



## O desenvolvimento do raciocínio proporcional num ambiente dinâmico de geometria dinâmica: ressonância de um programa de formação contínua em matemática - m@c2

**José Pinheiro**

Agrupamento de Escolas de Albergaria-a-Velha  
jmopinheiro@gmail.com

**Isabel Cabrita**

Universidade de Aveiro  
icabrita@ua.pt

### Resumo

A frequência do m@c<sub>2</sub> – Programa de Formação Contínua em Matemática com professores do 2º Ciclo do Ensino Básico da Universidade de Aveiro – inspirou e motivou uma professora, em parceria com o ex-formador, a conceber e implementar uma experiência de aprendizagem que pudesse contribuir para um mais sólido desenvolvimento do raciocínio proporcional e da representação gráfica das situações em causa, envolvendo o conceito de *função linear*. Para a sua avaliação, desenvolveu-se um *estudo de caso* que envolveu uma turma do 6º ano de escolaridade. A análise qualitativa dos dados recolhidos permitiu concluir que a exploração de um ambiente dinâmico de geometria dinâmica – GeoGebra – pode criar condições para o desenvolvimento de tal compreensão.

**Palavras-chave:** Ambientes Dinâmicos de Geometria Dinâmica; raciocínio proporcional; proporcionalidade direta; PFCM-m@c<sub>2</sub>.

**Abstract** The frequency of the m@c<sub>2</sub> - In training Program in Mathematics with teachers in the of Elementary School of the University of Aveiro - inspired and motivated a female teacher, in partnership with former trainer, to design and implement a learning experience that could contribute to a stronger development of proportional reasoning and graphical representation of the situations in question, involving the concept of linear function. For its assessment, a study case was developed involving a group of 6th grade. Qualitative analysis of the data collected showed that the exploitation of a dynamic geometry dynamic - GeoGebra - can create conditions for the development of such understanding.



**Keywords:** Dynamic Environments of Dynamic Geometry; proportional reasoning; direct proportionality; PFCM-m@c2.

**Resumen** La frecuencia de la m@c2 - Programa de Formación Continua en Matemáticas con los maestros de tercer ciclo de Educación Primaria de la Universidad de Aveiro - inspiró y motivó una maestra, en colaboración con su ex formador, a diseñar y implementar una experiencia de aprendizaje que podría contribuir a un mayor desarrollo del razonamiento proporcional y de la representación gráfica de las situaciones en cuestión, lo que implica el concepto de función lineal. Para su evaluación, se desarrolló un estudio de caso que involucra a un grupo de sexto. El análisis cualitativo de los datos recogidos ha mostrado que la explotación de un ambiente dinámico de geometría dinámica - GeoGebra - puede crear las condiciones para el desarrollo de esa comprensión.

**Palabras clave:** entornos dinámicos de geometría dinámica; razonamiento proporcional; proporcionalidad directa; PFCM-m@c2.

## 1. Introdução

*“Uma adequada aquisição do modelo de proporcionalidade directa revela-se imprescindível não só para o êxito nos estudos posteriores (quer na área da matemática quer na de outra qualquer Ciência) como também para resolver correctamente uma série de problemas que se colocam no dia-a-dia profissional e particular.” (Cabrita, 1998, p. 165)*

Os Princípios e Normas para a Matemática Escolar insistem que os alunos devem usar modelos matemáticos que promovam a compreensão de relações quantitativas, nomeadamente partindo da análise do sentido matemático atribuído à variação em diferentes contextos (NCTM, 2007). Um desses modelos, que é estruturante na aprendizagem da matemática, é o modelo de proporcionalidade direta. Abrantes et al (1999, p. 63) resumem as grandes linhas de pensamento sobre a importância atribuída ao desenvolvimento de competências no domínio da proporcionalidade da seguinte forma: “A capacidade de utilizar o raciocínio proporcional corresponde a uma fase importante do desenvolvimento cognitivo, por ser um ponto culminante das aprendizagens da matemática no ensino elementar e uma fase fundamental para o estudo da matemática no ensino secundário.”

