V Seminário de Investigação em Educação Matemática, Leiria, 1994, 223-247

FUTUROS-PROFESSORES PERANTE PROBLEMAS ENVOLVENDO O CONCEITO DE PROPORCIONALIDADE: PROCESSO(S) DE RESOLUÇÃO E PROPOSTAS DE ABORDAGEM DIDÁCTICA(1)

Isabel Cabrita
Universidade de Aveiro

O facto de muitos aspectos do nosso mundo operarem de acordo com regras proporcionais torna as capacidades de raciocínio proporcional extremamente úteis na interpretação de fenómenos do mundo-real (Cramer, Post & Behr, 1989).

Introdução

A relação entre proporcionalidade(2) e realidade é enfatizada por muitos outros investigadores que se têm debruçado sobre este tema (Carraher, Carraher & Schliemann, 1991; Chin, 1992; Cramer, Post & Currier, 1993; Fisher, 1988; Hart, 1988; Heller, Ahlgren & Post 1989; Hoffer, 1988; Post, Behr & Lesh, 1988). Realmente, inúmeras são as situações de vida real, das mais corriqueiras às mais complexas, que poderão ser definidas matematicamente em termos de proporcionalidade:

- Se tivermos 9 pessoas convidadas para o jantar, que ajustes devemos fazer nas quantidades de uma receita para 6 pessoas?
- Quanto custam umas calças inicialmente marcadas por 12.000$00 que sofreram um desconto de 50%?

---

(1) Trabalho desenvolvido no âmbito do Projecto de Investigação 'Resolução de Problemas: Ensino, Avaliação e Formação de Professores' financiado pela Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica (JNICT), do qual aqui se apresenta uma versão reduzida.

(2) Neste documento só abordaremos a proporcionalidade directa.

- Que detergente compensa comprar? 1kg do detergente A por 750\$00 ou 2,5kg do detergente B por 1800\$00?
- Se a taxa de juro, num banco é de 14,5% ao ano, que dinheiro terei ao fim de dois anos se depositar nesse banco 1500 contos?
- Qual a dimensão real de uma parede usando informações contidas numa planta à escala de 1/40?

Uma vez que o tipo de raciocínio proporcional também está presente na resolução de problemas que envolvem, por exemplo, o conceito de densidade, aceleração, concentração, velocidade e força, não admira que o tópico proporcionalidade seja considerado uma das mais ancestrais e fundamentais ligações entre a ciência e a matemática (Heller, Ahlgren & Post, 1989).

Agora no âmbito mais específico da educação, Lesh, Post e Behr (1988), referiam que o raciocínio proporcional desempenha um papel de tal ordem crítico no desenvolvimento matemático dos alunos que tem sido considerado um conceito de charneira, a 'pedra angular' das matemáticas avançadas e a 'capstone' dos conceitos elementares. Chin (1992) acrescenta que o raciocínio proporcional é um tipo de raciocínio formal necessário para a abstração empírica.

Dado que é fundamental para o sucesso dos alunos, não admira que o National Council of Teachers of Mathematics lhe atribua um lugar de destaque (cf, NCTM, 1989). A sua importância está ainda patente em variadíssimos projectos encetados com o fim último de promoverem uma adequada aquisição de conceitos entre os quais o de proporcionalidade, tais como: 'The Rational Number Project' (RNP) (Cramer, Post & Currier, 1993), 'Concepts in Secondary Mathematics and Science' (CSMS) (Hart, 1988), 'Strategies and Errors in Secondary Mathematics' (SESM) (Hart, 1988), 'Children's Mathematical Frameworks' (CMF) (Hart, 1988), 'Aprendizagens em Matemática: Um estudo sobre a construção de conceitos' (AMECC) (Matos, 1994).

Proporcionalidade é portanto um conceito com inúmeras aplicações, quer no dia-a-dia, quer no prosseguimento académico. Verificamos, no entanto, que perante problemas envolvendo tal conteúdo ou os alunos têm bastante dificuldade em os associar e/ou determinar o algoritmo ou heurísticas adequadas a utilizar, ou optam muitas das vezes (e principalmente em situações extra-curriculares), por uma resolução bem menos formal do que a utilizada pelos professores na abordagem de tal conteúdo (cf. Carraher, Carraher & Schliemann, 1991; Fisher, 1988; Lamon, 1993).

