



**Bruno Gabriel  
Coelho Coutinho**

***Kuramoto Model Aplicado a um Star Graph e a  
Redes Scale-Free***





**Bruno Gabriel  
Coelho Coutinho**

***Kuramoto Model Aplicado a um Star Graph e a  
Redes Scale-Free***

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Física, realizada sob a orientação científica do professor Dr. Alexey Goltsev, Professor Auxiliar do Departamento de Física da Universidade de Aveiro da Universidade de Aveiro



**o júri / the jury**

presidente / president

**Professor Doutor Ricardo Guimarães Dias,**

Professor Auxiliar do Departamento de Física da Universidade de Aveiro

vogais / examiners committee

**Professor Doutor Alexander Goltsev,**

Professor Auxiliar do Departamento de Física da Universidade de Aveiro

**Professor Doutor Yuriy Pogorelov,**

Professor Associado do Departamento de Física da Universidade de Porto



**agradecimentos /  
acknowledgements**

Quero começar por agradecer ao meu orientador, professor Dr. Alexander Goltsev, pela excelente supervisão, apoio, esclarecimentos e paciência mantida ao longo destes meses. Em segundo lugar, quero agradecer ao professor Dr. Sergey Dorogotsev, pelo interesse e perspetiva única transmitida para o trabalho realizado. Quero também agradecer a todo o grupo de redes da Universidade de Aveiro no qual foi um privilegio poder fazer este projeto. Não posso deixar de agradecer ao professor Dr. Ricardo Dias que apesar de não ter tido contribuição direta para o desenvolvimento da tese, foi um apoio e uma referência importante durante todo o curso.

Quero também referir a ajuda do colega Bruno Faria na adaptação à linguagem de programação C++ que se mostrou sempre disponível para o esclarecimento de duvidas e ao professor Dr. Manuel Barroso pelo acesso ao *cluster* de computadores blafis. Dentro ainda da componente computacional do trabalho, quero agradecer ao professor Dr. João Oliveira e mais uma vez ao colega Bruno Faria pelo fornecimento de algoritmos. Quero agradecer ao colega Marinho Lopes e mais uma vez ao meu orientador pela ajuda a rever a produção escrita.





**palavras-chave**

redes complexas, sincronização, *Kuramoto model*, transições de fase

**resumo**

O trabalho realizado teve como objetivo tentar compreender o efeito de *hubs* no *Kuramoto model*, para tal foram analisados dois sistemas diferentes. No primeiro, o *Kuramoto model* foi aplicado a um *hub* isolado, revelando-se que, para as distribuições analisadas, a frequência natural do oscilador central desempenha um papel decisivo no comportamento do sistema. Se a diferença entre esta frequência e o valor médio das frequências naturais dos vizinhos do oscilador central for menor que um certo valor, não existe transição de fase no sistema. No entanto, se a diferença for acima desse mesmo valor, o sistema passa a exibir uma transição de fase de primeira ordem. No segundo modelo, foi introduzida uma correlação linear entre a frequência natural do nodo e o seu *degree* e aplicado a redes Erdrós-Rényly e *scale-free*. Desta forma, foi possível criar uma rede em no caso de existirem *hubs*, estes apresentam frequências naturais distintas das dos seus vizinhos. Para estudar analiticamente o sistema foi usado *annealed network approximation* e posteriormente comparado com simulações. Os resultados apontam para a existência de uma transição de fase de segunda ordem para redes Erdrós-Rényly e *scale-free* com  $\gamma > 3$  e a existência de uma transição de fase de primeira ordem para redes *scale-free* com  $2 < \gamma < 3$ .



**keywords**

complex networks, synchronization, Kuramoto model, phase transitions

**abstract**

The aim of this work is to get some insight on the effect of hubs in Kuramoto model. In order to achieve our goal, we analyze two different systems. In the first system, we study the behavior of an isolated hub using analytic calculus and comparing with simulations. For the analyzed distributions, we find that the central oscillator plays a decisive role in the general behavior of the system. There is no phase transition in the system if the difference between the central oscillator natural frequency and the mean value of his neighbor's natural frequencies is smaller than a certain value. In contrast, if this difference is above that value, the system displays a first-order phase transition. In the second system, we consider a linear correlation between the natural frequencies and the degrees of the nodes in Erdős-Rényly and scale-free networks. The Hubs in this system have a natural frequency which are very different from the natural frequency of his neighbors. We use annealed network approximation and compare with our simulations. We demonstrate that the system undergoes a second-order phase transition for Erdős-Rényly networks and scale-free networks with degree exponent  $\gamma > 3$ , and a first-order phase transition for scale-free networks with  $2 < \gamma < 3$ .



# Conteúdo

<b>Conteúdo</b>	<b>i</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>iii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 <i>Kuramoto Model</i> Original	2
1.2 Redes Aleatórias	6
1.2.1 <i>Static Model</i>	9
1.3 <i>Potts Model</i> aplicado a Redes <i>Scale-Free</i>	9
1.4 Transição de Fase de Primeira Ordem e Híbridas	10
<b>2 <i>Kuramoto Model</i> Aplicado a um <i>Star Graph</i></b>	<b>13</b>
2.1 Contribuição de Osciladores não sincronizados	14
2.2 Frequências Naturais dos Osciladores Distribuídas Segundo uma Distribuição Quasi-normal	15
2.2.1 Caso em que $ \omega_i  < \omega_c$	17
2.2.2 Caso em que $ \omega_i  > \omega_c$	18
2.2.3 Comportamento para $J \ll 1$	20
2.3 Frequências naturais dos osciladores distribuídas segundo um Delta Dirac	22
<b>3 <i>Kuramoto Model</i> com Correlação entre a Frequência Natural e o <i>Degree</i> do Nodo</b>	<b>27</b>
3.1 Rede ER	29
3.1.1 Comparação com Dados Provenientes de Simulações	31
3.2 Rede <i>Scale-Free</i>	32
3.2.1 Comparação com Dados Provenientes de Simulações	37
<b>4 Considerações Finais</b>	<b>39</b>
<b>A Contribuição dos Osciladores não sincronizados</b>	<b>41</b>
<b>B Dedução da relação 3.15</b>	<b>43</b>
<b>C Dedução do expoente crítico de 2/3</b>	<b>45</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>47</b>



# Lista de Figuras

1.1	Gráficos dos dois tipos de soluções da equação $\dot{x} =  b  - a \sin x$ com $a > 0$ : (a) estado sincronizado, $a >  b $ e (b) estado não sincronizado $a <  b $ . O período dos osciladores não sincronizados é dado por: $T \equiv 2\pi/\sqrt{a^2 - b^2}$ .	3
1.2	Parâmetro de ordem $r$ em função de $J$ para o Kuramoto model original.	4
1.3	Exemplo de uma rede ER com 500 nodos e $\lambda = 6$ . Em (a) está uma representação gráfica da rede, em que o tamanho dos nodos é proporcional ao seu "degree" e em (b) a respetiva distribuição do "degree" dos nodos.	7
1.4	Exemplo de uma rede produzida pelo modelo [1] com 500 nodos, $A = 0$ e $m = 1$ ; em (a) está uma representação gráfica da rede, em que o tamanho dos nodos é proporcional ao seu "degree", e em (b) a respetiva distribuição do <i>degree</i> dos nodos.	8
1.5	Esquema dos estados estáveis, meta-estáveis e instáveis de uma transição de primeira ordem a partir do formalismo de Landau: $G = -MH + a(T - T_{c1})M^2 - bM^4 + cM^6$ com $a, b, c > 0$ . No esquema estão marcados os dois tipos de transições de primeira ordem: típica e híbrida.	11
2.1	Esquema de um <i>Star Graph</i> .	13
2.2	Gráfico da função $f_d(x)$ . Função auxiliar para o cálculo da contribuição dos osciladores não sincronizados na velocidade de grupo do sistema.	15
2.3	(a) Gráfico das componentes da direita e da esquerda da equação 2.6a. A intercepção entre as curvas representa as soluções da equação. A preto está representada a componente da esquerda e a vermelho e a azul a componente da direita para $\omega_i = 0.1 < \omega_c$ e $\omega_i = 10 > \omega_c$ respetivamente. (b) Diagrama do número de solução da equação 2.6a em função de $\omega_i$ e $J$ . A laranja está marcado as zonas em que existem mais de uma solução e a branco as zonas em que existe apenas uma solução. Para ambos os gráficos $K = 1000$ , $\sigma = 0.5$ e $g_n(x)$ segue uma distribuição normal de variância 1.	16
2.4	Gráficos de $r$ e $\dot{\Psi}$ em função de $J$ , (a) e (b) respetivamente. A traço contínuo estão representados as cruvas teóricas e a traço-ponto simulações. Em miniatura no gráfico (a) está representado um zoom da zona seleccionada. $K = 1000$ , $\sigma = 0.5$ , $\omega_i = [0, 01, 10]$ e $g_n(x)$ segue uma distribuição normal de variância 1.	17
2.5	(a) Gráfico de $r$ e $\dot{\Psi}$ em função do tempo com fases iniciais aleatórias, entre 0 e $2\pi$ . (b) Gráfico de $r$ e $\dot{\Psi}$ em função do tempo com fases iniciais aleatórias, entre 0 e $\pi$ . Em ambos os gráficos $J = 0.12$ ; $K = 10000$ ; $\omega_i = 10$ ; $\sigma = 0.5$ e $g_n(x)$ segue uma distribuição normal de variância 1.	18

2.6	Gráficos de $r$ em função de $J$ com condições iniciais aleatórias (pontos verdes) e constantes (pontos azuis). A traço contínuo estão marcadas as soluções teóricas estáveis (linha a preto) e instáveis (linha a azul). No gráfico (a) estão representados os valores de $R$ obtidos em 10 simulações por cada $J$ e no gráfico (b) para um valor médio de 500 simulações. $K = 10000, \omega_i = 10, \sigma = 0.5$ e $g_n(x)$ segue uma distribuição normal de variância 1. . . . .	19
2.7	Gráfico de $\ln(J_{c1,2})$ em função de $\ln(K)$ obtido numericamente através da equação 2.6b) . . . . .	21
2.8	Gráficos de $r$ em função de $J$ . A traço contínuo está marcada a curva teórica (linha a preto). A traço-ponto estão representados dados provenientes de simulações para uma variação contínua de $J$ : a vermelho $J$ crescente e a azul $J$ decrescente. O tempo de relaxação do sistema foi de 1000 no gráfico (a) e de 10 no gráfico (b). Para ambos os gráficos: passo de $J$ de 0.01. $K = 10, w_i = 10, w_j = 1$ . . . . .	22
2.9	Gráficos de $r_g$ em função de $J$ . A traço contínuo está marcada a curva teórica do estado estável (linha a preto). Os pontos representam dados provenientes de simulações para uma variação contínua de $J$ : a vermelho $J$ crescente e azul $J$ decrescente. O tempo de relaxação do sistema foi de 1 e o passo de $J$ de 0.05. $K = 10, w_i = 10, w_j = 1$ . . . . .	24
3.1	Gráficos do sistema de equações 3.7) para uma rede ER com $\lambda = 10$ a preto $\lambda = 15$ a vermelho. (a) Gráfico de $\dot{\Psi}$ em função de $\alpha$ a traço contínuo e a tracejado está representado valor de $\dot{\Psi}$ quando $\alpha \rightarrow \infty$ , dado por $\langle q \rangle$ . (b) Gráfico de $r$ em função de $\alpha$ a traço contínuo e a tracejado está representado as curvas $r = \alpha/J$ . O $r$ da interseção das curvas a traço contínuo com as curvas a tracejado representa a solução do sistema para o respetivo $J$ . . . . .	29
3.2	(a) Gráfico de $\dot{\Psi}$ em função de $J$ . A tracejado está representado o valor de $\dot{\Psi}$ quando $\alpha \rightarrow \infty$ . (b) Gráfico de $r$ em função de $J$ . $\dot{\Psi}$ pode tomar qualquer valor quando $r = 0$ o que não tem significado físico, por isso não está representado. . . . .	30
3.3	(a) Gráfico do lado esquerdo da equação 3.8) em função de $\dot{\Psi}$ para $\lambda = [10, 15]$ . $\dot{\Psi} = \dot{\Psi}(0)$ é dado pela intercepção da curva a traço contínuo com a curva a tracejado. (b) $\dot{\Psi}(0)$ em função de $\lambda$ . . . . .	30
3.4	Gráfico de $\ln(J_c)$ em função de $\ln(\langle \omega \rangle)$ a partir das equações 3.7) A vermelho está representado uma curva com declive $-1/2$ . . . . .	31
3.5	Gráfico de $r$ em função de $J$ para uma rede ER. Os pontos azuis e vermelhos representam dados provenientes de simulações com $J$ crescente e decrescente respetivamente. A preto está representada a curva teórica. Para ambos os gráficos $N = 1000$ . Para o gráfico (a) $\langle q \rangle = 10$ , o passo de $J$ foi de 0.02 e o tempo de estabilização de 1 ;para o gráfico (b) $\langle q \rangle = 50$ , o passo de $J$ foi de 0.02 e o tempo de estabilização de 10. . . . .	32
3.6	Gráficos do sistema de equações 3.7) para uma rede <i>scale-free</i> com $\gamma = 2.8$ a preto, $\gamma = 3$ a vermelho e $\gamma = 3.2$ a azul (a) Gráfico de $\dot{\Psi}$ em função de $\alpha$ , a traço contínuo e a tracejado está representado valor de $\dot{\Psi}$ quando $\alpha \rightarrow \infty$ , dado por $\langle \omega \rangle$ . (b) Gráfico de $r$ em função de $\alpha$ a traço contínuo, e as curvas $r = \alpha/J$ a tracejado. O $r$ da interseção das curvas a traço contínuo e as curvas a tracejado representa a solução do sistema para o respetivo $J$ . Em miniatura está representado o gráfico de $r/\alpha$ em função de $\alpha$ a traço contínuo, e as curvas $r = 1/J$ a tracejado. O $r$ correspondente da interseção das curvas a traço contínuo e as curvas a tracejado representa as soluções não triviais do sistema para o respetivo $J$ . . . . .	33
3.7	(a) Gráfico de $\dot{\Psi}$ em função de $J$ . A tracejado está representado valor de $\dot{\Psi}$ quando $\alpha \rightarrow \infty$ , dado por $\langle \omega \rangle$ . (b) Gráfico de $r$ em função de $J$ . Curvas a traço contínuo representam soluções estáveis e a tracejado soluções instáveis. $\dot{\Psi}$ pode tomar qualquer valor quando $r = 0$ e não tem significado físico, por isso não está representado. . . . .	33



3.8	Gráfico da função $f_a(\alpha)$ , representativa da forma da função da velocidade de grupo em função de $\alpha$ para $\gamma = 3 + \delta$ com $\delta \ll 1$ .	34
3.9	Diagrama de fases do model, aplicado a uma rede <i>scale-free</i> , em função de $J$ e $\gamma$ . Zona I: $r = 0$ . Zona II: $r \neq 0$ . Zona III: A duas soluções, $r = 0$ e $r \neq 0$ , são possíveis. $J_{c1}$ , $J_{c2}$ e $J_c$ estão representados no diagrama na fronteira das zonas respectivas. $q_{max} = 1000$	36
3.10	Gráfico de $r$ em função de $J$ para uma rede <i>scale-free</i> . Os pontos vermelhos, azuis e pretos representam dados provenientes de simulações para $\gamma = 2.9$ , $\gamma = 3$ e $\gamma = 3.1$ , respetivamente. $J$ crescente está representado com pontos e $J$ decrescente está representado com estrelas. A traço contínuo está representada a curva teórica respetiva. $J_{c1}$ , $J_{c2}$ e $J_c$ das diferentes curvas, estão marcados com a cor da curva correspondente. Para ambos os gráficos foi utilizado um tempo de estabilização de 10, um passo de $J$ de 0.02 e $N = 10000$ .	37



# Capítulo 1

## Introdução

Fenómenos de sincronização têm vindo a despertar um grande interesse na comunidade científica, revelando-se, em alguns casos, um problema difícil. Estes fenómenos parecem estar presentes um pouco por todo o lado e relacionados com diversos campos: desde a biologia, passando pelas redes sociais e também, muito frequentemente, em sistemas físicos. Um bom exemplo é o piscar dos pirilampos que tem tendência a sincronizar-se, de tal forma a que a grande maioria dos pirilampos pisquem em simultâneo [2]. O mesmo fenómeno acontece no gorjear dos grilos [3]. A nível microscópico, o fenómeno existe nas *pacemaker cells* do coração e nas *circadian pacemaker cells* do cérebro [4, 5]. Em sistemas físicos, é visível, por exemplo, nas junções de Josephson [6] e em alguns sistemas de micro-osciladores como o descrito por York et al [7]. Fenómenos de sincronização são fundamentais na regulação de todos estes sistemas em diferentes níveis e, como tal, a sua compreensão é extremamente importante. Este efeito, associado ao mundo natural, foi primeiramente notado por Wiener [8]. Wiener constatou que era frequente na natureza que sistemas cujos componentes executam comportamentos periódicos, sincronizarem-se entre si. No entanto, Wiener não foi capaz de estudar o problema devido à sua análise baseada em transformadas de Fourier ter-se mostrado demasiado complexa. Quem conseguiu dar os primeiros passos no estudo deste tipo de fenómenos foi Winfree, em 1967. Para descrever a propriedade periódica dos elementos do sistema, Winfree tomou-os como um conjunto de osciladores ligados entre si, visto poderem ser definidos pela sua fase. Esta consideração em si não soluciona o problema, uma vez que as interações entre os osciladores podem ter as mais variadas formas. O grande avanço deu-se quando Winfree reconheceu que para osciladores quase idênticos e com uma interação fraca entre eles, o problema podia ser bastante simplificado, sendo a interação entre os osciladores descrita apenas pela diferença das suas fases [9]. Apesar de, num sistema aleatório, cada oscilador interagir independentemente com os seus vizinhos, Winfree notou que a influência de cada oscilador podia ser aproximada por uma interação com um campo médio. Na visão de Winfree, cada oscilador iria interagir com um "ritmo" global do sistema. Utilizando simulações computacionais, Winfree também previu a existência de transições de fase. Winfree observou que se a interação entre os osciladores fosse pequena, não existia sincronização no sistema, mas aumentando a interação a partir de um certo valor crítico começava a aparecer uma pequena fracção de osciladores

sincronizados.

Em 1975, Kuramoto começou a trabalhar no problema, aproveitando as ideias de Winfree sobre fraco acoplamento entre os osciladores e descreveu-as na forma matemática que hoje é utilizada [10]. Além disso, resolveu o problema analiticamente para uma rede em que cada oscilador interage com todos os outros. Desde então, o modelo e variações do modelo têm vindo a ser amplamente exploradas pela comunidade científica.

Pequenas variações do modelo podem produzir comportamentos bastante distintos do original. Trabalhos recentes reportam a existência transições de primeira ordem [11, 12] assim como um comportamento diversificado perto da transição de fase, dependendo apenas da distribuição das frequências naturais dos osciladores [11]. Outro efeito bastante interessante ocorre quando se introduz um acoplamento negativo entre os osciladores, para o qual o sistema apresenta um comportamento designado por *contrarian oscillators* [13]. O próprio modelo original ainda é estudado atualmente, principalmente o efeito de sincronização parcial [14]. Este efeito é caracterizado por pequenos grupos independentes de osciladores se sincronizarem antes do aparecimento da sincronização global.

