



**Isabel Maria  
Pereira Duarte**

**Esparsidade como condição na Análise Espetral  
Sparseness as a constraint in Spectral Analysis**





**Isabel Maria  
Pereira Duarte**

**Esparsidade como condição na Análise Espetral**  
**Sparseness as a constraint in Spectral Analysis**

Tese apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Engenharia Electrotécnica, realizada sob a orientação científica do Doutor Paulo Jorge Dos Santos Gonçalves Ferreira, Professor Catedrático do Departamento de Electrónica, Telecomunicações e Informática da Universidade de Aveiro e do Doutor José Manuel Neto Vieira, Professor Auxiliar do Departamento de Electrónica, Telecomunicações e Informática da Universidade de Aveiro.

O trabalho de investigação teve o apoio previsto no regulamento para atribuição de bolsas de doutoramento do Instituto Politécnico de Viseu - Profad.



## **o júri / the jury**

presidente / president

Prof. Doutor Carlos Fernandes da Silva  
Professor Catedrático da Universidade de Aveiro

vogais / examiners committee

Prof. Doutor Paulo Jorge dos Santos Gonçalves Ferreira  
Professor Catedrático da Universidade de Aveiro

Prof. Doutor Armando José Formoso de Pinho  
Professor Associado com Agregação da Universidade de Aveiro

Prof. Doutor Aníbal João de Sousa Ferreira  
Professor Associado da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Prof. Doutora Nuria González Prelcic  
Professora Associada da Universidade de Vigo - Espanha

Prof. Doutor José Manuel Neto Vieira  
Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro



*Dedico esta tese à minha mãe e à memória do meu pai.*



## **agradecimentos**

Quero em primeiro lugar agradecer aos meus orientadores Professor Paulo Jorge Ferreira e Professor José Neto Vieira pelo conhecimento que me proporcionaram, dedicação e colaboração que sempre dispensaram na orientação e acompanhamento deste trabalho.

Quero também agradecer aos meus colegas e amigos que de alguma forma me ajudaram na realização deste projecto.

Um obrigada muito especial ao Daniel Albuquerque no apoio e força que sempre me deu.

Quero ainda agradecer à minha mãe, meu irmão e cunhada pelo incentivo e apoio que sempre me concederam durante a realização deste trabalho.



**palavras-chave**

Basis Pursuit, Ortogonal Matching Pursuit, amostragem, compressed sensing, função interpoladora, frames redundantes, representações esparsas, estimação espectral, reconstrução de sinal.

**resumo**

Esta tese apresenta algoritmos que estimam o espectro de um sinal não periódico a partir de um número finito de amostras, tirando partido da esparsidade do sinal no domínio da frequência. Trata-se de um problema em que devido aos efeitos de leakage, o sucesso dos algoritmos tradicionais está limitado. Para ultrapassar o problema, os algoritmos propostos transformam a base DFT numa frame com um maior número de colunas, inserindo um número reduzido de colunas entre algumas das iniciais. Estes algoritmos são baseados na teoria do compressed sensing, que permite obter e representar sinais esparsos e compressíveis, utilizando uma taxa de amostragem muito inferior à taxa de Nyquist. Os algoritmos propostos apresentam um bom desempenho em comparação com os algoritmos existentes, destacando-se na estimação do espectro de sinais compostos por sinusóides com frequências muito próximas, com amplitudes diferentes e na presença de ruído, situação particularmente difícil e perante a qual os restantes algoritmos falham.



**keywords**

Basis Pursuit, Orthogonal Matching Pursuit, sampling, compressed sensing, interpolating function, redundant frames, sparse representations, spectral estimation, signal reconstruction.

**abstract**

This thesis presents algorithms that estimate the spectrum of a nonperiodic signal from a finite number of samples, taking advantage of the sparsity of the signal in the frequency domain. This is a problem in which, due to the effects of leakage, the success of traditional algorithms is limited. To overcome the problem, the proposed algorithms transform the DFT basis into a frame with a larger number of vectors, by inserting a small number of columns between some of the initial ones. These algorithms are based on the compressed sensing theory that allows us to acquire and represent sparse and compressible signals, using a much lower sampling rate than the Nyquist rate. The proposed algorithms perform well in comparison with existing algorithms, especially in the spectral estimation of signals composed by sinusoids with closed frequencies, with different amplitudes and in the presence of noise, a situation particularly difficult where the other algorithms fail.



# Conteúdo

<b>Conteúdo</b>	<b>i</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>iii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>viii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Organização da tese . . . . .	2
<b>2 Análise Espectral</b>	<b>5</b>
2.1 Sinais determinísticos . . . . .	5
2.2 Sinais aleatórios e sua caracterização . . . . .	9
2.2.1 Variáveis aleatórias . . . . .	9
2.2.2 Processo aleatório . . . . .	13
2.3 Métodos de estimação espectral . . . . .	29
2.3.1 Métodos clássicos ou não paramétricos . . . . .	30
2.3.2 Métodos paramétricos . . . . .	32
2.3.3 Métodos baseados nos valores próprios da matriz de correlação dos dados . . . . .	35
<b>3 Compressed Sensing</b>	<b>41</b>
3.1 Amostragem com projeções lineares . . . . .	41
3.2 Reconstrução de sinais esparsos subamostrados . . . . .	43
3.2.1 Problemas de minimização $l_0$ , $l_1$ e $l_2$ . . . . .	44
3.2.2 Algoritmos de reconstrução . . . . .	47
3.2.3 Condições para a reconstrução do sinal . . . . .	55
3.3 Reconstrução de sinais com ruído . . . . .	70
3.4 Reconstrução de sinais esparsos numa base ou num dicionário . . . . .	77
3.5 Aquisição de amostras de um sinal analógico . . . . .	80

<b>4</b>	<b>Compressed Sensing aplicado à Análise espectral</b>	<b>83</b>
4.1	Aproximação esparsa para sinais compostos por sinusóides com frequências múltiplas da frequência fundamental da DFT . . . . .	86
4.2	Aproximação esparsa para sinais com quaisquer frequências . . . . .	88
4.2.1	Frames e estabilidade . . . . .	90
4.2.2	Proposta de novos algoritmos de reconstrução . . . . .	93
4.2.3	Alguns algoritmos de reconstrução existentes . . . . .	102
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>107</b>
5.1	Resultados com os algoritmos propostos . . . . .	108
5.1.1	Resultados comparativos dos dois algoritmos propostos . . . . .	108
5.1.2	Desempenho na reconstrução de um sinal . . . . .	109
5.1.3	Desempenho na estimação das frequências . . . . .	111
5.1.4	Número de amostras necessárias para a reconstrução de um sinal em função da esparsidade do sinal . . . . .	111
5.1.5	Desempenho na reconstrução de sinais composto por sinusóides de amplitudes diferentes . . . . .	112
5.1.6	Desempenho na reconstrução de sinais compostos por sinusóides com frequências próximas . . . . .	114
5.1.7	Desempenho na reconstrução de sinais cujas amostras contêm ruído . . . . .	117
5.2	Comparação do desempenho do algoritmo proposto com o de outros algoritmos . . . . .	118
5.2.1	Comparação dos três algoritmos na reconstrução de um sinal . . . . .	118
5.2.2	Comparação dos três algoritmos na reconstrução de sinais compostos por sinusóides com amplitudes diferentes . . . . .	118
5.2.3	Comparação dos três algoritmos na reconstrução de sinais compostos por sinusóides com frequências próximas . . . . .	121
5.2.4	Comparação dos três algoritmos na reconstrução de sinais com ruído . . . . .	124
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>127</b>
6.1	Conclusões obtidas . . . . .	128
6.2	Trabalho Futuro . . . . .	130
	<b>Bibliografia</b>	<b>133</b>

# Lista de Figuras

2.1	Sequência de autocorrelação de um sinal filtrado pelo filtro FIR de coeficiente 1,2,3. . .	35
2.2	Valores aproximados das frequências, utilizando o MUSIC com um valor para o atraso igual a 30. . . . .	39
2.3	Valores aproximados das frequências, utilizando o MUSIC com um valor para o atraso igual a 100. . . . .	39
3.1	Ilustra, em $\mathbb{R}^3$ , que a minimização da norma $\ell_2$ não dá necessariamente uma solução esparsa, ao contrário da minimização da norma $\ell_1$ . Fonte: [1] . . . . .	47
3.2	Soluções obtidas na resolução de (P1) e (P2) para um sinal com esparsidade 15. . . .	48
3.3	Esquema que ilustra o algoritmo Matching Pursuit . . . . .	51
3.4	Ilustra a imagem dos vetores $x = (0, 1)$ e $y = (1, 0)$ pela matriz singular A. . . . .	55
3.5	Localização dos vectores imagem dos vectores unitários pela matriz $\Phi_T$ . . . . .	59
3.6	Relação entre o número de sucessos e o número de amostras $M$ , considerado. . . . .	67
3.7	Valores dos erros obtidos para cada uma das $M$ amostras, em cada uma das 5000 iterações. . . . .	68
3.8	Médias dos erros de reconstrução para cada uma das $M$ amostras. . . . .	69
3.9	Número de amostras necessárias para recuperar um sinal de tamanho 256, esparsos numa base aleatória, em pelo menos 99% das vezes. . . . .	69
3.10	Comparação da reconstrução de um sinal com 6 frequências, com e sem ruído. . . . .	71
3.11	Probabilidades dos valores encontrados para as frequências coincidirem com os valores originais, para cada valor do parâmetro $\lambda$ e para cada valor do desvio padrão, $\sigma$ considerado, utilizando o BP e utilizando o LASSO. . . . .	71
3.12	Gráfico onde se evidencia os valores de $\lambda$ e $\sigma$ onde a probabilidade dos 6 valores encontrados para as frequências coincidirem com os valores originais é superior a 95%, utilizando o BP e utilizando o LASSO. . . . .	72
3.13	Frequências encontradas com os algoritmos BP e LASSO em comparação com as posições exatas das frequências. . . . .	75
3.14	Esquema que ilustra (3.16). Fonte [1]. . . . .	77
3.15	Esquema que ilustra o conversor analógico - informação. . . . .	81
3.16	Esquema que ilustra o desmodulador aleatório. . . . .	81

4.1	DCT de dois sinais, $x_1$ e $x_2$ , compostos por três sinusóides com frequências normalizadas. . . . .	85
4.2	FFT de um sinal composto por duas sinusóides, em que a frequência de uma delas é múltipla da frequência fundamental e a outra não. . . . .	86
4.3	Desempenho da reconstrução de um sinal composto por três sinusóides, ao qual corresponde $K = 6$ , utilizando os algoritmos MP, OMP e BP. . . . .	87
4.4	FFT e valores aproximados das frequências para um sinal composto por três sinusóides, ao qual corresponde $K = 6$ . No cálculo dos valores aproximados foram utilizados os algoritmos MP, OMP e BP, com $M = 50$ amostras. . . . .	87
4.5	Número de iterações realizadas para recuperar o sinal garantindo que a norma do resíduo seja inferior a $10^{-8}$ , utilizando os algoritmos MP e OMP. . . . .	88
4.6	Espectro de um sinal de tamanho $N = 1024$ , composto por três sinusóides com frequências não múltiplas da frequência fundamental da DFT, utilizando a DFT e o BP na resolução do problema com CS e considerando $M = 50$ amostras. . . . .	89
4.7	Reconstrução de um sinal composto por duas sinusóides com frequências não múltiplas da frequência fundamental da DFT, antes e depois de ampliada a matriz, com os 3 algoritmos estudados. A matriz ampliada tem mais quatro colunas. . . . .	90
4.8	Função interpoladora da norma $\ell_1$ com fatores de sobreamostragem $l = 2$ e $l = 7$ , comparada com a função sinc. . . . .	94
4.9	Função interpoladora que minimiza a norma $\ell_1$ , para $l = 2$ e $l = 5$ . . . . .	94
4.10	Minimização da norma $\ell_1$ utilizando o BP e utilizando a função interpoladora com $l = 2$ . . . . .	95
4.11	Minimização da norma $\ell_1$ utilizando o BP e a função interpoladora, para um sinal com uma sinusóide com frequência não múltipla da frequência fundamental da DFT. . . . .	95
4.12	Minimização da norma $\ell_1$ utilizando o BP e utilizando a função interpoladora, para um sinal composto por duas sinusóides com frequências não múltiplas da frequência fundamental da DFT, utilizando $l = 2$ . . . . .	96
4.13	Minimização da norma $\ell_1$ utilizando o BP e utilizando a função interpoladora, para um sinal composto por sinusóides cujas frequências não são múltiplas da frequência fundamental da DFT e são muito próximas. . . . .	97
4.14	Posições das frequências utilizando o BP na reconstrução de um sinal com frequência não múltipla da frequência fundamental da DFT. . . . .	97
4.15	Posição da frequência utilizando o BP na reconstrução de um sinal com uma sinuóide de frequência não múltipla da frequência fundamental da DFT, alargando a matriz da DFT em 10 colunas colocadas entre a coluna 139 e a coluna 140. . . . .	98
4.16	Posição da frequência utilizando o BP na reconstrução de um sinal com uma sinusóide de frequência não múltipla da frequência fundamental da DFT, alargando a matriz da DFT em 100 colunas colocadas entre a coluna 139 e a coluna 140. . . . .	98

4.17	Erro na primeira frequência em função do número de colunas acrescentadas. . . . .	100
4.18	O erro na primeira frequência em função do número de colunas acrescentadas. . . . .	102
5.1	Erros dos valores das frequências para sinais compostos com duas sinusóides, utilizando $M = 50, M = 100, M = 150, M = 200$ e $M = 250$ amostras, para os Algoritmos proposto 1 e proposto 2. Os valores são calculados a partir dos resultados obtidos em 200 experiências independentes. . . . .	109
5.2	Médias e medianas dos erros de reconstrução para os dois algoritmos propostos, para sinais compostos por duas sinusóides. . . . .	109
5.3	Valores aproximados de $s$ na reconstrução de um sinal composto por três sinusóides reais. Os gráficos do lado direito são obtidos a partir dos correspondentes no lado esquerdo, fazendo um zoom em $y$ . . . . .	110
5.4	Erros dos valores das frequências para sinais compostos por uma, duas e três sinusóides, utilizando $M = 100$ e $M = 150$ amostras. Os valores são calculados a partir dos resultados obtidos em 200 experiências independentes. . . . .	111
5.5	Médias e medianas dos erros de reconstrução com o algoritmo proposto para sinais compostos por uma, duas e três sinusóides, o que corresponde a $K = 2, K = 4$ e $K = 6$ respectivamente. . . . .	112
5.6	Valores aproximados das frequências, para um sinal composto por duas sinusóides reais com amplitudes 0.1 e 0.01. Utilizámos $M = 100$ amostras. . . . .	112
5.7	Valores aproximados das frequências, para um sinal composto por três sinusóides reais com amplitudes 1, 0.01 e 0.05. Utilizámos $M = 150$ amostras. . . . .	113
5.8	Gráfico que relaciona o valor da amplitude da sinusóide do sinal com o número de condição da matriz, cujas colunas são todos os vectores da frame, e com o majorante do número de condição. . . . .	113
5.9	Gráfico que relaciona o valor da amplitude de uma das sinusóides de um sinal, em que a outra sinusóide é considerada com amplitude fixa igual a 1, com o número de condição da matriz, cujas colunas são todos os vectores da frame e com o majorante do número de condição. . . . .	114
5.10	Médias e medianas dos erros de reconstrução, para cada um dos valores das distâncias entre as frequências, para um sinal composto por duas sinusóides, considerando $M = 100$ e $M = 150$ amostras respectivamente. . . . .	115
5.11	Erros de aproximação das frequências para cada um dos valores das distâncias entre estas. . . . .	116
5.12	Minimização da norma $\ell_1$ utilizando o BP e a função interpoladora com fator de sobre-amostragem $l = 9$ . A curva a ponteados é a função interpoladora que minimiza a norma $\ell_2$ , a função sinc. O gráfico (b) é o zoom em $x$ do gráfico (a). . . . .	116

5.13	Gráfico que relaciona o valor das distâncias entre as frequências das duas sinusóides que compoem um sinal, onde se considera que a frequência de uma das sinusóides é fixa, com o número de condição da matriz, cujas colunas são todos os vectores da frame. . . . .	117
5.14	Médias e medianas dos erros de reconstrução para sinais compostos por duas sinusóides, com ruído, considerando $M = 100$ e $M = 150$ amostras. . . . .	118
5.15	Médias e as medianas dos erros de reconstrução utilizando os algoritmos SIHT, MUSIC e o proposto, para sinais compostos por duas sinusóides. . . . .	118
5.16	Erros de reconstrução comparando o Algoritmo proposto com os algoritmos MUSIC e SIHT para um sinal composto por duas sinusóides e para um sinal composto por três sinusóides, utilizando $M = 150$ amostras. Os valores foram obtidos a partir dos resultados de 200 experiências independentes. . . . .	119
5.17	Valores obtidos para as amplitudes na reconstrução de um sinal composto por duas sinusóides de amplitudes 0.1 e 0.01 e para um sinal composto por três sinusóides de amplitudes 1, 0.01 e 0.05, utilizando os três algoritmos. Os valores foram obtidos a partir dos resultados de 200 experiências independentes. . . . .	120
5.18	Erros de aproximação das frequências para cada um um sinal composto por duas sinusóides de amplitudes 0.1 e 0.01, utilizando os três algoritmos e considerando $M = 150$ amostras. O gráfico (b) apresenta apenas a comparação entre o Algoritmo proposto e o SIHT. Os valores são calculados a partir dos resultados obtidos em 200 experiências independentes. . . . .	120
5.19	Erros de aproximação das frequências para cada um um sinal composto por três sinusóides de amplitudes 1, 0.01 e 0.05, utilizando os três algoritmos e considerando $M = 150$ amostras. O gráfico (b) apresenta apenas a comparação entre o Algoritmo proposto e o SIHT. Os valores são calculados a partir dos resultados obtidos em 200 experiências independentes. . . . .	121
5.20	Médias e medianas dos erros de reconstrução, comparando o Algoritmo proposto, com os algoritmos SIHT e MUSIC, para um sinal composto por duas sinusóides, onde a frequência da primeira, $f_1$ , tem uma valor fixo e a da segunda, $f_2 = f_1 + \delta$ , utilizando $M = 100$ amostras. . . . .	122
5.21	Médias e medianas dos erros de reconstrução, comparando o algoritmo proposto, com os algoritmos SIHT e MUSIC, para um sinal composto por duas sinusóides, onde a frequência da primeira sinusóide, $f_1$ , tem uma valor fixo e a da segunda é $f_2 = f_1 + \delta$ , utilizando $M = 150$ amostras. . . . .	122
5.22	Erros de aproximação das frequências para cada um dos valores das distâncias entre estas e para cada um dos três algoritmos. . . . .	123

5.23	Médias e medianas dos erros de reconstrução, comparando o algoritmo proposto, com os algoritmos SIHT e MUSIC, para um sinal composto por duas sinusóides com frequências aleatórias, com ruído, considerando $M = 150$ amostras. Os valores são calculados a partir dos resultados obtidos em 200 experiências independentes. . . . .	125
------	---	-----

# Lista de Tabelas

3.1	Desempenho dos algoritmos BP e o LASSO (ver texto). . . . .	73
3.2	Valores médios da esparsidade utilizando os algoritmos BP e o LASSO. . . . .	74
4.1	Erros obtidos na reconstrução do sinal $x$ composto por duas sinusóides de frequências não múltiplas da frequência fundamental da DFT. Reconstrução antes e depois de ampliada a matriz com o BP, MP e OMP, antes e depois de alargada a matriz $\Psi$ . . . .	89
5.1	Valores aproximados para as frequências $f_1$ e $f_2 = f_1 + \delta$ através do Algoritmo proposto e valores $d_1$ e $d_2$ das distâncias relativas entre as frequências exatas e aproximadas. . . . .	115
5.2	Médias dos erros obtidos na reconstrução dos sinais compostos por duas sinusóides e por três sinusóides. Os valores são calculados a partir dos resultados obtidos em 200 experiências independentes. . . . .	119
5.3	Valores aproximados para as frequências $f_1$ e $f_2 = f_1 + \delta$ através do Algoritmo proposto, do MUSIC e do SIHT respectivamente. . . . .	124

# Capítulo 1

## Introdução

Neste trabalho pretendemos explorar a esparsidade de um sinal no domínio da frequência, com a finalidade de construir um algoritmo que estime o sinal original e também o seu espectro, a partir de um número finito e pequeno de amostras. Pretende-se que o algoritmo seja resistente ao *leakage* resultante do facto do sinal não ser periódico.

O conhecido teorema da amostragem garante que se a taxa de amostragem for superior ao dobro da frequência máxima do sinal, este pode reconstruir-se de modo único a partir das amostras obtidas. Se o sinal não for limitado em banda ou se a taxa de amostragem não for adequada, obtemos aliasing, não tendo então possibilidade de reconstruir inequivocamente o sinal.

Shapiro e Silverman [2], definiram amostragem *alias-free* e mostraram que existem alguns tipos de amostragem aleatória que eliminam o aliasing. Mostraram, em particular, que se os instantes de amostragem seguirem uma distribuição de Poisson a amostragem é *alias-free*. Consegue-se uma estimação do espectro usando uma taxa de amostragem inferior à taxa de Nyquist, não sendo contudo possível reconstruir o sinal [3].

Landau [4] provou mais tarde que não se pode garantir uma amostragem estável e subsequentemente a reconstrução do sinal utilizando uma taxa de amostragem inferior à de Nyquist, independentemente da localização das amostras e da natureza do conjunto que as frequências ocupam, em geral.

Recentemente, com o aparecimento da teoria do compressed sensing (CS), veio a verificar-se que se forem impostas algumas restrições ao sinal, como por exemplo que o sinal seja esparso ou compressível, o mesmo pode ser reconstruído a partir de amostras obtidas com uma taxa de amostragem inferior à de Nyquist, utilizando um programa de otimização convexa. As amostras são funcionais lineares do sinal, sendo obtidas através da projeção do sinal num conjunto de vetores em número muito inferior ao tamanho do sinal original.

Utilizando o CS, o que pretendemos é estimar um sinal  $x$  de tamanho  $N$ ,  $K$ -esparso ou  $K$ -esparso numa dada base, partindo de um número pequeno  $M$ ,  $M < N$  de amostras. O problema pode ser reduzido à procura exaustiva da solução mais esparsa possível que verifica a condição  $y = \Phi x$ , sendo  $y$  o vetor formado pelas  $M$  amostras e  $\Phi$  a matriz de dimensão  $M \times N$  cujas linhas são os vetores

onde se projeta o sinal. Este é um problema *NP-hard*. Para superar esta dificuldade, podem utilizar-se algoritmos Greedy ou o Basis Pursuit.

Como a matriz  $\Phi$ , tem dimensão  $M \times N$ , em geral há uma perda de informação. Verifica-se que tal situação não acontece quando o sinal é esparso ou compressível e a matriz satisfaz a *restricted isometry property* (RIP). Apesar de a verificação desta propriedade ser um problema combinatório, sabe-se que existe um grande número de matrizes que verificam o RIP com grande probabilidade, nomeadamente matrizes com entradas independentes e calculadas a partir de uma distribuição Gaussiana com média nula e com desvio padrão  $\sqrt{\frac{1}{M}}$ .

Sabe-se que com  $M = O(K \log(N/K))$  amostras sem ruído, é possível reconstruir o sinal  $K$ -esparso ou compressível original, utilizando algoritmos de CS [5].

Um sinal composto por um número finito de sinusóides tem poucas riscas espectrais diferentes de zero no sentido clássico da Transformada de Fourier, ou seja, é esparso no domínio da frequência. Em processamento digital de sinal os sinais utilizados são discretos e de tamanho finito, pelo que utilizamos a transformada discreta de Fourier ou a transformada discreta de cossenos. O problema com os sinais de tamanho finito é que raramente têm poucos coeficientes diferentes de zero. Os coeficientes só são esparsos se as frequências das sinusóides do sinal são múltiplas da frequência fundamental da DFT,  $2\pi/N$  ou da DCT,  $\pi/N$ , conforme o caso.

O problema é o aparecimento do *leakage*, o que limita o sucesso dos algoritmos tradicionais do CS.

O nosso objetivo foi tentar ultrapassar este problema, construindo um algoritmo que permita fazer uma melhor estimação espectral de um sinal não periódico, utilizando a teoria do CS. Ao encontrar valores mais precisos das frequências, permite-nos obter uma reconstrução mais eficaz do sinal original.

O algoritmo proposto, é um algoritmo iterativo que determina o valor aproximado das frequências que compoem o sinal, uma a uma. Começa por encontrar entre os valores aproximados iniciais das frequências, o intervalo onde se encontra a frequência com maior amplitude. Refina essa frequência com a precisão desejada e procura o intervalo onde se encontra a seguinte frequência com maior amplitude. Faz este refinamento local tantas vezes quantas as frequências que compoem o sinal original, ou seja, tantas as vezes quanto o valor da esparsidade do sinal. O algoritmo proposto, além de determinar os valores das frequências com pouco erro, permite também obter bons valores aproximados para a amplitude e para a fase das frequências.

## 1.1 Organização da tese

No Capítulo 2 apresentaremos uma breve revisão sobre análise espectral e apresentaremos alguns algoritmos utilizados para fazer estimação espectral.

No Capítulo 3 vamos fazer um estudo sobre a reconstrução de sinais esparsos ou compressíveis utilizando o Compressed Sensing, sendo as amostras corrompidas ou não com ruído. São abordados

os problemas de minimização das normas  $l_0$ ,  $l_1$  e  $l_2$ . Apresentaremos ainda alguns algoritmos de CS e seus resultados na reconstrução de sinais.

No Capítulo 4 apresentaremos o problema de estimação espectral de sinais reais compostos por sinusóides de frequências não múltiplas da frequência  $\frac{2\pi}{N}$  e apresentaremos duas propostas de algoritmo para resolver o problema.

No Capítulo 5, depois de mostrar que o segundo algoritmo proposto tem melhor desempenho que o primeiro, apresentaremos resultados do segundo algoritmo proposto, bem como a comparação deste com alguns algoritmos existentes, mostrando que o algoritmo proposto apresenta melhor desempenho.

No Capítulo 6 apresentaremos as conclusões e as propostas de trabalho futuro.



## Capítulo 2

# Análise Espectral

A análise espectral tem como objetivo o estudo da forma como um sinal se comporta no domínio da frequência. Estuda o espectro do sinal, ou seja estuda como é que a energia ou a potência do sinal está distribuída no domínio da frequência. A análise é feita através da função densidade espectral de energia e da função densidade espectral de potência (DEP) respetivamente. A decomposição dos sinais é feita utilizando ferramentas matemáticas, nomeadamente de análise de Fourier.

Um sinal determinístico pode ser representado por uma função analítica, no entanto há sinais para os quais não há certeza dos seus valores antes de ocorrerem. Este tipo de sinais, aleatórios, são melhor representados por **processos aleatórios**, considerando que o sinal em estudo é uma realização de um processo aleatório definido por um conjunto de variáveis aleatórias [6]. A análise destes sinais é feita à custa de médias estatísticas [7].

Para os sinais aleatórios, o processo de obter o seu espectro chama-se estimação espectral [8]. Utiliza-se a transformada de Fourier da estimativa da autocorrelação para estimar o espectro de potência.

A necessidade do estudo da estimação do espectro de potência aparece em muitos contextos, sendo o estudo do espectro do ruído para a construção de filtros lineares e a estimação de parâmetros de um sistema linear excitado por ruído, dois exemplos [6].

Vamos começar por estudar o espectro para sinais determinísticos e depois para sinais aleatórios.

### 2.1 Sinais determinísticos

Para o caso de sinais determinísticos é fácil de estudar o espectro do sinal. Vamos considerar primeiro sinais contínuos periódicos e não periódicos e depois sinais discretos.

Um sinal periódico contínuo  $x(t)$ , de período  $T = \frac{1}{F_0}$ , pode representar-se na forma

$$x(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t},$$

a qual se chama série de Fourier, sendo os coeficientes  $c_k$ , dados por

$$c_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt$$

A igualdade só é validada se a série convergir para  $x(t)$ . As condições de *Dirichlet* garantem que a série é igual a  $x(t)$  para todos os valores de  $t$  excepto onde a função é descontínua [8]. Este sinal tem energia infinita e potência média finita,  $P_x$ .

Temos que

$$P_x = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2.$$

Portanto a potência média total é dada pela soma das potências médias de cada uma das exponenciais complexas  $e^{j2\pi k F_0 t}$ .

Sendo  $|c_k|^2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  uma função das frequências  $kF_0$ , representa a distribuição da potência do sinal em função da frequência e é chamada de DEP do sinal  $x(t)$ .

Para um sinal não periódico a ferramenta de análise correta é a Transformada de Fourier.

Se um sinal  $x(t)$  tem energia finita, isto é, se existe o integral

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

podemos calcular a sua transformada de Fourier, dada por

$$X(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi F t} dt,$$

no sentido de  $\mathcal{L}^2$ . Nestas condições temos que

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(F) e^{j2\pi F t} dF,$$

no sentido de  $\mathcal{L}^2$  e podemos escrever

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(F)|^2 dF.$$

O integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(F)|^2 dF$  dá-nos a energia total do sinal. A quantidade  $S_{xx}(F) = |X(F)|^2$  representa a distribuição de energia do sinal em função da frequência e é chamada de densidade espectral de energia de  $x(t)$ .

Se o sinal for discreto, temos fórmulas idênticas. A grande diferença é que, enquanto no caso

contínuo as frequências podem ser em número infinito, no caso discreto formam uma sequência periódica.

A decomposição em série de Fourier de um sinal  $x(n)$ , periódico, com período  $N$ , é dada por:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j \frac{2\pi}{N} nk},$$

sendo  $c_k$  os coeficientes de Fourier da representação, dados por

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}.$$

Temos no máximo  $N$  frequências separadas de  $\frac{2\pi}{N}$  rad. O espectro do sinal é periódico de período  $N$ . A potência de  $x(n)$  é dada por

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2,$$

sendo portanto a potência média total dada pela soma das  $N$  componentes  $|c_k|^2$ , ou seja pela soma dos quadrados dos valores absolutos dos coeficientes da série de Fourier.

Se o sinal discreto  $x(n)$  é não periódico com energia finita, a ferramenta de análise é novamente a série de Fourier, embora com uma troca nos papéis do tempo e da frequência. A transformada de Fourier é dada por

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}. \quad (2.1)$$

O espectro do sinal é periódico, uma vez que esta função é periódica de período  $2\pi$ .

Atendendo à periodicidade de  $X(\omega)$ , esta função pode expandir-se em série de Fourier, desde que sejam verificadas as condições de convergência. Assim, considerando a igualdade (2.1), podemos dizer que os coeficientes desta série de Fourier são os valores de  $x(n)$ . De facto pode deduzir-se que [8]

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega.$$

Tendo  $x(n)$  energia finita, podemos escrever

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega.$$

O integral  $\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega$  dá-nos a energia total do sinal. A quantidade  $S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2$  representa a distribuição de energia do sinal em função da frequência e é chamada de densidade espectral de energia

de  $x(n)$ .

Para sinais de energia finita, como vimos, obtemos a densidade espectral de energia através do quadrado dos valores absolutos da transformada de Fourier do sinal. Esta forma não é no entanto a única, pois podemos também obtê-la através da transformada de Fourier da função de autocorrelação no caso de um sinal contínuo e da sequência de autocorrelação no caso de um sinal discreto.

**Definição 1** Sendo  $x(t)$  um sinal de energia finita, a sua função de autocorrelação  $r_{xx}(\tau)$  é definida por

$$r_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t + \tau)dt$$

Calculando a transformada de Fourier da função de autocorrelação, obtemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r_{xx}(\tau)e^{-j2\pi F\tau}d\tau = |X(F)|^2 = S_{xx}(F)$$

**Definição 2** Sendo  $x(n)$  o sinal amostrado a partir de  $x(t)$ , a sua sequência de autocorrelação  $r_{xx}(k)$  é definida por

$$r_{xx}(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*(n)x(n + k)$$

Calculando a transformada de Fourier da sequência de autocorrelação, obtemos [8]:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_{xx}(k)e^{-j2\pi kf} = |X(f)|^2 = S_{xx}(f).$$

Sabendo que um sinal discreto  $x(n)$  é obtido por amostragem de um sinal contínuo  $x(t)$  de duração infinito,  $x(n)$  terá também duração infinita. Na prática temos apenas  $N$  amostras de  $x(n)$ , o que corresponde a multiplicá-lo por uma janela retangular de tamanho  $N$ ,  $w(n)$ , ou seja, a ter o sinal  $\tilde{x}(n) = x(n)w(n)$ .

A transformada de Fourier de  $\tilde{x}(n)$  é dada pela convolução da transformada do sinal,  $X(f)$ , com a transformada da janela retangular,  $W(f)$ ,

$$\tilde{X}(f) = X(f) * W(f) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(\alpha)W(f - \alpha)d\alpha.$$

Assim, o espectro de densidade de energia do sinal de tamanho finito  $\tilde{x}(n)$  é dado por

$$S_{\tilde{x}\tilde{x}}(f) = |\tilde{X}(f)|^2 = \left| \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j2\pi nf} \right|^2,$$

o qual nos dá uma aproximação do espectro de densidade de energia do sinal  $x(n)$ .

## 2.2 Sinais aleatórios e sua caracterização

Antes de definir processo aleatório, vamos definir o que é uma variável aleatória e algumas das suas médias estatísticas [9].

### 2.2.1 Variáveis aleatórias

**Definição 3** Uma variável aleatória  $X$  é uma função que atribui um número real a cada resultado de uma experiência aleatória.

**Definição 4** Uma variável aleatória  $X$  diz-se contínua se o conjunto de valores possíveis da variável é não numerável. Uma variável aleatória  $X$  diz-se discreta se o conjunto de valores possíveis da variável é finito ou numerável.

**Definição 5** Seja  $X$  uma variável aleatória contínua. A função  $f_X$ , cujo valor numérico, quando multiplicado pela amplitude do intervalo infinitesimal  $[x, x + \delta x]$  dá a probabilidade infinitesimal de a variável  $X$  tomar um valor situado no referido intervalo, chama-se **função densidade de probabilidade** (fdp), da variável aleatória  $X$ .

Para se calcular a probabilidade da variável  $X$  tomar um valor no intervalo  $[a, b]$ , temos:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx, \forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b.$$

**Definição 6** Seja  $X$  uma variável aleatória discreta. A função  $f_X$  que associa a cada valor  $x$  de  $X$  a sua probabilidade  $f_X(x) = P(X = x)$ , chama-se **função de probabilidade**.

**Definição 7** Chama-se **função distribuição de probabilidade** ou função de probabilidade acumulada, de uma variável aleatória  $X$ , discreta ou contínua, à função:

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

que verifica:

$$F_X(x) = P(X \leq x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Se  $X$  é contínua, temos:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt,$$

e

$$f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x}$$

para todo o  $x$  onde  $F_X(x)$  é diferenciável.

Se  $X$  é discreta, temos que:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{X \leq x} f_X(x),$$

**Definição 8** Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias. A função  $f_{XY}$  cujo valor numérico, quando multiplicado pela área infinitesimal da região  $[x, x + \delta x] \times [y, y + \delta y]$  dá a probabilidade infinitesimal da variável  $XY$  tomar valores na referida região, chama-se **função densidade de probabilidade conjunta** das variáveis  $X$  e  $Y$ .

**Definição 9** Chama-se **função distribuição de probabilidade conjunta** das variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ , discretas ou contínuas, à função  $F_{XY}(x, y)$  que a cada valor particular de  $x$  e  $y$  associa a probabilidade de  $X \leq x$  e  $Y \leq y$ :

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Se  $X$  é contínua, temos a partir de

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{XY}(\epsilon, \theta) d\epsilon d\theta,$$

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

para todo o  $x, y$  onde  $F_{X,Y}(x, y)$  é diferenciável.

Temos ainda que as funções densidade de probabilidade  $f_X(x)$  e  $f_Y(y)$  podem ser obtidas a partir das funções de densidade de probabilidade conjunta:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx.$$

As variáveis aleatórias são bem caracterizadas através das funções densidade ou distribuição de probabilidade, mas por vezes é útil estudar outras características da variável através do que chamamos médias estatísticas. Dentro destas podemos destacar, o valor esperado ou média, a média quadrática e a variância.

A **média** de uma variável aleatória  $X$ , também chamada de primeiro momento, é o número  $E(X)$  dado por:

$$E(X) = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx,$$

no caso da variável  $X$  ser contínua, sendo  $f_X$  a função densidade de probabilidade ou por

$$E(X) = \bar{x} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_i f_X(x_i),$$

no caso da variável  $X$  ser discreta, sendo  $f_X$  a função de probabilidade.

A **média quadrática** de uma variável aleatória  $X$ , também chamada de segundo momento, é o número  $E(X^2)$  dado por:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx,$$

no caso da variável  $X$  ser contínua, sendo  $f_X$  a função densidade de probabilidade ou por

$$E(X^2) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_i^2 f_X(x_i),$$

no caso da variável  $X$  ser discreta, sendo  $f_X$  a função de probabilidade.

Seja  $X$  uma variável aleatória com média  $\bar{x}$ , a sua **variância** ou segundo momento central,  $\sigma_x^2$  é dada por:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= E((X - \bar{x})^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2) f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx - 2\bar{x} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx + \bar{x}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx \\ &= E(X^2) - 2\{E(X)\}^2 + \{E(X)\}^2 = E(X^2) - \{E(X)\}^2, \end{aligned}$$

no caso da variável  $X$  ser contínua, sendo  $f_X$  a função densidade de probabilidade ou por

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= E((X - \bar{x})^2) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (x_i - \bar{x})^2 f_X(x_i) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) f_X(x_i) \\ &= E(X^2) - \{E(X)\}^2, \end{aligned}$$

no caso da variável  $X$  ser discreta, sendo  $f_X$  a função de probabilidade.

Sendo  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias contínuas, a **correlação** ou o segundo momento conjunto entre as duas variáveis é dada por:

$$\gamma_{XY} = E[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{XY}(x, y) dx dy,$$

sendo  $f_{XY}$  a função densidade de probabilidade conjunta.

Sendo  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias contínuas, com médias respectivamente  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , a **covariância** entre elas é dada por:

$$\begin{aligned} c_{XY} &= E\{(X - \bar{x})(Y - \bar{y})\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})(y - \bar{y}) f_{XY}(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (xy - x\bar{y} - \bar{x}y + \bar{x} \times \bar{y}) f_{XY}(x, y) dx dy \\ &= E(XY) - \bar{y} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{XY}(x, y) dx dy - \bar{x} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{XY}(x, y) dx dy + \bar{x} \times \bar{y} \\ &= E(XY) - \bar{y} \int_{-\infty}^{+\infty} x \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy \right) dx - \bar{x} \int_{-\infty}^{+\infty} y \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx \right) dy + \bar{x} \times \bar{y} \\ &= E(XY) - \bar{y} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx - \bar{x} \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy + \bar{x} \bar{y} = E(XY) - \bar{y} \bar{x} - \bar{x} \bar{y} + \bar{x} \bar{y} \\ &= E(XY) - \bar{x} \bar{y}, \end{aligned}$$

sendo  $f_{XY}$  a função densidade de probabilidade conjunta.

Se  $c_{XY} = 0$  dizemos que as duas variáveis são não correlacionadas.

Podemos relacionar a correlação e a covariância:

$$c_{XY} = \gamma_{XY} - E(X)E(Y)$$

Dois variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  são **independentes** se e só se

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

ou seja se e só se a função densidade de probabilidade conjunta é igual ao produto das funções densidade de probabilidade de cada uma das variáveis.

Se duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  são independentes, temos que  $E(XY) = E(X)E(Y) = \overline{xy}$  e então  $c_{XY} = 0$ , o que implica que duas variáveis aleatórias independentes são não correlacionadas.

### 2.2.2 Processo aleatório

Um processo aleatório ou estocástico é uma família indexada de variáveis aleatórias  $\{x(t)\}$ , no caso contínuo, e  $\{x_n\}$ , no caso discreto, que pertencem todas ao mesmo espaço de probabilidades, sendo o processo aleatório caracterizado pelo conjunto das funções distribuição ou densidade de probabilidade de cada uma das variáveis que o constituem [6]. No caso de aplicarmos estes conceitos a sinais aleatórios, a variável independente está associado com o tempo ou com outra dimensão física.

Chamemos  $X(t)$  ao processo aleatório contínuo no tempo e  $x(t)$  a cada uma das realizações. Conseguimos obter um número infinito de realizações. O conjunto de todas as realizações de um processo aleatório é chamado de *ensemble*, o qual tem uma interpretação importante em termos da distribuição da potência do sinal no domínio da frequência [6]. Podemos calcular o valor de uma realização em cada instante,  $x(t_1), x(t_2), \dots$ . Podemos também calcular os valores do processo aleatório em qualquer instante  $t_1$ , em  $t_2, \dots, t_n$ , obtendo-se as variáveis aleatórias  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ .

Se considerarmos  $n$  amostras do processo aleatório  $X(t), X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ , temos  $n$  variáveis aleatórias que são caracterizadas pela fdp,  $f(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n})$ , para qualquer  $n$ . Obviamente cada uma destas variáveis aleatórias  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$  é caracterizada pela respetiva fdp,  $f(x_{t_1}), f(x_{t_2}), \dots, f(x_{t_n})$ .

A noção de *ensemble* de sinais de energia infinita é um conceito matemático que nos permite representar sinais à custa da teoria das probabilidades [6].

Atendendo a que um processo aleatório é um conjunto indexado de variáveis aleatórias, este é caracterizado à custa de médias estatísticas, das variáveis aleatórias que o constituem. Muitas das propriedades destes sinais são caracterizadas em termos da autocorrelação e autocovariância, as quais têm energia finita, podendo portanto calcular-se a sua transformada de Fourier.

Suponhamos que temos  $n$  amostras de processo aleatório  $X(t)$  para  $t = t_i, i = 1, \dots, n$  e que temos um outro conjunto de  $n$  amostras nos instantes  $t + \tau, X(t_i + \tau), i = 1, \dots, n$ , caracterizado pela fdp,  $f(x_{t_1+\tau}, x_{t_2+\tau}, \dots, x_{t_n+\tau})$ . Se as duas pdf forem iguais, para qualquer atraso  $\tau$  e para qualquer  $n$ , sendo então as funções de densidade de probabilidade independentes de um desvio em relação à origem dos tempos, dizemos que o processo aleatório é **estacionário em sentido estrito**. Caso contrário é não estacionário.

### Médias estatísticas de um processo aleatório

Vamos definir as médias estatísticas apenas para processos discretos de valores reais, sendo que estes são em geral obtidos através da amostragem dos casos contínuos. Um processo aleatório de

tempo discreto  $X(n)$ , tem propriedades idênticas às do processo  $X(t)$ , com a diferença de que  $n$  é uma variável inteira. A sequência  $x(n)$  representa uma realização do processo. Os valores das variáveis continuam a ser contínuos.

A média do processo aleatório  $X(n)$  no instante  $n$ , é dado por:

$$\bar{x}(n) = E\{X(n)\}$$

Se a fdp,  $f(x_n)$  de um processo aleatório depender do instante  $n$  considerado, também a média vai depender de  $n$ . No entanto, se o processo aleatório for estacionário, temos que  $f(x_{n+k}) = f(x_n)$ , para  $\forall x, n, k$ , donde a média também vai ser independente do tempo. Logo, nestas condições, a média do processo aleatório é igual a uma constante.

A correlação entre duas variáveis aleatórias do mesmo processo, em dois instantes diferentes,  $n$  e  $m$  é dado por:

$$\gamma_{xx}(n, m) = E\{X(n)X(m)\}.$$

Chamamos a esta sequência, **sequência de autocorrelação**.

Se o processo aleatório for estacionário, a sequência de autocorrelação não vai depender dos instantes  $n$  e  $m$ , mas sim da distância entre eles,  $k = n - m$  tendo-se:

$$\gamma_{xx}(k) = E\{X(m+k)X(m)\} = E\{X(n)X(n-k)\}.$$

Temos também que

$$\gamma_{xx}(-k) = E\{X(n-k)X(n)\} = E\{X(n')X(n'+k)\} = \gamma_{xx}(k),$$

donde se pode concluir que a sequência de autocorrelação, de um processo aleatório, é par.

À quantidade

$$\gamma_{xx}(0) = E\{X(n)^2\}$$

chamamos **potência média** do processo aleatório estacionário.

Há processos que apesar serem não estacionários, têm a média constante e cuja sequência de autocorrelação só depende da diferença dos tempos. Chamam-se processos estacionários em sentido lato. Estes são os processos aleatórios que em geral são utilizados [8].

A **sequência de autovariância** de um processo aleatório em dois instantes diferentes,  $n$  e  $m$  é dado por:

$$c_{xx}(n, m) = E\{(X(n) - \bar{x}(n))(X(m) - \bar{x}(m))\} = \gamma_{xx}(n, m) - E(X(n))E(X(m)).$$

Se o processo for estacionário temos:

$$c_{xx}(k) = \gamma_{xx}(k) - \bar{x}^2$$

e ainda que

$$c_{xx}(0) = E\{(X(n) - \bar{x}(n))^2\} = \gamma_{xx}(0) - \bar{x}^2 = \sigma_x^2.$$

Se o processo aleatório tiver média nula em todos os instantes, a autocorrelação e a autocovariância são iguais.

O processo aleatório de ruído branco tem média nula e é não correlacionado com ele próprio para todos os desfazamentos excepto para zero, ou seja,  $c_{xx}(n, m) = 0$ , desde que  $n \neq m$ , logo

$$\gamma_{xx}(k) = c_{xx}(k) = \delta(k)\sigma_x^2. \quad (2.2)$$

### Médias estatísticas de processos aleatórios conjuntos

Sejam  $X(n)$  e  $Y(n)$  dois processos aleatórios de tempo discreto e sejam  $X(n_1), X(n_2), \dots$  e  $Y(m_1), Y(m_2), \dots$  as variáveis aleatórias nos instantes  $n_i, i = 1, \dots, n$  e  $m_j, j = 1, \dots, m$  respectivamente. Estes dois conjuntos de variáveis aleatórias são caracterizados pela pdf conjunta,

$$f(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_n}, y_{m_1}, y_{m_2}, \dots, y_{m_m}). \quad (2.3)$$

Definimos **sequência de correlação cruzada** entre dois processos  $X(n)$  e  $Y(n)$  por:

$$\gamma_{xy}(n, m) = E\{X(n)Y(m)\}$$

e **sequência de covariância cruzada** através de:

$$c_{xy}(n, m) = \gamma_{xy}(n, m) - E\{X(n)\}E\{Y(m)\}.$$

Se os processos aleatórios forem conjuntamente e individualmente estacionários temos que:

$$\gamma_{xy}(n, m) = \gamma_{xy}(n - m) = \gamma_{xy}(k),$$

$$c_{xy}(n, m) = c_{xy}(n - m) = c_{xy}(k)$$

e também

$$\gamma_{xy}(-k) = E\{X(n - k)Y(n)\} = E\{X(n')Y(n' + k)\} = \gamma_{yx}(k).$$

Partindo da definição de convolução entre dois processos  $X(n)$  e  $Y(n)$ , podemos também definir a sequência de correlação cruzada e algumas propriedades desta [8].

**Definição 10** A *convolução* entre dois processos  $X(n)$  e  $Y(n)$  denota-se por  $X(n) * Y(n)$  e é dada por

$$X(n) * Y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k)Y(n-k)$$

ou por

$$X(n) * Y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(n-k)Y(k).$$

**Definição 11** A *sequência de correlação* entre dois processos  $X(n)$  e  $Y(n)$  pode escrever-se sob a forma de uma convolução:

$$\gamma_{x,y}(k) = X(k) * Y(-k), \quad (2.4)$$

podendo ainda escrever-se à custa da definição de convolução da forma:

$$\gamma_{x,y}(k) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X(m)Y(-(k-m)) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X(m)Y(m-k)$$

ou por

$$\gamma_{x,y}(k) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X(m+k)Y(m).$$

A partir desta última definição, também vemos facilmente que

$$\gamma_{x,y}(k) = \gamma_{y,x}(-k).$$

Um processo aleatório de valores complexos  $Z(n)$  é dado por [8]:

$$Z(n) = X(n) + jY(n),$$

sendo  $X(n)$  e  $Y(n)$  processos aleatórios. Este processo é caracterizado pela pdf da expressão 2.3.

