



**André Filipe Pinto  
Vieira**

**Planeamento e Otimização de Rotas para Veículos**





**André Filipe Pinto  
Vieira**

**Planeamento e Otimização de Rotas para Veículos**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia e Gestão Industrial, realizada sob a orientação científica da Doutora Ana Maria Pinto de Moura, Professora Auxiliar do Departamento de Economia, Gestão e Engenharia Industrial da Universidade de Aveiro





## **o júri**

presidente

**Professora Doutora Leonor da Conceição Teixeira**  
professora auxiliar da Universidade de Aveiro

**Professor Doutor José Fernando da Costa Oliveira**  
professor associado da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

**Professora Doutora Ana Maria Pinto de Moura**  
professora auxiliar da Universidade de Aveiro



## **agradecimentos**

Gostaria de agradecer à Professora Ana Moura, pela orientação e apoio prestado à realização da presente dissertação. A todas as pessoas com quem me cruzei na Toyota Caetano Portugal que me apoiaram e ajudaram, assim como aos meus colegas de curso.  
Um agradecimento muito especial à minha família e amigos.



**palavras-chave**

Problema de Rotas para Veículos, Entregas e Recolhas, Janelas Temporais, Restrição de Capacidade, Programação Linear Inteira Mista.

**resumo**

A presente dissertação teve como propósito o desenvolvimento de um modelo matemático de Programação Linear Inteira Mista, para determinar um conjunto de rotas para veículos considerando janelas temporais e entregas e recolhas, a implementar numa empresa portuguesa da indústria automóvel, Toyota Caetano Portugal. Do conjunto de fornecedores desta empresa existe uma minoria cujo fluxo de material é realizado em ambos os sentidos. Dado o reduzido número de fornecedores em questão é possível desenvolver um modelo matemático para obtenção de uma solução exata, apesar da complexidade deste. Para tal, implementou-se o modelo matemático no *software IBM ILOG CPLEX*, para obtenção de uma solução dentro de um tempo computacional reduzido. Após o estudo de caso da empresa e revisão da literatura, foi possível constatar que poderia ser interpretado como um problema de rotas para veículos com janelas temporais, entregas e recolhas e restrição máxima da capacidade do veículo. O modelo matemático e sua implementação no software são apresentados e explicados, assim como a solução obtida. A dissertação finaliza com a realização de uma análise de sensibilidade ao modelo matemático.



**keywords**

Vehicle Routing Problem, Pickup & Delivery, Time Windows, Capacity Constraint, Mixed Integer Programming.

**abstract**

This thesis purpose was the development of a mathematical model of mixed integer programming, to determine a set of vehicle routes, with time windows and pickup & delivery, that would be implemented in a Portuguese automotive company, Toyota Caetano Portugal. In the set of this company's suppliers there is a minority in which the flux of material is carried out in both ways. Given the reduced number of suppliers in question, it is possible to develop a mathematic model to obtain an exact solution, despite its complexity. In order to do that, the mathematical model was implemented on software *IBM ILOG CPLEX*, to obtain a solution within a reduced computational time. After the company's case study and literature review, it was possible to verify that it could be interpreted as a vehicle routing problem with time windows, pickups and deliveries and the constraint of the vehicle's maximum capacity. The mathematical model and its implementation on the software are presented, as well as the obtained solution. The thesis ends with the sensivity analisis of the mathematical model.





# Índice

<b>CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
<b>CAPÍTULO 2 O CASO DE ESTUDO DA TOYOTA CAETANO PORTUGAL</b> .....	<b>5</b>
2.1. APRESENTAÇÃO DA EMPRESA.....	5
2.2. A LOGÍSTICA NA TCAP .....	7
2.3. MOTIVAÇÃO DO ESTUDO DESENVOLVIDO .....	8
2.4. DA ENCOMENDA À ARMAZENAGEM.....	9
<b>CAPÍTULO 3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>11</b>
3.1. DEFINIÇÃO DE DADOS E VARIÁVEIS .....	11
3.2. PROBLEMA DE ROTAS PARA VEÍCULOS.....	13
3.2.1. <i>Descrição do VRP</i> .....	14
3.2.2. <i>Definição do VRP</i> .....	15
3.2.3. <i>Principais Componentes</i> .....	16
3.2.4. <i>Restrições e Custos</i> .....	17
3.2.5. <i>Objetivos</i> .....	18
3.2.6. <i>Formulação Matemática</i> .....	18
3.3. VARIANTES DO VRP.....	19
3.3.1. <i>VRP com Capacidade</i> .....	19
3.3.2. <i>VRP com Janelas Temporais</i> .....	22
3.3.3. <i>VRP com Entregas e Recolhas</i> .....	26
3.4. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO VRP .....	29
3.4.1. <i>Métodos Exatos</i> .....	29
3.4.2. <i>Métodos Heurísticos</i> .....	31
<b>CAPÍTULO 4 CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA</b> .....	<b>37</b>
4.1. <i>Fornecedores</i> .....	38
4.2. <i>Restrições</i> .....	42
<b>CAPÍTULO 5 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA</b> .....	<b>43</b>
5.1. MODELIZAÇÃO DO PROBLEMA .....	43
5.1.1. <i>Formulação Matemática</i> .....	44
5.2. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DA SOLUÇÃO .....	47
5.3. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE .....	54
5.3.1. <i>Caracterização das instâncias</i> .....	54
5.3.2. <i>Análise dos Resultados</i> .....	55
<b>CAPÍTULO 6 CONCLUSÃO</b> .....	<b>57</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b> .....	<b>59</b>
<b>ANEXOS</b> .....	<b>63</b>
ANEXO 1 FICHEIRO DO SOFTWARE IBM ILOG CPLEX DO TIPO <i>.MOD</i> .....	65
ANEXO 2 FICHEIRO DO SOFTWARE IBM ILOG CPLEX DO TIPO <i>.DAT</i> .....	67



## Índice de Figuras

FIGURA 1 – UM EXEMPLO DE UMA SOLUÇÃO DO VRP (VACIC & SOBH, 2004).....	14
FIGURA 2 – CONJUNTO DE ROTAS GERADAS.....	49
FIGURA 3 – EXEMPLO ROTA 4.....	53

## Índice de Tabelas

TABELA 1 – JANELAS TEMPORAIS DOS FORNECEDORES.....	39
TABELA 2 – CARGAS A ENTREGAR E RECOLHER NOS FORNECEDORES.....	41
TABELA 3 – DURAÇÃO DE CADA UMA DAS ROTAS.....	49
TABELA 4 – RESULTADOS COMPUTACIONAIS DA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA.....	50
TABELA 5 – LEGENDA.....	50
TABELA 6 – ANÁLISE DOS INSTANTES DE CHEGADA A CADA UM DOS NÓS DA ROTA 4.....	51
TABELA 7 – JANELAS TEMPORAIS DOS FORNECEDORES VISITADOS NA ROTA 4.....	51
TABELA 8 – ANÁLISE DA CARGA PRESENTE NO VEÍCULO DURANTE A ROTA 4.....	52
TABELA 9 – VARIAÇÃO DA CARGA NO VEÍCULO AO LONGO DA ROTA 4.....	52
TABELA 10 – RESULTADOS COMPUTACIONAIS DO PROBLEMA E DAS DUAS INSTÂNCIAS GERADAS.....	<b>ERROR!</b>

**BOOKMARK NOT DEFINED.**



# Lista de Abreviaturas

TCAP – Toyota Caetano Portugal

CKD – *Complete Knock-Down*

SSP's – *Supply Special Parts*

IN – Incorporação Nacional

VRP (*Vehicle Routing Problem*) – Problema de Rotas para Veículos

TSP (*Traveling Salesman Problem*) – Problema do Caixeiro Viajante

CVRP (*Capacity Vehicle Routing Problem*) – Problema de Rotas para Veículos com Capacidade

DVRP (*Distance-Constrained Vehicle Routing Problem*) – Problema de Rotas para Veículos com Distância

DCVRP (*Distance-Constrained Capacity Vehicle Routing Problem*) – Problema de Rotas para Veículos com Capacidade e Distâncias

VRPTW (*Vehicle Routing Problem with Time Windows*) – Problema de Rotas para Veículos com Janelas Temporais

VRPPD (*Vehicle Routing Problem with Pickup & Delivery*) – Problema de Rotas para Veículos com Entregas e Recolhas

VRPB (*Vehicle Routing Problem with Backhauls*) – Problemas de Rotas para Veículos com *Backhauls*

GRASP – *Greedy Randomised Adaptive Search Procedure*

VNS – *Value Neighborhood Search*

LIFO – *Last-In-First-Out*



# Capítulo 1

## Introdução

O processo de transporte envolve todas as fases de produção e o sistema de distribuição, representando uma percentagem significativa do custo final do produto, na ordem dos 10%-20% (Toth & Vigo, 2002a). Na ótica do fornecedor, um bom serviço de transportes é de importância vital, uma vez, que atrasos na entrega de componentes irão afetar o calendário de produção, podendo daí resultar um serviço deficiente e não satisfatório, o que poderá afectar a relação fornecedor-cliente. A presente dissertação tem como propósito a definição de um conjunto de rotas para veículos para uma empresa da indústria automóvel, Toyota Caetano Portugal (TCAP).

A TCAP situa-se em Ovar e dedica-se à produção de viaturas Toyota, nomeadamente os comerciais *Dyna* e *Hiace*. Para a produção das viaturas é necessário um todo conjunto de componentes que são produzidos por um grupo de fornecedores. Para uma pequena minoria do referido conjunto de fornecedores, o fluxo de componentes faz-se em ambos os sentidos, uma vez que para a produção dos componentes é necessário um conjunto de peças, provenientes do Japão, que se encontram armazenadas na TCAP. O transporte entre TCAP fornecedor e vice versa é da responsabilidade dos fornecedores. Muitas vezes as datas de entrega previstas não são cumpridas por vários motivos, como atrasos de produção ou danificação das peças. De modo a criar uma maior pressão sobre os fornecedores para que os prazos acordados sejam cumpridos e para controlar de maneira mais efetiva o fluxo de material, a TCAP pretende ficar responsável pelo seu transporte.

Dado o número reduzido de fornecedores em questão, o objetivo é determinar o conjunto de rotas ótimas para veículos, apesar da complexidade

imposta pelo conjunto de restrições. Para o efeito elaborou-se um modelo matemático que traduzisse o problema, que foi posteriormente implementado de modo a obter a solução exata.

Para alcançar o objetivo foi definida uma metodologia, constituída pelas seguintes etapas:

1. Conhecimento da situação atual da TCAP, assim como dos procedimentos significativos para o estudo;
2. Revisão bibliográfica sobre o problema em questão, por forma a aumentar o conhecimento sobre o tema, assim como metodologias de resolução do problema;
3. Levantamento de dados relevantes para a resolução do problema;
4. Elaboração do modelo matemático;
5. Familiarização com o *software* de otimização, *IBM ILOG CPLEX 12.4*;
6. Implementação do modelo no *software*;
7. Validação do modelo e obtenção da solução;
8. Elaboração da dissertação.

A dissertação está estruturada em 6 capítulos. No capítulo 2, apresenta-se o caso de estudo da Toyota Caetano Portugal. Inicialmente, apresenta-se a empresa, assim como uma pequena caracterização do grupo na qual está inserida, Grupo Salvador Caetano. Na secção 2.2 explica-se pormenorizadamente a organização e os procedimentos realizados no armazém, uma vez que é a zona da unidade fabril mais significativa para o caso de estudo. Posteriormente é explicada a motivação pela qual este estudo foi desenvolvido (secção 2.3). O capítulo encerra com a caracterização dos procedimentos atuais, desde a realização da encomenda até à armazenagem dos componentes (secção 2.4).

O capítulo 3, apresenta o resultado da revisão bibliográfica sobre os problemas de rotas para veículos. O capítulo inicia-se com a exposição dos dados e variáveis utilizados ao longo do capítulo (secção 3.1). Será apresentada a



caracterização do problema de rotas para veículos (secção 3.2), assim como das diferentes variantes (secção 3.3). A encerrar o capítulo são apresentados os diferentes métodos e técnicas para a resolução do problema (secção 3.4).

No capítulo 4 é apresentado o conjunto de dados que definem o conjunto de fornecedores considerados neste caso de estudo (secção 4.1), assim como as restrições que o caracterizam (secção 4.2). O conjunto de rotas definidas serão realizadas por um veículo que visitará cada um dos fornecedores, dispersos geograficamente. A definição das rotas está condicionada por um conjunto de restrições dos fornecedores, do veículo e da TCAP, o que torna o problema mais interessante e complexo. As restrições nunca poderão ser violadas. Associados aos fornecedores estão janelas temporais, períodos definidos para visitas, que têm de ser cumpridos. Também o armazém apresenta uma janela temporal, intervalo no qual o veículo tem de iniciar e terminar a rota. Além disso, em cada visita a um fornecedor terá sempre de se realizar uma entrega e recolha de carga, sendo que a carga presente no veículo nunca poderá exceder a capacidade máxima do mesmo.

Face à complexidade apresentada o problema foi interpretado como um problema de rotas para veículos com janelas temporais, entregas e recolhas e restrição de capacidade do veículo. Cada um dos fornecedores é englobado numa só rota, ou seja, só será visitado uma única vez pelo veículo.

No capítulo 5 é exposto e explicitado o modelo matemático que traduz o problema (secção 5.1). Na secção 5.2. é apresentada e analisada a solução originada pelo *software*. Dado que a empresa tem produzido um número reduzido de viaturas, como consequência da difícil conjuntura económico-financeira que o país atravessa, avaliou-se se o modelo se manteria válido caso o fluxo de componentes aumentasse, o que se traduziu num aumento do número de rotas originadas. Para o efeito, realizou-se uma análise de sensibilidade relativa ao

número de rotas, cujos resultados computacionais obtidos são interpretados na secção 5.3..

