



**Elsa Regina Valente
Matos Silva**

**Pós-processamento de topologia em otimização
estrutural integrada**



**Elsa Regina Valente
Matos Silva**

**Pós-processamento de topologia em otimização
estrutural integrada**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica, realizada sob a orientação científica do Doutor João Alexandre Dias de Oliveira, Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro e do Doutor António Gil D'Orey de Andrade Campos, Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro

o júri / the jury

presidente

Prof. Doutor Robertt Angelo Fontes Valente

Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro

vogais

Prof. Doutor Hugo Filipe Pinheiro Rodrigues

Professor Adjunto do Instituto Politécnico de Leiria (arguente)

Prof. Doutor João Alexandre Dias de Oliveira

Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro (orientador)

agradecimentos / acknowledgements

Mais uma etapa deste longo caminho está a chegar ao fim. Esta esteve repleta de altos e baixos, vitórias e derrotas, mas o sucesso prevaleceu e é através dele que consegui concretizar mais um objetivo pessoal.

Isto não seria possível sem esforço. Por isso queria dar os mais sinceros agradecimentos ao Professor Doutor João Alexandre Dias de Oliveira e ao Professor Doutor António Gil D'Orey Andrade Campos com quem tive o privilégio de trabalhar e ter orientação neste trabalho final com o intuito de completar mais uma etapa. Quero agradecer também a todos os outros professores que me acompanharam no decurso deste percurso académico por que o vosso acompanhamento foi fundamental.

Aos meus pais, pelo grande esforço físico e emocional que fizeram para me proporcionar uma formação académica, o meu muito e sincero obrigado. A eles e a minha irmã sou grata por todo o apoio incondicional que deram desde o início de caminho, obrigada por estarem lá nos bons momentos e nos menos bons.

Ao Sérgio pelo companheirismo, suporte e compreensão sobretudo nos momentos menos bons. Foste um amigo, um irmão e um "pai" para mim e mesmo longe sabias as palavras certas para me dizer nos momentos certos. A todos os meus familiares e amigos pelo suporte que deram nos bons e maus momentos. Aos meus colegas de trabalho, com quem tive o prazer de trabalhar e partilhar conhecimentos neste percurso académico e, com quem partilhei também momentos de alegria e descontração.

A todos os elementos do grupo de investigação Grids que tive o enorme privilégio de conhecer e partilhar conhecimentos e momentos. E a todos os meus companheiros, quer sejam do curso de Mestrado Integrado de Engenharia Mecânica quer sejam de outros cursos pertencentes à Universidade de Aveiro que direta ou indiretamente contribuíram para o meu percurso académico e para que eu atingisse este objetivo.

A todos vocês o meu muito obrigado.

Palavras-chave

Otimização topológica, engenharia inversa, pós-processamento

Resumo

Nos dias que correm, o tempo e a qualidade de resposta que se tem de dar aos problemas que surgem na indústria tendem a ser mais exigentes. Desta forma, o conceito da otimização, apesar do estudo desta temática ser feito já há alguns anos, tem ganhado cada vez mais ênfase de estudo e evolução. Assim as áreas de aplicação da mesma têm vindo a expandir-se. Uma destas áreas denomina-se por otimização topológica, tema integrante da presente Dissertação, que tem uma área de aplicabilidade específica dentro da otimização estrutural. Usualmente esta lida com distribuição de material ao longo de um domínio admissível, ou seja, esta consiste na procura da distribuição ótima de material que minimize a flexibilidade da estrutura e que seja capaz de responder às condições de fronteira impostas ao domínio do problema.

Por outro lado, a temática de engenharia inversa também se encontra cada vez mais presente no ramo industrial, porque permite a reprodução de um modelo físico e transformá-lo num modelo digital. Este tipo de técnicas permitem que o tempo de ciclo de desenvolvimento de um produto seja reduzido porque possibilita que os sistemas produtivos se tornem mais ágeis e flexíveis.

Assim a presente Dissertação tem como principal objetivo aliar estas duas temáticas, utilizando as metodologias usadas na engenharia inversa para o pós-processamento dos resultados obtidos da otimização topológica. Neste sentido, foi desenvolvida uma metodologia de tratamento de dados obtidos na otimização topológica para posteriormente se proceder à construção da geometria de um objeto usando os conceitos e procedimentos presentes na engenharia inversa. Foi analisada a aplicação da mesma para casos de estudo: bi- e tri-dimensionais. Por fim foi feito um estudo de sensibilidade para avaliar a influência de alguns parâmetros sobre a geometria final.

Keywords

Topology optimization, reverse engineering, post-processing

Abstract

Nowadays, the quality and time of reaction that is necessary to solve problems that arise in industry tend to be more demanding. Therefore the concept of optimization, despite the revision of this subject having been made for several years, has gained an increasing emphasis of study and evolution. As a result, the areas of application have been increasing. One of these areas is called topology optimization, subject addressed within this dissertation, which is an area of specific applicability within the structural optimization. Usually this deals with distribution of material over a allowed domain. It consists in finding the optimal material distribution that minimizes the flexibility of structure while it'll capable of providing a response to the boundary conditions imposed on the problem.

On the other hand, reverse engineering is also increasingly present in the industrial sector, because it allows the reproduction of a physical model and transforms it into a digital model. Such techniques allow the development time of a product cycle to be reduced because it allows production systems to become more agile and flexible.

The present dissertation aims to combine these two areas, using the methodologies used in reverse engineering for the post-processing of results of topology optimization. As a result, a data processing methodolege, in topology optimization was developed to obtain the geometry using the present concepts and procedures in reverse engineering. The application was analyzed for: a two- and three-dimensional case studies. A sensitivity study was also made for the final results in order to measure the influence of some parameters in the geometry.

Conteúdo

Conteúdo	i
I Enquadramento	1
1 Introdução	3
1.1 Enquadramento do trabalho	3
1.2 Objetivos	5
2 Otimização	9
2.1 Introdução	9
2.2 Conceitos básicos	9
2.3 Otimização estrutural	12
2.3.1 Revisão bibliográfica	12
2.3.2 Tipos de otimização estrutural	13
2.4 Otimização topológica	14
2.4.1 Revisão bibliográfica	14
2.4.2 Conceitos gerais	15
2.4.2.1 Parametrização do problema	16
2.4.2.2 Problemas de instabilidade	19
2.4.2.2.1 Dependência da malha	20
2.4.2.2.2 Instabilidade do tabuleiro	20
2.4.2.2.3 Mínimos locais	21
2.4.2.3 Métodos de filtragem	22
2.4.2.3.1 Filtro de sensibilidade	23
2.4.3 Pós-processamento de otimização topológica	24
3 Engenharia inversa	27
3.1 Introdução	27
3.2 História	28
3.3 Conceitos gerais	29
3.3.1 Aquisição de dados	30
3.3.2 Problemas de aquisição de dados	33
3.3.3 Caracterização global das formas	35
3.4 Aplicações	37
3.5 Integração com otimização topológica	38

II	Metodologia e resultados	39
4	Metodologia	41
4.1	Programa no Matlab®: manipulação dos ficheiros	41
4.2	Metodologia usada no programa CAD 3-D	43
5	Resultados e validação	45
5.1	Problemas de validação	45
5.1.1	Viga bi-apoiada (2D)	45
5.1.1.1	Modelação do problema	46
5.1.1.2	Geração da nuvem de pontos	47
5.1.1.3	Pós-processamento em CAD	47
5.1.1.4	Simulação do modelo final	48
5.1.1.5	Estudo de sensibilidade	49
5.1.2	Bloco tri-dimensional	53
5.1.2.1	Modelação do problema	53
5.1.2.2	Geração da nuvem de pontos	54
5.1.2.3	Pós-processamento em CAD	54
5.1.2.4	Simulação do modelo final	54
5.1.2.5	Estudo de sensibilidade	57
6	Considerações finais	61
6.1	Conclusões finais	61
6.2	Trabalhos futuros	61
	Lista de Figuras	63
	Lista de Tabelas	65
	Bibliografia	67
	Bibliografia	68

Parte I

Enquadramento

Capítulo 1

Introdução

Introduzem-se e descrevem-se as temáticas abordadas neste documento e expõem-se os objetivos gerais do trabalho.

1.1 Enquadramento do trabalho

Nas suas variadas formas, especialmente em termos empíricos, a otimização estrutural¹ é uma temática antiga em engenharia. Esta designa-se usualmente por otimização de estruturas em engenharia, com vista a obter o melhor compromisso entre características como rigidez, peso ou custo. De acordo com o que se referiu anteriormente, é comum dividir a otimização estrutural em três abordagens fundamentais:

- otimização dimensional ou paramétrica;
- otimização topológica;
- otimização de forma.

Na otimização topológica, caso particular do trabalho desenvolvido, o objetivo é otimizar manipulando a topologia da estrutura dentro de um domínio admissível. Essencialmente, este tipo de otimização estrutural tem como função-objetivo a procura ótima de distribuição de material que minimize a flexibilidade da estrutura. As variáveis utilizadas, variáveis de densidade ou magnitude das propriedades em análise, permitem oscilar entre diferentes fases de material ou simplesmente vazio, como se pode verificar na Figura 1.1.

O pós-processamento dos resultados obtidos a partir de procedimentos de otimização topológica é um tópico de elevada importância. Para além do pós-processamento típico de problemas resolvidos com o Método de Elementos Finitos (MEF), a otimização topológica pressupõe normalmente uma aproximação por uma geometria não-discretizada.

A passagem das soluções obtidas para geometrias correspondentes a estruturas exequíveis e efetivamente ótimas, pode acarretar algumas complexidades. Uma abordagem comum corresponde à aproximação das imagens *raster*² com definições vetoriais. Este procedimento

¹*Structural Optimization*, SO

²Uma imagem *raster* trata-se de imagens “pixelizadas”, ou seja, consiste num conjunto de pontos (pixéis) contidos num quadro e que para cada um destes pontos é atribuído um ou vários valores que iram depois corresponder à cor a eles associada.

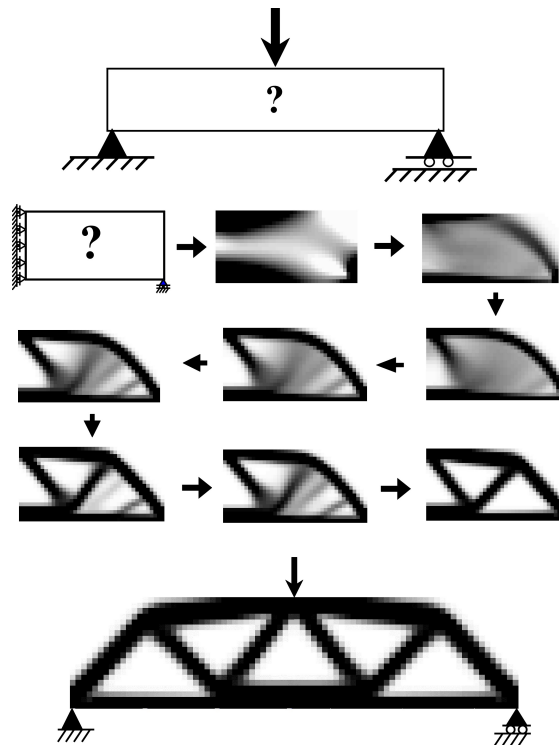


Figura 1.1: Exemplo de resolução de um problema de otimização topológica em cálculo estrutural.

pode ser efetuado manualmente ou desenvolvendo procedimentos que façam a aproximação das distribuições obtidas. Estas recorrem a funções matemáticas passíveis de serem utilizadas em sistemas CAD (*Computer-Aided Design*).

Uma das formas mais imediatas de implementar este tipo de abordagem é recorrer a plataformas de cálculo numérico e analítico (*e.g.* Matlab[®]) que permitam a representação gráfica das distribuições de pontos e de funções, assim como a obtenção automática de curvas de nível ou de isovalores. Uma outra abordagem a este problema surge associada a metodologias de engenharia inversa e levantamento de forma [Dieter 2000].

Em áreas como o desenvolvimento de produto, é cada vez mais comum a utilização de conceitos de engenharia inversa, passando pelo levantamento de forma de geometrias físicas, de modo a se obter modelos virtuais representativos destas. Este levantamento de forma, especialmente para geometrias complexas, centra-se essencialmente na medição das coordenadas de pontos notáveis da mesma. Esta medição é frequentemente realizada por tecnologias óticas de varrimento (*e.g.* 3-D *laser scanning*), resultando numa nuvem de pontos cujas coordenadas traduzem uma função discreta que aproxima a geometria do modelo. Esta nuvem de pontos é depois processada em programas CAD de modo a resultar em superfícies que a aproximem corretamente, tal como se pode constatar através da Figura 1.2, onde se apresenta a evolução desde o modelo físico até à obtenção do modelo CAD. Estas superfícies podem ser simplificadas, manipuladas e parametrizadas .

No contexto da otimização topológica, este tipo de metodologia permite uma grande flexibilidade em termos de concretização dos resultados obtidos, apesar de potencialmente moroso em termos de afinação. Assim, as coordenadas de nós ou outros pontos notáveis da malha de

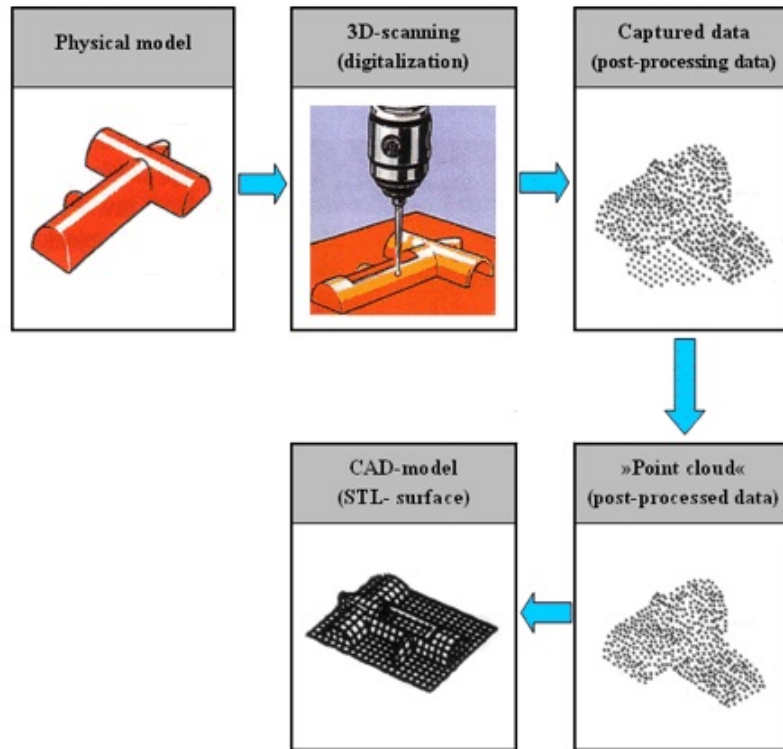


Figura 1.2: Ilustração do processo de engenharia inversa aplicado ao levantamento de uma geometria [LABOD 2014]

elementos finitos podem ser utilizadas de forma idêntica às nuvens de pontos utilizadas nas metodologias de engenharia inversa referidas, em casos bi- ou tri-dimensionais.

Deste modo, no caso de problemas de otimização os pontos de transição servem de base para a aproximação por curvas ou superfícies NURBS³ que permitem a modelação da geometria ótima. Note-se que, após a modelação da geometria que aproxima os resultados da otimização topológica, é possível gerar uma nova malha para o problema em causa e realizar eventuais simulações sobre a geometria ótima. É ainda possível utilizar a nova definição paramétrica de ótimo para procedimentos de otimização de forma e assim refinar os resultados obtidos. Este procedimento pode ser designado de Otimização Estrutural Integrada.

1.2 Objetivos

O principal objetivo do trabalho baseia-se no estudo do processo de obtenção de geometrias resultantes de um processo de otimização topológica. Para isto, através da utilização de programa de CAD, CATIA v5[®], utilizam-se os conceitos de engenharia inversa. Por fim, é feito um estudo para avaliar as geometrias obtidas após a aplicação da metodologia relativamente aos resultados de otimização. Neste contexto, os principais objetivos do presente trabalho são os seguintes:

³ *Non Uniform Rational Basis Spline*, tanto em forma de curva como em superfícies são utilizadas na maioria dos programas comerciais CAD.

1. estudo da influência dos parâmetros de controlo de estabilidade em otimização topológica na qualidade das estruturas finais obtidas;
2. estudo de adequação de ferramentas CAD para levantamento de forma e engenharia inversa no pós-processamento de dados resultantes de otimização topológica;
3. desenvolvimento de metodologias e ferramentas numéricas de exportação e de conversão dos dados de otimização topológica para enquadramento em otimização estrutural integrada;

Como representação esquemática do enquadramento destes objetivos apresenta-se, através da Figura 1.3, um esquema ilustrativo do trabalho que se desenvolveu e a sequência de etapas.

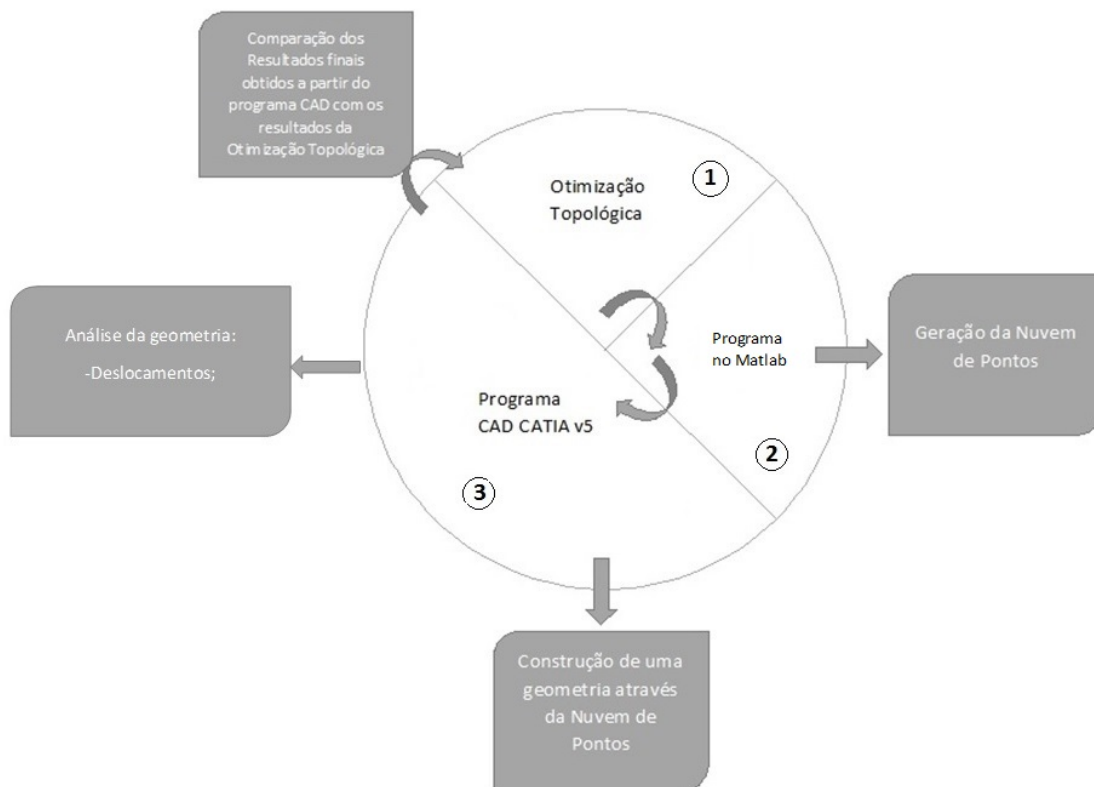


Figura 1.3: Fluxograma representativo do plano de trabalho.

Em suma, tal como a Figura 1.3 mostra, existem três etapas principais nas quais se divide este trabalho. Contudo, antes mesmo de se executarem estas três etapas, é necessário proceder-se à geração do problema. Para tal utiliza-se o programa GiD[®]. Aqui define-se o domínio do problema juntamente com as condições de fronteira a aplicar ao problema, as restrições e os carregamentos, e é depois gerada uma malha de elementos finitos.

Posteriormente, estes dados são guardados em ficheiros *data* onde será de seguida aplicado o método de otimização topológica. Seguidamente, os resultados obtidos da otimização topológica são utilizados como dados de *input* no programa desenvolvido no Matlab[®]. Neste

programa são selecionados os dados que serão utilizados na construção/geração da geometria. Esta geometria, desde a sua forma de nuvem de pontos até à obtenção do sólido, é manipulada/tratada no programa CAD 3-D CATIA v5[®].

Depois de se obter a geometria final, efetua-se uma análise à mesma, ao nível dos deslocamentos, para se poder avaliar a qualidade da geometria face ao que se obteve na otimização topológica. Isto porque é necessário garantir que não se perdem as características iniciais da geometria, assegurando assim que o problema dado pela otimização topológica seja respeitado. Esta análise é feita utilizando o programa CATIA v5[®]. Por fim, efetua-se um estudo de sensibilidade para perceber qual a influência dos parâmetros de estabilidade da otimização topológica e da seleção dos dados efetuada no programa Matlab[®] sobre a geometria final obtida. Para isso procede-se a uma variação de dois parâmetros e verifica-se quais as alterações na geometria final.

Capítulo 2

Otimização

Introduz-se o conceito de otimização no geral e, posteriormente mais focado na otimização topológica. Introduzem-se alguns métodos de pós-processamento dos resultados obtidos da otimização topológica.

2.1 Introdução

A forma como um projeto de engenharia é elaborado e planeado na indústria tem-se vindo a modificar com o passar do tempo. Em parte deve-se ao desenvolvimento científico na área de análise estrutural ter sofrido um grande avanço, intensificado pelo aumento da velocidade e capacidade de armazenamento dos computadores digitais. Assim, foram desenvolvidos vários métodos computacionais que até então tinham sido difíceis de implementar pelo seu elevado grau de complexidade.

Atualmente, o conceito de otimização está cada vez mais presente no quotidiano das empresas/organizações. Isto porque devido às exigências do mercado, quer seja na área de engenharia quer para outras áreas científicas, a procura de ferramentas mais funcionais e eficientes é cada vez maior.

Como se pode verificar na Figura 2.1, as diferenças entre um projeto convencional e um projeto otimizado são notórias. No projeto convencional verifica-se que se analisa o sistema com critérios baseados na performance e que as alterações são executadas com base na experiência/heurística. Já o projeto otimizado analisa o sistema tendo como base as variáveis de projeto, funções de custo e restrições impostas, sendo as alterações feitas por meio de um método de otimização.

Assim, de acordo com a designação, constata-se que o termo de otimização refere-se ao estudo de problemas em que se pretende minimizar (ou maximizar) uma função através da procura sistemática dos valores de variáveis reais ou inteiras com o intuito de obter o máximo da capacidade de um determinado recurso. Áreas como a engenharia, administração, logística, transporte, economia, biologia ou outras ciências procuram soluções para seus problemas através da otimização dos seus recursos.