A sequência de autocorrelação do processo aleatório  $Z(n)$ , em dois instantes diferentes  $n$  e  $m$  é dado por:

$$\begin{aligned} \gamma_{zz}(n, m) &= E\{Z(n)Z^*(m)\} = E\{(X(n) + jY(n))(X(m) - jY(m))\} \\ &= E\{X(n)X(m) - jX(n)Y(m) + jY(n)X(m) + Y(n)Y(m)\} \\ &= \gamma_{xx}(n, m) + \gamma_{yy}(n, m) + j(\gamma_{yx}(n, m) - \gamma_{xy}(n, m)) \end{aligned}$$

Se os processos aleatórios forem conjuntamente e individualmente estacionários temos que:

$$\gamma_{zz}(n, m) = \gamma_{zz}(k).$$

Temos também que

$$\gamma_{zz}^*(k) = E\{Z^*(n)Z(n-k)\} = \gamma_{zz}(-k).$$

Definimos **sequência de correlação cruzada** entre dois processos aleatórios complexos

$$Z(n) = X(n) + jY(n) \text{ e } W(n) = U(n) + jV(n)$$

por:

$$\begin{aligned} \gamma_{zw}(n, m) &= E\{Z(n)W^*(m)\} = E\{(X(n) + jY(n))(U(m) - jV(m))\} \\ &= E\{X(n)U(m) - jX(n)V(m) + jY(n)U(m) + Y(n)V(m)\} \\ &= \gamma_{xu}(n, m) + \gamma_{yv}(n, m) + j(\gamma_{yu}(n, m) - \gamma_{xv}(n, m)) \end{aligned}$$

Se os processos aleatórios forem conjuntamente e individualmente estacionários temos que:

$$\gamma_{zw}(n, m) = \gamma_{zw}(k).$$

Temos também que

$$\gamma_{zw}^*(k) = E\{Z^*(n)W(n-k)\} = \gamma_{wz}(-k).$$

Note-se que caso se estejam a considerar processos aleatórios complexos, a sequência de autocorrelação é definida por  $\gamma_{xx}(n, m) = E\{X(n)X^*(m)\}$ .

Um exemplo de um processo aleatório é o processo sinusoidal real,  $x(n) = A \sin(2\pi fnT + \theta)$ , sendo  $A$  a amplitude,  $f$  a frequência,  $T$  o período de amostragem, constantes e sendo a fase  $\theta$  uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo  $[0, 2\pi]$ . Este processo aleatório é estacionário em sentido lato, pois a média é independente de  $n$ ,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \int_0^{2\pi} x(n) f_{\theta}(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} A \sin(2\pi fnT + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta \\ &= A \int_0^{2\pi} \sin(2\pi fnT) \cos \theta + \cos(2\pi fnT) \sin \theta d\theta \\ &= A \sin(2\pi fnT) \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta + A \cos(2\pi fnT) \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0 \end{aligned}$$

e a sequência de autocorrelação

$$\gamma_{xx}(k) = \int_0^{2\pi} x(n+k)x(n)f_{\theta}(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ A \sin(2\pi f(n+k)T + \theta) A \sin(2\pi fnT + \theta) \right] \frac{1}{2\pi} d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left[ \cos(2\pi f(n+k)T + \theta - 2\pi fnT - \theta) - \cos(2\pi f(n+k)T + \theta + 2\pi fnT + \theta) \right] d\theta \\
&= \frac{A^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \cos(2\pi fkT) - \cos(2\pi f(2n+k)T + 2\theta) \right] d\theta \\
&= \frac{A^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\pi fkT) d\theta - \frac{A^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f(2n+k)T + 2\theta) d\theta \\
&= \frac{A^2}{2} \cos(2\pi fkT) - \frac{A^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f(2n+k)T + 2\theta) \frac{1}{2\pi} d\theta = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi fkT),
\end{aligned}$$

depende apenas da diferença entre os tempo,  $k$ .

Se o processo aleatório for dado pela soma de  $L$  sinusóides reais,

$$x(n) = \sum_{l=1}^L A_l \sin(2\pi f_l nT + \theta_l), \quad (2.5)$$

sendo as fases de umas independentes das fases das outras, a média continua a ser zero e a sequência de autocorrelação será dada por

$$\gamma_{xx}(k) = \sum_{l=1}^L \frac{A_l^2}{2} \cos(2\pi f_l kT) = \sum_{l=1}^L \frac{A_l^2}{4} [e^{j 2\pi f_l kT} + e^{-j 2\pi f_l kT}].$$

Se o processo for a soma de de  $L$  sinusóides complexas,  $x(n) = \sum_{l=1}^L A_l e^{j 2\pi f_l nT + \theta_l}$ , sendo  $A$  a amplitude,  $f$  a frequência,  $T$  o período de amostragem, fixos e sendo a fase  $\theta$  uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo  $[0, 2\pi]$ , a sequência de autocorrelação será dada por

$$\gamma_{xx}(k) = \sum_{l=1}^L A_l^2 e^{j 2\pi f_l kT}. \quad (2.6)$$

A matriz de autocorrelação de ordem  $(K+1) \times (K+1)$  para estes processos, pode ser expressa através da matriz de Toeplitz:

$$R_K = \begin{bmatrix} \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[-1] & \cdots & \gamma_{xx}[-K] \\ \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[0] & \cdots & \gamma_{xx}[1-K] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{xx}[K] & \gamma_{xx}[1-K] & \cdots & \gamma_{xx}[0] \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

No caso do processo com sinusóides reais pode utilizar-se ainda a fórmula:

$$R_K = \sum_{l=1}^L \frac{A_l^2}{4} [e_K(f_l)e_K^H(f_l) + e_K^*(f_l)e_K^T(f_l)],$$

e no caso do processo com sinusóides complexas, a fórmula

$$R_K = \sum_{l=1}^L A_l^2 e_K(f_l)e_K^H(f_l), \quad (2.8)$$

sendo  $e_K(f_l) = [1 \quad e^{j2\pi f_l T} \quad \dots \quad e^{j2\pi f_l K T}]^T$ , um vetor sinusoidal complexo na frequência  $f_l$ .

### Espetro de potência de um processo aleatório

Como já foi referido, a sequência de autocorrelação de um processo aleatório tem energia finita. Calculando a sua transformada de Fourier, obtemos:

$$\Gamma_{xx}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_{xx}(k)e^{-j2\pi f k}, \quad (2.9)$$

sendo a transformada inversa dada por:

$$\gamma_{xx}(k) = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(f)e^{j2\pi f k} df. \quad (2.10)$$

A partir da equação (2.10), podemos escrever que

$$\gamma_{xx}(0) = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(f) df,$$

donde podemos concluir que se a potência média é a área da região situada abaixo da transformada de Fourier da sequência de autocorrelação,  $\Gamma_{xx}(f)$  dá-nos a distribuição da potência como função da frequência, dando-nos a DEP do processo aleatório  $X(n)$ .

Assim, a transformada de Fourier da sequência de autocorrelação de um processo aleatório estacionário é interpretada em termos da distribuição de frequência da potência do sinal e dá-nos a densidade espectral de potência do processo aleatório.

O par de equações (2.9) e (2.10) é muitas vezes chamado de Teorema de Wiener-Khinchine de tempo discreto [10].

Se o processo aleatório for real, como a sequência de autocorrelação é real e par, o mesmo acontece à função densidade espectral de potência  $\Gamma_{xx}(f)$ , ou seja,  $\Gamma_{xx}(-f) = \Gamma_{xx}(f)$ .

Se o processo aleatório for complexo, temos que  $\Gamma_{xx}^*(f) = \Gamma_{xx}(f)$ . Logo a função densidade espectral de potência é real.

Num processo aleatório real, podemos escrever a função densidade espectral de potência na forma:

$$\Gamma_{xx}(f) = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_{xx}(k) \cos(2\pi fk).$$

Calculando a transformada de Fourier da sequência de autocorrelação cruzada de dois processos conjuntamente estacionários,  $\gamma_{xy}(k)$ , obtém-se a função densidade espectral de potência cruzada,

$$\Gamma_{xy}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_{xy}(k) e^{-j2\pi fk}.$$

Esta função nem sempre é real. Temos que  $\Gamma_{xy}^*(f) = \Gamma_{yx}(-f)$ . Se os processos aleatórios forem reais,  $\Gamma_{xy}(-f) = \Gamma_{yx}(f)$ .

### **Espetro de potência de um processo aleatório à custa da resposta em frequência de um sistema**

Suponhamos que temos  $y(n)$  como a saída de um sistema linear discreto de tempo invariante, sendo a entrada  $x(n)$  e sendo  $h(n)$  a resposta a impulso deste sistema.

Então temos que

$$y(n) = x(n) * h(n) \tag{2.11}$$

Se  $x(n)$  for um processo aleatório discreto estacionário em sentido lato, também  $y(n)$  é um processo aleatório discreto estacionário em sentido lato [6].

Tendo em consideração as equações (2.4) e (2.11) e as propriedades da convolução, podemos verificar que os dois processos aleatórios verificam as seguintes propriedades [10]:

1.  $\gamma_{yx}(k) = y(k) * x(-k) = [x(k) * h(k)] * x(-k) = [x(k) * x(-k)] * h(k) = \gamma_{xx}(k) * h(k)$ ;
2.  $\gamma_{xy}(k) = \gamma_{yx}(-k) = x(k) * y(-k) = x(k)[x(-k) * h(-k)] = [x(k) * x(-k)] * h(-k) = \gamma_{xx}(k) * h(-k)$ ;
3.  $\gamma_{yy}(k) = y(k) * y(-k) = [x(k) * h(k)] * [x(-k) * h(-k)] = [x(k) * x(-k)] * [h(k) * h(-k)] = \gamma_{xx}(k) * [h(k) * h(-k)]$ .

As transformadas  $Z$  das várias seqüências de correlação são dadas por:

$$\begin{aligned}\Gamma_{xx}(z) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_{xx}(k)z^{-k}, \\ \Gamma_{xy}(z) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_{xy}(k)z^{-k}, \\ \Gamma_{yy}(z) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_{yy}(k)z^{-k}.\end{aligned}\tag{2.12}$$

A transformada  $Z$  da resposta a impulso do sistema é dada por:

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)z^{-k}$$

e a transformada  $Z$  de  $h(-k)$  é dada por:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(-k)z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)(1/z)^{-k} = H(1/z)$$

Sabendo que a transformada  $Z$  da convolução de dois sinais é igual ao produto das respectivas transformadas, isto é, que

$$x(n) * y(n) \xrightarrow{\text{Transf } Z} X(z)Y(z)$$

e utilizando as propriedades das seqüências de correlação, temos que:

$$\Gamma_{xy}(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\gamma_{xx}(k) * h(-k))z^{-k} = \Gamma_{xx}(z)H(1/z);$$

e

$$\Gamma_{yy}(z) = \Gamma_{xx}(z)H(z)H(1/z).\tag{2.13}$$

Calculando o valor da equação (2.13) no círculo unitário e sabendo que a DEP de um processo aleatório é por definição a transformada de Fourier da seqüência de autocorrelação, temos que a DEP de um processo aleatório, que é saída de um sistema linear invariante no tempo, com resposta em frequência  $H(z)$ , se pode escrever à custa da DEP do processo aleatório de entrada através de

$$\Gamma_{yy}(f) = \Gamma_{xx}(f)|H(f)|^2.$$

Consideremos o caso particular do processo aleatório de entrada  $x(n)$  ser ruído branco, para o qual se tem  $\Gamma_{xx}(f) = \sigma_x^2$ , atendendo a (2.2). Podemos dizer que a saída de um sistema linear de tempo invariante, em resposta à entrada de um processo de ruído branco  $x(n)$ , com DEP  $\sigma_x^2$ , é um processo

aleatório estacionário com função densidade espectral de potência dada por

$$\Gamma_{yy}(f) = \sigma_x^2 |H(f)|^2 \quad (2.14)$$

### Médias de tempo de um processo aleatório

Vimos as médias estatísticas para processos aleatórios, no entanto, em aplicações práticas de processamento de sinal, temos de considerar apenas uma realização de um processo aleatório. Sendo assim, a pdf do processo não é conhecida, não podendo portanto obter-se a sequência de autocorrelação e conseqüentemente a densidade espectral de potência.

Será que podemos substituir as médias do processo aleatório por médias de tempo de uma só realização do mesmo, uma vez que estas podemos calcular?

A resposta é afirmativa se o processo aleatório for ergódico, pois por definição, um processo aleatório é **ergódico** se, com probabilidade 1, todas as suas estatísticas podem ser estimadas a partir das médias de tempo de uma única realização do processo [10].

Para que um processo seja ergódico, ele tem de ser estacionário, pois se dependesse do tempo, não conseguiríamos que a média do processo fosse igual à média de uma realização, uma vez que a média de tempo é independente do tempo.

Considere-se um processo aleatório estacionário  $X(n)$ , com média  $E\{X(n)\} = \bar{x}$  e sequência de autocorrelação  $\gamma_{xx}(k)$ . Vamos estimar a médias e a autocorrelação a partir das médias de tempo de uma só realização do processo e ver em que condições é que essas estimativas são boas, ou seja, quando é que as estimativas permitem determinar as médias do processo [8].

### Processo Ergódico na Média

Consideremos a estimativa  $\hat{\bar{x}}$ , para a média estatística do processo, dada pela média de tempo de uma realização do processo  $\{x(n)\}$ :

$$\hat{\bar{x}} = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n), \quad -\infty < n < \infty$$

Como o valor desta estimativa varia de realização para realização, temos que  $\hat{\bar{x}}$  também é uma variável aleatória, com pdf,  $f(\hat{\bar{x}})$  [6, 8].

Vamos ver se esta média de tempo é ou não um bom estimador para a média do processo aleatório.

Para se ver se  $\hat{\alpha}$  é um bom estimador de  $\alpha$ , calculamos o seu viés e o erro médio quadrático. O viés dá-nos a diferença entre a esperança do estimador e o seu valor exato, viés =  $E(\hat{\alpha}) - \alpha$ . Se for zero não há enviesamento, o valor esperado para o estimador é igual ao valor exato.

A variância mede a largura da pdf. O seu valor é dado por  $var(\hat{\alpha}) = E\{(\hat{\alpha} - E(\hat{\alpha}))^2\} = E(\hat{\alpha})^2 - m_{\hat{\alpha}}^2 = \sigma_{\hat{\alpha}}^2$ . Uma variância pequena indica que a pdf está concentrada ao redor da sua média, que no caso do estimador ser cêntrico, é o valor exato [6].

Se a variância e o viés tendem para zero com o aumento do número de dados, dizemos que o estimador é consistente [7].

Vamos calcular a esperança da estimativa da média.

$$E(\hat{x}) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N E\{x(n)\} = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \bar{x} = \bar{x}$$

Como o valor médio da estimativa é igual á média do processo,  $\hat{x}$  é um estimador cêntrico.

Vamos agora calcular a variância desta estimativa.

$$var(\hat{x}) = E(\hat{x}^2) - \hat{x}^2 = E(\hat{x}^2) - \bar{x}^2,$$

uma vez que a estimativa é cêntrica.

$$\begin{aligned} E(\hat{x}^2) &= E\left\{ \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n) \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-N}^N x^*(m) \right\} \\ &= \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N E\{x(n)x^*(m)\} \\ &= \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N \gamma_{xx}(n-m) = \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{k=-2N}^{2N} (2N+1-|k|)\gamma_{xx}(k) \\ &= \frac{1}{(2N+1)} \sum_{k=-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|k|}{2N+1}\right) \gamma_{xx}(k). \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} var(\hat{x}) &= E(\hat{x}^2) - \bar{x}^2 = \frac{1}{(2N+1)} \sum_{k=-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|k|}{2N+1}\right) \gamma_{xx}(k) - \bar{x}^2 \\ &= \frac{1}{(2N+1)} \left( \sum_{k=-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|k|}{2N+1}\right) \gamma_{xx}(k) - (2N+1)\bar{x}^2 \right) \\ &= \frac{1}{(2N+1)} \left( \sum_{k=-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|k|}{2N+1}\right) \gamma_{xx}(k) - \sum_{k=-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|k|}{2N+1}\right) \bar{x}^2 \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(2N+1)} \sum_{k=-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|k|}{2N+1}\right) (\gamma_{xx}(k) - \bar{x}^2) = \frac{1}{(2N+1)} \sum_{k=-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|k|}{2N+1}\right) c_{xx}(k).$$

Como foi dito antes, se  $\text{var}(\hat{\bar{x}}) \rightarrow 0$  quando  $N \rightarrow \infty$ , a estimativa  $\hat{\bar{x}}$  converge para média estatística do processo  $\bar{x}$ , com probabilidade 1, isto é, o processo aleatório é ergódico. Assim podemos dizer que o processo é ergódico na média se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|k|}{2N+1}\right) c_{xx}(k) = 0. \quad (2.15)$$

Nestas condições a média estatística do processo aleatório pode ser calculado à custa da média do tempo de uma realização [11, 10, 8], através de

$$\bar{x} = E(\hat{\bar{x}}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n). \quad (2.16)$$

Uma condição suficiente para que a equação (2.15) se verifique é que [8]

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_{xx}(k)| < \infty,$$

sendo  $c_{xx}(k)$  a covariância do processo aleatório. Esta condição implica que

$$c_{xx}(k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty,$$

sendo que esta condição se verifica para quase todos os processos com média nula de interesse prático.

### Processo Ergódico na Autocorrelação

Consideremos a estimativa  $r_{xx}(k)$ , para a sequência de autocorrelação do processo, dada pela média de tempo da sequência de autocorrelação de uma realização do processo  $\{x(n)\}$ :

$$r_{xx}(k) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x^*(n)x(n+k), \quad -\infty < n < \infty \quad (2.17)$$

Como o valor desta estimativa varia de realização para realização, temos que  $r_{xx}(k)$  também é uma variável aleatória para qualquer atraso do tempo,  $k$ .

Vamos calcular o valor esperado desta estimativa.

$$E\{r_{xx}(k)\} = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N E\{x^*(n)x(n+k)\}$$

$$= \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \gamma_{xx}(k) = \gamma_{xx}(k)$$

Então o viés é igual a zero, logo  $r_{xx}(k)$  é um estimador cêntrico da sequência de autocorrelação,  $\gamma_{xx}(k)$ .

Para calcular a variância desta estimativa, utilizamos a expressão,  $\text{var}(r_{xx}(k)) = E\{(r_{xx}(k))^2\} - (\gamma_{xx}(k))^2$ , uma vez que o estimador é cêntrico.

$$\begin{aligned} E\{(r_{xx}(k))^2\} &= E\left\{\frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N x^*(n)x(n+k)x^*(m+k)x(m)\right\} \\ &= \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N E\{x^*(n)x(n+k)x^*(m+k)x(m)\} \\ &= \frac{1}{(2N+1)} \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N \gamma_{vv}^{(k)}(n-m), \end{aligned}$$

considerando

$$v_k(n) = x^*(n)x(n+k).$$

Logo

$$\text{var}(r_{xx}(k)) = \frac{1}{(2N+1)} \sum_{k=-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|k|}{2N+1}\right) \gamma_{vv}^{(k)}(k) - (\gamma_{xx}(k))^2.$$

Se  $\text{var}(r_{xx}(k)) \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$ , a estimativa  $r_{xx}(k)$  está concentrada perto da sua média, ou seja perto da correlação do processo, porque este é centrado. Logo a estimativa da autocorrelação, que é a autocorrelação de uma das realizações, converge com probabilidade 1 para a autocorrelação do processo. Nestas condições o processo é ergódico para a autocorrelação tendo-se então que a estimativa  $r_{xx}(k)$  converge para  $\gamma_{xx}(k)$  quando  $N \rightarrow \infty$ , ou seja

$$\gamma_{xx}(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} r_{xx}(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x^*(n)x(n+k). \quad (2.18)$$

Portanto, sob a condição do processo ser ergódico para a autocorrelação, a autocorrelação do processo aleatório pode ser calculado através da média do tempo da autocorrelação de uma realização [11, 10, 8].

A condição  $\text{var}[r_{xx}(k)] \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$  verifica-se, se  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_{xx}(k)|^2 < \infty$ .

Daqui para a frente todos os processos que se considerarem, são processos aleatórios ergódicos, podendo portanto as suas médias ser calculadas a partir das médias de tempo de uma realização.

Uma das limitações no cálculo das estimativas é o facto de termos sempre uma sequência de dados de comprimento finito e o número de amostras ser em geral pequeno [12], donde não podemos

calcular os limites nas equações (2.16) e (2.18). Esta sequência de dados pode ser considerada como um segmento de comprimento finito da realização  $x(n)$  do processo aleatório,  $x(n)$ ,  $0 \leq n \leq N - 1$  [6]. Apesar de trabalharmos com sinais de tamanho  $N$ , o que acontece efectivamente é que estes são apenas desconhecidos fora do intervalo de observação.

O nosso objetivo é seleccionar um conjunto de dados tão pequeno quanto possível e que ainda nos permita determinar as características espectrais das diferentes componentes de sinal dos dados que têm espectros poucos espaçados.

Se tivermos um processo aleatório estacionário, podemos tentar obter um sinal um pouco maior, mas caso contrário não conseguimos ter um sinal de tamanho razoável para tratar, pois ele varia constantemente.

### Estimativa da Média

Uma possível estimativa para a média será

$$\hat{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n).$$

Vamos calcular a esperança da estimativa.

$$E(\hat{x}) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} E\{x(n)\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{x} = \bar{x}$$

Como o valor médio da estimativa é igual à média do processo,  $\hat{x}$  é um estimador cêntrico.

O valor da variância é dado por

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{x}) &= E(\hat{x}^2) - \bar{x}^2 = E\left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x^*(m) \right\} - \bar{x}^2 \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} E\{x(n)x^*(m)\} - \bar{x}^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \gamma_{xx}(n-m) - \bar{x}^2 \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} (N-|k|)\gamma_{xx}(k) - \bar{x}^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right)\gamma_{xx}(k) - \bar{x}^2 \\ &= \frac{1}{N} \left( \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right)\gamma_{xx}(k) - \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right)\bar{x}^2 \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right)(\gamma_{xx}(k) - \bar{x}^2) = \frac{1}{N} \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right)c_{xx}(k). \end{aligned}$$

Podemos escrever que [13]:

$$\text{var}(\hat{x}) = \frac{1}{N} \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) c_{xx}(k) \leq \frac{1}{N} \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} |c_{xx}(k)|$$

Se a  $c_{xx}(k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ , então  $\text{var}(\hat{x}) \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$ .

Nestas condições  $\hat{x}$  é uma estimativa consistente.

### Estimativa da sequência de autocorrelação

Há vários possíveis estimadores para a sequência de autocorrelação, sendo as mais conhecidas [6, 7, 10, 11]:

$$r'_{xx}(k) = \frac{1}{(N - |k|)} \sum_{n=0}^{N-|k|-1} x^*(n)x(n+k) \quad (2.19)$$

e

$$r''_{xx}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|k|-1} x^*(n)x(n+k). \quad (2.20)$$

Relativamente ao estimador (2.19), ele é cêntrico, pois

$$E\{r'_{xx}(k)\} = \frac{1}{(N - |k|)} \sum_{n=0}^{N-|k|-1} E\{x^*(n)x(n+k)\} = \frac{1}{(N - |k|)} \sum_{n=0}^{N-|k|-1} \gamma_{xx}(k) = \gamma_{xx}(k)$$

A variância é dada por:

$$\text{var}(r'_{xx}(k)) \approx \frac{N}{(N - |k|)^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\gamma_{xx}^2(m) + \gamma_{xx}(m+k)\gamma_{xx}(m-k)),$$

resultado de Jenkins e Watts (1968)

Quando  $k \rightarrow N$ , a  $\text{var}(r'_{xx}(k))$  torna-se grande, uma vez que nesse caso são poucos os pares  $x^*(n)x(n+|k|)$  utilizados no cálculo. Em geral a variância é proporcional a  $1/N$ , tendo-se assim que para  $N \rightarrow \infty$  e muito maior que  $k$ ,  $\text{var}(r'_{xx}(k)) \rightarrow 0$ . Box e Jenkins (1976) mostraram que valores bons seriam para  $N$  no mínimo 50 e  $|k| \leq N/4$  [13].

Assim,  $r'_{xx}(k)$  é um estimador consistente de  $\gamma_{xx}(k)$ .

O estimador (2.20) é assintoticamente centrado, pois

$$E[r''_{xx}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|k|-1} E[x^*(n)x(n+k)] = \frac{N - |k|}{N} \gamma_{xx}(k) = \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) \gamma_{xx}(k),$$

sendo portanto seu viés dado por  $\frac{|k|}{N} \gamma_{xx}(k)$ .

Quando  $k \rightarrow N$ , o viés aproxima-se de  $\gamma_{xx}(k)$ , tendo-se que a  $E[r''_{xx}(k)] \rightarrow 0$ . Como nestas condições o viés é tão grande como a função que se está a estimar, este estimador não é um bom estimador.

Estes dois estimadores apenas diferem no fator de normalização  $r''_{xx}(k) = \frac{N-|k|}{N} r'_{xx}(k)$ , sendo portanto a variância dada por:

$$\text{var}(r''_{xx}(k)) \approx \left(\frac{N-|k|}{N}\right)^2 \text{var}(r'_{xx}(k)) = \frac{1}{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\gamma_{xx}^2(m) + \gamma_{xx}(m+k)\gamma_{xx}(m-k)).$$

Sendo assim, quando  $k \rightarrow N$  o valor de  $\text{var}(r''_{xx}(k))$  não é tão grande como no primeiro estimador, tendo-se também que  $\text{var}(r''_{xx}(k)) \rightarrow 0$ , quando  $N \rightarrow \infty$ .

Pelo que foi dito, apesar de ambos os estimadores serem consistentes.

Como vimos, no primeiro caso, a variância e no segundo caso o viés podem tomar valores muito grandes quando  $k \rightarrow N$ . Se considerarmos o atraso  $k$  fixo, a variância e o viés de ambos os estimadores tendem para zero quando o  $N$  cresce.

O estimador  $r'_{xx}(k)$ , tem maior variância que o estimador  $r''_{xx}(k)$ , especialmente quando o atraso é muito grande. Também para este estimador pode acontecer que a sequência de autocorrelação obtida não seja válida.

**Exemplo 1** Consideremos a sequência definida pelos valores  $x(1) = 1, x(2) = 1.1, x(3) = 1$ . Calculando os valores da sequência de autocorrelação  $r'_{xx}(0) = 1.07, r'_{xx}(1) = 1.1, r'_{xx}(2) = 1$ , obtém-se  $r'_{xx}(0) < r'_{xx}(1)$ , o que não pode acontecer.

Por estes motivos, apesar de nenhum ser um muito bom estimador, o estimador  $r''_{xx}(k)$  é o preferido [10].

## Estimativa da densidade espectral de potência

Utilizando o estimador  $r''_{xx}(k)$  da sequência de autocorrelação, vamos obter um estimador para a densidade espectral de potência:

Vamos agora utilizar o estimador  $r''_{xx}(k)$

$$\begin{aligned} P_{xx}(f) &= \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} r''_{xx}(k) e^{-j2\pi fk} \quad (2.21) \\ &= \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|k|-1} x^*(n)x(n+k) \right) e^{-j2\pi fk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-|k|-1} x^*(n)x(n+k) e^{-j2\pi fk} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n)x(m) e^{-j2\pi f(m-n)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) e^{j2\pi f n} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-j2\pi f m} = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi f n} \right|^2 \\
&= \frac{1}{N} |X(f)|^2,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

onde  $|X(f)|$  é a transformada de Fourier da sequência  $x(n)$ ,  $0 \leq n \leq N - 1$ , [11].

Como acontece na densidade espectral de energia, podemos calcular um estimador da função densidade espectral de potência de duas formas:

- Indiretamente, calculando primeiro o estimador da sequência de autocorrelação e depois a sua transformada de Fourier, à qual chamamos método indireto, equação (2.21);
- Calculando diretamente o quadrado do valor absoluto da transformada de Fourier da sequência finita  $x(n)$ , chamando-lhe método direto, equação (2.22).

## 2.3 Métodos de estimação espectral

Temos vários métodos para estimar a densidade espectral de potência:

- Os métodos clássicos ou não paramétricos são chamados de periodograma e correlograma, conforme são baseados no método direto do cálculo da densidade espectral de potência ou no método indireto. A partir destes surgem outros onde se incluem o Bartlett, o Welch e o Blackman and Tukey;

Estes métodos consideram que o sinal fora do intervalo de observação são sempre nulos. No fundo o que fazem é utilizar uma janela para observar o sinal, tendo-se como resultado que a transformada de Fourier é dada pela convolução da transformada de Fourier do sinal com a transformada de Fourier da janela. Estão assim sujeitos aos efeitos do *leakage*, podendo haver frequências que não são detetadas. Também se assume que o sinal tem período  $N$ , o que pode não ser verdade.

- Os métodos paramétricos, que são baseados na representação do processo aleatório  $y(n)$ , como saída de um sistema linear caracterizado por uma função racional. Estes métodos pressupõem algum conhecimento à priori do sinal, para saber nomeadamente a ordem e o tipo de filtro que devemos utilizar, o que pode ser uma desvantagem, uma vez que uma escolha errada do número de parâmetros pode levar a um modelo desadequado. Nestes podem considerar-se o AR, RA e o ARMA.

O facto de se ter algum conhecimento prévio do sinal, nomeadamente da estacionaridade, permite-nos estender as propriedades para fora do intervalo de observação. Aqui não há problemas de *leakage*, o que leva a uma melhor resolução na frequência.

- Os métodos baseados na estrutura e espectro da matriz de correlação dos dados.

Aqui pode considerar-se o *MUltiple Signal Classification* (MUSIC) e o *Pisarenko harmonic decomposition* (PHD).

### 2.3.1 Métodos clássicos ou não paramétricos

Os métodos clássicos podem definir-se por [7, 12]:

O **periodograma** é um estimador da DEP obtido a partir da equação:

$$P_{xx}(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi f n} \right|^2$$

O **correlograma** é um estimador do DEP obtido a partir da equação (2.21):

$$P_{xx}(f) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} r''_{xx}(k) e^{-j2\pi f k}.$$

Vamos calcular a esperança do correlograma [10].

$$\begin{aligned} E\{P_{xx}(f)\} &= E \left\{ \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} r''_{xx}(k) e^{-j2\pi f k} \right\} = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} E\{r''_{xx}(k)\} e^{-j2\pi f k} \\ &= \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) \gamma_{xx}(k) e^{-j2\pi f k} \end{aligned} \quad (2.23)$$

A partir da equação (2.23), podemos verificar que a média do estimador da DEP é a transformada de Fourier do produto da sequência de autocorrelação pela janela triangular, chamada de Bartlett,

$$w_B(k) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) & \text{se } |k| < N \\ 0 & \text{para outros valores} \end{cases} \quad (2.24)$$

sendo portanto dada pela convolução da DEP com a transformada de Fourier da janela [11], tendo-se portanto  $E\{P_{xx}(f)\} = \Gamma_{xx}(f) * W_B(f)$ , sendo  $W_B(f) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin \pi f N}{\sin \pi f}\right)^2$ , a transformada de Fourier da janela.

O valor estimado é afectado pelo efeito de suavização e do *leakage* proveniente da janela, o que pode dificultar a resolução, nomeadamente se houver frequências muito próximas [11], [12].

Como a média deste estimador não é igual à DEP do processo aleatório, o estimador não é cêntrico. No entanto temos

$$\begin{aligned}\lim_{N \rightarrow \infty} E\{P_{xx}(f)\} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|k|}{2N+1}\right) \gamma_{xx}(k) e^{-j2\pi f k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}(k) e^{-j2\pi f(k)} = \Gamma_{xx}(f)\end{aligned}$$

na condição de  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| \gamma_{xx}(k) < \infty$ .

Podemos dizer que o estimador  $P_{xx}(f)$  é assintoticamente centrado, uma vez que a média tende para o valor exato.

Apesar de  $r''_{xx}(k)$  ser um estimador consistente da sequência de autocorrelação  $\gamma_{xx}(k)$ , o mesmo não se passa com  $P_{xx}(f)$ , uma vez que, em geral, a variância não tende para zero quando  $N \rightarrow \infty$  [11, 6].

No caso particular de o sinal ser aleatório Gaussiano, a variância é dada por:

$$\text{var}(P_{xx}(f)) = \Gamma_{xx}^2(f) \left[1 + \left(\frac{\sin 2\pi f N}{N \sin 2\pi f}\right)^2\right].$$

Ambos estes estimadores, periodograma e correlograma, têm uma elevada variância, tendo havido então necessidade de procurar outros métodos, a partir destes, com menor variância [12, 6].

Um dos métodos é o de **Blackman and Tukey** que é baseado no correlograma. Neste método aplica-se uma janela à estimativa da sequência de autocorrelação antes de calcular a transformada de Fourier. Segundo Blackman and Tukey (1958), o atraso máximo deve ser  $L \approx N/10$ , para um sinal de tamanho  $N$ , para que a variância não seja muito grande [10]:

$$P_{xx}^{BT}(f) = \sum_{k=-L}^L w(k) r'_{xx}(k) e^{-j2\pi f k}.$$

O motivo da utilização da janela é porque, como já foi dito, para grandes atrasos, as estimativas são menos fiáveis. Como a variância das estimações para  $k$  muito próximos de  $N$  é grande, devemos dar o menor peso a esses valores no cálculo da estimação da DEP. Neste caso o janela tem largura  $2L + 1$  e é zero para  $|k| \geq L$ .

O resultado depende da janela, mas tem em vista uma suavização da estimativa da DEP. A escolha da janela e do valor  $L$  deve ser por forma a diminuir o valor da variância.

Outro método é o de **Bartlett**, que é baseado no periodograma e que reduz a variância através da média de várias estimativas diferentes [6].

Neste método, a sequência dos  $N$  valores do sinal  $x(n)$ ,  $0 \leq n \leq N - 1$  é dividida em  $K$  sequências não sobrepostos de tamanho  $M$  cada.

Obtêm-se as sequências  $x^{(i)}(n) = x(n + iM - M)$ ,  $0 \leq n \leq M - 1$ ,  $1 \leq i \leq K$ . Calculam-se depois os  $K$  periodogramas.

$$P_{xx}^{(i)}(f) = \frac{1}{M} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x_i(n) e^{-j2\pi fn} \right|^2, \quad i = 0, 1, \dots, K - 1$$

e calcula-se a sua média:

$$P_{xx}^B(f) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{K-1} P_{xx}^{(i)}(f).$$

A variância do estimador obtido com o método de *Bartlett* diminui, à custa do crescimento do viés e da diminuição da resolução da frequência [6]. Com a redução do tamanho de cada segmento de  $N$  para  $M = \frac{N}{K}$  leva a termos uma janela com largura de espectro aumentada de  $K$ , donde a resolução da frequência é reduzida de  $K$ . Este estimador tem também uma menor variância, reduzida de  $K$  [11].

O método de *Welch*, também baseado no periodograma, difere do de Bartlett em duas situações, divide a sequência dos  $N$  valores do sinal em  $L$  sequências de tamanho  $M$  que podem ser sobrepostos, mas antes de calcular o periodograma, utiliza uma janela:

$$P_{xx}^{(i)}(f) = \frac{1}{MU} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x_i(n) w(n) e^{-j2\pi fn} \right|^2, \quad i = 0, 1, \dots, L - 1,$$

sendo  $U$  um fator de normalização da potência da janela,

$$U = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} w^2(n)$$

e

$$P_{xx}^W(f) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} P_{xx}^{(i)}(f).$$

Neste caso também melhora a variância, podendo esta variar conforme se consideram mais ou menos pontos sobrepostos e conforme a janela utilizada [11].

### 2.3.2 Métodos paramétricos

A principal motivação dos estimadores da densidade espectral de potência não clássicos, é a de aumentar a sua resolução na frequência. Estes estimadores partem, na mesma, de observações limitadas no tempo.

Como foi visto na equação (2.14), a função densidade espectral de potência de um processo aleatório estacionário em sentido lato, que é saída de um sistema linear de tempo invariante com resposta a impulso  $h(n)$ , pode escrever-se como o produto da função densidade espectral de potência de um processo aleatório de ruído branco que é entrada do sistema, pelo quadrado da resposta a

frequência desse sistema,  $\Gamma_{yy}(f) = \sigma_x^2 |H(f)|^2$ .

Sabemos que um sistema linear é causal se a saída do sistema em qualquer instante  $n$ , depende unicamente do presente e do passado e nunca do futuro, isto é,  $y(n)$  depende apenas de  $x(n), x(n-1), \dots$  e nunca de  $x(n+1), x(n+2), \dots$

Na prática os sistemas com que trabalhamos são sempre causais.<sup>1</sup>

Podemos considerar o caso particular da DEP do processo aleatório estacionário  $\{y(n)\}$  ser uma função racional. Neste caso, também o sistema linear é caracterizado por uma função racional [8], [11],

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{m=0}^q b_m z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^p a_m z^{-m}}, |z| > r_1,$$

A equação diferencial correspondente a este sistema linear é:

$$y(n) = - \sum_{m=1}^p a_m y(n-m) + \sum_{m=0}^q b_m x(n-m), \quad (2.25)$$

sendo  $x(n)$  o sinal de entrada do sistema.

Vamos considerar três casos particulares:

- Processo *Autorregressive* (AR)

Neste caso considera-se  $b_0 = 1$  e  $b_m = 0, m > 0$ . Sendo assim, o filtro  $H(z) = \frac{1}{A(z)}$  só tem polos e a equação diferencial correspondente vem:  $y(n) = - \sum_{m=1}^p a_m y(n-m) + x(n)$ .

- Processo *Moving Average* (MA)

Neste caso considera-se  $a_m = 0, m > 0$ . Sendo assim, o filtro  $H(z) = B(z)$  só tem zeros e a equação diferencial correspondente vem:  $y(n) = \sum_{m=0}^q b_m x(n-m)$ .

- Processo *Autorregressive Moving Average* (ARMA)

Neste caso o filtro  $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ , tem zeros e polos.

Os parâmetros dos filtros,  $a_m$  e  $b_m$ , podem ser calculados à custa da sequência de autocorrelação do sinal de saída,  $\gamma_{yy}(k)$ , da seguinte forma:

<sup>1</sup> Dividindo a resposta de um sistema em duas somas, i.e.

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)x(n-k) + \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)x(n-k) =$$

$$(\dots + h(-3)x(n+3) + h(-2)x(n+2) + h(-1)x(n+1)) + (h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + h(2)x(n-2) + \dots)$$

Vê-se claramente que a 1ª parte é não causal pois não existe  $x(n+\dots)$  e a 2ª é a causal. Sendo assim um sistema é causal se a resposta a impulso for  $0, n < 0$ .

Multiplicando ambos os membros da equação diferencial (2.25) por  $y^*(n - k)$  e calculando a respectiva esperança, obtemos

$$\begin{aligned} E\{y(n) y^*(n - k)\} &= E\left\{\left(-\sum_{m=1}^p a_m y^*(n - m) + \sum_{m=0}^q b_m x(n - m)\right) y^*(n - k)\right\} \\ &= -\sum_{m=1}^p a_m E\{y(n - m) y^*(n - k)\} + \sum_{m=0}^q b_m E\{x(n - m) y^*(n - k)\} \end{aligned}$$

donde,

$$\gamma_{yy}(k) = -\sum_{m=1}^p a_m \gamma_{yy}(-m + k) + \sum_{m=0}^q b_m \gamma_{xy}(-m + k) \quad (2.26)$$

Pela propriedade 2. da página 20, existente entre dois processos aleatórios e da igualdade dada pela equação (2.2), podemos escrever:

$$\gamma_{xy}(k) = \sigma_x^2 h(-k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k > 0 \\ \sigma_x^2 h(-k) & \text{se } k \leq 0 \end{cases}$$

Então, a partir da equação (2.26), podemos obter uma relação entre a sequência de autocorrelação do processo aleatório de saída do sistema e os parâmetros:

$$\gamma_{yy}(k) = \begin{cases} -\sum_{m=1}^p a_m \gamma_{yy}(k - m) & \text{se } k > q \\ -\sum_{m=1}^p a_m \gamma_{yy}(k - m) + \sigma_x^2 \sum_{m=0}^{q-k} h(m) b_{k+m} & \text{se } 0 \leq k \leq q \\ \gamma_{yy}^*(-k) & \text{se } k < 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

**Exemplo 2** Consideremos o sinal  $y(n)$  de tamanho 10000, o qual sabemos ser ruído branco filtrado, por um filtro FIR de ordem 2,  $H(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}$ , desconhecido à partida. Partindo do sinal  $y(n)$  e calculando a sua sequência de autocorrelação  $\gamma_{yy}(k)$ , ver Figura (2.1), podemos determinar os parâmetros do filtro, resolvendo o sistema:

$$\gamma_{yy}(k) = \sum_{m=0}^{2-k} h(m) b_{k+m} \Leftrightarrow \begin{cases} 14 = h(0) b_0 + h(1) b_1 + h(2) b_2 \\ 8 = h(0) b_1 + h(1) b_2 \\ 3 = h(2) b_2 \end{cases} \quad (2.28)$$

Facilmente se verifica que os coeficientes do filtro são solução do sistema.

A partir daqui é imediato calcular a DEP do sinal  $y(n)$ , utilizando a equação (2.14).

No caso do processo AR as equações são chamadas de *Yule-Walker* e podem ser representadas na forma matricial:

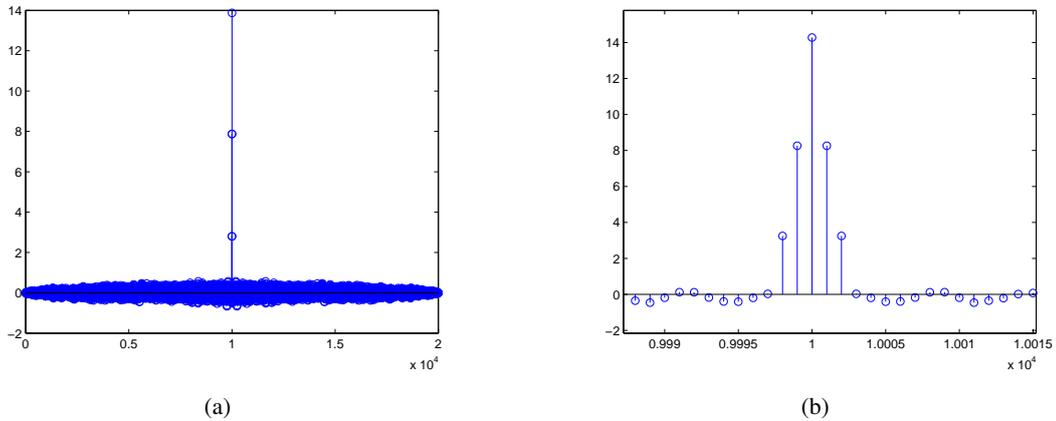


Figura 2.1: Sequência de autocorrelação de um sinal filtrado pelo filtro FIR de coeficiente 1,2,3.

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yy}(0) & \gamma_{yy}(-1) & \cdots & \gamma_{yy}(-p) \\ \gamma_{yy}(1) & \gamma_{yy}(0) & \cdots & \gamma_{yy}(-p+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{yy}(p) & \gamma_{yy}(p-1) & \cdots & \gamma_{yy}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dentro destes casos particulares vistos, o AR é o mais utilizado, pois é adequado para fazer a representação do espectro para sinais com frequências próximas e ainda porque o sistema 2.27 tem equações lineares simples [11].

Os métodos baseados em modelos paramétricos são altamente dependentes da qualidade do ajuste do modelo em relação ao sinal e à hipótese de estacionaridade deste último para fora do intervalo de observação. Os resultados podem, ou não, ser superiores aos obtidos com os métodos clássicos dependendo destas duas propriedades serem mais ou menos verificadas [11].

Na prática é difícil ter um modelo que sirva para todo o tipo de sinais. Quanto mais adaptado for o modelo ao sinal cuja densidade espectral de potência se pretende estimar melhor será o resultado.

### 2.3.3 Métodos baseados nos valores próprios da matriz de correlação dos dados

Os métodos de estimação espectral baseadas na *eigenanalysis* da matriz de autocorrelação, têm melhor resolução e dão melhores estimadores de frequência que alguns métodos espectrais tais como autoregressive, especialmente para baixa razão sinal - ruído, onde estas em geral falham na resolução de sinusóides próximas. Esta alta resolução é obtida assumindo um determinado modelo dos dados, portanto, como nos métodos paramétricos, o desempenho destes métodos depende de quanto o modelo está próximo dos dados [13].

O que leva à obtenção de melhores resultados é o facto de se considerar a informação da matriz de

autocorrelação ou da matriz de dados, dividida em 2 subespaços, o subespaço do sinal e o subespaço do ruído.

Funções dos vetores no espaço do sinal ou no espaço do ruído podem ser usadas para criar estimadores de frequência, cujos gráficos mostram "picos" na localização das frequências das sinusóides ou de outras narrowband componentes espectrais [10]. O MUSIC é um estimador de frequência baseado no espaço do ruído.

Não se obtêm verdadeiros estimadores de DEP uma vez que não preservam a potência das componentes espectrais, nem permitem recuperar a sequência de autocorrelação através da transformada inversa de Fourier.

Consideremos um sinal dado pela soma de  $L$  sinusóides complexas,  $x(n) = \sum_{l=1}^L A_l e^{2\pi f_l n T_a + \theta_l}$ , sendo  $A_l$  a amplitude,  $f_l$  a frequência e  $T_a$  o período de amostragem de cada uma das frequências, fixos e sendo a fase  $\theta_l$  uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo  $[0, 2\pi]$ .

Como já vimos, a sequência de autocorrelação é dada pela equação (2.6) e a matriz de autocorrelação é dada diretamente por 2.7 ou calculando a fórmula (2.8).

Se o sinal estiver corrompido com ruído branco  $w(n)$ , com densidade espectral de potência  $\sigma_w^2(n)$ , o sinal recebido é  $y(n) = x(n) + w(n)$ .

A sequência de autocorrelação de  $y(n)$  é dada por

$$\gamma_{yy}(k) = \gamma_{xx}(k) + \sigma_w^2 \delta(k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm K,$$

podendo a matriz de autocorrelação de  $y(n)$  ser escrita como a soma da matriz de autocorrelação de  $x(n)$  com a matriz de autocorrelação de  $w(n)$ ,  $R_{yy} = R_{xx} + \sigma_w^2 I$ .

Pode também calcular-se a partir de

$$R_{yy} = \sum_{l=1}^L A_l^2 e_K(f_l) e_K^H(f_l) + \sigma_w^2 I = E A E^H + \sigma_w^2 I,$$

sendo  $e_K(f_l) = [1 \quad e^{j2\pi f_l T} \quad \dots \quad e^{j2\pi f_l K T}]^T$ , um vetor sinusoidal complexo na frequência  $f_l$ ,  $E$  uma matriz  $(K+1) \times L$  dada por  $E = [e_K(f_1) \quad e_K(f_2) \quad \dots \quad e_K(f_L)]^T$  e  $A$  a matriz diagonal em que os valores são os  $A_l^2$ .

Em geral escolhemos sempre  $K > L$  e assim a matriz de autocorrelação do sinal  $R_{xx}$  tem ordem maior que o número de sinusóides,  $K+1 > L$ , donde a matriz tem rank  $L$  (ou rank  $2L$  no caso de termos  $L$  sinusóides reais). A matriz do ruído  $\sigma_w^2 I$  tem rank  $(K+1)$ , logo a matriz de autocorrelação de  $y(n)$ ,  $R_{yy}$ , tem rank  $(K+1)$  [13, 12].

$R_{xx}$  é uma matriz Hermitiana de dimensão  $(K+1)(K+1)$ , tendo como decomposição em valores

próprios:

$$R_{xx} = \sum_{i=1}^{K+1} \lambda_i v_i v_i^H,$$

sendo os vetores próprios correspondentes ortonormais.