O capítulo 6 encerra a dissertação, e é dedicado às conclusões finais do trabalho realizado e à apresentação de sugestões para trabalho futuro.

## Capítulo 2

# O Caso de Estudo da Toyota Caetano Portugal

O propósito deste estudo passa pela determinação e implementação de um conjunto ótimo de rotas, minimizando o tempo necessário para as realizar. Os objetivos principais que se pretendem alcançar são um controlo mais rigoroso do fluxo de materiais e criar maior pressão para que os prazos estabelecidos aquando da encomenda sejam cumpridos. A solução passa por determinar os locais que deverão estar incluídos em cada rota e a ordem pela qual são visitados.

Neste capítulo será apresentada a empresa (secção 2.1.), assim como, a caracterização dos procedimentos logísticos relevantes para o estudo (secção 2.2.). Em seguida, será exposta a motivação do estudo e a descrição de como o fluxo de componentes entre os fornecedores é atualmente realizado nas secções 2.3. e 2.4., respetivamente.

### 2.1. Apresentação da empresa

A Toyota Caetano Portugal, S. A. (TCAP) é uma empresa cuja principal atividade assenta na montagem de veículos Toyota e integra o Grupo Salvador Caetano, S. A.. O Grupo Salvador Caetano é uma sociedade gestora de participações sociais, que tem como “embrião” a empresa Martins, Caetano & Irmão, fundada no ano de 1946. Os investimentos do grupo sempre foram fortemente direcionados para o sector automóvel, principalmente para a área de retalho automóvel. Este grupo tem participações em várias empresas com

diversas áreas de atividade como indústria, seguros, energia, tecnologias de informação, etc.

A TCAP está localizada em Ovar, a esta está associada uma elevada carga simbólica por se tratar da primeira divisão fabril Toyota na Europa. Fundada em 1971, surge no seguimento das limitações impostas às importações, que obrigavam à construção de uma linha de produção. Composta por duas fábricas e um centro de transformação, que se dedica à transformação de viaturas Toyota importadas, sobretudo nos modelos *Yaris*, *Auris* e *Aygo*. Uma das duas fábricas, a Fábrica 2, onde se produziam miniautocarros, encontra-se inativa. A produção destes passou a ser realizada nas infraestruturas localizadas em Vila Nova de Gaia. A Fábrica 1 está operacional e nesta é realizada a produção de veículos comerciais Toyota, nomeadamente *Dyna* e *Hiace*. O modelo *Dyna* representa uma grande percentagem da produção total, sensivelmente na ordem dos 85%. As referidas viaturas têm como destino o mercado nacional e europeu, em países como França, Alemanha, Reino Unido, Espanha, etc. A exportação teve início em 2003, e a sua importância é crucial para o desenvolvimento e sustentabilidade da unidade fabril.

A unidade fabril pode ser dividida em cinco grandes áreas, onde se realizam as operações necessárias à montagem da viatura:

- Armazém;
- Soldadura;
- Pintura;
- Montagem Final;
- Inspeção Final.

A zona do armazém é a que apresenta maior relevância para o estudo em questão, como tal são as operações aqui realizadas as que serão descritas e analisadas pormenorizadamente.

A maioria do material necessário para se proceder à montagem de uma viatura é importado do Japão, mais especificamente da *Toyota Motor Corporation*. Este é acondicionado sob a forma de lotes *complete knock-down* (CKD) e

representa sensivelmente 84% dos componentes presentes numa viatura. Os restantes 16% provêm de fornecedores da TCAP, que se encontram maioritariamente em território nacional, e designam-se por material de incorporação nacional (IN).

Dentro dos lotes de CKD há um subgrupo de peças que se denominam por *Supply Special Parts* (SSP's), que têm a particularidade, ao contrário das restantes, de não serem incorporados diretamente na viatura. Estas irão funcionar como *inputs* num processo produtivo que originará o componente a incorporar na viatura, produto que vai ser, esse sim, montado no veículo. A sua produção fica a cargo de alguns fornecedores IN da TCAP, maioritariamente com as suas infraestruturas localizadas em território nacional. Estes fornecedores para além de produzir os referidos componentes podem produzir outros que não incorporem SSP's.

Aquando do início de produção de um novo modelo ou de uma nova versão de um modelo já existente, uma encomenda especial de SSP's é realizada. Isto permitirá à TCAP, após identificar os possíveis fornecedores, iniciar um período de testes onde irão produzir-se protótipos das novas peças e proceder aos ajustes necessários para que no momento em que se inicie a produção em série já exista um stock de segurança capaz de satisfazer as necessidades iniciais e suprimir algum imprevisto que possa surgir.

## **2.2. A Logística na TCAP**

O armazém está dividido em duas secções: uma destinada ao material CKD e outra para os componentes IN.

Um lote CKD é constituído por várias caixas oriundas do Japão que são expedidas para o território nacional, por via marítima, contendo material para a montagem de cinco veículos. Uma vez na unidade fabril é armazenado na área reservada ao material CKD, aguardando ordem de produção para que se possa proceder à sua abertura. A calendarização da produção é definida para duas

áreas: Soldadura e Montagem Final. O material CKD que tem como destino estas áreas é distinto e está empacotado em caixas diferentes. O processo produtivo inicia-se no posto de soldadura, como tal, as primeiras caixas a serem abertas são as do material CKD necessário para montar a carcaça. O material relativo à montagem final é aberto num período de tempo até 24 horas antes da respetiva carcaça dar entrada na linha, proveniente da área de pintura. Os SSP's nunca vão incorporar uma das viaturas do lote ao qual estão associados. Estes serão armazenadas numa zona específica dentro do espaço do armazém reservado ao material CKD, até que sejam transportados para os respetivos fornecedores. A maioria dos componentes que incorporam SSP's são comuns a várias versões das viaturas produzidas.

### **2.3. Motivação do estudo desenvolvido**

O transporte dos componentes produzidos fica a cargo dos fornecedores IN, independentemente de terem ou não SSP's associados. Esta é uma exigência imposta pela TCAP aos seus fornecedores. Contudo a TCAP pretende mudar este paradigma para os fornecedores que produzem componentes que envolvem SSP's.

Os SSP's é uma questão crítica na TCAP. É frequente os fornecedores utilizarem como justificação para os atrasos da produção um número insuficiente de SSP's nas respetivas instalações para satisfazer as encomendas. Esta questão não traduz a realidade, uma vez que é garantido que os SSP's são enviados, mas o pouco controlo sobre estas peças permite aos fornecedores justificarem as suas falhas. O que se constata diversas vezes é: uma organização insuficiente do armazém, danificação dos SSP's, entre outros. Este problema provoca atrasos no calendário de produção afetando desta forma o funcionamento organizacional. A falta de confiança entre as duas entidades e aumento dos custos são outras consequências.

De modo a solucionar este problema a TCAP está a considerar assegurar o fluxo de material entre a TCAP e os fornecedores IN que envolvam SSP's. Isto permitiria realizar um controlo mais efetivo do material, exercer maior pressão para que os prazos acordados sejam cumpridos e, possivelmente, reduzir os custos de transporte.

## **2.4. Da encomenda à armazenagem**

As encomendas são realizadas pelo departamento de compras através de uma plataforma informática comum à TCAP e ao fornecedor. Assim que o fornecedor tome conhecimento da encomenda, a TCAP recebe uma notificação, e uma data para entrega é definida, caso contrário, uma nova mensagem será enviada.

O período de tempo entre a colocação de uma encomenda e data de entrega varia em função do fornecedor, dos produtos e respetivas quantidades encomendadas. Os componentes, e respetivas quantidades encomendadas são definidos em função do calendário de produção. É difícil encontrar sequências que se repitam ao longo do calendário de produção, dado o grande número de versões dos modelos produzidos na fábrica, o que leva a que as encomendas para um dado fornecedor diverjam ligeiramente umas das outras.

Uma vez os componentes produzidos são transportados para a TCAP, por via de uma frota própria dos fornecedores ou por um operador logístico subcontratado por este. Uma vez na TCAP a carga é descarregada, por um funcionário, no armazém e os SSP's associados ao fornecedor são colocados na viatura. Não existem requisitos definidos para o empacotamento e acondicionamento no contentor dos SSP's, nem este é definido por meio de uma abordagem formal. O procedimento comum, uma vez descarregada a carga, é que um funcionário do armazém analise intuitivamente o espaço disponível no contentor, tomando uma decisão com base no conhecimento empírico. Em função deste condiciona os SSP's em caixas de cartão ou em paletes. A carga entregue

é verificada quantitativamente, por um funcionário do armazém de modo a averiguar se está conforme a encomenda e qualitativamente, por um funcionário do departamento de qualidade, para analisar se as peças estão conforme os requisitos e padrões exigidos. Se as peças estiverem conformes são armazenadas na secção do armazém destinado ao material de IN, caso contrário são reenviadas aos clientes.

Cada um dos fornecedores considerados neste problema produz um conjunto de componentes que, embora alguns deles semelhantes, diferem entre si o que traduz também tempos de produção diferentes.



## Capítulo 3

### Revisão Bibliográfica

Neste capítulo consta o resultado da revisão bibliográfica de algumas abordagens relativas aos problemas de rotas para veículos. Em primeiro lugar será apresentada uma definição genérica dos dados e variáveis utilizados ao longo do capítulo (secção 3.1). Seguidamente o problema de rotas para veículos será exhaustivamente descrito e caracterizado (secção 3.2), assim como as suas diferentes versões (secção 3.3). O capítulo encerra com a abordagem de diferentes métodos existentes na literatura para a resolução deste tipo de problemas (secção 3.4).

#### 3.1. Definição de dados e variáveis

Esta definição de dados e variáveis usados nos problemas de rotas para veículos (em inglês, VRP – *Vehicle Routing Problem*) é essencial para a compreensão dos modelos desenvolvidos e apresentados por vários autores neste capítulo. A notação listada nesta secção será utilizada diversas vezes, particularmente nas descrições dos problemas e respetivas formulações matemáticas. Na primeira referência de cada notação o seu significado é devidamente explicitado.

$G$  – grafo completo constituído por um conjunto de vértices e um conjunto de arcos e arestas

$V$  – conjunto de vértices que representam as diferentes localizações; Se

$V = 0 = n + 1$  representa o armazém

$A$  – conjunto de arcos que interligam dois vértices, se VRP assimétrico; podem ser percorridos somente num sentido

$E$  – conjunto de arestas que interligam dois vértices, se VRP simétrico; podem ser percorridos em ambos os sentidos

$n$  – número de clientes a servir; somente na secção 3.3.3.1. é que é interpretado como o número de clientes com a carga a recolher

$c_{ij}$  – custo de percorrer o arco/aresta que liga o vértice  $i$  ao  $j$

$C$  – matriz de custos

$m$  – nº de veículos

$m_{min}$  – nº mínimo de veículos admissível

$m_{Máx}$  – nº máximo de veículos admissível

$K$  – conjunto de veículos

$S$  – subconjunto de  $V$

$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } (i, j) \text{ for percorrido} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

$Q$  – capacidade do veículo

$d_i$  – carga a entregar no cliente  $i$

$d(S)$  – soma das procura do cliente que constituem o subconjunto  $S$

$v(S)$  – número mínimo de veículos necessários para servir os clientes do subconjunto  $S$

$T$  – limite máximo para a distância ou comprimento de uma rota

$t_{ij}$  – tempo que leva a percorrer o arco ou aresta que une os vértices  $i$  e  $j$

$s_i$  – período de tempo que o veículo terá de permanecer nas instalações do cliente  $i$  para que o serviço seja prestado

$a_i$  – instante de tempo em que abre a janela temporal do cliente  $i$

$b_i$  – instante de tempo em que encerra a janela temporal do cliente  $i$

$s_i^k$  – período de tempo que o veículo  $k$  terá de permanecer nas instalações do cliente  $i$  para que o serviço seja prestado

$x_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } (i, j) \text{ for percorrido pelo veículo } k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

$\Delta^-(i)$  – conjunto de vértices visitados antes do cliente  $i$  numa dada rota

$\Delta^+(i)$  – conjunto de vértices visitados depois do cliente  $i$  numa dada rota

- 
- $H$  – instante de tempo em que abre a janela temporal do armazém;  
representa o instante mínimo a partir do qual se pode iniciar uma rota
- $L$  – instante de tempo em que a janela temporal do armazém encerra;  
representa instante máximo para um veículo terminar uma rota
- $p_i$  – quantidade de carga a recolher no cliente  $i$
- $O_i$  – vértice de onde provem a carga a entregar no cliente  $i$
- $D_i$  – vértice que representa o destino da carga carregada no cliente  $i$
- $w_i^k$  – instante de chegada do veículo  $k$  ao cliente  $i$
- $C_i^k$  – carga presente no veículo  $k$  depois de servir o cliente  $i$
- $Q^k$  – capacidade do veículo  $k$
- $P$  – conjunto de clientes com uma carga a recolher associada
- $D$  – conjunto de clientes com uma carga a entregar associada
- $\tilde{n}$  – número de clientes com uma carga a entregar

## 3.2. Problema de Rotas para Veículos

O VRP integra a área da investigação operacional, mais especificamente a classe de problemas otimização<sup>1</sup> combinatória, sendo um dos mais importantes e dos mais estudados (Toth & Vigo, 2002b; Liong et al., 2008). Os artigos de Dantzig & Ramser (1959), que propuseram a primeira formulação matemática e primeiro algoritmo, e de Clarke & Wright (1964), que melhoraram a abordagem dos primeiros, são considerados embrionários. Durante as décadas seguintes centenas de artigos dentro deste tema foram publicados. A relevância do assunto entre os investigadores prende-se com o papel vital que este desempenha nos sistemas de distribuição e logísticos (Liong et al., 2008). Nesta secção será apresentada a descrição do VRP, sua caracterização e respetiva formulação matemática.