Nesta perspectiva, alguns investigadores opinam que a integração, no processo ensino/aprendizagem, de uma grande variedade de processos de resolução de problemas envolvendo tal conceito, inclusivé os menos ortodoxos, contribuem para a construção/solidificação de um melhor conhecimento conceptual (Fisher, 1988). Para que tal seja, no entanto, plausível, os professores devem estar aptos a usar eles próprios tal variedade de estratégias.

Neste contexto, implementamos uma 'investigação exploratória' com o intuito essencialmente de analisar os desempenhos de futuros-professores de matemática do 2º ou 3º C.E.B. na resolução de problemas envolvendo o conceito de proporcionalidade quando lhes é pedido (S) ou não (N) que utilizem vários processos e analisar as estratégias que os futuros-professores de matemática do 2º ou 3º C.E.B. dizem que utilizariam na abordagem de problemas envolvendo o conceito de proporcionalidade, nas situações (N) e (S).

As principais questões que nortearam tal investigação foram então, relativamente a problemas envolvendo o conceito de proporcionalidade e a futuros-professores de matemática do 3º C.E.B.:

- Que estratégias utilizam na resolução daqueles problemas, nas situações (N) e (S)?
- Que estratégias dizem que utilizariam no ensino de problemas daquele tipo nas situações (S) e (N)?
- Que processo(s) de resolução daqueles problemas consideram mais adequados, menos adequados e os que nunca utilizariam?
- Consideram importante contemplar mais do que um processo de resolução de problemas no processo ensino/aprendizagem?

Neste trabalho propomos-nos divulgar alguns dos resultados dessa 'investigação' pelo que, numa primeira parte, abordaremos a questão da Proporcionalidade, curriculum e formação de professores e apresentamos algumas propostas de abordagem didáctica. Seguidamente descreveremos a metodologia utilizada focando, essencialmente, as opções metodológicas, os participantes intervenientes, o contexto em que tal investigação se desenrolou, os instrumentos utilizados, os procedimentos do investigador, a recolha e análise dos dados e a apresentação e discussão dos principais resultados e finalizaremos com algumas conclusões, reflexões e implicações didácticas.

Enquadramento conceptual

Proporcionalidade, curriculum e formação de professores

Embora Hoffer (1988) lamente que a unidade didáctica proporcionalidade esteja cada vez mais preterida em favor das 'fracções', o que é certo é que aquele conteúdo continua a ser um tópico importante no curriculum de matemática.

No entanto, e embora existam barreiras naturais à aprendizagem do raciocínio proporcional principalmente na transição do estádio concreto para o formal (Hoffer,1988), este assunto não é particularmente bem ensinado nas escolas, promovendo-se a manipulação mecânica de símbolos e fórmulas (cf. Cramer, Post & Currier, 1993; Fisher, 1988). Ao abordarem esta unidade, uma grande parte dos manuais escolares, muitas das vezes o único espelho das estratégias utilizadas em sala de aula, apresenta como estratégias de resolução destes problemas: escrever uma equação da forma $a/b=c/d$ sendo um dos quatro termos uma variável, aplicar a regra do 'produto-cruzado' e resolver em ordem à variável, e/ou referindo que na proporcionalidade directa onde $y=kx$ ou $y/x=k$, y varia directamente com x e é directamente proporcional a x sendo k a constante de proporcionalidade, resolvendo-se os respectivos problemas determinando e aplicando esta constante. Qualquer ligação a tópicos relacionados com o da proporcionalidade é, na maior parte das vezes, descurada.

Não admira pois, que os alunos não sejam capazes de transferir o aprendizado sobre o assunto, para outras situações a que se possam aplicar esses conhecimentos.

Realmente, atendamos nas seguintes afirmações:

> Vários estudos (Carpenter, 1975; Hart, 1988; Karplus, Adi & Lawson, 1981; Karplus, Karplus, Formisano & Paulsen, 1977) indicam que muitos alunos do ensino secundário manifestam uma inadequada concepção de proporcionalidade, consequência de um desenvolvimento insuficiente do conceito. Um número muito reduzido de alunos utiliza as generalizações típicas dos manuais escolares para resolverem problemas deste tipo, preferindo os outros empregar estratégias bem menos formais, de acordo com o contexto e com as suas experiências e desenvolvimento (Fisher, 1988).

