



**Salomé Santos
Rodrigues Pereira**

**Recoloração Geométrica na Recuperação de
Falhas em Redes sem Fios**



**Salomé Santos
Rodrigues Pereira**

**Recoloração Geométrica na Recuperação de
Falhas em Redes sem Fios**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática a Aplicações, com especialização em Ciências da Computação, realizada sob a orientação científica do Dr. António Leslie Bajuelos Domínguez, Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

À minha sobrinha, Bébekas

À minha mãe, Maria

Aos meus irmãos, Joana, Rui e Gil

o júri / the jury

presidente / president

Prof. Dr. Delfim Fernando Marado Torres

Professor Associado do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

vogais / examiners committee

Prof. Dr. Pedro Manuel Rangel Santos Henriques

Professor Associado do Departamento de Informática da Universidade do Minho

Prof. Dr. António Leslie Bajuelos Dominguez

Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro
(Orientador)

**agradecimentos /
acknowledgements**

Quero agradecer ao Yurai por todos os esclarecimentos que me prestou e pela sua total disponibilização. Ao Professor Leslie Bajuelos, agradeço a orientação e toda a confiança que depositou em mim. À Alexandra, à Daniela e à Sabina, agradeço todo o apoio que me deram. Por último, e não menos importante, quero agradecer à minha mãe e aos meus irmãos, sem eles não teria conseguido chegar aqui.

palavras-chave

Recoloração Geométrica, Recuperação de Falhas, cercado, rede bicromática, rede sem fios, grafo geométrico, rede NIC, rede Mi2, rede QC.

Resumo

Numa era em que a importância da tecnologia não pára de crescer, as redes sem fios têm assumido um papel cada vez mais relevante. O elevado crescimento das redes dificulta a Recuperação de Falhas com base na informação de todos os elementos de uma rede, levando à utilização de algoritmos em que cada elemento altera a sua informação consoante a informação da maioria dos seus vizinhos.

Considerando então uma rede bicromática, em que os elementos azuis são os saudáveis e os vermelhos os defeituosos, usou-se um método, denotado por Recoloração Geométrica, que reclassifica o estado de um elemento através de uma recoloração deste sempre que esteja cercado por elementos da cor oposta. Assim, se um elemento defeituoso estiver cercado por saudáveis, este corrigirá a sua informação.

Nesta dissertação definem-se duas novas estruturas de redes, as redes NIC&Mi2 e as NIC&QC, cujas sequências de recoloração têm, respectivamente, comprimentos $\theta(n^2)$ e $\theta(n)$, onde n é o número de nós. Propõe-se algoritmos que permitem alterar uma rede aleatória para que passe a satisfazer as propriedades destas novas redes. Propõe-se também um algoritmo para alterar uma rede para NIC, em detrimento de um já existente cuja complexidade é superior. Estas alterações pretendem garantir a finitude do algoritmo de recoloração, usado na Recuperação de Falhas. Testa-se a eficiência da Recuperação de Falhas para estas três estruturas de redes através de estudos experimentais e conclui-se que as redes NIC apresentam uma melhor recuperação devido ao número de alterações, que é inferior no caso destas.

keywords

Geometric Recoloring, Fault Recovery, surrounded, bi-chromatic network, wireless network, geometric graph, NIC network, Mi2 network, QC network.

Abstract

In an age where technology's importance is growing continually, wireless networks have assumed a major role. Due to network's high growth, Fault Recovery based on the entire network's information has become inefficient, therefore leading to algorithms in which every element changes its information based on its neighbor's information.

Considering a bi-chromatic network, in which the blue elements are the healthy ones and the red are the faulty ones, the Fault Recovery is done by reclassifying the elements through a recoloring of the ones that are surrounded by elements of the opposite color. Thus, if a faulty element is surrounded by healthy elements, it will become healthy. This method is denoted by Geometric Recoloring.

This discussion presents two new network structures: NIC&Mi2 and NIC&QC networks. The recoloring sequence's length of these networks are, respectively, $\theta(n^2)$ e $\theta(n)$, where n is the number of nodes. It is proposed two algorithms that change a random network so it will satisfy the properties of these new networks. It is also proposed a new algorithm to transform a random network into a NIC one. This new approach is more efficient than a previous known algorithm for this purpose as it presents a lower complexity. The changes that are made in all of these three cases ensure that the recoloring algorithm, used in Fault Recovery, is finite. Experimental tests were performed on these three network structures to assess the efficiency of Fault Recovery. These tests have concluded that NIC networks are the ones with best recovery due to the fewer number of changes.

Conteúdo

Conteúdo	i
Lista de Algoritmos	iii
Lista de Tabelas	v
Lista de Figuras	vii
1 Introdução	1
1.1 O problema em estudo	2
1.2 Estado de Arte	2
1.3 Estrutura da tese	3
2 Preliminares	7
3 Recoloração Geométrica: resultados existentes	15
3.1 Conceitos gerais	15
3.2 Lemas gerais	20
3.3 Sequências de recoloração em vários tipos de rede	20
3.3.1 Redes grau-3	23
3.3.2 Redes NIC (non-isolated-convex)	24
4 Recoloração Geométrica: novos resultados	27
4.1 Conceitos gerais	27
4.2 Resultados gerais	29
4.3 Sequências de recoloração em vários tipos de rede	33
4.3.1 Redes NIC (non-isolated-convex)	33
4.3.2 Redes NIC & Mi2	34
4.3.3 Redes NIC & QC	39
5 Recuperação de Falhas: resultados existentes	41
5.1 Pré-processamento da rede	42
5.1.1 Exemplificação do Algoritmo NIC	44
5.2 Algoritmo de Recoloração	47
5.2.1 Exemplificação do Algoritmo de Recoloração	47

6	Recuperação de Falhas: novos resultados	51
6.1	Pré-processamento da rede	51
6.1.1	Alterações para se obter uma rede NIC	52
6.1.2	Alterações para se obter uma rede NIC&Mi2	55
6.1.2.1	Exemplificação do Algoritmo Mi2	57
6.1.3	Alterações para se obter uma rede NIC&QC	61
6.1.3.1	Exemplificação do Algoritmo QC	64
7	Resultados Experimentais	69
7.1	Comparações entre o desempenho das várias redes na Recuperação de Falhas	74
7.2	Comparações entre alterações feitas às redes	78
7.3	Comparações entre número de recolorações	80
8	Conclusões	85
9	Trabalho Futuro	87
	Referências Bibliográficas	89

Lista de Algoritmos

1	Algoritmo NIC (executado em cada nó u)	43
2	Algoritmo de Recoloração (executado em cada nó u)	47
3	Algoritmo NIC2 (executado em cada nó u)	54
4	Algoritmo Mi2 (executado em cada nó u)	56
5	Algoritmo QC (executado em cada nó u)	62

Lista de Tabelas

1.1	Complexidade do comprimento das sequências de recoloração de várias redes	4
1.2	Complexidade dos algoritmos de alteração de redes aleatórias para várias redes	5
7.1	Número de nós adicionados no Algoritmo de Recoloração Geométrica nas redes NIC&QC com diferentes quantidades de nós iniciais e raios de transmissão	80

Lista de Figuras

2.1	Grafo geométrico	7
2.2	(a) Grafo conexo (b) Grafo desconexo	10
2.3	(a) Grafo 2-conexo (b) Grafo após remoção dos vértices 4 e 5	10
2.4	Grafos completos	11
2.5	Grafo bipartido	11
2.6	Grafo planar	12
3.1	Nó u está cercado	16
3.2	Nó u é recolorido um número infinito de vezes	17
3.3	Ângulos magenta	18
3.4	Ligações opostas	18
3.5	A relação oposta não é simétrica	19
3.6	Cadeia oposta monótona, a cinzento, e não monótona, a verde	19
3.7	u é um nó convexo e uv, ur são ligações convexas, relativamente a u	19
3.8	Nó u é recolorido duas vezes usando a sequência (u, s, r, u)	21
3.9	Recoloração de uma rede usando a sequência (v_2, v_6, v_4, v_5)	21
3.10	Recoloração de uma rede usando a sequência (v_1, v_3, v_7)	22
3.11	Rede planar com sequência de recoloração infinita	22
3.12	Rede não planar com sequência de recoloração infinita	23
3.13	Rede grau-3	23
3.14	Rede grau-3 com $O(n)$ recolorações	24
3.15	Rede NIC	25
3.16	Nós convexos não isolados	25
3.17	Rede NIC com sequência de recoloração de comprimento $O(n^2)$	26

4.1	$\beta(v_3) = 3$ na sequência de recoloração $(v_3, v_2, v_5, v_3, v_6, v_1, v_4, v_9, v_2, v_5, v_3)$	28
4.2	v_2 e v_3 são nós internos	28
4.3	u é um nó quasiconvexo relativamente a r	29
4.4	u não está cercado e $\angle(u_1, u, u_2) + \angle(u_2, u, u_3) = 180^\circ$	29
4.5	$\beta(u) = \beta(u_2) + 1$	30
4.6	$\beta(v_1) = \frac{d_G(v_1)}{2} + 1$ usando a sequência de recoloração $(v_1, v_5, v_7, v_1, v_2, v_4, v_1, v_3, v_6, v_1)$	31
4.7	$\beta(v_1) = \frac{d_G(v_1)}{2} + 2$ usando a sequência de recoloração $(v_1, v_5, v_7, v_1, v_2, v_4, v_1, v_3, v_6, v_1, v_8, v_9, v_{10}, v_5, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_7, v_1)$	33
4.8	Rede com complexidade quadrática na cobertura por cadeias opostas	34
4.9	Rede NIC&Mi2	34
4.10	Rede NIC&Mi2 com sequência de recoloração de comprimento $O(n^2)$	35
4.11	Localizações dos nós convexos	35
4.12	Diagonais principais do polígono definido pelos $2m$ nós convexos e zona central	36
4.13	Reordenação dos nós	37
4.14	Recoloração usando a sequência $(v, u_1, u_2, v, u_7, u_8, v, u_3, u_4, v, u_9, u_{10}, v, u_5, u_6, v)$	37
4.15	Continuação da recoloração	38
4.16	Continuação da recoloração	39
4.17	Rede NIC&QC	40
4.18	Rede NIC&QC com $O(n)$ recolorações	40
5.1	Rede cujo número de alterações é o pior caso do Algoritmo NIC	43
5.2	Rede inicial	44
5.3	Classificar todas as ligações com D (desconhecidas)	44
5.4	Execução do algoritmo no nó v_7 e resposta dos seus vizinhos	45
5.5	v_7 classifica as ligações v_6v_7 e $v_{10}v_7$	45
5.6	v_7 elimina uma das suas ligações convexas - v_7v_{10}	46
5.7	Execução do algoritmo no nó v_9 e resposta dos seus vizinhos	46
5.8	Rede obtida após a execução do Algoritmo NIC	46

5.9	Exemplo de execução do Algoritmo de Recoloração	48
5.10	Continuação do exemplo de execução do Algoritmo de Recoloração	49
6.1	u passa a ficar cercado após a adição do novo nó z	53
6.2	Rede NIC com $O(n)$ alterações	53
6.3	Rede com menos alterações usando o Algoritmo NIC (a) do que com o Algoritmo NIC2 (b)	54
6.4	Rede (com $n=8$) cujo número de alterações é o pior caso do Algoritmo Mi2	55
6.5	Rede inicial	57
6.6	Classificar todas as ligações com D (desconhecidas)	57
6.7	Execução do algoritmo no nó v_4 e classificação das ligações incidentes neste por parte dos seus vizinhos	58
6.8	Execução do algoritmo no nó v_8 e classificação das ligações incidentes neste por parte dos seus vizinhos	58
6.9	Execução do algoritmo no nó v_7 e classificação das ligações incidentes neste por parte dos seus vizinhos	59
6.10	Eliminação da ligação v_7v_9	59
6.11	Execução do algoritmo no nó v_9 e classificação das ligações incidentes neste por parte dos seus vizinhos	60
6.12	Eliminação da ligação v_4v_9	60
6.13	Rede obtida após a execução do Algoritmo Mi2	60
6.14	Rede cujo número de alterações é o pior caso do Algoritmo QC	61
6.15	Diagonais do polígono e zona central	63
6.16	Nó u na fronteira de C e $\angle(v_1, u, v_3) = 180^\circ$	64
6.17	Rede inicial	65
6.18	Classificar todas as ligações com D (desconhecidas)	65
6.19	Execução do algoritmo no nó v_4 e classificação das ligações incidentes neste por parte dos seus vizinhos	66
6.20	Execução do algoritmo no nó v_{12} e classificação de $v_{11}v_{12}$ por parte de v_{11}	66

6.21	Execução do algoritmo em todos os vizinhos de v_9 e respectivas classificações	67
6.22	Reclassificação de v_9v_{13} por parte de v_9 e eliminação de v_1v_9	67
6.23	Execução do algoritmo nos nós v_2, v_6 e v_9	68
6.24	Adição de um novo nó, z_1 , adjacente a v_8 e eliminação da ligação v_8v_2 .	68
6.25	Rede obtida após a execução do Algoritmo QC	68
7.1	Rede com 100 nós e raios de alcance da transmissão e das falhas de 25 e 16, respectivamente	71
7.2	Rede inicial	71
7.3	Redes obtidas com o Algoritmo NIC	72
7.4	Indução de erros	73
7.5	Rede alterada com os algoritmos QC e NIC	73
7.6	Rede alterada com os algoritmos Mi2 e NIC	74
7.7	Proporção de nós defeituosos após a aplicação de cada um dos métodos, variando os raios de alcance da transmissão e das falhas, para as redes NIC	75
7.8	Proporção de nós defeituosos após a aplicação de cada um dos métodos, variando os raios de alcance da transmissão e das falhas, para as redes NIC&Mi2	76
7.9	Proporção de nós defeituosos após a aplicação de cada um dos métodos, variando os raios de alcance da transmissão e das falhas, para as redes NIC&QC	76
7.10	Proporção de nós defeituosos após a aplicação da Recoloração Geométrica, variando os raios de alcance da transmissão e das falhas, em cada uma das redes	77
7.11	Proporção de nós defeituosos após a aplicação da Recoloração Cheating, variando os raios de alcance da transmissão e das falhas, em cada uma das redes	78
7.12	Proporção das ligações consideradas para cada um dos algoritmos de alterações das redes com 50 nós	79

7.13	Proporção das ligações consideradas para cada um dos algoritmos de alterações das redes com 75 nós	79
7.14	Proporção das ligações consideradas para cada um dos algoritmos de alterações das redes com 100 nós	79
7.15	Recoloração Geométrica - número de recolorações dos nós das redes com 50 nós	81
7.16	Recoloração Geométrica - número de recolorações dos nós das redes com 75 nós	81
7.17	Recoloração Geométrica - número de recolorações dos nós das redes com 100 nós	82
7.18	Recoloração Cheating - número de recolorações dos nós das redes com 50 nós	82
7.19	Recoloração Cheating - número de recolorações dos nós das redes com 75 nós	83
7.20	Recoloração Cheating - número de recolorações dos nós das redes com 100 nós	83

Capítulo 1

Introdução

As redes sem fios têm crescido bastante nos últimos anos [5, 14], sendo uma das causas o aumento significativo do uso de dispositivos pessoais, tais como tablet pcs e smartphones [3]. A aplicação destas redes tem-se mostrado importante em várias áreas, nomeadamente comunicação pessoal e vigilâncias militar, médica e ambiental [13]. Denota-se por rede sem fios a um sistema distribuído, i.e, um conjunto de computadores autónomos que comunicam entre si, sendo que nesta a comunicação é feita sem o recurso a fios, por exemplo, através de sinais rádio [7].

Cada elemento de uma rede armazena uma dada informação, igual entre todos, que pode sofrer alterações através de falhas temporárias (tais como corrupção de software), deixando de estar correcta [9]. Estas falhas, quando detectadas, podem ser corrigidas através da alteração dos valores que foram corrompidos [13].

O elevado crescimento das redes dificulta a Recuperação de Falhas com base na informação de todos os elementos de uma rede, levando à utilização de algoritmos em que cada elemento altera a sua informação consoante a informação da maioria dos seus vizinhos [9].

Em sequência da investigação feita na tese de Rodriguez [13], pretende-se estudar a aplicação de técnicas de Geometria Computacional na Recuperação de Falhas em redes sem fios. A abordagem aí aplicada teve como base a correlação entre as falhas e a localização geométrica dos elementos de uma rede. Um exemplo que mostra esta correlação são as falhas causadas através da influência de um campo electromagnético devido a um relâmpago.

Considerando então uma rede bicromática, em que os elementos azuis são os

saudáveis (a informação destes está correcta) e os vermelhos os defeituosos (a informação destes está corrompida), usou-se um método - Recoloração Geométrica -, que reclassifica o estado de um elemento (passando de defeituoso a saudável, ou vice-versa) através de uma recoloração deste sempre que esteja cercado (definição em 3.1) por elementos da cor oposta. Denota-se por recoloração à mudança de estado de um nó, de defeituoso para saudável e vice-versa, alterando-se a cor do nó. Assim, se um elemento defeituoso estiver cercado por saudáveis, este corrigirá a sua informação (copiando a informação dos seus vizinhos saudáveis). Este método também permite que os elementos saudáveis passem a defeituosos, mas, uma vez que o número de elementos defeituosos de uma rede é muito inferior ao número total de elementos desta, existe uma tendência para se diminuir o número de falhas.

1.1 O problema em estudo

Nesta dissertação pretende-se estudar um dos problemas em aberto de [13]: especificar estruturas de redes, a duas dimensões, por forma a que todas as sequências de recoloração de redes que tenham essa estrutura sejam finitas. A estrutura da rede deve ser definida a partir de propriedades locais dos nós, i.e, propriedades que cada nó deve ter, considerando-se apenas propriedades dos seus vizinhos.

1.2 Estado de Arte

Em qualquer sistema é inevitável a existência de falhas, isto porque os sistemas crescem muito rapidamente e os seus elementos têm diferenças significativas nos fabricantes, na idade, no tamanho, na velocidade e em muitas outras características do equipamento e do software utilizados [9]. É fulcral que se trate destas da forma mais rápida e económica possível. A tarefa de Recuperação de Falhas é um problema bastante antigo e comum hoje em dia e pode ser subdividida em duas fases, nomeadamente detecção e correcção [2], sendo que apenas a segunda é tratada neste trabalho.

Consideram-se redes bicromáticas, em que cada elemento da rede denotar-se-á por nó, e coloram-se os nós consoante o seu estado, defeituoso de vermelho e saudável de azul.

Em 1995, Kutten e Peleg [9] estudaram o problema de correção de falhas através de algoritmos localizados. O custo de tais algoritmos depende do número de elementos defeituosos da rede, e não do tamanho da rede, o que se traduz numa vantagem significativa pois as redes crescem mais rapidamente do que o número de nós defeituosos. O algoritmo aplicado emprega a regra de votação por maioria, isto é, um nó que tenha mais vizinhos da cor oposta do que da sua própria cor será recolorido. Tal recoloração é designada por Recoloração Combinatória [13]. Assim, os valores defeituosos são corrigidos por uma votação na qual existe uma maioria de nós saudáveis. Esta ideia foi aplicada no estudo de colorações iniciais que levam o sistema todo a falhar [10, 16, 6, 11].

Em 2005, Reinbacher et al [8] estudaram o problema da delimitação de fronteiras em Regiões Imprecisas, i.e, regiões definidas através de uma pesquisa na internet (em que se considera que uma cidade pertence a essa região se houver uma referência disso num sítio da internet), tais como British Midlands ou Norte de Portugal. Propuseram um método de reclassificação, designado por Recoloração Geométrica, para se obter uma melhor delimitação das fronteiras. Essa reclassificação é feita por uma recoloração de um ponto (que corresponde a uma cidade) quando este se encontra cercado por pontos de cor oposta, recolorindo-se assim os pontos que mais provavelmente tenham sido mal classificados.

Em 2009, Rodriguez [13] aplica o método de Recoloração Geométrica na Recuperação de Falhas, baseando-se na correlação entre as falhas e a localização geométrica dos nós. No seu estudo, assim como Reinbacher et al, a sua grande preocupação está no comprimento das sequências de recoloração. Rodriguez argumenta, e demonstra através de estudos experimentais, que a regra de votação por maioria não é a melhor abordagem aquando de grafos geométricos envolvendo áreas com nós defeituosos, comparativamente à Recoloração Geométrica.

1.3 Estrutura da tese

Inicia-se esta dissertação com uma introdução geral, seguida da descrição do problema em estudo. Posteriormente faz-se uma revisão do estudo realizado na Recuperação de Falhas através da Recoloração Combinatória e da Recoloração Geométrica, bem como na origem do método denotado por Recoloração Geométrica.

No segundo capítulo apresentam-se noções gerais acerca de redes, que serão imprescindíveis ao longo desta dissertação.

No terceiro capítulo faz-se uma exposição de resultados existentes da Recoloração Geométrica, apresentando definições e lemas relevantes para a compreensão desses. São exibidas duas estruturas de redes, as redes grau-3 e as redes NIC, que não têm sequências de recoloração infinitas.

Todo o conteúdo dos capítulos 4 e 6 é original desta dissertação. No capítulo 4 apresentam-se novas definições e teoremas, para se poder mostrar duas novas estruturas de redes que também não têm sequências de recoloração infinitas: as redes NIC&Mi2 e NIC&QC. Na tabela 1.1 encontram-se as complexidades do comprimento das sequências de recoloração para todas as redes exibidas neste trabalho.

redes grau-3	$O(n)$	$\Omega(n)$
redes NIC	$O(n^3)$	$\Omega(n^2)$
redes NIC&Mi2	$O(n^2)$	$\Omega(n^2)$
redes NIC&QC	$O(n)$	$\Omega(n)$

Tabela 1.1: Complexidade do comprimento das sequências de recoloração de várias redes

O capítulo 5 apresenta o método utilizado na Recuperação de Falhas - Recoloração Geométrica. Para se poder aplicar este método, é necessário efectuar um pré-processamento nas redes, por forma a que estas passem a ser redes NIC (pois pretende-se garantir a finitude do método). Mostra-se um algoritmo para alterar uma rede e um outro para recolori-la, exemplificando-se ambos.

No sexto capítulo expõe-se um algoritmo que permite alterar uma rede para NIC, em detrimento de um já existente cuja complexidade é superior. Apresentam-se ainda algoritmos para se alterar uma rede para Mi2 e para QC, utilizados em conjunto com o algoritmo das redes NIC para se obterem as redes NIC&Mi2 e NIC&QC, exemplificando-se ambos. As complexidades dos algoritmos das alterações encontram-se na tabela 1.2. Note-se que para as redes NIC têm-se dois algoritmos, daí as duas linhas da tabela para estas.

No capítulo 7 faz-se um estudo experimental da eficácia da Recoloração Geométrica na Recuperação de Falhas, comparando-se entre as redes NIC, NIC&Mi2 e NIC&QC. Analisam-se, ainda, o número de alterações dos respectivos algoritmos e o número de recolorações aquando da Recoloração Geométrica, entre as várias estruturas de redes,

redes NIC	$O(n^2)$	$\Omega(n^2)$
	$O(n)$	$\Omega(n)$
redes NIC&Mi2	$O(n^2)$	$\Omega(n^2)$
redes NIC&QC	$O(n^2)$	$\Omega(n^2)$

Tabela 1.2: Complexidade dos algoritmos de alteração de redes aleatórias para várias redes

comparando-se entre redes com número de nós distinto. Uma análise semelhante foi feita em [13] apenas para as redes NIC.

O capítulo 8 contém alguns problemas em aberto que não foram resolvidos nesta dissertação.

No capítulo 9 apresentam-se as principais conclusões deste trabalho.

Capítulo 2

Preliminares

Nesta secção são apresentadas algumas definições acerca de grafos [4], relevantes para a compreensão deste trabalho, bem como o modelo de computação considerado.

Definição 2.0.1 (grafo e grafo geométrico)

Um grafo H é um par ordenado (V, E) , onde V é um conjunto de vértices e E um conjunto de arestas do tipo uv , com $u, v \in V$. Um grafo geométrico é um grafo $H = (V, E)$, cujos vértices são pontos no plano e as arestas são segmentos de recta com extremos em V .

Na figura 2.1 encontra-se um exemplo de um grafo geométrico, cujos conjuntos de vértices e arestas são $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $E = \{14, 24, 25, 26, 35, 36, 45\}$, respectivamente.

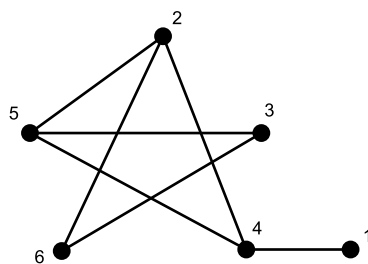


Figura 2.1: Grafo geométrico

Note-se que, se um grafo não é geométrico, a localização geométrica dos vértices não é relevante.

Definição 2.0.2 (grafo simples)

Um grafo simples é um grafo $H = (V, E)$ em que, dado um par de vértices $u, v \in V$, existe no máximo uma aresta com extremos u e v (i.e, não existem arestas paralelas),

e não existe nenhuma aresta com ambos os extremos iguais (i.e, não existem lacetes).