---

<sup>1</sup> Problemas de otimização visam a minimização ou maximização de um objetivo.

### 3.2.1. Descrição do VRP

Estes problemas visam a entrega de bens, geralmente, entre armazéns e clientes/consumidores finais, muitas vezes aplicados a situações reais (Toth & Vigo, 2002b). Recolha de lixo doméstico, rotas de autocarros escolares, camiões cisterna, distribuição de bens e entrega de correio são alguns exemplos da aplicação do VRP (Toth & Vigo, 2002a; Liong et al., 2008). A solução do VRP passa pela determinação de um conjunto de rotas<sup>2</sup> de veículos que satisfaça um conjunto de restrições às quais está sujeito, assim como as necessidades dos clientes, minimizando o custo total de transporte (Toth & Vigo, 2002a).

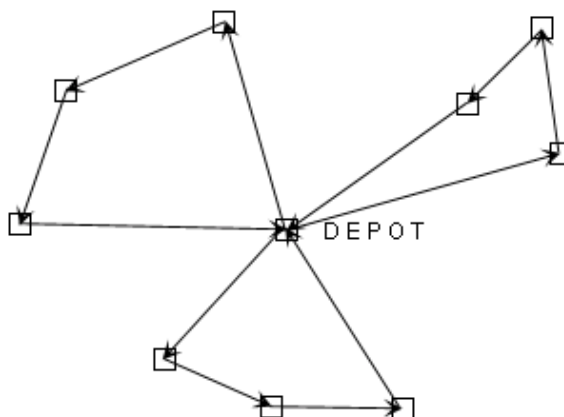


Figura 1 - Um exemplo de uma solução do VRP (Vacic & Sobh, 2004)

O VRP é uma generalização do problema do caixeiro viajante (TSP - *Traveling Salesman Problem*<sup>3</sup>) (Kallehauge, 2008; Cordeau et al., 2007; Valle et al., 2011). Kallehauge (2008) e Dantzig & Ramser (1959) descrevem esta generalização como um TSP com vários caixeiros-viajantes, designada por *m*-TSP. Se adicionalmente ao *m*-TSP, considerarmos que existe procura associada

---

<sup>2</sup> Interprete-se rota como um circuito completo que visita um conjunto de clientes num percurso fechado.

<sup>3</sup> Segundo Vacic & Sobh (2004), o TSP pode ser definido como: dado um número finito de nodos e o custo de viajar entre eles (geralmente distância geográfica entre os nodos), determina-se a forma mais económica de visitar todos os nodos e regressar ao armazém.

a cada localização, exceto o armazém, obtemos um VRP. Assim como o TSP, o VRP pertence à classe de problemas NP-difíceis<sup>4</sup> (Cordeau et al., 2007).

### 3.2.2. Definição do VRP

O VRP pode ser definido formalmente sob a forma de um grafo completo. Seja  $G = (V, A)$  um grafo onde  $V = \{0, 1, \dots, n, n + 1\}$  é um conjunto de vértices que representam cidades ou localizações, sendo o armazém representado pelo vértice 0 e  $n + 1$ , e  $A$  o conjunto de arcos que estabelecem a ligação entre o par de cidades/localizações  $i, j \in V$ . A partir do vértice 0 só se poderão iniciar rotas, que terminarão no vértice  $n + 1$ . Cada um dos arcos  $(i, j)$ , para  $i \neq j$ , tem um custo não negativo associado, podendo este ser interpretado como custo de viagem ou tempo de viagem, conforme o problema. Geralmente  $c_{ij}$  corresponde ao percurso mais curto entre as duas localizações, traduzido pelas distâncias Euclidianas<sup>5</sup> entre  $i$  e  $j$ . Se assim for, e se a matriz de custos não negativo  $C = (c_{ij})$  for simétrica, os arcos não possuem direção definida e passam a ser designados por arestas e  $E$  passa a representar o conjunto de arestas, sendo designados por VRP simétricos. Caso contrário o VRP é assimétrico, i. e se os arcos que unem dois vértices só puderem ser percorridos num sentido, resulta numa matriz de custos assimétrica. Localizados no armazém estão  $m$  veículos, sendo que  $m_{min} < m < m_{Máx}$ . Se  $m_{min} = m_{Máx}$ , então  $m$  é fixo. Caso  $m_{min} = 1$  e  $m_{Máx} = n - 1$ ,  $m$  é livre e é associado um custo fixo por cada veículo utilizado. O problema de rotas para veículos consiste no desenho de um conjunto de rotas para veículos de modo a:

1. Cada cidade contida em  $V \setminus \{1\}$  é visitada somente uma vez por um veículo;
2. Todas as rotas iniciam-se e terminam no armazém;
3. Todas as restrições devem ser satisfeitas.

<sup>4</sup> O tempo necessário para resolver os problemas NP-difíceis cresce exponencialmente em relação ao tamanho da instância.

<sup>5</sup> Distância compreendida entre dois pontos.

### 3.2.3. Principais Componentes

Alguns dos componentes que caracterizam um VRP segundo Toth & Vigo (2002a) podem ser identificados na definição anteriormente apresentada:

- **Rede rodoviária** – é expressa segundo um grafo constituído por vértices e arcos/arestas. Os vértices representam a localização dos armazéns e dos clientes, que se encontram dispersos geograficamente. Os arcos simbolizam os troços da rodovia que ligam os diferentes vértices, e podem ser direcionados ou não direcionados. Associado aos arcos está um custo, que traduz a distância entre dois vértices, e um tempo de viagem, cujo o valor depende do veículo e durante o período em que é atravessado.

- **Clientes** – a estes está associado uma procura, que traduz a carga, que pode ser homogénea ou heterogénea, a recolher e/ou entregar nas instalações destes. Esta operação tem um tempo de duração e deverá ser realizada, em principio, dentro de períodos temporais que deverão coincidir com os horários estabelecidos pelo cliente e o laboral do condutor do veículo. Possíveis limitações de acesso às instalações dos clientes, assim como requisitos específicos para entrega/recolha da carga podem requerer a utilização de veículos que apresentem determinadas características. Por vezes, surgem situações em que não é possível satisfazer a totalidade da procura. Nestas ocasiões, a solução passa por reduzir a carga ou não servir um subconjunto de clientes, o que leva à definição de prioridades ou penalidades.

- **Armazéns** - A rota inicia-se num armazém e pode terminar num ou vários armazéns. O armazém é caracterizado pelo número e tipo de veículos e pela quantidade total de bens que é capaz de armazenar. Geralmente, em situações reais, os veículos terminam as respetivas rotas nos armazéns onde as iniciaram e os clientes estão divididos pelos diferentes armazéns o que permite decompor o VRP em subproblemas, cada um associado a um armazém.

- **Veículos** – a dimensão e a composição da frota de veículos pode ser fixa ou definida de acordo com as necessidades dos clientes. Os veículos possuem uma capacidade máxima, que pode ser expressa em função do peso,

volume ou número de paletes, e estão associados a um armazém, a partir de onde se inicia a rota, existindo a possibilidade desta terminar num armazém diferente. Alguns tipos de bens a entregar/recolher podem exigir que os veículos possuam alguns dispositivos específicos para realizar as operações necessárias, assim como dividir o contentor destes em subcompartimentos. Cada veículo poderá percorrer um conjunto de arcos/arestas. A utilização de um veículo tem um custo associado, que pode ser expresso por rota, unidade de tempo ou de distância.

- **Condutores** – deverão respeitar as restrições que vigoram nos contratos, assim como os regulamentos organizacionais. Os períodos laborais, o número e a duração das paragens são alguns exemplos.

### 3.2.4. Restrições e Custos

As restrições limitam o procedimento de definição das rotas. Estas podem ser classificadas em operacionais e de precedência, segundo Toth & Vigo (2002a).

A natureza dos bens, a exigência na qualidade do serviço prestado e as características dos clientes e veículos vão condicionar a forma como a entrega/recolha será realizada, e por conseguinte a definição das rotas. A capacidade do veículo nunca deverá ser violada, assim como o serviço prestado deverá ocorrer em períodos coincidentes entre a janela temporal dos clientes e o horário laboral do condutor, são alguns exemplos de restrições operacionais. As restrições de precedência impõem a ordem pela qual os clientes são visitados. Quando determinado cliente tem de ser servido em determinado momento da sequência, devido ao produto a entregar neste ter sido levantado num cliente visitado anteriormente, esta situação expressa uma restrição de precedência.

Para quantificar o custo global de um conjunto de rotas e verificar se as restrições são satisfeitas é necessário conhecer os custos e o tempo de viagem. O custo de viagem é o custo de percorrer a distância mais curta que une dois vértices. O tempo que leva um veículo a percorrer essa distância é o tempo de

viagem. A matriz de custo viagem e tempo de viagem definem se o gráfico é direcionado ou não direcionado, caso esta seja assimétrica ou simétrica, respectivamente.

### 3.2.5. Objetivos

Toth & Vigo (2002a) consideram que os objetivos dos VRP's podem diferenciar de acordo com as especificidades apresentadas pelos vários problemas. Os problemas podem ter como objetivo:

- Minimização do custo global de transporte, da distância total percorrida (ou do tempo total) e do custo fixo pela utilização dos veículos e dos seus condutores;
- Minimização dos veículos necessários para visitar todos os clientes;
- Minimização das penalidades, nos problemas em que não seja possível satisfazer a totalidade da procura de alguns clientes.

Pode em alguns problemas o objetivo ser uma combinação entre estes.

### 3.2.6. Formulação Matemática

Foi possível constatar que a maioria das formulações visam a minimização de um objetivo. Laporte (1992), citado em Liang et al. (2008), apresentou a seguinte formulação para o VRP:

Função Objetivo: 
$$\min \sum_{i \neq j} c_{ij} x_{ij}$$

Sujeito a: 
$$\sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i \in V, \tag{1}$$

$$\sum_i x_{ij} = 1 \quad \forall j \in V \tag{2}$$



$$\sum_i x_{ij} \geq |S| - v(S) \quad \{S: S \subseteq V \setminus \{1\}, |S| \geq 2\}, \quad (3)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall \{i, j\} \in E; i \neq j \quad (4)$$

$V$  é o conjunto de vértices que representam as cidades a visitar,  $E$  o conjunto de arestas que estabelecem as ligações entre todos os vértices e  $c_{ij}$  o custo de percorrer a aresta que une o vértice  $i$  ao  $j$ .  $S$  é um subconjunto de  $V$ .  $v(S)$  é o número mínimo de veículos necessários para visitar todos os vértices contidos em  $S$  na solução ótima. Se  $x_{ij} = 1$  significa que a cidade  $j$  é visitada imediatamente a seguir ao cliente  $i$ , caso contrário  $x_{ij} = 0$ . As restrições (1) e (2) garantem, respetivamente, que para uma cidade  $i \in V$ , existe somente uma ligação de saída para outra cidade e uma de chegada. A restrição (3) elimina a possibilidade de formação de ciclos e a restrição (4) define que  $x$  é variável binária, ou seja, só pode tomar o valor de 0 ou 1.

### 3.3. Variantes do VRP

Nesta secção vão ser apresentadas algumas das variantes do problema de rotas para veículos mais usuais, assim como as respetivas formulações matemáticas.

Todas as variantes que serão abordadas são generalizações, direta ou indiretamente do TSP, pertencem à classe dos problemas NP-difíceis, assim como o VRP.

#### 3.3.1. VRP com Capacidade

O problema de rotas para veículos com capacidade (CVRP – *Capacitated Vehicle Routing Problem*) é a versão mais básica do VRP. Esta variante considera que os veículos têm uma capacidade limitada  $Q$ , que tem de ser respeitada.

Os veículos são utilizados para servir os clientes, o que consiste na entrega de um conjunto de bens. A quantidade de produto é geralmente designada por procura  $d_i$  para cada  $i = 1, \dots, n$ . Esta assume um valor não negativo que é conhecido antes da determinação das rotas, assim como a localização geográfica do cliente. O armazém apresenta uma procura fictícia nula,  $d_0 = 0$ .

Num único armazém estão sedeados uma frota homogénea de  $m$  veículos. Geralmente, a cada veículo só pode ser associado uma rota. De modo a garantir a admissibilidade é assumido que  $Q \geq d_i$ , para cada  $i = 1, \dots, n$ . Também se considera que  $m \geq m_{min}$ , onde  $m_{min}$  representa o número mínimo de veículos necessários para servir os clientes. Sendo  $d(S)$  a soma das procuras dos clientes que constituem o subconjunto  $S$ ,  $m_{min}$  pode ser calculado da seguinte forma:

$$v(S) = \left\lceil \frac{d(S)}{Q} \right\rceil$$

A elaboração de cada um dos  $m$  circuitos deve respeitar os seguintes pontos:

1. Cada circuito inicia-se e termina no vértice que representa o armazém;
2. O vértice de cada cliente é incluído somente num circuito, o que significa que só é visitado uma vez;
3. O somatório das procuras nunca pode exceder a capacidade do veículo  $Q$ .

Contudo existem problemas em que as restrições de capacidade dos veículos podem ser substituídas por restrições que estabeleçam o limite máximo para distância ou duração,  $T$  de cada uma das rotas. Esta variante do CVRP é designada por problema de rotas para veículos com distância (DVRP – *Distance-Constrained Vehicle Routing Problem*). A cada arco ou aresta está associado uma distância entre dois pontos ou o tempo de viagem que leva a percorrer, representado por  $t_{ij}$ . O somatório das distâncias e dos tempos de viagem dos

arcos que constituem cada uma das rotas, representa, respetivamente, a distância ou tempo total de cada rota. Se a frota de veículos for heterogénea cada veículo apresenta um limite  $T$  diferente. Quando é considerado a duração total de cada rota, para além do tempo de viagem entre cada um dos vértices também será considerado o tempo de serviço  $s_i$  em cada cliente  $i$ , que traduz o tempo que o veículo terá de permanecer nas instalações do cliente em questão. O  $s_i$  pode ser contabilizado no valor de  $t_{ij}$ , se  $t_{ij} = t'_{ij} + \frac{s_i}{2} + \frac{s_j}{2}$ , onde  $t'_{ij}$  representa tempo de viagem original de cada um dos arcos. As matrizes de custo e de distância ou de tempos de viagem, normalmente, coincidem. O objetivo deste tipo de problemas visa a minimização da distância ou duração global das rotas. Quando o problema engloba simultaneamente restrições de capacidade e de distância/duração das rotas, é designado por problema de rotas para veículos de distância e capacidade (DCVRP – *Distance-Constrained CVRP*).

