à l'étude des origines de la pensée moderne)*, Fondation Calouste Gulbenkian, Centre culturel portugais, Paris, 1983

CARVALHO (Rómulo)

- [1996] *História do Ensino em Portugal*, Gulbenkian Educação, Lisboa, 1996

CASTRO (Armando)

- [1983] Actividade comercial e financeira, in *História de Portugal 1245-1640*, direção de José Hermano Saraiva, Publicações Alfa, Vol. I, p. 691-710, 1983

CAUNEDO DEL POTRO (Betsabé)

- [2009] Un Manual de Aritmética mercantil de Mosén Juan Andrés, in *Pecunia* 8, ([http://www3.unileon.es/pecunia/pecunia08/08\\_071\\_096.pdf](http://www3.unileon.es/pecunia/pecunia08/08_071_096.pdf))

CHARBERT (Jean-Luc) & BARBIN (Évelyne) & GUILLEMOT (Michel) & PAJUS (Anne ) & BOROWCZYK (Jacques) & DJEBBAR (Ahmed) & MARTZLOFF (Jean-Claude)

- [1994] *Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce*, Belin, Paris, 1994

DIAS (José Sebastião da Silva)

- [2006] *Portugal e a cultura europeia (séculos XVI a XVIII)*, Editores Campo das Letras, Porto, 2006

DOCAMPO (Javier)

- [2004] *La formación matemática del mercador catalán 1380-1521. Análisis de fuentes manuscritas*, PhD dissertation, Universidade de Santiago de Compostela, 2004

- [2006] Reading Luca Pacioli's *Summa* in Catalonia: An early 16<sup>th</sup>-century Catalan manuscript on algebra and arithmetic, *Historia Mathematica*, 33, pp. 43–62, 2006

DOUGIER (Henry) (coleção dirigida por)

- [1990] *Lisboa e os Descobrimentos (1415-1580: a invenção do mundo pelos navegadores portugueses)*, Éditions Autrement (versão portuguesa – Terramar-Editores distribuidores e livreiros, Lda), Paris, 1990

FERNANDES (Bento)

- [1555] *Tratado da Arte de Arismetica*, Francisco Correa, Porto, 1555

GODINHO (Vitorino Magalhães)

- [1963 – 1971] *Os descobrimentos e a economia mundial*, Editorial Presença, Vol. I, Lisboa, 1963-1971

GUINOTE (Paulo)

- [2003] India Route Project: Ascensão e declínio da Carreira da Índia, World Wide Web, URL, Nautical Archaeology Program, Texas A&M University, 2003, (<http://nautarch.tamu.edu/shiplab/>)

JACA (Carlos)



- [2007] O ensino em Portugal no período anterior à fundação da Universidade, Braga, in Textos da conferência *Relance sobre... O ensino em Portugal no período anterior à fundação da Universidade*, 2007, ([http://www.esas.pt/jaca/docs/Conferencia\\_ensino.pdf](http://www.esas.pt/jaca/docs/Conferencia_ensino.pdf))

JORGE (Fátima)

- [2008] *Formação Inicial de Professores do Ensino Básico: Um percurso centrado na história da matemática*, PhD dissertation, Universidade de Aveiro, 2008

KATZ (Victor)

- [2010] *História da Matemática*, Fundação Calouste Gulbenkian (Tradução do original inglês intitulado *A history of Mathematics: An Introduction*, 2<sup>nd</sup> Edition by Victor Katz, publicado por Pearson Education, Inc. publishing as Addison Wesley Higher Education, Copyright 1998), Lisboa, 2010

LABARTHE (Marie-Hélène)

- [2004] *Premières arithmétiques imprimées des Espagnes : une hiérarchie des Problèmes au service des procédés de résolution*, PhD dissertation, Université Paul Sabatier, Toulouse III, 2004

LEITÃO (Henrique)

- [2002] *Pedro Nunes, 1502-1578: novas terras, novos mares e o que mays he:novo ceo e novas estrelas*, Biblioteca Nacional, Lisboa, 2002

LEITÃO (Henrique) & MARTINS (Lígia)

- [2004] *O Livro Científico dos Séculos XV e XVI: Ciências Físico-Matemáticas na Biblioteca Nacional*, Ministério da Cultura, Biblioteca Nacional, Lisboa, 2004

MACHADO (Diogo Barbosa)

- [1741 – 1759] *Bibliotheca Lusitana historica, critica e cronologica na qual se comprehende a noticia dos Authores Portuguezes, e das Obras, que compuserão desde o tempo da promulgação da Ley da Graça até o tempo presente: Offerecida à Augusta Magestade de D. João V nosso senhor/por Diogo Barbosa Machado*, Lisboa Occidental: António Isidoro da Fonseca, 1741-1759, (4 vols.)

vol.III,([https://bdigital.sib.uc.pt/bduc/Biblioteca\\_Digital\\_UCFL/digicult/UCFL-CF-E-9-1\\_4/UCFL-CF-E-9-1\\_4\\_item1/UCFL-CF-E-9-3/UCFL-CF-E-9-3\\_item1/P659.html](https://bdigital.sib.uc.pt/bduc/Biblioteca_Digital_UCFL/digicult/UCFL-CF-E-9-1_4/UCFL-CF-E-9-1_4_item1/UCFL-CF-E-9-3/UCFL-CF-E-9-3_item1/P659.html))

MATOS (Luís)

- [1950] *Les portugais à l'université de Paris entre 1500 et 1550*, Universidade de Coimbra, Coimbra, 1950

MENDES (Ruy)

- [1540] *Pratica d'Arismetica*, Germão Galharde, Lisboa, 1540

MOTA (Bernardo)

