



Universidade de Aveiro Departamento de Matemática  
2013

**ILDA MARIA DUARTE  
DE MATOS**

**TEORIA DOS GRAFOS NO ENSINO BÁSICO E  
SECUNDÁRIO**





Universidade de Aveiro Departamento de Matemática  
2013

**ILDA MARIA DUARTE DE MATOS**      **TEORIA DOS GRAFOS NO ENSINO BÁSICO E SECUNDÁRIO**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre (Mestrado em Matemática para Professores), realizado sob a orientação científica da Doutora Paula Carvalho e Doutora Paula Rama, Professoras auxiliares do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.



Ao meu marido e filho Diogo



## **O júri**

Presidente

**Professora Doutora Andreia Oliveira Hall**

Professora Associada, Universidade de Aveiro

**Doutora Deolinda Maria Lopes Dias Rasteiro**

Professora Adjunta, Instituto Superior de Engenharia de Coimbra

**Professora Doutora Maria Paula Lopes dos Reis Carvalho**

Professora Auxiliar, Universidade de Aveiro

**Professora Doutora Paula Cristina Roque da Silva Rama**

Professora Auxiliar, Universidade de Aveiro



## **Agradecimentos**

Quero exprimir o meu agradecimento às professoras, orientadoras deste trabalho, Doutora Paula Carvalho e Doutora Paula Rama, pela confiança, incentivo, conselhos, sugestões, pela leitura crítica e atenta e pela disponibilidade que sempre demonstraram, ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Ao meu colega, João Leal, pela paciência e apoio no programa utilizado para a realização deste trabalho.

Aos professores do 1ºCiclo do Agrupamento de Escolas de Mortágua, pela participação e disponibilidade demonstrada sempre que foram inquiridos e em especial à docente, Alcina Saraiva, pelo empréstimo dos seus manuais.



**Palavras-chave**

Teoria dos Grafos, ensino.

**Resumo**

Nesta dissertação apresentam-se algumas noções gerais sobre Teoria dos Grafos e apresentam-se alguns problemas desta teoria, abordados em atividades nos diferentes níveis de ensino básico e secundário, bem como algoritmos para a sua resolução. Os problemas abordados são: o problema do caminho mais curto, o problema da árvore abrangente de custo mínimo, determinação de um circuito de Euler ou de um ciclo hamiltoniano, nos quais se enquadram os problemas do carteiro chinês e do caixeiro viajante, e as colorações de grafos. Por último, apresentam-se algumas aplicações da Teoria dos Grafos em tarefas apresentadas aos alunos do ensino básico e secundário e é feita uma análise sobre a importância da sua inclusão no programa da disciplina de Matemática nos diferentes ciclos de ensino.



**keywords**

Graph theory, teaching.

**abstract**

In this dissertation we present some general notions of graph theory and some well known problems of this theory as well as algorithms to solve them. The problems considered here are: the shortest path problem, the minimum spanning tree, the determination of eulerian circuits and hamiltonian cycles, in particular, the problems of the Chinese postman and the travelling salesman, and the colorations of graphs. By last, some applications of graph theory such as problems given to students of different stages of education are presented and the importance of including theory of graphs in the program of mathematics in the different stages of education is highlighted.



# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grafos e Aplicações</b>	<b>4</b>
2.1	Conceitos métricos	10
2.2	Alguns grafos particulares	12
2.3	O Problema do caminho mais curto	17
	Algoritmo de Dijkstra	18
2.4	Árvores	21
2.5	O Problema da árvore abrangente de custo mínimo	24
	Algoritmo de Kruskal	24
	Algoritmo de Prim	26
2.6	Grafos de Euler e grafos de Hamilton	29
	Grafos de Euler	29
	O Problema do Carteiro Chinês	33
	Grafos de Hamilton	36
	O Problema do Caixeiro Viajante	40
<b>3</b>	<b>Grafos e Colorações</b>	<b>42</b>
3.1	Independente e clique	43
3.2	Número Cromático	44
3.3	Coloração de Arestas	49

<b>3.4 Puzzle Sudoku .....</b>	<b>51</b>
<b>4 Aplicações da Teoria dos Grafos no Ensino básico e secundário.....</b>	<b>59</b>
<b>4.1 Aplicações 1º ciclo do Ensino básico .....</b>	<b>59</b>
<b>4.2 Aplicações no 2º e 3ºciclos e no ensino secundário .....</b>	<b>66</b>
<b>5 Conclusão.....</b>	<b>67</b>
<b>Bibliografia .....</b>	<b>68</b>

## Lista de Figuras

<b>Figura 1.1</b> Esquema do Problema das Pontes de Königsberg.....	1
<b>Figura 1.2</b> Grafo da situação das pontes de Königsberg.....	2
<b>Figura 2.1</b> Grafo $G$ e digrafo $H$ .....	4
<b>Figura 2.2</b> Um multigrafo .....	5
<b>Figura 2.3</b> Um grafo simples. ....	6
<b>Figura 2.4</b> Grafo complementar, $G^c$ , do grafo $G$ da Figura 2.3. ....	8
<b>Figura 2.5</b> Grafo simples de ordem 5.....	12
<b>Figura 2.6</b> Grafo completo $K_5$ .....	12
<b>Figura 2.7</b> O grafo $H$ é subgrafo do grafo $K_5$ , o grafo $S$ é o subgrafo de $K_5$ induzido por $\hat{V} = v_1, v_2, v_3, v_4$ e o grafo $M$ é um subgrafo abrangente do grafo $K_5$ .....	13
<b>Figura 2.8</b> Grafo bipartido $K_{3,2}$ .....	16
<b>Figura 2.9</b> Grafo simples ponderado $G$ .....	20
<b>Figura 2.10</b> Floresta com duas árvores .....	22
<b>Figura 2.11</b> Exemplos de árvores abrangentes do grafo $K_5$ da Figura 2.6.....	24
<b>Figura 2.12</b> Grafo simples ponderado $H$ .....	25
<b>Figura 2.13</b> Árvore abrangente de custo mínimo do grafo da Figura 2.12, obtida pelo algoritmo de Kruskal .....	26
<b>Figura 2.14</b> O grafo $M$ é euleriano e o grafo $H$ é semi-euleriano. ....	30
<b>Figura 2.15</b> Grafo ponderado exemplo para um problema do carteiro chinês.....	34
<b>Figura 2.16</b> Duplicação de arestas no grafo ponderado da Figura 2.15. ....	34
<b>Figura 2.17</b> Grafo ponderado para aplicação do problema do carteiro chinês.....	35
<b>Figura 2.18</b> Duplicação de arestas no grafo da Figura 2.17.....	36

<b>Figura 2.19</b> Jogo de Hamilton, consiste em percorrer todos os vértices uma única vez e regressar ao ponto de partida[11].....	37
<b>Figura 2.20</b> Resolução do jogo de Hamilton da Figura 2.19 [11]. .....	37
<b>Figura 2.21</b> A origem de um ciclo de Hamilton .....	38
<b>Figura 2.22</b> Grafo $G = (V, E)$ com $v(G) = 6$ . .....	39
<b>Figura 2.23</b> Grafo representativo da Tabela 2.6.....	41
<b>Figura 3.1</b> 3 – coloração do grafo $G = (V, E)$ .....	46
<b>Figura 3.2</b> Grafo que representa a Tabela 3.1. ....	48
<b>Figura 3.3</b> Coloração do grafo da Figura 3.2. ....	48
<b>Figura 3.4</b> Grafo que representa os pares formados. ....	49
<b>Figura 3.5</b> Coloração das arestas do grafo da Figura 3.4 .....	50
<b>Figura 3.6</b> Um puzzle Sudoku preenchido .....	52
<b>Figura 4.1</b> Resolução do Exemplo 4.1.....	61
<b>Figura 4.2</b> Ordenação das regiões do mapa do Exemplo 4.2.....	62

## Tabelas

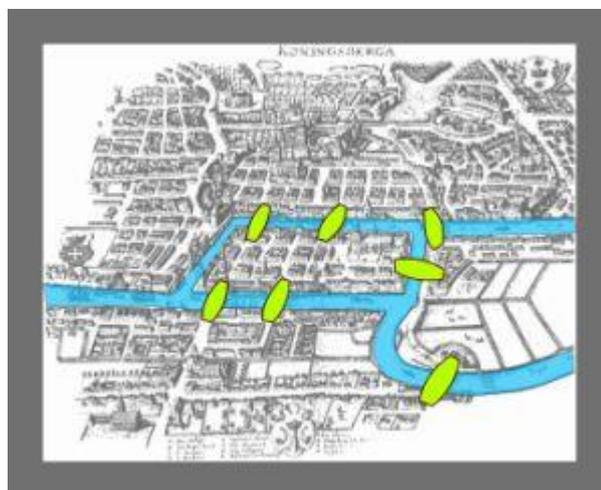
<b>Tabela 2.1</b> Distâncias entre vértices do grafo representado na Figura 2.2. ....	11
<b>Tabela 2.2</b> Aplicação do algoritmo de Dijkstra no grafo G da Figura 2.9.....	21
<b>Tabela 2.3</b> Aplicação do algoritmo de Kruskal ao grafo da Figura 2.12.....	26
<b>Tabela 2.4</b> Aplicação do algoritmo de Prim ao grafo da Figura 2.12. ....	29
<b>Tabela 2.5</b> Aplicação do Algoritmo de Dijkstra ao grafo da Figura 2.17.....	36
<b>Tabela 2.6</b> Distâncias em quilómetros ( <i>km</i> ) entre as aldeias Alecrim, Bonina, Cravo, Dália e Estrelícia.....	40
<b>Tabela 3.1</b> Tabela de incompatibilidades das espécies de peixes (Guppy, Barbo-tigre, Tetra-néon, Discus, “Limpa-vidros”, Tubarão-martelo) .....	47
<b>Tabela 3.2</b> Puzzle Sudoku $4 \times 4$ .....	53
<b>Tabela 3.3</b> Preenchimento do puzzle Sudoku da Tabela 3.2.....	54
<b>Tabela 3.4</b> Preenchimento do puzzle da Tabela 3.2. ....	54
<b>Tabela 3.5</b> Preenchimento do puzzle da Tabela 3.2. ....	54
<b>Tabela 3.6</b> Resolução do puzzle da Tabela 3.2.....	55
<b>Tabela 3.7</b> Puzzle sudoku $4 \times 4$ .....	55
<b>Tabela 3.8</b> Soluções do puzzle da Tabela 3.7.....	55
<b>Tabela 3.9</b> Puzzle de Sudoku $9 \times 9$ .....	56
<b>Tabela 3.10</b> Coloração do puzzle da Tabela 3.9. ....	57
<b>Tabela 3.11</b> Preenchimento do puzzle da Tabela 3.9. ....	57
<b>Tabela 3.12</b> Solução do puzzle Sudoku da Tabela 3.9. ....	58



# 1 Introdução

A Teoria dos grafos é uma ferramenta Matemática muito utilizada na modelação de situações reais. Um grafo pode ser representado através de um diagrama de pontos e linhas. Esta representação simples permite modelar uma grande variedade de problemas em áreas tão diversas como redes de comunicação, redes de transportes, Genética, Química e Ciências sociais.

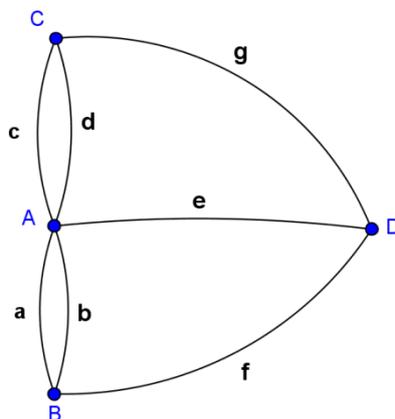
É de consenso geral (ver, por exemplo, [5]) que a Teoria dos Grafos tem a sua origem num problema recreativo, conhecido como as sete pontes de Königsberg, e que foi resolvido por Euler em 1735. A cidade de Königsberg, na Prússia, é atravessada pelo rio Pregel que se divide em dois canais, e no qual existe uma ilha. Em 1735 existiam sete pontes sobre o rio Pregel que permitiam aos habitantes o acesso às várias partes da cidade: a ilha, as margens do rio e a zona entre os canais (ver Figura 1.1). O problema consistia em determinar se era possível dar um passeio atravessando cada uma das pontes uma única vez e voltando ao ponto de partida.



**Figura 1.1** Esquema do Problema das Pontes de Königsberg

Euler eliminou tudo o que era acessório para a resolução do problema (por exemplo, a geografia da cidade), e elaborou um esquema análogo ao da Figura 1.2, onde representou as quatro partes da cidade (a ilha, as duas margens do rio e a zona entre os dois canais) através de quatro pontos, representados na Figura 1.2 por A, B, C e D,

unindo estes pontos através de linhas que representam as pontes.



**Figura 1.2** Grafo da situação das pontes de Königsberg.

Ao descrever desta forma o problema das pontes de Königsberg, Euler fomentou o início da disciplina que, com o decorrer dos anos, cresceu até se transformar no que na atualidade conhecemos por Teoria dos Grafos.

No ensino básico e secundário, as atividades relacionadas com a Teoria dos Grafos podem motivar os alunos para o estudo da Matemática. A Teoria dos Grafos é apresentada como uma ferramenta matemática na resolução de diversos problemas do cotidiano ou atividades meramente lúdicas. O recurso a esquemas simples, como os grafos, na organização dos dados e na estruturação das ideias, promove o desenvolvimento do raciocínio dos alunos introduzindo uma nova Matemática, menos mecânica e mais entrelaçada com a realidade. Fazendo uma leitura pelo programa de matemática do ensino básico é evidente a importância deste assunto [16]: *«Os alunos devem ser capazes de raciocinar matematicamente usando os conceitos, representações e procedimentos matemáticos. Os alunos devem ser capazes de resolver problemas. Isto é, devem ser capazes de: compreender problemas em contextos matemáticos e não matemáticos e de os resolver utilizando estratégias apropriadas; monitorizar o seu trabalho e refletir sobre a adequação das suas estratégias, reconhecendo situações em que podem ser utilizadas estratégias diferentes; formular problemas.»*

O objetivo desta dissertação é apresentar alguns problemas da Teoria dos Grafos bem como alguns exemplos de atividades em que estes são abordados nos diferentes

ciclos do ensino básico e no ensino secundário.

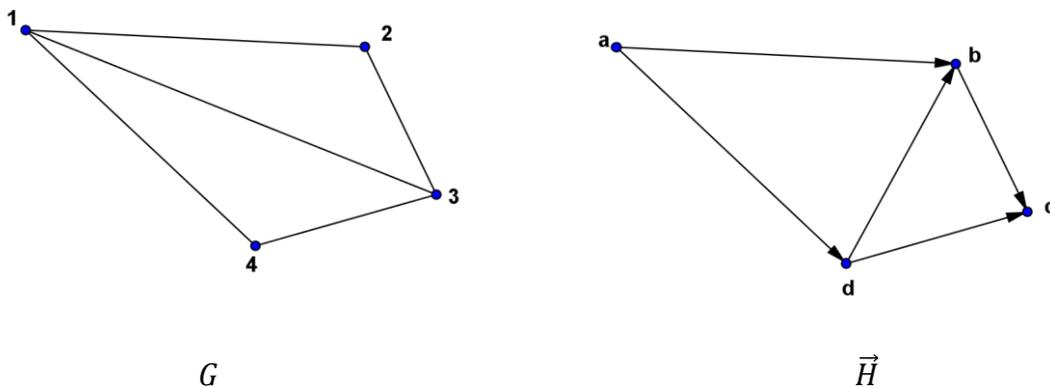
No segundo capítulo apresentamos alguns conceitos e resultados básicos da Teoria dos Grafos e reunimos alguns problemas bem conhecidos desta. Na secção 2.3 abordamos o problema do caminho mais curto em grafos pesados e a sua resolução através do algoritmo de Dijkstra. Na secção 2.4 apresentamos uma caracterização das árvores e na secção 2.5, o problema da árvore de custo mínimo, bem como os algoritmos de Kruskal e de Prim para a resolução deste problema. Na secção 2.6 são apresentadas algumas propriedades dos grafos de Euler e de Hamilton e abordamos os problemas do carteiro chinês e o do caixeiro viajante. No terceiro capítulo fazemos uma breve incursão pela coloração de grafos e analisamos a sua aplicação ao jogo do Sudoku. Por último, no quarto capítulo fazemos a análise de alguns conteúdos abordados no ensino básico e secundário com recurso à Teoria dos Grafos. Com o intuito de evidenciar as suas potencialidades inerentes e as da sua exploração na sala de aula, apresentamos um conjunto de tarefas que constituem uma sugestão para a abordagem e desenvolvimento de conteúdos constantes na disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais.

## 2 Grafos e Aplicações

Os grafos são estruturas abstratas que representam relações existentes num conjunto de elementos. Muitos problemas no mundo real podem ser resolvidos com o recurso a modelos de grafos. Neste capítulo apresentamos alguns conceitos e resultados básicos da Teoria dos Grafos que podem ser encontrados em muitos textos sobre esta área, por exemplo, [9], [12]. As notações e terminologias usadas são as mais frequentemente encontradas na literatura recente; seguimos aqui [9].

**Definição 2.1** Designa-se por grafo um terno  $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ , onde  $V = V(G)$  é um conjunto não vazio,  $E = E(G)$  é um conjunto disjunto de  $V$  e  $\psi_G(e)$  indica um par não ordenado de elementos (não necessariamente distintos) de  $V$ . Por conseguinte,  $V$  designa-se por conjunto dos vértices,  $E$  por conjunto das arestas e  $\psi_G$  por função de incidência.

Quando a função de incidência determina, para cada  $e \in E$ , um par ordenado de elementos de  $V$ , o terno  $\vec{G} = (V(\vec{G}), E(\vec{G}), \psi_{\vec{G}})$ , designa-se por grafo orientado ou digrafo e o conjunto  $E = E(\vec{G})$  designa-se por conjunto dos arcos. Na Figura 2.1, encontram-se representados um grafo  $G$  e um digrafo  $\vec{H}$ .



**Figura 2.1** Grafo  $G$  e digrafo  $\vec{H}$

Dado um grafo (resp., digrafo)  $G = (V(G), E(G), \psi(G))$  e uma aresta (resp., um arco)  $e$  tal que  $\psi(e) = \{u, v\}$  (resp.,  $\psi(e) = (u, v)$ ), por simplicidade de escrita, escrevemos  $\psi(e) = uv$ .

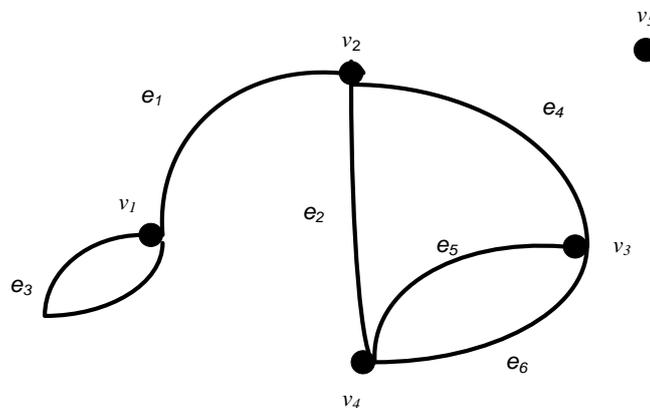
Os vértices  $u$  e  $v$  são designados por vértices extremos da aresta (resp., do arco)  $e$ . Se  $G$  é um grafo orientado, o vértice  $u$  designa-se por cauda e o vértice  $v$  por cabeça do arco  $e$ . A aresta (resp., o arco)  $e$  diz-se incidente nos vértices  $u$  e  $v$  e estes vértices dizem-se adjacentes.