Como uma matriz de dimensão  $K + 1$  com rank  $L < K + 1$ , tem  $K - L + 1$  valores próprios nulos, a decomposição anterior pode escrever-se

$$R_{xx} = \sum_{i=1}^L \lambda_i v_i v_i^H.$$

Os  $L$  vetores próprios correspondentes aos valores próprios não nulos são chamados de vetores próprios principais e, tendo em consideração a igualdade (2.8) podemos ver que geram o mesmo subespaço que os vetores  $e_1, \dots, e_L$ , o subespaço do sinal.

A matriz de autocorrelação do ruído também se pode escrever na forma

$$\sigma_w^2 I = \sigma_w^2 \sum_{i=1}^{K+1} v_i v_i^H.$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} R_{yy} &= \sum_{i=1}^L \lambda_i v_i v_i^H + \sigma_w^2 \sum_{i=1}^{K+1} v_i v_i^H \\ &= \sum_{i=1}^L (\lambda_i + \sigma_w^2) v_i v_i^H + \sigma_w^2 \sum_{i=L+1}^{K+1} v_i v_i^H = V_s \Lambda_s V_s^H + \sigma_w^2 V_r V_r^H, \end{aligned}$$

sendo  $V_s = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_L]^T$  e  $V_r = [v_{L+1} \ v_{L+2} \ \dots \ v_{K+1}]^T$  as matrizes cujas colunas correspondem aos vetores próprios principais que geram o subespaço do sinal e os vetores que geram o subespaço do ruído, respetivamente. A matriz  $\Lambda_s$  é a matriz de dimensão  $L \times L$  correspondente aos valores próprios do sinal sem ruído.

Os  $K + 1$  valores próprios de  $R_{yy}$ ,  $\tilde{\lambda}_i$  podem escrever-se como a soma dos  $K + 1$  valores próprios de  $R_{xx}$  com  $\sigma_w^2$ , donde se pode escrever [12],

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}_i > \sigma_w^2 & \text{para } i = 1, \dots, L \\ \tilde{\lambda}_i = \sigma_w^2 & \text{para } i = L + 1, \dots, K + 1 \end{cases} \quad (2.29)$$

A matriz de autocorrelação  $R_{yy}$  é Hermitiana simétrica, sendo portanto os vetores próprios ortogonais [13]. Assim, o conjunto dos vetores  $v_{L+1}, \dots, v_{K+1}$  é ortogonal aos vetores principais.

Atendendo a que os vetores próprios principais geram o mesmo subespaço que os vetores  $e_K(f_1), \dots, e_K(f_L)$ , então estes vetores, que se podem escrever como combinação linear dos vetores geradores, são também ortogonais aos vetores do subespaço do ruído e a qualquer combinação linear

deles.

Assim, podemos escrever que

$$e_K^H(f_i) \left( \sum_{m=L+1}^{K+1} \alpha_m v_m \right) = 0, \quad 1 \leq i \leq L. \quad (2.30)$$

Esta igualdade é a base dos estimadores de frequência à base do subespaço do ruído.

## MUSIC

O MUSIC é particularmente adequado para sinais que são a soma de sinusóides com ruído branco Gaussiano.

Consideremos o estimador de frequência:

$$P(f) = \sum_{m=L+1}^{K+1} \alpha_m |e_K^H(f) v_m|^2,$$

sendo  $v_{L+1}, \dots, v_{K+1}$  os vetores próprios do subespaço do ruído e

$$e_K(f) = \begin{bmatrix} 1 & e^{j2\pi fT} & \dots & e^{j2\pi fKT} \end{bmatrix}^T.$$

$P(f)$  pode escrever-se na forma

$$P(f) = e_K^H(f) \left( \sum_{m=L+1}^{K+1} \alpha_m v_m v_m^H \right) e_K(f).$$

Considerando a equação (2.30), podemos verificar que  $P(f_i) = 0$ , pelo que o gráfico da função  $\frac{1}{P(f)}$  terá picos  $f = f_i$ , ou seja nos valores originais das frequências. Assim esta função dá um estimador para as frequências do sinal.

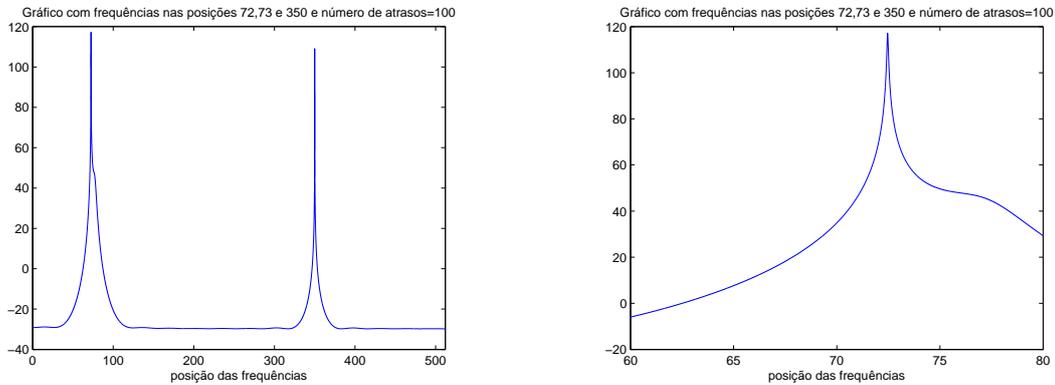
O MUSIC, proposto por Schmidt, é um caso particular deste estimador considerando  $\alpha_m = 1, \forall m$ , [11] e é dado por:

$$P_{MUSIC}(f) = \frac{1}{\sum_{m=L+1}^{K+1} |e_K^H(f) v_m|^2} = \frac{1}{e_K^H(f) \left( \sum_{m=L+1}^{K+1} v_m v_m^H \right) e_K(f)}.$$

A partir da decomposição em valores próprios da matriz de autocorrelação  $R_{yy}$ , usamos os valores próprios associados aos  $L$  maiores valores próprios, para definir o subespaço do sinal e usamos os outros valores próprios para definir o subespaço do ruído. A partir do conhecimento da ortogonalidade dos subespaços do sinal e do ruído, encontramos os picos da função de estimação, que determinam os valores aproximados das frequências do sinal.

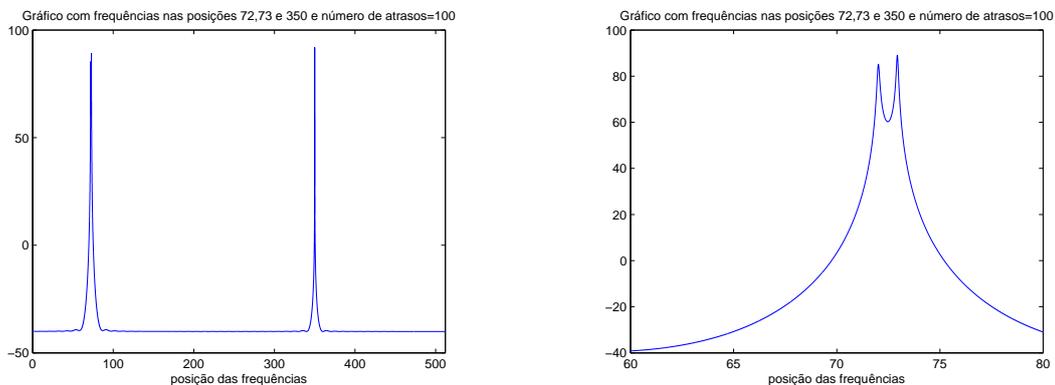
Este estimador não é um verdadeiro DEP, pois apenas localiza as posições das frequências.

Quanto maior for o valor do atraso  $K$ , mais preciso é o MUSIC [12], ver as Figuras (2.2) e (2.3). Como se pode verificar, com  $K = 100$  já se conseguem determinar as duas frequências que são muito próximas, enquanto que com  $K = 30$ , apenas há um pico no gráfico.



(b) Zoom do gráfico em torno das frequências nas posições 72 e 73

Figura 2.2: Valores aproximados das frequências, utilizando o MUSIC com um valor para o atraso igual a 30.



(b) Zoom do gráfico em torno das frequências nas posições 72 e 73

Figura 2.3: Valores aproximados das frequências, utilizando o MUSIC com um valor para o atraso igual a 100.

### PHD - Pisarenko

No caso especial de  $K = L$  (ou  $K = 2L$  no caso em que temos  $L$  sinusóides reais), o MUSIC reduz-se ao algoritmo conhecido por *Pisarenko harmonic decomposition*(PHD) [12].

Nestas condições o subespaço do ruído tem um único vetor próprio,  $v_{L+1}$ , não havendo assim necessidade de separar os valores próprios do sinal dos do ruído.

Este vetor é ortogonal aos  $L$  vetores  $e_K(f_i)$  que geram o espaço do sinal. Isso permite escrever

$$e_K(f_i)^H v_{L+1} = \left( \sum_{m=0}^L v_{L+1}(m+1) e^{-2\pi f_i m T} \right) = 0, \quad 1 \leq i \leq L.$$

Desta igualdade podemos concluir que as frequências  $f_i$  podem ser calculadas calculando os zeros do polinómio

$$V(z) = \sum_{m=0}^L v_{L+1}(m+1) z^{-m},$$

os quais estão no círculo unitário [11].

Este algoritmo é mais simples que o MUSIC, mas como o valor de  $K$  é pequeno, pode ser menos preciso.

## Capítulo 3

# Compressed Sensing

### 3.1 Amostragem com projeções lineares

Um sinal  $x$  em  $\mathbb{R}^N$  pode escrever-se como combinação linear de  $N$  vetores que formem uma base de  $\mathbb{R}^N$ ,  $\{\psi_i\}$ . Para simplificar o nosso estudo, vamos considerar a base ortonormada, i.e.

$$x = \sum_{k=1}^N s_k \psi_k \quad \text{ou} \quad x = \Psi s, \quad (3.1)$$

sendo  $\Psi$  a matriz cujas colunas são os vetores da base e  $s \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ , o vetor dos coeficientes  $s_i = \langle x, \psi_i \rangle = \psi_i^T x$ . Note-se que  $x$  e  $s$  são representações equivalentes do sinal, sendo a primeira no domínio original (por exemplo no tempo) e a segunda no domínio da base  $\Psi$  (por exemplo no domínio da DFT).

Um sinal  $x \in \mathbb{R}^N$  diz-se  **$K$ -esparso** se  $\#\text{supp}(x) \leq K$ , sendo  $\text{supp}(x)$  o número de componentes diferentes de zero, ou se na sua representação na forma da equação (3.1), apenas  $K$  coeficientes são não nulos.

Um sinal diz-se portanto  **$K$ -esparso** se se puder escrever como combinação linear de apenas  $K$ ,  $K \ll N$ , vetores de uma dada base ou dicionário  $D$ ,

$$x = \sum_{k=1}^K s_k D_k.$$

Podemos ainda escrever  $x = Ds$ , sendo  $\|s\|_0 = K$ , onde  $\|s\|_0 = \#\{i : s_i \neq 0\}$ .

Um dicionário é um conjunto de vetores que podem ser a reunião de vetores de várias bases. Em casos particulares um dicionário chama-se **frame**, [14].

**Definição 12** *Uma frame de um espaço vetorial  $V$ , que está munido de um produto interno, é um conjunto de vetores  $f_k$  que satisfaz a condição: existem dois números reais  $\alpha$  e  $\beta$ , com  $0 < \alpha \leq \beta$*

tais que

$$\alpha \|g\|^2 \leq \sum_k |\langle g, f_k \rangle|^2 \leq \beta \|g\|^2, \forall g \in V.$$

Os números  $\alpha$  e  $\beta$  são chamados de *frame bounds*.

Os vetores da frame são em geral linearmente dependentes, mas geram todo o espaço vetorial.

Um sinal  $x$  diz-se **compressível** se os seus coeficientes quando representados na forma da equação (3.1) e ordenados por ordem decrescente de tamanho,  $|s|_{(1)} \geq |s|_{(2)} \geq \dots \geq |s|_{(N)}$ , decaem de acordo com

$$|s|_{(i)} \leq Ci^{-1/r}, i = 1 \dots N, \quad (3.2)$$

com  $r \in [0, 1]$ , [15, 16]. Um sinal compressível tem poucos coeficientes grandes e muitos coeficientes pequenos.

Como  $\Psi$  é uma base ortonormada temos que  $\|x - x_K\|_2 = \|s - s_K\|_2$ , sendo  $s_K$  o vetor onde apenas os  $K$  maiores coeficientes são diferentes de zero e  $x_K = \Psi_K s_K$ . Então se o sinal  $x$  for esparso ou compressível,  $s$  é bem aproximado por  $s_K$  e então o erro  $\|x - x_K\|_2$  é muito pequeno. Se  $x$  for compressível, um majorante para o erro de aproximação é dado por  $(rs)^{-1/2} CK^{-s}$ , com  $s = \frac{1}{r} - \frac{1}{2}$  [16].

A técnica utilizada para a compressão de sinais esparsos ou compressíveis, na fase de codificação de um sinal a transmitir é conhecida como *transform coding* e segue as seguintes fases [1, 17, 18]:

1. Adquirem-se todas as  $N$  amostras do sinal  $x$ , as quais são obtidas amostrando à taxa de Nyquist, utilizando por exemplo um conversor analógico-digital;
2. Calculam-se todos os coeficientes do sinal na base. Há muitos algoritmos que permitem encontrar boas aproximações de um sinal numa base;
3. Escolhem-se apenas os  $K$  maiores coeficientes,  $K < N$ ;
4. Codificam-se os valores e as posições destes  $K$  coeficientes.

A melhor aproximação do sinal é um sinal  $z$ ,  $K$ -esparso, tal que  $\|x - z\|_2$  é mínima. Este processo de encontrar uma aproximação do sinal diz-se adaptativa, pois os índices dos maiores coeficientes escolhidos variam de sinal para sinal.

Esse procedimento tem três desvantagens: primeiro, dependendo do sinal, o número de amostras a considerar pode ser muito grande. Em segundo lugar, têm de se calcular todos os coeficientes do sinal na base considerada, independentemente de depois só se ficar com os  $K$  maiores. Em terceiro lugar, o codificador tem ainda de codificar os valores dos  $K$  maiores coeficientes.

Levantam-se então algumas questões:

*Se queremos reconstruir um sinal que seja esparso ou compressível, será que é necessário adquirir todas as suas componentes, calcular a transformada de todos os coeficientes e depois descartar os mais pequenos ou será possível adquirir logo de início apenas um pequeno número de amostras? Se sim, qual será o menor número de amostras que devemos considerar para que não haja perda de informação do sinal inicial? E nesse caso, como determinamos essas amostras? E que algoritmos devemos utilizar para conseguirmos fazer uma reconstrução estável e relativamente rápida?*

O *Compressed Sensing*, (CS), vai responder a estas questões.

O CS é uma teoria, relativamente recente, que garante ser possível reconstruir sinais esparsos ou compressíveis a partir de um número pequeno de amostras não adaptativas, que podem estar corrompidas com ruído, não tendo de se adquirir todo o sinal. Obtém-se o sinal já comprimido. O sinal é adquirido com um taxa bastante inferior à taxa de Nyquist. Não temos de calcular todos os coeficientes do sinal na base, mas sim estimar apenas os que irão ser considerados. O CS adquire e comprime o sinal de uma só vez.

O CS pode traduzir-se por:

Pretendemos recuperar o sinal  $s \in \mathbb{R}^N$   $K$ -esparso, a partir de apenas  $M$  amostras conhecidas, sendo  $M > K$  e  $M \ll N$ . Estas amostras são obtidas calculando os produtos internos entre o sinal  $s$  e um conjunto de  $M$  vetores de  $\mathbb{R}^N$ ,  $\{\phi_i\}$ , independentes do sinal, os quais formam as linhas da matriz de amostragem  $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$ .

O nosso problema é então reconstruir o sinal  $s$ , esparso ou compressível, a partir das  $M$  projeções lineares  $y$ , sendo  $y = \Phi s + z$ , com  $z$  um vetor erro ou ruído e  $y_i = \langle s, \phi_i \rangle = \phi_i s + z_i$ ,  $1 \leq i \leq M$ . Quanto mais  $M$  for aproximado de  $K$ , maior compressão do sinal conseguimos obter.

Vamos começar por estudar a situação em que não existe ruído.

### 3.2 Reconstrução de sinais esparsos subamostrados

O nosso objetivo é reconstruir um sinal  $s$ ,  $K$ -esparso, conhecida a matriz de amostragem  $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$ ,  $M \leq N$  e o vetor  $y$ , através da resolução do sistema indeterminado  $y = \Phi s$ .

Para resolver este problema temos de [1, 18]:

- escolher uma matriz de amostragem  $\Phi$ , onde os vetores linha,  $\phi_i$ , são funções lineares, que seja estável, i.e. que não leve à perda de informação do sinal ao reduzir a sua dimensão;
- construir um algoritmo que permita extrair de  $y$  a informação do sinal  $x$ , ou seja, determinar uma aproximação do sinal.

O problema traduz-se na resolução do sistema de equações lineares indeterminado,  $y = \Phi s$ , com

$M$  equações e  $N$  incógnitas. O sistema  $y = \Phi s$  tem muitas soluções, que são da forma  $s + r$ , sendo  $r$  um qualquer vetor pertencente ao núcleo de  $\Phi$ ,  $\mathcal{N}(\Phi)$ . Se  $s$  é uma solução de  $y = \Phi s$ , então  $s + r$ , com  $r \in \mathcal{N}(\Phi)$  também é solução, pois

$$\Phi(s + r) = \Phi s + \Phi r = y + 0 = y.$$

Portanto o conjunto das soluções do sistema é dado pelo espaço afim  $\mathcal{F}(y) = s + \mathcal{N}(\Phi)$ .

### 3.2.1 Problemas de minimização $l_0$ , $l_1$ e $l_2$

Existem várias maneiras de ultrapassar o problema da não unicidade da solução do sistema indeterminado  $y = \Phi s$ : procurar entre as soluções, a que tem uma certa norma mínima, impor condições adicionais ou utilizar informações conhecidas *a priori* sobre o sinal, tal como o conhecimento de que o sinal é esparso.

A forma mais usual para estimar os valores a determinar na resolução de um sistema mal condicionado, é a estimação dos mínimos quadrados:  $\min \|y - \Phi s\|_2^2$ .

Este método encontra  $s$  que minimiza a soma dos quadrados dos resíduos,

$$\sum_{i=1}^M (y_i - \sum_{j=1}^N \phi_{i,j} s_j)^2,$$

sendo  $\phi_{i,j}$  o elemento da matriz  $\Phi$  na posição  $(i, j)$ .

Diferenciando  $\min \|y - \Phi s\|_2^2$  relativamente a  $s$ , obtemos as equações normais do problema:

$$(\Phi^T \Phi) s = \Phi^T y.$$

Atendendo à matriz do nosso problema,  $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$ , com  $M < N$ , a matriz  $(\Phi^T \Phi)$  é singular, logo não podemos explicitar o valor de  $s$ .

Temos então de utilizar uma regularização para o resolver. O objetivo é minimizar a distância entre  $y$  e  $\Phi s$ , obrigando agora à satisfação de uma outra condição

$$\min \|y - \Phi s\|_2^2 : \|s\|_2^2 = \alpha. \quad (3.3)$$

Esta regularização é também chamada de regularização  $\ell_2$ , em que acrescenta uma constante positiva à diagonal de  $\Phi^T \Phi$ , passando a matriz a ser não singular. O valor de  $s$  é agora dado explicitamente através da expressão

$$s = (\Phi^T \Phi + \alpha^2 I)^{-1} \Phi^T y.$$

O problema pode também escrever-se sob a forma

$$\min \|y - \Phi s\|_2^2 + \alpha \|s\|_2^2 \quad (3.4)$$

conhecida como a regularização ou penalização de *Tikhonov*. O valor do parâmetro de regularização,  $\alpha$ , é importante na medida em que controla o *tradeoff* entre a fidelização dos dados e a regularização. Se  $\alpha$  for muito grande, estamos a favorecer a penalização, a qual pode ser um conhecimento à priori dos dados.

Para obtermos soluções úteis para o nosso sistema  $y = \Phi s$ , utilizamos regularizações. Vamos definir um problema de otimização, utilizando uma função  $J(s)$ , que regula a qualidade de ajuste do modelo com a exigência dos dados [19, 20].

Antes de definir o problema de otimização, vamos definir uma norma.

**Definição 13** *Seja  $V$  um espaço vetorial sobre um corpo  $K$  de números reais ou complexos. Defina-se norma em  $V$  como sendo uma função  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  com as seguintes propriedades:*

1.  $\|a x\| = |a| \cdot \|x\|, \forall a \in K, \forall x \in V$
2.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in V$
3. se  $\|x\| \geq 0, \forall x \in V; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Uma semi-norma satisfaz apenas as propriedades 1. e 2. da norma.

Uma quase-norma satisfaz apenas as propriedades 1. e 3. da norma.

No problema de minimização da norma  $\ell_2$  escolhemos a função convexa  $J(s) = \|s\|_2^2$ , sendo  $\|s\|_2^2 = \sum |s_i|^2$ .

$$(P2) : \min \|s\|_2^2 : y = \Phi s \quad (3.5)$$

No entanto, a norma  $\ell_2$  não é adequada ao nosso problema, é uma medida de energia, não dando quase nunca um vetor esparso.

Como estamos interessados em obter soluções esparsas, devemos escolher o problema de minimização onde a função é  $J(s) = \|s\|_0$ , sendo  $\|s\|_0$  o número de componentes não nulas do sinal, o qual se designa pela quase-norma  $\ell_0$ ,

$$(P0) : \min \|s\|_0 : y = \Phi s. \quad (3.6)$$

Daqui para a frente, vamos fazer um abuso de linguagem e chamar norma  $\ell_0$  em vez de quase-norma.

Para o problema de otimização (P0), não é garantido, de imediato, que tenha solução única, uma vez que a função  $J(s) = \|s\|_0$  não é estritamente convexa.

Este problema de otimização (P0), consegue reconstruir um sinal  $K$ -esparso a partir de  $M = 2K$  amostras [16], mas a sua resolução requer uma procura exaustiva em todos os subconjuntos de colunas de  $\Phi$ . É um procedimento de natureza combinatória, que tem complexidade exponencial em  $N$  e foi

provado que (P0) é em geral *NP-hard* [19, 21].

Na prática esta abordagem não é boa. Encontrar soluções esparsas através da resolução de um sistema indeterminado de equações lineares é um problema *NP-hard*. Além disto, o problema (P0) não é estável em presença de ruído.

Para ultrapassar este problema de resolução, têm sido utilizadas 2 abordagens:

### 1. Greedy Algoritmos (GA)

Estes algoritmos encontram, iterativamente, uma série de aproximações que são ótimos locais, parando quando o erro da aproximação for inferior a um dado *threshold* [22]. Entre estes algoritmos podem considerar-se, o Thresholding [23], o Matching Pursuit (MP) que foi apresentado por Malat [24], o Orthogonal Matching Pursuit (OMP), desenvolvido de forma independente [25], por Chen e outros, Pati e outros [26], Davis e outros e Gharavi-Alkhansari and Huang, o Fast Orthogonal Matching Pursuit (FOMP) [25], o Optimized Orthogonal Matching Pursuit (OOMP) [27] e o CoSaMP, apresentado por Tropp e outro [15].

### 2. Basis Pursuit (BP)

O BP é um princípio de otimização, onde em vez de se considerar o problema (P0), equação (3.6), substitui-se a norma  $\ell_0$  pela sua aproximação convexa, a norma  $\ell_1$ <sup>1</sup>, [28] e resolve-se o problema de minimização, considerando a função  $J(s) = \|s\|_1$ , sendo  $\|s\|_1 = \sum |s_i|$ :

$$(P1) : \min \|s\|_1 : y = \Phi s. \quad (3.7)$$

(P1) é um problema de otimização convexa, não continuamente diferenciável, sendo entre os problemas convexos o que está mais próximo de (P0) [19]. Sendo o BP baseado numa otimização global, consegue resolver o problema com mais estabilidade que o MP [29].

Este problema não pode ser resolvido analiticamente nem para números reais nem complexos, mas podemos proceder a uma transformação para o resolver.

No caso de considerarmos números reais, podemos transformar este problema num de programação linear (PL), ver como na página 53, cuja complexidade computacional é polinomial em  $N$  [17] e resolvê-lo pelos métodos de PL, como por exemplo o método Simplex.

No caso de termos números complexos, não podemos transformá-lo separando números positivos e negativos para utilizar métodos de programação linear, mas o problema pode ser transformado num problema *second order cone programming*, (SOCP), [30, 31], ver como na página 54 e ser resolvido por vários algoritmos, nomeadamente com o CVX [32, 33].

Há também os métodos de ponto interior, propostos por Chen, Donoho e Saunders [29, 34] que permitem resolver estes problemas.

---

<sup>1</sup>Aproximamos o número de componentes não nulas do sinal pela soma do valor absoluto das componentes.

Mais recentemente apareceram outros algoritmos para determinar aproximações de (P1), propostos independentemente e chamados de *iterated shrinkage methods* [19].

Utilizando a minimização da norma  $\ell_2$ , a solução pode não ser esparsa, enquanto que utilizando a minimização da norma  $\ell_1$  é sempre [1].

Em  $\mathbb{R}^N$ , um vetor  $K$ -esparso encontra-se num hiperplano de dimensão  $K$ , “alinhado” com hiperplanos coordenados. Por exemplo, em  $\mathbb{R}^3$ , o vetor 1-esparso  $(\alpha, 0, 0)$ , encontra-se no eixo dos  $xx$  e o vetor 2-esparso  $(\alpha, \delta, 0)$ , encontra-se no plano  $xOy$ .

Por outro lado, como já vimos, as soluções do sistema indeterminado  $y = \Phi s$ , com  $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$ , encontram-se no espaço de dimensão  $(N - M)$ ,  $N(\Phi) + s$ . Dependendo da matriz  $\Phi$ , este espaço tem uma qualquer orientação, passando por  $s$ , uma vez que  $0 \in N(\Phi)$ .

O vetor que minimiza quer a norma  $\ell_1$  quer a norma  $\ell_2$ , é o vetor do espaço solução onde a bola  $\ell_1$  e  $\ell_2$  respetivamente, considerada a crescer a partir da origem, toca em primeiro lugar. Se utilizarmos a minimização da norma  $\ell_2$ , o vetor solução terá de ser o de  $N(\Phi) + s$  que se encontra mais próximo da origem. Este vetor não está necessariamente no alinhamento dos hiperplanos coordenados, não sendo portanto esparso. Na minimização da norma  $\ell_1$ , como a bola  $\ell_1$  tem pontos nos hiperplanos coordenados, o vetor é exatamente o do hiperplano coordenado a que pertence o sinal  $s$ .

A Figura 3.1 permite visualizar o que foi dito, para o caso particular de termos um sinal  $s$ , 1-esparso, pertencente a  $\mathbb{R}^3$ .

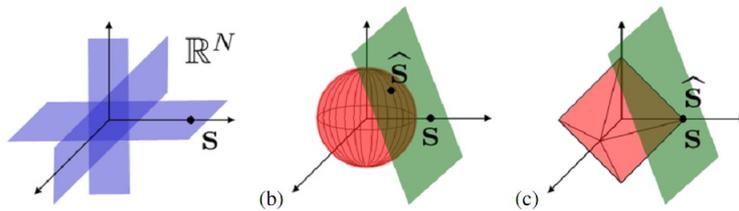


Figura 3.1: Ilustra, em  $\mathbb{R}^3$ , que a minimização da norma  $\ell_2$  não dá necessariamente uma solução esparsa, ao contrário da minimização da norma  $\ell_1$ . Fonte: [1]

O gráfico apresentado na Figura 3.2 mostra as soluções obtidas na resolução do sistema  $y = \Phi s$ , para os problemas (P2) e (P1), sendo  $\Phi$  uma matriz aleatória de dimensão  $150 \times 256$  e  $s$  um sinal com esparsidade 15. A solução obtida pelo problema (P2) não é esparsa enquanto que a obtida pelo problema (P1) é. Os erros de reconstrução são  $0.6228$  e  $1.6 \cdot 10^{-12}$  respetivamente.

A seguir vamos apresentar quatro algoritmos, pertencentes às abordagens acima enunciadas, utilizados para resolver um qualquer sistema de equações indeterminado,  $y = As$ :

### 3.2.2 Algoritmos de reconstrução

Consideremos um dicionário  $D$  igual a um conjunto de vetores  $u_n \in \mathbb{R}^M$ .

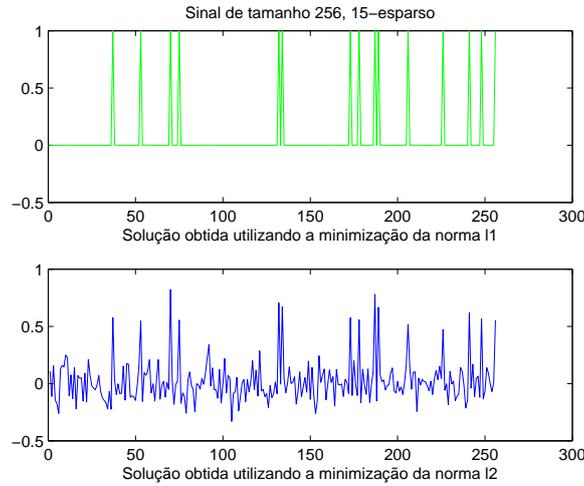


Figura 3.2: Soluções obtidas na resolução de (P1) e (P2) para um sinal com esparsidade 15.

Dado um vetor  $y \in \mathbb{R}^M$ , pretendemos escrevê-lo como combinação linear de alguns elementos de  $D$ , ou mais exatamente, pretendemos construir uma representação na forma

$$y = \sum_n s_n u_n.$$

Vamos chamar  $A$ , à matriz cujas colunas são os vetores do dicionário. A matriz  $A$  tem dimensão  $M \times N$ , sendo  $M \leq N$ .

### **Thresholding**

Neste algoritmo temos de conhecer a esparsidade  $K$  do sinal. Em cada iteração  $i$  do algoritmo, calculam-se os valores aproximados do sinal,  $s_i$  e os valores aproximados do resíduo ou erro,  $R_i$ .

### **Algoritmo:**

Fixam-se os valores iniciais:  $s_0 = 0$ ,  $R_0 = y - As_0 = y$ .

Considera-se  $i = 0$ .

Enquanto  $\|R_i\| > \delta$ , ( $\delta > 0$ ), executam-se os passos:

1.  $i = i + 1$ ;
2.  $s_i = s_{i-1} + A^T R_{i-1} = s_{i-1} + A^T (y - As_{i-1})$
3.  $s_i$  reduz-se aos  $K$  coeficientes com maior valor absoluto;
4.  $R_i = y - As_i$ .

Temos que  $s = s_i$ .

## Matching Pursuit

Este algoritmo é um algoritmo iterativo proposto por Malat e Zhang [24].

Em cada iteração  $i$  do MP vamos obter uma representação de  $y$  na forma

$$y = \sum_{j=1}^i s_j u_{n_j} + R_i = y_i + R_i,$$

sendo  $y_i$  a aproximação de  $y$  e  $R_i$  a aproximação do resíduo ou erro na iteração  $i$ .

### Algoritmo:

Vamos considerar que os vetores  $u_n$  são normalizados, isto é  $\|u_n\| = 1$ .

Fixam-se os valores iniciais:  $y_0 = 0$  e  $R_0 = As - y_0 = y$ .

Considera-se  $i = 0$ .

Enquanto  $\|R_i\| > \delta$ , ( $\delta > 0$ ), executam-se os passos:

1.  $i = i + 1$
2. Encontra-se o  $n_i$  a partir dos produtos internos do resíduo com cada um dos vetores de  $D$ :

$$n_i = \arg \max_n \langle R_{i-1}, u_n \rangle;$$

3. Tem-se:

$$R_i = R_{i-1} - \langle R_{i-1}, u_{n_i} \rangle u_i;$$

$$y_i = y_{i-1} + \langle R_{i-1}, u_{n_i} \rangle u_i.$$

As componentes do vetor  $s$ ,  $s_i$ , são dados por  $\langle R_{i-1}, u_{n_i} \rangle$

Iniciando o processo iterativo com  $R_0$  igual ao sinal que pretendemos aproximar, este algoritmo, em cada iteração, escolhe o vetor do dicionário onde o vetor resíduo tem maior projeção, i.e., o vetor do dicionário que melhor se correlaciona com o resíduo. De seguida retira deste vetor a componente no vetor escolhido, obtendo um novo resíduo. O vetor do dicionário determinado em cada iteração é aquele onde o resíduo tem norma  $\ell_2$  menor, i.e, é aquele que mais reduz o erro da aproximação de  $y$ . Com efeito, como

$$R_i = R_{i-1} - \langle R_{i-1}, u_{n_i} \rangle u_{n_i},$$

temos que

$$\|R_i\|^2 = \|R_{i-1}\|^2 - \|\langle R_{i-1}, u_{n_i} \rangle\|^2 \geq 0,$$

donde o menor resíduo é obtido quando se escolhe a maior projecção.

Se o dicionário for uma base ortonormada, a aproximação  $y_k$  é uma representação ótima do sinal. Para outro qualquer dicionário, pode mostrar-se que a norma do resíduo converge para zero [35].

A Figura (3.3) ilustra o algoritmo Matching Pursuit para  $y \in \mathbb{R}^2$  com um dicionário composto apenas pelos vetores,  $u_1$  e  $u_2$ . Considera-se para vetor resíduo inicial o próprio  $y$ ,  $R_0 = y$  e 0 para aproximação inicial de  $y$ ,  $y_0 = 0$ . Faz-se a projecção de  $R_0$  nos dois vetores  $u_1$  e  $u_2$  e escolhe-se o maior vetor, neste caso  $\overrightarrow{OP_1}$ , com a direcção do vetor  $u_2$ . O resíduo seguinte,  $R_1$  é obtido retirando ao resíduo anterior esta componente,  $R_1 = R_0 - \overrightarrow{OP_1}$  (claro que  $R_1 \perp u_2$ ) e o vetor aproximado seguinte,  $y_1$ , é obtido somando à aproximação inicial esta componente, sendo neste caso  $y_1 = \overrightarrow{OP_1}$ . De seguida procede-se de igual forma com o vetor  $R_1$  e assim sucessivamente até que o critério de paragem seja satisfeito. Como se pode verificar os vetores resíduos estão a aproximar-se de zero, enquanto que os vetores  $y_i$  se estão a aproximar do vetor  $y$ . Os coeficientes  $s_i$  são obtidos a partir das projecções nos vetores de ordem  $i$ . Como são apenas dois vectores, há mais do que uma projecção em cada vector, sendo portanto o coeficiente de cada um dos vectores do dicionário, dado pela soma algébrica das várias projecções consideradas sobre esse vector.

### ***Orthogonal Matching Pursuit***

Vamos apresentar duas abordagens do algoritmo:

- O OMP é inicializado da mesma maneira que o MP e em cada iteração é escolhido um novo vector do dicionário da mesma forma. No algoritmo MP, depois de escolhido o vector no dicionário onde a projecção é maior, retira-se essa componente do vector  $y$ . Se a retirarmos também de cada um dos restantes vectores do dicionário antes de repetir o processo, considerando agora o dicionário sem esse vector, temos uma das versões do OMP [25].

#### **Algoritmo OMP – versão 1:**

Os vetores  $u_n$  podem, neste caso, ser não normalizados

Considera-se o conjunto  $T = \{1, \dots, N\}$ , sendo  $N$  o número de vetores do dicionário  $D$ .

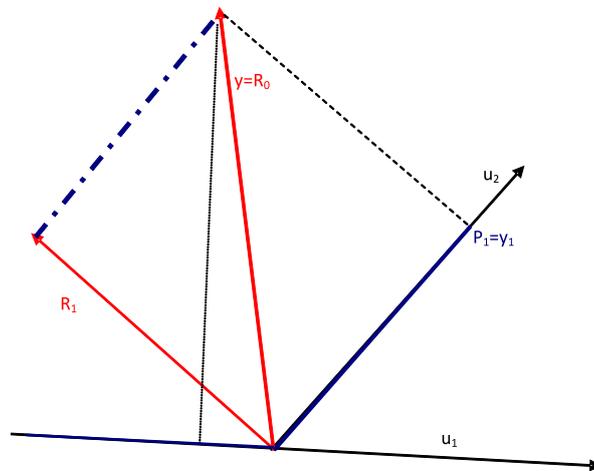
Fixam-se os valores iniciais:  $R_0 = y$  e  $y_0 = 0$ .

Considera-se  $i = 0$ .

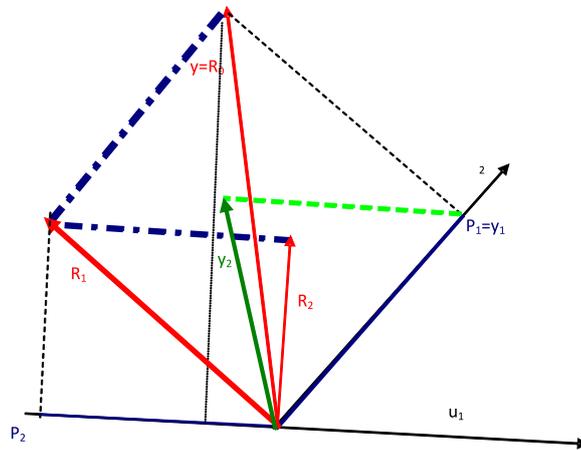
Enquanto  $\|R_i\| > \delta$ , ( $\delta > 0$ ), executam-se os passos:

1.  $i = i + 1$ ;
2. Normalizam-se todos os vetores do dicionário:  $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$ ;
3. Encontra-se o  $n_i$  a partir dos produtos internos do resíduo com cada um dos vetores  $v_n, n \in T$ :

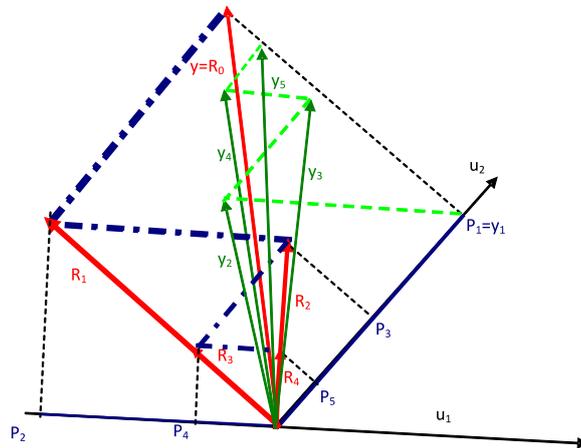
$$n_i = \arg \max_n \langle R_{i-1}, v_n \rangle ;$$



(a) Primeira iteração do Matching Pursuit



(b) Duas primeiras iterações do Matching Pursuit



(c) Várias iterações

Figura 3.3: Esquema que ilustra o algoritmo Matching Pursuit

4. Retira-se ao conjunto  $T$  o índice obtido:  $T = T \setminus \{n_i\}$ ;
5.  $R_i = R_{i-1} - \langle R_{i-1}, v_{n_i} \rangle v_{n_i}$ ;
6. Para  $n \in T$ :
  - (a)  $r_{i,n} = \langle v_n, v_{n_i} \rangle$ ;
  - (b)  $v_n = v_n - r_{i,n} v_{n_i}$ ;
7.  $U = [u_{n_1}, \dots, u_{n_i}]$ .

Temos que  $s = (U^T U)^{-1} U^T y$ .

- Outra abordagem diferente desta, consiste em cada iteração do MP adicionar uma minimização dos mínimos quadrados para obter uma melhor aproximação sobre os vectores do dicionário que já foram escolhidos. Nesta abordagem parte-se de um conjunto vazio de vectores que vai aumentando com os vectores do dicionário escolhidos [19, 26, 36]:

#### Algoritmo OMP – versão 2:

Fixam-se os valores iniciais:  $R_0 = y$  e  $T_0 = \emptyset$ .

Considera-se  $i = 0$ .

Enquanto  $\|R_i\| > \delta$ , ( $\delta > 0$ ), executam-se os passos:

1.  $i = i + 1$
2. Encontra-se o  $n_i$  a partir dos produtos internos do resíduo com cada um dos vectores de  $D$ :

$$n_i = \arg \max_n \langle R_{i-1}, u_n \rangle ;$$

3. Tem-se:  $T_i = T_{i-1} \cup \{n_i\}$  e  $A_i = [A_{i-1} u_{n_i}]$ , sendo  $A_0$  a matriz nula e  $u_i$  a coluna da matriz  $A$  na posição  $i$ ,
4. Calcula-se uma aproximação do sinal  $s_i$ , minimizante de

$$\|y - A_i s\|_2$$

5. Calcula-se a nova aproximação de  $y$  e do resíduo:

$$y_i = A_i s_i$$

$$R_i = y - y_i$$

O OMP nunca escolhe o mesmo vetor do dicionário duas vezes, porque o resíduo é ortogonal aos vectores que já foram escolhidos. Em consequência, o resíduo deve ser igual a zero após  $K$  iterações.

Na procura exaustiva da solução do problema ( $P_0$ ) :  $\min \|s\|_0 : y = As$ , onde  $A$  é uma matriz de dimensão  $M \times N$ , para encontrar uma solução com esparsidade  $K$  fazem-se  $O(N^K M K^2)$  flops,

enquanto que, quando se utilizam algumas versões do OMP, são necessárias apenas  $O(KMN)$  flops [19].

### ***Basis Pursuit***

O BP utiliza o critério de minimização da norma  $\ell_1$  dos coeficientes. Procura de entre as muitas soluções do sistema  $y = As$  aquela cujos coeficientes têm norma  $\ell_1$  mínima, i.e.

$$\min \|s\|_1 : y = As. \quad (3.8)$$

### **Programação Linear – PL**

Um problema de programação linear é um problema definido em termos de uma variável  $x \in \mathbb{R}^N$ , da forma

$$\min c^T x + d : Ax = b, Gx \leq h, x \geq 0,$$

sendo  $c^T x + d$  a função objetivo e  $Ax = b, A \in \mathbb{R}^{M \times N}, Gx \leq h, G \in \mathbb{R}^{P \times N}$  e  $x \geq 0$  o conjunto das restrições [31].

O problema dado por (3.8) pode ser reformulado num problema de programação linear da seguinte forma [30]:

Introduzem-se duas variáveis  $s^+$  e  $s^-$ , definidas por  $s_i^+ = \max\{s_i, 0\}$ ,  $s_i^- = \max\{-s_i, 0\}$ , donde  $s$  pode ser recuperado através de  $s = s^+ - s^-$ . As variáveis  $s^+$  e  $s^-$  são não negativas e devem satisfazer  $s_i^+ s_i^- = 0, \forall i$ . O problema

$$\min \|s\|_1 : y = As$$

pode então escrever-se na forma:

$$\min 1^T \begin{bmatrix} s^+ \\ s^- \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} A & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^+ \\ s^- \end{bmatrix} = y, \begin{bmatrix} s^+ \\ s^- \end{bmatrix} \geq 0,$$

sendo este problema facilmente resolvido utilizando um método de programação linear. A equivalência da norma  $\ell_1$  mínima com PL é conhecida desde 1950 [29].

### **Second-order cone Programming – SOCP**

Um problema de SOCP é um problema definido em termos de uma variável  $x \in \mathbb{R}^N$ , da forma

$$\min f^T x : \|A_i x + b_i\|_2 \leq c_i^T x + d_i, i = 1, \dots, M, Fx = g$$

sendo  $f^T x$  a função objetivo e  $\|A_i x + b_i\|_2 \leq c_i^T x + d_i, A_i \in \mathbb{R}^{N_i \times N}, Fx = g, F \in \mathbb{R}^{P \times N}$  o

conjunto das restrições.

O problema (3.8) pode ser reformulado num problema SOCP da seguinte forma [30]:

Em primeiro lugar podemos escrever o problema na forma equivalente

$$\min t : y = As, \|s\|_1 \leq t, t \in \mathbb{R}.$$

Considerando

$$t = \sum_{i=1}^N t_i, t_i \in \mathbb{R},$$

podemos escrever

$$\|s\|_1 = \sum_{i=1}^N \left\| \begin{bmatrix} \Re(s_i) \\ \Im(s_i) \end{bmatrix} \right\|_2 \leq \mathbb{1} t = \mathbb{1} [t_1 \dots t_N]^T = t,$$

onde  $\mathbb{1}$  representa a matriz unitária.

Assim, (3.8) pode escrever-se

$$\min \mathbb{1} t : y = As, \left\| \begin{bmatrix} \Re(s_i) \\ \Im(s_i) \end{bmatrix} \right\|_2 \leq t_i, \forall i.$$

Podemos agora transformar o problema no SOCP

$$\min \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} t_1 \\ \Re(s_1) \\ \Im(s_1) \\ \vdots \\ t_N \\ \Re(s_N) \\ \Im(s_N) \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \Re(y) \\ \Im(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \Re(A_1) & \Im(A_1) \\ -\Im(A_1) & \Re(A_1) \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ \Re(A_N) & \Im(A_N) \\ -\Im(A_N) & \Re(A_N) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} t_1 \\ \Re(s_1) \\ \Im(s_1) \\ \vdots \\ t_N \\ \Re(s_N) \\ \Im(s_N) \end{bmatrix}, \left\| \begin{bmatrix} \Re(s_i) \\ \Im(s_i) \end{bmatrix} \right\|_2 \leq t_i.$$

Obviamente precisamos que as soluções obtidas pela resolução dos problemas (P0) e (P1) coincidam, o que realmente acontece em certas condições [28, 37, 38].

Antes de verificar em que condições podemos garantir que as soluções de (P0) e (P1) são a mesma, temos de saber se podemos e como, garantir que a solução do problema (P0) existe e é única, uma vez que não é garantido de imediato. Depois disso temos ainda de garantir que os algoritmos vistos, GA e o BP conseguem encontrar a solução esparsa.

### 3.2.3 Condições para a reconstrução do sinal

Vamos ver em que condições podemos garantir que o problema (P0) tem solução.

Sabemos que, na resolução de um sistema  $y = As$ , onde a matriz  $A$  tem dimensão  $N \times N$ , se as colunas da matriz forem ortonormadas, o problema é de mais fácil resolução. Temos que uma solução aproximada é  $\tilde{s} = A^T y$ , uma vez que  $A^T A = I$ .

Sabemos também que um sistema de equações lineares  $y = As$ , onde uma pequena alteração num coeficiente do vetor, leva a uma grande alteração no resultado, é mal condicionado. Uma forma de ver os efeitos destas pequenas perturbações é analisando o número associado ao sistema, conhecido como número de condição. Pode verificar-se que a sensibilidade da solução do sistema a uma perturbação  $\delta A$  em  $A$ , está diretamente relacionada com o número de condição da matriz  $A$ ,  $\kappa(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$ . Um sistema é bem condicionado se o número de condição da matriz <sup>2</sup> for pequeno e próximo de 1.

Por outro lado, partindo da desigualdade de Wielandt's,  $|\langle Ax, Ay \rangle| \leq \cos \theta \|Ax\| \|Ay\|$ , para quaisquer pares de vetores  $x, y$  ortonormais e definindo o ângulo  $\theta$  do 1º quadrante através de  $\kappa(A) = \cot[\frac{\theta(A)}{2}]$ , podemos concluir que o número de condição de uma matriz será tão próximo de 1 quanto mais a matriz transformar vectores ortonormais entre si em vectores também ortonormais [39]. Isto porque a quantidade  $\frac{|\langle Ax, Ay \rangle|}{\|Ax\| \|Ay\|}$ , que nos dá o cosseno do menor ângulo entre os vetores  $Ax$  e  $Ay$ , nos garante que esse ângulo é no mínimo  $\theta$ , donde  $\theta$  é o menor ângulo entre  $Ax$  e  $Ay$  para  $x$  e  $y$  dois quaisquer vetores ortonormais.

Ora se a matriz  $A$  for singular, a imagem de dois vetores ortonormais vão ser dois vectores paralelos, como podemos observar pela Figura (3.4), sendo neste caso  $\theta = 0$ , donde o número de condição é  $\kappa(A) = \cot(0)$ .

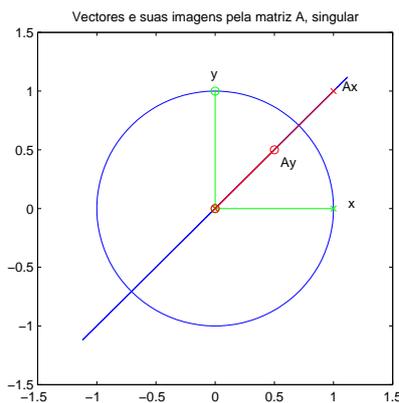


Figura 3.4: Ilustra a imagem dos vetores  $x = (0, 1)$  e  $y = (1, 0)$  pela matriz singular  $A = [1, 0.5; 1, 0.5]$ .