- [2011] *O estatuto da Matemática em Portugal nos séculos XVI e XVII*, Fundação Calouste Gulbenkian, Fundação para a Ciência e a Tecnologia, 2011

NEVES (Bruno Gonçalves)

- [2004] *A Carga e a Descarga das Naus da Índia*, in *O Mar: Um Oceano de Oportunidades*, Universidade de Lisboa, Jornadas do Mar, 2004

NICOLAS (Gaspar)

- [1963] *Tratado da Pratica Darismetica* (1519), Edição fac-similada, Livraria Civilização, Porto, 1963

NUNES (Pedro)

- [2010] *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria*, Lisboa, Academia das Ciências de Lisboa e Fundação Calouste Gulbenkian, 2010

PACIOLI (Luca)

- [1494] *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità*, Veneza, 1494

PERES (Damião)

- [1947] *Regimento das Cazas das Índias e Mina*, Coimbra, Universidade de Coimbra, 1947

RAMOS (Rui) & SOUSA (Bernardo Vasconcelos) & Monteiro (Nuno Gonçalo)

- [2009] *História de Portugal*, Esfera dos Livros, Lisboa, 2009

RAU (Virgínia)

[1972] Alguns estudantes e eruditos portugueses em Itália no século XV, Centro de Estudos Históricos, Do tempo e da História, Vol. V, pp.29-99,Lisboa, 1972

[2009] *A Casa dos Contos*, Imprensa Nacional, Casa da Moeda, Lisboa, 2009

SARAIVA(António José) & LOPES (Óscar)

[1978] *História da Literatura Portuguesa*, Porto Editora, Porto, 1978

SERRÃO (Joaquim Veríssimo)

[1954] *Portugueses no Estudo de Toulouse*, Universidade de Coimbra,Coimbra, 1954

SILVA (M. Céu)

[2008] The algebraic content of Bento Fernandes's *Tratado da arte de arismética* (1555), in *Historia Mathematica* 35, pp. 190-219, 2008

[2011] *A obra matemática de Juan Pérez de Moya no contexto dos saberes matemáticos do século XVI*, PhD dissertation, Universidade do Porto, 2011

SPIESSER (Maryvonne)

[1999] *Entre theorie et pratique: Le Compendy de la Praticque des Nombres de Barthelemy de Romans et Mathieu Prehoude* (1471) (Aspects mathematiques, linguistiques et culturels), PhD dissertation, École des Hautes Etudes en Sciences Sociales, 1999

TORRES (Ana M. Carabias), ed.

[1994] *Las relaciones entre Portugal y Castilla en la época de los descubrimientos y la expansión colonial*, Ediciones Universidad de Salamanca, 1994

Table des sujets (transcription): MENDES (Ruy) [1540], *Pratica D'Arismetyca*, Germão

Galharde, Lisboa, 1540

Nomear por numeros inteyros .....	Fo.	1
Os graos por ordem .....	Fo.	3
Somar por inteiros pela primeira maneyra .....	Fo.	4
A prova de nove da dita especia .....	Fo.	5

A prova de Sete.....	Fo.	5
A prova real .....	Fo.	10
Somar por inteiro pola segunda maneyra.....	Fo.	6
Sua prova de Nove.....	Fo.	7
Sua prova de sete.....	Fo.	7
A prova real.....	Fo.	12
Demenuir por inteiros pola primeira maneyra.....	Fo.	7
Sua prova de Nove.....	Fo.	9
Sua prova de sete.....	Fo.	10
Sua prova real.....	Fo.	10
Demenuir por inteiro pola segunda maneyra.....	Fo.	11
Sua prova de Nove.....	Fo.	12
Sua prova de sete.....	Fo.	12
Sua prova real.....	Fo.	12
Multiplicar por inteiros pela primeira maneyra que se diz em asa.....	Fo.	14
A tavoada.....	Fo.	13
A prova dos nove da dita especia.....	Fo.	14
A prova de sete.....	Fo.	14
A prova real.....	Fo.	13
Multiplicar mourisco que he a segunda maneira.....	Fo.	15
Multiplicar em quadra que he a terceira maneira.....	Fo.	16
Hũa maneira de multiplicar abreviado.....	Fo.	16
Outra maneira de multiplicar abreviado.....	Fo.	17
Repartir por inteyros pola primeira maneyra.....	Fo.	18
Repartir pola segunda maneira.....	Fo.	19
A figura em outra maneira.....	Fo.	21
Sua prova de Nove.....	Fo.	21
Sua prova sete.....	Fo.	22
Sua prova real.....	Fo.	22
Hũa maneira de repartir abreviado.....	Fo.	22
Outra maneyra de repartir abreviado.....	Fo.	22
Progressam por inteyros pela primeira maneyra.....	Fo.	23
A maneira de como se somam brevemente.....	Fo.	23
Suas três provas, scilicet, de nove e sete e real.....	Fo.	24
Outra prova mays breve.....	Fo.	24
Progressam da segunda maneyra.....	Fo.	25
Como se somam brevemente.....	Fo.	25
Suas três provas de nove e sete e real.....	Fo.	25
Outra prova mais breve.....	Fo.	26
Tirar rayzes quadradas.....	Fo.	26
Sua prova.....	Fo.	28
Hũa maneira de somar os números quadrados.....	Fo.	29
Tirar rayzes cubecas.....	Fo.	30
Sua prova.....	Fo.	32