A propósito desse modelo, Silvestre e Ponte (2006) entendem que o conceito é relevante para a “[...] interpretação de fenómenos da vida real e na resolução de



problemas do quotidiano.” (id: 295). Perseguindo essa ideia, o atual Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) aponta que devem ser trabalhadas relações tais como “[...] a proporcionalidade directa, que é uma relação importante no desenvolvimento do pensamento algébrico presente em muitas situações do quotidiano dos alunos[...]” (Ponte et al, 2007, p. 40). Mas as motivações que instigaram uma professora a conduzir uma experiência de aprendizagem focada na proporcionalidade direta com recurso ao GeoGebra também têm as suas raízes na frequência do Programa de Formação Contínua em Matemática (PFCM) com Professores do 2º Ciclo do Ensino Básico da Universidade de Aveiro – m@c2. Tal programa está a ser objeto de estudo no âmbito de um projeto de investigação conducente a doutoramento no qual estão envolvidos os autores do presente artigo e que persegue como principal objetivo avaliar o impacto da frequência do m@c2 numa abordagem inovadora da matemática com recurso ao Geogebra.

O PFCM, implementado no ano letivo de 2005/06 e que perdurou até ao ano letivo 2010/11, foi dos mais relevantes programas de formação contínua em Matemática até então realizado em Portugal. (Pinheiro e Cabrita, 2012). De acordo com variadas referências e estudos, nomeadamente dissertações de mestrado e doutoramento, o impacto imediato desse modelo de formação foi de grande visibilidade. Como referem Pinheiro e Cabrita, (2012, p. 287):

*“Dos testemunhos apresentados, parece líquida a convicção da forte ressonância que o m@c1/2 teve no desenvolvimento profissional dos professores. Contudo, é de admitir que se deve esperar mais algum tempo para se poder fazer uma análise, designadamente, à dimensão que se refere às aprendizagens dos alunos, numa perspetiva do seu sucesso educativo a matemática.”*

A abordagem à Álgebra foi um dos domínios no qual a coordenação do m@c2 apostou forte. O recurso à tecnologia, nomeadamente aos Ambientes Dinâmicos de Geometria Dinâmica (ADGD's) foi outra dimensão trabalhada no PFCM (id).

Nesse contexto, o presente estudo centra-se numa situação de ensino e aprendizagem, integrada numa sequência didática sobre proporcionalidade, particularmente sobre a exploração gráfica do conceito de *função linear* com recurso ao GeoGebra, numa turma do 6º ano de escolaridade. A propósito, enunciaram-se as seguintes questões exploratórias:

- i) os alunos desenvolveram uma mais sólida compreensão do conceito de proporcionalidade?
- ii) os alunos associaram a proporcionalidade direta a uma *função linear*?
- iii) os alunos identificaram a representação gráfica da proporcionalidade direta e distinguem-na de outras situações?



- iv) os alunos sentiram-se motivados para a temática pelo fato de trabalharem tarefas com recurso ao GeoGebra?
- v) Qual a visão dos alunos e da professora titular da turma sobre a experiência didática?

## 2. Apontamentos teóricos

De acordo com variados estudos nacionais (p.e. Silvestre e Ponte, 2006 e Cabrita, 1998) e internacionais (p.e. Lamon, 2012 e Spinillo, 2002) e as orientações dos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007), a compreensão do sentido de proporcionalidade revela-se fundamental na interpretação e resolução de problemas do dia-a-dia que, por sua vez mobilizam e, de forma dinâmica, desenvolvem o raciocínio proporcional.

No entanto, Lamon (2012) esclarece que o uso do *raciocínio proporcional* é um indicador de que os alunos adquiriram a compreensão relativa aos números racionais que implicam relações multiplicativas. Portanto, o raciocínio proporcional pode ser um pré-requisito para a compreensão de contextos que se baseiam no conceito mais abrangente de proporcionalidade. No entanto, pode não ser sempre mobilizado na resolução de tarefas relacionadas com a proporcionalidade. De facto e principalmente no contexto escolar, muitas tarefas são resolvidas através de estratégias mecânicas e formais. Tipicamente, as tarefas que envolvem a proporcionalidade direta nos primeiros anos, particularmente no 6º ano de escolaridade, estão relacionadas com questões algébricas de um valor omissivo. Ou seja, são dados três valores que se relacionam e é solicitado o valor em falta. O trabalho dos professores, muitas vezes com base em manuais escolares e em representações que mantêm desde a sua formação inicial, é centrado na resolução sistemática de proporções do tipo  $\frac{3}{4} = \frac{X}{8}$ , seguindo uma das opções, com incidência na terceira:

determina-se o quociente de 8 por 4 e o resultado é multiplicado por 3, obtendo-se  $X=6$ ;

multiplica-se ambos os termos por 8 obtendo-se  $\frac{3}{4} \times 8 = \frac{X}{8} \times 8$ , de que resulta  $\frac{24}{4} = \frac{8X}{8}$   
logo  $\frac{24}{4} = X = 6$ , ou ainda, a mais trivial;

calcula-se o produto cruzado  $3 \times 8 = X \cdot 4$  obtendo-se  $X = 6$ .