2.2 Conceitos básicos

Um problema de otimização é definido, na sua forma mais geral, do seguinte modo:

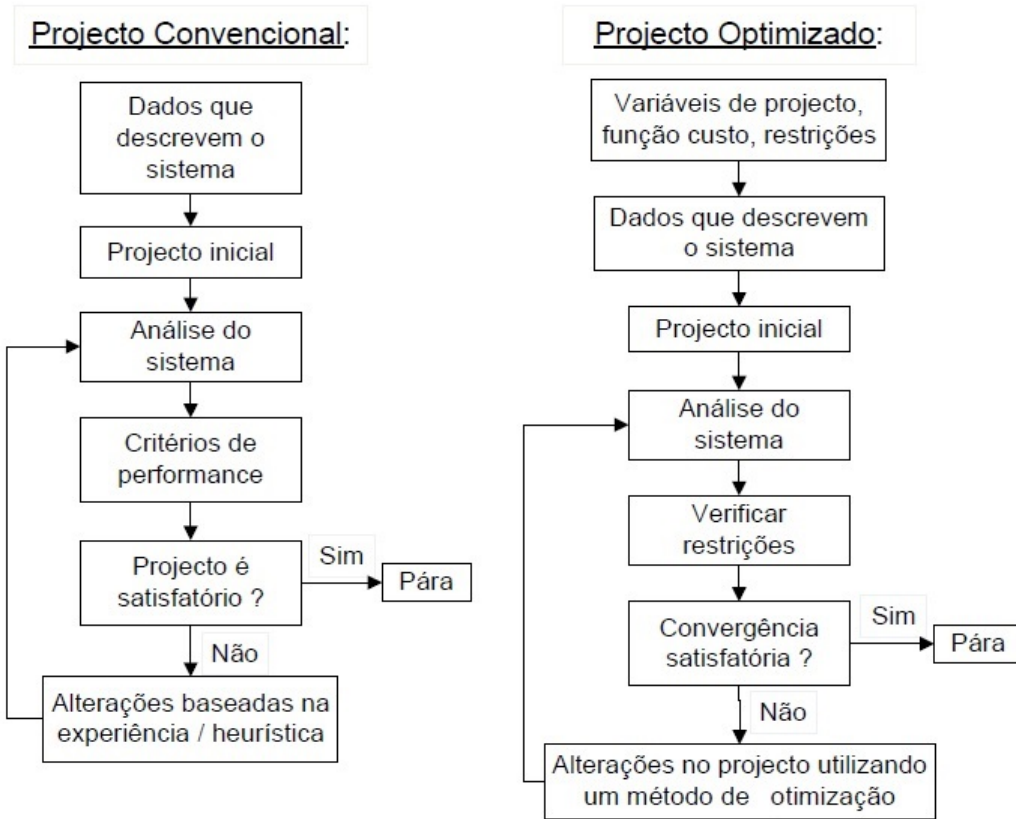


Figura 2.1: Esquema explicativo das diferenças entre um projeto convencional e um projeto otimizado [Pizzirani 2003].

Minimizar:

$$f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} g_j(\mathbf{x}) &\leq 0, & j &= 1, 2, \dots, m \\ h_k(\mathbf{x}) &= 0, & k &= 1, 2, \dots, p \\ x_i^{(L)} &\leq x_i \leq x_i^{(U)}, & i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.2)$$

Os componentes básicos de um problema de otimização são, portanto:

- **Função Objetivo** ($f(x)$): representa o objeto, quantificado matematicamente, a ser maximizado ou minimizado. A função objetivo é um escalar que pode representar o lucro, custo, energia, produção, distância, entre outros, em termos das variáveis (x_1, x_2, \dots) de decisão do processo ou sistema em análise. Por outras palavras, é a função matemática cujo máximo ou mínimo se deseja encontrar.
- **Modelo do processo**: representa a forma como serão tratadas (equacionadas) a função objetivo e as variáveis de projeto, bem como as restrições (igualdades e desigualdades). As variáveis de projeto x_1, x_2, \dots, x_n são as variáveis independentes (parâmetros) da

função objetivo e, portanto, passíveis de alteração. Para que o projeto seja tido como admissível, é necessário que os valores assumidos como variáveis de projeto satisfaçam todas as restrições impostas. As variáveis de projeto podem ser do tipo discreto, assumindo apenas alguns valores dentro de um conjunto, ou do tipo contínuo, assumindo valores dentro de um intervalo.

- **Restrições** ($g_j(\mathbf{x}), h_k(\mathbf{x}), x_i^{(L)}, x_i^{(U)}$): representam os limites impostos para o sistema. São os limites impostos às variáveis de projeto (restrições laterais) ou às funções das variáveis de projeto (restrições gerais). As restrições podem ser de igualdade ou desigualdade. As restrições em geral impõem uma solução de compromisso na melhoria da função objetivo e devem ser impostas com o cuidado de que exista sempre uma região viável de solução. Problemas mal definidos não possuem região viável e não tem solução.

Pode perceber-se que para cada problema existem pormenores/características particulares ao mesmo. Ou seja, pode dizer-se que um problema de otimização caracteriza-se por uma função objetivo, que descreve o que se deseja otimizar, isto é, que mede a qualidade da decisão a ser tomada, e restrições, que limitam o espaço de busca da solução, restringindo esta a um grupo de soluções que atendam a certas necessidades.

Os problemas a serem abordados podem ser definidos por funções lineares e não-lineares, com ou sem restrições. A formulação matemática do problema é a etapa fundamental para se conseguir uma boa solução. Se a descrição dos aspetos relevantes do problema (objetivos a serem otimizados e restrições a serem cumpridas) for bem feita, a probabilidade de se encontrar uma boa solução aumenta.

Então, de acordo com o que foi dito anteriormente, é perceptível que existem vários tipos de otimização, cada um direcionado para um grupo de problemas análogos. Tal como ilustra a Figura 2.2, este documento foca-se na vertente da otimização estrutural, mais concretamente em otimização topológica.

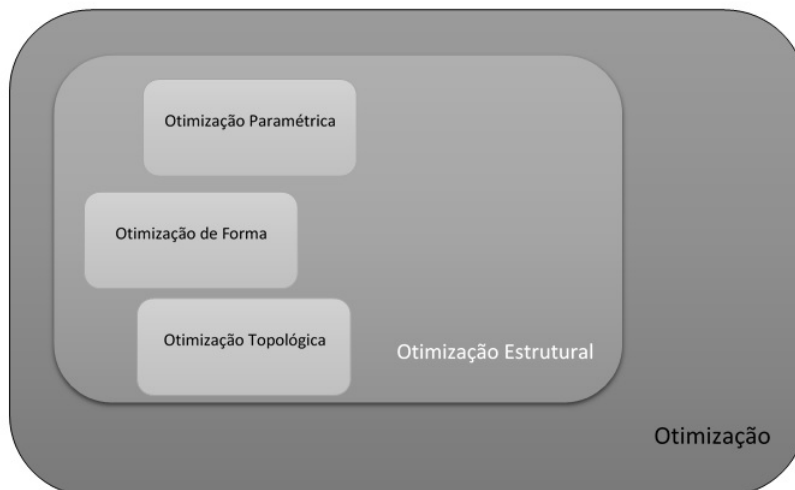


Figura 2.2: Ilustração da ramificação dos tipos de otimização presente no contexto deste trabalho.

2.3 Otimização estrutural

2.3.1 Revisão bibliográfica

O desenvolvimento de métodos de cálculo de otimização diferencial foi possível por causa das contribuições de Newton e Leibnitz para o cálculo. As bases de cálculo das variações foram lançadas por Bernoulli, Euler, Lagrange e Weierstrass.

O método de otimização para problemas com restrições, o que envolve a adição de multiplicadores desconhecidos, tornou-se conhecido pelo nome de seu inventor, Lagrange. Cauchy fez a primeira aplicação do método do maior declive para resolver problemas de minimização sem restrições. Apesar dessas primeiras contribuições, muitos poucos progressos foram feitos até meados do século XX. Quando os computadores digitais de alta velocidade surgiram, estes possibilitaram a execução dos procedimentos de otimização e simulação e de mais investigações sobre novos métodos.

Schmit em 1960 [Schmit 1960], propôs uma nova abordagem bastante geral para otimização estrutural, que tem servido como base conceitual para o desenvolvimento de muitos métodos de otimização estrutural modernos. Ele introduziu a ideia e indicou a possibilidade de acoplar a análise estrutural de elementos finitos e programação matemática não-linear para criar capacidades de design ótimas automatizados para a bastante ampla classe de sistemas estruturais.

Muitos investigadores consideraram esses conceitos estruturais de análise uma mudança revolucionária na abordagem ao dimensionamento, isto porque apesar de se revelar uma ferramenta promissora, era muito recente e necessitava de estudo e desenvolvimento para estabilizar a metodologia. Até o final de 1960, no entanto, era evidente que a análise estrutural não estava a ser muito aceita pela comunidade profissional, ou pelos menos não da forma esperada.

Existem algumas explicações para que isto tenha acontecido, em primeiro lugar, o design tinha uma complexidade acrescida face à análise. Isto deve-se em parte porque a aceitação do método dos elementos finitos dá-se apenas após 15 anos de desenvolvimento. Em segundo lugar, a análise estrutural consiste numa integração de áreas de engenharia com a investigação operacional. Como os métodos de programação matemática eram desconhecidos para a grande maioria dos investigadores, docentes e profissionais, era esperado que a aceitação fosse imediata e generalizada. Cada explicação era razoável e apenas era necessário tempo e paciência para superar os obstáculos que surgissem. O seu reconhecimento foi surgindo e o limite fundamental desta tecnologia foi se revelando. O problema mais simples muitas vezes precisava de ser analisado centenas de vezes durante um processo de otimização. Se esta análise consumisse muito tempo, como é frequente nos casos com modelos de elementos finitos grandes, o custo de otimização rapidamente tornava-se inexecutável.

No entanto, em 1968 foi apresentada uma abordagem alternativa, na forma analítica por Prager e Taylor [Prager e Taylor 1968], e de uma forma numérica por Venkayya *et al.* [Venkayya *et al.* 1968]. Este conceito tornou-se popularmente conhecido como a abordagem do “critério ótimo”. O critério de otimização começa com a mesma declaração geral do problema de projeto. No entanto, ao invés de trabalhar diretamente para minimizar a função objetivo, este especifica um critério de tal forma que se este satisfaz as restrições e assim o projeto é definido como ideal.

A abordagem baseia-se nos critérios de otimização, ou seja, em primeiro lugar é estabelecido o critério que define o ótimo e, em seguida, define-se a função iterativa que conduz à

solução desejada. Embora a abordagem encontra-se baseada nos critérios de otimização, esta era amplamente intuitiva e demonstrou-se ser muito eficaz como uma ferramenta de desenho. A atração principal prendia-se no facto do método ser facilmente programado em computador, independente do tamanho do problema, e normalmente fornecia um desenho da estrutura quase ótima tendo apenas 15 análises estruturais detalhadas. Esta última característica representou uma melhoria notória em relação ao número de análises exigidas para os métodos de programação matemática chegarem a uma solução.

Os pontos fortes dos dois métodos surgiram com a separação natural do problema, onde os critérios de otimização passariam a lidar com um grande número de variáveis do projeto e a programação matemática resolveria o problema da componente de design. Esta abordagem foi perseguida com sucesso por Sobieszcanski e Leondorf [Sobieszcanski e Leondorf 1972] no projeto de estruturas de fuselagem. O trabalho desenvolvido por estes dois investigadores foi importante, não só porque combinou os dois métodos, mas também porque foi construído um domínio comum para ambas as áreas. Nesse mesmo período iniciou-se a investigação dos “conceitos de aproximação” como um mecanismo para melhorar a eficiência do uso das técnicas de programação matemática.

Schmit e Farshi [Schmit e Farshi 1973] apresentaram uma formulação concisa da aplicação do conceito de aproximação na análise estrutural usando programação matemática. A aproximação para o problema original tem sido desenvolvida utilizando-se funções de aproximação na otimização. Uma vez encontrada a solução ideal para o problema aproximado, realiza-se uma análise precisa dos elementos finitos e uma nova aproximação é criada. Desta forma, o ideal final é obtido através de iterações. Assim, numa técnica em que são fornecidas todas as características do problema original, estas são mantidas de tal modo sequencial nas otimizações aproximadas que conduz esta a uma solução exata.

Em termos de compreensão do processo de projeto automático, a obra que talvez se demonstrou mais significativa tenha consistido na conciliação matemática de ambos os conceitos básicos. O trabalho de Fleury *et al.* [Fleury *et al.* 1977] oferece percepções fundamentais para a base matemática de ambas as abordagens e, de facto, mostra uma base comum na dualidade da formulação do problema original.

2.3.2 Tipos de otimização estrutural

A Otimização Estrutural pode-se distinguir em 3 tipos. Estes classificam-se da seguinte forma:

- otimização paramétrica;
- otimização de forma;
- otimização topológica.

As diferenças mais relevantes podem observar-se na Figura 2.3 que demonstra para o mesmo problema os diferentes tipos de resultados.

De uma forma descritiva, tem-se que na **Otimização Paramétrica** o domínio ocupado pela estrutura é conhecido e fixo durante o processo de otimização. As variáveis de projeto são parâmetros que caracterizam os elementos que constituem a estrutura (*e.g.* propriedades da rigidez do elemento), tais como a área da secção transversal das barras, espessura das placas, momento de inércia ou propriedades do material. O processo de otimização tenta encontrar, por exemplo, a melhor área de secção transversal dos elementos de modo a obter a maximização da rigidez com mínimo volume de material.

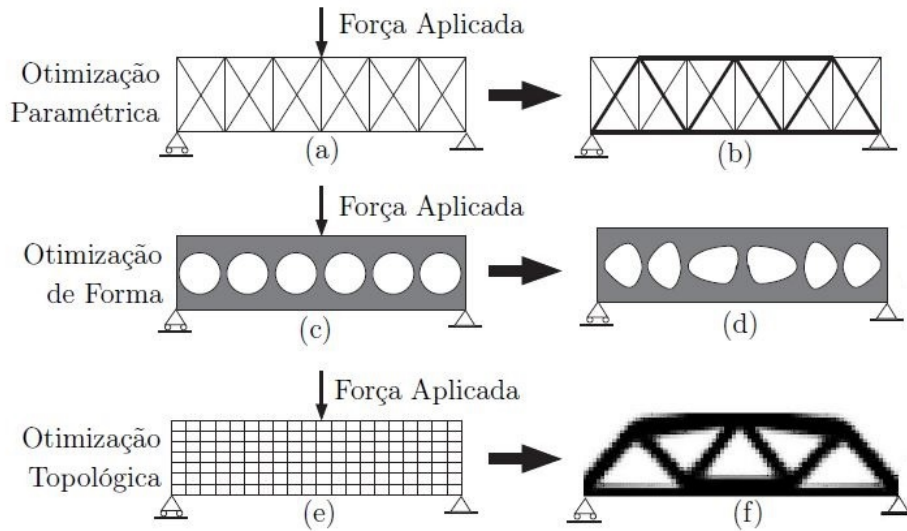


Figura 2.3: Diferenças mais notáveis de um problema nas diferentes abordagens de otimização estrutural [Bendsøe e Sigmund 2003].

Relativamente à **Otimização de Forma**, esta centra-se em determinar o domínio ótimo de uma estrutura através da variação da fronteira (forma do contorno). As variáveis de projeto são parâmetros que caracterizam o domínio ocupado pela estrutura, tais como as posições dos nós de ligação dos elementos numa estrutura reticulada, o comprimento de uma viga, entre outros.

Por fim, tem-se a **Otimização Topológica**, que procura obter o projeto ótimo através da variação da topologia da estrutura. Existe uma estrutura base de elementos estruturais possíveis e escolhe-se a melhor distribuição possível dentro desse domínio. A otimização topológica distingue-se dos outros problemas de otimização estrutural devido a não considerar a topologia fixa à partida. As variáveis de projeto são escolhidas de forma a permitir decidir quais as zonas do espaço onde existe ou não estrutura.

Pode-se concluir então que a otimização topológica, face aos outros dois tipos de otimização, permite obter diferentes tipos de orifícios na estrutura. Isto possibilita a distribuição do material, de forma minimizar a quantidade de material e sem pôr em causa o seu desempenho.

2.4 Otimização topológica

2.4.1 Revisão bibliográfica

A primeira publicação associada à otimização topológica surgiu no início do século XX, onde Michell apresentou critérios de ótimo para a obtenção de estruturas reticuladas de peso mínimo [Michell 1904]. Os seus princípios, com aplicação para frações volúmicas muito reduzidas, foram retomados mais tarde [Rozvany 2001].

A possibilidade de aliar a otimização às ferramentas computacionais então emergentes propiciou o crescimento da aplicação computacional da otimização estrutural a novas aplicações.

A utilização de metodologias de programação matemática foi iniciada por Schmit e Dorn *et al.* e encontrava-se baseada nos modelos de estruturas reticuladas e programação linear [Schmit 1960, Dorn *et al.* 1964].

Rozvany e outros autores, propuseram vários trabalhos que apresentavam desenvolvimentos dos princípios aplicados e generalização para estruturas contínuas [Rozvany 2009]. Um dos primeiros trabalhos com a utilização de meios contínuos discretizados para a resolução de problemas de otimização topológica incidiu sobre a distribuição ótima da espessura em placas elásticas [Cheng e Olhoff 1981]. Este trabalho introduziu também a relevância da micro-estrutura dos materiais em otimização topológica.

Com o surgimento deste trabalho, o contínuo desenvolvimento da temática levou ao trabalho de Bendsøe e Kikuchi [Bendsøe e Kikuchi 1988], onde foi apresentada a otimização topológica como ferramenta computacional com aplicação em estruturas contínuas, utilizando variações na micro-estrutura do material como forma de relaxar o problema discreto de otimização topológica. Sendo pioneiro na forma como esta temática é abordada, este trabalho marca o início de uma fase de grande crescimento.

A abordagem por *Solid Isotropic Material with Penalisation* (SIMP) foi primeiramente introduzida por Bendsøe [Bendsøe 1989] e uns anos mais tarde trabalhada por Rozvany *et al.* [Rozvany *et al.* 1992], constituindo uma das metodologias mais utilizadas atualmente na otimização topológica.

O crescimento das aplicações que aliam a otimização topológica com o cálculo estrutural desde então tem sido acentuado. A influência da forma e da topologia na eficiência de uma estrutura leva a que os procedimentos de otimização constituam ferramentas cada vez mais necessárias no contexto industrial. Desta forma, verifica-se que os problemas associados têm uma configuração típica em otimização, com variáveis de otimização e variáveis de estado. O número destas variáveis é frequentemente elevado, originando alguns compromissos ou simplificações em termos de restrições ou formulação [Bendsøe e Sigmund 2003].

Tome-se ainda especial atenção sobre a grande variedade de designações atribuídas às metodologias de otimização topológica, que dependendo dos autores, podem diferir nos tipos de abordagem ou métodos associados. Destacam-se as designações *Generalized Shape Optimisation* (GSO) como termo genérico de otimização topológica ou *Layout Optimisation* (LO), usado para estruturas discretas. É comum utilizar neste caso metodologias *Ground Structure Approach* (GSA), de grelha ou malha completamente preenchida com elementos que são selecionados e configurados de modo a corresponder à melhor resposta possível. Esta abordagem é característica de estruturas discretas, nomeadamente articuladas [Dorn *et al.* 1964], mas tem semelhanças com a malha de elementos finitos utilizada como domínio admissível de um problema geral de otimização topológica em meios contínuos, conceito que alguns autores designam como sendo *Isotropic Solid or Empty ground structures* (ISE).

A utilização de métodos evolucionários, por sua vez, enquadra-se normalmente na *Evolutionary Structural Optimisation* (ESO), também designada por *Sequential Element Rejections and Admissions* (SERA) [Rozvany e Querin 2002].

2.4.2 Conceitos gerais

A otimização topológica estrutural consiste na procura da distribuição ótima que minimize a flexibilidade. Considerando uma estrutura física associada a um domínio contínuo Ω , através do qual se define a distribuição inicial de material, definem-se as condições de fronteira que garantam o equilíbrio estático deste corpo. Estas são na forma de restrições e carregamentos.

Usualmente, para o problema de elasticidade linear usa-se como medida da flexibilidade da estrutura a função energia de deformação, S definida como

$$S = \frac{1}{2} \int_{\Omega} D_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) d\Omega \quad (2.3)$$

onde \mathbf{u} representa o campo de deslocamentos correspondente ao equilíbrio, ε_{ij} as componentes do campo de deformações no equilíbrio e D_{ijkl} as componentes do tensor de elasticidade do material em $\mathbf{x} \in \Omega$. Uma forma alternativa corresponde à utilização do trabalho das forças externas, definido como

$$W = \int_{\Omega} b_i u_i d\Omega + \int_{\Gamma_{N_u}} \bar{t}_i u_i d\Gamma \quad (2.4)$$

b_i e \bar{t}_i correspondem às forças externas por unidade de volume e de área, respectivamente, e Γ_{N_u} diz respeito à superfície de fronteira correspondente às condições de fronteira de Neumann associadas ao problema mecânico. Estas funções podem ser usadas para definir a energia potencial total do sistema como

$$P = S - W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} D_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) d\Omega - \left(\int_{\Omega} b_i u_i d\Omega + \int_{\Gamma_{N_u}} \bar{t}_i u_i d\Gamma \right) \quad (2.5)$$

De acordo com o princípio da energia potencial total mínima, esta é minimizada pelo campo de deslocamentos \mathbf{u} que corresponde ao equilíbrio. O problema de otimização topológica pode ser formulado em termos de qualquer uma das grandezas anteriores, recorrendo à formulação mais conveniente para cada aplicação. Uma das formas mais usuais recorre ao trabalho das forças externas como medida da flexibilidade da estrutura, resolvendo o problema de otimização

$$\min_{\substack{\mathbf{D} \in \mathbf{D}_{adm} \\ \delta P = 0}} \left(\int_{\Omega} b_i u_i d\Omega + \int_{\Gamma_{N_u}} \bar{t}_i u_i d\Gamma \right) \quad (2.6)$$

A formulação mais comum deste problema corresponde à sua forma discretizada utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF) e apresentada em notação matricial [Sigmund 2001]. Usa-se, neste caso, uma matriz constitutiva \mathbf{D} constante em cada elemento finito e o problema escreve-se como

$$\min_{\substack{\mathbf{D} \in \mathbf{D}_{adm} \\ \mathbf{K}\mathbf{u}=\mathbf{f}}} \left(\int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_{N_u}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma \right) \quad (2.7)$$

ou, na sua implementação mais prática

$$\min_{\substack{\mathbf{D} \in \mathbf{D}_{adm} \\ \mathbf{K}\mathbf{u}=\mathbf{f}}} \int_{\Omega} \mathbf{f}^T \mathbf{u} d\Omega = \min_{\substack{\mathbf{D} \in \mathbf{D}_{adm} \\ \mathbf{K}\mathbf{u}=\mathbf{f}}} \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} d\Omega \quad , \quad (2.8)$$

onde a matriz de rigidez \mathbf{K} é a matriz global que corresponde à assemblagem das matrizes elementares \mathbf{k}_e , definidas em cada elemento e como função da matriz constitutiva local \mathbf{D}_e .

2.4.2.1 Parametrização do problema

Os problemas de otimização topológica são essencialmente problemas de otimização inteira e discreta de larga escala, na sua maioria, com formulações onde a previsão da topologia se pode

processar com otimização diferencial. A formulação do problema de otimização topológica utilizado neste trabalho corresponde a obter o subdomínio Ω^* de Ω , com uma dada fração volúmica f_v que otimiza um determinado objetivo. Este objetivo corresponde geralmente a uma qualquer medida de rigidez ou flexibilidade que se deseja maximizar ou minimizar, respetivamente. A topologia ideal terá uma forma associada, com elementos estruturais e vazios (ou materiais constituintes distribuídos em diferentes fases). A definição original de um problema desta natureza corresponde a um problema de otimização de variáveis discretas. Frequentemente, define-se a variável ρ como densidade, podendo tomar os valores 1 em Ω^* ou 0 em $\Omega \setminus \Omega^*$. Este problema genérico pode definir-se como

$$\min_{\substack{\rho(\mathbf{x}) \in \{0,1\}, \forall \mathbf{x} \in \omega \\ \int_{\omega} \frac{\rho}{v_{\omega}} dx \leq f_v}} f(\rho) \quad (2.9)$$

onde é implícita a existência de uma função de estado como restrição ou parte integrante da função-objetivo, como, por exemplo, a equação de equilíbrio. Contudo, o problema genérico definido na expressão 2.9 não tem solução global. Isto acontece devido ao facto de se introduzir mais vazios sem se alterar a fração volúmica geral e assim originar em princípio um aumento da eficiência do processo de otimização e melhorar o objetivo [Sigmund e Petersson 1998, Bendsøe e Sigmund 2003, Rozvany *et al.* 2006]. Este fenómeno é normalmente designado como inexistência de soluções. Neste caso, existem duas formas genéricas de obter uma solução de engenharia: (i) modificar o problema de modo a que tenha solução e então proceder à sua discretização ou (ii) discretizar o problema original. Na primeira abordagem existem duas metodologias comuns, nomeadamente baseadas na relaxação ou na restrição do problema. Na segunda abordagem, apesar de se produzirem resultados, diversos autores referem a metodologia como sendo por vezes incerta, no sentido em que as estruturas produzidas podem não corresponder ao problema contínuo original, sendo este possivelmente indefinido [Haber *et al.* 1996, Sigmund e Petersson 1998, Petersson 1999, Bendsøe e Sigmund 2003, Sigmund 2007]. A discretização destes problemas pode ser feita com recurso ao método dos elementos finitos, dividindo-se o domínio em n elementos. A variável ρ é tomada como constante em cada elemento finito, podendo a sua distribuição ser representada com recurso ao vetor ρ , de dimensão n . A utilização de densidades constantes em cada elemento permite que a integração elementar seja feita da forma habitual, sendo a densidade utilizada frequentemente como operador escalar da rigidez [Sigmund e Petersson 1998]. Assim, o problema discretizado passa a ter a forma

$$\min_{\substack{\rho_i \in \{0,1\}, i=1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i v_i}{v_{\Omega}} \leq f_v}} f(\rho) \quad (2.10)$$

sendo ρ_i e v_i as densidades e os volumes de cada elemento finito, respetivamente. Tendo em conta a formulação do problema 2.10, a inexistência de soluções apresenta-se como uma dependência de malha, onde a solução ideal e a existência de um número crescente de vazios no ótimo são diretamente dependentes do nível de refinamento da malha.

