



**Pedro José Dias
Moreira**

**Análise de Vigas Sanduíche de
Alumínio-Aglomerado de Cortiça**



**Pedro José Dias
Moreira**

**Análise de Vigas Sanduíche de
Alumínio-Aglomerado de Cortiça**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestrado em Engenharia Mecânica, realizada sob orientação científica de Francisco José Malheiro Queirós de Melo, Professor Associado do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro e de Rui António da Silva Moreira, Professor Auxiliar do Universidade de Aveiro da Universidade de Aveiro.

O júri / The jury

Presidente / President

Professor Doutor Alfredo Manuel Balacó de Morais

Professor Associado da Universidade de Aveiro

Vogais / Committee

Professor Doutor Francisco José Malheiro Queirós de Melo

Professor Associado da Universidade de Aveiro (orientador)

Professor Doutor Rui António da Silva Moreira

Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro (co-orientador)

Professor Doutor José Luís Soares Esteves

Professor Auxiliar da Faculdade de Engenharia do Porto

**Agradecimentos /
Acknowledgements**

Ao orientador, Professor Francisco José Malheiro Queirós de Melo, pelo seu incansável esforço em acompanhar a evolução da dissertação e pela partilha do seu espetacular conhecimento

Ao co-orientador, Professor Rui António da Silva Moreira, pelas preciosas indicações que permitiram o melhoramento da dissertação

Ao Professor António Manuel de Bastos Pereira pela importante ajuda no procedimento experimental

Aos meus pais e irmã pelo continuo apoio ao longo desta caminhada

À minha namorada pelo apoio e por me aturar nos momentos mais difíceis.

Palavras-chave

Vigas; Sanduíche; Timoshenko; EulerBernoulli; Rayleigh-Ritz; Elementos finitos; Tensão de corte; Cortiça

Resumo

A produção de estruturas mais leves vai de encontro ao aumento da preocupação atual com o meio ambiente. Com estruturas mais leves consegue-se sistemas mais eficientes, como é disto exemplo, a industria dos transportes. Um caminho para se obter estruturas mais leves é a utilização de materiais mais leves sem prejudicar a rigidez estrutural. Os materiais compósitos já são há algum tempo usados com o objetivo de obter estruturas mais leves. Dentro deste grupo destaca-se os materiais do tipo sanduíche. Estes caracterizam-se por ter o material das faces diferente do material do núcleo. Sendo também diferente a sollicitação a que cada um está sujeito.

Neste trabalho a viga sanduíche vai ser constituída por peles de alumínio , que suportam as tensões axiais, e por um núcleo de aglomerado de cortiça, que suporta as tensões de corte. A utilização da cortiça deve-se à sua estrutura única, cujo comportamento mecânico é também único. Para além das suas características técnicas, a cortiça também desempenha um papel importante na económica do País.

Neste trabalho pretende-se construir um modelo teórico para o comportamento do material. Vai ser utilizado um modelo de alta ordem para aproximar o campo de deslocamentos(*Higher-Order Shear Deformation Theory*) influenciado pela tensão de corte.

Para a validação do modelo teórico vai ser efetuada a comparação com resultados experimentais e com um modelo de elementos finitos.

Keywords

Beam; Sandwich; Timoshenko; EulerBernoulli; Rayleigh-Ritz; Finite Element; Shear Tension; Cork

Abstract

The production of lighter structures meets the increasing current concerns for environmental issues. The use of lighter structures allows systems, such as the transport industry, to become more efficient. One way to achieve lighter structures is the use of lighter materials without sacrificing structural rigidity. Composite materials have already been in use for some time in order to get lighter structures. Within this group the sandwich-type materials stand out. These are characterized by the use of two materials, one for the core and a different one for the sides. Also, the solicitation for each one is different.

In this paper the sandwich beam will be comprised of aluminum skins, which bear the axial stresses and by a core of cork agglomerate, which supports the shear stresses. Cork is used due to its unique structure whose mechanical behavior is also unique. In addition to its technical features, cork also plays an important role in the economics of the country.

This paper aims to build a theoretical model for the material behavior. A model of higher order will be used to approximate the displacement field with influence of shear stress. (*Higher-Order Shear Deformation Theory*) with influence of shear stress.

To validate the theoretical model a comparison with experimental results and a finite element model will be performed.

I	Enquadramento	1
1	Introdução	3
1.1	Estruturas sanduíche	4
1.1.1	Materiais e construção de componentes sanduíche	6
1.1.2	Aplicações	9
1.2	Cortiça	11
1.3	Método de Rayleigh-Ritz	16
2	Objectivos e Guia de Leitura	19
3	Revisão do Estado da Arte	21
II	Métodos e Modelos	25
4	Ensaaios Experimentais	27
4.1	Construção da montagem experimental	27
4.1.1	Colocação do extensómetro e montagem das vigas	27
4.1.2	Recursos usados no procedimento experimental	29
4.1.3	Procedimento experimental	30
5	Modelação Numérica	33
5.1	Análise de uma viga homogénea	33
5.1.1	Modelo analítico de uma viga homogénea sem corte	33
5.1.2	Modelo analítico de uma viga homogénea com corte	37
5.1.3	Modelo de elementos finitos de uma viga homogénea	40
5.2	Análise de uma viga sanduíche	43
5.2.1	Modelo analítico de uma viga sanduíche	43
5.2.2	Modelo em elementos finitos de uma viga sanduíche	45

III	Resultados e Discussão	47
6	Resultados Experimentais	49
6.1	Resultados dos testes para o módulo de corte da cortiça	49
6.2	Resultados experimentais da viga homogênea	51
6.3	Resultados experimentais da viga sanduíche	53
7	Resultados Numéricos	55
7.1	Resultados da modelação analítica e numérica de uma viga homogênea	55
7.2	Resultados da modelação analítica e numérica de uma viga sanduíche .	62
8	Comparação e Discussão dos resultados	67
8.1	Comparação dos resultados da viga homogênea	67
8.2	Comparação dos resultados da viga sanduíche	69
8.3	Conclusões finais	70
8.4	Propostas futuras	72

Lista de Tabelas

- 7.1 Tabela comparativas dos vários modelos para $w(x)$, Resultados em [mm] 57

Lista de Figuras

1.1	Ilustração da estrutura sanduíche	4
1.2	Evolução do aumento de rigidez e do peso	4
1.3	Comparação entre uma viga tipo I e uma viga sanduíche	5
1.4	Comportamento de uma viga com diferentes tipos de núcleo	5
1.5	Diferentes modos de falha de uma estrutura sanduíche	6
1.6	Mapa para escolha de materiais para viga sanduíche	7
1.7	Tipos de núcleos das vigas sanduíche	8
1.8	Avião Haviland Mosquito	9
1.9	Veículo Bv 206	10
1.10	Stockholm Globe Arena	10
1.11	Ilustração do sobreiro	11
1.12	Ilustração da estrutura celular da cortiça	12
1.13	a) Teste compressão aglomerado de cortiça b) Teste compressão cortiça .	13
1.14	Teste tração aglomerado de cortiça	13
1.15	Comparação da cortiça com outros materiais	14
1.16	Rolhas cortiça	14
1.17	Esquema da transformação da cortiça	15
4.1	Ilustração da fase final da colocação do extensómetro	28
4.2	Ilustração da viga sanduíche com sinalização dos extensómetros	28
4.3	Ilustração dos reforços para impedir a compressão da cortiça	29
4.4	Ilustração do equipamento para leitura da deformação	30
4.5	Ilustração da montagem para o procedimento experimental	31
5.1	Representação da deformação segundo EulerBernoulli	34
5.2	Representação da deformação segundo Timoshenko	37
5.3	A linha a vermelho representa a deformação de corte de alta ordem. A linha a verde representa a deformação de corte de primeira ordem.	38
5.4	Representação da função u_s	39
5.5	Ilustração da simulação 2D	41

5.6	Ilustração da simulação 3D com representação do encastre e da carga aplicada.	42
5.7	Representação da viga e respetiva deformação	43
5.8	Representação da malha utilizada na viga sanduíche	46
6.1	Resultados experimentais do teste de corte da cortiça	50
6.2	Curva tensão deformação de corte da cortiça	50
6.3	Provete após realização do teste	51
6.4	Resultados experimentais para carga e deslocamento	51
6.5	Resultados experimentais para carga e deformação	52
6.6	Resultados do teste à viga sanduíche efetuado a varias velocidades . . .	53
6.7	Recuperação do aglomerado de cortiça depois de comprimido	54
7.1	Variação de $w(x)$ em função da carga P para modelação teórica	56
7.2	Variação de $w(x)$ em função da carga P para modelação numérica	56
7.3	Variação de $w(x)$ para várias alturas h para a modelação analítica	57
7.4	Representação da tensão de corte para P_{max}	58
7.5	Deformada teórica da viga homogênea para P_{max}	59
7.6	Variação de σ_x ao longo da viga para P_{max}	59
7.7	Variação de $w(x)$ em função de P	60
7.8	Variação de σ_x em função de x para P_{max} simulação 3D	60
7.9	Variação de $w(x)$ em função de P	62
7.10	Variação de $w(x)$ em função de x para P_{max}	62
7.11	Variação da tensão de corte do núcleo na extremidade $x = L$ para P_{max} .	63
7.12	Deformação na extremidade $x = L$ para P_{max}	64
7.13	Tensão na superfície superior para P_{max}	64
7.14	Tensão σ_x na zona do encastamento para P_{max}	65
7.15	Tensão σ_x na extremidade livre para P_{max}	65
8.1	Comparação dos resultados para $w(x)$ em função da carga	68
8.2	Comparação dos resultados para a tensão em função da carga na zona do extensómetro	68
8.3	Comparação dos resultados para o deslocamento $w(x)$ em função da carga P	69
8.4	Flecha da viga sanduíche construída com o núcleo mais rígido	71

Parte I
Enquadramento

Capítulo 1

Introdução

Devido à crescente preocupação ambiental, a procura por estruturas mais leves. Um caminho que tem sido seguido é o das estruturas sanduíche. Estas estruturas conseguem uma boa rigidez aliado a um peso reduzido. Para além da vantagem do peso, pode conseguir outras propriedades mecânicas interessantes conforme o campo de aplicação. Por exemplo, isolamento térmico, vibratório e sonoro. A aplicação deste tipo de estruturas está presente na indústria automóvel, aeronáutica, civil, naval...

As estruturas sanduíche são constituídas pelo núcleo e por duas peles colocadas na parte exterior (superior e inferior). Cada um dos componentes é responsável por uma característica mecânica. As peles tem uma maior rigidez suportando a maior parte das solicitações mecânicas. O núcleo é responsável pela característica mais apropriada ao caso de aplicação. Por exemplo, nas câmaras frigoríficas nos transportes, as faces fornecem a rigidez à estrutura e o núcleo é responsável pelo isolamento térmico.

Neste trabalho vai ser estudada uma viga sanduíche constituída por um núcleo de aglomerado de cortiça e por duas peles de alumínio. A escolha da cortiça está relacionada com as características únicas deste material. Sendo Portugal o maior produtor europeu de cortiça, este tipo de estudos tem a sua maior importância. Como vai ser exposto mais a frente, não existe vantagens na aplicação do aglomerado de cortiça como núcleo para uma utilização estrutural estática, cujo objetivo seja o objetivo de aumento de rigidez.

1.1 Estruturas sanduíche

Os componentes sanduíche são constituídos por 3 partes, as faces ou peles, o núcleo e em alguns casos a junção. A figura 1.1 representa o modo como as componentes estão relacionadas entre si.

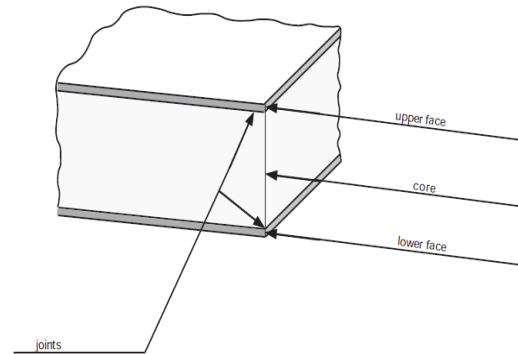


Figura 1.1: Ilustração da estrutura sanduíche [1]

Cada parte tem a sua própria função. Como as peles são colocadas com uma distância entre si, o momento de inércia aumenta juntamente com a sua rigidez à flexão, isto sem haver muita penalização em termos de peso. A relação do aumento de rigidez com o peso está representada na figura 1.2, que para um aumento de rigidez de 1 para 12, o peso se mantém quase inalterado.

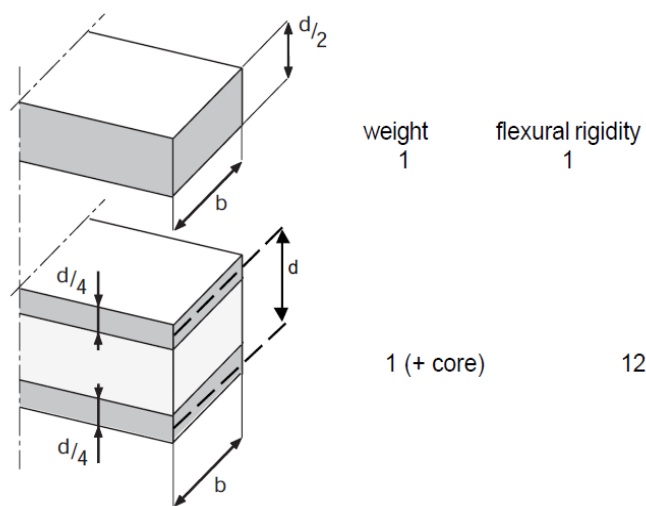


Figura 1.2: Evolução do aumento de rigidez e do peso [1]

As vigas sanduíche podem ser comparadas a vigas de perfil I, como mostra a figura 1.3, mas com maiores vantagens a nível de peso. O que acontece nas vigas I é que a alma

suporta as tensões de corte tal como acontece no núcleo das vigas sanduíche. Como os materiais do usados no núcleo das vigas sanduíche são leves, a estrutura final tem um peso inferior em relação a uma viga tipo I. Outra vantagem das estruturas sanduíche é que podem ser produzidas sobre a forma de placas e cascas. A figura 1.4 mostra a diferença do comportamento de uma viga, o comportamento superior acontece quando o núcleo é rígido ao corte e o comportamento inferior acontece quando o núcleo é fraco ao corte e permite o deslizamento das peles. [1]

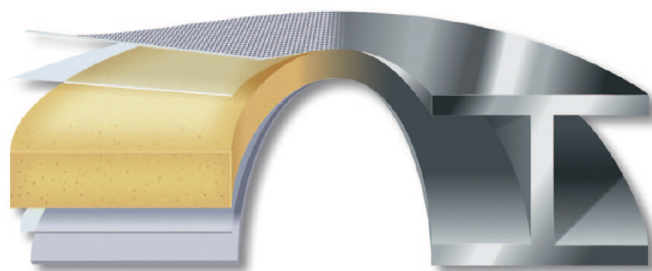


Figura 1.3: Comparação entre uma viga tipo I e uma viga sanduíche [2]

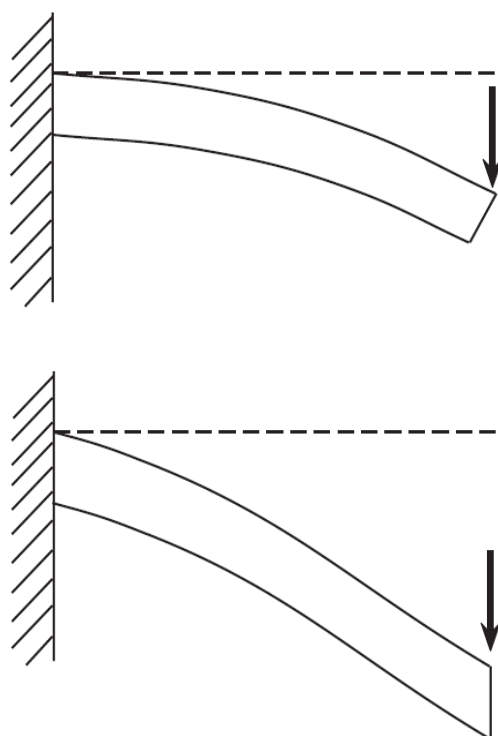


Figura 1.4: Comportamento de uma viga com diferentes tipos de núcleo [1]

Vantagens e Desvantagens

- Vantagens

- Baixo peso
- Isolamento térmico, acústico e vibratório
- Boa rigidez específica
- Geometrias complexas
- Desvantagens
 - Imprevisibilidade de falhas
 - Materiais poluentes
 - Escolha ampla e complexa de materiais
 - Processo fabrico complexo

Na figura 1.5 estão representados alguns modos de como uma estrutura sanduíche pode falhar.

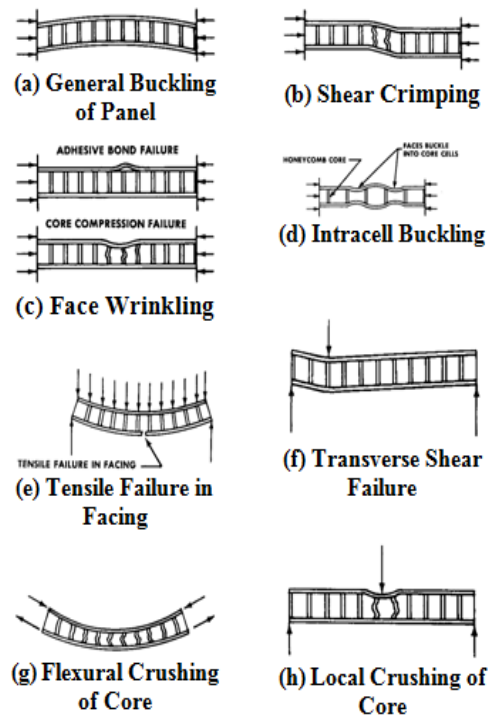


Figura 1.5: Diferentes modos de falha de uma estrutura sanduíche [3]

1.1.1 Materiais e construção de componentes sanduíche

Devido ao fato de cada parte constituinte de uma peça sanduíche ter funções diferentes, os materiais utilizados também são diferentes. A escolha de material depende da

utilização pretendida, pode variar desde utilização estrutural, isolamento térmico, isolamento vibratório... O estudo [4] resume alguns dos materiais utilizados para cada tipo de aplicação, chegando ao resultado ilustrado na figura 1.6.

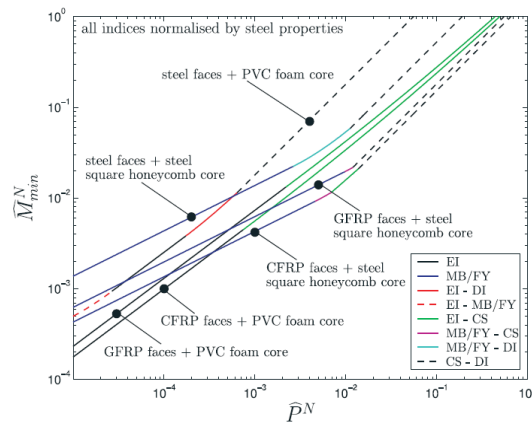


Figura 1.6: Mapa para escolha de materiais para viga sanduíche [4]

Os materiais utilizados podem ser divididos em compósitos e não-compósitos. O material das faces pode ser colado ao núcleo com a utilização de um adesivo ou pode ser construído sobre o núcleo. Este último é mais aplicado quando se utiliza materiais não-compósitos.

Faces ou Peles

Todos os materiais poliméricos reforçados que são usados nos componentes compósitos também podem ser usados como material das faces, podem ser fibras de vidro, carbono... Também se consegue usar todos os tipos de resinas plásticas. Quando é necessário uma maior exigência técnica, utiliza-se fibras pré-impregnadas, que costumam ter orientações pré-definidas. Normalmente estes pré-impregnados são de fibra de vidro ou de carbono com resina de epóxi (EP). Quando as fibras são laminadas diretamente sobre o núcleo costuma ser utilizada fibra de vidro. Estas são colocadas de forma aleatória (CSM), as resinas mais utilizadas neste processo são os poliésteres (UP). As peles também podem ser pré-fabricadas utilizando moldes. Este processo inclui *sheet-moulding compound* (SMC), *bulk-moulding compound* (BMC) e *glassmat-reinforced thermoplastic* (GMT). Na maioria destes casos as fibras, habitualmente de vidro, são orientadas aleatoriamente.