> A aquisição do raciocínio proporcional na população em geral tem sido insatisfatória. Não só tais capacidades emergem mais lentamente do que inicialmente se pensava, como uma grande faixa da sociedade nunca as adquire totalmente (Hoffer, 1988).

> O conhecimento que os alunos revelam sobre o conceito de proporcionalidade é relativamente frágil e facilmente influenciado por variações estruturais nos problemas(Lawton, 1993).

A situação reflectida nestes comentários merece-nos uma profunda reflecção e suscita-nos algumas considerações. Se os estudantes necessitam de um entendimento profundo do conceito de proporcionalidade, então os professores também precisam de aquirir os mesmos *skills* e manifestar um nível de entendimento significativo a fim de poderem orientar os seus alunos da melhor forma (Chin, 1992). Se os estudantes necessitam de um melhor e mais significativo conhecimento da proporcionalidade, então os professores terão que estar aptos a integrar diferentes perspectivas do mesmo conceito no processo de ensino/aprendizagem (Chin, 1992). Se os estudantes necessitam de dominar uma grande variedade de estratégias de resolução de problemas envolvendo o conceito de proporcionalidade, então os professores devem ser capazes, eles próprios, de usar tal variedade de processos de resolução e reconhecer que as estratégias menos formais podem também ser consistentes com o raciocínio proporcional e contribuir para a edificação de um melhor conhecimento conceptual (Fisher, 1988).

Propostas de abordagem didáctica

Conhecimento acerca da evolução dos estádios de desenvolvimento cognitivo torna-nos mais sensíveis ao como os alunos podem ver as coisas e aos tópicos que os alunos podem não absorver, particularmente por processos estritamente verbais (VV. AA., 1978). Realmente, antes de se implementar qualquer estratégia didáctica é fundamental ter-se algum conhecimento dos estádios de desenvolvimento do indivíduo, nomeadamente sobre os factores que o influenciam: maturação, experiência, transmissão social e equilíbrio[3]

Neste contexto e, dado não se tratar de um constructo unitário, o raciocínio proporcional deve ser considerado como uma actividade multi-facetada e apresentada como tal (Tourniaire & Pulos, 1985).

Algumas sugestões de abordagem do conteúdo proporcionalidade aparecem em literatura vária:

> O conceito deve ser introduzido o mais cedo possível e ser desenvolvido ao longo de vários anos sucessivos. Os aspectos formais devem ser adiados até que os alunos entendam perfeitamente as ideias e os processos de raciocínio inerentes ao tópico (Hoffer, 1988).

> O seu estudo deve iniciar-se da forma mais concreta possível, evoluir para desenhos e imagens e gradualmente incluir actividades com recurso

(3) *Maturação* alerta-nos para o facto de que o pensamento formal não surge do dia para a noite, mesmo que seja dada uma atenção especial às explanações verbais. Talvez seja preferível dar-se mais atenção ao factor *experiência* com base em realidades físicas. A *transmissão social* é particularmente importante no que respeita a aprendizagem do aluno relativamente à existência de outros pontos de vista além dos seus. O trabalho em pequenos grupos ou discussões parecem ser uma excelente forma para ouvir outros pontos de vista. *Equilibração* 'explica' como é que as nossas estruturas mudam. Se as novas experiências encaixam numa forma de pensamento existente, não há necessidade de mudar esse padrão de pensamento. Se, contrariamente, esses aspectos se chocam, tal discrepância pode provocar uma alteração na forma de pensar do aluno. Pode experienciar um 'desequilíbrio' e alterar o seu pensamento para o compensar (VV. AA., 1978)

a símbolos abstractos (VV. AA., 1978). Heller, Ahlgren e Post em 1989 também sugerem que se inicie a abordagem ao tópico através de problemas da vida-real e se desenvolvam conceitos para lhes dar resposta, em vez de se usarem tais situações como aplicações dos conceitos abordados. Preconiza então como estratégia de ensino a 'modelação matemática' em detrimento das aplicações de fim-de-capítulo'.

Os alunos devem ser confrontados com uma grande variedade de perspectivas e estratégias de resolução de problemas o que contribue, não só para um melhor entendimento do conceito, mas para uma abordagem mais confiante e flexível das situações problemáticas (Post, Behr & Lesh, 1988).