A relaxação de um problema consiste fundamentalmente em ampliar o seu domínio admissível de forma a conduzir à existência de solução. Uma das formas de o conseguir passa pela introdução de detalhe adicional através de processos multi-escala. Bendsøe e Kikuchi [Bendsøe e Kikuchi 1988] abriram caminho à otimização topológica na sua forma atual, relaxando o problema com a introdução de detalhe ao nível da micro-escala usando metodologias

de homogeneização. No entanto, a abordagem mais comum para se obter um problema bem-condicionado e atingir as soluções definidas, passa por permitir que os diferentes tensores característicos sejam capazes de serem utilizados definindo as propriedades do material ao longo do domínio admissível. Assim, o problema original discreto transforma-se num problema contínuo em que a energia depende linearmente da densidade ρ [Bendsøe *et al.* 1994, Sigmund e Petersson 1998], passando esta a variar linearmente entre os valores discretos definidos anteriormente, *e.g.* entre 0 e 1. Esta dependência linear torna o problema mais versátil [Sigmund e Petersson 1998], definindo limites de eficiência mecânica das estruturas e permitindo resolver uma maior variedade de problemas. Por outro lado, o problema pode também ser restringido. Para isso, acrescentam-se constrangimentos adicionais que limitem a variação de densidade ou a sua distribuição, tornando assim o domínio admissível mais pequeno que o original, e ao mesmo tempo suficientemente fechado e com solução definida.

A outra estratégia igualmente utilizada neste contexto, aliando-se à relaxação do problema discreto com a definição contínua de ρ , consiste na penalização de densidades intermédias. Esta abordagem é utilizada de forma a se obter as soluções discretas [Sigmund e Petersson 1998, Bendsøe e Sigmund 2003], permitindo o pós-processamento de problemas relaxados e evitando a utilização de métodos de otimização discreta, considerados problemas NP-completos quando lidam com variáveis binárias [Klein e Young 2010]. A dificuldade de resolver este problema de otimização na forma original, especialmente aquando de grandes dimensões, leva a que, por razões computacionais, se relaxe o problema. O facto de se permitir uma variação contínua das variáveis acarreta, no entanto, o problema das densidades intermédias. Enquanto que numa abordagem multi-escala [Bendsøe 1989, Bendsøe 1995, Hassani e Hinton 1999, Allaire 2002] ou em casos de variação contínua de densidade, onde as densidades intermédias poderão ter significado físico, na maioria dos problemas estruturais estas são indesejadas. Adicionalmente, estas afastam a solução obtida da solução dos problemas iniciais de variáveis discretas. Assim, recorre-se à utilização de variáveis contínuas com penalização das densidades intermédias de modo a que a solução aproxime a solução discreta, *e.g.* com valores binários. Esta perturbação do problema relaxado tende a aproximar a solução do problema discreto com a intensificação da penalização, especialmente em conjugação com a utilização de filtros ou restrições geométricas [Bendsøe e Sigmund 2003]. Apesar de existirem diversas estratégias alternativas para a penalização de densidades intermédias [Sigmund e Petersson 1998, Petersson 1999, Allaire 2002, Borrvall 2001, Stolpe e Svanberg 2001a, Bendsøe e Sigmund 2003, Sigmund 2007, Hvejsel e Lund 2011], incluindo as restrições de perímetro, a metodologia mais popular é a chamada SIMP¹ (*Solid Isotropic Material with Penalization*), que designa usualmente a lei de potência [Rozvany *et al.* 1992, Bendsøe e Sigmund 1999]

$$K(\rho) = \rho^p K_0 \tag{2.11}$$

onde K_0 é uma dada propriedade do material de base (correspondente a densidade 1), isotrópico na abordagem geral do método, e p o factor de penalização que determina a forma como as variáveis são conduzidas aos seus extremos. A influência do expoente de penalidade faz com que a densidade efetiva correspondente a valores intermédios da variável ρ seja inferior, originando uma queda acentuada da propriedade que influencia e tornando os extremos mais favoráveis em termos de solução ótima. Isto deve-se ao facto de, ao longo da variação intermédia de ρ , o volume se manter proporcional à variável densidade enquanto que a pro-

¹A abreviação de SIMP pode também designar *Simple* ou *Simply Isotropic Material with Penalization* [Duysinx 1997, Sigmund e Petersson 1998, Rozvany 2001, Rozvany 2009].

priedade que é afetada passa a ser inferior ao valor proporcional. O problema discretizado pode escrever-se como

$$\min_{\substack{0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1, i=1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i v_i}{v_{\omega}} \leq f_v \\ \mathbf{K}\mathbf{u}=\mathbf{f}}} f(\rho), \quad f(\rho) = \int_{\omega} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} d\omega = \sum_{e=1}^n \rho_e^p \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_0 \mathbf{u}_e, \quad (2.12)$$

onde \mathbf{u} , \mathbf{f} e \mathbf{K} denotam vetores de deslocamento e força, e matriz de rigidez, respetivamente. O índice e indica quantidades elementares. Note-se que a rigidez do elemento e é definida como $\rho_e^p \mathbf{k}_0$, onde \mathbf{k}_0 corresponde à rigidez elementar de e quando constituído pelo material de base. Esta definição é equivalente a escrever $\rho_e^p \mathbf{D}_0$, onde \mathbf{D}_0 corresponde à matriz constitutiva do material de base. Em qualquer dos casos, sempre que a restrição de volume é ativa, o problema tende a convergir para soluções aproximadamente discretas se o fator de penalização p for suficientemente elevado. Este valor é usualmente tomado como $p \geq 3$, apesar de depender do tipo de problema e de propriedades como o coeficiente de Poisson [Bendsøe e Sigmund 1999].

Note-se que o conceito de sensibilidade é particularmente relevante na parametrização do problema. A análise de sensibilidade em otimização corresponde ao estudo do gradiente da função-objetivo em relação às variações das variáveis do problema. Estes gradientes traduzem a sensibilidade da resposta da função a pequenas alterações destas variáveis. Por um lado, os algoritmos de otimização utilizados neste trabalho são algoritmos que necessitam do cálculo dos gradientes da função-objetivo e das restrições relativamente às variáveis do problema. Por outro lado, a sensibilidade da resposta do problema relativamente à variação de parâmetros de controlo pode ser de enorme relevância para a robustez e a precisão dos métodos utilizados [Amstutz 2010]. No contexto da utilização da estratégia de penalização SIMP, utilizada neste trabalho, a sensibilidade da função-objetivo $f(\rho)$ relativamente à variável ρ é determinada pela derivada da componente constitutiva dependente desta variável. Assim, a derivada da propriedade K definida na equação 2.11 pode escrever-se como

$$\frac{\partial K(\rho)}{\partial \rho} = p\rho^{p-1} K_0. \quad (2.13)$$

Em particular, no problema de elementos finitos em elasticidade, a sensibilidade de $f(\rho)$ relativamente a ρ resulta em

$$\frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} = -p\rho_e^{p-1} \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_0 \mathbf{u} \quad (2.14)$$

para o elemento finito e . Note-se que o sinal negativo da sensibilidade da função advém da sua definição em termos de trabalho das forças externas.

2.4.2.2 Problemas de instabilidade

Atendendo ao descrito na secção anterior, as instabilidades numéricas e os problemas de convergência para a solução ótima mais comuns em otimização topológica podem dividir-se em três categorias principais [Sigmund e Petersson 1998]:

1. dependência de malha;
2. instabilidade do tabuleiro (*checkerboards*)²;

²Corresponde ao padrão de tabuleiro de damas frequentemente desenvolvido durante o processo de otimização topológica. É comum em otimização referir-se este padrão como de tabuleiro de xadrez. Pela falta de uma tradução mais adequada, utiliza-se o termo inglês ao longo deste documento.

3. mínimos locais.

2.4.2.2.1 Dependência da malha

Embora a parametrização pelo método SIMP permita a formulação do problema, esta não evita a dependência do resultado do refinamento que a malha tem, associado ao facto do espaço da solução não ser fechado. Com isto, à medida que se efetua o refinamento da malha, o número de reforços é aumentado, tendendo para uma micro-estrutura anisotrópica. Na Figura 2.4 pode-se observar o fenómeno da dependência da malha. O refinamento da malha de elementos finitos deveria idealmente fornecer a mesma topologia com uma maior definição do contorno. No entanto, a malha mais refinada resultou numa estrutura mais complexa, o que cria uma dificuldade do ponto de vista do fabrico.

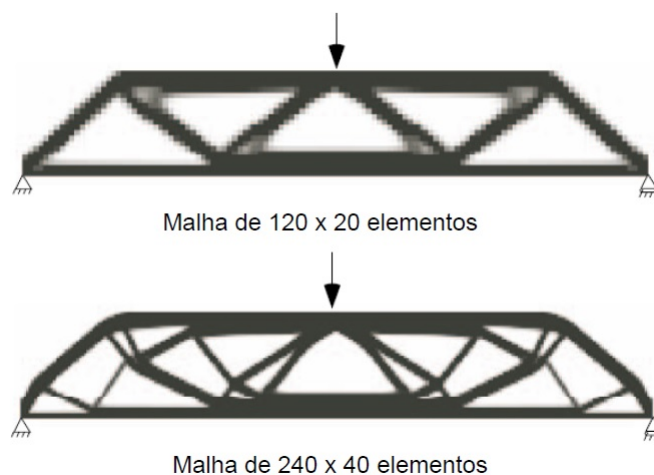


Figura 2.4: Ilustração de um exemplo do fenómeno de dependência da malha [Stump 2006].

Segundo Bahia [Bahia 2005] existem procedimentos para resolver ou tentar atenuar a dependência do refinamento da malha. A abordagem utilizada consiste em reduzir o espaço de projetos admissíveis incorporando restrições globais ou locais na variação da densidade, impedindo desta forma a geração de micro-estruturas ou estruturas mais detalhadas.

Outra técnica empregue para a obtenção da independência da malha consiste em estender o espaço de projetos de tal forma que sejam aceites os materiais com densidade intermédia entre o vazio e o cheio. No entanto, isto não é possível quando o objetivo é a obtenção de projetos 0-1, ou seja, apenas constituídos por material sólido (densidade 1) ou vazio (densidade 0). Ainda outras técnicas incluem a utilização de filtros e algoritmos de controlo de perímetro.

2.4.2.2.2 Instabilidade do tabuleiro

Em alguns casos, a distribuição do material no domínio do problema pode levar ao surgimento de regiões onde a densidade dos elementos adjacentes varie de forma periódica. Configura-se assim a região com características similares a um tabuleiro de xadrez, alternando entre estes espaços vazios e os espaços sólidos. Isto não corresponde à distribuição ótima. Na literatura, este fenómeno é conhecido por *checkerboard*. Os resultados dos trabalhos de Díaz e Sigmund [Díaz e Sigmund 1995] mostram que esse fenómeno surge devido a uma modelação inadequada do elementos finitos e, nas regiões onde isso acontece, a rigidez aparenta artificialmente ter um

valor elevado quando comparado com outra região da estrutura que possua o mesmo volume, mas com uma distribuição homogênea. Isto pode ser visualizado através da Figura 2.5, em que são visíveis as zonas de instabilidade.

Atendendo à origem numérica deste fenómeno, são usualmente utilizados alguns métodos que permitem evitar ou minimizar o aparecimento deste problema. Uma das formas mais simples, desaconselhada por ignorar o fundamento físico do problema, corresponde à utilização de métodos de suavização da solução obtida recorrendo a algoritmos de processamento de imagem. Por outro lado, a forma mais correta e eficiente de obter soluções centra-se na utilização de elementos finitos de ordem superior. A utilização de elementos quadráticos permite usualmente a obtenção de melhores soluções. No entanto, o facto de permitirem uma melhor representação dos campos associados ao problema de elementos finitos não é suficiente para garantir a inexistência de problemas de *checkerboard*, dependendo da metodologia utilizada e da escolha correta dos parâmetros de otimização [Díaz e Sigmund 1995]. Adicionalmente, o recurso a elementos de ordem superior acarreta um aumento dos requisitos de processamento e/ou perda de resolução na distribuição ótima. Em alternativa, a família de métodos mais utilizados corresponde à utilização de filtros [Sigmund 1994, Bendsøe e Sigmund 2003, Sigmund 2007]. Estes alteram as sensibilidades ou as próprias variáveis de otimização em cada elemento finito e ao longo do processo iterativo, de modo a que dependam dos valores encontrados nos elementos dentro de uma determinada vizinhança. Esta é uma forma eficiente de controlar *checkboards*, muitas vezes recorrendo a algoritmos e definições adaptadas diretamente das técnicas de filtragem usadas em processamento de imagem.

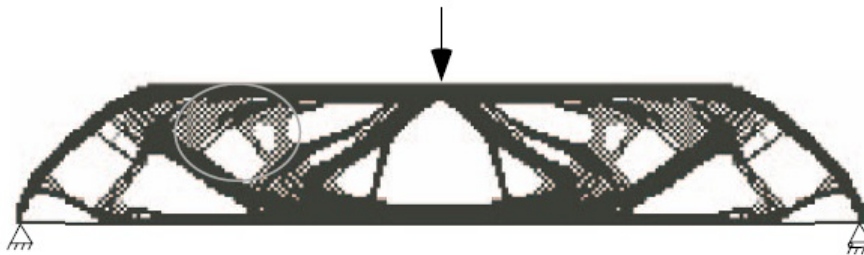


Figura 2.5: Ilustração do fenómeno de Instabilidade do Tabuleiro [Stump 2006].

2.4.2.2.3 Mínimos locais

Os problemas de engenharia, quando se referem à otimização, são na sua grande maioria não-convexos. Isto faz com que possuam muitos mínimos locais. Consequentemente, o mesmo problema de otimização é conduzido a estes vários mínimos dependendo dos parâmetros e das variáveis iniciais do algoritmo, como se visualiza através da Figura 2.6. Assim não se pode garantir que o ponto mínimo fornecido pela solução seja o melhor ponto, isto é, o mínimo global.

Os algoritmos de otimização global disponíveis são, na sua grande maioria, incapazes de lidar com uma grande quantidade de variáveis de projetos, como é o caso das variáveis de projeto de otimização topológica. Alguns autores sugerem a utilização de métodos de continuação³

³Designação adaptada do inglês *continuation methods* ou *numerical continuation*

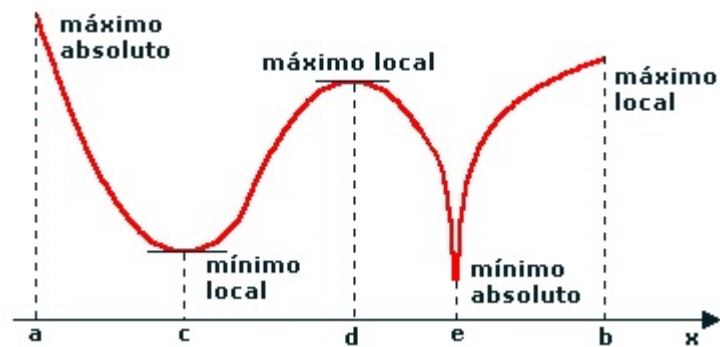


Figura 2.6: Representação dos máximos e mínimos de uma função.

numérica para garantir de certa forma uma convergência estável na direção de projetos fiáveis [Stolpe e Svanberg 2001b, Groenwold e Etman 2009].

A ideia dos métodos de continuação é mudar gradualmente o problema de otimização de um problema convexo, artificial, que permite regiões de densidade intermédia, para um problema de projeto original não convexo (problema 0-1) num determinado número de passos.

2.4.2.3 Métodos de filtragem

Os diversos métodos de restrição aplicados na otimização topológica têm como principal objetivo reduzir por um lado a dependência da malha e os fenómenos de *checkerboard*, por outro lado, permitem obter um melhor pós-processamento das geometrias obtidas.

Dentro da paleta de possibilidades, os métodos de filtragem destinados à resolução dos problemas de otimização topológica podem ser divididos em métodos baseados na filtragem de densidade e sensibilidade. Estes métodos tendem a gerar distribuições definidas de material, muitas vezes com zonas de transição demarcadas, com espessura dependente da dimensão do filtro. Esta transição é muitas vezes conveniente, nomeadamente para a utilização de isovalores de transição para aproximação geométrica.

Contudo, em muitos casos, resultados claramente preto e branco (0/1) permitem uma aproximação mais correta ao problema discreto original e geometrias de melhor interpretação, com elementos discretos aproximados de dimensão mínima controlada pela dimensão dos filtros. De um modo geral, o filtro ideal deveria corresponder aos seguintes requisitos [Sigmund 2007]:

- obter soluções independentes de malha e sem problema de *checkerboard*;
- obter soluções discretas (0/1);
- controlar a exequibilidade da solução (raios mínimos de ferramentas, dimensões mínimas de vazios, limitações geométricas, etc.);
- não necessitar de restrições adicionais ao problema de otimização;
- depender de poucos parâmetros e ser robusto;
- originar uma convergência rápida e estável;
- ter aplicabilidade geral; ser de implementação simples;

- ter um baixo custo computacional.

A regularização da otimização topológica através da utilização de técnicas de filtragem pode ser dividida entre aquela em que os filtros atuam diretamente sobre as variáveis do problema e aquela em que os filtros atuam sobre os gradientes ou sensibilidade da função-objetivo às variáveis. No primeiro caso, as densidades são ponderadas com a vizinhança e alteradas antes de se voltar a calcular a função-objetivo. As suas sensibilidades são depois calculadas tendo em conta esta alteração e então utilizadas na atualização das densidades. No segundo caso, estas são calculadas e depois ponderadas com a vizinhança, usualmente com base em métodos puramente heurísticos [Sigmund 1997, Sigmund 2001, Bendsøe e Sigmund 2003]. A vizinhança de elemento e , aqui chamado N_e , é geralmente especificada pelos elementos que têm centros dentro de um dado raio R_f de filtro no centro do elemento, como por exemplo:

$$N_e = \{i : \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_e\| \leq R_f\}, \quad (2.15)$$

onde \mathbf{x}_i é a localização central espacial do elemento i . Associado a esta vizinhança surge o peso de ponderação, também designado por operador de convolução⁴ [Sigmund 1997, Sigmund 2001, Bendsøe e Sigmund 2003]

$$w_i = \hat{H}_i = R_f - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_e\| \quad (2.16)$$

para cada elemento i na vizinhança N_e . Note-se que filtros exclusivamente dependentes de distâncias podem acarretar problemas com regiões que se encontrem dentro da distância definida, mas não tenham ligação física ao elemento em análise, podendo originar a degenerescência das soluções obtidas. Assim, ao longo da maior parte deste trabalho, as vizinhanças são definidas com base em conectividades entre os elementos e as distâncias são contabilizadas apenas para ponderação.

Na definição das vizinhanças surgem outras complexidades, nomeadamente a gestão das fronteiras da malha de elementos finitos. Idealmente, os filtros deveriam ser expandidos e considerarem elementos para além dos limites da malha como elementos vazios. Da mesma forma, fronteiras com condições de simetria deviam contemplar elementos correspondentes a essa simetria. Esta prática é, no entanto, usualmente ignorada [Sigmund 2007].

2.4.2.3.1 Filtro de sensibilidade

A filtragem de sensibilidades é largamente utilizada em códigos académicos e comerciais. Estes filtros atuam sobre as sensibilidades, sendo a actualização das variáveis de otimização feita com base nas sensibilidades filtradas. Apesar da sua comprovada robustez para inúmeras aplicações, esta metodologia envolve alguns riscos também. Na realidade, as sensibilidades filtradas podem deixar de representar corretamente os gradientes das variáveis, e criar problemas de convergência ou mesmo paragem prematura dos algoritmos. A versão original do filtro de sensibilidades [Sigmund 1997], para independência de malha, tem origem heurística e pode definir-se como

$$\frac{\hat{\partial}f}{\partial\rho_e} = \frac{1}{\rho_e \sum_{i \in N_e} \hat{H}_i} \sum_{i \in N_e} \hat{H}_i \rho_i \frac{\partial f}{\partial \rho_i} . \quad (2.17)$$

Note-se que, com esta modificação heurística das sensibilidades, deixa-se de minimizar o problema original, mas sim uma versão suavizada do inicial [Bendsøe e Sigmund 2003].

⁴Traduzido do termo inglês *convolution*, traduz qual o grau qualitativo da complexidade das geometrias obtidas.

2.4.3 Pós-processamento de otimização topológica

O pós-processamento dos resultados obtidos da otimização topológica é uma temática que cada vez mais apresenta uma elevada importância de estudo. Para além do pós-processamento típico de problemas resolvidos com o Método de Elementos Finitos (MEF), capaz de ser efetuado através do programa GiD[®] onde se pode visualizar os diferentes resultados, a otimização topológica pressupõe normalmente uma aproximação por uma geometria não-discretizada.

A transição das soluções obtidas no método de otimização topológica para as geometrias correspondentes a estruturas executáveis e efetivamente ótimas pode originar alguma complexidade de resolução. Este procedimento pode ser efetuado manualmente ou desenvolvendo procedimentos automáticos que façam a aproximação das distribuições obtidas recorrendo a funções matemáticas passíveis de serem utilizadas em programas CAD (*Computer-Aided Design*).

Uma das formas mais imediatas de implementar este tipo de abordagem é recorrer a plataformas de cálculo numérico e analítico (e.g. Matlab[®]) que permitam a representação gráfica de distribuições de pontos e de funções, assim como a obtenção automática de curvas de nível ou de isovalores, tal como se pode visualizar na Figura 2.7.

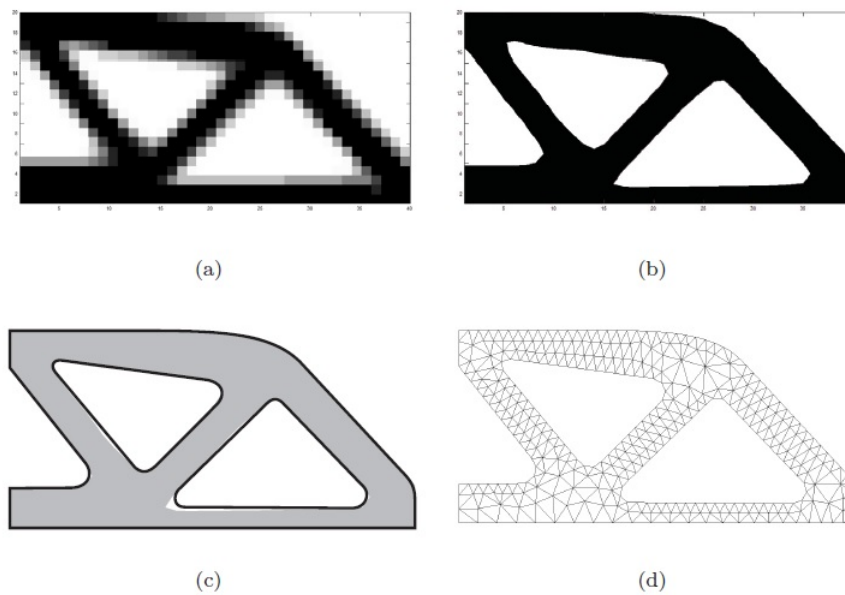


Figura 2.7: Ilustração do pós-processamento de resultados de um problema bidimensional de otimização topológica: (a) resultados do problema de otimização topológica, (b) curvas de isovalores, (c) curvas suavizadas (CAD) e (d) nova malha de elementos finitos [Oliveira 2013].