O conjunto de todos os vértices adjacentes a um vértice  $v \in V(G)$  designa-se por *vizinhança* de  $v$  e denota-se por  $\mathcal{N}_G(v)$  ou  $\mathcal{N}(v)$ , quando não há dúvida em relação ao grafo a considerar.

Uma aresta  $e$  diz-se um *lacete* ou *laço* quando os seus vértices extremos coincidem, ou seja, se  $\psi_G(e) = vv$ . Duas arestas com os mesmos vértices extremos designam-se por arestas *paralelas* e dois arcos com a mesma cauda e cabeça dizem-se arcos paralelos.

Um vértice diz-se *isolado* quando não é vértice extremo de qualquer aresta do grafo.

Um grafo  $G = (G(V), E(V), \psi_G(G))$ , com  $V \neq \emptyset$ , que não contenha qualquer aresta diz-se *grafo nulo*.



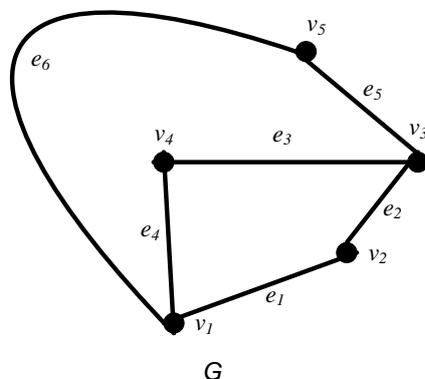
**Figura 2.2** Um multigrafo

Para o grafo  $G = (V(G), E(G), \psi(G))$ , representado na Figura 2.2 tem-se

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ,  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ ,  $\psi(e_1) = v_1v_2$ ,  $\psi(e_2) = v_2v_4$ ,

$\psi(e_3) = v_1v_1$ ,  $\psi(e_4) = v_2v_3$ ,  $\psi(e_5) = v_3v_4$  e  $\psi(e_6) = v_4v_3$ . A aresta  $e_3$  é um lacete e as arestas  $e_5$  e  $e_6$  são arestas paralelas. O vértice  $v_5$  é um vértice isolado, pois não é extremo de nenhuma aresta do grafo  $G$ .

**Definição 2.2** Um grafo (resp., digrafo) diz-se *simples* se não contém arestas paralelas (resp., arcos paralelos) nem lacetes.



**Figura 2.3** Um grafo simples.

Um grafo (resp., digrafo) simples  $G$  pode ser definido unicamente, pelo par de conjuntos  $G = (V(G), E(G))$ , (ou simplesmente  $G = (V, E)$ ) onde cada elemento de  $E(G)$  se denota pelo correspondente par não orientado (resp., orientado) de vértices  $uv$ . Um grafo (resp., digrafo) com lacetes e/ou arestas paralelas (resp., arcos paralelos) designa-se por *multigrafo* (resp., *multidigrafo*).

A Figura 2.3 representa um grafo simples  $G = (V, E)$ , onde  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  e  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\} = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1, v_3v_5, v_5v_1\}$ .

Um grafo simples com um único vértice designa-se por *grafo trivial*.

Um grafo  $G$  diz-se um grafo finito se os conjuntos  $V(G)$  e  $E(G)$  são ambos finitos.

O número de vértices  $|V(G)|$ , designa-se por *ordem de  $G$*  e denota-se por  $v(G)$  ou  $v$ . Por outro lado, o número de arestas  $|E(G)|$  designa-se por *dimensão de  $G$*  e denota-se por  $\varepsilon(G)$  ou, simplesmente, por  $\varepsilon$ .

**Definição 2.3** Dado um grafo  $G = (V, E)$  e um vértice  $v \in V$ , designa-se por *grau* (ou *valência*) de  $v$  e denota-se por  $d_G(v)$  ou, simplesmente, por  $d(v)$ , o número de arestas incidentes no vértice  $v$  (onde cada lacete conta duas vezes). O maior grau dos vértices de  $G$  denota-se por  $\Delta(G)$  e o menor grau por  $\delta(G)$ , ou seja,

$$\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} d_G(v) \text{ e } \delta(G) = \min_{v \in V(G)} d_G(v).$$

Para o grafo da Figura 2.2, tem-se  $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = d(v_4) = 3$  e  $d(v_5) = 0$ , logo  $\delta(G) = 0$  e  $\Delta(G) = 3$ .

Se  $\vec{G}$  é um digrafo e  $v \in V(\vec{G})$ , designa-se por *semigrau de entrada* de  $v$ , e denota-se por  $d_{\vec{G}}^-(v)$ , o número de arcos com cabeça em  $v$ , ou seja,

$$d_{\vec{G}}^-(v) = |\{xv \in E(\vec{G}), v \in V(\vec{G})\}|.$$

O *semigrau de saída* de  $v$  denota-se por  $d_{\vec{G}}^+(v)$  e é o número de arcos com cauda em  $v$ , ou seja,

$$d_{\vec{G}}^+(v) = |\{vx \in E(\vec{G}), v \in V(\vec{G})\}|.$$

Facilmente se conclui que  $d_{\vec{G}}(v) = d_{\vec{G}}^-(v) + d_{\vec{G}}^+(v)$ . Para o digrafo  $\vec{H}$  da Figura 2.1, vem  $d^-(a) = 0$ ,  $d^+(a) = 2$ ,  $d(a) = 2$ ,  $d^-(b) = 2$ ,  $d^+(b) = 1$ ,  $d(b) = 3$ ,  $d^-(c) = 2$ ,  $d^+(c) = 0$ ,  $d(c) = 2$  e  $d^-(d) = 1$ ,  $d^+(d) = 2$ ,  $d(d) = 3$ .

**Teorema 2.1** Para todo o grafo  $G = (V, E)$ , a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,

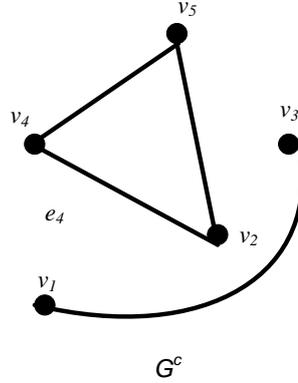
$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|.$$

**Demonstração:** Se somarmos os graus de todos os vértices, obtemos o número de arestas multiplicado por dois, pois contamos cada aresta duas vezes (cada aresta está associada a dois vértices ou, no caso dos lacetes, está associada a um só vértice mas contribui com duas unidades para o grau desse vértice). ■

Como consequência do Teorema 2.1 tem-se que o número de vértices de grau ímpar de qualquer grafo é par.

**Definição 2.4** Dado um grafo simples  $G = (V(G), E(G))$ , designa-se por *grafo complementar de  $G$*  e denota-se por  $G^c$ , o grafo simples cujo conjunto de vértices é  $V(G)$  e no qual dois vértices são adjacentes se e só se não são adjacentes em  $G$ , ou seja,  $e \in E(G^c) \Leftrightarrow e \notin E(G)$ .

Da Definição 2.4, vem que  $|E(G^c)| + |E(G)| = \binom{v}{2}$ , onde  $v = |V(G)| = |V(G^c)|$ .



**Figura 2.4** Grafo complementar,  $G^c$ , do grafo  $G$  da Figura 2.3.

Uma forma muito comum de representar um grafo é através de uma representação matricial. Existem várias matrizes de representação de grafos, destacamos aqui as matrizes de incidência e adjacência.

**Definição 2.5** Dado um grafo  $G = (V, E)$ , tal que  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_v\}$  e  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_\varepsilon\}$ . Designa-se por *matriz de incidência aresta-vértice de  $G$*  ou, simplesmente, *matriz de incidência de  $G$* , a matriz  $M_G = (m_{ij})$ ,  $1 \leq i \leq v$ ,  $1 \leq j \leq \varepsilon$ , tal que

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } e_j = v_p v_q, \text{ com } i \notin \{p, q\}; \\ 1, & \text{se } e_j = v_i v_k, \text{ com } k \neq i; \\ 2, & \text{se } e_j = v_i v_i. \end{cases}$$

Caso  $\vec{G}$  seja um grafo orientado sem lacetes, as entradas da matriz de incidência  $M_{\vec{G}} = (m_{ij})$  são definidas por

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } e_j = v_p v_q, \text{ com } i \notin \{p, q\}; \\ -1, & \text{se } e_j = v_k v_i, \text{ para algum vértice } v_k; \\ 2, & \text{se } e_j = v_i v_k, \text{ para algum vértice } v_k. \end{cases}$$

**Definição 2.6** Dado um grafo  $G = (V, E)$ , tal que  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_v\}$ , designa-se por *matriz de adjacência dos vértices de  $G$*  ou, simplesmente, *matriz de adjacência de  $G$*  e denota-se por  $A_G = (a_{ij})$ , a matriz de dimensão  $v \times v$ , tal que  $a_{ij}$  é igual a 1 se  $ij \in E$  e

0 em caso contrário. Da Definição 2.6 conclui-se de imediato que a matriz de adjacência de um grafo não orientado é simétrica.

*Exemplo 2.1* Determinemos, então, as matrizes de incidência e adjacência do grafo  $G$  da Figura 2.3. O grafo tem ordem  $v = 5$  e dimensão  $\varepsilon = 6$  sendo  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  e  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ , com  $e_1 = v_1v_2$ ,  $e_2 = v_2v_3$ ,  $e_3 = v_3v_4$ ,  $e_4 = v_4v_1$ ,  $e_5 = v_3v_5$ ,  $e_6 = v_5v_1$ . Consequentemente, a matriz de incidência vem dada por

$$M_G = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

e a matriz de adjacência é dada por

$$A_G = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Existem grafos distintos que admitem representações matriciais idênticas, se redefinirmos a etiquetagem dos vértices e das arestas.

**Definição 2.7** Dois grafos  $G = (V(G), E(G), \psi_G)$  e  $H = (V(H), E(H), \psi_H)$  dizem-se isomorfos, denotando-se esta relação de isomorfismo por  $G \cong H$ , se existem duas bijeções<sup>1</sup>  $\varphi: V(G) \rightarrow V(H)$  e  $\theta: E(G) \rightarrow E(H)$  tais que  $\psi_G(e) = uv$  se e só se  $\psi_H(\theta(e)) = \varphi(u)\varphi(v)$ .

<sup>1</sup> Bijeção entre um conjunto A e um conjunto B é uma correspondência biunívoca entre A e B, isto é, a cada elemento de A corresponde sempre um único elemento de B e reciprocamente.

Podemos assim dizer que um isomorfismo entre dois grafos  $G$  e  $H$  é uma bijeção  $\varphi$  de  $V(G)$  em  $V(H)$  tal que dois vértices  $v$  e  $w$  são adjacentes em  $G$  se e somente se  $\varphi(v)$  e  $\varphi(w)$  são adjacentes em  $H$ .

## 2.1 Conceitos métricos

Introduziremos agora os conceitos de *passeio*, *trajeto* e *caminho* num grafo qualquer.

**Definição 2.8** Seja  $G = (V, E)$  um grafo.

(a) Designa-se por *passeio* em  $G$  toda a sequência não vazia

$P = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k$ , tal que  $v_0, v_1, \dots, v_k \in V$ ,  $e_1, e_2, \dots, e_k \in E$ . Os vértices  $v_{i-1}$  e  $v_i$  são os vértices extremos da aresta  $e_i$ , para  $i = 1, \dots, k$ . O vértice  $v_0$  designa-se por vértice inicial, o vértice  $v_k$  designa-se por vértice final e os vértices  $v_1, \dots, v_{k-1}$  designam-se por vértices intermédios do passeio  $P$ .

(b) Um *trajeto*, entre os vértices  $v_0$  e  $v_k$  é um passeio em que todas as arestas são distintas. Um *trajeto* com  $k \geq 3$  e tal que  $v_0 = v_k$ , designa-se por *circuito* (ou *trajeto fechado*).

(c) Um *caminho* entre os vértices  $v_0$  e  $v_k$  é um passeio em que todos os vértices intermédios são distintos entre si e distintos dos vértices inicial e final. Um caminho em que o vértice inicial e final coincidem designa-se por *ciclo*.

Nos grafos simples todas as arestas são determinadas pelos seus vértices extremos, conseqüentemente, um passeio é determinado pela sequência dos sucessivos vértices (ou seja,  $P = v_0 v_1 \dots v_k$ ).

Um passeio, um trajeto ou um caminho entre os vértices  $v_0$  e  $v_k$ , também se designam por  $(v_0, v_k)$  – *passeio*,  $(v_0, v_k)$  – *trajeto* ou  $(v_0, v_k)$  – *caminho*, respetivamente.

**Definição 2.9** Dado um passeio  $P$  de um grafo  $G$  define-se *comprimento de  $P$* , e denota-se por  $comp(P)$ , como sendo o número de arestas (com eventual repetição) que o constitui.

**Definição 2.10** Seja  $G$  um grafo. Dados dois vértices  $x, y \in V(G)$ , denota-se por  $\mathcal{P}_{x,y}$  o conjunto de todos os  $(x, y)$  – *caminhos de  $G$* . Distância entre vértices de  $G$  é a função  $dist_G: V(G) \times V(G) \rightarrow \{0, \dots, v(G) - 1, \infty\}$  tal que

$$dist_G(x, y) = \begin{cases} \min_{P \in \mathcal{P}_{x,y}} comp(P) & \text{se } \mathcal{P}_{x,y} \neq \emptyset \\ \infty & \text{se } \mathcal{P}_{x,y} = \emptyset \end{cases} .$$

Podemos concluir, pela Definição 2.9 e Definição 2.10, que uma aresta, juntamente com os seus vértices extremos, é um caminho de comprimento 1 e um vértice é um passeio de comprimento 0.

Tomando como exemplo o grafo da Figura 2.2, vamos determinar todas as distâncias entre os seus vértices. Na Tabela 2.1 apresentam-se essas distâncias.

dist	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$
$v_1$	0	1	2	2	$\infty$
$v_2$	1	0	1	1	$\infty$
$v_3$	2	1	0	1	$\infty$
$v_4$	2	1	1	0	$\infty$
$v_5$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0

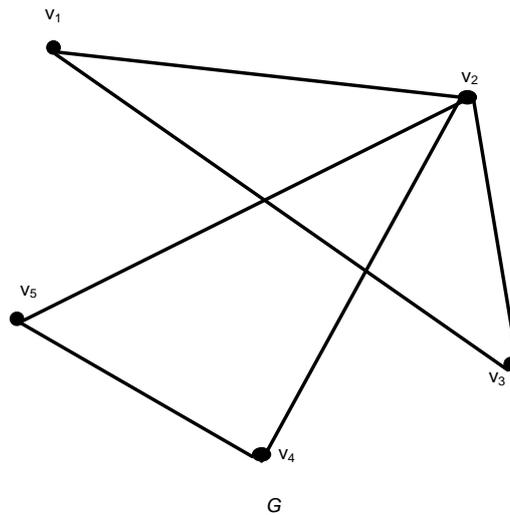
**Tabela 2.1** Distâncias entre vértices do grafo representado na Figura 2.2.

**Teorema 2.2** Seja  $G$  um grafo simples. Se  $\delta(G) \geq 2$ , então  $G$  contém um caminho  $P$  e um ciclo  $C$  tais que  $comp(P) \geq \delta(G)$  e  $comp(C) \geq \delta(G) + 1$ .

**Demonstração :** Seja  $G$  um grafo simples em que todos os seus vértices têm grau superior ou igual a 2 e seja  $P = v_0 \dots v_k$  um caminho de comprimento máximo em  $G$ . Então  $comp(P) = k \geq d(v_k) \geq \delta(G)$  pois todos os vizinhos de  $v_k$  estão em  $P$  (caso contrário, se  $u \in \mathcal{N}(v_k)$  e  $u \notin P$ , o caminho  $P' = v_0 \dots v_k u$  tem comprimento superior ao comprimento de  $P$ ).

Seja  $v_i$  o vértice de  $P$  de menor índice tal que  $v_i \in \mathcal{N}(v_k)$ . Então  $C = v_i v_{i+1} \dots v_k v_i$  é um ciclo e, como  $\mathcal{N}(v_k) \subset \{v_i, \dots, v_{k-1}\}$ ,  $comp(C) \geq d(v_k) + 1 \geq \delta(G) + 1$ .

■

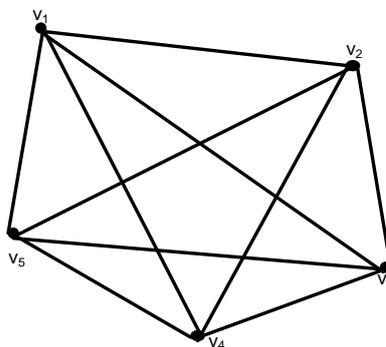


**Figura 2.5** Grafo simples de ordem 5

Na Figura 2.5 encontra-se representado um grafo simples  $G$  com  $\delta(G) = 2$ . Para este grafo, o caminho  $P = v_3v_1v_2v_4v_5$  é um caminho de comprimento máximo, com  $comp(P) = 4 \geq \delta(G) = 2$  e  $C = v_2v_4v_5v_2$  é um ciclo de comprimento 3 que satisfaz  $comp(C) \geq \delta(G) + 1$  na forma de igualdade.

## 2.2 Alguns grafos particulares

**Definição 2.11** Seja  $G = (V, E)$  um grafo simples de ordem  $n \geq 1$ . Diz-se que  $G$  é um *grafo completo* e denota-se por  $K_n$  se todos os seus pares de vértices são adjacentes.



**Figura 2.6** Grafo completo  $K_5$

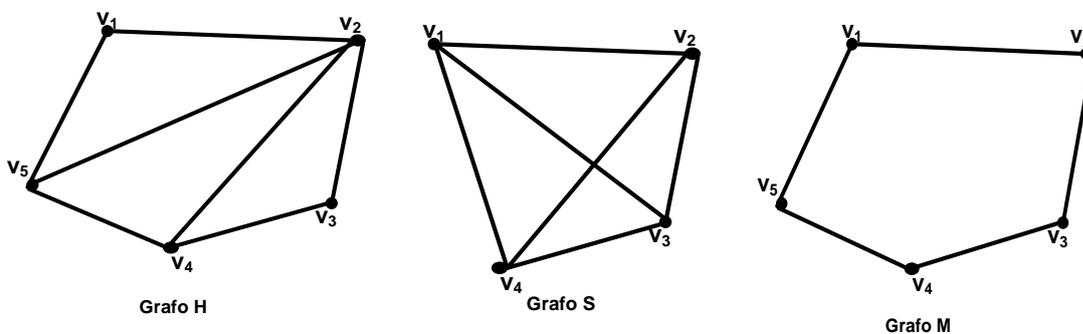
**Definição 2.12** Um grafo diz-se *regular de grau  $k$*  ou  *$k$  – regular* se todos os seus vértices têm grau  $k$ .

**Definição 2.13** Dados dois grafos  $G$  e  $H$ , diz-se que  $H$  é um *subgrafo de  $G$*  e denota-se  $H \subseteq G$ , se  $V(H) \subseteq V(G)$ ,  $E(H) \subseteq E(G)$  e  $\psi_H$  é a restrição de  $\psi_G$  ao conjunto  $E(H)$ . Se  $H \subseteq G$  e  $H \neq G$ , então  $H$  designa-se por *subgrafo próprio de  $G$*  e escreve-se  $H \subset G$ .

**Definição 2.14** Diz-se que um grafo  $H$  é um *subgrafo abrangente* (ou de suporte) do grafo  $G$  se  $H \subseteq G$  e  $V(H) = V(G)$ .

**Definição 2.15** Dado um grafo  $G$  e  $\emptyset \neq \hat{V} \subseteq V(G)$ , designa-se por *subgrafo de  $G$  induzido por  $\hat{V}$*  e denota-se por  $G[\hat{V}]$ , o subgrafo cujo conjunto de vértices é  $\hat{V}$  e o conjunto de arestas contém as arestas de  $G$  com os dois vértices extremos em  $\hat{V}$ .