Sendo vulgar este género de práticas, não implicam necessariamente a mobilização



e o desenvolvimento de raciocínio proporcional que deve ser entendido como uma forma de pensamento e não como a representação que vulgarmente se utiliza como qualquer suporte de escrita (Litwiller e Bright, 2004). Por outras palavras, de acordo com Cabrita (1998), a exploração superficial da simples solução algorítmica de uma relação proporcional traduz um raciocínio redutor e pobre no que concerne à proporcionalidade e não desenvolve competências cognitivas com vista a um raciocínio de nível superior.

De facto, a profundidade atribuída ao raciocínio proporcional remete para a capacidade de analisar relações entre quantidades em que se mobilizam argumentos e explicações sobre relações proporcionais (Litwiller e Bright, 2004). Nesse sentido o raciocínio proporcional envolve o uso deliberado de relações multiplicativas para comparar quantidades e para prever o valor de uma quantidade em função dos valores da outra (Friel et al, 2005; Litwiller e Bright, 2004; Abrantes et al, 1999). Sendo assim, pode admitir-se que o uso do modelo proporcional embora se relacione com a resolução de proporções implica mais o sentido do número.

Segundo Cabrita (1998) - "O raciocínio proporcional envolve, então, o estudo da estrutura e da invariância, e equivalência e da não equivalência, segundo uma variedade de transformações diferentes, o sentido de covariância e de comparações múltiplas, e a habilidade de mentalmente armazenar e processar informação vária." (p. 170-171). Reforçando esses mesmos aspetos, Spinillo (2002), na linha do que defendem muitos autores, faz notar que a competência matemática, ligada ao raciocínio proporcional, implica: "[...] a) reconhecer a equivalência entre situações distintas; b) pensar em termos relativos e não em termos absolutos; e c) estabelecer relações entre relações, i.e., estabelecer relações de segunda-ordem que ligam duas ou mais relações de primeira-ordem." (p. 475). Por exemplo, quando a criança estabelece uma relação entre os alunos do género masculino de uma turma ou do género feminino e a própria turma, está a estabelecer uma relação de primeira ordem. Mas se compara essas duas relações entre si, está a estabelecer uma relação de segunda ordem.

Uma das formas de representar e evidenciar essas relações de segunda ordem é usando gráficos. Compreender a ideia de proporcionalidade utilizando diversas representações dá aos alunos a possibilidade de avaliar, com sentido crítico, situações problemáticas reconhecendo-as como sendo, ou não, proporcionais (Cramer e Post, 1993). Nessa perspetiva, tomando em linha de conta que um dos propósitos do presente estudo se relaciona com esse tipo de conhecimento, importa referir que os estudantes devem ser capazes de olhar para uma tabela ou



um gráfico de uma função linear e de o reconhecer como representante de uma relação linear. E, ainda, identificar a constante que determina tal comportamento gráfico.

De facto, em termos de enquadramento curricular e como refere o PMEB, os alunos devem ser confrontados com situações do quotidiano que envolvam “[...] *problemas de natureza multiplicativa nas compras ou em receitas culinárias, percentagens e escalas. [e, ainda,] [...] devem usar a proporcionalidade para fazer previsões e distinguir a relação de proporcionalidade direta de outros tipos de relações.*” (Ponte et al, 2007, p. 40).

Com base nessas orientações, os objetivos pedagógicos específicos definidos para a sequência didática subjacente ao presente estudo exploratório, foram os seguintes:

- “Compreender os conceitos de razão, proporção e constante de proporcionalidade;
- Utilizar proporções para modelar situações e fazer previsões;
- Resolver e formular problemas envolvendo situações de proporcionalidade direta.” (Ponte et al, 2007, p. 41).

Embora o PMEB não refira expressamente a abordagem à função linear que modela a ideia de proporcionalidade direta, sugere, nas notas, que os alunos devem distinguir situações em que existe proporcionalidade direta de outras situações e ainda que devem ser instigados a usar situações que envolvam a análise de gráficos (*id*).

O PMEB instiga, ainda, ao recurso à tecnologia informática, nomeadamente na geometria, à utilização de ADGD's.