Os materiais não-compósitos são na maioria das vezes colados ao núcleo com o auxílio de uma camada de adesivo. Os materiais mais comuns são a madeira, polímeros não-reforçados e metais. Destes destaca-se o metal pela sua maior utilização. A vantagem destes materiais é o seu baixo custo, tendo como limitações a incapacidade de adquirir formas geométricas mais complexas. [5]

Núcleo

O primeiro material utilizado foi a balsa. Atualmente o material mais usado são as espumas poliméricas. Os polímeros habitualmente usados são os poliuretano PUR, poliéster (PS), PVC... Algumas destas espumas podem ser formadas diretamente entre as faces. As vantagens dos materiais poliméricos ou naturais são: o baixo peso, não sofrem corrosão e conseguem adquirir formas geométricas complexas. Também se utiliza materiais metálicos, normalmente adquirem a forma de ninho de abelha como mostra a figura [5] ou a forma de espumas metálicas.

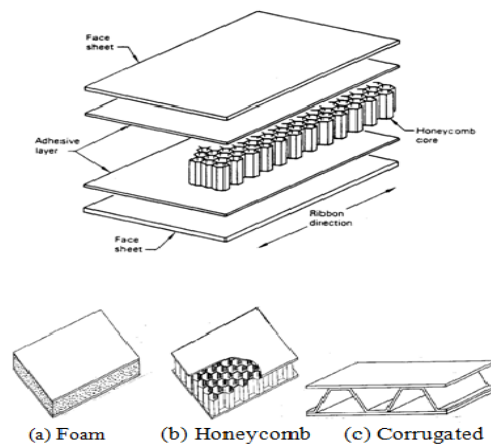


Figura 1.7: Tipos de núcleos das vigas sanduíche [3]

Métodos de construção

Os métodos existentes para a construção de vigas sanduíche são [5]:

Wet lay-up

É o processo mais antigo mas ainda é o mais utilizado. Consiste em aplicar o reforço seco a um molde que já contém resina, depois volta-se a por a resina e outra camada de reforço e assim se vai repetindo até à espessura pretendida. Este processo é usual no fabrico de embarcações.

Prepreg lay-up

Esta técnica é parecida com a primeira, mas em vez de se aplicar o reforço seco, este já vem pré-impregnado. Este material tem orientações pré-definidas, dando um melhor comportamento mecânico. Assim a sua utilização é frequente em componentes com maior exigência técnica. No fim da montagem das camadas pode recorrer-se ao vaco para uma melhor montagem.

Adhesive bonding

Este processo consiste em colar o núcleo às faces com recurso a uma camada de adesivo. É o processo mais fácil e barato. Também obtêm boa resistência mecânica.

Liquid moulding

Esta técnica divide-se em três métodos. O RTM, em que a mistura da resina já está pré-formulada antes de ser injetada. O SRIM, em que a mistura é feita imediatamente antes de ser injetada no molde e o Vaccumem, que a resina já esta pré-formulada mas é injetada com recuro ao vaco. Os moldes já contem as faces.

Continuos lamination

Consiste em fazer de modo continuo uma estrutura sanduíche. As faces vão sendo depositadas no núcleo com a ajuda de rolos, no final a folha continua é prensada para uma melhor assemblagem.

1.1.2 Aplicações

Figura 1.8: Avião Haviland Mosquito, esta aeronave foi pioneira no uso de materiais sanduíche (Contraplacado com núcleo de balsa) [6]



Figura 1.9: Veículo Bv 206, este veículo é construído com recurso a estruturas sanduíche utilizando o método RTM, assim se obtêm um baixo peso que é uma vantagem nas deslocações fora de estrada [7]



Figura 1.10: Stockholm Globe Arena, este é um exemplo de aplicação de estruturas sanduíche na construção civil, onde para além de uma baixo peso estrutural tem benefícios no isolamento térmico e acústico.

1.2 Cortiça

Aspetos gerais

A cortiça é a casca do sobreiro, cujo nome botânico é *Quercus Suber L*, figura 1.11. O sobreiro existe em maior numero na região mediterrânica e também na China. A Europa é responsável por cerca de 80% da produção total de cortiça, cujos $\frac{3}{4}$ são assegurados por Portugal, Por isto, Portugal desempenha uma papel de maior relevância no que diz respeito à cortiça. [8]

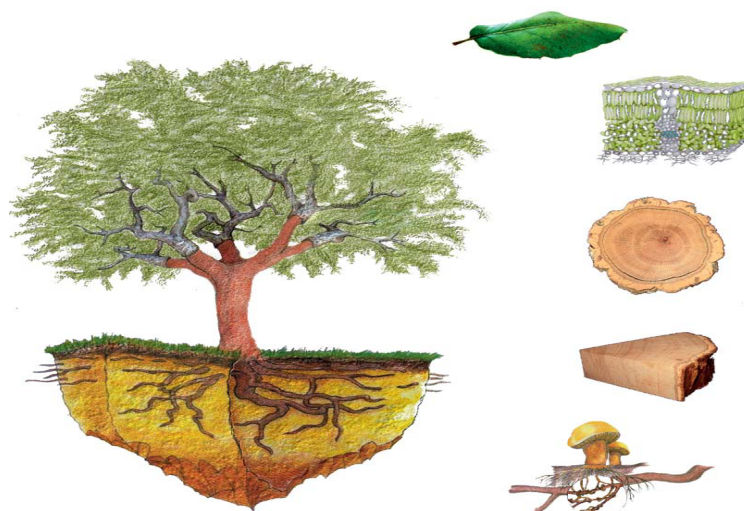


Figura 1.11: Ilustração do sobreiro [9]

A extração da cortiça faz-se com intervalos de 9 a 10 anos. As duas primeiras extrações dão origem à chamada cortiça virgem, que é caracterizada pela sua inconsistência na estrutura, espessura e densidade. Esta cortiça é maioritariamente aproveitada para fazer aglomerado de cortiça. Só a partir da terceira extração é que se obtêm uma cortiça de boa qualidade, normalmente usada para fazer as rolhas para as garrafas de vinho. [8]

Antes de a cortiça ser utilizada é necessário ser fervida durante uma hora. Este processo vai provocar a expansão do gaz que a cortiça contem e assim criar uma estrutura celular mais regular. Depois, as placas são aplainadas para se conseguir uma estrutura ainda mais regular. [8]

A cortiça é constituída por células semelhantes a prismas retangulares, como ilustrado na figura 1.12. Como é observável na figura 1.12, a cortiça é um material anisotrópico. Por isso, as suas propriedades mecânicas também o são. O interior das células contem um gás parecido com o ar. Este gás influencia bastante as características mecânicas da cortiça. Uma delas é a baixa densidade que varia entre 120 a $240\text{Kg}\text{m}^{-3}$. [8].

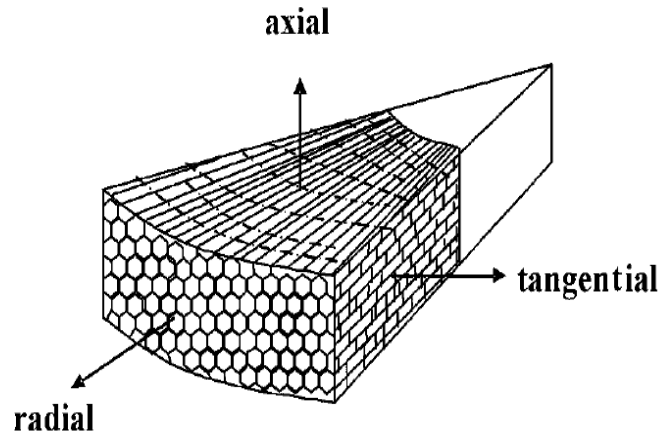


Figura 1.12: Ilustração da estrutura celular da cortiça [8]

Outras características, como a grande elasticidade e impremiabilidade advêm da sua composição química. A cortiça é constituída por cerca de 40% de suberina, responsável pela compressibilidade e elasticidade, 27% de lenhina constituinte das paredes das células, 12% de polissacáridos presentes na estrutura da cortiça, 6% de ceroides que é responsável por repelir a água e contribui para a impremiabilidade, 6% de taninos que dão a cor e proteção e os restantes 4% são cinza. [10]

Características mecânicas

A cortiça não é um material único só na composição química mas também o é nas propriedades mecânicas. Para proceder à explicação é adotado a referência (R) para a direção radial e (NR) para as restantes direções(figura 1.12).

Os testes de compressão ilustrados da figura 1.13 mostram as varias etapas da resposta da cortiça. A primeira região corresponde à flexão elástica das paredes das células, a segunda região, quase horizontal, corresponde ao enrugamento das mesmas paredes das células e ultima região corresponde ao colapso total das paredes [8]. Como é observável, o comportamento é semelhante para o aglomerado de cortiça (figura 1.13 a), e para a cortiça natural (figura 1.13 b).

Quando a cortiça é comprimida da direção R provoca um coeficiente de *Poisson* positivo $\nu > 0$, se a solicitação for feita na direção NR o valor é $\nu < 0$. O que leva á conclusão do estudo [11], que para o aglomerado de cortiça, o valor $\nu = 0$, devido à organização aleatória dos partículas de cortiça. O calibre ou espessura influencia a resposta à compressão, quanto maior o calibre menor é o modulo de compressão e vice-versa. A cortiça também pode ser tratada termicamente para alterar as suas carac-

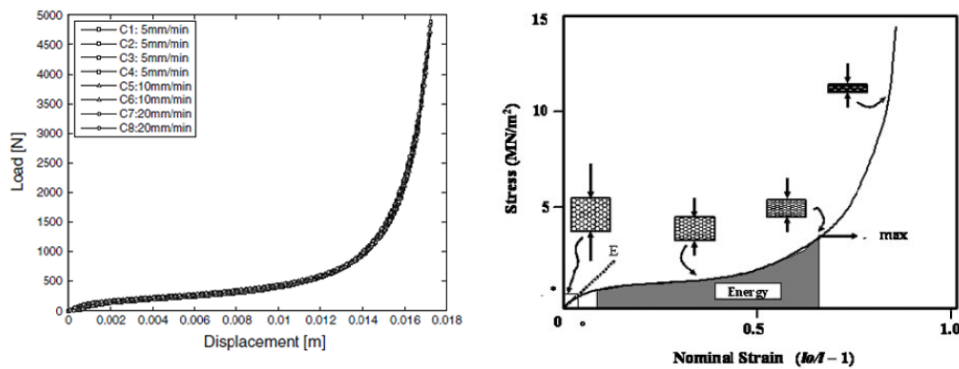


Figura 1.13: a) Teste compressão aglomerado de cortiça [11] b) Teste compressão cortiça [8]

terísticas. Se for tratada a 100-300°C a sua resistência diminui. A 300°C o módulo de *Young* é reduzido com um fator de 15 [8].

Também foi observado que a cortiça tem um comportamento diferente quando solicitada à tração, como se pode observar na figura 1.14.

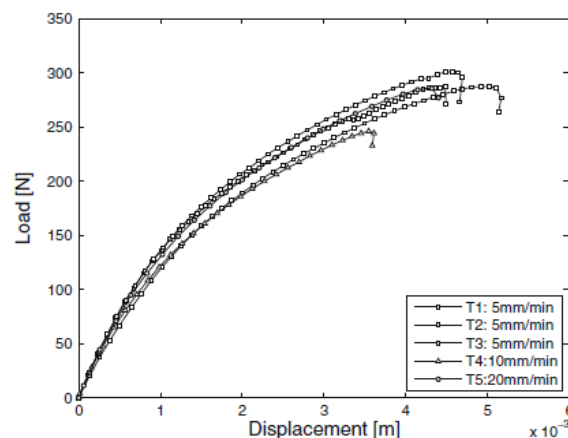


Figura 1.14: Teste tração aglomerado de cortiça [11]

Devido à grande quantidade de ar presente na cortiça e à grande porosidade, esta não conduz bem o calor nem o som, o que faz dela um excelente isolante térmico e sonoro. É por esta razão que é amplamente usada para isolamentos em habitações. Outra característica interessante é o coeficiente de atrito, que por exemplo, para uma rolha numa garrafa é de 0.5 [8].

Em relação a outros materiais, as características da cortiça situam-se como se pode observar na figura 1.15. A cortiça não consegue ter uma utilização tão extensa como o

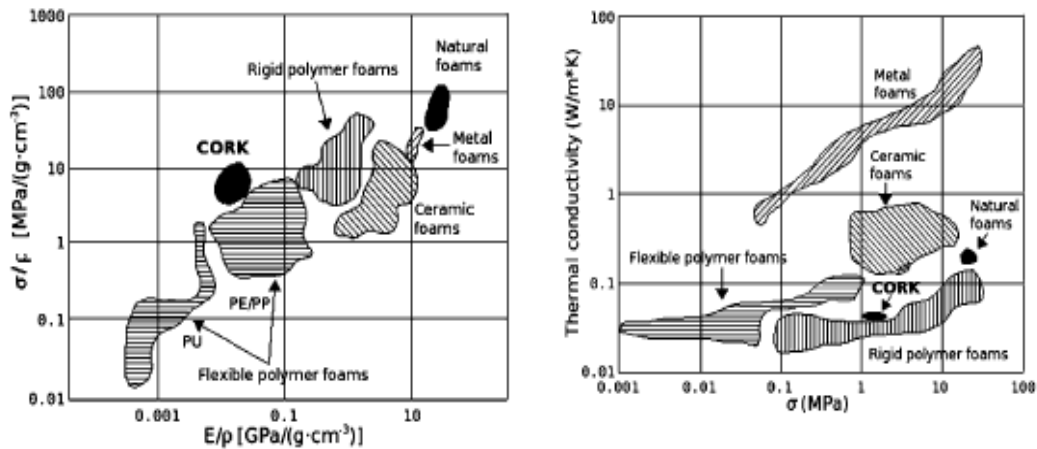


Figura 1.15: Comparação da cortiça com outros materiais [8]

poliuretano (PU) ou o polietileno (PE). Os melhores materiais para solicitações mecânicas são os que se situam no canto superior esquerdo do gráfico. A cortiça não consegue competir com as espumas cerâmicas ou metálicas, mas consegue um bom comportamento em relação às espumas artificiais. A cortiça tem maiores vantagens para aplicações térmicas. Como tem uma condutividade térmica baixa e um bom comportamento à compressão com coeficiente de Poisson $\nu = 0$, é um bom material para isolante térmico, por exemplo, pode ser usado como junta de vedação [8].

Aplicações

A cortiça natural é praticamente só usada para as rolhas das garrafas de vinho. Normalmente só os vinhos de boa qualidade utilizam a rolha completamente natural que é retirada diretamente das placas de cortiça, como ilustrado na figura 1.16.



Figura 1.16: Rolhas cortiça [12]

A grande maioria das aplicações da cortiça é em forma de aglomerado. Por este poder ter várias geometrias e várias propriedades conforme o aglutinante. Poder ser feito com cortiça virgem (primeiros descortiçamentos). A figura 1.17 ilustra os caminhos possíveis para a produção de aglomerados de cortiça.

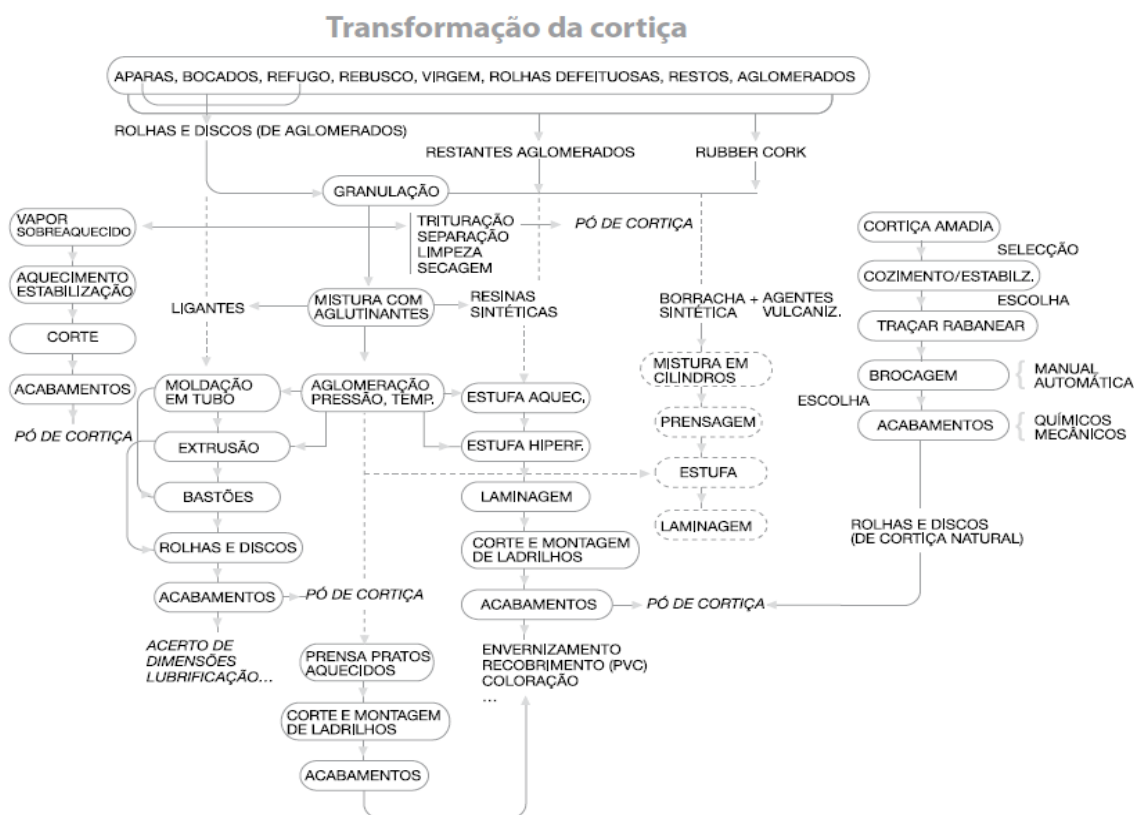


Figura 1.17: Esquema da transformação da cortiça [10]

Para se obter os aglomerados de cortiça é preciso ter o granulado, este é conseguido através da trituração da cortiça virgem ou desperdícios industriais de cortiça. O aglomerado juntamente com um agente aglutinante e com recurso à pressão e temperatura obtêm-se o aglomerado de cortiça. Os agentes aglutinantes podem ser resinas sintéticas de poliuretano, fenólicas e melânicos e também por vezes podem ter origem vegetal. Depois da mistura e compressão pode ser necessário submeter o aglomerado a uma cura.

Outro tipo de aglomerado é o "rubbercork", é sobretudo usado em pavimentos. Este aglomerado é obtido com granulado de cortiça e borracha juntamente com anti-oxidantes, aceleradores de polimerização e corantes. O processo de fabrico é semelhante ao aglomerado normal de cortiça. O aglomerado expandido ou preto de cortiça também é bastante utilizado. O processo de fabrico diferencia-se na não utilização de agente aglutinante. O aglomerado é posto num molde onde é aplicada pressão e vapor de água a 300-370°C o que vai provocar a libertação de resinas naturais da cortiça e assim se dá a

aglutinação do granulado.[10]

As aplicações do aglomerado de cortiça na construção podem ser [10]:

- Ladrilhos de aglomerado de cortiça;
- Ladrilhos de aglomerado de cortiça com elastómero;
- Ladrilhos de aglomerado de cortiça com PVC;
- Revestimentos vinílicos sobre suporte resiliente de aglomerado de cortiça e de aglomerado de cortiça com PVC no tardo;
- Revestimentos de rubbercork
- Pavimentos flutuantes com cortiça na camada superior e/ou inferior. A nível do isolamento, as possibilidades de emprego do aglomerado expandido de cortiça na construção civil são:
 - Açoteias e terraços - isolamentos térmicos, de vibrações, de condensação de humidade, impermeabilização;
 - Muros e telhados - isolamento térmico, prevenção de condensações;
 - Tabiques e portas - isolamento térmico e acústico;
 - Paredes e tetos - correção acústica, isolamento térmico, conforto ambiental, decoração;
 - Solos - isolamento vibrátil e térmico;
 - Pontes - isolamento térmico, juntas de descontinuidade/dilatação.

1.3 Método de Rayleigh-Ritz

O texto que se segue é baseado no livro [13]

Uma das etapas mais importantes quando se resolve um problema de mecânica estrutural é encontrar a matriz de rigidez do sistema. Esta matriz caracteriza a solitação elástica do sistema às condições externas impostas.