Definição 2.0.3 (grafo orientado)

Um grafo orientado é um grafo $H = (V, E)$ em que existe uma orientação das arestas.

Num grafo $H = (V, E)$, não orientado, se $uv \in E$ então $vu \in E$ e $uv = vu$.

Nas definições apresentadas a seguir, considere-se sempre um grafo não orientado e simples.

Definição 2.0.4 (subgrafo)

Define-se por subgrafo de um grafo $H = (V, E)$, um grafo $H_1 = (V_1, E_1)$ que satisfaça as três condições seguintes:

- $V_1 \subseteq V$,
- $E_1 \subseteq E$ e
- $\forall uv \in E_1, u, v \in V_1$.

Definição 2.0.5 (vértice incidente numa aresta)

Seja $H = (V, E)$ um grafo. Um vértice $x \in V$ diz-se incidente numa aresta $xy \in E$, com $y \in V$.

Definição 2.0.6 (vértices adjacentes)

Seja $H = (V, E)$ um grafo. Dois vértices $x, y \in V$ dizem-se adjacentes se $xy \in E$.

Num grafo, cada vértice pode ser incidente em mais do que uma aresta. Designam-se por vizinhos de um vértice v a todos os vértices que forem adjacentes a v .

Definição 2.0.7 (vizinhança)

Sejam $H = (V, E)$ um grafo e $v \in V$. Designa-se por vizinhança de v , e denota-se por $N_H(v)$, o conjunto dos vizinhos de v , definido por

$$N_H(v) = \{u \in V : uv \in E\}.$$

Tem-se então que $u \in V$ é vizinho de v se, e só se, existe, em H , uma aresta incidente em u e em v .

No grafo H da figura 2.1, tem-se que o conjunto dos vizinhos do vértice 2 é $N_H(2) = \{4, 5, 6\}$.

Definição 2.0.8 (grau de um vértice)

Sejam $H = (V, E)$ um grafo e $v \in V$. Designa-se por grau de v , e denota-se por $d_H(v)$, o número de vizinhos de v , i.e,

$$d_H(v) = |N_H(v)|$$

onde $|N_H(v)|$ denota a cardinalidade de $N_H(v)$.

Definição 2.0.9 (passeio)

Sejam $H = (V, E)$ um grafo e $x, y \in V$. Designa-se por passeio entre x e y a uma sequência não vazia de vértices e arestas da forma $(x, xv_1, v_1v_2, v_2, \dots, v_k y, y)$, onde $v_1, \dots, v_k \in V$.

Num grafo simples, um passeio fica totalmente definido pela sequência de vértices.

Definição 2.0.10 (caminho)

Sejam $H = (V, E)$ um grafo e $x, y \in V$. Designa-se por caminho entre x e y , e denota-se por xy – caminho, a um passeio entre x e y em que não haja repetição de vértices.

Num grafo arbitrário, por vezes consegue-se alcançar um vértice a partir de outro, sem que estes sejam vizinhos, através de uma sequência de vértices adjacentes. Este é o caso em que existe um caminho entre esse par de vértices.

Definição 2.0.11 (grafo conexo)

Seja $H = (V, E)$ um grafo. Diz-se que H é conexo se existe um caminho entre qualquer par de vértices de H , i.e,

$$\forall x, y \in V, \exists xy \text{ – caminho.}$$

Se um grafo H for desconexo, i.e, não for conexo, denomina-se por componente conexa de H a todo o subgrafo maximal de H que seja conexo. Um subgrafo conexo $H_1 = (V_1, E_1)$ diz-se maximal se não existir um subgrafo conexo $H_2 = (V_2, E_2)$, distinto de H_1 , que satisfaça $V_1 \subseteq V_2$ e $E_1 \subseteq E_2$.

O grafo (a) da figura 2.2 é um grafo conexo. Nesse grafo, os vértices 1 e 2 não são adjacentes, e é possível alcançar-se o vértice 2 a partir do vértice 1, isto passando pelos vértices 4 e 5. Tem-se então um caminho, $C = (1, 14, 4, 45, 5, 52, 2)$, entre 1 e 2. O grafo (b) da figura 2.2 é desconexo e tem duas componentes conexas: $H_1 = (V_1, E_1)$ e $H_2 = (V_2, E_2)$, com $V_1 = \{1, 3, 4, 5\}$, $V_2 = \{2, 6\}$, $E_1 = \{14, 45, 53\}$ e $E_2 = \{26\}$.

Facilmente se verifica que não existe nenhum caminho entre os vértices de H_1 e os de H_2 .

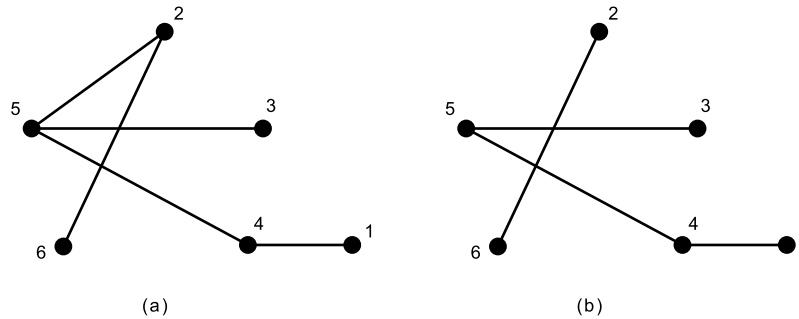


Figura 2.2: (a) Grafo conexo (b) Grafo desconexo

Definição 2.0.12 (grafo k – conexo)

Seja $H = (V, E)$ um grafo. Diz-se que H é k -conexo, com $k \in \mathbb{N}$, se não existe $X \subset V$ tal que $|X| < k$ e $H - X$ é desconexo, onde $H - X$ denota o grafo H após a remoção dos vértices de X e de todas as arestas incidentes nestes.

O grafo (a) da figura 2.2 é um grafo 1-conexo, pois após se remover o vértice 4 (e as arestas 54, 41) passa a desconexo, enquanto que o grafo (a) da figura 2.3 é 2-conexo: removendo apenas um vértice deste grafo (e as respectivas arestas), o grafo continua conexo, mas após se removerem os vértices 4 e 5, este passa a desconexo (ver figura 2.3 (b)).

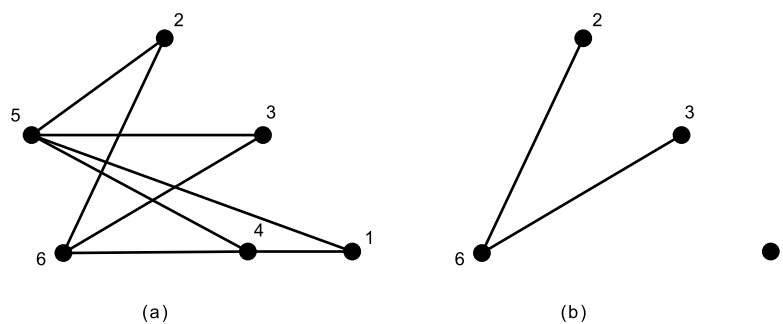


Figura 2.3: (a) Grafo 2-conexo (b) Grafo após remoção dos vértices 4 e 5

Definição 2.0.13 (grafo completo)

Seja $H = (V, E)$ um grafo. Diz-se que H é completo se quaisquer dois vértices de H forem adjacentes, i.e.,

$$\forall x, y \in V, xy \in E.$$

Na figura 2.4 tem-se uma ilustração de dois grafos completos, com 3 e 5 vértices, respectivamente.

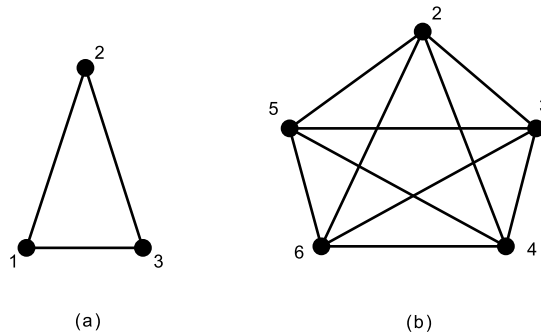


Figura 2.4: Grafos completos

Definição 2.0.14 (grafo bipartido)

Seja $H = (V, E)$ um grafo. Diz-se que H é bipartido se satisfaz a seguinte condição: $\exists X, Y \subseteq V$:

1. $X \cap Y = \emptyset$,
2. $X \cup Y = V$,
3. $\forall xy \in E, x \in X \text{ e } y \in Y$.

O grafo da figura 2.5 é bipartido, sendo $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{4, 5, 6\}$.

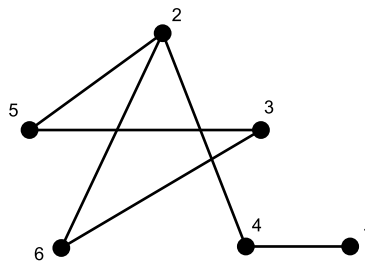


Figura 2.5: Grafo bipartido

Um grafo bipartido $H = (V, E)$ é completo se $\forall x \in X, \forall y \in Y, xy \in E$.

Definição 2.0.15 (grafo planar)

Um grafo planar é um grafo que não contém arestas que se cruzam.

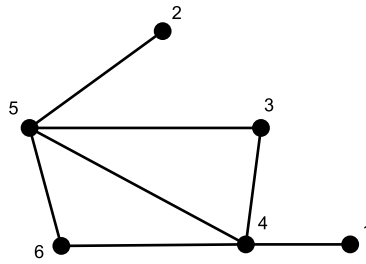


Figura 2.6: Grafo planar

Nesta dissertação, uma rede é um grafo geométrico, simples e não orientado.

Cada elemento de uma rede denotar-se-á por nó. Assume-se que, se um dado nó consegue comunicar com outro, então o segundo nó, por sua vez, também consegue comunicar com o primeiro. Define-se a estrutura de uma rede G por um par (N, L) , onde N é o conjunto dos nós e L é o conjunto das ligações entre os nós de G .

Se uma rede não for conexa, analisa-se cada componente conexa individualmente. No caso de uma componente ser constituída por apenas um nó, esta deverá ser ignorada.

Nesta tese considera-se um modelo de computação que permita computações locais, i.e, que permita que cada nó possa fazer uma computação baseada apenas nalgum conhecimento transmitido pelos seus vizinhos. Denomina-se por algoritmo localizado a um algoritmo que satisfaça a propriedade de localidade.

Um modelo pode ser síncrono ou assíncrono [12]. Num modelo síncrono cada etapa está bem definida em 3 fases: alguns nós enviam mensagens aos seus vizinhos; alguns nós recebem mensagens dos seus vizinhos; cada nó executa uma computação local. A complexidade temporal de um modelo síncrono é o número de etapas necessárias para que o algoritmo termine. Num modelo assíncrono, cada nó realiza uma computação local conforme recebe uma mensagem. Neste tipo de modelo não há nenhuma garantia na ordem pela qual as mensagens são recebidas, e a complexidade temporal é dada em unidades reais.

Uma vez que num modelo síncrono o custo de comunicação é elevado, pois é necessário que uma fase termine em todos os elementos da rede para que cada elemento possa passar para a fase seguinte, havendo assim a necessidade de se fazer uma computação global, neste trabalho consideram-se apenas modelos assíncronos. Uma das vantagens da Recoloração Geométrica é o facto de não necessitar de sincronização,

ou seja, cada elemento efectua a recoloração sempre que estiver cercado.

Os algoritmos abordados ao longo deste trabalho serão, então, localizados e assíncronos.

Capítulo 3

Recoloração Geométrica: resultados existentes

A Recoloração Geométrica é um método usado na delimitação de fronteiras em Regiões Imprecisas [8] e na Recuperação de Falhas [13]. Em ambos os casos, tem-se um conjunto bicromático de elementos, com ligações entre estes, e um elemento é recolorido se estiver cercado por elementos de cor oposta à sua própria cor.

Neste capítulo serão apresentadas definições e lemas considerados relevantes para a compreensão deste trabalho, bem como duas classes de redes que têm as propriedades desejadas: são definidas localmente a partir de propriedades de cada nó e todas as sequências de recoloração destas são finitas. Sempre que não for feita distinção, todos os resultados são retirados de [13].

Neste capítulo, considera-se uma rede bicromática $G = (N, L)$ com n nós, sendo os seus nós coloridos de azul e vermelho, consoante forem, respectivamente, saudáveis ou defeituosos.

Assume-se que as cores azul e vermelha são opostas e que os ângulos são definidos no sentido horário. Assume-se ainda que cada nó não sabe se é defeituoso ou saudável, mas consegue comparar a sua cor com a dos seus vizinhos.

3.1 Conceitos gerais

Seja $G = (N, L)$ uma rede bicromática com n nós. Colora-se cada ligação $uv \in L$ de G da seguinte forma:

- uv toma a cor de u e v , caso estes tenham a mesma cor,

- uv toma a cor magenta, se as cores de u e v forem diferentes.

Definição 3.1.1 (nó cercado)

Seja $u \in N$ um nó de G . Diz-se que u está cercado se existirem $v_1, v_2, \dots, v_k \in N_G(u)$ contíguos, relativamente a u , da cor oposta à de u , que abrangem um ângulo maior que 180° .

Nota 3.1.1 Seja $u \in N$ um nó de G . Seja (v_1, v_2, \dots, v_k) , com $v_1, v_2, \dots, v_k \in N_G(u)$ uma sequência de vizinhos contíguos de u , ordenados angularmente em torno de u no sentido horário. O ângulo abrangido por (v_1, v_2, \dots, v_k) , relativamente a u , é dado por

$$\sum_{i=1}^{k-1} \angle(v_i, u, v_{i+1})$$

i.e, é igual à soma dos ângulos entre cada par de nós contíguos.

Suponha-se que, durante um algoritmo de recoloração, $u \in N$ é um nó cercado no início da iteração j . Então, existe uma sequência maximal, (v_1, v_2, \dots, v_k) , de nós contíguos, com $v_1, v_2, \dots, v_k \in N_G(u)$, da cor oposta à de u , que abrangem um ângulo maior que 180° . Denota-se por $C_u(j)$ a sequência das ligações correspondentes, e define-se por $C_u(j) = (uv_1, uv_2, \dots, uv_k)$. Note-se que a cor de todas as ligações de $C_u(j)$ é magenta.

Definição 3.1.2 (ligações magenta extremas)

Seja $u \in N$. Considere-se $C_u(j) = (uv_1, uv_2, \dots, uv_k)$, com $v_1, v_2, \dots, v_k \in N_G(u)$. Diz-se que as ligações uv_1 e uv_k são ligações magenta extremas em $C_u(j)$.

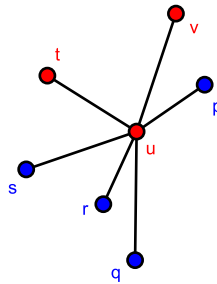


Figura 3.1: Nó u está cercado

A figura 3.1 ilustra uma rede com um nó cercado, u , uma vez que o ângulo abrangido pela sequência (p, q, r, s) é superior a 180° . Tem-se então $C_u(1) = (up, uq, ur, us)$, onde up e us são ligações magenta extremas.

Observe-se que não se pode escolher como valor mínimo do ângulo que define se um nó está cercado, um ângulo inferior a 180° , pois existiriam casos triviais (i.e, sem recolorações adicionais dos vizinhos) em que um nó seria recolorido um número infinito de vezes, sem haver nenhuma recoloração adicional de outros nós [8]. A figura 3.2 ilustra este caso: no grafo da esquerda, o nó u está cercado e após ser recolorido volta a ficar cercado, conforme se pode ver no grafo da direita; após se voltar a recolorir u obtém-se a coloração inicial. Seria, então, difícil controlar a finitude das sequências de recoloração. No entanto, quando este valor não é inferior a 180° , também existem redes que têm sequências de recoloração infinitas (que serão ilustradas nesta tese), onde as sucessivas recolorações de um nó dependem das recolorações dos seus vizinhos.



Figura 3.2: Nó u é recolorido um número infinito de vezes

Definição 3.1.3 (ângulo magenta)

Seja $u \in N$ um nó de G . O ângulo magenta de u é:

- (i) 0° , se a cardinalidade do conjunto, de cardinalidade máxima, de vizinhos contíguos de u da cor oposta à de u não é superior a 1.
- (ii) 360° , se o grau de u é maior do que 1 e todos os seus vizinhos são da cor oposta à de u .
- (iii) o ângulo máximo de entre todos os conjuntos de vizinhos contíguos de u da cor oposta à de u , caso contrário.

A figura 3.3 ilustra diversas possibilidades de ângulos magenta. Para cada nó p , se o seu ângulo magenta for maior que 0° , esse ângulo encontra-se representado através de arcos. O ângulo magenta de p é $\alpha = 0^\circ$ nas redes (a), (b) e (c); $\alpha = 360^\circ$ na rede (d); $180^\circ < \alpha < 360^\circ$ nas redes (e) e (f).

Pode-se então concluir que um nó cercado é um nó cujo ângulo magenta é maior que 180° .

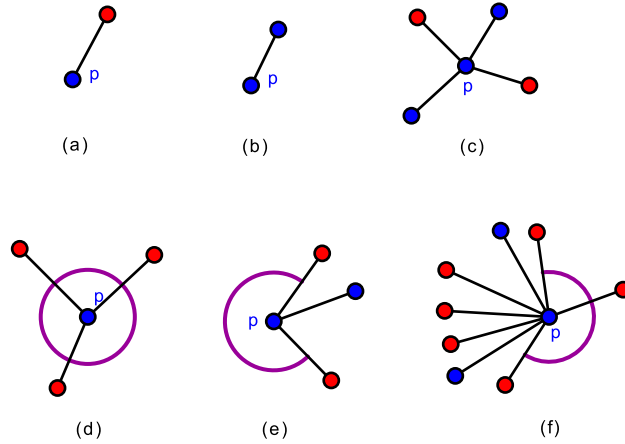


Figura 3.3: Ângulos magenta

Definição 3.1.4 (ligação oposta)

Sejam $q \in N$ e $p \in N_G(q)$. Diz-se que qr ($p \neq r$) é uma ligação oposta de pq , relativamente a q , se não existe nenhuma ligação incidente em q na região entre qr e a semi-recta iniciada em q com direcção oposta à de p , que não contém pq .

Facilmente se verifica que, dados um nó $q \in N$ e um dos seus vizinhos $p \in N_G(q)$, existem no máximo duas ligações opostas de pq , relativamente a q , conforme ilustrado na figura 3.4. Tem-se 0, 1 e 2 ligações opostas de pq , relativamente a q , nas redes apresentadas em (a), (b) e (c), respectivamente.

Sempre que não cause qualquer dúvida, omitir-se-á a referência "relativamente a".

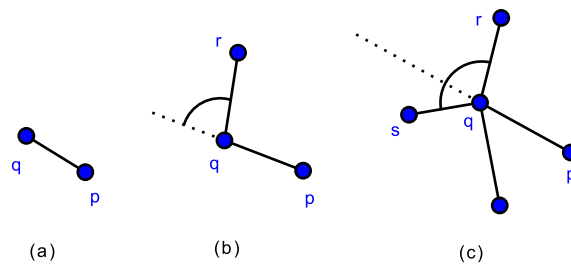


Figura 3.4: Ligações opostas

A figura 3.5 ilustra o facto da relação oposta não ser simétrica: embora qs seja uma ligação oposta de pq , pq não é uma ligação oposta de qs .

Definição 3.1.5 (cadeia oposta e cadeia monótona)

Uma cadeia oposta é um caminho $P = (p_0, p_1, \dots, p_k)$ que satisfaz:

- $p_0 \neq p_k$;

- ou $p_i p_{i+1}$ é uma ligação oposta de $p_{i-1} p_i$, ou $p_i p_{i-1}$ é uma ligação oposta de $p_{i+1} p_i$, $\forall 1 < i < k - 1$.

Diz-se que uma cadeia oposta é monótona se o caminho P for monótono relativamente às abcissas.

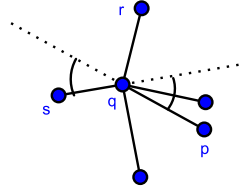


Figura 3.5: A relação oposta não é simétrica

Na figura 3.6, encontram-se ilustradas duas cadeias opostas. A cadeia oposta $(v_1, v_2, v_3, v_6, v_7, v_4)$ não é monótona pois a abcissa do nó v_6 é inferior à abcissa do nó v_3 .

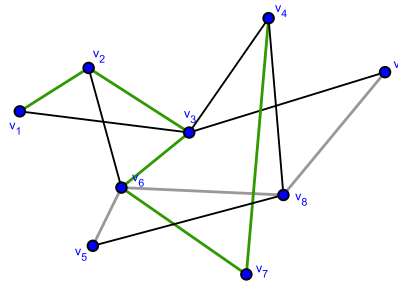


Figura 3.6: Cadeia oposta monótona, a cinzento, e não monótona, a verde

Definição 3.1.6 (nó convexo e ligação convexa)

Diz-se que um nó $u \in N$ é convexo se $\exists v_1, v_2 \in N_G(u)$ consecutivos, ordenados angularmente em torno de u no sentido horário, tal que $\angle(v_1, u, v_2) > 180^\circ$. Denominam-se por ligações convexas, relativamente a u , as ligações uv_1 e uv_2 .

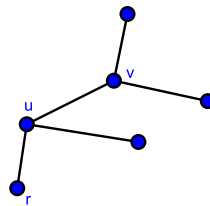


Figura 3.7: u é um nó convexo e uv, ur são ligações convexas, relativamente a u

3.2 Lemas gerais

Os dois lemas apresentados a seguir foram retirados de [8] e de [13], respectivamente. As provas encontram-se nas referências correspondentes.

Lema 3.2.1. *Sejam $pq \in L$ uma ligação de G e $qr \in L$ uma ligação oposta de pq . Então, se q é recolorido, este recebe a cor de p ou de r .*

Note-se que p ou r pertence a $C_q(j)$, sendo j a iteração em que q está cercado, e, quando q é recolorido, q recebe a cor dos nós de $C_q(j)$.

Lema 3.2.2. *Sejam $p, q \in N$ dois nós convexos de G , tais que $pq \in L$. Se pq é uma ligação convexa relativamente a p e a q , então a ligação pq não pode mudar de vermelho ou azul para magenta.*

Quando pq toma uma cor sólida (vermelho ou azul), para que pq mude de cor, um dos seus extremos tem de mudar de cor. Para tal, é necessário que esse extremo esteja cercado. Como ambos p e q são nós convexos, p só estará cercado se q for da cor oposta à de p (e vice-versa). Consequentemente, após pq tomar uma cor sólida, nem p , nem q voltam a estar cercados.

Tem-se então que, numa rede NIC, um nó convexo é recolorido no máximo uma vez.

Nota 3.2.1 Um nó de grau 1 nunca é recolorido (trivial pela definição de cercado).

3.3 Sequências de recoloração em vários tipos de rede

Nesta secção serão apresentadas duas classes de redes: redes grau-3 e redes NIC. Ambas as estruturas são definidas, apenas, através de propriedades locais dos nós e o comprimento de qualquer sequência de recoloração destas redes é finito.

Definição 3.3.1 (sequência de recoloração)

Define-se por sequência de recoloração de uma rede G , uma sequência de nós cercados (v_1, v_2, \dots, v_k) , com $v_1, v_2, \dots, v_k \in N$, tal que, após se recolorir todos os nós dessa sequência, não haverão mais nós cercados em G . O comprimento da sequência de recoloração é igual a k .

Numa sequência de recoloração de uma rede G , pode haver repetição de nós: um nó que tenha sido recolorido pode voltar a ficar cercado após uma recoloração de alguns dos seus vizinhos (ver exemplo na figura 3.8).

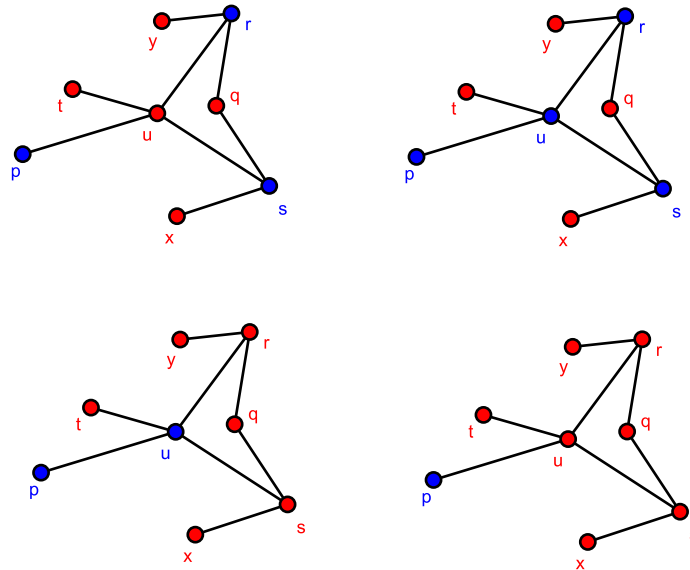


Figura 3.8: Nó u é recolorido duas vezes usando a sequência (u, s, r, u)

Observe-se que sequências de recoloração distintas podem produzir diferentes colorações finais de uma mesma rede. As figuras 3.9 e 3.10, ilustram colorações finais distintas de uma rede bicromática: na primeira todos os nós ficam defeituosos, enquanto que na segunda todas as falhas são corrigidas.