No contexto da otimização topológica, este tipo de metodologia permite uma grande flexibilidade em termos de concretização dos resultados obtidos.

Assim, as coordenadas de nós ou outros pontos notáveis da malha de elementos finitos podem ser utilizados de forma idêntica às nuvens de pontos utilizadas nas metodologias de engenharia inversa referidas, em casos bi- ou tridimensionais. Note-se que após a modelação da geometria que aproxima os resultados da otimização topológica, é possível gerar a malha do problema em causa e realizar eventuais simulações sobre a geometria ótima. Por isso é

importante comparar os resultados obtidos na modelação com os resultados da otimização topológica para garantir que não se perdeu informação no processo de tratamento da nuvem de pontos. É ainda possível utilizar a nova definição de ótimo para procedimentos de otimização de forma e assim refinar os resultados obtidos.

Em áreas como o desenvolvimento do produto, este levantamento de forma, especialmente para geometrias complexas, passa pela medição das coordenadas de pontos notáveis da mesma. Esta medição é frequentemente realizada por tecnologias óticas de varrimento (*e.g.* 3-D *laser scanning*), como mostrado na Figura 2.8, resultando numa nuvem de pontos cujas coordenadas traduzem uma função discreta que aproxima a geometria do modelo.

Esta nuvem de pontos é depois processada em programas CAD de modo a resultar em superfícies que a aproximem corretamente. Estas superfícies podem ser simplificadas, manipuladas e parametrizadas de modo a definirem a geometria pretendida. Esta metodologia muitas das vezes é utilizada apenas para o melhoramento da geometria/design de um objeto já desenvolvido.

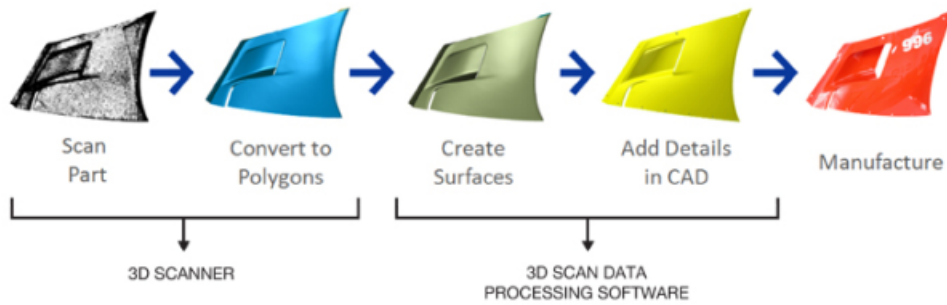


Figura 2.8: Ilustração do processo de engenharia inversa desde o levantamento da geometria até à obtenção do modelo CAD [LMI 3D 2014].

No contexto da otimização topológica, este tipo de metodologia permite uma grande flexibilidade em termos de concretização dos resultados obtidos, apesar de potencialmente moroso em termos de afinação. Deste modo, em casos de problemas de otimização discreta (*e.g.* problemas 0-1), mesmo que resultantes de versões relaxadas, os pontos de transição servem de base para a aproximação por curvas ou superfícies NURBS que permitem a modelação da geometria. Esta será a abordagem que se pretende estudar no contexto deste trabalho, e avaliar quais os benefícios e potenciais problemas que poderão surgir com a utilização deste tipo de metodologia no pós-processamento dos resultados de otimização topológica.

Capítulo 3

Engenharia inversa

Introduz-se a temática de engenharia inversa, conceitos, aplicações e problemas, e de seguida integra-se esta temática com a otimização topológica.

3.1 Introdução

O atual processo de globalização torna crucial a obtenção e manutenção da competitividade de empresas e nações, enquanto acelera os processos de mudança tecnológica.

O avanço da tecnologia realça a importância da invenção, da inovação e dos novos conhecimentos científicos. A obtenção de parâmetros do produto de referência representa ações de natureza técnica diferentes das usualmente previstas nos processos de desenvolvimento tecnológico. Nos processos de desenvolvimento tecnológico convencional parte-se diretamente de ideias e invenções para o produto final. Contudo, novas técnicas têm surgido, tais como a engenharia simultânea¹ e a manufatura integrada por computador², desta forma, dentro da engenharia integrada destaca-se a engenharia inversa. A sua utilização encontrava-se inicialmente restringida ao uso específico na indústria automóvel [Leite *et al.* 2010]. Através da Figura 3.1 pode-se constatar as principais diferenças entre um projeto convencional e um projeto de engenharia inversa, onde o processo de engenharia inversa, em oposição ao processo de produção convencional, que parte das especificações para chegar ao produto, este parte das especificações de um produto existente para chegar a um novo produto.

Segundo Raja *et al.* [Raja *et al.* 2008] a engenharia inversa tem vindo a evoluir ao longo dos anos, do processo manual para uma ferramenta de engenharia que utiliza sofisticados *softwares* computacionais e modernos instrumentos de medição. A aplicação/utilização desta temática rapidamente se estendeu para as áreas de projeto e produção. Esta expansão deveu-se a uma mudança no processo de projeto e manufatura dos produtos e do desenvolvimento de equipamentos especializados. Este desenvolvimento nos equipamentos foi fundamentalmente para dar suporte à engenharia inversa, bem como para responder à necessidade de se reduzir o tempo de desenvolvimento dos produtos.

¹ *Concurrent Engineering*, consiste numa abordagem sistemática para o desenvolvimento integrado e paralelo do projeto de um produto e os processos relacionados [Prasad 1996].

² *Computer Integrated Manufacturing*, corresponde a uma abordagem do uso de computadores para controlar todo o processo de produção industrial [Korem 1983].

Ao longo dos anos, as definições de engenharia inversa dadas por alguns autores consistiram em:

- Varady *et al.* afirmou que: “Enquanto que a engenharia convencional transforma conceitos e modelos em peças reais, a engenharia inversa transforma em engenharia modelos e conceitos.” [Várady *et al.* 1997]
- Dickin designou por: “A engenharia inversa consiste em produzir novas peças, produtos ou ferramentas a partir de modelos ou componentes existentes.” [Dickin 1996]
- Daschbach denominou por: “A engenharia inversa é o processo de levantar dimensões, com rapidez e exatidão, determinar padrões geométricos tais como áreas e volumes além de definir as tolerâncias de um modelo existente.” [Daschbach 1995]
- Puntambekar *et al.* mencionou: “Apesar do processo de engenharia inversa (que começa num modelo físico e terminar com um modelo CAD) aparenta ser o oposto do processo de produção convencional (que começa com um modelo CAD e produz uma peça física) na verdade os conceitos globais são muito similares.” [Puntambekar *et al.* 1994]

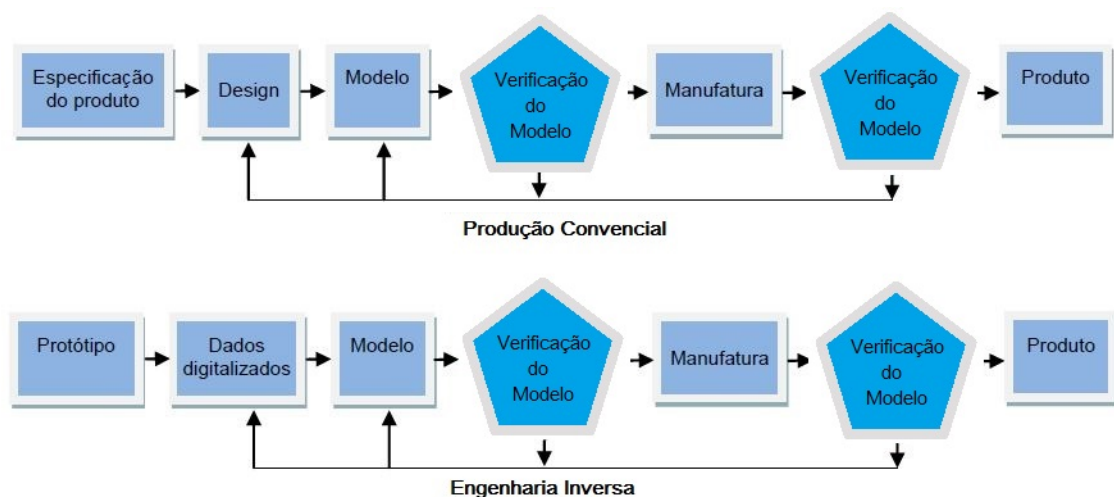


Figura 3.1: Esquemática do processo de engenharia inversa relativamente ao processo convencional de produção [Puntambekar *et al.* 1994].

3.2 História

A engenharia inversa é considerada uma tecnologia em constante evolução, a qual envolve um conjunto de diversificadas práticas tecnológicas que possuem conceitos multidisciplinares.

O design atrativo dos produtos está a tornar-se num aspeto de diferenciação importante ao nível competitivo no ambiente globalizado de planeamento e desenvolvimento de produtos. Assim, a engenharia inversa tem-se tornado uma tecnologia aliada a essa tendência, proporcionando transpor as ideias inseridas num modelo físico por artesãos do design, para um

ambiente computacional, onde possa ser futuramente reproduzido [Xiuzi e Hongzheng 2010]. Segundo Sokovic e Kopac [Sokovic e Kopac 2006], a engenharia inversa é um processo onde o principal objetivo é gerar um modelo conceitual, por exemplo, um arquivo matemático a partir de dados obtidos de um modelo físico. Este por sua vez pode ser um protótipo ou um componente de algum equipamento.

Giri *et al.* [Giri *et al.* 2003] afirmam que as técnicas de engenharia inversa são definidas como um processo de desenvolvimento de um conjunto de dados técnicos provenientes de uma geometria física. Estas aplicações tornaram-se uma parte das modernas práticas de manufatura.

Enquanto a engenharia convencional transforma conceitos e modelos em peças reais, a engenharia inversa transforma peças reais em conceitos [Varady *et al.* 1997]. O ciclo completo da engenharia inversa até o produto final é composto por cinco estágios: a medição tridimensional, a reconstrução da superfície, reprodução física de geometria, a verificação da qualidade da geometria e a interface para protótipo, tal como se pode verificar na Figura 3.2.

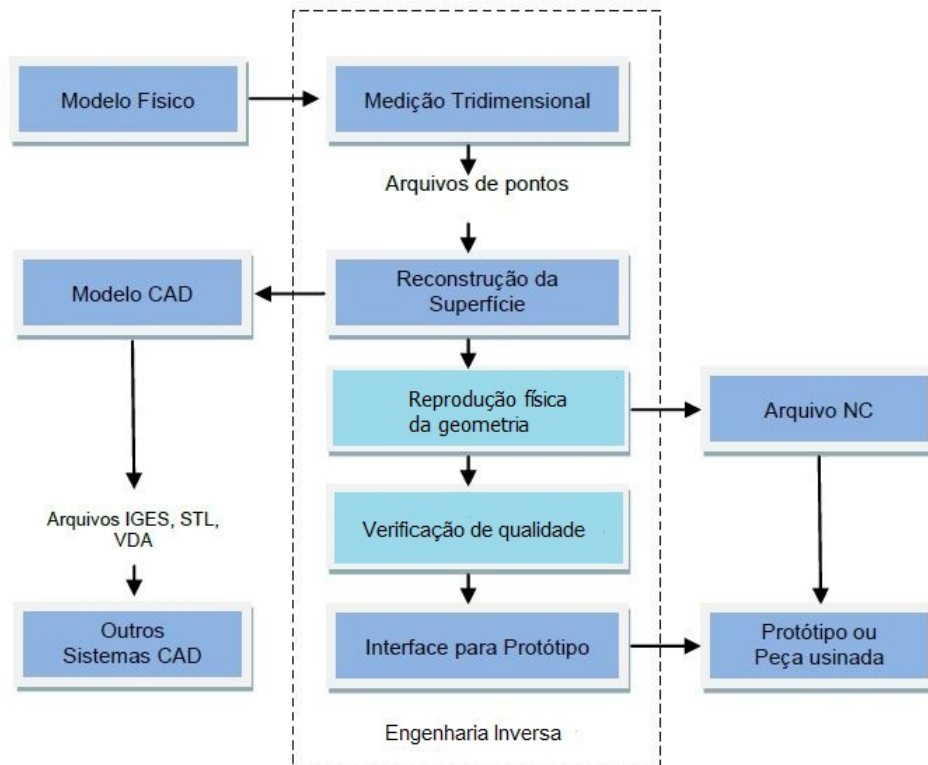


Figura 3.2: Esquema do processo de engenharia inversa [Dong-Fan e Ming-Lun 1996].

3.3 Conceitos gerais

Segundo os fundamentos definidos por Puntambekal *et al.* [Puntambekar *et al.* 1994], o processo de engenharia inversa não se define como sendo um processo mas como sendo uma sequência de duas etapas designadas por:

1. a digitalização do produto;

2. a criação do modelo CAD (*Computer Aided Design*) a partir dos dados digitalizados.

Entretanto, mais recentemente, Sokovic e Kopac [Sokovic e Kopac 2006], através das suas investigações, reclassificam o processo de engenharia inversa e chegaram à conclusão de que o processo de engenharia inversa não se limita apenas a duas etapas, mas sim a três fases principais, designando-as por:

1. digitalização dos dados tridimensionais;
2. ajuste dos dados e segmentação;
3. reconstrução tridimensional.

A aquisição dos dados geométricos é, invariavelmente, o primeiro passo do processo e dispõe de uma diversidade de equipamentos para este fim. Alguns investigadores tratam essa fase com o termo digitalização e os principais fatores críticos de sucesso neste contexto são evitar estragos no modelo físico e a velocidade de trabalho. Na aquisição de dados obtêm-se um conjunto de pontos, também classificados como nuvem de pontos, sendo que a distância entre estes é muito importante para se ter uma captação satisfatória da superfície, especialmente em regiões onde há uma mudança acentuada de curvatura. Segundo Souza [Souza e Ulbrich 2009], o conceito de digitalização abrange principalmente o aspeto de capturar informações de um modelo físico com base em pontos de um espaço tridimensional.

Alguns autores consideram a existência de uma fase intermédia entre a digitalização e o modelo CAD. Esta fase compreende a interpretação dos dados digitalizados e a segmentação das informações em secções para posterior encaminhamento para um programa CAD. Podem-se extrair estas informações por meio de cortes e medições feitas diretamente sobre a nuvem de pontos.

A terceira fase do processo recai sobre a criação do modelo CAD a partir dos dados digitalizados. Este é o passo crucial no processo de engenharia inversa, já que os dados são apresentados como uma significativa densidade de pontos no espaço. A geometria deve ser reconstruída sobre esses pontos, sendo uma etapa essencialmente manual, cuja interação e ajustes são efetuados pelo utilizador.

Muitos investigadores não acreditam que o sistema seja capaz de fazer todo o processo de reconstrução das geometrias automaticamente sem nenhuma intervenção manual para objetos de forma complexa. Para Tai e Huang [Tai e Huang 2000], cada região digitalizada representa uma característica individual que pode ser matematicamente representada por uma superfície individual no caso da reconstrução do modelo. No modelo CAD procede-se à reconstrução da superfície de uma região individual e combina-se estas superfícies num modelo completo que representa a peça ou protótipo digitalizado.

3.3.1 Aquisição de dados

A aquisição de dados pode ser feita das mais variadas formas, como mostrado na Figura 3.3. Existem vários métodos de com os quais se pode extrair dados de uma superfície, classificados em cinco categorias designadas por [Legge 1996]:

- métodos de digitalização com contacto;
- métodos de digitalização sem contacto;

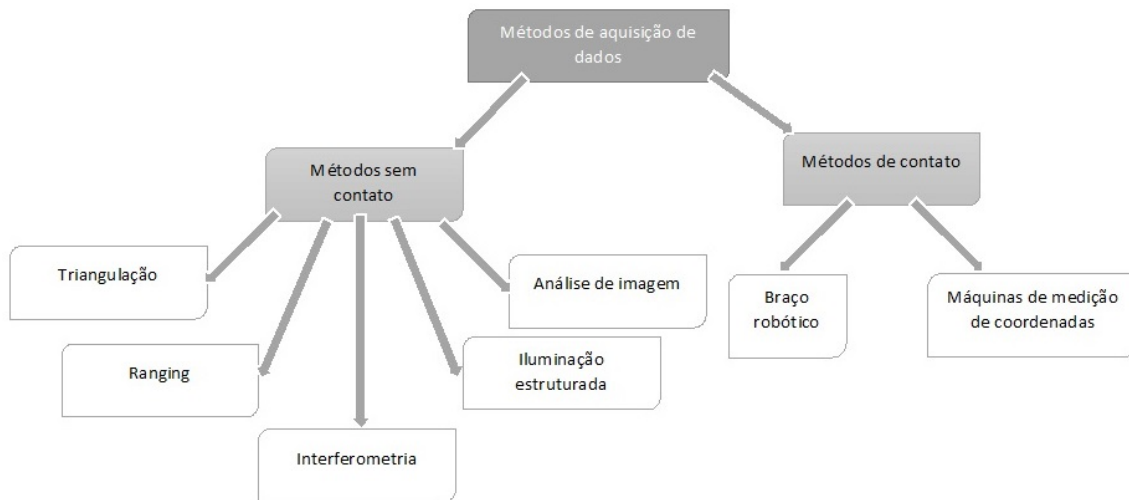


Figura 3.3: Diferentes métodos de aquisição de dados [Varady *et al.* 1997].

- métodos de medição manual;
- iluminação estruturada;
- *spot ranging*.

Quanto ao processo, são utilizados equipamentos compostos basicamente de sensores de alta definição que têm como função a captação, ponto a ponto, do formato de uma peça. Os sensores utilizados podem ser mecânicos (apalpadores), a *laser*, e óticos por luz branca ou por ondas magnéticas [Guerreiro 1999]. Ainda quanto ao aspeto tecnológico utilizado para capturar, existem diferentes sistemas que funcionam integrados ou não em *softwares* CAD, como as máquinas de medir por coordenadas (CMM) e digitalização a *laser* [Zhang *et al.* 2003].

Essencialmente, cada método utiliza algum mecanismo ou fenómeno de interação com a superfície ou volume do objeto de interesse. Em cada caso, deve ser realizada a análise mais apropriada para determinar as posições de pontos sobre o superfície do objeto a partir de leituras físicas obtida. Cada método tem vantagens e desvantagens que exigem que o sistema de aquisição de dados tenha que ser cuidadosamente selecionado para a funcionalidade de captura de forma desejado.

Os métodos com contacto representam outra abordagem popular. Nos métodos com contacto é necessário que o mecanismos de digitalização toque a superfície. Estes métodos têm limitações dependentes dos dispositivo de medição. Por exemplo, uma máquina de digitalização com 3 eixos pode ser equipada com uma sonda de medição e usado um sistema medidor com contacto. No entanto, para superfícies côncavas podem surgir algumas complicações aquando da digitalização. Existem muitos dispositivos robóticos diferentes que são utilizados para a medição com contacto. Estes métodos são os mais robustos (ou seja, menos ruído, mais precisos, *etc*), mas também são os mais lentos dentro dos métodos para a aquisição de dados.

O método mais popular é o uso de máquinas de medição de coordenadas (CMM). Estas máquinas podem ser programadas para seguir caminhos ao longo de uma superfície e recolher os dados, quase sem ruído. Xiong [Xiong 1990] apresenta uma discussão sobre a medição de

perfis e os erros na medição de contacto. Sahoo e Menq [Sahoo e Menq 1991] apresentam sistemas de contacto para deteção de superfícies complexas. Butler [Butler 1991] fornece uma comparação de métodos de contacto e seu desempenho.

Nos métodos sem contacto dividem-se em métodos acústicos e óticos. Nos métodos acústicos o som é refletido a partir de uma superfície, magnética, onde o campo magnético abrange toda a superfície. Métodos acústicos têm sido usados há décadas para medição de distâncias. O método consiste essencialmente numa fonte de som é refletida numa superfície e, em seguida, é determinada a distância entre o fonte e a superfície sabendo a velocidade do som.

O ruído acústico é muitas vezes um problema para determinar as localizações dos pontos focados. A ressonância magnética é utilizada em aplicações semelhantes às ultra-som quando as propriedades internas dos materiais permitem as medições. MRI (ressonância magnética) ativa os átomos do material a ser medido e, em seguida, mede a resposta. Watanabe e Yoneyama [Watanabe e Yoneyama 1992] utilizam um sensor ultra-sónico para o reconhecimento de objetos e Tsujimura *et al.* [Tsujimura *et al.* 1989] coloca o aparelho de ultra-som como manipulador.

Como métodos óticos temos a triangulação. Consiste num método ótico que utiliza a localização e os ângulos entre fontes de luz e os dispositivos de deteção de fotografias para deduzir a posição. Uma fonte de luz de alta energia encontra-se focada e projetada com um ângulo pré-especificado na superfície interesse.

Um dispositivo fotossensível, geralmente uma câmara de vídeo, deteta a reflexão da luz a partir da superfície e, em seguida, usando triangulação geométrica a partir do ângulo conhecido e distâncias determina as coordenadas do ponto. A posição do ponto da superfície é calculada em relação a um plano de referência. A fonte de luz e a câmara podem ser montadas numa plataforma móvel para permitir várias leituras da superfície. Estas leituras consistem, portanto, nas medições relativas da superfície de interesse. São usadas diferentes fontes de luz contudo os lasers são os mais comuns.

A precisão em triangulação é determinada pela resolução do dispositivo e a distância entre a superfície e o *scanner*. Motavalli e Bidanda [Motavalli e Bidanda 1991] apresentam a triangulação como uma estratégia de engenharia inversa usando o *laser*. Moss *et al.* [Moss *et al.* 1989] apresenta uma discussão detalhada do sistema de triangulação usando um *laser* clássico para capturar a forma da superfícies. É também apresentada uma discussão referente à precisão e aplicações do mesmo. A apresentação de dispositivos que se baseiam na triangulação para a medição de coordenadas é apresentado por Modjarrad [Modjarrad 1988].

A interferometria consiste na medição das distâncias em termos de comprimentos de onda. Este pode ser um método muito preciso dado que utilizam comprimentos de onda dentro do espectro da luz visível, que tem um comprimento de onda da ordem das centenas de nanómetros, enquanto que a maioria das aplicações de engenharia inversa efetua leituras de objetos com dimensões da ordem dos centímetros até aos metros.

Em princípio, outras partes do espectro eletromagnético também poderiam ser utilizados. Na prática, uma fonte de luz é usada para fornecer um feixe de luz monocromático para isso é necessário conhecer o feixe para comparação com a luz refletida. Moring *et al.* [Moring *et al.* 1989] descrevem um laser para localização de gamas com base na reflexão do feixe de luz.

A iluminação estruturada envolve padrões de projeção da luz sobre uma superfície de interesse e captura de uma imagem padrão resultante na luz refletida pela superfície. A imagem deve, então, ser analisada de forma a determinar as coordenadas dos pontos da

superfície. Um método popular de iluminação estruturada é a sombra de Moiré, onde uma interferência padrão é projetada sobre uma superfície produzindo linhas de contorno.

Estas linhas de contorno são capturadas na imagem e são analisadas para determinar as distâncias entre as linhas. Esta distância é proporcional à altura da superfície no ponto de interesse e assim as coordenadas de pontos da superfície podem ser deduzidas. Na iluminação estruturada pode-se adquirir grandes quantidades de dados com uma única imagem e a análise para determinar as posições dos dados pode-se tornar bastante complexa.

Segundo Will e Pennington [Will e Pennington 1972] as grelhas projetadas sobre a superfície dos objetos servem para destacar determinados locais que serviram de referência para a leitura das posições. Wang e Aggarwal [Wang e Aggarwal 1987] usam uma abordagem semelhante, mas usam listras de luz e várias imagens.

A análise de imagens é semelhante ao método de iluminação estruturada em que as grelhas são analisadas para determinar as coordenadas. No entanto, a análise não depende dos padrões projetados. Em vez disso, normalmente, são utilizadas para fornecer informações suficientes capazes de determinar a altura e a posição das coordenadas. Este método é muitas vezes referido como um método passivo uma vez que não é utilizada na iluminação estruturada. Os métodos ativos distinguem-se dos métodos passivos na medida em que é utilizada luz artificial para a aquisição de dados.