<sup>2</sup>O número de condição de uma matriz  $A$  é definido por:  $\kappa(A) = \begin{cases} \|A^{-1}\| \|A\| & \text{se } A \text{ é não singular} \\ \infty & \text{se } A \text{ é singular} \end{cases}$

Se em vez disso a matriz  $A$  for unitária, como preserva os ângulos, transforma vetores ortogonais em vetores ortogonais, sendo portanto o número de condição  $\kappa(A) = \cot(\pi/4) = 1$ .

Voltando agora ao nosso problema (P0), podemos, pelo que foi dito, concluir que, para que (P0) tenha solução, o ideal é que a matriz  $\Phi$ , ou melhor, uma submatriz desta, formada por no máximo  $K$  colunas, seja quase ortonormada.

Há dois valores a partir dos quais conseguimos garantir unicidade da solução esparsa do sistema indeterminado  $y = \Phi s$ , ou seja, a solução de (P0): **O Spark**, definido por Donoho e Elad em [40] e a **Coerência Mútua**, que aparece em várias referências para a matriz  $\Phi$  dada pela concatenação de duas bases ortonormais [24, 28, 37, 40], mas que se pode definir para uma qualquer matriz  $\Phi$ .

Vamos ver estas definições para uma matriz  $\Phi$  qualquer [19]:

**Definição 14** *O Spark de uma matriz  $\Phi$ , é o menor número de colunas que são linearmente dependentes.*

e

**Definição 15** *A Coerência Mútua de uma matriz  $\Phi$ , é o maior produto interno, normalizado, entre as diferentes colunas de  $\Phi$ , i.e.,*

$$\mu(\Phi) = \max_{1 \leq i, j \leq N, i \neq j} \frac{|\phi_i^T \phi_j|}{\|\phi_i\|_2 \cdot \|\phi_j\|_2}.$$

Este valor permite-nos saber a posição relativa entre quaisquer duas colunas da matriz  $\Phi$ . Quanto mais pequeno for o valor da Coerência Mútua, mais «ortogonais» são os vectores. Obviamente  $0 \leq \mu(\Phi) \leq 1$ . Se  $\mu(\Phi) = 1$ , então na matriz  $\Phi$  existem duas colunas iguais ou paralelas. Se a matriz  $\Phi$  for unitária, então teremos  $\mu(\Phi) = 0$ . O valor da Coerência Mútua pode obter-se, calculando a maior entrada da matriz  $\Phi^T \Phi$ , depois de retirados os valores da diagonal principal.

Se a matriz  $\Phi$  for formada pela concatenação de duas bases ortonormadas, temos que  $\frac{1}{\sqrt{N}} \leq \mu(\Phi) \leq 1$ , sendo o valor  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  obtido por exemplo, quando a matriz  $\Phi$  é formada pela concatenação das bases ortogonais: *Spikes* e *Sinusoides Complexas*. Também se as matrizes forem aleatórias ortogonais, conseguimos obter um valor máximo igual a  $2\sqrt{\frac{\log(N)}{N}}$  [28]<sup>3</sup>.

**Teorema 1** *Unicidade através do Spark: Se um sistema  $y = \Phi s$  tem uma solução  $s$  tal que  $\|s\|_0 < \frac{\text{spark}(\Phi)}{2}$ , esta solução é a mais esparsa possível.*

**Teorema 2** *Unicidade através da Coerência Mútua: Se um sistema  $y = \Phi s$  tem uma solução  $s$  tal que  $\|s\|_0 < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\mu(\Phi)}\right)$ , esta solução é a mais esparsa possível.*

<sup>3</sup>No caso da matriz  $\Phi$  ser formada pela concatenação de 2 bases ortogonais, basta calcular os produtos internos dos vectores de uma das bases com os vectores da outra, pois entre os vectores de cada uma das bases sabemos já que dá zero e nós estamos interessados no máximo valor.

A partir deste teorema podemos concluir que, quanto mais pequeno for o valor da Coerência Mútua, isto é, quanto mais ortogonais sejam as colunas da matriz, melhor, pois conseguimos garantir a unicidade de soluções esparsas para sinais com menor esparsidade. Sempre que o valor seja pequeno, dizemos que as colunas são incoerentes.

Atendendo ao Lema:

**Lema 1** *Para uma qualquer matriz  $\Phi$ , verifica-se que*

$$\text{spark}(\Phi) \geq 1 + \frac{1}{\mu(\Phi)}$$

podemos verificar que o Teorema 1 nos dá um melhor resultado que o do Teorema 2, uma vez que este usa um limite inferior ao primeiro, no entanto o valor da Coerência Mútua é muito mais fácil de calcular que o *Spark*.

Estes dois teoremas também garantem que a solução, se existir nas condições exigidas, é uma solução global de (P0), pois garante que é a mais esparsa possível.

O teorema seguinte mostra que, para matrizes  $\Phi$  com colunas incoerentes, se (P0) tiver uma solução suficientemente esparsa, a solução é única e igual para os dois problemas (P0) e (P1) [19].

**Teorema 3** *Equivalência entre (P0) e (P1): Se um sistema  $y = \Phi s$  tem uma solução  $s$  tal que  $\|s\|_0 < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\mu(\Phi)}\right)$ , esta solução é a única solução de (P1) e a única solução de (P0).*

Todos estes teoremas foram, inicialmente, provados para o caso particular da matriz  $\Phi$  ser formada por vetores de duas bases ortonormais, tendo o problema surgido da necessidade de se ter uma boa representação de um sinal.

Um sinal "*complexo*" tem muitas características diferentes, que por vezes tornam difícil a sua representação numa única base. Isto levou a que houvesse interesse em representar os sinais em dicionários redundantes - conjunto formado por vetores de várias bases, em número superior ao necessário para gerar o espaço do sinal. Exemplos destes dicionários são: wavelets, wavelet packets, cosine packets, wilson bases, chirplets, warped bases [28, 34, 37]. Cada dicionário deve ser escolhido de forma a permitir uma boa representação do sinal em causa. O sinal é então aproximado por uma combinação linear de alguns elementos do dicionário, aos quais alguns autores chamam de átomos, que melhor o expliquem. Uma vez que os dicionários redundantes são em geral mais "ricos", podem permitir a representação de sinais utilizando menos coeficientes.

Uma das razões da larga utilização destes dicionários é permitir uma representação esparsa do sinal em estudo, i.e., para um dado sinal  $x$  e um dicionário  $D$ , encontrar o vetor esparsa  $s$  que é solução do sistema indeterminado  $x = Ds$ .

Exemplos de dicionários redundantes são:

- DFT sobreamostrada

A matriz,  $N \times N$ , da Transformada Discreta de Fourier, é uma matriz ortonormada onde cada coluna é dada por

$$a_k(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-2\pi i K t / N}, \quad t \geq 0, \quad K \leq N - 1.$$

Sinais dados pela soma de sinusóides, em que as frequências são múltiplas da frequência fundamental, têm uma representação esparsa nessa base. Na prática, no entanto, o que acontece, é que os sinais não são em geral *tão bem comportados* e para conseguirmos representar esses sinais de forma mais esparsa, considera-se uma matriz, a partir da matriz da DFT usual, onde as colunas têm frequências com intervalos mais pequenos.

- Dicionário *time-frequency*

A matriz é obtida pela concatenação da matriz identidade e da matriz de Fourier.

Já vimos algumas condições que a matriz  $\Phi$  tem de verificar para que (P0) e (P1) tenham solução e estas sejam equivalentes, mas ainda nada foi dito acerca de qual a dimensão que deve ter a matriz  $\Phi$  e que tipo de matriz tem de ser, para ter as colunas incoerentes.

O número de amostras, mesmo que adaptadas ao sinal  $K$ -esparso [36], têm de ser no mínimo igual à esparsidade do sinal.

Se tivermos,  $N$  amostras, mesmo que independentes do sinal são sempre suficientes. O que não é óbvio é saber se menos do que  $N$  amostras permitem recuperar o sinal.

Candès e Tao [41] introduziram posteriormente o conceito de *Restrictedly almost orthonormal system*, como sendo uma coleção de vetores onde uma combinação linear esparsa de alguns deles, se comportam como um sistema quase ortonormal. A partir deste conceito, mostraram que é possível reconstruir exatamente, a única solução esparsa do sistema indeterminado  $y = \Phi s$ .

Os autores definiram *K-Restricted isometry constants (RIC)*:

**Definição 16** *Seja  $\Phi$  a matriz  $M \times N$ , e sejam  $\Phi_T$ ,  $T \subset \{1, \dots, N\}$ , submatrizes de dimensão  $M \times |T|$  da matriz  $\Phi$ , obtidas apenas com as colunas correspondentes aos índices em  $T$ . Para cada inteiro  $K = 1, \dots, N$  define-se  $K$ -RIC,  $\delta_K$ , como sendo o menor valor tal que  $\Phi_T$  verifica*

$$(1 - \delta_K) \|s\|^2 \leq \|\Phi_T s\|^2 \leq (1 + \delta_K) \|s\|^2 \quad (3.9)$$

*para todos os subconjuntos  $T \subset N$ , com  $|T| \leq K$  e para todos os coeficientes reais  $(s_j)_{j \in T}$ .*

Definiram também *K, K'-restricted orthogonality constants (ROC)* através de:

**Definição 17** Define-se  $K, K'$ -ROC,  $\Theta_{K, K'}$ , para  $K + K' \leq N$ , como sendo o menor valor tal que

$$|\langle \Phi_T s, \Phi_{T'} s' \rangle| \leq \Theta_{K, K'} \|s\| \|s'\| \quad (3.10)$$

se verifica para todos os conjuntos disjuntos  $T, T' \subseteq N$ , com  $|T| \leq K$  e  $|T'| \leq K'$ .

A desigualdade (3.9) pode escrever-se na forma

$$(1 - \delta_K) \leq \frac{\|\Phi_T s\|^2}{\|s\|^2} \leq (1 + \delta_K)$$

ou se  $\|s\|^2 = 1$ ,

$$(1 - \delta_K) \leq \|\Phi_T s\|^2 \leq (1 + \delta_K).$$

Vamos analisar geometricamente a desigualdade (3.9), considerando, sem perda de generalidade, que  $s$  é um vetor de  $\mathbb{R}^2$  com norma 1.

Partindo desta última desigualdade, temos que, se  $\delta_K = 0$ ,  $\|\Phi_T s\|^2 = 1$ . Geometricamente, temos que qualquer submatriz da matriz  $\Phi$ , com no máximo  $K$  colunas, transforma um vetor  $s$  contido numa bola de raio 1, num vetor contido na mesma bola, i.e. transforma um vetor unitário noutra unitário. Assim, a submatriz  $\Phi_T$  tem colunas normadas.

Se  $\delta_K > 0$ , a imagem do vetor  $s$  está numa coroa circular situada entre as circunferências de raio  $(1 - \delta_K)$  e  $(1 + \delta_K)$ , como mostra na Figura 3.5. Quanto mais pequeno for o valor de  $\delta_K$ , mais o comprimento dos vetores é preservado.

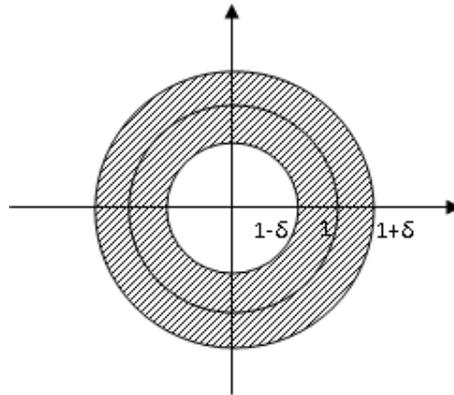


Figura 3.5: Localização dos vetores imagem dos vetores unitários pela matriz  $\Phi_T$

Assim, o  $\delta$  menor possível para o qual a matriz verifica a desigualdade da Definição 16, garante que  $\Phi$  preserva, ou quase, os comprimentos dos vetores  $K$ -esparcos.

A situação ideal é que o valor de  $\delta_K$  seja o mais próximo de zero possível, para que o sistema seja normado.

Note-se que  $\delta_K$ , sendo o menor valor que verifica a desigualdade para todas as submatrizes com no máximo  $K$  colunas, é o maior valor de entre os encontrados para cada submatriz.

A desigualdade (3.10) pode escrever-se na forma

$$\frac{|\langle \Phi_T s, \Phi_{T'} s' \rangle|}{\|s\| \|s'\|} \leq \Theta_{K,K'},$$

que nos dá o ângulo entre os subespaços gerados por, no máximo,  $K$  e  $K'$  colunas, respetivamente, da matriz  $\Phi$ , i.e., o ângulo entre os subespaços de dimensão  $K$  e  $K'$ , sendo o conjunto das colunas que geram cada um dos subespaços, disjunto.

Se tivermos  $\Theta_{K,K'} = 0$ , temos que  $\langle \Phi_T s, \Phi_{T'} s' \rangle = 0$ , de onde podemos dizer que qualquer vetor do espaço gerado por  $|T|$  colunas da matriz é ortogonal a qualquer vetor do espaço gerado por  $|T'|$  colunas, sendo portanto os dois subespaços ortogonais. Nestas condições o conjunto formado pelas  $|T| + |T'|$  colunas da matriz é linearmente independente.

Logo, para recuperar qualquer sinal  $K$ -esparso temos de ter no mínimo  $2K$  colunas a comportarem-se como um sistema quase ortogonal.

Sendo assim, e para que o conjunto destes vetores seja o mais ortogonal possível, o valor de  $\Theta_{K,K'}$ , deve ser o mais possível próximo de zero.

Assim, o  $\Theta_{K,K'}$  menor possível, para o qual qualquer conjunto com no máximo  $K + K'$  vetores coluna da matriz  $\Phi$  verifica a desigualdade da Definição 17, garante que este conjunto de vetores de  $\Phi$  se comporta como um conjunto quase ortogonal.

Os valores  $\delta_K$  e  $\Theta_K$  medem o quanto os  $K$  vetores coluna da matriz se comportam como um sistema ortonormal [41]. As constantes devem ser o mais possível próximas de zero, para que o sistema melhor se comporte como um sistema quase ortonormal, sendo nessas condições possível inverter o sistema e encontrar uma solução de uma forma mais estável. Sendo computacionalmente difícil de verificar a desigualdade (3.9), pode não ser fácil dar um exemplo de uma boa matriz de amostragem [15].

Podemos utilizar outra abordagem que nos permite concluir que  $\delta_K$  deve ser o mais próximo possível de zero para que o sistema se comporte como um sistema quase ortonormal.

Como já vimos antes, o ideal é que qualquer submatriz da matriz  $\Phi$  com no máximo  $K$  colunas, seja quase ortonormada, para que o sistema seja bem condicionado, ou o que é o mesmo, que a matriz  $\Phi_T^H \Phi_T$  seja quase igual à matriz identidade, sendo  $|T| \leq K$ .

Sabe-se que:

Para qualquer matriz  $A$ , a matriz  $A^H A$  é Hermitiana.

Se  $A$  é uma matriz Hermitiana de dimensão  $n$ , então  $s^H A s$  é real, para qualquer vetor  $s$  de tamanho  $n$ , sendo todos os valores próprios de  $A$  também reais.

Além disso, temos [39]:

**Teorema 4 (Rayleigh-Ritz):** *Seja  $A$  uma matriz Hermitina de dimensão  $n$  e sejam os valores próprios de  $A$ , ordenados:*

$$\lambda_{\min} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_n = \lambda_{\max}.$$

Então,

$$\lambda_1 s^H s \leq s^H A s \leq \lambda_n s^H s, \forall s \in \mathbb{C}^N$$

ou

$$\lambda_1 \|s\|^2 \leq s^H A s \leq \lambda_n \|s\|^2, \forall s \in \mathbb{C}^N$$

A demonstração deste teorema baseia-se em exprimir  $A = U \Lambda U^H$ , sendo  $U$  uma matriz unitária  $U$ .

Temos, para qualquer  $s \in \mathbb{C}^N$ ,

$$\begin{aligned} s^H A s &= s^H U \Lambda U^H s = (U^H s)^H \Lambda (U^H s) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i |(U^H s)_i|^2 \end{aligned}$$

e logo

$$\lambda_{\min} \sum_{i=1}^n |(U^H s)_i|^2 \leq s^H A s = \sum_{i=1}^n \lambda_i |(U^H s)_i|^2 \leq \lambda_{\max} \sum_{i=1}^n |(U^H s)_i|^2.$$

Como  $U$  é unitária, temos que  $\sum_{i=1}^n |(U^H s)_i|^2 = \sum_{i=1}^n |s_i|^2 = s^H s$ , pois preserva a norma. Então,

$$\lambda_1 s^H s = \lambda_{\min} s^H s \leq s^H A s \leq \lambda_{\max} s^H s = \lambda_n s^H s.$$

A desigualdade do teorema anterior pode escrever-se da forma:

$$\lambda_1 \leq \frac{s^H A s}{s^H s} \leq \lambda_n$$

Como a desigualdade da Definição 16 se pode escrever na forma

$$(1 - \delta_K) \leq \frac{s^H \Phi_T^H \Phi_T s}{s^H s} \leq (1 + \delta_K)$$

podemos dizer que ela impõe que a matriz  $\Phi_T^H \Phi_T$  tenha valores próprios entre  $1 - \delta_K$  e  $1 + \delta_K$ . Como o ideal é que a matriz  $\Phi_T^H \Phi_T$  seja próxima da identidade, o ideal é que os valores  $1 - \delta_K$  e  $1 + \delta_K$  sejam quase iguais a 1, ou seja que  $\delta_K \approx 0$ , como já tínhamos visto antes.

O teorema seguinte, apresentado por Candès e Tao [41],

**Teorema 5** *Temos que  $\Theta_{K,K'} \leq \delta_{K+K'} \leq \Theta_{K,K'} + \max(\delta_K, \delta_{K'}), \forall K, K'$*

dá-nos o controlo do tamanho do ângulo entre os subespaços de dimensão  $K$  e  $K'$ , a partir do valor de  $\delta_{K+K'}$ , o que nos vai permitir a reconstrução exata do sinal a partir do conhecimento de apenas  $\delta$ .

De modo análogo ao visto com a Coerência Mútua, também podemos garantir a unicidade da solução esparsa do sistema  $y = \Phi s$ , a partir do valor  $\delta_K$  [41]:

**Teorema 6** *Suponhamos que  $K \geq 1$  é tal que  $\delta_{2K} < 1$  e seja  $T \subset N$ , com  $|T| \leq K$ . Seja  $y = \Phi_T s$  para um qualquer vetor  $s$  de dimensão  $|T|$ . Então o conjunto  $T$  e os coeficientes  $(s_i)_{i \in T}$  podem ser reconstruídos de forma única a partir de  $y$  e dos vectores  $\phi_i$ , vetores colunas da matriz  $\Phi$ .*

**Demonstração 1** *Vamos provar que existe um único  $s$  que verifica  $y = \sum_i s_i \phi_i$ ,  $\|s\|_0 \leq K$ , por contradição.*

*Suponhamos que  $y$  se escreve como combinação linear esparsa de duas formas distintas, i.e., que*

$$y = \sum_{i=1}^{|T|} s_i \phi_i = \sum_{i=1}^{|T'|} s'_i \phi'_i,$$

*sendo  $\phi'_i$ ,  $T'$  colunas da matriz  $\Phi$  e diferentes das  $T'$  colunas  $\phi_i$  também de  $\Phi$ , com  $|T| \leq K$  e  $|T'| \leq K$ .*

*Então para o vetor  $v = s_i \mathbb{1}_{i \in T} - s'_i \mathbb{1}_{i \in T'}$ <sup>4</sup>, temos que  $\Phi_{(T \cup T')} v = 0$ , tendo o vetor  $v$  tamanho  $|T| + |T'| \leq 2K$ .*

*Utilizando a desigualdade (3.9), podemos escrever*

$$(1 - \delta_{2K}) \|v\|^2 \leq \|\Phi_{(T \cup T')} v\|^2 \leq (1 + \delta_{2K}) \|v\|^2$$

*Como  $\Phi_{(T \cup T')} v = 0$ , temos que*

$$(1 - \delta_{2K}) \|v\|^2 \leq 0 \leq (1 + \delta_{2K}) \|v\|^2.$$

*Sendo  $\delta_{2K} < 1$ , obrigatoriamente  $\|v\|^2 = 0$ , sendo portanto cada um dos coeficientes de  $v$  iguais a zero, o que contraria a hipótese de  $y$  ter duas representações distintas, uma vez que o que temos é que  $y = 0$ . ■*

Dizemos que uma matriz  $\Phi$  é RIP (possui a propriedade *Restricted isometry property*) se existir uma constante  $\delta_K$ , com  $0 \leq \delta_K < 1 - \epsilon$ , para um  $\epsilon > 0$ , que verifica a desigualdade (3.9).

<sup>4</sup>Por exemplo se  $y = s_1 \phi_1 + s_2 \phi_2 = s_3 \phi_3 - s_4 \phi_4 + s_5 \phi_5$  então temos que  $s_1 \phi_1 + s_2 \phi_2 - s_3 \phi_3 + s_4 \phi_4 - s_5 \phi_5 = 0$  e podemos dizer que  $v = [s_1; s_2; -s_3; s_4; -s_5]$  em que os dois primeiros índices pertencem a  $T$  e os segundos a  $T'$ .

Quando uma matriz é RIP de ordem  $K$ , sabemos que a matriz  $\Phi$  quase preserva as normas dos vetores  $K$ -esparcos, não podendo portanto estes vectores estar no núcleo de  $\Phi$ ,  $\mathcal{N}(\Phi)$ , pois se assim fosse, a sua imagem seria nula, o que contrariava a preservação da norma, não podendo então obter-se a solução.

Se uma matriz é RIP de ordem  $K$ , também sabemos que qualquer conjunto de  $K$  vetores se comporta como um conjunto quase ortogonal.

Então, podemos concluir que se uma matriz  $\Phi$  é RIP de ordem  $K$ , o sistema  $y = \Phi s$  tem solução.

Atendendo aos Teoremas 5 e 6, podemos dizer que se  $\delta_{2K} < 1$ , então também  $\Theta_{K,K} < 1$ , logo podemos dizer que as  $2K$  colunas da matriz  $\Phi$  formam um conjunto não singular, permitindo assim recuperar, de forma única, qualquer sinal  $K$ -esparso, a partir da resolução do sistema indeterminado  $y = \Phi s$ .

Se o sistema for quase ortornormado, ou melhor se a matriz  $\Phi$  é RIP, o sistema indeterminado  $y = \Phi s$  pode resolver-se conforme enunciado no problema (P1), mesmo que todos os vetores coluna da matriz formem um conjunto linearmente dependente [41, 42, 43].

Em seguida vamos ver várias condições, utilizando os valores de  $\delta$  e de  $\Theta$  e seus sucessivos melhoramentos, que garantem que qualquer conjunto com um certo número de colunas da matriz  $\Phi$  se comporta como um sistema quase ortornormado.

O teorema seguinte, proposto por Candès e Tao [41], garante a unicidade da solução:

**Teorema 7** *Suponhamos que  $K \geq 1$  é tal que*

$$\delta_K + \Theta_{K,K} + \Theta_{K,2K} < 1, \quad (3.11)$$

*e que  $y = \Phi_T s$  para um qualquer vetor  $s$  de dimensão  $|T|$ , com  $T \subset N$  e  $|T| \leq K$ . Então o vetor  $s$  é a solução única do problema (P1).*

Porque

$$\delta_K + \Theta_{K,K} + \Theta_{K,2K} \leq \delta_K + \delta_{2K} + \delta_{3K},$$

podemos reduzir o problema ao cálculo dos valores  $\delta$  e então podemos garantir que a solução única,  $K$ -esparsa, do sistema é encontrada através da resolução do problema (P1) se se verifica a desigualdade mais fraca [42]

$$\delta_K + \delta_{2K} + \delta_{3K} < 1.$$

Este teorema foi posteriormente melhorado pelos mesmos autores [44], considerando a condição mais fraca,  $\delta_{2K} + \Theta_{K,2K} < 1$ , no caso particular do sinal não ter ruído.

O teorema seguinte, proposto por Candès, [43], permite-nos determinar a qualidade da reconstrução de um sinal, esparso ou não, dado o majorante  $\sqrt{2} - 1$  para  $\delta_{2K}$ .

**Teorema 8** Considere-se  $\delta_{2k} < \sqrt{2} - 1 \approx 0.4142$ . A solução  $s^*$ , obtida pela resolução do problema de minimização da norma  $\ell_1$ , (P1), para o sistema  $y = \Phi s$ , verifica:

$$\|s^* - s\|_1 \leq C \|s - s_K\|_1$$

e

$$\|s^* - s\|_2 \leq C K^{-\frac{1}{2}} \|s - s_K\|_1,$$

onde a constante é dada por  $C = 2 \frac{1 - \delta_{2K} + \sqrt{2}\delta_{2K}}{1 - \delta_{2k} - \sqrt{2}\delta_{2K}}$  e onde  $s_K$  é a melhor aproximação que se pode obter se soubermos as posições e as amplitudes exatas dos  $K$  maiores coeficientes de  $s$ .

Em particular, se  $s$  for  $K$ -esparso, a solução encontrada é exata.

O Teorema 8 garante que se a RIC verifica  $\delta_{2k} < \sqrt{2} - 1$  e no caso de o sinal ser  $K$ -esparso, a solução encontrada pela resolução de (P1) é exata.

Por outro lado, se  $\delta_{2k} < \sqrt{2} - 1$ , então  $\delta_{2k} < 1$  e logo, pelo Teorema 6, (P0) tem solução única, i.e, qualquer solução esparsa é única. Logo nas condições do Teorema 8, as soluções obtidas pela resolução de (P0) e (P1) são equivalentes [43].

Este teorema melhora um resultado de DeVore e outros [18], onde se garantia que a solução do problema (P1) é a mais esparsa na condição de  $\delta_{2k} < \frac{1}{3}$ .

Cai e outros mostraram que a condição  $\delta_{2k} < \sqrt{2} - 1$  é mais forte que a condição  $\delta_{2K} + \Theta_{K,2K} < 1$  obtida por Candès e Tao, assim como esta última é mais forte que a condição  $\delta_{1.75K} + \Theta_{K,1.75K} < 1$  [45].

O resultado do Teorema 8, foi posteriormente melhorado por Foucart e Lai, [46]:

**Teorema 9** Considere-se  $\delta_{2k} < \frac{2}{3+\sqrt{2}} \approx 0.4531$ . A solução  $s^*$ , obtida pela resolução do problema de minimização da norma  $\ell_1$ , (P1), para o sistema  $y = \Phi s$ , é a solução esparsa.

O Teorema 7 foi melhorado por Cai e outros, [45]:

**Teorema 10** Suponhamos que  $K \geq 1$  é tal que

$$\delta_{1.5K} + \Theta_{K,1.5K} < 1, \quad (3.12)$$

e que  $y = \Phi_T s$  para um qualquer vetor  $s$  de dimensão  $|T|$ , com  $T \subset N$  e  $|T| \leq K$ . Então o valor  $s^*$ , que minimiza o problema (P1), verifica:

$$\|s^* - s\|_2 \leq C K^{-\frac{1}{2}} \|s_{-\max(K)}\|_1,$$

sendo  $s_{-\max(K)} = s - s_{\max(K)}$  o vetor  $s$  com as  $K$  maiores entradas, em valor absoluto, iguais a zero, para uma constante  $C = \frac{2\sqrt{2}(1 - \delta_{1.5K})}{1 - \delta_{1.5K} - \Theta_{K,1.5K}}$ .

Em particular, se  $s$  for  $K$ -esparso, a solução encontrada é exata.

A condição do Teorema 10 é também mais fraca do que a condição  $\delta_{2K} + \Theta_{K,2K} < 1$ .

Tendo em atenção o Teorema 5, também podemos garantir que a solução  $K$ -esparsa é única se  $\delta_{1.5K} + \delta_{2.5K} < 1$ .

Cai e outros encontraram ainda uma condição mais fraca,  $\delta_{1.75K} < \sqrt{2} - 1$ , uma vez que ela implica que  $\delta_{1.5K} + \Theta_{K,1.5K} < 1$  [45].

A desigualdade e o teorema seguintes foram utilizados por Cai e outros, [47], na apresentação de condições RIP mais fracas.

**Lema 2 (Shifting Inequality)** *Sejam  $q$  e  $r$  dois números inteiros positivos tais que  $q \leq 3r$ . Então qualquer sequência não crescente de números reais*

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_r \geq b_1 \geq \dots \geq b_q \geq c_1 \geq \dots \geq c_r \geq 0$$

verifica

$$\sqrt{\sum_{i=1}^q b_i^2 + \sum_{i=1}^r c_i^2} \leq \frac{\sum_{i=1}^r a_i + \sum_{i=1}^q b_i}{\sqrt{q+r}}.$$

De forma equivalente, qualquer sequência não crescente de números reais

$$b_1 \geq \dots \geq b_q \geq 0$$

verifica

$$\sqrt{\sum_{i=1}^q b_i^2 + r b_q^2} \leq \frac{r b_1 + \sum_{i=1}^q b_i}{\sqrt{q+r}}.$$

**Teorema 11** *Suponhamos que  $s$  é  $K$ -esparso e que a condição*

$$\delta_{K+a} + \sqrt{\frac{K}{b}} \Theta_{K+a,b} < 1 \tag{3.13}$$

se verifica para alguns números inteiros e positivos  $a$  e  $b$  tais que  $a < b \leq 4a$ . Então a solução do problema (P1) é exata.

Temos ainda que se a condição 3.13 se verifica, então

$$\|s^* - s\|_2 \leq \frac{1 - \delta_{K+a} + \Theta_{K+a,b}}{1 - \delta_{K+a} - \sqrt{\frac{K}{b}} \Theta_{K+a,b}} \frac{2}{\sqrt{b}} \|s_{-\max(K)}\|_1,$$

sendo  $s^*$  a solução do problema (P1).

A possibilidade da escolha dos valores de  $a$  e  $b$  na condição , permite obter condições para as matrizes a utilizar no CS.

O caso particular de  $b = K$  e  $a = \frac{K}{4}$  permite-nos dizer que a condição  $\delta_{1.25K} + \Theta_{K,1.25K} < 1$  também garante que o problema (P1) recupera  $s$ ,  $K$ -esparso, exatamente. Esta condição é mais fraca do que as vistas anteriormente [47].

Lai [48] e Foucart [49] mostraram ainda que com as condições  $\delta_{2k} < \frac{2}{2 + \sqrt{5}} \approx 0.4721$ ,  $\delta_{2k} < \frac{3}{4 + \sqrt{6}} \approx 0.4652$  e  $\delta_{2k} < \frac{4}{6 + \sqrt{6}} \approx 0.4734$  a reconstrução com o problema (P1) é exata.

Cai e outros [45] mostraram que se  $\delta_{1.75k} < \sqrt{2} - 1 \approx 0.4142$ , com  $1.75K$  um número inteiro, a solução do problema (P1) é a solução esparsa. Foi ainda verificado que se  $\delta_{1.625k} < \sqrt{2} - 1 \approx 0.4142$ , com  $1.625K$  inteiro, se  $\delta_{3k} < 2(2 - \sqrt{3}) \approx 0.535$  e se  $\delta_{4k} < 2 - \sqrt{2} \approx 0.585$ , (P1) reconstrói a solução esparsa, exatamente.

Houve ainda posteriores melhoramentos [48], tendo-se provado que para valores de  $\delta_{2K} < \frac{1}{2}$  a solução do problema (P1) ainda é exata.

É possível estabelecer uma relação entre as constantes RIP e o valor da Coerência Mútua [45]:

**Teorema 12** *Seja  $\mu(\Phi)$  o valor da Coerência Mútua da matriz  $\Phi$ . Então  $\delta_K \leq (K - 1)\mu(\Phi)$  e  $\Theta_{K,K'} \leq \sqrt{KK'}\mu(\Phi)$ .*

Vimos então duas formas diferentes de garantir que um sistema indeterminado  $y = \Phi s$  tem solução esparsa única.

Coloca-se agora a questão: que matrizes escolher para que se verifiquem as condições enunciadas?

Em [36] são dadas respostas parciais a esta pergunta.

Verificar se uma matriz é RIP é um problema combinatório, mas sabe-se que em particular, as matrizes  $\Phi$  seguintes, sujeitas à condição  $M \geq C K \log(N/K)$ , sendo  $C$  uma constante, são RIP com probabilidade elevada [5]:

1. Obtidas amostrando aleatoriamente e uniformemente  $N$  vetores de uma esfera unitária de  $\mathbb{R}^M$ ;
2. Onde cada entrada é obtida independentemente da distribuição  $\mathcal{N}(0, \frac{1}{M})$ ;
3. Obtidas amostrando uma projeção aleatória  $P$  como uma *amostragem incoerente* e normalizando:  $\Phi = \sqrt{\frac{N}{M}} \times P$ ;
4. Onde cada entrada é obtida de forma independente de uma distribuição simétrica de Bernoulli ( $P(\Phi_{i,j} = \pm \frac{1}{\sqrt{M}}) = \frac{1}{2}$ ) ou de uma outra qualquer distribuição sub-Gaussiana;

A probabilidade de estas matrizes não serem RIP quando se verifica a condição

$$M \geq C K \log(N/K), \quad (3.14)$$

é exponencialmente pequena em  $M$ .

Uma matriz em que as linhas são obtidas aleatoriamente a partir da matriz de Fourier também é RIP com grande probabilidade, para  $M$  na ordem de  $K(\log N)^4$  [50].

Em conclusão, podemos dizer que sinais  $s$ ,  $K$ -esparsos ou compressíveis, podem ser recuperados através da resolução do sistema indeterminado  $y = \Phi s$ , quer por (P0), quer por (P1) a partir de apenas  $M \geq C K \log(N/K)$  amostras aleatórias obtidas a partir de matrizes do tipo das mencionadas.

Nas Figuras 3.6, 3.7 e 3.8 apresentamos resultados da reconstrução de um sinal de tamanho  $N = 1024$ , 16-esparsos. Realizámos 5000 experiências independentes para cada valor de  $M$  do conjunto

$$[35 : 130, 140 : 10 : 480, 481 : 500],$$

tendo-se registado o número de sucessos ocorridos e o erro de reconstrução. Considerámos com sucesso uma reconstrução onde o erro standard normalizado é inferior a  $1 \times 10^{-8}$ . Em qualquer um dos gráfico vê-se que existe um valor de  $M$  a partir do qual se consegue reconstruir o sinal. A partir de  $M = 115$  conseguimos reconstruir o sinal com probabilidade de mais de 99%.

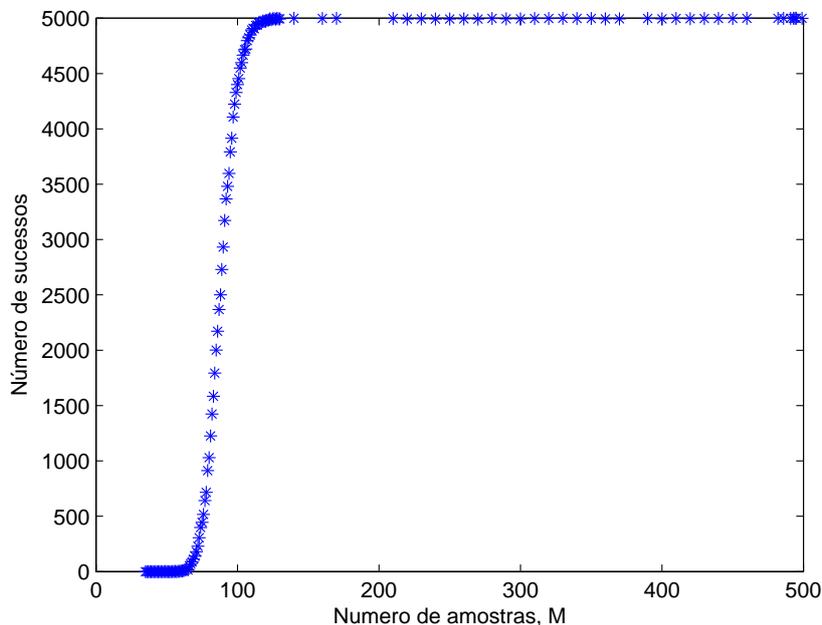


Figura 3.6: Relação entre o número de sucessos e o número de amostras  $M$ , considerado.

O teorema seguinte mostra que matrizes com entradas Gaussianas independente e identicamente distribuídas são adequadas para reconstruir um sinal, sendo que estas e as matrizes com entradas de

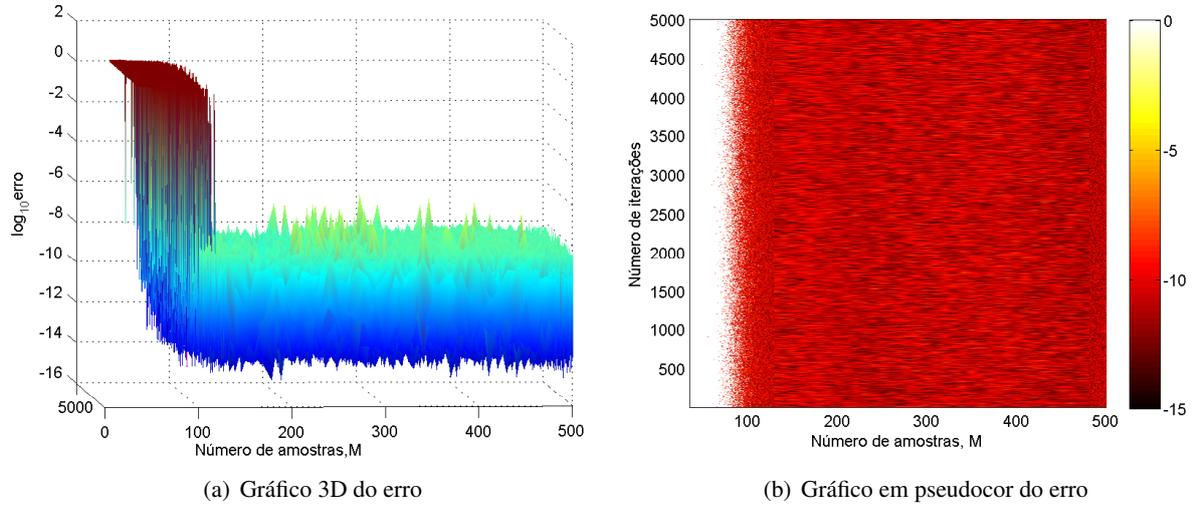


Figura 3.7: Valores dos erros obtidos para cada uma das  $M$  amostras, em cada uma das 5000 iterações.

Bernoulli, são as mais adequadas [36]:

**Teorema 13** *Seja  $M \geq C K \ln(N/K)$ . Considerem-se  $M$  vetores em  $\mathbb{R}^N$  independentes a partir da distribuição Gaussiana Standard,  $\Phi_i, i = 1..M$ . Com probabilidade superior a  $1 - e^{-CM}$  é possível reconstruir qualquer sinal  $s$ ,  $K$ -esparso, a partir das  $M$  amostras  $y_i = \langle s, \Phi_i \rangle$ .*

Também se consegue reconstruir o sinal a partir de algumas amostras utilizando o Orthogonal Matching Pursuit (OMP)[36]:

**Teorema 14** *Considere-se  $\delta \in [0, 0.36]$  e seja  $M \geq C K \ln(N/\delta)$ . Suponhamos que  $s$  é um qualquer sinal  $K$ -esparso em  $\mathbb{R}^N$ . Considerem-se  $M$  vetores em  $\mathbb{R}^N$  independentes a partir da distribuição Gaussiana Standard,  $\Phi_i, 1 \leq i \leq M$ . Considerando as  $M$  amostras  $y_i = \langle s, \Phi_i \rangle$ , o OMP consegue reconstruir o sinal, com probabilidade  $\geq 1 - 2\delta$ . A constante verifica  $C \leq 20$ . Para valores grandes de  $K$  pode ser reduzida para  $C \approx 4$ .*

Os Greedy Algoritmos (GA) utilizam mais amostras que o Basis Pursuit (BP) para reconstruir o sinal [17]. Os Teoremas 13 e 14 mostram que o número de amostras aumenta linearmente com  $K$  no caso do OMP, enquanto no BP aumenta de forma logarítmica.

A Figura 3.9 ilustra o que acabámos de dizer, no caso dos algoritmos OMP e BP. Neste caso a constante  $C$  que verifica a desigualdade  $M \geq C K \log(N/K)$  é aproximadamente 1.8 para o BP e aproximadamente 2.2 para o OMP.

Utilizando para matrizes de amostragem, matrizes Gaussianas ou de Bernoulli, o BP recupera, com alta probabilidade, todos os sinais esparsos, a partir de um único conjunto de vetores de medida, enquanto que o OMP recupera cada sinal a partir de medidas aleatórias com grande probabilidade, mas tem grande probabilidade de falhar na recuperação de todos os sinais [36].

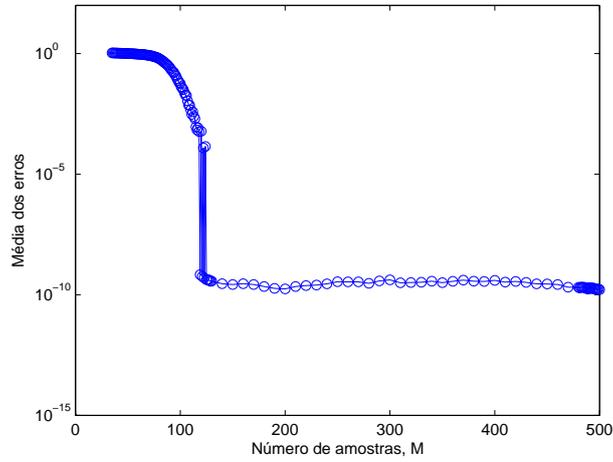


Figura 3.8: Médias dos erros de reconstrução para cada uma das  $M$  amostras.

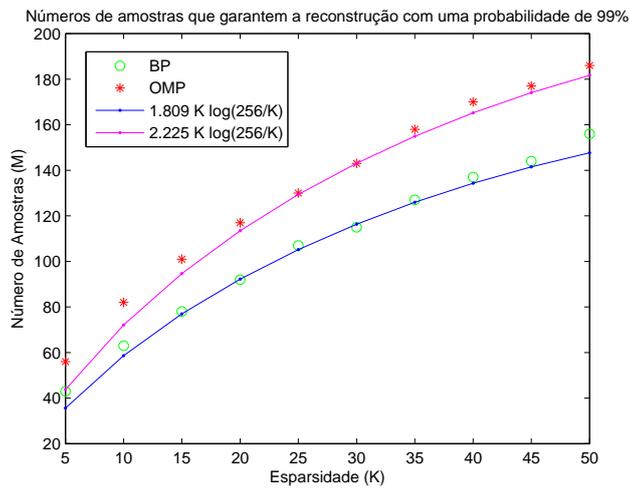


Figura 3.9: Número de amostras necessárias para recuperar um sinal de tamanho 256, esparsos numa base aleatória, em pelo menos 99% das vezes.

O OMP converge com um número finito de iterações, exatamente tantas quantas a esparsidade do sinal, conforme mostrou Tropp e Gilbert [36]:

**Teorema 15** *Considere-se um qualquer sinal  $K$ -esparsos,  $s$ , em  $\mathbb{R}^N$  e seja  $M \geq 2K$ . Suponhamos que a matriz de medição  $\Phi$ ,  $M \times N$  tem elementos independentes a partir da distribuição Gaussiana. Utilizando o OMP para resolver o sistema  $y = \Phi s$ , se o resíduo  $R_K$ , obtido após a realização de  $K$  iterações do algoritmo, for zero, o OMP identificou corretamente o sinal  $s$ . Se não for zero, então o OMP falhou.*

Se os vetores de medição forem obtidos a partir de uma distribuição de Bernoulli, temos resultados idênticos, com probabilidade a tender exponencialmente para 1.

O BP consegue reconstruir bem o sinal, a partir de um número pequeno de amostras, sem que seja obrigatório conhecer a esparsidade do sinal e a localização das componentes não nulas. Tem um bom desempenho mas uma complexidade computacional elevada. O OMP é um algoritmo com menos complexidade, mais rápido e mais simples de implementar do que o BP, sendo uma alternativa na resolução de problemas de reconstrução, principalmente quando os sinais são bastante esparsos. Quando os sinais são pouco esparsos, a escolha do OMP pode não ser tão favorável, pois o custo da ortogonalização do dicionário aumenta de forma quadrática com o número de iterações [36, 51, 52].

Vamos agora estudar o problema da reconstrução de um sinal, considerando a existência de ruído.

### 3.3 Reconstrução de sinais com ruído

Suponhamos que temos  $M$  amostras  $y_i$  da forma  $y_i = \phi_i s + z_i$ ,  $1 \leq i \leq M$ , sendo  $\phi_i$  as linhas da matriz  $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$ , com  $M < N$ , e  $z \in \mathbb{R}^M$  o vetor ruído. Pretendemos reconstruir o sinal  $s$ ,  $K$ -esparso, através da resolução do sistema indeterminado  $y = \Phi s + z$ , com  $\|z\|_2 \leq \epsilon$ .

Tal como no caso onde não há ruído, podemos utilizar os GA e o BP para reconstruir o sinal, sendo que, também agora, a minimização da norma  $\ell_1$  é um bom princípio.

Utilizando a minimização da norma  $\ell_1$  temos dois métodos para reconstruir o sinal. Um, chamado de selector de Dantzig, que não apresentamos, foi proposto por Candès e Tao em [44, 45]. O outro, a seguir apresentado, utiliza um problema de otimização.

No nosso estudo vamos considerar ruído branco Gaussiano. Quando temos ruído, não conseguimos obter um bom resultado resolvendo o problema (P1) :  $\min \|s\|_1 : y = \Phi s$ , principalmente quando o desvio padrão do erro,  $\sigma$ , for elevado. No gráfico da Figura 3.10, apresentamos os resultados da reconstrução de um sinal de tamanho  $N = 1024$ , 6-esparso, utilizando  $M = 60$  amostras, para o caso onde não há ruído e para dois casos em que há ruído, ambos com média zero e com desvio padrão,  $\sigma$ , igual a 0.01 e a 0.2. Na situação onde não há ruído o erro obtido é da ordem de  $10^{-14}$ . Nos casos onde há ruído, o erro obtido é da ordem de  $10^{-2}$  e 0.82 respetivamente.

Podemos ultrapassar este problema utilizando uma regularização. Podemos definir um problema de otimização, substituindo na equação (3.4) a norma  $\ell_2$  de  $s$  pela sua norma  $\ell_1$ , minimizando então a função convexa

$$J(s) = \|y - \Phi s\|_2^2 + \lambda \|s\|_1.$$

Pretendemos obter o valor de  $s$  que torne  $\Phi s$  mais próximo de  $y$  tendo em conta as condições conhecidas *a priori* de  $s$  que é ser esparso. Como não é possível minimizar simultaneamente estas duas medidas, consideramos um compromisso entre elas, sendo  $\lambda$  o parâmetro de equilíbrio entre as duas.

As soluções são funções do parâmetro  $\lambda$ . Escrevendo  $y = \Phi s^{(\lambda)} + \text{resíduo}^{(\lambda)}$ , podemos ver que

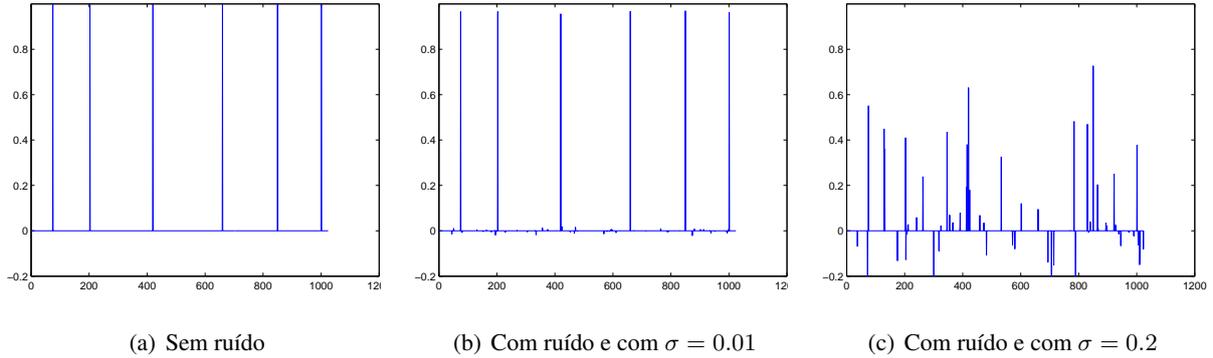


Figura 3.10: Comparação da reconstrução de um sinal com 6 frequências, com e sem ruído.