Os ADGD's, vulgarmente designados de *Ambientes de Geometria Dinâmica* (AGD) e gerados por *software* são, segundo Bantchev (2010), programas interativos que permitem a criação e manipulação de construções geométricas obtendo-se, imediatamente uma resposta a essas ações. King e Schattschneider (1997) admitem que a *geometria dinâmica*, realizada com *software* interativo, é uma geometria ativa que facilita a exploração no campo da geometria.

Enquanto facultam a possibilidade de construção e manipulação de objetos geométricos e algébricos que permitem explorar relações entre esses objetos, tais programas provocam e facilitam a argumentação e a formulação de conjeturas, dando a oportunidade à testagem de hipóteses (Jonassen e Carr, 2000).

Tomasi (2003) salienta, numa referência a um ADGD, que esse *software*, quando utilizado adequadamente, favorece a criação de contextos construtivistas da



aprendizagem motivando os alunos para a matemática e para a geometria em particular. Nesse quadro tecnológico, os ADGD's revelam-se um recurso que pode potenciar boas práticas.

Na presente experiência pedagógica, recorreu-se ao GeoGebra, que, para além de permitir manipular objetos geométricos por arrastamento ou deformação, a partir de alguns dos seus elementos sem, contudo, modificar algumas das suas propriedades geométricas, facilitando assim a sua visualização, apresenta, entre muitas outras valias, a particularidade de integrar uma folha de cálculo. As três zonas que o compõem – algébrica, gráfica e de cálculo - permitem, assim, que se conviva com múltiplas representações do mesmo ente matemático, facilitando uma sólida apropriação do seu sentido e significado.

## Método

Atendendo às questões às quais se pretende dar resposta, optou-se por uma metodologia qualitativa que a tendência atual defende como adequada ao campo educativo (Lüdke e André, 2005). E perseguiu-se um design de estudo de caso (Ponte, 2006), envolvendo uma turma do 6º ano de escolaridade e a respetiva professora titular de matemática.

A professora, com 54 anos de idade, apresenta um currículo escolar com 31 anos de docência, alicerçados numa licenciatura em engenharia eletrotécnica. A turma era constituída por 19 alunos, 10 raparigas e 9 rapazes, com idades compreendidas entre os 11 e 13 anos. O aproveitamento à disciplina de matemática era globalmente regular tendo um grupo de alunos tendência para resultados de menor sucesso.

A escola situa-se no concelho de Ílhavo com forte tradição piscatória.

A recolha de dados assentou na inquirição por entrevistas, uma das técnicas mais usuais para a recolha de dados no campo das ciências sociais (Freebody, 2004), registadas em formato áudio. Também se recorreu à observação direta e participante de aulas que implica que o observador se introduza nos contextos e acontecimentos interagindo com os sujeitos (Bisquerra, 1996). E, ainda, na análise documental das produções e relatórios dos alunos, porque são documentos que podem conter informação natural e contextualizada que responda às questões de investigação.

Relativamente ao estudo, numa primeira fase, a professora, com o apoio do ex-formador, concebeu uma sequência de tarefas que visava a aprendizagem dos conceitos de razão,



proporção, constante de proporcionalidade e proporcionalidade direta. Partindo daquilo que os alunos já eram capazes de fazer com recurso aos seus raciocínios aditivos e/ou multiplicativos, pretendia-se que evoluíssem para a utilização de raciocínios proporcionais. O recurso a tabelas, que configuravam situações da vida real, visava o estabelecimento de relações de primeira ordem como ponto de partida para raciocínios de segunda ordem. A sequência didática culminou com a exploração gráfica do conceito de *função afim* com recurso ao GeoGebra, na qual o presente artigo se centra.

A proposta pedagógica assentou na exploração da relação proporcional entre a medida do lado de um quadrado e o seu perímetro associado à representação gráfica da função linear subjacente a essa situação – “Os alunos deverão ter experiências frequentes com a modelação de problemas com equações da forma  $y=kx$ , como, por exemplo, relacionar os comprimentos dos lados com os perímetros em figuras semelhantes.” (NCTM, 2007, p. 268).

A tarefa incluiu uma primeira parte em que os alunos deveriam, a partir de um guião, construir, um quadrado [CDEF]. Depois, deveriam criar, na folha de cálculo do GeoGebra, uma tabela para registo das medidas de comprimento do lado do polígono e perímetro.

O passo seguinte consistia em mover um dos vértices, C ou D, com vista a obter quadrados de diferentes dimensões e fazer a leitura das medidas de comprimento referentes ao lado e do respetivo perímetro, inscrevendo-as na tabela.