### 3.3.1.1. Formulação Matemática do CVRP

Quando a matriz de custo do CVRP é assimétrica, a formulação matemática é da seguinte forma (Toth & Vigo, 2002a):

$$\text{Função Objetivo: } \min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{Sujeito a: } \sum_{i \in V} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in V \setminus \{0\}, \quad (5)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in V \setminus \{0\}, \quad (6)$$

$$\sum_{i \in V} x_{i0} = K \quad (7)$$

$$\sum_{j \in V} x_{0j} = K \quad (8)$$

$$\sum_{i \notin S} \sum_{j \in S} x_{ij} \geq v(S) \quad \forall S \subseteq V \setminus \{0\}, S \neq \emptyset, \quad (9)$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\} \quad \forall i, j \in V. \quad (10)$$

A restrição (5) e (6) têm significado idêntico às restrições (1) e (2) do modelo do VRP, ou seja, estabelecem, respetivamente, o grau de entrada e de saída dos vértices que representam os clientes. As restrições (7) e (8) impõem, respetivamente, o grau de entrada e saída do vértice que representa o armazém, que é igual ao número de veículos utilizados para servir os clientes. A restrição (9) assegura que a procura total de uma dada rota não excede a capacidade do veículo  $Q$ , assim como garante a conectividade da solução. A restrição (10) tem o mesmo significado da restrição (4).

### 3.3.2. VRP com Janelas Temporais

Em comparação ao CVRP, o problema de rotas para veículos com janelas temporais (VRPTW – *Vehicle Routing Problem with Time Windows*) considera adicionalmente a existência de um intervalo de tempo representado por  $[a_i, b_i]$  específico de cada cliente  $i$ , designado por janela temporal. Cada cliente tem que ser servido dentro da respetiva janela temporal. A janela temporal do armazém é representada por  $[a_0, b_0] = [a_{n+1}, b_{n+1}]$ . O veículo só poderá iniciar a rota a partir do instante  $a_0$ , enquanto que nenhuma rota poderá terminar após o instante  $b_{n+1}$ . Geralmente as janelas temporais podem ser classificadas como:

- *Soft* - o veículo poderá realizar o serviço fora do período definido para o efeito, mas tem uma penalidade associada;
- *Hard* – O veículo nunca poderá servir o cliente depois da respetiva janela temporal fechar. Se o veículo chegar às instalações do cliente

antes da abertura da janela temporal pode aguardar até que esta se inicie.

As janelas temporais podem ainda ser classificadas como *Semi-Soft* (Qureshi, Taniguchi & Yamada, 2010). Este tipo de janelas combina as melhores características das janelas do tipo *Hard* e *Soft*. Os veículos se chegarem às localizações dos clientes antes da abertura das respectivas janelas poderão aguardar que estas abram sem custos, particularidade das janelas tipo *Hard*, e o serviço também poderá ocorrer depois da janela temporal ter encerrado mas com uma penalidade associada, tal como acontece nas janelas temporais do tipo *Soft*.

O tempo durante o qual o veículo  $k$  terá de permanecer nas instalações do cliente  $i$  para que seja servido é representado por  $s_i^k$ . Este valor é específico de cada cliente, dependentemente do veículo que preste o serviço. Para o armazém é assumido que  $s_o^k = 0$ . A cada arco ou aresta está associado o tempo de viagem  $t_{ij}$  que leva um veículo a chegar do nodo  $i$  ao nodo  $j$ . Os tempos de viagem e os tempos de duração de serviço são conhecidos para todo o conjunto de vértices.

Uma solução só será admissível se  $\min_{i \in V \setminus \{0\}} b_i - t_{0,i} \geq a_0$  e  $b_{n+1} \geq \min_{i \in V \setminus \{0\}} a_i + s_i^k + t_{i,n+1}$ . Em situações em que se verifique que  $a_i + s_i^k + t_{ij} > b_j$  o arco ou aresta que une o vértice  $i$  e  $j$  pode deixar de ser considerado de modo a assegurar a admissibilidade da solução.

A resolução do problema visa determinar  $m$  circuitos simples a um custo mínimo considerando que:

1. Cada circuito inicia-se e termina no vértice que representa o armazém;
2. O vértice de cada cliente é incluído somente num circuito, o que significa que só é visitado uma vez;
3. O somatório das procuras numa rota nunca pode exceder a capacidade do veículo  $Q$ ;
4. Para um dado cliente  $i$ , o veículo  $k$  terá de chegar dentro da respetiva janela temporal  $[a_i, b_i]$ , onde permanecerá  $s_i^k$  instantes de tempo.

Com a consideração da questão temporal presente nos VRPTW o custo pode ser interpretado como a duração da rota ou, perante as situações de janelas temporais *hard*, o tempo de espera pela abertura de janelas temporais.

### 3.3.2.1. Formulação Matemática do VRPTW

Nesta secção será apresentado e explicitado o modelo matemático para o VRPTW (Cordeau et al., 2002):

$$\begin{aligned} \text{Função Objetivo: } & \min \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}^k \\ \text{Sujeito a: } & \sum_{k \in K} \sum_{j \in \Delta^+(i)} x_{ij}^k = 1 \quad \forall i \in V, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\sum_{j \in \Delta^+(0)} x_{0j}^k = 1 \quad \forall k \in K \quad (12)$$

$$\sum_{i \in \Delta^-(j)} x_{ij}^k - \sum_{i \in \Delta^+(j)} x_{ji}^k = 0 \quad \forall k \in K, j \in V, \quad (13)$$

$$\sum_{i \in \Delta^-(n+1)} x_{i,n+1}^k = 1 \quad \forall k \in K, \quad (14)$$

$$x_{ij}^k (w_i^k + s_i + t_{ij} - w_j^k) \leq 0 \quad \forall k \in K, (i,j) \in A, \quad (15)$$

$$a_i \sum_{j \in \Delta^+(i)} x_{ij}^k \leq w_i^k \leq b_i \sum_{j \in \Delta^+(i)} x_{ij}^k \quad \forall k \in K, i \in V, \quad (16)$$

$$H \leq w_i^k \leq L \quad \forall k \in K, i \in \{0, n+1\}, \quad (17)$$

$$\sum_{i \in V} d_i \sum_{j \in \Delta^+(i)} x_{ij}^k \leq Q \quad \forall k \in K, \quad (18)$$

$$x_{ij}^k \geq 0 \quad \forall k \in K, (i, j) \in A. \quad (19)$$

$$x_{ij}^k \in \{0,1\} \quad \forall k \in K, (i, j) \in A. \quad (20)$$

Neste modelo são consideradas duas variáveis de decisão  $x_{ij}^k$  representa uma variável de fluxo que se tiver valor 1 significa que o arco que liga o nodo  $i$  ao  $j$  é percorrido pelo veículo  $k$ , caso contrário tem o valor 0;  $w_i^k$  é uma variável de tempo que indica o instante de tempo em que o veículo  $k$  chegou ao cliente  $i$ . Nesta formulação foi apresentada alguma notação ainda não utilizada anteriormente:  $\Delta^-(i)$  indica o subconjunto de nós que precedem  $i$  na rota na qual está inserido, enquanto  $\Delta^+(i)$  é o conjunto de nós que sucedem  $i$ ;  $H$  representa o instante de abertura da janela temporal do armazém e  $L$  o respetivo momento em que encerra, ou seja  $H = a_0 = a_{n+1}$  e  $L = b_0 = b_{n+1}$ . A restrição (11) assegura que o cliente  $i$  é visitado somente uma vez por um veículo  $k$ . As equações (12), (13) e (14) indicam, respetivamente, que cada veículo deixa o armazém (vértice 0); quando um cliente é visitado por um veículo, este tem partir para outro destino; e cada veículo tem de terminar a rota no armazém (vértice  $n + 1$ ). A admissibilidade da solução, relativamente a considerações temporais, é assegurada pelas restrições (15), (16) e (17). A (15) estabelece a relação entre o tempo de saída de um cliente e o tempo de chegada ao cliente que o sucede na rota. As inequações (16) e (17) garantem que o instante em que o veículo visita determinado cliente terá de estar, respetivamente, dentro da janela temporal do cliente em questão e do armazém. Analogamente à restrição (9) do modelo do CVRP, a restrição (18) assegura que a capacidade do veículo não é violada em nenhum momento. A restrição (20) tem o mesmo significado do que as restrições (4) e (10). Se um veículo não for utilizado é-lhe atribuído uma rota “vazia”  $(0, n + 1)$ .

### 3.3.3. VRP com Entregas e Recolhas

Na literatura a definição problema de rotas para veículos com entregas e recolhas (VRPPD – *Vehicle Routing Problem with Pickup and Delivery*) diverge. Toth & Vigo (2002b) abordam o VRPPD e o problema de rotas para veículos com *backhauls* (VRPB – *Vehicle Routing Problem with Backhauls*) como problemas distintos, enquanto que Ropke & Pisinger (2006) consideram que ambas as designações são válidas para um problema comum. Parragh, Doerner & Hartl (2008) considerou que o problema de recolhas e entregas se divide em duas grandes classes: os VRPB, cujo o transporte é realizado a partir e para o armazém, e os VRPPD cujo transporte da carga é realizado entre os clientes. Nagy & Salhi (2005) dividiram o problema em três grupos:

- *Delivery-first, pickup-second* – os clientes são divididos em: *linehaul*, os quais têm uma quantidade de produto a entregar associado e *backhauls*, clientes que, contrariamente, têm uma carga para ser levantada nas suas instalações. O veículo primeiro visita o grupo de clientes *linehaul* e só depois os *backhaul*. Desta forma, evita-se as dificuldades que a reorganização no veículo entre a carga a entregar e a recolher exige, assim como a carga flutuante que podia pôr em causa a admissibilidade de uma rota;

- *Mixed pickups and deliveries* – Não existe uma ordem estabelecida para visitar primeiro uma classe de clientes e depois outra. Um cliente do tipo *blackhaul* pode ser visitado antes de um *linehaul*;

- *Simultaneous pickups and deliveries* – os clientes podem ter associado duas quantidades de bens: uma a recolher e outra a entregar.

Os problemas *mixed pickups and deliveries* podem ser interpretados como *simultaneous pickups and deliveries*, se se considerar que os clientes *linehaul* têm uma quantidade de bens a recolher nula, e os *backhaul* não têm carga a receber. Segundo os autores, os problemas das classes *delivery-first, pickup-second* e *mixed pickups and deliveries* podem também ser designados como VRPB.



A definição e caracterização do VRPDD apresentada por Desaulniers, G. et al. (2002) foi a considerada. Segundo os autores anteriormente referidos, na versão básica do VRPPD, ao cliente está associado duas quantidades: uma a entregar,  $d_i$ , e outra a recolher,  $p_i$ . Há situações em que o cliente poderá apresentar somente uma procura  $d_i$ , tal que  $d_i = d_i - p_i$  havendo a possibilidade deste valor ser negativo. Cada  $d_i$  e  $p_i$  têm, respetivamente, um vértice de origem da carga,  $O_i$ , e um que representa o vértice onde vai ser descarregada,  $D_i$ . O serviço num cliente inicia-se pela descarga de  $d_i$  e só depois se procede à recolha de  $p_i$ . A carga corrente no veículo antes de visitar um próximo cliente resulta da soma de todas as cargas a entregar aos clientes e das quantidades de bens recolhidas nos clientes já visitados menos as quantidades já entregues.

Durante a determinação das rotas vários pontos deverão ser respeitados:

1. Cada circuito inicia-se e termina no vértice que representa o armazém;
2. O vértice de cada cliente é incluído somente num circuito, o que significa que só é visitado uma vez;
3. O somatório das procuras nunca pode exceder a capacidade do veículo  $Q$ ;
4. Se  $O_i$  não coincidir com o armazém, este deverá estar incluído na mesma rota que o cliente  $i$ , sendo visitado antes deste;
5. Se  $D_i$  não coincidir com o armazém, este deverá estar incluído na mesma rota do que cliente  $i$ , e deve ser visitado depois deste.