Existe alguns métodos para se encontrar a matriz de rigidez, o método escolhido para efetuar este trabalho foi o de Rayleigh-Ritz. Este método pode ser aplicado desde elementos simples a elementos mais complexos. O método pode dividir-se em duas formas, a forma clássica em que o campo de aproximação é definido na região total de interesse e a forma de elementos finitos em que o campo de aproximação é definido em forma *piecewise*. O campo de aproximação é o campo deslocamentos do material quando este é sujeito a carregamentos externos.

Existe dois tipos de condições fronteira, as essenciais ou principais e as não essenciais ou naturais. No método de elementos finitos as condições fronteira essenciais são

os valores dos graus de liberdade, as condições fronteira não essenciais são as derivadas desses graus de liberdade. Para o caso de uma viga encastrada, os graus de liberdade são o deslocamento transversal w e a sua primeira derivada w' . Assim as condições de fronteira essenciais são $w(0) = 0$ e $w'(0) = 0$ e as condições não essenciais são $w''(L) = 0$ e $w'''(L) = 0$.

Um sistema mecânico conservativo contem energia potencial, esta energia pode ser expressa sem referencia ao que aconteceu até chegar à quele estado. A energia potencial engloba dois tipo de energia, a energia de deformação interna e a energia das forças externas. Para uma estrutura elástica, o trabalho realizado pelas forças internas é equivalente às variações da energia elástica. A energia potencial de um sistema é dado pela equação 1.1 que se transforma na equação 1.2 para um corpo de se deforma elasticamente:

$$\Pi = \omega + U \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \Pi = \int_V \left(\frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [T] \{\epsilon\} - \{\epsilon\}^T [T] \{\epsilon_0\} + \{\epsilon\}^T [\sigma_0] \right) dV - \\ - \int_V \{u\}^T \{F\} dV - \int_S \{u\}^T \{\phi\} dS - \{D\}^T \{P\} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Um sistema elástico tem bastantes graus de liberdade, o que torna quase impossível resolver as equações diferenciais que regem o comportamento do material e encontrar o campo de deslocamentos ou tensões.

Para contornar este problema existe o método de Raleigh-Ritz, que vai permitir substituir as equações diferenciais por polinómios.

O método é descrito do seguinte modo. Considerando um corpo elástico, o deslocamento de um ponto material é descrito pelas três coordenadas u, v, w . O método começa com um campo genérico para estas três coordenadas que são dadas na seguinte forma:

$$u = \sum_{i=1}^l a_i f_i \quad v = \sum_{i=l+1}^m a_i f_i \quad w = \sum_{i=m+1}^l a_i f_i \quad (1.3)$$

sendo a_i são as amplitudes. As funções $f_i = f(x, y, z)$ tem que ser admissíveis e respeitar as condições fronteira essenciais.

Para determinar as amplitudes, as funções u, v e w são introduzidos das expressões de deformação $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$. Depois de substituídas no integral, equação 1.2, e de acordo com o princípio da energia potencial mínima resolve-se um sistema da seguinte forma:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (1.4)$$

Resolvendo os sistema de equações 1.4 chega-se à matriz de rigidez. Este método não dá resultados muito corretos pois os polinómios não aproximam da melhor forma o

comportamento do material, por norma, o sistema virtual criado é mais rígido.

As funções f_i podem ser polinómios ou ser da forma trigonométrica. Não existe nenhum método específico para chegar à melhor aproximação. Vai ser por estudo de convergência que se chega a uma solução satisfatória. Estas funções aproximadoras tem que cumprir as condições fronteira essenciais do sistema. Por exemplo, para um caso de duas dimensões e que se resolva utilizar um polinómio este tem que ficar da forma $u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2$ seguindo o triangulo de Pascal. Quando se aplica as condições fronteira, pode ser anulado um termo, mas nunca pode haver saltos no polinómio.

Capítulo 2

Objectivos e Guia de Leitura

O objetivo deste trabalho é a obtenção de um modelo teórico para representar o campo de deslocamentos de uma viga sanduíche. Para chegar às equações que regem o campo de deslocamento vai ser utilizado o método de Rayleigh-Ritz. Este baseia-se na energia potencial mínima. São utilizados polinómios com termos inicialmente desconhecidos para modelar as várias componentes do campo de deslocamentos.

Para validar o método vai se modelar em primeiro lugar uma viga homogênea encastrada. Este elemento vai servir para perceber o comportamento do método utilizado para o desenvolvimento do modelo teórico. A viga homogênea vai ser modelada com influencia da tensão de corte e sem, isto, na modelação teórica e na modelação numérica para ambas serem comparadas com resultados experimentais. A análise da viga homogênea está presente na secção 5.1 na pagina 33, cujas conclusões estão na secção 8.1 na pagina 67

Depois do estudo feito à viga homogênea encastrada vai-se passar à modelação da viga sanduíche. O núcleo da viga vai ser modelado utilizando um modelo de ordem superior para caracterizar o efeito das tensões de corte. A influência da tensão de corte aparece nas vigas sanduíche, por o material do núcleo ser menos rígido do que o material das peles. Para a modelação das peles não vai ser considerado o corte pois a sua espessura não permite uma grande influencia da tensão de corte, como demonstrado no caso da viga homogênea. Assim, o núcleo da viga suporta as tensões de corte sendo desprezadas as restantes tensões, enquanto que as peles vão suportar as tensões axiais, exposto na secção 5.2 na pagina 43. Para validar o modelo teórico também vai ser construído o modelo numérico com recurso ao software *Abaqus* (5.2.2 na pagina 45) e efetuados testes em laboratório para posterior comparação dos modelos, estes resultados estão expostos na secção 6.3 na pagina 53. As conclusões finais estão na secção 8.2 na pagina 69

Nos testes experimentais vai ser estudado o deslocamento transversal quando aplicado uma carga e também vai ser estudado a tensão num ponto da viga(extensómetro). Como o material do núcleo da viga sanduíche é cortiça vai ser efetuado um teste para se calcular o modulo de corte da cortiça, pois na viga, a cortiça só vai suportar tensões de corte, seção 6.1 na pagina 49.

Fica agora o esquema dos objetivos para este trabalho:

- Modelação teórica da viga homogénea sem corte
- Modelação numérica da viga homogénea sem corte
- Modelação teórica da viga homogénea com corte
- Modelação numérica da viga homogénea com corte
- Ensaio experimentais da viga homogénea
- Comparação dos resultados
- Ensaio experimentais para a determinação do modulo de corte da cortiça
- Modelação teórica da viga sanduíche
- Modelação numérica da viga sanduíche
- Ensaio experimentais da viga sanduíche
- Comparação dos resultados

Capítulo 3

Revisão do Estado da Arte

As estruturas sanduíche são constituídas por materiais processados sob forma de placas finas (designadas peles), que são coladas a um terceiro material ou estrutura, que se designa como núcleo. As referidas peles podem ser metálicas mas também fabricadas em materiais compósitos mais rígidos que o material do núcleo. As estruturas sanduíche têm pois a forma dominante no campo de placas e vigas, com aplicações de destaque num variado campo tecnológico, com domínio na indústria automóvel, naval e aeronáutica. Segundo o documento [14], uma estrutura sanduíche é um componente tipo painel consistindo na sua forma mais simples em duas peles relativamente finas (dispostas paralelamente) e coladas a um terceiro componente tipo placa, relativamente espessa e normalmente leve e de menor rigidez que as laminas externas; esta última é o núcleo do painel sanduíche. A construção com estruturas tipo sanduíche tem a notável vantagem de assegurar aos componentes uma elevada relação rigidez/peso, o que justifica o seu enquadramento nos campos de aplicação referidos.

O estado de tensão nestas estruturas consiste basicamente em tensões do tipo membrana as quais são tensões normais e de corte. Estas últimas estão associadas ao importante papel de absorção dos esforços transversos por parte da estrutura do núcleo sanduíche, tanto nas placas como nas vigas. Com efeito, o núcleo é concebido para absorver o esforço transversal, enquanto que as peles (laminas) externas resistem principalmente a esforços no seu próprio plano (solicitações de membrana).

A modelação numérica deste tipo de estruturas é fundamental para a viabilidade de projetos incluindo esta técnica de construção. Para esta etapa de investigação no comportamento de materiais e estruturas sanduíche muito tem contribuído o desenvolvimento de técnicas em elementos finitos com elementos de formulação específica, como o tipo placa e casca, de elevada ordem ou integração reduzida. Nesta área, Ferreira de-

envolveu elementos finitos com aplicação à modelação de estruturas sanduíche [15]. Reddy, no seu livro [16], descreve em pormenor os modelos de transmissão e propagação de esforços internos em estruturas sanduíche, assim como propõe soluções de aproximação ao problema em discussão.

O bom desempenho estrutural de vigas e placas sanduíche depende não só das propriedades mecânicas de cada componente (peles e núcleo) mas também da boa adesão entre eles; com efeito, é muitas vezes nesta zona de união que se geram defeitos e se propaga o colapso da viga ou placa (por delaminação) por efeito de tensão de corte limite para a união lamina/núcleo. Para caracterizar este fenómeno, que é um dos principais mecanismos de dano de materiais compósitos (incluindo as estruturas sanduíche), é muito importante caracterizar as propriedades mecânicas de cada um dos constituintes da associação; isto é, as lâminas e o núcleo. Este mecanismo de dano pode ser investigado com procedimentos experimentais de reconhecida fiabilidade e rigor, como o teste de flexão em 3 pontos (é fundamental ter esforço transversal, por isso este teste é significativo), quer em regime estático quer em dinâmico. Um número considerável de contribuições científicas na área de estruturas tipo sanduíche tem sido publicado nas últimas décadas. Estas enquadram-se em áreas dos modelos computacionais (simulação numérica) e simulação experimental. Esta última, não diminuindo o valor do estudo numérico, representa um importante contributo para se saber os modos de falha, quer em regime estático, quer dinâmico (com inclusão de efeitos de fadiga, por exemplo). O autor Nettles [17] faz uma extensiva caracterização das propriedades mecânicas de materiais compósitos de uso em indústria aeronáutica e aeroespacial, desde os módulos de Young, fatores de Poisson para os constituintes dos compósitos (fibra e resina separadamente) assim como agrupados em camadas com diversas orientações de fibra.

Na simulação numérica, a melhor informação deriva dos modelos tridimensionais, em que o uso de elementos finitos permite aproximações ao comportamento real da estrutura de modo muito exato. O comportamento estrutural na zona da ligação entre peles e núcleo tem sido eficazmente modelado usando elementos de interface [18]. Estes elementos são sensíveis quanto à sua compatibilidade matricial com os que lhes são adjacentes, levando a alguma instabilidade numérica na resolução do sistema de equações associado. A solução tem o desempenho melhorado com o uso de elementos de alta ordem (com nós intermédios e funções de forma do 2º grau)

Zimmermann [19] e Reddy [16] também propuseram aproximações ao comportamento tridimensional de estruturas laminadas usando técnicas de elementos finitos. Ainda no campo de elementos de caracterização de tensões interlaminares na zona de ligação entre as laminas e o núcleo, Moura (1996) [20] apresentou um contributo para a simulação por elementos finitos a partir do desenvolvimento de um elemento de interface para se associar a elementos finitos 3D isoparamétricos de 20 nós.

A análise efetuada no trabalho aqui apresentado restringiu-se ao comportamento linear elástico; contudo quando os resultados foram comparados com os resultando de testes experimentais, este aparecem em considerável discrepância em relação aos numé-

ricos equivalentes (tanto pela presente solução como a partir do Método de Elementos Finitos, ABAQUS-Simulia®). Uma razão fisicamente possível para este resultado (que será explicada com mais detalhe adiante neste trabalho) pode resultar do facto da cola ligando as laminas ao núcleo não ser totalmente rígida, o que permite que haja quase um fenómeno de fluência (creep) pois, à medida que o tempo passava, mantendo a intensidade da carga no caso de testes experimentais de flexão em 3 pontos, a viga cedia sempre, independentemente da estabilidade da força aplicada. Não tendo nenhuma informação sobre as propriedades mecânicas do adesivo que liga o aglomerado às lâminas metálicas, os referidos pontos de menos concordância serão questões em aberto neste trabalho.

Parte II

Métodos e Modelos

Capítulo 4

Ensaaios Experimentais

Neste capítulo vai ser exposto o procedimento utilizado para o ensaio experimental em que foi estudado o módulo de corte da cortiça e o deslocamento vertical e a tensão da viga homogénea e da sanduíche.

Para o caso das vigas foi utilizada uma viga apoiada em 3 pontos ao contrario do modelo teórico que é uma viga encastrada, por este método experimental garantir o encastramento mais perfeito ao centro da viga. Para a comparação foi necessário reduzir para metade a carga aplicada para ser equivalente a uma viga encastrada.

4.1 Construção da montagem experimental

4.1.1 Colocação do extensómetro e montagem das vigas

A viga usada tem comprimento de vão de $L = 182mm$, altura $h = 2mm$, largura $b = 30mm$ e o material é alumínio 1050 com módulo de Young $E = 70GPa$ e $\nu = 0.3$.

Para medir a tensão na superfície da viga de alumínio foi necessário colar um extensómetro num ponto da viga. Para isso limpou-se e desengordurou-se a zona onde o extensómetro foi aplicado. Após isto, com uma lixa de água 400 procedeu-se ao polimento da superfície fazendo movimentos a $+45^\circ$ e a -45° .

Colocou-se uma tira de fita-cola por cima do extensómetro e este foi colocado na viga. Levantou-se de um dos lados a fita-cola juntamente com o extensómetro e foi depositada uma gota de adesivo de cianoacrilato. Depois, com a ajuda do polegar, o extensómetro foi empurrado contra a superfície de maneira a que a cola ficasse bem espalhada. No fim a fita-cola que ajudou na colocação do extensómetro foi retirada. É de referir que foi necessário soldar os fios ao extensómetro antes de este ser colado.



Figura 4.1: Ilustração da fase final da colocação do extensómetro

A figura 4.1 ilustra o extensómetro colocado na viga e a fita-cola usada para auxiliar o suporte dos cabos. O extensómetro foi colocado a um quarto do comprimento total da viga, devido ao fato de posteriormente na comparação com os resultados teóricos, o valor do comprimento da viga ser reduzido para metade ficando assim o extensómetro a metade da viga encastrada.

Posteriormente, esta viga com o extensómetro instalado foi usada na viga sanduíche, sendo adicionado mais um extensómetro na face oposta, como ilustrada na figura 4.2, sobre as zonas a vermelho, para medir a influencia da tensão de corte imposta pela cortiça.

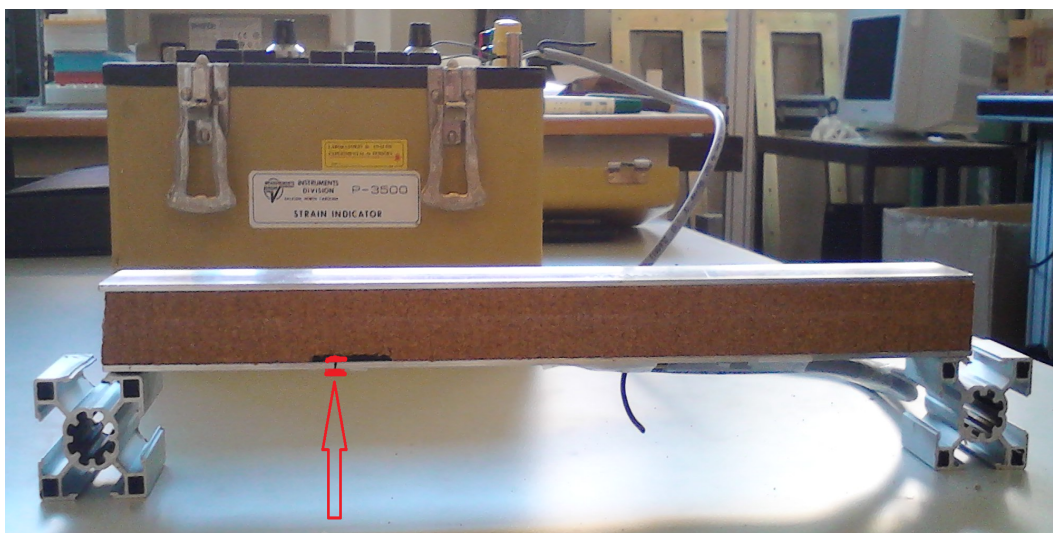


Figura 4.2: Ilustração da viga sanduíche com sinalização dos extensómetros

Para a montagem da viga sanduíche foram usadas duas peles de alumínio com as dimensões descritas anteriormente e para o núcleo foi utilizado um aglomerado de cortiça com distancia entre apoios de $L = 182mm$, altura $h = 20mm$, largura $b = 30mm$. As propriedades do aglomerado de cortiça são: $E_{cor} = 2.47MPa$ e $\varepsilon = 0$ [11].

Este aglomerado já continha adesivo superficial que foi utilizado para colar as peles de alumínio.

Observa-se na figura 4.2 que foi necessário retirar cortiça na zona do extensómetro interior. Posteriormente foram colocados 2 arames perpendiculares ao plano na viga no centro (zona de aplicação da carga) para desprezar a compressão da cortiça 4.3.



Figura 4.3: Ilustração dos reforços para impedir a compressão da cortiça

4.1.2 Recursos usados no procedimento experimental

Para fazer as medições da carga, deslocamento e deformação foi necessário usar dois equipamentos.

Na figura 4.4 observa-se o equipamento utilizado para medir a deformação do extensómetro. Trata-se da *P-3500 Strain Indicator da Raleigh* que foi gentilmente disponibilizada pela FEUP.

Foi necessário calibrar o equipamento para o extensómetro usado que tinha 350Ω de resistência e foi utilizado em quarto de ponte.

Para aplicar a carga e medir a deformação usou-se uma máquina de teste universais *Shimadzu*. Equipada com uma célula de carga *SFL-50KNAG* com capacidade de $50KN$.

Para medir a deformação no teste de corte foi utilizado um aparelho de vídeo extensometria *Messphysik ME 46NG*.



Figura 4.4: Ilustração do equipamento para leitura da deformação

4.1.3 Procedimento experimental

Medição do módulo de corte da cortiça

Para os resultados teóricos e numéricos serem mais coerentes com os resultados experimentais foi necessário medir o módulo de corte da cortiça.

Para isso prepararam-se 2 provetes com dimensões ($50 \times 15 \times 5 \text{ mm}$) que foram colocados na ferramenta de medição das forças de corte que posteriormente foi colocada na *Shimadzu*. Para ler a deformação recorreu-se à vídeo extensometria. O teste foi efetuado a 5 mm/min .

Viga homogénea

Primeiro colocou-se a viga apoiada e fizeram-se as ligações ao equipamento de leitura do extensómetro. De seguida foi calibrada a máquina de ensaios. Esta foi operada manualmente de modo a permitir retirar valores para a carga, deslocamento e fazer a leitura da deformação do extensómetro.

É possível observar na figura 4.5 a montagem para o procedimento experimental, que contém a viga, o indicador de deformação e a máquina de ensaios para aplicação da carga e leitura do deslocamento.

A carga foi aplicada em incrementos de 1 N e fez-se a leitura dos três valores pretendidos.



Figura 4.5: Ilustração da montagem para o procedimento experimental

Viga sanduíche

No início colocou-se uma massa no centro da viga quando esta estava apoiada nas extremidades e através da leitura dos extensómetros reparou-se que a deformação ia sendo alterada ao longo do tempo, ou seja, ao longo do tempo a flecha da viga ia aumentando juntamente com a deformação das peles.

Por isto foi efetuado um teste de flexão em 3 pontos com a máquina de ensaios a varias velocidades para perceber a influência do tempo na deformação da viga.

Por não ser possível fazer paragens no teste, a utilização do medidor de deformação foi posta de parte por ser impossível fazer a leitura analógica à velocidade na leitura digital. Foram efetuados testes a 2, 20, 50, 100, 130, 150, 200 e 300 *mm/min*.

Capítulo 5

Modelação Numérica

Neste capítulo vão ser abordados os métodos utilizados para o desenvolvimento da formulação teórica para a caracterização de uma viga encastrada, primeiro uma viga homogénea e depois uma viga sanduíche. Primeiro vai ser abordada uma viga homogénea de alumínio por ser um elemento simples, e que por isso vai servir para demonstrar e validar o método utilizado, mais tarde na segunda parte quando da análise da viga sanduíche.