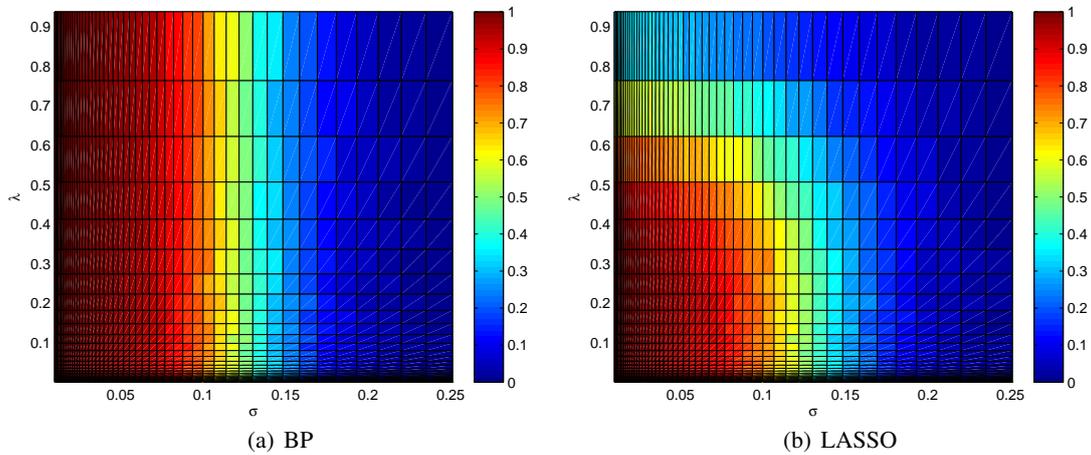


Figura 3.11: Probabilidades dos valores encontrados para as frequências coincidirem com os valores originais, para cada valor do parâmetro  $\lambda$  e para cada valor do desvio padrão,  $\sigma$  considerado, utilizando o BP e utilizando o LASSO.

quando o  $\lambda \rightarrow 0$ , o resíduo também tende para zero, sendo portanto a solução idêntica à que se obtém utilizando o BP diretamente, e quando o  $\lambda \rightarrow \infty$ , o resíduo é grande, resíduo  $\rightarrow y$  e  $s \rightarrow 0$ , sendo neste caso favorecida portanto a esparsidade [29].

Este problema de minimização é conhecido, na literatura estatística, por LASSO - Least Absolute Selection and Shrinkage Operator [53, 5, 45].

Não é fácil encontrar um bom valor para  $\lambda$ . A Figura 3.11 mostra a probabilidade de as frequências do sinal reconstruído  $\hat{s}$  e as frequências do sinal 6-esparso original, estarem nas mesmas posições. Realizaram-se 1000 iterações para cada valor de lambda/desvio padrão, com os algoritmos BP e LASSO [54], considerando  $M = 60$  amostras.

Não se identifica um valor de  $\lambda$  em função de  $\sigma$  para o qual a probabilidade de acertar nas 6 posições, utilizando o LASSO, seja máxima. Com o BP, que obviamente não depende de  $\lambda$ , a proba-

bilidade de acertar em todas as posições é, a partir de certo valor de  $\sigma$ , muito pequena. O mesmo se passa com o LASSO. Com este algoritmo, também para valores grandes de  $\lambda$  a probabilidade de acertar é pequena, o que era expectável atendendo ao aumento da esparsidade. Para valores grandes de  $\lambda$  a esparsidade do sinal reconstruído pode ser zero não acertando portanto em nenhuma posição.

A Figura 3.12 mostra o gráfico anterior mas focando-nos apenas nos valores onde a probabilidade de acertar nas 6 posições é maior que 95%. Podemos verificar que para valores de  $\sigma$  maiores que cerca de 0.06 a probabilidade de acertar em todas as posições é pequena, para ambos os algoritmos.

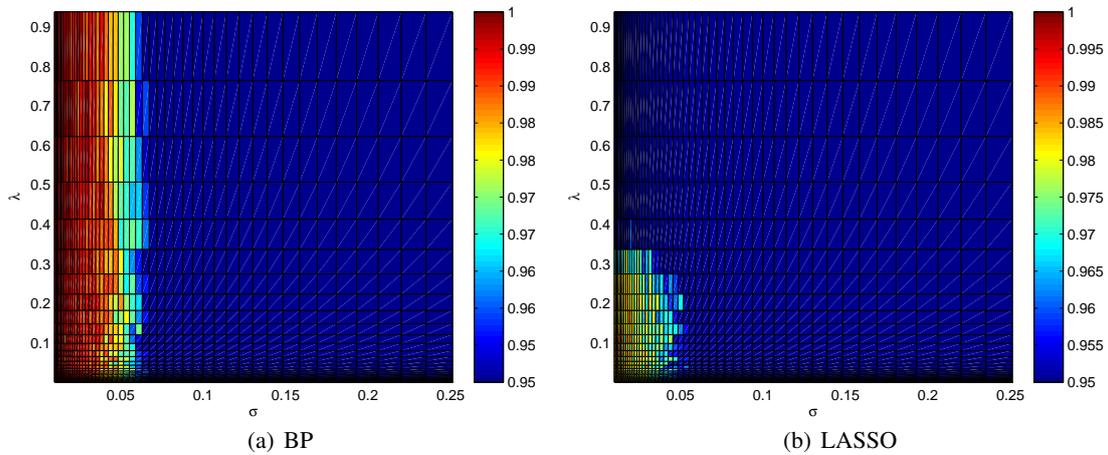


Figura 3.12: Gráfico onde se evidencia os valores de  $\lambda$  e  $\sigma$  onde a probabilidade dos 6 valores encontrados para as frequências coincidirem com os valores originais é superior a 95%, utilizando o BP e utilizando o LASSO.

A questão que se levanta agora é: será que há alguma valor de  $\lambda$  que faça com que os resultados obtidos na reconstrução com o algoritmo LASSO sejam melhores que os resultados obtidos com o BP, para os casos em que ambos os algoritmos acertam nas posições das  $K$  frequências?

Considerando como base o valor  $\lambda = \sigma\sqrt{2\log N}$  utilizado por Chen e outros em [29], fizemos algumas experiências, cujos resultados se apresentam na tabelas 3.1 e 3.2.

Considerámos um sinal com esparsidade 6, de tamanho  $N = 1024$  e com todas as frequência de amplitude 1. Utilizámos  $M = 60$  amostras e fizemos 5000 experiências para vários valores do desvio padrão  $\sigma$  e para 5 valores de  $\lambda$ :  $\lambda_1 = \sigma\sqrt{2\log N} - 2\sigma$ ,  $\lambda_2 = \sigma\sqrt{2\log N} - \sigma$ ,  $\lambda_3 = \sigma\sqrt{2\log N}$ ,  $\lambda_4 = \sigma\sqrt{2\log N} + \sigma$ ,  $\lambda_5 = \sigma\sqrt{2\log N} + 2\sigma$ , utilizando o BP e o LASSO. Calculámos o erro normalizado de cada um dos sinais reconstruídos  $\hat{s}$  e calculámos depois o erro normalizado considerando apenas os seis maiores valores do sinal reconstruído  $\hat{s}_6$  que estão nas posições corretas. Na tabela só considerámos, para cada valor de  $\sigma$  e de  $\lambda$ , os valores médios dos erros das experiências onde foram encontradas as 6 posições corretas para ambos os algoritmos.

A segunda coluna da Tabela 3.1 indica, para cada valor de  $\sigma$  e de  $\lambda$ , a probabilidade dos sinais reconstruídos com o BP e com o LASSO terem ambos os 6 maiores valores nas posições corretas

	P. acertar nas frequências						$\frac{\ s - \hat{s}\ }{\ s\ }$					$\frac{\ s_6 - \hat{s}_6\ }{\ s_6\ }$				
$\sigma$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	método	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
0.2	0.0254	0.0250	0.0240	0.0130	0.0094	BP	0.5715	0.5795	0.5756	0.5908	0.5678	0.3748	0.3819	0.3746	0.3831	0.3509
						LASSO	0.5049	0.5053	0.5161	0.5780	0.5997	0.4460	0.4437	0.4830	0.5621	0.5919
0.15	0.1948	0.1196	0.1804	0.1414	0.1030	BP	0.5211	0.5198	0.5189	0.5090	0.4976	0.3783	0.3783	0.3759	0.3637	0.3489
						LASSO	0.4757	0.4745	0.4870	0.5277	0.5592	0.4301	0.4298	0.4573	0.5127	0.5514
0.1	0.6524	0.6680	0.6658	0.6092	0.5248	BP	0.4314	0.4287	0.4293	0.4214	0.4118	0.3387	0.3356	0.3364	0.3281	0.3178
						LASSO	0.4124	0.4098	0.4193	0.4488	0.4846	0.3822	0.3796	0.3957	0.4348	0.4757
0.08	0.8266	0.8366	0.8318	0.8100	0.7550	BP	0.3706	0.3701	0.3715	0.3677	0.3613	0.2965	0.2958	0.2973	0.2932	0.2866
						LASSO	0.3625	0.3622	0.3696	0.3975	0.4326	0.3380	0.3379	0.3495	0.3844	0.4236
0.05	0.9534	0.9554	0.9462	0.9524	0.9434	BP	0.2490	0.2504	0.2505	0.2490	0.2495	0.2021	0.2034	0.2038	0.2022	0.2028
						LASSO	0.2518	0.2528	0.2580	0.2748	0.3053	0.2364	0.2374	0.2448	0.2654	0.2982
0.025	0.9762	0.9820	0.9770	0.9782	0.9792	BP	0.1291	0.1286	0.1287	0.1290	0.1289	0.1056	0.1050	0.1052	0.1055	0.1053
						LASSO	0.1373	0.1364	0.1389	0.1473	0.1612	0.1295	0.1287	0.1322	0.1424	0.1573
0.01	0.9850	0.9846	0.9846	0.9812	0.9852	BP	0.0520	0.0517	0.0519	0.0521	0.0519	0.0425	0.0423	0.0425	0.0427	0.0424
						LASSO	0.0587	0.0580	0.0593	0.0628	0.0675	0.0555	0.0548	0.0566	0.0607	0.0659
0.005	0.9816	0.9856	0.9846	0.9842	0.9840	BP	0.0262	0.0261	0.0259	0.0263	0.0258	0.0215	0.0214	0.0212	0.0215	0.0211
						LASSO	0.0301	0.0311	0.0306	0.0329	0.0346	0.0285	0.0296	0.0292	0.0318	0.0338

Tabela 3.1: Desempenho dos algoritmos BP e o LASSO (ver texto).

$\sigma$	método	esparsidade				
		$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
0.2	BP	55.9291	56.1040	56.0750	55.9538	56.4043
	LASSO	27.4016	27.0400	19.3167	13.2769	9.2979
0.15	BP	54.9877	55.0651	55.0554	55.0368	54.8447
	LASSO	27.1119	26.9549	21.1641	14.3989	10.5767
0.1	BP	53.2063	53.2299	53.1929	53.2203	53.1273
	LASSO	26.0368	25.9716	22.5665	16.5666	12.8239
0.08	BP	51.8587	51.8962	51.8605	51.8314	51.8215
	LASSO	25.3165	25.2003	22.5783	17.2249	13.8419
0.05	BP	47.8137	47.9087	47.8410	47.8841	47.8773
	LASSO	23.1458	23.0505	21.1230	17.1144	14.5298
0.025	BP	38.3247	38.3613	38.3548	38.3151	38.3685
	LASSO	18.5423	18.4705	17.2393	14.7091	12.9428
0.01	BP	20.1068	20.0565	20.0973	20.0911	20.1119
	LASSO	11.0288	10.9998	10.5876	9.8479	9.2940
0.005	BP	9.1400	9.1264	9.0806	9.1778	9.0366
	LASSO	7.1942	7.2474	7.1326	7.1288	6.9801

Tabela 3.2: Valores médios da esparsidade utilizando os algoritmos BP e o LASSO.

das frequências. Verifica-se que a probabilidade de acertar nas 6 posições diminui com o aumento do valor de  $\sigma$ , como já era sabido.

Nos casos em que a probabilidade de acertar nas 6 posições é inferior a cerca de 97%, utilizando o LASSO, obtemos um erro standard normalizado menor para valores de  $\lambda$  até  $\sigma\sqrt{2\log N}$ , sendo no entanto o erro normalizado considerando apenas os valores encontrados nas 6 posições corretas, sempre superior.

Assim, no caso em os sinais reconstruídos por ambos os algoritmos têm os 6 maiores valores nas posições corretas das frequências, apesar do erro de reconstrução do sinal poder ser menor com o LASSO, as amplitudes das frequências nessas posições, são mais próximas das exatas utilizando o BP.

Portanto, sendo o nosso objetivo reconstruir um sinal esparso, com a mesma esparsidade e posições das frequências do sinal inicial, o BP dá-nos resultados melhores que o LASSO.

Na Figura 3.13 podemos ver um caso particular das posições das frequências encontradas com ambos os algoritmos.

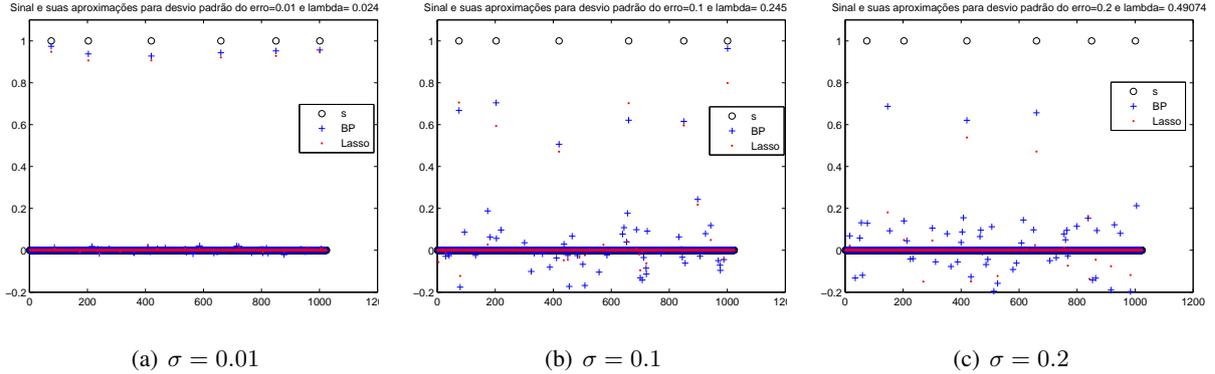


Figura 3.13: Frequências encontradas com os algoritmos BP e LASSO em comparação com as posições exatas das frequências.

O LASSO é um problema de otimização convexo, em termos de  $s$ , mas não é continuamente diferenciável. Não conseguimos então obter uma fórmula para a solução.

É possível resolver este problema de minimização, utilizando uma expressão equivalente, mas agora minimizando a norma  $\ell_1$  com o constrangimento da norma  $\ell_2$  [45]:

$$(P'1) \min \|s\|_1 : \|y - \Phi s\|_2 \leq \epsilon, \quad (3.15)$$

Como a função objetivo é convexa e o constrangimento também define um conjunto convexo, temos um problema de otimização convexo. Logo, qualquer mínimo local da função objetivo sujeita ao constrangimento é um mínimo global.

Os teoremas seguintes dão-nos duas formas de calcular um majorante do erro de reconstrução. Candès e outros utilizaram o RIP [42] e Donoho e outros, o valor da Coerência Mútua [55]:

**Teorema 16** *Seja  $K$  tal que  $\delta_{3K} + 3\delta_{4K} < 2$ . Então, para qualquer sinal  $s$  com suporte em  $T$ , com  $|T| \leq K$  e para qualquer ruído  $z$  com  $\|z\|_2 \leq \epsilon$ , a solução  $s^*$  para o problema da equação (3.15) verifica:*

$$\|s^* - s\|_2 \leq C \epsilon,$$

onde a constante é dada por  $C = \frac{4}{\sqrt{3 - 3\delta_{4K}} - \sqrt{1 + \delta_{3K}}}$ .

**Teorema 17** *Seja  $s$  um vetor  $K$ -esparso e  $y = \Phi s + z$ , com  $\|z\|_2 \leq \epsilon$ . Se  $K < \frac{1 + \mu(\Phi)}{4\mu(\Phi)}$ , então para qualquer  $\eta \geq \epsilon$ , a solução para o problema da equação (3.15) verifica:*

$$\|s^* - s\|_2 \leq C (\epsilon + \eta),$$

onde a constante é dada por  $C = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu(\Phi)(4K - 1)}}$ .

Os resultados destes dois teoremas foram melhorados por Cai e outros, pelos dois teoremas seguintes, respetivamente [45]:

**Teorema 18** *Seja  $s$  um vetor  $K$ -esparso e  $y = \Phi s + z$ , com  $\|z\|_2 \leq \epsilon$ . Se  $\delta_{1.5K} + \Theta_{K,1.5K} < 1$ , para qualquer  $\eta \geq \epsilon$ , a solução  $s^*$  para o problema da equação (3.15) verifica:*

$$\|s^* - s\|_2 \leq C (\epsilon + \eta),$$

onde a constante é dada por  $C = \frac{\sqrt{2}(1 + \delta_{1.5K})}{1 - \delta_{1.5K} - \Theta_{K,1.5K}}$ .

Com efeito, se  $\delta_{3K} + 3\delta_{4K} < 2$ , então  $\delta_{3K} + \delta_{4K} < 1$ , o que leva a que  $\delta_{2.4K} + \Theta_{1.6K,2.4K} < 1$ , uma vez que  $\delta_{2.4K} \leq \delta_{3K}$  e  $\Theta_{1.6K,2.4K} \leq \delta_{4K}$ .

Então, utilizando o resultado do Teorema 18, e fazendo  $\eta = \epsilon$  e  $K' = 1.6K$ , podemos escrever que o erro é dado por

$$\|s^* - s\|_2 \leq \frac{2\sqrt{2}(1 + \delta_{1.5K'})}{1 - \delta_{1.5K'} - \Theta_{K',1.5K'}} \epsilon,$$

para qualquer vector  $K'$ -esparso.

O resultado do Teorema 16 é melhorado, uma vez que o suporte do sinal é aumentado em 60%. O teorema passa a ser válido para qualquer sinal com 60% de esparsidade a mais.

**Teorema 19** *Seja  $s$  um vetor  $K$ -esparso e  $y = \Phi s + z$ , com  $\|z\|_2 \leq \epsilon$ . Seja  $t = K\mu(\Phi)$ . Se  $K < \frac{2 + 2\mu(\Phi)}{(3 + \sqrt{6})\mu(\Phi)}$ , então para qualquer  $\eta \geq \epsilon$ , a solução para o problema da equação (3.15) verifica:*

$$\|s^* - s\|_2 \leq C (\epsilon + \eta),$$

onde a constante é dada por  $C = \frac{\sqrt{2}(2 + 3t - 2\mu(\Phi))}{2 + 2\mu(\Phi) - (3 + \sqrt{6})t}$ .

O resultado do Teorema 17 é melhorado, pois também aqui o suporte do sinal passa a poder ser maior, visto que  $K < \frac{2 + 2\mu(\Phi)}{(3 + \sqrt{6})\mu(\Phi)} \approx 1.47 \frac{1 + \mu(\Phi)}{4\mu(\Phi)}$ . O teorema é válido para um sinal com mais 47% de esparsidade. Também o novo valor da constante é mais pequeno, donde o erro é menor.

O teorema seguinte, proposto por Candès, permite-nos determinar a qualidade da reconstrução do sinal, a partir de um majorante do valor de  $\delta_{2K}$  [43, 5].

**Teorema 20** *Considere-se  $\delta_{2k} < \sqrt{2} - 1$  e  $\|z\|_2 \leq \epsilon$ . A solução  $s^*$ , para o problema da equação (3.15) verifica:*

$$\|s^* - s\|_2 \leq C_0 K^{-\frac{1}{2}} \|s - s_K\|_1 + C_1 \epsilon,$$

onde as constantes são dadas por  $C_0 = 2 \frac{1 - \delta_{2K} + \sqrt{2}\delta_{2K}}{1 - \delta_{2k} - \sqrt{2}\delta_{2K}}$  e  $C_1 = \frac{4\sqrt{1 + \delta_{2K}}}{1 - \delta_{2k} - \sqrt{2}\delta_{2K}}$ .

Se o sinal for  $K$ -esparso, o erro é no máximo proporcional ao nível do ruído.

### 3.4 Reconstrução de sinais esparsos numa base ou num dicionário

Vimos até aqui que condições tem de verificar a matriz de amostragem  $\Phi$  para que o sistema indeterminado  $y = \Phi s$  tenha soluções esparsas únicas e quais as matrizes mais adequadas.

Suponhamos agora que temos um sinal  $x$  que é esparsos numa base ortonormada  $\Psi$ , diferente da base canónica, situação que estudámos até agora. O problema passa a ser reconstruir o sinal  $s$  que resolve a equação

$$y = \Phi x = \Phi \Psi s = \Theta s. \quad (3.16)$$

Obviamente que encontrar os coeficientes esparsos de  $x$  em relação à base  $\Psi$ , é o mesmo que encontrar os coeficientes esparsos de  $y$  relativamente a  $\Theta = \Phi \Psi$ ,  $M \times N$ , uma vez que os coeficientes de  $s$  que explicam  $x$  e  $y$  são os mesmos. Com efeito, se os coeficientes de  $x$  na base  $\Psi$  forem diferentes de zero apenas em algumas posições, também  $y$  terá como coeficientes não nulos, relativamente a  $\Theta$ , os mesmos valores e nas mesmas posições. A Figura 3.14 ilustra o problema [1].

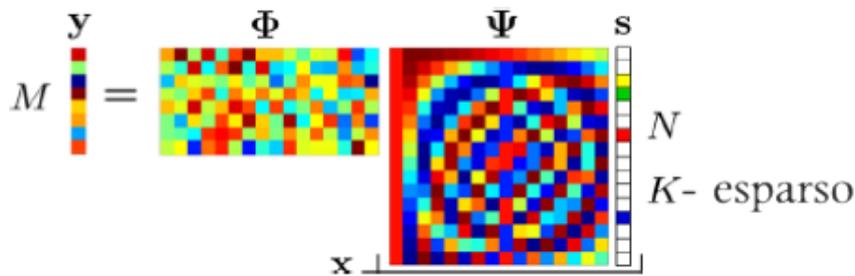


Figura 3.14: Esquema que ilustra (3.16). Fonte [1].

Temos agora uma situação diferente, a matriz é dada pelo produto de duas matrizes, a matriz de amostragem e a matriz da base,  $\Theta = \Phi \Psi$ .

As questões que agora se colocam são:

- Como construir agora a matriz de amostragem  $\Phi$ ?
- Será que podemos considerar para matrizes de amostragem as mesmas utilizadas até aqui?

Podem considerar-se duas abordagens diferentes:

- Considerando a matriz  $\Phi$  a partir de uma base ortonormal, incoerente com a base  $\Psi$ , selecionando aleatoriamente apenas  $M$  elementos independentes;
- Utilizando uma matriz  $\Phi$  tal que  $\Phi\Psi$  seja RIP.

A coerência mútua entre duas bases ortonormadas é definida por [5, 56]:

**Definição 18** Consideremos o par de bases ortonormadas  $(\Phi, \Psi)$ . A coerência mútua entre  $\Phi$  e  $\Psi$  é dada por

$$\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{N} \max_{1 \leq i, j \leq N, i \neq j} |\langle \phi_i, \psi_j \rangle|.$$

Se  $\Phi$  e  $\Psi$  tiverem elementos correlacionados, o valor da coerência mútua é grande. Sabe-se que  $1 \leq \mu(\Phi, \Psi) \leq \sqrt{N}$  [5]. Assim, a matriz de amostragem tem de ser de forma a que  $\mu(\Phi, \Psi)$  seja o mais próximo possível de 1, ou seja, que cada linha  $\phi_i$  de  $\Phi$  não se possa escrever como combinação linear esparsa das colunas  $\psi_j$  de  $\Psi$  e vice-versa [56, 5].

São conhecidos muitos pares de bases incoerentes, sendo a matriz  $\Phi$ , dada pela base canónica e a matriz  $\Psi$ , dada pela base de Fourier, um exemplo, onde  $\mu(\Phi, \Psi) = 1$ .

Também as matrizes aleatórias são muito incoerentes com qualquer base.

Se a matriz  $\Phi$  for construída aleatoriamente a partir de uma distribuição ou se for obtida amostrando aleatoriamente e uniformemente  $N$  vetores de uma esfera unitária, ela é incoerente com qualquer base  $\Psi$ , com alta probabilidade. No caso em que  $\Phi$  é obtida ortonormalizando vetores obtidos da esfera unitária, temos que  $\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{2 \log N}$  [5].

Sabe-se também que:

Se a matriz  $\Phi$  for construída aleatoriamente, em particular se for uma das matrizes enumeradas na página 66 deste trabalho e  $\Psi$  for uma base ortonormada arbitrária, a matriz  $\Theta = \Phi\Psi$  é RIP com grande probabilidade, desde que  $M \geq C K \log(N/K)$ , dependendo o valor de  $C$  da situação em estudo [5].

Uma matriz de amostragem aleatória Gaussiana  $\Phi$ ,  $M \times N$  é considerada universal [1, 5].

Assim, podemos concluir que em CS, uma boa matriz a utilizar para obter as amostras de um sinal esparsa, é a matriz aleatória.<sup>5</sup>

Vamos ver agora um teorema que nos mostra qual o número de amostras que devemos adquirir para que o problema de minimização

$$(P0) : \min \|s\|_0 : y = \Phi\Psi s$$

<sup>5</sup>Embora teoricamente a matriz aleatória seja boa, em termos práticos há limitações. Primeiro, nem sempre temos liberdade de escolha do tipo de medidas que utilizamos para obter um sinal, como é o caso da ressonância magnética (MRI), onde propriedades físicas dos núcleos são exploradas para obter as amostras no domínio de Fourier. Outra limitação é computacional. Para valores de  $M$  e  $N$  grandes, gravar ou utilizar a matriz  $\Psi$  é quase impossível (para reconstruir uma imagem com 1 megapixel,  $M=1000000$  a partir de  $M=25000$  amostras, precisamos de mais de 3 GB de memória só para gravar a matriz de amostragem) [56].

tenha solução única, tendo em conta que a matriz de amostragem tem entradas Gaussianas i.i.d., sendo portanto incoerente com qualquer outra base [17].

**Teorema 21** *Seja  $\Psi \in \mathbb{R}^N$  uma base ortonormada e seja  $1 \leq K < N$ . Temos:*

1. *Seja  $\Phi$  uma matriz de amostragem de dimensão  $M \times N$  com entradas Gaussianas i.i.d. e onde  $M \geq K + 1$ . Temos, com probabilidade 1 que qualquer sinal  $x = \Psi s$ , com  $\|s\|_0 = K$ , pode ser recuperado de modo único a partir do vector das amostras de dimensão  $M$ ,  $y = \Phi x$ , utilizando o problema de minimização  $\ell_0$ ;*
2. *Seja  $\Phi$  uma matriz de amostragem de dimensão  $M \times N$  e onde  $M \leq K$ . Então, com excepção de casos excepcionais, nenhum sinal  $x = \Psi s$ , com  $\|s\|_0 = K$ , pode ser recuperado de modo único a partir do vector das amostras de dimensão  $M$ ,  $y = \Phi x$ .*

O teorema seguinte mostra em que condições é que garantimos a existência da solução, através da resolução do problema de minimização da norma  $\ell_1$  [56].

**Teorema 22** *Seja  $x \in \mathbb{R}^N$  um sinal  $K$ -esparso na base  $\Psi$  e seja  $y \in \mathbb{R}^M$  o vector dado por  $y = \Phi x$ , sendo  $\Phi$  uma matriz aleatória. Se*

$$M \geq C\mu^2(\Phi, \Psi)K \log N$$

*para uma constante positiva  $C$ , a solução do sistema  $y = \Phi \Psi s$  através de (P1) é, com grande probabilidade, exata.*

Pode ver-se que se  $\mu(\Phi, \Psi) \approx 1$ , o número de amostras necessária é  $\mathcal{O}(K \log(N))$  em vez de  $N$ .

O número de amostras exigidas para recuperar sinais esparsos, utilizando o BP, é sempre maior ou igual ao valor da esparsidade,  $M \geq cK$ , sendo a constante  $c$  um fator de subamostragem [17].

**Teorema 23** *Seja  $K = SN$ , com  $0 < S \leq 1$ , onde  $S$  é chamado de taxa de esparsidade. Então existe um fator de subamostragem  $c(S) = \mathcal{O}(\log(1/S))$ ,  $c(S) > 1$ , tal que, para um sinal  $x$ ,  $K$ -esparso numa base  $\Psi$ , se tem:*

- *A probabilidade de reconstruir o sinal  $x$  através do BP, a partir de  $(c(S) + \epsilon)K$  amostras aleatórias,  $\epsilon > 0$ , converge para 1,  $N \rightarrow \infty$*
- *A probabilidade de reconstruir o sinal  $x$  através do BP, a partir de  $(c(S) - \epsilon)K$  amostras aleatórias,  $\epsilon > 0$ , converge para 0,  $N \rightarrow \infty$*

O fator de sobreamostragem  $c(S)$ , que depende da esparsidade e do tamanho do sinal, verifica  $c(S) \approx \log_2(1 + S^{-1})$ .

Em aplicações de CS, para que o OMP tenha sucesso com grande probabilidade,  $c \approx 2 \log(N)$  [17, 36].

Em resumo:

No CS não se obtêm ou codificam os  $K$  coeficientes diretamente, mas sim obtêm-se um número  $M < N$  amostras  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, M$ , através da projeção do sinal num conjunto de  $M$  funções  $\Phi_i \in \mathbb{R}^N$ , codificando-se depois estas amostras [17].

Se as duas bases  $\Phi$  e  $\Psi$  forem incoerentes ou se  $\Phi\Psi$  for RIP, é possível recuperar os  $K$  coeficientes e portanto o sinal  $x$ , a partir das  $M$  medidas  $y_i$ .

Se em vez da matriz  $\Psi$  ser uma base ortonormada for uma frame e o sinal se puder representar aí de forma esparsa, este pode ser recuperado da mesma forma, desde que a frame seja incoerente com o conjunto dos vectores de amostragem [17]. O que pode acontecer quando se utiliza uma frame, é que as propriedades desejadas para a matriz deixem de se verificar. Por exemplo, se a matriz de amostragem  $\Phi$  tiver entradas Gaussianas, a matriz  $\Phi\Psi$  tem linhas independentes, onde cada linha é amostrada a partir de  $\mathcal{N}(0, \Psi^*\Psi)$ . Quando  $\Psi$  é uma base ortonormada, estas entradas são variáveis normais independentes, mas se  $\Psi$  não for unitária, então as entradas vão ser correlacionadas e a matriz  $\Phi\Psi$  já não verifica as propriedades necessárias à reconstrução do sinal. Não há até agora conhecimento de nenhum resultado que garanta a reconstrução quando as colunas da matriz são correlacionadas [50].

### 3.5 Aquisição de amostras de um sinal analógico

Em processamento digital de sinal, é necessário proceder-se à conversão dos sinais analógicos para digitais. Utilizam-se sistemas ADC - conversores de analógico para digital, muitas vezes usados no contexto do teorema da amostragem de Shannon/Nyquist. Este teorema garante a reconstrução de um sinal de tempo contínuo  $x(t)$ , limitado em banda e com frequência máxima inferior a  $W/2$  hertz, desde que este seja amostrado uniformemente a uma taxa de  $W$  hertz - taxa de Nyquist. O sinal original,  $x(t)$ , consegue ser reconstruído, como função linear das amostras, através da equação

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x\left(\frac{n}{W}\right) \text{sinc}(Wt - n).$$

Esta abordagem torna-se no entanto de difícil utilização quando a largura de banda  $W$  é muito grande pois, por um lado obriga à aquisição de muitas amostras do sinal a processar, o que torna o sistema muito dispendioso, e por outro lado não é exequível construir *hardware* que amostre a tão alta frequência, tendo-se portanto problemas de resolução.

Sistemas que operam em bandas de rádio frequência têm uma largura de banda larga, o que dificulta a utilização dos ADC, mas apenas uma pequena parte da informação é útil [57]. Estes sinais, além de serem de banda limitada, são esparsos ou compressíveis no domínio de uma transformada.

O CS, que como vimos atrás, garante que um número relativamente pequeno de amostras não

adaptativas de um sinal esparso ou compressível permitem a sua reconstrução, leva ao aparecimento de uma nova teoria para *analog-to-information conversion* (AIC), em alternativa ao ADC, para aquisição das amostras deste tipo de sinais [57]. Este sistema, ilustrado na Figura 3.15, é baseado num desmodulador aleatório e numa amostragem de taxa baixa, o que a torna mais fácil de implementar do que o ADC.



Figura 3.15: Esquema que ilustra o conversor analógico - informação.

Toda a teoria do CS apresentada até agora apenas se aplica a sinais discretos, mas é possível alargar este estudo a sinais contínuos, sendo assim possível construir outro tipo de amostradores. Um sistema de amostragem possível é o desmodulador aleatório (RD) [57, 58, 59], cujo esquema se apresenta na Figura (3.16). Este sistema efectua três acções: desmodulação, filtro de passo a baixo para prevenir aliasing e uma amostragem uniforme de taxa baixa.

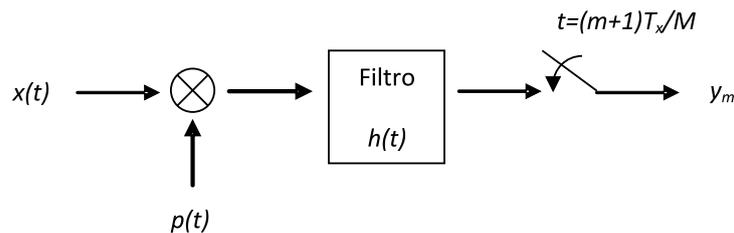


Figura 3.16: Esquema que ilustra o desmodulador aleatório.

Um sinal analógico é esparso quando se pode escrever na forma

$$x(t) = \sum_{n=1}^K \alpha_n \psi_n(t),$$

com  $t, \alpha_n \in \mathbb{R}$ , sendo  $\Psi$  um dicionário formado por funções contínuas. Apesar dos elementos do dicionário poderem ter largura de banda alta, o sinal  $x(t)$  tem poucos graus de liberdade [57].

Tropp e outros, em [58], mostraram experimentalmente que o RD, obtém informação suficiente para reconstruir o sinal, amostrando a uma taxa proporcional a  $K$ ,  $O(K \log(T_x W/K))$  Hz, em vez da taxa de  $W$  Hz necessária no sistema utilizado até agora. Os resultados obtidos teoricamente são mais fracos, pois garantem que uma taxa de amostragem de  $O(K \log(T_x W) + \log^3(T_x W))$  é suficiente para a reconstrução do sinal com grande probabilidade.

Como com este sistema, o processo de reconstrução do sinal original, a partir das amostras obtidas, é não linear, é menos vantajoso a nível computacional, mas em contrapartida, reduz o custo do hardware analógico.



## Capítulo 4

# Compressed Sensing aplicado à Análise espectral

Compressed Sensing é uma teoria recente em processamento de sinal e de imagem, que considera o facto de que muitos sinais de multimédia, tais como imagens, vídeo, som, podem ser representados como combinação linear de um número finito de sinusóides,

$$x(n) = \sum_{k=1}^K a_k e^{-j\omega_k n}, \quad -\infty < n < \infty \quad (4.1)$$

sendo  $\omega_k \in [0, 2\pi]$  as frequências das sinusóides que compõem o sinal.

Este tipo de sinais são esparsos no domínio da frequência, isto é, têm Transformada Discreta de Fourier no Tempo (DTFT) com poucos coeficientes diferentes de zero,

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^K a_k \delta(\omega - \omega_k),$$

onde  $\delta$  é a função *Dirac*, a qual, recordamos é dada por:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad (4.2)$$

e a sua inversa por

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega.$$

Para ultrapassar os obstáculos inerentes a formulações contínuas, é muitas vezes, conveniente usar a DFT.

**Definição 19** A DFT da sequência  $x(n)$ ,  $n = 0, \dots, N - 1$  e a sua inversa, IDFT, são definidos por:

$$\begin{aligned}
X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, \dots, N-1 \\
x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, \dots, N-1.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Para compreender a relação entre a DTFT e a DFT dos sinais do tipo 4.1, considere-se o seguinte produto do sinal infinito  $x(n)$ , por uma janela retangular de tamanho  $N$ ,  $w(n) = (u(n) - u(n - N))$ ,

$$x_N(n) = \sum_{k=1}^K a_k e^{-j\omega_k n} \times w(n), \quad -\infty < n < \infty.$$

A DFT é então obtida amostrando a transformada deste novo sinal  $x_N$ , a qual é dada pela convolução  $X(\omega) * W(\omega)$ , onde  $X(\omega)$  é a DTFT de  $x(n)$  e  $W(\omega)$  a transformada da janela retangular  $w(n)$ .

A transformada da janela  $w(n)$  é uma variante do núcleo de Dirichlet,

$$D_N(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = e^{-j\omega (N-1)/2} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)},$$

donde

$$X(\omega) * W(\omega) = \sum_{k=1}^K a_k \delta(\omega - \omega_k) * W(\omega) = \sum_{k=1}^K a_k D_N(\omega - \omega_k).$$

Assim, fazendo  $\omega_k = \frac{2\pi m_k}{N}$ , a DFT do sinal  $x(n)$  de tamanho  $N$  é dada por

$$X_N(m) = \sum_{k=1}^K a_k D_N\left(\frac{2\pi m}{N} - \frac{2\pi m_k}{N}\right) = \sum_{k=1}^K a_k D_N\left(\frac{2\pi(m - m_k)}{N}\right), \quad m = 0, \dots, N-1. \tag{4.4}$$

A partir das equações (4.3) verificamos que na DFT o sinal é dado pela combinação linear de exponenciais complexas, pelo que os coeficientes da DFT são números complexos.

Se pretendermos escrever um sinal real como combinação linear de cossenos, utilizamos a transformação ortogonal real, DCT, dada por:

**Definição 20** A DCT da sequência  $x(n)$ ,  $n = 0, \dots, N-1$  de tamanho  $N$  e a sua inversa, IDCT, são definidos por:

$$X(k) = \alpha(k) \times \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left(\frac{\pi(2n+1)k}{2N}\right), \quad k = 0, \dots, N-1$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha(k) X(k) \cos\left(\frac{\pi(2n+1)k}{2N}\right), \quad n = 0, \dots, N-1, \quad (4.5)$$

onde

$$\alpha(0) = \sqrt{\frac{1}{N}},$$

$$\alpha(k) = \sqrt{\frac{2}{N}}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (4.6)$$

Raramente os coeficientes da DFT de um sinal de dimensão finita são esparsos, ao contrário do que acontecia com a DTFT. Partindo da equação (4.4), podemos concluir que são esparsos se  $m - m_k$  for um número inteiro, ou seja se  $m_k$  for um número inteiro. Então podemos concluir que os coeficientes no domínio da frequência só são esparsos quando as frequências das sinusóides que compõem o sinal são múltiplas da frequência fundamental da DFT,  $\frac{2\pi}{N}$ .

De modo análogo podemos concluir que os coeficientes da DCT de um sinal de dimensão finita são esparsos se as frequências das sinusóides que compõem o sinal são múltiplas de  $\frac{\pi}{N}$ .

Na Figura 4.1, temos a representação gráfica da DCT de dois sinais  $x_1$  e  $x_2$  dados pela soma de 3 sinusóides, sendo as frequências das sinusóides que compõem  $x_1$ , múltiplas da frequência fundamental da DCT e as de  $x_2$ , não. Como se pode ver, só o primeiro sinal tem representação esparsa.

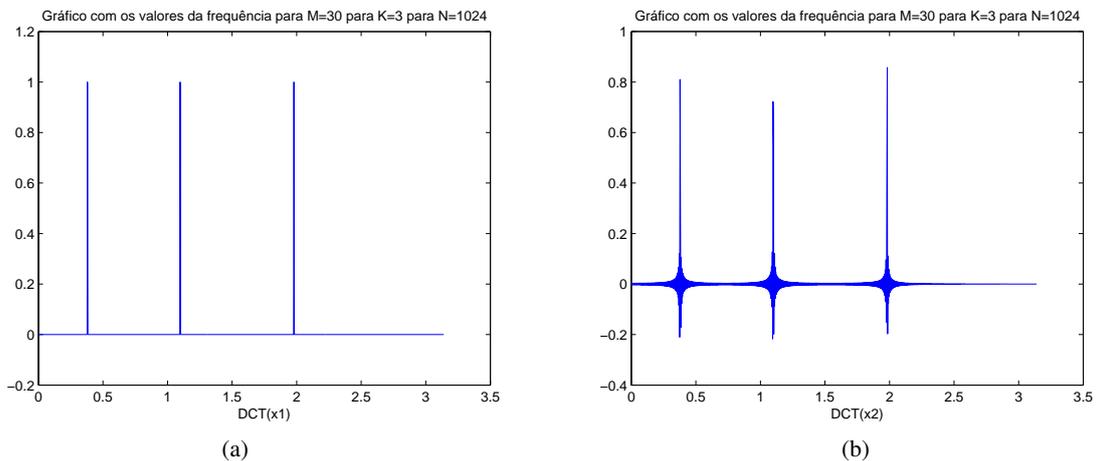


Figura 4.1: DCT de dois sinais,  $x_1$  e  $x_2$ , compostos por três sinusóides com frequências normalizadas. Em (a) as frequências são múltiplas da frequência fundamental da DCT: em (b) as frequências não são múltiplas da frequência fundamental da DCT.

Situação análoga se passa com a DFT de um sinal, como se pode ver na Figura 4.2.

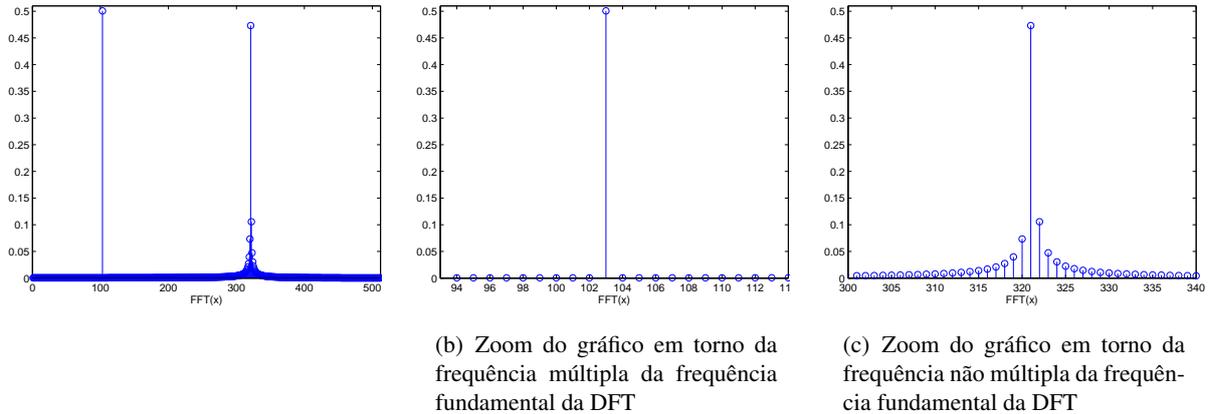


Figura 4.2: FFT de um sinal composto por duas sinusóides, em que a frequência de uma delas é múltipla da frequência fundamental e a outra não.

Daqui para a frente vamos utilizar a DFT e considerar sinais reais.

#### 4.1 Aproximação esparsa para sinais compostos por sinusóides com frequências múltiplas da frequência fundamental da DFT

Consideremos um sinal  $x$ , composto por  $K$  sinusóides, sendo os valores de  $m_k$  na equação (4.4) inteiros. Os coeficientes da DFT deste sinal são portanto esparsos. O sinal pode escrever-se na forma

$$x = \sum_{k=1}^K s_k \Psi_k \quad \text{ou} \quad x = \Psi s,$$

sendo  $\Psi$  a matriz transposta da matriz DFT. Sendo o sinal  $x$  esparsos no domínio da frequência, o que pretendemos é estimar as frequências e as amplitudes das sinusóides presentes no sinal.

Em termos de CS, o problema é o de recuperar  $s$ , a partir de  $M$  amostras aleatórias,  $y = \Phi x$  e da matriz  $\Theta = \Phi \Psi$ , sendo  $\Phi$  a matriz  $M \times N$  de amostragem. Temos de resolver o problema

$$\min \|s\|_0 : y = \Phi \Psi s,$$

Vamos considerar para matriz de amostragem uma matriz com entradas Gaussianas independentes,  $\mathcal{N}(0, 1/M)$ , pois como já vimos, é uma boa matriz de amostragem no problema de reconstrução de um sinal esparsos.

Os algoritmos MP, OMP e BP enunciados no Capítulo 3 funcionam bem no caso em que as frequências que compõem o sinal são múltiplas da frequência fundamental da DFT, ao contrário do que acontece para outras frequências, como veremos na secção seguinte.

Todos estes algoritmos reconstruem o sinal com um erro normalizado muito pequeno. As figuras 4.3 e 4.4 mostram os erros de reconstrução para um sinal  $x$  de tamanho  $N = 1024$ , composto por 3

sinusóides com frequências múltiplas da frequência fundamental da DFT.

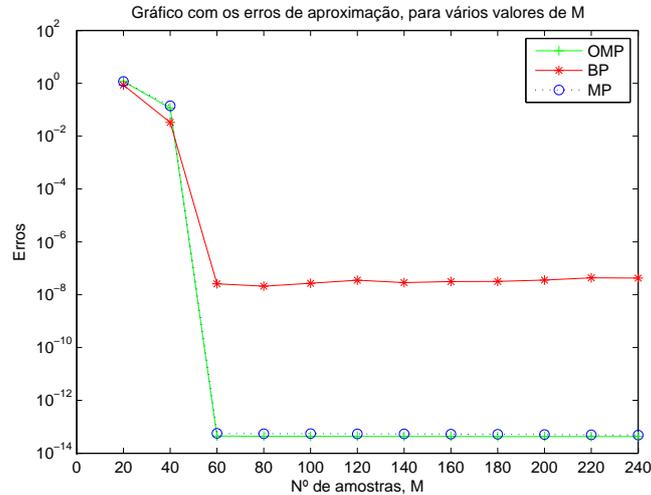


Figura 4.3: Desempenho da reconstrução de um sinal composto por três sinusóides, ao qual corresponde  $K = 6$ , utilizando os algoritmos MP, OMP e BP. Todas as quantidades são obtidas a partir dos valores de 100 experiências independentes.

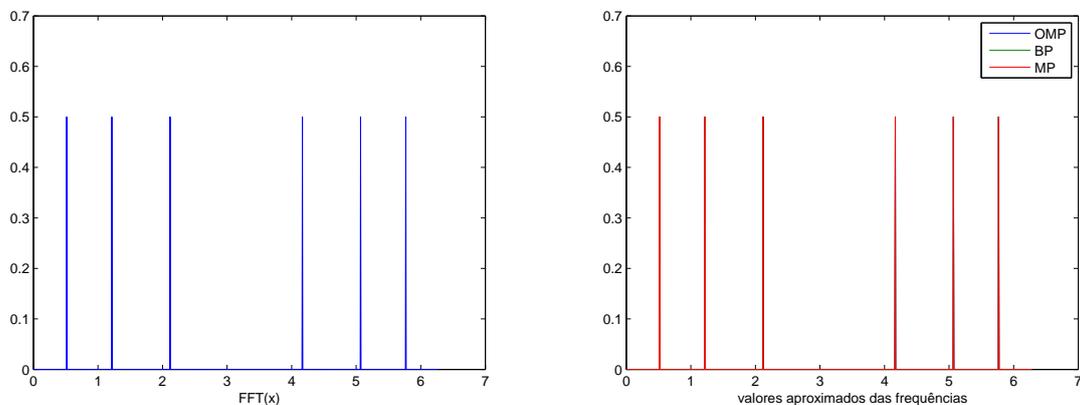


Figura 4.4: FFT e valores aproximados das frequências para um sinal composto por três sinusóides, ao qual corresponde  $K = 6$ . No cálculo dos valores aproximados foram utilizados os algoritmos MP, OMP e BP, com  $M = 50$  amostras.