### 3.3.3.1. Formulação Matemática VRPPD

Com base na formulação matemática do VRPTW, apresentada já anteriormente, Parragh, Doerner & Hartl (2008) apresentaram um modelo para problema de recolhas e entregas:

Função Objetivo: 
$$\min \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}^k$$

$$\text{Sujeito a:} \quad \sum_{k \in K} \sum_{j: (i,j) \in A} x_{ij}^k = 1 \quad \forall i \in P \cup D, \quad (21)$$

$$\sum_{j: (0,j) \in A} x_{0j}^k = 1 \quad \forall k \in K \quad (22)$$

$$\sum_{i: (i,j) \in A} x_{ij}^k - \sum_{i: (j,i) \in A} x_{ji}^k = 0 \quad \forall k \in K, j \in P \cup D, \quad (23)$$

$$\sum_{i: (i, n+\tilde{n}+1) \in A} x_{i, n+\tilde{n}+1}^k = 1 \quad \forall k \in K, \quad (24)$$

$$x_{ij}^k = 1 \Rightarrow w_j^k \geq w_i^k + s_i + t_{ij} \quad \forall k \in K, (i,j) \in A, \quad (25)$$

$$x_{ij}^k = 1 \Rightarrow C_j^k = C_i^k + d_j \quad \forall k \in K, (i,j) \in A, \quad (26)$$

$$\max\{0, d_i\} \leq C_i^k \leq \min\{Q^k, Q^k + d_i\} \quad \forall k \in K, i \in V, \quad (27)$$

$$x_{ij}^k \in \{0,1\} \quad \forall k \in K, (i,j) \in A. \quad (28)$$

A carga no veículo  $k$  quando este deixa o vértice  $i$  é representado por  $C_i^k$  e considera-se que  $d_i = d_i - p_i$ .  $Q^k$  simboliza a capacidade máxima do veículo  $k$ .  $P$  representa o conjunto de clientes nos quais uma carga terá de ser recolhida,  $P = \{1, \dots, n\}$ , e  $D$  representa o conjunto de clientes, que por sua vez, têm um carga associada que terá de ser entregue,  $D = \{n+1, \dots, n+\tilde{n}\}$ . As restrições (21), (22), (23) e (24) têm significado idêntico às (11), (12), (13) e (14), respetivamente. A restrição (25) evita a criação de subrotas, por meio de uma variável temporal. A não violação da capacidade do veículo é assegurada pelas restrições (26) e (27). A restrição (26) estabelece os requisitos de compatibilidade entre uma rota e carga do veículo.

## 3.4. Métodos de Resolução VRP

Os métodos de resolução podem ser divididos em dois grandes grupos: os métodos exatos e os métodos heurísticos. Inicialmente serão apresentados os métodos exatos, e posteriormente os métodos heurísticos.

### 3.4.1. Métodos Exatos

Segundo Laporte & Nobert (1987) os métodos exatos podem ser classificados em três categorias: métodos de pesquisa em árvore diretos, programação dinâmica e programação linear inteira. Nesta secção cada uma destas técnicas será descrita.

#### 3.4.1.1. Métodos de Pesquisa em Árvore Diretos

Os métodos de pesquisa em árvore diretos permitem construir cada rota de forma sequencial através de uma árvore *branch-and-bound*. O *branch-and-bound* é uma técnica que divide a região admissível em subgrupos mais pequenos, sucessivamente, calculando para cada um os limites do valor objetivo que permitem descartar algum dos grupos de análises posteriores. O cálculo dos limites só é possível devido à substituição dos modelos correntes por modelos menos restringidos. Este procedimento denomina-se relaxação, e permite a partir do modelo resultante determinar os limites para o modelo inicial. Este procedimento termina quando os submodelos originam soluções não admissíveis ou não produzem soluções melhores do que as já determinadas. A melhor solução encontrada é a solução ótima.

#### 3.4.1.2. Programação Dinâmica

Programação dinâmica é uma técnica que é utilizada no desenvolvimento de algoritmos com o propósito de solucionar problemas de otimização (Moura,

2000), desenvolvida pelo matemático americano Richard Bellman, no início da década de 50 (Eddy, 2004). O termo “programação” em nada está relacionado com programas de computador ou escrita de código (Cormen et al., 2009). “Programação” significa, neste contexto, planeamento (Dasgupta, Papadimitriou & Vazirani, 2006) ou método tabular (Cormen et al., 2009).

Esta técnica permite decompor um problema complexo, facilitando o cálculo da solução ótima. O problema é decomposto numa sequência de problemas de menor dimensão (Bradley, Hax & Magnanti, 1977). Sequencialmente é calculada a solução ótima de cada um dos problemas resultantes da decomposição. A combinação destes conduz à solução do problema original (Cormen et al., 2009). A aplicação da programação dinâmica só é possível se existirem elementos que interrelacionem os problemas (Cormen et al., 2009).

A principal particularidade deste tipo de abordagem é utilizar uma estrutura multi-estágios. Cada um dos estágios é resolvido como um problema de otimização normal, sequencial e individualmente. Frequentemente, o estágio simboliza diferentes instantes de tempo no plano do problema, estando associado à evolução do processo (Moura, 2000).

Outra característica significativa deste tipo de abordagem é o conceito de estado, que está associado a cada estágio. Os estados traduzem a informação necessária para uma compreensão global das consequências das decisões correntes em ações futuras.

### **3.4.1.3. Programação Linear Inteira**

A técnica de programação linear é utilizada para resolver uma classe específica de problemas de programação matemática, denominada por problemas de programação linear. Esta categoria de problemas visa, geralmente, a afetação de recursos limitados, de forma ótima (Moura, 2000). A função objetivo e restrições, que constituem o modelo matemático, são expressas por funções

lineares (Cormen et al., 2009). O termo inteiro significa que todas as variáveis de decisão têm de ter valores inteiros (Bradley, Hax & Magnanti, 1977).

### 3.4.2. Métodos Heurísticos

Na literatura é possível encontrar duas grandes classes de métodos heurísticos: as heurísticas clássicas e as metaheurísticas (Laporte et al., 2000). Nesta secção, numa primeira fase, serão caracterizadas e apresentadas algumas heurísticas clássicas e, posteriormente as metaheurísticas.

Uma vez que não faz parte do âmbito deste trabalho a aplicação de métodos heurísticos, considera-se que não é necessário fazer uma explicação exaustiva e detalhada destes métodos. No entanto, seria uma falha na revisão bibliográfica não falar de uma forma resumida da existência destes métodos também utilizados na resolução do problema em questão.

#### 3.4.2.1. Heurísticas Clássicas

Grande percentagem das heurísticas clássicas foram desenvolvidas entre as décadas de 60 e 90 do século XX, continuando a ser, ainda, as mais utilizadas atualmente. Geralmente geram boas soluções em tempos de computação modestos, embora realizem uma exploração limitada do espaço de soluções. Estes métodos adaptam-se bem a problemas de situações reais que apresentam restrições diversas. Laporte & Semet (1998) classificaram-nas em três grandes categorias:

1. Construtivas – determinam uma solução admissível que minimize o custo. Não inclui nenhum método de melhoria para as soluções obtidas;

2. Duas fases – a resolução do problema contempla duas fases: agrupamento dos vértices em *clusters* admissíveis, e a determinação das rotas. As heurísticas de duas fases podem ser divididas em dois grupos

2.1 *cluster first, route second* – inicialmente os vértices são agrupados em *clusters* admissíveis e só depois as rotas são construídas;

2.2 *route first, cluster second* – é construída uma rota que inclui todos os vértices a visitar, que será segmentada em rotas admissíveis;

3. Melhoria – melhoram a solução obtida através de permutas de arestas/arcos intra ou inter rotas.

Para cada uma das classes anteriormente descritas será apresentado um algoritmo exemplificativo. Para representar as heurísticas construtivas será o algoritmo Clarke & Wright, enquanto o *sweep algorithm* exemplificará a categoria de duas fases.

### **3.4.2.1.1. Algoritmo Clarke & Wright**

O algoritmo proposto por Clarke & Wright (1964) é, provavelmente, a heurística mais conhecida, sendo das mais utilizadas, apesar de apresentar algumas fragilidades. Aplica-se a problemas onde a variável de decisão é o número de veículos e é baseada no conceito de poupança. Inicialmente, o número de rotas existente é igual ao número de clientes. Cada uma das rotas iniciais, é singular, *i. e.* inclui somente o armazém e um cliente por rota. Em cada passo, se admissível, ocorre uma fusão entre as duas rotas que geram a maior poupança. Os problemas podem ser direcionados e não direcionados, embora o número potencial de fusões de rotas diminua para metade no primeiro caso. Existem 2 versões deste algoritmo: uma paralela e outra sequencial.

### **3.4.2.1.2. Sweep Algorithm**

Segundo Laporte (1992), Wren (1971) e Wren & Holliday (1972) foram os primeiros a aplicar este método ao CVRP com um e vários armazéns, embora o *sweep algorithm* é frequentemente associado a Gillet & Miller (1974), citado em Laporte (1992), que o designaram desta forma. O *sweep algorithm* aplica-se a

VRP com instâncias planas. Os *clusters* são determinados rodando um raio que está centrado no armazém. As rotas de veículo são determinadas resolvendo o TSP para cada *cluster*. Para facilitar a aplicação do método, cada vértice  $i$  é representado pelas respectivas coordenadas polares  $(\theta_i, \rho_i)$ , onde  $\theta_i$  representa o ângulo e  $\rho_i$  o comprimento do raio compreendido entre o armazém e a localização geográfica do cliente  $i$ .

### 3.4.2.1.3. Heurísticas de Melhoria

As heurísticas de melhoria são aplicadas às soluções obtidas a partir das heurísticas construtivas com intuito de melhorar as soluções geradas inicialmente. Laporte & Semet (1998) classificaram as heurísticas em duas classes, em função do número de rotas envolvidas: se o método se aplica somente a uma rota de cada vez ou considera várias em simultâneo.

Qualquer heurística de melhoria desenvolvida para o TSP pode ser aplicada ao VRP, desde que as rotas sejam melhoradas individualmente. A maioria destas heurísticas baseia-se no mecanismo  $\lambda - opt$  proposto por Lin (1965). O método consiste em remover  $\lambda$  arestas de uma rota, recombinao as restantes arestas de todas as formas possíveis. Na eventualidade de uma das combinações geradas, ser melhor do que a solução inicial, poderá ser a primeira ou a melhor de todo o conjunto, é implementada. Quando novas melhorias não são geradas, identificámos o mínimo local e o procedimento para. Vários autores sugeriram novas versões para a técnica desenvolvida por Lin (1965), tendo como exemplo: o *Or-opt*, proposto por Or (1976), citado em Laporte et al. (2000), que consiste em movimentar uma cadeia de 3, 2 ou 1 vértices para outro local.

Thompson & Psaraftis (1993), citados em Laporte (2007), desenvolveram, uma heurística de melhoria de várias rotas, *b - cyclic, k - transfer*, que considera um conjunto de permutas circulares de  $b$  rotas, onde  $k$  vértices de cada rota são mudados para a rota seguinte no ciclo. Considerando este esquema para a situação em que  $b = 2$ , Van Breedam (1994), citado em Laporte, et al. (2000), classificou as operações melhoria em:

- *String Cross*: duas cadeias de vértices são trocados, cruzando duas arestas de duas rotas diferentes;
- *String Exchange*: duas cadeias com um máximo de  $k$  vértices é permutado entre duas rotas;
- *String Relocation*: uma cadeia com um máximo de  $k$  vértices, com  $k \in \{1, 2\}$  geralmente, é transferida de uma rota para outra;
- *String mix*: o melhor movimento entre o *String Exchange* e *String Relocation*.

### 3.4.2.2. Metaheurísticas

As metaheurísticas permitem realizar uma exploração mais efetiva das regiões com maior potencial do espaço de soluções, algo que não era possível com as heurísticas clássicas. Estes métodos combinam regras sofisticadas de pesquisa de vizinhança, estruturas de memória e recombinação de soluções. Alguns dos procedimentos que constituem as metaheurísticas provêm das heurísticas clássicas, construtivas e de melhoria. Aliás Laporte et al. (2000) defende que as metaheurísticas podem ser interpretadas como uma evolução natural das heurísticas clássicas. Durante o processo é permitido que as soluções “intermédias” possam ser piores que as anteriores ou mesmo inadmissíveis. Soluções de maior qualidade são obtidas, o que exige maior tempo de computação. A aplicação destes métodos, normalmente, está limitada a situações concretas exigindo parâmetros bem definidos (Laporte et al., 2000).

Gendreau, Laporte & Potvin (1998) identificaram 6 tipos de metaheurísticas: arrefecimento simulado (*Simulated Annealing*), *deterministic annealing*, pesquisa tabu (*tabu search*), algoritmos genéticos (*genetic algorithms*), *ant systems* e *neural networks*. Laporte (2007) sugeriu uma classificação diferente, dividida em três classes: pesquisa local (*local search*), pesquisa na população (*population search*) e mecanismos de aprendizagem (*learning mechanism*).



Além destas metaheurísticas existem outras usadas por outros autores na resolução deste problema. Por exemplo, Baker & Carleto (2003) utilizaram uma abordagem heurística baseada no procedimento GRASP (*greedy randomised adpative search procedure*), enquanto que Kytöjoki et. al (2007) apresentaram uma eficiente heurística VNS (*value neighborhood search*).



## Capítulo 4

### Caracterização do problema

Confrontando o caso da TCAP, apresentado no capítulo 1, com o resultado da revisão da literatura realizada e exposta no capítulo anterior, conclui-se que este pode ser encarado como um problema de rotas para veículos, sendo neste capítulo devidamente caracterizado.

A grave crise económico-financeira que o país atravessa, tem afetado negativa e generalizadamente, a indústria. A indústria automóvel tem sido uma das mais penalizadas, a TCAP não é exceção. Este cenário levou a diminuir drasticamente o número de viaturas produzidas, o que não traduz de algum modo um calendário de produção normal. Para que este estudo possa fazer sentido considerou-se uma produção semanal de 60 viaturas Toyota *Dyna*: 12 cabine simples 100, 35 cabine simples 150, 4 cabine dupla 100, 6 cabine dupla 150 e 3 XZU. O que distingue a versão 100 de uma 150 é o tipo de rodado apresentado: 100 simples e 150 duplo. Uma vez que o modelo *Hiace* será descontinuado até ao final do ano e as rotas de veículos não serão implementadas, devido a imperativos de diferente natureza, antes de 2013, este não será englobado no estudo.

A solução de um problema de rotas para veículos passa por determinar um conjunto de rotas para veículos que visita um conjunto de clientes. Nesta situação específica é necessário visitar um conjunto de fornecedores e não de clientes.