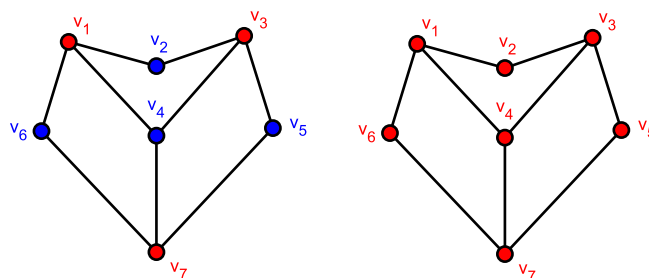


Figura 3.9: Recoloração de uma rede usando a sequência (v_2, v_6, v_4, v_5)

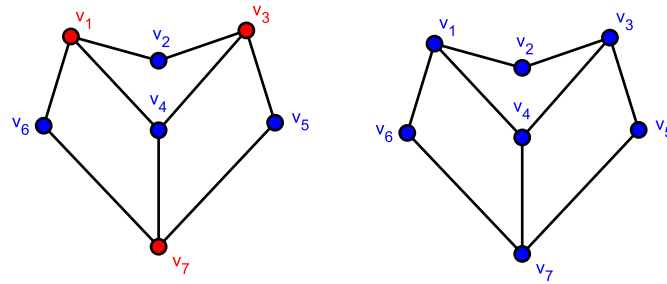


Figura 3.10: Recoloração de uma rede usando a sequência (v_1, v_3, v_7)

Existem redes que têm sequências de recoloração infinitas. As figuras 3.12 e 3.11 ilustram duas dessas redes, pois as recolorações de uns nós levam a que outros passem a ficar cercados e, ao fim de algumas recolorações, obtém-se novamente a coloração inicial.

Na rede (a) apresentada na figura 3.12, os nós v_1 e v_9 encontram-se cercados e, após a recoloração destes, v_2, v_{10} vão passar a estar cercados (ver figura 3.12 (b)). Considerando uma aplicação, α , em que $\alpha(v_i) = v_{i+2}$, com $i = 1, \dots, 14$, e $\alpha(v_{16}) = v_2, \alpha(v_{15}) = v_1$, conclui-se que a rede obtida é semelhante à rede inicial (difere apenas na localização dos nós, mas mantém os ângulos), o que mostra que a rede admite uma sequência de recoloração infinita. Para se obter a coloração inicial, tem-se então a seguinte sequência $(v_1, v_9, v_2, v_{10}, v_3, v_{11}, v_4, v_{12}, v_5, v_{13}, v_6, v_{14}, v_7, v_{15}, v_8, v_{16}, v_1, v_9, v_2, v_{10}, v_3, v_{11}, v_4, v_{12}, v_5, v_{13}, v_6, v_{14}, v_7, v_{15}, v_8, v_{16})$.

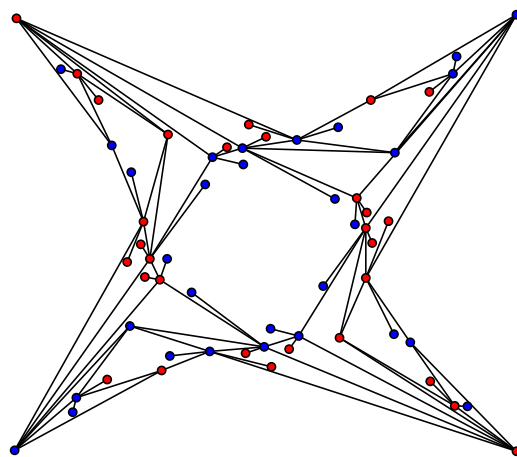


Figura 3.11: Rede planar com sequência de recoloração infinita

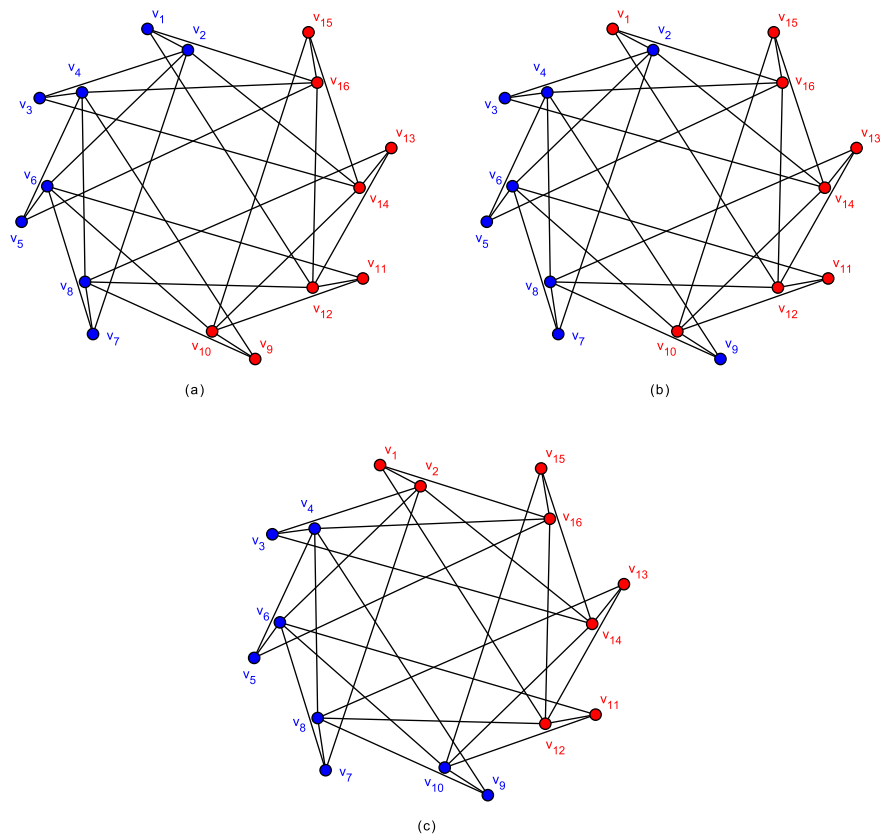


Figura 3.12: Rede não planar com sequência de recoloração infinita

Em [13] encontra-se ilustrada a sequência de recoloração infinita da rede da figura 3.11.

3.3.1 Redes grau-3

Definição 3.3.2 (rede grau-3)

Diz-se que uma rede G é uma rede grau-3 se cada nó de G tiver no máximo grau 3.

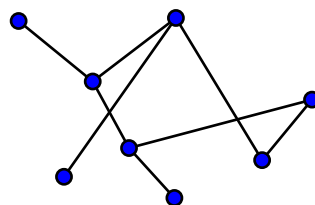


Figura 3.13: Rede grau-3

Qualquer sequência de recoloração das redes grau-3 tem comprimento $O(n)$ (ver demonstração em [13], pp. 28-29).

A rede ilustrada na figura 3.14 tem uma sequência de recolorações com comprimento $O(n)$: $(v_4, v_5, v_6, v_7, v_3, v_2, v_1)$. Esta rede pode ser facilmente generalizada para $n = 2^k - 1$ nós, com $k > 1$, adicionando-se dois nós por cada nó de grau 1, por forma a que estas novas ligações sejam convexas, e, na rede resultante, os nós de grau 1 devem ser coloridos com uma das cores e os restantes com a outra cor. Tem-se assim um total de $(n - 1)/2$ recolorações, pois apenas os nós de grau 1 não são recoloridos.

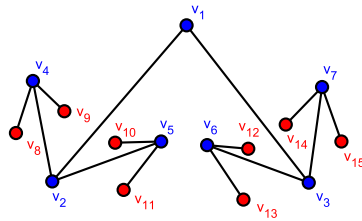


Figura 3.14: Rede grau-3 com $O(n)$ recolorações

Estas redes não são muito interessantes do ponto de vista prático, pois limitam bastante o número de vizinhos de um nó.

3.3.2 Redes NIC (non-isolated-convex)

Definição 3.3.3 (rede NIC)

Diz-se que uma rede é NIC se cada nó $u \in N$ satisfaz uma das seguintes condições:

- $d_G(u) \leq 1$,
- u não é convexo,
- u é convexo e $\exists v \in N_G(u)$, tal que v é convexo e uv é convexa relativamente a u e a v (i.e, u não é um convexo isolado).

A rede da figura 3.15 é uma rede NIC: os nós v_4, v_7, v_9 têm grau 1; os nós v_6 e v_8 não são convexas; os restantes são convexas, mas não são convexas isolados, pois v_2v_3 é convexa relativamente a v_2 e v_3 e v_1v_5 é convexa relativamente a v_1 e v_5 .

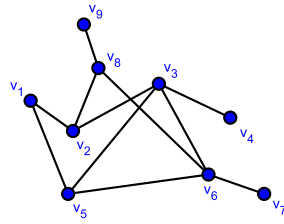


Figura 3.15: Rede NIC

Na figura 3.16 encontram-se ilustrados os únicos dois casos de nós convexos não isolados.

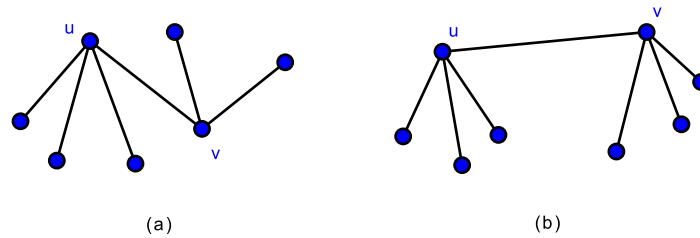


Figura 3.16: Nós convexos não isolados

Qualquer sequência de recoloração das redes NIC tem comprimento $O(n^3)$ (ver demonstração em [13], pp. 34-36).

Em [13] é apresentado um exemplo de uma rede (adaptada de [8]) que satisfaz as propriedades de uma rede NIC, para a qual existe uma sequência de recoloração com comprimento $O(n^2)$. A figura 3.17 ilustra uma destas redes para $n = 9$. Este exemplo pode facilmente ser generalizado para $O(n)$ triângulos.

Recoloram-se, em primeiro lugar, os nós do “triângulo” mais próximo do centro e, posteriormente, os do “triângulo” mais próximo do centro que ainda não tenham sido recoloridos, até se atingir o “triângulo” mais afastado, cujos nós não estão cercados. Repete-se o processo até não haver mais nós cercados. A cada fase, os nós do “triângulo” mais afastado do centro, que tenham sido recoloridos na fase anterior, não são recoloridos (pois não voltam a estar cercados), i.e, a cada fase são recoloridos menos três nós do que na fase anterior. Tem-se, então, que o comprimento desta sequência de recoloração é

$$\sum_{i=1}^{n/3} (n - 3i) = \frac{n^2}{6} - \frac{n}{2} = O(n^2)$$

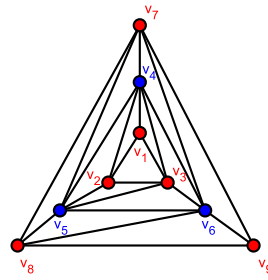


Figura 3.17: Rede NIC com sequência de recoloração de comprimento $O(n^2)$

A sequência de recoloração correspondente à rede da figura 3.17 é então $(v_3, v_2, v_1, v_6, v_5, v_4, v_3, v_2, v_1)$.

Capítulo 4

Recoloração Geométrica: novos resultados

Neste capítulo serão apresentados novos resultados na área de Recoloração Geométrica, em particular serão definidas duas novas classes de redes. Estas redes têm como finalidade diminuir a complexidade do comprimento das sequências de recoloração das redes NIC. Para tal, considera-se como base as redes NIC e altera-se a estrutura dos nós internos destas. Para além disso, será explicada uma tentativa de fechar a lacuna no comprimento das sequências de recoloração das redes NIC. Por forma a mostrar com mais clareza os resultados, serão feitas novas definições e novos teoremas.

Considera-se uma rede bicromática $G = (N, L)$ com n nós, sendo os seus nós coloridos de azul e vermelho, consoante forem, respectivamente, saudáveis ou defeituosos.

Assume-se que as cores azul e vermelha são opostas e que o ângulo é definido no sentido horário. Assume-se ainda que cada nó não sabe se é defeituoso ou saudável, mas consegue comparar a sua cor com a dos seus vizinhos.

4.1 Conceitos gerais

Nesta secção serão apresentados novos conceitos, importantes para a explicação das novas redes.

Definição 4.1.1 (número de recolorações)

Seja $u \in N$ um nó de G . Define-se por número de recolorações de u , e denota-se por $\beta(u)$, o número de vezes que u é recolorido numa dada sequência de recolorações de G .

Na rede ilustrada na figura 4.1, o número de recolorações, na sequência $(v_3, v_2, v_5, v_3, v_6, v_1, v_4, v_9, v_2, v_5, v_3)$, dos nós $v_7, v_8, v_{10}, v_{11}, v_{13}, v_{14}, v_{15}$ é 0 e dos nós v_2, v_5

é 2.

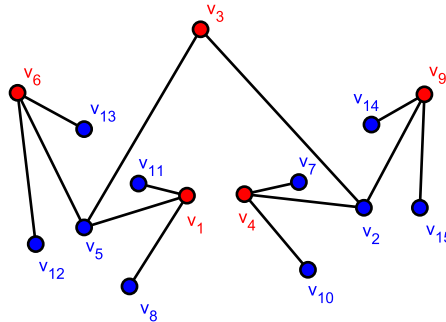


Figura 4.1: $\beta(v_3) = 3$ na sequência de recoloração $(v_3, v_2, v_5, v_3, v_6, v_1, v_4, v_9, v_2, v_5, v_3)$

Definição 4.1.2 (nó interno)

Diz-se que um nó $u \in N$ é interno se não for convexo e tiver mais do que um vizinho.

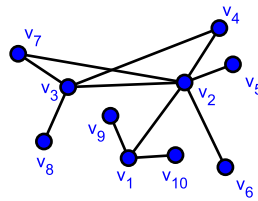


Figura 4.2: v_2 e v_3 são nós internos

Definição 4.1.3 (multiplicidade de um nó)

Define-se por multiplicidade de um nó $u \in N$, e denota-se por $mi(u)$, o número de vizinhos de u que são nós internos.

Na rede da figura 4.2, tem-se $mi(v_9) = mi(v_{10}) = 0$, $mi(v_1) = mi(v_2) = mi(v_3) = mi(v_5) = mi(v_6) = mi(v_8) = 1$, e $mi(v_4) = mi(v_7) = 2$.

Definição 4.1.4 (nó quasiconvexo)

Diz-se que $u \in N$ é um nó quasiconvexo relativamente a $v \in N_G(u)$, se u é um nó interno e é convexo em $G' = (N, L \setminus \{uv\})$, onde $L \setminus \{uv\}$ representa o conjunto das ligações de G à exceção de uv .

Considere-se a rede $G = (N, L)$ ilustrada na figura 4.3. O nó u é quasiconvexo relativamente a r : u é um nó interno e quando se elimina a ligação ur , passa a ser um nó convexo. Da mesma forma, tem-se que u é quasiconvexo relativamente a v .

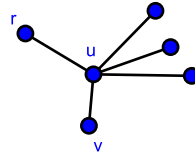


Figura 4.3: u é um nó quasiconvexo relativamente a r

4.2 Resultados gerais

Teorema 4.2.1. *Sejam $G = (N, L)$ uma rede e $u \in N$ um nó de G . Sejam $u_1, u_2, u_3 \in N_G(u)$ três nós contíguos, ordenados angularmente em torno de u no sentido horário. Se $\angle(u_1, u, u_2) + \angle(u_2, u, u_3) \geq 180^\circ$, então*

$$\beta(u) \leq \beta(u_2) + 1.$$

Demonstração. Sejam $G = (N, L)$ uma rede e $u \in N$ um nó de G . Sejam $u_1, u_2, u_3 \in N_G(u)$ três nós contíguos, ordenados angularmente em torno de u no sentido horário.

Suponha-se que

$$\angle(u_1, u, u_2) + \angle(u_2, u, u_3) \geq 180^\circ. \quad (4.2.1)$$

Suponha-se que u está cercado. Então, pela definição de cercado, $\exists v_1, v_2, \dots, v_k \in N$ contíguos, da cor oposta à de u , que abrangem um ângulo maior que 180° . Suponha-se, por redução ao absurdo, que $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $u_2 \neq v_i$. Então, por (4.2.1), conclui-se que o ângulo abrangido pela sequência (v_1, \dots, v_k) é menor ou igual a 180° (ver figura 4.4).

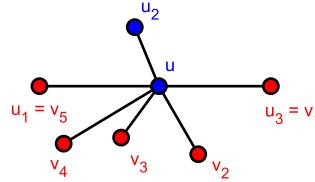


Figura 4.4: u não está cercado e $\angle(u_1, u, u_2) + \angle(u_2, u, u_3) = 180^\circ$

Consequentemente, $u_2 = v_i$, para algum $i \in \{1, \dots, k\}$.

Fica assim provado que $\beta(u) \leq \beta(u_2) + 1$, pois, de cada vez que u é recolorido, este toma a cor de u_2 e, antes que u_2 seja alguma vez recolorido, u pode estar cercado. \square

A figura 4.5, ilustra uma rede que satisfaz as condições do teorema anterior, onde $\beta(u) = \beta(u_2) + 1$. Note-se que o nó u , ao ser recolorido, toma a cor de u_2 , mas não a cor de u_1 .

Teorema 4.2.2. *Sejam $G = (N, L)$ uma rede e $u \in N$. Após se recolorir u , se este volta estar cercado, então dois dos seus vizinhos foram recoloridos.*

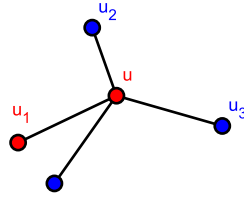


Figura 4.5: $\beta(u) = \beta(u_2) + 1$

Demonstração. Sejam $G = (N, L)$ uma rede e $u \in N$ um nó de G que foi recolorido na iteração j de um algoritmo de recoloração. Então, no início da iteração j , u estava cercado. Logo, existe uma sequência de vizinhos de u contíguos, (v_1, v_2, \dots, v_k) , que abrange um ângulo maior que 180° , i.e,

$$\sum_{l=1}^{k-1} \angle(v_l, u, v_{l+1}) > 180^\circ. \quad (4.2.2)$$

Observe-se que, no fim da iteração j , u deixa de estar cercado.

Suponha-se que u está cercado no início da iteração $i > j$. Então pelo menos um dos vizinhos de u foi recolorido e esse vizinho tem que ser incidente numa das ligações extremas de $C_u(j)$, pois é necessário um conjunto contíguo de nós da cor oposta à de u . Suponha-se, sem perda de generalidade, que esse vizinho é v_k .

Suponha-se, também, que, de entre os vizinhos de u , após a iteração j , apenas v_k foi recolorido. Uma vez que u está novamente cercado (por hipótese), existe uma sequência de vizinhos de u contíguos, $(v_k, r_1, r_2, \dots, r_{k'})$, que abrange um ângulo maior que 180° , i.e,

$$\angle(v_k, u, r_1) + \sum_{m=1}^{k'-1} \angle(r_m, u, r_{m+1}) > 180^\circ. \quad (4.2.3)$$

Por (4.2.2) e (4.2.3), vem

$$\angle(v_k, u, r_1) + \sum_{m=1}^{k'-1} \angle(r_m, u, r_{m+1}) + \sum_{l=1}^{k-1} \angle(v_l, u, v_{l+1}) > 360^\circ,$$

o que é um absurdo, pois assumiu-se que $\nexists m \in \{1, \dots, k'\}$, $r_m \in \{v_1, \dots, v_k\}$.

Consequentemente, para que u volte a estar cercado, mais do que um dos seus vizinhos tiveram que ser recoloridos. □

Teorema 4.2.3. *Sejam $G = (N, L)$ uma rede NIC e $u \in N$. Se todos os vizinhos de u são convexos, então*

$$\beta(u) \leq \frac{d_G(u)}{2} + 1.$$

Demonstração. Sejam $G = (N, L)$ uma rede NIC e $u \in N$, t.q. todos os vizinhos de u são convexos.

Suponha-se que u está cercado e nenhum dos vizinhos de u foi recolorido. Recolore-se u . Pelo teorema 4.2.2, para que u volte a estar cercado, pelo menos dois vizinhos de u têm de ser recoloridos. Como cada vizinho de u só pode ser recolorido, no máximo, uma vez (lema 3.2.2), vem que

$$\beta(u) \leq \frac{d_G(u)}{2} + 1.$$

□

A figura 4.6 ilustra uma rede que satisfaz as condições do teorema anterior, onde $\beta(v_1) = \frac{d_G(v_1)}{2} + 1$. Note-se que o tamanho dos nós é irrelevante, os nós que não são recoloridos têm um tamanho inferior apenas para facilitar a visualização das recolorações.

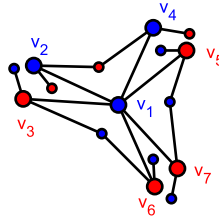


Figura 4.6: $\beta(v_1) = \frac{d_G(v_1)}{2} + 1$ usando a sequência de recoloração $(v_1, v_5, v_7, v_1, v_2, v_4, v_1, v_3, v_6, v_1)$

Lema 4.2.4. *Sejam $G = (N, L)$ uma rede NIC e $u \in N$. Se nenhum dos vizinhos de u é interno, então*

$$\beta(u) \leq \frac{d_G(u)}{2} + 1.$$

Demonstração. Sejam $G = (N, L)$ uma rede NIC e $u \in N$.

Suponha-se que u não é adjacente a nenhum nó interno. Logo, os vizinhos de u são convexos, ou têm grau 1. Os nós de grau 1 nunca podem ser recoloridos e os nós convexos podem ser recoloridos uma vez, no máximo. Pelo teorema 4.2.3, obtém-se $\beta(u) \leq \frac{d_G(u)}{2} + 1$. □

Teorema 4.2.5. *Seja $G = (N, L)$ uma rede NIC que não tem nenhum nó interno com multiplicidade superior a dois. Então*

$$\forall u \in N, \beta(u) \leq \frac{d_G(u)}{2} + 2.$$

Demonstração. Sejam $G = (N, L)$ uma rede NIC que não tem nenhum nó interno com multiplicidade superior a dois e $u \in N$ um nó interno. Note-se que a condição é satisfeita para nós não internos, pois, por hipótese G é uma rede NIC.

Por forma a maximizar o número de recolorações de u , assume-se que $mi(u) = 2$, onde $r, s \in N_G(u)$ são os dois vizinhos de u internos. Assume-se, também, com a mesma finalidade, que $mi(r) = mi(s) = 2$.

Pretende-se determinar o número de vezes que r pode influenciar a cor de u , i.e, pretende-se determinar o número de vezes que r é recolorido para a cor oposta à de u .

Seja r_1 o outro nó interno, para além de u , adjacente a r . Considere-se uma das ligações opostas de ur , relativamente a r , rr_2 .

Se $r_2 \neq r_1$, então r_2 não é um nó interno e, conseqüentemente, $\beta(r_2) \leq 1$.

Se $r_2 = r_1$, então escolhe-se a outra ligação oposta de ur , relativamente a r , e denota-se por rr_2 . Se tal ligação não existir, então $d_G(r) = 2$ e $\angle(u, r, r_1) = 180^\circ$, pois r é um nó interno. Nesse caso, sempre que r estiver cercado, tem-se que $u \in C_r(j)$, onde j é a iteração correspondente, pelo que r nunca ser recolorido para a cor oposta à de u .

Pelo lema 3.2.1, quando r é recolorido toma a cor de r_2 . Conclui-se então que r influencia a cor de u duas vezes, no máximo.

Aplicando-se o mesmo raciocínio para s , conclui-se que s influencia a cor de u duas vezes, no máximo.

Como $\forall t \in N_G(u)$, se $t \neq r$, $t \neq s$, tem-se $\beta(t) \leq 1$, cai-se na mesma situação do lema 4.2.4, com a exceção de que r e s podem influenciar a cor de u uma vez a mais.

Conseqüentemente $\beta(u) \leq (d_G(u)/2 + 1) + 1$.

□

A figura 4.7 ilustra uma rede que satisfaz as condições do teorema 4.2.5, com $\beta(v_1) = \frac{d_G(v_1)}{2} + 1$. Observe-se que os nós v_5 e v_7 são nós internos, o que permite que sejam recoloridos uma vez a mais do que na rede da figura 4.6.

Teorema 4.2.6. *Sejam $G = (N, L)$ uma rede, $u \in N$ e $u_2 \in N_G(u)$. Se u é interno, então existem $u_1, u_3 \in N_G(u)$, distintos de u_2 , com u_1, u_2, u_3 ordenados angularmente em torno de u no sentido horário, tais que $\angle(u_1, u, u_2) + \angle(u_2, u, u_3) \geq 180^\circ$.*

Demonstração. Sejam $G = (N, L)$ uma rede, $u \in N$ e $u_2 \in N_G(u)$.