Se considerarmos, por exemplo,  $M = 50$ , com o OMP obtemos um valor aproximado para a solução, com erro normalizado de cerca de  $4.3 \times 10^{-14}$ , ao fim de 6 iterações, número exatamente igual ao valor da esparsidade do sinal. No caso do MP o mesmo não acontece, são necessárias mais iterações para chegar a um valor aproximado com o erro pretendido. Em média são necessárias 114 iterações. Ver a Figura 4.5.

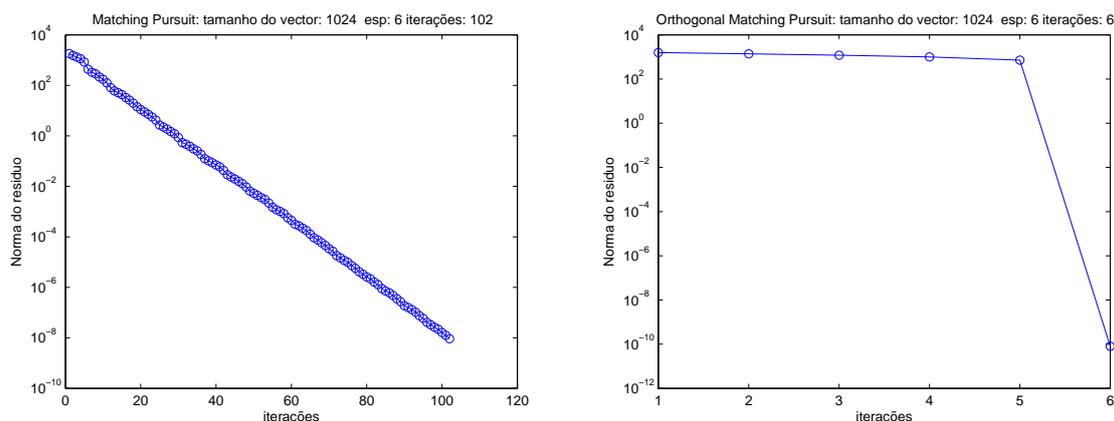


Figura 4.5: Número de iterações realizadas para recuperar o sinal garantindo que a norma do resíduo seja inferior a  $10^{-8}$ , utilizando os algoritmos MP e OMP.

## 4.2 Aproximação esparsa para sinais com quaisquer frequências

Consideremos agora um sinal  $x$ , em que as frequências das  $K$  sinusóides que compõem o sinal, não são múltiplas da frequência fundamental da DFT. Os coeficientes da DFT deste sinal não são esparsos. Nas  $N$  colunas da matriz  $\Psi$ , não existe nenhuma correspondente às  $K$  frequências do sinal. Estes sinais são ainda pouco compressíveis, pois os seus coeficientes,  $s$ , quando ordenados por ordem decrescente de tamanho, decaem de acordo com a equação (3.2) com um expoente na ordem de  $r = 1$  [60].

O desempenho do CS na recuperação do sinal não é bom. O sinal  $s$  obtido pela resolução do problema

$$\min \|s\|_1 : y = \Phi\Psi s = \Theta s, \quad (4.7)$$

não é esparsos, como podemos ver no exemplo da Figura 4.6. O erro normalizado é de cerca de 1.0444 e mesmo aumentando o número de amostras, o erro continua grande, obtendo-se o valor aproximado de 0.4147 para  $M = 80$  e 0.2324 para  $M = 150$ . O *leakage* limita o sucesso dos algoritmos tradicionais do CS [61].

A ideia natural para ultrapassar o problema é ampliar a matriz  $\Psi$ , passando a ter uma frame redundante em vez da base ortogonal da DFT, de forma a que cada frequência pretendida seja representada por alguma coluna dessa matriz. Nessa altura o sinal  $x$  já será esparsos nessa frame.

Levanta-se a questão: que e quantas colunas acrescentar?

Uma forma de ampliar a matriz é acrescentar zeros à DFT. As novas colunas da matriz passam a ter frequências da forma  $\frac{2\pi n}{cN}$ , sendo  $c$  um fator de redundância e  $n$  um número inteiro. O que acontece com este procedimento é que sinais com sinusóides com frequências que não são múltiplos da frequência fundamental da DFT tornam-se mais compressíveis, mas podem continuar a não ser esparsos. O aumento do tamanho da frame resulta numa melhoria do desempenho na recuperação, mas em contrapartida, esta torna-se cada vez mais coerente, o que leva a uma diminuição no desempenho da reconstrução [60].

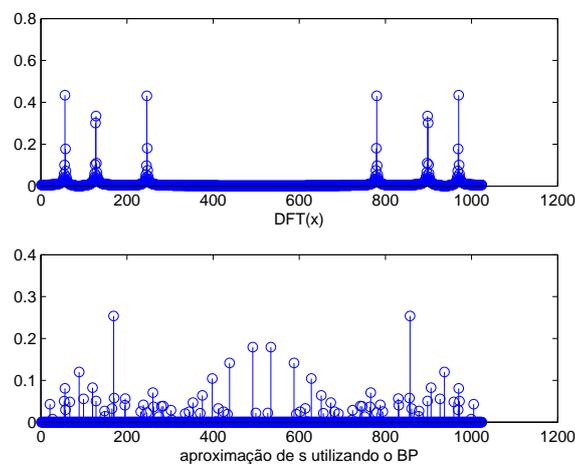


Figura 4.6: Espectro de um sinal de tamanho  $N = 1024$ , composto por três sinusóides com frequências não múltiplas da frequência fundamental da DFT, utilizando a DFT e o BP na resolução do problema com CS e considerando  $M = 50$  amostras.

Para ultrapassar o problema da coerência, o ideal era podermos acrescentar um número de colunas igual ao valor da esparsidade,  $K$ , ou apenas um pouco mais, visto este valor ser relativamente pequeno.

Se soubermos entre que frequências inteiras ou, o que é o mesmo, entre que colunas da matriz  $\Psi$  estão as frequências das sinusóides do sinal, podemos acrescentar colunas na matriz  $\Psi$  apenas nesses intervalos. O problema é que na prática só se conhece o sinal das amostras  $y$  [62].

Para exemplificar, vamos supor, que temos um sinal, de tamanho  $N = 1024$ , composto por apenas duas sinusóides, com frequências não múltiplas de  $\frac{2\pi}{N}$ , que se encontram no meio das frequências das colunas 36 – 37 e 185 – 186 e portanto também entre as colunas 989 – 990 e 840 – 841 respectivamente.

Basta então acrescentar na matriz  $\Psi$  uma nova coluna entre cada uma destas, com frequências  $\frac{35.5*2\pi}{N}$ ,  $\frac{184.5*2\pi}{N}$ ,  $\frac{988.5*2\pi}{N}$  e  $\frac{839.5*2\pi}{N}$  respectivamente. Passamos a ter uma frame de dimensão  $(N \times (N + 4))$  e assim conseguimos obter uma boa reconstrução do sinal. Ver os gráficos de reconstrução na Figura 4.7 e os erros quadráticos obtidos, na Tabela 4.1.

	BP	MP	OMP
Antes do alargamento da matriz $\Psi$	0.7134	0.7230	1.0605
Depois do alargamento da matriz $\Psi$	1.4921e-008	1.9000e-013	1.4178e-013

Tabela 4.1: Erros obtidos na reconstrução do sinal  $x$  composto por duas sinusóides de frequências não múltiplas da frequência fundamental da DFT. Reconstrução antes e depois de ampliada a matriz com o BP, MP e OMP, antes e depois de alargada a matriz  $\Psi$ .

Definindo por  $\Psi_R$  a frame obtida a partir da matriz  $\Psi$ , acrescentando algumas colunas, vamos mostrar que o sistema de equações  $x = \Psi_R s$  é bem condicionado.

Estamos interessados em estudar a estabilidade do sistema que vamos resolver.

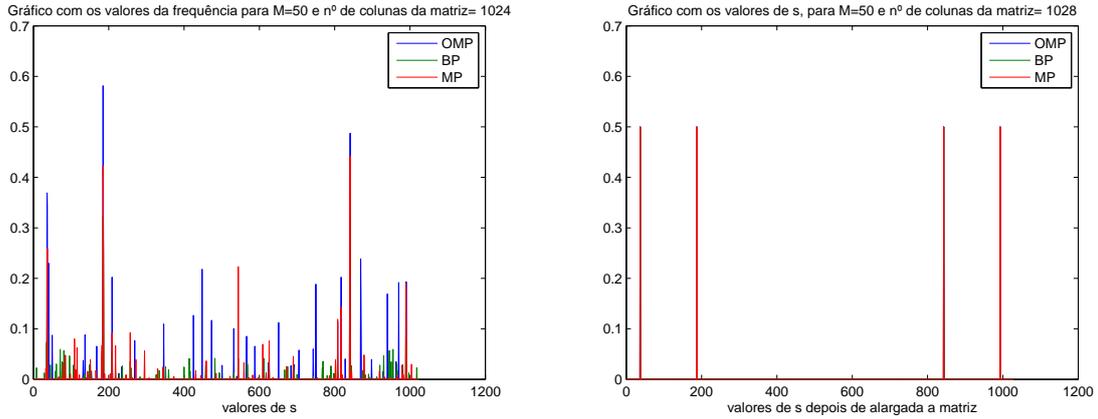


Figura 4.7: Reconstrução de um sinal composto por duas sinusóides com frequências não múltiplas da frequência fundamental da DFT, antes e depois de ampliada a matriz, com os 3 algoritmos estudados. A matriz ampliada tem mais quatro colunas.

#### 4.2.1 Frames e estabilidade

Como já foi dito na secção 3.2.3, podemos verificar se um sistema é bem condicionado calculando o número de condição da matriz associada.

No nosso caso a matriz é  $\Psi_R$ , formada pela reunião do conjunto dos vetores da base da DFT de dimensão  $N$ , com o conjunto dos  $t$  vetores que acrescentamos, no máximo tantos quantos a esparsidade do sinal. A matriz  $\Psi_R$  tem  $N + t$  colunas.

Atendendo a que os vetores coluna da matriz  $\Psi_R$  formam uma frame, vamos estudar o condicionamento da matriz a partir das propriedades de uma frame.

A partir da Definição 12, de frame, apresentada na página 41, podemos dizer que temos uma *C-tight frame*, se existir uma constante  $C > 0$ , tal que

$$\sum_k |\langle g, f_k \rangle|^2 = C \|g\|^2, \forall g \in V.$$

Nesse caso  $\alpha = \beta = C$ .

Temos uma *tight frame* normalizada, se todos os vetores da frame tiverem norma 1,  $\|f_k\| = 1, \forall k$ . Em geral *tight frame* normalizadas são consideradas generalização de bases ortonormais, pois se os vectores  $f_k$  formarem uma base ortonormal de  $V$ , temos que

$$\sum_k |\langle g, f_k \rangle|^2 = \|g\|^2, \forall g \in V,$$

ou seja a base ortonormada é uma *tight frame* normalizada com  $C = 1$ , [63].

Os quadrados do maior e do menor valor singular de uma matriz cujas colunas são os vetores de uma frame são chamados de *frame bounds*. A matriz é bem condicionada se a razão entre os valores das *frame bounds* é próxima de 1 [64].

Vamos então ver como são dados os *frame bounds* da nossa frame, ou seja os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  que

verificam a condição:

$$\alpha \|g\|^2 \leq \sum_k |\langle g, \psi_k \rangle|^2 \leq \beta \|g\|^2, \forall g \in V,$$

sendo  $V$  o espaço gerado pelos vectores coluna  $\psi_k$ ,  $k = 1, \dots, N + t$  de  $\Psi_R$ .

Uma vez que

$$\sum_{k=1}^{N+t} |\langle g, \psi_k \rangle|^2 = \|\Psi_R^H g\|^2,$$

onde  $\Psi_R$  é a matriz cujas colunas são os vectores da frame, temos

$$\alpha \leq \frac{\|\Psi_R^H g\|^2}{\|g\|^2} \leq \beta,$$

donde  $\alpha$  e  $\beta$  são respetivamente o mínimo e o máximo de  $\frac{\|\Psi_R^H g\|^2}{\|g\|^2}$ .

Como

$$\frac{\|\Psi_R^H g\|^2}{\|g\|^2} = \frac{(\Psi_R^H g)^H (\Psi_R^H g)}{\|g\|^2} = \frac{g^H \Psi_R \Psi_R^H g}{\|g\|^2}$$

e a matriz  $\Psi_R \Psi_R^H$  é hermitiana,  $\alpha$  e  $\beta$  são respetivamente o menor e o maior valor próprio de  $\Psi_R \Psi_R^H$ . Como a matriz  $\Psi_R \Psi_R^H$  é positiva semi-definida, pois  $g^H \Psi_R \Psi_R^H g \geq 0$ , todos os valores próprios são não negativos. Mais, o menor valor próprio é 1, uma vez que a dimensão de  $\Psi_R \Psi_R^H$  é  $N$ .

Podemos ainda escrever

$$\begin{aligned} \frac{\|\Psi_R^H g\|^2}{\|g\|^2} &= \frac{\sum_{k=1}^N |\langle g, \psi_k \rangle|^2 + \sum_{k=N+1}^{N+t} |\langle g, \psi_k \rangle|^2}{\|g\|^2} = \frac{\|g\|^2 + \sum_{k=N+1}^{N+t} |\langle g, \psi_k \rangle|^2}{\|g\|^2} \\ &= 1 + \frac{\sum_{k=N+1}^{N+t} |\langle g, \psi_k \rangle|^2}{\|g\|^2} = 1 + \frac{\|\Psi_{R_1}^H g\|^2}{\|g\|^2}, \end{aligned}$$

sendo  $\Psi_{R_1}$  a matriz cujas colunas são os  $t$  vectores acrescentados à matriz dos vectores da base, DFT.

Então o mínimo e o máximo valor de  $\frac{\|\Psi_R^H g\|^2}{\|g\|^2}$  são os mesmos de  $1 + \frac{\|\Psi_{R_1}^H g\|^2}{\|g\|^2}$ , donde para determinar os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  basta determinar o mínimo e o máximo de  $\frac{\|\Psi_{R_1}^H g\|^2}{\|g\|^2}$ .

Como  $\Psi_{R_1} \Psi_{R_1}^H$  só poderá ter  $t$  valores próprios diferentes de zero, o valor próprio mínimo é zero.

Temos então que

$$\alpha = 1 + \lambda_{\min}(\Psi_{R_1} \Psi_{R_1}^H) = 1,$$

e

$$\beta = 1 + \lambda_{\max}(\Psi_{R_1} \Psi_{R_1}^H) = 1 + (\sigma_{\max}(\Psi_{R_1}))^2,$$

sendo  $\sigma$  o valor singular da matriz.

Como [39]

- $\lambda_{max}(\Psi_{R_1} \Psi_{R_1}^H) = \lambda_{max}(\Psi_{R_1}^H \Psi_{R_1}),$

- $tr(\Psi_{R_1}^H \Psi_{R_1}) = \sum_{k=1}^t \lambda_k,$  sendo  $\lambda_k$  o valor próprio de índice  $k$  da matriz  $\Psi_{R_1}^H \Psi_{R_1}$

e

- $tr(\Psi_{R_1}^H \Psi_{R_1}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^t (|\psi_{R_1}(i, j)|)^2,$  sendo  $\psi_{R_1}(i, j)$  o elemento da matriz  $\Psi_{R_1}$  na posição  $(i, j).$

E atendendo a que  $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^t (|\psi_{R_1}(i, j)|)^2 = \sum_{k=1}^t (n_k)^2,$  sendo  $n_k$  a norma da coluna  $k$  da matriz  $\Psi_{R_1},$  podemos escrever

$$\lambda_{max}(\Psi_{R_1} \Psi_{R_1}^H) < \sum_{k=1}^t (n_k)^2.$$

Temos então que  $\alpha = 1$  e  $\beta < (1 + \sum_{k=1}^t (n_k)^2).$  A matriz será tão melhor condicionada quanto a quantidade  $(1 + \sum_{k=1}^t (n_k)^2)$  for próxima de 1.

Pensando em termos do número de condição da matriz,  $\kappa(\Psi_R),$  podemos escrever que  $\kappa(\Psi_R) = \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\beta}.$

Donde podemos concluir que  $\sqrt{1 + \sum_{k=1}^t (n_k)^2}$  é um majorante do número de condição da matriz  $\Psi_R.$

A desigualdade

$$\kappa(\Psi_R) < \sqrt{1 + \sum_{k=1}^t (n_k)^2} \quad (4.8)$$

relaciona o número de condição com as amplitudes das frequências do sinal, uma vez que a norma de cada uma das colunas acrescentada é igual à amplitude da frequência do sinal correspondente que pretendemos encontrar.

No nosso problema, podemos considerar sempre, a maior das amplitudes das frequências igual à unidade e todas as outras ajustadas para baixo, tendo então que o maior majorante para o número de condição é  $\sqrt{1+t}.$  Como o sinal é esparsos, obtemos valores relativamente pequenos para  $\kappa(\Psi_R).$

## 4.2.2 Proposta de novos algoritmos de reconstrução

Como já foi dito atrás, se soubermos entre que colunas da matriz  $\Psi$  estão as frequências do nosso sinal, podemos acrescentar colunas na matriz  $\Psi$  apenas nesses intervalos. Então o nosso problema é saber quais são as colunas da matriz a considerar.

O problema dual de estimar uma frequência fraccionaria é o de estimar um atraso no tempo, *time-delay*.

Fuchs e Deylon, em [65], apresentaram uma expressão analítica para resolver o problema de estimação de um atraso no tempo. Apresentaram a função interpoladora que minimiza a norma  $\ell_1$ , a qual é independente do sinal que se considere, para obter uma estimativa para o número de caminhos ou réplicas e quais as suas amplitudes, tendo um sinal de banda limitada  $x(t)$ , com período de amostragem máximo  $T_a = 1$ , observado através de  $p$  caminhos,

$$y(t) = \sum_{p=1}^P \alpha_p x(t - \tau_p).$$

Os autores consideraram o problema para o caso de uma única réplica de amplitude 1 e sem ruído,  $y(t) = x(t - \tau)$  e obtiveram uma função interpoladora, a partir da qual é possível determinar calcular os valores de  $s_n$  tais que  $y(t) = x(t - \tau) = \sum_n x(t - n T_a) s_n$ . Consideraram apenas situações em que o período de amostragem é da forma  $T_a = \frac{1}{l}$ , sendo o inteiro  $l$  definido como o fator de sobreamostragem.

Uma estimação para o atraso  $\tau$  é determinada a partir do máximo da função interpoladora que é dada por

$$\psi(t) = \sum_{k \geq 0} \beta_k \frac{\phi(|t| - k)}{|t|}, \quad |t| \in [k, k + \frac{1}{l}],$$

com

$$\phi(x) = \frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(\frac{1}{l} - x)}, \quad x \in [0, \frac{1}{l}],$$

$$\beta_k = (-1)^k \frac{\Gamma(k + \frac{1}{l})}{\Gamma(k + 1)},$$

onde  $\Gamma$  é a função gamma.

Uma vez que a função interpoladora é muito localizada, os valores de  $s_n$ , podem se obtidos através da resolução do problema de minimização da norma  $\ell_1$

$$\min \|s_n\|_1 : y(t) = \sum_n x(t - n \frac{1}{l}) s_n, \quad l > 1,$$

que pode ser resolvido pelo o Basis Pursuit.

O problema que estamos a resolver é o problema dual do problema estudado por estes autores. Se

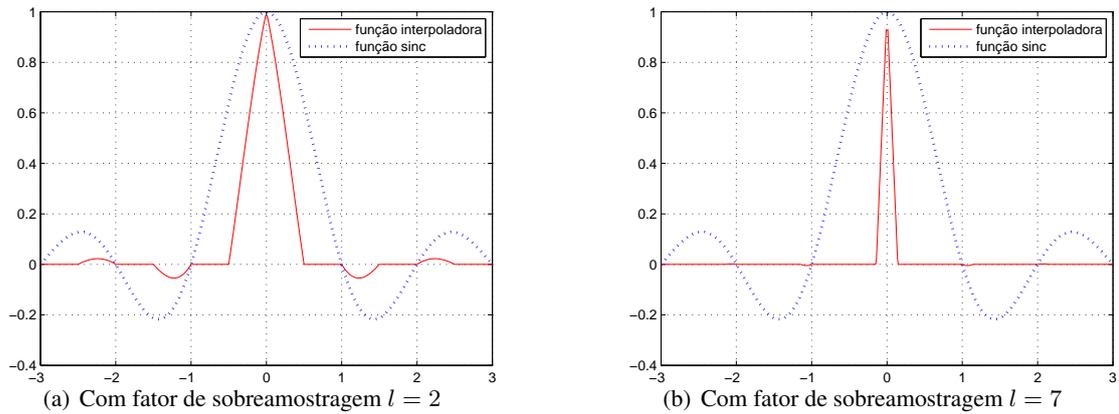


Figura 4.8: Função interpoladora da norma  $\ell_1$  com fatores de sobreamostragem  $l = 2$  e  $l = 7$ , comparada com a função sinc.

tivermos um sinal com uma sinusóide de frequência  $f_i$ , que seja múltipla da frequência fundamental da DFT, sabemos que a DFT do sinal tem um máximo na posição dessa frequência.

Olhando para a frequência do sinal como o dual do atraso, a função interpoladora vai ter um máximo exatamente no mesmo local, independentemente do valor de  $l$  que se considere. Ver gráfico da Figura 4.9.

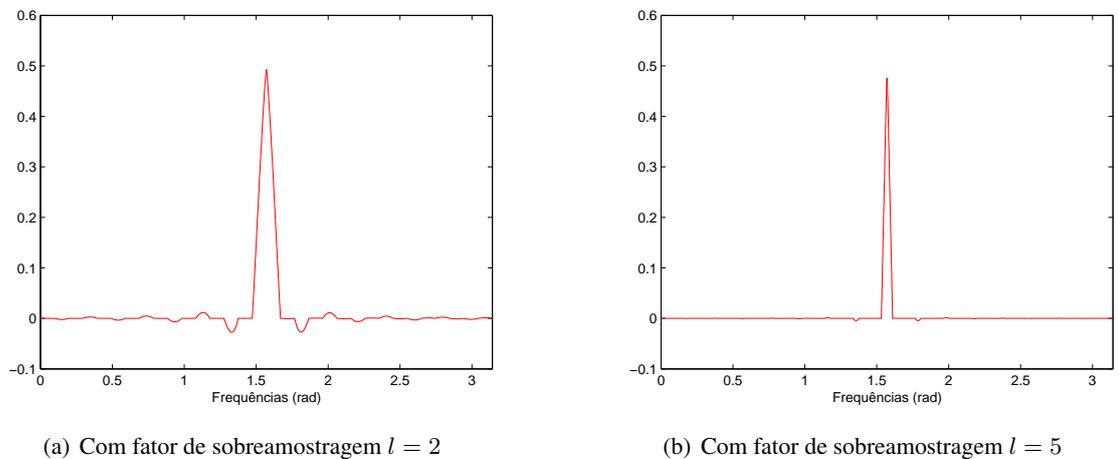


Figura 4.9: Função interpoladora que minimiza a norma  $\ell_1$ , para  $l = 2$  e  $l = 5$ .

Se pensarmos agora no que estamos a considerar quando temos  $l = 2$ , percebemos que o que estamos a fazer é acrescentar na matriz  $\Psi$  do nosso problema, uma coluna entre cada uma das iniciais. Podemos verificar graficamente, Figura 4.10, que utilizando o BP com esta nova matriz, obtemos os mesmos valores que obtemos com a função interpoladora, para o mesmo valor de  $l$ .

Se tivermos um sinal com uma sinusóide de frequência  $f_i$ , não múltipla da frequência fundamental da DFT, o sinal não é esparso, não existindo portanto máximos para o BP. No entanto, a função de interpolação terá na mesma um máximo na posição da frequência, independentemente do valor de  $l$  que seja considerado.

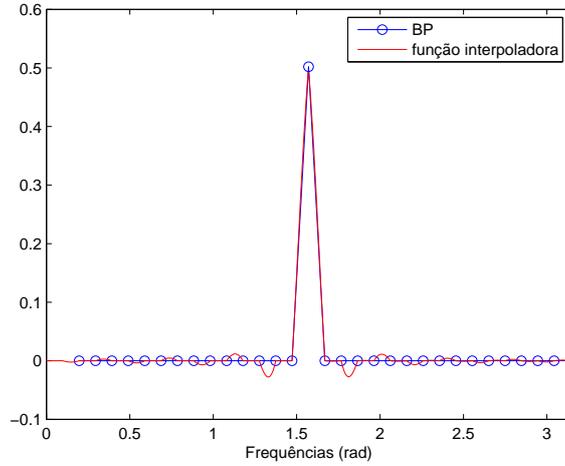
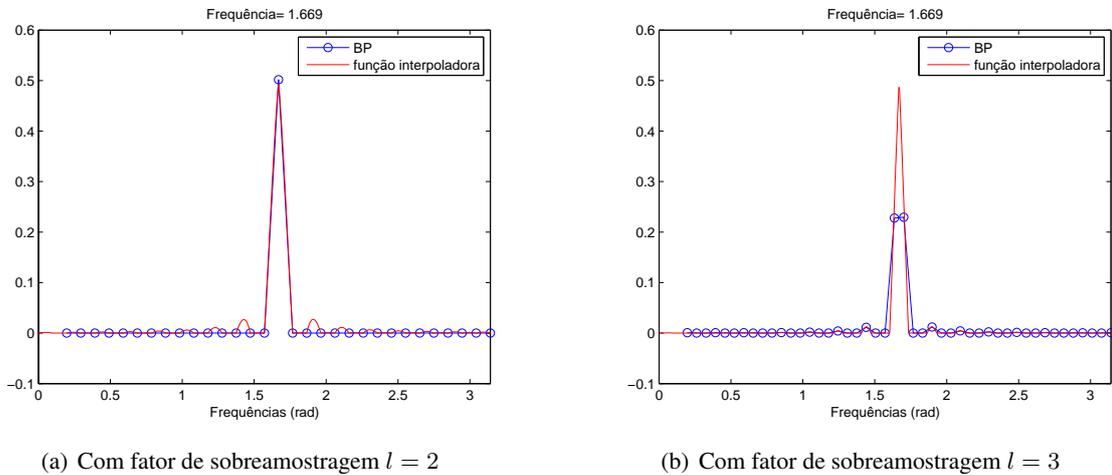


Figura 4.10: Minimização da norma  $\ell_1$  utilizando o BP e utilizando a função interpoladora com  $l = 2$ .

No caso particular de considerarmos o sinal com uma sinusóide com frequência  $f_i = \frac{8.5*2\pi}{N}$  e considerarmos  $l = 2$  o fator de sobreamostragem, o máximo da função interpoladora vai coincidir com o que é obtido utilizando o BP, situação que não se verifica obviamente se considerarmos  $l = 3$ . Nesse caso o maximizante da função interpoladora fica localizado **no meio** das duas frequências com maiores valores obtidos pelo BP. Podemos verificar estas duas situações na Figura 4.11.



(a) Com fator de sobreamostragem  $l = 2$

(b) Com fator de sobreamostragem  $l = 3$

Figura 4.11: Minimização da norma  $\ell_1$  utilizando o BP e a função interpoladora, para um sinal com uma sinusóide com frequência não múltipla da frequência fundamental da DFT.

Se o sinal é composto por duas sinusóides com frequências que não são múltiplas da frequência fundamental da DFT, a função interpoladora tem dois máximos, ambos entre os valores das frequências com maiores valores obtidos pela resolução do problema 4.7.

No caso particular de o sinal ser composto por duas sinusóides em que as frequências são  $f_i = \frac{8.2*2\pi}{N}$  e  $f_j = \frac{12.4*2\pi}{N}$  e considerarmos o fator de sobreamostragem  $l = 2$ , o maximizante da função

interpoladora fica localizado **entre** os valores das duas frequências com maiores valores obtidos pelo BP, como podemos ver na Figura 4.12.

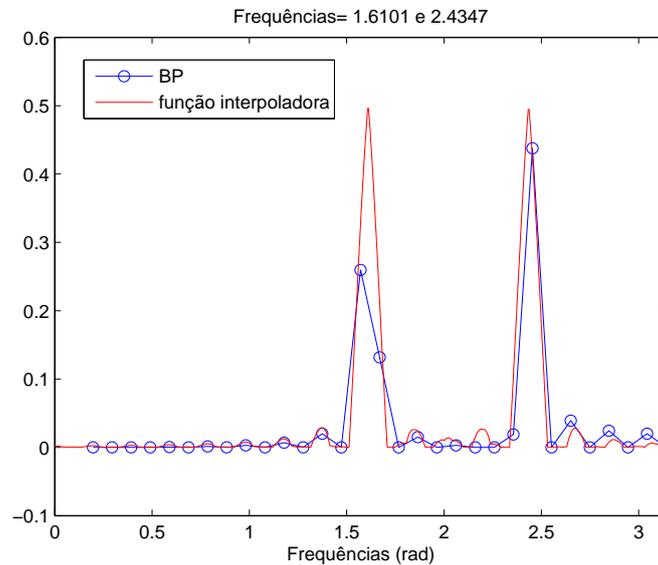


Figura 4.12: Minimização da norma  $\ell_1$  utilizando o BP e utilizando a função interpoladora, para um sinal composto por duas sinusóides com frequências não múltiplas da frequência fundamental da DFT, utilizando  $l = 2$ .

Se utilizarmos o BP, com a matriz  $\Psi$  alargada, para haver coincidência no máximo, temos de considerar um valor de  $l$  adequado, ou seja, o número de colunas a acrescentar deverá de ser tal, que se adicionem as colunas que têm as frequências pretendidas ou o mais próximo possível.

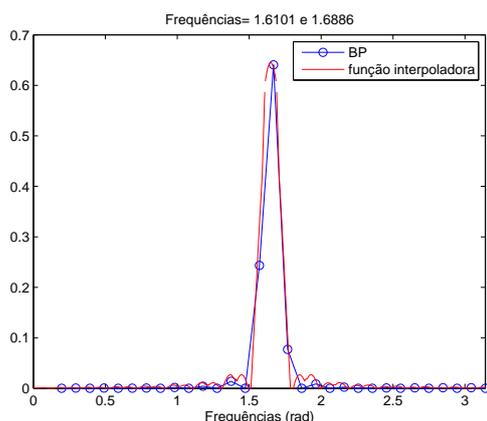
Se o sinal for composto por sinusóides, cujas frequências são muito próximas, para as conseguirmos recuperar, temos de considerar um valor de  $l$  muito grande. Na Figura 4.13 podemos ver o caso particular de um sinal composto por duas sinusóides em que as frequências são  $f_i = \frac{8.2*2\pi}{N}$  e  $f_j = \frac{8.6*2\pi}{N}$ .

Depois do exposto, uma possível solução para o problema de saber entre que colunas se encontram as frequências do nosso sinal, é aplicar o BP. Cada uma das frequências em causa, vai estar entre as duas frequências múltiplas da frequência fundamental onde o BP obtém valores máximos.

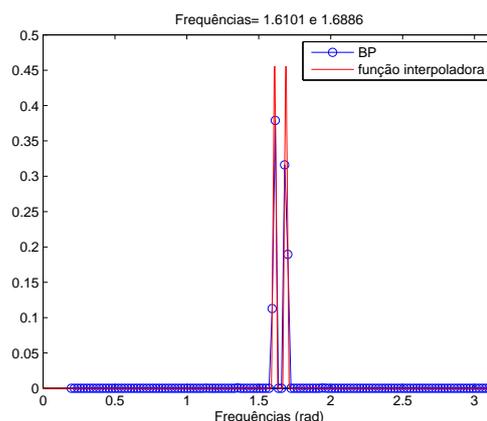
Assim, depois de encontradas as colunas, alargamos a matriz  $\Psi$  colocando novas colunas apenas nesses intervalos, com o objetivo de encontrar em cada um deles, um maximizante para o BP, ou seja a frequência pretendida.

Vamos exemplificar com o caso concreto de um sinal  $x$  de tamanho  $N = 1024$ , com apenas uma sinusóide com frequência não múltipla da frequência fundamental da DFT,  $\frac{138.7585*2\pi}{N}$ .

Resolvendo o problema  $y = \Theta s$ , utilizando o BP, obtemos para as duas maiores posições as colunas 139 e 140, a que correspondem as frequências  $\frac{138*2\pi}{N}$  e  $\frac{139*2\pi}{N}$ , como se pode ver pela Figura



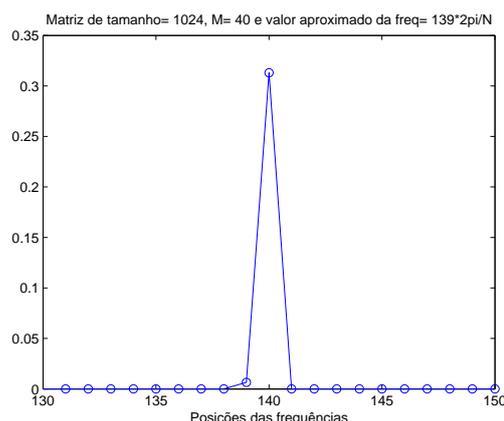
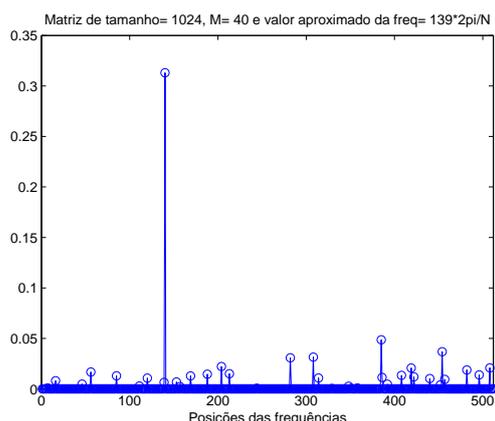
(a) Com fator de sobreamostragem  $l = 2$



(b) Com fator de sobreamostragem  $l = 9$

Figura 4.13: Minimização da norma  $\ell_1$  utilizando o BP e utilizando a função interpoladora, para um sinal composto por sinusóides cujas frequências não são múltiplas da frequência fundamental da DFT e são muito próximas.

#### 4.14.



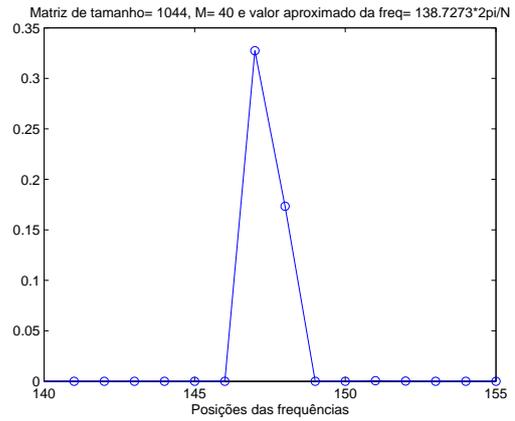
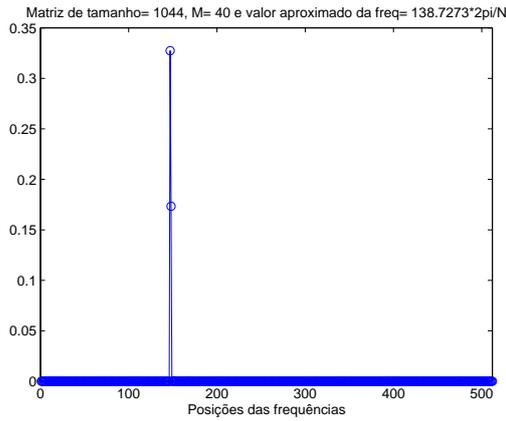
(b) Zoom do gráfico

Figura 4.14: Posições das frequências utilizando o BP na reconstrução de um sinal com frequência não múltipla da frequência fundamental da DFT.

O valor aproximado para a frequência neste caso é a frequência da coluna que tem um valor máximo,  $\frac{139*2\pi}{N}$ , sendo o erro normalizado de cerca de 0.5642.

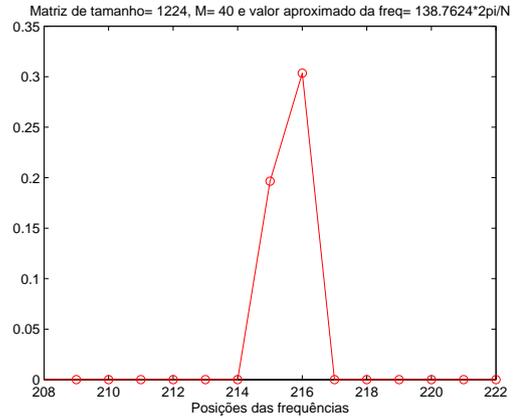
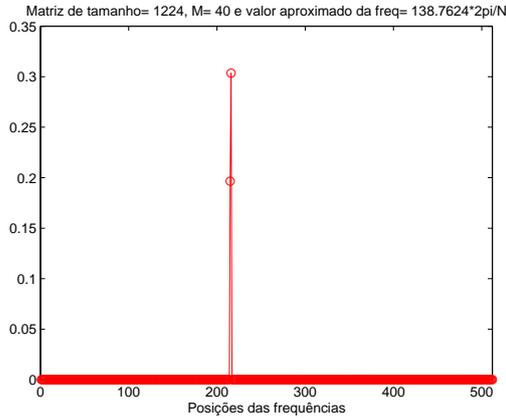
Alargando a matriz  $\Psi$ , colocando 10 e 100 colunas entre as colunas encontradas, colunas 139 e 140, as maiores posições passam a ser nas colunas 147 e 148 e 215 e 216 respectivamente. Os valores aproximados para as frequências são agora de  $\frac{138.7273*2\pi}{N}$  com um erro de cerca de 0.0030 e  $\frac{138.7624*2\pi}{N}$  com um erro de cerca de  $3.81 \times 10^{-5}$  respectivamente. Ver as Figuras 4.15 e 4.16. Quanto maior é o número de colunas acrescentado, melhor é a aproximação que obtemos.

Na seção seguinte vamos apresentar uma proposta de algoritmo para resolver o problema  $y = \Theta s$ .



(b) Zoom do gráfico

Figura 4.15: Posição da frequência utilizando o BP na reconstrução de um sinal com uma sinuóide de frequência não múltipla da frequência fundamental da DFT, alargando a matriz da DFT em 10 colunas colocadas entre a coluna 139 e a coluna 140.



(b) Zoom do gráfico

Figura 4.16: Posição da frequência utilizando o BP na reconstrução de um sinal com uma sinuóide de frequência não múltipla da frequência fundamental da DFT, alargando a matriz da DFT em 100 colunas colocadas entre a coluna 139 e a coluna 140.

Neste algoritmo, só depois de encontrar um valor aproximado para a primeira frequência é que vai encontrar um valor aproximado para a segunda e assim por diante.

### Algoritmo proposto 1

O Algoritmo proposto começa por encontrar o intervalo onde se encontra a frequência com maior valor absoluto. Escolhe para um dos extremos do intervalo a posição da coluna onde o BP obtém maior valor e escolhe para o outro extremo do intervalo a posição da coluna anterior ou seguinte conforme o valor seja mais próximo do valor máximo encontrado. A seguir, adicionamos na matriz da DFT colunas entre as duas colunas correspondentes aos extremos do intervalo. Uma estimativa para a frequência é determinada a partir da posição da coluna que tem valor máximo dentro das colunas

acrescentadas. Para determinar o valor aproximado de outra frequência, expande-se a matriz original, adicionando essa coluna e aplica-se novamente o BP para encontrar um novo intervalo, impondo agora a condição de o valor máximo não poder ser igual ao valor máximo obtido anteriormente. Repetimos o mesmo procedimento até encontrar estimativas para todas as frequências do sinal. Chamamos NP e EF ao maior número de pontos a executar e ao erro máximo permitido na reconstrução de cada frequência.

### Algoritmo

Considera-se para valor inicial da aproximação  $\hat{s}$  de  $s$ , o valor obtido na resolução do problema de minimização da norma  $\ell_1$ :

$$(P1) : \min \|s\|_1 : y = \Psi\Phi s = \Theta s. \quad (4.9)$$

Repetem-se  $K$  vezes os seguintes passos:

1. Calcula-se o maximizante de  $\hat{s}$ ,  $s_{\max}$ ;
2. Escolhe-se o intervalo  $[s_{\max} - 1, s_{\max}]$  ou  $[s_{\max}, s_{\max} + 1]$ , conforme a posição da coluna que tiver a imagem mais próxima da de  $s_{\max}$ . Define-se o intervalo por  $[a, b]$ ;
3. Adicionam-se colunas entre  $a$  e  $b$ :  
 Considera-se  $I = 0$ ;  
 Enquanto ( $I < NP$  e  $\epsilon > EF$ )
  - (a)  $I = I + 1$ ;
  - (b) Considera-se a matriz  $\Psi_1$ , adicionando  $I$  colunas igualmente espaçadas, no intervalo  $[a, b]$  em  $\Psi$ ;
  - (c) Calculam-se os valores  $\hat{s}$  resolvendo o problema 4.9 e considerando a matriz  $\Psi_1$ ;
  - (d) Calcula-se o maximizante de  $\hat{s}$ , apenas no intervalo  $[a, b]$ , o qual contém as  $I$  colunas acrescentadas;
  - (e) Considera-se uma nova matriz,  $\Psi_2$ , a partir de  $\Psi$ , onde se acrescenta, no intervalo  $[a, b]$ , a coluna que corresponde ao maximizante obtido no ponto anterior;
  - (f) Calculam-se os valores aproximados  $\hat{s}$ , resolvendo o problema 4.9, utilizando a matriz  $\Psi_2$ ;
  - (g) Calcula-se o valor de  $\epsilon$
4.  $\Psi = \Psi_2$ ;

O valor aproximado de  $x$  é  $\hat{x} = \Psi \hat{s}$ .

Neste algoritmo, o erro de aproximação do sinal utilizado é o erro normalizado, dado por

$$\text{erro} = \frac{\|x - \hat{x}\|}{\|x\|}. \quad (4.10)$$

O critério de paragem da procura do valor aproximado para cada frequência,  $\epsilon$ , ou seja, o critério utilizado para parar de acrescentar colunas no intervalo  $[a, b]$ , é dado pela diferença entre os erros obtidos em duas iterações consecutivas. Em cada iteração o erro é dado pela soma dos valores absolutos de  $\hat{s}$  excluindo os  $K$  maiores valores, sendo  $K$  o valor da esparsidade. Se no intervalo  $[a, b]$ , no ponto 3f., acrescentarmos a coluna correspondente à frequência da sinusóide que compõe o sinal, este erro será muito pequeno.

Na procura do valor aproximado de cada uma das frequências, para cada iteração, ou seja para cada  $I$  colunas acrescentadas, o erro é dado pela soma dos valores absolutos de  $\hat{s}$  excluindo os  $K$  maiores valores, sendo  $K$  o valor da esparsidade. À medida que se acrescentam colunas, o erro vai diminuindo. A diferença entre os erros consecutivos decresce exponencialmente com o aumento do número de colunas no intervalo, como se pode verificar na Figura. 4.17. Assim, podemos inicializar o número de colunas  $I$  a acrescentar, ponto 1 do algoritmo, com um número bastante maior do que 1. Paramos de acrescentar colunas quando o erro já diminui pouco, ou seja quando a diferença entre os erros quando acrescentamos  $I$  colunas e  $I + 1$  colunas é inferior a um dado limite escolhido,  $EF$ .

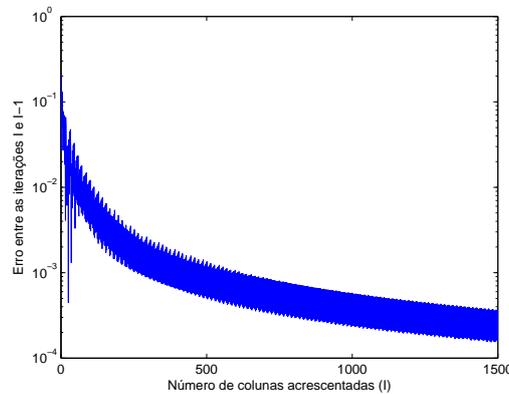


Figura 4.17: Erro na primeira frequência em função do número de colunas acrescentadas.

## Algoritmo proposto 2

Uma vez que a resolução do problema de minimização da norma  $\ell_1$  é relativamente lento, podemos torná-lo um pouco mais rápido, encontrando de outra forma o intervalo  $[a, b]$  em cada iteração.

Sabemos que se a matriz de amostragem  $\Phi$  verificar o RIP, o vetor  $z = \Phi^T \Phi x$  é uma boa aproximação para um sinal  $K$ -esparso,  $x$ , pois a energia em cada conjunto de  $K$  coeficientes de  $z$  é aproxima-

madamente igual à energia para os correspondentes  $K$  coeficientes de  $x$ , tendo-se ainda que o maior coeficiente de  $z$  corresponde ao maior coeficiente de  $x$  [15].

Na situação em estudo temos que  $y = \Phi\Psi s$ , donde podemos obter uma aproximação para o maximizante de  $s$ , calculando o maximizante de  $(\Phi\Psi)^T y = \Psi^T \Phi^T y$ . Para obter uma ainda melhor aproximação para o maximizante, podemos considerar, em vez da matriz  $\Psi$ , uma frame a partir da DFT, com fator de redundância  $c$ , de dimensão  $(N \times cN)$ , a qual designamos por  $\Psi_c$ , onde o elemento na posição  $(n, k)$  é dado por  $\Psi_c(n, k) = \frac{1}{N} e^{j \frac{2\pi}{cN} nk}$ .

Para a obtenção do valor aproximado da primeira frequência, depois de encontrado a posição da frequência com valor absoluto máximo, consideramos o intervalo com centro nesse valor e de largura 0.6. A escolha do valor 0.6 foi feita depois de se terem feito muitas experiências e se ter verificado que para esta amplitude de intervalo se conseguia reconstruir bem o sinal. A partir daí o procedimento é o mesmo do primeiro algoritmo proposto. Para encontrar o intervalo a utilizar no estudo da segunda frequência, calcula-se novamente o valor aproximado de  $s$ , mas agora considerando apenas a parte do sinal que não foi utilizada, isto é, retirando a aproximação da primeira frequência encontrada, ao qual chamamos o resíduo,  $\Psi_c^T \Phi^T R$ , onde  $R = y - \Phi \hat{x}$ . Também nesta nova proposta a diferença entre os erros consecutivos decresce exponencialmente com o aumento do número de colunas no intervalo, como se pode ver na Figura 4.18.

## Algoritmo

Escolhe-se o fator de redundância das frequências da frame da DFT,  $c$ .