As rotas iniciam-se e terminam na TCAP. Quando o veículo sai das instalações da TCAP já leva carga no contentor. Esta carga é representada pelo conjunto de SSP's a entregar em alguns dos locais a visitar. Os SSP's são colocados no veículo por um funcionário do armazém. Uma vez nas instalações num dos fornecedores o veículo terá de permanecer por um período de tempo

necessário para que o serviço seja realizado, i.e. que os SSP's sejam entregues e os componentes produzidos pelos fornecedores recolhidos para o contentor.

Seguidamente serão caracterizados os fornecedores (secção 4.1.) e as restrições apresentadas e explicitadas (secção 4.2.).

### **4.1. Fornecedores**

Por motivos de confidencialidade, as empresas em questão não serão referidas nesta dissertação. Para identificar cada um dos fornecedores serão utilizados letras do alfabeto.

De entre os fornecedores IN da TCAP somente 9 envolvem um fluxo de SSP's e componentes. Dois destes não serão englobados no estudo, diminuindo o número de fornecedores considerados para 7. Um destes fornecedores produz somente um componente que integra uma versão produzida, em média, uma vez por ano, por esta razão não foi considerado. O outro fornecedor é o único que tem as suas instalações localizadas fora do território nacional, não justificando os custos que implicariam esta operação.

O que distingue os fornecedores é o conjunto de dados que os caracteriza: localização geográfica, janelas temporais, tempo de serviço, o peso total de SSP's a entregar e de componentes a recolher. A localização geográfica, ao contrário dos outros dados, não será aqui exposta por motivos de confidencialidade, como já foi referido.

#### 4.1.1.1. Janelas Temporais

Os períodos de tempo definidos para realizar as cargas e descargas pelo fornecedor diferem:

Fornecedor	Janelas Temporais	
	Manhã	Tarde
A	08:00 - 17:00	
B	08:00 - 13:00	14:00 - 17:00
C	08:00 - 12:00	13:00 - 17:00
D	08:00 - 12:00	13:00 - 17:00
E	08:00 - 12:30	13:30 - 16:00
F	08:30 - 12:30	13:30 - 17:30
G	08:30 - 12:30	13:30 - 18:00

Tabela 1 – Janelas temporais dos fornecedores

Somente um dos fornecedores, o fornecedor A, não apresenta uma janela temporal definida por dois intervalos de tempo, um para o período da manhã e outro para o da tarde. Estes fornecedores que têm desta forma o horário estruturado definem uma pausa a meio do dia para almoço, período durante o qual a o serviço não poderá ser realizado. Este tipo de janela temporal tem o nome de janela temporal dupla.

#### **4.1.1.3. Tempo de Serviço**

Este procedimento nunca ocorreu dentro destes moldes e não foi possível realizar um ensaio teste para averiguar o tempo médio que um veículo permaneceria nas instalações dos fornecedores. Este processo é realizado por um funcionário nas instalações da TCAP, como tal foi-lhe solicitado, que com base no seu conhecimento empírico, indicasse o valor médio para levar a cabo as operações. Tendo em conta o valor indicado, considerou-se que o período de tempo que o veículo tem de permanecer nas instalações de cada um dos fornecedores seria de 30 minutos.

#### **4.1.1.4. Carga a entregar e recolher**

De acordo com o calendário de produção semanal considerado foram determinadas as necessidades semanais de componentes, e a respetiva quantidade de SSP's para os produzir. O peso de algumas peças estavam devidamente documentadas nos respetivos desenhos técnicos. As restantes peças, em falta, tiveram de ser pesadas numa balança industrial, assim como as paletes e caixas onde os diferentes componentes são transportados.

O quadro seguinte expõe o peso total da carga a entregar e a recolher nos diferentes fornecedores:

Fornecedor	Peso (kg)	
	Entregar (SSP's)	Recolher
A	0	188,2
B	92,4	3655,248
C	3,2	194,85
D	29,8	325,08
E	2434	1627,56
F	79,2	720,51
G	243,8	636,14

Tabela 2 – Cargas a entregar e recolher nos fornecedores

O fornecedor A é o único fornecedor que não tem nenhuma quantidade de SSP's associado, o que não é coerente com o problema descrito. A razão para este fornecedor ser considerado no estudo prende-se com o facto de quando este se iniciou o fornecedor em questão produzia componentes que incorporava SSP's. Mas com o decorrer do estudo a produção dos referidos componentes passou a estar a cargo de outro fornecedor IN, o fornecedor C. Uma vez que a localização geográfica do fornecedor A fica próxima de vários fornecedores englobados no estudo, decidiu-se que este fosse considerado, existindo assim a possibilidade de reduzir o custo de transporte dos componentes produzidos por este.

## 4.2. Restrições

A determinação das rotas para veículos está sujeita a um conjunto de restrições. Estas condicionam o processo de elaboração de rotas tendo impacto direto nas localizações incluídas em cada rota, assim como na ordem pela qual são visitadas.

As restrições presentes no caso da TCAP, são impostas pelos fornecedores, viatura e horário laboral do motorista:

### 1. Restrições da capacidade do veículo

As rotas serão percorridas somente por uma viatura que possui um contentor com as seguintes características:

Comprimento: 6 *m*

Largura: 2 *m*

Altura: 2,20 *m*

Peso máximo de carga suportado: 2500 *kg*

A carga máxima suportada pelo veículo não pode ser violada em nenhum momento. Não existem requisitos nem procedimentos definidos para colocar a carga nos contentores, como tal somente o peso será considerado para analisar se a capacidade do veículo é respeitada ou não.

### 2. Janela temporal associada ao horário laboral do motorista e à TCAP

O motorista que visitará os diferentes fornecedores é um funcionário da TCAP e o seu horário laboral é idêntico aos dos restantes colaboradores: inicia-se às 7:30 e termina às 16:15, sendo igual à janela temporal da TCAP. As rotas terão de ser percorridas dentro deste intervalo de tempo. Durante este período o motorista tem 45 minutos reservados para o almoço e descanso, tendo flexibilidade para o gerir de acordo com as rotas a percorrer e os períodos de tempo que estão a ser realizados.

### 3. Janelas temporais dos fornecedores



## Capítulo 5

### Resolução do problema

Dada a dimensão reduzida do problema em termos de número de nós (somente 7 fornecedores) optou-se por resolver o problema recorrendo a um modelo matemático com o objetivo de determinar a sua solução ótima. Para o efeito elaborou-se o modelo matemático e fez-se a sua implementação num *software* comercial para teste e obtenção de resultados.

Neste capítulo que agora se inicia será apresentado e explicado pormenorizadamente o modelo matemático que permitirá determinar o conjunto de rotas (secção 5.1). Na secção 5.2 descreve-se sumariamente o *software* utilizado para solucionar o modelo matemático. Nesta mesma secção é exposta e explicitada a solução obtida, assim como outros *outputs* do *software*. A secção 5.3 encerra o capítulo com uma análise de sensibilidade do modelo desenvolvido, de modo a averiguar a validade do mesmo para diferentes cenários.

#### 5.1. Modelização do problema

A solução do modelo desenvolvido representa o conjunto de rotas ótimas que minimizam o custo de transporte, que neste caso simboliza o tempo que leva a realizá-las. O problema em questão é complexo devido à diversidade de restrições. As diferentes rotas originadas serão percorridas por um só veículo, contudo ao longo desta secção sempre que se faça referência a um conjunto de veículos na realidade corresponde a um conjunto de rotas. Na mesma linha de raciocínio, o armazém corresponde à localização geográfica da TCAP.

### 5.1.1. Formulação Matemática

O problema em questão pode ser apresentado por um grafo  $G = (N, T)$ , onde  $N = \{0, 1, \dots, n, n + 1\}$  é o conjunto de nós que representam as localizações geográficas dos fornecedores e do armazém e  $T = \{(i, j) : i, j \in N, i \neq j\}$  o conjunto de percursos que estabelece a ligação entre cada par de localizações (arestas do grafo). O armazém é representado pelos nós  $N = \{0, n + 1\}$  e o conjunto de fornecedores por  $C = \{1, \dots, n\}$ , sendo  $C \subseteq N$ . As visitas a cada um dos fornecedores será realizada por um conjunto homogéneo de veículos  $V = \{1, \dots, k\}$ , que apresentam uma capacidade  $Q$ . Associado a cada um dos percursos está um tempo de viagem  $t_{ij}$ , que corresponde à duração da viagem, em minutos, entre o nodo  $i$  e o nodo  $j$ . A cada nodo  $i$  está associado uma quantidade de carga, expressa em  $kg$ , para entregar  $d_i$  e outra para recolher  $c_i$ .  $ts_i$  representa o tempo, em minutos, que o veículo terá de permanecer nas instalações do fornecedor  $i$  para que o serviço seja concluído. O serviço deverá ser realizado dentro dos períodos definidos pelos fornecedores para o efeito, designados por janelas temporais,  $[am_i, bm_i] \cup [at_i, bt_i]$ ,  $i \in C$ . Cada janela temporal dos fornecedores está dividida em dois períodos – janelas temporais duplas: um definido para o período da manhã,  $[am_i, bm_i]$ , e outro para o da tarde,  $[at_i, bt_i]$ . Os veículos têm de iniciar as rotas no armazém dentro da janela temporal  $[am_0, bm_0] \cup [at_0, bt_0]$ , e terminá-las dentro da janela temporal  $[am_{n+1}, bm_{n+1}] \cup [at_{n+1}, bt_{n+1}]$ . Se o veículo chegar a cada uma das localizações antes da abertura da janela temporal, poderá aguardar até que seja possível iniciar o serviço.

É assumido que os dados  $t_{ij}$ ,  $d_i$ ,  $c_i$ ,  $ts_i$ ,  $am_i$ ,  $bm_i$ ,  $at_i$ ,  $bt_i$ ,  $Q$  apresentam valores não negativos, podendo ser ou não inteiros.

O modelo que será apresentado utiliza quatro tipo de variáveis de decisão:

- A variável  $x_{ij}^k$ , definida,  $\forall i, j \in N, \forall k \in V$  com  $i \neq j, i \neq n + 1, j \neq 0$ , apresenta o valor 1 se o veículo  $k$  se deslocar do nó  $i$  para o nó  $j$ , e o valor 0 caso contrário.

- A variável  $s_i^k$ , definida,  $\forall i \in N, \forall k \in V$ , representa o instante de tempo que o veículo  $k$ ,  $k \in V$ , inicia o serviço no cliente  $i$ ,  $i \in C$ . É assumido que  $s_0^k = 0, \forall k \in V$ , e  $s_{n+1}^k$  indica o instante de tempo que o veículo  $k$  regressa ao armazém.
- A variável  $LI^k$ , definida,  $\forall k \in V$ , representa a carga presente no veículo  $k$ ,  $k \in V$ , quando sai do armazém.
- A variável  $LF^k$ , definida,  $\forall k \in V$ , representa a carga presente no veículo  $k$ ,  $k \in V$ , quando retorna ao armazém.

Estabelecido o número de veículos, o modelo tem como objetivo definir um conjunto de rotas cujos tempos totais para as realizar sejam mínimos. A cada veículo será atribuída uma rota. As rotas deverão ser admissíveis, i. e. devem respeitar o conjunto de restrições de capacidade (dos veículos) e janelas temporais dos respetivos fornecedores e do armazém.

O problema pode ser apresentado através do seguinte modelo:

$$\text{Função Objetivo: } \min \sum_{k \in K} s_{n+1}^k \quad (1)$$

$$\text{Sujeito a: } \sum_{j \in C} x_{0j}^k = 1 \quad \forall k \in V \quad (2)$$

$$\sum_{i \in C} x_{i,n+1}^k = 1 \quad \forall k \in V \quad (3)$$

$$\sum_{i \in N, i \neq j} x_{ij}^k - \sum_{i \in N, i \neq j} x_{ji}^k = 0 \quad \forall k \in V. \forall j \in N \quad (4)$$

$$\sum_{i \in N, i \neq j} \sum_{k \in K} x_{ij}^k = 1 \quad \forall j \in C \quad (5)$$

$$\sum_{j \in N} x_{0j}^k \leq 1 \quad \forall k \in V \quad (6)$$

$$s_i^k + ts_i + t_{ij} \leq s_j^k + M(1 - x_{ij}^k) \quad \forall k \in V. \forall i, j \in N, i \neq j \quad (7)$$

$$(am_i \leq s_i^k \leq bm_i) \vee (at_i \leq s_i^k \leq bt_i) \quad \forall k \in V, i \in N \quad (8)$$

$$LI^k = \sum_{i,j \in N, i \neq j} d_{0i} x_{ij}^k \quad \forall k \in V \quad (9)$$

$$LI^k \leq Q \quad \forall k \in V \quad (10)$$

$$LF^k = \sum_{i,j \in N, i \neq j} c_j x_{ij}^k + \left( LI^k - \sum_{i,j \in N, i \neq j} x_{ij}^k d_{0j} \right) \quad \forall k \in V \quad (11)$$

$$LF^k \leq Q \quad \forall k \in V \quad (12)$$

$$x_{ij}^k \in \{0,1\} \quad \forall k \in V. \forall i, j \in N \quad (13)$$

$$s_i^k \geq 0 \quad \forall k \in V. \forall i \in N \quad (14)$$

$$LI^k \geq 0 \quad \forall k \in V \quad (15)$$

$$LF^k \geq 0 \quad \forall k \in V \quad (16)$$

A função objetivo (1), indica que o presente modelo visa minimizar o tempo total que o número de veículos leva a realizar as rotas. O conjunto de equações (2 a 17) apresentadas, representam restrições do problema, que vão condicionar a determinação das rotas. Assim sendo:

- A restrição (2), (3) e (4) são restrições de fluxo e garantem, respetivamente, que cada uma das rotas inicia no nó 0, termina no nó  $n + 1$  e um veículo só sairá do nó  $j$  se previamente o tiver visitado;
- A restrição (5) garante que cada fornecedor  $j$  é visitado somente uma vez por um veículo  $k$  proveniente da localização  $i$ , podendo  $i$  representar um outro fornecedor ou o armazém;
- A restrição (6) assegura que se um veículo  $k$  é utilizado a rota associada a este inicia-se no nó 0, ou seja, no armazém;
- A restrição (7) garantem que um serviço num nó só pode ser realizado depois do nó visitado imediatamente antes ter sido servido e o veículo se ter deslocado até ao presente nó.;
- A restrição (8) assegura que as janelas temporais são respeitadas;

- As restrições (9) e (10) garantem, respetivamente, que no momento que o veículo  $k$  abandona o armazém transporta a carga a entregar nos fornecedores que constituem a rota associada ao referido veículo e que não ultrapassa a capacidade do veículo;
- As restrições (11) e (12) garantem, respetivamente, que quando o veículo  $k$  retorna ao armazém transporta a carga carregada nas localizações do conjunto de fornecedores visitados e que esta não excede a capacidade do veículo em questão;
- As restrições (13) a (16) definem as variáveis de decisão.