Este tópico deverá ser relacionado com os que lhe estão naturalmente associados: multiplicação, aplicações, fracções, decimais, percentagem, medidas, probabilidades, geometria, gráficos, conjuntos, calculadoras, cálculo mental(4).

Dever-se-à atender aos conhecimentos que os alunos têm do assunto e explorá-los convenientemente (Post, Behr & Lesh, 1988).

Dever-se-à atender aos designados por Vergnaud (1988), 'teoremas-em--acção'(5), que se podem definir como sendo as relações matemáticas tidas em conta pelos alunos quando escolhem uma operação ou sequência de operações para resolver um problema, e que não são geralmente expressos verbalmente pelos alunos.

Sugestões de carácter mais particular de implementação didáctica relativamente ao tópico proporcionalidade, surgem em vários documentos. Uma delas prende-se com a necessidade de ensinar a evitar certos métodos de resolução de problemas daquele tipo como o da 'adição repetida'. Vários problemas de proporcionalidade podem, de facto, ser resolvidos utilizando tal estratégia em vez da multiplicativa. O seu uso continuado pode, no entanto, convencer os alunos de ser este o procedimento correcto em todas as situações (Hart, 1988).

Post, Behr e Lesh (1988) defendem a utilização do já referido método da determinação do valor unitário uma vez que esta estratégia pode ser considerada o esqueleto a partir do qual outras interpretações podem ser construídas, dado que permite tirar partido dos padrões naturais de

(4) Hoffer (1988), das páginas 290 à 292 pormenoriza de que forma a ligação da proporcionalidade a estes tópicos, pode ser feita

(5) Do original 'theorems-in-action'.

pensamento das crianças.

Devemos ainda ter a preocupação de proporcionar aos nossos alunos contacto com problemas: que envolvam variáveis discretas e contínuas; que variem de conteúdo e contexto; cujo grau de familiaridade vá diminuindo, alertando-os para a necessidade de fazerem uma análise reflectida da situação antes de, impulsivamente, partirem para a sua resolução.

Na opinião de Susan Lamon (1993) devemos ainda proporcionar aos alunos situações: que envolvam quer o pensamento absoluto quer o pensamento relativo; em que explorem processos multiplicativos coordenando perspectivas aditivas e relativas antes de se confrontarem com o algoritmo do produto-cruzado; em que lidem com unidades extensivas e explorem a natureza da razão nos mais variados contextos, o que fomentará a conceptualização de uma razão como uma entidade distinta dos elementos que a compõem. As situações de redução e ampliação deverão ser exploradas posteriormente, depois dos estudantes terem tido oportunidade de construirem um quadro multiplicativo mental através de outros tipos semânticos de problemas.

Os responsáveis pelo R.N.P também foram sensíveis a esta problemática considerando que o raciocínio proporcional envolve mais do que definir uma proporção e resolvê-la. Neste contexto sugerem que: as experiências iniciais dos alunos envolvam actividades físicas com situações proporcionais e não proporcionais nas quais os estudantes coleccionam dados, constroem tabelas e determinam regras para relacionar os pares de números das tabelas; os problemas evoluam de contextos mais para menos familiares e de números inteiros para não inteiros para que os alunos se apercebam que as estratégias utilizadas na sua resolução são independentes destes factores; seja dada oportunidade aos estudantes de resolverem uma grande variedade de problemas de vários tipos; sejam ensinadas diferentes estratégias de resolução destes tipos de problemas (Cramer, Post & Currier, 1993).

Metodologia

Opções metodológicas

Atendendo aos objectivos que se perseguiam neste estudo e que nortearam as questões de investigação já referidas na introdução, optamos por uma metodologia de natureza qualitativa, com vista a uma descrição, análise e interpretação o mais exaustiva possível dos elementos recolhidos (Erickson, 1986). Com base nesses dados efectuou-se uma 'análise de conteúdo', holística por natureza, tal como preconizado por Bardin (1977), orientada por 'categorias temáticas' pré-estabelecidas e/ou que se foram definindo recursivamente, através da análise das actividades desenvolvidas.

Participantes

Dado que nos interessava que os participantes neste trabalho fossem, a curto prazo, professores de matemática do 2° ou 3° Ciclo do Ensino Básico, desenvolvemos a investigação com a única turma de 23 elementos que frequentava o 4° ano de uma Licenciatura em Ensino da Matemática. Desses 23 alunos seleccionamos dez, curiosamente todos do sexo feminino, por terem respondido a um inquérito[6] com vista a uma caracterização o mais detalhada possível dos intervenientes e terem cumprido a quase totalidade das actividades propostas (à excepção de uma aluna que não desenvolveu a última delas).