5.1 Análise de uma viga homogénea

O estudo deste tipo de elemento vai servir para validar o método usado. Optou-se por uma viga de alumínio por esta fazer parte da viga sanduíche. O estudo deste elemento vai ser dividido: primeiro vamos ter uma viga encastrada com uma força aplicada na outra extremidade que se deforma sem influência da tensão de corte. Depois impôs-se a influencia da tensão de corte transversal. Para validação dos modelos encontrados vai ser efetuada uma comparação com dados experimentais e com modelação em elementos finitos (simulação numérica).

5.1.1 Modelo analítico de uma viga homogénea sem corte

Este modelo de deformação de viga é semelhante ao modelo proposto por Euler-Bernoulli [21], em que as secções transversais da viga permanecem perpendiculares ao eixo da viga depois do deslocamento imposto pela carga, ilustrado na figura 5.1. O campo de deslocamentos do material vai ser definido através do método de Rayleigh-Ritz.

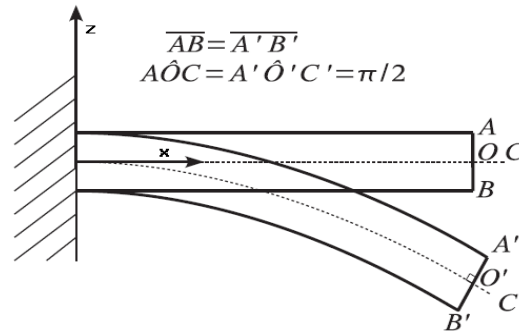


Figura 5.1: Representação da deformação segundo EulerBernoulli [21]

Aproximação polinomial do campo de deslocamentos

Como explicado anteriormente na secção 1.3 na pagina 16, é necessário obter o campo de deslocamentos, que para o caso da viga vai, ter duas componentes: o deslocamento vertical referente à letra \mathbf{w} e o deslocamento horizontal referente à letra \mathbf{u} . O deslocamento vertical \mathbf{w} foi aproximado com um polinómio da forma da equação 5.1

$$w(x) = \sum_{i=0}^n a_i f_i \quad (5.1)$$

com $f_i = x^i$. Exemplo para $n = 2$ fica:

$$w(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad (5.2)$$

Para uma viga encastada, isto é, não tem movimento vertical nem horizontal numa das extremidade, tem que se garantir o seguinte, $w(0) = 0$ e $w'(0) = 0$. Com isto, os termos a_0 e a_1 vão desaparecer. Assim, a equação 5.1 fica na seguinte forma:

$$w(x) = \sum_{i=2}^n a_i f_i \quad (5.3)$$

O deslocamento horizontal \mathbf{u} depende do deslocamento \mathbf{w} da seguinte forma:

$$u(x, z) = -z \frac{dw(x)}{dx} \quad (5.4)$$

Energia potencial da viga

Pegando na equação da energia potencial de um corpo elástico, 1.2, e fazendo as seguintes simplificações para um viga encastada: só é considerado a tensão axial σ_x que segundo a lei de Hooke é $\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$, a força externa aplicada é a carga P aplicada

a uma distancia L do encastramento. Com isto, fica a seguinte equação para a energia potencial de uma viga encastrada:

$$\begin{aligned}\Pi &= \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{2} E \varepsilon^2 b \, dz \, dx - P \cdot w(L) \\ &= \frac{Eb}{2} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon^2 \, dz \, dx - P \cdot w(L)\end{aligned}\quad (5.5)$$

Com h a ser a altura da viga, b a largura da viga, L o comprimento da viga, E o modulo de Young do material, P a carga aplicada e ε_x é a deformação segundo x que é dada pela seguinte equação:

$$\varepsilon_x = \varepsilon = \frac{du(x, z)}{dx} = -z \frac{d^2 w(x)}{dx^2}\quad (5.6)$$

A primeira parte da equação 5.5 diz respeito à energia de deformação ou energia interna, que, para este caso, só entra a deformação segundo o eixo do x . A segunda parte é o trabalho da força externa P que esta aplicada na extremidade oposta ao encastramento.

Cálculo dos coeficientes

Para o cálculo dos coeficientes ou amplitudes a_i do polinómio $w(x)$, equação 5.3, utilizou-se o método de Rayleigh-Ritz. A variação da energia potencial da viga que engloba a energia interna e a externa vai ser igual a zero quando derivada em ordem aos coeficientes do polinómio de aproximação do deslocamento vertical w . Na equação 5.7 pode ver-se a expressão matemática deste método.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 \quad \text{com } i = 2, \dots, n\quad (5.7)$$

Com esta equação é possível construir um sistema de equações que vai permitir encontrar os coeficientes a_n . Para estudar a convergência do método em função do numero de coeficientes efetuaram-se os cálculos para $n \geq 2$ da equação 5.3 cujos resultados são apresentados abaixo.

Para $n = 2$

$$w(x) = 3 \frac{LPx^2}{Ebh^3} \quad \sigma = -6 \frac{zLP}{bh^3}\quad (5.8)$$

Para $n = 3$

$$w(x) = 2 \frac{Px^2(3L-x)}{Ebh^3} \quad \sigma = -Ez \left(12 \frac{PL}{Ebh^3} - 12 \frac{Px}{Ebh^3} \right)\quad (5.9)$$

Para $n = 4$

$$w(x) = 2 \frac{Px^2(3L-x)}{Ebh^3} \quad \sigma = -Ez \left(12 \frac{PL}{Ebh^3} - 12 \frac{Px}{Ebh^3} \right)\quad (5.10)$$

Para $n = 5$

$$w(x) = 2 \frac{Px^2(3L-x)}{Ebh^3} \quad \sigma = -Ez \left(12 \frac{PL}{Ebh^3} - 12 \frac{Px}{Ebh^3} \right)\quad (5.11)$$

Como é possível observar, para $n \geq 3$ os resultados convergem para a mesma solução de deslocamento vertical w e tensão σ , que são as características mais importantes neste trabalho. Por isto, vai ser utilizado um polinómio com $n = 3$ no restante trabalho.

Fica a demonstração como foram efetuados os cálculos para $n = 3$. A equação 5.3 fica então:

$$w(x) = a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (5.12)$$

A equação 5.4 vem

$$u(x, z) = -z(2 a_2 x + 3 a_3 x^2) \quad (5.13)$$

Assim a deformação (equação 5.6) é dada por

$$\varepsilon = -z(2 a_2 + 6 a_3 x) \quad (5.14)$$

Substituindo 5.14 na equação 5.5 da energia potencial, fica

$$\Pi = \frac{1}{24} E b h^3 \left(\frac{1}{18} \frac{(2 a_2 + 6 a_3 L)^3}{a_3} - \frac{4}{9} \frac{a_2^3}{a_3} \right) - P(a_2 L^2 + a_3 L^3) \quad (5.15)$$

Foram calculadas as derivadas em ordem aos coeficientes e construído o sistema de equações.

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = \frac{1}{3} E b h^3 a_2 L + \frac{1}{2} E b h^3 a_3 L^2 - P L^2 = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial a_3} = \frac{1}{2} E b h^3 a_2 L^2 + E b h^3 a_3 L^3 - P L^3 = 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

Para resolver este sistema separou-se a parte da energia interna da parte da energia externa em duas matrizes para se resolver um sistema do tipo $Ax=B$. A matriz A diz respeito à energia interna (equação 5.17)

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} E b h^3 L & \frac{1}{2} E b h^3 L^2 \\ \frac{1}{2} E b h^3 L^2 & E b h^3 L^3 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Enquanto a matriz B se referente à energia externa

$$B = \begin{bmatrix} P L^2 \\ P L^3 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Por último o vector x dos coeficientes a_i é definido por:

$$x = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Resolvendo o sistema $Ax=B$ chega-se aos seguintes resultados.

$$\begin{aligned} a_2 &= 6 \frac{LP}{Ebh^3} \\ a_3 &= -2 \frac{P}{Ebh^3} \end{aligned} \quad (5.20)$$

que facilmente se coloca na equação 5.12 na forma:

$$w(x) = 2 \frac{Px^2(3L-x)}{Ebh^3} \quad (5.21)$$

Recorrendo à lei de Hooke,

$$\sigma = E * \varepsilon \quad (5.22)$$

com ε definido pela equação 5.6. A tensão é dada por

$$\sigma = -Ez \left(12 \frac{PL}{Ebh^3} - 12 \frac{Px}{Ebh^3} \right) \quad (5.23)$$

5.1.2 Modelo analítico de uma viga homogénea com corte

Nesta secção vai ser introduzido o efeito da tensão de corte, teoria proposta por Timoshenko [21]. Os planos transversais da viga não permanecem perpendiculares ao plano intermédio depois da viga ser deformada, como ilustrado na figura 5.2. A tensão de corte considerada neste modelo é a de corte no plano xz representada por γ .

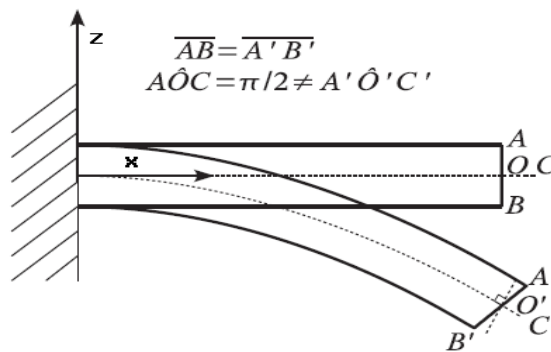


Figura 5.2: Representação da deformação segundo Timoshenko [21]

Na figura 5.2 a linha a tracejado, que indica a deformação devido à tensão de corte, segue uma modelo de primeira ordem. Isto é, o angulo de deformação com corte tem uma relação linear com o angulo quando a viga se deforma sem corte. As componentes do campo de deslocamento são dadas por:

$$u(x, z) = \frac{6Vz(-2Lx + x^2)}{Eh^3} \quad (5.24)$$

$$w(x, z) = \frac{Vx}{Gh} + \frac{6V \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3} \right)}{Eh^3} \quad (5.25)$$

com $V = \tau_0 h$ [22].

Embora os modelos de primeira ordem sejam uma boa aproximação. Neste trabalho vai ser constituído um modelo de alta ordem para o corte, com o objetivo de aproximar de um modo mais realista o campo de deslocamentos. A diferença entre a teoria de Timoshenco(1ª ordem) e a teoria de alta ordem está ilustrada na figura 5.3

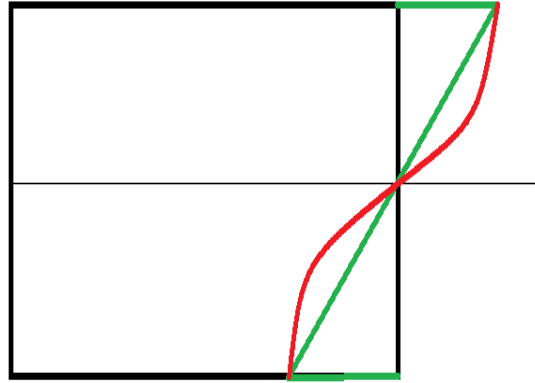


Figura 5.3: A linha a vermelho representa a deformação de corte de alta ordem. A linha a verde representa a deformação de corte de primeira ordem.

Aproximação polinomial do campo de deslocamentos

De modo semelhante à viga sem corte, o deslocamento vertical w vai ser dado pela equação $w(x) = a_2 x^2 + a_3 x^3$, já justificada anteriormente. A diferença para o modelo anterior consiste no deslocamento horizontal u , que é dado pela equação:

$$u(x, z) = -z \frac{dw(x)}{dx} + u_s(x, z) \quad (5.26)$$

A primeira parte da equação é igual para a viga sem corte. Agora é adicionada a segunda parte, que é um polinómio cubico, tentando aproximar o comportamento do material devido à tensão de corte. Que dá a forma de alta ordem para o corte. Este polinómio é definido por:

$$u_s(x, z) = \left(\frac{4}{h^3} \left(z^3 - \frac{3h^2 z}{4} \right) \right) (b_1 x) \quad (5.27)$$

Este polinómio cumpre os seguintes requezitos. A função tem que ser simétrica em relação à origem, ou seja, para $x > 0$ o valor de $u_s(x, z)$ é negativo e para $x < 0$, o valor de $u_s(x, z)$ é positivo, sendo nulo na origem. A derivada em relação a z é nula para as

extremidades $z = \pm \frac{h}{2}$, porque na zona das faces não existe corte. A sua representação esta na figura 5.4, os valores foram retirados para a extremidade da viga quando esta tem uma carga aplicada na direcção negativa do eixo z .

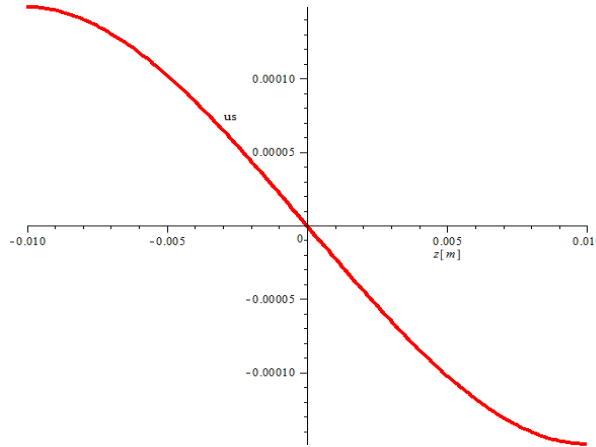


Figura 5.4: Representação da função u_s

Energia potencial da viga

Para a energia potencial deste modelo de viga usou-se a equação 5.7 e adicionou-se o efeito de corte como mostrado na equação 5.31. A parcela do corte transversal é dada por $\tau = G \cdot \gamma$ onde G é o módulo de corte do material dado na equação 5.29 e γ é a deformação de corte transversal dada por:

$$\gamma_{xz} = \gamma = \frac{dw(x)}{dx} + \frac{du_s(x, z)}{dz} \quad (5.28)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (5.29)$$

A equação 5.6 da deformação segundo x fica agora do seguinte modo:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = -z \frac{d^2w(x)}{dx^2} + \frac{du_s(x, z)}{dx} \quad (5.30)$$

Por fim fica a equação da energia potencial:

$$\Pi = \frac{E b}{2} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon^2 dz dx + \frac{G b}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^L \gamma^2 dx dz - P \cdot w(L) \quad (5.31)$$

Cálculo dos coeficientes

O cálculo dos coeficientes a_i e b_i é efetuado de igual modo como foi calculado para a viga sem corte e que por ser mais extenso não vai ser exposto aqui. No final dos cálculos

chegou-se aos seguintes resultados para os coeficientes:

$$\begin{aligned} a_2 &= 24 \frac{L(140 GL^2 + 11 Eh^2)P}{b(280 GL^2 + Eh^2) Eh^3} - 6 \frac{PL}{Eb h^3} \\ a_3 &= -2 \frac{P}{Eb h^3} \\ b_1 &= -210 \frac{LP}{b(280 GL^2 + Eh^2)} \end{aligned} \quad (5.32)$$

Substituindo estes coeficientes na equação do deslocamento vertical (5.12) e na equação de tensão (5.22) ficamos com:

$$w(x) = 2 \frac{Px^2(840 GL^3 + 129 LEh^2 - 280 xGL^2 - xEh^2)}{b(280 GL^2 + Eh^2) Eh^3} \quad (5.33)$$

$$\sigma = 6 \frac{zP(-560 GL^3 + 19 LEh^2 + 560 xGL^2 + 2 xEh^2 - 140 LEz^2)}{h^3 b(280 GL^2 + Eh^2)} \quad (5.34)$$

5.1.3 Modelo de elementos finitos de uma viga homogénea

Recorreu-se à utilização método de elementos finitos para fazer a simulação do caso da viga encastrada, com o intuito de se obter mais resultados para comparação com o modelo teórico. Para este efeito utilizou-se o software *Abaqus*.

Para a simulação foi construído um modelo virtual de uma viga com as dimensões da viga utilizada na parte experimental. A viga tem comprimento $L = 141mm$, altura $h = 2mm$, largura $b = 30mm$ e com uma carga máxima $P = 10N$

Para fazer a simulação foi criado um modelo 2D da viga, deformável com estrutura tipo wire, a seguir foi criado uma linha com o comprimento $L = 141mm$. De seguida foi criado o material mecânico elástico chamado Alumínio com modulo de Young de $70000N/mm^2$ e modulo de Poisson de $\nu = 0.32$. Foi necessário criar um perfil retangular com $h = 2mm$ e $b = 30mm$ para depois ser usado na criação de uma secção da viga e no fim associar a secção à peça criada. Criou-se um step, e na secção das cargas aplicou-se uma carga concentrada P, que neste caso tem o valor de $-10N$ e na outra extremidade encastrou-se a viga. A malha foi criada usando nós com tamanho de elemento igual a $1mm$.

Foi utilizado um modelo 2D porque para o modelo teórico apresentado neste trabalho só são consideradas as tensões σ_x e τ_{xz} , não tendo nenhuma na direção da espessura ou largura.

No Abaqus é possível ter o elemento de viga com corte e sem corte, que corresponde às opções *Shear-flexible* e *Cubic formulation*, respetivamente. Para comparar com o modelo teórico serão aplicados os dois tipos de elemento. Assim, ficou-se com uma

viga com dois tipos de elemento, B21 (com corte) e B23 (sem corte) com 141 elementos de dimensão $1mm$.

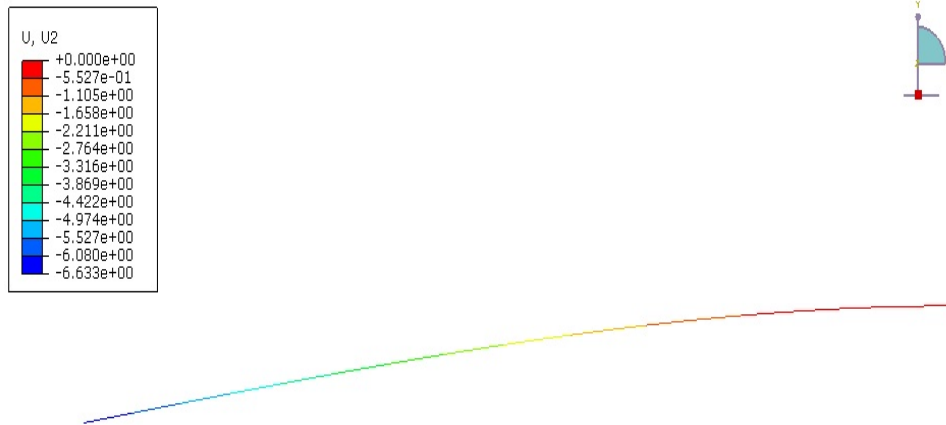


Figura 5.5: Ilustração da simulação 2D

A figura 5.5 representa o resultado de uma simulação para o deslocamento vertical.

Para efetuar posteriormente a simulação da viga sanduíche, em que foi necessário recorrer à modelação em 3D. Esta mudança de simulação deve à dificuldade na simulação 2D em colocar relações de superfície, entre o núcleo e as faces, para limitar o movimento entre as superfícies. Foi efetuada uma simulação em 3D da viga homogênea para perceber qual a melhor escolha de tipo de elemento para a viga.

Na construção foram usadas as dimensões acima referidas. Para aplicar a carga na extremidade recorreu-se a tração da superfície de topo, figura 5.6. O valor da carga pretendida foi dividido pela área para se saber o valor a colocar no software. Neste caso, $F_{aplicada} = \frac{P}{A} = \frac{10N}{60mm^2} = 0.166N$. Na definição da carga foi usada uma distribuição de carga uniforme, tração = general, vetor = $(0, -1, 0)$, CSYS = Global, magnitude = 0.166, amplitude = Ramp, área de tração = área indeformável. O tipo de elemento utilizado é o C3D8I com 8640 elementos de dimensão $1mm$.