## 1.1 Kuramoto Model Original

No modelo original, Kuramoto descreveu as ideias de Winfree através da equação [10]:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_j \Gamma_{i,j}(\theta_j - \theta_i), \quad (1.1)$$

em que:  $\Gamma_{i,j}$  é a função que representa a interação entre o oscilador  $i, j$ ;  $\omega_i$  e  $\theta_i$  representam, respectivamente, a frequência natural e a fase do oscilador  $i$  e  $\dot{\theta}_i \equiv \frac{\partial \theta_i}{\partial t}$ . A equação é difícil de tratar uma vez que  $\Gamma_{i,j}$  é uma função arbitrária. Considerando que os osciladores são quase idênticos, que a interação é fraca e que cada oscilador está conectado a todos os outros (*fully connected graph*), Kuramoto demonstrou que era possível fazer a aproximação  $\Gamma_{i,j}(\theta_j - \theta_i) = \frac{J}{N} \sin(\theta_j - \theta_i)$ , em que  $J$  é o parâmetro que mede a interação entre os osciladores e  $N$  o número de osciladores [10]. No modelo original  $J$  é tomado como positivo. Existem estudos recentes que consideram  $J$  negativos [13, 15]. A equação toma a forma:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{J}{N} \sum_j \sin(\theta_j - \theta_i). \quad (1.2)$$

Para resolver esta equação, Kuramoto introduziu um parâmetro de ordem dado por:

$$r e^{i\Psi} = \frac{1}{N} \sum_j e^{i\theta_j}, \quad (1.3)$$

em que  $r$  é uma quantidade que mede a sincronização do sistema e  $\Psi$  é designado por fase de grupo. Fazendo uma analogia com a interpretação de Winfree,  $\Psi$  representa a fase do "ritmo" global no sistema e é assumido que tem uma velocidade constante  $\dot{\Psi}$ . Substituindo na equação anterior, obtém-se:

$$\dot{\theta}_i - \dot{\Psi} = (\omega_i - \dot{\Psi}) - Jr \sin(\theta_i - \Psi). \quad (1.4)$$

Esta equação pode ter dois regimes: se  $|\omega_i - \dot{\Psi}| < Jr$  a fase dos osciladores em relação a fase de grupo, com o tempo tende para um valor estável. Para um tempo infinito, este grupo de osciladores vai estar sincronizado entre si e com uma velocidade igual à velocidade de grupo,  $\dot{\Psi}$  (ver figura 1.1(a)). Os osciladores com  $|\omega_i - \dot{\Psi}| > Jr$  não estão sincronizados com os restantes. Este grupo de osciladores tem o seu comportamento dominado pela frequência natural e como tal executam um movimento periódico independente, não atingindo um estado estável (ver figura 1.1(b)).

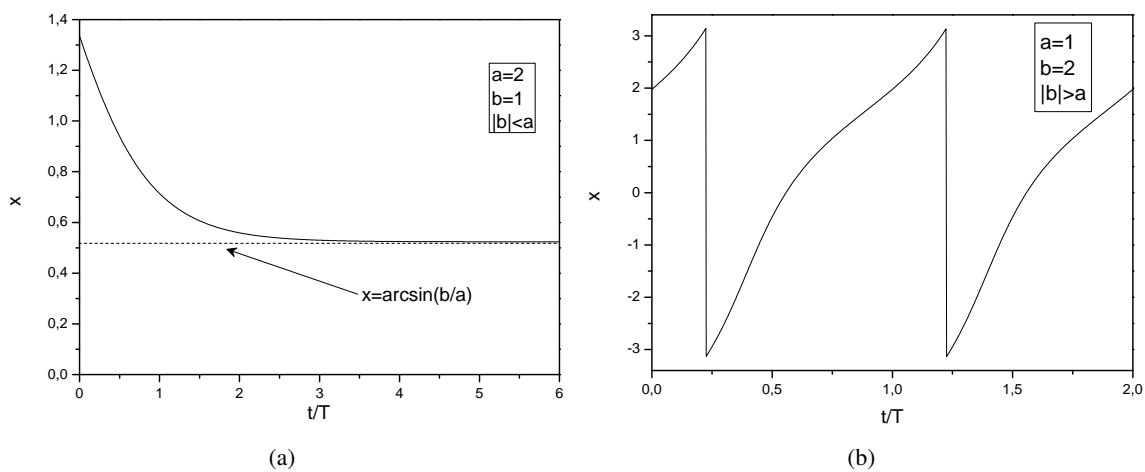


Figura 1.1: Gráficos dos dois tipos de soluções da equação  $\dot{x} = |b| - a \sin x$  com  $a > 0$ : (a) estado sincronizado,  $a > |b|$  e (b) estado não sincronizado  $a < |b|$ . O período dos osciladores não sincronizados é dado por:  $T \equiv 2\pi/\sqrt{a^2 - b^2}$ .

Para uma distribuição de frequências simétrica em relação a uma dada frequência, tem-se que, por simetria, a velocidade de grupo será igual ao valor médio das frequências naturais. Por consequência, é útil fazer uma mudança de referencial que tome o valor médio das frequências naturais como zero. A equação do parâmetro de ordem tem componente real e componente imaginária. A componente imaginária define a velocidade de grupo que por simetria é 0. A componente real define o parâmetro de ordem  $r$ . É possível demonstrar que a contribuição dos osciladores não sincronizados na componente real do parâmetro de ordem é nula no limite termodinâmico (ver apêndice A). Aplicando a condição necessária para um oscilador estar sincronizado e resolvendo no limite termodinâmico, obtém-se no regime estável a equação:

$$r = \int_{-Jr}^{Jr} d\omega g(\omega) \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{Jr}\right)^2}, \quad (1.5)$$

em que  $g(\omega)$  representa a função distribuição das frequência naturais. Considerando uma distribuição com apenas um máximo, simétrica em relação ao máximo, e de variância finita, o sistema apresenta uma transição de fase de segunda ordem (ver figura 1.2).

A correta descrição das transições de fase é fundamental para uma correta compreensão do sis-

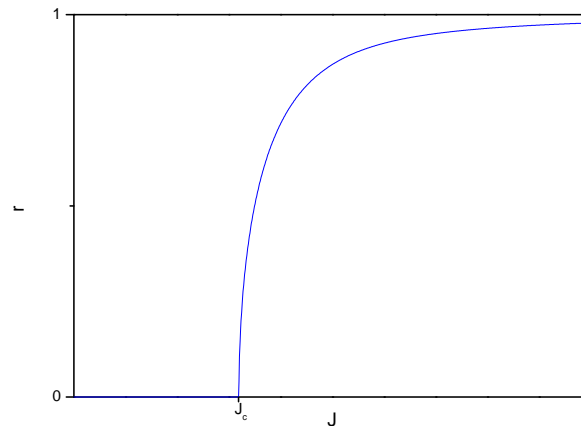


Figura 1.2: Parâmetro de ordem  $r$  em função de  $J$  para o *Kuramoto model* original.

tema. Uma transição de fases ocorre quando, variando os parâmetros do sistema, o comportamento deste altera-se num certo ponto, designado por ponto crítico. Na figura 1.2 este ponto está representado por  $J_c$ , e é o valor a partir do qual começa a aparecer sincronização no sistema. Usando a equação 1.5 tem-se que:

$$J_c = \frac{2}{g(0)\pi}. \quad (1.6)$$

Tipicamente, esta variação de comportamento reflete-se no parâmetro de ordem, originando uma descontinuidade no comportamento do mesmo. Dependendo da descontinuidade no comportamento do parâmetro de ordem a transição de fase será de diferentes ordens. Por exemplo, na figura 1.2 existe uma descontinuidade da primeira derivada de  $r$  em ordem a  $J$ , o que corresponde a uma transição de fase de segunda ordem. As transições de fase de primeira ordem ocorrem quando existe uma descontinuidade no próprio parâmetro de ordem [16]. Segundo a classificação de Paul Ehrenfest (1880-1933) se a descontinuidade ocorrer na  $n$ -ésima derivada tem-se uma transição de fase de ordem  $n + 1$ . Na classificação moderna estas transições de fase são agrupadas em apenas dois grupos. As transições de fase de primeira ordem caracterizam-se por existir uma descontinuidade directamente no parâmetro de ordem, em termodinâmica estão associadas à existência de calor latente. As transições de fase de segunda ordem, também designadas por transições de fase contínuas, englobam as transições de fase de ordem igual ou maior que dois segundo a classificação de Paul Ehrenfest, em termodinâmica estão associados à divergência da susceptibilidade, entre outros fenómenos críticos [17]. Na grande maioria dos casos as transições de fase de primeira e segunda ordem na designação moderna coincidem com as transições de fase de primeira e segunda ordem segundo a classificação de Paul Ehrenfest. Existem mais dois tipos de transições de fase de ordem descritas mais recentemente: transições de fase de ordem infinita [18] e as transições de fase híbridas [19]. Nas transições de ordem infinita, apesar de existir uma variação do comportamento do sistema, o comportamento do parâmetro de ordem não apresenta nenhuma descontinuidade. As transições de fase híbridas combinam a descontinuidade do parâmetro de ordem das transições de fase de primeira ordem com características de transições de

fase de segunda ordem e serão explicadas com mais detalhe na secção 1.4 [19]. Outro critério importante para caracterizar a transição de fase é o expoente crítico associado ao comportamento assintótico junto a transição de fase, designado por  $\eta$ . Para o sistema representado na figura 1.2, na vizinhança da transição:

$$r - r_c \propto (J - J_c)^\eta, \quad (1.7)$$

com  $\eta = 1/2$  e  $r_c = 0$ . Para transições de fase de contínuas  $r_c$  é sempre nulo e na grande maioria dos casos  $\eta < 1$  (equivale a transições de fase de segunda ordem segundo a classificação de Paul Ehrenfest). Pelo contrário, para transições de fase de primeira ordem  $r_c \neq 0$  e  $\eta = 1$ . No caso das transições de fase híbridas  $r_c \neq 0$  e  $\eta < 1$ .

Para o mesmo modelo, alterando apenas o tipo de distribuições de frequências naturais pode observar-se outros tipos de transição de fases, com diferentes expoentes críticos. Por exemplo, para uma distribuição de frequências naturais constante num determinado intervalo, o sistema exhibe uma transição de fase híbrida com expoente crítico de  $2/3$  [20]. Um formalismo frequente para estudar o *Kuramoto model* no limite termodinâmico é a utilização da função densidade  $\rho(\omega, t, \theta)$ . Esta função mede a densidade de osciladores com um frequência  $\omega$ , com uma fase  $\theta$ , num determinado instante  $t$  [21]. Neste trabalho não vou aplicar directamente este formalismo, embora todos os resultados obtidos estarem de acordo com esta função. As equações do movimento dos osciladores fazem parte do grupo de equações de Langevin, como consequência  $\rho(\omega, t, \theta)$  obedece às equações de Fokker-Planck [22]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta^2} - \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v), \quad (1.8)$$

em que  $D$  é um parâmetro positivo que mede a difusão no sistema, e a  $v$  representa a velocidade de um dado oscilador, dado por:

$$v(\theta, t, \omega - \dot{\Psi}) = (\omega - \dot{\Psi}) - Jr \sin(\theta). \quad (1.9)$$

Com este formalismo o parâmetro de ordem é igual a:

$$r = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} d\theta d\omega e^{i(\theta - \Psi)} \rho(\omega - \dot{\Psi}, \theta, t). \quad (1.10)$$

O objectivo é encontrar soluções estáveis, com  $\rho$  independente do tempo. Para um sistema infinito,  $g(\omega)$  uma função bem comportada e, na ausência de ruído externo,  $D$  é nulo. Existe uma solução trivial das equações de Fokker-Planck independente do tempo dada por uma densidade uniformemente distribuída entre  $-\pi$  e  $\pi$ ,  $\rho = 1/(2\pi)$ , que corresponde à situação em que não existe sincronização no sistema. Caso exista sincronização, a equação tem uma solução estável quando  $\rho \propto v^{-1}$  [21]. Usando as propriedades de simetria da integração de  $\rho$  em  $\omega$ , obtém-se que  $\rho$  pode ser escrito na seguinte

forma:

$$\rho(\omega - \dot{\Psi}, \theta) = \begin{cases} \delta\left(\theta - \arcsin\left(\frac{\omega - \dot{\Psi}}{Jr}\right)\right) & |\omega - \dot{\Psi}| < Jr, \\ \frac{C(\omega - \dot{\Psi})}{|(\omega - \dot{\Psi}) - Jr \sin(\theta)|} & |\omega - \dot{\Psi}| > Jr, \end{cases} \quad (1.11)$$

em que  $C(\omega - \dot{\Psi})$  é uma constante de normalização. Combinando este resultado com a equação [1.10](#), e separando a componente real da imaginária, obtém-se:

$$r = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega g(\omega) \sqrt{1 - \left(\frac{\omega - \dot{\Psi}}{rJ}\right)^2} \Theta(rJ - |\omega - \dot{\Psi}|), \quad (1.12a)$$

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega g(\omega) \frac{\omega - \dot{\Psi}}{rJ} - \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega g(\omega) \frac{\omega - \dot{\Psi}}{rJ} \sqrt{1 - \left(\frac{rJ}{\omega - \dot{\Psi}}\right)^2} \Theta(|\omega - \dot{\Psi}| - rJ). \quad (1.12b)$$

em que a função  $\Theta(x)$  é o degrau de Heaviside. Este conjunto de equações define um *fully connected graph* no limite termodinâmico para uma função  $g(\omega)$  genérica e é útil quando a distribuição de frequências não é simétrica, uma vez que a equação [1.5](#) não é aplicável nestes casos [\[23\]](#).

Uma generalização importante do modelo é a passagem para uma rede aleatória (*random graph*). Numa rede aleatória cada nodo não irá estar ligado a todos os outros, mas ligado aleatoriamente a um número finito de nodos. O número de ligações de nodo  $i$ , é designado por degree do nodo,  $q_i$ . No caso de ausência de correlação entre a distribuição das frequências naturais e o degree do nodo, aplicando o formalismo de *mean field*, obtém-se um comportamento idêntico ao caso anterior mas com [\[24\]](#):

$$J_c = \frac{2 \langle q \rangle}{g(0) \langle q^2 \rangle \pi}, \quad (1.13)$$

em que  $\langle q \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_i q_i$  e  $\langle q^2 \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_i q_i^2$ . Apesar da simplicidade desta análise, a aplicação de *mean field* produz uma perda de informação sobre detalhes locais do sistema.

## 1.2 Redes Aleatórias

Existem três tipos de modelos de redes aleatórias com grande interesse teórico: modelo Erdrős-Rényly (ER) [\[25\]](#), modelo Watts-Strogatz (WS) [\[26\]](#) e os modelos de redes *scale-free* (por exemplo o modelo Barabási-Albert (BA) [\[27\]](#) ou o *static model* [\[28\]](#)). Neste trabalho vou focar-me apenas nas rede ER e nas redes *scale-free*.

As redes ER, introduzidas por Erdrős e Rényly, em 1960, assumem que a conexão entre dois diferentes nodos é feita aleatoriamente e todas as conexões são igualmente prováveis. A probabilidade de se encontrar um nodo com um determinado *degree* segue uma distribuição de Poisson [\[25\]](#):

$$P(q) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^q}{q!}, \quad (1.14)$$

com  $\lambda$  igual ao valor médio dos *degrees*. Inicialmente, foi assumido que estruturas complexas com



propriedades aleatórias obedeceriam a este tipo de arquitetura. Como consequência direta, a probabilidade de encontrar nodos na rede com um *degree* muito superior ao dos outros nodos, designados por *hubs*, seria muito pequena. Hoje sabe-se que esta arquitetura não coincide com o comportamento da grande maioria das redes no mundo real [29].

As chamadas rede reais desviam-se bastante desta arquitetura e são, atualmente, um dos principais temas de estudo na área de redes complexas. Estas redes podem ter uma grande densidade de *hubs*, *loops* e apresentam *small world effect*, originando comportamentos distintos dos observados nas redes ER. Por exemplo, o modelo SIS (*susceptible infectious susceptible*), usado para simular a progressão de agentes infecciosos em redes, quando aplicados a uma rede ER, prevê a existência de um valor mínimo finito de eficiência no contágio para que o agente infeccioso prolifere na rede. Pelo contrário, para uma rede real este valor pode tender para zero no limite termodinâmico [30]. Para tentar compre-

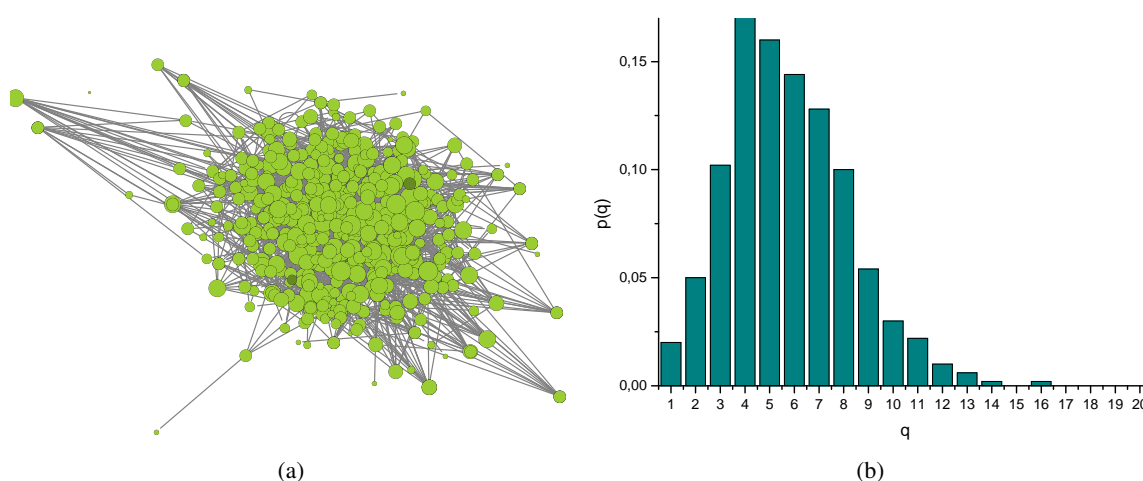


Figura 1.3: Exemplo de uma rede ER com 500 nodos e  $\lambda = 6$ . Em (a) está uma representação gráfica da rede, em que o tamanho dos nodos é proporcional ao seu "degree" e em (b) a respetiva distribuição do "degree" dos nodos.

ender a origem destas propriedades nas redes reais, Barabási e Albert, em 1999, introduziram a ideia de que uma rede real cresce, vai adquirindo novos nodos e formando novas ligações, sendo que a probabilidade de formação destas ligações pode não ser igual para todos os nodos. Barabási propôs um mecanismo de *preferential attachment*, em que os nodos com uma grande quantidade de ligações têm mais facilidade de criar novas ligações do que os nodos com menos ligações [27, 31]. Por exemplo, os artigos mais citados têm mais facilidade a adquirirem novas citações do que artigos menos citados. Este efeito associado a uma rede em crescimento origina que para, uma rede infinita, a probabilidade de encontrar um nodo com um determinado *degree* siga uma lei de potência:  $P(q) \propto q^{-\gamma}$ , com  $\gamma > 2$ . Esta distribuição faz parte de um grupo de distribuições chamadas *scale-free* que para  $q \gg 1$  decaem lentamente com o aumento de  $q$ , originando o aparecimento de *hubs* na rede. Apesar destes dois princípios serem muito importantes para explicar e criar este tipo de redes, existem algoritmos capazes de produzir estas redes, sem utilizar redes em crescimento ou *preferential attachment* [32, 33, 34].

O mecanismo proposto por Barabási consiste em começar com uma pequena rede, à qual irão ser adicionados continuamente novos nodos. Cada novo nodo irá formar  $m$  conexões com os nodos já existentes na rede e a probabilidade da conexão ser efetuada com o nodo  $i$  é proporcional a  $q_i$ . No limite termodinâmico obtém-se que  $P(q) \propto q^{-\gamma}$  com  $\gamma = 3$  [27, 31]. Existe uma generalização simples do modelo, analisada por Dorogovtsev em [1], que permite obter expoentes  $\gamma$  diferentes de 3. Para tal, cada nodo irá efetuar  $m$  conexões e a probabilidade da conexão ser efetuada com o nodo  $i$  irá ser proporcional a  $q_i + A$  em que  $A > -m$ . Neste caso  $\gamma = 3 + A/m$ , e  $\gamma > 2$ . Como estas distribuições decaem lentamente com o aumento de  $q$  para  $q \gg 1$ , existe o risco dos momentos do sistema divergirem. Por exemplo, se  $2 < \gamma \leq 3$ ,  $\langle q^2 \rangle$  diverge. Este resultado aplicado ao modelo anterior em que em que  $J_c$  é dado pela equação 1.13, faz com que  $J_c$  tenda para zero, similar ao que acontece no modelo "SIS". Numa rede finita existe um limite máximo para o degree de um nodo, tornando  $\langle q^2 \rangle$  e  $J_c$  finitos, mas com uma grande dependência no tamanho da rede [24]. A situação em que  $2 < \gamma \leq 3$  é topologicamente diferente da situação em que  $\gamma > 3$ . Uma forma de se compreender a diferença é usando o seguinte raciocínio: primeiro escolhe-se um nodo aleatoriamente na rede e, em seguida, mede-se *degree* de um dos nodos nas pontas do *edge*, escolhido aleatoriamente. O valor médio dos degree encontrado é dado por  $\frac{\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle}{\langle q \rangle}$  e, uma vez que este valor diverge se  $2 < \gamma \leq 3$ , tem-se que existe uma grande probabilidade do nodo escolhido estar conectado a um *hub*. O comportamento do sistema passa, então, a ser dominado por um conjunto de de nodos com *degrees* muito elevados.