Por simplicidade de escrita, o subgrafo induzido  $G[V \setminus \hat{V}]$  denota-se por  $G - \hat{V}$ . Se  $\hat{V} = \{v\}$ , em vez de  $G - \{v\}$  escreve-se, simplesmente,  $G - v$ .



**Figura 2.7** O grafo  $H$  é subgrafo do grafo  $K_5$ , o grafo  $S$  é o subgrafo de  $K_5$  induzido por  $\hat{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  e o grafo  $M$  é um subgrafo abrangente do grafo  $K_5$ .

**Definição 2.16** Dado um grafo  $G = (V, E)$  e  $\emptyset \neq \hat{E} \subseteq E$ , designa-se por *subgrafo de  $G$  induzido pelo subconjunto de arestas  $\hat{E}$*  e denota-se por  $G[\hat{E}]$ , o subgrafo cujo conjunto de arestas é  $\hat{E}$  e o conjunto de vértices é constituído pelos vértices extremos das arestas em  $\hat{E}$ .

O subgrafo abrangente cujo conjunto de arestas é  $E \setminus \hat{E}$  denota-se por  $G - \hat{E}$  e, quando  $\hat{E} = \{e\}$ , escreve-se, simplesmente,  $G - e$ .

**Definição 2.17** Um grafo não orientado  $G$  diz-se *conexo* se entre quaisquer dois vértices  $u$  e  $v$  distintos existir um  $(u, v)$  – caminho. Se tal não acontecer, o grafo diz-se *não conexo* ou *desconexo*.

**Definição 2.18** Seja  $G$  um grafo. Um subgrafo  $H$  de  $G$  diz-se uma *componente conexa* de  $G$  se  $H$  é um grafo conexo e não é subgrafo próprio de um subgrafo conexo próprio de  $G$ . Denotamos o número de componentes conexas de um grafo  $G$  por  $cc(G)$ , ou apenas por  $cc$ .

**Definição 2.19** Seja  $G$  um grafo. Dois vértices  $u, v \in V(G)$  dizem-se *conexos* se existe em  $G$  um  $(u, v)$  – caminho.

A relação de conexidade entre vértices é uma relação de equivalência definida no conjunto de vértices  $V(G)$ . Se  $V_1, V_2, \dots, V_k$  são as classes de equivalência desta relação, ou seja, são conjuntos de vértices conexos 2 a 2, então os subgrafos induzidos  $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_k]$  são as componentes conexas de  $G$ .

Da Definição 2.17 e da Definição 2.18, os grafos conexos são os grafos que têm uma única componente conexa.

**Definição 2.20** Seja  $G$  um grafo conexo. Uma aresta  $e$  de  $G$  designa-se por *ponte* se ao ser eliminada transforma o grafo  $G$  num grafo desconexo.

**Teorema 2.3** Seja  $G$  um grafo simples de ordem  $v \geq 1$ . Se  $G$  tem  $cc = cc(G)$  componentes conexas, então verifica-se  $v - cc \leq \varepsilon \leq \binom{v - cc + 1}{2}$ , onde  $\varepsilon = \varepsilon(G)$  denota o número de arestas.

**Demonstração:** Vamos fazer a demonstração da desigualdade à esquerda, aplicando indução sobre o número de arestas de  $E$ . Suponhamos que  $\varepsilon = 0$ , ou seja, o grafo  $G$

não contém arestas apenas contém vértices. De imediato concluímos que  $v = cc$ . Suponhamos que  $\varepsilon > 0$  e para os grafos com  $\varepsilon - 1$  se verifica  $\varepsilon \geq v - cc$ . Considerando  $G$  um grafo com  $\varepsilon$  arestas e seja  $e \in E(G)$ . O grafo  $G - e$  é tal que  $cc(G - e) \in \{cc(G), cc(G) + 1\}$ . Logo,  $cc(G) \geq cc(G - e) - 1$  e, conseqüentemente, aplicando a hipótese de indução a  $G - e$ , vem

$$v - cc(G) \leq v - cc(G - e) + 1 \leq \varepsilon(G - e) + 1 = \varepsilon(G),$$

ou seja,  $v - cc \leq \varepsilon$ .

Vamos, agora, demonstrar a desigualdade  $\varepsilon \leq \binom{v - cc + 1}{2}$ . Tomando um grafo simples  $G$  com  $v$  vértices e  $cc$  componentes conexas, seja  $G'$  o grafo obtido a partir de  $G$  por introdução do número mínimo de arestas de tal forma que cada componente de  $G'$  é um subgrafo completo.

Sejam  $G'[V_1]$  e  $G'[V_2]$  duas componentes de  $G'$  com  $n_1$  e  $n_2$  vértices, respetivamente. Por definição de  $G'$ , as componentes  $G'[V_1]$  e  $G'[V_2]$  são grafos completos, logo podemos afirmar que  $n_1 \geq n_2 > 1$ . Passando um vértice de  $V_2$  para  $V_1$ , eliminamos todas as arestas que ligavam o vértice transferido aos vértices de  $V_2$  e acrescentamos as arestas necessárias para o ligar aos restantes vértices de  $V_1$ , obtemos um novo grafo  $G'$  com o mesmo número de vértices e componentes, mas com um maior número de arestas. Assim, a diferença entre o número de arestas depois e o número de arestas antes da transferência do vértice de  $V_2$  para  $V_1$  é dada por

$$\begin{aligned} & \binom{n_1 + 1}{2} + \binom{n_2 - 1}{2} - \left( \binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2} \right) = \\ & = \frac{1}{2} (n_1(n_1 + 1) - n_1(n_1 - 1) + (n_2 - 1)(n_2 - 2) - n_2(n_2 - 1)) = \\ & = \frac{1}{2} (2n_1 - 2n_2 + 2) = n_1 - n_2 + 1 > 0. \end{aligned}$$

Daqui concluímos que cada vez que procedemos a este tipo de modificação aumentamos o número de arestas. Conseqüentemente, atingimos o valor máximo do número de arestas quando reduzimos, desta forma, todas as componentes menos uma a subgrafos triviais, ou seja, com  $G'$  constituído por uma componente isomorfa a  $K_{v - cc + 1}$  e  $cc - 1$  componentes triviais (vértices isolados).

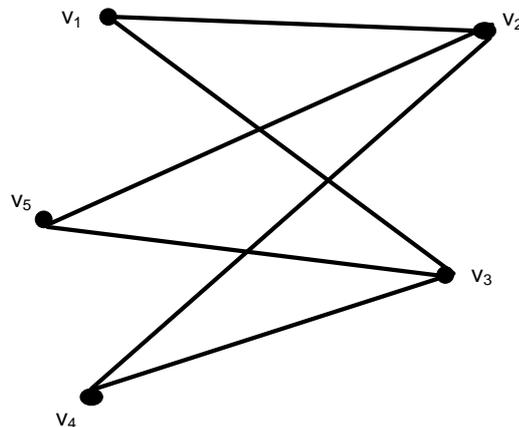
Conclui-se, assim, que  $\varepsilon(G) \leq \varepsilon(G') \leq \binom{v - cc + 1}{2}$ .

■

No caso particular em que  $G$  é um grafo conexo, ou seja,  $cc = 1$ , obtém-se o Corolário 2.1.

**Corolário 2.1** Se  $G$  é um grafo conexo de ordem  $v$  então  $G$  tem pelo menos  $v - 1$  arestas.

**Definição 2.21** Um grafo  $G$  diz-se *bipartido* se existe uma partição do conjunto dos seus vértices  $V$  em subconjuntos  $X$  e  $Y$ , tal que não existe qualquer aresta que una dois vértices pertencentes ao mesmo elemento da partição. A partição  $(X, Y)$  designa-se por bipartição dos vértices e o grafo  $G$  denota-se pelo terno  $(X, Y, E)$ , onde  $E = E(G)$ .



**Figura 2.8** Grafo bipartido  $K_{3,2}$

**Teorema 2.4** Um grafo  $G$  é bipartido se e só se não tem circuitos de comprimento ímpar.

**Demonstração:** Seja  $G$  um grafo bipartido e  $(X, Y)$  uma bipartição dos vértices do grafo  $G$ . Se  $G$  não tem circuitos então  $G$  não tem circuitos de comprimento ímpar. Seja, então,  $C = v_1 v_2 \dots v_k v_1$  um circuito de  $G$ . Sem perda de generalidade, assumiremos  $v_1 \in X$ . Da definição de grafo bipartido, temos  $v_2 \in Y$ ,  $v_3 \in X$ , e assim sucessivamente, ou seja,  $v_i \in X$  para todo  $i$  ímpar e  $v_i \in Y$  para todo o  $i$  par. Como  $v_k$  é adjacente a  $v_1$  (pois  $C$  é um circuito),  $k$  é par e, dado que  $comp(C) = k$ , então  $C$  é um circuito de comprimento par.

Provamos agora o recíproco, ou seja, se um grafo não tem circuitos de comprimento ímpar, então o grafo é bipartido. Tendo em conta que um grafo é bipartido se e só se todas as suas componentes são subgrafos bipartidos, seja  $G$  um grafo conexo sem circuitos de comprimento ímpar. Consideremos um vértice arbitrário  $w \in V(G)$  e seja  $X = \{x \in V(G): d_G(w, x) \text{ é ímpar}\}$ . Nestas condições, não existem arestas que liguem vértices de  $X$ . Por outro lado, como todos os vértices de  $V(G) \setminus X$  estão a uma distância par de  $w$ , não existem vértices adjacentes em  $V(G) \setminus X$  (tendo em conta que  $G$  não contém circuitos ímpares). Logo, fazendo  $Y = V(G) \setminus X$ , obtém-se a bipartição dos vértices  $(X, Y)$  e  $G = (X, Y, E)$  é um grafo bipartido. ■

**Definição 2.22** Um grafo bipartido  $G = (X, Y, E)$  tal que para quaisquer  $x \in X, y \in Y$ , se tem  $xy \in E(G)$ , designa-se por *grafo bipartido completo* e denota-se por  $K_{m,n}$ , onde  $m = |X|$  e  $n = |Y|$ .

Um exemplo de um grafo bipartido completo é o grafo  $K_{3,2}$  representado na Figura 2.8.

## 2.3 O Problema do caminho mais curto

Nesta secção vamos considerar um grafo (resp., digrafo) cujas arestas (resp., arcos) têm associado um valor numérico, designado *peso* ou *custo*. Quando o grafo modela um problema real, os pesos podem representar distâncias, custos, tempos de percursos, etc.

Um grafo  $G = (V, E)$  com pesos  $\omega_{ij} \in \mathbb{R}$ , onde  $ij \in E$ , designa-se por *grafo pesado* ou *rede* e denota-se por  $G = (G, E, W)$ . Os pesos podem ser representados por uma matriz de pesos  $W = [\omega_{ij}]$  de ordem  $|V|$ , onde  $\omega_{ii} = 0$ ,  $\omega_{ij} \neq 0$  para  $ij \in E$  e  $\omega_{ij} = \infty$ , se  $ij \notin E$ .

Exemplo 2.1 Matriz dos custos do grafo representado na Figura 2.9:

$$w = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 9 & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 3 & 0 & \infty & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty \\ 9 & \infty & 0 & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & \infty & 0 & \infty & 4 & \infty & \infty \\ \infty & 6 & \infty & \infty & 0 & \infty & 3 & 12 \\ \infty & \infty & 7 & 4 & \infty & 0 & \infty & 13 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & 0 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 12 & 13 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Existem muitas aplicações reais de problemas definidas em redes, por exemplo, redes de transportes, redes de comunicações, redes sociais, etc. Nesta secção apresentamos um problema de otimização em redes, usualmente designado por problema do caminho mais curto, e um algoritmo para a resolução de uma vasta família destes problemas. Dado um caminho  $P' = v_0 v_1 \dots v_k$ , o peso ou custo do caminho  $P$  denota-se por  $\omega(P)$  e obtém-se somando os pesos associados às arestas de  $P$ , ou seja,  $\omega(P) = \sum_{ij \in E(P)} \omega_{ij}$ , onde  $E(P)$  é o conjunto das arestas pertencentes a  $P$ .

Seja  $G = (V, E, \omega)$  um grafo pesado conexo,  $s, t \in V$  (com  $s \neq t$ ) e seja  $\mathcal{P}_{st}$  o conjunto dos caminhos em  $G$  com início no vértice  $s$  e término no vértice  $t$ . O problema do caminho mais curto de  $s$  para  $t$  consiste em determinar um caminho com peso mínimo de entre os caminhos que unem  $s$  a  $t$ , isto é, determinar  $P \in \mathcal{P}_{st}$  tal que  $\omega(P) = \min\{\omega(P') : P' \in \mathcal{P}_{st}\}$ .

## Algoritmo de Dijkstra

De acordo com [9], o algoritmo de Dijkstra, foi concebido pelo cientista de computação holandês Edsger Dijkstra (1930-2002) em 1956 e foi publicado em 1959. Trata-se de um dos algoritmos mais conhecidos para a determinação do caminho mais curto de um vértice inicial  $s$  para um vértice terminal  $t$ , num grafo conexo com pesos não negativos. Este algoritmo pode ser estendido para a determinação dos caminhos mais curtos de  $s$  para os restantes vértices.

Seja  $G = (V, E)$  um grafo pesado e  $\omega(u, v) \in \mathbb{R}_0^+$  o peso da aresta  $uv \in E(G)$ . Segue-se uma breve explicação das notações usadas no algoritmo.

Denotamos por  $P[v]$  o peso do caminho mais curto entre os vértices  $s$  e  $v$ , de entre os caminhos já determinados.

O *Antecessor* do vértice  $v$  no caminho mais curto entre  $s$  e  $v$ , de entre os já determinados, denota-se por  $Antecessor[v]$ .

O algoritmo de Dijkstra parte o conjunto dos vértices do grafo em dois subconjuntos: o conjunto dos vértices com peso temporário, que designamos por *Temporários* e o conjunto dos vértices com peso definitivos que designamos por vértices permanentes. Em cada iteração do algoritmo, um vértice  $u$  passa a permanente e verifica-se se é possível obter um caminho com menor peso (caminho mais curto) de  $s$  até cada um dos vértices temporários, passando pelo vértice  $u$ . O algoritmo termina quando  $t$  passa a permanente.

**Entradas:** grafo  $G = (V, E, W)$  e vértices  $s$  e  $t$ .

**Saídas:**  $Peso[t]$ ,  $Antecessor$

1. **Para** todo  $v \in V$  **fazer**

$Peso[v] := \infty$ ;

$Antecessor[v] := 0$ ;

$Peso[s] := 0$ ;

$Temporários := V \setminus \{s\}$ ;

$z := s$ ;

2. **Repetir**

$P := \infty$ ;

**Para** todo  $u \in Temporários$  **fazer**

**Se**  $Peso[u] > Peso[z] + \omega(z, u)$  **então**

$Peso[u] := Peso[z] + \omega(z, u)$

$Antecessor[u] := z$

**Se**  $Peso[u] \leq P$  **então**

$x := u;$

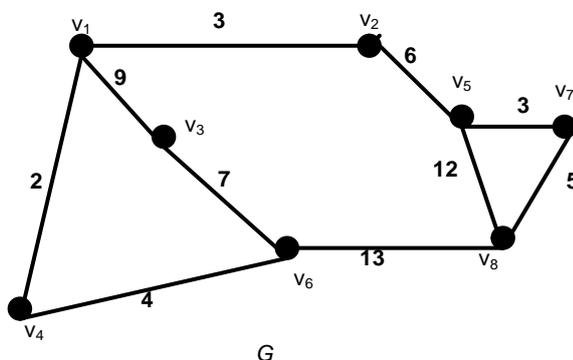
$P := Peso[u];$

$Temporarios := Temp. \setminus \{x\};$

$z := x;$

Até  $x = t;$

Devolver  $Peso[t]$ , *Antecessor*.



**Figura 2.9** Grafo simples ponderado  $G$

A descrição feita para o algoritmo de Dijkstra foi baseada em [9].

Vamos aplicar o algoritmo de Dijkstra na determinação de um caminho mais curto entre os vértices  $v_1$  e  $v_8$  do grafo  $G$  da Figura 2.9, onde interpretamos os pesos como a distância entre os vértices que representam, por exemplo, cidades. Para ilustrar a progressão do algoritmo vamos utilizar a Tabela 2.2. Na segunda linha da tabela temos a iniciação (ponto 1) do algoritmo e nas linhas seguintes a execução do ciclo (ponto 2 do algoritmo).

Vértices Iteração	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	Temporários
Início	$(0, v_1)$	$(\infty, 0)$	$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\},$ $z \leftarrow v_1$						
2ª		$(3, v_1)$	$(9, v_1)$	$(2, v_1)$	$(\infty, 0)$	$(\infty, 0)$	$(\infty, 0)$	$(\infty, 0)$	$\{v_2, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8\},$ $z \leftarrow v_4$
3ª		$(3, v_1)$	$(9, v_1)$		$(\infty, 0)$	$(6, v_4)$	$(\infty, 0)$	$(\infty, 0)$	$\{v_3, v_5, v_6, v_7, v_8\},$ $z \leftarrow v_2$

4 <sup>a</sup>			(9, $v_1$ )		(9, $v_2$ )	(6, $v_4$ )	( $\infty$ , 0)	( $\infty$ , 0)	$\{v_3, v_5, v_7, v_8\}$ , $z \leftarrow v_6$
5 <sup>a</sup>			(9, $v_1$ )		(9, $v_2$ )		( $\infty$ , 0)	(19, $v_6$ )	$\{v_5, v_7, v_8\}$ , $z \leftarrow v_3$
6 <sup>a</sup>					(9, $v_2$ )		( $\infty$ , 0)	(19, $v_6$ )	$\{v_7, v_8\}$ , $z \leftarrow v_5$
7 <sup>a</sup>							(12, $v_5$ )	(19, $v_6$ )	$\{v_8\}$ , $z \leftarrow v_7$
8 <sup>a</sup>								(17, $v_7$ )	$z \leftarrow v_8$

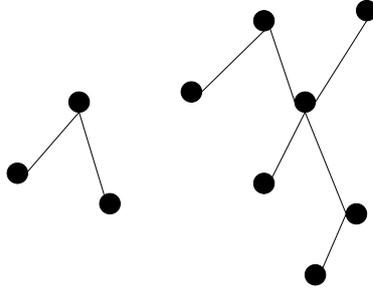
**Tabela 2.2** Aplicação do algoritmo de Dijkstra no grafo G da Figura 2.9.

O algoritmo termina quando  $x = v_8$ . O resultado é  $Peso[v_8] = 17$ , o peso do caminho mais curto entre  $v_1$  e  $v_8$  e este caminho é obtido, recursivamente, da lista dos antecessores, começando com  $Antecessor[v_8] = v_7$ , que é precedido por  $Antecessor[v_7] = v_5$ ,  $Antecessor[v_5] = v_2$ , até obter o vértice inicial com  $Antecessor[v_2] = v_1$ . Logo, o caminho mais curto de  $v_1$  a  $v_8$  é  $C = v_1 v_2 v_5 v_7 v_8$  com peso 17.

## 2.4 Árvores

De acordo com [8] e [9], o matemático Arthur Cayley (1821-1895) iniciou em 1857 o estudo das propriedades das árvores tendo desenvolvido, entre outros, um importante trabalho na enumeração de árvores com  $v$  vértices. As árvores constituem uma família muito particular de grafos conexos: para cada  $v \in \mathbb{N}$ , as árvores são os grafos conexos de ordem  $v$  com o menor número de ligações (arestas). Por serem grafos conexos minimais, relativamente ao número de arestas, as árvores são frequentemente usadas para modelar problemas reais em que se pretende ligar estruturas com o menor número de ligações, atendendo a custos de ligações associados. Nesta secção começamos por apresentar uma caracterização das árvores e apresentamos o problema de determinação de um subgrafo abrangente acíclico com peso mínimo de um grafo conexo pesado.