Depois foi pedido que se estabelecessem possíveis relações entre essas diferentes medidas com vista à utilização do conceito de razão, constante de proporcionalidade, proporção, para chegar à equação do tipo  $y = 4x$ . Obtida essa relação, pedia-se que introduzissem a equação para gerar a representação gráfica e a interpretassem.

De seguida, foi solicitado que, na folha de cálculo, alterassem os valores, de forma aleatória, e verificassem os resultados. Era expectável que os alunos concluíssem que esses pontos não pertenciam à reta que continha os outros pontos que satisfaziam a condição de proporcionalidade direta. Igualmente, solicitou-se que deslocassem pontos contidos na reta e verificassem o resultado correspondente dos valores na tabela. Era ainda esperado que concluíssem que a proporcionalidade direta está associada a uma representação cartesiana através de uma reta que passa pela origem e contém esses mesmos pontos.

A segunda fase foi a da implementação didáctica da sequência planeada que, em alguns momentos, contou com o apoio do ex-formador. Este não assumiu um papel de mero





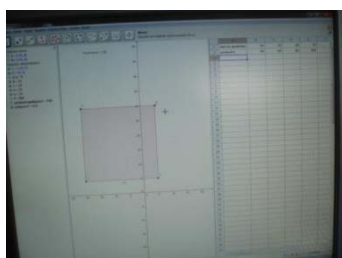
observador. Trabalhou, a par da colega, na condução das aulas, nomeadamente nos momentos de apoio ao trabalho dos alunos. Em simultâneo, recolheu todos os dados que, posteriormente, foram alvo de uma análise de conteúdo.

## 4. Resultados

A aula relativa à experiência com o GeoGebra desenvolveu-se durante um bloco de 90 minutos, com dezoito alunos dispostos em díade, cada uma em frente a um computador.

Não obstante a professora valorizar a importância dos ADGD's e estar a introduzir, progressivamente, essa vertente nas suas práticas, notou-se que os alunos partiram para esta aula com pouca experiência no manuseamento da ferramenta. Mesmo assim, com facilidade e rapidamente familiarizaram-se e perceberam o funcionamento do GeoGebra e conseguiram, com o auxílio dos professores, ir realizando as tarefas propostas.

De facto, construíram o quadro no GeoGebra (e, posteriormente, reproduziram-no no papel) e tirando partido das ferramentas de "distância, comprimento ou perímetro", conseguiram registar e relacionar a medida de comprimento do lado com o perímetro (fig.1)



Medida do comprimento do lado do quadrado	10	15	20	25	30	35	40	45
Perímetro	40	60	80	100	120	140	160	180

Fig. 1. Completamento, por um par de alunos, de uma tabela que relaciona a medida de comprimento do lado de um quadrado e o seu perímetro.

Outra das questões solicitava que os alunos estabelecessem relações entre as grandezas acima mencionadas. A maioria respondeu que o perímetro corresponde ao quádruplo da medida do lado do quadrado (ver exemplos nas figuras seguintes).



1. Da análise dos dados, que relação podes estabelecer entre a medida do lado do quadrado e o respetivo perímetro?  
E o quadruplo do lado do quadrado  
Inês F. Pinheiro março de 2011/12

1. Da análise dos dados, que relação podes estabelecer entre a medida do lado do quadrado e o respetivo perímetro?  
A relação é que o perímetro calcula-se multiplicando um lado do quadrado por 4.  
José Pinheiro março de 2011/12

**Fig. 2.** Resposta de dois pares de alunos sobre a relação entre a medida do lado de um quadrado e o seu perímetro.

Seguiu-se a discussão sobre regularidades detetadas na tabela que completaram. Realce-se que o debate foi muito centrado na equivalência das razões a partir das quais se chegou à constante de proporcionalidade. Portanto, não se pode confirmar se os alunos utilizaram um verdadeiro raciocínio proporcional tal como foi discutido na fundamentação teórica.

Com vista a estabelecer a relação entre as grandezas em causa, foi pedido que escrevessem a expressão que relacionava a medida do lado com o perímetro. Pode afirmar-se que só os alunos com maior capacidade de aprendizagem chegaram ao que se pedia (fig. 3).