Fixa-se o valor inicial do resíduo:  $R^{(0)} = y$ ;

Para  $k = 1$  até  $K$  repetem-se os seguintes passos:

1. Calcula-se o maximizante de  $\Psi_c^T \Phi^T R^{(k-1)}$ ,  $f_{\max}$ ;
2. Define-se o intervalo por  $[a, b] = [f_{\max} - 0.3, f_{\max} + 0.3]$ ;
3. Adicionam-se colunas entre  $a$  e  $b$ :
  - $I := 0$ ;
  - Enquanto ( $I < NP$  e  $\epsilon > EF$ )
    - (a)  $I = I + 1$ ;
    - (b) Considera-se a matriz  $\Psi_1$ , adicionando, no intervalo  $[a, b]$  em  $\Psi$ ,  $I$  colunas igualmente espaçadas;
    - (c) Calculam-se os valores  $\hat{s}$ , resolvendo o problema 4.9 e considerando a matriz  $\Psi_1$  ;
    - (d) Calcula-se o maximizante,  $freq$ , de  $\hat{s}$ , no intervalo  $[a, b]$  contendo as  $I$  colunas acrescentadas;

- (e) Considera-se uma nova matriz,  $\Psi_2$ , a partir de  $\Psi$ , onde se acrescenta, no intervalo  $[a, b]$ , a coluna que corresponde ao maximizante obtido no ponto anterior;
  - (f) Calculam-se os valores aproximados  $\hat{s}$ , resolvendo o problema 4.9, utilizando a matriz  $\Psi_2$ ;
  - (g) Calcula-se o valor de  $\epsilon$
4.  $\Psi = \Psi_2$ ;
  5.  $\hat{x} = \Psi \hat{s}$ ;
  6. Obtém-se uma estimativa para a amplitude,  $A$ , da frequência encontrada  $freq$ ;
  7. Constrói-se o sinal  $x_k$  com uma sinusóide real de amplitude  $A$  e frequência  $freq$ ;
  8.  $R^{(k)} = R^{(k-1)} - \Phi x_k$ ;

O valor aproximado de  $x$  é o valor  $\hat{x}$  obtido no passo 5.

Na nova versão temos:

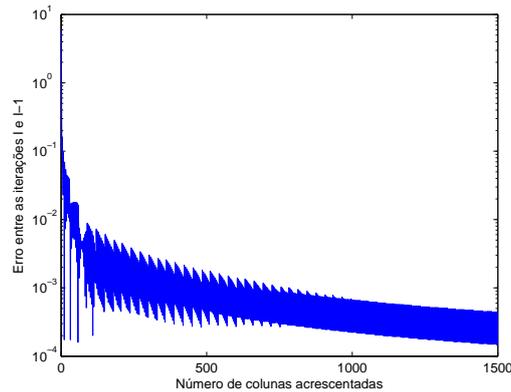


Figura 4.18: O erro na primeira frequência em função do número de colunas acrescentadas.

Dependendo do erro que se permita assim devemos considerar o número de colunas.

Por exemplo neste caso, entre 900 e 950 colunas não existe nenhum erro superior a 0.001, que é a precisão pretendida.

Na secção seguinte vamos ver a abordagem utilizada por Baraniuk e Duarte, [60], para resolver o problema de reconstrução de um sinal composto por sinusóides com frequências não múltiplas da frequência fundamental da DFT.

### 4.2.3 Alguns algoritmos de reconstrução existentes

Baraniuk e Duarte apresentaram dois tipos de algoritmos para reconstruir sinais em que as frequências das sinusóides que os compõem não estão no centro dos bins da DFT. Um baseado num

model-based CS e no periodograma e outro utilizando os métodos Thomson's multipaper e o MUSIC, sendo que neste trabalho apenas vamos analisar a aplicação do MUSIC.

Os autores definiram uma nova teoria à qual chamaram *spectral compressive sensing* (SCS) onde utilizam frames obtidas por sobreamostragem da DFT e um model-based CS que impede a existência de sinusóides muito próximas, ultrapassando assim o problema do aumento da coerência da frame.

Na construção dos algoritmos de reconstrução, é ainda utilizada a teoria de estimação espectral, nomeadamente da estimação dos parâmetros das sinusóides e os algoritmos Greedy de reconstrução em CS.

A teoria model-based em CS utilizada foi introduzida por Baraniuk e outros [16], atendendo a que muitos sinais reais, além de serem esparsos, têm outras características, tais como uma estrutura de dependência entre os valores dos maiores coeficientes. Sabe-se que, por exemplo, a maioria dos coeficientes das wavelet de uma imagem são pequenos e que além disso os valores e as posições dos maiores coeficientes têm uma estrutura particular.

Enquanto que quando falamos de um sinal  $K$ -esparso, o consideramos como um vetor do conjunto  $\sum_K \subset \mathbb{R}^N$ , dado pela reunião de  $\binom{N}{K}$  subespaços de dimensão  $K$ , em que os vários coeficientes são independentes uns dos outros, num modelo de esparsidade estruturada um sinal  $K$ -esparso já tem uma estrutura adicional, sendo portanto um vetor de um subconjunto de  $\sum_K \subset \mathbb{R}^N$ .

Os modelos de esparsidade estruturados, permitindo apenas certas características dos coeficientes maiores e portanto apenas alguns suportes para os sinais, reduzem o número de graus de liberdade de um sinal de esparsos ou compressível, trazendo dois benefícios para o CS: permitem reduzir, em alguns casos significativamente, o número de medidas necessárias para recuperar de forma estável um sinal e ainda, durante o processo de reconstrução do sinal, estes modelos permitem distinguir melhor a verdadeira informação do sinal, o que leva a uma recuperação mais robusta [16].

Uma definição de modelo de esparsidade estruturado é:

**Definição 21** *Um modelo de esparsidade estruturado  $\mathcal{M}_K$  é definido com a reunião de  $m_K$  subespaços canónicos de dimensão  $K$*

$$\mathcal{M}_K = \bigcup_{m=1}^{m_K} \mathcal{X}_m, \quad \mathcal{X}_m = \{x : x|_{\Omega_m} \in \mathbb{R}^K, x|_{\Omega_m^C} = 0\} \quad (4.11)$$

onde  $\Omega_1, \dots, \Omega_{m_K}$  é o conjunto de todos os suportes permitidos, com  $|\Omega_m| = K$ , para cada  $m = 1, \dots, m_K$ , e onde cada subespaço  $\mathcal{X}_m$  contém todos os sinais  $x$  tal que  $\text{supp}(x) \subseteq \Omega_m$ .  $\Omega_m^C$  representa o complementar do conjunto  $\Omega_m$ .

Os sinais de  $\mathcal{M}_K$  chamam-se  $K$ -esparsos estruturados, sendo evidente que  $\mathcal{M}_K \subseteq \sum_K$  e que  $m_K \leq \binom{N}{K}$ .

O sinais que sejam bem aproximados por sinais  $K$ -esparsos estruturados chamam-se estruturados compressíveis.

Se o sinal  $x$  a reconstruir for  $K$ -esparso estruturado ou estruturado compressível, a propriedade RIP que a matriz de amostragem tem de verificar pode ser relaxada, exigindo-se que a propriedade se verifique apenas para os sinais que estão em  $\mathcal{M}_K$ .

**Definição 22** Uma matriz  $\Phi$ ,  $M \times N$  verifica a  $\mathcal{M}_K$ -restricted isometry property ( $\mathcal{M}_K$ -RIP) com constante  $\delta_{\mathcal{M}_K}$  se, para qualquer  $x \in \mathcal{M}_K$ , a desigualdade

$$(1 - \delta_{\mathcal{M}_K})\|x\|^2 \leq \|\Phi x\|^2 \leq (1 + \delta_{\mathcal{M}_K})\|x\|^2 \quad (4.12)$$

se verifica.

O número de amostras necessárias para que se verifique o  $\mathcal{M}_K$ -RIP com grande probabilidade é agora de  $M = \mathcal{O}(K + \log m_K)$  [60], podendo em alguns casos este número ser bastante menor que o conhecido para que se verifique o RIP.

Quando introduziram a teoria do model-based em CS [16], Baraniuk e Duarte mostraram ainda como integrar os modelos de esparsidade estruturados em dois tipos de algoritmos de reconstrução de sinais em CS, o CoSaMP e o IHT, substituindo o passo de aproximação esparsa por uma aproximação esparsa estruturada.

Os algoritmos Greedy e os baseados em thresholding são os que melhor se adaptam a este tipo de alteração e que permitem uma reconstrução estável de sinais com um menor número de amostras [60].

A propriedade  $\mathcal{M}_K$ -RIP é suficiente para uma reconstrução robusta de sinais estruturados esparsos utilizando os algoritmos adaptados.

Designando por  $\mathbb{M}(x, K)$  o algoritmo que determina a melhor aproximação  $K$ -esparsa estruturada para o sinal  $x \in \mathcal{M}_K$ , podemos escrever:

$$\mathbb{M}(x, K) = \arg \min_{\hat{x} \in \mathcal{M}_K} \|x - \hat{x}\|_2.$$

Baraniuk e Duarte [60] começaram por construir um model-based CS, tendo desenvolvido um algoritmo de reconstrução esparsa estruturados, baseado no periodograma. Para tal, começaram por definir um modelo de sinal estruturado,  $\mathcal{T}_{K,c,v}$ , sendo  $c \in \mathbb{N}$  o fator de redundância das frequências da frame da DFT e  $v \in [0, 1]$  a coerência máxima permitida, onde obrigam a que as componentes do sinal sejam combinações lineares de elementos da frame que sejam incoerentes uns com os outros. Chamaram a este, modelo de inibição de coerência. Esta restrição vai impor uma distância mínima entre as frequências dos sinal, estando esta distância diretamente ligada ao valor da coerência máxima  $v$ .

Construíram depois, utilizando o modelo definido, um algoritmo de aproximação esparsa estruturado,  $\mathbb{T}(x, K, c, v)$ , ao qual chamaram algoritmo de aproximação esparsa estruturado de inibição de coerência, modificando um algoritmo de aproximação esparsa standard, de modo a que não haja escolha de dois vetores corentes da frame da DFT.

A seguir, Baraniuk e Duarte construíram algoritmos de reconstrução de sinais com frequências esparsas pretendidos, integrando o algoritmo de aproximação esparso estruturado  $\mathbb{T}(x, K, c, v)$  no algoritmo IHT e obtiveram o algoritmo *Spectral Iterative Hard Thresholding* (SIHT). Este algoritmo tem um bom desempenho, o qual se deve ao facto de o standard IHT também ter.

Atendendo a que a complexidade computacional do algoritmo de aproximação esparso estruturado  $\mathbb{T}(x, K, c, v)$ ,  $\mathcal{O}(c^3 N^3)$ , é maior que a complexidade do algoritmo IHT que é baseado na ordenação dos coeficientes, Baraniuk e Duarte consideraram uma heurística como alternativa ao algoritmo, construindo o algoritmo heurístico de aproximação esparso de inibição de coerência  $\mathbb{T}_h(x, K, c, v)$ . Os valores aproximados do vetor esparso das frequências são agora obtidos procurando sucessivamente as posições com um valor máximo. Depois de encontrado cada um dos coeficientes, anulam-se os coeficientes da frame da DFT aos quais correspondem sinusóides coerentes com a do coeficiente encontrado.

Este algoritmo tem melhor complexidade computacional  $\mathcal{O}(cKN \log(cN))$  e tem em média um bom desempenho para a reconstrução de frequências esparsas e arbitrárias de um sinal, apesar de não ter a mesma garantia de desempenho do anterior.

Assim, se em vez de integrar o algoritmo de aproximação esparso estruturado  $\mathbb{T}(x, K, c, v)$  no algoritmo IHT, se integrar  $\mathbb{T}_h(x, K, c, v)$ , obtém-se uma versão do SIHT mais eficiente computacionalmente.

Na dedução dos algoritmos SIHT, os autores assumiram que as componentes de frequência do sinal  $x$ ,  $K$ -esparso estão na frame redundante. Estes algoritmos podem ser ajustados de modo a reconstruir sinais em que as frequências não estão necessariamente na grelha. Basta para isso alterar o algoritmo de aproximação esparso estruturado utilizado, fazendo depois um ajuste quadrático a partir das aproximações esparsas encontradas na grelha.

Os algoritmos SIHT e uma vez que são baseados no periodograma, têm ainda uma limitação no que diz respeito à reconstrução de frequências muito próximas, apesar de terem um melhor desempenho que os algoritmos de CS usuais. Uma maneira de ultrapassar esta questão é utilizar os métodos de estimação espectral baseados em valores e vectores próprios, nomeadamente o MUSIC, pois uma vez que estes não dependem de frames redundantes, não há necessidade de recorrer aos modelos de esparsidade estruturados para controlar a coerência. Em vez de integrar o modelo de inibição de coerência no IHT, integra-se o MUSIC, obtendo o chamado SIHT via Root Music.



## Capítulo 5

# Resultados

É difícil estudar o desempenho de um algoritmo, uma vez que existem vários tipos de erros a serem considerados: o número de frequências que o algoritmo descobre relativamente o número de frequências de sinal, o erro dos valores estimados para as frequências e o erro de reconstrução.

O erro de reconstrução sózinho não é um bom indicador, pois se duas das frequências do sinal estiverem muito próximas, o algoritmo pode considerar na reconstrução do sinal que este tem apenas uma frequência, dando um erro de reconstrução pequeno.

Depois de verificarmos se o número de frequências encontradas está correto e se os respectivos valores são boas aproximações, o erro de reconstrução permite-nos saber se as amplitudes do sinal estimado estão próximas das exatas.

Para verificar a qualidade da estimação dos valores das frequências, tivemos de definir uma forma de medir o erro dos valores obtidos:

-No caso de um sinal composto por uma só sinusóide, sendo  $f$  a frequência exata e  $f_a$  a frequência aproximada obtida pelo algoritmo, definimos para erro dos valores das frequências a distância relativa entre estas duas frequências,

$$e_f = \frac{|f - f_a|}{|f|}.$$

-Para um sinal composto por duas sinusóides, considerando que as frequências exatas são  $f_1$  e  $f_2$  e que as frequências aproximadas obtidas pelo algoritmo são  $f_a$  e  $f_b$ , o erro dos valores das frequências é dado por

$$e_f = d_1 + d_2,$$

sendo o valor  $d_1$  a menor distância relativa entre as frequências exatas e as frequências aproximadas,

$$d_1 = \min \left\{ \frac{|f_1 - f_a|}{|f_1|}, \frac{|f_1 - f_b|}{|f_1|}, \frac{|f_2 - f_a|}{|f_2|}, \frac{|f_2 - f_b|}{|f_2|} \right\}$$

e o valor  $d_2$  a distância relativa entre a segunda frequência exata e a frequência aproximada não considerada antes.

-Para um sinal composto por mais do que duas sinusóides, o erro dos valores das frequências é

dado por

$$e_f = d_1 + d_2 + \dots,$$

sendo que  $d_1$  é a menor distância relativa entre as frequências exatas e as frequências aproximadas,  $d_2$  é a menor distância entre as frequências exatas e as aproximadas não consideradas antes e assim por diante.

Para calcular o erro de reconstrução do sinal, utilizámos o erro normalizado, dado pela equação (4.10).

Para comparar a performance de dois algoritmos, vamos comparar o seu desempenho no que respeita à estimação dos valores das frequências das sinusóides que compõem os sinais e no que respeita à reconstrução do sinal.

Neste capítulo começamos por comparar o desempenho dos dois algoritmos propostos. Apresentamos depois resultados do desempenho do segundo Algoritmo proposto, que para facilitar chamamos apenas de Algoritmo proposto, seguido dos resultados comparativos do desempenho desse algoritmo com outros algoritmos existentes, nomeadamente com o algoritmo SIHT e o MUSIC (Root Music) propostos por Baraniuk e Duarte.

Os sinais utilizados são não periódicos, são consideradas apenas  $N = 1024$  amostras do sinal e são combinações lineares de sinusóides reais. Para cada situação concreta indicamos quantas são as sinusóides que compõem o sinal, quais as suas amplitudes e quantas amostras utilizamos na sua reconstrução. Para simplificação da escrita, por vezes vamos escrever apenas amplitude da frequência em vez de amplitude da sinusóide com a frequência considerada.

Vamos designar por  $f_0$  a frequência fundamental da DFT,  $\frac{2\pi}{N} = f_0$ . As frequências dos sinais que vamos considerar são da forma  $r \frac{2\pi}{N} = r f_0$ , sendo  $r$  um número real e, por abuso de linguagem, dizemos que o valor da frequência é  $r$  em vez de  $r \times f_0$ .

## 5.1 Resultados com os algoritmos propostos

### 5.1.1 Resultados comparativos dos dois algoritmos propostos

Começámos por comparar o desempenho dos dois algoritmos propostos quer no que respeita à estimação dos valores das frequências quer na reconstrução do sinal.

Relativamente à estimação dos valores das frequências, as caixas de bigodes apresentadas nos gráficos da Figura 5.1 mostram os valores da mediana, dos quartis, do máximo e do mínimo dos erros das frequências para ambas os algoritmos, para sinais compostos por duas sinusóides reais de frequências aleatórias e de amplitude 1. Como podemos verificar o Algoritmo proposto 2 apresenta sempre melhores aproximações para os valores das frequências, independentemente do número de amostras considerado.

O gráfico apresentado na Figura 5.2 mostra os erros de reconstrução de sinais composto por duas

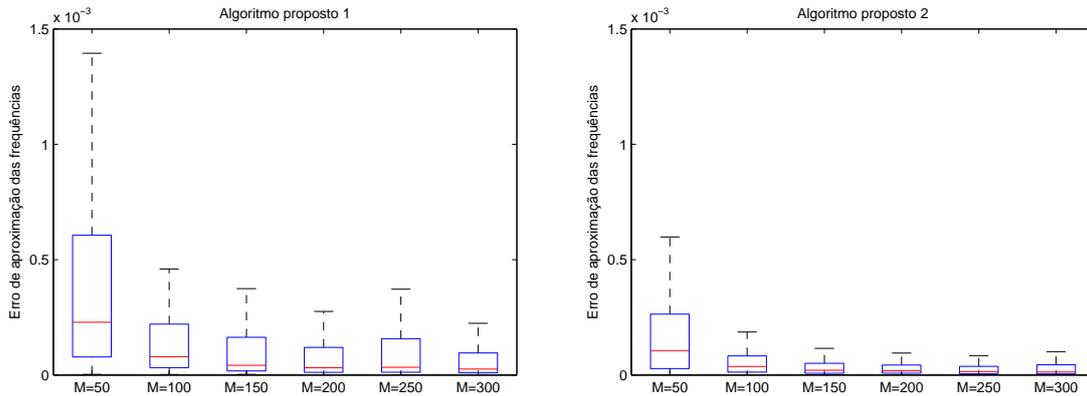


Figura 5.1: Erros dos valores das frequências para sinais compostos com duas sinusóides, utilizando  $M = 50, M = 100, M = 150, M = 200$  e  $M = 250$  amostras, para os Algoritmos proposto 1 e proposto 2. Os valores são calculados a partir dos resultados obtidos em 200 experiências independentes.

sinusóides reais, com frequências aleatórias de amplitude igual a 1, para vários valores de número de amostras, considerando os dois Algoritmos propostos. Como se pode verificar, o Algoritmo proposto 2 dá melhores resultados que o Algoritmo proposto 1.

Não se tendo verificado nenhum exemplo contrário, daqui para a frente, vamos considerar apenas o segundo algoritmo.

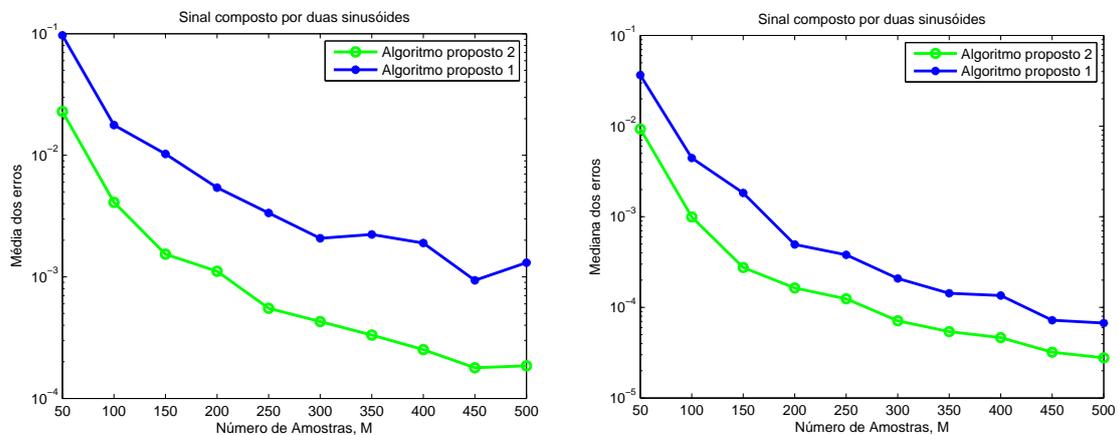


Figura 5.2: Médias e medianas dos erros de reconstrução para sinais compostos por duas sinusóides, utilizando os dois algoritmos apresentados. Os valores são calculados a partir dos resultados obtidos em 400 experiências independentes.

### 5.1.2 Desempenho na reconstrução de um sinal

Como sabemos já, o facto de as frequências não serem múltiplas da frequência fundamental da DFT leva ao aparecimento do *leakage*. No processo de reconstrução de um sinal utilizando o algoritmo proposto, o *leakage* diminui, podendo mesmo desaparecer se as frequências encontradas forem as originais.

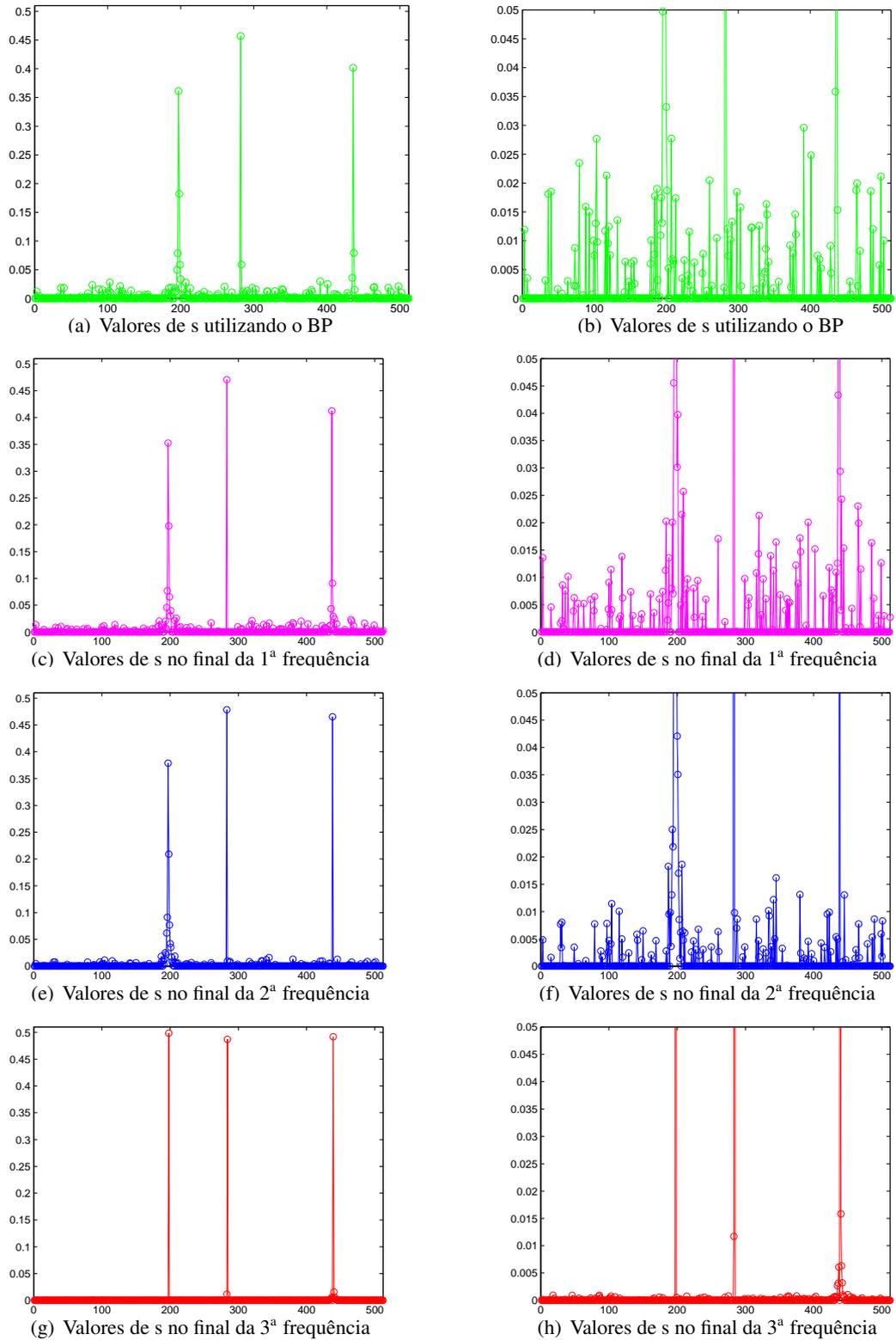


Figura 5.3: Valores aproximados de  $s$  na reconstrução de um sinal composto por três sinusóides reais. Os gráficos do lado direito são obtidos a partir dos correspondentes no lado esquerdo, fazendo um zoom em  $y$ . Em (a) utilizou-se o BP para obter a reconstrução do sinal. Nas alíneas (c), (e) e (g) apresentam-se os resultados das 3 iterações do algoritmo proposto, na reconstrução da segunda, terceira e primeira frequências respetivamente.

Na Figura 5.3, desde a alínea (c) até à alínea (h), podemos ver os gráficos correspondentes às três iterações realizadas na reconstrução de um sinal composto por três sinusóides reais,  $K = 6$ , com frequências aleatórias de amplitude 1, considerando  $M = 100$  amostras. Os gráficos das alíneas (a) e (b) apresentam a reconstrução do sinal utilizando o BP. O algoritmo começou por reconstruir a frequência do meio, que era a que apresentava maior valor inicialmente. Depois reconstruiu a terceira e por fim a primeira.

O erro de reconstrução do sinal utilizando o algoritmo é de cerca de  $7.5 \times 10^{-3}$ , sendo que o erro de reconstrução utilizando o BP é de cerca de 0.3143.

Os gráficos do lado direito correspondem aos do lado esquerdo considerando um intervalo menor no eixo dos  $yy$ , para se conseguir ver melhor o que acontece ao *leakage* existente no final da realização de cada uma das iterações, ou seja, depois de se encontrar o valor aproximado da frequência correspondente a essa iteração.

### 5.1.3 Desempenho na estimação das frequências

Estudámos o comportamento do Algoritmo proposto na estimação dos valores das frequências.

A caixa de bigodes apresentada no gráfico da Figura 5.4 mostra os valores da mediana, dos quartis, do máximo e do mínimo dos erros das frequências. Os valores das medianas dos erros são pequenos o que mostra que o Algoritmo proposto se comporta bem na estimação dos valores das frequências.

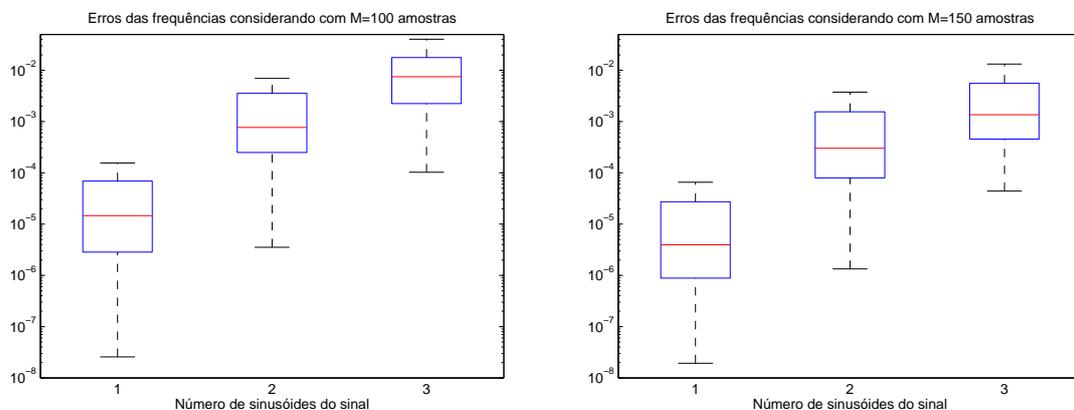


Figura 5.4: Erros dos valores das frequências para sinais compostos por uma, duas e três sinusóides, utilizando  $M = 100$  e  $M = 150$  amostras. Os valores são calculados a partir dos resultados obtidos em 200 experiências independentes.

### 5.1.4 Número de amostras necessárias para a reconstrução de um sinal em função da esparsidade do sinal

O número de amostras necessárias para a reconstrução de um sinal depende do valor da esparsidade. O número de amostras  $M$ , que necessitamos para um mesmo desempenho, aumenta de acordo

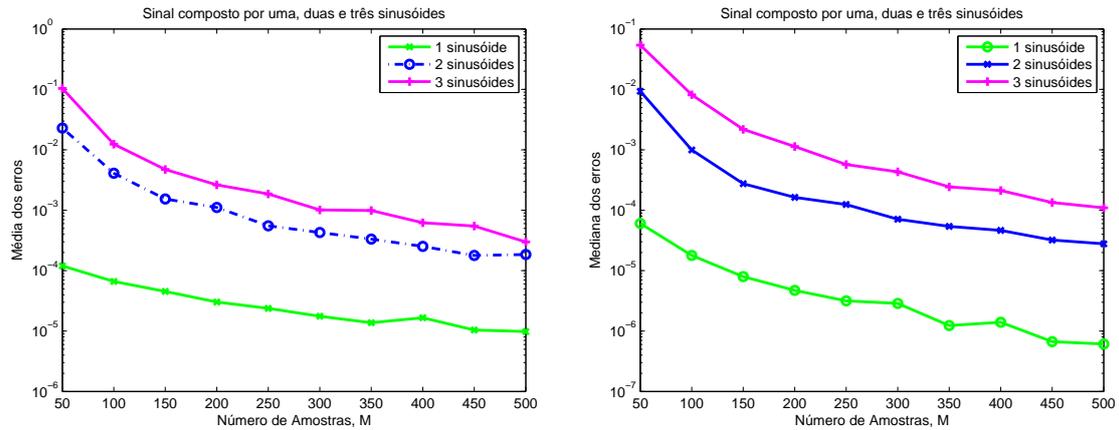


Figura 5.5: Médias e medianas dos erros de reconstrução, utilizando o algoritmo proposto para sinais compostos por uma, duas e três sinusóides, o que corresponde a  $K = 2$ ,  $K = 4$  e  $K = 6$  respectivamente. Os valores são calculados a partir dos resultados obtidos em 400 experiências independentes.

com a esparsidade do sinal. O gráfico apresentado na Figura 5.5 ilustra esta situação para sinais compostos com uma, duas e três sinusóides com frequências aleatórias de amplitude 1.

### 5.1.5 Desempenho na reconstrução de sinais composto por sinusóides de amplitudes diferentes

Para estudar o comportamento do algoritmo na reconstrução de sinais compostos por sinusóides com frequências aleatórias de amplitudes diferentes, fizemos algumas experiências. A Figura 5.6 mostra o resultado da reconstrução de um sinal composto por duas sinusóides com frequências de amplitudes  $A_1 = 0.1$  e  $A_2 = 0.01$  e a Figura 5.7 mostra o resultado da reconstrução de um sinal composto por três sinusóides com frequências de amplitudes  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 0.01$  e  $A_3 = 0.05$ .

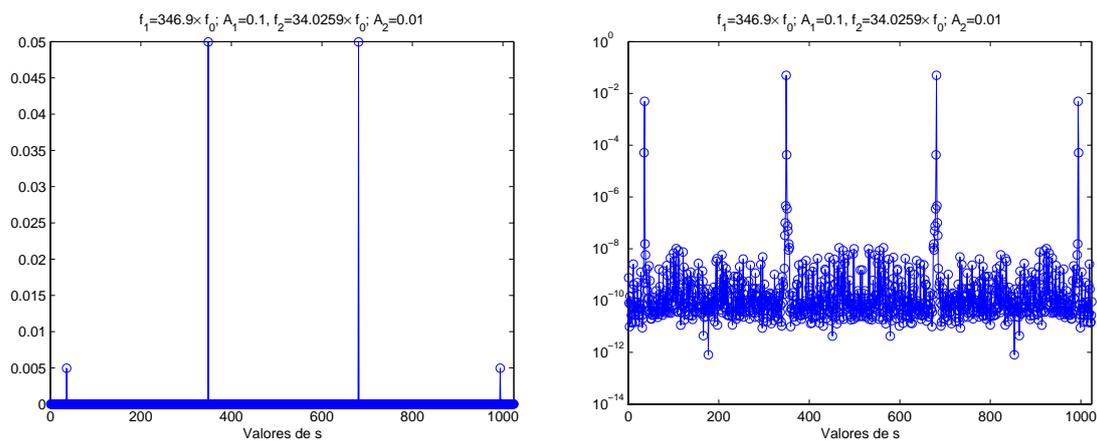


Figura 5.6: Valores aproximados das frequências, para um sinal composto por duas sinusóides reais com amplitudes 0.1 e 0.01. Utilizamos  $M = 100$  amostras.

Como podemos verificar, em ambas as situações temos uma boa reconstrução do sinal.

Tendo em atenção o estudo apresentado na página 92, este resultado era esperado. Atendendo à

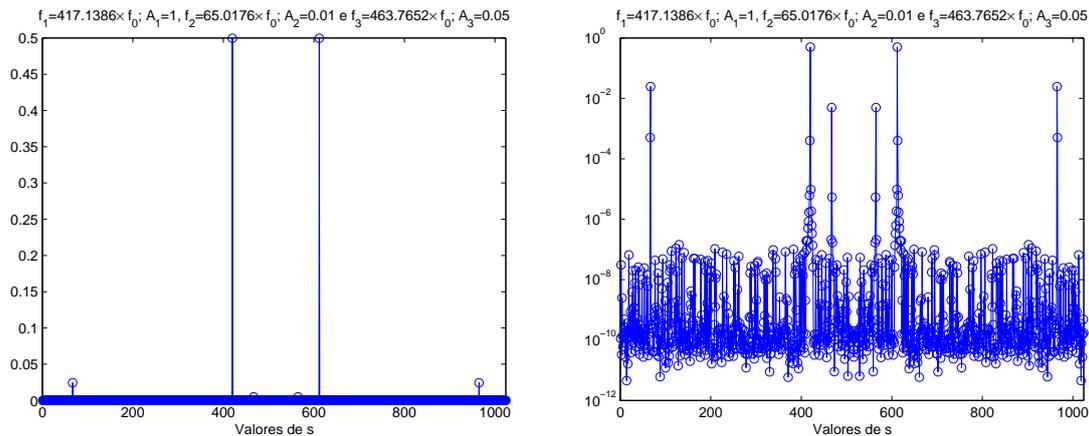


Figura 5.7: Valores aproximados das frequências, para um sinal composto por três sinusóides reais com amplitudes 1, 0.01 e 0.05. Utilizamos  $M = 150$  amostras.

desigualdade (4.8), sabemos que o número de condição da matriz, no caso da experiência apresentada na Figura 5.7 é inferior a  $\sqrt{1 + \sum_{k=1}^3 (A_k)^2} = 1.4147$  e é inferior a  $\sqrt{1 + \sum_{k=1}^2 (A_k)^2} = 1.0025$  no caso da experiência apresentada na Figura 5.6, sendo  $A_k$  a amplitude da frequência  $k$ , donde podemos concluir que o sistema é bem comportado.

Para uma melhor visualização do que acabamos de dizer, vejamos os gráficos das Figuras 5.8 e 5.9. A Figura 5.8 mostra como se relaciona o valor da amplitude da sinusóide de um sinal com o número de condição da matriz cujas colunas são os vetores da frame. A Figura 5.9 mostra como se relaciona o valor da amplitudes de uma sinusóide de um sinal composto por duas sinusóides, tendo uma delas amplitude 1 e a outra amplitude variável, com o majorante do número de condição.

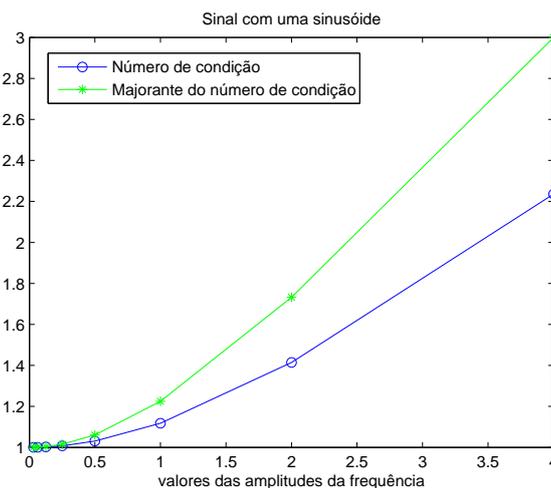


Figura 5.8: Gráfico que relaciona o valor da amplitude da frequência da sinusóide do sinal com o número de condição da matriz, cujas colunas são todos os vetores da frame e com o majorante do número de condição:  $\sqrt{1 + 2 \times \left(\frac{A}{2}\right)^2}$ .

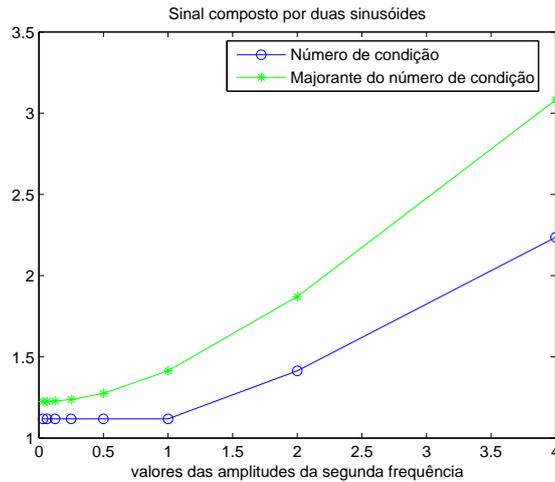


Figura 5.9: Gráfico que relaciona o valor da amplitude de uma das sinusóides de um sinal, em que a outra sinusóide é considerada com amplitude fixa igual a 1, com o número de condição da matriz, cujas colunas são todos os vectores da frame e com o majorante do número de condição:  $\sqrt{1 + 2 \times 0.5^2 + 2 \times (\frac{A}{2})^2}$ .

### 5.1.6 Desempenho na reconstrução de sinais compostos por sinusóides com frequências próximas

Estudámos também o comportamento do algoritmo na reconstrução de sinais compostos por sinusóides com frequências próximas. Considerámos um sinal composto por duas sinusóides, sendo a frequência de uma delas fixa,  $f_1$  e a outra,  $f_2 = f_1 + \delta$ , com

$$\delta = [0.1 : 0.1 : 1, 1.25 : 0.25 : 5.5],$$

(usando a notação habitual no Matlab), ambas com amplitude 1 e calculámos os erros de reconstrução obtidos para  $M = 100$  e  $M = 150$  amostras. Como podemos observar na Figura 5.10, obtemos uma boa reconstrução dos sinais.

A Tabela 5.1 mostra os valores obtidos para as frequências na realização de uma experiência. Como podemos observar, considerando que as frequências exatas são  $f_1$  e  $f_2$  e que as frequências aproximadas obtidas pelo algoritmo são  $f_a$  e  $f_b$ , os valores são bastante próximos, mesmo para valores pequenos da distância  $\delta$  entre as frequências. Os valores  $d_1$  e  $d_2$  que são apresentados na tabela, foram considerados para fazer um estudo mais pormenorizado dos erros obtidos para as posições das frequências,  $e_f$ .

A caixa de bigodes apresentada no gráfico da Figura 5.11 mostra os valores da mediana, dos quartis, do máximo e do mínimo dos erros obtidos para cada um dos valores  $\delta$  considerado no conjunto  $[0.1 : 0.1 : 1, 1.25 : 0.25 : 5.5]$  para distância entre as frequências  $f_1$  e  $f_2$ . Os valores das medianas dos erros são pequenos, mesmo para frequências próximas, o que mostra que o algoritmo se comporta

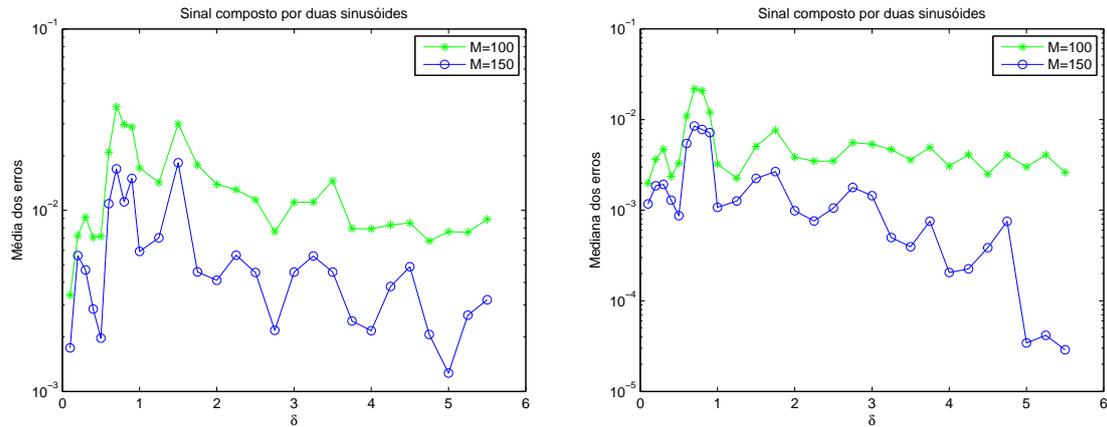


Figura 5.10: Médias e medianas dos erros de reconstrução, para cada um dos valores das distâncias entre as frequências:  $[0.1:0.1:1, 1.25:0.25:5.5]$ , para um sinal composto por duas sinusóides, considerando  $M = 100$  e  $M = 150$  amostras respectivamente. Os valores são calculados a partir dos resultados obtidos em 200 experiências independentes.

delta	$f_1$	$f_2$	$f_a$	$f_b$	$d_1$	$d_2$
0.1000	463.7655	463.8655	463.7746	464.8000	0.0000	0.0020
0.2000	463.7655	463.9655	463.7634	464.8000	0.0000	0.0018
0.3000	463.7655	464.0655	464.0754	463.7000	0.0000	0.0001
0.4000	463.7655	464.1655	464.1719	463.7612	0.0000	0.0000
0.5000	463.7655	464.2655	464.2740	463.7570	0.0000	0.0000
0.6000	463.7655	464.3655	463.8000	464.3915	0.0001	0.0001
0.7000	463.7655	464.4655	464.5649	463.6444	0.0002	0.0003
0.8000	463.7655	464.5655	463.5000	464.6535	0.0002	0.0006
0.9000	463.7655	464.6655	463.5275	464.7444	0.0002	0.0005
1.0000	463.7655	464.7655	464.6704	463.7784	0.0000	0.0002
1.2500	463.7655	465.0155	463.7514	465.0150	0.0000	0.0000
1.5000	463.7655	465.2655	463.6254	465.3196	0.0001	0.0003
1.7500	463.7655	465.5155	463.5775	465.5324	0.0000	0.0004
2.0000	463.7655	465.7655	463.6746	465.7745	0.0000	0.0002
2.2500	463.7655	466.0155	463.7523	466.0152	0.0000	0.0000
2.5000	463.7655	466.2655	466.3514	463.7732	0.0000	0.0002
2.7500	463.7655	466.5155	463.6244	466.5223	0.0000	0.0003
3.0000	463.7655	466.7655	466.7887	463.7592	0.0000	0.0000
3.2500	463.7655	467.0155	463.7903	467.0085	0.0000	0.0001
3.5000	463.7655	467.2655	463.6359	467.2597	0.0000	0.0003
3.7500	463.7655	467.5155	463.6465	467.5200	0.0000	0.0003
4.0000	463.7655	467.7655	467.7803	463.7623	0.0000	0.0000
4.2500	463.7655	468.0155	463.7768	468.0137	0.0000	0.0000
4.5000	463.7655	468.2655	463.7563	468.2651	0.0000	0.0000
4.7500	463.7655	468.5155	468.5613	463.7663	0.0000	0.0001
5.0000	463.7655	468.7655	468.7810	463.7637	0.0000	0.0000
5.2500	463.7655	469.0155	463.7711	469.0152	0.0000	0.0000
5.5000	463.7655	469.2655	463.7810	469.2603	0.0000	0.0000

Tabela 5.1: Valores aproximados para as frequências  $f_1$  e  $f_2 = f_1 + \delta$  através do Algoritmo proposto e valores  $d_1$  e  $d_2$  das distâncias relativas entre as frequências exatas e aproximadas.

bem na estimação dos valores das frequências.

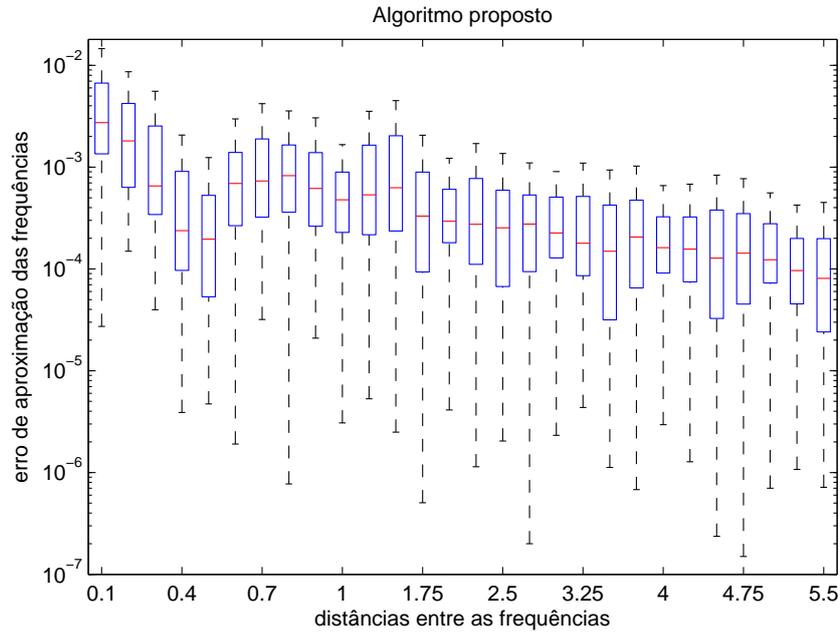


Figura 5.11: Erros de aproximação das frequências para cada um dos valores das distâncias entre estas:  $[0.1:0.1:1, 1.25:0.25:5.5]$ , para um sinal composto por duas sinusóides, considerando  $M = 150$  amostras. Os valores são calculados a partir dos resultados obtidos em 200 experiências independentes.

Os resultados obtidos estão de acordo com o expectável, uma vez que a função interpoladora que minimiza a norma  $\ell_1$  é muito localizada, ao contrário do que acontece com a função interpoladora que minimiza a norma  $\ell_2$ , a função *sinc*, como se pode ver na Figura 5.12.

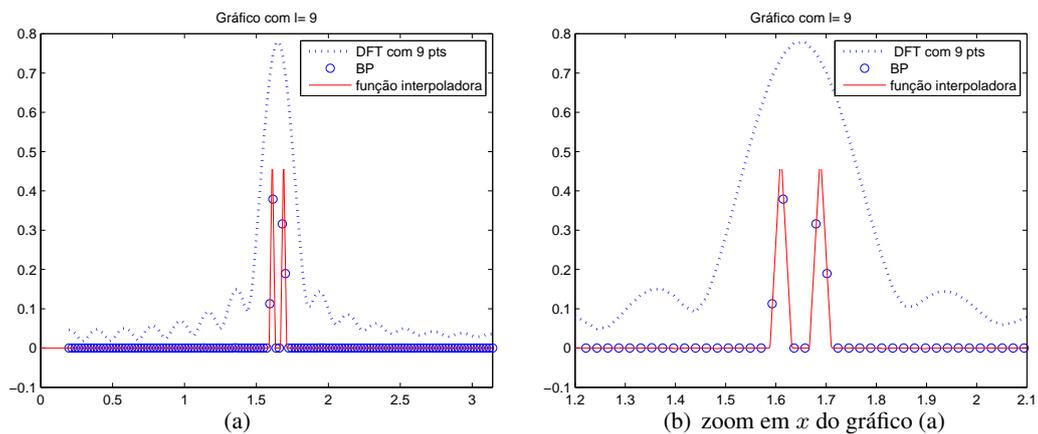


Figura 5.12: Minimização da norma  $\ell_1$  utilizando o BP e a função interpoladora com fator de sobre-amostragem  $l = 9$ . A curva a pontado é a função interpoladora que minimiza a norma  $\ell_2$ , a função *sinc*. O gráfico (b) é o zoom em  $x$  do gráfico (a).

Atendendo novamente à desigualdade (4.8), temos que o número de condição da matriz é agora inferior a 1.5811, donde o sistema é bem condicionado.