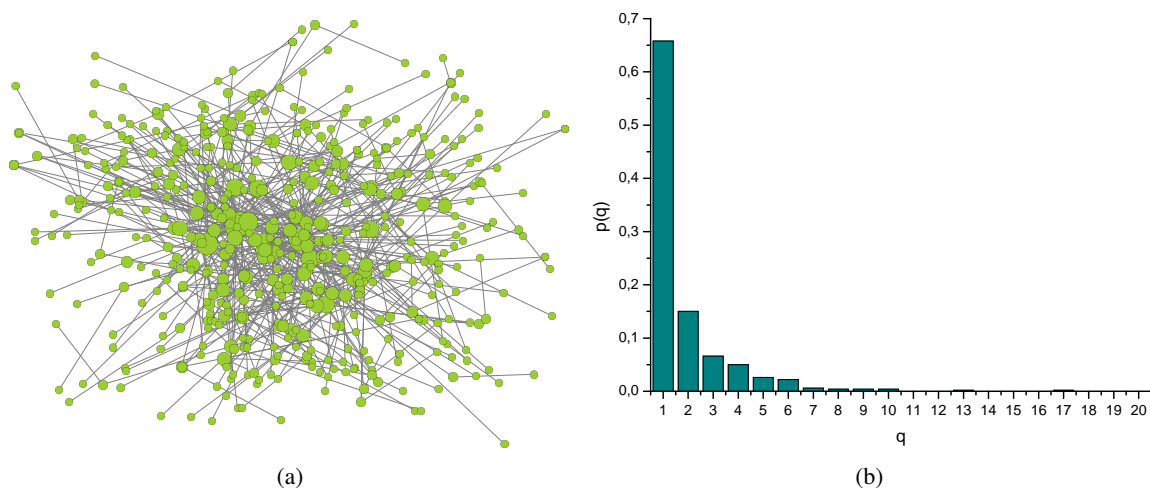


Figura 1.4: Exemplo de uma rede produzida pelo modelo [1] com 500 nodos,  $A = 0$  e  $m = 1$ ; em (a) está uma representação gráfica da rede, em que o tamanho dos nodos é proporcional ao seu "degree", e em (b) a respetiva distribuição do *degree* dos nodos.

### 1.2.1 Static Model

O *Static model* é amplamente utilizado pela comunidade científica para criar redes *scale-free*. É de fácil implementação e permite criar redes que se comportam segundo uma lei de potência para  $q \gg 1$ , com um valor de  $\langle q \rangle$  predefinido [28]. Considerando um grafo com  $N$  nodos, numerados de 1 até  $N$ , a cada nodo é atribuído um peso dado por:

$$p_i = \frac{i^\mu}{\sum_{j=1}^N j^\mu} \approx \frac{1-\mu}{N^{1-\mu}} i^{-\mu}, \quad (1.15)$$

em que  $\mu$  é um parâmetro ente 0 e 1. Em seguida são escolhidos 2 nodos,  $i$  e  $j$  com probabilidades  $p_i$  e  $p_j$ , respetivamente. Se  $i \neq j$  é estabelecida uma conexão, Se  $i = j$ , para evitar o aparecimento de ligações de um nodo com ele mesmo, é escolhido um novo par de nodos. Este processo é repetido  $Nk$  vezes, em que  $k$  é um número natural. Para uma rede infinita tem-se:

$$\gamma = 1 + \frac{1}{\mu}, \quad (1.16a)$$

$$\langle q \rangle = 2k. \quad (1.16b)$$

Se  $\gamma > 3$  não existe correlação entre *degrees*, no entanto, para  $2 < \gamma < 3$  existe alguma correlações entre os *degrees* dos nodos [28], mas desde que a correlação seja pequena os seus efeitos no comportamento do sistema podem ser desprezados [35].

## 1.3 Potts Model aplicado a Redes Scale-Free

Apesar do trabalho apresentado não estar directamente relacionado com o *Potts model*, é interessante comparar o comportamento do sistema descrito no capítulo 3 com o comportamento do *Potts model* quando aplicado ao mesmo tipo de redes. Como tal, nesta secção, vou fazer uma breve descrição deste modelo e dos seus diferentes tipos de comportamento como base de comparação.

O *Potts model* foi introduzido por Potts, em 1952, sendo uma generalização do *Ising model* [36]. O modelo descreve a interação entre *spins* numa rede, assumindo que o *spin* pode estar em  $z$  estados distintos. Para  $z = 2$ , o modelo é equivalente ao *Ising model* e para  $z = 1$  é equivalente a *percolation*. O Hamiltoniano do sistema é definido por:

$$H = - \sum_{i,j} J_{i,j} a_{i,j} \delta(s_i, s_j) - h \sum_i \delta(s_i, 1), \quad (1.17)$$

em que  $a_{i,j}$  são os elementos da matriz adjacente;  $a_{i,j}$  toma o valor de 1 se  $i$  está conectado a  $j$ , e toma o valor de 0 no caso contrário;  $s_i$  é o *spin* do nodo  $i$  e toma os valores  $1, 2, \dots, z$ ;  $h$  é o campo magnético aplicado que distingue o estado  $s_i = 1$  dos restantes;  $\delta(s_i, s_j)$  é o delta de Kronecker que toma o valor de 1 se  $s_i = s_j$  e o valor de 0 se  $s_i \neq s_j$ ; e  $J_{i,j}$  é um parâmetro que define a interação entre o spin  $i$  e o spin  $j$ , este parâmetro vai ser tomado como  $J$  para qualquer par  $i, j$ . A componente

$s$  do momento magnético do nodo  $i$  é dada por:

$$M_i^s = \frac{z \langle \delta(s_i, s) \rangle - 1}{z - 1}. \quad (1.18)$$

Dependendo da temperatura o sistema pode estar em dois regimes diferentes: paramagnético em que  $M_i^s = 0$  para qualquer  $s$ ; ou um estado ordenado em que  $M_i^s \neq 0$ . Quando aplicado *standard mean-field*, se  $z \geq 3$  o sistema exhibe uma transição de primeira ordem [36]. No entanto, para uma rede *scale-free* se  $2 < \gamma \leq 3$  o sistema é fortemente heterogéneo, dominado por *hubs* e este tipo de estruturas destroem a transição de fase de primeira ordem. Como consequência, o sistema passa a exhibir uma transição de fase de ordem infinita a uma temperatura infinita [37].

## 1.4 Transição de Fase de Primeira Ordem e Híbridas

As transições de fase híbridas são um tópico recente de estudo, desenvolvido principalmente na área de redes. Este conceito pode ser explicado usando um modelo de Landau de 6 ordem: [19]:  $G = -MH + a(T - T_{c1})M^2 - bM^4 + cM^6$  em que  $G$  é a energia de Gibbs,  $H$  campo magnético aplicado,  $a, b, c$  são coeficientes positivos e  $T_{c1}$  é a temperatura crítica para a solução de maior magnetização. Neste sistema, a energia de Gibbs é minimizada e, num certo intervalo de temperaturas, existem dois mínimos possíveis. O mínimo global é designado como estado estável e o mínimo local como estado meta-estável. Para  $T < T_{c2}$  a única solução estável do sistema é a solução com magnetização não nula mesmo para campo aplicado nulo. Para  $T_{c2} < T < T_{c*}$  aparecem duas soluções possíveis, uma de maior magnetização e outra de menor magnetização. A solução de maior magnetização tem uma energia de Gibbs menor do que a solução de menor magnetização, sendo o primeiro o estado estável e o segundo estado meta-estável. Quando  $T = T_{c*}$  ambas as soluções têm a mesma estabilidade e para  $T_{c*} < T < T_{c1}$  o estado de menor magnetização passa a ser o estado estável e o estado de maior magnetização passa a ser o estado meta-estável. A partir de  $T > T_{c1}$ , a solução de menor magnetização torna-se a única solução estável. As diferentes soluções do sistema podem ser observado na figura [1.4].

Se a transição de fase ocorrer perto de  $T_{c*}$  o sistema sofre uma transição de primeiro ordem típica, em que  $M - M_{c*} \propto (J - J_{c*})$  na vizinhança do ponto transição de fase. Pelo contrário, se o sistema sofrer uma transição de fase em  $T_{c1}$ , existe uma transição de fase híbrida e na vizinhança do ponto de transição de fase passa-se a ter  $M - M_{c1} \propto (J - J_{c1})^{0.5}$ . Neste tipo de transições de fase  $J_{c1} \neq 0$  e  $\eta < 1$ , combinando a descontinuidade no parâmetro de ordem das transições de primeira ordem com os fenómenos críticos característicos das transições de segunda ordem. Se a temperatura variar lentamente e o sistema tiver tempo para relaxar para o estado mais estável, a transição de fase ocorre em  $T_{c*}$ . Contrariamente, se a variação da temperatura for rápida, o sistema pode passar para um estado meta estável. No caso de sistemas magnéticos, devido à instabilidade perto de  $T_{c2}$  e  $T_{c1}$ , a transição de fase dificilmente se aproxima destes pontos. Para alguns sistemas, principalmente na área de redes, a transição de fase pode efectivamente ocorrer em  $T_{c1}$ , um bom exemplo são os "k-core" [38, 19].

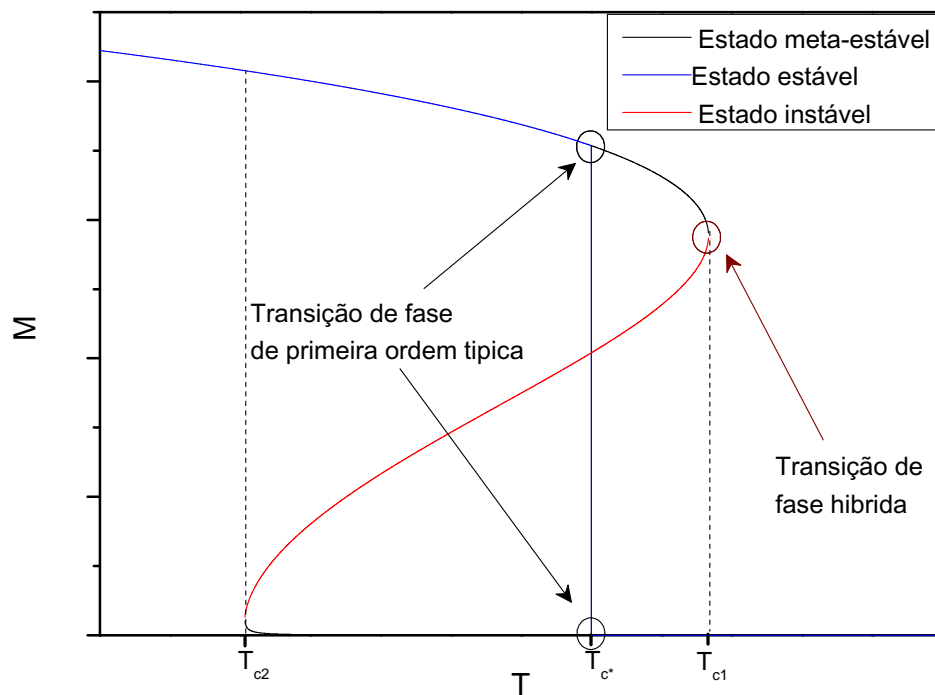


Figura 1.5: Esquema dos estados estáveis, meta-estáveis e instáveis de uma transição de primeira ordem a partir do formalismo de Landau:  $G = -MH + a(T - T_{c1})M^2 - bM^4 + cM^6$  com  $a, b, c > 0$ . No esquema estão marcados os dois tipos de transições de primeira ordem: típica e híbrida.



## Capítulo 2

# *Kuramoto Model Aplicado a um Star Graph*

Neste capítulo, para tentar compreender os efeitos de *hubs* no *Kuramoto model*, estudou-se o comportamento de um *hub* isolado, que corresponde a um *star graph* (ver figura 2.1). Nesta situação,

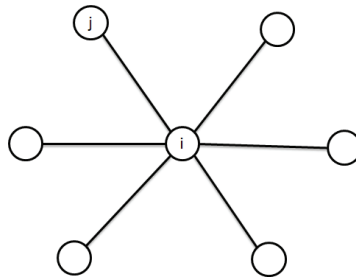


Figura 2.1: Esquema de um *Star Graph*.

o sistema pode ser descrito pela equação 2.1, onde  $i$  é o oscilador central e  $j$  são os osciladores conectados ao *hub*:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + J \sum_j \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (2.1a)$$

$$\dot{\theta}_j = \omega_j + J \sin(\theta_i - \theta_j). \quad (2.1b)$$

Para analisar o sistema utilizou-se o mesmo tipo de parâmetro de ordem usado na secção 1.1:

$$r e^{i\Psi} \equiv \frac{1}{K} \sum_j e^{i\theta_j}, \quad (2.2)$$

onde  $K$  é o número de osciladores conectados ao *hub*. É importante notar que neste caso não se trata de uma aproximação de *mean field*, mas sim de uma substituição matemática. O parâmetro  $r$  não mede a sincronização global do sistema, mas apenas a sincronização entre os osciladores conectados

ao *hub*. A sincronização global pode ser relacionada com este parâmetro, mas para  $K \gg 1$  a diferença é muito pequena. Por outro lado, como o oscilador central desempenha um papel diferente dos restantes,  $r$  tem interesse só por si.

As equações:

$$\dot{\theta}_i - \dot{\Psi} = (\omega_i - \dot{\Psi}) - JKr \sin(\theta_i - \Psi), \quad (2.3a)$$

$$\dot{\theta}_j - \dot{\theta}_i = (\omega_j - \dot{\theta}_i) - J \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (2.3b)$$

representa o sistema após a introdução do parâmetro de ordem, tal como no caso da secção 1.1 as equações são do tipo  $\dot{x} = b - a \sin x$ . A primeira diferença em relação ao caso original é que neste caso, para todos os osciladores exceto o central, o parâmetro  $a$  não depende do parâmetro de ordem. Vou assumir que para existir sincronização o oscilador central tem de estar sincronizado, implicando que  $|\omega_i - \dot{\Psi}| < JKr$  e  $\dot{\theta}_i = \dot{\Psi}$ . Para os restantes osciladores existe sincronização se  $|\omega_j - \dot{\Psi}| < J$ . Aplicando as condições anteriores na equação do parâmetro de ordem obtém-se:

$$Kr \exp \left[ -i \arcsin \left( \frac{\omega_i - \dot{\Psi}}{rKJ} \right) \right] = \sum_j \exp \left[ i \arcsin \left( \frac{\omega_j - \dot{\Psi}}{J} \right) \right] \Theta(J - |\omega_j - \dot{\Psi}|) + \sum_j \exp [i(\theta_j - \theta_i)] \Theta(|\omega_j - \dot{\Psi}| - J), \quad (2.4)$$

onde  $\Theta(x)$  é o degrau de Heaviside.

## 2.1 Contribuição de Osciladores não sincronizados

O último termo do lado direito da equação 2.4 representa a influência dos osciladores não sincronizados. No modelo original, e na grande maioria das suas variantes, esta influência é nula devido à simetria do sistema. No entanto, no caso estudado não existe simetria devido à forte dependência do sistema na frequência natural do oscilador central. A velocidade de grupo não é necessariamente igual ao valor médio das frequências naturais dos osciladores, mas pode estar entre esse valor e o valor da frequência do oscilador central. Como consequência, os osciladores não sincronizados passam a ter influência no comportamento dos osciladores sincronizados. No modelo original considera-se que, os osciladores sincronizados oscilam com uma velocidade constante no tempo. No caso estudado, como existe contribuição dos osciladores não sincronizados, a velocidade de grupo vai depender do tempo, originando instabilidade. Esta instabilidade desaparece quando se tende para o limite termodinâmico. É possível demonstrar que com o tempo, no limite termodinâmico, esta contribuição vai tender para uma valor constante dado pela equação 2.5, em que  $g(x)$  é a função de distribuição das frequências naturais dos osciladores (ver apêndice A). Este resultado não é aplicável a distribuições do tipo Delta Dirac.

É um resultado bastante interessante e, apesar de ter sido aplicado a este caso em específico, a



forma de calcular a contribuição é geral e pode ser aplicado a outras redes. Este resultado é coerente com o resultado obtido no artigo de Lasko Basnarkov [23] e com o resultado proveniente da equação 1.12. Para um número finito de osciladores aparece uma oscilação nesta contribuição. O número necessário para esta oscilação ser pequena depende da distribuição, mas é normalmente um número grande. Para uma distribuição normal de norma 1, este valor ronda os 10000 osciladores. Apesar disso, até mesmo para um número relativamente reduzido de osciladores, estas oscilações apenas introduzem ruído e não alterando o tipo de comportamento do sistema.

$$\frac{1}{K} \sum_j \exp [i \arcsin (\theta_i - \theta_j)] \Theta(|\omega_j - \dot{\Psi}| - J) = i \int_{-\infty}^{\infty} d\omega g(\omega + \dot{\Psi}) f_d(\omega/J) \quad (2.5a)$$

$$f_d(x) = \begin{cases} x[1 - \sqrt{1 - (1/x)^2}] & |x| > 1 \\ f_d(x) = 0 & -1 < x < 1 \end{cases} \quad (2.5b)$$

A equação  $f_d(x)$  está representada na figura 2.1.

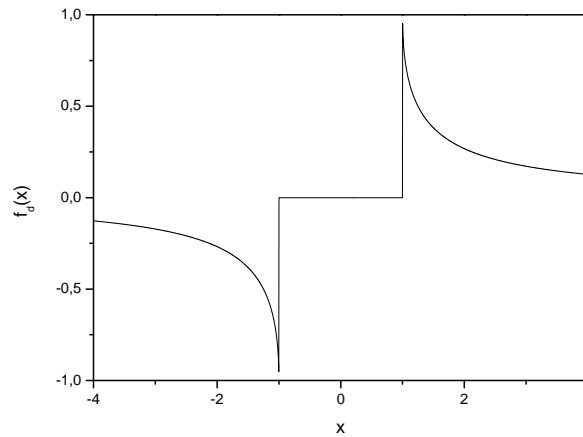


Figura 2.2: Gráfico da função  $f_d(x)$ . Função auxiliar para o calculo da contribuição dos osciladores não sincronizados na velocidade de grupo do sistema.