Suponha-se que u é interno. Então $d_G(u) \geq 2$.

Suponha-se que não existem $u_1, u_3 \in N_G(u)$, distintos de u_2 , com u_1, u_2, u_3 ordenados angularmente em torno de u no sentido horário, que satisfaçam $\angle(u_1, u, u_2) + \angle(u_2, u, u_3) \geq 180^\circ$. É de notar que se pode ter $u_1 = u_2$.

Sejam $v_1, v_3 \in N_G(u)$, distintos de u_2 , que maximizam $\angle(v_1, u, u_2) + \angle(u_2, u, v_3)$. Então $\angle(v_1, u, u_2) + \angle(u_2, u, v_3) < 180^\circ$. Logo $\angle(v_3, u, v_1) > 180^\circ$, o que é um absurdo, pois u é um nó interno. □

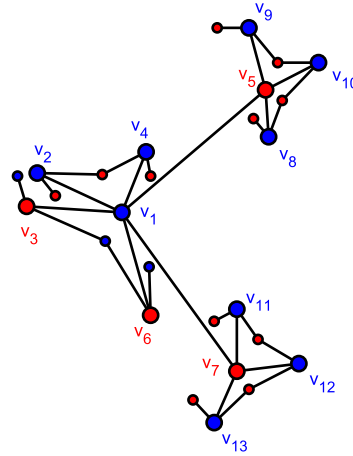


Figura 4.7: $\beta(v_1) = \frac{d_G(v_1)}{2} + 2$ usando a sequência de recoloração $(v_1, v_5, v_7, v_1, v_2, v_4, v_1, v_3, v_6, v_1, v_8, v_9, v_{10}, v_5, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_7, v_1)$

4.3 Sequências de recoloração em vários tipos de rede

Nesta secção será apresentada uma tentativa de fechar a lacuna no comprimento das sequências de recoloração das redes NIC. Conforme referido no capítulo anterior, em [13] provou-se que estas redes têm complexidades $O(n^3)$ e $\Omega(n^2)$. Tenta-se, então, mostrar que o limite superior obtido não é óptimo.

Posteriormente, definem-se duas novas classes de redes, com os objectivos de considerar as redes NIC como base e, através de alterações da estrutura destas, diminuir a complexidade das sequências de recoloração obtida para as redes NIC.

4.3.1 Redes NIC (non-isolated-convex)

No capítulo anterior, subsecção 3.3.2, referiu-se que as sequências de recoloração de uma rede NIC têm complexidade $O(n^3)$. Na demonstração feita por Rodriguez em [13], faz-se uma cobertura da rede através de cadeias opostas (monótonas sempre que possível). Esta cobertura é feita criando uma cadeia oposta a partir de cada uma das ligações da rede, o que leva a que a mesma ligação esteja em várias cadeias. No interior da cadeia só poderão haver nós convexas quando estes se encontrarem na segunda (ou na penúltima) posição da cadeia, e na primeira (ou na última) posição estiver um nó convexo, sendo a ligação entre estes convexa relativamente a ambos.

Nesta tese, tentou-se provar que a complexidade de construir uma tal cobertura é inferior a $O(|L|) = O(n^2)$, i.e, tentou-se provar que não é necessário construir uma

cadeia oposta para cada ligação da rede. A figura 4.8 ilustra uma classe de redes que necessita sempre de $O(n^2)$ cadeias opostas para cobrir a rede - rede completa, onde todos os nós são convexos.

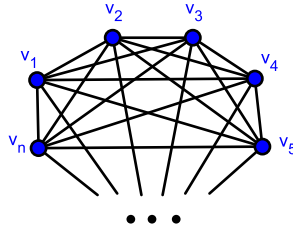


Figura 4.8: Rede com complexidade quadrática na cobertura por cadeias opostas

Observe-se que todos os nós da rede ilustrada na figura 4.8 são convexos e que, pelo lema 3.2.2, o número de recolorações de cada nó é no máximo 1. Tem-se então que, embora esta rede não permita reduzir a complexidade das sequências de recoloração das redes NIC, o comprimento de qualquer sequência de recoloração tem complexidade linear, relativamente ao número de nós. Consequentemente, a partir deste resultado, não se pode tirar nenhuma conclusão acerca do valor óptimo desta complexidade.

4.3.2 Redes NIC & Mi2

Definição 4.3.1 (rede Mi2)

Seja $G = (N, L)$ uma rede. Diz-se que G é uma rede Mi2 (máximo-internos-dois), se G satisfaz a seguinte condição:

$$\forall u \in N, \text{ se } u \text{ é interno, então } mi(u) \leq 2.$$

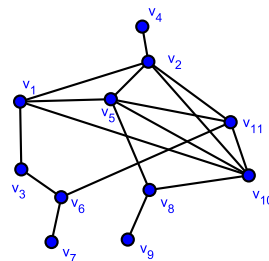


Figura 4.9: Rede NIC&Mi2

Na figura 4.9 tem-se ilustrada uma rede NIC&Mi2 (redes com as propriedades de uma rede NIC e as propriedades de uma rede Mi2): os nós v_2, v_5, v_6 e v_8 são internos,

cada um destes está ligado a menos de três nós internos, e não existem convexos isolados.

As redes NIC&Mi2 têm complexidade, no comprimento das sequências de recoloração, $O(n^2)$, pois, pelo teorema 4.2.5, cada nó pode ser recolorido $O(n)$ vezes. A figura 4.10 ilustra parte de uma rede NIC&Mi2 (com apenas um nó interno) que tem uma sequência de recoloração de comprimento $O(n^2)$. Consequentemente a complexidade das sequências de recoloração destas redes é $\theta(n^2)$.

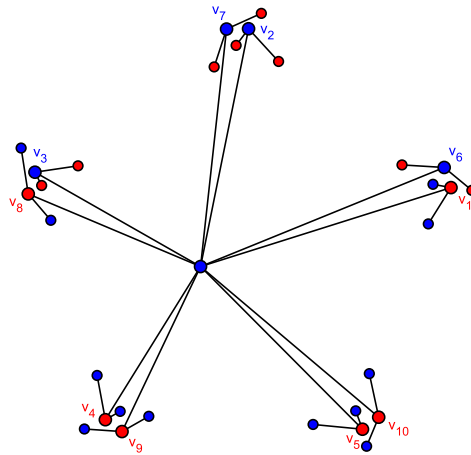


Figura 4.10: Rede NIC&Mi2 com sequência de recoloração de comprimento $O(n^2)$

Seja $G = (N, L)$ uma rede com $2m$ nós convexos, $4m$ nós de grau 1 e m nós internos, com m ímpar. Tem-se então $n = 2m + 4m + m = 7m$.

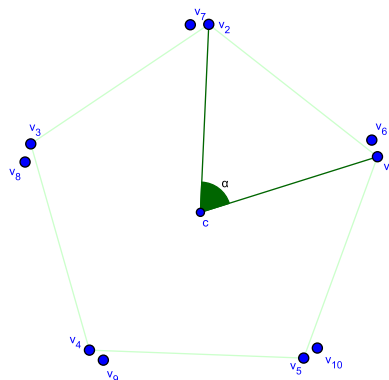


Figura 4.11: Localizações dos nós convexos

Considere-se que m dos nós convexos, v_1, v_2, \dots, v_m , estão situados de modo a formarem um polígono regular. Denote-se por c o ponto central desse polígono e por α o ângulo entre dois nós convexos contíguos, relativamente a c . Coloquem-se os outros m nós convexos, $v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_{2m}$, por forma a que $\angle(v_i, c, v_{i+m}) \ll \alpha$, para $1 \leq i \leq m$, à mesma distância de c que v_1 (ver figura 4.11, onde $m = 5$). Cada nó convexo está ligado a dois nós de grau 1, sendo estes que definem as ligações convexas, e a todos os nós internos.

Os nós internos encontram-se situados na zona central do polígono definido por todos os nós convexos (ver figura 4.12).

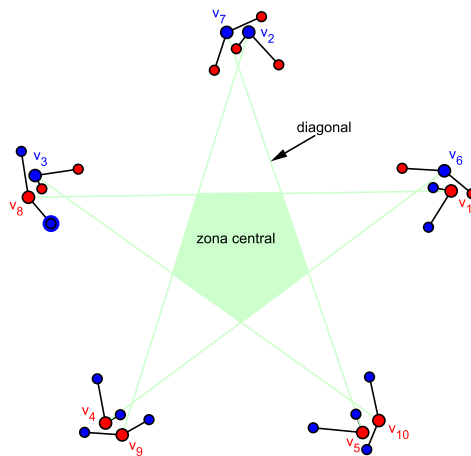


Figura 4.12: Diagonais principais do polígono definido pelos $2m$ nós convexos e zona central

Seja v_i um nó convexo, $i \in \{1, \dots, m\}$. Coloram-se $m + 1$ nós convexos contíguos, no sentido horário, iniciando em v_i , de uma das cores. Sejam u_1, u_2, \dots, u_{m+1} esses nós, coloram-se os nós internos da mesma cor que estes. Os restantes nós convexos, u_{m+2}, \dots, u_m (ordenados no sentido horário em torno de c), tomam a cor oposta à escolhida anteriormente. Os nós de grau 1 são coloridos da cor oposta à cor do nó convexo a que são adjacentes.

Tem-se então que, inicialmente, cada nó interno está cercado (devido à posição dos nós e à coloração destes), o que leva a m recolorações. Posteriormente, recoloram-se dois nós convexos, u_1 e u_2 , o que leva a que todos os nós internos voltem a estar cercados. Recolorindo-se agora os nós u_{m+2} e u_{m+3} , obtêm-se, novamente, m recolorações dos nós internos. Repetindo este processo, i.e, recolorindo dois dos nós convexos que ainda não tenham sido recoloridos e que impliquem que os nós internos passem a estar cercados,

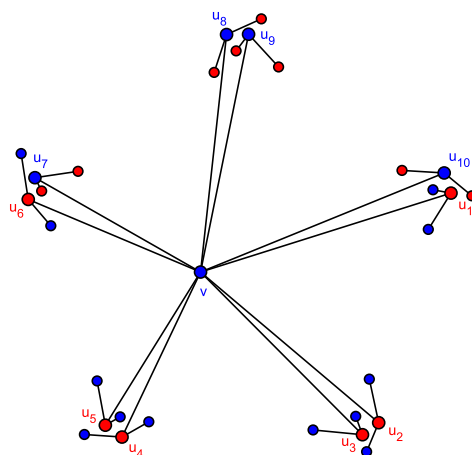


Figura 4.13: Reordenação dos nós

obtem-se um total de $m + 1$ recolorações para cada nó interno e de uma recoloração para cada nó convexo, pelo que o número de recolorações da rede é

$$m(m + 1) + 2m = m^2 + 3m = \frac{n^2}{7^2} + 3\frac{n}{7} = O(n^2).$$

Nas figuras 4.14, 4.15 e 4.16 encontra-se ilustrada a sequência de recoloração da rede descrita acima. Como apenas se exemplifica para um nó interno, tem-se um total de $1(m + 1) + 2m = 1(5 + 1) + 2 \times 5 = 16$ recolorações.

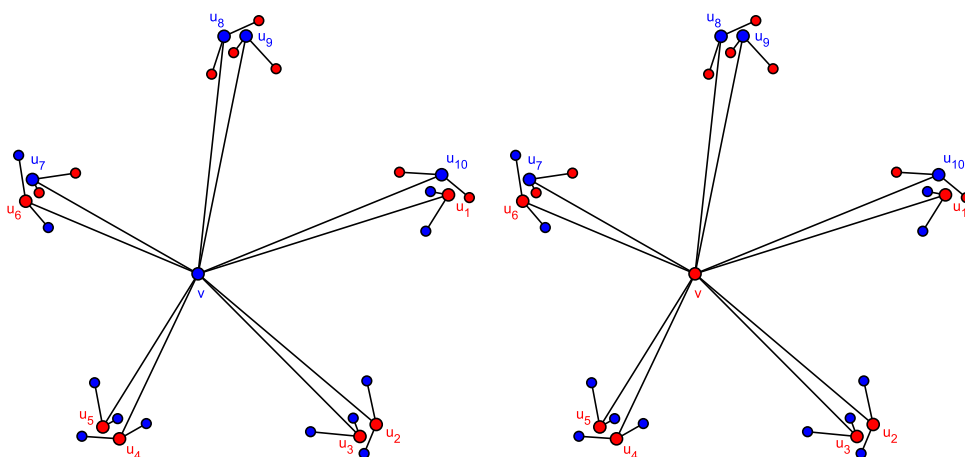


Figura 4.14: Recoloração usando a sequência $(v, u_1, u_2, v, u_7, u_8, v, u_3, u_4, v, u_9, u_{10}, v, u_5, u_6, v)$

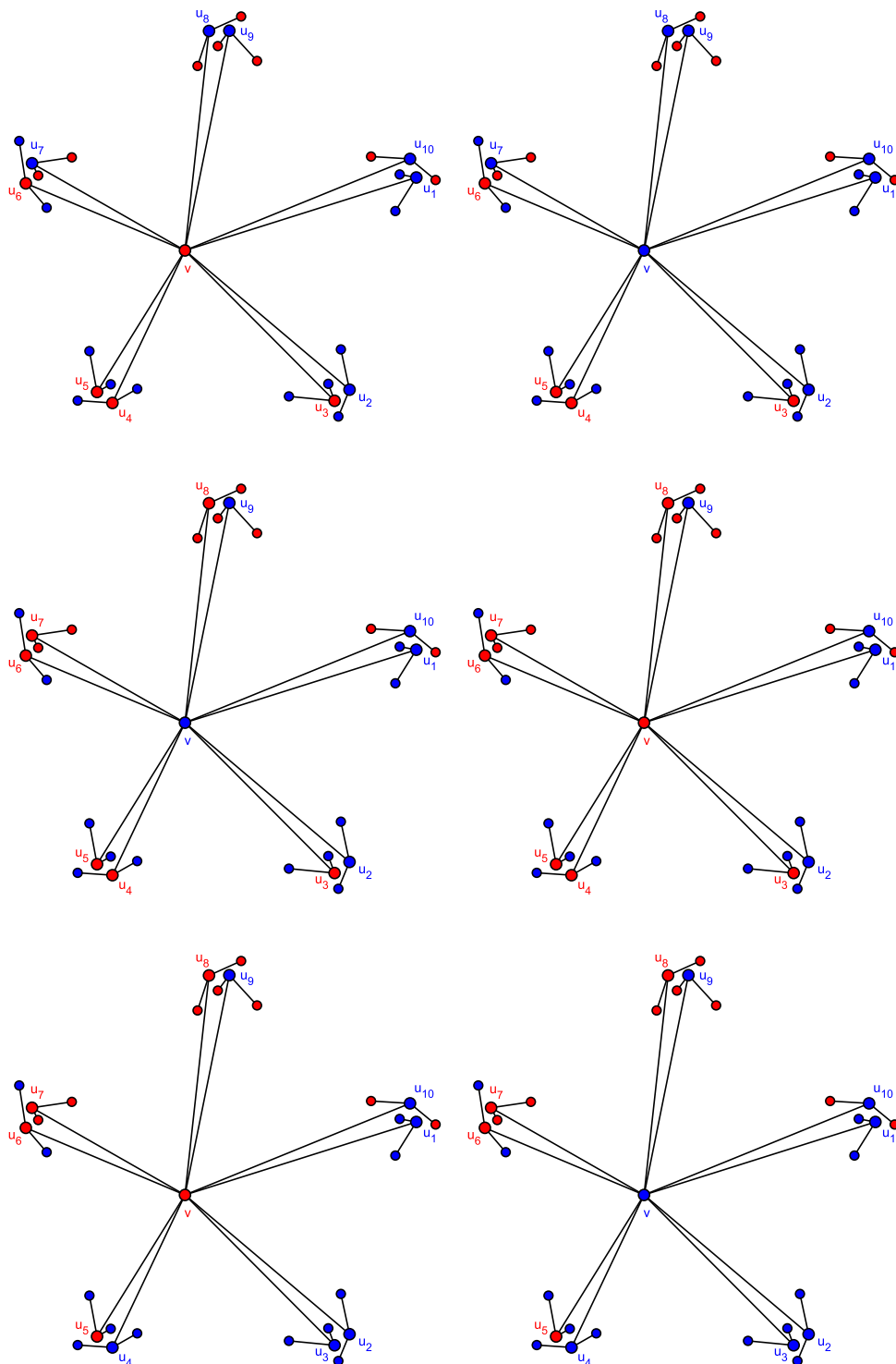


Figura 4.15: Continuação da recoloração

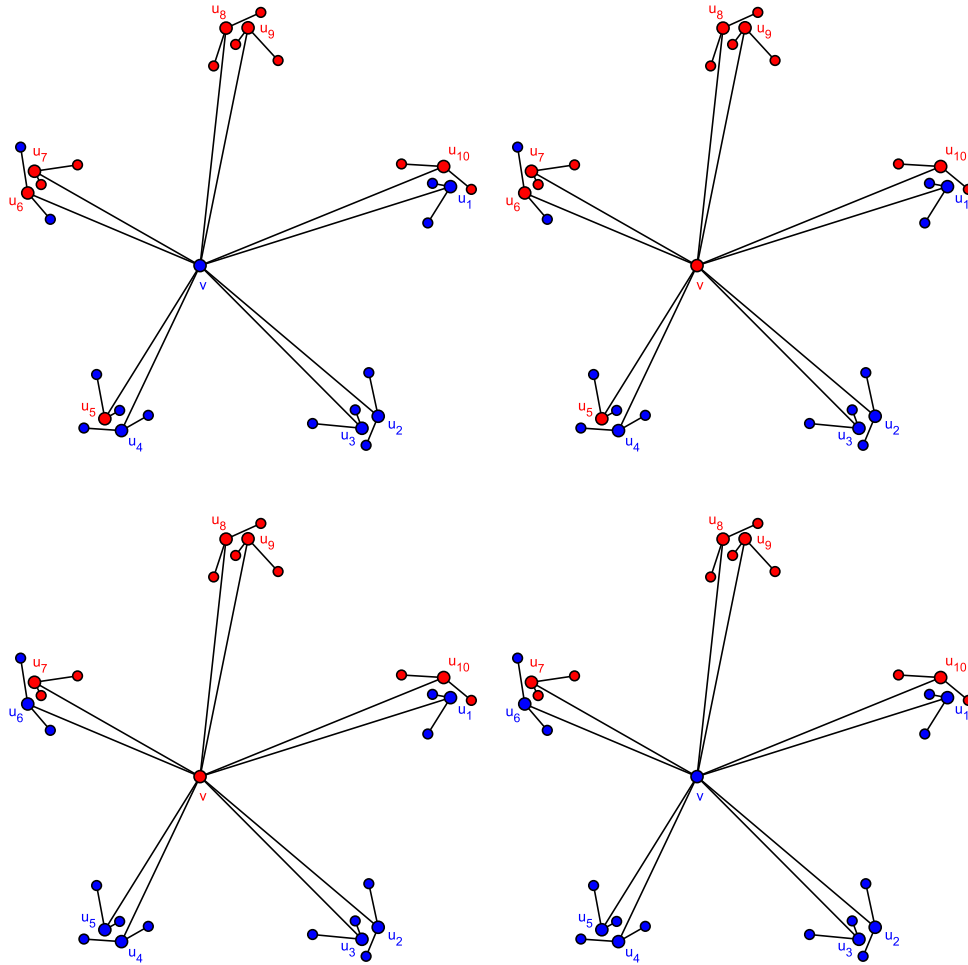


Figura 4.16: Continuação da recoloração

4.3.3 Redes NIC & QC

Definição 4.3.2 (rede QC)

Seja $G = (N, L)$ uma rede. Diz-se que G é uma rede QC (quasiconvexa), se G satisfaz a seguinte condição:

$\forall u \in N$, se u é interno então $\exists v \in N_G(u)$, t.q. v não é interno e u é quasiconvexo relativamente a v .

A rede da figura 4.17 é NIC&QC (rede com as propriedades de uma rede NIC e as propriedades de uma rede QC) pois é uma rede NIC e todos os seus nós internos são quasiconvexos relativamente a um nó não interno. Os nós v_1, v_5 e v_9 são os únicos internos e são quasiconvexos relativamente a v_2, v_6, v_8 , respectivamente. Observe-se que v_5 e v_9 também são quasiconvexos relativamente a v_4 e v_7 , respectivamente.

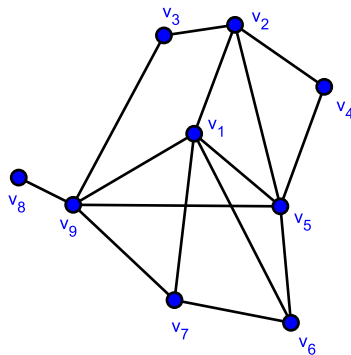


Figura 4.17: Rede NIC&QC

Cada nó de uma rede NIC&QC, $G = (N, L)$ pode ser recolorido $O(2)$ vezes:

- se $u \in N$ tem grau 1, nunca será recolorido;
- se $u \in N$ é convexo, pode ser recolorido uma vez, no máximo (lema 3.2.2);
- se $u \in N$ é interno, pode ser recolorido duas vezes, no máximo (teorema 4.2.1).

Logo, qualquer sequência de recoloração de G tem comprimento $O(n)$.

A rede ilustrada na figura 4.18 tem uma sequência de recoloração com comprimento $O(n)$: (v_1, v_3, v_5) . Esta rede pode facilmente ser generalizada a n nós, com n par, adicionando-se dois nós de cada vez de modo a que v_1 não deixe de ser convexo, sendo o número de recolorações igual a $n/2$.

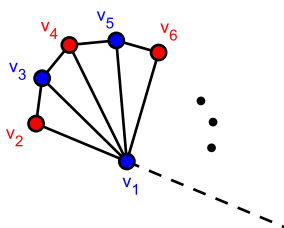


Figura 4.18: Rede NIC&QC com $O(n)$ recolorações

Capítulo 5

Recuperação de Falhas: resultados existentes

Na tarefa de Recuperação de Falhas pretende-se corrigir o maior número de nós defeituosos possível. O algoritmo de recuperação consiste, então, em se aplicar a estratégia de Recoloração Geométrica, considerando-se um modelo assíncrono, conforme referido no capítulo 2. Uma vez que a probabilidade de ocorrerem recolorações em simultâneo é bastante baixa (consultar explicação em [13]), assume-se que estas não ocorrem. Define-se este modelo como modelo sequencial e limita-se o estudo da Recuperação de Falhas a este.

A estratégia de Recuperação de Falhas através da Recoloração Geométrica também pode levar a que nós saudáveis se tornem defeituosos. Contudo, uma vez que, numa rede, a maior parte dos nós contém a informação correcta, existe uma tendência em se conseguir corrigir os defeituosos. Isto foi demonstrado através de experiências em [13].

Por forma a garantir a terminalidade do algoritmo, faz-se um pré-processamento da rede em análise. Este pré-processamento consiste em alterar a rede, apenas para fins de recoloração, com o objectivo de esta satisfazer as propriedades de uma rede NIC (cujo comprimento das sequências de recoloração é $O(n^3)$).

Reinbacher et al em [8] sugerem um algoritmo, intitulado por método preferencial, que tem $O(n)$ recolorações, sendo n o número de nós da rede. Neste algoritmo recoloram-se, numa primeira fase, os nós de uma das cores e posteriormente, numa segunda fase, todos os nós da outra cor. Observe-se que, as recolorações da segunda fase não produzem novos nós cercados, pelo que, após estas, não haverão mais nós cercados. Este algoritmo envolve a ideia de fases, o que não corresponde aos critérios especificados do modelo de computação no capítulo 2 (cada nó necessita de saber se a

primeira fase já foi executada em toda a rede, não sendo suficiente a informação dos vizinhos, logo não é localizado), pelo que não será considerado neste estudo. Na secção 5.2 será apresentado um algoritmo para se recuperar de falhas que satisfaz o modelo desejado.

Assume-se que cada nó não sabe se é defeituoso ou saudável, apenas consegue comparar a sua cor com a dos seus vizinhos, e que cada nó consegue determinar o ângulo entre cada um dos seus vizinhos, relativamente a ele próprio.

Todos os resultados apresentados neste capítulo são retirados de [13].

5.1 Pré-processamento da rede

Considere-se uma rede $G = (N, L)$ com n nós. Por forma a garantir a finitude do algoritmo de recoloração, altera-se a rede para que esta tenha as propriedades de uma rede NIC, usando para tal o Algoritmo NIC. Note-se que estas alterações são apenas para fins de recoloração. As alterações são feitas através da remoção de ligações, visto que não faz sentido a adição de novas ligações devido à (possível) elevada distância entre os extremos destas.