**Definição 2.23** Um grafo simples  $G$  diz-se *uma floresta* se  $G$  não contém ciclos. Uma floresta conexa designa-se por *árvore*.



**Figura 2.10** Floresta com duas árvores

O teorema seguinte caracteriza as árvores.

**Teorema 2.5** Seja  $G = (V, E)$  um grafo simples com  $v$  vértices. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- a.*  $G$  é uma árvore.
- b.*  $G$  não tem ciclos e tem  $v - 1$  arestas.
- c.*  $G$  é conexo e tem  $v - 1$  arestas.
- d.*  $G$  é conexo e cada aresta é uma ponte.
- e.* Quaisquer dois vértices de  $G$  estão ligados por um único caminho.
- f.*  $G$  não contém ciclos, mas acrescentando uma aresta obtém-se um ciclo.

**Demonstração:** Mostraremos que as afirmações são equivalentes, demonstrando

$$a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow d \Rightarrow e \Rightarrow f \Rightarrow a$$

**$a \Rightarrow b$ :** Vamos demonstrar por indução sobre o número de vértices. Se  $v = 1$ ,  $G$  é acíclico (por não possuir ciclos) e tem  $v - 1$  arestas (é o grafo trivial). Admitamos, por hipótese de indução que se  $G$  é uma árvore com pelo menos  $v$  ( $v \geq 2$ ) vértices, então  $G$  acíclico e tem  $(v - 1)$  arestas. Como  $G$  é acíclico, a remoção de uma qualquer aresta desconecta o grafo, originando duas componentes conexas,  $G_1$  e  $G_2$ , que são árvores com  $v_1$  e  $v_2$  vértices, respetivamente. Por hipótese de indução, tem-se  $\varepsilon(G_1) = v_1 - 1$  e  $\varepsilon(G_2) = v_2 - 1$ , logo

$$\varepsilon(G) = \varepsilon(G_1) + \varepsilon(G_2) + 1 = v_1 + v_2 - 2 + 1 = v - 1.$$

**$b \Rightarrow c$ :** Seja  $G$  um grafo sem ciclos e com  $v - 1$  arestas e suponhamos que  $G$  é desconexo. Logo, cada componente do grafo  $G$  é um grafo conexo sem ciclos, e, pela Definição 2.23 cada componente de  $G$  é uma árvore. Pelo ponto anterior da prova, o número de vértices de cada componente excede em uma unidade o número de arestas. Como  $G$  tem pelo menos duas componentes, o número de vértices de  $G$ , excede o número total de arestas de  $G$  em pelo menos duas unidades, contrariando a hipótese de que  $G$  tem  $v - 1$  arestas.

**$c \Rightarrow d$ :** Como  $G$  é conexo com  $v - 1$  arestas, a remoção de uma qualquer aresta, torna-o num grafo de  $v$  vértices e com  $v - 2$  arestas, logo, pelo Teorema 2.3,  $G$  é desconexo.

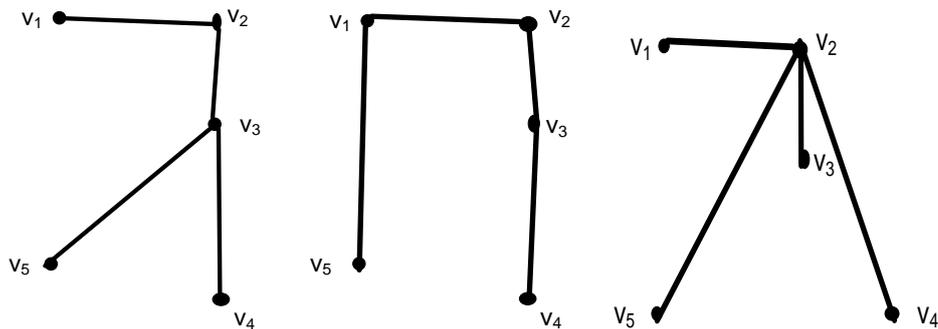
**$d \Rightarrow e$ :** Como  $G$  é conexo, dados dois quaisquer vértices  $u$  e  $v$ , pela Definição 2.17, existe um  $(u, v)$  –caminho. Por hipótese,  $G$  é conexo e cada aresta é uma ponte, logo, qualquer aresta desse caminho é uma ponte, e podemos concluir que esse caminho é único.

**$e \Rightarrow f$ :** Suponhamos que quaisquer vértices de  $G$  estão unidos por um único caminho. Admitamos que  $G$  contém um ciclo. Então quaisquer dois vértices desse ciclo estão ligados por, pelo menos, dois caminhos, contrariando a hipótese. Então  $G$  não contém ciclos. Por outro lado, acrescentando uma aresta entre dois vértices  $u$  e  $v$ , como por hipótese, já existe um  $(u, v)$  –caminho, criamos um ciclo formado pelo  $(u, v)$  –caminho já existente e pela aresta  $uv$  introduzida.

**$f \Rightarrow a$ :** Tendo em conta a definição de árvore (ver Definição 2.23) para provar este resultado basta provar que se  $G$  não tem ciclos mas a introdução de uma qualquer aresta transforma  $G$  num grafo com ciclos, então  $G$  é conexo. Vamos supor que  $G$  satisfaz a hipótese, mas é desconexo. Acrescentando uma aresta a  $G$ , ligando dois vértices pertencentes a componentes distintas, obtemos um grafo sem ciclos (já que a aresta inserida é uma ponte do novo grafo) o que contraria o facto, referido na hipótese de que acrescentando uma aresta se obtém um ciclo.

■

**Definição 2.24** Seja  $G$  um grafo conexo. Designa-se por *árvore abrangente* ou *árvore geradora* de  $G$  um subgrafo acíclico de  $G$  que contém todos os vértices de  $G$ , ou seja, uma árvore abrangente de  $G$  é um subgrafo abrangente acíclico.



**Figura 2.11** Exemplos de árvores abrangentes do grafo  $K_5$  da Figura 2.6.

## 2.5 O Problema da árvore abrangente de custo mínimo

O maior interesse do estudo das árvores abrangentes reside no facto de encontrar a árvore abrangente de custo (ou peso) mínimo representativa de um grafo conexo. Uma árvore abrangente garante-nos que todos os vértices estão representados. Apresentamos aqui dois algoritmos para a resolução do problema da árvore abrangente de custo mínimo: o algoritmo de Kruskal e o algoritmo de Prim.

Seja  $G = (V, E, W)$  um grafo pesado conexo de ordem  $n$ . O algoritmo de Kruskal começa com um grafo  $T$  sem arestas cujo conjunto de vértices coincide com o de  $G$ . Este algoritmo considera sucessivamente as arestas de  $G$  por ordem crescente dos custos  $\omega_{ij}$  e cada aresta de  $G$  é introduzida em  $T$  se não formar um ciclo em  $T$ . Quando  $T$  tem  $n - 1$  arestas,  $T$  é uma árvore abrangente de  $G$  de custo mínimo (ver, por exemplo, [9]).

### Algoritmo de Kruskal

**Entradas:** Um grafo pesado não orientado e conexo,  $G = (V, E, W)$ .

**Saídas:** Uma árvore abrangente de custo mínimo,  $T = (V', E')$ , e o valor do custo de  $T$ ,  $P$ .

**Início:**  $V' := V, E' := \emptyset, P := 0, v := |V|$ .

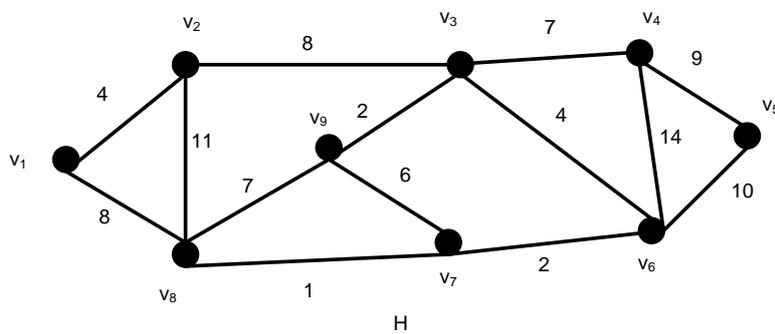
**Enquanto**  $|E'| < v - 1$  **faz**

(a) Determina a aresta  $uv \in E$  de custo mínimo.

(b)  $E := E \setminus \{uv\}$ .

(c) Se  $T$ , com a introdução da aresta  $uv$  não contém um ciclo então faz  $E' := E' \cup \{uv\}$  e  $P := P + \omega_{ij}$ .

**Devolver**  $T$  e  $P$ .



**Figura 2.12** Grafo simples ponderado H

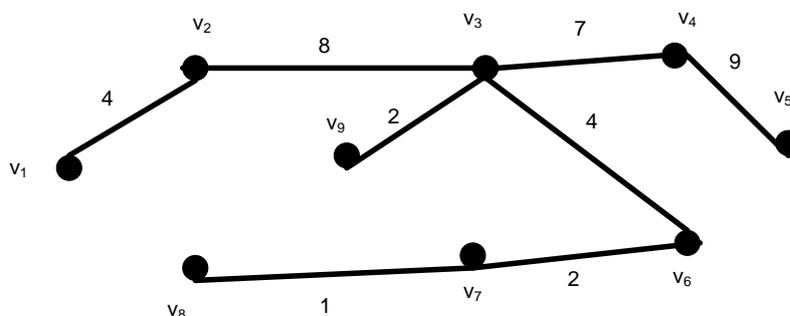
Aplicando o algoritmo de Kruskal ao grafo ponderado da Figura 2.12, vamos obter a árvore abrangente de custo mínimo representado na Figura 2.13. Começamos com os vértices  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$ .

Em seguida, construímos a lista das arestas ordenadas por ordem ascendente dos custos. Começamos por introduzir em  $T$  a aresta de menor custo da lista de arestas anteriormente organizada, e sucessivamente vamos introduzindo as arestas de menor custo que não formam um ciclo com as arestas anteriormente introduzidas em  $T$ , construindo dessa forma a árvore abrangente de custo mínimo  $T$ .

1) $v_8v_7 \rightarrow 1, P = 1$	8) $v_3v_4 \rightarrow 7, P = 13 + 7 = 20$
2) $v_7v_6 \rightarrow 2, P = 1 + 2 = 3$	9) $v_2v_3 \rightarrow 8, P = 20 + 8 = 28$
3) $v_9v_3 \rightarrow 2, P = 3 + 2 = 5$	10) $v_1v_8 \rightarrow 8$ (gera um ciclo)

4) $v_1v_2 \rightarrow 4, P = 5 + 4 = 9$	11) $v_4v_5 \rightarrow 9, P = 28 + 9 = 37$
5) $v_3v_6 \rightarrow 4, P = 9 + 4 = 13$	12) $v_5v_6 \rightarrow 10$ (gera um ciclo)
6) $v_7v_9 \rightarrow 6$ (gera um ciclo)	13) $v_2v_8 \rightarrow 11$ (gera um ciclo)
7) $v_8v_9 \rightarrow 7$ (gera um ciclo)	14) $v_4v_6 \rightarrow 14$ (gera um ciclo)

**Tabela 2.3** Aplicação do algoritmo de Kruskal ao grafo da Figura 2.12.



**Figura 2.13** Árvore abrangente de custo mínimo do grafo da Figura 2.12, obtida pelo algoritmo de Kruskal

Obtemos a árvore abrangente  $T$  com custo mínimo 37 ( $1 + 2 + 2 + 4 + 4 + 7 + 8 + 9 = 37$ ).

### Algoritmo de Prim

O algoritmo de Kruskal considera a aresta de menor custo, ainda não analisada sem ter em conta as ligações com as arestas previamente selecionadas para a árvore. Em grafos de ordem e dimensão mais elevadas, gera uma floresta que no final dá origem à árvore abrangente de custo mínimo. O algoritmo de Prim tem em conta essas ligações, considerando as arestas com um extremo em comum com alguma aresta previamente selecionada, fazendo com que a árvore cresça com a introdução de uma nova aresta e

de um novo vértice, até que se obtenha uma árvore abrangente que será a árvore abrangente de custo mínimo. O algoritmo de Prim apenas considera o custo das arestas com um vértice extremo previamente introduzido na árvore.

### Algoritmo

**Entradas:**  $G = (V, E, W)$  é um grafo pesado, não orientado e conexo

**Saídas:** Uma árvore abrangente de custo mínimo  $T$  e o valor do seu custo,  $P$ .

**Início:**  $V' := \{u\}$ , onde  $u \in V$ ,  $E' := \emptyset$ ,  $P := 0$ .

**Enquanto**  $|E'| < n - 1$  **faz**

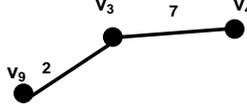
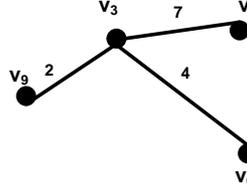
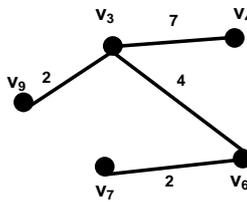
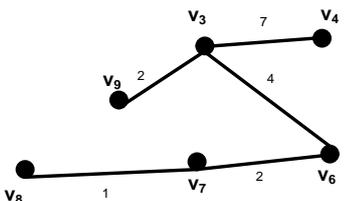
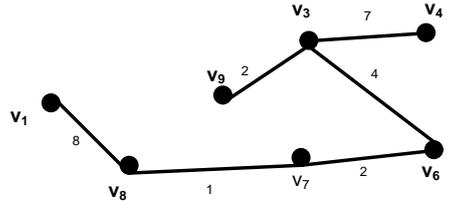
a) Determina  $vw \in E$  tal que  $vw$  é uma aresta de  $E$  de custo mínimo, com  $v \in V'$  e  $w \in V \setminus V'$ .

b) Faz  $V' := V' \cup \{w\}$ ,  $E' := E' \cup \{vw\}$ ,  $E := E \setminus \{vw\}$  e  
 $P := P + \omega_{vw}$ .

**Devolver**  $T$  e  $P$ .

Vamos aplicar o algoritmo de Prim ao grafo da Figura 2.12.

	$V'$	$E'$	$\sum a_{ij}$	$T$
Início	$\{v_4\}$	$\emptyset$	0	$v_4$ ●

1ª Iteração	$\{v_4, v_3\}$	$\{v_4 v_3\}$	7	
2ª Iteração	$\{v_4, v_3, v_9\}$	$\{v_4 v_3, v_3 v_9\}$	9	
3ª Iteração	$\{v_4, v_3, v_9, v_6\}$	$\{v_4 v_3, v_3 v_9, v_3 v_6\}$	13	
4ª Iteração	$\{v_4, v_3, v_9, v_6, v_7\}$	$\{v_4 v_3, v_3 v_9, v_3 v_6, v_6 v_7\}$	15	
5ª Iteração	$\{v_4, v_3, v_9, v_6, v_7, v_8\}$	$\{v_4 v_3, v_3 v_9, v_3 v_6, v_6 v_7, v_7 v_8\}$	16	
6ª Iteração	$\{v_4, v_3, v_9, v_6, v_7, v_8, v_1\}$	$\{v_4 v_3, v_3 v_9, v_3 v_6, v_6 v_7, v_7 v_8, v_8 v_1\}$	24	

7ª Iteração	$\{v_4, v_3, v_9, v_6, v_7, v_8, v_1, v_2\}$	$\{v_4v_3, v_3v_9, v_3v_6, v_6v_7, v_7v_8, v_8v_1, v_1v_2\}$	28	
8ª Iteração	$\{v_4, v_3, v_9, v_6, v_7, v_8, v_1, v_2, v_5\}$	$\{v_4v_3, v_3v_9, v_3v_6, v_6v_7, v_7v_8, v_8v_1, v_1v_2, v_4v_5\}$	37	

**Tabela 2.4** Aplicação do algoritmo de Prim ao grafo da Figura 2.12.

A árvore  $T$  atingida no fim do algoritmo de Prim é uma árvore abrangente de custo mínimo do grafo da Figura 2.12, com um custo 37.

Neste exemplo, as árvores abrangentes obtidas com a aplicação dos algoritmos de Kruskal e de Prim são diferentes mas podem, eventualmente, coincidir.

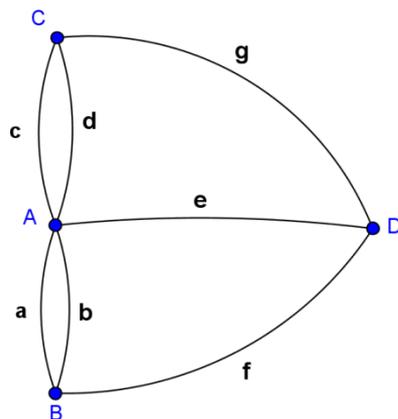
## 2.6 Grafos de Euler e grafos de Hamilton

Nesta secção fazemos uma abordagem aos conceitos matemáticos que estão na base da resolução do famoso problema das sete pontes de Königsberg, proposto por Leonard Euler no séc. XVIII, por vezes considerado o primeiro problema em Teoria dos Grafos. Usamos também conceitos para analisar os conhecidos problemas do carteiro chinês e do caixeiro viajante.

### Grafos de Euler

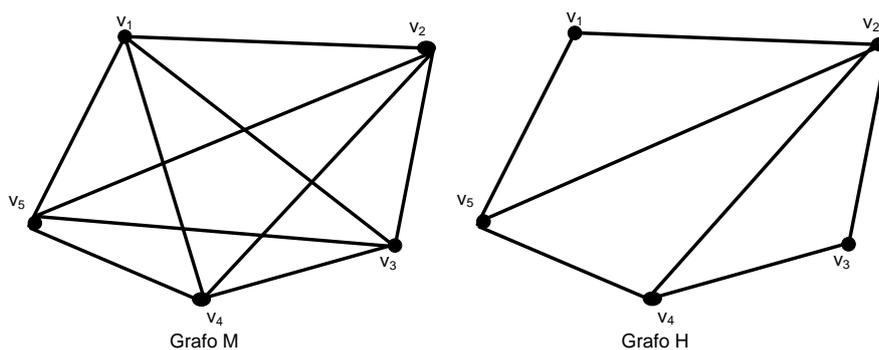
**Definição 2.25** Dado um grafo, um trajeto designa-se por *trajeto de Euler* se contém todas as arestas do grafo. Por sua vez, designa-se por *circuito de Euler* ou *circuito euleriano*, todo o circuito que contém todas as arestas do grafo.

De imediato se conclui que um circuito de Euler é um trajeto de Euler fechado. Dado um grafo conexo, encontrar um circuito de Euler consiste em verificar se é possível partir de um vértice do grafo e regressar a ele, percorrendo todas as arestas do grafo uma única vez (podendo, eventualmente, repetir-se, alguns vértices). Assim, o problema das sete pontes de Königsberg resolve-se verificando se o grafo da Figura 1.2 é, ou não, um grafo Euleriano.



**Figura 1.2** Grafo da situação das pontes de Königsberg.

**Definição 2.26** Um grafo diz-se *euleriano* ou *grafo de Euler* se admite um circuito de Euler. Um grafo diz-se *semi-euleriano* se admite um trajeto de Euler.



**Figura 2.14** O grafo M é euleriano e o grafo H é semi-euleriano.

O grafo  $M$  representado na Figura 2.14 é euleriano. Por exemplo,  $C_1 = v_1v_2v_3v_4v_5v_1v_3v_5v_2v_4v_1$  é um circuito de Euler. No grafo  $H$ , representado na mesma figura,  $T = v_4v_3v_2v_1v_5v_2v_4v_5$  é um trajeto de Euler logo,  $H$  é semi-euleriano,

mas  $H$  não é euleriano.