A correlação dos pares de imagens com os pontos de referência dentro das imagens são grandes dificuldades deste método e é a razão pela qual são mais frequentemente utilizados os métodos ativos. Uma outra abordagem da análise imagem tem a haver com os modelos de iluminação, onde uma imagem é comparada com um modelo 3-D. O modelo é modificado até que a combinação das imagens sombreadas represente a combinação das imagens reais do objeto de interesse.

Finalmente, os padrões de intensidade da luz nas imagens podem ser usados para determinar a informação de coordenadas. Existe literatura sobre esta temática e se seguida serão apresentados alguns artigos que abordam esta técnica. Nishihara [Nishihara 1984] usa em tempo real o algoritmo binocular estéreo para fazer medições de alcance rápido. Posdamer e Altschuler [Posdamer e Altschuler 1982] descrevem um método, para execução em tempo real, da medição dos dados de uma superfície usando métodos estéreo. Além disso, o trabalho de investigação de Woodham [Woodham 1978] sobre o sombreamento. Finalmente, uma contribuição de Rockwood e Winget [Rockwood e Winget 1997], numa edição especial, em que descrevem uma abordagem de minimização de energia de uma malha para coincidir com uma coleção de imagens 2-D.

Em suma, todos os métodos de medição devem interagir com a superfície ou material interno usando algum fenómeno, ou luz ou som, magnetismo ou contacto físico. A velocidade com que o fenómeno funciona bem como a velocidade do dispositivo sensor determina a velocidade de a aquisição de dados. A quantidade de análise necessária para computar os dados medidos e do arco de precisão são basicamente determinados pelo tipo de sensor selecionado.

3.3.2 Problemas de aquisição de dados

Existem problemas associados à aquisição de dados . Este são da natureza de:

- calibração;
- precisão;

- acessibilidade;
- oclusão;
- fixação;
- múltiplas vistas;
- ruído e dados incompletos;
- distribuições estatísticas da peças;
- acabamento de superfície.

A **calibração** é uma parte essencial na operação em dispositivo de medição de posição. Os erros sistemáticos de detecção podem ocorrer através de distorções da lente, da componente eletrônica das câmaras e de fontes semelhantes. Os dispositivos de medição devem ser calibrados de modo a

1. determinar com precisão os parâmetros, tais como pontos de câmara e orientações;
2. modelar e permitir leitura de dados a mais exata possível, evitando as fontes sistemáticas de erro.

A maioria dos trabalhos presentes na literatura apresentam alguma discussão do conceito de **precisão**. Esta varia para cada tipo de *scanners*, mas todos os métodos de aquisição dados requerem calibração precisa. *Scanners* óticos tipicamente dependem em grande parte da resolução do sistema de vídeo usado. A medição da distância da superfície e precisão das peças móveis no sistema de digitalização são parâmetros que contribuem para o erro total de medição.

A **acessibilidade** consiste num parâmetro associado à digitalização dos dados que em parte depende da configuração ou topologia do objeto. Isso geralmente requer vários testes, mas mesmo assim pode acarretar alguns dados impossíveis de serem adquiridos corretamente.

A **oclusão** consiste no bloqueio do meio de digitalização devido a sombreamento ou obstrução. Este é essencialmente um problema com *scanners* óticos. No entanto, os *scanners* que se baseiam nos métodos acústico e magnético também podem ter este problema. Proceder à digitalização múltipla pode ser uma abordagem para evitar este problema. Desta forma, é sugerido por Rioux [Rioux 1984] e Koivunen [Koivunen 1992] alguns métodos que permitem eliminar a oclusão em sistemas óticos, assim como a auto-oclusão. A oclusão pode também surgir devido a fixação das peças, uma vez que esta tem que ser fixada antes da digitalização. A eliminação de dados provenientes do dispositivo elétrico é difícil e muitas vezes requer várias vistas. Vários pontos de vista introduzem erros nos dados adquiridos por problemas de registo.

A eliminação do **ruído** nas amostras é uma questão difícil. O ruído pode ser introduzido numa infinidade de maneiras, de vibrações, reflexões especulares, *etc.* Existem muitas abordagens diferentes de filtragem que podem ser utilizadas. Uma questão importante é saber se se elimina o ruído antes, depois, ou durante a fase de construção do modelo. Existem momentos em que o ruído não deve ser eliminado de todo. A filtragem do ruído, porém, muitas vezes é um passo inevitável na engenharia inversa.

Quando os métodos de engenharia inversa tentam reproduzir uma determinada forma, a tolerância da distribuição da parte digitalizada deve ser tida em conta. Isto dá origem à necessidade de se efetuar vários testes/exames às peças e proceder ao cálculo da média dos dados resultantes. A suavidade nos revestimentos e o tipo de material pode afetar drasticamente o processo de aquisição de dados. Nos métodos de contacto ou nos métodos óticos o ruído vai ser tanto maior quanto mais irregular for a superfície. Revestimentos anti-reflexo podem atenuar o surgimento do ruído nos métodos óticos. Na digitalização de rostos humanos, o ruído é muitas vezes introduzido quando a luz reflete nos olhos ou óculos. O cabelo é um exemplo de uma superfície rugosa que apresenta problemas muito difíceis de digitalização.

3.3.3 Caracterização global das formas

Tal como já foi dito, o principal objetivo da engenharia inversa consiste em converter um conjunto de dados num modelo discreto suavizado. O conjunto de dados consiste tipicamente em valores de coordenadas (x, y, z) dos pontos medidos.

No que diz respeito à organização dos dados, pode-se classificar o ponto definido como dispersado ou regular. No primeiro caso, os pontos surgem de forma aleatória ou amostragem pontual manual. No segundo caso, as medições podem ter lugar ao longo dos contornos ou de uma sequência de planos paralelos. Isto resulta numa sequência de linhas digitalizadas, onde para cada linha de leitura existe uma sequência de pontos. Alternativamente, a medição pode fornecer regularmente pontos organizados em duas dimensões.

Outra questão importante é a informação da vizinhança. Por exemplo, uma grelha regular fornece implicitamente informações sobre a vizinhança, o que dá implicitamente conectividade, exceto nos intervalos de descontinuidades. Numa medição dispersa, usualmente definem-se as informações da vizinhança como dados ausentes, exceto quando se aplica uma triangulação específica que associe estes pontos.

A otimização de malha e análise de multi-resolução de malhas triangulares podem ser encontrados nos trabalhos desenvolvidos por Schroeder [Schroeder *et al.* 1992], Hoppe *et al.* [Hoppe *et al.* 1993], Rossignac e Borrel [Rossignac e Borrel 1993] e Eck [Eck *et al.* 1995], entre outros.

No trabalho de Veron e Leon [Veron e Leon 1997] é descrito um algoritmo para a modificação dos elementos usados nas zonas de erro. Guo [Guo 1997] tentou aproximar elementos usando formas 3-D para capturar a estrutura topológica antes de proceder à montagem de superfície.

A coleção de digitalizações planas e/ou rotacionais do objeto, sem impor conectividade ou continuidade entre elementos da vizinhança pode ser uma alternativa para a obtenção do modelo. Nesta situação, pequenos espaços entre os elementos não são importantes, assumindo que a maior parte dos pontos estão cobertos na totalidade e a informação fornecida referente à vizinhança não é necessária para outros cálculos. A variedade de representações da superfície, como se pode verificar através da figura 3.4, é uma temática presente no trabalho desenvolvido por Bolle e Vemuri em 1991 [Bolle e Vermuri 1991].

Na maioria das aplicações de CAD/CAM (*Computer-aided manufacturing*), as conectividades e continuidade da estrutura são muito importantes. Por exemplo, muitos métodos de manufatura dependem fortemente do tipo de superfície, o que requer uma representação perfeita do conjunto de dados relacionado. Espaços maiores com uma determinada margem de tolerância também podem causar problemas uma vez que as pequenas áreas de material supérfluo podem permanecer nas superfícies do objeto maquinado. Embora idealmente o

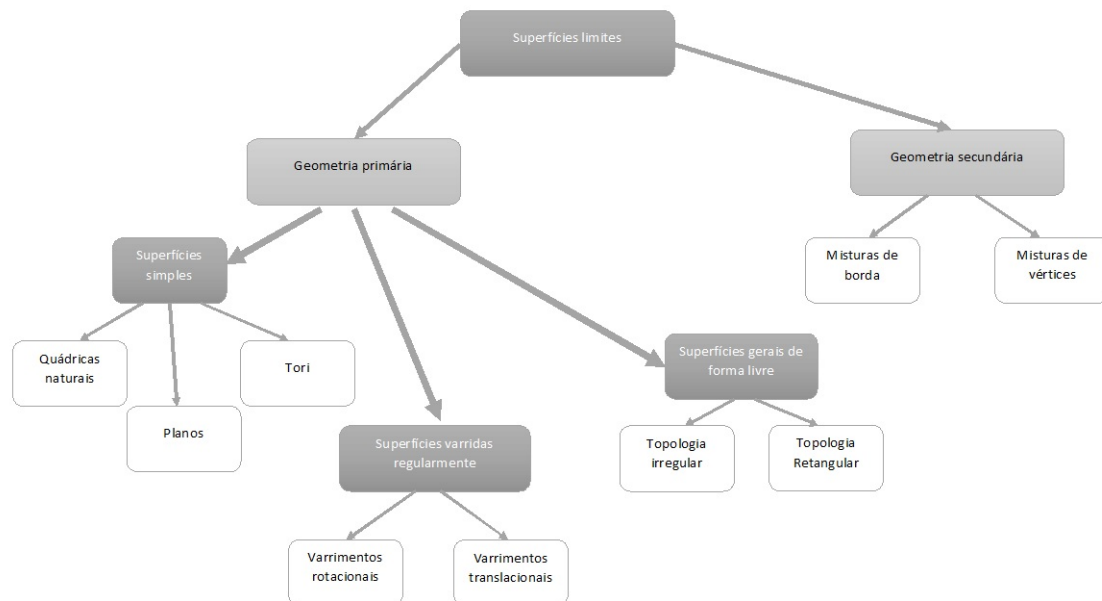


Figura 3.4: Hierarquia e classificação das superfícies.

ótimo consiste ter um sistema de engenharia inversa totalmente automático que pode fazer as decisões e classificações sem qualquer influência do usuário, isto nem sempre é possível devido à complexidade das geometrias. Sendo o utilizador responsável por resolver um problema de engenharia inversa manualmente, torna-se mais fácil para ele reconhecer se um objeto tem faces planas ou não.

Para o computador este tipo de informação é crucial, uma vez que irá determinar o modelo final a ser construído e têm um efeito significativo sobre a eficiência dos cálculos. Numa primeira fase a informação necessária passa por se especificar que tipo de elementos se pode usar na caracterização da superfície do objeto global e fornecer determinados valores limite. Note-se que se podem extrair tipos de superfícies mais simples e mais confiáveis comparadas com os tipos mais complexos.

Pode-se assim dizer que os objetos são delimitados por superfícies primárias ou funcionais. As superfícies primárias podem ser encontradas ao longo das arestas ou pode haver superfícies secundárias ou de mistura que consigam proporcionar uma transição suave entre elas.

Os tipos de superfícies padrão usadas em CAD/CAM vão desde as superfícies simples, que têm duas representações: implícita e paramétrica, e depois de uma forma mais geral usando as superfícies paramétricas por partes. A vantagem das superfícies simples, foca-se essencialmente na sua representação simples uma vez que necessitam de poucos parâmetros geométricos significativos. Isso faz com que a segmentação e a montagem da superfície sejam relativamente fácil.

Na vertente de engenharia mecânica é preferível considerar a subclasse de quadráticas naturais, cilindros, esferas e cones. Além disso estas são especificadas pelos coeficientes algébricos sem direto significado geométrico, tornando-as mais difíceis de segmentar.

Considerando-se os elementos mais gerais da superfície de forma livre, vale a pena também considerar especificamente as leituras planas e rotacionais, caracterizadas por algumas curvas

de perfil e uma direção de leitura ou um eixo de rotação, respectivamente.

A classe de superfícies de misturas têm que desempenhar um papel especial na ligação geometria primária. As superfícies de misturas são importantes não só a partir de um ponto de vista funcional, mas também porque estas são usadas para o fecho de lacunas entre elementos de superfícies vizinhas, proporcionando, assim, a coerência global do modelo geométrico.

3.4 Aplicações

As aplicações da engenharia inversa na indústria estão relacionadas com a criação de novos produtos, cópia de modelos existentes, correção e melhoria de modelos, inspeção e documentação de produtos. Puntambekar *et al.* [Puntambekar *et al.* 1994] descrevem com maiores detalhes a aplicação de cada um deles:

1. **Criação de um novo produto:** Ocorre quando a criação de um modelo se inicia a partir de um objeto físico existente. Na indústria, é comum designers criarem modelos físicos baseados em funcionalidades e necessidades que precisam ser digitalizadas e posteriormente reconstruí-los. Criando então algumas partes complexas, pode-se reconstruir um modelo computacional através dos mecanismos de engenharia inversa;
2. **Cópia de um modelo existente:** Em alguns casos, não existem desenhos ou quaisquer informações sobre um modelo. Por exemplo, na indústria automóvel, alguns modelos de automóveis com mais de trinta anos tiveram componentes construídos artesanalmente, com pouca ou até mesmo sem nenhuma documentação computacional, e continuam ser produzidas peças até hoje. Um incremento na produção pode exigir um novo conjunto de componentes idêntico ao original. A engenharia inversa pode reconstruir todas as características do molde, auxiliando na confecção do novo componente por meio da utilização de seus processos;
3. **Correção de um modelo danificado:** Se alguma parte de um modelo se encontra danificada, a reconstrução deste não deve conter os erros geométricos. Usando ainda o exemplo dos componentes antigos, com o passar do tempo os moldes sofrem desgaste ou até mesmo quebras e avarias. O emprego da engenharia inversa combinado com técnicas de reconstrução em sistemas computacionais permitem a produção do componente substituto;
4. **Melhorias das formas de um modelo:** O designer pode finalizar o conceito de um produto baseado em funcionalidades e aspetos estéticos, e então utilizar materiais leves como madeira ou resinas para fabricá-los. Na indústria automóvel utiliza-se o barro. Neste processo, o designer não precisa despende tempo em criar o modelo com alta fidelidade dimensional, pois este pode ser editado na reconstrução do modelo CAD. Contudo, os sistemas de engenharia inversa devem ser capazes de deduzir algumas características tais como simetria, paralelismo e perpendicularidade;
5. **Inspeção de um produto:** Digitalizar o modelo possibilita a comparação entre o modelo computacional e o modelo físico. Atualmente, existem produtos difíceis de inspecionar pelos métodos convencionais. Por exemplo, um banco de espuma não pode ser tocado, pois a espuma deformaria ocasionando inconsistências dimensionais. Então faz-se uma inspeção sem contacto garantindo que as tolerâncias sejam controladas.

Nesta etapa, o software de CAI (*Computer-Aided Inspection*), recebe as informações geométricas do CAD e as informações que representam o produto final, obtidas por equipamentos de aquisição. O CAI compara os erros geométricos entre o objeto real e o projeto CAD e apresenta relatórios, incluindo as regiões com os desvios geométricos, considerando as tolerâncias especificadas no projeto;

6. **Documentação através de desenhos de engenharia:** Muitas vezes um produto passa pela engenharia inversa para ser documentado. Isso ocorre porque a informação atual (ou simplesmente necessária) foi perdida, está desatualizada ou é imprecisa. Frequentemente, os dados técnicos necessários para manter e reparar equipamentos que se encontram inacabados. Este leque de adequação das informações de design é um problema global em todas as partes do mundo. A engenharia inversa pode gerar esta documentação.

3.5 Integração com otimização topológica

Tradicionalmente, na obtenção dos modelos dos objetos mecânicos, a geometria CAD é essencialmente definida pela orientação das curvas e/ou superfícies de contorno/fronteira. Por exemplo, o aspecto mais importante até agora no método de otimização topológica tem sido a minimização da flexibilidade, ou seja maximização da rigidez, de uma estrutura sujeita a uma restrição no volume da estrutura. Por outro lado, a descrição do modelo por meio de curvas e superfícies de contorno permite ter em conta os detalhes mais pequenos do modelo

Para este tipo de situações integra-se o método de distribuição de material e aproxima-se as variações de contorno através de uma ferramenta de projeto, empregando as técnicas de otimização topológica como um pré-processador na otimização da forma de fronteira.

A possibilidade de gerar a topologia ótima de um objeto pode ser utilizada para selecionar o formato da geometria da proposta inicial do objeto. A integração direta da otimização topológica com os métodos de design de forma são dificultados pelo facto de que a descrição de uma estrutura por uma função densidade é diferente de uma descrição por curvas ou superfícies de contorno. Num sistema CAD com sistema de otimização de forma integrada, talvez seja natural que a integração se baseie no design da forma inicial para a fronteira, técnica que usa as variações diretamente no topo de uma imagem da estrutura topologicamente otimizada, permitindo a interação com o desenhador. Isso também cria um design em que a criatividade do designer é colocada em uso para a geração de uma boa forma inicial a partir dos resultados de otimização de topologia.

Qualquer integração dos dois métodos de projeto é simplificado pelo facto de que a integração pode ser baseada num gerador comum de malha do método de elementos finitos (MEF) e um módulo de análise de *input-output* CAD comum. Os requisitos relativos ao gerador de malha são regidos principalmente pela técnica de variação de fronteira, como as distorções de malha e não-malha para esse problema pode se tornar crítico devido às alterações de forma do domínio de análise.

Note-se também que a abordagem básica de um projeto de topologia é de igual complexidade para dois e três dimensões na estruturas, mas que a descrição da geometria em forma de limite é muito mais complicado em três dimensões.

Assim pretende-se estudar a aplicação das metodologias abordadas na engenharia inversa para reconstrução de uma geometria como ferramenta para o pós-processamento dos resultados obtidos na otimização topológica.

Parte II

Metodologia e resultados

Capítulo 4

Metodologia

Introduz-se a metodologia desenvolvida e de seguida apresenta-se os problemas utilizados para aplicação da metodologia.

O trabalho desenvolvido e descrito neste documento encontra-se dividido em 4 principais fases de trabalho

- a criação de um programa de leitura e manipulação de dados vindos dos ficheiros de dados/resultados da otimização topológica (no Matlab[®]);
- introdução e manipulação dos dados obtidos de um programa no Matlab[®] no programa de CAD 3-D (CATIA v5[®]);
- avaliação dos resultados obtidos através da comparação com os dados iniciais;
- estudo de sensibilidade da influência dos parâmetros de estabilidade da otimização topológica na qualidade da solução final.

Assim como ilustrado na Figura 4.1, neste capítulo será apresentada a metodologia de trabalho e expostas as opções tomadas.

Os dados dos problemas usados para aplicação da metodologia foram, mesmo antes da manipulação dos resultados obtidos da otimização topológica por meio de um programa desenvolvido no Matlab[®], gerados através do programa GiD[®] onde se define o domínio do problema e as condições de fronteira, restrições e carregamento, e ao qual se associa uma malha de elementos finitos. De seguida, tendo em conta os dados estabelecidos anteriormente, estes são guardados em ficheiros *data*, ficheiros estes que serão o *input* de um programa de otimização topológica [Oliveira 2013]. De seguida procede-se à manipulação destes dados através de um programa criado no Matlab[®].

4.1 Programa no Matlab[®]: manipulação dos ficheiros

O primeiro objetivo do trabalho concentra-se na geração de nuvens de pontos que serão posteriormente importadas para o programa CATIA v5[®]. Este processo de seleção de pontos surge de um programa criado na plataforma Matlab[®], como ilustrado na Figura 4.2. Neste programa faz-se primeiramente a leitura dos ficheiros de *output* do programa de otimização

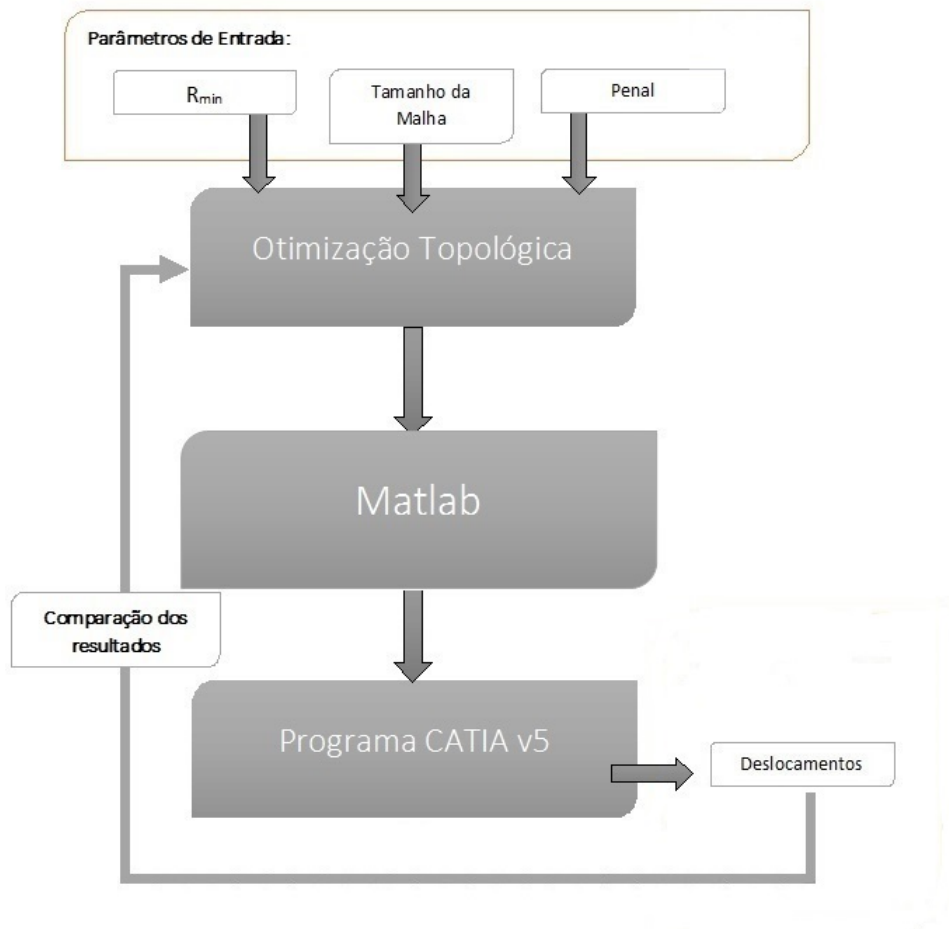


Figura 4.1: Fluxograma de todas as etapas da metodologia desenvolvida neste trabalho.

topológica, mais concretamente dos ficheiros de malha e do ficheiro com a lista de densidade associada a cada elemento, e posteriormente procede-se à escolha dos pontos que serão utilizado na nuvem de pontos a importar para o programa de CAD CATIA v5[®]. No caso do ficheiro de malha, estão presentes dois tipos de informação: (i) as coordenadas de cada nó e (ii) a tabela de conectividades (elemento/nós). Dada a leitura dos ficheiros, os dados são depois armazenados em matrizes.

Depois de se ler e guardar os dados dos ficheiros em matrizes, procede-se à manipulação dos dados retirados da leitura dos ficheiros.