Contexto da investigação

Os participantes envolvidos nesta investigação exploratória, frequentavam, como já referimos, o 4° ano de um curso que lhes confere um grau de Licenciatura em Ensino da Matemática, estruturado à luz do *modelo integrado* pelas componentes da área da futura docência (neste caso Matemática), da área das Ciências da Educação e Prática Pedagógica (cf. Cabrita, I., 1992).

A investigação decorreu em meados de Maio. Dada a proximidade do final do ano lectivo (21 de Junho) com toda a sobrecarga que daí advém para os alunos e dado que estavam, na altura, envolvidos em mais duas investigações, o que levou inclusivamente, a que uma das participantes neste estudo, tivesse que o interromper, não o podendo ultimar, tentamos colocá-los numa situação o mais natural possível não lhes ocupando também demasiado tempo extra-curricular.

Neste contexto, desenvolveram individualmente as actividades propostas numa aula prática de 4h de Didáctica da Matemática, como se de mais uma tarefa se tratasse, com a presença e orientação exclusiva da própria professora e, lamentavelmente, prescindimos das entrevistas, instrumento que julgamos pudesse ter enriquecido a investigação pelos pontuais esclarecimentos que os alunos pudessem prestar relativamente à sua produção escrita.

Durante a sessão, que decorreu num ambiente agradável e descontraído, os alunos não manifestaram qualquer tipo de dúvida relativamente ao trabalho proposto, podendo interrompê-lo temporariamente quando se sentissem cansados.

Embora condicionados pela duração da aula, a mesma foi, no entanto suficiente.

(6) O referido inquérito englobava 4 partes. A primeira dizia respeito aos dados biográficos dos alunos; as 2ª e 3ª prendiam-se com o seu percurso nos Ensinos Secundário e Superior e a última pretendia apurar das suas concepções e atitudes face à resolução de problemas.

A disciplina onde decorreu a experiência é bi-semestral com uma carga lectiva de 6h/semana – 2h teóricas e 4h práticas. No ano lectivo em que ocorreu a investigação, quer as aulas teóricas quer as aulas práticas estavam concentradas num só bloco.

Em Didáctica da Matemática abordaram, entre outros, o módulo de Resolução de Problemas, tendo tido oportunidade de trabalhar, a nível teórico e prático, os seguintes temas: conceito de problema; tipologia de problemas; finalidades do ensino da resolução de problemas; modelo de Polya de resolução de problemas; actividades básicas para o ensino da resolução de problemas; estratégias de resolução de problemas; planificação de actividades de resolução de problemas e avaliação de actividades de resolução de problemas.

Recolha e análise dos dados

Tendo em atenção os objectivos que se pretendiam atingir, o tempo de que dispúnhamos para o estudo e as condições referidas, elaborámos 2 blocos de duas folhas de identificação do aluno e enunciado da tarefa, organizámos 4 folhas de enunciado do problema e registo da sua resolução, construímos 2 questionários e seleccionámos 5 problemas, acerca de um dos quais apresentamos várias propostas de resolução.

Tais instrumentos foram sendo aplicados sequencialmente à medida que os alunos terminavam as actividades, de acordo com o quadro I.

Quadro I – Síntese das actividades desenvolvidas pelos participantes nesta investigação exploratória

1ª Tarefa	1ª Actividade	Preencher a folha de identificação e ler o enunciado da tarefa Resolver o 1° problema Responder a um questionário
	2ª Actividade	Preencher a folha de identificação e ler o enunciado da tarefa Resolver o 2° problema Responder a um questionário
2ª Tarefa	3ª Actividade	Preencher a folha de identificação e ler o enunciado da tarefa Resolver o 3° problema Responder a um questionário
	4ª Actividade	Preencher a folha de identificação e ler o enunciado da tarefa Resolver o 4° problema Responder a um questionário
3ª Tarefa	5ª Actividade	Preencher a folha de identificação e ler o enunciado do 5° problema Analisar os vários processos de resolução do problema Responder a um questionário

Primeira e segunda etapas

Folhas de identificação do aluno e enunciado da tarefa

Além de permitirem facilmente identificar o aluno, estas folhas foram elaboradas com o intuito de realçar a tarefa específica a desenvolver, dado que abarcavam duas situações distintas (N) e (S) (cf. objectivos e questões de investigação)– na primeira pedia-se ao aluno que resolvesse o problema seguinte (1ª etapa), enquanto na outra (2ª etapa), se pedia que resolvesse o problema seguinte utilizando mais do que um processo.