## 5.2. Apresentação e análise da solução

Para resolver o modelo anteriormente apresentado introduziu-se este no *software* comercial *IBM ILOG CPLEX 12.4 Academics*. A resolução do problema no *software* permitirá obter a solução ótima do problema. A instância que traduz os dados do problema em questão foi solucionada no referido *software*, num computador Intel Core 2 T7200 2.80 GHz, com 2,00 GB de memória RAM.

A implementação do modelo no *software* ocorreu por meio de tentativa-erro, uma vez que o modelo teve de ser descrito de acordo com a sintaxe do *software* por forma a ser funcional. Este processo foi realizado em duas partes: uma destinada à implementação do modelo e outra à criação dos dados. A nível de *software* o modelo matemático encontra-se num ficheiro do tipo *.mod* e os dados num ficheiro de extensão *.dat* (Anexos 1 e 2, respetivamente).

Durante a implementação do modelo no *software* foi feita uma simplificação relativa ao peso total dos componentes a recolher no fornecedor B. Este peso, 3655,248 *kg*, para um único fornecedor, excedia a capacidade máxima do veículo. De forma a simplificar o problema e sem perda de generalidade para o modelo, este fornecedor passou a ser representado por dois nós, B.1 e B.2, com a mesma localização geográfica, associando a cada um deles metade da respetiva quantidade a entregar e recolher no fornecedor B.

Finalizada a implementação correta da formulação matemática solucionou-se o problema, considerando que seriam criadas 4 rotas para veículos. Para

determinar o valor de  $V$  a considerar somou-se o conjunto de componentes a recolher nos diferentes nós e dividiu-se pela capacidade do veículo que seria utilizado, para determinar o número mínimo de veículos necessários,  $V_{min}$ :

$$V_{min} = \left\lceil \frac{7347,588}{2500} \right\rceil = 3$$

Com este valor pretende-se determinar o limite superior máximo considerado para o número de veículos necessários neste problema. Ou seja, uma vez que neste problema consideram-se várias restrições, desde entregas e recolhas, capacidades para os veículos e janelas temporais, com certeza que resultará num acréscimo significativo na função objetivo (minimização do tempo total requerido para efetuar uma rota). Assim sendo, e devido principalmente às restrições de janelas temporais, que são as que “penalizam” mais a função objetivo, optou-se por acrescentar mais um veículo ao valor calculado do seu limite superior, sendo  $V_{max} = 4$ .

As rotas originadas foram:

Rota 1: TCAP – D – B.2 – TCAP;

Rota 2: TCAP – G – B.1 – TCAP;

Rota 3: TCAP – F – TCAP;

Rota 4: TCAP – E – A – C – TCAP.

A figura 2 ilustra as rotas geradas e a tabela 3, os valores da duração de cada uma das quatro rotas:



Figura 2 – Conjunto de rotas geradas

<b>Rotas</b>	<b>Duração da rota (min.)</b>
<b>1</b>	333
<b>2</b>	363
<b>3</b>	90
<b>4</b>	237
<b>Total (min.)</b>	1023

Tabela 3 – Duração de cada uma das rotas

A tabela 4 resume os valores computacionais da resolução do modelo matemático para o problema em questão. Na referida tabela é indicado o valor da

função objetivo, o tempo de resolução, assim como o número de variáveis e restrições. O valor da função objetivo indica que são necessários 1023 minutos para visitar todos os fornecedores já incluindo os tempos de serviço em cada um deles e tendo em conta as restrições do problema.

<b>Veículos</b>	<b>Nós</b>	<b>Função Objetivo (minutos)</b>	<b>Tempo de Resolução (segundos)</b>	<b>Nº de Variáveis</b>	<b>Nº de Restrições</b>
4	9	1023	12,84	1489	936

Tabela 4 – Resultados computacionais da resolução do problema

Para uma melhor compreensão dos resultados apresenta-se o exemplo de uma das rotas, Rota 4. Os valores dos instantes em que se inicia o serviço em cada nó, da carga presente no veículo quando a rota se inicia e da carga presente no veículo quando o veículo retorna ao armazém para a referida rota serão analisados. A tabela 5, não é mais do que uma “legenda”, que indica o número ou código atribuído a cada fornecedor integrante desta rota. Como se pode verificar na leitura da tabela 6, o tempo total da rota é de 237 minutos.

<b>1</b>	Toyota Caetano Portugal
<b>2</b>	E
<b>3</b>	A
<b>4</b>	C

Tabela 5 – Legenda



<b>Rota 4</b>	<b>1</b>	<b>→</b>	<b>2</b>	<b>→</b>	<b>3</b>	<b>→</b>	<b>4</b>	<b>→</b>	<b>1</b>
$s_i^k$ (min.)	0		30		111		179		237
<b>Tempos de Serviço</b> (min.)	0		30		30		30		0
<b>Tempos de Viagem</b> (min.)		30		51		38		28	

Tabela 6 – Análise dos instantes de chegada a cada um dos nós da rota 4

<b>Fornecedores</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
<b>Janelas Temporais</b>	[0, 495]	[0, 270] ∪ [330, 480]	[0, 540]	[0, 240] ∪ [300, 540]

Tabela 7 – Janelas temporais dos fornecedores visitados na rota 4

Além disso, e relacionando os tempos de serviço em cada cliente, com os tempos de viagem, verifica-se também que as janelas temporais (Tabela 7) são sempre respeitadas. Relativamente à capacidade do veículo, como se verifica pela análise da tabela 8, esta nunca é violada. Pode-se também ver a carga existente no veículo no início da rota, em cada um dos fornecedores depois da entrega e recolha e no fim da rota, isto é quando chega novamente à TCAP(nó 1).

Planeamento e Otimização de Rotas para Veículos

<b>Rota 4</b>	<b>1</b>	<b>→</b>	<b>2</b>	<b>→</b>	<b>3</b>	<b>→</b>	<b>4</b>	<b>→</b>	<b>1</b>
$LI^K$ (kg)	2437,2								
<b>Carga a Entregar</b> (kg)	0		2434		0		3,20		0
<b>Carga a Recolher</b> (kg)	0		1627,56		188,200		194,88		0
$LF^K$ (kg)	2010,61								

Tabela 8 – Análise da carga presente no veículo durante a rota 4

A tabela seguinte, (Tabela 9) apresentam-se os cálculos para as cargas entregues e recolhidas ao longo da rota.

<b>Rota 4</b>	<b>Carga presente no veículo(kg)</b>
<b>Toyota Caetano</b>	$0 + (2437,2 - 0) = 2437,2$
↓	
<b>E</b>	$1627,56 + (2437,2 - 2434) = 1630,76$
↓	
<b>A</b>	$188,200 + (1630,76 - 0) = 1818,96$
↓	
<b>C</b>	$194,85 + (1818,96 - 3,20) = 2010,61$
↓	
<b>Toyota Caetano</b>	$0 + (2010,61 - 0) = 2010,61$

Tabela 9 – Variação da carga no veículo ao longo da rota 4

Concluindo e em termos de exemplificação, na figura 3 apresenta-se um exemplo da rota 4, onde se tenta mostrar de acordo com a ordem de visita, a carga entregue e recolhida em cada fornecedor, conforme os dados da Tabela 8.

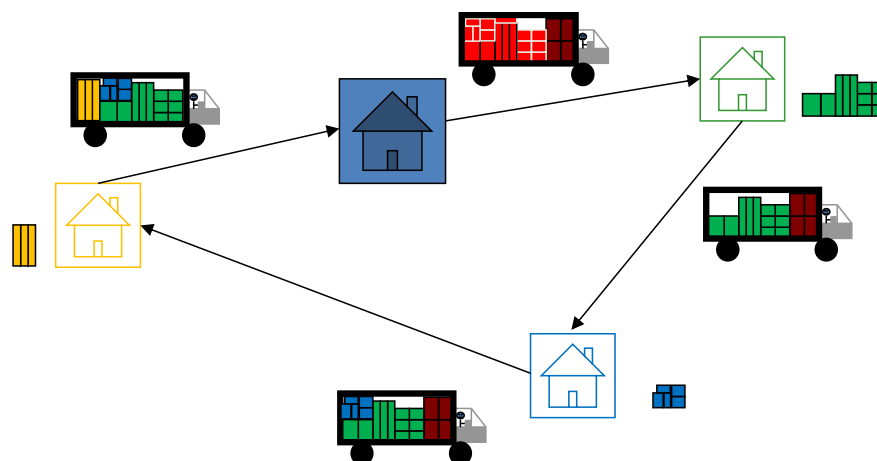


Figura 3 – Exemplo rota 4

As cargas que se encontram ao lado dos nós correspondem à quantidade a recolher. O veículo chega a um nó, retira a carga a entregar e recolhe a carga a transportar até ao nó inicial/final. Nesta ilustração é facilmente perceptível que a regra LIFO (*Last-In-First-Out*) não está a ser considerada. Por exemplo, logo no primeiro nó visitado (nó 2), a carga recolhida (a verde) fica a bloquear a carga que terá de ser entregue no nó 4, assim como a carga que é recolhida no nó 3. Esta restrição (Capacidade Volumétrica) não foi considerada no modelo desenvolvido, mas seria conveniente estudar este impacto em termos de tempo de serviço. Claro que no caso desta ilustração, os volumes das cargas estão exagerados, uma vez que segundo os dados da empresa, os volumes não são significativamente elevados, isto é, o volume total da carga é muito inferior à da capacidade do veículo. Foi assegurado que os volumes são sempre muito inferiores ao volume do veículo.

## 5.3. Análise de Sensibilidade

Por forma a avaliar a robustez do modelo desenvolvido procedeu-se a uma análise de sensibilidade, fazendo variar o número de veículos. Esta análise faz sentido neste tipo de estudo, uma vez que períodos económico-financeiros mais favoráveis traduzem-se num maior número de viaturas produzidas, o que aumenta o fluxo de produtos entre a TCAP e os fornecedores, exigindo possivelmente um maior número de rotas devido à limitação de carga no veículo. Por outro lado, pretendeu-se também testar um cenário mais pessimista, onde a produção diminui, logo o fluxo de produtos também diminui, diminuindo o número de rotas.

Na primeira secção (secção 6.1.) deste capítulo são caracterizadas as instâncias utilizadas na análise de sensibilidade. Na secção 6.2. é feita uma interpretação dos resultados computacionais obtidos.

### 5.3.1. Caracterização das instâncias

Nas duas instâncias criadas variou-se o número de veículos:  $V = 2$  e  $V = 6$  para os cenários descritos anteriormente. O objetivo dos testes é avaliar a sua influência no tempo de computação, isto é avaliar o comportamento do modelo. Ambas as instâncias mantêm o mesmo número de nós que o problema real, ou seja 9, uma vez que não se prevêem aumento do número de fornecedores. Os tempos de viagem entre os diferentes nós, as janelas temporais de cada nó e respetiva duração do serviço são idênticos aos do caso de estudo. A capacidade do veículo também é idêntica. Na instância que apresenta  $V = 2$ , as cargas envolvidas, tanto para entrega como para recolha, foram reduzidas, aleatoriamente de forma a termos um limite superior para o número de veículos de 2. Por outro lado, para a instância  $V = 6$  aumentou-se, também aleatoriamente as cargas envolvidas de forma a termos um limite superior para o número de veículos de 6.

### 5.3.2. Análise dos Resultados

Os resultados computacionais obtidos, das diferentes instâncias, são resumidos na tabela 10, juntamente com os do problema do caso de estudo, já apresentados previamente, de modo a possibilitar a comparação de resultados. A estrutura da tabela é análoga à tabela 4, apresentada na secção 5.2..

<b>Veículos</b>	<b>Nós</b>	<b>Função Objetivo (minutos)</b>	<b>Tempo de Resolução (segundos)</b>	<b>Nº de Variáveis</b>	<b>Nº de Restrições</b>
2	9	718	82,74	745	472
4		1023	41,89	1489	936
6		1318	36,5	2233	1400

Tabela 10 – Resultados computacionais do problema e das duas instâncias geradas

Como se pode verificar, o modelo atinge sempre a solução ótima. Analisando os diferentes tempos de resolução pode concluir-se que, tanto para o problema como para as instâncias geradas, as soluções foram geradas com tempos computacionais reduzidos para resolução de um problema deste tipo.

Como se pode verificar e seria expectável, o número de variáveis e restrições aumenta com o aumento do número de veículos.

Um dado curioso tem a ver com os tempos de resolução. Seria expectável que estes aumentassem com o aumento do número de variáveis e restrições, o que não sucede.