O gráfico da Figura 5.13 mostra como se relaciona a distância entre as frequências das duas sinusóides que compoem um sinal com o número de condição da matriz cujas colunas são os vetores da frame e com o majorante do número de condição. Para isso consideramos um sinal com duas sinusóides, ambas com amplitude 1, sendo a frequência de uma das sinusóides  $f_1$ , fixa e a outra  $f_2 = f_1 + \delta$ , com

$$\delta = [0.001 : 0.05 : 0.9510, 0.99].$$

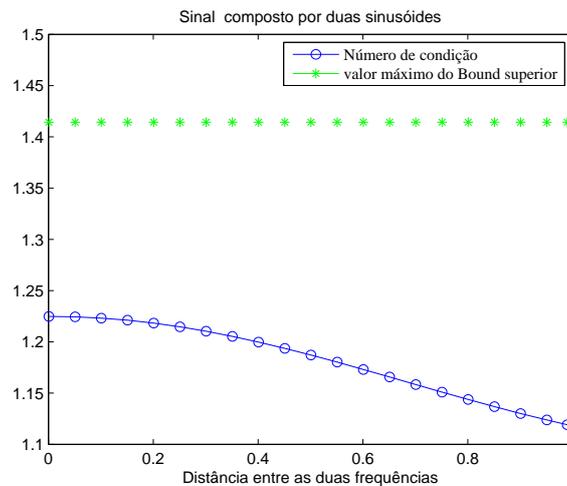


Figura 5.13: Gráfico que relaciona o valor das distâncias entre as frequências das duas sinusóides que compoem um sinal, onde se considera que a frequência de uma das sinusóides é fixa, com o número de condição da matriz, cujas colunas são todos os vetores da frame e com o majorante do número de condição:  $\sqrt{1 + 2 \times 0.5^2 + 2 \times 0.5^2}$ .

### 5.1.7 Desempenho na reconstrução de sinais cujas amostras contêm ruído

Vamos agora estudar a robustez do algoritmo proposto ao ruído introduzido nas amostras de um sinal. Para isso vamos considerar duas experiências, considerando um sinal composto por duas sinusóides com frequências aleatórias e de amplitude 1, para  $M = 100$  e  $M = 150$  amostras. O erro é calculado para dez valores do *signal-to-noise ratio* (SNR) e os resultados podem ver-se na Figura 5.14. Como se pode verificar, o algoritmo tem um desempenho bastante bom.

Vamos agora comparar os desempenhos do algoritmo proposto com o dos algoritmos MUSIC e SIHT apresentados na secção 4.2.3.

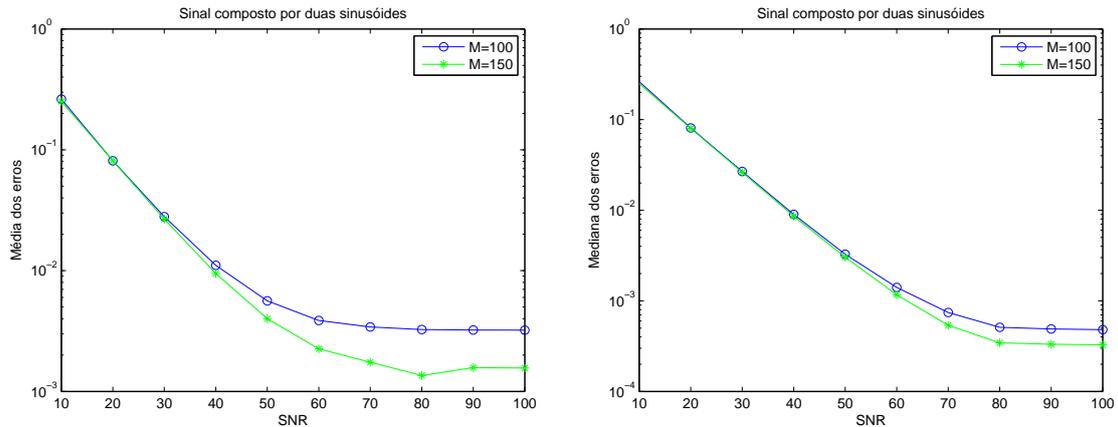


Figura 5.14: Médias e medianas dos erros de reconstrução para sinais compostos por duas sinusóides, com ruído, considerando  $M = 100$  e  $M = 150$  amostras.

## 5.2 Comparação do desempenho do algoritmo proposto com o de outros algoritmos

### 5.2.1 Comparação dos três algoritmos na reconstrução de um sinal

Para comparar o desempenho do algoritmo proposto, com o do MUSIC e do SIHT, consideramos um sinal composto por duas sinusóides com frequências aleatórias e de amplitude 1. Como podemos ver na Figura 5.15, o algoritmo agora apresentado tem melhor desempenho.

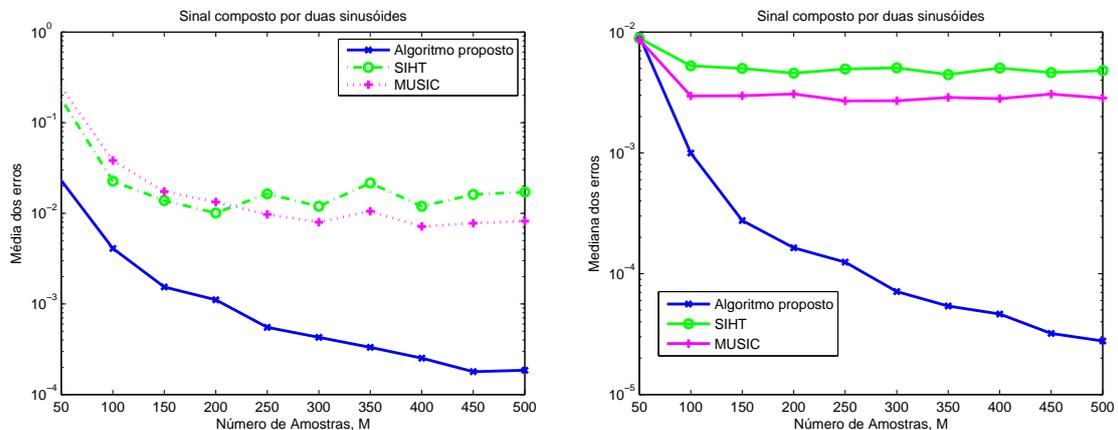


Figura 5.15: Médias e medianas dos erros de reconstrução utilizando os algoritmos SIHT, MUSIC e o proposto, para sinais compostos por duas sinusóides. Os valores são calculados a partir dos resultados obtidos em 400 experiências independentes.

### 5.2.2 Comparação dos três algoritmos na reconstrução de sinais compostos por sinusóides com amplitudes diferentes

Para comparar o comportamento do Algoritmo proposto com o dos algoritmos MUSIC e SIHT na reconstrução de sinais compostos por sinusóides de amplitudes diferentes, utilizamos um sinal

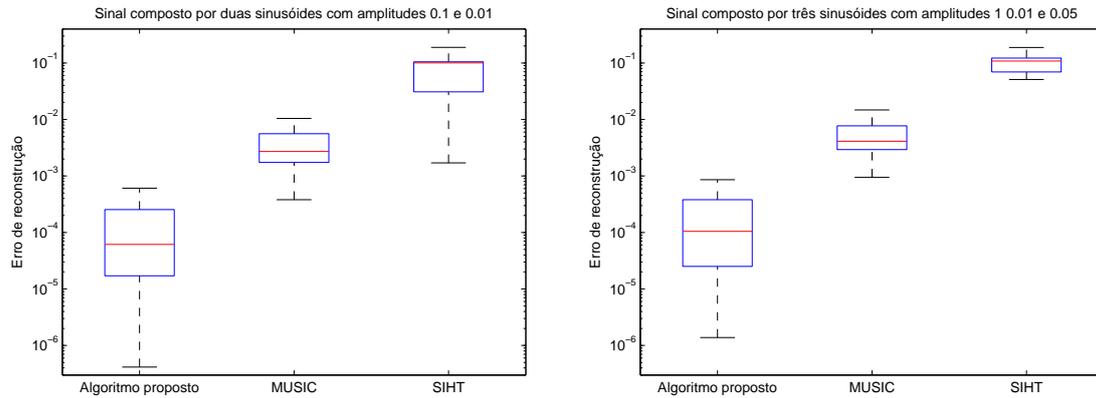


Figura 5.16: Erros de reconstrução comparando o Algoritmo proposto com os algoritmos MUSIC e SIHT para um sinal composto por duas sinusóides e para um sinal composto por três sinusóides, utilizando  $M = 150$  amostras. Os valores foram obtidos a partir dos resultados de 200 experiências independentes.

composto por duas sinusóides com frequências aleatórias de amplitudes  $A_1 = 0.1$  e  $A_2 = 0.01$  e um sinal composto por três sinusóides com frequências aleatórias de amplitudes  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 0.01$  e  $A_3 = 0.05$ . Foram consideradas em ambos os casos  $M = 150$  amostras.

O valor médio dos erros de reconstrução obtidos são os apresentados na Tabela 5.2.

	Algoritmo Proposto	MUSIC	SIHT
Sinal com duas sinusóides de amplitudes 0.1 e 0.01	0.0005	0.0056	0.0801
Sinal com três sinusóides 1, 0.01 e 0.05	0.0004	0.0088	0.1026

Tabela 5.2: Médias dos erros obtidos na reconstrução dos sinais compostos por duas sinusóides e por três sinusóides. Os valores são calculados a partir dos resultados obtidos em 200 experiências independentes.

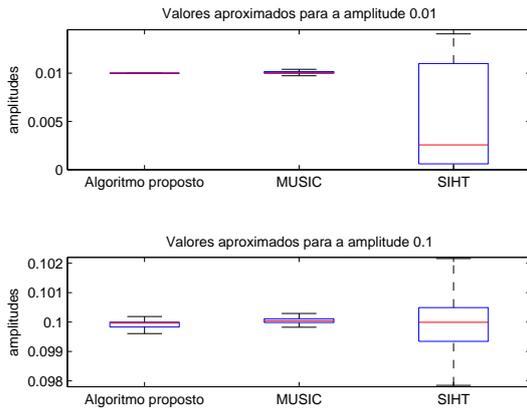
A Figura 5.16 mostra a caixa de bigodes com os erros na reconstrução de cada um dos sinais, para cada um dos algoritmos.

Como se pode ver pelos valores obtidos, o Algoritmo proposto tem um melhor desempenho na reconstrução de sinais com sinusóides com amplitudes diferentes que os restantes.

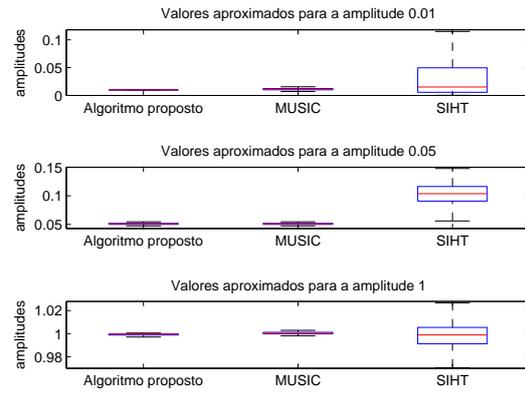
A Figura 5.17 mostra um gráfico com os valores das amplitudes obtidas na reconstrução de cada um dos sinais considerados.

O pior desempenho na reconstrução do sinal é obtido com o algoritmo SIHT. Apesar de o MUSIC apresentar resultados bons para as amplitudes, o Algoritmo proposto apresenta melhores resultados.

Comparámos ainda o desempenho dos algoritmos na estimação dos valores das frequências. As caixa de bigodes apresentadas nas Figuras 5.18 e 5.19 mostram que o SIHT é o que faz pior estimação dos valores das frequências, sendo que o que apresenta melhores aproximações é o Algoritmo proposto.



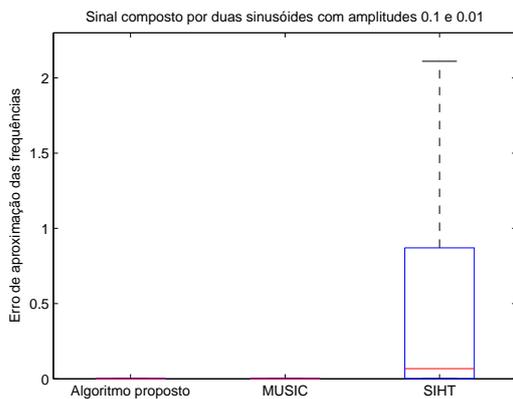
(a) sinal composto por duas sinusóides



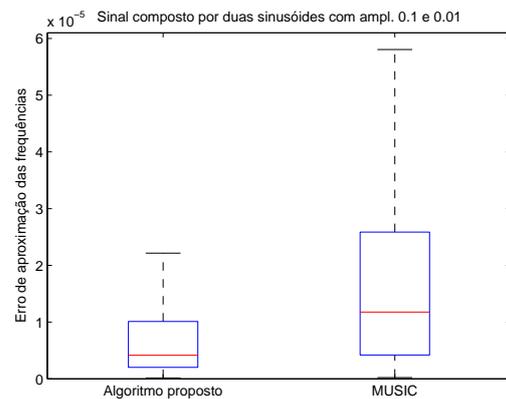
(b) sinal composto por três sinusóides

Figura 5.17: Valores obtidos para as amplitudes na reconstrução de um sinal composto por duas sinusóides de amplitudes 0.1 e 0.01 e para um sinal composto por três sinusóides de amplitudes 1, 0.01 e 0.05, utilizando os três algoritmos. Os valores foram obtidos a partir dos resultados de 200 experiências independentes.

Podemos dizer que o Algoritmo proposto é o que tem um melhor desempenho, pois encontra melhores aproximações para os valores das frequências das sinusóides que compõem o sinal e também melhores valores para as amplitudes. É o algoritmo que melhor se comporta na reconstrução de sinais compostos por sinusóides de amplitudes diferentes.



(a)



(b)

Figura 5.18: Erros de aproximação das frequências para cada um um sinal composto por duas sinusóides de amplitudes 0.1 e 0.01, utilizando os três algoritmos e considerando  $M = 150$  amostras. O gráfico (b) apresenta apenas a comparação entre o Algoritmo proposto e o SIHT. Os valores são calculados a partir dos resultados obtidos em 200 experiências independentes.

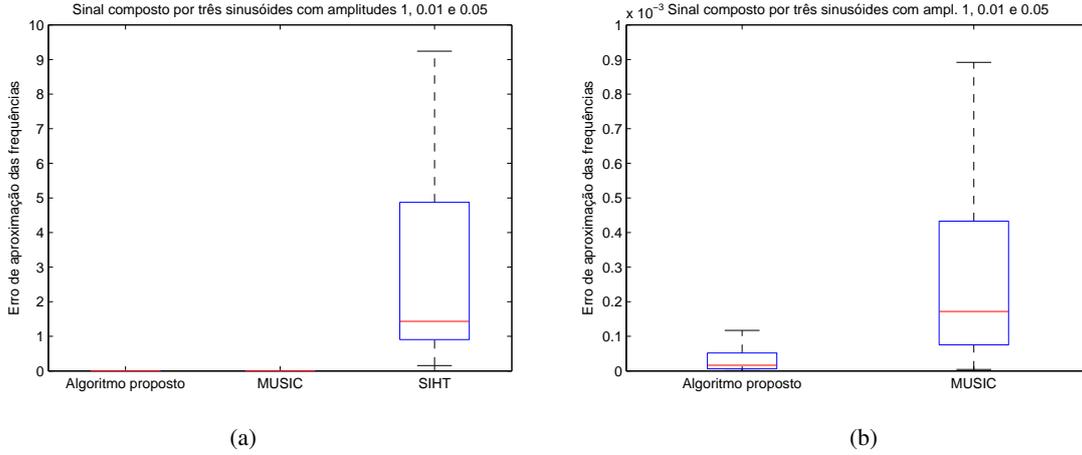


Figura 5.19: Erros de aproximação das frequências para cada um um sinal composto por três sinusóides de amplitudes 1, 0.01 e 0.05, utilizando os três algoritmos e considerando  $M = 150$  amostras. O gráfico (b) apresenta apenas a comparação entre o Algoritmo proposto e o SIHT. Os valores são calculados a partir dos resultados obtidos em 200 experiências independentes.

### 5.2.3 Comparação dos três algoritmos na reconstrução de sinais compostos por sinusóides com frequências próximas

Considerámos sinais compostos por duas sinusóides de amplitude 1, uma com frequência  $f_1$  e outra com frequência  $f_2 = f_1 + \delta$ , para

$$\delta = [0.1 : 0.1 : 1, 1.25 : 0.25 : 5.5].$$

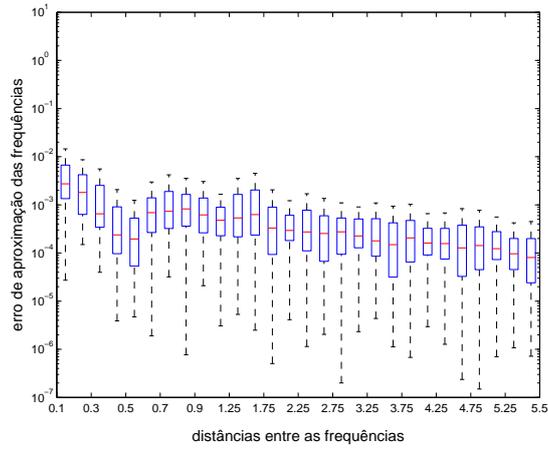
e calculámos os erros obtidos para  $M = 100$  e  $M = 150$  amostras, para cada um dos três algoritmos, o Algoritmo proposto, o SIHT e o MUSIC. Como se pode ver nas Figuras 5.20 e 5.21, o Algoritmo proposto tem um melhor desempenho que os restantes.

Note-se que, embora os erros de reconstrução, dados pela equação (4.10), para os algoritmos SIHT e MUSIC sejam pequenos para valores de  $\delta$  inferiores a 1, os valores aproximados obtidos para as frequências podem ser bastante diferentes dos valores exatos. Como se pode verificar na Tabela 5.3, onde são apresentados os valores aproximados obtidos para as frequências na realização de uma experiência utilizando os três algoritmos e considerando  $M = 100$  amostras, os valores aproximados para as frequências  $f_1 = 463.7655$  e  $f_2 = f_1 + 0.2 = 463.9655$  são, no MUSIC  $f_a = 285.4111$  e  $f_b = 463.8631$  e no SIHT  $f_a = 0$  e  $f_b = 463.8652$ .

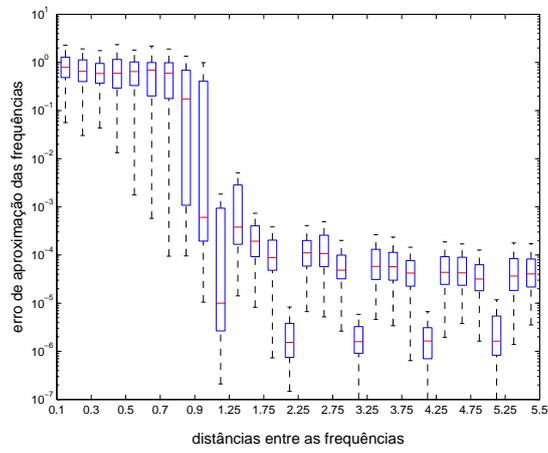
A justificação para o erro de reconstrução ser pequeno com frequências tão diferentes é que, como as duas frequências exatas são próximas, os algoritmos consideram o problema de reconstrução como se se tratasse apenas de uma frequência. A amplitude de uma das frequências encontradas é muito próxima de zero. No caso apresentado, para o MUSIC as amplitudes são 0.0249 e 0.9481 respetivamente e para o SIHT, 0.0023 e 0.9494 respetivamente.

A caixa de bigodes apresentada no gráfico (b) e (c) da Figura 5.22 mostra que para valores de

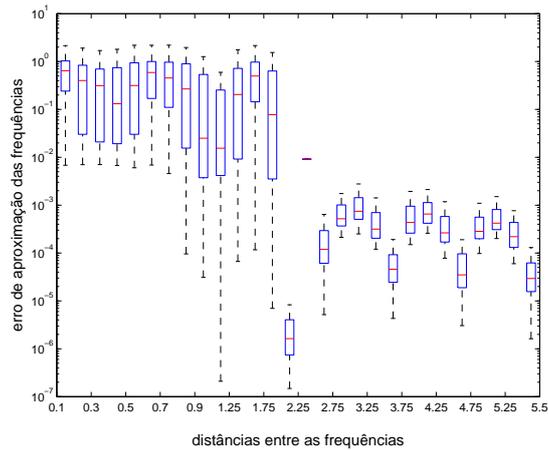




(a) Algoritmo proposto



(b) MUSIC



(c) SIHT

Figura 5.22: Erros de aproximação das frequências para cada um dos valores das distâncias entre estas:  $[0.1:0.1:1, 1.25:0.25:5.5]$  e para cada um dos três algoritmos, para um sinal com duas sinusóides, considerando  $M = 150$  amostras. Os valores são calculados a partir dos resultados obtidos em 200 experiências independentes.

delta	$f_1$	$f_2$	$f_a$ alg. proposto	$f_b$ alg. proposto	$f_a$ MUSIC	$f_b$ MUSIC	$f_a$ SIHT	$f_b$ SIHT
0.1000	463.7655	463.8655	463.7638	464.8000	96.8495	463.8151	0.0000	463.8145
0.2000	463.7655	463.9655	463.7621	464.8000	285.4111	463.8631	0.0000	463.8652
0.3000	463.7655	464.0655	464.0734	464.0000	237.8034	463.9212	460.4746	463.9209
0.4000	463.7655	464.1655	463.8000	464.2148	180.3701	463.9687	67.4337	463.9488
0.5000	463.7655	464.2655	464.2000	463.7007	38.5218	464.1005	461.1448	463.9622
0.6000	463.7655	464.3655	463.9000	464.4437	387.1215	464.1947	163.5634	464.0608
0.7000	463.7655	464.4655	463.4965	464.5676	428.8096	464.0265	75.5974	463.6149
0.8000	463.7655	464.5655	464.6005	463.7246	462.3815	464.4494	461.2208	464.7953
0.9000	463.7655	464.6655	464.6176	463.7699	295.9883	463.8515	0.0000	464.9108
1.0000	463.7655	464.7655	463.5866	464.8085	463.7678	464.7626	464.9923	490.5494
1.2500	463.7655	465.0155	463.7514	465.0150	68.6149	464.1662	461.5416	465.0889
1.5000	463.7655	465.2655	464.0000	464.0000	463.7423	465.2436	137.5954	463.7446
1.7500	463.7655	465.5155	465.5951	463.7193	463.7818	465.5202	0.0000	465.7838
2.0000	463.7655	465.7655	465.7338	463.7664	463.7658	465.7654	0.0000	465.8673
2.2500	463.7655	466.0155	463.7589	466.0153	463.7697	466.0378	0.0000	463.6944
2.5000	463.7655	466.2655	463.9690	466.3458	463.7694	466.2667	0.0000	463.7219
2.7500	463.7655	466.5155	463.6528	466.5206	463.7626	466.5180	463.6997	466.5870
3.0000	463.7655	466.7655	463.7099	466.7671	463.7682	466.7648	463.6670	466.8368
3.2500	463.7655	467.0155	466.9578	463.7777	463.7762	467.0055	463.7199	467.0419
3.5000	463.7655	467.2655	463.9310	467.3406	463.7610	467.2552	463.7567	467.2630
3.7500	463.7655	467.5155	467.5542	463.7724	463.7589	467.5107	463.7215	467.5443
4.0000	463.7655	467.7655	467.7951	463.7592	463.7651	467.7661	463.6650	467.8415
4.2500	463.7655	468.0155	468.0099	463.7665	463.7680	468.0172	463.7300	468.0409
4.5000	463.7655	468.2655	468.3618	463.7655	463.7608	468.2690	463.7679	468.2572
4.7500	463.7655	468.5155	463.7237	468.5170	463.7663	468.5115	463.7251	468.5426
5.0000	463.7655	468.7655	463.7077	468.7666	463.7655	468.7652	463.6931	468.8127
5.2500	463.7655	469.0155	463.7683	469.0152	463.7676	469.0130	463.7265	469.0420
5.5000	463.7655	469.2655	463.7585	469.2652	463.7722	469.2567	463.7570	469.2574

Tabela 5.3: Valores aproximados para as frequências  $f_1$  e  $f_2 = f_1 + \delta$  através do Algoritmo proposto, do MUSIC e do SIHT respectivamente.

amplitudes corretas das frequências.

O MUSIC é bom para localizar frequências distanciadas de mais de uma unidade, melhor que o Algoritmo proposto, mas não é bom para reconstruir o sinal. O Algoritmo proposto tem melhor desempenho na estimação dos valores das frequências e reconstrução de sinais com frequências próximas.

#### 5.2.4 Comparação dos três algoritmos na reconstrução de sinais com ruído

Para comparar o comportamento do Algoritmo proposto com o dos algoritmos MUSIC e SIHT na reconstrução de sinais com ruído, utilizamos um sinal composto por duas sinusóides, com frequências aleatórias. Calculamos o erro quadrático obtido na reconstrução do sinal utilizando os valores do *signal-to-noise ratio* (SNR) iguais a 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100. Os resultados podem ver-se na Figura 5.23. Como se pode verificar, o algoritmo tem um pior desempenho para valores de SNR inferiores a 40, a que correspondem valores de desvio padrão de 0.7782, 0.2461 e 0.0778 tendo depois um desempenho melhor e bastante bom.

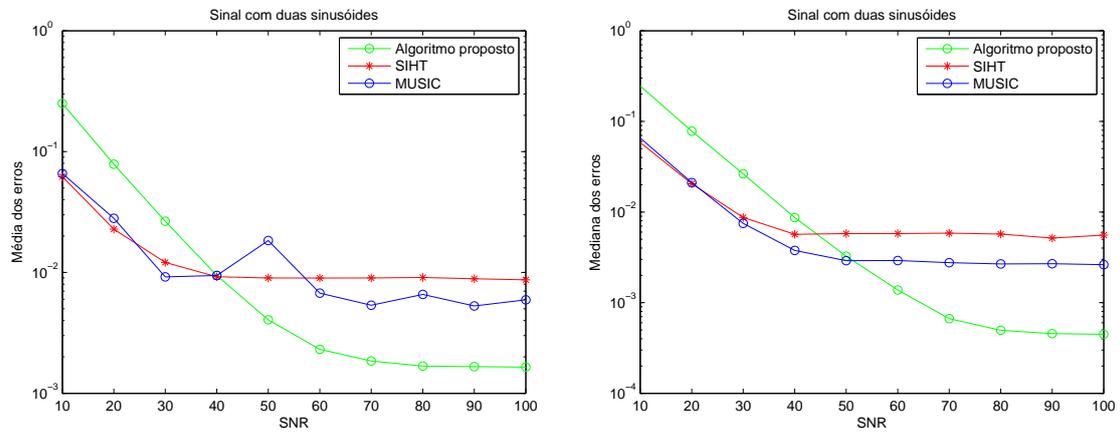


Figura 5.23: Médias e medianas dos erros de reconstrução, comparando o algoritmo proposto, com os algoritmos SIHT e MUSIC, para um sinal composto por duas sinusóides com frequências aleatórias, com ruído, considerando  $M = 150$  amostras. Os valores são calculados a partir dos resultados obtidos em 200 experiências independentes.



## Capítulo 6

# Conclusões

A utilização de amostragem uniforme, conduz à reconstrução perfeita do sinal se a taxa de amostragem for superior ao dobro da frequência máxima do sinal. É possível generalizar esta condição suficiente para casos de amostragem não uniforme, sendo que a densidade das amostras deverá ser superior a um certo limite (muitas vezes associado ao nome de Nyquist).

Landau [4] provou que não se pode garantir uma amostragem estável e a subsequente reconstrução do sinal utilizando uma taxa de amostragem inferior à de Nyquist, independentemente da localização das amostras e da natureza do conjunto que as frequências ocupam.

Com amostragem não uniforme aleatória, se os instantes de amostragem seguirem uma distribuição de Poisson a amostragem é *alias-free*, conseguindo-se uma estimação do espetro com uma taxa de amostragem inferior à taxa de Nyquist, não sendo contudo possível reconstruir o sinal.

É portanto necessária menos densidade de amostras para estimar o espetro do que para reconstruir o sinal.

Se um sinal é esparso ou compressível, podemos utilizar a teoria do compressed sensing para obter as amostras. Em vez de utilizar a taxa de amostragem de Nyquist, podemos reduzir o número de amostras necessárias para reconstruir o sinal explorando a esparsidade ou compressibilidade conforme o caso.

Nesta dissertação apresentamos dois novos algoritmos que permitem fazer estimação espectral e estimação do sinal original, para o caso em que as frequências das sinusóides que compõem o sinal não são múltiplas da frequência fundamental da DFT, utilizando a teoria do CS e a minimização da norma  $l_1$ .

Na construção dos algoritmos propostos foi tirado partido do facto da função que minimiza a norma  $l_1$  ser localizada e tanto mais quando mais se aumenta a resolução.

Para estudar o desempenho do algoritmo no que diz respeito à estimação dos valores das frequências das sinusóides que compõem os sinais, definimos o erro dos valores da frequência,  $e_f$ , da seguinte forma:

Se o sinal é composto por uma sinusóide com frequência  $f$ , o erro dos valores das frequências é

dado por

$$e_f = \frac{|f - f_a|}{|f|},$$

sendo  $f_a$  a frequência aproximada obtida pelo algoritmo;

Se o sinal é composto por duas sinusóides com frequências  $f_1$  e  $f_2$ , e  $f_a$  e  $f_b$  são as frequências aproximadas obtidas pelo algoritmo, o erro dos valores das frequências é dado por

$$e_f = d_1 + d_2,$$

sendo  $d_1$  a menor distância relativa entre as frequências exatas e as frequências aproximadas,

$$d_1 = \min \left\{ \frac{|f_1 - f_a|}{|f_1|}, \frac{|f_1 - f_b|}{|f_1|}, \frac{|f_2 - f_a|}{|f_2|}, \frac{|f_2 - f_b|}{|f_2|} \right\}$$

e  $d_2$  a distância relativa entre a segunda frequência exata e a frequência aproximada não considerada no passo anterior.

Se o sinal é composto por mais do que duas sinusóides, o erro dos valores das frequências é dado por

$$e_f = d_1 + d_2 + \dots,$$

sendo  $d_1$  a menor distância relativa entre as frequências exatas e as frequências aproximadas,  $d_2$  a menor distância entre as frequências exatas e as aproximadas não consideradas antes e assim por diante.

Para estudar o desempenho do algoritmo no que diz respeito à reconstrução do sinal, utilizámos o erro normalizado dado por:

$$\text{erro} = \frac{\|x - \hat{x}\|}{\|x\|},$$

sendo  $x$  o sinal original e  $\hat{x}$  o sinal obtido pelo algoritmo.

Este capítulo resume as conclusões obtidas neste trabalho, mostrando-se que os algoritmos propostos proporcionam melhor desempenho que os métodos previamente existentes.

Apresentamos ainda possíveis trabalhos futuros.

## 6.1 Conclusões obtidas

Em ambos os algoritmos apresentados, transformamos a base da DFT numa frame redundante através da inserção de vetores entre os originais, sendo o número de vetores obtidos tantos quantos a esparsidade do sinal a reconstruir. Passamos a ter o sistema  $y = \Phi\Psi_R s$ , o qual mostrámos ser bem condicionado.

Para resolver o problema de minimização da norma  $l_1$  e uma vez que a matriz é complexa, utilizámos nos nossos algoritmos o programa de otimização convexa, CVX.

O Algoritmo proposto 2 difere do Algoritmo proposto 1 na forma como encontra os intervalos  $[a, b]$  onde são procurados os valores aproximados das frequências.

O Algoritmo proposto 1 escolhe para um dos extremos do intervalo a posição da coluna onde o BP obtém maior valor, ou seja, determina o maximizante da solução do problema  $\min \|s\|_1 : y = \Psi\Phi s = \Theta s$  e escolhe para o outro extremo do intervalo a posição da coluna anterior ou seguinte conforme o valor seja mais próximo do valor máximo encontrado antes.

Para encontrar o intervalo a utilizar no estudo da segunda frequência aplica novamente o BP, mas agora com a condição de o valor máximo não poder ser igual ao valor máximo obtido anteriormente. O procedimento é o mesmo para as restantes frequências.

O Algoritmo proposto 2, tendo em conta que a resolução do problema de minimização da norma  $\ell_1$  é relativamente lento, começa por calcular o maximizante de  $\Psi_c^T \Phi^T y$  e considera o intervalo com centro nesse valor e de largura 0.6. O valor 0.6 foi escolhido depois de experimentalmente se ter verificado que para esta amplitude do intervalo se conseguia reconstruir bem qualquer sinal. Para encontrar o intervalo a utilizar no estudo da segunda frequência, procede-se de igual forma mas considerando apenas a parte do sinal que não foi utilizada, isto é, calculando o maximizante de  $\Psi_c^T \Phi^T R$ , sendo agora o resíduo dado por  $R = y - \Phi \hat{x}$ . O procedimento é o mesmo para as restantes frequências.

O Algoritmo proposto 2 resolve o mesmo problema que o Algoritmo proposto 1, tendo melhor desempenho na estimação das frequências dos sinais compostos por sinusóides reais e também na reconstrução dos mesmos sinais, o estudo feito foi baseado no segundo algoritmo.

O Algoritmo proposto consegue estimar os valores das frequências com uma boa precisão, mesmo para sinais compostos por várias sinusóides com a mesma amplitude e com frequências muito próximas, nomeadamente com diferenças inferiores a  $\frac{2\pi}{N}$ , sendo  $N$  o tamanho do sinal.

Consegue também determinar com boa precisão, os valores das frequências para sinais compostos por sinusóides com amplitudes diferentes, tendo neste caso os valores obtidos para as amplitudes dos sinais uma boa precisão.

Nas situações descritas acima, o valor do erro de reconstrução do sinal é bastante pequeno.

Comparámos o algoritmo proposto com os dois algoritmos existentes e propostos por Baraniuk e Duarte, o Spectral Iterative Hard Thresholding (SIHT) e Root Music (MUSIC), nas seguintes situações:

1. Para sinais compostos por sinusóides da mesma amplitude e frequências aleatórias;

2. Para sinais compostos por sinusóides com amplitudes diferentes e frequências aleatórias;
3. Para sinais compostos por sinusóides da mesma amplitude e frequências com distâncias desde  $0.1 \times \frac{2\pi}{N}$  a  $5 \times \frac{2\pi}{N}$ ;
4. Para sinais compostos por sinusóides com a mesma amplitude, com frequências aleatórias e considerando a existência de ruído;

Em todas as situações o Algoritmo proposto tem melhor desempenho na reconstrução de sinais esparsos, com a exceção do caso onde o ruído é superior a 40 SNR, onde há uma diferença marginal.

No caso em que temos sinais compostos por duas sinusóides com frequências muito próximas, nomeadamente com uma distância inferior a  $\frac{2\pi}{N}$ , os algoritmos MUSIC e SIHT não conseguem encontrar as posições corretas das duas frequências. O MUSIC encontra bem as posições das frequências distanciadas de mais de  $\frac{2\pi}{N}$ , no entanto não consegue encontrar boas estimativas para as amplitudes das sinusóides. O Algoritmo proposto conduz a um menor erro de reconstrução do sinal.

Quando temos sinais compostos por sinusóides com frequências aleatórias de amplitudes bastante diferentes, o algoritmo SIHT não conseguem encontrar as posições corretas das duas frequências. Tanto o Algoritmo proposto como o MUSIC encontram valores aproximados, sendo que os do Algoritmo proposto são mais exatos. Quanto às amplitudes encontradas, o nosso algoritmo apresenta melhores estimações. Também nesta situação, o erro de reconstrução do sinal é mais baixo com o Algoritmo proposto.

Podemos concluir que o Algoritmo proposto é o que tem um melhor desempenho, pois para além de encontrar melhores valores aproximados para as frequências que compõem os sinais, também apresenta melhores valores para as respetivas amplitudes, o que se traduz num erro de reconstrução mais pequeno.

A situação onde apresenta a maior vantagem é na estimação dos valores das frequências dos sinais compostos por sinusóides com frequências próximas, bem como na estimação das correspondentes amplitudes.

## 6.2 Trabalho Futuro

O algoritmo MUSIC, na forma proposta por Baraniuk e Duarte em [60], permite, de uma forma computacionalmente eficiente, determinar os valores das frequências das sinusóides que compõem um sinal para frequências distanciadas de mais de  $\frac{2\pi}{N}$ . Este algoritmo podia assim ser utilizado para fornecer ao algoritmo proposto neste trabalho uma estimativa inicial dos valores das frequências, reduzindo o peso computacional do algoritmo proposto. A partir destas estimativas o algoritmo proposto iria refinar o valor das frequências estimadas introduzindo um número bastante inferior de colunas na matriz da DFT, na fase inicial do Algoritmo proposto.

Em muitas situações o espectro do sinal a analisar não é esparso mas sim compressível. Seria interessante verificar de que forma o algoritmo proposto se comporta para sinais deste tipo.

A estimação rigorosa da fase de uma sinusóide, obriga a que a estimação da sua frequência seja realizada com grande precisão [66]. Dado que o algoritmo apresentado permite uma estimação do valor da frequência com um erro muito reduzido, seria interessante comparar o seu desempenho na medição da fase com outros algoritmos existentes [66].



# Bibliografia

- [1] R. G. Baraniuk. Compressive sensing. *IEEE Signal Processing Magazine*, 24(4):118–121, July 2007.
- [2] Harold S. Shapiro and Richard A. Silverman. Alias-free sampling of random noise. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 8(2):225–248, June 1960.
- [3] Frederick J. Beutler. Alias-free randomly timed sampling of stochastic processes. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 16(2):147–152, March 1970.
- [4] H. J. Landau. Sampling, data transmission, and the Nyquist rate. *Proc. IEEE*, 55(10):1701–1706, October 1967.
- [5] Emmanuel J. Candès and M.B. Wakin. An introduction to compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, 25(2):21–30, 2008.
- [6] Alan V. Oppenheim and Ronald W. Schaffer. *Digital Signal Processing*. Prentice-Hall International, Inc, 1975.
- [7] S. V. Narasimhan and S. Veena. *Signal Processing Principles And Implementation*. Alpha Science International, Ltd, 2008.
- [8] Dimitris G. Manolakis and John G. Proakis. *Digital Signal Processing:Principles, Algorithms, and Applications*. Pearson Prentice Hall, 4th edition edition, 2007.
- [9] Rui Campos Guimarães and José A. Sarsfield Cabral. *Estatística*. Mc Graw-Hill, 2<sup>a</sup> edition, 2007.
- [10] S. Lawrence Marple Jr. *Digital spectral analysis with applications*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, Inc., katzman, m. edition, 1987.
- [11] Dimitris G. Manolakis and John G. Proakis. *Digital Signal Processing:Principles, Algorithms, and Applications*. Pearson Prentice Hall, 3th edition edition, 1995.
- [12] Maurício Henrique Costa Dias. *Estimação das respostas do canal real de propagação rádio-móvel nos domínios espacial e temporal*. PhD thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2003.

- [13] Dimitris G. Manolakis, V. K. Ingle, and S. M. Kogon. *Statistical and Adaptive Signal Processing: Spectral Estimation, Signal Modeling, Adaptive Filtering and array Processing*. Mc Graw Hill, 2000.
- [14] R. J. Duffin and A. C. Schaeffer. A class of nonharmonic fourier séries. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 72:341–366, 1952.
- [15] D. Needell and J. A. Tropp. Cosamp: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 26(3):301–321, 2009.
- [16] R. G. Baraniuk, V. Cevher, M. F. Duarte, and C. Hegde. Model-based compressive sensing. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 56(4):1982–2001, 2010.
- [17] Dror Baron, Marco F. Duarte, Michael B. Wakin, Shriram Sarvotham, and Richard G. Baraniuk. Distributed compressed sensing. *CoRR*, 2009.
- [18] Albert Cohen; Wolfgang Dahmen; Ronald DeVore. Compressed sensing and best k-term approximation. *J. Amer. Math. Soc.*, 22:211–231, 2006.
- [19] David L. Donoho, Alfred M. Bruckstein, and Michael Elad. From sparse solutions of systems of equations to sparse modeling of signals and images. *SIAM Review*, 51(1):34–81, 2009.
- [20] Dmitry M. Malioutov. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays. Master’s thesis, MIT, July 2003.
- [21] B. K. Natarajan. Sparse approximate solutions to linear systems. *SIAM Journal on Computing*, 24(2):227–234, 1995.
- [22] I. Daubechies, M. Defrise, and C. De Mol. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 57(11):1413–1457, 2004.
- [23] Holger Rauhut, Karin Schnass, and Pierre Vandergheynst. Compressed sensing and redundant dictionaries. *IEEE Transactions on Information Theory*, 54(5):2210–2219, May 2008.
- [24] S. G. Mallat and Zhang Zhifeng. Matching pursuits with time-frequency dictionaries. *IEEE Transactions on Signal Processing [see also Acoustics, Speech, and IEEE Transactions on Signal Processing]*, 41(12):3397–3415, 1993.
- [25] M. Gharavi-Alkhansari and T. S. Huang. A fast orthogonal matching pursuit algorithm. *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1998. IEEE International Conference on Proceedings of the ICASSP '98*, 3:1389–1392 vol.3, 1998.
- [26] Y.C. Pati, R. Rezaifar, and P.S. Krishnaprasad. Orthogonal matching pursuit: recursive function approximation with applications to wavelet decomposition. *Signals, Systems and Computers, 1993. Conference on Record of The Twenty-Seventh Asilomar*, pages 40 – 44 vol.1, 1993.

- [27] L. Rebollo-Neira and D. Lowe. Optimized orthogonal matching pursuit approach. *IEEE Signal Processing Letters*, 9(4):137–140, 2002.
- [28] D.L. Donoho and X. Huo. Uncertainty principles and ideal atomic decomposition. *IEEE Transactions on Information Theory*, 47(7):2845 – 2862, 2001.
- [29] Chen Scott Shaobing, L. Donoho David, and A. Saunders Michael. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM Review*, 43(1):129–159, 2001.
- [30] Stefan Winter, Hiroshi Sawada, and Shoji Makino. On real and complex valued  $l_1$ -norm minimization for overcomplete blind source separation, 2005.
- [31] Stephen P. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [32] Stephen P. Boyd and Michael Grant. Matlab software for disciplined convex programming, version 1.21, 2011.
- [33] Inc. CVX Research. CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 2.0 beta. <http://cvxr.com/cvx>, September 2012.
- [34] Chen Shaobing and D. Donoho. Basis pursuit. *Signals, Systems and Computers, 1994. 1994 Conference Record of the Twenty-Eighth Asilomar Conference on*, 1:41–44 vol.1, 1994. Conference.
- [35] J.A. Tropp. Greed is good: algorithmic results for sparse approximation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 50(10):2231–2242, 2004.
- [36] J.A. Tropp and A.C. Gilbert. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit. *IEEE Transactions on Information Theory*, 53(12):4655 – 4666, Dec. 2007.
- [37] M. Elad and A.M. Bruckstein. A generalized uncertainty principle and sparse representation in pairs of bases. *IEEE Transactions on Information Theory*, 48(9):2558 – 2567, 2002.
- [38] D. M. Malioutov, M. Cetin, and A. S. Willsky. Optimal sparse representations in general overcomplete bases. *IEEE International Conference on Proceedings of Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2004 - (ICASSP '04)*, 2:ii–793–6 vol., 2004. Conference.
- [39] Roger A. Horn and Charles R. Johnson. *Matrix Analysis*. Press Syndicate of the university of Cambridge, 1985.
- [40] David L. Donoho and Michael Elad. Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via  $l_1$  minimization. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 100(5):2197–2202, 2003.

- [41] Emmanuel J. Candès and Terence Tao. Decoding by linear programming. *IEEE Transactions on Information Theory*, 51(12):4203–4215, Dec. 2005.
- [42] Emmanuel J. Candès, Justin K. Romberg, and Terence Tao. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 59(8):1207–1223, 2006.
- [43] Emmanuel J. Candès. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing. *Comptes Rendus Mathématique Académie des Sciences*, 346(9-10):589–592, 2008.
- [44] Emmanuel J. Candès and Terence Tao. The dantzig selector: Statistical estimation when  $p$  is much larger than  $n$ . *Institute of Mathematical Statistics in The Annals of Statistics*, 35(6):2313–2351, 2007.
- [45] T. Tony Cai, Xu Guangwu, and Zhang Jun. On recovery of sparse signals via L1 minimization. *IEEE Trans. Inf. Theor.*, 55(7):3388–3397, 2009.
- [46] Simon Foucart and Ming-Jun Lai. Sparsest solutions of underdetermined linear systems via  $l_q$ -minimization for  $0 < q \leq 1$ . *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 26(3):395–407, 2009.
- [47] T. Tony Cai, Wang Lie, and Xu Guangwu. Shifting inequality and recovery of sparse signals. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 58(3):1300–1308, 2010.
- [48] Ming-Jun Lai. An improved estimate for restricted isometry constant for the  $l_1$  minimization, 2010.
- [49] Simon Foucart. A note on guaranteed sparse recovery via  $l_1$ -minimization. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 29(1):97–103, 2010.
- [50] Emmanuel J. Candès, Y. C. Eldar, and D. Needell. Compressed sensing with coherent and redundant dictionaries. *submitted for publications*, 2010.
- [51] Marco F. Duarte, Michael B. Wakin, and Richard G. Baraniuk. Fast reconstruction of piecewise smooth signals from incoherent projections. *SPARS, (Rennes, France)*, 2005.
- [52] S. S. Chen and D. L. Donoho. Application of basis pursuit in spectrum estimation. *Acoustics, Speech and Signal Processing, 1998. Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on*, 3:1865–1868 vol.3, 1998. Conference.
- [53] Mark Schmidt. Least squares optimization with  $l_1$ -norm regularization, 2005.
- [54] Stephen P. Boyd. Lasso. <http://stanford.edu/~boyd/papers/admm/lasso>, 2011.

- [55] David L. Donoho, M. Elad, and V. N. Temlyakov. Stable recovery of sparse overcomplete representations in the presence of noise. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 52(1):6 – 18, 2006.
- [56] Emmanuel J. Candès and Justin Romberg. Sparsity and incoherence in compressive sampling. *Inverse Problems*, 23(3):969–985, 2007.
- [57] Sami Kirolos, Jason Laska, Michael Wakin, Marco Duarte, Dror Baron, Tamer Ragheb, Yehia Massoud, and Richard Baraniuk. Analog-to-information conversion via random demodulation. in *Proc. of the IEEE Dallas Circuits and Systems Workshop (DCAS)*, 2006.
- [58] J. A. Tropp, J. N. Laska, M. F. Duarte, J. K. Romberg, and R. G. Baraniuk. Beyond nyquist: Efficient sampling of sparse bandlimited signals. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 56(1):520–544, 2010.
- [59] Michael A. Lexa, Mike E. Davies, and John S. Thompson. Reconciling compressive sampling systems for spectrally-sparse continuous-time signals. *CoRR*, abs/1101.4100, 2011.
- [60] Marco F. Duarte and Richard G. Baraniuk. Spectral compressive sensing. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2012.
- [61] Isabel Duarte, José M. N. Vieira, and Paulo J. S. G. Ferreira. High resolution spectral compressive sensing. In *9th IMA International Conference on Mathematics in Signal Processing*, 2012.
- [62] Isabel Duarte, José M. N. Vieira, Paulo J. S. G. Ferreira, and Daniel F. Albuquerque. High resolution spectral estimation using bp via compressive sensing. In *Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science*, volume 1, pages 699–704, 2012.
- [63] J. J. Benedetto and M. Fickus. Finite normalized tight frames. *Advances in Computational Mathematics*, 18(2):357–385, 2003.
- [64] Dustin G. Mixon. Short, fat matrices - welch-bound equality, 2012.
- [65] J. J. Fuchs and B. Delyon. Minimal L1-norm reconstruction function for oversampled signals: applications to time-delay estimation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 46(4):1666–1673, 2000. Journal.
- [66] Anibal J. S. Ferreira. Accurate estimation in the odft domain of the frequency, phase and magnitude of stationary sinusoids. In *Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics, 2001 IEEE Workshop on the*, pages 47–50, 2001.