Para esta manipulação existem duas abordagens aplicadas no programa. Estas são:

1. escolha de elementos pelo seu valor de densidade;
2. nós limite de material/não-material;

Na primeira abordagem, o programa, através das coordenadas dos nós e da sua conectividade aos elementos, calcula as coordenadas do centróide de cada elemento. Para isso é feita uma análise da tabela das conectividades e das posições de cada nó e de seguida calcula-se as coordenadas do centróide do elemento. Estes valores são guardados de seguida numa matriz

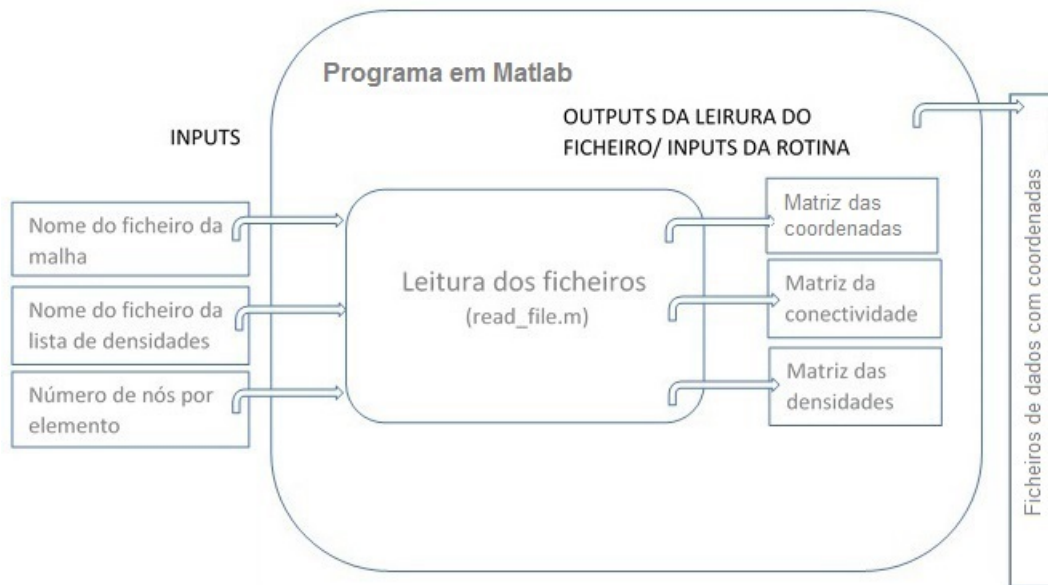


Figura 4.2: Ilustração do funcionamento do programa de manipulação de dados desenvolvido no trabalho.

juntamente com o valor de densidade de cada elemento. De seguida seleccionam-se os elementos de acordo com o seu valor de densidade ou intervalo de valores de densidade. Gera-se então um ficheiro de dados onde ficam guardadas apenas as coordenadas dos elementos que respeitem a restrição.

Relativamente à segunda abordagem para o tratamento de dados, esta consiste na seleção dos nós limite de material, ou seja, os nós que se encontrem na fronteira entre material e vazio, depois, após a obtenção da lista de nós que respondem a esta restrição, procede-se à leitura da matriz das coordenadas de cada nó e é então gerado um ficheiro dados com as coordenadas dos nós que se encontram no limite do material/vazio. Após a manipulação dos dados prossegue-se para a construção da geometria.

4.2 Metodologia usada no programa CAD 3-D

Após todo o processo explicado na secção anterior, da geração das nuvens de pontos, procede-se à importação destes dados para o programa CATIA v5[®]. Aqui existe uma sequência de comandos a seguir para se gerar um objeto através da disposição dos pontos no espaço (nuvem de pontos).

Assim, como mostrado através da Figura 4.2, esta sequência de comandos para o processo de conversão da nuvem de pontos num sólido passa pelos seguintes passos

Para o tratamento da nuvem de pontos tem-se que seleccionar o módulo *Digitized Shape Editor* presente na *Toolbox Shape*. Aqui apresenta-se a maioria dos comandos necessários para a construção de uma geometria, e esses são:

1. *Import*, encarregue pela importação dos dados do ficheiro tratado no Matlab;
2. *Mesh Creation*, a partir de onde se gera uma malha de triângulos representativa

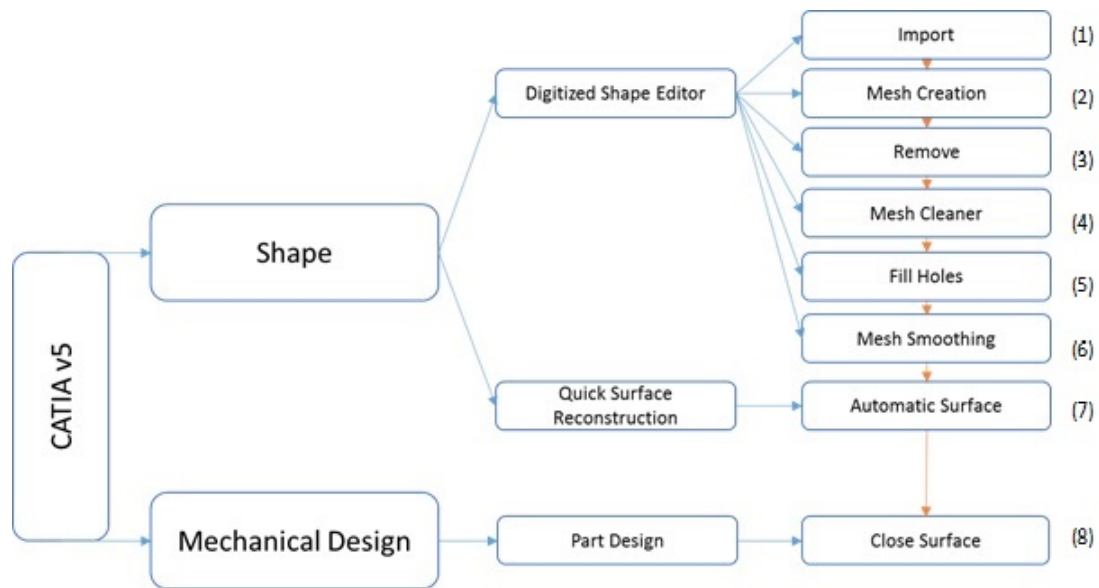


Figura 4.3: Ilustração da sequência de comandos necessários para a reconstrução de geometria no programa CAD CATIA V5.

da geometria do objeto. Esta iguala-se à representação por estereolitografia (ficheiros STL), e depois vai permitir, por aproximação, gerar uma superfície;

3. *Remove*, utilizado para a remoção de pontos ou elementos que estejam a criar conflitos;
4. *Mesh Cleaner*, a partir onde pode-se analisar a malha de triângulos, podendo detetar zonas de falhas na mesma;
5. *Fill Holes*, que ajuda no fecho de possíveis orifícios que possam existir ao longo da malha de triângulos que foi gerada no início deste processo;
6. *Mesh Smoothing*, comando que permite uma suavização da superfície em zonas de muita irregularidade.

Depois da superfície estar completamente fechada e sem zonas de falha que possam originar problemas, prossegue-se para o módulo de *Quick Surface Reconstruction*, onde, utilizando o comando *Automatic Surface*, permite gerar uma superfície fechada que reflete os resultados obtidos na otimização topológica e que servirá para posteriormente originar o sólido. Este sólido surgirá através do comando *Close Surface* presente no módulo *Part Design* da ferramenta *Mechanical Design*.

Após a obtenção da geometria final efetua-se uma análise estática da solução final. Nesta análise consideram-se os carregamentos e restrições utilizados aquando da geração do problema no programa GiD[®] e avaliam-se os deslocamentos que a geometria sofre comparativamente com os deslocamentos apresentados nos resultados da otimização topológica.

Capítulo 5

Resultados e validação

Descrevem-se os exemplos usados para a avaliação e validação da metodologia desenvolvida neste trabalho. Apresentam-se primeiramente a geração dos problemas, seguindo-se todo o processo até à obtenção da geometria final e por fim faz-se a avaliação dos resultados recorrendo a um estudo de sensibilidade.

5.1 Problemas de validação

Nas secções anteriores, para além de uma introdução dos conceitos inerentes ao propósito deste documento, foi também apresentada a metodologia adotada.

Apresentam-se dois problemas que têm o propósito de avaliar e validar a metodologia. Esta consiste na conversão dos resultados obtidos na otimização em dados serem tratados aplicando-se a metodologia usada na engenharia inversa para a obtenção de uma geometria.

Os problemas utilizados são um problema bidimensional, uma viga bi-apoiada, e um tri-dimensional, um bloco tri-dimensional. Para cada problema serão apresentadas as diferentes fases de todo o processo desenvolvido. Estas consistem progressivamente em

1. modelação do problema;
2. geração da nuvem de pontos;
3. pós-processamento em CAD;
4. simulação do modelo final;
5. estudo de sensibilidade.

5.1.1 Viga bi-apoiada (2D)

O problema bidimensional é uma viga bi-apoiada, como ilustrado na Figura 5.1. Tal como é possível observar na Figura 5.1, a estrutura tem que ser capaz de suportar um carregamento F . Utilizando apenas metade do domínio, são também apresentadas as condições de fronteira.

5.1.1.1 Modelação do problema

Para a resolução deste exemplo tomaram-se se como dados os seguintes: a viga tem uma dimensão total de 6×1 m com um carregamento central. O carregamento aplicado é de $F = 10\text{kN}$, o material tem um módulo de Young de 200 GPa e um coeficiente de Poisson de 0,3. Tal como já foi indicado na introdução do problema apenas se usou metade do domínio para todas as etapas seguintes.

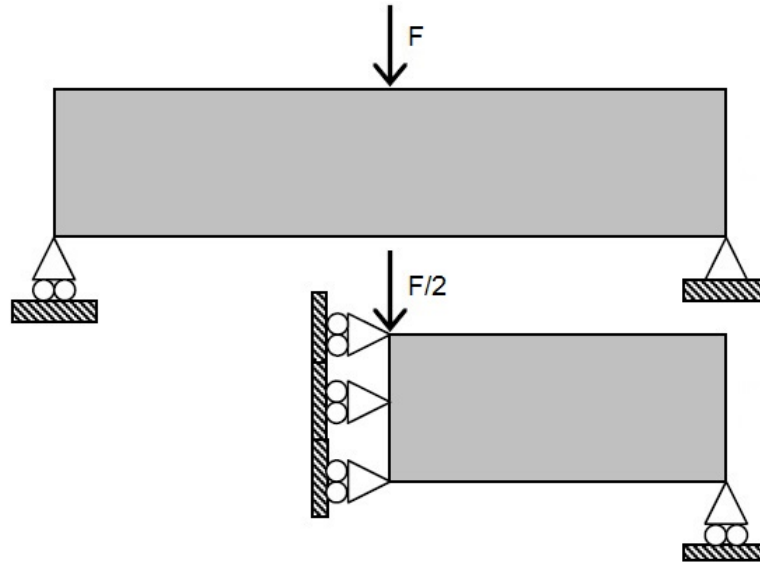


Figura 5.1: Viga bi-apoiada.

Para a geração da malha utilizaram-se elementos finitos quadriláteros com 4 nós e dividiu-se o domínio em 1200 elementos, 60 elementos segundo Ox e 20 elementos segundo Oy , tal como se pode ver através da Figura 5.2. Para o processo de otimização topológica foram utilizadas 100 iterações e uma fração de volume de 50%. A este problema foi aplicado um coeficiente de penalidade de $p = 3$.

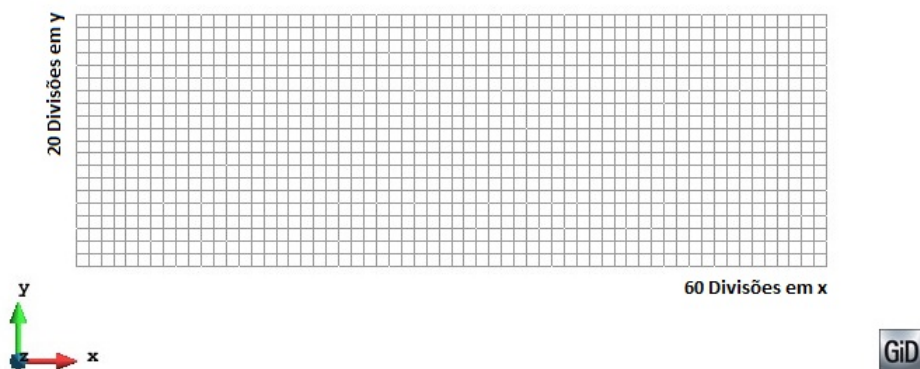


Figura 5.2: Viga bi-apoiada: ilustração da malha aplicado no problema.

O método de otimização aplicado foi o MMA (Método das Assíptotas Móveis) e usou-se um filtro de sensibilidades que considera apenas os elementos que estão diretamente ligados ao elemento sobre o qual o filtro atua com um valor de raio relativo de $R_f = 1,25^1$. Na Figura 5.3 pode-se observar o resultado da viga bi-apoiada após a aplicação da otimização topológica.



Figura 5.3: Viga bi-apoiada: ilustração do resultado de otimização topológica aplicado no problema.

5.1.1.2 Geração da nuvem de pontos

Na geração da nuvem de pontos a partir dos resultados obtidos da otimização topológica, tomou-se em consideração apenas a metodologia em que se calcula as coordenadas do ponto central do elemento e associando o valor de densidade do elemento escolhe-se um intervalo de valores. Para este caso de estudo usou-se um intervalo de valores de densidade entre $[0,65;1]$. Este intervalo foi escolhido aleatoriamente considerando uma gama que incorpora elementos que também estejam na transição do material/vazio.

5.1.1.3 Pós-processamento em CAD

Nesta etapa do trabalho procedeu-se numa primeira fase à importação dos dados dos ficheiros gerados no programa Matlab[®] e o resultado que se obteve encontra-se ilustrado através da Figura 5.4.



Figura 5.4: Viga bi-apoiada: nuvem de pontos no intervalo de densidades de $[0,65;1]$.

Posteriormente a esta fase prosseguiu-se para a criação de uma nova malha, ilustrada na Figura 5.5, que depois vai permitir gerar a superfície representada através da Figura 5.6.

¹O R_f corresponde ao raio do filtro de sensibilidades



Figura 5.5: Viga bi-apoiada: nova malha gerada a partir dos pontos no intervalo de densidades de $[0,65;1]$.

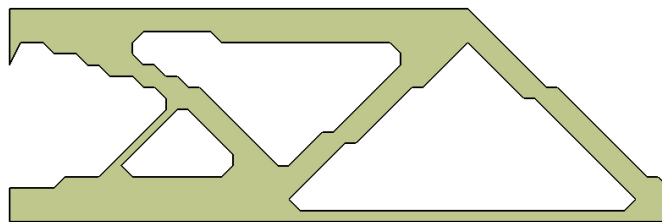


Figura 5.6: Viga bi-apoiada: Superfície gerada para pontos no intervalo de densidades de $[0,65;1]$.

Após a obtenção da geometria final, procedeu-se ao cálculo da fração de volume face aos dados iniciais gerados quando da geração do problema. Após todo o processo de construção da geometria obteve-se uma fração de volume de 33,53%, uma diferença de mais de 15% comparativamente com o imposto inicialmente. Isto deve-se em parte do facto de se estar a usar coordenadas centrais do elemento, porque ao utilizar-se coordenadas centrais ocorre logo uma redução nas dimensões da geometria. Conclui-se também que a reconstrução da geometria não foi a melhor dado que ainda permanecem algumas irregularidades geométricas na solução final.

5.1.1.4 Simulação do modelo final

Para a simulação dos resultados obtidos no pós-processamento em CAD foi utilizado com elemento finito triangular linear. Era necessário estudar a convergência da malha para garantir que não se utiliza um tamanho de malha muito pequeno nem um tamanho de malha demasiado grande. Então, para o efeito, obteve-se os seguintes dados presentes na Tabela 5.1. Através da Figura 5.7 consegue-se perceber que a partir do tamanho de malha com 7507 elementos o valor de deslocamento máximo tende a estabilizar e por isso utiliza-se este valor para se efetuar a análise estática da solução final. Assim para os cálculos foi utilizado um tamanho de malha de 7507 elementos, isto por que a diminuição para tamanhos maiores só iria aumentar o tempo computacional e o ganho com essa diminuição nos cálculos não era relevante. Desta forma foi feita uma análise estática da geometria para perceber se esta continua a responder ao que lhe tinha sido solicitado através da otimização topológica.

Então, tal como no modelo que se utilizou para a otimização topológica, para a simulação numérica foram aplicados os apoios e carregamento, os mesmo que usados inicialmente. Os dados que se obtiveram encontram-se apresentados através da Figuras 5.8.

Tabela 5.1: Relação do tamanho da malha com o valor deslocamento máximo.

Tamanho da malha	Deslocamento máximo
159	0,021
292	0,0195
915	0,0181
2736	0,0180
7507	0,0178
15905	0,0175
60930	0,0172

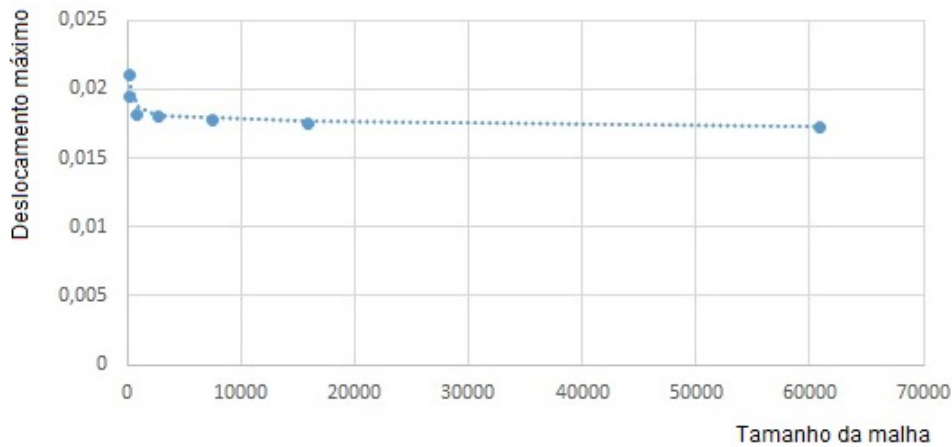


Figura 5.7: Ilustração da relação do tamanho da malha com o valor deslocamento máximo para o problema da viga bi-apoiada.

Para ser possível avaliar estes resultados é necessário comparar os mesmos com os dados de deslocamento obtidos inicialmente. Na Figura 5.9 é apresentada a distribuição dos deslocamentos ao longo do problema. Desta forma pode-se concluir que a geometria final, após todo o processo de construção da geometria, sofre mais 70% de deslocamento que a geometria inicial, isto em parte pode ser devido ao facto de a geometria ter menos 15% de material que o esperado.

5.1.1.5 Estudo de sensibilidade

No estudo de sensibilidade estuda-se a influência dos parâmetros de estabilidade do método de otimização topológica e da seleção de dados no programa de manipulação de dados. Este estudo é apresentado através das Figura 5.10 à Figura 5.13. Assim foi feita uma variação do valor de raio relativo no filtro de sensibilidades e utilizada uma gama de valores mais restrita e uma mais ampla na seleção de dados. Através da Tabela 5.2 pode-se observar quais as alterações nos parâmetros. Após da análise do dados obtidos, e representados na Tabela 5.2,

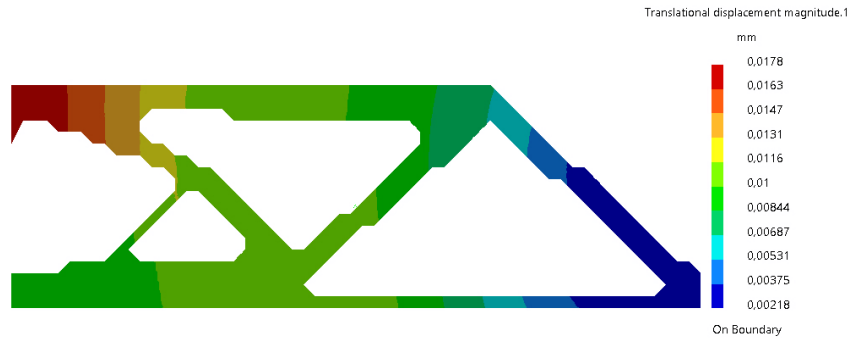


Figura 5.8: Resultados de simulação: Distribuição dos deslocamentos.



Figura 5.9: Ilustração da distribuição aquando da aplicação do método de otimização topológica.

Tabela 5.2: Representação da variação dos parâmetros para cada caso.

Casos de estudo	f_f (%)	Deslocamento máximo (mm)
Viga	33,5	0,0178
Viga $R_f = 2, 5$	34,7	0,0395
Viga $R_f = 5$	34,8	0,0176
Viga $\rho \in [0, 5; 1]$	38,8	0,0125
Viga $\rho \in [0, 95; 1]$	25,0	0,035

as variações impostas no problema são notórias na geometria final. Assim conclui-se que esta metodologia é sensível à escolha dos parâmetros. O caso em que consideramos um gama de valores mais ampla, ou seja $\rho \in [0, 5; 1]$, este é o único caso que se aproxima mais dos valores obtidos inicialmente do método de otimização topológica.

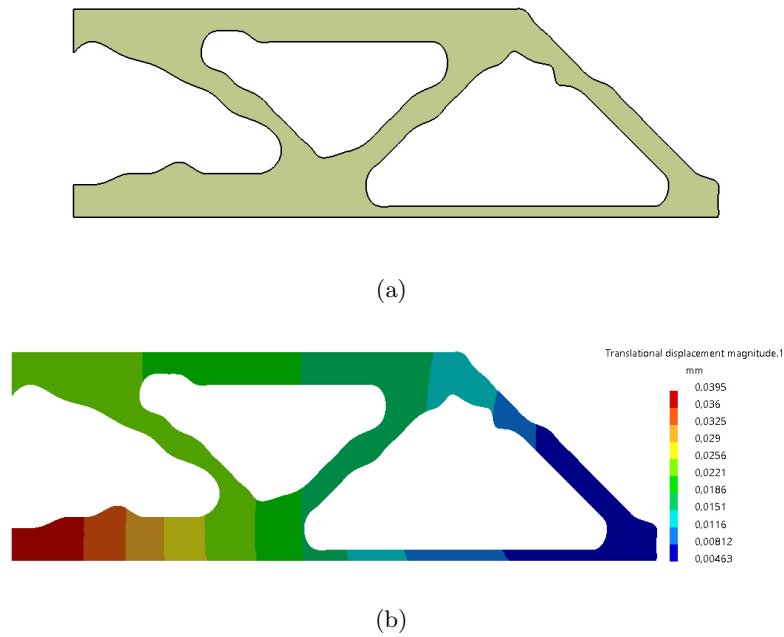


Figura 5.10: Admitindo um raio relativo de $R_f = 2,5$: a) geometria final da viga e b) distribuição dos deslocamentos na geometria final da viga.

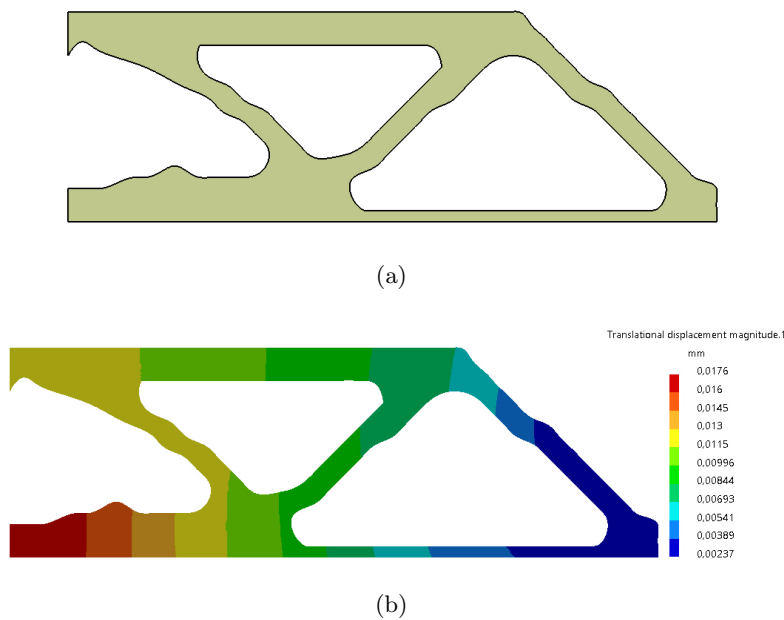


Figura 5.11: Admitindo um raio relativo de $R_f = 5$: a) geometria final da viga e b) distribuição dos deslocamentos na geometria final da viga.