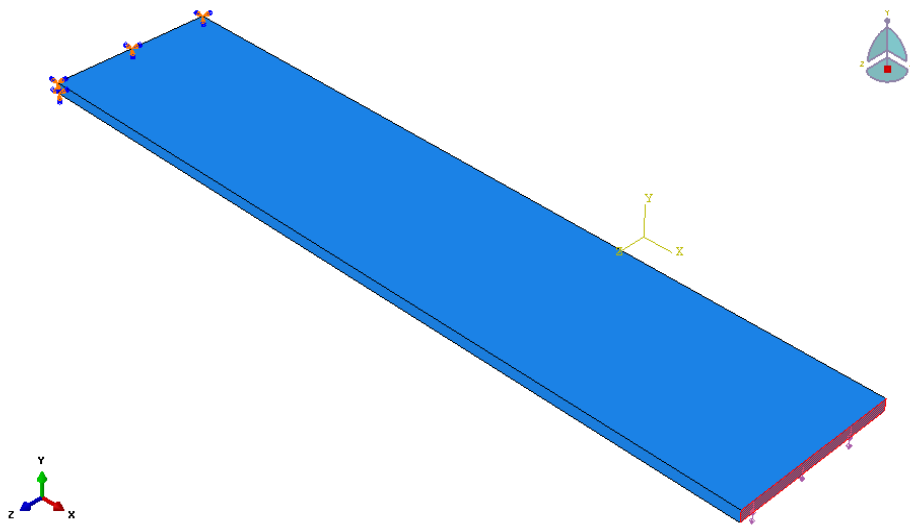


Figura 5.6: Ilustração da simulação 3D com representação do encastre e da carga aplicada.

5.2 Análise de uma viga sanduíche

Nesta secção vai ser abordado o modelo teórico para uma viga sanduíche. Esta viga vai ser constituída por duas peles de alumínio com um núcleo de cortiça. Vai ser utilizado um modelo de alta ordem para o corte.

5.2.1 Modelo analítico de uma viga sanduíche

Aproximação polinomial do campo de deslocamentos

Na figura 5.7 observa-se o comportamento teórico do material quando deformado. Para este modelo, o núcleo de cortiça suporta a tensão de corte τ_{xz} e as peles de alumínio suportam a tensão σ_x , ou seja, desprezou-se a tensão de corte nas peles e a tensão axial na cortiça.

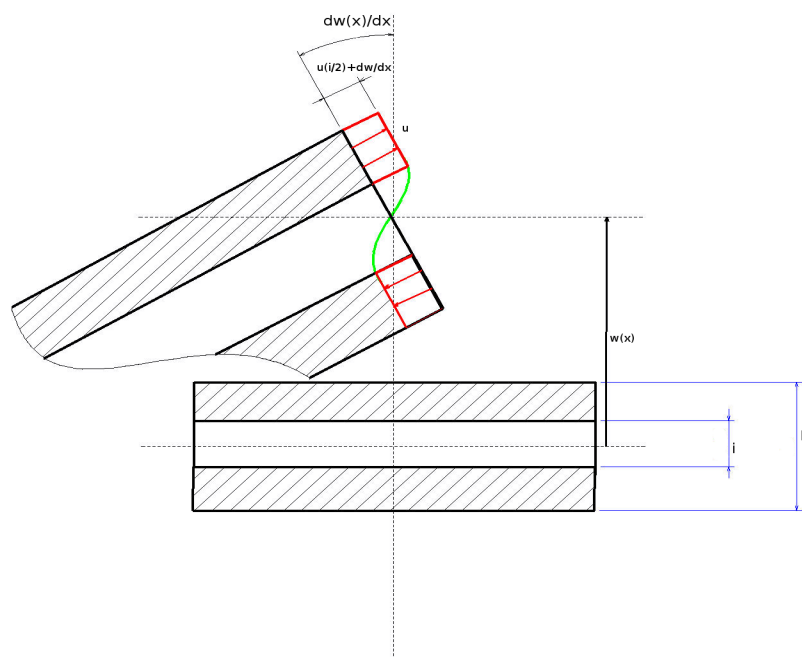


Figura 5.7: Representação da viga e respetiva deformação

Para o deslocamento vertical $w(x)$, que vai ser igual para os 2 materiais, ficámos com o seguinte polinómio dado pela seguinte equação:

$$w(x) = a_2x^2 + a_3x^3 \quad (5.35)$$

O deslocamento horizontal é diferenciado:

- para a cortiça

$$u_{cort}(x, z) = -z \frac{dw(x)}{dx} + u_s(x, z) \quad (5.36)$$

com

$$u_s(x, z) = \left(\frac{4}{i^3} \left(z^3 - \frac{3i^2 z}{4} \right) \right) (b_1 x) \quad (5.37)$$

que implementa o efeito de corte na cortiça;

- para o alumínio

$$u_{al}(x, z) = u_{cort} \left(x, \frac{i}{2} \right) + \left(\frac{i}{2} - z \right) \frac{dw(x)}{dx} \quad (5.38)$$

em que o termo $u_{cort}(x, i/2)$ indica o deslocamento na face de contacto entre a cortiça e o alumínio, sendo o resto do deslocamento do alumínio indicado em relação a este ponto. O termo $\left(\frac{i}{2} - z\right)$ é usado para garantir a continuidade entre a cortiça e o alumínio. Como foi referido anteriormente, as peles de alumínio não tem tensão de corte.

Energia potencial da viga

Para construir o integral da energia potencial é necessário obter a deformação segundo x das peles de alumínio, ε , e a deformação de corte do núcleo de cortiça, γ :

- para as peles de alumínio

$$\varepsilon_{al} = \frac{du_{al}(x, z)}{dx} = -b_1 - 2z a_2 - 6z a_3 x \quad (5.39)$$

- para o núcleo de cortiça

$$\gamma_{cort} = \frac{dw(x)}{dx} + \frac{du_{cort}(x, z)}{dz} = 4 \frac{\left(3z^2 - \frac{3}{4}i^2 \right) b_1 x}{i^3} \quad (5.40)$$

Com estas equações constrói-se o integral da energia potencial

$$\Pi = 2 * \left(\frac{E_{al} b}{2} \int_{i/2}^{h/2} \int_0^L \varepsilon_{al}^2 dx dz + \frac{5/6 G_{cort} b}{2} \int_0^{i/2} \int_0^L \gamma_{cort}^2 dx dz \right) - P * w(L) \quad (5.41)$$

sendo o E_{al} o modulo de Young do alumínio e G_{cor} o modulo de corte da cortiça. O integral é calculado para a metade superior da viga e por isso tem a multiplicação por dois para estender à restante viga. O termo $\frac{5}{6}$ é uma correção geométrica ao corte usada por Timoshenco [23]. É usado neste caso por haver uma grande diferença entre a rigidez do núcleo e a rigidez das peles.

Calculo dos coeficientes

O cálculo dos coeficientes a_i e b_i é efetuado de igual modo como foi calculado na viga homogênea sem corte e que, por ser extenso, não vai ser exposto aqui. No final dos cálculos chegou-se aos seguintes resultados para os coeficientes:

$$a_2 = 3 \frac{(15 h^3 E_{al} i + 32 h^2 G_{cor} L^2 + 32 i h G_{cor} L^2 - 15 i^4 E_{al} + 32 i^2 G_{cor} L^2 + 9 i^3 h E_{al} - 9 h^2 E_{al} i^2) PL}{E_{al} b (3 h^3 E_{al} i + 16 h^2 G_{cor} L^2 + 16 i h G_{cor} L^2 - 3 i^4 E_{al} + 16 i^2 G_{cor} L^2 + 9 i^3 h E_{al} - 9 h^2 E_{al} i^2) (-i^3 + h^3)}$$

$$a_3 = -2 \frac{P}{E_{al} b (-i^3 + h^3)}$$

$$b_1 = -18 \frac{i PL (i + h)}{b (3 h^3 E_{al} i + 16 h^2 G_{cor} L^2 + 16 i h G_{cor} L^2 - 3 i^4 E_{al} + 16 i^2 G_{cor} L^2 + 9 i^3 h E_{al} - 9 h^2 E_{al} i^2)} \quad (5.42)$$

5.2.2 Modelo em elementos finitos de uma viga sanduíche

Para efetuar a simulação em elementos finitos foi necessário começar por criar 3 corpos sólidos, 2 corpos iguais para serem as peles de alumínio com comprimento $L = 141mm$, largura $b = 30mm$ e altura $h = 2mm$. O outro corpo é o núcleo de cortiça cujas dimensões são $L = 141mm$, largura $b = 30mm$ e altura $h = 20mm$.

Para fazer a montagem foi imposta uma restrição entre as superfícies no núcleo e as peles do tipo *tie*. Para as condições fronteira foi encastrada uma superfície e tracionada a outra superfície oposta do mesmo modo que foi usado na viga homogênea.

Para as peles, o tipo de elemento foi o C3D8I com 8460 elementos cada uma. Para o núcleo foi usado o tipo de elemento C3D20R com 1400 elementos usando uma malha de $2mm$. A montagem final já com a malha está representada na figura 5.8.

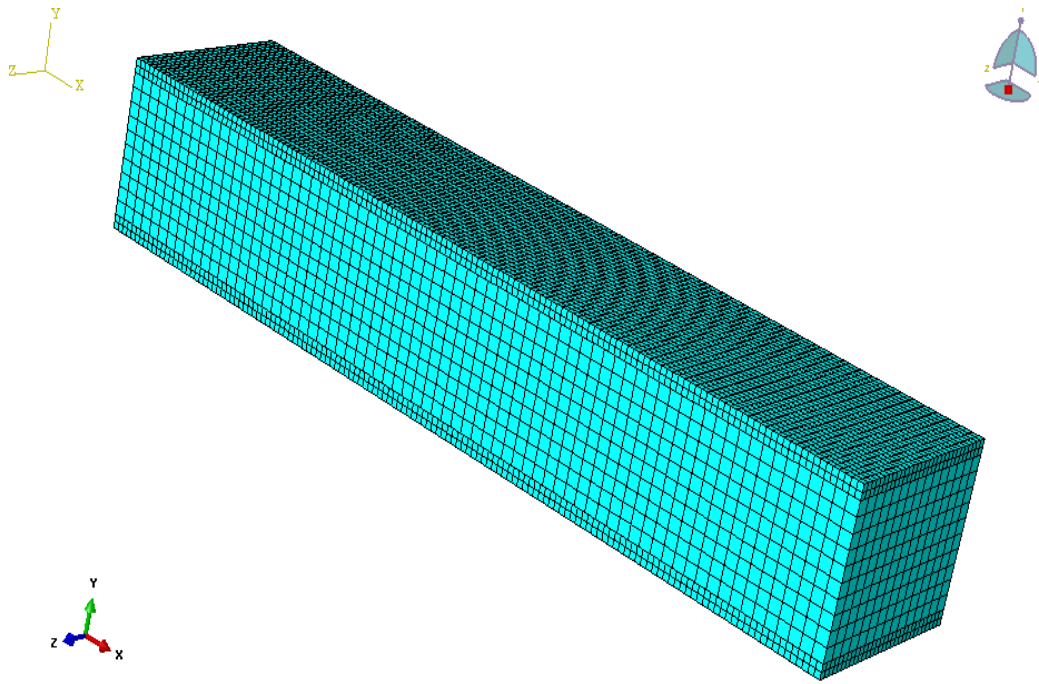


Figura 5.8: Representação da malha utilizada na viga sanduíche

Parte III

Resultados e Discussão

Capítulo 6

Resultados Experimentais

Neste capítulo vão ser expostos os resultados provenientes do procedimento experimental. Começando pelo teste para obter o módulo de corte da cortiça, passando para a viga homogênea e depois para a viga sanduíche.

6.1 Resultados dos testes para o módulo de corte da cortiça

Os resultados dos testes de corte dos dois provetes de cortiça estão representados na figura 6.1, em que se observa o comportamento não linear da cortiça.

Para transformar o gráfico de carga-deslocamento (figura 6.1) em tensão-deformação (figura 6.2) foi necessário efetuar os os seguintes cálculos:

$$\tau = \frac{F}{A} \quad \gamma = \frac{\delta x}{y} \quad (6.1)$$

Considerando que F é a força aplicada, A a área transversal, δx a deformação na direção transversal e y a distancia das amarras, determinaram-se os resultados presentes na figura 6.2 que são referentes ate à força de $100N$.

Recorrendo aos polinómios aproximadores das curvas e derivando em $\gamma = 0.015$ obteve-se os módulos de corte para cada teste, cujo valor médio é de $G_{cor} = 2.47MPa$. Na figura 6.3 observa-se o modo de rotura do provete.

É de referir que em testes anteriores realizados a este aglomerado de cortiça [?] se obteve um modulo de Young de $12.5MPa$ com $\varepsilon = 0$, que segundo a lei de Hooke

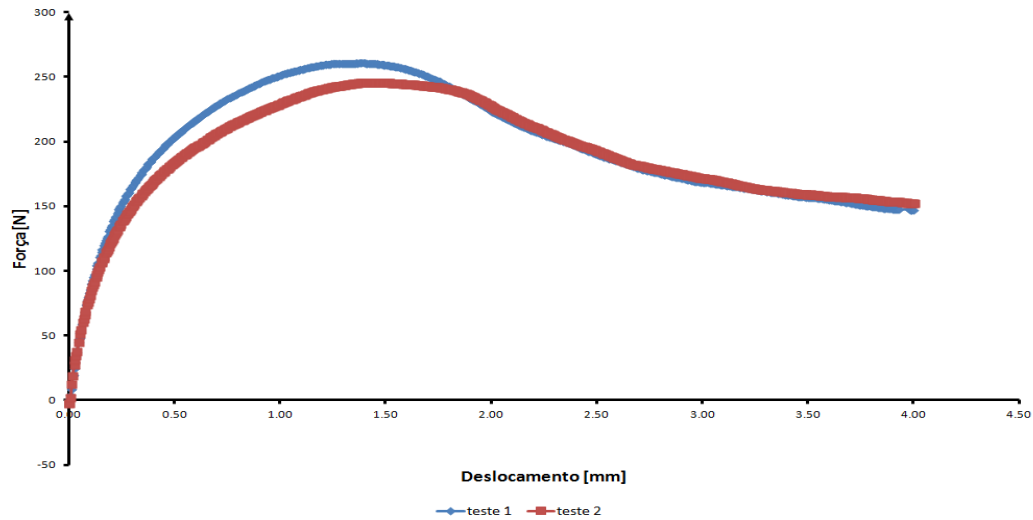


Figura 6.1: Resultados experimentais do teste de corte da cortiça

daria um módulo de corte de 6.25MPa que é 2.53 vezes superior ao obtido experimentalmente.

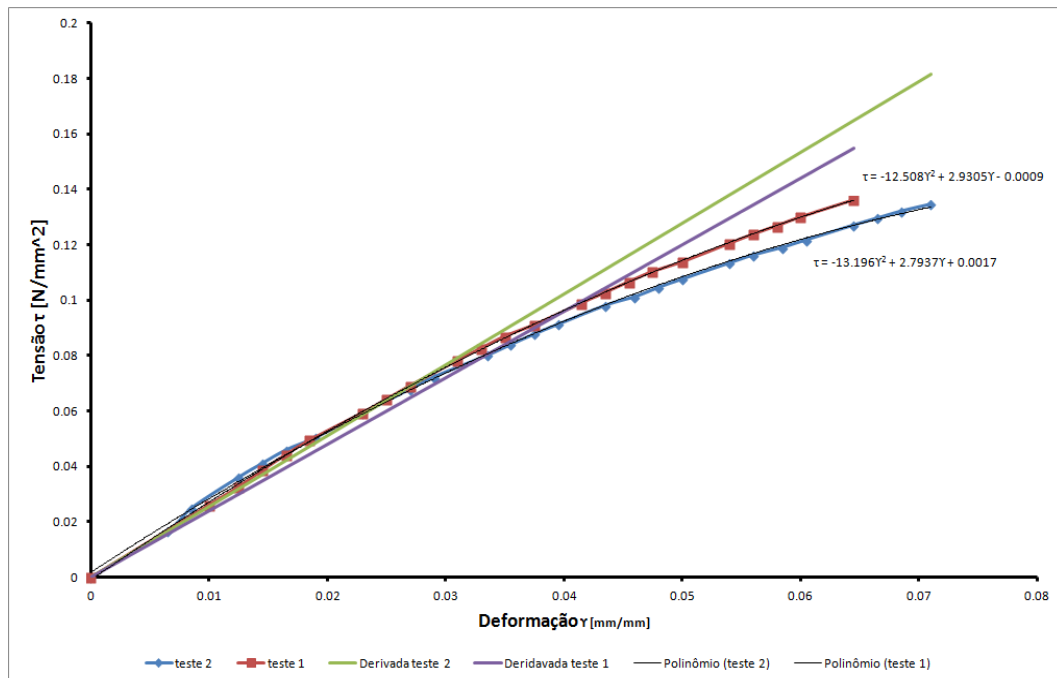


Figura 6.2: Curva tensão deformação de corte da cortiça

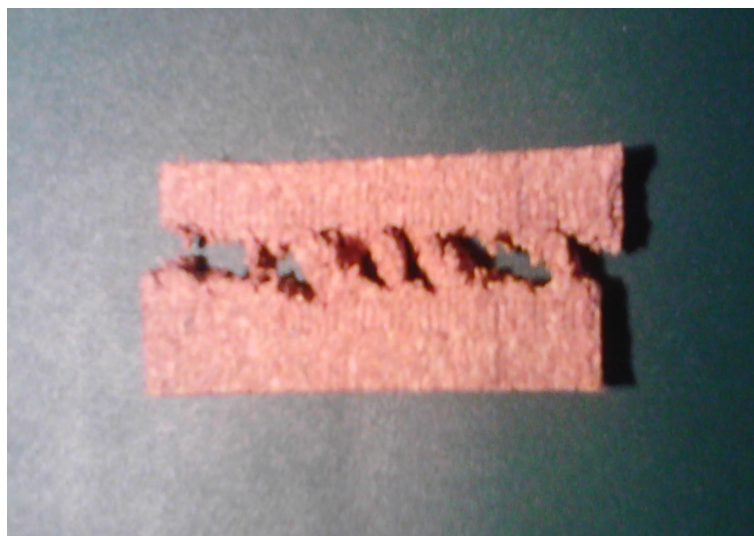


Figura 6.3: Provete após realização do teste

6.2 Resultados experimentais da viga homogênea

Os resultados obtidos resultam da operação manual da máquina de ensaios com a leitura da carga aplicada, deslocamento e deformação no extensômetro.

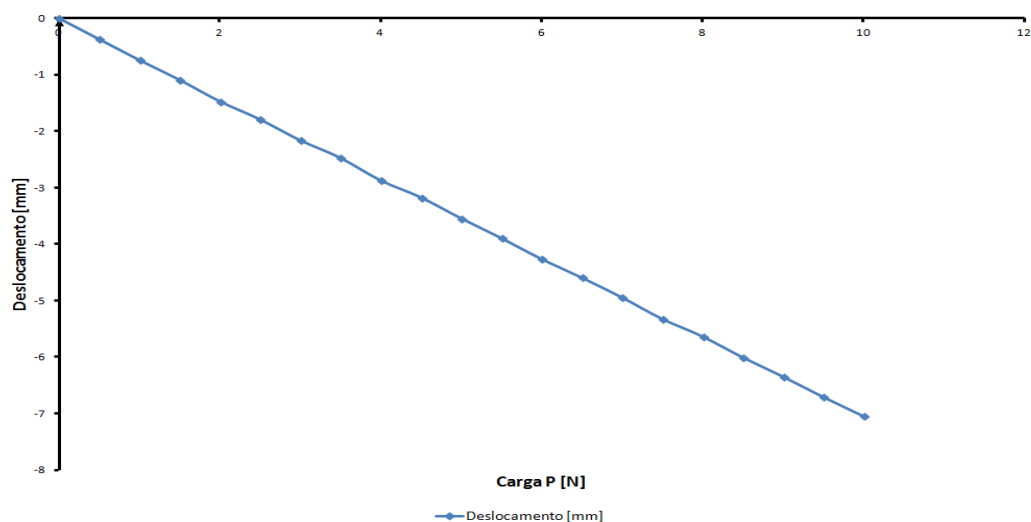


Figura 6.4: Resultados experimentais para carga e deslocamento

Na figura 6.4 observa-se a evolução do deslocamento vertical à medida que a carga P aumenta, evidenciando uma evolução linear como esperado.