Folhas de enunciado do problema e registo da sua resolução

Não obstante as discrepâncias que possam surgir entre aquilo que o aluno pensa e escreve e a forma como o investigador lê e interpreta essa informação, tais folhas foram aplicadas essencialmente com a finalidade de analisar os processos de resolução dos problemas utilizados pelos futuros-professores, nas situações (N) e (S), com vista à detecção das principais dificuldades que os problemas suscitaram e dos eventuais padrões de resolução.

Através da análise deste instrumento poderíamos ainda determinar o tempo que o aluno demorou a resolver o problema. Tal facto não foi no entanto considerado porque, apesar da professora que os acompanhou ter alertado para esse aspecto, fica a dúvida se, em alguns casos, não registaram o tempo total que demoraram a cumprir a actividade que, além da resolução do problema, englobava o preenchimento de um questionário.

Problemas

Os problemas utilizados nestas etapas, constantes dum manual de Matemática do 7º Ano de Escolaridade (Vale, Fonseca & Pimentel, 1993), foram seleccionados atendendo aos seguintes critérios: serem problemas de conteúdo de acordo com a tipologia adoptada pelo Grupo de Investigação em Resolução de Problemas; serem problemas de determinação de um dos termos de uma proporção; pertencerem a duas categorias distintas de acordo com a classificação de Heller, Ahlgren e Post (1989); serem suficientemente motivadores; não terem sido previamente trabalhados nas aulas de Didáctica da Matemática.

Foi nossa preocupação, por um lado, dentro de cada etapa, variar o tipo de problema, a sua categoria e o grau de dificuldade considerando um problema menos familiar e sem que o valor unitário seja dado, para averiguar se as resoluções apresentadas são independentes destes factores. Por outro lado, emparelhamos os problemas entre as etapas para detectar se a alteração introduzida na 2ª etapa produzia alguma mudança no desempenho dos alunos, independentemente dos parâmetros anteriores. O quadro II pretende traduzir tal situação.

Quadro II – Distribuição dos problemas pelas etapas de acordo com as suas

características.

1ª Etapa	Características	2ª Etapa
Problema do comboio Um comboio com um quilómetro de comprimento anda a uma velocidade de 20km/h. Se entrar num túnel com um quilómetro de comprimento à 1h, a que hora sairá do túnel a última carruagem do comboio?	•Problema de conteúdo • Problemas de determinação de um dos termos de uma proporção • Problemas de velocidade • Grau de dificuldade baixo – Com valor unitário – Familiares	Problema do Eco Três segundos depois de ter gritado ouço o eco da minha voz. A que distância estou da montanha que fez ecoar a minha voz? (A velocidade de propagação do som é de 340m/s).
Problema dos Candeeiros A figura representa dois candeeiros A e B.  Pretendemos colocar entre A e B um candeeiro C, de tal modo que AC : CB = 3: 5. Um outro candeeiro D vai ser colocado entre C e B, de tal modo que CD : DB = n : 1. Se AD : DB = 19 : 5 determina n.	•Problema de conteúdo • Problemas de determinação de um dos termos de uma proporção • Problema de distribuição • Grau de dificuldade mais elevado – Sem valor unitário –Menos familiar	**Problema do Trabalho** Temos 36 000$00 para pagar um serviço feito por 3 pessoas, mas duas delas trabalharam 3 dias enquanto a terceira trabalhou 4 dias. Quanto deve receber cada uma proporcionalmente aos dias de trabalho?

Questionário

Das actividades das 1ª e 2ª etapas fazia parte o preenchimento de um questionário que se aplicou com o intuito de averiguar principalmente: a) quais os conteúdos que os futuros professores consideravam estar envolvidos no problema que resolveram; b) para que ano de escolaridade consideravam tal problema adequado e porquê; c) que tipo de abordagem didáctica do problema sugeriam; d) se havia consonância entre as estratégias utilizadas na resolução do problema, o ano de escolaridade, os conteúdos mencionados e as abordagens didácticas; e) qual a relação entre as respostas dadas e o tipo, categoria grau de dificuldade do problema; f) se a alteração no enunciado da tarefa da 1ª para a 2ª etapa influenciava e de que modo as respostas dadas.