## 2.2 Frequências Naturais dos Osciladores Distribuídas Segundo uma Distribuição Quasi-normal

Nesta secção vou considerar o caso em que as frequências naturais dos osciladores seguem uma distribuição com apenas um máximo, simétrica em relação ao máximo e de variância finita. Sem perda de generalidade vou considerar que o máximo da distribuição é em zero. Aplicando esta distribuição

à equação [2.4](#), e trabalhando no limite termodinâmico, obtém-se a equação:

$$r^2 = \left( \frac{\dot{\Psi} - \omega_i}{KJ} \right)^2 + \left[ \int_{-J/\sigma}^{+J/\sigma} dx g_n \left( x + \frac{\dot{\Psi}}{\sigma} \right) \sqrt{1 - \left( \frac{x}{J/\sigma} \right)^2} \right]^2, \quad (2.6a)$$

$$\frac{\dot{\Psi} - \omega_i}{KJ} = \int_{-J/\sigma}^{+J/\sigma} dx g_n \left( x + \frac{\dot{\Psi}}{\sigma} \right) \frac{x}{J/\sigma} + \int_{-\infty}^{+\infty} dx g_n \left( x + \frac{\dot{\Psi}}{\sigma} \right) f_d \left( \frac{x}{J/\sigma} \right). \quad (2.6b)$$

onde  $\sigma$  é a variância da distribuição e  $g_n(x)$  é uma função de distribuição com variância 1 definida como  $g_n(x) \equiv g(\sigma x)$ . A relação [2.6a](#) define  $r$  em função de  $\sigma$ ,  $J$  e  $\dot{\Psi}$  de uma forma explícita, enquanto a equação [2.6b](#) define a velocidade de grupo de uma forma implícita e consoante o valor de  $\omega_i$  pode exibir diferentes tipos de comportamento. Analisando a equação [2.6b](#), verifica-se que se  $\omega_i$  for menor que um valor crítico,  $\omega_c$ , a equação tem apenas uma solução qualquer que seja o  $J$ . No entanto, se  $|\omega_i|$  for maior que  $\omega_c$ , a equação passa a ter três soluções possíveis numa determinada gama de valores de  $J$  (ver figura [2.3](#)).

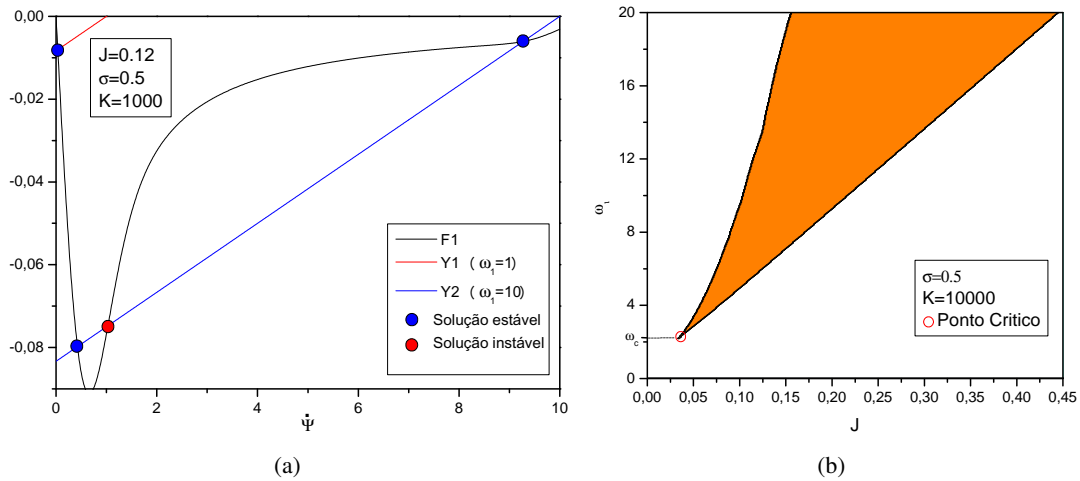


Figura 2.3: (a) Gráfico das componentes da direita e da esquerda da equação [2.6a](#). A intercepção entre as curvas representa as soluções da equação. A preto está representada a componente da esquerda e a vermelho e a azul a componente da direita para  $\omega_i = 0.1 < \omega_c$  e  $\omega_i = 10 > \omega_c$  respetivamente. (b) Diagrama do número de solução da equação [2.6a](#) em função de  $\omega_i$  e  $J$ . A laranja está marcado as zonas em que existem mais de uma solução e a branco as zonas em que existe apenas uma solução. Para ambos os gráficos  $K = 1000$ ,  $\sigma = 0.5$  e  $g_n(x)$  segue uma distribuição normal de variância 1.

### 2.2.1 Caso em que $|\omega_i| < \omega_c$

Para  $\omega_i = 0$  existe simetria na equação [2.6](#), então:

$$r = \int_{-J/\sigma}^{+J/\sigma} dx g_n(x) \sqrt{1 - \left(\frac{x}{J/\sigma}\right)^2}, \quad (2.7a)$$

$$\dot{\Psi} = 0. \quad (2.7b)$$

Na equação [2.7a](#) pode-se observar que  $r$  cresce monotonamente com o aumento de  $J$ , como tal não existe transição de fase. Como já foi referido não existe transição de fase desde que  $|\omega_i| < \omega_c$ . Um caso simples de estudar é quando  $\omega_i \ll \sigma$  e a equação [2.6b](#) pode ser escrita numa forma explícita dada por:

$$\dot{\Psi} = \frac{\omega_i}{1 + K(J/\sigma)^2}. \quad (2.8)$$

No caso em que  $\sigma \lesssim \omega_i < \omega_c$  continua a existir apenas uma solução da equação [2.6b](#), mas a equação deixa de ter solução explícita.

O sistema foi simulado a partir da equação [2.1](#) para diferentes  $J$ . Para cada  $J$  foi atribuída uma fase inicial,  $\theta_i(0)$ , aleatória para cada oscilador. O movimento dos osciladores foi determinado usando um método Runge-Kutta de 4 ordem com um passo de 0.01. Como o oscilador central tem um número muito elevado de conexões, para que o resultado da simulação seja correcto, o passo do método deve ser pequeno. Em seguida deixou-se o sistema relaxar e após um tempo de 10 foi calculado  $r$  e  $\dot{\Psi}$ . Em todas as simulações não foram utilizadas médias temporais em  $r$ , de modo a preservar alguma informação sobre a estabilidade do sistema.

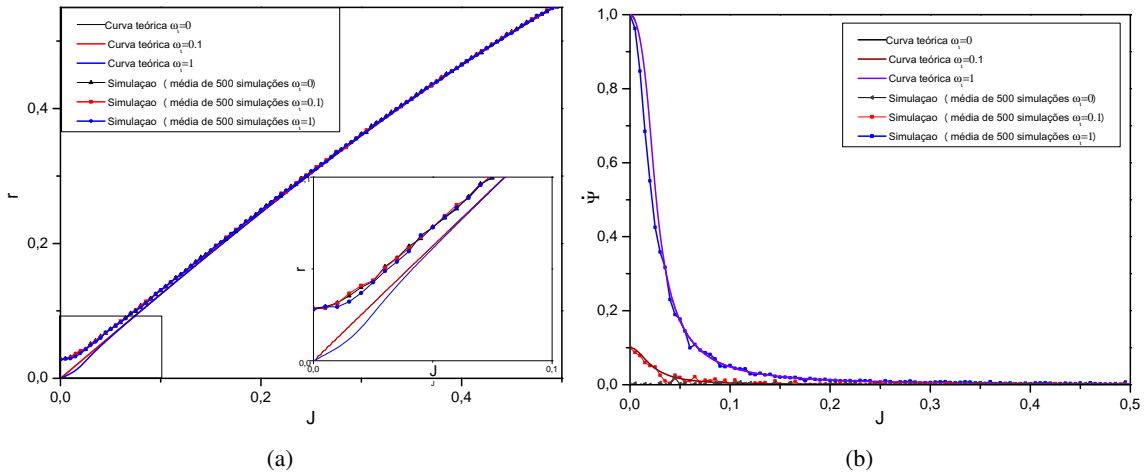


Figura 2.4: Gráficos de  $r$  e  $\dot{\Psi}$  em função de  $J$ , (a) e (b) respetivamente. As traços contínuos estão representados as curvas teóricas e as traços-ponto simulações. Em miniatura no gráfico (a) está representado um zoom da zona seleccionada.  $K = 1000$ ,  $\sigma = 0.5$ ,  $\omega_i = [0, 0.1, 1]$  e  $g_n(x)$  segue uma distribuição normal de variância 1.

Apesar de muito ruído, principalmente se  $J$  pequeno, os resultados numéricos estão de acordo

com as previsões teóricas. Este resultado sugere que o aparecimento de sincronização parcial é muito fácil na vizinhança dos *hubs*, desde que estes tenham uma frequência natural próxima da dos restantes osciladores. É importante também notar que como  $K$  é muito grande, a velocidade de grupo decai rapidamente com  $J$  (ver figura 2.4(b)), o termo  $\left(\frac{\dot{\Psi}-\omega_i}{KJ}\right)$  passa a ser desprezável e as curvas aproximam-se das equações 2.7. Mesmo quando  $\omega_i$  se afasta ligeiramente de zero, estas equações são praticamente exactas. Na figura 2.4(a) as curvas de  $\omega_i = 0$  e  $\omega_i = 0.1$  estão sobrepostas tanto no caso teórico como nas simulações, mas para  $\omega_i = 1$  já existe um pequeno desvio se  $J$  pequeno. Perto de  $J = 0$ , as curvas teóricas e as simulações afastam-se devido ao facto de que para um sistema finito,  $r \neq 0$  mesmo se  $J \rightarrow 0$ . Isto surge devido ao facto de que se o sistema for finito existe uma probabilidade não nula de se encontrar uma fracção finita de osciladores com fases próximas no mesmo instante de tempo mesmo se os seus movimentos forem independentes.

### 2.2.2 Caso em que $|\omega_i| > \omega_c$

Se  $|\omega_i| > \omega_c$ , a equação 2.6b pode ter várias soluções num determinado intervalo de  $J$ , o que indica a existência de transições fase de primeira ordem no sistema. Neste regime existem três soluções matemáticas; usando o teorema da estabilidade é possível demonstrar que apenas duas delas são estáveis [39]. A solução de menor velocidade de grupo corresponde sempre a uma maior sincronização do que a solução de maior velocidade. Na figura 2.5 está representada a evolução do sistema no

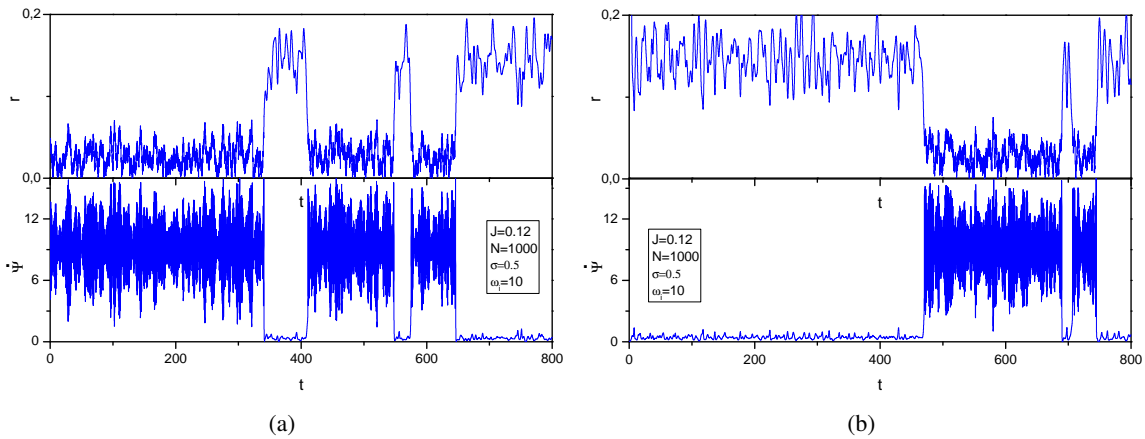


Figura 2.5: (a) Gráfico de  $r$  e  $\dot{\Psi}$  em função do tempo com fases iniciais aleatórias, entre  $0$  e  $2\pi$ . (b) Gráfico de  $r$  e  $\dot{\Psi}$  em função do tempo com fases iniciais aleatórias, entre  $0$  e  $\pi$ . Em ambos os gráficos  $J = 0.12$ ;  $K = 10000$ ;  $\omega_i = 10$ ;  $\sigma = 0.5$  e  $g_n(x)$  segue uma distribuição normal de variância 1.

tempo para um determinado  $J$ . Na figura é possível observar-se as duas soluções do sistema. Como seria de esperar se os osciladores começarem inicialmente com fases aleatórias, o sistema irá tender para o estado de menor sincronização. No entanto, se este intervalo for mais curto, por exemplo  $0 < \theta_j(0) < \pi$ , como o sistema está mais "perto" do estado sincronizado, irá tender para este. Como o sistema simulado tem apenas 1000 osciladores, existe muito ruído e o sistema rapidamente começa a oscilar entre as duas soluções. As figuras também evidenciam que a instabilidade na velocidade de

grupo é muito maior para o estado de menor sincronização. Pensando em termos do formalismo da energia de Gibbs, em que o sistema pode ser bem descrito pela minimização de um determinado potencial, esta diferença significa que o mínimo correspondente ao estado de menor sincronização será muito mais largo (segunda derivada do potencial em ordem a parâmetro de ordem muito menor) do que o mínimo correspondente ao estado de maior sincronização.

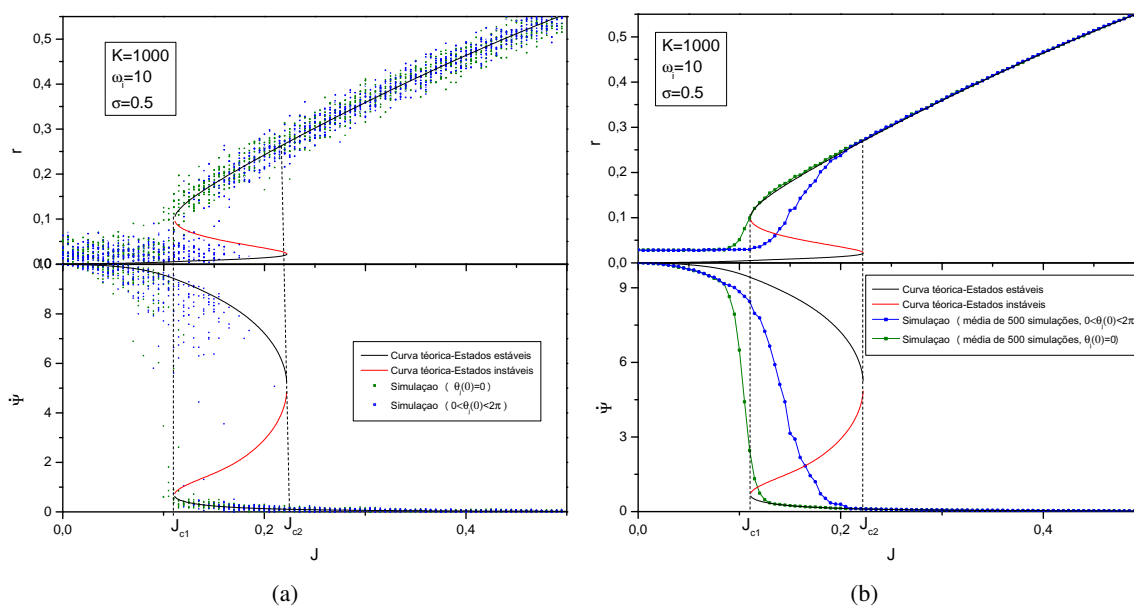


Figura 2.6: Gráficos de  $r$  em função de  $J$  com condições iniciais aleatórias (pontos verdes) e constantes (pontos azuis). As traços contínuos estão marcadas as soluções teóricas estáveis (linha a preto) e instáveis (linha a azul). No gráfico (a) estão representados os valores de  $r$  obtidos em 10 simulações por cada  $J$  e no gráfico (b) para um valor médio de 500 simulações.  $K = 10000$ ,  $\omega_i = 10$ ,  $\sigma = 0.5$  e  $g_n(x)$  segue uma distribuição normal de variância 1.

A figura 2.6 representa  $r$  em função de  $J$ , para simulações e curvas teóricas. Na figura 2.6(a), apesar do forte ruído, é possível verificar uma tendência de acordo com a curva teórica. A velocidade de grupo é difícil de ser obtida a partir das simulações, principalmente no caso da figura 2.5(a), em que se pretende obter informação separadamente dos dois estados estáveis. Ao contrário de  $r$ , para se obter uma boa estimativa da velocidade de grupo é necessário uma média temporal ou uma linearização. De ambas as formas é preciso escolher um intervalo de tempo e, devido à existência de uma região com duas soluções, o sistema nesse intervalo pode oscilar entre as duas soluções, criando valores intermédios. Para contornar o problema, calculei a velocidade de grupo a partir da velocidade do oscilador central (como foi definida originalmente) e procurei usar o menor intervalo de tempo possível que produzisse uma boa estimativa mas, inevitavelmente, aparece uma quantidade significativa de valores intermédios. A obtenção do parâmetro  $r$ , a partir das simulações, mostrou-se mais simples e os resultados mais sólidos.

Como seria de esperar, a dispersão dos resultados aumenta perto da transição de fase sendo que este efeito provoca desvios principalmente na velocidade de grupo. No figura 2.6(b) é feita uma média

entre várias simulações, a qual coincide perfeitamente com a curva teórica. Dentro das possibilidades da simulação e dos *finite size effect*, uma vez que  $K$  não é muito grande, os resultados mostram-se compatíveis com a teoria e está bem evidenciada a histerese do sistema. Se  $K$  for finito, a transição de segunda ordem existe sempre independente de  $K$ . No entanto, à medida que se aumenta  $K$ , a transição de fase aproxima-se de zero e mais uma vez a solução tende para as equações [2.7](#).

### 2.2.3 Comportamento para $J \ll 1$

Para realçar a simetria e a dependência com  $J$ , vou escrever a equação [2.6b](#) na seguinte forma:

$$\frac{\dot{\Psi} - \omega_i}{K\sigma} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx g_n \left( x + \frac{\dot{\Psi}}{\sigma} \right) x - \int_{-\infty}^{+\infty} dx g_n \left( x + \frac{\dot{\Psi}}{\sigma} \right) x \sqrt{1 - \left( \frac{J/\sigma}{x} \right)^2} \Theta(|x| - J/\sigma). \quad (2.9)$$

Para  $J$  pequeno, pode ser feita uma expansão em torno de  $J = 0$  da equação [2.9](#). Os coeficientes dos termos ímpares são nulos, obtendo-se a equação [2.10](#).  $A(\dot{\Psi}/\sigma)$  e  $B(\dot{\Psi}/\sigma)$  são coeficientes genéricos que apenas dependem de  $\dot{\Psi}/\sigma$ . A função  $A(\dot{\Psi}/\sigma)$  é importante para os cálculos seguintes e dado pela relação [2.10b](#)

$$\frac{\dot{\Psi} - \omega_i}{\sigma K} = A(\dot{\Psi}/\sigma) (J/\sigma)^2 + B(\dot{\Psi}/\sigma) (J/\sigma)^4 + \dots, \quad (2.10a)$$

$$A(\dot{\Psi}/\sigma) = (1/2) \int_{-\infty}^{+\infty} dx g_n \left( x + \frac{\dot{\Psi}}{\sigma} \right) \frac{1}{x} \quad (2.10b)$$

Visto que, com o aumento de  $K$  os pontos críticos do sistema tendem para 0, vou usar apenas o primeiro termo da expansão. Os pontos críticos do sistema obtém-se quando na equação [2.10](#) a derivada em ordem a  $\dot{\Psi}$ , da componente da direita é igual a derivada em  $\dot{\Psi}$  da componente da esquerda, originando o sistema de equações:

$$\dot{\Psi}_{c1,2}/\sigma - \omega_i/\sigma = A(\dot{\Psi}_{c1,2}/\sigma) \left( J_{c1,2}\sqrt{K}/\sigma \right)^2, \quad (2.11a)$$

$$1 = A'(\dot{\Psi}_{c1,2}/\sigma) \left( J_{c1,2}\sqrt{K}/\sigma \right)^2, \quad (2.11b)$$

em que  $A'(x) \equiv \frac{dA(x)}{dx}$ . Estas equações têm duas soluções se  $|\omega_i| > \omega_c$  e nenhuma se  $|\omega_i| \ll \omega_c$ . Como tal, defini pontos críticos do sistema de forma análoga às definições feitas na secção [1.4](#).  $J_{c1}$  é o valor de  $J$  para qual aparece o estado de maior sincronização. Quando  $J_{c1} < J < J_{c*}$  o estado de maior sincronização é meta-estável e o estado de menor sincronização é estável.  $J_{c*}$  é o valor de  $J$  para qual os dois estados igualam a sua estabilidade e para  $J_{c*} < J < J_{c2}$  o estado de maior sincronização passa a ser estável e o estado de menor sincronização passa a ser meta-estável. Por fim se  $J > J_{c2}$  a solução de maior sincronização é a única possível.  $J_{c1,2}$  e  $\dot{\Psi}_{c1,2}$  representam  $J$  e  $\dot{\Psi}$  num dos dois pontos críticos.