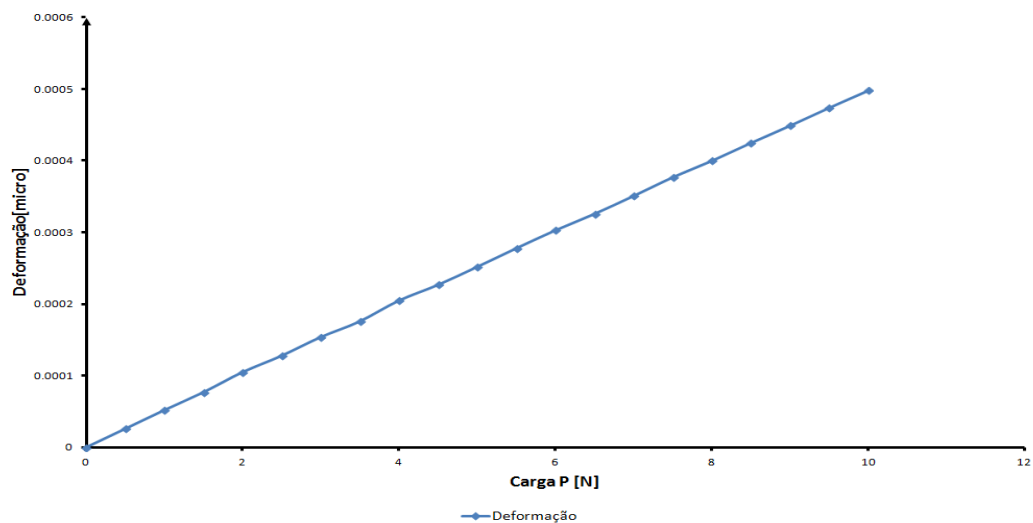


Figura 6.5: Resultados experimentais para carga e deformação

A figura 6.5 representa a evolução da deformação no extensómetro que também é linear o que demonstra um resultado espetável.

6.3 Resultados experimentais da viga sanduíche

Como referido anteriormente, quando se aplica uma carga na viga sanduíche esta vai se deformando ao longo do tempo. Este comportamento é visível na figura 6.6, em que para velocidades mais baixas, a viga se comporta como se não tivesse o núcleo de cortiça. À medida que a velocidade dos testes aumenta, a flecha vai tender para um valor absoluto mais baixo, por exemplo, para $P = 20N$ o deslocamento vai tender para $w(x) = 1.8mm$.

Assim, pode-se afirmar que a presença da cortiça não influencia muito a rigidez da viga para uma aplicação simplesmente estrutural. Este comportamento deve-se à estrutura única da cortiça juntamente com o aglomerante, que quando estão sobre esforço vão cedendo ao longo do tempo.

Em termos teóricos é quase impossível prever este comportamento por isso a tarefa da validação do modelo teórico se torna bastante árdua. Para uma possível modelação teórica deste comportamento teria que se tratar a cortiça como material visco-elástico com o efeito de *creep*, teoria exposta no livro [24]. Para a comparação com o modelo teórico e numérico vai ser considerada a flecha da viga para velocidades superiores, pois é onde a influencia do núcleo de cortiça é maior, tal como os modelos teóricos. Para velocidades reduzidas a estrutura sanduíche comporta-se como se o modulo de Young do núcleo fosse nulo, comportamento ilustrado na figura 1.4 na pagina 5.

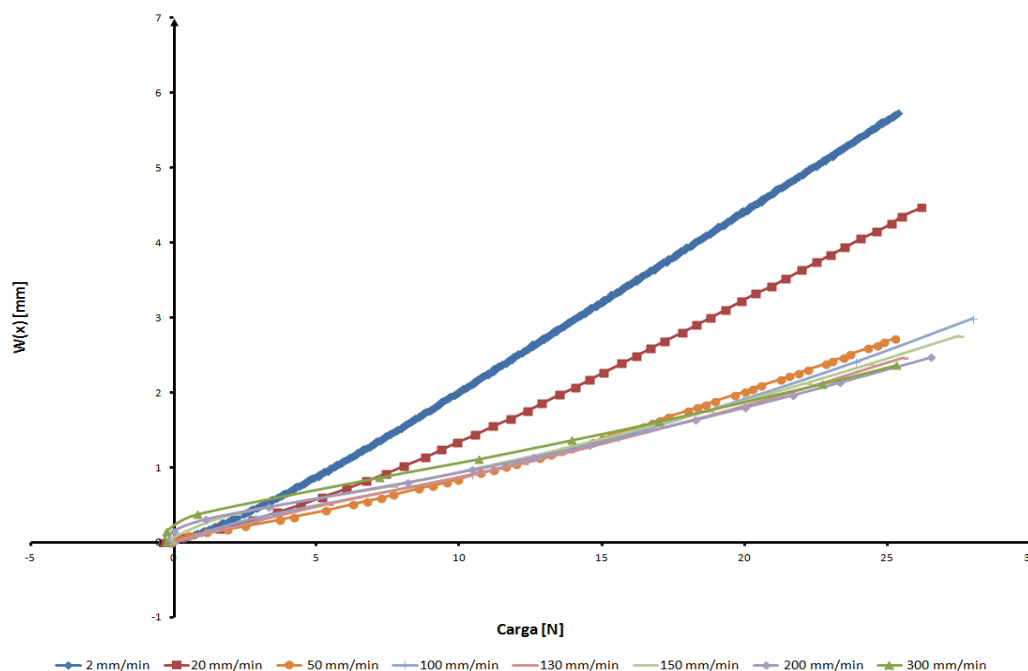


Figura 6.6: Resultados do teste à viga sanduíche efetuado a varias velocidades

O comportamento temporal da cortiça já tinha sido observado na tese [25] em que dois tipos de aglomerado comprimidos ate 70% se observou que para o NL10 houve uma recuperação de 90% e para o NL30 houve uma recuperação de 85%, figura 6.7, este comportamento deve-se à viscosidade da cortiça.

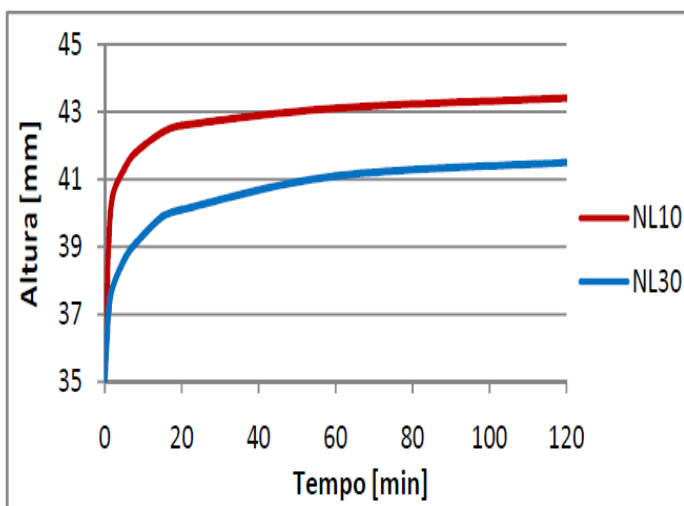


Figura 6.7: Recuperação do aglomerado de cortiça depois de comprimido [25]

Capítulo 7

Resultados Numéricos

Neste capítulo vão ser apresentados os resultados das modelações teórica e numérica das vigas. Começando pela viga homogênea onde vão ser comparados os resultados para viga modelada com influência da tensão de corte e sem a tensão de corte.

7.1 Resultados da modelação analítica e numérica de uma viga homogênea

A modelação teórica da viga engloba a formulação polinomial teórica do deslocamento e tensão e a formulação em elementos finitos, com o recurso ao software para efetuar a simulação. Para os resultados apresentados foi utilizado o modelo da viga homogênea sem corte e o modelo com corte, para $n=3$.

Para chegar a resultados com significado físico é necessário ter uma viga com dimensões, por isso foram utilizadas as dimensões de uma viga real que foi utilizada nos testes experimentais. Esta viga tinha a distancia entre o encastramento e a aplicação da carga de $L = 141mm$, altura $h = 2mm$, largura $b = 30mm$, e, como é sabido, foi encastada numa extremidade. As propriedades do material são módulo de Young $70GPa$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$.

Para mostrar os resultados da modelação teórica procedeu-se ao estudo do deslocamento e da tensão. Começando pelos resultados da flecha da viga quando carregada com uma carga P , isto é, um teste de força vs deslocamento.

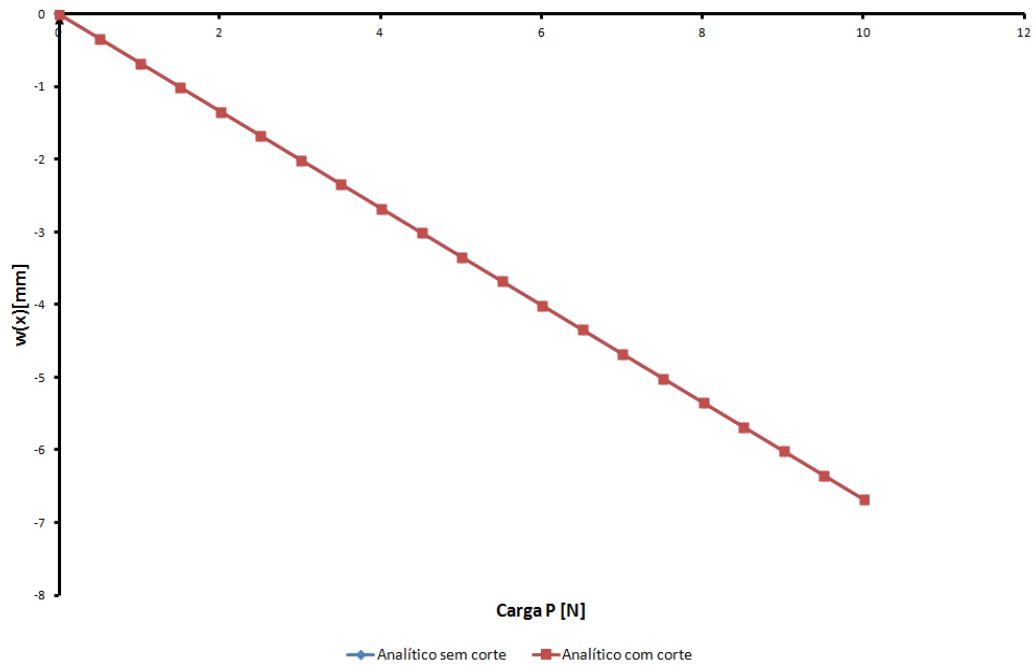


Figura 7.1: Variação de $w(x)$ em função da carga P para modelação Analítica

É possível observar na figura 7.1 que o comportamento da viga é praticamente igual quando esta é modelada com sorte ou sem sorte.

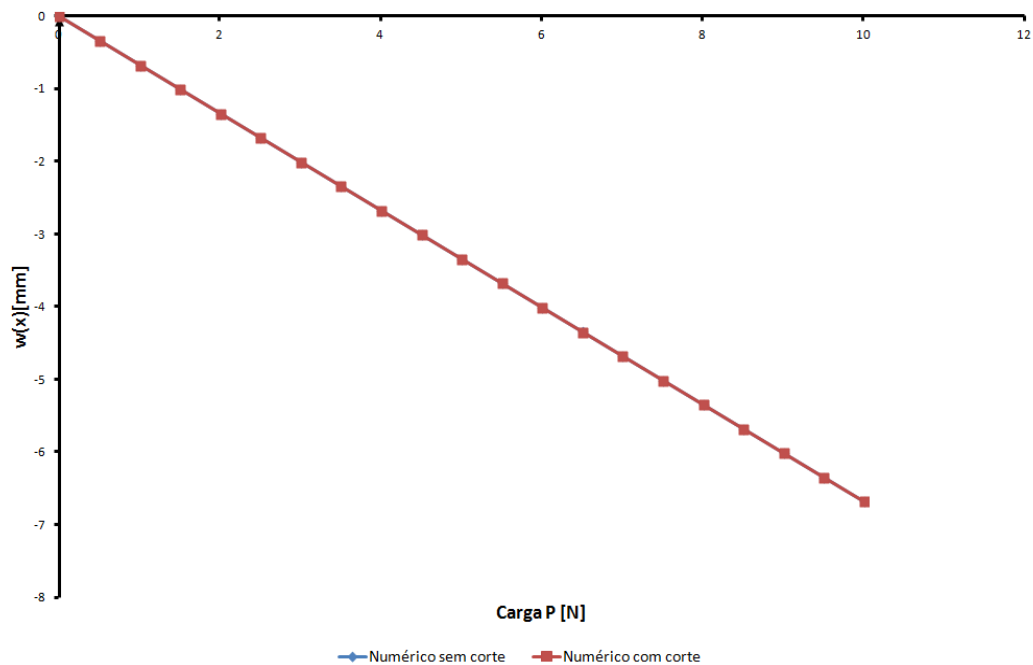


Figura 7.2: Variação de $w(x)$ em função da carga P para modelação numérica

Na figura 7.2 também se observa que os resultados são semelhantes para os dois modelos.

Para perceber a diferença em modelar a viga com corte ou sem corte vai ser apresentada uma tabela dos valores do deslocamento transversal máximo. Os valores, em mm, são retirados para várias cargas P.

Tabela 7.1: Tabela comparativas dos vários modelos para $w(x)$, Resultados em [mm]

Modelo	3[N]	6[N]	10[N]
Numérico com corte	-2.003	-4.005	-6.675
Numérico sem corte	-2.002	-4.005	-6.674
Teórico com corte	-2.003	-4.005	-6.675
Teórico sem corte	-2.002	-4.004	-6.675

Na tabela 7.1 observa-se que o modelo numérico (Abaqus) indica um deslocamento $w(x)$ maior em relação ao modelo analítico. Dentro das 2 formulações também se repara que as vigas modeladas com corte tem um deslocamento maior, como era esperado. Não existe uma grande diferença na influência do corte devido à altura da viga ser reduzida. Devido a este problema, pegou-se na modelação analítica e variou-se a altura (h) da viga entre 20mm e 40mm, como se observa na figura 7.3. Neste caso, a diferença entre o modelo com corte e sem corte já se torna mais evidente.

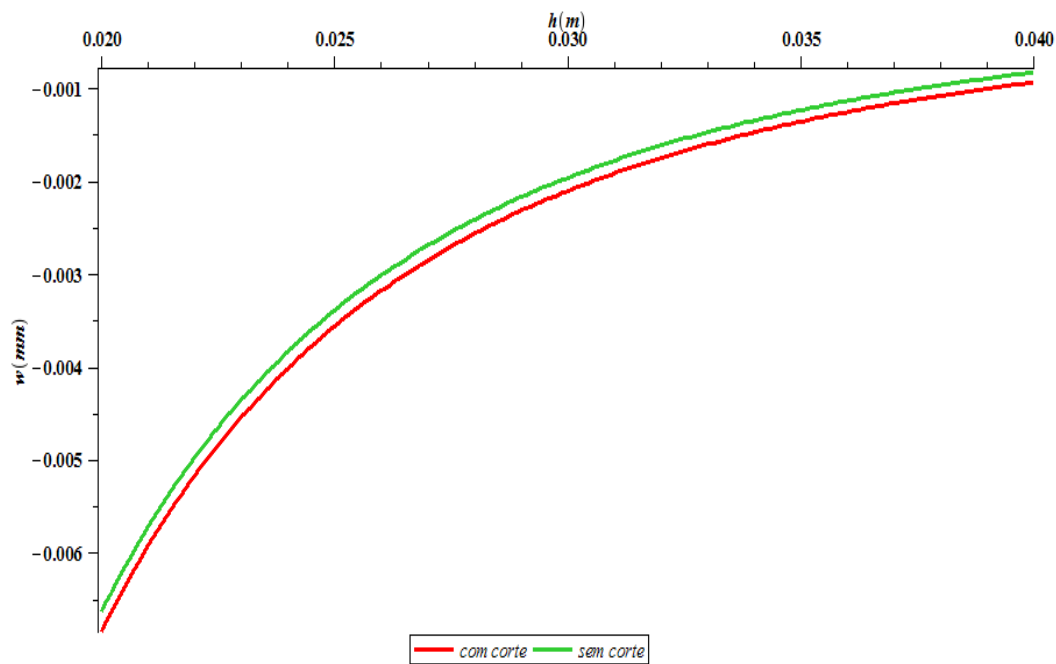


Figura 7.3: Variação de $w(x)$ para várias alturas h para a modelação analítica

Como os resultados são semelhantes tanto para a modelação com corte como para a

modelação sem corte, assume-se daqui para a frente que as referências às modelações Analítica e Numérica tem a influencia da tensão de corte.

A figura 7.4 ilustra a evolução do corte transversal τ_{xz} ao longo da viga. Tem uma forma parabólica como é esperado e é nulo na origem da viga.

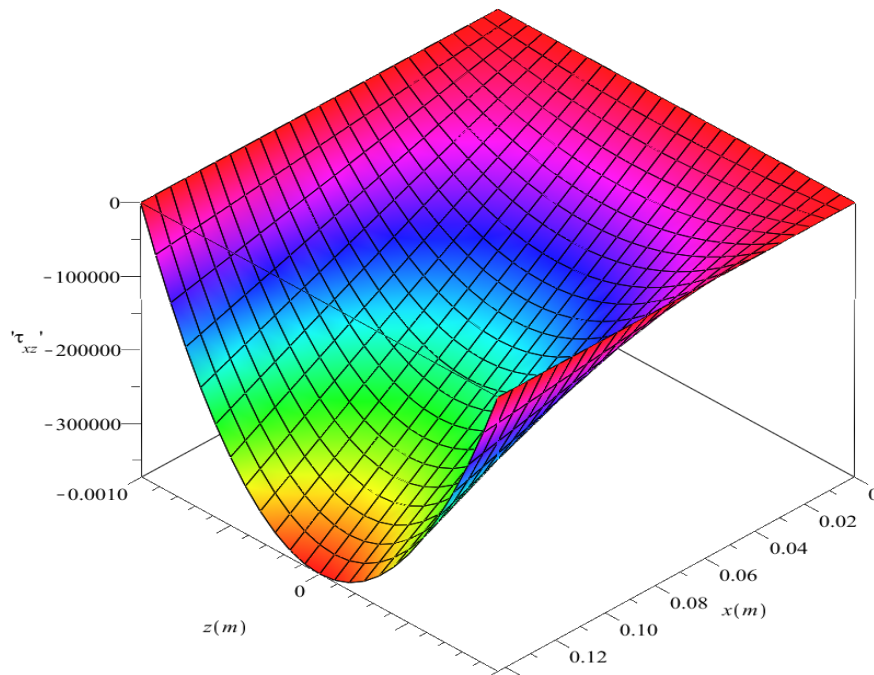


Figura 7.4: Representação da tensão de corte para P_{max}

Para complementar a comparação entre os modelos teórico e numérico, foi efetuado o estudo da tensão. Para isto, fixou-se P no valor máximo do teste anterior e retirou-se os valores de $w(x)$ para o plano intermédio da viga $z = 0$ ao longo do comprimento da mesma.

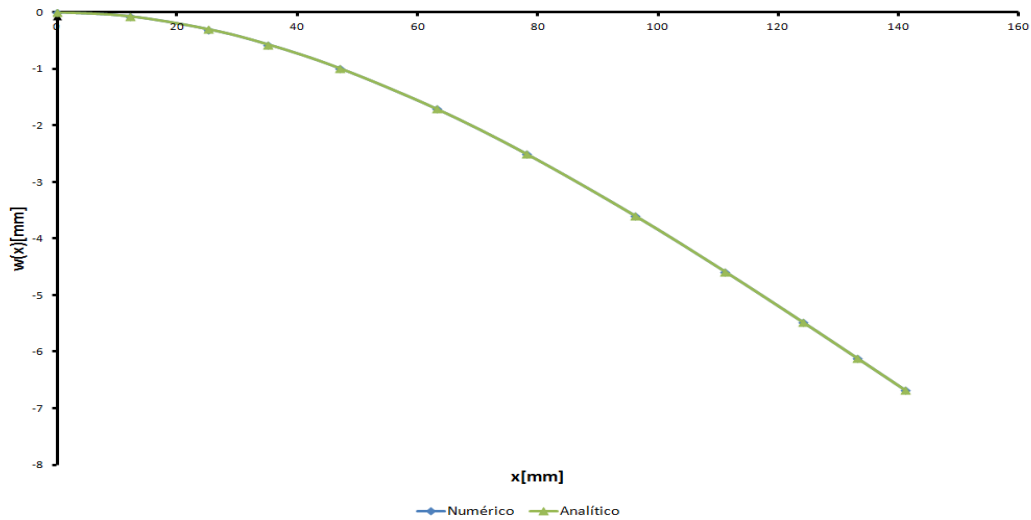


Figura 7.5: Deformada teórica da viga homogênea para P_{max}

Na figura 7.5 também se observa que os resultados para os diferentes modelos são iguais.