Nomear por numeros quebrados.....	Fo.	31
Que cosa he numero quebrado.....	Fo.	33
Como se pora o numero quebrado em figura.....	Fo.	33
Como se abreviam os números do quebrado.....	Fo.	34
Donde naceo o numero quebrado.....	Fo.	35
Repartir o que fica por repartir.....	Fo.	35
Perfeyçoar qualquer repartição.....	Fo.	36
A prova pera a tal repartição.....	Fo.	36
Somar por números quebrados.....	Fo.	37
Como acontece de ser em cinco maneiras.....	Fo.	37
Sua prova real.....	Fo.	38
As quatro dições que nos servem.....	Fo.	39
Outra maneira de somar por quebrados.....	Fo.	39
Demenuir por quebrados.....	Fo.	40
Como pode aquecer em seys maneiras.....	Fo.	40
Sua prova real.....	Fo.	41
Multiplicar por quebrados.....	Fo.	42
Como aquece em cinco maneyras.....	Fo.	42
Sua prova real.....	Fo.	47
Hũa maneira abreviada na quinta maneyra.....	Fo.	43
Multiplicar muytos numeros huns pelos outros.....	Fo.	44
Repartir por quebrados.....	Fo.	45
Como aquece em doze maneyras.....	Fo.	45
Sua prova real.....	Fo.	47
Progressam por quebrados em três maneiras.....	Fo.	47
A primeira maneyra.....	Fo.	48
Suas provas.....	Fo.	48
A segunda maneira.....	Fo.	49
Suas provas.....	Fo.	49
A terceyra maneira.....	Fo.	49
Sua prova.....	Fo.	50
Tirar rayzes quadradas por quebrados.....	Fo.	50
Tirar rayz quadrada mais chegada.....	Fo.	51
Hũa maneira de somar os números quadrados.....	Fo.	51
Tirar rayzes cubecas por quebrados.....	Fo.	52
Muytas perguntas acerca dos números quadrados.....	Fo.	52
Muytas perguntas acerca dos números quebrados.....	Fo.	55
Perguntas pêra achar taes e taes números etc.....	Fo.	58
A decraçam das moedas pesos e medidas.....	Fo.	59
 A regra de três sem tempo somente.....	Fo.	61
Sua prova real.....	Fo.	63
A dita regra por quebrados.....	Fo.	63
A figura da dita regra com sua decraçam.....	Fo.	63

A regra de três sem tempo e por ganhar ou perder a rezam de tanto por tanto.....	Fo.	64
Perguntas que se assolvem pela dita regra.....	Fo.	65
A regra de três com tempo somente.....	Fo.	66
Perguntas que se assolvem por ela.....	Fo.	67
A regra de três com tempo e por ganhar ou perder a rezam de tanto por tanto.....	Fo.	67
A regra de cinco.....	Fo.	68
Perguntas que se assolvem por ela.....	Fo.	68
A regra sem nome.....	Fo.	68
Perguntas que se assolvem por ela.....	Fo.	69
A regra de mudar.....	Fo.	69
A regra de companhias sem tempo somente.....	Fo.	71
Perguntas pera decaraçam della.....	Fo.	72
A regra de companhias sem tempo com condiçam de ganhar ou perder à rezam de tanto por tanto.....	Fo.	72
Perguntas pera decaraçam della.....	Fo.	73
A regra de companhias com tempo com condiçam de ganhar ou perder e cetera.....	Fo.	75
A regra de baratas simprez.....	Fo.	76
Perguntas pera decaraçam della.....	Fo.	76
A regra de baratas composta.....	Fo.	77
Perguntas pera decaraçam della.....	Fo.	78
A regra de baratas com tempo.....	Fo.	78
Perguntas pera decaraçam della.....	Fo.	79
A regra de tirar quarto e vintena.....	Fo.	80
A regra de tirar a quebra e quarto e vintena.....	Fo.	82
A regra da conta de Frandes.....	Fo.	83
A regra de hũa falsa posiçam ( de como se acham por ella singularmente muytos números).....	Fo.	84
De como se acham por ella singularmente muytos numeros.....	Fo.	84/89
A regra de duas falsas posições que também hé singular (como se acham muytos números e cetera).....	Fo.	91
A regra de cambo meudo (Perguntas sotis que por ella se assolvem, aas).....	Fo.	94
A regra de cambo real.....	Fo.	97
Perguntas por ella.....	Fo.	98
A regra de mudar a ley ou leys em outra: ajuntando outra prata de ley ou de liga.....	Fo.	99
A regra de mudar a ley ou leys em outra ajuntando prata fina.....	Fo.	101
A regra de mudar a ley ou leys em outra ajuntando puro cobre.....	Fo.	102

A regra de mudar a ley ou leys em outra tirando outra prata de ley ou de liga.....	Fo.	103
A regra de mudar a ley ou leys em outra tirando prata fina.....	Fo.	104
A regra de mudar a ley ou leys em outra tirando puro cobre.....	Fo.	105
A regra de mudar a fineza em ley nova ajuntando cobre a prata fina	Fo.	106
A regra de mudar os quilates em outros ajuntando outro ouro doutros quilates.....	Fo.	107
A regra de mudar quilates em outros ajuntando ouro fino.....	Fo.	108
A regra de mudar quilates em outros ajuntando prata ou cobre.....	Fo.	108
A regra de mudar quilates em outros tirando outro ouro doutros quilates..	Fo.	109
A regra de mudar quilates em outros tirando ouro fino.....	Fo.	109
A regra de mudar quilates em outros tirando prata ou cobre.....	Fo.	109
A regra de mudar a fineza em quilates novos ajuntando prata ou cobre.....	Fo.	110