Pretende-se remover o menor número possível de ligações de G , por forma a que G passe a satisfazer a estrutura de uma rede NIC. Em [13] prova-se que este problema é NP-difícil, pelo que se utiliza uma heurística - Algoritmo NIC -, cuja complexidade, em termos de alterações, é $O(n^2)$. Este algoritmo tem garantia de terminar, uma vez que apenas se removem ligações. Observe-se que uma rede sem ligações satisfaz as condições de uma rede NIC.

O Algoritmo NIC consiste em determinar se um nó é convexo isolado e, caso seja, elimina uma das ligações convexas incidentes neste. Para tal, cada um dos nós classifica as ligações incidentes nele como convexas ou não convexas - o nó u marca a ligação uv como convexa (não convexa) se uv é convexa (não convexa) relativamente a v , ficando assim consciente da convexidade dos seus vizinhos. Se, após a eliminação de uma ligação convexa incidente num nó convexo isolado, este continuar convexo isolado, repete-se novamente o processo, i.e, elimina-se novamente uma das suas ligações convexas.

Algoritmo 1 Algoritmo NIC (executado em cada nó u)

Dados de Entrada : Rede bicromática $G = (N, L)$.

Dados de Saída : Rede bicromática $G' = (N, L')$ t.q. $L' \subseteq L$ e G' é uma rede NIC.

Passo 1. Classificar todas as ligações incidentes em u com DESCONHECIDO.

Passo 2. Se u não tiver recebido nenhuma mensagem e ainda houver ligações com a marca DESCONHECIDO, u envia uma mensagem para todos os seus vizinhos informando-os da convexidade da ligação correspondente (CONVEXO ou NÃO-CONVEXO), relativamente a u .

Passo 3. Se u tiver recebido uma mensagem, processar a mensagem de acordo com o seu tipo:

CONVEXO: a ligação a partir da qual a mensagem foi recebida, uv , é marcada como convexa. Se a ligação não tiver sido marcada como convexa anteriormente, envia uma mensagem a v indicando a convexidade de uv relativamente a u .

NÃO-CONVEXO: a ligação a partir da qual a mensagem foi recebida, uv , é marcada como não-convexa. Se uv é convexa relativamente a u , e u é um convexo isolado, então u remove uv e envia a mensagem REMOVE a v , e envia a mensagem CONVEXO através de outra ligação incidente a u que tenha passado a convexa (se existir tal ligação).

REMOVE: u remove a ligação, uv , pela qual a mensagem foi recebida.

Passo 4. Voltar ao passo 2.

Note-se que um nó convexo apenas deixa de ser convexo quando passa a ter grau 1, i.e, quando todas as ligações que lhe são incidentes são eliminadas, à exceção de uma única. Observe-se que a marcação das ligações é feita relativamente aos nós, pelo que uma ligação pode ter duas marcas diferentes, uma para cada extremo.

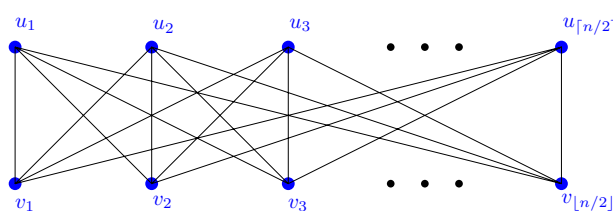


Figura 5.1: Rede cujo número de alterações é o pior caso do Algoritmo NIC

O exemplo da figura 5.1 ilustra o pior caso do algoritmo anterior em que se necessita de remover $O(n^2)$ ligações (prova em [13]). Trata-se de uma rede completa bipartida $G = (N, L)$, com $N = U \cup V$, onde U e V são os conjuntos que definem a bipartição.

Pode-se então concluir que a complexidade deste algoritmo, em termos de número de alterações, é $\theta(n^2)$.

5.1.1 Exemplificação do Algoritmo NIC

Considere-se a rede $G = (N, L)$ ilustrada na figura 5.2.

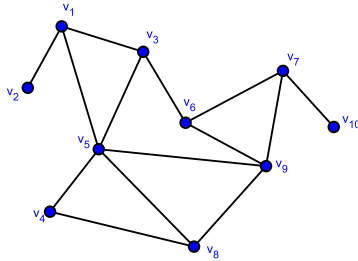


Figura 5.2: Rede inicial

Facilmente se verifica que G não é uma rede NIC: o nó v_7 é um convexo isolado, pois v_7v_6 e v_7v_{10} são ligações convexas relativamente a v_7 , mas não são convexas relativamente a v_6 nem a v_{10} , respectivamente.

Aplicando o Algoritmo NIC à rede G , começa-se por classificar todas as ligações como DESCONHECIDAS - D.

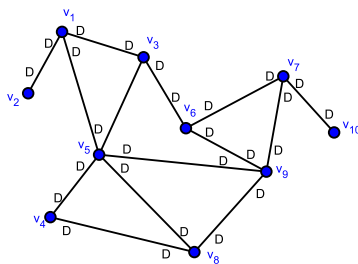


Figura 5.3: Classificar todas as ligações com D (desconhecidas)

Posteriormente, executa-se o algoritmo no nó v_7 (esta escolha é aleatória) e envia-se uma mensagem aos seus vizinhos informando-os da convexidade da ligação correspondente, relativamente a v_7 : v_7v_6 e v_7v_{10} são convexas, v_7v_9 não é convexa. Quando os vizinhos de v_7 recebem estas mensagens, classificam a ligação correspondente consoante

a mensagem (C se convexa e NC se não convexa), conforme ilustra a figura 5.4. Os nós v_6 e v_{10} enviam uma mensagem a v_7 indicando a convexidade da ligação correspondente relativamente a cada um destes, enquanto que o nó v_9 não faz nada, pois ainda não sabe se é um convexo isolado.

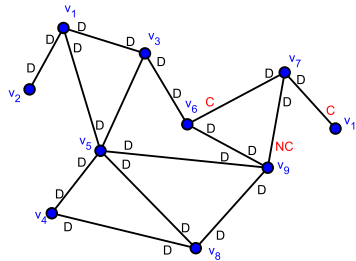


Figura 5.4: Execução do algoritmo no nó v_7 e resposta dos seus vizinhos

Após receber a mensagem dos seus vizinhos, o nó v_7 classifica as ligações v_6v_7 e $v_{10}v_7$ como não convexas.

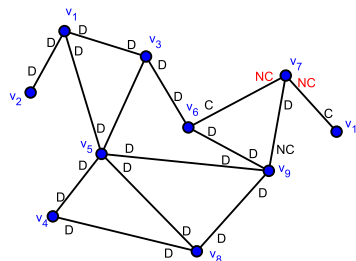


Figura 5.5: v_7 classifica as ligações v_6v_7 e $v_{10}v_7$

Conclui-se que v_7 é um convexo isolado e, conseqüentemente, v_7 elimina uma das suas ligações convexas, v_7v_{10} . Observe-se que a escolha da ligação a remover depende da ordem de chegada das mensagens, pois v_7 só sabe que é um convexo isolado quando recebe ambas as mensagens de v_{10} e v_6 . A ligação v_7v_9 passou a convexa, relativamente a v_7 e a v_9 .

A figura 5.7 ilustra a execução do algoritmo no nó v_9 através das classificações das ligações incidentes neste nó, por parte dos seus vizinhos, que ainda não tinham sido classificadas anteriormente: v_5v_9, v_6v_9 não são convexas e v_8v_9 é convexa. Os vizinhos de v_9 que receberam a mensagem CONVEXO - v_8 - enviam uma mensagem a

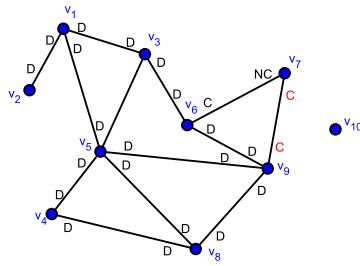


Figura 5.6: v_7 elimina uma das suas ligações convexas - v_7v_{10}

v_9 informando da convexidade destes, relativamente à ligação correspondente - v_8v_9 é convexa relativamente a v_8 . Observe-se que v_9 já sabia que não era um convexo isolado, pois v_7v_9 é convexa relativamente a v_7 e a v_9 .

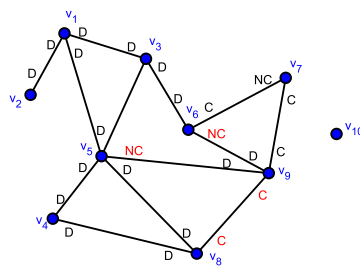


Figura 5.7: Execução do algoritmo no nó v_9 e resposta dos seus vizinhos

Note-se que já não existem convexas isolados. Após a execução de alguns passos, cada uma das ligações estarão classificadas e todos os nós saberão que não são convexas isolados. Tem-se então que a rede final, $G' = (N, L')$, é obtida através da remoção da ligação v_7v_{10} : $L' = L \setminus \{v_7v_{10}\}$.

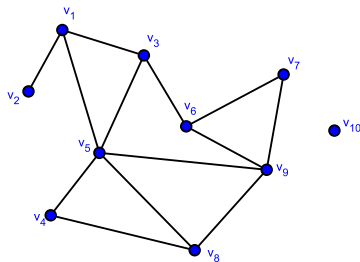


Figura 5.8: Rede obtida após a execução do Algoritmo NIC

5.2 Algoritmo de Recoloração

Nesta secção será apresentado o algoritmo de Recuperação de Falhas: Algoritmo de Recoloração. Este algoritmo consiste em determinar se um nó está cercado e, nesse caso, alterar a sua cor.

Inicialmente, cada nó informa os seus vizinhos da sua cor e, posteriormente, quando um nó é recolorido, informa-os novamente. Assim, cada nó poderá calcular o seu ângulo magenta e concluir se necessita ou não de ser recolorido.

O algoritmo termina temporariamente quando todos os nós cercados tiverem sido recoloridos e inicia-se novamente após T unidades de tempo desde a ocorrência da última falha. Escolhe-se T suficientemente grande por forma a tentar garantir que exista tempo para que deixe de haver nós cercados, iniciando-se de seguida uma nova sequência de recoloração (para o caso de haverem novas falhas).

Algoritmo 2 Algoritmo de Recoloração (executado em cada nó u)

Dados de Entrada : Rede bicromática $G = (N, L)$.

Dados de Saída : Rede bicromática $G = (N, L)$ sem nós cercados.

Passo 1. Enviar uma mensagem a todos os vizinhos de u , informando-os acerca da cor de u .

Passo 2. Se u tiver recebido alguma mensagem, actualiza a informação da cor dos seus vizinhos. Se u estiver cercado, actualiza a sua cor e envia uma mensagem aos seus vizinhos, informando-os da sua cor.

Passo 3. Se u não tiver recebido nenhuma mensagem, nem receber nenhuma durante T unidades de tempo, volta ao Passo 1.

Passo 4. Voltar ao Passo 2.

5.2.1 Exemplificação do Algoritmo de Recoloração

Considere-se a rede $G = (N, L)$, ilustrada na figura 5.9 (a). Conforme se pode verificar, os nós v_3, v_5 e v_{11} estão cercados.

Inicialmente, cada nó envia uma mensagem aos seus vizinhos, informando-os da sua cor (A se azul e V se vermelho). Na figura 5.9 (b) verifica-se que cada nó classifica as ligações que lhe são incidentes consoante a cor do outro extremo, i.e, consoante a cor do vizinho incidente nessa ligação.

Na figura 5.9 (c), o nó v_3 foi recolorido e os seus vizinhos actualizaram a informação que tinham sobre a cor deste - passou de vermelho para azul.

Na figura 5.9 (d), o nó v_5 foi recolorido e os seus vizinhos actualizaram a informação que tinham sobre a cor deste - passou de vermelho para azul. Após esta recoloração, v_4 e v_8 passaram a estar cercados.

Recolorindo-se agora o nó v_8 - de vermelho para azul -, observa-se que v_{11} deixou de estar cercado. Note-se a importância de, antes de um nó ser recolorido, verificar todas as mensagens recebidas até ao momento e actualizar as cores dos seus vizinhos, se necessário.

Por fim, v_4 é recolorido - de vermelho para azul - e já não existem nós cercados. A sequência de recoloração utilizada foi (v_3, v_5, v_8, v_4) .

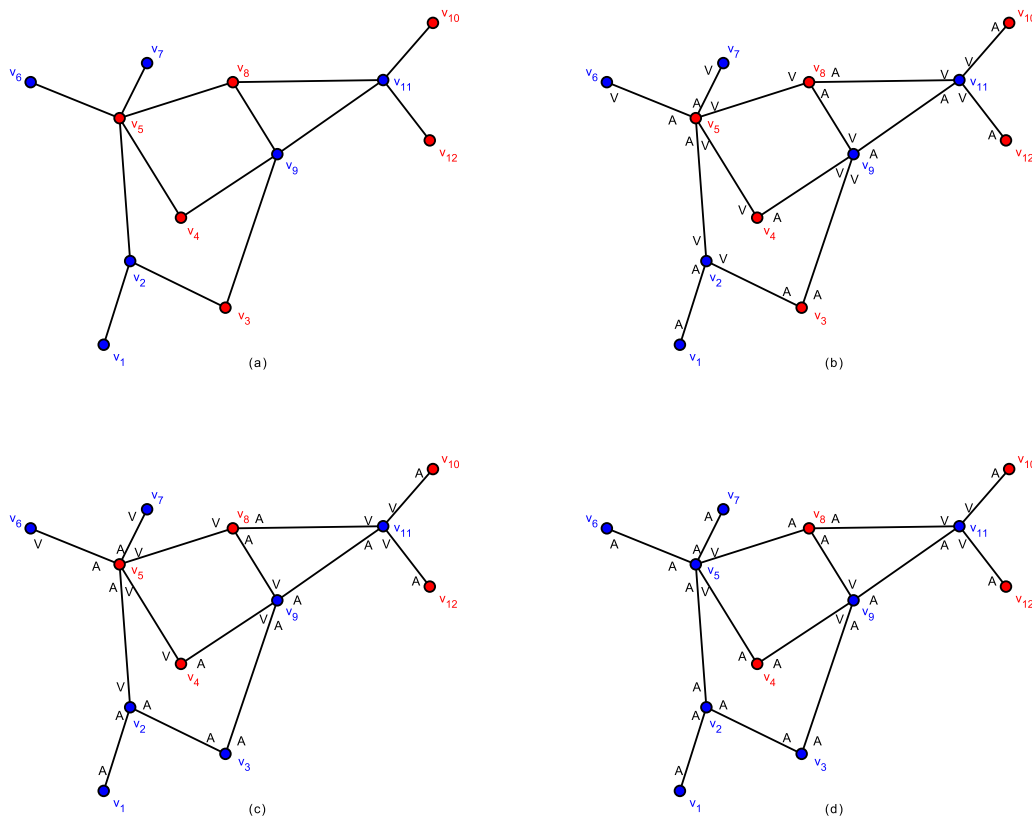


Figura 5.9: Exemplo de execução do Algoritmo de Recoloração

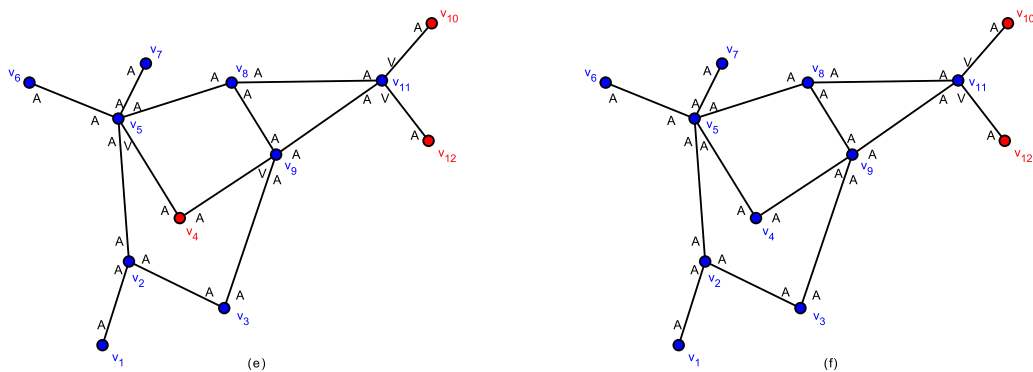


Figura 5.10: Continuação do exemplo de execução do Algoritmo de Recoloração

Observe-se que, para esta sequência, o número de nós defeituosos (nós vermelhos) diminuiu. Se a rede fosse recolorida com a sequência (v_5, v_{11}, v_9) , o número de nós defeituosos aumentaria.

Capítulo 6

Recuperação de Falhas: novos resultados

Neste capítulo serão apresentados algoritmos que permitem alterar uma rede arbitrária, por forma a que esta tenha as propriedades das novas redes definidas no capítulo 4 - redes Mi2 e redes QC. Também se apresentará um algoritmo alternativo ao Algoritmo NIC, com a mesma finalidade desse, mas cuja complexidade, em termos do número de alterações, é inferior (em vez de $O(n^2)$, tem-se $O(n)$).

Assume-se que cada nó consegue determinar o ângulo entre cada um dos seus vizinhos, relativamente a ele próprio.

O algoritmo para se recuperar de falhas - Algoritmo de Recoloração - é o considerado no capítulo anterior.

6.1 Pré-processamento da rede

Nesta secção serão apresentadas as alterações que devem ser realizadas numa rede, para se obterem estruturas que garantem a terminalidade do Algoritmo de Recoloração. Da mesma forma que no capítulo anterior, pretende-se remover o menor número possível de ligações de uma rede, contudo os algoritmos apresentados são heurísticas. Conjectura-se que, assim como no caso das redes NIC, os problemas de encontrar as soluções óptimas para cada uma destas redes são NP-difíceis.

Conforme já se referiu, as alterações feitas numa rede são apenas para fins de recoloração.

Considere-se uma rede $G = (N, L)$ com n nós.

6.1.1 Alterações para se obter uma rede NIC

No capítulo anterior, na secção 5.1, apresentou-se um algoritmo que permite alterar uma rede qualquer, por forma a que esta passe a ser uma rede NIC, com complexidade $O(n^2)$ (em termos do número de alterações). A rede era alterada através de uma remoção de ligações, incidentes nos nós convexos isolados, até que estes deixassem de ser convexos ou convexos isolados.

Uma ideia alternativa a esta baseia-se na criação de novos nós (temporários) adjacentes aos convexos isolados, de forma estratégica, para que estes deixem de ser convexos.

Considere-se então uma rede $G = (N, L)$ e um convexo isolado de G , $u \in N$. Sejam ur e us as ligações convexas de u . Suponha-se, sem perda de generalidade, que r e s são consecutivos e ordenados angularmente em torno de u no sentido horário. Considere-se um novo nó $z \notin N$, adjacente a u , entre ur e us , t.q.

$$\angle(r, u, z) = \angle(z, u, s) .$$

Tem-se então que a ligação uz vai “dividir a meio” o ângulo que implica que u seja convexo, pelo que u deixa de ser convexo e passa a ser um nó interno. Note-se que este ângulo é inferior a 360° .

Quando se adiciona um novo nó z , adjacente a u , colora-se z com:

- a cor maioritária dos vizinhos de u (excepto z), se não houver um empate.
- a cor de u , caso contrário.

Observe-se que, se a cor atribuída a z for igual à de u , então, pelo teorema 4.2.1, u nunca será recolorido.

A adição de novos nós, através da estratégia descrita acima, para além de limitar o número de recolorações de u (teorema 4.2.1), também pode levar a que um nó passe a estar cercado, conforme ilustrado na figura 6.1.

O Algoritmo NIC2 consiste em adicionar um novo nó por cada convexo isolado, adjacente a este, por forma a que os convexos isolados passem a ser nós internos, satisfazendo-se assim as propriedades de uma rede NIC.

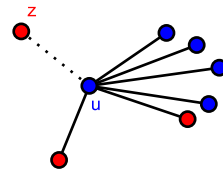


Figura 6.1: u passa a ficar cercado após a adição do novo nó z

No passo 3, quando se refere a adição de um novo nó que ainda não esteja em N' , pretende-se garantir que cada novo nó adicionado seja diferente dos nós que fazem parte de G' até ao momento. A distância entre z e u não é relevante, apenas importa garantir que a adição de z leve a que u deixe de ser um nó convexo, contudo não se deve considerar uma distância muito elevada.

Observe-se que com este algoritmo, o número de alterações da rede é sempre igual ao número de convexos isolados, logo a complexidade do algoritmo é $O(n)$.

A rede da figura 6.2 necessita de $O(n)$ alterações, com o Algoritmo NIC2, pois tem $(n - 1)/3$ nós convexos isolados. Para se generalizar esta rede a n nós, basta adicionar um nó adjacente a v_1 e dois nós adjacentes a esse novo nó, de modo a que estas duas últimas ligações sejam convexas relativamente a esse novo nó.

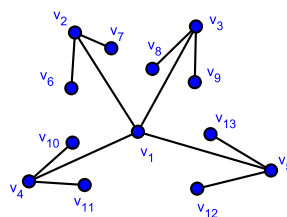


Figura 6.2: Rede NIC com $O(n)$ alterações

Embora a complexidade do algoritmo apresentado no capítulo anterior seja assintoticamente superior, existem redes em que o número de alterações é inferior usando esse algoritmo (ver rede da figura 6.3).

Algoritmo 3 Algoritmo NIC2 (executado em cada nó u)

Dados de Entrada : Rede bicromática $G = (N, L)$.

Dados de Saída : Rede bicromática $G' = (N', L')$ t.q. $L' \subseteq L$, $N \subseteq N'$ e G' é uma rede NIC.

Passo 1. Classificar todas as ligações incidentes em u com DESCONHECIDO.

Passo 2. Se u não tiver recebido nenhuma mensagem e ainda houver ligações com a marca DESCONHECIDO, u envia uma mensagem para todos os seus vizinhos informando-os da convexidade da ligação correspondente (CONVEXO ou NÃO-CONVEXO), relativamente a u .

Passo 3. Se u tiver recebido uma mensagem, processar a mensagem de acordo com o seu tipo:

CONVEXO: a ligação a partir da qual a mensagem foi recebida, uv , é marcada como convexa. Se a ligação não tiver sido marcada como convexa anteriormente, enviar uma mensagem a v indicando a convexidade de uv relativamente a u .

NÃO-CONVEXO: a ligação a partir da qual a mensagem foi recebida, uv , é marcada como não-convexa. Se uv é convexa relativamente a u , e u é um convexo isolado, então adiciona-se um novo nó $z \notin N'$ adjacente a u , t.q. z divide o ângulo, que define a convexidade de u , a meio.

Passo 4. Voltar ao passo 2.

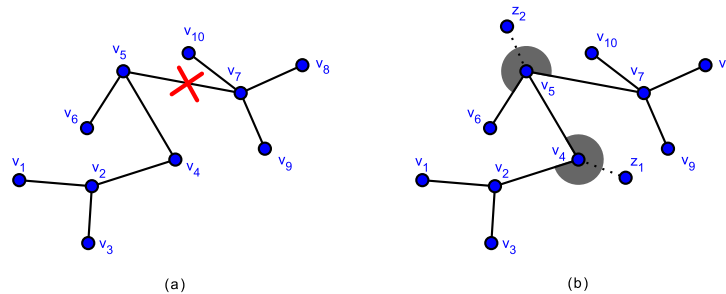


Figura 6.3: Rede com menos alterações usando o Algoritmo NIC (a) do que com o Algoritmo NIC2 (b)

Na figura 6.3, tem-se ilustrada uma rede com dois nós convexos isolados: v_4 e v_5 . A remoção da ligação v_5v_7 (figura 6.3 (a)) implica que, tanto o nó v_4 como o nó v_5 deixem de ser convexos isolados, passando a partilhar uma ligação convexa relativamente a ambos (v_5v_4). Obtém-se assim uma rede NIC. Na figura 6.3 (b), verifica-se que, usando o Algoritmo NIC2, é necessária a adição de dois novos nós, z_1 e z_2 , para que a rede passe a ser NIC.

6.1.2 Alterações para se obter uma rede NIC&Mi2

O Algoritmo Mi2 recebe uma rede e altera-a para que esta passe a ser uma rede Mi2. Para tal, elimina as ligações que tenham ambos os extremos internos, onde, pelo menos um destes, é adjacente a mais do que dois nós internos. Este algoritmo termina quando nenhuma das ligações está marcada com DESCONHECIDO e todas as mensagens já foram processadas.

A complexidade, em termos do número de alterações, do algoritmo é $\theta(n^2)$, isto porque apenas se removem ligações (uma rede tem $O(n^2)$ ligações) e a rede ilustrada na figura 6.4 necessita de $O(n^2)$ remoções de ligações para satisfazer as propriedades de uma rede Mi2.