Usando a mesma técnica anterior, mas para procurar o valor de  $\omega$  para o qual a equação deixa de

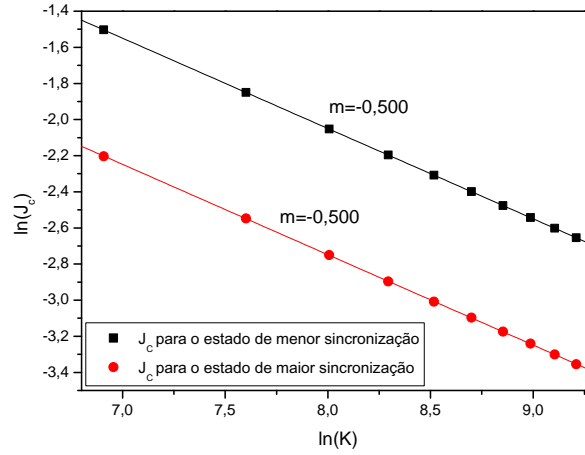


Figura 2.7: Gráfico de  $\ln(J_{c1,2})$  em função de  $\ln(K)$  obtido numericamente através da equação 2.6b.

ter soluções, designado por  $\omega_c$ , tem-se que este é determinado pelo sistemas de equações:

$$A' \left( \dot{\Psi}_c / \sigma \right) \left( \dot{\Psi}_c / \sigma - \omega_c / \sigma \right) = A \left( \dot{\Psi}_c / \sigma \right), \quad (2.12a)$$

$$A'' \left( \dot{\Psi}_c / \sigma \right) = 0, \quad (2.12b)$$

em que  $A''(x) \equiv \frac{d^2 A(x)}{dx^2}$ . Para uma distribuição gaussiana obteve-se que  $\omega_c / \sigma \simeq 4.25$ .

A partir da equação 2.10a também é possível determinar o expoente crítico junto à transição de fase. Usando uma expansão em Taylor em torno do ponto crítico e mantendo apenas os termos não nulos, obtém-se a equação:

$$\frac{\partial^2}{\partial \dot{\Psi} / \sigma^2} \left[ \frac{\dot{\Psi} / \sigma - \omega_i / \sigma}{A \left( \dot{\Psi} / \sigma \right)} \right]_{\dot{\Psi} = \dot{\Psi}_c} (\dot{\Psi} - \dot{\Psi}_c)^2 = 4J_c(J - J_c) + 2(J - J_c)^2 + \dots, \quad (2.13a)$$

$$r(J, \dot{\Psi}) - r_c = \frac{\partial}{\partial J} \left[ r(J, \dot{\Psi}) \right]_{(J, \dot{\Psi}) = (J_c, \dot{\Psi}_c)} (J - J_c) + \frac{\partial}{\partial \dot{\Psi}} \left[ r(J, \dot{\Psi}) \right]_{(J, \dot{\Psi}) = (J_c, \dot{\Psi}_c)} (\dot{\Psi} - \dot{\Psi}_c) + \dots. \quad (2.13b)$$

Muito perto da transição de fase só interessam os termos de menor grau, de onde se conclui que  $\dot{\Psi} - \dot{\Psi}_{c1,2} \propto |J - J_{c1,2}|^\eta$  e  $r - r_{c1,2} \propto |J - J_{c1,2}|^\eta$  com  $\eta = 0.5$ .

A determinação de  $J_{c*}$  é mais complicada. No sistema considerado não existe um formalismo definido para distinguir estável e meta-estável.  $J_{c*}$  será algures entre  $J_{c1}$  e  $J_{c2}$ , mas não existe uma forma exata de o determinar. Outra questão importante é se de facto se trata de uma transição de fase de primeira ordem típica ou uma transição de fase híbrida, uma vez que o estado de maior sincronização é por natureza mais estável que o de menor sincronização. Para analisar estas propriedades apliquei um outro tipo de simulações no qual fui variando continuamente o parâmetro  $J$  mantendo o estado do  $J$  anterior (figuras 2.8(a) e 2.8(b)). Este tipo de simulações são usadas mais frequentemente do que

as anteriores, principalmente porque são substancialmente mais rápidas, uma vez que normalmente necessitam de um menor tempo de relaxação. Apesar desta vantagem, perde-se bastante informação sobre os estados meta-estáveis, visto que se torna difícil manter o sistema nestes estados.

Na figura 2.8(b), a variação do sistema foi relativamente rápida (tempos de relaxação iguais a 10) e é possível observar que a simulação aproxima-se do ponto  $J_{c1}$  ao contrário do ponto  $J_{c2}$ . Em todas as simulações efetuadas a transição de fase ocorreu sempre muito antes de  $J_{c2}$ . Na figura 2.8(b) a variação do sistema foi relativamente lenta (tempos de relaxação iguais a 1000) e a transição de fase ocorreu mais ou menos no mesmo sítio, tanto para  $J$  crescente como decrescente, sugerindo tratar-se provavelmente de  $J_{c*}$ . É conclusivo que a transição de fase pode ocorrer perto de  $J_{c1}$ , mas devido à possibilidade de histerese não é tão evidente que se trata de uma transição de fase híbrida como no caso do  $k$ -core [19].

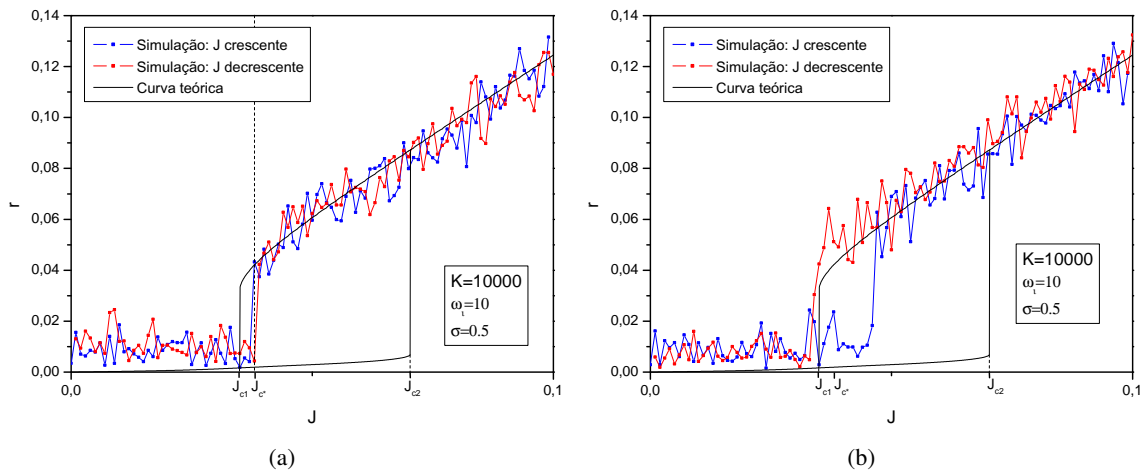


Figura 2.8: Gráficos de  $r$  em função de  $J$ . A traço contínuo está marcada a curva teórica (linha a preto). A traço-ponto estão representados dados provenientes de simulações para uma variação contínua de  $J$ : a vermelho  $J$  crescente e a azul  $J$  decrescente. O tempo de relaxação do sistema foi de 1000 no gráfico (a) e de 10 no gráfico (b). Para ambos os gráficos: passo de  $J$  de 0.01.  $K = 10$ ,  $w_i = 10$ ,  $w_j = 1$ .

## 2.3 Freqüências naturais dos osciladores distribuídas segundo um Delta Dirac

No artigo de Gómez-Gardeñes et al [12], foi estudado um caso particular de um *star graph* em que todos os osciladores conectados ao *hub* têm a mesma frequência natural,  $\omega_j$ . Nesta situação não é aplicável a relação demonstrada no Appendix A e a contribuição dos osciladores não sincronizados não tende para um valor constante com o aumento do número de osciladores. Contudo, existem apenas duas situações possíveis: ou todos os osciladores estão sincronizados,  $|\omega_j - \dot{\Psi}| < J$ , e como tal não existe contribuição dos osciladores não sincronizados, ou nenhum oscilador está sincronizado,



$|\omega_j - \dot{\Psi}| > J$ . A equação que define o sistema pode ser escrita como:

$$r^2 = \left( \frac{\dot{\Psi} - \omega_i}{KJ} \right)^2 + \left[ \Theta \left( J - |\omega_j - \dot{\Psi}| \right) \sqrt{1 - \left( \frac{\omega_j - \dot{\Psi}}{J} \right)^2} \right]^2, \quad (2.14a)$$

$$\frac{\dot{\Psi} - \omega_i}{KJ} = \frac{\omega_j - \dot{\Psi}}{J} \Theta \left( J - |\omega_j - \dot{\Psi}| \right) + f_d \left( \frac{\omega_j - \dot{\Psi}}{J}, t \right) \Theta \left( |\omega_j - \dot{\Psi}| - J \right), \quad (2.14b)$$

Em que  $f_d \left( \frac{\omega_j}{J}, t \right)$ , é a contribuição dos osciladores não sincronizados dependente no tempo.

Se  $|\omega_j - \dot{\Psi}| < J$ , a partir da equação [2.6b](#) tem-se que  $\dot{\Psi} = (\omega_i + K\omega_j)/(K+1)$ . Como este valor não depende de  $J$ , sabe-se que existe um  $J_{c1}$  mínimo para que a relação  $|\omega_j - \dot{\Psi}| < J$  possa ser satisfeita, que corresponde a  $J_{c1} = |\omega_j - \omega_i|/(K+1)$ . Usando a equação obtém-se que se  $J > J_{c1}$  então  $r = 1$ . Isto significa que no caso de existir sincronização, a sincronização entre os osciladores conectados ao *hub* é máxima. Este resultado é fácil de compreender uma vez que todos os osciladores conectados ao *hub* partilham a mesma frequência natural.

No artigo de Gómez-Gardeñes et al [\[12\]](#), os autores utilizaram uma aproximação semelhante a *mean field*, definindo o parâmetro de ordem como:

$$r_g e^{i\Psi_g} \equiv \frac{1}{K+1} \left[ \sum_j e^{i\theta_j} + e^{i\theta_i} \right], \quad (2.15)$$

e considerando que o oscilador central obedece a seguinte relação:

$$\dot{\theta}_i - \dot{\Psi}_g = (\omega_i - \dot{\Psi}) - J(K+1)r_g \sin(\theta_i - \Psi_g). \quad (2.16)$$

Uma vez que não existe ligação entre o nodo central e ele próprio esta abordagem não é exata. Com já foi referido, a utilização do parâmetro de ordem  $r e^{i\Psi} \equiv \frac{1}{K} \sum_j e^{i\theta_j}$  é exata matematicamente mas apenas mede a sincronização entre os osciladores conectados ao *hub* e não entra em consideração com a sincronização do oscilador central. Se  $K \gg 1$ ,  $r_g$  e  $r$  aproximam-se, mas para  $K = 10$  ainda existem algumas diferenças. É possível encontrar  $r_g$  a partir de  $r$ , de uma forma exata, sem a utilização de *mean field*. Para o caso estudado, no regime sincronizado ( $r = 1$ ) obtém-se:

$$r_g = \frac{\sqrt{K^2 + 2K\sqrt{1 - \left(\frac{J_{c1}}{J}\right)} + 1}}{K+1}. \quad (2.17)$$

Para  $J = J_{c1}$ , tem-se  $r_g = \frac{\sqrt{K^2+1}}{K+1}$ . No artigo de Gómez-Gardeñes et al, usando as equações aproximadas foi obtido  $r_g = \frac{K}{K+1}$ . Estes dois resultados, para  $K = 10$ , são muito próximos. É ainda importante notar que para este sistema, usando as equações aproximadas, a determinação da velocidade de grupo usando a parte imaginária do parâmetro de ordem não produz bons resultados.

A análise do sistema na zona não sincronizada é relativamente complicada, uma vez que a fase de grupo depende do tempo e não tende para um valor constante com o aumento de  $K$ . A relação [2.5](#) não é válida se a distribuição das frequências naturais for um delta-Dirac perfeito, mas será aplicável se a distribuição não for um Delta-Dirac "perfeito" mas sim uma distribuição com  $\sigma \ll 1$ . Nestas condições, o comportamento na zona instável será diferente, mas os pontos críticos serão os mesmos. Como tal pode ser usada para estimar  $J_{c2}$ , e obtém-se:

$$J_{c2} = \frac{|\omega_i - \omega_j|}{\left| \frac{\dot{\Psi} - \omega_j}{J} \right| + K f_d \left( \left| \frac{\dot{\Psi} - \omega_j}{J} \right| \right)}, \quad (2.18a)$$

$$\left| \frac{\dot{\Psi} - \omega_j}{J} \right| = \sqrt{\frac{(K+1)^2}{(K+1)^2 - 1}}. \quad (2.18b)$$

Foram efetuadas simulações variando continuamente  $J$ , para  $J$  crescente e decrescente (figura [2.9](#)). A simulação está de acordo com a curva teórica. Como era esperado, o estado não sincronizado demonstrou uma forte tendência para transitar para o estado de maior sincronização antes de atingir  $J_{c2}$ . Para se conseguir manter o estado não sincronizado perto de  $J_{c2}$ , foi usado um tempo de relaxação do sistema de 1, e um passo de  $J$  de 0.05. Pelo contrário, a solução de maior sincronização é bastante estável, e aproxima-se de  $J_{c1}$ , mesmo para tempos de relaxação relativamente altos (1000). Usando a equação [2.17](#), obtém-se que na vizinhança de  $J_{c1}$ ,  $(r_g - r_{gc}) \propto (J - J_{c1})^{1/2}$ , correspondendo a uma transição de fase híbrida.

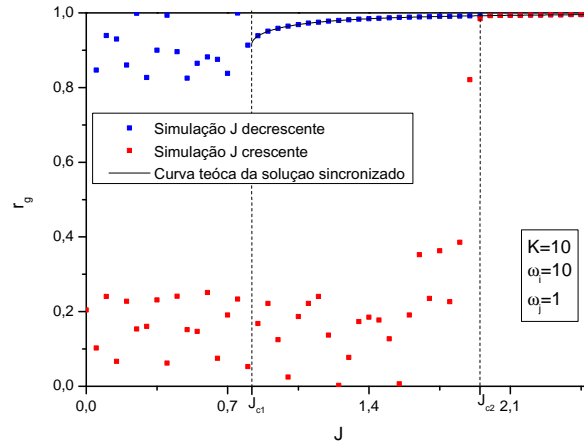


Figura 2.9: Gráficos de  $r_g$  em função de  $J$ . A traço contínua está marcada a curva teórica do estado estável (linha a preto). Os pontos representam dados provenientes de simulações para uma variação contínua de  $J$ : a vermelho  $J$  crescente e azul  $J$  decrescente. O tempo de relaxação do sistema foi de 1 e o passo de  $J$  de 0.05.  $K = 10$ ,  $w_i = 10$ ,  $w_j = 1$ .

Usando um sistema de equações análogo ao sistema de equações [2.4](#), mas para uma função distribuição de frequências naturais genérica, pode-se estudar um grande número de distribuições. Apesar de diferentes tipos de distribuições terem propriedades distintas, para todas as distribuições testadas,

inclusive *scale-free*, o aparecimento da transição de primeira ordem ocorre quando a frequência natural do oscilador central se afasta do valor médio das frequências dos seus vizinhos.



## Capítulo 3

# *Kuramoto Model* com Correlação entre a Frequência Natural e o *Degree* do Nodo

No artigo de Gómez-Gardeñes et al [12] foi reportado, com base em simulações computacionais, a existência de uma transição de primeira ordem para o *Kuramoto model* com uma correlação *degree-frequência* natural dada por:  $w_i = q_i$ , aplicado a uma rede *scale-free*. No artigo foram encontradas transições de primeira ordem para diferentes valores de  $\gamma$ , inclusive  $\gamma = 3.3$ . Nesta secção vou estudar o mesmo tipo de estruturas utilizando *annealed network approximation* e comparações com dados provenientes de simulações. Os resultados obtidos sugerem que, desde que o tamanho da rede e o *degree* médio do sistema sejam suficientemente grandes para que *annealed network approximation* seja aplicável, a transição de fase de primeira ordem só ocorre no intervalo  $2 < \gamma < 3$ .

Para uma correlação genérica  $\omega(q)$ , numa rede genérica, a função que descreve cada nodo da rede é:

$$\dot{\theta}_i = \omega(q_i) + J \sum_j a_{i,j} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (3.1)$$

em que  $a_{i,j}$  é a matriz adjacente:  $a_{i,j}$  toma o valor de 1 se o nodo  $i$  estiver conectado ao nodo  $j$ , e 0 se não estiver. Utilizou-se *annealed network approximation*, o que na prática, se não existirem correlações entre *degrees* na rede, corresponde a fazer a seguinte substituição  $a_{i,j} \equiv \frac{q_i q_j}{N \langle q \rangle}$ , em que  $N$  é número de nodos do sistema [40]. Esta abordagem tem implícito uma aproximação de *mean field*, uma vez que aproxima a ligação efectiva entre 2 nodos pela probabilidade da ocorrência dessa ligação. Em termos práticos, converte-se a rede original num *fully connected graph* em que a ligação entre o nodo  $i$  e  $j$  é dado um peso igual à probabilidade de ocorrer entre estes dois pontos na rede original. Este tipo de tratamentos perde informação local do sistema, mas consegue produzir boas descrições do comportamento global.

O parâmetro de ordem definiu-se como:

$$r e^{i\Psi} = \sum_i \frac{q_i}{N \langle q \rangle} e^{i\theta_i}, \quad (3.2)$$

e a equação 3.1 toma forma:

$$\dot{\theta}_i - \dot{\Psi} = \omega(q_i) - \dot{\Psi} - Jq_i r \sin(\theta_i - \Psi). \quad (3.3)$$

Mais uma vez, existem dois tipos de estados para os osciladores. Osciladores em que  $|\omega(q_i) - \dot{\Psi}| < Jq_i r$  estão sincronizados e têm o comportamento do tipo representado na figura 1.1(a) e com o tempo tendem para um estado estável. Os restantes osciladores não vão estar sincronizados e vão ter um movimento periódico, do tipo representado na figura 1.1(a). Aplicando a definição do parâmetro de ordem, tem-se:

$$\begin{aligned} r = & \frac{1}{N \langle q \rangle} \sum_j q_j e^{i(\theta_j - \Psi)} \Theta \left( q_j r J - |\omega_j - \dot{\Psi}| \right), \\ & + \frac{1}{N \langle q \rangle} \sum_j q_j e^{i(\theta_j - \Psi)} \Theta \left( |\omega_j - \dot{\Psi}| - q_j r J \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Assumindo a existência de soluções estáveis, a contribuição dos osciladores não sincronizados será dado por um termo análogo ao utilizado na equação 2.5. Substituindo cada uma das contribuições, e separando em componente real e imaginária, obtém-se:

$$r = \frac{1}{\langle q \rangle} \sum_q P(q) q \sqrt{1 - \left( \frac{\omega(q) - \dot{\Psi}}{Jqr} \right)^2} \Theta \left( qrJ - |\omega(q) - \dot{\Psi}| \right), \quad (3.5a)$$

$$\langle \omega \rangle - \dot{\Psi} = \sum_q P(q) (\omega(q) - \dot{\Psi}) \sqrt{1 - \left( \frac{Jqr}{\omega(q) - \dot{\Psi}} \right)^2} \Theta \left( |\omega(q) - \dot{\Psi}| - qrJ \right). \quad (3.5b)$$

Ao contrário da situação analisada no capítulo anterior, as duas equações dependem de  $\dot{\Psi}$  e  $r$ . Estas equações são gerais para qualquer sistema com uma distribuição de  $q$  bem comportada e em que exista uma correlação total entre a frequência natural do oscilador e o seu *degree*. Assumiu-se uma distribuição contínua de  $q$  definida como  $p(q)$ . Esta aproximação poderá alterar o comportamento quantitativo das curvas mas, topologicamente, o tipo de comportamento será o mesmo. Na verdade, quando comparado com os dados provenientes de simulações, esta abordagem mostra-se mais exata do que a utilização da forma discreta.