**Teorema 2.6** Um grafo conexo é euleriano se e só se todos os seus vértices têm grau par.

**Demonstração:** Admitamos em primeiro lugar que o grafo é euleriano, isto é, admite um circuito que contém todas as arestas. Percorrendo esse circuito, cada vez que entramos num vértice usamos uma aresta desse circuito ainda não percorrida e para sair desse vértice percorremos outra aresta do circuito ainda não percorrida. Logo, todos os vértices do grafo têm grau par. Observe-se que ao percorrer um lacete, para entrar e sair do vértice em que o lacete é incidente apenas utilizamos uma aresta (o próprio lacete) porém cada lacete contribui com duas unidades para o grau do vértice no qual é incidente.

Suponha-se agora que o grafo é conexo e todos os vértices têm grau par. Então o grafo tem um circuito, caso contrário, o grafo seria uma árvore e teria vértices de grau um, ou seja, teria vértices de grau ímpar. Seja  $C$  um circuito do grafo. Se  $C$  contém todas as arestas do grafo então  $C$  é um circuito euleriano e o grafo é euleriano. Se o grafo contém arestas que não estão no circuito  $C$  então, como o grafo é conexo, algumas destas arestas são incidentes em vértices de  $C$ . Como os graus dos vértices do grafo são pares então todos os vértices têm grau nulo ou par no subgrafo que se obtém do grafo inicial, retirando as arestas de  $C$ . Logo, este subgrafo contém um circuito que percorre algum vértice de  $C$ . Inserimos este circuito no circuito  $C$  e obtemos um novo circuito com mais arestas. Repetimos este percurso até incluirmos todas as arestas do grafo no circuito obtendo um circuito de Euler. Observe-se que como o grafo tem um número finito de arestas este processo termina num número finito de passos pois em cada passo acrescentamos pelo menos três arestas ao circuito.

■

É pois de salientar que a demonstração do Teorema 2.6 dá-nos um algoritmo para encontrar um circuito euleriano num grafo euleriano. Consideremos o grafo  $M$  da Figura 2.14. Como  $M$  é conexo e 4-regular (portanto, todos os vértices têm grau par), pelo Teorema 2.6 podemos concluir que  $G$  tem um circuito euleriano. Vamos aplicar o

processo descrito na demonstração do Teorema 2.6 para determinar um circuito euleriano em  $M$ .

Começando no vértice  $v_1$  obtemos o circuito  $C = v_1v_2v_3v_4v_5v_1$ . Este circuito não contém todas as arestas do grafo  $M$ .

A partir de um vértice deste circuito  $C$  determinamos um circuito que contenha apenas arestas não incluídas em  $C$ ; por exemplo,  $C_1 = v_5v_3v_1v_4v_2v_5$ . O circuito  $C_1$  é inserido no circuito  $C$  obtendo-se o circuito  $C' = v_1v_2v_3v_4v_5v_3v_1v_4v_2v_5v_1$ . O circuito  $C'$  contém todas as arestas do grafo  $M$ , logo é um circuito euleriano. Importa salientar que este circuito euleriano não é único.

**Teorema 2.7** Um grafo conexo é semi-euleriano se e só se não tem mais do que dois vértices de grau ímpar. (Neste caso o trajeto de Euler inicia-se num destes vértices e termina no outro).

**Demonstração:** Suponhamos que  $G$  possui um trajeto de Euler  $T$  com vértice inicial  $v$  e vértice final  $w$ . Se  $v = w$  então  $T$  é um circuito de Euler, ou seja,  $G$  é euleriano e, pelo Teorema 2.6, não há vértices de grau ímpar. Se  $v \neq w$ , então ligando-os por uma aresta  $e$ , obtém-se um grafo euleriano, logo, pelo Teorema 2.6, todos os vértices deste grafo têm grau par e, por consequência, em  $G$  apenas  $u$  e  $v$  tem grau ímpar. Reciprocamente, suponhamos que  $G$  (conexo) tem no máximo dois vértices de grau ímpar. Como, num grafo o número de vértices de grau ímpar (pág.7) é par,  $G$  tem zero ou dois vértices de grau ímpar. No primeiro caso, todos os vértices têm grau par e, portanto,  $G$  é semi-euleriano (porque é euleriano). No segundo caso, ligando os dois vértices de grau ímpar por uma aresta obtém-se um grafo euleriano (porque todos os vértices têm grau par) logo, admite um circuito de Euler. Eliminando a aresta introduzida neste circuito obtém-se um trajeto de Euler para  $G$ .

■

O Teorema 2.6 e o Teorema 2.7 permitem agora afirmar que o problema das sete pontes de Königsberg não tem solução uma vez que o grafo que o representa (Figura 1.2) não é euleriano (nem sequer semi-euleriano), pois os seus cinco vértices têm grau ímpar.

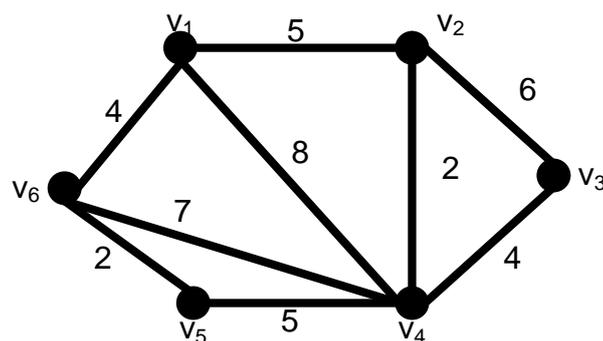
## O Problema do Carteiro Chinês

Este problema, originalmente estudado pelo matemático chinês Mei-Ku Kwan, em 1962, pode ser descrito do seguinte modo: um carteiro levanta a correspondência numa estação de correios, faz a distribuição pelas casas que lhe estão destinadas e regressa à estação dos correios. Qual é a menor distância que terá de percorrer o carteiro? É evidente que terá de percorrer pelo menos uma vez cada uma das ruas, a fim de fazer a distribuição por todas as casas, evitando percorrer cada rua mais do que uma vez. Nestas condições podemos concluir que o problema pode ser formulado em termos de grafos pesados (ou ponderados) nos quais se procura um circuito de Euler. Neste grafo ponderado, ou seja, grafo conexo no qual a cada aresta é atribuído um número não negativo- dito peso- as ruas correspondem às arestas, os vértices são os cruzamentos das ruas, e o peso de cada aresta é o seu comprimento.

Se o grafo for Euleriano, então um circuito de Euler constitui um percurso do carteiro cujo custo (distância percorrida pelo carteiro) é a soma dos pesos das arestas que o constituem. Um circuito de peso mínimo é um percurso ótimo do carteiro Chinês.

Se o grafo não for Euleriano, então uma solução do problema passa por duplicar algumas arestas de modo a obter um tal circuito. É claro, que esta duplicação de arestas, deve ser feita de forma a conseguir um grafo Euleriano com peso mínimo. Um circuito de Euler neste grafo corresponde a um passeio fechado no grafo original.

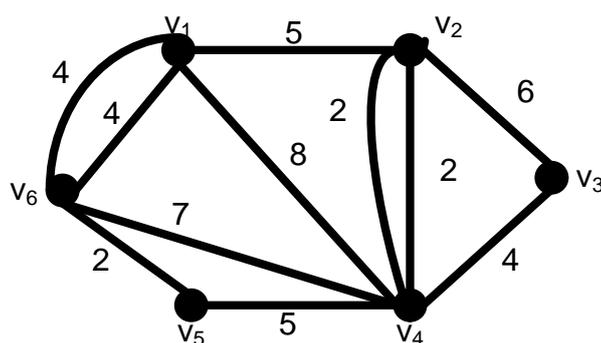
**Definição 2.27** Dado um grafo  $G$  e uma função de peso nas arestas  $\omega: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ , a duplicação da aresta  $e \in E(G)$ , com peso  $\omega(e)$ , consiste em adicionar ao grafo uma nova aresta com os mesmos vértices extremos de  $e$  e o mesmo peso (ou seja, a criação de uma aresta paralela a  $e$  com o mesmo peso).



**Figura 2.15** Grafo ponderado exemplo para um problema do carteiro chinês

*Exemplo 2.1* Suponhamos o problema do carteiro chinês modelado pelo grafo representado Figura 2.15. O vértice  $v_1$  é a estação dos correios, o peso das arestas é o comprimento das ruas entre os cruzamentos identificados pelos vértices  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$  e  $v_6$ . O carteiro parte e chega ao vértice  $v_1$ . Qual o trajeto fechado de custo mínimo que o carteiro deve percorrer?

O grafo da Figura 2.15 apresenta vértices de grau ímpar, logo não é um grafo de Euler. Vamos então utilizar a Definição 2.27, para a resolução do problema, começando por acrescentar arestas por duplicação (pois não podemos construir novas ruas), tendo em mente utilizar arestas de menor comprimento possível. Os vértices de grau ímpar são  $v_1, v_2, v_4$  e  $v_6$ . Nesta situação vamos duplicar as arestas  $v_1v_6$  e  $v_2v_4$ , pois são as arestas de menor peso.

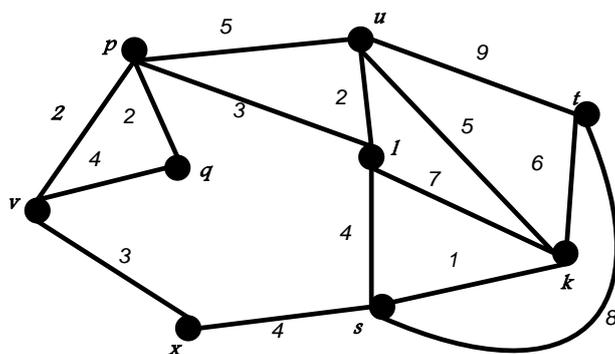


**Figura 2.16** Duplicação de arestas no grafo ponderado da Figura 2.15.

Aplicando agora o algoritmo descrito na demonstração do Teorema 2.6, vamos encontrar o circuito euleriano do novo grafo. Obtemos  $v_1v_2v_3v_4v_2v_4v_1v_6v_4v_5v_6v_1$  com comprimento 49, a menor distância percorrida pelo carteiro.

No exemplo anterior os vértices de grau ímpar são vizinhos (dois a dois), pelo que é suficiente duplicar apenas uma aresta entre eles.

*Exemplo 2.2* Admitamos agora o problema cuja representação se encontra na Figura 2.17.



**Figura 2.17** Grafo ponderado para aplicação do problema do carteiro chinês.

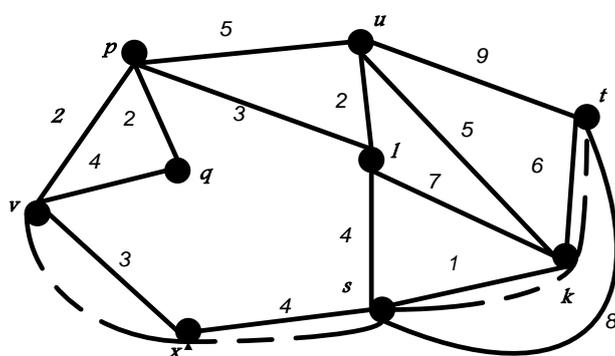
Neste caso, o grafo também não é um grafo de Euler e os vértices de grau ímpar  $v$  e  $t$  não são vizinhos.

Neste caso é necessário duplicar, um caminho, o caminho mais curto, entre os vértices  $v$  e  $t$ , que vamos obter utilizando o algoritmo de Dijkstra (ver Tabela 2.5). O caminho de peso mínimo entre  $v$  e  $t$  é  $C_1 = vxskt$ , com peso 14. Duplicando todas as arestas deste caminho, como se mostra na Figura 2.18, obteremos a solução ótima.

Vértice Iteração	$v$	$p$	$q$	$x$	$u$	$l$	$s$	$k$	$t$	Temporários
1ª	(0, $v$ )	( $\infty$ , 0)	$\{p, q, x, u, l, s, k, t\}$ $z \leftarrow v$							
2ª		(2, $v$ )	(4, $v$ )	(3, $v$ )	( $\infty$ , 0)	$\{q, x, u, l, s, k, t\}$ $z \leftarrow p$				
3ª			(4, $v$ )	(3, $v$ )	(7, $p$ )	(5, $p$ )	( $\infty$ , 0)	( $\infty$ , 0)	( $\infty$ , 0)	$\{u, l, s, k, t\}$ $z \leftarrow x$
4ª			(4, $v$ )		(7, $p$ )	(5, $p$ )	(7, $x$ )	( $\infty$ , 0)	( $\infty$ , 0)	$\{u, l, s, k, t\}$ $z \leftarrow q$
5ª					(7, $p$ )	(5, $p$ )	(7, $x$ )	( $\infty$ , 0)	( $\infty$ , 0)	$\{u, s, k, t\}$ $z \leftarrow l$

6ª					(7, p)		(7, x)	(12, l)	(∞, 0)	{s, k, t} z ← u
7ª							(7, x)	(12, l)	(16, u)	{k, t} z ← s
8ª								(8, s)	(15, s)	{t} z ← k
9ª									(14, k)	{ } z ← t

**Tabela 2.5** Aplicação do Algoritmo de Dijkstra ao grafo da Figura 2.17.



**Figura 2.18** Duplicação de arestas no grafo da Figura 2.17.

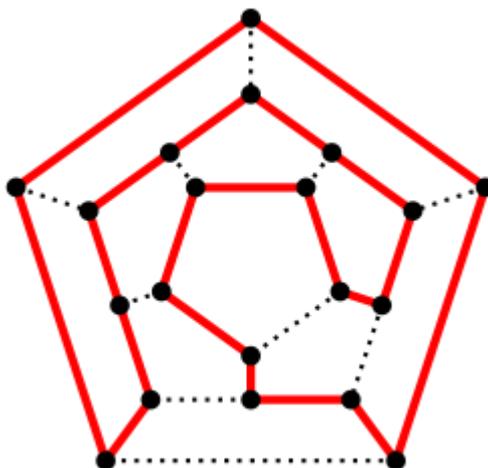
Para o grafo da Figura 2.18  $C = v p u t s k t k u l k s l p q v x s x v$ , é um circuito euleriano com peso 79, resultante da soma dos pesos de todas as arestas incluindo o peso das arestas duplicadas.

## Grafos de Hamilton

Segundo Simões Pereira [12], o matemático britânico Thomas Penyngton Kirkman (1806-1895) estudou pela primeira vez os grafos de Hamilton ao analisar o problema de visitar todos os vértices de qualquer poliedro passando por cada um deles uma única vez. Kirkman publicou o resultado desse trabalho em 1856 mas, foi o matemático escocês William Roman Hamilton (1805-1865) quem popularizou este problema, entre 1857 e 1859, através do jogo do dodecaedro que se encontra na Figura 2.19.



**Figura 2.19** O Jogo dodecaedro consiste em percorrer todos os vértices uma única vez e regressar ao ponto de partida[11].



**Figura 2.20** Resolução do jogo do dodecaedro da Figura 2.19 [11].

**Definição 2.28** Um caminho que contém todos os vértices de um grafo diz-se um *caminho de Hamilton* ou *caminho hamiltoniano*. Por sua vez, um ciclo que contém todos os vértices de um grafo, designa-se por *ciclo de Hamilton* ou *ciclo hamiltoniano*.

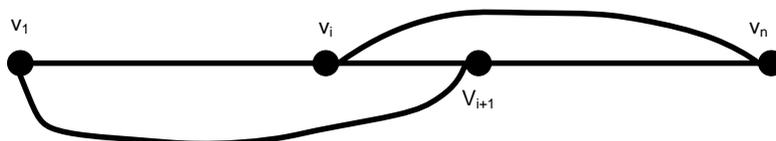
Um grafo que admite um ciclo de hamilton designa-se por grafo hamiltoniano ou grafo de Hamilton e um grafo que admite um caminho de Hamilton diz-se um grafo semi-hamiltoniano.

Não se conhece nenhuma condição necessária e suficiente para a existência de um ciclo de Hamilton num grafo dado. Mas existem algumas condições suficientes

embora não necessárias, para garantir a existência de um ciclo de Hamilton num grafo conexo com  $n$  vértices. O Teorema 2.8, conhecido como teorema de Ore, dá-nos uma condição suficiente, para que um grafo admita um ciclo de Hamilton.

**Teorema 2.8** Seja  $G = (V, E)$  um grafo simples com  $v(G) \geq 3$  e tal que  $d_G(u) + d_G(v) \geq v(G)$ , para cada par de vértices  $u$  e  $v$  não adjacentes. Então  $G$  é hamiltoniano.

**Demonstração:** Seja  $n = v(G)$ . Dado um grafo  $G$  que satisfaz a hipótese do teorema, suponhamos que  $G$  não é hamiltoniano. Observe-se que a introdução de arestas em  $G$  mantém inalterada a desigualdade  $d_G(u) + d_G(v) \geq n$ . Vamos então considerar  $G$  um grafo não hamiltoniano maximal (isto é, a introdução de uma aresta transforma  $G$  num grafo hamiltoniano) tal que  $d_G(u) + d_G(v) \geq n$ , para qualquer par de vértices não adjacentes. Sejam  $u$  e  $v$  dois vértices não adjacentes em  $G$ . Como o grafo que se obtém de  $G$  por introdução de uma aresta com vértices extremos  $u$  e  $v$  é um grafo hamiltoniano, então, se  $C' = v_1 v_2 \dots v_n v_1$ , com  $v_1 = u$  e  $v_n = v$ , é um ciclo hamiltoniano deste grafo,  $C = v_1 v_2 \dots v_n$  é um caminho hamiltoniano de  $G$ .



**Figura 2.21** A origem de um ciclo de Hamilton

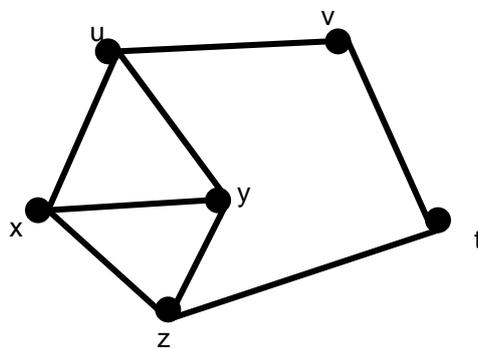
Seja  $d_G(v_1) = p$ , logo  $d_G(v_n) \geq n - p$  (porque  $uv \notin E$ ). Como  $C$  contém todos os vértices de  $G$ , então o vértice  $v_1$  é adjacente a  $p - 1$  vértices de entre os designados acima com  $v_3, v_4, \dots, v_{n-1}$  e  $v_n$  é adjacente a pelo menos  $n - p - 1$  vértices entre os designados acima com  $v_2, v_3, \dots, v_{n-2}$ . Seja  $v_i$  ( $2 \leq i \leq n - 2$ ) um vértice adjacente a  $v_n$  e suponhamos que  $v_1$  é adjacente a  $v_{i+1}$ , como se ilustra na Figura 2.21. Então o caminho fechado  $v_1 v_{i+1} v_{i+2} \dots v_n v_i v_{i-1} v_{i-2} \dots v_1$  é um ciclo hamiltoniano de  $G$ .

Para provar que um tal ciclo existe, vamos mostrar que os conjuntos de índices  $S = \{i: v_{i+1} \text{ é adjacente a } v_1\}$  e  $T = \{i: v_i \text{ é adjacente a } v_n\}$  têm elementos em

comum. Observe-se que  $(*)|S \cup T| + |S \cap T| = |S| + |T| = d_G(v_1) + d_G(v_n) \geq n$ . Por outro lado, como  $n \notin S \cup T$  (isto é, não existe  $v_n$  e  $v_n \notin N(v_n)$ ) então  $(**) |S \cup T| < n$ . De  $(*)$  e  $(**)$  conclui-se que  $|S \cap T| \geq n - |S \cup T| \geq n - (n - 1) = 1$ . Conclui-se assim que  $G$  contém um ciclo hamiltoniano idêntico ao representado na Figura 2.21 o que contradiz a hipótese inicial da demonstração de que  $G$  é não hamiltoniano. ■

**Corolário 2.1** Se  $G = (V, E)$  é um grafo simples com  $v(G) \geq 3$  e  $\delta(G) \geq \frac{v(G)}{2}$ , então  $G$  é hamiltoniano.