Foi também observado o comportamento de σ_x em função de x para a face superior da viga $z = \frac{h}{2}$.

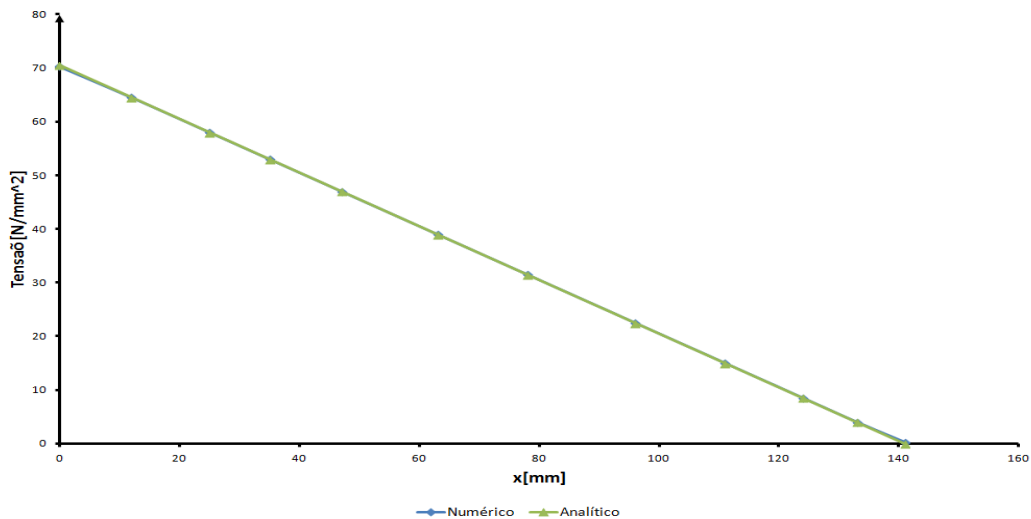


Figura 7.6: Variação de σ_x ao longo da viga para P_{max}

Mais uma vez, os resultados são semelhantes e dentro do esperado, pois a tensão máxima está presente na extremidade encastrada.

Para visualizar o comportamento da simulação em 3D (numérico 3D), efetuou-se a comparação com o modelo numérico com corte. Esta comparação serve para estudar

a convergência do tipo de elemento que vai ser usada mais tarde na simulação da viga sanduíche.

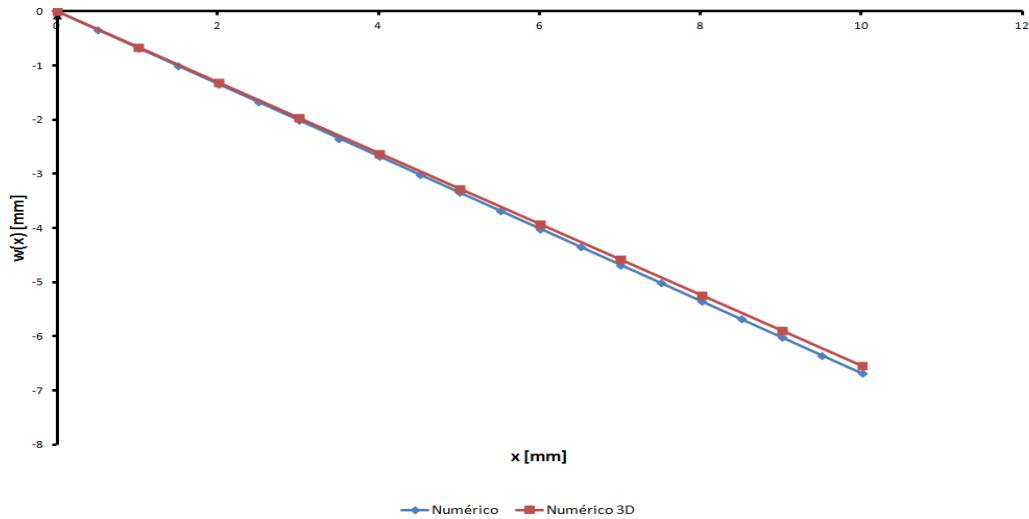


Figura 7.7: Variação de $w(x)$ em função de P

Na figura 7.7 observa-se que o comportamento da simulação em 3D é muito próximo da simulação em 2D, sendo esta menos rígida.

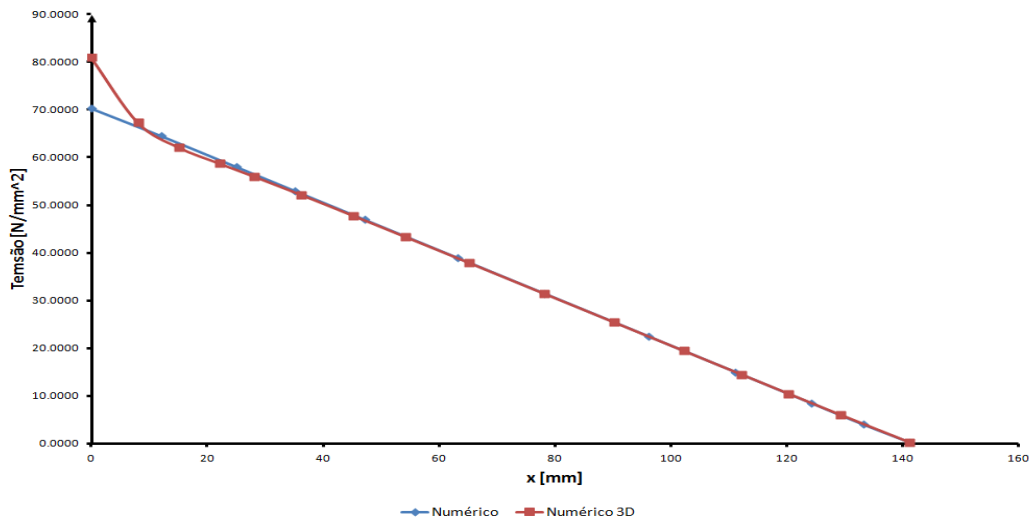


Figura 7.8: Variação de σ_x em função de x para P_{max} simulação 3D

Da figura 7.8 retira-se que a simulação em 3D tem o mesmo comportamento, só havendo uma pequena diferença na origem da viga. Existe um erro de 2.07% em relação à simulação 2D, o que é bastante baixo, e existe um erro de 7.14% em relação aos resultados experimentais.

Assim, pode-se afirmar que este tipo de simulação converge para os resultados preten-

dados.

Com os resultados expostos conclui-se que o modelo teórico obtêm resultados bastante positivos e assim pode-se proceder à extrapolação para a viga sanduíche.

7.2 Resultados da modelação analítica e numérica de uma viga sanduíche

Nesta secção vão ser apresentados de forma comparativa os resultados das modelações teórica e numérica para uma viga sanduíche. Os valores das cargas apresentados são baseados na parte experimental.

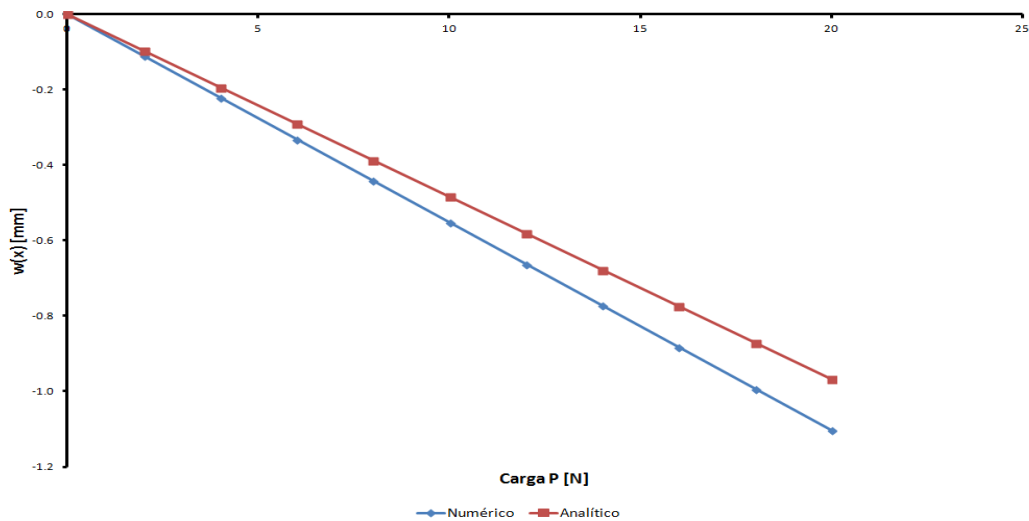


Figura 7.9: Variação de $w(x)$ em função de P

O modelo teórico é mais rígido do que o modelo numérico, como se observa na figura 7.9. Isto pode dever-se ao facto de a simulação numérica ser feita em 3D e a teórica ser em 2D, sendo varias tensões excluídas nesta ultima o que pode provocar um menor deslocamento.

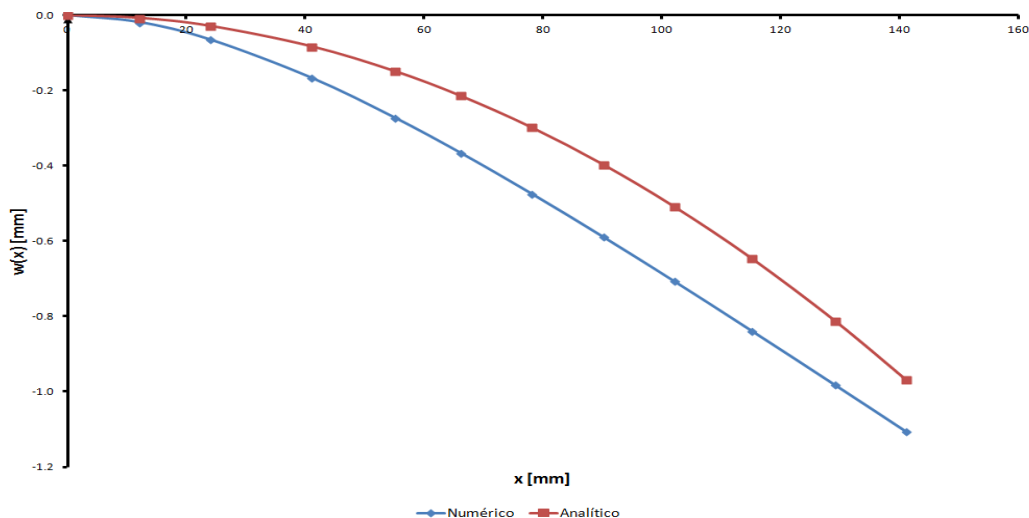


Figura 7.10: Variação de $w(x)$ em função de x para P_{max}

O fato de o modelo analítico ser mais rígido também influencia na deformada da viga como é possível observar na figura 7.10. Sendo o comportamento da viga analítica mais curvilíneo do que a viga numérica, por maior influencia da tensão de corte. Esta tensão de corte é representada na figura 7.11, em que se observa que a tensão de corte da cortiça na modelação numérica é praticamente desprezável para o centro da viga. Mas não é zero para a superfície entre o núcleo e as faces, ao contrário do que acontece na simulação analítica.

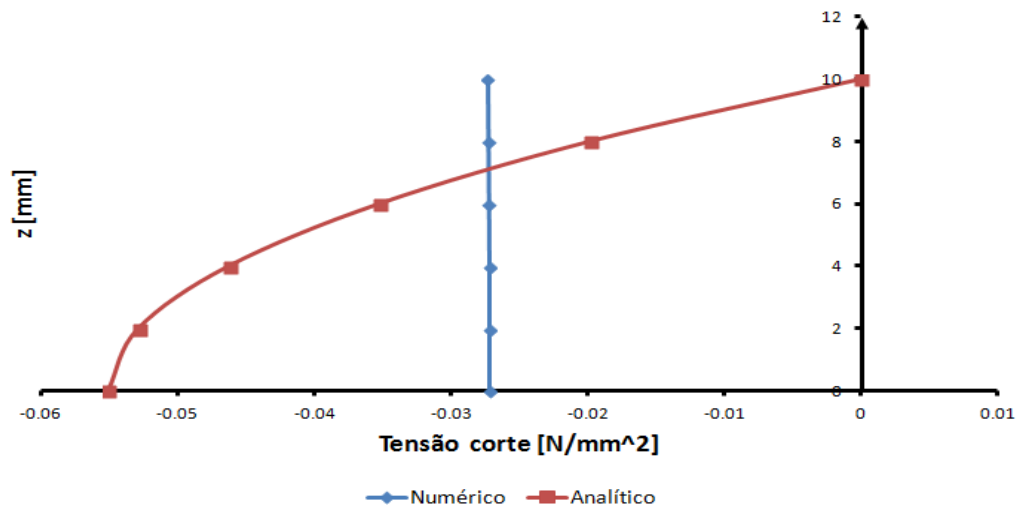


Figura 7.11: Variação da tensão de corte do núcleo na extremidade $x = L$ para P_{max}

O modo como o material se deforma também difere nas modelações. A figura 7.12 representa a diferença do modo como o material se deforma. O modelo analítico obriga à continuidade do deslocamento entre a cortiça e o alumínio, assim, obriga a um maior deslocamento da cortiça. No modelo numérico existe uma quebra acentuada no deslocamento de um material para o outro. É de referir que a figura 7.12 representa a parte superior da viga e que o núcleo (cortiça) está em $0 < z < 10$ e a pele (alumínio) está em $10 < z < 12$.

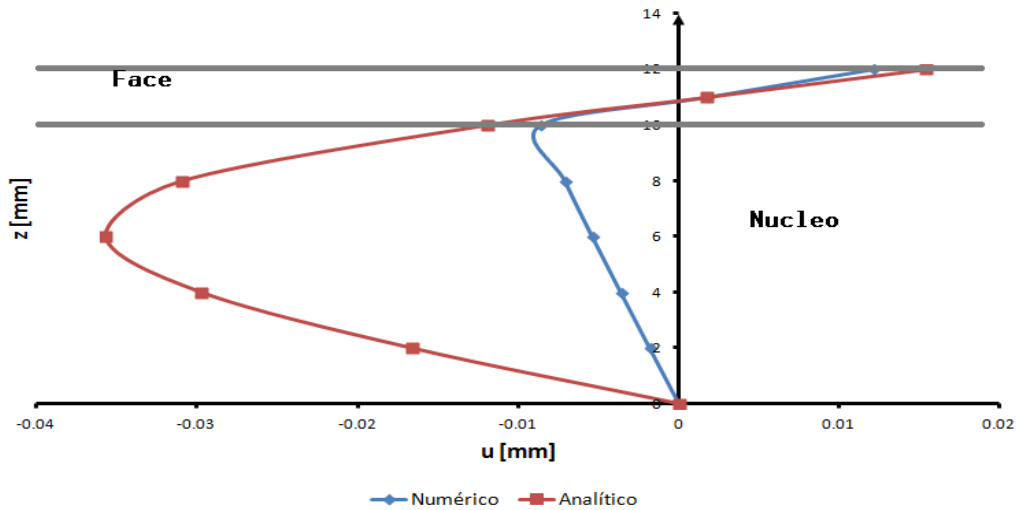


Figura 7.12: Deformação na extremidade $x = L$ para P_{max}

As diferenças no campo de deslocamento vão influenciar o campo de tensões, como se observa na figura 7.13. No caso da modelação analítica, os resultados demonstram que a superfície superior da pele de alumínio se encontra à tração, enquanto, no modelo numérico, a pele superior de alumínio se comporta como fosse uma viga homogênea encastrada. Na zona do encastramento, a tensão σ_x é representada na figura 7.14 para as duas modelações. Embora a tensão da superfície seja bastante diferente entre os dois modelos, o mesmo já não acontece na tensão na origem. Analisando a tensão na origem, o modelo numérico tem uma tensão superior ao modelo teórico. Este fato acontece devido ao modelo analítico obrigar a cortiça a um deslocamento maior, como consequência, a cortiça vai suportar alguma tensão σ_x . As tensões de corte geradas no núcleo induzem diferenças na tensão σ_x para a extremidade livre da viga (figura 7.15).

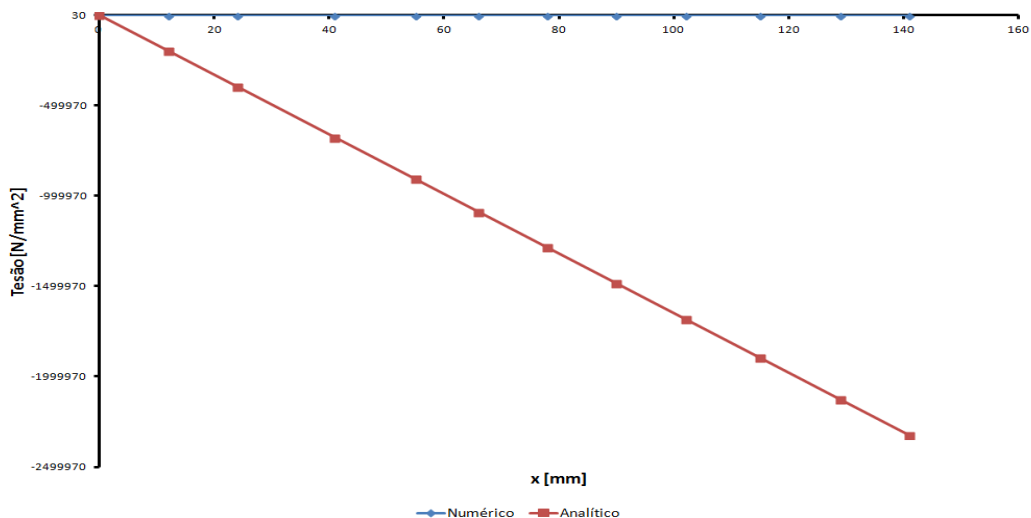


Figura 7.13: Tensão na superfície superior para P_{max}

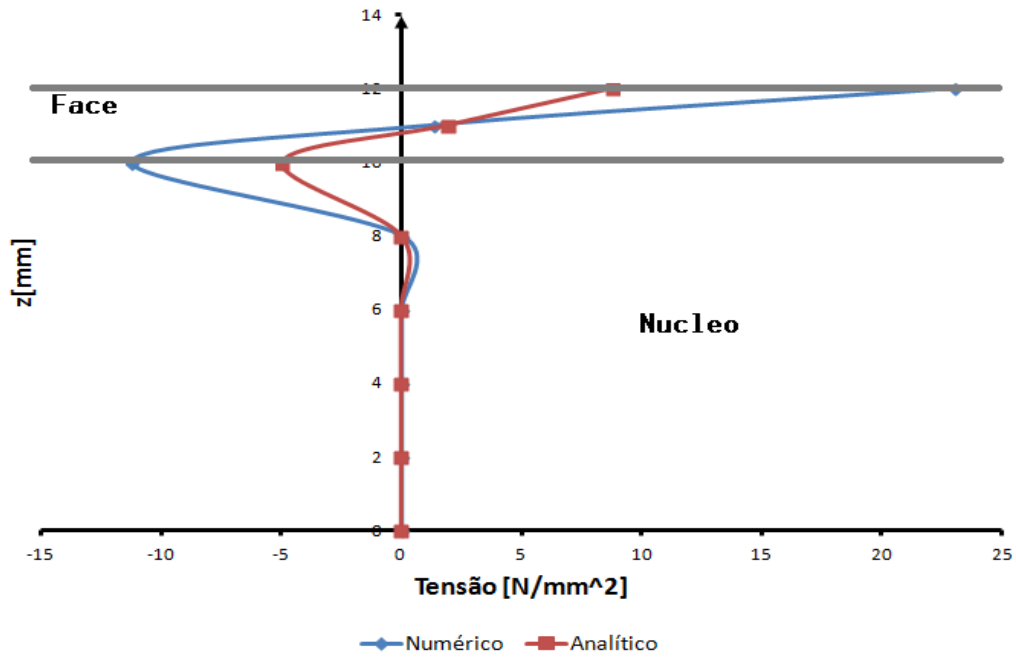


Figura 7.14: Tensão σ_x na zona do encastramento para P_{max}

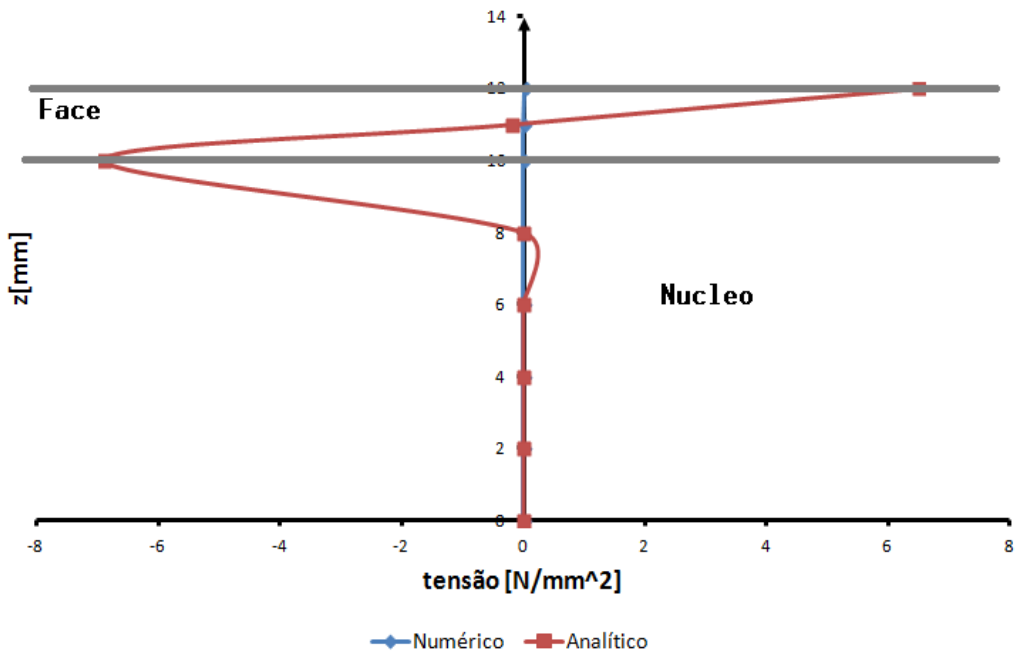


Figura 7.15: Tensão σ_x na extremidade livre para P_{max}

Capítulo 8

Comparação e Discussão dos resultados

Neste capítulo vão ser comparados os resultados experimentais com os resultados teóricos. A comparação tem o objetivo de perceber o comportamento das formulações teóricas em relação ao que acontece na prática.