O caso de correlação linear corresponde simplesmente a definir  $\omega \equiv a \cdot q - b$  e sem perda de generalidade é sempre possível mudar para um referencial em que  $b = 0$ . Redefinindo:  $J \rightarrow J/|a|$  e  $\dot{\Psi} \rightarrow \dot{\Psi}/a$  as equações não dependem de  $a$  e o sistema passa a ser definido por:

$$r = \frac{1}{\langle q \rangle} \int_1^{+\infty} dq p(q) q \sqrt{1 - \left( \frac{q - \dot{\Psi}}{Jqr} \right)^2} \Theta \left( \left| \frac{Jqr}{q - \dot{\Psi}} \right| - 1 \right), \quad (3.6a)$$

$$\langle q \rangle - \dot{\Psi} = \int_1^{+\infty} dq p(q) (q - \dot{\Psi}) \sqrt{1 - \left( \frac{Jqr}{q - \dot{\Psi}} \right)^2} \Theta \left( 1 - \left| \frac{Jqr}{q - \dot{\Psi}} \right| \right). \quad (3.6b)$$

Para evitar a resolução direta do sistema de equações [3.6](#), definiu-se uma variável  $\alpha \equiv Jr$  e obteve-se as equações:

$$\langle q \rangle - \dot{\Psi} = \int_1^{+\infty} dq p(q) (q - \dot{\Psi}) \sqrt{1 - \left( \frac{\alpha q}{q - \dot{\Psi}} \right)^2} \Theta \left( 1 - \left| \frac{q\alpha}{q - \dot{\Psi}} \right| \right), \quad (3.7a)$$

$$r = \frac{1}{\langle q \rangle} \int_1^{+\infty} dq p(q) q \sqrt{1 - \left( \frac{q - \dot{\Psi}}{\alpha q} \right)^2} \Theta \left( \left| \frac{q\alpha}{q - \dot{\Psi}} \right| - 1 \right), \quad (3.7b)$$

$$r = \frac{\alpha}{J}. \quad (3.7c)$$

Assim  $\dot{\Psi}$  é função implícita apenas de  $\alpha$  e  $r$  é função explícita de  $\dot{\Psi}$  e  $\alpha$ . A solução do sistema para um determinado  $J$  pode ser encontrada pela interseção da curva dada pela equação [3.7b](#) com a curva [3.7c](#) (ver figura [3.1](#)). A solução do sistema [3.6](#), utilizando um método numérico, como por exemplo método de Newton, é relativamente fácil, mas esta abordagem permite uma melhor compreensão das curvas envolventes.

### 3.1 Rede ER

Nesta secção vou considerar uma rede ER. Por comodidade,  $q$  foi tomado como contínuo. A distribuição  $p(q)$  é dada pela versão contínua da equação [1.14](#)

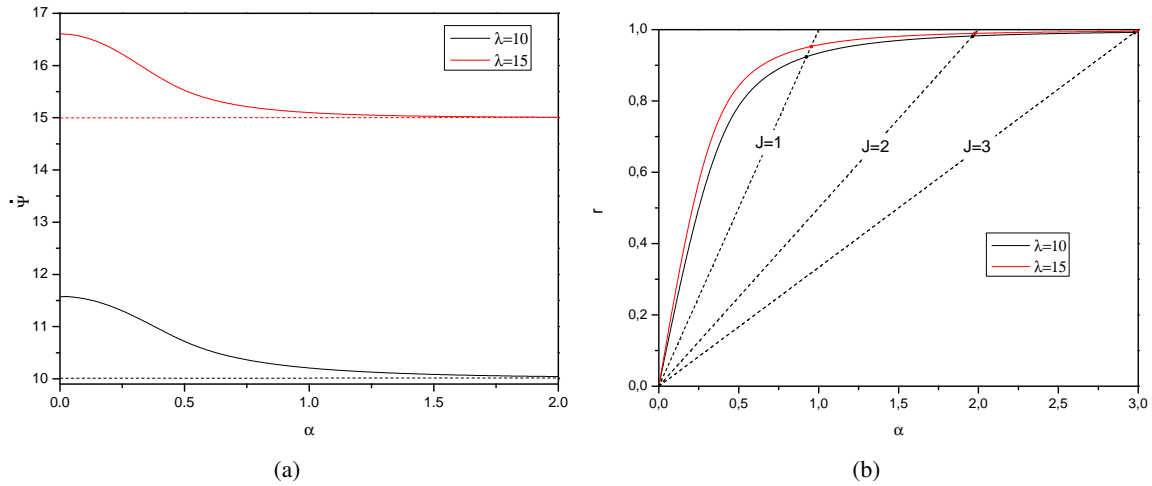


Figura 3.1: Gráficos do sistema de equações [3.7](#) para uma rede ER com  $\lambda = 10$  a preto  $\lambda = 15$  a vermelho. (a) Gráfico de  $\dot{\Psi}$  em função de  $\alpha$  a traço contínuo e a tracejado está representado valor de  $\dot{\Psi}$  quando  $\alpha \rightarrow \infty$ , dado por  $\langle q \rangle$ . (b) Gráfico de  $r$  em função de  $\alpha$  a traço contínuo e a tracejado está representado as curvas  $r = \alpha/J$ . O  $r$  da interseção das curvas a traço contínuo com as curvas a tracejado representa a solução do sistema para o respetivo  $J$ .

Como é visível na figura [3.2\(b\)](#), o sistema exibe uma transição de fase de segunda ordem. A função  $\dot{\Psi}(\alpha)$  não tem solução explícita mas pode-se determinar algumas propriedades:  $\dot{\Psi}'(0) = 0$ ,

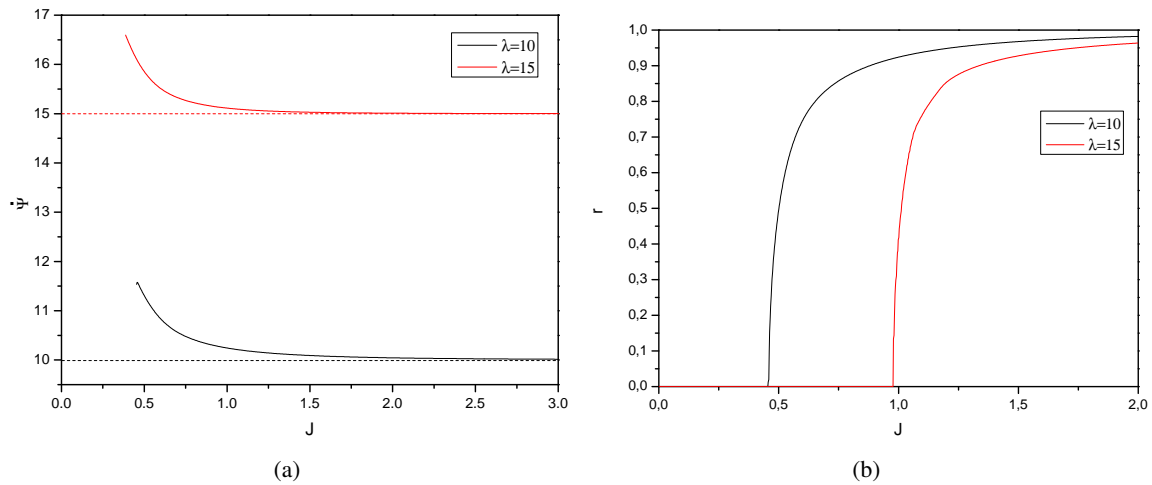


Figura 3.2: (a) Gráfico de  $\dot{\Psi}$  em função de  $J$ . A tracejado está representado o valor de  $\dot{\Psi}$  quando  $\alpha \rightarrow \infty$ . (b) Gráfico de  $r$  em função de  $J$ .  $\dot{\Psi}$  pode tomar qualquer valor quando  $r = 0$  o que não tem significado físico, por isso não está representado.

$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \dot{\Psi}'(\alpha) = \langle q \rangle$  e  $\dot{\Psi}(0)$  pode ser determinado expandindo a equação 3.7a em torno de  $\alpha = 0$ , obtendo-se a condição:

$$\int_1^{+\infty} dq p(q)(q - \dot{\Psi}(0)) \frac{q^2}{(q - \dot{\Psi}(0))^2 + \xi^2} = 0, \quad (3.8)$$

em que  $\xi \rightarrow 0$ . A resolução da equação para  $\xi = 0$  apresenta algumas complicações uma vez que a integração numérica pode divergir. A melhor solução encontrada para contornar o problema consistiu em introduzir o parâmetro  $\xi$ , que evita a divergência do integral. Usando esta técnica obtive as figuras 3.3, consistentes com o comportamento observado na figura 3.2(a). Uma boa aproximação que produz

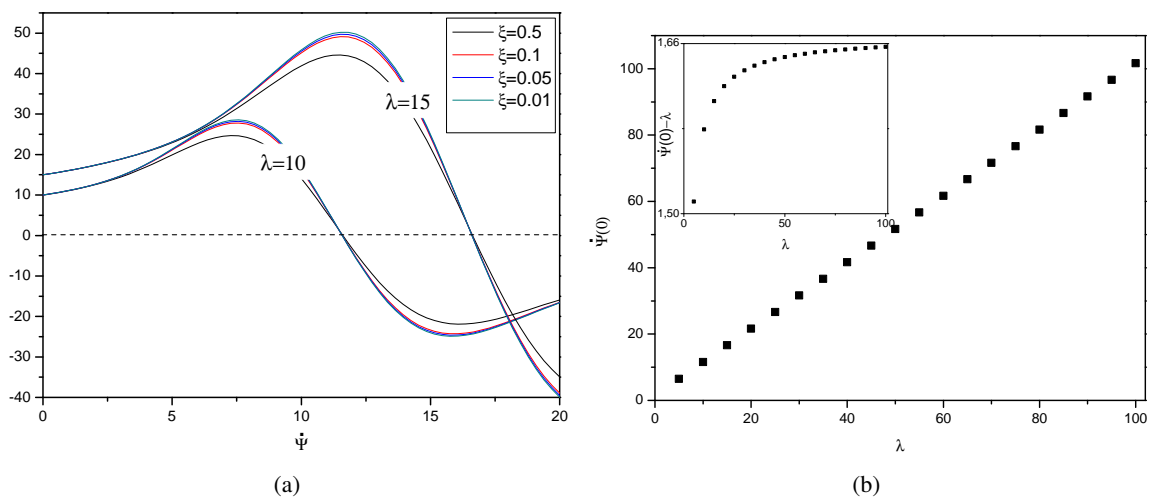


Figura 3.3: (a) Gráfico do lado esquerdo da equação 3.8 em função de  $\dot{\Psi}$  para  $\lambda = [10, 15]$ .  $\dot{\Psi} = \dot{\Psi}(0)$  é dado pela intercepção da curva a traço contínuo com a curva a tracejado. (b)  $\dot{\Psi}(0)$  em função de  $\lambda$ .



poucos desvios, principalmente se  $\langle p \rangle \gg 1$ , é considerar  $\dot{\Psi}(0)$  constante e igual a  $\langle q \rangle$ .

Sabendo  $\dot{\Psi}(0)$  é possível determinar  $J_c$ . Introduzindo a variável de integração:  $x \equiv \frac{q-\dot{\Psi}}{rJq}$  na equação 3.6a, para  $\alpha \ll 1$  obtém-se:

$$r = \frac{rJ}{\langle q \rangle} \int_{-1}^{+1} dx p \left( \frac{\dot{\Psi}}{1-Jxr} \right) \frac{\dot{\Psi}^2}{(1-(Jxr)^3)^3} \sqrt{1-x^2}. \quad (3.9)$$

A solução não trivial da equação existe se  $J > J_c$ , com  $J_c$  dado por:

$$J_c = \frac{2\langle q \rangle}{\pi p \left( \dot{\Psi}(0) \right) \dot{\Psi}(0)^2}, \quad (3.10a)$$

$$J_c \sim 2\sqrt{2}/(\sqrt{\pi \langle q \rangle}). \quad (3.10b)$$

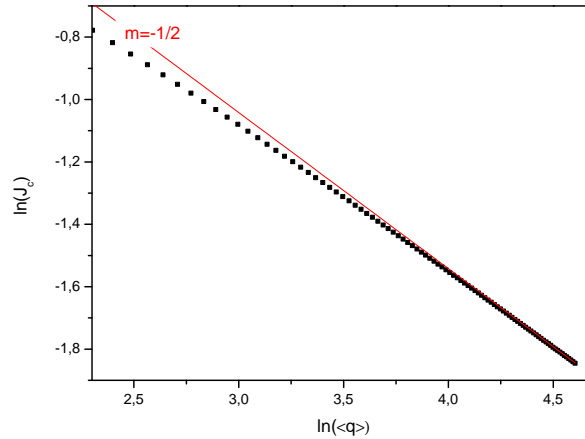


Figura 3.4: Gráfico de  $\ln(J_c)$  em função de  $\ln(\langle q \rangle)$  a partir das equações 3.7. A vermelho está representado uma curva com declive  $-1/2$ .

A relação 3.10b só é válida se  $\langle q \rangle \gg 1$  como é visível na figura 3.4. O expoente crítico do sistema pode ser determinado usando uma expansão em Taylor de  $r$  em torno de  $\alpha = 0$ , mantendo apenas os termos não nulos:

$$0 = \left. \frac{dr}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} (J - J_c) r + \left. \frac{d^3 r}{d\alpha^3} \right|_{\alpha=0} r^3 [J_c^3 + 3(J - J_c)^2 J_c + 3(J - J_c) J_c^2 + (J - J_c)^3] + \dots \quad (3.11)$$

De onde se conclui que, para  $J - J_c \ll 1$ , a solução não trivial comporta-se segundo:  $r \propto (J - J_c)^{1/2}$ .

### 3.1.1 Comparação com Dados Provenientes de Simulações

Foram feitas simulações do sistema a partir da equação 3.1 usando um método de Runge-Kutta de 4 ordem com um passo de 0.001 e para uma rede ER com  $N = 10000$ . Para uma correta descrição do sistema foi necessário um passo extremamente pequeno principalmente devido para as redes

consideradas na secção seguinte. As simulações foram feitas, variando continuamente  $J$  no sentido crescente e decrescente. Obteve-se as figuras [3.5](#).

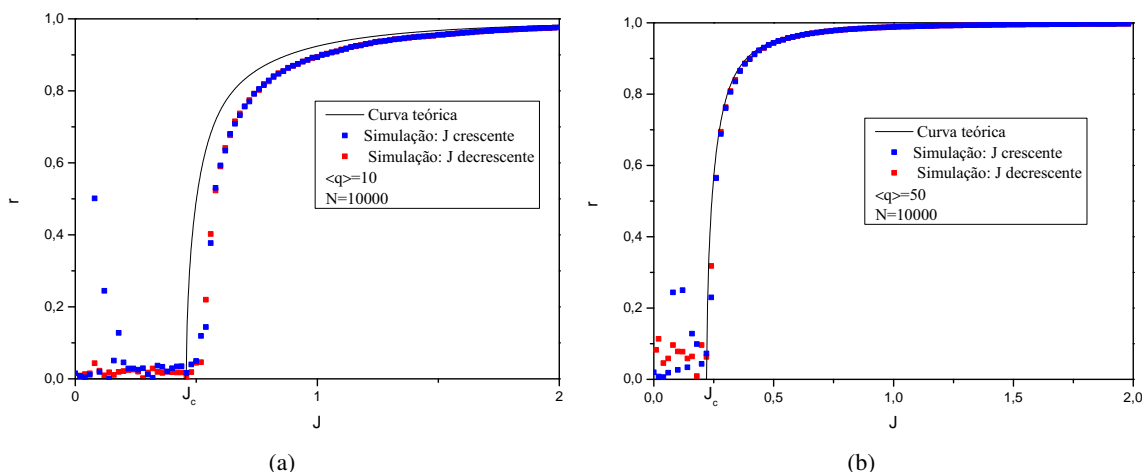


Figura 3.5: Gráfico de  $r$  em função de  $J$  para uma rede ER. Os pontos azuis e vermelhos representam dados provenientes de simulações com  $J$  crescente e decrescente respetivamente. A preto está representada a curva teórica. Para ambos os gráficos  $N = 10000$ . Para o gráfico (a)  $\langle q \rangle = 10$ , o passo de  $J$  foi de 0.02 e o tempo de estabilização de 1; para o gráfico (b)  $\langle q \rangle = 50$ , o passo de  $J$  foi de 0.02 e o tempo de estabilização de 10.

Para  $\langle q \rangle = 50$ , a simulação coincide com a curva teórica, dentro dos limites possíveis para o tamanho da rede, existindo apenas alguns desvios devido a *finite size effects* perto da transição de fase. Para  $\langle q \rangle = 10$ , a simulação desvia-se da curva teórica, principalmente perto da transição de fase. Nestas condições o sistema também demora mais tempo a relaxar. Este resultado dever-se-á ao facto de para  $\langle q \rangle = 10$  ser difícil o sistema tender para o estado de equilíbrio, visto muitos dos nodos na rede terem um pequeno número de ligações, tornando a ideia de campo global imprecisa, pelo que muitos osciladores irão estar fracamente conectados ao resto da rede. No geral, os resultados vão de encontro à teoria desde que o tamanho e o valor médio dos *degrees* do sistema sejam suficientemente grandes para se poder assumir a existência de um campo global no sistema.

## 3.2 Rede Scale-Free

Nesta secção vou considerar uma rede *scale-free*. Utilizando as equações [3.7](#) obtive as figuras [3.6](#) e [3.7](#) para  $\gamma = 2.8$ ,  $\gamma = 3$  e  $\gamma = 3.2$  e *degree* mínimo ( $q_0$ ) igual a 1. Como se pode observar na figura [3.7](#), o sistema exibe uma transição de fase de primeira ordem para  $\gamma = 2.8$  e de segunda ordem para  $\gamma = 3.2$ . A transição de fase para  $\gamma = 3$  não apresenta histerese, mas apresenta descontinuidade no parâmetro de ordem, indicando tratar-se em princípio de um  $\gamma$  crítico. Na verdade, como irá ser verificado a seguir, a transição de fase neste ponto é uma transição de fase híbrida.

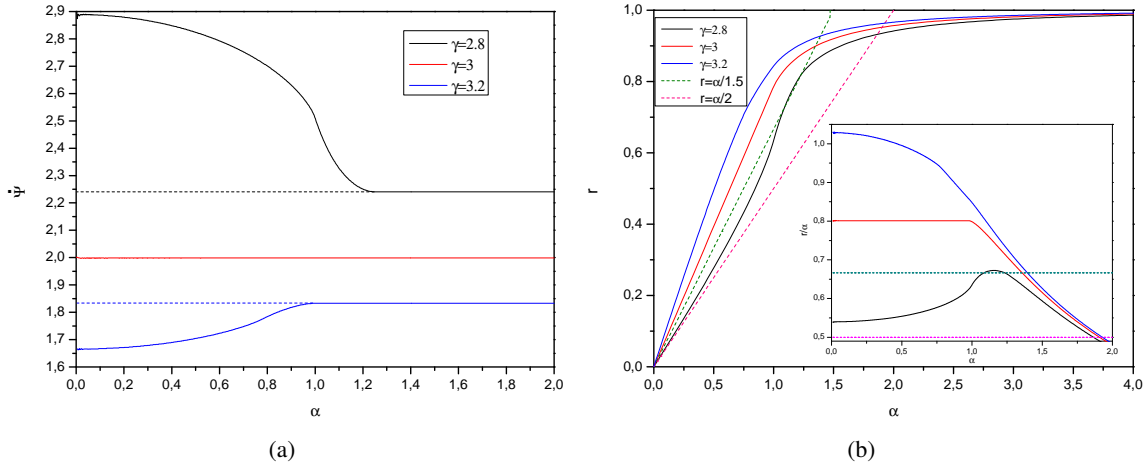


Figura 3.6: Gráficos do sistema de equações 3.7 para uma rede *scale-free* com  $\gamma = 2.8$  a preto,  $\gamma = 3$  a vermelho e  $\gamma = 3.2$  a azul (a) Gráfico de  $\Psi$  em função de  $\alpha$ , a traço contínuo e a tracejado está representado valor de  $\Psi$  quando  $\alpha \rightarrow \infty$ , dado por  $\langle \omega \rangle$ . (b) Gráfico de  $r$  em função de  $\alpha$  a traço contínuo, e as curvas  $r = \alpha/J$  a tracejado. O  $r$  da interseção das curvas a traço contínuo e as curvas a tracejado representa a solução do sistema para o respetivo  $J$ . Em miniatura está representado o gráfico de  $r/\alpha$  em função de  $\alpha$  a traço contínuo, e as curvas  $r = 1/J$  a tracejado. O  $r$  correspondente da interseção das curvas a traço contínuo e as curvas a tracejado representa as soluções não triviais do sistema para o respetivo  $J$ .