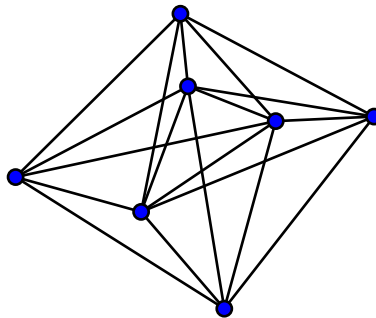


Figura 6.4: Rede (com $n=8$) cujo número de alterações é o pior caso do Algoritmo Mi2

Observe-se que a rede pode facilmente ser generalizada para $n > 7$ nós, adicionando-se, para tal, apenas nós internos adjacentes a todos os nós da rede. Cada nó interno está ligado a $n - 5$ nós internos, pelo que é necessário removerem-se $n - 7$ destas ligações (pela definição de rede Mi2). Como existem $n - 4$ nós internos, vem que o número total de remoções é

$$\frac{(n - 4)(n - 7)}{2} = O(n^2).$$

Algoritmo 4 Algoritmo Mi2 (executado em cada nó u)

Dados de Entrada : Rede bicromática $G = (N, L)$.

Dados de Saída : Rede bicromática $G' = (N, L')$ t.q. $L' \subseteq L$ e G' é uma rede Mi2.

Passo 1. Classificar todas as ligações incidentes em u com DESCONHECIDO.

Passo 2. Se u não tiver recebido nenhuma mensagem e ainda houver ligações com a marca DESCONHECIDO, u envia uma mensagem para todos os seus vizinhos informando-os se é ou não um nó interno (INTERNO ou NÃO-INTERNO).

Passo 3. Se u tiver recebido uma mensagem, processar a mensagem de acordo com o seu tipo:

INTERNO: a ligação a partir da qual a mensagem foi recebida, uv , é marcada como interna. Se u é interno e já tinha duas ligações incidentes marcadas como internas, u remove uv e envia a mensagem REMOVE a v . Caso u deixe de ser interno, envia a mensagem NÃO-INTERNO aos seus vizinhos.

NÃO-INTERNO: a ligação a partir da qual a mensagem foi recebida, uv , é marcada como não-interna.

REMOVE: u remove a ligação, uv , pela qual a mensagem foi recebida. Se u era interno e deixou de o ser, envia a mensagem NÃO-INTERNO aos seus vizinhos.

Passo 4. Voltar ao passo 2.

Seja $G = (N, L)$ uma rede qualquer. Para se alterar G , por forma a que esta satisfaça as propriedades de uma rede NIC&Mi2, tem-se de:

1. alterar G para que passe a ser uma rede Mi2, obtendo-se assim G' ;
2. alterar G' para que passe a ser uma rede NIC, obtendo-se assim G'' .

Note-se que a ordem pela qual se efectuam as alterações é extremamente importante. O Algoritmo Mi2 elimina ligações entre pares de nós internos, quando um destes tem mais do que dois vizinhos internos, o que pode levar a que nós que eram internos passem a ser convexos isolados. No entanto, quando se eliminam os convexos isolados, pelo Algoritmo NIC, não se criam novos nós internos: se um nó não era interno, eliminando ligações incidentes neste, este não passará a interno.

Contudo, pelo Algoritmo NIC2, um nó convexo isolado passa a interno. Este algoritmo pode ser aplicado, sem haver necessidade de se analisarem os nós internos daí resultantes, pois, embora a rede resultante possa não satisfazer as propriedades de uma rede Mi2, estes nós nunca poderão ser recoloridos mais do que duas vezes (teorema 4.2.1), não afectando assim a complexidade do número de recolorações da rede

resultante.

6.1.2.1 Exemplificação do Algoritmo Mi2

Seja $G = (N, L)$ a rede ilustrada na figura 6.5. Note-se que G não é uma rede Mi2: os nós v_4, v_7, v_8, v_9 são internos e $v_4v_7, v_4v_8, v_4v_9, v_9v_7, v_9v_8 \in L$, i.e, $mi(v_4) = mi(v_9) = 3 > 2$.

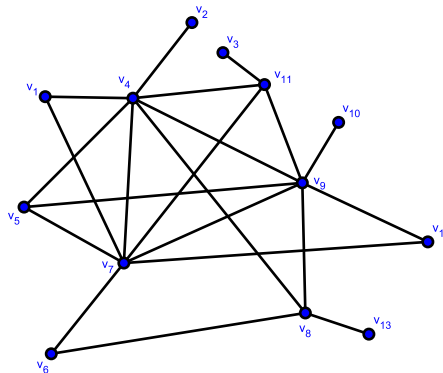


Figura 6.5: Rede inicial

Uma vez que as classificações das ligações como não-internas não é relevante para a execução do algoritmo (apenas interessam para se decidir quando este termina), exemplificar-se-á unicamente as classificações como internas.

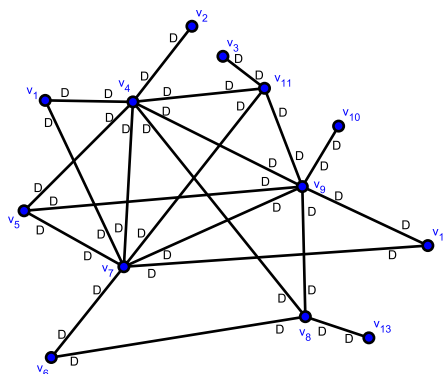


Figura 6.6: Classificar todas as ligações com D (desconhecidas)

Aplicando o Algoritmo Mi2, primeiro passo, classificam-se todas as ligações como DESCONHECIDAS - D.

Executando agora o algoritmo no nó interno v_4 , envia-se a mensagem INTERNO a todos os seus vizinhos, que, por sua vez, classificam as ligações correspondentes como internas (I). Os nós internos v_7 , v_8 e v_9 , ao receberem a mensagem de v_4 , não necessitam de eliminar nenhuma ligação pois, por enquanto, só têm uma ligação marcada como interna.

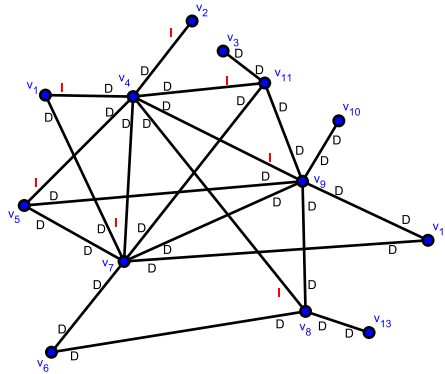


Figura 6.7: Execução do algoritmo no nó v_4 e classificação das ligações incidentes neste por parte dos seus vizinhos

Posteriormente executa-se o algoritmo nos nós v_8 e v_7 , fazendo-se a respectiva classificação das ligações por parte dos vizinhos destes, conforme ilustrado nas figuras 6.8 e 6.9.

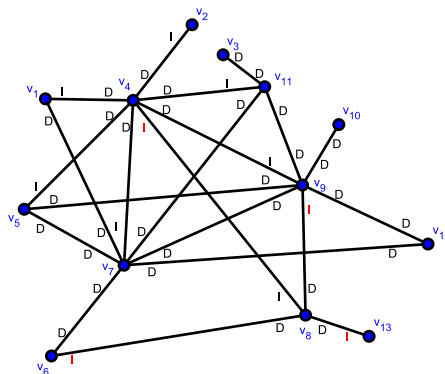


Figura 6.8: Execução do algoritmo no nó v_8 e classificação das ligações incidentes neste por parte dos seus vizinhos

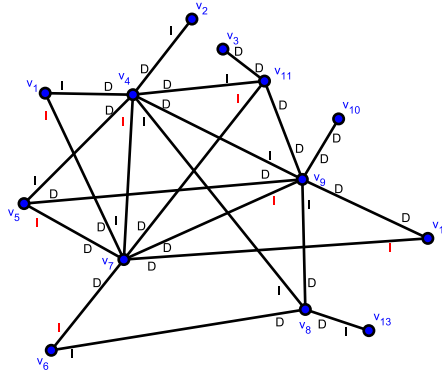


Figura 6.9: Execução do algoritmo no nó v_7 e classificação das ligações incidentes neste por parte dos seus vizinhos

O nó v_9 tem agora três ligações marcadas como internas - v_9v_8 , v_9v_7 e v_9v_4 -, portanto remove a última ligação que classificou - v_7v_9 -, mantendo assim os critérios das redes Mi2.

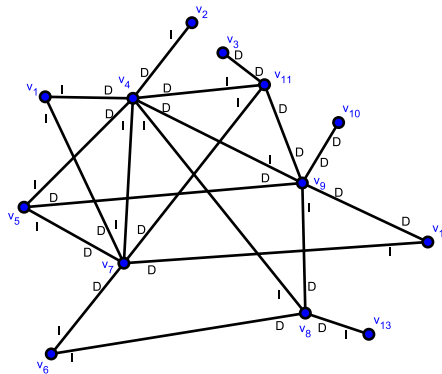


Figura 6.10: Eliminação da ligação v_7v_9

Posteriormente, o nó v_9 envia uma mensagem aos seus vizinhos, informando-os que é interno e estes classificam as ligações correspondentes. O nó v_4 marca, então, a terceira ligação - v_4v_9 - como interna e, conseqüentemente elimina-a.

Observe-se que agora já não existem mais nós internos adjacentes a mais do que dois nós internos. Obtém-se assim a rede final, ilustrada na figura 6.13.

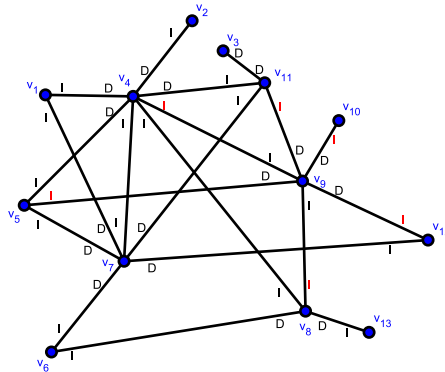


Figura 6.11: Execução do algoritmo no nó v_9 e classificação das ligações incidentes neste por parte dos seus vizinhos

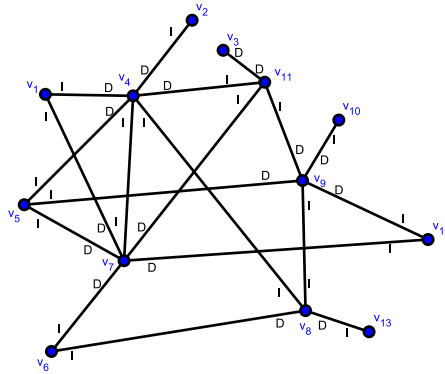


Figura 6.12: Eliminação da ligação v_4v_9

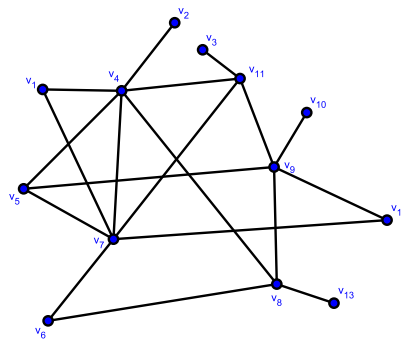


Figura 6.13: Rede obtida após a execução do Algoritmo Mi2

Ao invés de se terem removido duas ligações, podia-se ter removido apenas a ligação v_4v_9 . Assim, tanto v_4 como v_9 passariam a ter multiplicidade inferior a dois. A razão de se ter removido uma ligação a mais deve-se à ordem pela qual se considerou a execução do algoritmo.

6.1.3 Alterações para se obter uma rede NIC&QC

O Algoritmo QC recebe uma rede e altera-a, para que esta passe a ser uma rede QC. Se u é um nó interno e todos os seus vizinhos são nós internos, então adiciona-se um novo nó $z \notin N'$, adjacente a u , onde N' representa o conjunto de todos os nós da rede até ao momento. Desta forma, todos os nós internos são adjacentes a pelo menos um nó não interno, v . Eliminam-se então as ligações necessárias para que u seja quasiconvexo relativamente a v . Note-se que u pode ser um nó quasiconvexo e mesmo assim, quando o algoritmo for executado neste nó, poderão ser removidas ligações que lhe são incidentes, isto porque um seu vizinho elimina uma ligação incidente em u ao passar a quasiconvexo.

No passo 5 do Algoritmo QC, considera-se que existem os nós adjacentes a u , u_1 e u_3 , contíguos a v no sentido anti-horário e no sentido horário, respectivamente. O teorema 4.2.6 garante tal existência. Este algoritmo termina quando nenhuma das ligações está marcada com DESCONHECIDO e todas as mensagens já foram processadas.

A complexidade, em termos do número de alterações, do algoritmo é $O(n^2)$, pois uma rede tem $O(n^2)$ ligações, que poderão ser removidas, e poderão ser adicionados $O(n)$ novos nós.

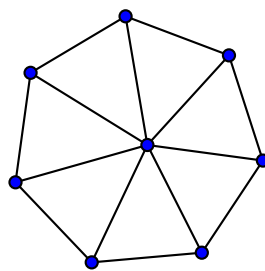


Figura 6.14: Rede cujo número de alterações é o pior caso do Algoritmo QC

Algoritmo 5 Algoritmo QC (executado em cada nó u)

Dados de Entrada : Rede bicromática $G = (N, L)$.

Dados de Saída : Rede bicromática $G' = (N', L')$ t.q. $L' \subseteq L$, $N \subseteq N'$ e G' é uma rede QC.

Passo 1. Classificar todas as ligações incidentes em u com DESCONHECIDO.

Passo 2. Se u não tiver recebido nenhuma mensagem e ainda houver ligações com a marca DESCONHECIDO, u envia uma mensagem para todos os seus vizinhos informando-os se é ou não um nó interno (INTERNO ou NÃO-INTERNO).

Passo 3. Se u tiver recebido uma mensagem, processar a mensagem de acordo com o seu tipo:

INTERNO: a ligação a partir da qual a mensagem foi recebida, uv , é marcada como interna. Se u é interno e todas as ligações incidentes neste estão marcadas, sem que nenhuma destas esteja classificada como quasiconvexa,

- caso não existam ligações marcadas com não-interno, adiciona-se um novo nó $z \notin N'$ adjacente a u , marca-se uz como quasiconvexa, considera-se $v = z$,
- caso contrário, considera-se uma das ligações marcadas com não-interno, uv , e marca-se esta como quasiconvexa,

e avança-se para o passo 5.

NÃO-INTERNO: a ligação a partir da qual a mensagem foi recebida, uv , é marcada como não-interna. Se u é interno e ainda não tem nenhuma ligação marcada como quasiconvexa,

- caso u seja quasiconvexo relativamente a v , marca uv como quasiconvexa.
- caso contrário, se u já tem todas as ligações marcadas, marca uv como quasiconvexa e avança para o passo 5.

REMOVER: u remove a ligação, uv , pela qual a mensagem foi recebida. Se u era interno e deixou de o ser, envia a mensagem NÃO-INTERNO aos seus vizinhos.

Passo 4. Voltar ao passo 2.

Passo 5. Sejam u_1 e u_3 os vizinhos de u contíguos a v no sentido anti-horário e no sentido horário, respectivamente. Se $\angle(u_1, u, v) + \angle(v, u, u_3) < 180^\circ$, u remove uu_3 e envia a mensagem REMOVER a u_3 , senão envia a mensagem NÃO-INTERNO a todos os seus vizinhos no caso de ter deixado de ser interno e volta ao passo 2. Repetir o passo 5 até que a condição não seja satisfeita.

Na figura 6.14 tem-se ilustrada parte de uma rede (apenas com um nó interno), que necessita de $O(n^2)$ alterações para passar a ser uma rede QC.

Seja $G = (N, L)$ uma rede com m nós convexos (m ímpar), que definem um polígono regular de m lados, e com $2m$ nós internos, situados no interior da zona central definida pelas diagonais do polígono, adjacentes (unicamente) a todos os nós convexos. Observe-se que $n = 3m$.

Seja u um nó na fronteira da zona central definida pelas diagonais do polígono e denote-se esta zona por C (a figura 6.15 ilustra como formar C). Pretende-se determinar $v_1, v_2, v_3 \in N_G(u)$, ordenados angularmente em torno de u no sentido horário, tais que $\angle(v_1, u, v_2) + \angle(v_2, u, v_3) \geq 180^\circ$ e o número de ligações incidentes em u situadas entre uv_1 e uv_3 seja mínimo.

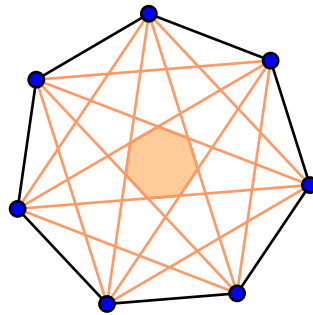


Figura 6.15: Diagonais do polígono e zona central

Como u está na fronteira de C , tem-se que $\exists v_1, v_3 \in N_G(u)$, t.q. $\angle(v_1, u, v_3) = 180^\circ$ (ver figura 6.16). O segmento de recta v_1v_3 divide o polígono em duas partes, ficando $(m - 1)/2 - 1$ nós de um dos lados e $(m - 1)/2$ nós do outro. Para que u seja um nó quasiconvexo tem-se então de eliminar, no mínimo, $(m - 1)/2 - 1$ ligações incidentes neste.

Uma vez que, em G , todos os nós internos estão situados no interior de C , tem-se de remover uma ligação a mais do que se estes estivessem na fronteira, pois é necessário mais um nó entre v_1 e v_3 do que anteriormente para satisfazer a condição $\angle(v_1, u, v_2) + \angle(v_2, u, v_3) \geq 180^\circ$.

Consequentemente, o número total de alterações é

$$2m \left(\frac{m - 1}{2} \right) = m^2 - m = \frac{n^2}{9} - \frac{n}{3} = O(n^2).$$

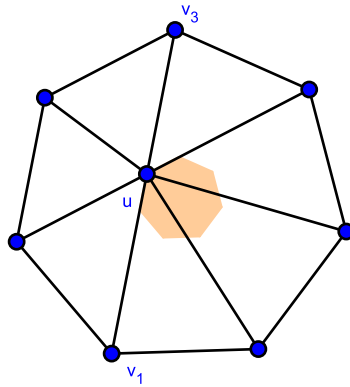


Figura 6.16: Nó u na fronteira de C e $\angle(v_1, u, v_3) = 180^\circ$

Para se alterar uma rede $G = (N, L)$, com a finalidade de esta satisfazer as propriedades de uma rede NIC&QC (propriedades de uma rede NIC e de uma rede Mi2), tem-se de

1. alterar G para que passe a ser uma rede QC, obtendo-se assim G' ;
2. alterar G' para que passe a ser uma rede NIC, obtendo-se assim G'' .

Da mesma forma que na subsecção anterior, a ordem das alterações é extremamente importante. O Algoritmo QC elimina ligações incidentes num nó interno, até que este seja um nó quasiconvexo, relativamente a um nó não interno. Estas alterações podem levar a que nós que eram internos passem a ser convexas, que por sua vez poderão ser isolados. No entanto, quando se eliminam os convexas isolados, pelo Algoritmo NIC, não se criam novos nós internos e, pelo Algoritmo NIC2, um nó convexo isolado passa a quasiconvexo, relativamente ao novo nó adicionado, mantendo-se as propriedades de uma rede NIC&QC.

6.1.3.1 Exemplificação do Algoritmo QC

Considere-se a rede $G = (N, L)$ ilustrada na figura 6.17. G não é uma rede QC: os nós v_2, v_6, v_8, v_9 e v_{11} são internos, v_2 é quasiconvexo relativamente a v_3 e a v_1 , v_6 é quasiconvexo relativamente a v_5 e a v_7 , v_{11} é quasiconvexo relativamente a v_{12} , mas v_8 e v_9 não são quasiconvexos relativamente a um nó não interno.

Note-se que v_8 é quasiconvexo relativamente a v_2 , mas v_2 é um nó interno, consequentemente não satisfaz as condições das redes QC.

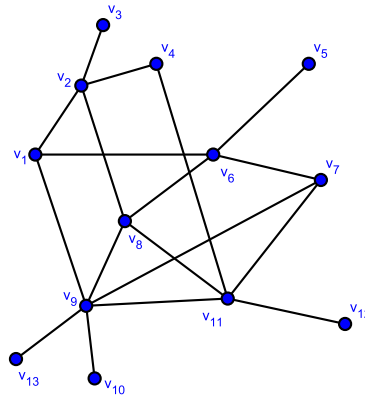


Figura 6.17: Rede inicial

Inicia-se então o algoritmo, marcando todas as ligações como desconhecidas - D.

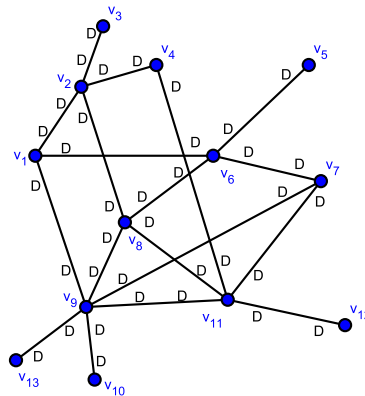


Figura 6.18: Classificar todas as ligações com D (desconhecidas)

Posteriormente, executa-se o algoritmo no nó v_4 que, como não é interno, envia a mensagem NÃO-INTERNO aos seus vizinhos v_2 e v_{11} que, por sua vez classificam a ligação pela qual receberam a mensagem como não-interna - NI.

A figura 6.20 ilustra a execução no nó v_{12} , que envia a mensagem NÃO-INTERNO a v_{11} . Como v_{11} é quasiconvexo relativamente a v_{12} e v_{12} não é interno, a ligação é marcada como quasiconvexa - QC.

A figura 6.21 mostra a classificação de todas as ligações incidentes em v_9 , considerando para tal a execução em todos os vizinhos deste, sendo $v_{10}, v_{11}, v_{13}, v_7, v_1, v_8$ a ordem pela qual estes foram analisados. Os nós internos v_2 e v_6 marcam, respectivamente, as ligações v_2v_1 e v_6v_7 como quasiconvexas.

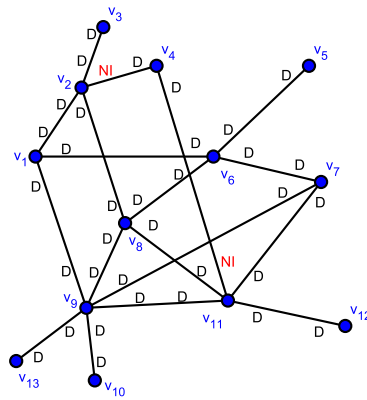


Figura 6.19: Execução do algoritmo no nó v_4 e classificação das ligações incidentes neste por parte dos seus vizinhos

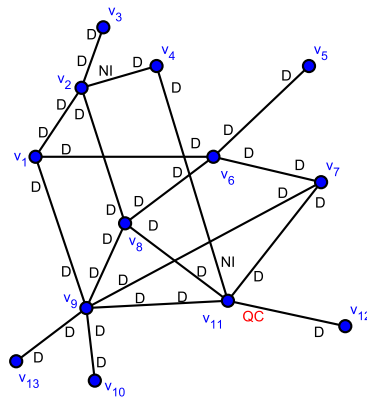


Figura 6.20: Execução do algoritmo no nó v_{12} e classificação de $v_{11}v_{12}$ por parte de v_{11}

Uma vez que a última mensagem recebida por v_9 foi de um nó interno, e v_9 já tinha todas as outras ligações marcadas, mas nenhuma como quasiconvexa, v_9 avança para o passo 5, com $v = v_{13}$ e marca v_9v_{13} como quasiconvexa. v_{10} e v_1 são os vizinhos de v_9 , contíguos a v_{13} , nos sentidos anti-horário e horário, respectivamente.

Como $\angle(v_{10}, v_9, v_1) < 180^\circ$, elimina-se a ligação v_9v_1 . Observe-se que v_9 passou a ser quasiconvexo relativamente a v_{13} .

Posteriormente, executa-se o algoritmo nos restantes vizinhos de v_8 , que ainda não tinham sido classificados por parte deste.

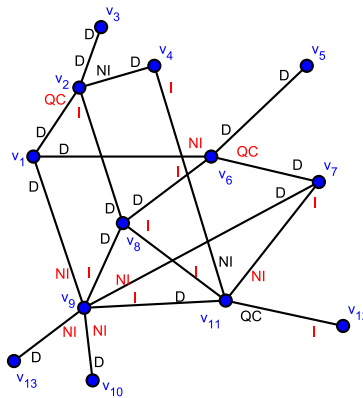


Figura 6.21: Execução do algoritmo em todos os vizinhos de v_9 e respectivas classificações

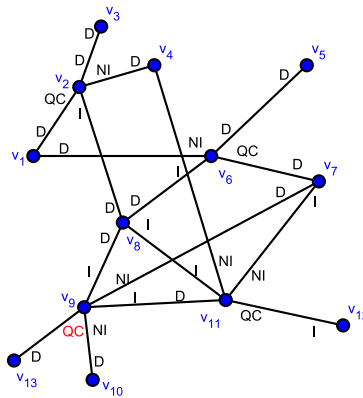


Figura 6.22: Reclassificação de v_9v_{13} por parte de v_9 e eliminação de v_1v_9

O nó v_8 tem todas as ligações incidentes nele marcadas como internas - I -, pelo que adiciona um novo nó, z_1 e ao efectuar o passo 5, elimina a ligação v_8v_2 , ficando então quasiconvexo relativamente a z_1 .