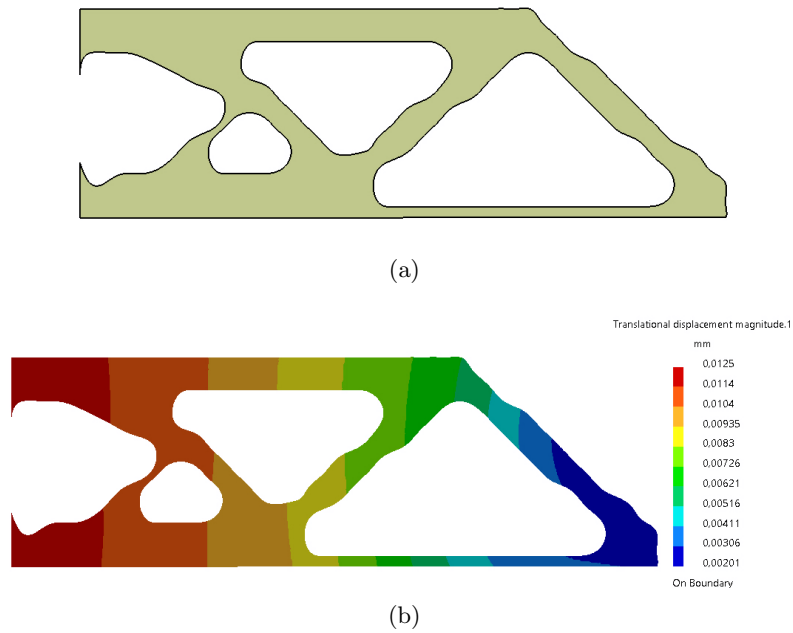


Figura 5.12: Gama ampla de valores [0,5;1]: a) geometria final da viga e b) distribuição dos deslocamentos na geometria final da viga.

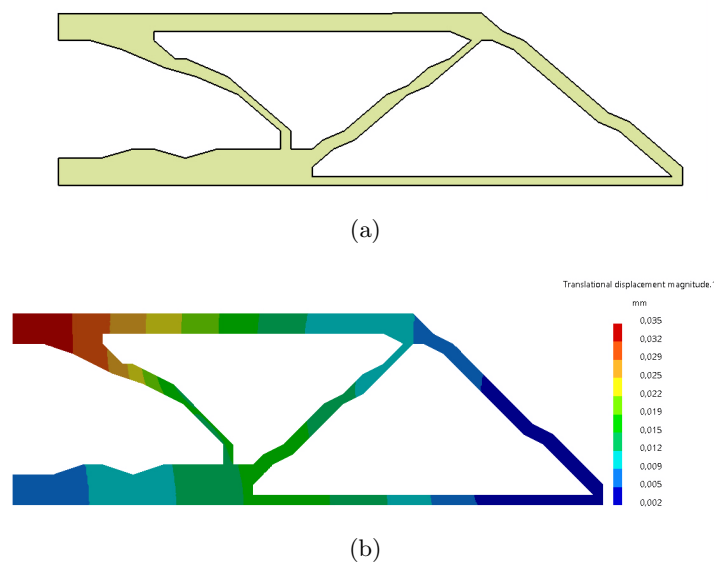


Figura 5.13: Gama restrita de valores [0,95;1]: a) geometria final da viga e b) distribuição dos deslocamentos na geometria final da viga.

5.1.2 Bloco tri-dimensional

O problema tri-dimensional será então um bloco. Tal como é possível visualizar através da Figura 5.14, o estudo pretende que este seja capaz de suportar um carregamento F aplicado sobre uma área. São também apresentadas as condições de fronteira.

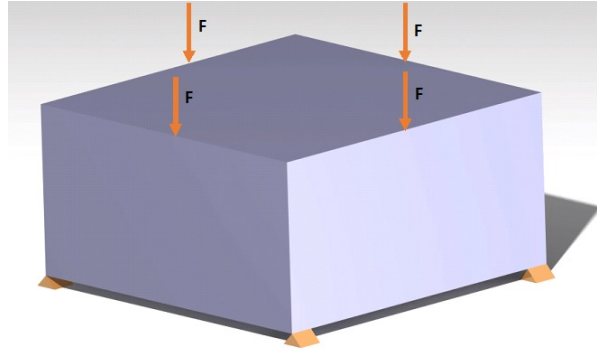


Figura 5.14: Bloco tridimensional: geometria e carregamentos.

5.1.2.1 Modelação do problema

Para a resolução deste exemplo tomaram-se como dados os seguintes: o bloco tem uma dimensão total de $0.96 \times 0.96 \times 0.48 \text{ m}^3$, sofre carregamentos sobre as arestas superiores, como demonstrado na figura 5.14, com um valor de F . O carregamento de $F = 5040 \text{ N}$ e uma $A = 0,41 \times 10^{-2} \text{ m}^2$, o material tem um módulo de Young de 200 GPa e um coeficiente de Poisson de $0,3$.

Para a geração da malha utilizaram-se elementos finitos hexaédricos lineares com 8 nós e dividiu-se o domínio em 13500 elementos, 30 elementos segundo Ox e 30 elementos segundo Oy e 15 elementos segundo Oz , tal como se pode ver através da Figura 5.15.

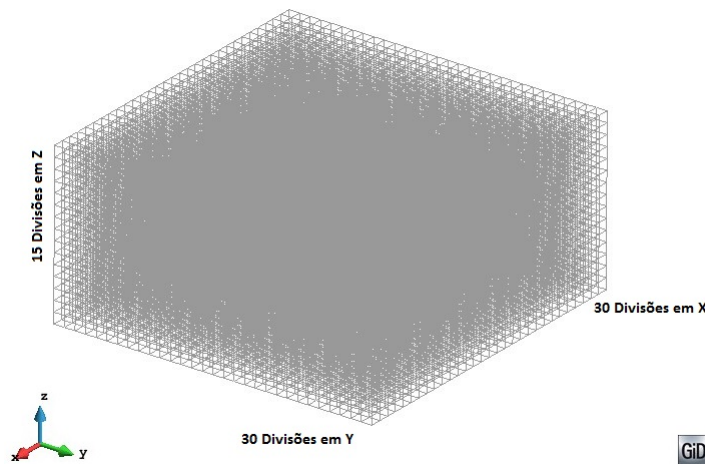


Figura 5.15: Bloco tridimensional: ilustração da malha aplicada no problema.

Para o processo de otimização topológica foram utilizadas 100 iterações e uma fração de volume de 40%. A este problema foi aplicado um coeficiente de penalidade de $p = 3$.

O método de otimização aplicado foi o MMA (Método das Assíptotas Móveis) e o filtro de sensibilidades considera apenas os elementos que estão diretamente ligados ao elemento sobre o qual o filtro atua, com um valor de raio relativo de $R_f = 1,25$. Na Figura 5.16 pode-se observar o resultado da viga bi-apoiada após a aplicação da otimização topológica.

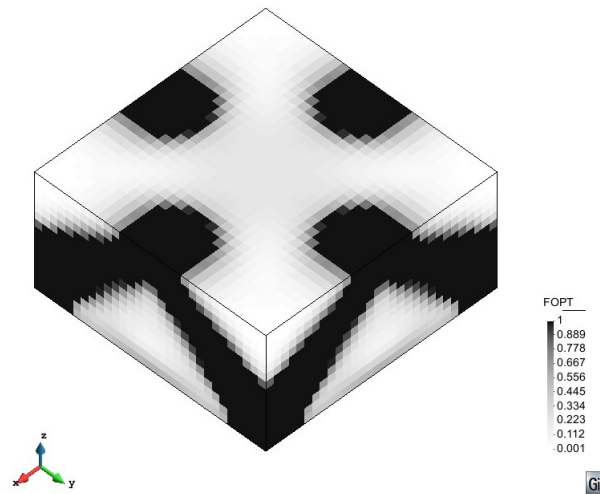


Figura 5.16: Bloco tridimensional: ilustração dos resultados após a aplicação da otimização topológica no problema.

5.1.2.2 Geração da nuvem de pontos

Para este caso de estudo usou-se a metodologia dos pontos limites de material/vazio. Depois escolhe-se os nós que se encontram no limiar da fronteira de material e vazio e associando as suas coordenadas são exportados para ficheiros que são depois tratados no programa CAD.

5.1.2.3 Pós-processamento em CAD

Nesta etapa do trabalho procede-se numa primeira fase à importação dos dados dos ficheiros através do comandos anteriormente expostos e o resultado que se obteve encontra-se ilustrado na Figura 5.17.

Posteriormente a esta fase, prossegue-se para a criação de uma malha, ilustrada na Figura 5.17 a), e de seguida para a geração da superfície representada através da Figura 5.17 b). Aplica-se um filtro de suavização da malha presente no programa de CAD, através do comando *Mesh Smoothing*. Por fim, após a superfície estar fechada é criado o sólido. Para este caso de estudo este está ilustrado através da Figura 5.17 c).

5.1.2.4 Simulação do modelo final

Para a simulação dos resultados obtidos no pós-processamento em CAD foi utilizado o elemento finito tetraédrico e efetua-se um estudo de convergência da malha para garantir que não se utiliza um tamanho de malha nem muito pequeno nem muito grande. Então, para o efeito, obteve-se os seguintes dados presentes na tabela 5.3.

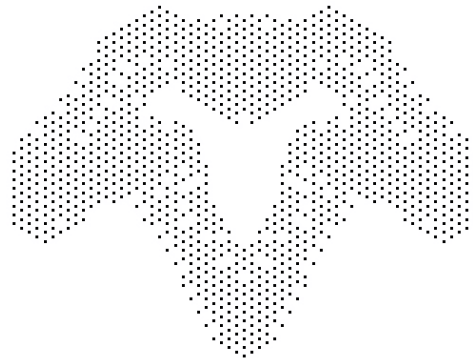


Figura 5.17: Bloco tridimensional: ilustração da nuvem de pontos importada a partir dos dados do problema.

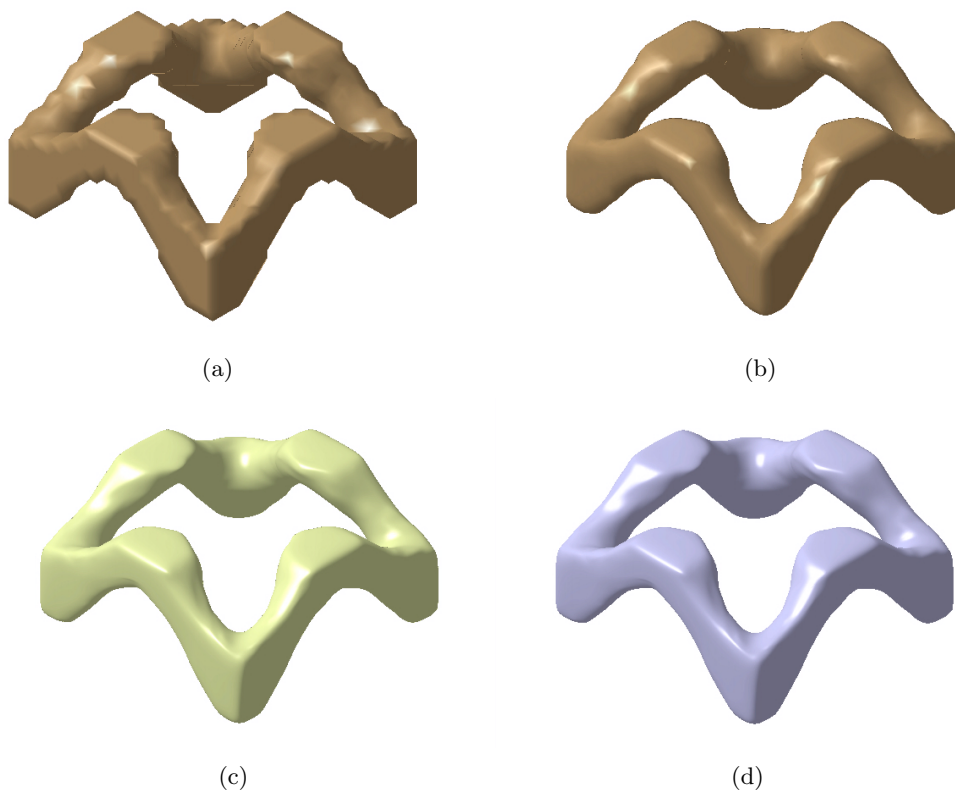


Figura 5.18: Bloco tridimensional: a) nova malha gerada; b) malha suavizada; c) superfície gerada; d) sólido gerado a partir da superfície.

De acordo com o demonstrado na Tabela 5.3 pode-se verificar que a partir de um tamanho de malha de 74292 elementos o valor máximo de deslocamento tende a estabilizar, pois a diferença de valores é de 0,001 mm. Assim, para os cálculos utiliza-se este tamanho de malha, isto porque para um tamanho de malha maior o tempo computacional aumenta e o ganho

Tabela 5.3: Relação do tamanho do elemento com o deslocamento máximo.

Tamanho do elemento	Deslocamento máximo (mm)
19503	0.030
24545	0.025
34597	0.032
41891	0.034
74292	0.036
140485	0.037
342162	0.038

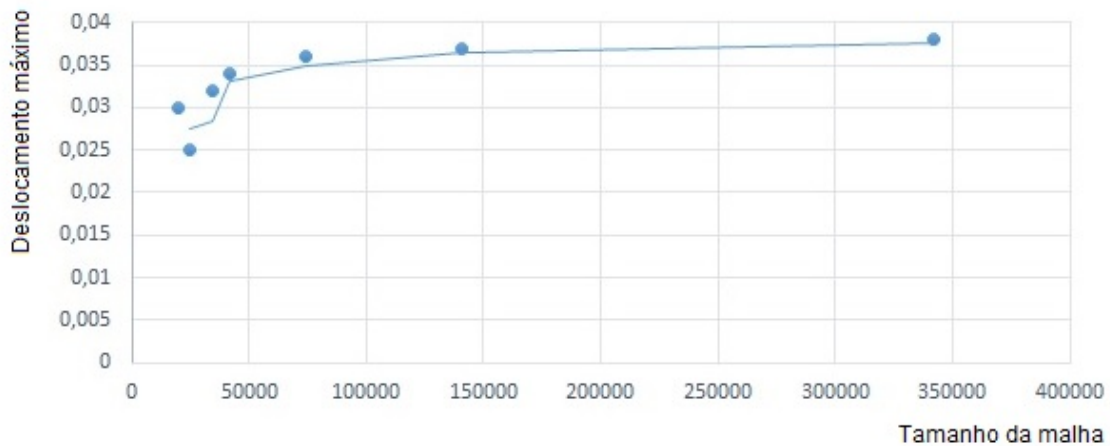


Figura 5.19: Ilustração da relação do tamanho da malha com o valor deslocamento máximo para o problema do bloco tri-dimensional.

com essa aumento nos cálculos não é relevante. Desta forma, para o exemplo apresentado foi feita uma análise estática da geometria para comparar os resultados obtidos com os obtidos no método da otimização topológica. Então, tal como no modelo que se utilizou para a otimização topológica, para a simulação numérica utilizaram-se os mesmos apoios e o mesmo carregamento e os dados que se obtiveram encontra-se apresentados na Figura 5.21.

Para se avaliar a qualidade da geometria obtida é necessário recorrer a dados de referente. Para o presente caso, utiliza-se como valor de referência para comparação o valor de deslocamento máximo da geometria.

Então analisando os dados tem-se que a geometria final obtida tem um valor de deslocamento máximo 30% inferior ao sofrido pela estrutura inicial para o mesmo tipo de apoios e carregamentos aplicados. Contudo a sua fração de volume face ao inicial imposto corresponde apenas 21%, muito longe dos 40% impostos. Pode-se observar também através da Figura 5.21 que os deslocamentos que a estrutura sofre não são simétricos, ou seja, existem diferenças de valores para zonas similares. Isto deve-se em parte por não ter sido considerado apenas 1/4 do problema estabelecendo simetria segundo x e y . É notório que a utilização de todo o

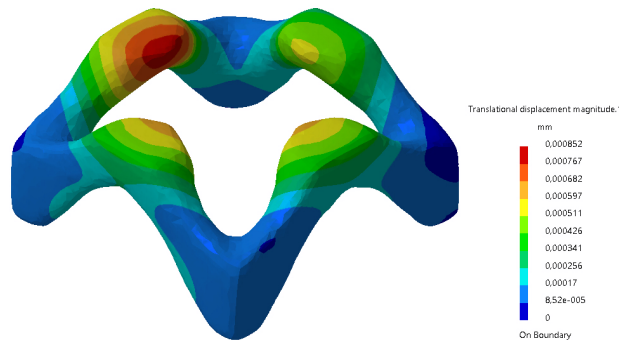


Figura 5.20: Bloco tridimensional: distribuição dos deslocamentos.

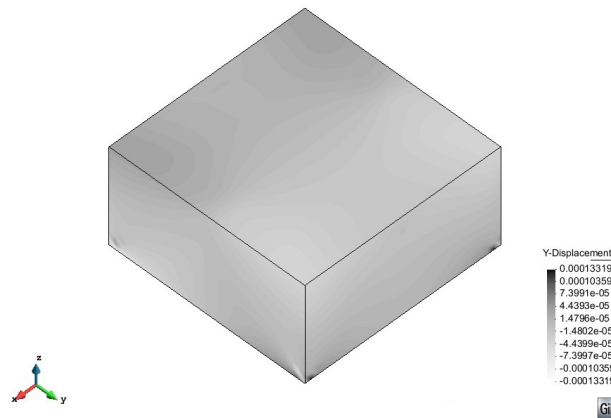


Figura 5.21: Bloco tri-dimensional: distribuição dos deslocamentos no geometria inicial.

domínio interfere depois na construção da solução final principalmente quando se efetua a aproximação da malha para se obter uma superfície.

5.1.2.5 Estudo de sensibilidade

Para o estudo de sensibilidade, será estudado a influência dos parâmetros de estabilidade do método de otimização topológica e da seleção de dados no programa de manipulação de dados. Este estudo é apresentado através da Figura 5.22 até à Figura 5.25. Assim foi feita uma variação do valor de raio relativo no filtro de sensibilidades e utilizada uma gama de valores mais restrita e uma mais ampla na seleção de dados. Através da Tabela 5.4 pode-se observar quais as alterações nos parâmetros mensuráveis.

Após da análise do dados obtidos, e representados na Tabela 5.4, as variações impostas no problema influenciaram as geometrias relativamente à resposta ao deslocamentos, isto pode dever se em parte na má seleção da área de aplicação da força na geometria final. Em relação à f_v a que se apresenta o mais aproximada dos 40% imposto inicialmente é dada para $\rho \in [0, 95, 1]$. Conclui-se também que a solução final é sensível aos parâmetros de estabilidade isto porque, tal como se pode verificar através das Figura 5.22 à Figura 5.25, a variação de apenas um dos parâmetros para cada caso teve impactos notórios ao nível da geometria. As geometrias apresentam mais zonas de material que a inicial abordada.

Tabela 5.4: Variação dos parâmetros para cada caso no bloco tri-dimensional.

Casos de estudo	f_v (%)	Deslocamento máximo (mm)
Bloco	21,2	0,000852
Bloco $R_f = 2,5$	29,8	0,000313
Bloco $R_f = 5$	29,6	0,000316
Bloco $\rho \in [0.5, 1]$	54,0	0,000153
Bloco $\rho \in [0.95, 1]$	41,6	0,000202

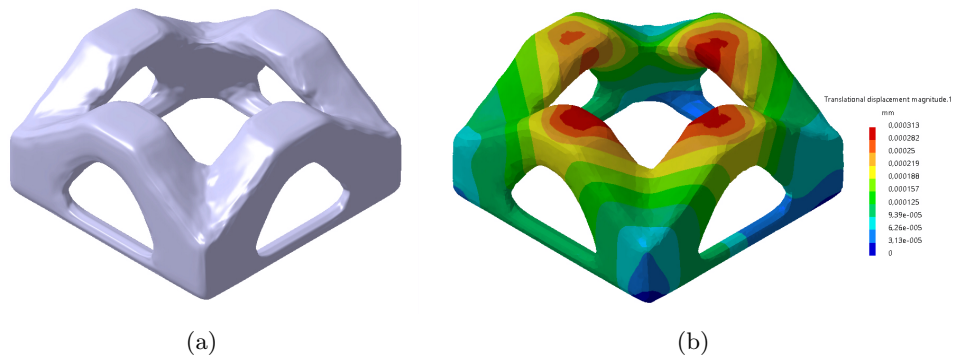


Figura 5.22: Admitindo um raio relativo de $R_f = 2,5$: a) geometria final do bloco e b) distribuição dos deslocamentos na geometria final no bloco.

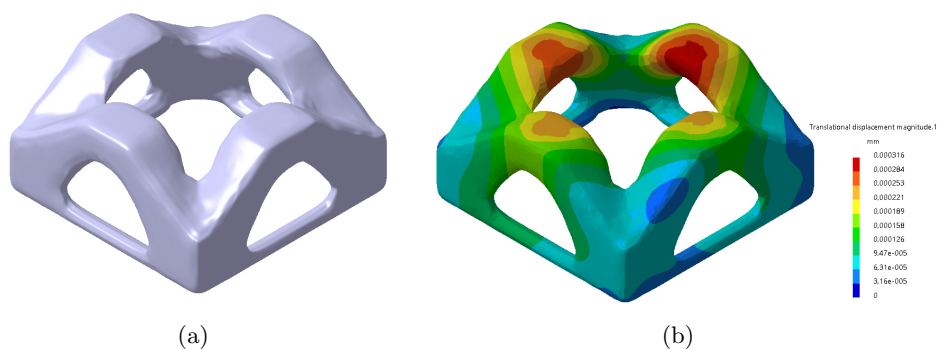


Figura 5.23: Admitindo um raio relativo de $R_f = 5$: a) geometria final do bloco e b) distribuição dos deslocamentos na geometria final no bloco.

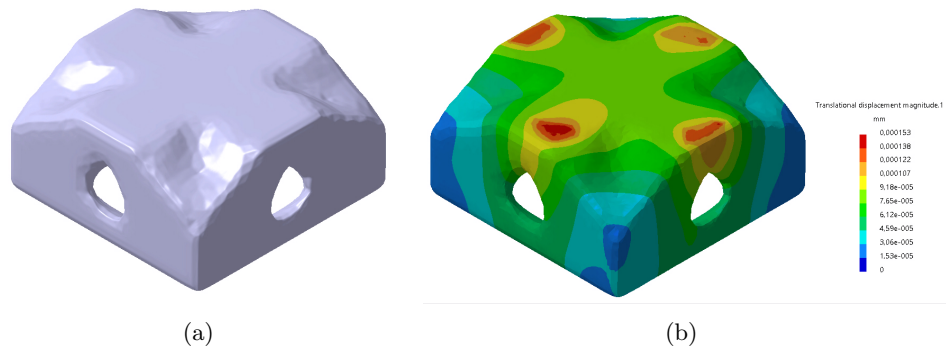


Figura 5.24: Gama ampla de valores [0,5,1]: a) geometria final do bloco e b) distribuição dos deslocamentos na geometria final no bloco.

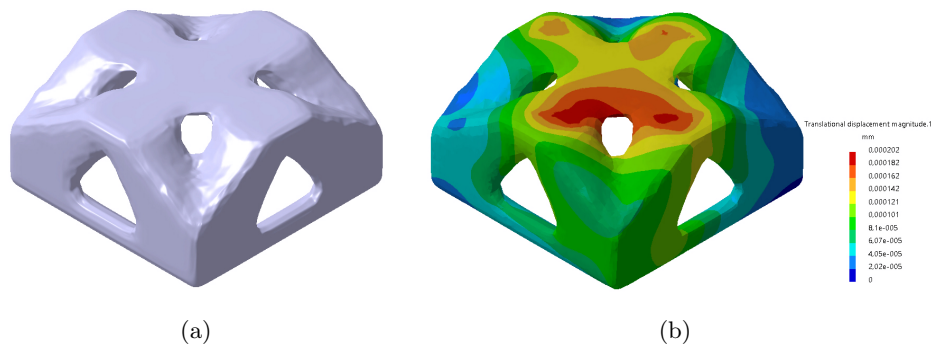


Figura 5.25: Gama restrita de valores [0,95,1]: a) geometria final do bloco e b) distribuição dos deslocamentos na geometria final no bloco.

Capítulo 6

Considerações finais

6.1 Conclusões finais

O recurso a metodologias de Otimização Topológica (OT) tem vindo a aumentar em projeto. Isto porque a OT permite projetar a topologia ótima de estruturas segundo um certo critério de custo. Este tipo de otimização vai ao encontro da distribuição ótima de material no interior do domínio de projeto, retirando ou adicionando material em cada ponto com o intuito de minimizar (ou maximizar) a função objetivo especificada, satisfazendo as restrições impostas ao problema.