## ANEXO 12

### Livros de Aritmética do século XVI. Fontes portuguesas

Autor: **Gaspar Nicolas**

<i>Tratado da Pratica d'Arismetica</i> (1519), Lisboa, Germão Galharde, Privilégio Real, edição fac-similada, Livraria Civilização, Porto, 1963	Referida por Anselmo, 562 Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
<i>Tratado da Pratica d'Arismetica</i> (1530), Lisboa, Germão Galharde, edição de João Fernandes <sup>286</sup> , Privilégio Real (desaparecido)	Referida por Anselmo, 590
<i>Tratado da Pratica d'Arismetica</i> ordenada per Gaspar Nicolas e agora a terceira vez impressa e enmendada, Luís Rodrigues, Lisboa, 1541	Biblioteca Pública de Évora Cot. 82
<i>Tratado da Pratica d'Arismetica</i> per Gaspar Nicolas e agora quarta vez impressa e com muita diligência emendada, edição de Francisco Grapheo, Lisboa, 1559	Bibliothèque Mazarine Paris Cot. 30014
<i>Tratado da Pratica d'Arismetica</i> composta e ordenada per Gaspar Nicolas agora nouamente e com muyta diligência enmendada, Arnold Birkmann Erben, Com Graça e privilégio, Antuérpia, 1573	Biblioteca da Universidade de Coimbra Cot. RB.16.21
<i>Tratado da Pratica d'Arismetica</i> composta e ordenada por Gaspar Nicolas. Agora de novo emendada nesta quinta impressam. Impressa com licença do Supremo conselho da santa geral Inquisiçam, edição de Domingo Miz, Lisboa, 1594	Biblioteca Nacional de Portugal Cot. Res. 4355 P
<i>Tratado da Pratica d'Arismetica</i> (1607) (desaparecido)	Referida por Luís de Albuquerque na “Nota sobre a obra e sobre o autor” na edição de 1963
<i>Tratado da Pratica d'Arismetica</i> composta e ordenada por Gaspar Nicolas, Vicente Alvarez, Lisboa, 1613	Houghton Library Cambridge Cot. Math. 496. 13. 3.
<i>Tratado da Pratica d'Arismetica</i> (desaparecido)	Referida por Luís de Albuquerque na “Nota sobre a obra e sobre o autor” na edição de 1963
<i>Tratado e arte de Arismetica</i> Para fazer um Perfeyto Cayxeyro, Seu autor Gaspar Nicolas. E emendada e acrescentada Por Manoel de Figueyredo, Cosmografo Mor que soy das Conquiatas destes Reynos de Portugal, E no fim com vários curiosidades de Arismetica. Offerecida A'Inclya Doutora Sta. Catarina, Bernardo da Costa de Carvalho, edição da Irmandade de Santa Catarina	British Library Londres Cot. 8506.aa.9

<sup>286</sup>João Fernandes era livreiro mercador.



Autor: **Ruy Mendes**

<p><i>Pratica darismetica</i> nouamente agora composta pelo licenciado ruy mendez. Na qual se decraran por boa orden, e craro estilo as quatorze especias darte darismetica .s. as sete dellas por números inteiros, e as outras sete por números quebrados: e assi mesmo trinta e cinco regras da dita arte muito sutil e breve e craramente decraradas com muitas outras perguntas e cousas necessárias e pueytosas pa qualquer pessoa que da dita pratica se pode aproueytar, Germão Galharde, Privilégio Real, Lisboa, 1540</p>	<p>Biblioteca Pública de Évora Cot. Res 490</p> <p>Biblioteca Nacional de Portugal Cot. Res. 278. V</p>
---	---

Autor: **Bento Fernandes**

<p><i>Tratado da arte de arismética</i> nouamente composto e ordenado por Bento Fernandes mercador e cidadão da cidade do Porto. Em que se declaran per boa orden muytas e muy sotiis regras da dita arte muyto proveitosas e necessárias para toda a pessoa que as quiser aprender. E assi outras muytas regras sutilezas e perguntas de todo género de conta e rezan pertencentes aos mercadores e tratantes. E as regras da cousa que sam de mais sustância pera pessoas curiosas e experimentadas na arte. Com as regras da liga do ouro e da prata e as tavoadas da valia do ouro e de seus quilates e da valia da prata muy claramente declarado e per modo muy sutil. Impresso em a muy nobre e sempre leal cidade do Porto de Portugal, por Francisco Correa, Porto, 1555</p>	<p>Biblioteca Pública de Évora Cot. Res 55</p>
---	--

Informações obtidas por consulta:

A. Marques de Almeida, *Aritmética como descrição do real* (1519-1679), vol. I, Imprensa Nacional Casa da Moeda, Lisboa, 1994

Henrique Leitão e Lígia Martins, *O livro Científico dos séculos XV e XVI (Ciências Físico-Matemáticas) na Biblioteca Nacional*, Lisboa, 2004

Jochen Hook e Pierre Jeannin, *Ars Mercatoria* (1400-1600), Schoningh, Paderborn, 1991

# Bibliografia

## Fontes primárias

Andrés, Juan (1515). *Sumario breve de la pratica de la Aritmethica de todo el curso del arte mercantil bien declarado: el qual se llama maestro del cuento*. Juan Joffre, Valência.

Aurel, Marco (1552). *Libro primero de Aritmética algebrática*. Joán de Mey Flandro, Valência.

Belveder, Joán (1597). *Libro general de las reducciones de plata y oro*. Antonio Ricardo, Lima.

Calle, Saravia de la (1544). *Instrucción de mercaderes*. Pedro de Castro, Medina del Campo.

Castillo, Diego del (1522). *Tratado de cuentas*. Alonso de Melgar, Burgos.

Fernandes, Bento (1555). *Tratado da Arte de Arismetica*. Francisco Correa, Porto.

Mendes, Ruy (1540). *Pratica darismetica nouamente agora composta pelo licenciado Ruy Mendez: na qual se descraram por boa ordem e craro estilo as quatorze especias darte darismetica .É. as sete dellas por numeros inteyros e as outras sete por numeros quebrados: e assi mesmo trinta e cinco regras da dita arte muito sortil e breue e craramente decraradas*. Germão Galharde, Lisboa.