**Prova:** Se  $u, v \in V$  e  $uv \notin E$ , então  $d_G(u) + d_G(v) \geq 2\delta(G) \geq v(G)$  por hipótese, e, pelo Teorema 2.8,  $G$  é hamiltoniano. ■



**Figura 2.22** Grafo  $G = (V, E)$  com  $v(G) = 6$ .

A condição estabelecida no Teorema 2.8 não é, porém, necessária.

*Exemplo 2.2* Seja o grafo  $G = (V, E)$  da Figura 2.22. Este grafo não verifica a hipótese do Teorema 2.8. Por exemplo, para os pares de vértices não adjacentes  $x$  e  $t$  e  $u$  e  $t$ , temos  $d_G(x) + d_G(t) = 5 < v(G)$  e também  $d_G(u) + d_G(t) = 5 < v(G)$ , ou seja, não satisfazem a hipótese do Teorema 2.8. No entanto,  $C = u v t z y x u$  é um ciclo de Hamilton, logo o grafo é um grafo de Hamilton.

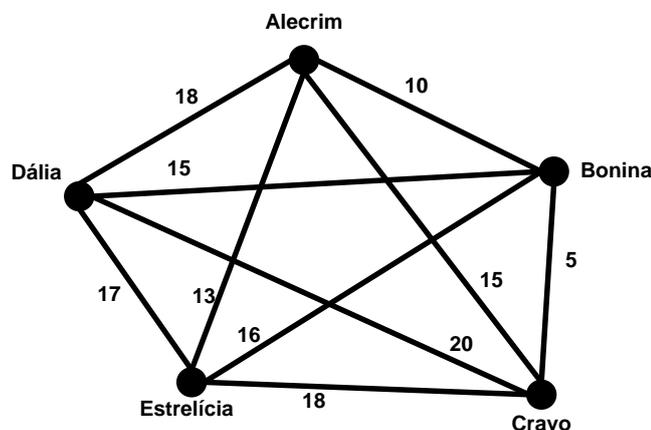
## O Problema do Caixeiro Viajante

Este problema trata de determinar a melhor rota para um caixeiro viajante que pretende visitar várias cidades e voltar à cidade inicial, percorrendo a menor distância possível. O problema do caixeiro viajante consiste assim, na procura de um ciclo de Hamilton de menor peso possível. De acordo com [1], a formulação geral do problema do caixeiro viajante terá surgido na década de 1930-1939, no contexto de problemas estudados por vários matemáticos, não se sabendo com exatidão qual terá sido o primeiro a abordar o problema. Nas décadas seguintes este problema foi divulgado por Merrill Flood devido às muitas aplicações em problemas reais.

*Exemplo 2.3* A freguesia das flores tem cinco aldeias (Alecrim, Bonina, Cravo, Dália e Estrelícia) e a junta de freguesia é na aldeia Alecrim. O Presidente da junta, que vive em Alecrim, decidiu que iria no próximo fim-de-semana visitar todas as aldeias da junta de freguesia. As distâncias entre as respetivas aldeias encontram-se na Tabela 2.6 e o mapa das aldeias pode ser representado como um grafo pesado (Figura 2.23).

	Alecrim	Bonina	Cravo	Dália	Estrelícia
Alecrim		10	15	18	13
Bonina			5	15	16
Cravo				20	18
Dália					17
Estrelícia					

**Tabela 2.6** Distâncias em quilómetros (*km*) entre as aldeias Alecrim, Bonina, Cravo, Dália e Estrelícia.



**Figura 2.23** Grafo representativo da Tabela 2.6.

Qual o ciclo que o Presidente da Junta, pode efetuar, visitando todas as aldeias e percorrendo o número mínimo de quilômetros. Inicialmente, parte de Alecrim para a aldeia mais próxima que é Bonina à distância 10 km, daí vai para a aldeia mais próxima desta que é Cravo a 5 km, a seguir a mais próxima é Estrelícia a 18 km, depois é Dália a 17 km a aldeia mais próxima ainda não visitada e, por fim, regressa a Alecrim a 18 Km. A viagem apresenta um total de 68 km.

Outra forma de resolver este exemplo é ordenando as distâncias por ordem crescente, e ir selecionando as distâncias sem formar um ciclo, antes de ter todas as aldeias visitadas. Também, não podemos regressar a uma aldeia já visitada (quando duas arestas (distâncias) são incidentes na mesma aldeia).

Obtemos *Bonina-Cravo* 5km; *Alecrim-Bonina* 10 km; *Estrelícia-Alecrim* 13 km; não utilizamos as distâncias entre *Dália-Bonina* 15 km e *Estrelícia-Bonina* 16 km, porque a aldeia de Bonina já foi visitada, e também, não utilizamos *Cravo-Alecrim* 15 km, porque a aldeia de Alecrim já foi visitada; daí vamos para *Dália-Estrelícia* 17 km; não escolhemos *Cravo-Estrelícia* 18 km, porque já visitamos a aldeia de Estrelícia, não utilizamos *Dália-Alecrim* 18 km, porque a aldeia de Alecrim já foi visitada; *Cravo-Dália* 20 km. Organizando em ciclo começando em Alecrim temos: *Alecrim-Bonina-Cravo-Dália-Estrelícia-Alecrim* com um total de 65 km ( $10 + 5 + 20 + 17 + 13 = 65$  km.)

Nesta situação concluímos que o percurso obtido pelo segundo processo percorre um menor número de quilômetros.

### 3 Grafos e Colorações

Para situar este tema da Teoria dos Grafos, transcrevemos uma nota histórica que pode ser consultada em [17]. *“Tudo começou em 1852 quando Francis Guthrie tentava pintar os condados do Reino Unido, de forma que dois condados vizinhos não tivessem a mesma cor. Neste processo Guthrie apercebeu-se de que para pintar todos os condados conseguia usar apenas quatro cores. Na altura, Francis Guthrie perguntou ao seu irmão Frederick Guthrie, estudante de matemática e aluno de DeMorgan, se seria possível pintar qualquer mapa plano com apenas quatro cores. O irmão intrigado apresenta a questão a DeMorgan que a estuda e, de alguma forma, ajuda a divulgar o que ficou conhecido como a conjectura das quatro cores: todo o mapa pode ser pintado com um máximo de quatro cores sem que regiões vizinhas admitam a mesma cor. Estava lançado um desafio que resistiu mais de um século, tendo sido vencido em 1976 por Apple e Haken. A sua demonstração, no entanto, não foi bem aceite pela comunidade matemática, principalmente por dois motivos: parte da demonstração usa o computador e não pode ser verificada à mão e parte dos cálculos efetuados à mão são morosos e muito longos. Perante tanta controvérsia Robertson, Sanders, Seymoure Thomas tentaram melhorar a prova mas acabaram por desistir. Segundo estes autores, em 1993, para sua paz de espírito começaram a tentar provar por eles próprios a conjectura, tendo acabado por obter uma prova mais simples, mas onde ainda assim foi necessária a utilização do computador. Pelo caminho foram publicadas algumas "provas "que continham alguns erros, mas mesmo com alguns problemas técnicos também elas ajudaram a impulsionar e a resolver a famosa conjectura. Destacamos a prova de Alfred Kempe (1879) que Heawood, onze anos depois, provou estar errada. Na mesma altura Heawood enunciou e provou o teorema das cinco cores. Em 1922, a conjectura foi provada para qualquer mapa com 25 regiões. Este limite foi sendo melhorado até se atingir, em 1970, 96 regiões.*

*Temos então agora o teorema das quatro cores: Para colorir um mapa plano, de forma que em regiões vizinhas não se utilize a mesma cor, quatro cores são suficientes.”*

Este problema pode ver-se como um problema de coloração de grafos (planares) com um número de vértices igual ao número de regiões do mapa a colorir.

Alguns exemplos onde se pode aplicar estes conceitos de Teoria dos Grafos: na

elaboração de horários, na atribuição de frequências de rádio a diferentes estações emissoras, na resolução de conflitos, na calendarização de exames, no armazenamento de um conjunto de materiais em que alguns deles são incompatíveis entre si e no preenchimento do jogo do sudoku.

### 3.1 Independente e clique

**Definição 3.1** Seja  $G = (V, E)$  um grafo. Um subconjunto  $\emptyset \neq S \subseteq V$  designa-se por *independente de  $G$*  se não há arestas a unirem vértices distintos de  $S$ . O número máximo de vértices que formam um independente de  $G$ , denota-se por  $\alpha(G)$ , e diz-se *número de independência de  $G$* .

Assim, um subconjunto de vértices  $X \subseteq V(G)$  é um independente se induz um subgrafo  $0$ -regular.

Para o grafo  $G$  da Figura 2.17,  $\{u, v, s\}$  é um independente com cardinalidade 3 e  $\{q, t, x, l\}$  é um independente de cardinalidade 4. Como este grafo não tem independentes de cardinalidade superior a 4 conclui-se que  $\alpha(G) = 4$ .

**Exemplo 3.1** Suponhamos que um grafo representa a incompatibilidade de exames de disciplinas com alunos em comum, neste grafo, dois vértices  $x$  e  $y$  estão ligados se representarem disciplinas que têm alunos em comum para realizarem o exame. Qual o maior número de disciplinas que se podem realizar em simultâneo? A resposta é dada pela cardinalidade de um subconjunto independente máximo de vértices do grafo, ou seja, o número de independência do grafo.

**Definição 3.2** Seja  $G = (V, E)$  um grafo. Um subconjunto  $\emptyset \neq S \subseteq V$  designa-se por *clique* se entre quaisquer dois vértices existe uma aresta, ou seja, se  $S$  induz um subgrafo completo. O número máximo de vértices numa clique de  $G$  designa-se por *número de clique de  $G$*  e denota-se por  $\omega(G)$ .

Por exemplo, o grafo da Figura 2.17, tem  $\omega(G) = 3$ , algumas das suas cliques são  $\{x, s\}$ ,  $\{v, q, p\}$ ,  $\{p, u, l\}$ ,  $\{u, t, k\}$ ,  $\{s, k, l\}$  e  $\{u, l, k\}$ .

Como mostra o teorema seguinte, o problema de determinar uma clique máxima e o problema de determinar um independente máximo são equivalentes.

**Teorema 3.1** Para qualquer grafo  $G$ ,  $\alpha(G) = \omega(G^c)$ .

**Demonstração:** Seja  $G = (V, E)$ . O conjunto  $S \subseteq V$  é um independente de  $G$  se e somente se para quaisquer  $u, v \in S$ ,  $uv \notin E$ , ou seja, para quaisquer  $u, v \in S$ ,  $uv \in E(G^c)$ . Conclui-se, assim que  $S$  é um independente de  $G$  se e só se  $S$  é uma clique de  $G^c$ . Consequentemente, um independente máximo de  $G$  é uma clique máxima de  $G^c$  e vice-versa. Logo,  $\alpha(G) = \omega(G^c)$ . ■

## 3.2 Número Cromático

Retomemos o Exemplo 3.1. Pretendemos saber qual o menor número de dias necessários para realizar todos os exames às diferentes disciplinas. Vamos resolver o problema de determinar uma partição do conjunto dos vértices do grafo em subconjuntos independentes; cada subconjunto corresponde a um dia para realizar os exames dessas disciplinas. Uma forma de resolver o problema é atribuir cores aos vértices de forma que vértices adjacentes tenham necessariamente cores diferentes. O menor número de cores que se pode utilizar será portanto a solução do problema. O problema em que nos focaremos nesta secção é o de obter o número mínimo de cores necessário para colorir os vértices de um grafo de tal forma que vértices adjacentes não tenham a mesma cor.

**Definição 3.3** Seja  $G = (V, E)$  um grafo e  $C = \{1, 2, \dots, k\}$  um conjunto de cores. Uma *coloração* de  $G$  é uma função  $f: V \rightarrow C$  tal que para cada  $uv \in E$ ,  $f(u) \neq f(v)$ .

**Definição 3.4** Seja  $G = (V, E)$  um grafo. Uma  $k$ -*coloração* de  $G$  é uma coloração que utiliza um total de  $k$  cores. O *número cromático* do grafo  $G$  é o menor número de cores  $k$  para o qual existe uma  $k$ -*coloração* de  $G$  e denota-se por  $\chi(G)$ .

*Exemplo 3.1*

- 1) Um grafo pode ser colorido com apenas uma cor, isto é, tem número cromático 1, se é um grafo nulo.
- 2) Um grafo pode ser colorido com 2 cores se e só se é um grafo bipartido.
- 3) Denotando por  $C_n$  um grafo conexo 2-regular, com  $n$  vértices, então  $C_{2r}$  é um ciclo de comprimento par e  $\chi(C_{2r}) = 2$ , pois  $C_{2r}$  é um grafo bipartido.
- 4)  $C_{2r+1}$  é um ciclo de comprimento ímpar, então  $\chi(C_{2r+1}) = 3$ .
- 5)  $\chi(K_n) = n$ .

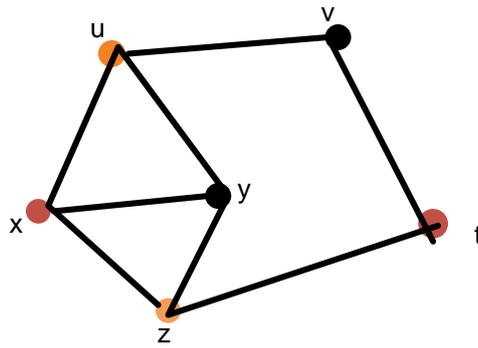
Dado um grafo  $G$ , para os números de clique,  $\omega(G)$ , número de independência,  $\alpha(G)$ , e número cromático,  $\chi(G)$ , verificam-se, as desigualdades estabelecidas no seguinte teorema.

**Teorema 3.2** Num grafo  $G = (V, E)$ ,  $\chi(G) \geq \omega(G)$  e  $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$ .

**Demonstração:** A primeira desigualdade é garantida porque numa clique, todos os vértices são adjacentes, logo requer  $\omega(G)$  cores diferentes. Na segunda desigualdade o conjunto de vértices com uma determinada cor é um conjunto independente, portanto tem pelo menos  $\alpha(G)$  vértices e  $\alpha(G)\chi(G) \geq |V(G)|$ . ■

Existem grafos,  $G$ , para os quais  $\chi(G) > \omega(G)$ . Considere-se o grafo  $G$ , obtido de  $C_{2r+1}$  ( $r \geq 1$ ) e  $K_s$  introduzindo arestas a unir cada vértice de  $C_{2r+1}$  a todos os vértices de  $K_s$ . Qualquer coloração de  $C_{2r+1}$  ( $r \geq 1$ ) requer pelo menos 3 cores. Para colorir uma  $s$  – clique são necessárias  $s$  cores. Uma vez que cada vértice do ciclo é adjacente a todos os vértices da clique, estas  $s$  cores devem diferir das três primeiras cores usadas, logo  $\chi(G) \geq s + 3$ . Concluímos que  $\chi(G) > \omega(G) = s$ .

Tomemos, de novo, o grafo  $G$  representado na Figura 2.22. Facilmente se conclui por simples observação e atribuição de cores (atendendo à Definição 3.3 e à Definição 3.4) que  $\chi(G) = 3$ .



**Figura 3.1** 3 – coloração do grafo  $G = (V, E)$

Embora não se conheça um algoritmo eficiente para determinar o número cromático de um grafo, em geral, usa-se o seguinte algoritmo para aproximar este número:

### Algoritmo Guloso

Considerando uma ordenação nos vértices  $v_1 < v_2 < \dots < v_n$  de  $V(G)$ , e uma ordenação nas cores  $c_1 < c_2 < \dots$  obtém-se uma coloração dos vértices  $v_1, \dots, v_n$ , atribuindo a cada  $v_i$  a menor cor possível, isto é, a menor cor ainda não atribuída aos seus vizinhos.

Do algoritmo guloso decorre o seguinte teorema.

**Teorema 3.3** Seja  $G = (V, E)$  um grafo. Então  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

**Demonstração:** Cada vértice pode ser adjacente, no máximo, a  $\Delta(G)$  vértices, então podemos colorir esse vértice com uma cor diferente das cores dos seus vizinhos. Logo,  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ . ■

Existem grafos que para os quais o majorante do número cromático indicado no Teorema 3.3 é atingido. Para  $n \geq 1$ ,  $\Delta(K_n) = n - 1$  e  $\chi(K_n) = (n - 1) + 1 = n$ .

Apresentamos agora dois exemplos de aplicação da coloração de grafos.

*Exemplo 3.1* [13] A função de uma empregada numa loja de animais é gerir a colocação das várias espécies de peixes nos aquários disponíveis, na loja. Para isso tem de ter em conta as espécies que entram em conflito, pois não podem ficar juntas

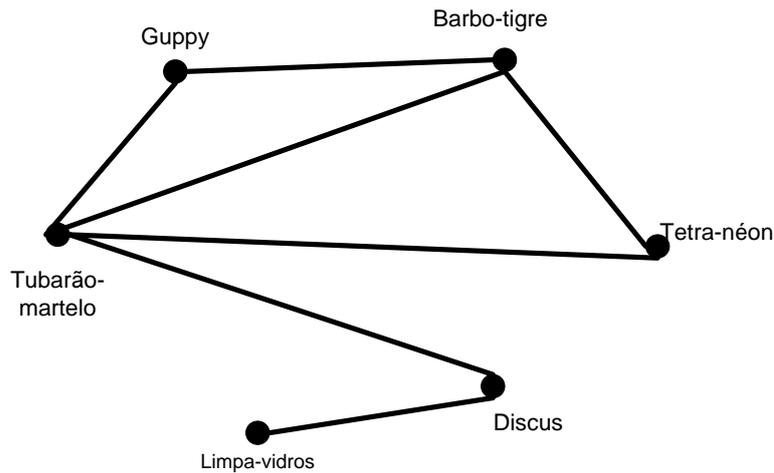
no mesmo aquário. A dona da loja forneceu-lhe a tabela de incompatibilidades (Tabela 3.1) onde **x** representa pares de espécies de peixes incompatíveis.

<i>Espécie</i>	<i>Guppy</i>	<i>Barbo-tigre</i>	<i>Tetra-néon</i>	<i>Discus</i>	<i>“Limpa-vidros”</i>	<i>Tubarão-martelo</i>
<i>Guppy</i>		<b>x</b>				<b>x</b>
<i>Barbo-tigre</i>	<b>x</b>		<b>x</b>			<b>x</b>
<i>Tetra-néon</i>		<b>x</b>				<b>x</b>
<i>Discus</i>					<b>x</b>	<b>x</b>
<i>“Limpa-vidros”</i>				<b>x</b>		
<i>Tubarão-martelo</i>	<b>x</b>	<b>x</b>	<b>x</b>	<b>x</b>		

**Tabela 3.1** Tabela de incompatibilidades das espécies de peixes (Guppy, Barbo-tigre, Tetra-néon, Discus, “Limpa-vidros”, Tubarão-martelo)

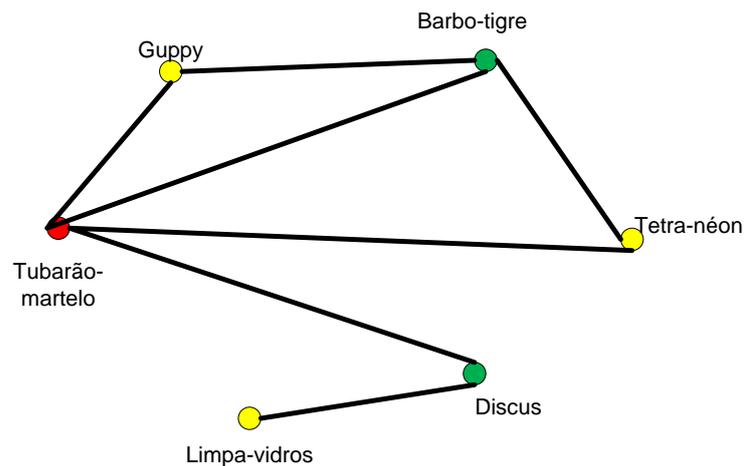
Qual é o menor número de aquários necessários para alojar os peixes, de modo que não fiquem juntas espécies incompatíveis?