2. Escreve uma expressão matemática que traduza as tuas conclusões e que relacione a medida do comprimento do lado do quadrado e do seu perímetro.  $P = L \times 4$

2. Escreve uma expressão matemática que traduza as tuas conclusões e que relacione a medida do comprimento do lado do quadrado e do seu perímetro.  $l \times 4 = P$  do quadrado

**Fig. 3.** Produção de alunas sobre a relação funcional entre a medida de comprimento do lado e o perímetro de um quadrado.

Nesse momento da aula e atendendo a que a noção de proporcionalidade já tinha sido explorada em aulas anteriores, era expectável que os alunos explicitassem por que razão as duas grandezas eram diretamente proporcionais. Ora, isso não se revelou uma tarefa fácil. Houve dificuldade e só alguns alunos o fizeram (fig. 4).



Grandezas desta natureza, medida do comprimento do lado e perímetro, dizem-se diretamente proporcionais porque quando aumentamos o lado o seu perímetro aumenta o quadruplo

Fig. 4. Produção de um par de alunos sobre a justificação de duas grandezas Serem diretamente proporcionais

Posteriormente, – substituiu-se a expressão  $P=4.l$  por outra equivalente que pudesse ser identificada pelo GeoGebra –  $y=4x$ . Esta passagem suscitou algumas dúvidas por ser mais usual a primeira.

Feita a introdução da equação no campo <Entrada> e conseguida a representação gráfica dessa função linear, passaram à sua interpretação circunscrita essencialmente ao primeiro quadrante embora se tenha enfatizado que a linha obtida é uma reta que passa pela origem e contém os pontos inicialmente obtidos, que relacionam a medida do comprimento do lado e o perímetro do quadrado, como alguns alunos constataram (fig. 5).

Introduz a igualdade que escreveste na <Entrada> do GeoGebra (em baixo).  
5.1. Que observas? Onde se situam os pontos que correspondem à medida de comprimento do lado do quadrado e do seu perímetro?  
Observo que apareceu uma reta sobre os pontos e passa na origem.

5. Introduz a igualdade que escreveste na <Entrada> do GeoGebra (em baixo).  
5.1. Que observas? Onde se situam os pontos que correspondem à medida de comprimento do lado do quadrado e do seu perímetro?  
Observo uma reta que intersectou os pontos  $P_1, P_4, P_2$  e  $P_3$  mas ainda intersecta a origem.

Fig. 5. Interpretação da representação gráfica da função  $y=4x$

Também facilmente concluíram e conseguiram comunicar o que acontece quando se alteram os dados, de forma aleatória, introduzidos na tabela, ou quando se arrastam pontos da zona gráfica de forma a deixarem de pertencer à reta, como se exemplifica a seguir.

5.2. Será que se passa o mesmo para quaisquer outros valores? Experimenta, a terando os valores na folha de cálculo. Que verificas? **A relação de proporcionalidade direta mantem-se?**

O ponto deixou de pertencer à reta.  
Não, alterou-se a razão.

5.3. Arrasta pontos da zona gráfica que correspondem à relação entre as duas grandezas consideradas de forma

5.2. Será que se passa o mesmo para quaisquer outros valores? Experimenta, a terando os valores na folha de cálculo. Que verificas? **A relação de proporcionalidade direta mantem-se?**

Verifico que o ponto deixou de pertencer à Reta.  
Não, pois a razão modificou-se.

5.3. Arrasta pontos da zona gráfica que correspondem à relação entre as duas grandezas consideradas de forma a ficarem fora da linha reta. Que observas nos dados da folha de cálculo? **A constante de proporcionalidade mantem-se?**

Observo que o lado e o perímetro do quadrado se modificaram.  
Não, porque a razão modificou-se.

José Pinheiro março de 2011/12

Fig. 6. Resposta de alunos relativa à alteração dos valores da tabela e pontos da linha representante da função linear.

Em função disso, conseguiram concluir quais dos gráficos apresentados traduzem situações de proporcionalidade direta (ver exemplo na figura seguinte).

7. De acordo com a conclusão anterior, quais dos seguintes gráficos de linhas correspondem a uma situação de proporcionalidade direta? Porquê?

A C porque é sempre uma linha reta que passa na origem.

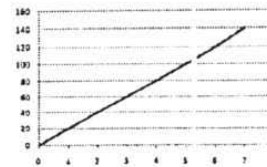
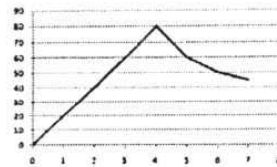
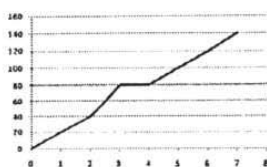


Fig. 7. Justificações de alunos relativas à representação gráfica de situações de proporcionalidade direta.