Nicolas, Gaspar (1963). *Tratado da Pratica Darismetica*. Edição fac-similada da edição de 1519 impressa por Germão Galharde, Livraria Civilização, Porto.

Ortega, Juan (1512). *Tractado subtilissimo de arismetica y de geometria*. Maistro Nicolau de Benedictis (por loannes Trinxer), Lyon.

Pacheco, Afonso (1624). *Flor da Arismetica Necessaria*. Geraldo da Vinha, Lisboa.

Pacioli, Lucas (1494). *Summa de aritmetica geometria proportioni e proportionalita*. Paganino de Paganini, Veneza.

Pérez de Moya, Juan (1562). *Aritmetica pratica y speculativa*. Mathias Gast, Salamanca.

Tomás, Álvaro (1509). *Liber de triplici muto proportionibus annexis magistri Alvari Thome Ulixbonen[sis] philosophicas Swiseth calculat[i]o[n]es ex parte declara[n]s Venundantur parrhisiis : a ponceto le preux*. Guillermum Anabar, Paris.

## Edições modernas de textos antigos

Anónimo (século XIV). *Libro de arismética que es dicho alquarismos, libro que enseña ensayar qualquier moneda*. Edição B. Caunedo del Potro e R. Cordoba de la Llave 2000, *El arte del alquarismo. Un libro castellano de aritmética comercial y de ensayo de moneda del siglo XIV*, Junta de Castilla y León.

Anónimo (1478). *Arte de l'abbacho*. Treviso. Edition de F. J. Swetz 1987, *Capitalism and Arithmetic: the new Math of the 15<sup>th</sup> Century, including the full text of the "Treviso Arithmetic" of 1478 translated by Eugene Smith*, La Salle, Open Court, Chicago.

Borghi, Pietro (1484). *Nobel opera de arithmetica*, Veneza. Edição K. Elfering 1964, "*Piero Borghi*" *Arithmetica*, Graphos, Munique.

Frísio, Gemma (1585). *L'Arithmétique*. Traduzido em francês por Pierre Forcadel, Jean Withage, Antuérpia.

Leonardo de Pisa (Fibonacci) (2002). *Fibonacci's Liber Abbaci*. Tradução inglesa de L. E. Sigler. Springer, New York, Berlin, Heidelberg, Hong Kong, London, Milan, Paris, Tokyo.

Mercado, Tomás de (1977). *Suma de tratos y contratos [1523-1575]*. Nicolás Sánchez Albornoz, Madrid.

Planude, Maxime (2004). *Le calcul selon les indiens*. Tradução do manuscrito da Bibliothèque Nationale de France, do grego para o francês, por Jean Peyroux, Librairie Blanchard, Paris.

Romans, Barthelemy de (1476). *Compendy de la pratique des nombres*. Edição M. Spiesser 2003, *Une arithmétique commerciale du XV<sup>e</sup> siècle : Le Compendy de la pratique des nombres de Barthélemy de Romans*, édition critique, traduction, étude et analyse mathématique, thèse de doctorat, Brepols publishers, Turnhout, Bélgica.

Santerna, Petro (1552). *Tractatus de Assecurationibus et sponsionibus mercatorum*. Edição do Grémio dos Seguradores, 1961, Lisboa.

## Outras fontes

Albuquerque, Luís (1987). *Os descobrimentos portugueses*. Publicações Alfa, Lisboa.

Alessandrini, Nunziatella (a publicar). *La presenza genovese a Lisbona negli anni dell'unione delle corone (1580-1640)*. Società Ligure di Storia Patria, Génova.

Almeida, António (1993). *Capitais e capitalistas no comércio da especiaria*. Edições Cosmos, Lisboa.

Almeida, António (1994). *Aritmética como descrição do real (1519-1679), Vols. I, II*. Imprensa Nacional, Lisboa.

Almeida, António (1998). *A Matemática no tempo dos descobrimentos*. Grupo de trabalho do Ministério da Educação para as Comemorações dos Descobrimentos Portugueses, Lisboa.

Alonso, Hilario (1990). *Comercio Internacional y Seguros Marítimos en Burgos en la época de los Reyes Católicos*. Actas do Congresso Bartolomeu Dias e a sua época, Universidade do Porto, Porto, pp 221-238.