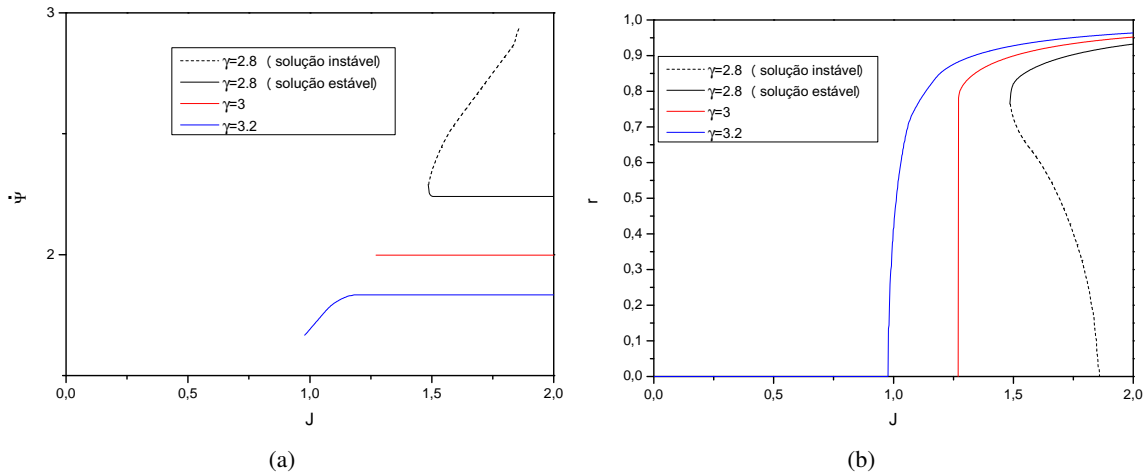


Figura 3.7: (a) Gráfico de  $\Psi$  em função de  $J$ . A tracejado está representado valor de  $\Psi$  quando  $\alpha \rightarrow \infty$ , dado por  $\langle \omega \rangle$ . (b) Gráfico de  $r$  em função de  $J$ . Curvas a traço contínuo representam soluções estáveis e a tracejado soluções instáveis.  $\Psi$  pode tomar qualquer valor quando  $r = 0$  e não tem significado físico, por isso não está representado.

Para analisar o sistema analiticamente, a partir da equação 3.7b definiu-se a função:

$$\Phi(\alpha) \equiv r/\alpha = (\gamma-2) \left( \frac{\dot{\Psi}(\alpha)}{q_0} \right)^{2-\gamma} \int_{-1}^{+1} dx (1-\alpha x)^{\gamma-3} \sqrt{1-x^2} \Theta(1-\alpha x) \Theta\left(\alpha x - \frac{q_0}{\dot{\Psi} - q_0}\right). \quad (3.12)$$

A equação 3.7c toma a forma de  $\Phi(\alpha) = 1/J$  (ver a figura 3.7(b)). A velocidade de grupo do sistema,  $\dot{\Psi}$ , não tem forma explícita, mas usando a variável de integração  $x \equiv \frac{q}{q-\dot{\Psi}}$ , pode ser escrita como:

$$\left(\dot{\Psi}/q_0\right)^{\gamma-2} \left(\frac{1}{\gamma-2} - \frac{\dot{\Psi}/q_0}{\gamma-1}\right) = \left(\int_1^{+\infty} dx - \int_{\frac{1}{1-\dot{\Psi}/q_0}}^{-\infty} dx\right) x^{-3} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{\gamma-3} \sqrt{1-(\alpha x)^2} \Theta(1-|\alpha x|), \quad (3.13)$$

onde se verifica que  $\dot{\Psi}$  aumenta proporcionalmente com o aumento de  $q_0$ .  $\gamma = 3$  é um ponto importante, e é possível analisar a equação analítica para  $\gamma = 3 + \delta$  com  $|\delta| \ll 1$ , de onde se obtém:

$$\dot{\Psi}(\alpha) = q_0 (2 - \delta f_a(\alpha)), \quad (3.14a)$$

$$f_a(\alpha) \equiv \frac{1 - \int_0^{+\infty} dx \frac{1}{x^3} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \sqrt{1-\alpha^2 x^2} \Theta(1-|\alpha x|)}{1 - \sqrt{1-\alpha^2} \Theta(1-|\alpha|)}. \quad (3.14b)$$

representada na figura 3.8 (dedução no apêndice B).

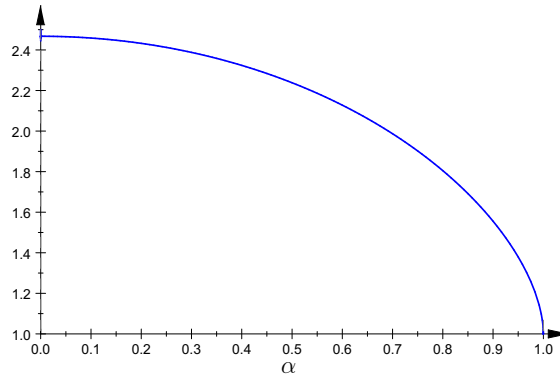


Figura 3.8: Gráfico da função  $f_a(\alpha)$ , representativa da forma da função da velocidade de grupo em função de  $\alpha$  para  $\gamma = 3 + \delta$  com  $\delta \ll 1$ .

Para  $\alpha = 0$  tem-se que:

$$\dot{\Psi}(0) - 2q_0 = \delta \frac{q_0 \pi^2}{4}, \quad (3.15a)$$

$$\dot{\Psi}''(0) \simeq 1.71 q_0 \delta, \quad (3.15b)$$

em que  $\dot{\Psi}''(0) \equiv \left. \frac{\partial^2 \dot{\Psi}(\alpha)}{\partial^2 \alpha} \right|_{\alpha=0}$ . A existência de uma transição de fase de primeira ordem está associada à existência de um valor máximo de  $\Phi(\alpha)$  para  $\alpha \neq 0$ . Sabe-se que função  $\Phi(\alpha)$  tende para 0 quando  $\alpha$  tende para infinito, logo uma condição suficiente para a existência de uma transição de primeira ordem é a função ser crescente para  $\alpha = 0$ . Como a primeira derivada da função é nula tem-se que a

segunda derivada tem se de ser maior que zero, de onde se conclui que:

$$\frac{(\gamma - 4)(\gamma - 3)}{4(\gamma - 2)} - \frac{\dot{\Psi}''(0)}{\dot{\Psi}(0)} > 0. \quad (3.16)$$

Aplicando a equação 3.15 a esta condição, deduz-se o aparecimento de uma transição de primeira em volta de  $\gamma = 3$  se  $\gamma < 3$ . A partir da solução numérica da equação 3.7b obtém-se que a condição 3.16 é satisfeita para todo o intervalo  $2 < \gamma < 3$ .

Para  $\gamma > 3$ , o sistema comporta-se analogamente ao caso da secção 3.1 com:

$$J_c = \frac{2}{\pi(\gamma - 2)} \left( \frac{\dot{\Psi}(0)}{q_0} \right)^{\gamma-2}. \quad (3.17)$$

Como  $\dot{\Psi}(0)$  aumenta proporcionalmente a  $q_0$ ,  $J_c$  não depende de  $q_0$ .

Para  $2 < \gamma < 3$  existe um  $J_c$  diferente para cada uma das soluções. Este caso é análogo ao que se verifica nas transições de primeiro ordem caracterizadas na secção 2.2.3 como tal vou utilizar a mesma notação que no capítulo.  $J_{c2}$  é obtido pela relação 3.17 e  $J_{c1}$  é dado pelo  $J$  corresponde ao valor máximo de  $\Phi(\alpha)$ . O diagrama de fases do sistema está representado na figura 3.2. Para  $\gamma < 3$  o sistema é sensível ao valor do *máximo* degree do sistema  $q_{max}$ . O diagrama foi construído usando as equações 3.7 com  $q_{max} = 1000$ . O comportamento das curvas  $J_{c1}$  e  $J_{c2}$  para  $\gamma < 2.5$  variam consideravelmente com  $q_{max}$  e a velocidade de grupo, nesta região, é também difícil de determinar visto que para  $\gamma = 2$  o valor médio dos *degrees* diverge no limite termodinâmico. Esta zona não está no representada no diagrama uma vez que não foram obtidos resultados sólidos. A partir da relação 3.17 conclui-se que  $J_{c2}$  diverge se  $\gamma \rightarrow 2$ . Para  $J_{c1}$  não foi possível determinar o comportamento assintótico perto de  $\gamma = 2$  uma vez que analiticamente, perto deste ponto, as equações 3.12 e 3.15 mostram-se difíceis de tratar e os resultados numéricos também não são fiáveis. No diagrama da figura 3.2 a zona I corresponde à região em que não existe sincronização no sistema, a zona II corresponde à região em que existe sincronização no sistema e a zona III corresponde à região em que os dois tipos de soluções são possíveis.  $J_{c1}$ ,  $J_{c2}$  e  $J_c$  estão representados no diagrama, na fronteira das zonas respectivas. Se  $2 < \gamma < 3$ , usando uma expansão em Taylor em volta do valor máximo de  $\Phi(\alpha)$ , mantendo os termos não nulos:

$$\frac{J - J_{c1}}{J_{c1}^2} = - \left. \frac{d^2\Phi(\alpha)}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=J_{c1}r_c} [(r - r_c)J_{c1} + (J - J_{c1})r_c + (r - r_c)(J - J_{c1})]^2 + \dots, \quad (3.18)$$

tem-se que  $r - r_c \propto (J - J_{c1})^{1/2}$  na vizinhança da transição de fase. Para  $\gamma = 3$ ,  $\Phi(\alpha)$  é constante para  $0 < \alpha < 1$ , e a transição ocorre em  $\alpha = 1$ . A expansão em volta deste ponto, para  $\alpha > 1$  é dada por:

$$\frac{J - J_c}{J_c^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} [(r - r_c)J_1 + (J - J_c)r_c + (r - r_c)(J - J_1)]^{3/2}, \quad (3.19)$$

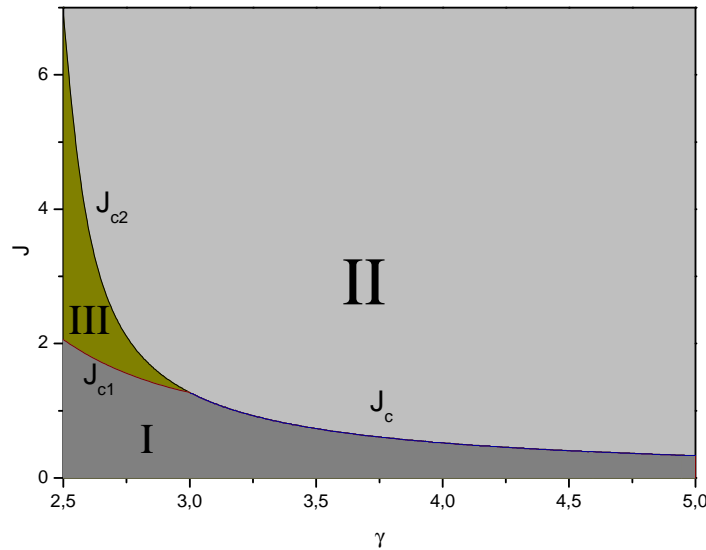


Figura 3.9: Diagrama de fases do modelo, aplicado a uma rede *scale-free*, em função de  $J$  e  $\gamma$ . Zona I:  $r = 0$ . Zona II:  $r \neq 0$ . Zona III: As duas soluções,  $r = 0$  e  $r \neq 0$ , são possíveis.  $J_{c1}$ ,  $J_{c2}$  e  $J_c$  estão representados no diagrama na fronteira das zonas respectivas.  $q_{max} = 1000$

dando origem ao comportamento assintótico:  $r - r_c \propto (J - J_{c1})^{2/3}$  (descrição detalhada no apêndice C). Como foi referindo anteriormente trata-se de uma transição de fase híbrida.

Este conjunto de expoentes críticos foi também encontrado no artigo [20], em que estudaram o Kuramoto model aplicado a um *fully connected graph* e a distribuições de frequências naturais é dada por:  $g(\omega) \propto |\omega|^a$  num certo intervalo de frequências (simétrico),  $a$  é um parâmetro real. Para  $a > 0$  tem-se uma transição de segunda ordem com expoente crítico de  $1/2$ ; para  $a < 0$  tem-se uma transição de primeira ordem com expoente crítico de  $1/2$  e para  $a = 0$  tem-se uma transição de fase híbrida com expoente crítico de  $2/3$ . Este resultado é muito semelhante ao comportamento do sistema analisado neste capítulo, existindo também semelhanças na forma final da equação que define  $r$ .

Apesar deste comportamento ter sido encontrado para o caso limite de uma rede *scale-free*, em que  $P(q) \propto q^{-\gamma}$ , existe uma diferença topológica entre  $2 < \gamma \leq 3$  e  $\gamma > 3$  como foi referido na secção 1.2. É de consenso geral que, para este tipo de distribuições, o comportamento assintótico da distribuição dos *degrees* para grandes valores tem um papel decisivo no comportamento do sistema [41]. Como tal para qualquer distribuição que se comporte como *scale-free* quando  $q \gg 1$ , o comportamento será análogo, sofrendo o mesmo tipo de transições de fase independentemente do comportamento da distribuição dos *degrees* para pequenos *degrees*. O expoente crítico  $1/2$  encontrado anteriormente para  $\gamma \neq 3$  é universal para as todas as distribuições *scale-free*. No entanto, no caso de  $\gamma = 3$ , trabalhos recentes ainda não publicados, mostram que no caso do sistema descrito no artigo [20] o expoente crítico  $2/3$  não é universal e pode variar com pequenas alteração na forma da distribuição das frequências naturais [42]. Devido às semelhanças entre esse modelo e o modelo analisado neste capítulo, é possível que, quando  $\gamma = 3$ , o comportamento da transição de fase possa depender da forma da função distribuição dos *degrees* para pequenos valores.

### 3.2.1 Comparação com Dados Provenientes de Simulações

Foram feitas simulações do sistema usando um método de Runge-Kutta de 4 ordem com um passo de 0.001. As simulações foram feitas variando continuamente  $J$  no sentido crescente e decrescente, para uma rede com  $N = 10000$ . A rede simulada foi criada usando o *static model* descrito na secção 1.2.1. As curvas teóricas foram produzidas utilizando soluções numéricas das equações 3.7  $p(q)$  foi determinado a partir da interpolação da estatística de uma rede com  $N = 100000$ . Obtiveram-se as figuras 3.10.

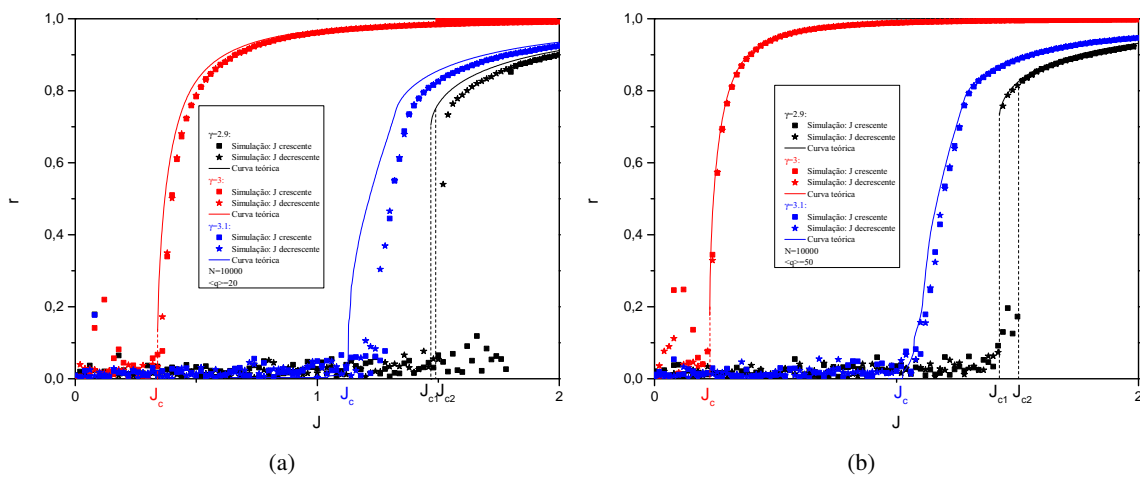


Figura 3.10: Gráfico de  $r$  em função de  $J$  para uma rede *scale-free*. Os pontos vermelhos, azuis e pretos representam dados provenientes de simulações para  $\gamma = 2.9$ ,  $\gamma = 3$  e  $\gamma = 3.1$ , respetivamente.  $J$  crescente está representado com pontos e  $J$  decrescente está representado com estrelas. A traço contínuo está representada a curva teórica respetiva.  $J_{c1}$ ,  $J_{c2}$  e  $J_c$  das diferentes curvas, estão marcados com a cor da curva correspondente. Para ambos os gráficos foi utilizado um tempo de estabilização de 10, um passo de  $J$  de 0.02 e  $N = 10000$ .

Para  $\langle q \rangle = 50$ , a simulação coincide com a curva teórica. Mas para  $\langle q \rangle = 20$ , a simulação desvia-se da curva teórica perto da transição de fase e  $J_{c2}$  não se mostra coerente com a simulação. Este desvio deve-se principalmente ao facto da ideia de um campo global na rede ser imprecisa para valores relativamente baixos de  $\langle q \rangle$ , como foi observado também para a rede ER. Apesar disso, a teoria nestas condições consegue prever corretamente o tipo de transição de fase para  $2 < \gamma < 3$ , como previsto na secção anterior. Como também já foi referido na secção anterior, para  $\gamma = 3$  as curvas são mais sensíveis aos detalhes da função distribuição dos *degrees* e a existência ou não de uma transição descontínua não é clara. Fazendo uma analogia com o que se observa no sistema do artigo [20], o tipo de transição deverá ser o mesmo e apenas o valor de  $r_c$  e o expoente crítico da transição de fase iram variar. As soluções numéricas prevêem a existência de uma descontinuidade com um  $r_c$  relativamente baixo, por volta de 0.15. Devido a este valor ser baixo, é difícil confirmá-lo a partir da simulação. Analiticamente torna-se também difícil fazê-lo uma vez que não existe uma fórmula simples para descrever a função distribuição dos *degrees* neste modelo. No geral, as simulações apresentam-se

de acordo com o esperado, apesar de existirem desvios significativos se o valor médio dos *degrees* for pequeno. Esta simulação além de assegurar a validade da *annealed network approach* desde que o tamanho da rede e o valor médio dos *degrees* seja suficientemente grandes, também indicam que, como foi assumido anteriormente, este comportamento será geral para as diferentes *redes scale-free*, tendo apenas de se ter algum cuidado quando  $\gamma = 3$ .