Todos os nós internos têm uma ligação marcada como quasiconvexa, pelo que a rede não será alterada, faltando apenas classificar as ligações que ainda têm a marca desconhecido. Na figura 6.25 tem-se ilustrada a rede final.

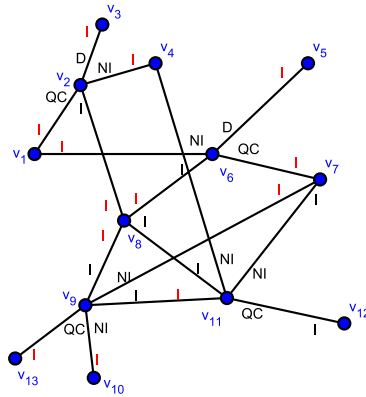


Figura 6.23: Execução do algoritmo nos nós v_2 , v_6 e v_9

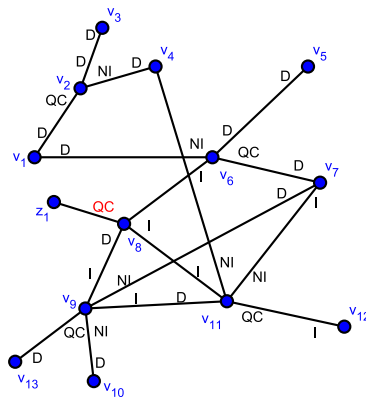


Figura 6.24: Adição de um novo nó, z_1 , adjacente a v_8 e eliminação da ligação v_8v_2

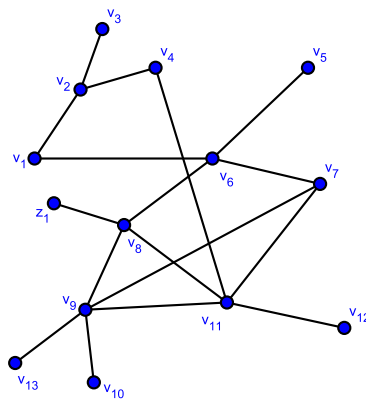


Figura 6.25: Rede obtida após a execução do Algoritmo QC

Capítulo 7

Resultados Experimentais

Neste capítulo serão apresentadas algumas experiências realizadas com o objectivo de testar o desempenho do algoritmo de Recoloração Geométrica e comparar as três principais estruturas de redes apresentadas ao longo desta tese: redes NIC, NIC&Mi2 e NIC&QC. Para tal serão usados dois métodos distintos da Recoloração Geométrica, designados por Recoloração Combinatória e Recoloração Cheating [13]. Na Recoloração Combinatória, um nó é recolorido sempre que a maioria dos seus vizinhos seja da cor oposta à sua (considerando-se nesse caso que o nó estava cercado). O conceito de cercado varia consoante o método considerado, pelo que o Algoritmo de Recoloração descrito anteriormente pode ser aplicado em ambos os métodos. Note-se que, na Recoloração Combinatória não há necessidade de alterar a rede em análise pois, para este método, não existem redes com sequências de recoloração infinita aquando do modelo sequencial (após uma recoloração, o número de ligações magenta da rede diminui sempre, o que implica que o comprimento das sequências de recoloração tenha complexidade $O(n^2)$, onde n é o número de nós) [13]. A Recoloração Cheating consiste na execução da Recoloração Geométrica, seguida pela Recoloração Combinatória, seguidas da Recoloração Geométrica e, novamente, da Recoloração Combinatória, de tal forma que muda-se para o próximo método quando o anterior termina.

Em [13] utiliza-se também um outro método localizado, denominado por Recoloração Híbrida, que consiste em recolorir um nó sempre que este tenha mais vizinhos da cor oposta à sua própria cor e, no caso de haver um empate, este será recolorido se o seu ângulo magenta for superior a 180° . Faz-se assim uma combinação das Recolorações Combinatória e Geométrica. Contudo os resultados obtidos para esta foram semelhantes aos da Recoloração Combinatória, não havendo melhorias significativas,

pelo que não foi considerada neste trabalho.

As conclusões apresentadas para as redes NIC e para a Recoloração Cheating são semelhantes às obtidas em [13]. O código base utilizado é da autoria de Rodriguez, sendo que foram implementados os algoritmos que permitem alterar redes aleatórias para redes QC e redes Mi2. O algoritmo utilizado na alteração de uma rede para uma rede NIC foi o Algoritmo NIC.

Geraram-se três amostras de 1000 redes aleatórias com, respectivamente, 50, 75 e 100 nós numa grelha de quadrados 100×100 , de tal forma que dois nós estão ligados se o quadrado da distância euclidiana for inferior a 15, 20, 25 ou 30 vezes a largura de um quadrado da grelha (unidades da grelha), obtendo-se $4 \times 1000 = 4000$ redes resultantes. Estas redes são uma boa aproximação das redes sem fios que usam sinais rádio como forma de comunicação [13]. Em cada uma destas redes induziram-se falhas nos nós cuja distância (euclidiana) a um ponto gerado aleatoriamente fosse inferior a 14, 16, 18, 20, 22 ou 24 unidades da grelha, obtendo-se assim $6 \times 4000 = 24000$ redes distintas. Tem-se então um total de 24000 redes com 50 nós, 24000 com 75 nós e 24000 com 100 nós. Geraram-se apenas três amostras de redes devido ao elevado tempo de execução dos algoritmos para cada uma das amostras.

Os valores escolhidos para estas distâncias (assim como em [13]), no caso da ligação dos nós, permitem que a rede seja k -conexa com grande probabilidade para valores de $k = 1, \dots, 10$, onde 15 corresponde a $k = 1$ e 30 a $k = 10$, e as restantes distâncias correspondem aos valores intermédios de k . Em [13], utilizaram-se valores entre 10 e 20 no alcance dos erros. Contudo, nesta dissertação optou-se por variar estes entre 14 e 24, uma vez que as diferenças entre os métodos são mais significativas neste intervalo.

Na figura 7.1 encontra-se uma rede com 100 nós, que foi gerada pelo programa, cujos nós estão ligados se a distância entre eles, calculada conforme se descreveu anteriormente, for inferior a 25 (unidades de grelha). Os nós defeituosos estão coloridos de vermelho, enquanto que os saudáveis estão de verde e todas as ligações estão coloridas com cor rosa. Embora algumas destas cores não correspondam aos padrões apresentados nesta dissertação, optou-se por não alterar o programa, pois este é apenas usado para determinar estatisticamente alguns valores que são apresentados de seguida neste capítulo. Os nós que se consideram defeituosos encontram-se a uma distância inferior a 16 de um ponto gerado aleatoriamente.

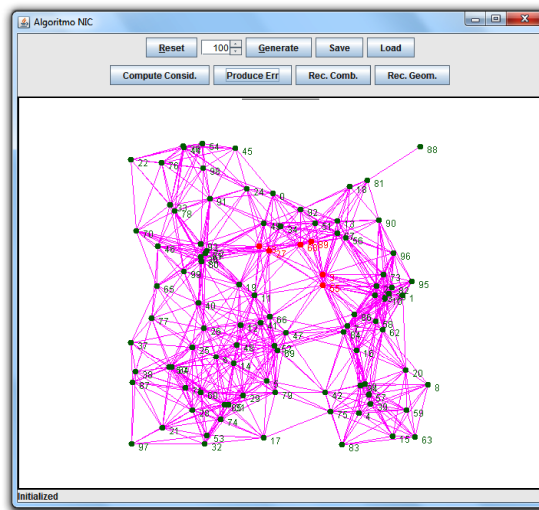


Figura 7.1: Rede com 100 nós e raios de alcance da transmissão e das falhas de 25 e 16, respectivamente

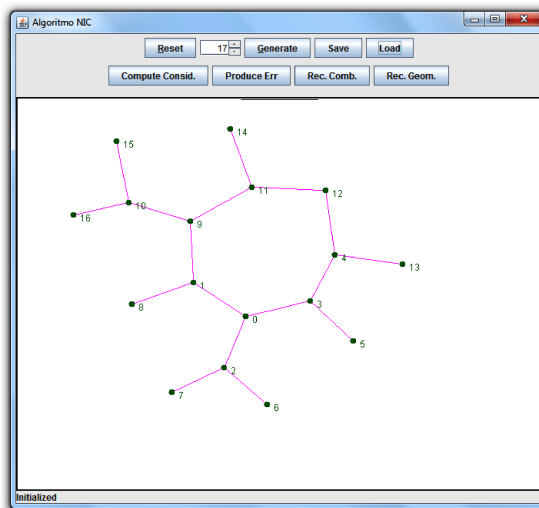


Figura 7.2: Rede inicial

Por forma a exemplificar a execução do programa, para cada uma das estruturas de redes, considerou-se a rede da figura 7.2.

Nesta rede apenas o nó 12 é um convexo isolado e utilizando duas vezes o Algoritmo NIC obtém-se duas redes distintas, que correspondem à eliminação das ligações convexas relativamente a 12 (ver figura 7.3). Observe-se que na rede resultante as ligações eliminadas encontram-se visíveis, mas coloridas a cinzento. Em todos os algoritmos implementados, a ordem de execução dos nós é aleatória, assemelhando-se assim a algoritmos assíncronos, o que permite que se obtenham resultados distintos com o mesmo algoritmo.

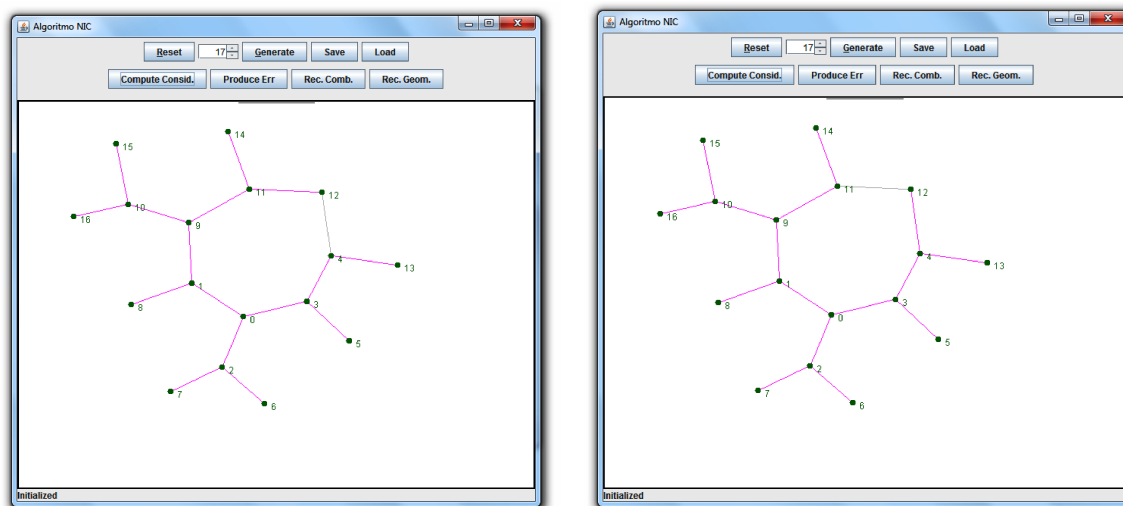


Figura 7.3: Redes obtidas com o Algoritmo NIC

Induzindo erros numa das redes NIC, obteve-se a rede ilustrada na figura 7.4. Nesta rede a aplicação do método de Recoloração Combinatória leva a que todos os nós passem a saudáveis, pois ambos os nós defeituosos, 0 e 3, têm um vizinho da sua a cor e dois da cor oposta e nenhum dos nós saudáveis tem mais do que um vizinho defeituoso. No entanto, a aplicação do método de Recoloração Geométrica não altera em nada a rede, neste caso não existem nós cercados.

Considerando a mesma rede inicial, aplicou-se os algoritmos QC e NIC, por esta ordem, e obteve-se uma rede NIC&QC (ver figura 7.5). Nesta rede foram adicionados dois novos nós, 17 e 18, pois os nós internos 0 e 9 não tinham nenhum vizinho não interno, removendo as ligações no sentido anti-horário, suficientes para que estes nós passem a quasiconvexos relativamente aos novos nós.

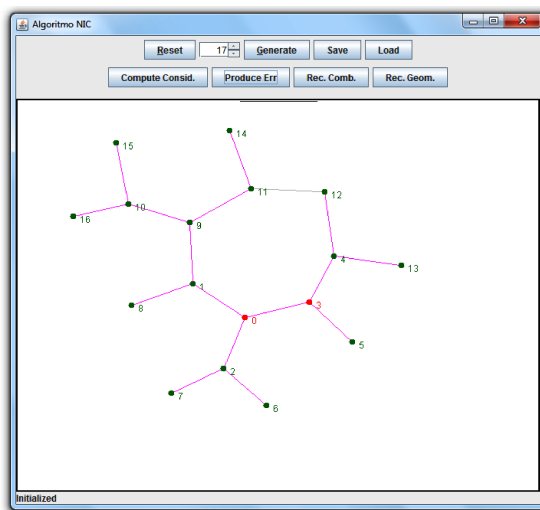


Figura 7.4: Indução de erros

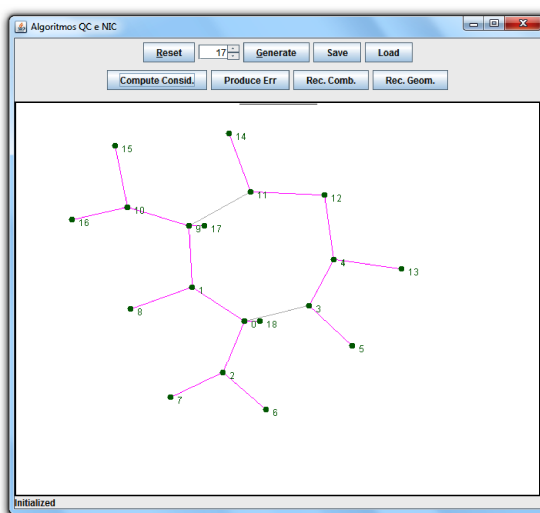


Figura 7.5: Rede alterada com os algoritmos QC e NIC

Na figura 7.6 encontra-se duas redes NIC&QC, obtidas a partir da rede inicial eliminando uma das ligações incidentes em cada um dos nós internos 0 e 9, pois estes eram adjacentes a três nós internos.

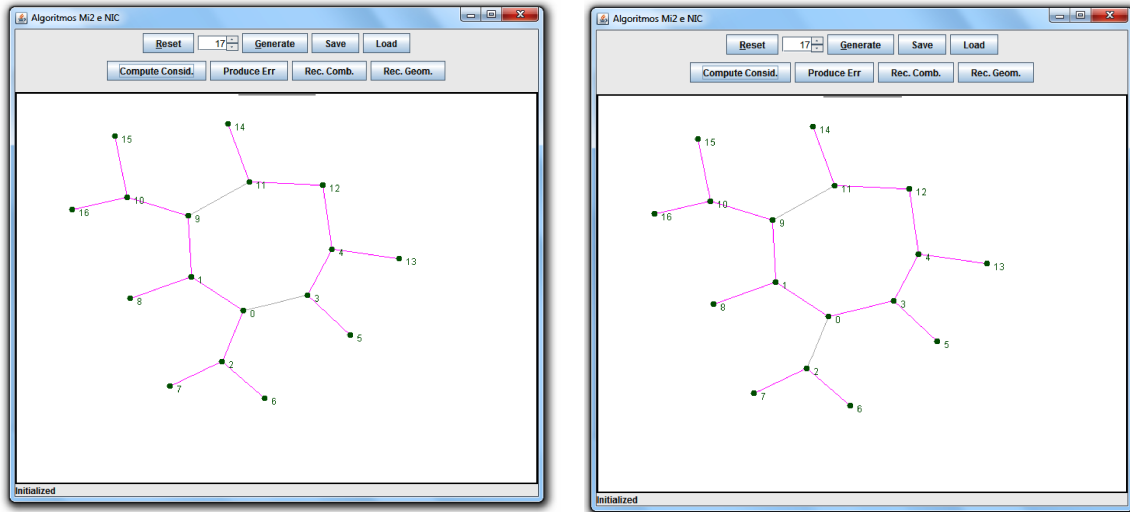


Figura 7.6: Rede alterada com os algoritmos Mi2 e NIC

Em cada um dos gráficos seguintes apresentam-se as médias dos valores obtidos para as amostras. Determinaram-se os respectivos erros padrão (dados por s/\sqrt{N} , onde s é o desvio padrão da amostra e N é o tamanho da amostra), que correspondem aos desvios padrões da distribuição das médias das amostras [15]. Contudo estes não serão apresentados pois são muito pequenos, simplificando-se assim os gráficos.

Note-se que as escalas apresentadas em cada gráfico variam, isto para que se possa comparar melhor os valores representados em cada um dos gráficos.

7.1 Comparações entre o desempenho das várias redes na Recuperação de Falhas

Por forma a se poder comparar o desempenho na Recuperação de Falhas das três estruturas de redes mencionadas, aplicaram-se os diferentes métodos recoloração em cada uma das redes da amostra das redes com 100 nós, nomeadamente Recoloração Combinatória (RComb), Recoloração Geométrica (RGeom) e Recoloração Cheating (RCheat).

Na figura 7.7 têm-se quatro gráficos que ilustram a Recuperação de Falhas nas redes NIC. A partir do primeiro gráfico conclui-se que existe uma maior dificuldade em se recuperar de falhas através da Recoloração Geométrica, pois o número de nós defeituosos após a aplicação do algoritmo de recoloração diminui menos do que com os outros métodos.

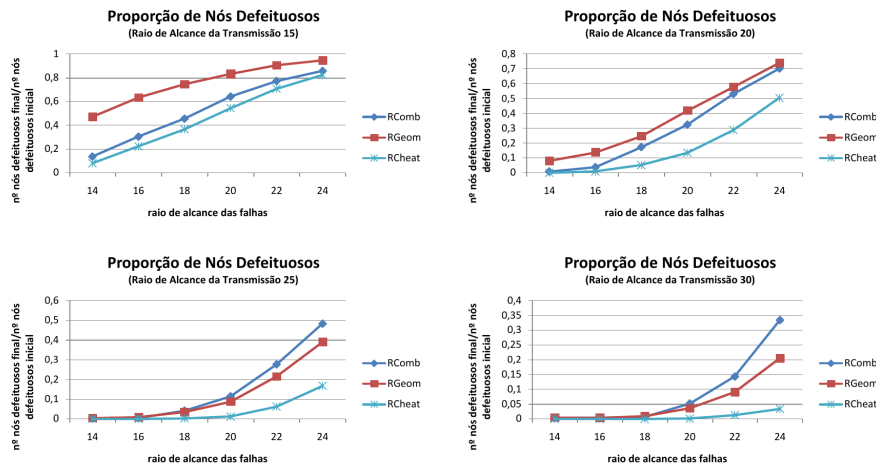


Figura 7.7: Proporção de nós defeituosos após a aplicação de cada um dos métodos, variando os raios de alcance da transmissão e das falhas, para as redes NIC

No entanto, conforme se aumenta o raio de alcance da transmissão, o número de nós defeituosos (após a aplicação do algoritmo de recoloração) tende a ser inferior usando o método de Recoloração Geométrica, relativamente ao de Recoloração Combinatória.

Nas figuras 7.8 e 7.9, encontram-se gráficos que ilustram a Recuperação de Falhas nas redes NIC&Mi2 e nas redes NIC&QC, respectivamente. Em ambas as redes, a Recoloração Geométrica tem sempre o pior desempenho, tanto para níveis de transmissão como para níveis de falhas distintos.

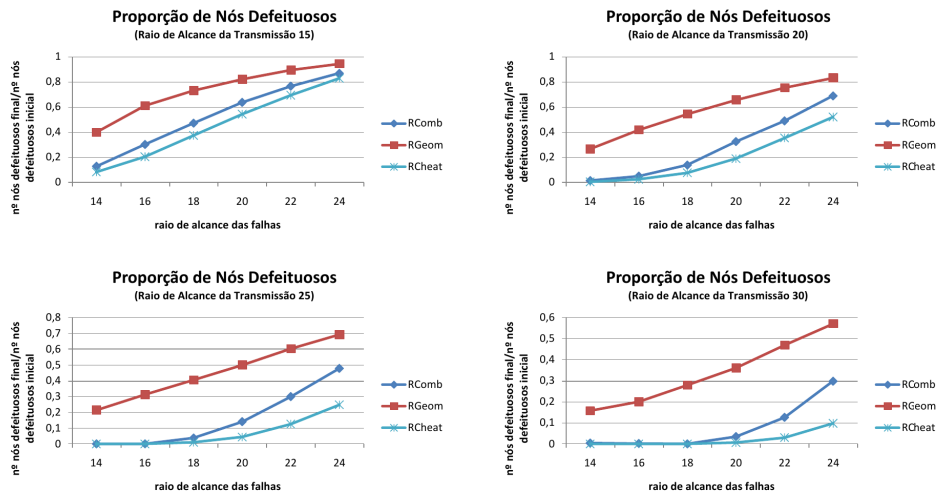


Figura 7.8: Proporção de nós defeituosos após a aplicação de cada um dos métodos, variando os raios de alcance da transmissão e das falhas, para as redes NIC&Mi2

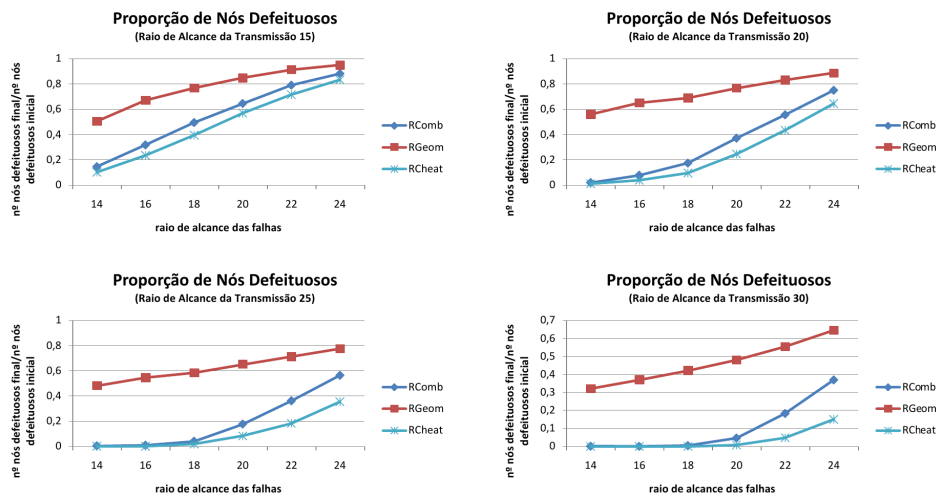


Figura 7.9: Proporção de nós defeituosos após a aplicação de cada um dos métodos, variando os raios de alcance da transmissão e das falhas, para as redes NIC&QC

Comparando agora a Recuperação de Falhas, através da Recoloração Geométrica, em cada uma das estruturas de redes, verifica-se que, pela figura 7.10, esta é melhor nas redes NIC e pior nas redes NIC&QC. Nas três estruturas obtêm-se melhores resultados para raios de transmissão mais elevados e para raios de falhas mais pequenos.

Uma vez que as diferenças na Recuperação de Falhas existentes entre as várias estruturas, aquando da Recoloração Combinatória, devem-se apenas às diferentes

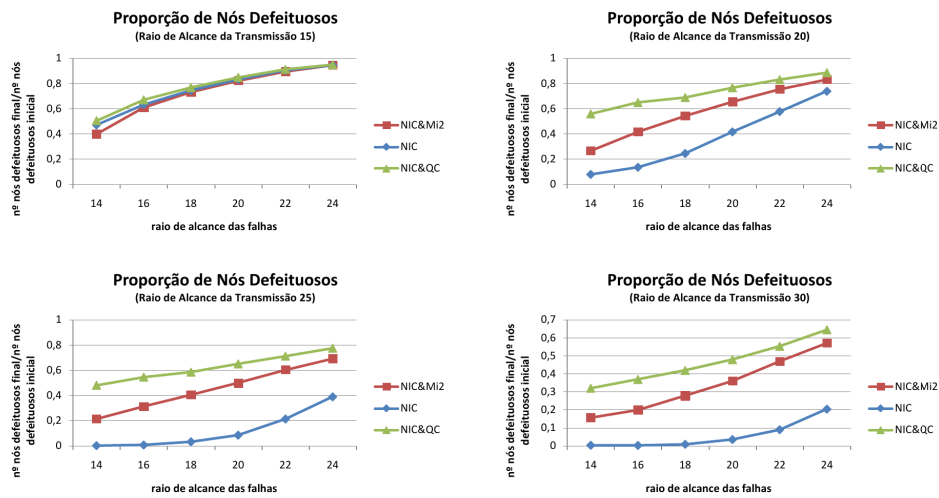


Figura 7.10: Proporção de nós defeituosos após a aplicação da Recoloração Geométrica, variando os raios de alcance da transmissão e das falhas, em cada uma das redes

sequências de recoloração (na execução dos algoritmos não existe uma ordem pré-definida), a comparação desta não é relevante para este estudo.