8.1 Comparação dos resultados da viga homogênea

Para efetuar a comparação vão ser usados os valores do deslocamento vertical $w(x)$ e do σ_x na posição do extensómetro.

Os valores dos resultados teóricos são para os modelos com tensão de corte.

Na figura 8.1 observa-se que os resultados obtidos são iguais para as modelações teóricas como já antes referido. Os resultados experimentais não diferem muito dos resultados teóricos, existe um erro de 5.2%, a diferença pode dever-se a alguma falha na montagem experimental como a colocação da viga descentrada ou a erros de leitura da máquina pois pegando nos resultados experimentais e fazendo as contas inversas a viga tem um módulo de Young de 66.4GPa.

A figura 8.2 representa os valores da tensão para a posição do extensómetro, que permite concluir que os resultados teóricos obtidos são bastante realistas, o que leva a aprovação do modelo teórico apresentado.

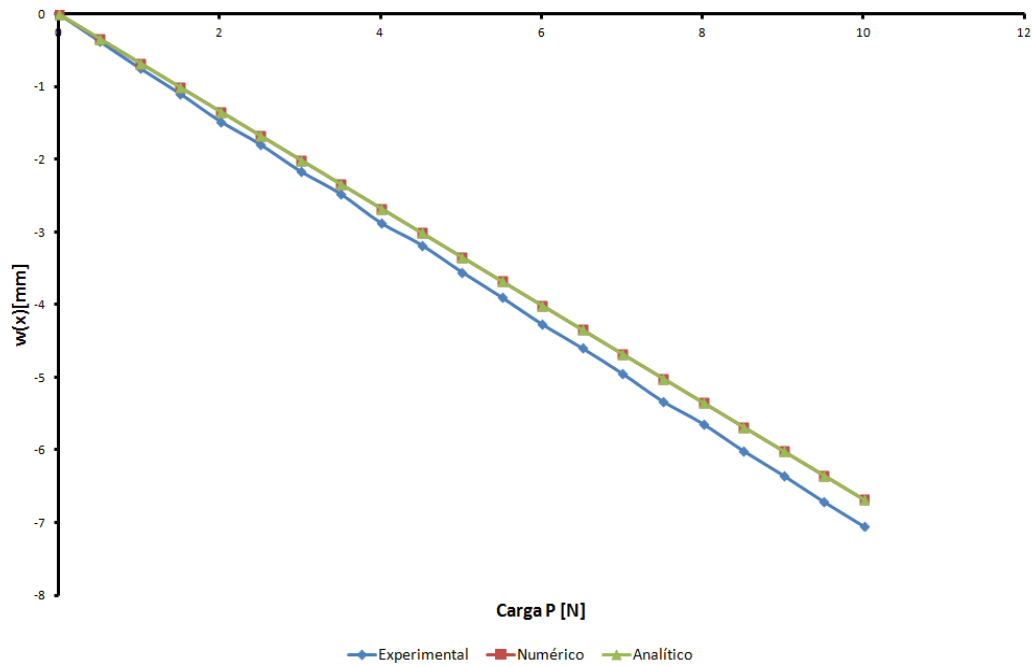
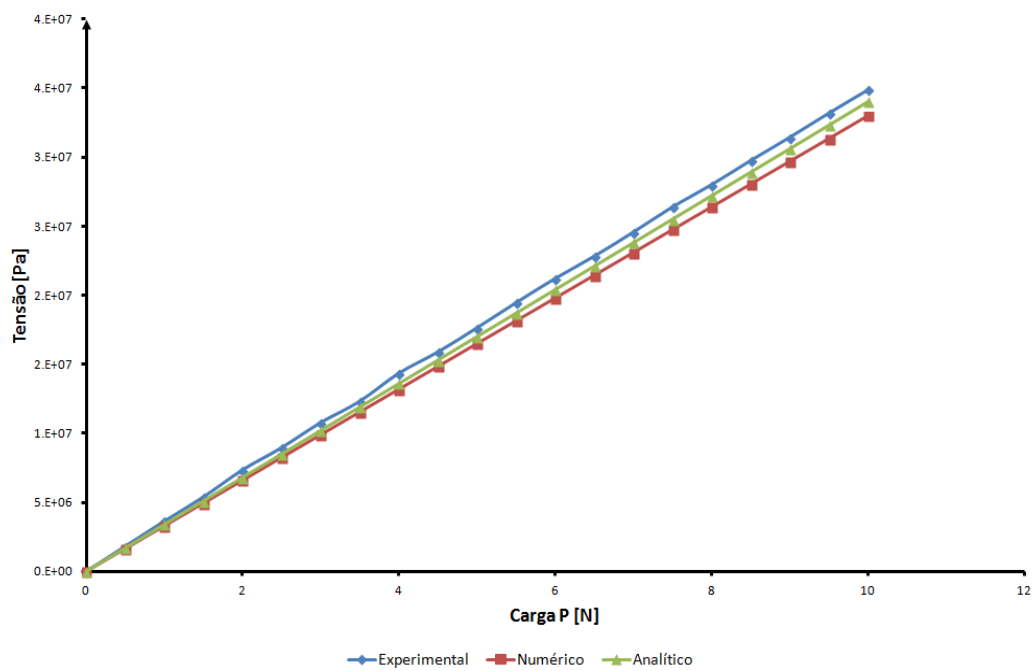
Figura 8.1: Comparação dos resultados para $w(x)$ em função da carga

Figura 8.2: Comparação dos resultados para a tensão em função da carga na zona do extensômetro

8.2 Comparação dos resultados da viga sanduíche

Como foi referido anteriormente na secção 6.3, a cortiça tem um comportamento não linear e dependente do tempo, por isso a comparação efetuada na figura 8.3 não apresenta os resultados esperados devido à grande diferença entre os resultados teóricos e os resultados experimentais. A diferença entre o modelo analítico e numérico já foi justificada na secção dos resultados dos modelos teóricos, embora aqui apresente um erro superior, cerca de 12.3%.

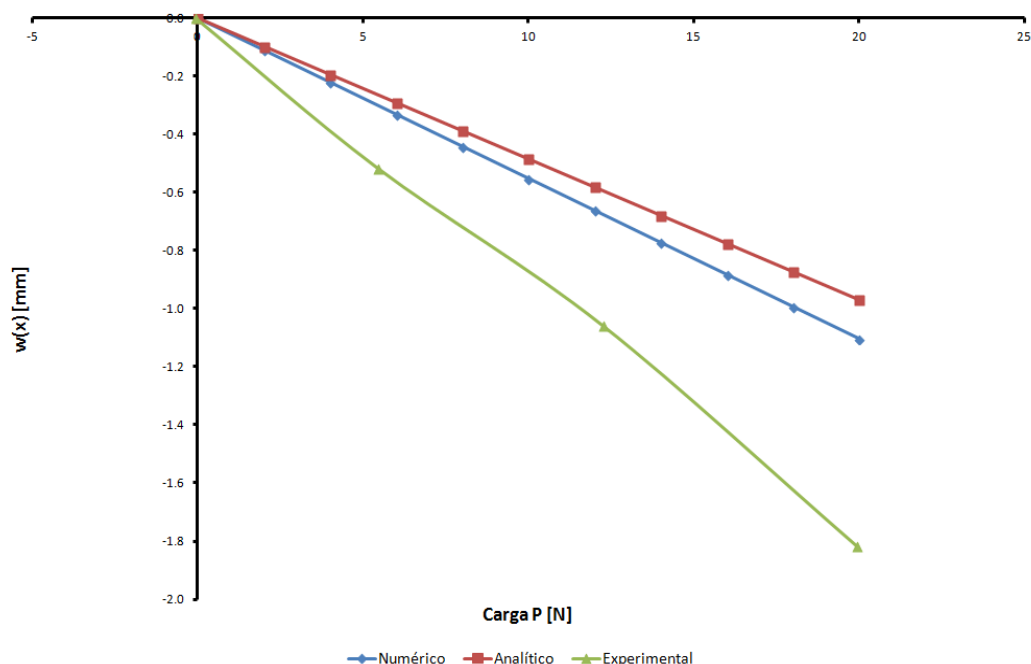


Figura 8.3: Comparação dos resultados para o deslocamento $w(x)$ em função da carga P

A diferença dos resultados pode resultar da grande diferença de rigidez entre o núcleo e as peles $E_{al} = 29166 \cdot E_{cor}$, o que nas matrizes de rigidez podem provocar o *shear-laking*. Os resultados experimentais também podem ser superiores devido ao escorregamento da camada de adesivo e assim a viga não funcionar como uma viga sanduíche mas como duas vigas paralelas.

8.3 Conclusões finais

O objetivo principal desta dissertação era o de propor um modelo que definisse o campo de deslocamentos de uma viga encastrada fabricada homogénea ou em construção sanduíche. O referido campo de deslocamentos baseou-se em hipóteses mais simples, como o caso de secções transversais retas, embora rodadas em relação à normal ao eixo da viga, mas também o caso da distorção da secção transversal segundo um deslocamento cubico.

No caso da viga homogénea o modelo teórico de distorção linear ou cubica conseguiu uma boa aproximação, tanto a flecha como a tensão na viga, em relação a verificações experimentais. Contudo, nesta estrutura simples notou-se uma tendência para o aumento da rigidez do modelo teórico em relação ao resultado experimental, isto é, o modelo teórico cria uma viga virtual que é mais rígida em relação ao modelo real. Face aos resultados apresentados pode concluir-se que o modelo teórico proposto conduziu a resultados favoráveis, quando aplicado a elementos simples.

Contudo, foram verificados resultados menos animadores para a viga sanduíche, embora os resultados teóricos demostrem veracidade física. Esta diferença pode ter origem em erros de arredondamento na resolução do sistema de equações associado ao modelo numérico devido à grande diferença entre os módulos de rigidez dos materiais do núcleo e das peles. Esta diferença pode originar erros de calculo na matriz de rigidez da viga.

Tomando os resultados da tensão σ_x no encastramento (figura 7.14), confirma-se que não existe muita diferença entre o modelo teórico (polinómio) e o modelo numérico (método de elementos finitos), ao contrário do que acontece na extremidade oposta da viga (figura 7.15). Assim, conclui-se que a tensão de corte do modelo teórico induz um comportamento diferente na viga em relação ao modelo numérico. A partir da figura 1.4 e comparando com os resultados teóricos, pode afirmar-se que o comportamento do modelo teórico se aproxima a uma viga com o núcleo mais rígido, enquanto que, o modelo numérico se aproxima mais do comportamento de uma viga sanduíche com o núcleo de baixa rigidez.

A partir das simulações existentes, foi elaborada uma nova simulação teórica de uma viga sanduíche. Para esta simulação, o modulo de elasticidade do núcleo foi de $E = 7GPa$, ou seja, é dez vezes inferior ao modulo das faces. Os resultados são expostos na figura 8.4. Observa-se que neste caso o modelo teórico permite um deslocamento maior, ao contrario do que acontece na viga com cortiça. Assim se conclui, para um modulo de elasticidade do núcleo 10 vezes inferior, os modelos teórico e numérico alteram a sua resposta. Seria interessante proceder a um teste experimental de uma viga cujos materiais correspondessem a esta simulação.

O modelo real tem uma camada de adesivo entre o núcleo e as peles que não foi materializado nem numericamente nem teoricamente. Esta camada permite um maior

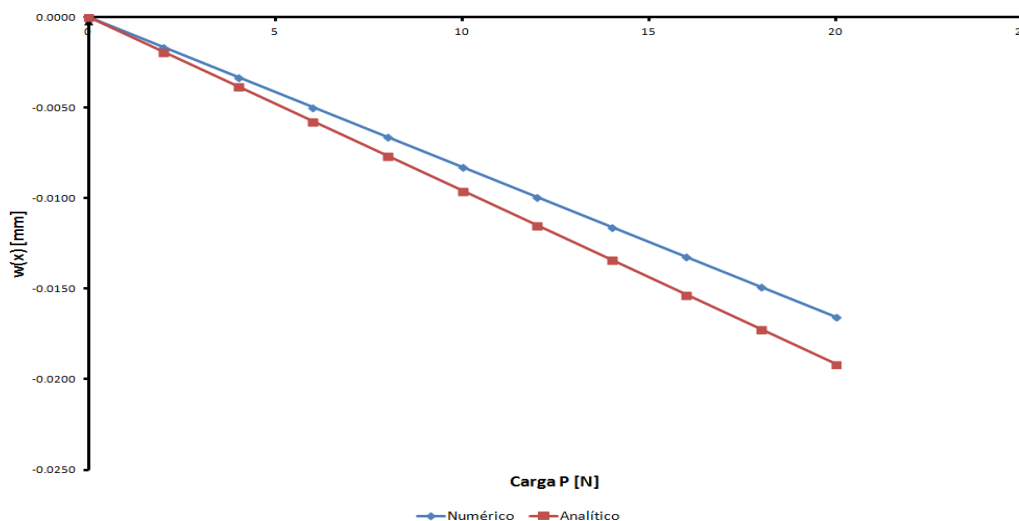


Figura 8.4: Flecha da viga sanduíche construída com o núcleo mais rígido

escorregamento das faces em relação ao núcleo. Consta-se que na simulação numérica, a tensão de corte não é nula para a zona de mudança de material (figura 7.11). Devido a este facto, o modelo numérico pode simular de uma maneira mais realista a camada de adesivo.

Outra razão da diferença de resultados pode derivar da característica visco-elástica da cortiça. As propriedades do aglomerado vão depender do tempo, logo vai tornar quase impossível a construção do modelo teórico. Uma conclusão a que se chega com os resultados experimentais da viga sanduíche, é que a aplicação do aglomerado de cortiça como núcleo de uma viga não tem vantagens estruturais estáticas. Pois, ao longo do tempo, o aglomerado de cortiça vai cedendo e a viga comporta-se como fosse só constituída pelas faces.

Em conclusão, o método utilizado nesta dissertação tem bons resultados para elementos simples. Para elementos mais complexos os resultados não são os mais otimistas, devido ao fato de este modelo tornar o sistema mais rígido. Mas poderá obter bons resultados quando aplicado a uma viga sanduíche cujos materiais não difiram muito nos módulos de rigidez. Seria interessante proceder a testes experimentais de uma viga cujos materiais correspondessem à simulação da figura 8.4. Com o intuito de perceber qual dos modelos se aproxima mais do comportamento real para uma relação $E_{faces} \leq 10 \cdot E_{nucleo}$.

8.4 Propostas futuras

Como propostas para trabalhos futuros ficam aqui as seguintes sugestões.

- Estudo do efeito de *creep* da cortiça.
- Construção de um modelo menos rígido. Possível modelação da camada de adesivo.
- Análise de uma estrutura sanduíche cujos materiais não tenham muita diferença de rigidez.

Bibliografia

- [1] DIAB. *Sandwich Concept*, volume Diab Sandwich Handbook. DIAB.
- [2] DIAB. Sandwich composites and core materials.
- [3] Ph. D Mohan M. Ratwani. Composite materials and sandwich structures. *NATO*.
- [4] Norman A. Fleck Craig A. Steeves. Material selection in sandwich beam construction. *ELSEVIER*, 2004.
- [5] Kicki F. Karlsson and B. Tomas AstrGm. Manufacturing and applications of structural sandwich components. *ELSEVIER*, pages 97–111, 1996.
- [6] RAF. <http://www.raf.mod.uk/history/dehavillandmosquito.cfm>, Junho 2013.
- [7] <http://en.wikipedia.org/wiki/bandvagn206>. <http://en.wikipedia.org/wiki/Bandvagn206>, Junho 2013.
- [8] E. M. Fernandes V. M. Correlo L. F. Boesel e R. L. Reis S. P. Silva, M. A. Sabino. Cork: properties, capabilities and applications. *ASM International*, 50:345–365, 2005.
- [9] Grupo Amarin. Do sobreiro à cortia, Junho 2013.
- [10] Luís Gil. *A Cortiça como Material de Construção Manual Técnico*. APCOR.
- [11] J. F. Dias Rodrigues R. A. S. Moreira, F. J. Q. de Melo. Static and dynamic characterization of composition cork for sandwich beam cores. *J Mater Sci*, 45:3350–3366, 2010.
- [12] Rolhas, Junho 2013.
- [13] R.D. Cook, D.S. Malkus, and M.E. Plesha. *Concepts and applications of finite element analysis*. Wiley, 1989.

- [14] USA Department of Defense. *Composites Materials Handbook*. Department of Defense, USA, 2002.
- [15] J.M. Ferreira. *Matlab codes for Finite Element Analsys*. Springer, 2009.
- [16] J.N. Reddy. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*. CRC Mechanical Engineering Series. CNC Press, 2004.
- [17] A. T. Nettles. *Basic Mechanics of Laminated Composite Plates*. NASA, 1994.
- [18] P. M. S. T. de Castro A. T. Marques J. P. M. Gonalves, M. F. S. F. de Moura. Interface element including point-to-surface constraints for three-dimensional problems with damage propagation. *Engineering Computations: International Journal for Computer-Aided Engineering and Software*, pages 28–47, 2000.
- [19] M. Siemetzki. K. Zimmermann, D. Zenkert. *Testing and analysis of ultra thick composites.*, volume 41. 2010.
- [20] A. T. Marques P. M. S. T. de Castro M. F. S. F. de Moura, J. P. M. Gonalves. Elemento finito isoparamétrico de interface para problemas tridimensionais. *Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 12:447–466, 1996.
- [21] Marco Petrolo Erasmo Carrera, Gaetano Giunta. *Beam Structures*. WILEY, 2011.
- [22] S. Timoshenko. *Theory of elasticity*. Engineering societies monographs. McGraw-Hill, 1951.
- [23] Vebil Yildirim. Vibration behavior of composite beams with rectangular sections considering the different shear correction factors. *Department of Mechanical Engineering, University of Cukurova*.
- [24] A. J. Roberts. *A one-dimensionnal introduction to continuum mechanics*. Worls Scientific Publishing, 1994.
- [25] Pedro Miguel Rodrigues Carvalho. Análise do comportamento mecânico e identificação do tipo de falha em estruturas sandwich com núcleos de cortiça. Master's thesis, Instituto Superior Tcnico, 2008.