A explicação para este facto está relacionada com a distribuição da carga a entregar e recolher nos diversos nós. Uma vez que o impacto desta restrição (restrição “forte”) no problema é grande. Assim, ao analisar o impacto que a variação da carga tem em termos de tempo computacional, verifica-se que, por exemplo, se a carga de ou para (porque temos entregas e recolhas) um determinado nó foi igual ou muito próxima da capacidade máxima do veículo,

então esse veículo só visitará esse nó, o que torna o problema de fácil resolução devido à diminuição do número de combinações possíveis para a rota. Por outro lado, se as cargas para ou de os nós forem semelhantes então o número de combinações possíveis aumenta, o que implica um aumento do tempo computacional.

Neste caso, os problemas de teste desenvolvidos para a análise de sensibilidade têm uma distribuição de carga entre os vários nós bastante heterogénea, o que levou a que os tempos de computação diminuíssem com o aumento do número de veículos.

## Capítulo 6

### Conclusão

Nesta dissertação realizou-se uma abordagem ao problema de definição de rotas para veículos, motivada pelo caso de estudo da TCAP.

Inicialmente, tomou-se conhecimento da situação atual na TCAP, assim como dos procedimentos significativos para o estudo. Para além disso recolheram-se o dados relevantes para a determinação das rotas. O problema em questão foi abordado como um problema de rotas para veículos, que visa a determinação de um conjunto de rotas que visitem, somente uma vez, um conjunto de localizações dispersas geograficamente. A elaboração das rotas esteve condicionada por um conjunto de restrições que tiveram de ser respeitadas: capacidade máxima do veículo e janelas temporais duplas dos diferentes fornecedores e da TCAP. Apesar da complexidade do problema (o VRP é considerado um problema NP-difícil), foi obtida uma solução ótima, sendo isto possível devido à dimensão reduzida do problema. Para o efeito desenvolveu-se um modelo de programação linear mista que traduz o problema e cujo objetivo é minimizar o tempo necessário para realizar as rotas. Este modelo foi implementado recorrendo ao *software IBM ILOG CPLEX*.

Foi efetuada também uma análise de sensibilidade ao modelo, onde se concluí que mesmo que a produção aumente, o que implica um aumento do fluxo entre a empresa e os fornecedores, este modelo pode ainda ser utilizado, uma vez que os tempos computacionais são bastante reduzidos.

Face à impossibilidade de ter acesso a alguns dados, como o volume da carga a recolher e a entregar assim como do tempo necessário para realizar o serviço em cada um dos fornecedores, alguns valores foram determinados

recorrendo aos colaboradores da empresa. Por exemplo, pediu-se ao colaborador, responsável pela carga e descarga dos veículos, para determinar o valor médio de realização do serviço, tendo sido este considerado para todo o conjunto de fornecedores. Por outro lado, sabe-se que os volumes a transportar nunca são muito grandes e mesmo quando excedem a capacidade de peso do veículo, nunca excedem a capacidade em termos de volume. Assim, dado que as cargas não apresentam um volume elevado e que os tempos de serviço andam próximos do valor considerado, as simplificações consideradas não colocam em causa a validade do modelo.

Relativamente a trabalho futuro, um dos trabalhos imediatos e interessantes, passa por testar o comportamento do modelo com diferentes tipos de distribuição de carga pelos nós, isto é, testar com cargas homogéneas (entre os nós), e heterogéneas.

Outro trabalho interessante seria integrar melhorias no modelo, por forma que este traduzisse de forma integral a realidade. Isto é, nomeadamente incluir as simplificações consideradas relativamente a volumes das cargas. Isto para o caso de poderem passar a existir cargas com volumes consideráveis. Além disso incluir a regra LIFO, que como se pode verificar na Figura 3 no Capítulo 5, não está a ser considerada.



# Bibliografia

- Baker, B., & Carreto, C. (2003). A visual interactive approach to vehicle routing. *Computers & Operations Research*, 30(3), 321-337.
- Bradley, S., Hax, A., & Magnanti, T. (1977). *Applied Mathematical Programming*. Addison-Wesley.
- Clarke, G., & Wright, J. (1964). Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points. *Operations Research*, 12(4), 568-581.
- Cordeau, J.-F., et al. (2002). VRP with time windows. Em: P. Toth & D. Vigo (Eds), *The vehicle routing problem* (pp. 157-193). Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Cordeau, J.-F., et al. (2007). Vehicle routing. Em: C. Barnhart & G. Laporte (Eds), *Handbook in Operations Research & Management Science Volume 14* (pp. 367-428). North Holland.
- Cormen, T., et al. (2009). *Introduction to Algorithms*. . Massachusetts: The MIT Press.
- Dasgupta, S., Papadimitriou, C., & Vazirani, U. (2006). *Algorithms*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math.
- Dantzig, G., & Ramser, J. (1959). The truck dispatching problem. *Management Science*, 6(1), 80-91.

- Desaulniers, G. et al. (2002). VRP with pickup and delivery. Em: P. Toth & D. Vigo (Eds), *The vehicle routing problem* (pp. 225- 242). Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Eddy, S. (2004). What is dynamic programming? *Nature Biotechnology*, 22(7), 909-910.
- Gendreau, M., Laporte, G., & Potvin, J.-Y. (1998). Metaheuristics for the vehicle routing problem. *Les Cahiers du Gerard*, 52, 1-25.
- Kallehauge, B. (2008). Formulations and exact algorithms for the vehicle routing problem with time windows. *Computers & Operations Research*, 35(7), 2307-2330.
- Kytöjoki, J., et al. (2007). An efficient variable neighborhood search heuristic for very large scale vehicle routing problems. *Computers & Operations Research*, 34(9), 2743-2757.
- Laporte, G., & Nobert, Y. (1987). Exact algorithms for the vehicle routing problem. Em S. Martello, G. Laporte, M. Minoux & C. Ribeiro (Eds), *Surveys in Combinatorial Optimization* (pp. 147-184). Amsterdam, The Netherlands: North-Holland.
- Laporte, G. (1992). The vehicle routing problem: An overview of exact and approximate algorithms. *European Journal of Operational Research*, 59(3), 345-358.
- Laporte, L., & Semet, F. (1998). Classical heuristics for the vehicle routing problem. *Les Cahiers du GERAD*, 54, 1-19.

- 
- Laporte, G., et al. (2000). Classical and modern heuristics for the vehicle routing problem. *International Transactions in Operational Research*, 7(4-5), 285-300.
- Laporte, G. (2007). What you should know about the vehicle routing problem. *Naval Research Logistics*, 54(8), 811-819.
- Lin, S. (1965). Computer solutions of the traveling salesman problem. *The Bell System Technical Journal*, 44, 2245-2269.
- Liong, C., et al. (2008). Vehicle routing problem: models and solutions. *Journal of Quality Measurement and Analysis*, 4(1), 205-21.
- Moura, A. (2000). *Aplicação de técnicas de optimização a determinação de rotas para veículos*. (Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal).
- Nagy, G., & Salhi, S. (2005). Heuristics algorithms for single and multiple depot vehicle routing problems with pickups and deliveries. *European Journal of Operational Research*, 162(1), 126-141.
- Parragh, S., Doerner, K., & Hartl, R. (2008). A survey on pickup and delivery problems Part I: Transportation between customers and depot. *Journal für Betriebswirtschaft*, 58(1), 21-51.
- Qureshi, A., Taniguchi, E., & Yamada, T. (2010). Exact solution for the vehicle routing problem with semi soft time windows and its application. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 2(3), 5931-5943.
- Ropke, S., & Pisinger, D. (2006). A unified for a large class of vehicle routing problems with backhauls. *European Journal of Operational Research*, 171, 750-775.

- Thompson, P., & Psarafits, H. (1993). Cyclic transfer algorithms for multivehicle routing and scheduling problems. *Operations Research*, 41(5), 935-946.
- Toth, P. & Vigo, D. (2002a). An overview of vehicle routing problems. Em: P. Toth & D. Vigo (Eds), *The vehicle routing problem* (pp. 1- 26). Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Toth, P., & Vigo, D. (Eds.) (2002b). *The vehicle routing problem*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Vacic, V., & Sobh, T. (2004). Vehicle routing problem with time windows. *Computing*, 3(2), 72-80.
- Valle, C., et al. (2011). Heuristic and exact algorithms for a min-max selective vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*, 38(7), 1054-1065.

# **Anexos**



# Anexo 1

## Ficheiro do *software* IBM ILOG CPLEX do tipo *.mod*

```
// Dados dos nodos e veículos
int N=...; //número de nodos
range nodos =1..N;
int V =...; //número de veículos/rotas
range veiculos =1..V;
float tv_ij[nodos][nodos]=...; //tempo de viagem entre cada um dos nós
int am_i [nodos]=...; //instante de tempo em que abre a janela temporal
do período da manhã
int bm_i [nodos]=...; //instante de tempo em que encerra a janela
temporal do período da manhã
int at_i [nodos]=...; //instante de tempo em que abre a janela temporal
do período da tarde
int bt_i [nodos]=...; //instante de tempo em que encerra a janela
temporal do período da tarde
int ts_i [nodos]=...; //tempo de serviço
float Q_k [veiculos]=...; //capacidade máxima do veículo
float c_j [nodos]=...; //mercadoria a recolher
float d_0j [nodos][nodos]=...; //mercadoria a entregar
int M=1000;

// Variáveis de Decisão
dvar boolean x_ij_k [nodos][nodos][veiculos]; //arcos por veículo/rota
dvar int+ s_i_k [nodos][veiculos]; //instante de tempo de chegada do
veículo ao nodo i
dvar float+ LI_k [veiculos]; //carga presente no veículo k quando sai do
nó 1, armazém
dvar float+ LF_k [veiculos]; //carga presente no veículo k quando retorna
ao armazém

// Função Objectivo

minimize
    sum(k in veiculos) s_i_k[1][k];

// Restrições do Modelo

subject to {

// O veículo chega só por uma vez a um fornecedor e sai só por uma vez de
um fornecedor
    forall(k in veiculos)
        sum(j in nodos:j!=1) x_ij_k[1][j][k]==1;

// O veículo inicia viagem no nó 1, armazém
    forall(k in veiculos)
        sum(i in nodos:i!=1) x_ij_k[i][1][k]==1;

// O veículo termina a rota no nó 1, armazém
```

```

forall(j in nodos:j!=1)
    sum(i in nodos:i!=j, k in veiculos)x_ij_k[i][j][k]==1;

// Se um veículo chega a um fornecedor tem de sair desse fornecedor para
outro nó
forall(j in nodos, k in veiculos)
    sum(i in nodos:i!=j) (x_ij_k[i][j][k]-x_ij_k[j][i][k])==0;

forall(k in veiculos)
    sum(j in nodos) x_ij_k[1][j][k] <= 1;

// Cálculo do tempo de chegada a cada nó
forall (k in veiculos, i in nodos, j in nodos:j!=i){
    if (i==1) (ts_i[i]+tv_ij[i][j]) <= s_i_k[j][k] + M*(1-
x_ij_k[i][j][k]);
    else (s_i_k[i][k] + ts_i[i] + tv_ij[i][j]) <= s_i_k[j][k] +
M*(1-x_ij_k[i][j][k]);
}

// Garante que as janelas temporais não são violadas
forall(k in veiculos, i in nodos, j in nodos:j!=i){
    am_i [j] <= s_i_k[j][k] || at_i [j] <= s_i_k[j][k];
    bm_i [j] >= s_i_k[j][k] || bt_i [j] >= s_i_k[j][k];
}

// Calcula carga presente no veículo k quando este sai do armazém e
garante que a capacidade não é violada
forall(k in veiculos){
    LI_k[k] == sum (i,j in nodos: j!=i)
x_ij_k[i][j][k]*d_0j[1][j];
    LI_k[k] <= Q_k[k];
}

// Calcula carga presente no veículo k quando este retorna ao armazém e
garante que a capacidade não é violada
forall(k in veiculos){
    LF_k[k] == sum (i,j in nodos: j!=i) x_ij_k[i][j][k]*c_j[j] +
(LI_k[k] - sum(i,j in nodos: j!=i) x_ij_k[i][j][k]*d_0j[1][j]);
    LF_k[k] <= Q_k[k];
}
}

```



## Anexo 2

### Ficheiro do *software* IBM ILOG CPLEX do tipo *.dat*

```
//número de nodos - N = 1 armazém; N = {2...9} fornecedores
N=9;

//número de veículos/rotas
V=4;

// tempo de viagem (min.) entre nodo i e o nodo o j
tv_ij = [
    [0, 54, 134, 134, 41, 133, 30, 30, 45]
    [54, 0, 174, 174, 38, 174, 51, 64, 89]
    [134, 174, 0, 0, 185, 6, 145, 135, 124]
    [134, 174, 0, 0, 185, 6, 145, 135, 124]
    [28, 39, 148, 148, 0, 148, 42, 43, 63]
    [133, 174, 6, 6, 182, 0, 145, 135, 124]
    [30, 51, 145, 145, 32, 145, 0, 23, 66]
    [30, 64, 135, 135, 43, 135, 23, 0, 50]
    [45, 89, 124, 124, 79, 124, 66, 50, 0]
];

//capacidade máxima dos veículos - peso (kg)
Q_k = [2500, 2500, 2500, 2500];

//mercadoria a entregar - peso (kg)
d_0j = [
    [0, 0, 46.20, 46.20, 3.20, 29.80, 2434.00, 79.20, 243.80]
    [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
    [46.20, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
    [46.20, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
    [3.20, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
    [29.80, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
    [2434.00, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
    [79.20, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
    [243.80, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
];

//mercadoria a recolher - peso (kg)
c_j = [0, 188.200, 1827.624, 1827.624, 194.85, 325.08, 1627.56, 720.51,
636.14];

// janelas temporais (min.)
am_i = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 30, 30];
bm_i = [495, 540, 300, 300, 240, 240, 270, 270, 270];

at_i = [0, 0, 360, 360, 300, 300, 330, 330, 330];
bt_i = [495, 540, 540, 540, 540, 540, 480, 570, 540];

//duração do serviço em cada nó (min.)
ts_i = [0, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30];
```