Para encontrar uma solução para este problema vamos utilizar a coloração de grafos. O grafo que modela o problema encontra-se na Figura 3.2. Como existem seis espécies de peixes, vamos considerar um grafo com seis vértices em que as arestas representam a incompatibilidade entre um par de espécies de peixes. Como dois peixes de espécies incompatíveis não podem estar no mesmo aquário, em simultâneo, temos de encontrar uma forma de determinar o número mínimo de aquários necessários.



**Figura 3.2** Grafo que representa a Tabela 3.1.

Vamos então utilizar a coloração de grafos, onde cada cor representa um aquário. Há que atribuir cores diferentes a vértices adjacentes, pois espécies incompatíveis não podem estar no mesmo aquário em simultâneo. Como  $G$  não é bipartido, pois têm circuitos de comprimento ímpar então  $\chi(G) \geq 3$  concluindo-se que são necessários pelo menos três aquários para alojar as diferentes espécies de peixes. A aplicação do algoritmo guloso permite concluir, como se pode ver na Figura 3.3, que o grafo  $G$  que representa este problema, admite uma 3 – coloração.

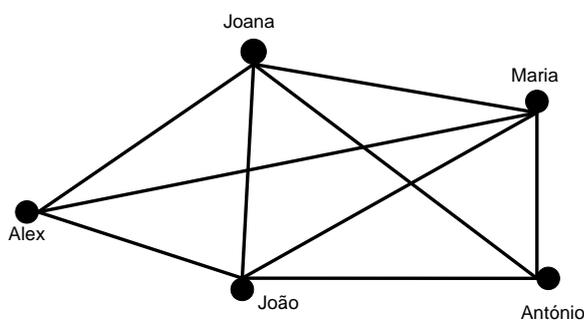


**Figura 3.3** Coloração do grafo da Figura 3.2.

### 3.3 Coloração de Arestas

Da mesma forma que selecionamos um conjunto independente de vértices, podemos considerar um conjunto independente de arestas, isto é, um conjunto de arestas não adjacentes duas a duas, considerando que duas arestas são adjacentes se têm algum vértice extremo em comum. Um conjunto independente de arestas é designado por *emparelhamento*[8].

*Exemplo 3.1* Suponhamos que num grupo de alunos irão formar pares para cumprir determinadas tarefas num laboratório. O grafo da Figura 3.4 representa esta situação.

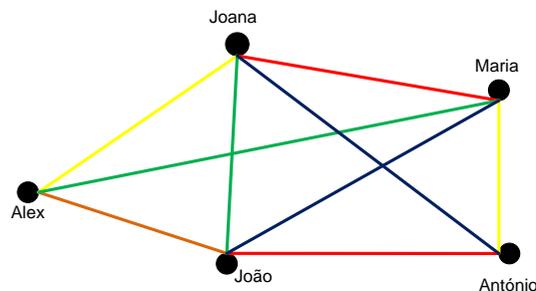


**Figura 3.4** Grafo que representa os pares formados.

Observamos que um mesmo aluno pode ter que cumprir uma tarefa em vários pares formados. Cada tarefa necessita de 1 hora para ser executada. Qual o menor número de horas necessárias para que todas as tarefas sejam realizadas? As arestas representam os pares, cada aluno só pode trabalhar numa tarefa de cada vez, tarefas executadas simultaneamente correspondem a um emparelhamento. Podemos fazer corresponder uma cor a cada horário e a nossa pergunta passa a ser: Qual o menor número de cores com as quais podemos colorir as arestas do grafo de modo que a aresta incidentes num mesmo vértice sejam atribuídas cores diferentes?

**Definição 3.5** O menor número de cores necessárias para colorir as arestas de um grafo  $G$  designa-se por *índice cromático* do grafo e denota-se por  $\chi'(G)$ .

Na Figura 3.5 observa-se que o grafo  $G$  que modela o problema descrito no Exemplo 3.1 admite uma coloração das arestas com 5 cores. Como o  $G$  não admite uma coloração de arestas com 4 ou menos cores conclui-se que  $\chi'(G) = 5$ .



**Figura 3.5** Coloração das arestas do grafo da Figura 3.4

**Teorema 3.4** Para qualquer grafo  $G = (V, E)$ , tem-se que  $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

**Demonstração :**  $\chi'(G) \geq \Delta(G)$  pois arestas incidentes num mesmo vértice são coloridas com cores distintas. ■

Para grafos bipartidos,  $\chi'(G)$  é conhecido. O resultado apresentado a seguir encontra-se provado em [18].

**Teorema 3.5** Para qualquer grafo bipartido  $G = (V, E)$ , tem-se  $\chi'(G) = \Delta(G)$ .

**Demonstração:** Seja  $xy \in E$ ,  $\Delta = \Delta(G)$  e  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_\Delta\}$  o conjunto de  $\Delta$  cores. Ao colorir a aresta  $xy$ , se existe alguma cor em  $C$  ainda não atribuída às arestas incidentes em  $x$  ou  $y$ , então atribuímos essa cor à aresta  $xy$ . Suponhamos que todas as cores em  $C$  estão atribuídas a arestas incidentes em  $x$  ou em  $y$ .

Observe-se que em  $G - xy$  (grafo obtido de  $G$  pela eliminação da aresta  $xy$ ) existem no máximo  $\Delta - 1$  cores atribuídas às arestas incidentes em  $x$  e no máximo  $\Delta - 1$  cores atribuídas às arestas incidentes em  $y$ . Com efeito, se  $d_G(x) = \Delta$  ou  $d_G(y) = \Delta$ , então  $d_{G-xy}(x) \leq \Delta - 1$  e  $d_{G-xy}(y) \leq \Delta - 1$ , e se  $x$  e  $y$  têm graus

inferiores a  $\Delta$  em  $G$ , o mesmo se passa em  $G - xy$ .

Podemos, assim, afirmar que existe uma cor  $C_x$  que está atribuída a uma aresta incidente em  $x$  e não está atribuída a nenhuma aresta de  $G - xy$  incidente em  $y$  e existe uma cor  $C_y$  que está atribuída a uma aresta incidente em  $y$  e não está atribuída a nenhuma aresta de  $G - xy$  incidente em  $x$ .

Consideremos em  $G - xy$  um passeio maximal (não está estritamente contido num passeio com as mesmas características) com início em  $x$  e que contém alternadamente arestas com cor  $C_x$  e  $C_y$ . Note-se que este passeio é um caminho pois não passa duas vezes no mesmo vértice (caso contrário, existiriam duas arestas com a mesma cor incidentes no mesmo vértice).

Como  $G$  é bipartido e não existem arestas com a cor  $C_x$  incidentes em  $y$ , então  $P$  não contém o vértice  $y$ , caso contrário,  $P$  seria um  $(x, y)$  – *caminho* de comprimento par de  $G - xy$  e  $P + xy$  (acrescentando a aresta  $xy$  e o vértice  $y$  a  $P$ ) seria um ciclo de comprimento ímpar de  $G$ , o que atendendo ao Teorema 2.4 entra em contradição com o facto de  $G$  ser um grafo bipartido.

Vamos recolorir as arestas de  $P$ , trocando as cores  $C_x$  e  $C_y$ . Após esta recoloração os vértices  $x$  e  $y$  não têm arestas incidentes com a cor  $C_x$ . Logo, podemos atribuir a cor  $C_x$  à aresta  $xy$ .

Repetindo este processo, obtemos um grafo com uma coloração que tem no máximo  $\Delta$  cores.

■

### 3.4 Puzzle Sudoku

Baseada em [3], apesar de poder ser surpreendente, a origem dos Sudoku pouco tem a ver com o país do Sol nascente: o seu criador foi um europeu e a sua apresentação ao público teve lugar nas páginas de uma publicação nos estados unidos, no final de 1970 na revista norte-americana Math Puzzles and Logic Problems, da editora Dell Magazines, especializada em desafios e quebra-cabeças. A editora deu ao jogo o nome de Number Place, que é usado até hoje nos Estados Unidos. Em meados da década de 1980 o quebra-cabeças “emigrou” ao Japão, onde o seu nome passou a ser: Sudoku,

composto dos termos nipônicos *Su* “número” e *Doku* “só”, ou seja, “Número sozinho”. O puzzle foi projetado por Howard Garns, um arquiteto aposentado de 74 anos de idade e construtor independente de puzzles, baseando-se, provavelmente, no quadrado latino, a origem desses quadrados remonta à Idade Média uma construção matemática criada pelo suíço Leonhard Euler (1707-1783) que os batizou de quadrados latinos e os estudou em detalhe. Garns adicionou ao quadrado latino algumas modificações, apresentou a nova criação como uma grelha parcialmente preenchida onde o jogador deveria preencher os demais quadros vazios.

O ancestral do Sudoku não é, como muitas vezes se imagina, o quadrado mágico - estrutura em que a soma dos algarismos de todas as linhas, colunas e diagonais produz o mesmo resultado.

Embora existam puzzles de outras dimensões, o *puzzle Sudoku* é um quebra-cabeças lógico, formado por uma grelha de oitenta e uma células, dispostas em 9 linhas e 9 colunas, tal que em cada célula se dispõe um dígito compreendido entre o 1 e o 9. A colocação deve obedecer a uma única e muito simples condição: não se podem repetir os dígitos dentro de uma mesma linha, coluna (isto é, é um quadrado latino) ou bloco de  $3 \times 3$  células.

É importante ter claro que não se estabelece nenhum tipo de relação aritmética entre os números utilizados, ou seja, não é necessário somá-los, subtraí-los, multiplica-los ou dividi-los.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7	8	9	1
5	6	7	8	9	1	2	3	4
8	9	1	2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8	9	1	2
6	7	8	9	1	2	3	4	5
9	1	2	3	4	5	6	7	8

**Figura 3.6** Um puzzle Sudoku preenchido

Em geral, um puzzle Sudoku  $n^2 \times n^2$  é uma tabela com  $n^2 \times n^2$  células, partida em  $n^2$  blocos, onde devemos escrever todos os números do conjunto  $\{1, \dots, n^2\}$ , de tal forma que em qualquer das linhas, colunas e blocos não existam dois números iguais. No início, algumas das entradas estão preenchidas e o objetivo é preencher as restantes. O sudoku de ordem  $n$  pode ser modelado como um problema de Teoria dos Grafos. Consideremos cada célula da tabela como um vértice de um grafo  $G$  de ordem  $n^2$ , onde dois vértices de  $G$  são adjacentes se as células correspondentes estão na mesma linha, coluna ou bloco  $n \times n$ . Consideremos  $n$  cores distintas às quais associamos os números  $1, 2, \dots, n$ . Então a solução de um problema de ordem  $n$  consiste na determinação de uma  $n$ -coloração em  $G$ . Com efeito, vértices adjacentes têm associados cores distintas, ou seja, têm associados números inteiros entre 1 e  $n$  distintos. Logo, células que estão na mesma linha, coluna ou bloco têm números distintos associados.

Consideremos primeiro o caso mais simples de um **Puzzle Sudoku  $4 \times 4$** , ou seja, uma tabela  $4 \times 4$ , com algumas células preenchidas.

			4
3		2	
	1		3
4			

**Tabela 3.2** Puzzle Sudoku  $4 \times 4$

Como preencher o Puzzle Sudoku da Tabela 3.2, sem repetir os números em cada coluna, linha e bloco?

Começamos por atribuir uma cor a cada número. Ao número 1 atribuímos a cor azul, a 2 a cor verde, a 3 a cor vermelha e a 4 a cor preta. Em cada um das células vamos atribuir a cor que lhe pode ser atribuída, efetuando o seguinte raciocínio: a célula é vizinha dos números que se encontram na mesma linha na mesma coluna e no mesmo bloco, logo não poderá ter a cor desses números, como mostra a Tabela 3.3.

●●	●	●●	4
3	●	2	●
●	1	●	3
4	●●	●	●●

**Tabela 3.3** Preenchimento do puzzle Sudoku da Tabela 3.2.

Às células onde figura apenas uma cor corresponde apenas uma possibilidade de atribuição de um número.

Vamos preencher a Tabela 3.3 com a indicação dos números que podemos atribuir.

●●	2	●●	4
3	4	2	1
2	1	4	3
4	●●	1	●●

**Tabela 3.4** Preenchimento do puzzle da Tabela 3.2.

Agora vamos eliminar as cores já usadas nas células vizinhas das células preenchidas anteriormente.

●	2	●	4
3	4	2	1
2	1	4	3
4	●	1	●

**Tabela 3.5** Preenchimento do puzzle da Tabela 3.2.

Por fim todas as células têm apenas uma cor, logo é esse o número da cor que lhe será atribuído.

1	2	3	4
3	4	2	1
2	1	4	3
4	3	1	2

**Tabela 3.6** Resolução do puzzle da Tabela 3.2.

Neste caso, o puzzle sudoku  $4 \times 4$  tem uma única solução, no entanto, existem casos em que o puzzle não tem solução ou tem mais do que uma solução. Por exemplo, o puzzle sudoku  $4 \times 4$  da Tabela 3.7 admite pelo menos duas soluções que se encontram na Tabela 3.8.

			3
2		4	
		1	

**Tabela 3.7** Puzzle sudoku  $4 \times 4$

1	4	2	3
2	3	4	1
4	1	3	2
3	2	1	4

4	1	2	3
2	3	4	1
1	2	3	4
3	4	1	2

**Tabela 3.8** Soluções do puzzle da Tabela 3.7.

Algumas questões interessantes relativamente ao puzzle sudoku  $9 \times 9$  (o mais frequente).

Quando é que um puzzle Sudoku tem solução e quando é que ela é única?

Qual o número mínimo de células inicialmente preenchidas para que um puzzle Sudoku tenha solução única?

Segundo Gordon Royle, em [10], existem pelo menos 49151 configurações distintas de sudoku com 17 entradas, mas não se conhecem exemplos com 16 entradas.

A existência de solução única depende do número de células inicialmente

preenchidas?

Sabe-se que [2] dado um puzzle Sudoku de ordem  $n$  com células inicialmente preenchidas, se essas células não utilizam pelo menos  $n^2 - 1$  números distintos, então a solução do puzzle, caso exista, não é única.

		6	4		3		1	5
4	3	9		1		7	6	
2			7		6	4		
9	6		2		1		5	7
	2		3		4		9	
3	1		9		5		8	4
		3	1		2			9
	7	5		4		6	2	3
8	9		6		7	5		

**Tabela 3.9** Puzzle de Sudoku 9×9

Vamos então apresentar a coloração inicial do puzzle de Sudoku da Tabela 3.9.

Atribuímos cores a cada um dos diferentes números com que vamos preencher o puzzle.

● → 1   ● → 2   ● → 3   ● → 4   ● → 5   ● → 6   ● → 7   ● → 8   ● → 9

De imediato concluímos que existem células a que já se pode atribuir o número correspondente, ou seja, às células que apresentem oito cores será atribuído o número da cor que falta na célula. Aplicando a coloração de grafos à Tabela 3.9 podemos colorir o puzzle da forma seguinte.

●	●	6	4	●●●	3	●●●	1	5
4	3	9	●●	1	●	7	6	●●
2	●●	●●	7	●●●	6	4	●	●
9	6	●●	2	●	1	●	5	7
●●	2	●●	3	●●●	4	●	9	●●
3	1	●	9	●●	5	●	8	4
●	●	3	1	●●	2	●	●●	9
●	7	5	●	4	●●	6	2	3
8	9	●●●	6	●	7	5	●	●

**Tabela 3.10** Coloração do puzzle da Tabela 3.9.

As células que apresentam apenas uma cor ser-lhe-á atribuída o número da cor que lhe corresponde, de seguida retirar nas células vizinhas a essas células a cor do número atribuído. Obtemos o puzzle da Tabela 3.11.

7	8	6	4	●●	3	●●	1	5
4	3	9	●	1	8	7	6	●
2	●	●	7	●●	6	4	3	8
9	6	●	2	8	1	3	5	7
●	2	●	3	●●	4	1	9	●
3	1	7	9	●	5	●	8	4
6	4	3	1	●●	2	8	●	9
1	7	5	●●	4	●	6	2	3
8	9	●	6	3	7	5	4	1

**Tabela 3.11** Preenchimento do puzzle da Tabela 3.9.

Prosseguindo o processo atingimos o preenchimento completo do puzzle de Sudoku  $9 \times 9$ .

7	8	6	4	2	3	9	1	5
4	3	9	5	1	8	7	6	2
2	5	1	7	9	6	4	3	8
9	6	4	2	8	1	3	5	7
5	2	8	3	7	4	1	9	6
3	1	7	9	6	5	2	8	4
6	4	3	1	5	2	8	7	9
1	7	5	8	4	9	6	2	3
8	9	2	6	3	7	5	4	1

**Tabela 3.12** Solução do puzzle Sudoku da Tabela 3.9.

# 4 Aplicações da Teoria dos Grafos no Ensino básico e secundário

Neste capítulo apresentamos algumas aplicações dos conceitos da Teoria dos Grafos apresentados nos capítulos anteriores, no ensino básico e secundário.

Nestes níveis de ensino a Teoria dos Grafos é importante na promoção e aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática,[16] desenvolvendo no aluno a competência:

- de compreender conceitos, relações, métodos e procedimentos matemáticos e da capacidade de os utilizar na análise, interpretação e resolução de situações em contexto matemático e não matemático;
- de analisar informação e de resolver e formular problemas, incluindo os que envolvem processos de modelação matemática;
- de abstração e generalização e de compreender e elaborar argumentações matemáticas e raciocínios lógicos;
- de comunicar em Matemática, oralmente e por escrito, descrevendo, explicando e justificando as suas ideias, procedimentos e raciocínios, bem como os resultados e conclusões a que chega, como é estabelecido nos Programas oficiais de Matemática [16].

## 4.1 Aplicações 1º ciclo do Ensino básico

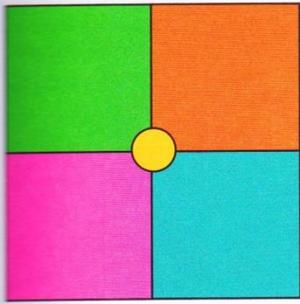
A resolução de problemas constitui uma parte integrante de toda aprendizagem matemática. Ao longo de todo o ensino a resolução de problemas é uma forma de construção de novos conhecimentos, habilita o aluno para a aplicação e adaptação de diferentes estratégias adequadas para a resolução de problemas, levando o aluno ao desenvolvimento do seu raciocínio, investigando e avaliando as suas conjeturas matemáticas. Igualmente desenvolve no aluno a capacidade de comunicar Matemática, organizando e consolidando o pensamento matemático. O aluno ao comunicar o seu pensamento matemático deverá fazê-lo de forma clara e coerente

para que todos (professores e colegas) o entendam. É neste domínio que a Teoria dos Grafos entra não como um conteúdo a estudar separadamente, mas na modelação e resolução de problemas que envolvam caminhos, redes e relações entre um número finito de objetos, encontrando estes processos ao longo dos diferentes anos de escolaridade [4] e [16].