Embora a Recoloração Cheating não satisfaça as condições do modelo sequencial, pois um nó precisaria de saber se a recoloração já tinha terminado em toda a rede (o que contraria a noção de localidade), esta permite mostrar que poderão existir melhores métodos localizados do que as Recolorações Combinatória e Geométrica [13]. Pelo estudo desta dissertação, conclui-se que esta recoloração permite também mostrar que no caso de existirem métodos localizados com um desempenho idêntico a este, não existiriam diferenças significativas na Recuperação de Falhas entre as diferentes estruturas de redes, conforme ilustrado na figura 7.11 (o que implica que a recuperação não dependeria da estrutura e, conseqüentemente, o número de alterações seria um factor relevante a ter em conta).

Com o aumento do raio de alcance das falhas, o número de nós defeituosos tende a aumentar, o que leva a uma diminuição da capacidade de Recuperação de Falhas e, com o aumento do raio de alcance da transmissão, existe uma tendência no aumento do número de vizinhos de cada nó, pelo que a capacidade de Recuperação de Falhas também aumenta, ilustrados em todos os gráficos desta secção.

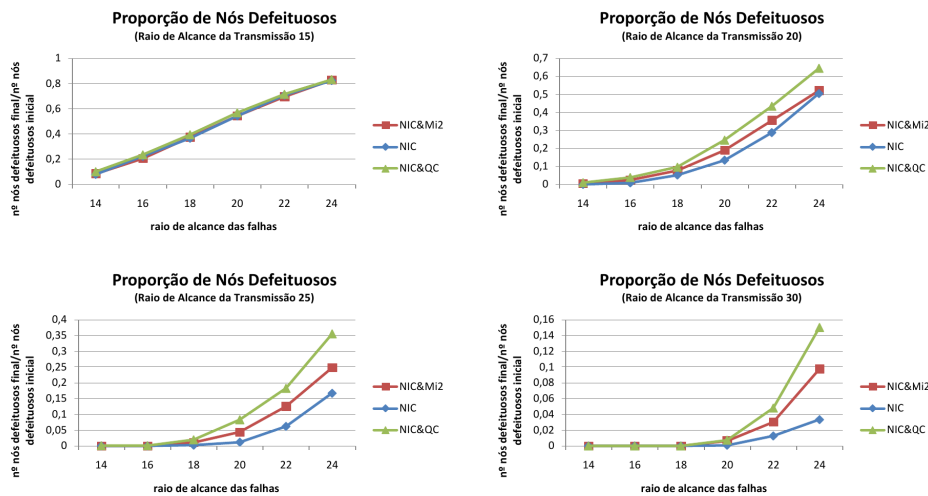


Figura 7.11: Proporção de nós defeituosos após a aplicação da Recoloração Cheating, variando os raios de alcance da transmissão e das falhas, em cada uma das redes

7.2 Comparações entre alterações feitas às redes

No pré-processamento realizado a cada uma das redes (necessário na Recoloração Geométrica), estas foram alteradas, eliminando ligações e adicionando novos nós, sendo que este último serve apenas para se obter redes NIC&QC, pretendendo manter o máximo possível a estrutura inicial da rede. Conforme se mostrou nos capítulos 5 e 6, os três algoritmos (1, 4 e 5) têm complexidade $O(n^2)$.

Comparando o número de ligações eliminadas através dos gráficos ilustrados nas figuras 7.12, 7.13 e 7.14, conclui-se que as redes NIC são as que necessitam de menos alterações e o número de ligações eliminadas diminui com o aumento do raio de alcance da transmissão. Nas outras duas estruturas de redes acontece o oposto: o número de ligações consideradas (ligações mantidas após a aplicação do algoritmo) diminui com o aumento do raio de alcance da transmissão. Para valores pequenos do raio de alcance de transmissão (inferiores a 17 no caso de redes com 50 nós, inferiores a 15 no caso de redes com 75 nós e inferiores a 13 no caso de redes com 100 nós), as redes NIC necessitam de remover mais ligações do que as outras.

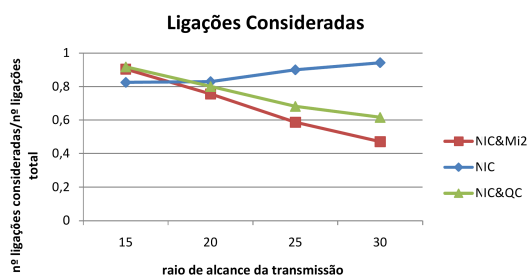


Figura 7.12: Proporção das ligações consideradas para cada um dos algoritmos de alterações das redes com 50 nós

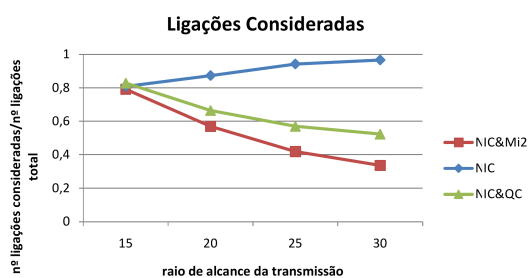


Figura 7.13: Proporção das ligações consideradas para cada um dos algoritmos de alterações das redes com 75 nós

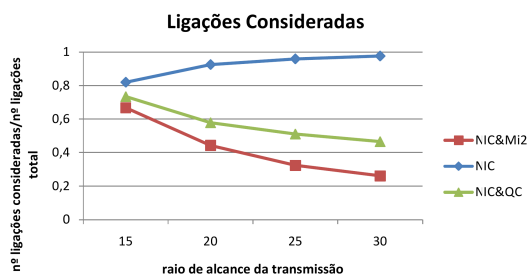


Figura 7.14: Proporção das ligações consideradas para cada um dos algoritmos de alterações das redes com 100 nós

Note-se que com o aumento do raio de alcance da transmissão, há uma tendência para aumentar o número de vizinhos de cada nó e, conseqüentemente, aumentar o número de ligações entre nós internos (a disposição espacial dos nós é aleatória), o que implica que o número de ligações a remover irá aumentar, tanto nas redes NIC&Mi2 como nas redes NIC&QC.

Para se obterem redes NIC&QC, poderão ser adicionados novos nós durante o Algoritmo QC. Na tabela 7.1 encontram-se registados os valores das médias e dos erros padrão do número de nós adicionados.

número de nós da rede	raio de alcance da transmissão	média	erro padrão
50	15	0,928	0,040900073
	20	2,427	0,076620304
	25	4,382	0,091935173
	30	3,747	0,070277955
75	15	3,191	0,088772287
	20	8,715	0,145793604
	25	9,849	0,117184466
	30	6,922	0,092270884
100	15	8,737	0,149291095
	20	17,575	0,178287338
	25	14,607	0,132682143
	30	9,379	0,113090048

Tabela 7.1: Número de nós adicionados no Algoritmo de Recoloração Geométrica nas redes NIC&QC com diferentes quantidades de nós iniciais e raios de transmissão

Observa-se que há um aumento do número de nós adicionados consoante se aumenta o número de nós iniciais. Observa-se ainda que o aumento do raio de transmissão não implica um aumento do número de novos nós, pois quando este raio passa de 25 para 30, o número de novos nós diminui. Os valores dos desvio padrões são todos bastante pequenos.

7.3 Comparações entre número de recolorações

Com o objectivo de comprovar as diferenças das complexidades do comprimento das sequências de recoloração geométrica nas redes NIC ($O(n^3)$), NIC&Mi2 ($O(n^2)$) e NIC&QC ($O(n)$), contou-se o número de recolorações feitas na Recuperação de Falhas

das amostras.

Através dos gráficos das figuras 7.15, 7.16 e 7.17 conclui-se que o número de recolorações tende a aumentar com o aumento dos raios de alcance da transmissão e das falhas e com o aumento do número de nós. Para valores baixos do raio de alcance da transmissão, as redes NIC têm valores inferiores no número de recolorações relativamente às outras duas estruturas (redes NIC&Mi2 e NIC&QC), enquanto que para valores elevados acontece o oposto. As diferenças entre o número de recolorações nas redes NIC&Mi2 e NIC&QC não são significativas.

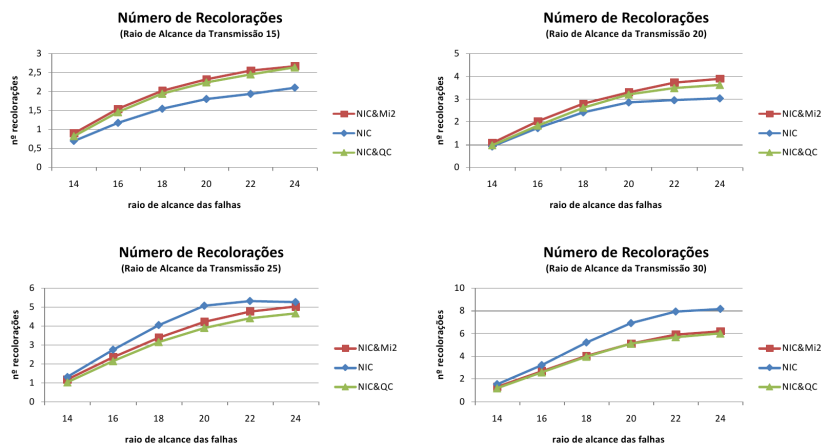


Figura 7.15: Recoloração Geométrica - número de recolorações dos nós das redes com 50 nós

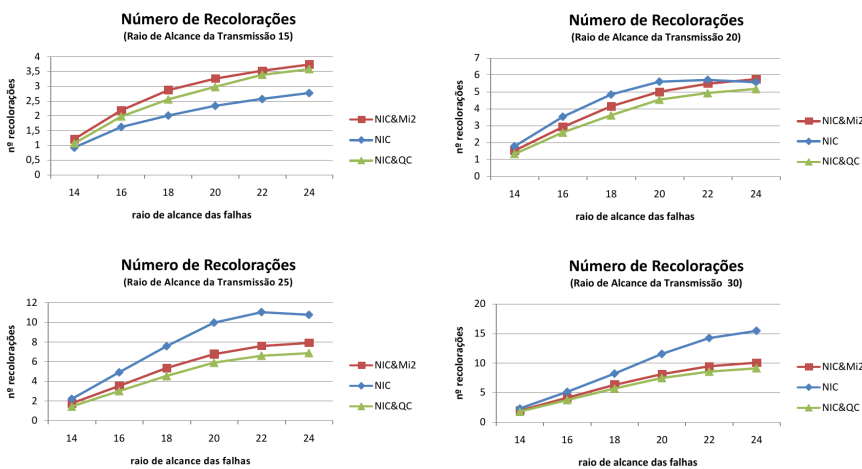


Figura 7.16: Recoloração Geométrica - número de recolorações dos nós das redes com 75 nós

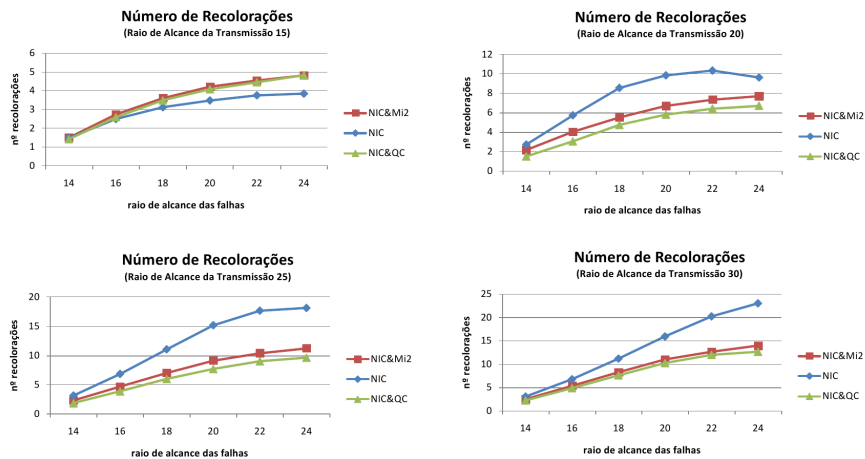


Figura 7.17: Recoloração Geométrica - número de recolorações dos nós das redes com 100 nós

No caso da Recoloração Cheating, não existem diferenças significativas entre as três estruturas de redes no número de recolorações, conforme indicam os gráficos das figuras 7.18, 7.19 e 7.20. Os valores, no caso das redes NIC&QC, são ligeiramente superiores em comparação com as outras duas estruturas, aumentado esta diferença com o número de nós da rede.

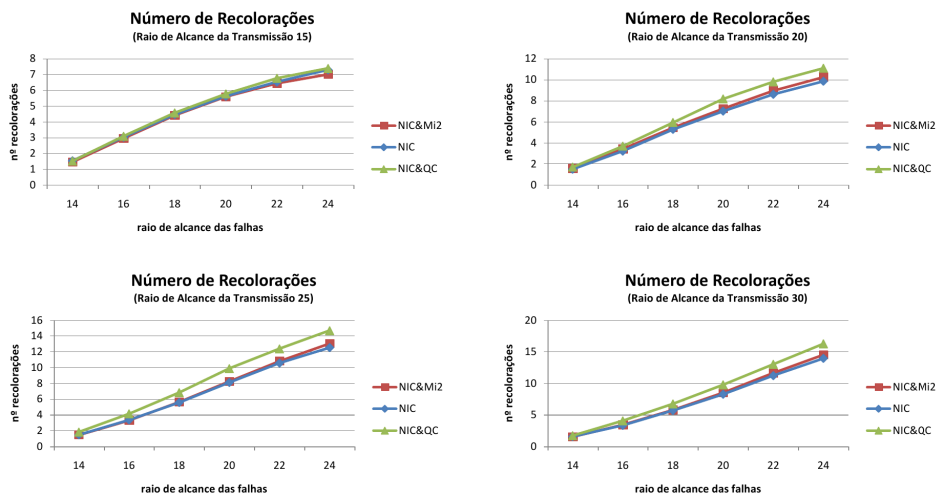


Figura 7.18: Recoloração Cheating - número de recolorações dos nós das redes com 50 nós

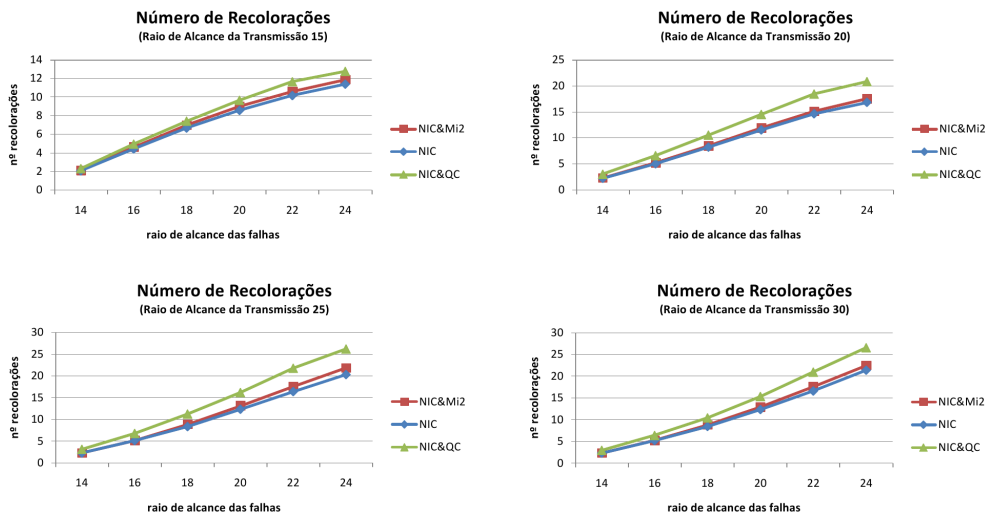


Figura 7.19: Recoloração Cheating - número de recolorações dos nós das redes com 75 nós

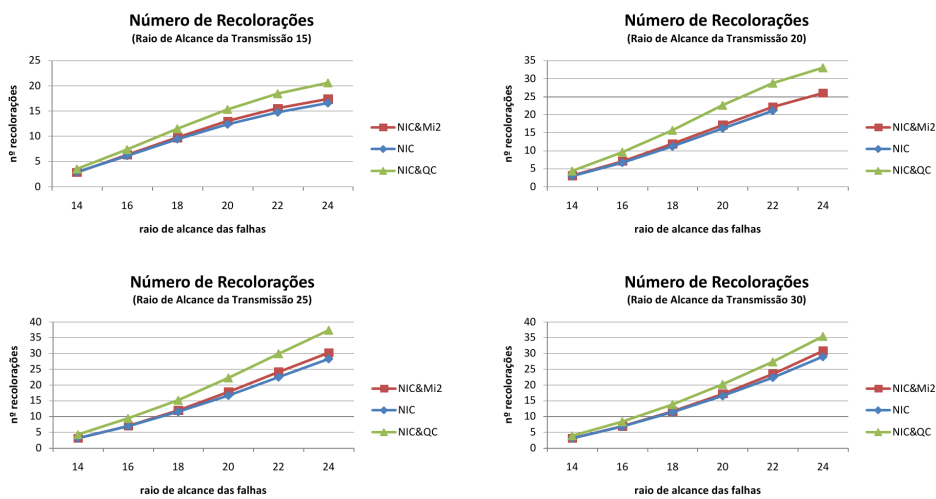


Figura 7.20: Recoloração Cheating - número de recolorações dos nós das redes com 100 nós

Capítulo 8

Conclusões

Nesta dissertação estudou-se o problema da Recuperação de Falhas em redes sem fios, através da Recoloração Geométrica.

O objectivo deste trabalho foi concretizado: definiram-se duas novas estruturas de redes que não têm sequências de recoloração infinitas na Recoloração Geométrica, nomeadamente as redes NIC&Mi2 e as NIC&QC. Para além disso, ainda se conseguiu que estas novas estruturas tivessem uma complexidade no comprimento das sequências de recoloração inferior à obtida para as redes NIC, sendo $O(n^3)$ para as NIC, $O(n^2)$ para as NIC&Mi2 e $O(n)$ para as NIC&QC.

Criaram-se algoritmos que permitem alterar uma rede aleatória para que esta tenha as propriedades das redes Mi2 e das redes QC, ambos com complexidades $O(n^2)$. O algoritmo existente para a alteração de uma rede por forma a que esta passe a ser NIC, tinha complexidade $O(n^2)$ e, nesta dissertação, propôs-se um algoritmo alternativo que tem complexidade $O(n)$.

Comparou-se a eficácia da Recoloração Geométrica, nas três estruturas de redes, com a Recoloração Combinatória e concluiu-se que, nas redes NIC, a Recoloração Geométrica é melhor aquando de valores superiores no raio de alcance da transmissão (conforme [13]). Comparando a Recuperação de Falhas, usando o método de Recoloração Geométrica, entre as três estruturas de redes concluiu-se que esta é mais eficaz nas redes que têm um elevado número de ligações, pois com os algoritmos de alteração Mi2 e QC removem-se muitas ligações.

Testando com um método não localizado - Recoloração Cheating - concluiu-se que poderão existir métodos localizados, alternativos às Recolorações Combinatória e Geométrica, que são mais eficazes na Recuperação de Falhas. Com este método, o número

final de nós defeituosos tende para zero com o aumento do raio de alcance da transmissão, em todas as três estruturas de redes, pelo que o número de recolorações e o número de alterações de cada estrutura são factores muito importantes. Tem-se então que as redes NIC são as melhores relativamente ao número de alterações e que não existem diferenças significativas no número de recolorações.

Capítulo 9

Trabalho Futuro

Nesta dissertação ficaram por estudar alguns problemas, nomeadamente:

- Fechar a lacuna na complexidade do comprimento das sequências de recoloração das redes NIC (este já era um problema em aberto em [13]). Em [13] provou-se que estas são $O(n^3)$ e $\Omega(n^2)$, faltando então encontrar um exemplo que tenha complexidade $O(n^3)$, em termos do número de recolorações, ou descobrir uma maneira de demonstrar que a complexidade destas redes é quadrática, relativamente ao número de nós.
- Desenvolver um algoritmo de recoloração localizado, alternativo à Recoloração Geométrica, que tenha um desempenho na Recuperação de Falhas semelhante à Recoloração Cheating (este já era um problema em aberto em [13]). Conforme se referiu, a Recoloração Híbrida pretendia combinar as Recolorações Geométrica e Combinatória (um nó é recolorido se a maioria dos seus vizinhos for da cor oposta à sua e, caso haja um empate, este é recolorido se o seu ângulo magenta for superior a 180°), mas não se conseguiram melhorias significativas. Não se sabe se existem melhores maneiras de combinar estas recolorações [13]. Observe-se que nem sempre é necessário efectuar-se um pré-processamento nas redes, como é o caso da Recoloração Combinatória, pelo que este é um factor a ser analisado consoante o método definido.
- Melhorar dois dos algoritmos de alterações das redes definidos nesta dissertação, mais propriamente os algoritmos Mi2 e QC. Estes algoritmos não determinam as soluções óptimas (são heurísticas) e, no estudo realizado, são efectuadas bastantes alterações nas redes. Não se provou que a complexidade destas alterações

seja sempre $O(n^2)$, independentemente do algoritmo utilizado, mas pensa-se que isso seja verdade. Contudo poderão existir algoritmos que, na prática, efectuem menos alterações do que os definidos nesta dissertação.

- Definir novas estruturas de redes que tenham menos alterações do que as novas estruturas apresentadas nesta dissertação, por forma a melhorar a Recuperação de Falhas aquando da Recoloração Geométrica, e cuja complexidade do comprimento das sequências de recoloração seja inferior às redes NIC (possivelmente linear, relativamente ao número de nós). Uma tal estrutura poderá basear-se no lema 3.2.1 e por cada nó u da rede, com grau superior a 1, criam-se dois novos nós, u_1 e u_2 , que sejam adjacentes apenas a u , de modo a que (u_1, u, u_2) seja uma cadeia oposta. Assim, o número de recolorações de cada nó é inferior a 3 (número de recolorações da rede é $O(n)$) e o número de alterações da rede é $O(n)$. A Recuperação de Falhas desta nova estrutura necessita de ser analisada através de experiências.
- Implementar o Algoritmo NIC2, pois o número de alterações causadas por este algoritmo é inferior ao Algoritmo NIC, e testar com experiências. Com este algoritmo, a Recuperação de Falhas deverá melhorar, uma vez que não se elimina nenhuma das ligações.

Referências Bibliográficas

- [1] *NetBeans IDE, version 6.1*, <http://www.netbeans.org/>.
- [2] M. U. Bhatti and D. Conan, *Fault-tolerance in mobile environments: A partition detection system*, In Proc. 2nd International Workshop on Frontiers of Information Technology, Islamabad, Pakistan (2004).
- [3] Computerworld, *Os novos pcs, em diferentes formatos*, 7 de Abril de 2011, Disponível em: <http://www.computerworld.com.pt/2011/04/07/os-novos-pcs-em-diferentes-formatos/>; Consult. 14 Abril 2011.
- [4] J. Szymanski D. M. Cardoso and M. Rostami, *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*, 2008.
- [5] Z. Jiang F. Dressler and W. Zhang, *Call for papers*, 2009, Disponível em: <http://www.cs.wcupa.edu/~zjiang/wsns09.htm>; Consult. 10 Junho 2011.
- [6] L. Pagli F. Luccio and H. Sanossian, *Irreversible dynamos in butterflies*, In Proc. 6th International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity (SIROCCO) (1999), 204–218.
- [7] S. Ghosh, *Distributed systems: An algorithmic approach*, Chapman & Hall/CRC, 2006.
- [8] M. van Kreveld J. S. B. Mitchell J. Snoeyink I. Reinbacher, M. Benkert and A. Wolff, *Delineating boundaries for imprecise regions*, Institute of Information and Computing Sciences, Utrecht University (2005), technical report UU-CS-2005-026.
- [9] S. Kutten and D. Peleg, *Fault-local distributed mending*, Journal of Algorithms **30** (1999), 144–165.

-
- [10] F. Luccio L. Pagli P. Flocchini, E. Lodi and N. Santoro, *Dynamic monopolies in tori*, Discrete Applied Mathematics **137** (2004), 197–212.
- [11] D. Peleg, *Size bounds for dynamic monopolies*, Discrete Applied Mathematics **86** (1998), 263–273.
- [12] D. Peleg, *Distributed computing: A locality-sensitive approach*, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, 2000.
- [13] Y. N. Rodriguez, *Problems on geometric graphs with applications to wireless networks*, Ph.D. thesis, Queen’s University, Kingston, Ontario, Canada, 2009.
- [14] J. Ross, *Redes de computadores*, 1 ed., Antenna, 2008.
- [15] Faculdade de Medicina da Universidade do Porto Serviço de Bioestatística e Informática Médica, *Erro padrão*, 2000, Disponível em: <http://stat2.med.up.pt/cursop/glossario/index.html>; Consult. 23 Maio 2011.
- [16] Y. N. Rodriguez Y. de la Noval, F. Luccio and L. Pagli, *Dynamos in three-dimensional meshes*, In Proc. 7th International Congress on Computer Science Research (2000), 51–62.