Dada esta linha de raciocínio, a principal finalidade do trabalho apresentado nesta Dissertação foi o desenvolvimento de uma metodologia simples capaz de converter os resultados obtidos da OT em geometrias com capacidade de resposta às solicitações impostas inicialmente ao problema. Na implementação da metodologia, utilizou-se as ferramentas disponíveis no programa GID[®] para a geração do domínio do problema (geometria e condições de fronteira). De seguida, aplicaram-se metodologias de OT [Oliveira 2013]. Utilizando-se a linguagem do programa Matlab[®] converteram-se os resultados provenientes da OT em dados a importar para o programa CATIA v5[®] (*cloud points*). Neste aplicou-se uma sequência de comandos usados na obtenção de geometria (*mesh/ surface/ solid*). Para validação da geometria final obtida foi utilizada a ferramenta de simulação do CATIA v5[®].

Sobre as soluções finais foi feita uma análise estática, onde se compararam os resultados obtidos com os obtidos inicialmente e de seguida foi feito um estudo da influência dos parâmetros na geometria final. Conclui-se que a variação dos parâmetros teve uma influência notória e verificou-se que estes provocam variações geométricas na solução. Encontraram-se resultados bi-dimensionais e tri-dimensionais satisfatórios no então é importante salientar que esta metodologia necessita de ser aplicada para mais casos de estudo.

6.2 Trabalhos futuros

Este trabalho focou-se no estudo do processo de obtenção de geometrias resultantes do método de otimização topológica. Para isto, através da utilização de um programa de CAD, utilizaram-se os conceitos de engenharia inversa. Por fim, foi feito o estudo das mesmas para certificar as geometrias obtidas relativamente aos resultados de otimização. Neste contexto, propõem-se como trabalhos futuros:

- Análise de estratégias alternativas de conversão de resultados de otimização topológica para definições geométricas de estruturas;
- Desenvolvimento de estratégias automáticas de geração de geometrias primitivas partir de resultados de otimização topológica.

Lista de Figuras

1.1	Exemplo de resolução de um problema de otimização topológica em cálculo estrutural.	4
1.2	Ilustração do processo de engenharia inversa aplicado ao levantamento de uma geometria [LABOD 2014]	5
1.3	Fluxograma representativo do plano de trabalho.	6
2.1	Esquema explicativo das diferenças entre um projeto convencional e um projeto otimizado [Pizzirani 2003].	10
2.2	Ilustração da ramificação dos tipos de otimização presente no contexto deste trabalho.	11
2.3	Diferenças mais notáveis de um problema nas diferentes abordagens de otimização estrutural [Bendsøe e Sigmund 2003].	14
2.4	Ilustração de um exemplo do fenômeno de dependência da malha [Stump 2006].	20
2.5	Ilustração do fenômeno de Instabilidade do Tabuleiro [Stump 2006].	21
2.6	Representação dos máximos e mínimos de uma função.	22
2.7	Ilustração do pós-processamento de resultados de um problema bidimensional de otimização topológica: (a) resultados do problema de otimização topológica, (b) curvas de isovalores, (c) curvas suavizadas (CAD) e (d) nova malha de elementos finitos [Oliveira 2013].	24
2.8	Ilustração do processo de engenharia inversa desde o levantamento da geometria até à obtenção do modelo CAD [LMI 3D 2014].	25
3.1	Esquemática do processo de engenharia inversa relativamente ao processo convencional de produção [Puntambekar <i>et al.</i> 1994].	28
3.2	Esquema do processo de engenharia inversa [Dong-Fan e Ming-Lun 1996]. . .	29
3.3	Diferentes métodos de aquisição de dados [Varady <i>et al.</i> 1997].	31
3.4	Hierarquia e classificação das superfícies.	36
4.1	Fluxograma de todas as etapas da metodologia desenvolvida neste trabalho. .	42
4.2	Ilustração do funcionamento do programa de manipulação de dados desenvolvido no trabalho.	43
4.3	Ilustração da sequência de comandos necessários para a reconstrução de geometria no programa CAD CATIA V5.	44
5.1	Viga bi-apoiada.	46
5.2	Viga bi-apoiada: ilustração da malha aplicado no problema.	46

5.3	Viga bi-apoiada: ilustração do resultado de otimização topológica aplicado no problema.	47
5.4	Viga bi-apoiada: nuvem de pontos no intervalo de densidades de $[0,65;1]$. . .	47
5.5	Viga bi-apoiada: nova malha gerada a partir dos pontos no intervalo de densidades de $[0,65;1]$	48
5.6	Viga bi-apoiada: Superfície gerada para pontos no intervalo de densidades de $[0,65;1]$	48
5.7	Ilustração da relação do tamanho da malha com o valor deslocamento máximo para o problema da viga bi-apoiada.	49
5.8	Resultados de simulação: Distribuição dos deslocamentos.	50
5.9	Ilustração da distribuição aquando da aplicação do método de otimização topológica.	50
5.10	Admitindo um raio relativo de $R_f = 2,5$: a) geometria final da viga e b) distribuição dos deslocamentos na geometria final da viga.	51
5.11	Admitindo um raio relativo de $R_f = 5$: a) geometria final da viga e b) distribuição dos deslocamentos na geometria final da viga.	51
5.12	Gama ampla de valores $[0,5;1]$: a) geometria final da viga e b) distribuição dos deslocamentos na geometria final da viga.	52
5.13	Gama restrita de valores $[0,95;1]$: a) geometria final da viga e b) distribuição dos deslocamentos na geometria final da viga.	52
5.14	Bloco tridimensional: geometria e carregamentos.	53
5.15	Bloco tridimensional: ilustração da malha aplicada no problema.	53
5.16	Bloco tridimensional: ilustração dos resultados após a aplicação da otimização topológica no problema.	54
5.17	Bloco tridimensional: ilustração da nuvem de pontos importada a partir dos dados do problema.	55
5.18	Bloco tridimensional: a) nova malha gerada; b) malha suavizada; c) superfície gerada; d) sólido gerado a partir da superfície.	55
5.19	Ilustração da relação do tamanho da malha com o valor deslocamento máximo para o problema do bloco tri-dimensional.	56
5.20	Bloco tridimensional: distribuição dos deslocamentos.	57
5.21	Bloco tri-dimensional: distribuição dos deslocamentos no geometria inicial. . .	57
5.22	Admitindo um raio relativo de $R_f = 2,5$: a) geometria final do bloco e b) distribuição dos deslocamentos na geometria final no bloco.	58
5.23	Admitindo um raio relativo de $R_f = 5$: a) geometria final do bloco e b) distribuição dos deslocamentos na geometria final no bloco.	58
5.24	Gama ampla de valores $[0,5,1]$: a) geometria final do bloco e b) distribuição dos deslocamentos na geometria final no bloco.	59
5.25	Gama restrita de valores $[0,95,1]$: a) geometria final do bloco e b) distribuição dos deslocamentos na geometria final no bloco.	59

Lista de Tabelas

5.1	Relação do tamanho da malha com o valor deslocamento máximo.	49
5.2	Representação da variação dos parâmetros para cada caso.	50
5.3	Relação do tamanho do elemento com o deslocamento máximo.	56
5.4	Variação dos parâmetros para cada caso no bloco tri-dimensional.	58

Bibliografia

Bibliografia

- [Allaire 2002] Allaire, G. (2002). *Shape optimization by the homogenization method*. Applied Mathematical Sciences, 164, Springer-Verlag, Nova Iorque, EUA.
- [Amstutz 2010] Amstutz, S. (2010). Connections between topological sensitivity analysis and material interpolation schemes in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 43(6), p. 755-765.
- [Bahia 2005] Bahia, M. (2005). *Otimização Topológica Aplicada ao Projeto de Mecanismos Flexíveis*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil.
- [Bendsøe 1989] Bendsøe, M.P. (1989). Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural and multidisciplinary optimization*, 1(4), p. 193-202.
- [Bendsøe 1995] Bendsøe, M.P. (1995). *Optimization of structural topology, shape, and material*. Springer Verlag, Berlim, Alemanha.
- [Bendsøe et al. 1994] Bendsøe, M.P., Guedes, J.M., Haber, R.B., Pedersen, P. e Taylor, J.E. (1994). An analytical model to predict optimal material properties in the context of optimal structural design. *Journal of Applied Mechanics*, 61(4), p. 930-937.
- [Bendsøe e Kikuchi 1988] Bendsøe, M.P. e Kikuchi, N. (1988). Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71(2), p. 197-224.
- [Bendsøe e Sigmund 1999] Bendsøe, M.P. e Sigmund, O. (1999). Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive of Applied Mechanics*, 69(9), p. 635-654.
- [Bendsøe e Sigmund 2003] Bendsøe, M.P. e Sigmund, O. (2003) *Topology optimization: theory, methods, and applications*, Springer Verlag, Berlim, Alemanha.
- [Bolte e Vermuri 1991] Bolte, R.M. e Vermuri, B.C. (1991). On three-dimensional surface reconstruction methods. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence archive*, 13(1), p. 1-13.
- [Borrvall 2001] Borrvall, T. (2001). Topology optimization using regularized intermediate density control. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(37-38), p. 4911-4928.
- [Butler 1991] Butler, C. (1991). Investigation into the performance of probes on coordinate measuring machines. *Industrial Metrology*, 2(1), p. 59-70.

- [Cheng e Olhoff 1981] Cheng, K.T. e Olhoff, N. (1981). An investigation concerning optimal design of solid elastic plates, *International Journal of Solids and Structures*, 17(3), p. 305-323.
- [Daschbach 1995] Daschbach, A. (1995). *Reverse Engineering: A Tool for process planning*, McNichols, Comput Ind Eng.,29(1-4), p. 637-640.
- [Díaz e Sigmund 1995] Díaz, A. R. e Sigmund, O. (1995). Checkerboard patterns in layout optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 10, p. 40-45.
- [Dickin 1996] Dickin, P. (1996). Reverse Engineering regains popularity. *IEE Review*, 42(5), p. 213-S1-S4.
- [Dieter 2000] Dieter, G.E. (2000). Engineering design: a materials and processing approach. *McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering*, McGraw-Hill, Singapura, Ásia.
- [Dong-Fan e Ming-Lun 1996] Dong-Fan, C. e Ming-Lun, F.(1996). Reconstruction Technique in Reverse Engineering. *Proceedings of The IEEE International Conference on Industrial Technology*, 22, p. 37-41.
- [Dorn *et al.* 1964] Dorn, W.S., Gomory, R.E. e Greenberg, H.J. (1964). Automatic design of optimal structures. *Journal de mecanique*, 3, p. 25-52.
- [Duysinx 1997] Duysinx, P. (1997). *Layout optimization : a mathematical programming approach*. Relatório técnico, 540, p. 31.
- [Eck *et al.* 1995] Eck, M., DeRose, T., Duchamp, T., Hoppe, H., Lounsbery, M. e Stuetzle, W. (1995). Multiresolution analysis of arbitrary meshes. *Computer Graphics - SIGGRAPHPS Proceedings*, 29, p. 173-182.
- [Fleury *et al.* 1977] Fleury, C. e Sander, G. (1977). Relations Between Optimality Criteria and Mathematical Programming in Structural Optimization. *Proceedings of the Symposium on Applications of Computer Methods in Engineering*, University of Southern California, Los Angeles, p. 507-520.
- [Giri *et al.* 2003] Giri, D., Jouaneh, M. e Stucker, B. (2003). Error sources in a 3-D reverse engineering process. *Journal of Precision Engineering*, 28, p. 242-251.
- [Groenwold e Etman 2009] Groenwold, A.A. e Etman, L.F.P. (2009). A simple heuristic for gray-scale suppression in optimality criterion-based topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 39(2), p. 217-225.
- [Guerreiro 1999] Guerreiro, V., (1999). *Digitalizadores/medidores 3D agilizam projetos*. CA-Design, 53, São Paulo, Brasil, p. 33-35.
- [Guo 1997] Guo, B. (1997). Surface reconstruction: from points to splines. *Computer-Aided Design*, 29, p. 269-277.
- [Haber *et al.* 1996] Haber, R.B., Jog, C.S. e Bendsøe, M.P. (1996). A new approach to variable-topology shape design using a constraint on perimeter. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 11(1-2), p. 1-12.

- [Hassani e Hinton 1998b] Hassani, B. e Hinton, E. (1998). A review of homogenization and topology optimization I - homogenisation theory for media with periodic structure. *Computers & Structures*, 69(6), p. 707-717.
- [Hoppe *et al.* 1993] Hoppe, H., DeRose, T., Duchamn, T., McDonald, J. e Stuetzle, W. (1993). Mesh optimization. *Computer Graphics - SIGGRAPH Proceedings*, 27, p. 19-26.
- [Hvejsel e Lund 2011] Hvejsel, C.F. e Lund, E. (2011). Material interpolation schemes for unified topology and multi-material optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 43(6), p. 811-825.
- [Klein e Young 2010] Klein, P.N. e Young, N.E. (2010). *Approximation algorithms for NP-hard optimization problems*. In Algorithms and theory of computation handbook, M.J. Atallah (Ed.), p. 34.1-34.20, Applied Algorithms and Data Structures series, Chapman & Hall/CRC, CRC Press, EUA.
- [Koivunen 1992] Koivunen, V. (1992). *Robust signal restoration and local estimation of image structure*. Technical Report, MS-CIS-92-92, University of Pennsylvania, Department of Computer and Information Science, Pennsylvania, EUA.
- [Korem 1983] Korem, Y. (1983). *Computer Control of Manufacturing Systems*, McGraw Hill, p. 287.
- [LABOD 2014] LABOD (2014). Reverse engineering steps. <http://lab.fs.uni-lj.si/labod/eng/strokovno02.php>. Novembro 2014.
- [Legge 1996] Legge, D.I., (1996). Integration of design and inspection systems: a literature review. *International Journal of Production Research*, v. 34(5), p. 1221-1241.
- [Leite *et al.* 2010] Leite, W., Filho, E., Faria, P., e Rubio, J. (2010). Cenário de Manufatura Integrada: Engenharia Reversa e *Redesign* de Produtos. *VI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica*, Campina Grande-Paraíba, Brasil.
- [LMI 3D 2014] LMI TECHNOLOGIES. 3D Scanning and Inspection Blog. <http://blog.lmi3d.com/common-questions-on-reverse-engineering>. Novembro 2014.
- [Marcos 2008] Fernandes, M. (2008). *Optimização topológica multi-objectivo de estruturas lineares elásticas tridimensionais*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal.
- [Michell 1904] Michell, A.G.M. (1904). The limits of economy of material in frame structures", *Philosophical Magazine*, 8(6), p. 589-597.
- [Moring *et al.* 1989] Moring, I., Heikkinen, T. e Myllyla, R. (1989). Acquisition of three-dimensional image data by a scanning laser range finder. *Journal of Optical Engineering*, 28(8), p. 897-902.
- [Modjarrad 1988] Modjarrad, A. (1988). Non-contact measurement using a laser scanning probe. *SPIE, In-Process Optical Measurements*, 1012, p. 229-239.
- [Moss *et al.* 1989] Moss, J.P., Linney, A.D., Grindrod, S.R. e Mosse, C.A. (1989). A laser scanning system for the measurement of facial surface morphology. *Journal of Optics and Lasers in Engineering*, 10, p. 179-190.

- [Motavalli e Bidanda 1991] Motavalli, S. e Bidanda, B. (1991). A part image reconstruction system for reverse engineering of design modifications. *Journal of Manufacturing Systems*, 10(5), p. 383-395.
- [Nishihara 1984] Nishihara, H.K. (1984). Practical real-time imaging stereo matcher. *Journal of Optical Engineering*, 23(5), p. 536-545.
- [Oliveira 2013] Oliveira, J. (2013). *Metodologias de Optimização Topológica em Cálculo Estrutural*. Dissertação de Doutorado, Universidade de Aveiro, Aveiro.
- [Petersson 1999] Petersson, J. (1999). Some convergence results in perimeter-controlled topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 171(1-2), p. 123-140.
- [Pizzirani 2003] Pizzirani, F. (2003). *Otimização Topológica de Estruturas Utilizando Algoritmos Genéticos*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil.
- [Puntambekar et al. 1994] Puntambekar, N.V., Jablokow, A.G. e Sommer, H.J. (1994). United review of 3D model generation for Reverse Engineering. *Journal of Computer Integrated Manufacturing Systems*, 7, p. 259-268.
- [Prager e Taylor 1968] Prager, W. e Taylor, J.E. (1968). Problems of Optimal Structural Design. *Journal of Applied Mechanics*, 35(1), p. 120-106.
- [Prasad 1996] Prasad, B. (1996). *Concurrent Engineering Fundamentals: Integrated Product Development*, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, New Jersey, USA, 2.
- [Posdamer e Altshuler 1982] Posdamer, J.L. e Altschuler, M.D. (1982). Surface measurement by space-encoded projected beam systems. *Journal of Computer Graphics and Image Processing*, 18, I- 17.
- [Varady et al. 1997] Varady, T., Martin, R.R. e Cox J. (1997). Reverse Engineering of geometric models an Introduction. *Journal of Computer Aided Design*, 29, p. 255-268.
- [Raja et al. 2008] Raja, I., Vinesh II, F., e Kiran, J. (2008). *Reverse engineering: an industrial perspective*. Springer Verlag, London, Inglaterra.
- [Rioux 1984] Rioux, M. (1984). Laser range finder based on synchronized scanners. *Journal of Applied Optics*, 23(21), 3837-3844.
- [Rockwood e Winget 1997] Rockwood, A. e Winget, J. (1997). Three-dimensional object reconstruction from two-dimensional images. *Computer-Aided Design*, 29, 279-285.
- [Rossignac e Borrel 1993] Rossignac, J. e Borrel, P. (1993). Multi-resolution 3D approximations for rendering complex scenes. *Modeling in Computer Graphics Springer-Verlag*, p. 455-466.
- [Rozvany 2001] Rozvany, G.I.N. (2001). Aims, Scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 21(2), p. 90-108.

- [Rozvany *et al.* 2006] Rozvany, G.I.N., Pomezanski, V., Querin, O.M., Gaspar, Z. e Logo, J. (2006). *Some basic issues of topology optimization*. IUTAM Symposium on Topological Design Optimization of Structures, Machines and Materials- Solid Mechanics and its Applications, Bendsøe, M.P., Olhoff, N. e Sigmund, O. (Eds.), 137, p. 77-86, Springer.
- [Rozvany 2009] Rozvany, G.I.N. (2009). A critical review of established methods of structural topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 37(3), p. 217-237.
- [Rozvany e Querin 2002] Rozvany, G.I.N. e Querin, O.M. (2002). Combining ESO with rigorous optimality criteria. *International Journal of Vehicle Design*, 28(4), p. 294-299.
- [Rozvany *et al.* 1992] Rozvany, G.I.N., Zhou, M. e Birker, T. (1992). Generalized shape optimization without homogenization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 4(3-4), p. 250-252.
- [Sahoo e Menq 1991] Sahoo, K.C. e Menq, C.H. (1991). Localization of 3-D objects having complex sculptured surfaces using tactile sensing and surface description. *Journal of Engineering for Industry*, 113, 85-92.
- [Schmit 1960] Schmit, L.A. (1960). Structural design by systematic synthesis. *Proceedings of the 2nd Conference on Electronic Computation*, p. 105-122.
- [Schmit e Farshi 1973] Schmit, L.A. e Farshi, B. (1974). Some Approximation Concepts for Structural Synthesis. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 12, p. 692-699.
- [Schroeder *et al.* 1992] Schroeder, W.J., Zarge, J. e Lorensen, W.E. (1992). Decimation of triangle meshes. *Computer Graphics - SIGGRAPH Proceedings*, 26, p. 65-70.
- [Sigmund e Petersson 1998] Sigmund, O. e Petersson, J. (1998). Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural Optimization*, 16(1), p. 68-75.
- [Sigmund 1994] Sigmund, O. (1997). *Design of material structures using topology optimization*. PhD thesis, Department of Solid Mechanics, Technical University of Denmark, Denmark.
- [Sigmund 1997] Sigmund, O. (1997). On the design of compliant mechanisms using topology optimization. *Mechanics of Structures and Machines Journal*, 25(4), p. 493-524.
- [Sigmund 2001] Sigmund, O. (2001). A 99 line topology optimization code written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 21(2), p. 120-127.
- [Sigmund 2007] Sigmund, O. (2007). Morphology-based black and white filters for topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 33(4-5), p. 401-424.
- [Sokovic e Kopac 2006] Sokovic, M. e Kopac, J. (2006). RE (reverse engineering) as necessary phase by rapid product development. *Journal of Materials Processing Technology*, 175, p. 398-403.
- [Souza e Ulbrich 2009] Souza, A.F. e Ulbrich, C.B.L. (2009). *Engenharia Integrada por computador e sistemas CAD/CAM/CNC - princípios e aplicações*. ARTLIBER, São Paulo, Brasil.

- [Sobieszcanski e Leondorf 1972] Sobieszcanski, J. e Leondorf, D. (1972). A Mixed Optimization Method for Automated Design of Fuselage Structures. *Journal of Aircraft*, 9, p. 805-811.
- [Stolpe e Svanberg 2001a] Stolpe, M. e Svanberg, K. (2001). An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 22(2), p. 116-124.
- [Stolpe e Svanberg 2001b] Stolpe, M. e Svanberg, K. (2001). On the trajectories of penalization methods for topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 21(2), p. 128-139.
- [Stump 2006] Stump, F. (2006). *Otimização Topológica Aplicada ao Projeto de Estruturas Tradicionais e Estruturas com Gradação Funcional sujeitas a Restrição de Tensão*. Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil.
- [Tai e Huang 2000] Tai, C. e Huang, M. (2002). The processing of data points basing on design intent in Reverse Engineering. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 40, p. 1913-1927.
- [Tsujimura *et al.* 1989] Tsujimura, T., Yabuta, T. e Morimitsu, T. (1989). Shape-reconstruction system for three-dimensional objects using an ultrasonic distance sensor mounted on a manipulator. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 111, p. 180-186.
- [Várady *et al.* 1997] Várady, T., Martin, R.R. e Coxt, J. (1997). Reverse engineering of geometric models - an introduction. *Computer-Aided Design*, 29(4), p. 255-268.
- [Veron e Leon 1997] Veron, P. e Leon, J.C. (1997). Static polyhedron simplification using error measurements. *Computer-Aided Design*, 29, p. 287-298.
- [Venkayya *et al.* 1968] Venkayya, V.B., Khot, N.S., e Reddy, V.S. (1968). Optimization of Structures Based on the Study of Strain Energy Distribution. *Air Force Flight Dynamics Laboratory-TR-69-150*.
- [Xiuzi e Hongzheng 2010] Xiuzi, Y. e Hongzheng L. (2010). Reverse innovative design an integrated product design methodology. *Journal of Computer Aided Design*, 40, p. 812-827.
- [Xiong 1990] Xiong, Y.L. (1990). Computer aided measurement of profile error of complex surfaces and curves: theory and algorithm. *International Journal of Machine Tools and Manufacturing*, 30(3), p. 339-357.
- [Wang e Aggarwal 1987] Wang, Y.F. e Aggarwal, J.K. (1972). 3D object description from stripe coding and multiple views. *Proceedings of the 5th Scandinavian Conference on Image Analysis*, 60(6), p. 669-680.
- [Watanabe e Yoneyama 1992] Watanabe, S. e Yoneyama, M. (1992). An ultrasonic visual sensor for three-dimensional object recognition using neural networks. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 8(2), p. 240-249.

- [Will e Pennington 1972] Will, P.W. e Pennington, K.S. (1972). Grid coding: a novel technique for image processing. *Proceedings of the IEEE*, 60(6), p. 669-680.
- [Woodham 1978] Woodham, R.J. (1978). Photometric stereo: a reflectance map technique for determining surface orientation from a single view. *Image understanding systems and industrial applications-Proceedings SPIE 22nd Annual Technical Symposium*, San Diego, Califórnia, 155, p. 136-143.
- [Zhang *et al.* 2003] Zhang, Y. (2003). Research into the engineering application of reverse engineering technology. *International Journal of Materials Processing Technology*, 139, p. 472-475.