Da análise das produções dos alunos e da observação de campo realizada em contexto de sala de aula, percebe-se que, na generalidade, os alunos atingiram os objetivos propostos. Para tal, muito terá contribuído o convívio com múltiplas representações da mesma situação que o GeoGebra permite - "As representações deverão ser tratadas como elementos essenciais no apoio à compreensão [...] dos conceitos e das relações matemáticas [...]"(NCTM, 2007, p. 75) .

Questionados sobre a experiência, os alunos consideraram-na muito positiva, como se ilustra na figura seguinte.

Relativamente a aspetos menos positivos, os poucos alunos que os identificaram consideraram a ficha muito extensa e complexa. Alguns ainda tiveram consciência do seu comportamento, nem sempre o mais adequado, como se ilustra na mesma figura.

A professora, por sua vez, refletiu "[...] os alunos, por não ser habitual, ficam muito excitados quando estão em frente do computador e a tendência é mexer em tudo, abrir programas e páginas que não interessam, dispersando-se e atrasando o ritmo da aula para além de causarem imenso desgaste ao professor, porque muitas vezes nem ouvem as recomendações, perdendo-se no que estão a fazer."

Aspetos positivos: gostamos e queremos voltar a fazer.

Aprendemos coisas novas que não estão no nosso programa, ou seja que a representação gráfica de grandezas diretamente proporcionais é sempre uma linha reta que passa na origem dos eixos.

Aprendemos mais coisas com o GeoGebra.

Aspetos menos positivos: não tivemos o melhor comportamento

Na ficha: era um bocado difícil de compreender

Um pouco longa para fazer numa aula.

Fig. 8. Resumo da reflexão conjunta feita pelos alunos após a aula.



No entanto, considerou que o trabalho realizado *“Transformou-se em mais um desafio [...] Com o GeoGebra foi como uma construção manual passo a passo, em que vários conceitos geométricos estiveram presentes, para além do cálculo”*.

Quanto às aprendizagens dos alunos, ficou convicta de que os objetivos foram atingidos na medida em que os alunos distinguem, com facilidade, representações gráficas de proporcionalidade direta das que não representam situações de proporcionalidade direta.

Referiu ainda que *“[...] a tarefa reveste-se de alguma complexidade porque se trabalha simultaneamente com a parte gráfica, a folha de cálculo – que os alunos também não estão habituados a manusear, e ainda a parte algébrica, para além da destreza em escolher/procurar o ícone do programa, adequado.”*

Em termos gerais, considerou - *“Como já referi anteriormente, pessoalmente fiquei mais enriquecida e predisposta a alargar os meus conhecimentos na área dos ADGD, logo que seja oportuno, e igualmente aberta a novas experiências da matemática.”* No entanto, sobre as expectativas de dar continuidade a experiências com computadores, a professora afirmou que *“Atualmente, ao contrário de anos anteriores, a utilização do computador já não é prioritária, outros valores se tornaram mais importantes.”* A convicção de que práticas inovadoras são importantes mas que contextos exploratórios necessitam de mais tempo para se concretizarem com sustentabilidade e rigor desmobiliza os docentes de iniciativas que exigem outras competências.



## 5. Considerações finais

Por mais motivante que a estratégia adotada tenha sido, como o atestaram os alunos e os professores confirmaram, não foi líquido que a experiência, com recurso ao GeoGebra, tenha contribuído para um melhor conhecimento e compreensão sobre o conceito de proporcionalidade direta por parte de todos os alunos, aspeto a merecer um estudo mais aprofundado. Por outro lado, os alunos conseguiram identificar representações gráficas da proporcionalidade direta. No entanto é preciso continuar a investigar no sentido de perceber se essa identificação assentou, efetivamente, em bases sólidas, com recurso ao raciocínio proporcional.

A professora, apesar de bastante motivada para o trabalho com ferramentas computacionais reconheceu, contudo, que ainda tem de desenvolver mais esse seu lado profissional o que, na atual conjuntura, não é muito fácil.

Infere-se que o recurso às tecnologias informáticas ainda não é uma prática generalizada.