- Ausejo, Elena (a publicar). *Nuevos dados sobre Mosén Juan Andrés, autor del Sumario Breve d'la Pratica dela Arithmetica(1515)*. Actas del congresso da la SEHCYT.
- Barata, Filipe (1998). *Navegação, comércio e relações políticas: os portugueses no Mediterrâneo Ocidental (1385-1466)*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- Barbin, Évelyne et al. (1994). *Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce*. Belin, Paris.
- Barbin, Évelyne (2010). *Les mathématiques éclairées par l'histoire*. Vuibert-ADAPT, Paris.
- Barrio, Antonio (2007). *Ferias y finanzas, siglos XVI y XVII*. Direção de A. Barrio, coordenação de F. González, Fundación Museo de las Ferias, Valladolid.
- Barros, Amândio (2013). *Os negócios e a aritmética. Bento Fernandes e as redes cristãs-novas do Porto no século XVI. Em Humanismo, Diáspora e Ciência (Séculos XVI e XVII)*. Organização e coordenação editorial de António Andrade et al. Biblioteca Pública Municipal do Porto, Porto, pp 62-67.
- Barroso, Efrén (2008). *Los judíos de Medina del Campo del siglo XV*. Fundación Museo de las ferias, Valladolid.
- Beaujouan, Guy (1956). *Les Arithmétiques françaises des XIV<sup>e</sup> et XV<sup>e</sup> siècles*. Actes du VIII<sup>e</sup> congrès international d'Histoire des Sciences, Hermann, Paris, pp 84-87.
- Beaujouan, Guy (1988). *The place of Nicolas Chuquet in a typology of fifteenth-century French arithmetics*. Em Mathematics from Manuscript to Print: 1300-1600, de Cyntia Hay, Clarendon Press, Oxford, pp 73-83.
- Benito, Manuel et al (2012). *Fray Juan de Ortega's approximations, 500 years after*. arXiv:1212.1125v1.
- Benoit, Paul (1982). *La formation mathématique des marchands français à la fin du Moyen Age: l'exemple du Kadran aux marchands (1485)*. Les entrées dans la vie, actes du XII<sup>e</sup> congrès de la Société des historiens médiévistes de l'Enseignement supérieur public. Univ. Nancy, pp 209-224.
- Benoit, Paul (1989). *Calcul, algèbre et marchandise. Em Eléments d'histoire des sciences, de Michel Serres*. Bordas, Paris, pp 196-211.
- Benoit, Paul (1992) *Arithmétiques commerciales et comptabilités dans la France médiévale*. Em Histoire de fractions, fractions d'histoire, Paul Benoit et al. , Birkhauser, Bâle/Boston/Berlin, pp 307-323.
- Braudel, Fernand (1979). *Civilização material, economia e capitalismo, séculos XV-XVIII - Os jogos das trocas*. Editorial Teorema, Lisboa.
- Braudel, Fernand (1992). *Civilization and Capitalism, 15th-18th century: the perspective of the word*. University of Califórnia Press.

- Buescu, Ana (2007). *Livros e livrarias de reis e de príncipes entre os séculos XV e XVI. Algumas notas*. eHumanista: Vol. 8, pp 143-170.
- Camarena, Miguel (1968). *Vocabulario del comercio medieval*. Colección de aranceles aduaneros de la Corona de Aragón (Siglos XIII y XIV), Disputación Provincial, Tarragona.
- Canas, António (1995a). *Os Portugueses e a determinação da longitude*. Anais do Clube Militar Naval, vol. CXXV, Abril-Junho, pp 249-273.
- Canas, António (1995b). *Ciência Náutica e o Plano da Índia*. Anais do Clube Militar Naval, vol. CXXV, Outubro-Novembro, pp 657-678.
- Canas, António (2002). *Pedro Nunes e as linhas de Rumo*. Oceanos n°49, Janeiro-Março, pp 54-66.
- Canas, António (2009). *A génese da navegação astronómica em Portugal*. Em Matemática no tempo do Mestre José Vizinho, coordenação de A. Canas e M. Ferrão, SPM, Grávida, Lisboa pp. 115-142.
- Carvalho, Joaquim (1983). *À la recherche de la spécificité de la Renaissance Portugaise- L' "Esmeraldo de situ orbis" de Duarte Pacheco Pereira et la littérature portugaise de voyages à l'époque des grandes decouvertes (Contribution à l'étude des origines de la pensée moderne)*. Fondation Calouste Gulbenkian, Centre Culturel Portugais, Paris.
- Carvalho, Rómulo (1996). *História do Ensino em Portugal*. Gulbenkian Educação, Lisboa.
- Casas, María (2011). *Historia de las Matemáticas en la Península Ibérica (desde la prehistoria al siglo XV)*. Editorial Reverté, Barcelona.
- Castro, Armando (1983). *Actividade comercial e financeira*. Em História de Portugal 1245-1640, de José Hermano Saraiva. Publicações Alfa, Lisboa, pp 691-710.
- Caunedo, Betsabé (2009). *Un Manual de Aritmética mercantil de Mosén Juan Andrés*. Pecvnia 8, [http://www3.unileon.es/pecvnia/pecvnia08/08\\_071\\_096.pdf](http://www3.unileon.es/pecvnia/pecvnia08/08_071_096.pdf).
- Costa, Teresa (2009). *Aritméticos portugueses dos séculos XVI e XVII*. Em A Matemática no tempo do Mestre José Vizinho, coordenação de A. Canas e M. Ferrão, SPM, Grávida, Lisboa, pp 155-176.
- Curado, Manuel; Pereira, Virgínia (2014). *Judeus Portugueses no Mundo (Medicina e Cultura)*. Húmus, Universidade do Minho, V. N. de Famalicão.
- Dias, José (2006). *Portugal e a cultura europeia (séculos XVI a XVIII)*. Editores Campo das Letras, Porto.
- Docampo, Javier (2004). *La formación matemática del mercader catalán 1380-1521. Análisis de fuentes manuscritas*. Dissertação de Doutoramento, Universidade de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela.