Ao longo dos quatro anos do 1º ciclo do ensino básico é frequente a ocorrência de situações problemáticas que se podem resolver recorrendo à Teoria dos Grafos. Apresentamos aqui quatro exemplos do 1º ciclo do ensino básico, que constam em vários manuais adotados nas escolas do ensino básico.

*Exemplo 4.1* Este exemplo foi retirado do manual do 1º ano «O Mundo da Carochinha»[7]. Este exemplo foi dado aos alunos em forma de jogo, servindo para abordar a noção de fronteira entre regiões. A abordagem a este jogo poderá ser feita através da aplicação da coloração de vértices de um grafo, apresentada anteriormente na secção 3.2. Vamos modelar a situação através de um grafo ver Figura 4.1, sendo os vértices do grafo a representação de cada uma das regiões e existindo arestas entre dois vértices se as regiões correspondentes são vizinhas. Numa primeira tentativa o aluno deverá começar por colorir qualquer um dos vértices do grafo que representam as regiões com apenas três fronteiras ou vértices de grau 3. Começando por atribuir a cor azul à região A, segue-se a coloração de cada uma das regiões vizinhas, B, E e D, com cores diferentes. No total são necessárias 4 cores, pois a região C é colorida com a cor azul, visto não ser vizinha da região A. Na segunda coloração o aluno deverá começar pelo vértice (região) de maior grau, e colorir os outros vértices de cor diferente desde que tenham fronteira entre si, ou seja, exista um aresta que os una.

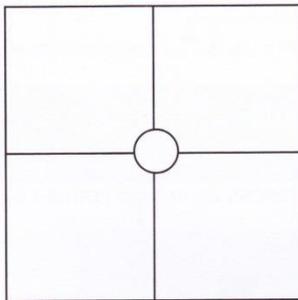
Repara na forma como a Carochinha pintou a prenda de Natal.



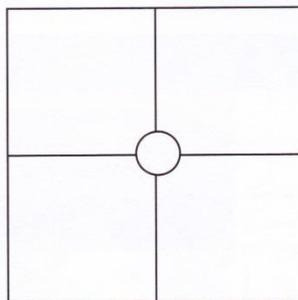
Usei 5 cores diferentes e foi fácil.



Sabendo que duas regiões vizinhas não podem ter a mesma cor, tenta pintar usando só 4 cores.



E com 3 cores? Será possível?



Compara as tuas combinações de cores com as dos teus colegas. Existem muitas diferenças?

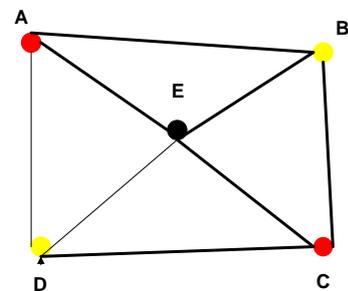
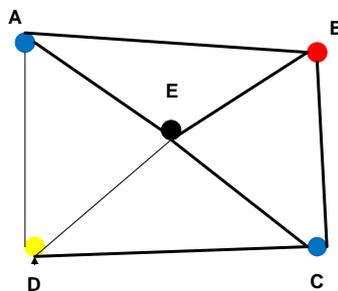
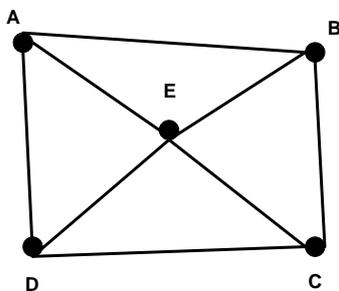
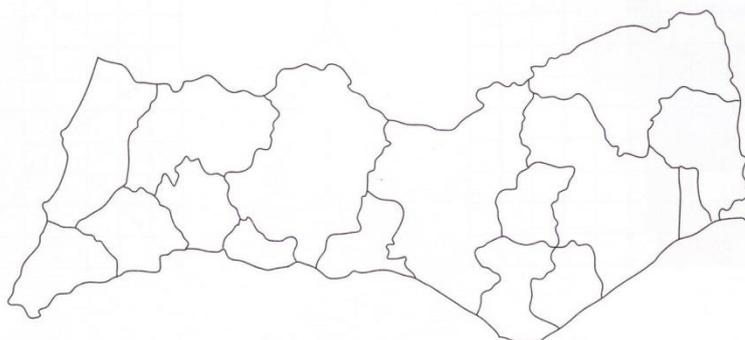


Figura 4.1 Resolução do Exemplo 4.1.

*Exemplo 4.2* Este exemplo foi retirado do manual do 2º ano, livro de fichas [14] onde a coloração do mapa, já requer uma estratégia de coloração. Este exemplo está inserido na área da Geometria.

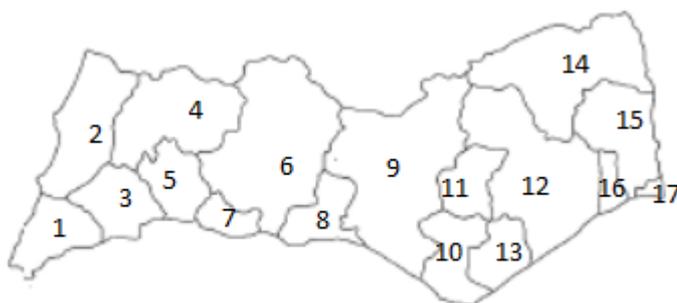
**3** Observa os mapas. Em cada alínea pinta-os com o menor número de cores que conseguires, de modo a que as áreas com fronteira comum não tenham a mesma cor.

**3.1.**



Este exemplo também se poderá resolver utilizando a secção 3.2, e a estratégia referida será o algoritmo guloso. Primeiro vamos numerar as regiões do mapa.

**3.1.**



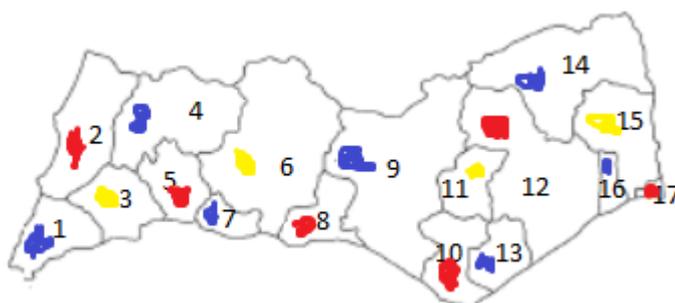
**Figura 4.2** Ordenação das regiões do mapa do Exemplo 4.2.

Colorimos a região 1 com a cor azul e, de seguida colorimos com a mesma cor todas as regiões que não lhe sejam vizinhas nem partilhem fronteiras, seguindo a ordem da numeração das regiões. Assim, as regiões 1, 4, 7, 9, 13, 14 e 16 ficam com a cor azul.

Em seguida, atribuímos à região com o menor valor ainda não colorida, ou seja, a região 2, uma cor ainda não atribuída às regiões vizinhas, neste caso, o vermelho. De forma semelhante ao que fizemos com a cor azul, colorimos sucessivamente as regiões 2, 5, 8, 10, 12 e 17 com a cor vermelha, pois não têm vizinhos coloridos com

esta cor. Voltamos a atribuir uma cor ainda não utilizada à região de menor valor ainda não colorida. Assim, atribuímos a cor amarela à região 3 e, sucessivamente, colorimos com a cor amarela as restantes regiões ainda não coloridas. Desta forma, concluímos que para colorir o mapa do Exemplo 4.2 são necessárias, no mínimo, três cores.

3.1.



Exemplo 4.3 Neste exemplo do livro do 2ºano [14] é feito o estudo de um itinerário.

4

O mapa indica as distâncias, em metros, entre os vários pontos de um jardim.



A menina entrou no parque e foi logo andar de escorrega. Depois, foi beber água e, de seguida, foi andar de balanço. Quando ficou cansada, foi sentar-se na relva à sombra da árvore. Calcula a distância percorrida pela menina, se optar pelo caminho mais curto.

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad} \text{ m}$$

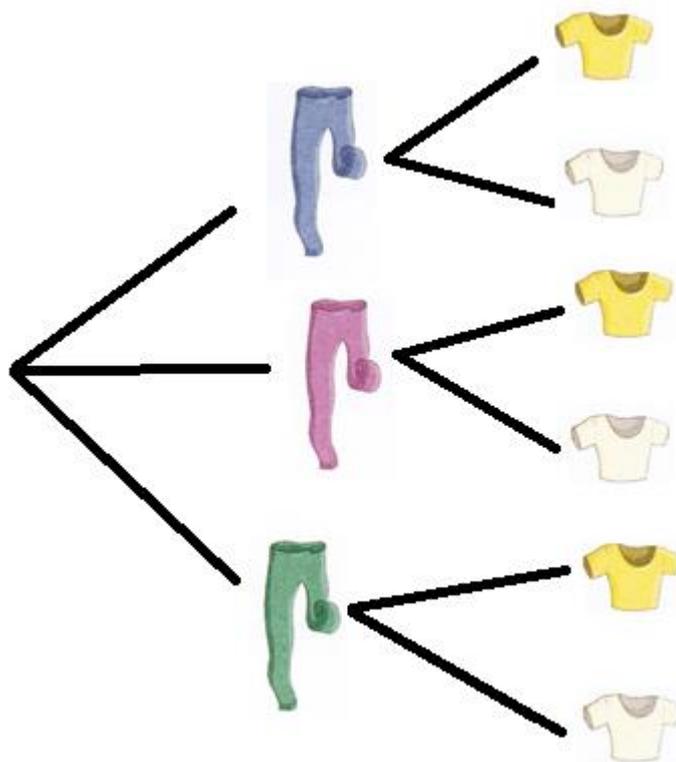
Neste caso, o mapa do jardim poderá ser modelado através de um grafo pesado, onde os vértices estão associados aos vários locais assinaladas (escorrega, balanço, fonte, árvore e o ponto inicial) e as arestas são as ligações existentes entre os respetivos locais. Utilizamos, aqui, os conceitos de caminho e grafo pesado estudados nas secções 2.1 e 2.3. A questão que surge neste exemplo, refere-se ao problema de determinação do caminho de Hamilton abordado na secção 2.6. Dado que se trata de um problema com poucos elementos, isto é, poucos vértices e arestas (5 vértices e 7

arestas), os alunos podem resolver o problema por simples observação.

*Exemplo 4.4* Esta aplicação foi retirada do manual do 4ºano [6] e ilustra a aplicação da noção de árvore para a compreensão das combinações possíveis.

*“A Mariana pratica aeróbica. Numa das suas gavetas, tem três pares de calças de licra: umas azuis, outras cor-de-rosa e outras verdes. Noutra gaveta tem os toques: um branco e um amarelo. Mas ela não sabe o que vai vestir para a aula de hoje.*

*Quais as possibilidades que a Mariana tem de se equipar para a aula de aeróbica, usando umas calças e um top?”* Uma das estratégias de resolução deste exemplo é a utilização de noção de árvore relacionando com a combinatória, neste caso é apresentado um grafo com todas as possibilidades com que a Mariana se poderá equipar.



Exemplo 4.5 O problema aqui apresentado e a estratégia de resolução foram retirados do manual do 4ºano [6].

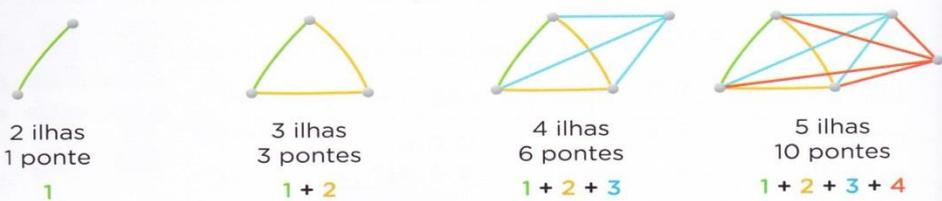
**Estratégias de resolução de problemas**

Lê o problema e observa as estratégias usadas para a sua resolução.

Um arquipélago é formado por 9 ilhas. Imagina que se queria unir cada ilha a cada uma das restantes por uma ponte.

Quantas pontes seria necessário construir?

**1.ª estratégia** - usar um esquema para encontrar um padrão, simplificando o problema



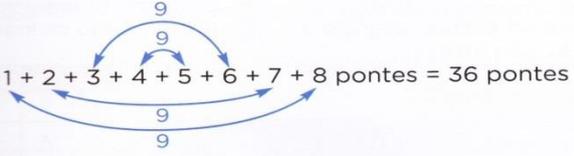
2 ilhas  
1 ponte  
1

3 ilhas  
3 pontes  
1 + 2

4 ilhas  
6 pontes  
1 + 2 + 3

5 ilhas  
10 pontes  
1 + 2 + 3 + 4

Descoberto o padrão, encontra-se a resposta para as 9 ilhas:



1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 pontes = 36 pontes

Nesta estratégia de resolução a noção de grafos completos serve para representar a situação e compreender o padrão da soma das pontes, efetuado em cada acréscimo de uma nova ilha, ou seja, levar o aluno a compreender que ao acrescentar um vértice terá de somar o número de arestas já presentes no grafo com o número de vértices existentes neste (incluindo o novo vértice) menos um. Começamos com uma ilha e zero pontes. Ao passarmos de uma para duas ilhas temos que acrescentar uma ponte a uni-las e o número de pontes passa a ser um  $(0+1)$ , com três ilhas temos três pontes  $(0+1+2)$  e com quatro ilhas estando todas ligadas entre si obtemos 6 pontes  $(0+1+2+3)$ , concluímos, assim, que um grafo que represente as  $n$  ilhas a uni-las é um grafo completo  $K_n$ . O número de arestas de  $K_n$  é dado por

$$|E| = \sum_{i=1}^n (i-1) = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2},$$

ou seja, o número de pontes necessárias para que todas as ilhas estejam ligadas através de uma ponte entre si é dada pelo número de combinações das  $n$  ilhas duas a duas.

## **4.2 Aplicações no 2º e 3º ciclos e no ensino secundário**

As aplicações dos conceitos de Teoria dos Grafos no 2º e 3º ciclos do ensino básico são menos frequentes ficando-se pelos exemplos de combinatória.

No ensino secundário, é sobretudo na disciplina Matemática Aplicada às Ciências Sociais que este assunto tem referência no programa oficial [15]. Nesta disciplina o tema, Modelos de Grafos, trata diversos problemas, como o sistema de distribuição, limpeza de ruas, patrulhamento, entre outros, que o professor poderá abordar. Cada uma destas situações apresentadas tem como base a modelação e resolução através da noção de grafo. Os grafos de Euler e grafos de Hamilton são os mais utilizados na resolução de problemas, sendo o Teorema 2.6 da secção 2.6, um resultado que o aluno tem de conhecer. Neste contexto os problemas do carteiro chinês e caixeiro viajante, são problemas de eleição nesta disciplina. É ainda, abordada a noção de árvore, apresentada na secção 2.4, bem como os algoritmos de Kruskal e Prim, referidos na secção 2.5. No entanto, embora no programa não seja feita referência explícita à coloração de vértices, aparecem problemas envolvendo este assunto nos manuais adotados pelas escolas, que o professor poderá apresentar como exemplos, à semelhança do Exemplo 3.1. referido na secção 3.2.

## 5 Conclusão

Neste trabalho foi feito o estudo de noções de teoria dos grafos com o propósito de aperfeiçoar as metodologias da abordagem pedagógica e didática do desempenho da prática docente. No ensino básico e secundário lecionam-se, atualmente, alguns tópicos que, não sendo explicitamente classificados como sendo desta área do conhecimento científico, relacionam-se de perto com ela. Damos como exemplo a unidade didática Modelos de Grafos, lecionada na disciplina Matemática Aplicada às Ciências Sociais. Sendo uma área recentemente introduzida nos programas oficiais de matemática do ensino básico e secundário, que não fazia parte da formação acadêmica tradicional de professores, a formação e atualização de conhecimentos torna-se premente.

A modelação de um problema por um grafo, quando adequado, torna mais acessível a sua compreensão, não apenas porque permite uma visualização da situação problemática mas também porque permite organizar metodologicamente a informação importante para a sua resolução. Por outro lado, o conhecimento de alguns resultados, teoremas conhecidos, permite obter de modo simples, por vezes imediato, a sua resposta.

Uma incursão pelos programas oficiais, desde o ensino básico do 1º ciclo até ao ensino secundário, mostra vários exemplos da aplicação deste assunto, relacionando diversas áreas, desde a Geometria à Combinatória.

A análise e reflexão na escolha dos problemas e tarefa apresentada nesta dissertação foram feitas neste sentido de modo a abordar os diferentes assuntos.

Com este trabalho torna-se mais fácil a capacidade de adaptar tarefas e problemas às capacidades e adequação dos conhecimentos dos alunos e às metas a atingir para cada conceito a abordar.

A busca do aperfeiçoamento é uma constante na evolução do conhecimento, por esta razão a prossecução deste trabalho deverá continuar, pois a teoria de grafos fará cada vez mais, parte do ensino da Matemática e na resolução de problemas do quotidiano.

# Bibliografia

- [1] A. J. Hoffman, P. Wolfe, "History", em "The Travelling salesman problem: a guided tour of combinatorial optimization"; E. L. Lawler, J.K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan, D. B. Shmoys (eds.), John Wiley, 1985, pp. 1-15.
- [2] A. M. Herzberg and M. R. Murty., *Sudoku squares and chromatic Polynomials*, Notices of the AMS, vol.54, (2007):708-717.
- [3] A. Xavier, *Sudoku o guia definitivo*, RBA Coleccionables, S.A., 2006.
- [4] Associação de professores de Matemática, *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*, edição Portuguesa, 2008.
- [5] C. Alsina, *Plantas do metro e redes neuronais*, RBA Coleccionables, EDITEC, 2011.
- [6] C. Letra, F. G. Freire, *O Mundo da Carochinha – Matemática 4ºano*, Gailivro, 2011.
- [7] C. Letra, *O Mundo da Carochinha – Matemática 1ºano*, Gailivro, 2010.
- [8] D. B. West, *Introduction to Graph Theory*, Prentice-Hall, second Eddition, 2001.
- [9] D.M. Cardoso, J. Szymański, M. Roostami, *Matemática Discreta – Combinatória, Teoria dos grafos, Algoritmos*, Escolar Editora, 2009.
- [10] G. Royle, *Sudoku Patterns*, disponível em <http://people.csse.uwa.edu.au/gordon/sudokupat.php> com acesso em 26/05/2013.
- [11] <http://francarrera.webs.com/ciclosdehamilton.htm>, acesso em 6/05/2013.
- [12] J.M.S. Simões Pereira, *Matemática Discreta: Grafos, Redes, Aplicações*, Editora Luz da Vida, Lda, 2009.
- [13] M. A. F. Neves, S. Bolinhas, L. Faria, *Preparação para o exame Nacional 2013- Matemática Aplicada às Ciências Sociais*, Porto Editora.

- [14] M. Gregório, N.M. Valente, R. Chorão, R. Perdigão, *Segredos dos números 2- livro de fichas, Matemática/ 2º ano do Ensino Básico*, Lisboa Editora, S.A.
- [15] Ministério da Educação, *Programa da disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais*, disponível em [http://mat.absolutamente.net/recursos/docs\\_curr/mac3.pdf](http://mat.absolutamente.net/recursos/docs_curr/mac3.pdf), com acesso em 06/05/2013.
- [16] Ministério da Educação, *Programa de Matemática do ensino básico*, 2009, disponível em, <http://www.esv.ipv.pt/mat1ciclo/ProgramaMatematica.pdf>, com acesso em 06/05/2013.
- [17] R. Feiteira, “*Cores, grafos e resoluções de conflitos*”, disponível em <http://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=247>, acesso em 6/05/2013.
- [18] S. Jurkiewicz, *Grafos - uma Introdução*, disponível em <http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/296655.o>, com acesso em 06/05/2013.