## Capítulo 4

# Considerações Finais

No capítulo [2], o *Kuramoto model* foi aplicado a um *Star Graph*. Apesar da simplicidade do sistema, este exibiu propriedades interessantes. Foi estudado em detalhe a situação em que a distribuição das frequências naturais dos osciladores seguia uma distribuição quasi-normal e observou-se que a frequência natural do oscilador central desempenha um papel decisivo no tipo de comportamento do sistema. Se a diferença entre o valor desta frequência e o valor médio da frequência natural dos seus vizinhos for inferior a um certo valor crítico,  $\omega_c$ , o sistema não exhibe nenhuma transição de fase. Este resultado sugere que, numa rede, será fácil para osciladores conectados a um *hub* sincronizem-se entre si, originando sincronização parcial, desde que os *hubs* tenham frequências naturais semelhantes aos restantes osciladores. O comportamento do sistema altera-se se esta diferença for maior que  $\omega_c$ , e passa a exibir transição de primeira ordem. Este resultado é análogo para outras distribuições, como por exemplo *scale-free*. O resultado obtido no artigo [24] pode ser interpretado com base no comportamento de um *hub* isolado. Neste artigo os autores estudaram o *kuramoto model* sem correlações e com uma distribuição de frequências naturais normal, quando aplicado a uma rede *scale-free* com  $2 < \gamma \leq 3$ , e deduziram que  $J_c$  tende para zero com o aumento do tamanho da rede. Como não existe correlação entre a frequência natural e o *degree* dos nodos, com grande probabilidade, as frequências naturais dos hubs serão muito próxima das dos seus vizinhos. Neste regime os hubs isolado não apresentam transição de fase. Como para um rede *scale free* com  $2 < \gamma \leq 3$  o sistema é dominado pelo comportamento dos hubs, o comportamento do *hub* isolado poderá estar na base do facto de  $J_c$  tender para zero nessas mesmas redes. Além do interesse teórico desta estrutura, para compreender as propriedades do *Kuramoto model* numa rede, a dependência que o sistema exhibe na frequência do oscilador central, um parâmetro fácil de manipular, poderá ter interesse só por si.

No capítulo [3] foi estudado o *Kuramoto model* com uma correlação linear entre o *degree* e a frequência natural do oscilador para redes ER e *scale-free*. A análise do sistema baseou-se em *annealed network approximation*. Esta abordagem, quando comparada com simulações, mostrou-se exata desde que o tamanho e o valor médio dos *degrees* da rede fossem suficientemente grandes. Para uma rede ER e *scale-free* com  $\gamma > 3$ , o sistema exhibe uma transição de segunda ordem. O comportamento do sistema é diferente para uma rede *scale-free* se  $2 < \gamma < 3$ , neste caso o sistema exhibe uma tran-

sição de primeira ordem. Este resultado é curioso uma vez que é o contrário do observado no *Potts model*, com três ou mais estados, quando aplicado ao mesmo tipo de redes. Como foi referido na secção 1.3, neste modelo a transição de fase de primeiro ordem é destruída quando  $2 < \gamma < 3$ , devido ao papel predominante dos *hubs* no comportamento do sistema. No artigo de Gómez-Gardeñes et al [12], foram feitas simulações para o mesmo tipo de correlação e foram também aplicadas a redes *scale-free*. Neste artigo foram encontradas transições de primeira ordem para  $\gamma > 3$ , até um máximo de  $\gamma = 3.3$ . Este resultado não coincide com as simulações e análise teórica feita neste trabalho, onde o limite de  $\gamma < 3$  para a transição de primeira ordem é claro, desde que o tamanho e o valor médio dos *degrees* da rede seja suficientemente grande para se poder assumir a existência de um campo global. Mesmo quando o comportamento das simulações se afasta do comportamento previsto usando *mean field*, em todas as simulações efetuadas o tipo transição de fase não foi alterado. Uma ideia para tentar compreender o aparecimento da transição de fase, referida no mesmo artigo, é o facto dos *hubs* no *Kuramoto model* poderem exibir transições de fase de primeira ordem. Como foi estudado no capítulo 2, o sistema exibe este tipo de comportamento para diversos tipos de distribuições, desde que a frequência natural do oscilador central se afaste da frequência natural dos seus vizinhos. Ao assumir-se uma correlação entre o *degree* do nodo e a sua frequência natural, os *hubs* do sistema irão ter frequências naturais muito diferentes da grande maioria dos seus vizinhos. Como para  $2 < \gamma < 3$ , o comportamento do sistema é dominado pelo comportamento dos *hubs*, este processo poderá estar na base da transição de primeira ordem. Para tentar compreender a influência da frequência natural dos *hubs* no sistema, seria interessante a utilização de uma análise teórica com base num método mais robusto do que *mean field*, por exemplo *Bethe-Peierls approach*. Infelizmente, a aplicação deste tipo de análise a este modelo mostrou-se difícil de tratar. Uma forma de conseguir alguma informação qualitativa dos efeitos da frequência natural dos *hubs* numa rede *scale-free* será manipular estas frequências para tentar compreender se os *hubs* estão ou não na base da transição de primeira ordem do sistema. Outra abordagem interessante será a utilização de uma correlação não linear entre o *degree* e a frequência natural do nodo.

Com este trabalho concluí-se que pode ser induzida uma transição de fase de primeira ordem no *Kuramoto model*: quando aplicado a um *star graph*, se o oscilador central tiver uma frequência natural suficientemente diferente da dos seus vizinhos, ou a partir de uma correlação linear entre o *degree* do nodo e a sua frequência natural quando aplicado a uma rede *scale-free* com  $2 < \gamma < 3$ . Apesar de parecer existir uma forte relação entre estes dois casos, não existe informação suficiente para uma conclusão definitiva.

## Apêndice A

# Contribuição dos Osciladores não sincronizados

Para estudar a contribuição do osciladores não sincronizados vou usar a solução exata da equação 2.3b quando  $|\omega_j - \dot{\Psi}| > J$ , dada por:

$$\theta_j - \theta_i = 2 \arctan \left[ \frac{J + \tan \left( \frac{k_j + t}{2} \sqrt{(\omega_j - \dot{\Psi})^2 - J^2} \right) \sqrt{(\omega_j - \dot{\Psi})^2 - J^2}}{\omega_j - \dot{\Psi}} \right], \quad (\text{A.1})$$

em que  $k_j$  é uma constante que depende das condições iniciais, em  $\omega$  e em  $J$ . No limite termodinâmico, o termo  $\frac{1}{K} \sum_j \exp [i \arcsin (\theta_i - \theta_j)] \Theta(|\omega_j - \dot{\Psi}| - J)$  pode ser escrito na seguinte forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk d\omega g(k, \omega + \dot{\Psi}) \exp \left\{ 2i \arctan \left[ \frac{J + \tan \left( k/2 + \frac{t\sqrt{\omega^2 - J^2}}{2} \right) \sqrt{\omega^2 - J^2}}{\omega} \right] \right\} \Theta(|\omega| - J), \quad (\text{A.2})$$

$g(y, x)$  é uma função distribuição genérica, bem comportada. Fazendo a seguinte substituição:  $a \equiv \omega \sqrt{1 - (J/\omega)^2}$ , obtém-se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk da \frac{g \left( k, \omega(a) + \dot{\Psi} \right)}{\sqrt{1 + (J/a)^2}} \exp \left\{ 2i \arctan \left[ \frac{J + \tan \left( k/2 + \frac{t|a|}{2} \right) |a|}{\sqrt{1 + (J/a)^2}} \right] \right\}, \quad (\text{A.3})$$

O termo  $\tan \left( k/2 + \frac{t|a|}{2} \right)$  é uma função periódica em  $a$  e em  $t$ . Quando  $t$  é muito grande este termo é muito sensível a variações de  $a$ . Com base nisto vou definir  $a = a_n + 2y/t$ , em que  $a_n$  é uma variável discreta que toma os valores:  $a_n = 2n\pi/t$  onde  $n \in \mathbb{Z}$  e  $y$  é uma variável contínua definida entre

$[0, \pi]$ . Aplicando na equação obtém-se:

$$\frac{2}{t} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n \int_0^{\pi} dk dy \frac{g\left(k, \omega(a_i + 2y/t) + \dot{\Psi}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{J}{a}\right)^2}} \exp\left\{2i \arctan\left[\frac{J + \tan\left(\frac{t|a_i|+k}{2t} + y\right) |a_i| + 2y/t}{\sqrt{1 + \left(\frac{J}{a_i+2y/t}\right)^2}}\right]\right\}. \quad (\text{A.4})$$

Quando  $t \rightarrow \infty$ , a variável  $a_n$  passa a ser contínua e os termos  $y/t \rightarrow 0$ . A equação toma a forma:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} dk dady \frac{g\left(k, \omega(a) + \dot{\Psi}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{J}{a}\right)^2}} \exp\left\{2i \arctan\left[\frac{J + \tan\left(\frac{k+t|a|}{2} + y\right) |a|}{\sqrt{1 + \left(\frac{J}{a}\right)^2}}\right]\right\}, \quad (\text{A.5})$$

O integral em  $y$  pode ser resolvido analiticamente e como percorre num período inteiro o resultado não depende das condições iniciais. Usando uma função distribuição dependente apenas de  $\omega$ :  $g(\omega + \dot{\Psi}) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(k, \omega + \dot{\Psi}) dk$  obtém-se:

$$i \int_{-\infty}^{\infty} d\omega g(\omega + \dot{\Psi}) \frac{\omega}{J} [1 - \sqrt{1 - (J/\omega)^2}] \Theta(|\omega| - J). \quad (\text{A.6})$$

O resultado tem apenas parte imaginária, o que significa que só tem influência direta na velocidade de grupo. Se  $\dot{\Psi}$  for nulo não existe quebra de simetria e esta contribuição é nula. É importante notar que este resultado não é válido para uma função distribuição do tipo *delta-Dirac*. Neste tipo de distribuições,  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(\omega + 2\pi/t) \neq g(\omega)$ .

## Apêndice B

### Dedução da relação **3.15**

Aplicando a equação **3.7a** a uma rede *scale-free* obtém-se:

$$\langle q \rangle - \dot{\Psi} = \int_{q_0}^{+\infty} dq p(q)(q - \dot{\Psi}) \sqrt{1 - \left( \frac{\alpha q}{q - \dot{\Psi}} \right)^2} \Theta \left( 1 - \left| \frac{q\alpha}{q - \dot{\Psi}} \right| \right). \quad (\text{B.1})$$

Usando a variável de integração definida por  $x \equiv \frac{q}{q - \dot{\Psi}}$ , tem-se que:

$$\frac{\dot{\Psi}^{\gamma-2}}{q_0^{\gamma-1}} \left( \frac{q_0}{\gamma-2} - \frac{\dot{\Psi}}{\gamma-1} \right) = - \left( \int_{\frac{1}{1-\dot{\Psi}/q_0}}^{\infty} dx + \int_{+\infty}^1 dx \right) x^{-3} \left( \frac{x}{x-1} \right)^{\gamma-3} \sqrt{1 - (\alpha x)^2} \Theta(1 - |\alpha x|). \quad (\text{B.2})$$

Para  $\gamma = 3$ , tem-se:

$$\frac{2q_0 - \dot{\Psi}}{2q_0} = - \left( \int_{\frac{1}{\dot{\Psi}/q_0-1}}^{+\infty} dx - \int_1^{+\infty} dx \right) x^{-3} \sqrt{1 - (\alpha x)^2} \Theta(1 - |\alpha x|). \quad (\text{B.3})$$

De onde se obtém que  $\dot{\Psi} = 2q_0$  é solução para qualquer  $\alpha$ . Assumindo pequenos desvios da relação anterior,  $\gamma = 3 + \delta$ , e  $\dot{\Psi} = q_0(2 + \Delta)$ , com  $|\delta|, |\Delta| \ll 1$ , obtém-se que:

$$\Delta = -\delta \left( \frac{1 - \int_0^{+\infty} dx \frac{1}{x^3} \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right) \sqrt{1 - \alpha^2 x^2} \Theta(1 - |\alpha x|)}{1 - \sqrt{1 - \alpha^2} \Theta(1 - |\alpha|)} \right). \quad (\text{B.4})$$



## Apêndice C

### Dedução do expoente crítico de $2/3$

A equação [3.12](#) para  $\gamma = 3$  toma a forma de:

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dx \sqrt{1-x^2} \Theta(1-|\alpha x|). \quad (\text{C.1})$$

Se  $\alpha > 1$ :

$$\Phi(\alpha) = \int_0^{+1/\alpha} dx \sqrt{1-x^2}. \quad (\text{C.2})$$

Definindo  $\delta \equiv \alpha - 1$ , e considerando  $\delta \ll 1$ , obtém-se:

$$\Phi(1+\delta) = \frac{\pi}{4} + \int_1^{+1-\delta} dx \sqrt{1-x^2}. \quad (\text{C.3})$$

Usado a variável  $y \equiv 1 - x$ :

$$\Phi(1+\delta) = \frac{\pi}{4} - \int_0^\delta dy \sqrt{y} \sqrt{2-y}. \quad (\text{C.4})$$

Como  $\delta \ll 1$ :

$$\Phi(1+\delta) = \frac{\pi}{4} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \delta^{3/2}. \quad (\text{C.5})$$

Usando  $1/J = \Phi(\alpha)$  determina-se, para  $J$  perto da transição de fase, a equação [C.6](#), com o comportamento assintótico:  $r - r_c \propto (J - J_{c1})^{2/3}$ .

$$\frac{J - J_1}{J_1^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} [(r - r_c)J_1 + (J - J_1)r_c + (r - r_c)(J - J_1)]^{3/2} \quad (\text{C.6})$$





# Bibliografia

- [1] S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes, and A. N. Samukhin. Structure of growing networks: Exact solution of the barabasi–albert’s model. *Phys.Rev.Lett.*, 85:4633, 2000.
- [2] J. Buck. Synchronous rhythmic flashing of fireflies. ii. *The Quarterly Review of Biology*, 63(3):pp. 265–289, 1988.
- [3] T. J. Walker. Acoustic synchrony: Two mechanisms in the snowy tree cricket. *Science*, 166(3907):891–894, 1969.
- [4] D. Michaels, E. Matyas, and J. Jalife. Mechanisms of sinoatrial pacemaker synchronization: A new hypothesis. *Circulation Res*, 61:704–714, 1987.
- [5] C. Liu, D. R. Weaver, S. H. Strogatz, and S. M. Reppert. Cellular construction of a circadian clock: Period determination in the suprachiasmatic nuclei. *Cell*, 91:855+, 1997.
- [6] K. Wiesenfeld, P. Colet, and S. H. Strogatz. Synchronization transitions in a disordered josephson series array. *Phys. Rev. Lett.*, 76(3):404–407, Jan 1996.
- [7] R.A. York and R.C. Compton. Quasi-optical power combining using mutually synchronized oscillator arrays. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 39(6):1000 –1009, jun 1991.
- [8] N. Wiener. *Nonlinear Problems in Random Theory*. The MIT Press Cambridge, 1958.
- [9] A. Winfree. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *Journal of Theoretical Biology*, 16(1):15–42, July 1967.
- [10] Y. Kuramoto and I. Nishikawa. Statistical macrodynamics of large dynamical systems. case of a phase transition in oscillator communities. *Journal of Statistical Physics*, 49:569–605, 1987. 10.1007/BF01009349.
- [11] D. Pazó. Thermodynamic limit of the first-order phase transition in the kuramoto model. *Phys. Rev. E*, 72(4):046211, Oct 2005.
- [12] J. G. Gardesñes, S. Gómez, A. Arenas, and Y. Moreno. Explosive synchronization transitions in scale-free networks. *Phys. Rev. Lett.*, 106(12):128701, Mar 2011.

- 
- [13] H. Hong and S. H. Strogatz. Kuramoto model of coupled oscillators with positive and negative coupling parameters: An example of conformist and contrarian oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 106(5):054102, Feb 2011.
- [14] F. Smet and D. Aeyels. Partial entrainment in the finite kuramoto-sakaguchi model. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 234(2):81 – 89, 2007.
- [15] H. Hyunsuk and S. H. Strogatz. Kuramoto Model of Coupled Oscillators with Positive and Negative Coupling Parameters: An Example of Conformist and Contrarian Oscillators. *Physical Review Letters*, 106(5):054102+, February 2011.
- [16] J. M. Yeomans. *Statistical Mechanics of Phase Transitions*. Oxford University Press, USA, 1992.
- [17] S. J. Blundell and K. M. Blundell. *Concepts in Thermal Physics*. Oxford University Press, USA, 2 edition, November 2009.
- [18] M. Bauer, S. Coulomb, and S. N. Dorogovtsev. Phase transition with the berezinskii-kosterlitz-thouless singularity in the ising model on a growing network. *Phys. Rev. Lett.*, 94:200602, May 2005.
- [19] G. J. Baxter, S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, and J. F. F. Mendes. Heterogeneous  $k$ -core versus bootstrap percolation on complex networks. *Phys. Rev. E*, 83:051134, May 2011.
- [20] L. Basnarkov and V. Urumov. Phase transitions in the kuramoto model. *Phys. Rev. E*, 76:057201, Nov 2007.
- [21] S. H. Strogatz and R. E. Mirollo. Stability of incoherence in a population of coupled oscillators. *Journal of Statistical Physics*, 63:613–635, 1991.
- [22] S. Hidetsugu. Desynchronization in a self-oscillating medium. *Progress of Theoretical Physics*, 80(5):743–748, 1988.
- [23] L. Basnarkov and V. Urumov. Kuramoto model with asymmetric distribution of natural frequencies. *Phys. Rev. E*, 78(1):011113, Jul 2008.
- [24] T. Ichinomiya. Frequency synchronization in a random oscillator network. *Phys. Rev. E*, 70(2):026116, Aug 2004.
- [25] P. Erdős and A. Rényi. On random graphs, I. *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, 6:290–297, 1959.
- [26] D. J. Watts and S. H. Strogatz. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, 393(6684):440–442, June 1998.

- 
- [27] A.L. Barabási, R. Albert, and H. Jeong. Mean-field theory for scale-free random networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 272(1-2):173 – 187, 1999.
- [28] J. Lee, K. Goh, B. Kahng, and D. Kim. Intrinsic degree-correlations in the static model of scale-free networks. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, 49:231–238, 2006. 10.1140/epjb/e2006-00051-y.
- [29] S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, and J. F. F. Mendes. Critical phenomena in complex networks. *Reviews of Modern Physics*, 80(4):1275–1335, October 2008.
- [30] Romualdo Pastor-Satorras and Alessandro Vespignani. Epidemic spreading in scale-free networks. *Phys. Rev. Lett.*, 86:3200–3203, Apr 2001.
- [31] A. L. Barabasi and R. Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science (New York, N.Y.)*, 286(5439):509–512, October 1999.
- [32] G. Caldarelli, A. Capocci, P. De Los Rios, and M. A. Muñoz. Scale-free networks from varying vertex intrinsic fitness. *Phys Rev Lett*, 89(25), December 2002.
- [33] J. G.-Gardeñes and Y. Moreno. From scale-free to Erdos-Renyi networks. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, 73(5):056124, 2006.
- [34] K. I. Goh, B. Kahng, and D. Kim. Universal Behaviour of Load Distribution in Scale-free Networks. *Physical Review Letters*, 87:278701+, 2001.
- [35] S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, and J. F. F. Mendes. Correlations in interacting systems with a network topology. *Phys. Rev. E*, 72:066130, Dec 2005.
- [36] F. Y. Wu. The potts model. *Rev. Mod. Phys.*, 54:235–268, Jan 1982.
- [37] S.N. Dorogovtsev, A.V. Goltsev, and J.F.F. Mendes. Potts model on complex networks. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, 38:177–182, 2004. 10.1140/epjb/e2004-00019-y.
- [38] S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, and J. F. F. Mendes.  $k$ -core organization of complex networks. *Phys. Rev. Lett.*, 96:040601, Feb 2006.
- [39] A. Lyapunov. *General Problem of the Stability Of Motion*. CRC Pres, 1 edition edition, 1992.
- [40] Marián Boguñá, Claudio Castellano, and Romualdo Pastor-Satorras. Langevin approach for the dynamics of the contact process on annealed scale-free networks. *Phys. Rev. E*, 79:036110, Mar 2009.
- [41] S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, and J. F. F. Mendes. Ising model on networks with an arbitrary distribution of connections. *Phys. Rev. E*, 66:016104, Jul 2002.

---

[42] S. N. Dorogovtsev and L. Wu. private communication, 2011.

[43] N. Wiener. *Cybernetics*. The MIT Press, Cambridge, MA, 2nd edition, 1961.