- Docampo, Javier (2006). *Reading Luca Pacioli's Summa in Catalonia: An early 16th-century Catalan manuscript on algebra and arithmetic*. *Historia Mathematica*, 33, pp 43-62.
- Dominguez, Rodrigo (2006). *Mercadores banqueiros e cambistas no Portugal dos séculos XIV e XV*. Dissertação de Mestrado em História Medieval apresentada à Faculdade de Letras da Universidade do Porto, Porto.
- Fonseca, José (2010). *Economia monetária e financeira*. Imprensa da Universidade de Coimbra, Coimbra.
- Franci, Raffaella (1982). *Introduzione all'aritmetica mercantile del medioevo e del rinascimento*. Universidade de Sienne, Sienne.
- Garcia, João (2010). *A Lusitânia para o Cardeal Guido Sforza: um mapa de Portugal de 1561 na Biblioteca Nacional*. *Revista da Faculdade de Letras-HISTÓRIA-Porto*, III Série, vol. 11, pp 363-368.
- Godinho, Vitorino (1963-1971). *Os descobrimentos e a economia mundial*. Editorial Presença, Vol. I, Lisboa.
- Guimarães, Ana (2012). *Contas × Contos × Cantos e Que +*. Gradiva, Lisboa.
- Guinote, Paulo (2003). *India Route Project: Ascensão e declínio da carreira da Índia*. World Wide Web, URL, Nautical Archaeology Program, Texas A&M University.
- Jaca, Carlos (2007). *O ensino em Portugal no período anterior à fundação da Universidade*. Textos da conferência sobre "Relance sobre o ensino em Portugal no período anterior à fundação da Universidade", , Braga. [http://www.esas.pt/jaca/docs/Conferencia\\_ensino.pdf](http://www.esas.pt/jaca/docs/Conferencia_ensino.pdf)
- Jeannin, Pierre; Hoock, Jochen (1991). *Ars Mercatoria*. Ferdinand Schoningh, Paderborn.
- Jorge, Fátima (2008). *Formação Inicial de Professores do Ensino Básico: Um percurso centrado na história da matemática*. Dissertação de Doutoramento, Universidade de Aveiro, Aveiro.
- Katz, Victor (2010). *História da Matemática*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa. Tradução do original inglês intitulado "A history of Mathematics: An Introduction", 2nd Edition by Victor Katz, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- Labarte, Marie-Hélène (2004). *Premières arithmétiques imprimées des Espagnes : une hiérarchie des problèmes au service des procédés de résolution*. Dissertação de Doutoramento, Université Paul Sabatier, Toulouse III, Toulouse.
- Lamassé, Stéphane (2007). *Les problèmes dans les arithmétiques commerciales en langue française et occitane à la fin du Moyen Âge*. Universidade Paris 1 Sorbonne, Paris.
- Leitão, Henrique (2009). *Os descobrimentos portugueses e a ciência europeia*. Alêtheia Editores, Lisboa.
- Leitão, Henrique; Martins, Lígia (2004). *O livro científico dos séculos XV e XVI: Ciências Físico-Matemáticas na Biblioteca Nacional*. Biblioteca Nacional de Portugal, Lisboa.

- Legendre, François (1781). *L'arithmétique en sa perfection*. Antoine Ferrand, Rouen.
- Leme, Margarida (2008). *Os Lemes - um percurso familiar de Bruges a Malaca*. História, Património e Arqueologia. [Em linha]. N.º 0, Dezembro, Sapiens, pp 51-83, <http://www.revistasapiens.org/Biblioteca/numero0/oslemes.pdf>
- Machado, Diogo (1741-1759). *Bibliotheca Lusitana historica, critica e cronologica na qual se comprehende a noticia dos Authores Portuguezes, e das Obras, que compuserão desde o tempo da promulgação da Ley da Graça até o tempo prezente : Offerecida à Augusta Magestade de D. João V no*. Lisboa Occidental : António Isidoro da Fonseca, 4 vols., Lisboa.
- Martzloff, Jean-Claude (1988). *Histoire des mathématiques chinoises*. Masson, Paris.
- Massa, Maria-Rosa (2006). *L'algebrització de les matemàtiques. Pietro Mengoli (1625-1686)*. Ed. Barcelona: Societat catalana d'història de la ciència i de la tècnica, filial de l'IEC, Barcelona.
- Matos, Luís (1950). *Les portugais à l'université de Paris entre 1500 et 1550*. Universidade de Coimbra, Coimbra.
- Mota, Bernardo (2011). *O estatuto da Matemática em Portugal nos séculos XVI e XVII*. Fundação Calouste Gulbenkian, Fundação para a Ciência e Tecnologia, Lisboa.
- Neves, Bruno (2004). *A Carga e a Descarga das Naus da Índia. O Mar: Um Oceano de Oportunidades*. Universidade de Lisboa, Faculdade de Letras, Lisboa.
- Neves, Eunice (2007). *Episódios da História da Matemática para o ensino*. Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências de Lisboa, Universidade de Lisboa, Lisboa.
- Nunes, Pedro (2010). *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria*. Edição de F. Agudo (académico responsável) e H. Leitão (coordenador), Academia das Ciências de Lisboa e Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- Peres, Damião (1947). *Regimento das Cazas das Índias e Mina*. Universidade de Coimbra, Coimbra.
- Ramos, Rui et al. (2010). *História de Portugal*. Esfera dos Livros, Lisboa.
- Rau, Virgínia (1965). *Feitores e feitorias-Instrumentos do comércio internacional português no século XVI*. Brotéria, Vol. 81, n.º 5.
- Rau, Virgínia (1972). *Alguns estudantes e eruditos portugueses em Itália no século XV*. Centro de Estudos Históricos, Do tempo e da História, Vol. V, pp 29-99.
- Rau, Virgínia (1983). *Feiras Medievais Portuguesas*. Editorial Presença, Lisboa.
- Rau, Virgínia (2009). *A Casa dos Contos*. Imprensa Nacional, Casa da Moeda, Lisboa.
- Rey Pastor, Julio (1934). *Los matemáticos españoles del siglo XVI*. Junta de Investigaciones Histórico-Bibliográficas, Madrid.

Ribeiro, Ana (2012). *A endogamia nas relações de cooperação em redes mercantis da "Primeira Idade Global". O caso da rede Simon Ruiz (1553-1597)*. Em *História, Revista da FLUP*, Porto, IV Série, Vol. 2, pp 23-40.

Sánchez, Oscar (2002). *Las matemáticas en el renacimiento*. Universidade de Sonora, Hermosillo, Apuntes de Historia de las Matemáticas, vol. 1, pp 22-31.