A experiência permitiu aferir que a tarefa discutida neste estudo poderia ter sido desenhada de outra forma. Ou seja, poder-se-ia ter libertado os alunos da construção gráfica do quadrado, onde se gastou bastante tempo, para centrar a atenção na questão fundamental gerindo-se, assim, melhor o tempo para introduzir outras questões, do género: - E se o polígono regular, em vez de ser um quadrado, fosse um pentágono? E um hexágono, etc.? Será que as relações se mantêm? Que tipo de representação gráfica se obteria?

Resta referir que esta experiência didática é mais um testemunho, a exemplo de vários estudos apresentados em dissertações de mestrado e teses de doutoramento (Pinheiro e Cabrita, 2012) em como o PFCM, em particular os  $m@c_{1/2}$ , se têm manifestado positivamente nas práticas dos professores.



## Referências bibliográficas

- Abrantes, P., Serrazina, L. e Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Bantchev, B. B. (2010). *A Brief Tour to Dynamic Geometry Software*. Disponível em: <http://www.math.bas.bg/omi/DidMod/Articles/BB-dgs.pdf> (consultado na Internet em 5 de novembro de 2012).
- Bisquerra, R. (1996). *Metodos de Investigacion Educativa*. 2ª ed. Barcelona: CEAC.
- Bogdan, R. e Biklen, S. (1999). *Investigação Qualitativa em Educação. Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Cabrita, I. (1998). *Resolução de Problemas: aquisição do modelo de Proporcionalidade Directa apoiada num documento hipermédia*. Tese de Doutoramento. Aveiro: Universidade de Aveiro.
- Cramer, K. e Post, T. (1993). Making connections: a case for proportionality. Disponível em: <http://www.accessmylibrary.com/article-1G1-13770512/making-connections-case-proportionality.html> (acedido a 16 de novembro de 2012).
- Freebody, P. (2004). *Qualitative Research in Education: Interaction and practice*. London: SAGE. ISBN 0-7619-6140-2.
- Friel, S., Rachlin, S. e Doyle, D. (2005). *Navigating through algebra in 6-8 grades*. 4ª edição. Reston (VA): National Council of Teachers of Mathematics.
- Jonassen, D. H. e Carr, C. S. (2000). Mindtools: Affording Multiple Knowledge Representations for learning. Em Susanne P. Lajoie, *Computers as Cognitive Tools: No More walls*. Volume II. Pág. 165-196. London: LEA.
- King, J. e Schattschneider, D. (edit.) (1997). *Geometry turned on!: Dynamic software in learning, teaching, and research*. Washington: The Mathematical Association of America.
- Lamon, S. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (3ª ed.). New York: Routledge.
- Litwiller, B. e Bright, G. W. (2004). *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions*. 2ª edição. Reston (VA): National Council of Teacher of Mathematics.
- Lüdke, M. e André, M.E.D.A. (2005). *Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas*. 9ª reimpressão. São Paulo; Editora Pedagógica e Universitária, Lda.
- NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. 1ª edição portuguesa. Lisboa: APM.





- Pinheiro, J. e Cabrita, I. (2012). m@c 1/2 – uma experiência de formação contínua em Matemática. Em *Indagatio Didactica*, vol. 4(1), pág. 271-292. Aveiro: Universidade de Aveiro.
- Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, 25, 105-132.
- Ponte, J. P.; Serrazina, L.; Guimarães, H. M.; Breda, A.; Guimarães, F.; Sousa, H.; Menezes, L.; Martins, G. & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.
- Silvestre, A. I. e Ponte, J. P. (2006). Uma experiência de ensino da proporcionalidade no 2º ciclo do ensino básico. Em Isabel vale, Teresa Pimentel, Ana Barbosa, Lina Fonseca, Leonor Santos e Paula Canavarro, *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. Pág. 295-313. Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. ISBN 972-8614-07-1.
- Spinillo, A. G. (2002). O Papel de Intervenções Específicas na Compreensão da Criança sobre Proporções. Em *Psicologia: Reflexão e Crítica*, 15(3), pp. 475-487. Disponível em: [http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS/Spinillo\(Alicia\)02.pdf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS/Spinillo(Alicia)02.pdf) (acedido a 9 de novembro de 2012).
- Tomasi, L. (2003). Cabri in classe e nella rete: visualizzazione dinamica e insegnamento della matematica. *Bollettino CABRIRRSAE* 2003. Nº 35-236, pág.15-27. Disponível em: [http://kidslink.bo.cnr.it/cabri/bollettini/boll\\_3536.pdf](http://kidslink.bo.cnr.it/cabri/bollettini/boll_3536.pdf) (acedido a 4 de setembro de 2012).