Sanz, Angel (1999). *El contexto económico del pensamiento escolástico: el florecimiento del capital mercantil en la España del siglo XVI*. *Economía y economistas españoles*. 2. : De los orígenes al mercantilismo, dir. Enrique Fuentes Quintana.

Saraiva, António; Lopes, Óscar (1978). *História da Literatura Portuguesa*. Porto Editora, Porto.

Sequeira, Gaspar (1612). *Thesouro de Prudente*. Nicolao Carvalho, Coimbra.

Serrão, Joaquim (1954). *Portugueses no Estudo de Toulouse*. Universidade de Coimbra, Coimbra.

Silva, Inocêncio (1862). *Diccionario Bibliographico Portuguez, t. VII*. Imprensa Nacional, Lisboa.

Silva, Maria (2008). *The algebraic content of Bento Fernandes's Tratado da arte de arismetica (1555)*. *Historia Mathematica* 35, pp 190-219.

Silva, Maria (2011). *A obra matemática de Juan Pérez de Moya no contexto dos saberes matemáticos do século XVI*. Dissertação de Doutoramento, Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto.

Smith, David (1951). *History of Mathematics (2 vols)*. Dover Publications, Inc., New York.

Spiesser, Maryvonne (2000). *Problèmes linéaires dans le Compendy de la pratique des nombres de Barthélemy de Romans et de Mathieu Préhoude (1471). Une approche nouvelle basée sur des sources proches du Liber abbaci de Léonard de Pise*. *Historia Mathematica* 27/4, pp 136-157.

Spiesser, Maryvonne (2001). *Règle de trois, rapports et proportions: les calculs des marchands (XIV<sup>e</sup>-XVI<sup>e</sup> siècles)*. S. Rommevaux, P. Vendrix, V. Zara (eds), *Proportions. Science-musique-peinture et architecture*, Turnhout, Brepols, coll. Études renaissantes, pp 101-122.

Spiesser, Maryvonne (2003a). *L'arithmétique de Boèce dans le contexte de la formation mathématique des marchands du XV<sup>e</sup> siècle*. Actes du colloque international Boèce ou la chaîne des savoirs. Peeters, Paris, pp 741-764.

Spiesser, Maryvonne (2003b). *Les manuels d'arithmétique pour les marchands dans la France du XV<sup>e</sup> siècle*. Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP), n°44, "Histoire de l'enseignement des mathématiques", janeiro, fevereiro, pp 32-50.

Spiesser, Maryvonne (2004a). *La question de la diffusion du Liber abbaci en France à travers les traités commerciaux du XI<sup>e</sup> siècle*. Bollettino di storia delle scienze matematiche 1, vol. 2, pp 115-135.



- Spiesser, Maryvonne (2004b). *Langues vernaculaires et langue des mathématiques à la fin du Moyen Âge. L'exemple des arithmétiques commerciales du sud de la France*. Actes du 126<sup>e</sup> congrès national des sociétés historiques et scientifiques, Terres et hommes du Sud. Toulouse.
- Spiesser, Maryvonne (2005). *L'oeuvre de Nicolas Chuquet dans le contexte des savoirs mathématiques de la fin du XV<sup>e</sup> siècle*. Histoire littéraire de la France, t. 3, fasc.1, pp 129-172.
- Spiesser, Maryvonne (2006). *L'algèbre de Nicolas Chuquet dans le contexte français de l'arithmétique commerciale*. Revue d'Histoire des Mathématiques, 12, N<sup>o</sup>1, pp 7-23.
- Spiesser, Maryvonne (2008a). *L'arithmétique pratique en France au seuil de la Renaissance : formes et acteurs d'un enseignement*. Lull 31, N<sup>o</sup>67, pp 41-60.
- Spiesser, Maryvonne (2008b). *L'impact des Mathématiques pratiques du XV<sup>e</sup> siècle sur l'évolution de la discipline et son enseignement élémentaire*. Didactique, épistémologie et histoire des sciences, de Laurence Viennot, PUF, Paris, pp 313-341.
- Spiesser, Maryvonne (a publicar). *La géométrie pratique dans le milieu de l'arithmétique commerciale (XIV<sup>e</sup>-XVI<sup>e</sup>)*.
- Tannery, Jules (1904). *Leçons d'Arithmétique théorique et pratique*. Armand Colin, Paris.
- Teixeira, Francisco (1934). *História das Matemáticas em Portugal*. Academia das Ciências de Lisboa, Lisboa.
- Teyssier, Paul (1990). *Cem anos gloriosos*. Em Lisboa e os Descobrimentos (1415-1580: a invenção do mundo pelos navegadores portugueses), de Dougier H., 9-47. Éditions Autrement (version portuguese Terramar-Editores distribuidores e livreiros, Lda), Paris.
- Torres, Ana (1994). *Las relaciones entre Portugal y Castilla en la época se los descubrimientos y la expansión colonial*. Ediciones Universidad de Salamanca, Salamanca.
- Tropfke, Johannes (1980). *Geschichte der elementar Mathematik, I-Arithmetik und Algebra*. 4<sup>a</sup> edição revista por K. Vogel, K. Reich e H. Gwricke, Berlin/New-York.
- Vega, Anastasio (2004). *Guía de mercaderes y mercaderías en las ferias de Medina del Campo. Siglo XVI*. Fundación Museo de las Ferias, Valladolid.
- Serrão, Joaquim (1954). *Portugueses no Estudo de Toulouse*. Universidade de Coimbra, Coimbra.
- Wußing, Hans (1992). *Die Coßvon Abraham Ries*. Dr. Erwin Rauner, Verlag, Augsburg.