Terceira etapa

Com base no saber que advém da nossa experiência como formadores, das leituras efectuadas e das discussões em torno de tais temáticas, previamos:

– Que a alteração introduzida na 2ª etapa não iría reflectir-se significativamente na resolução dos problemas, apresentadas pelas alunas e nas propostas de abordagem didáctica dos mesmos.

– Que, embora as propostas de abordagem didáctica solicitadas pudessem contemplar a resolução dos problemas como 'metodologia de ensino', tal não acontecesse e que os alunos perspectivassem estratégias de resolução desses problemas, estratégias essas centradas essencialmente nos processos algébricos de resolução.

Neste contexto introduzimos uma última actividade com o intuito de que os futuros-professores, perante várias propostas de resolução algébrica de um problema, nelas reflectissem, à luz da pertinência da sua abordagem em situação de sala-de-aula.

Problema e respectivos processos de resolução apresentados.

O problema apresentado, extraído de um artigo de Linda Fisher (1988), embora não traduzindo, provavelmente, uma situação muito familiar para os alunos com quem trabalhámos, tem um nível de dificuldade considerado baixo, não obstante ser um problema em que o valor unitário não é dado.

A tradução do problema (quadro III) na simbologia dos 'espaços-medida' introduzida por Vergnaud (1983, 1988), onde o comprimento da vara poderia ser designado por **Cv** e a sombra da vara por **Sv** seria, provavelmente:

Quadro III. Tradução do Problema da Vara na simbologia dos 'espaços-medida'

	Espaços-medida	
Quantidades (m)	Cv	Sv
	4 10	6 ?

A selecção dos processos de resolução foi feita com base nos critérios:

– Um processo *aditivo incorrecto* que opera com as quantidades *entre* os espaços-medida (3° processo).

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Cv} & & \mathbf{Sv} \\ x & \xrightarrow{+2} & y \end{array}$$

– Dois processos *de reconhecimento e replicação de uma regularidade*:

• um operando com as quantidades entre os espaços-medida (1° processo);

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Cv} & & \mathbf{Sv} \\ x & \xrightarrow{+\frac{1}{2}x} & y \end{array}$$

• outro operando com as quantidades dos respectivos espaços-medida (4° processo).

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Cv} & & \mathbf{Sv} \\ x_1 & \longrightarrow & y_1 \\ 2x_1+\frac{1}{2}x_1 \downarrow & & \downarrow 2y_1+\frac{1}{2}y_1 \\ x_2 & & y_2 \end{array}$$

– Dois processos *multiplicativos* ambos operando com as quantidades entre os espaços medida:

• um que resulta da aplicação directa do conceito de proporção (2° processo);

• outro que recorre à constante de proporcionalidade (5° processo).

Questionário

Depois de analisarem os vários processos de resolução do Problema da Vara propostos, os alunos tiveram que responder a um questionário elaborado com as finalidades a) b) e d) do questionário aplicado nas etapas anteriores e ainda com a intenção de analisar: os processos de resolução do problema propostos que os futuros-professores consideravam mais adequados, menos adequados e que os que nunca utilizariam e porquê. Finalmente teriam que emitir uma opinião justificada da importância de se contemplar mais do que um processo de resolução de problemas no processo de ensino/aprendizagem.

Uma primeira análise dos dados obtidos à custa da produção escrita dos alunos na resolução dos problemas, foi sistematizada através de uma grelha elaborada para o efeito, constituída por 3 categorias – resolve errado; resolve parcialmente e resolve totalmente.

A primeira dessas categorias incluia, como principais indicadores de desempenho, apresentar escassa ou nenhuma informação ou estabelecer relações erradas entre os dados do problema. Um aluno resolvia parcialmente o problema se não demonstrava compreender ou parecia interpretar mal parte da informação mas operava correctamente com os restantes dados, ou se, embora recorrendo a uma estratégia correcta, não conseguia completar a resolução do problema. Considerava-se que um aluno resolvia completamente o problema quando finalizava a tarefa com sucesso, podendo eventualmente cometer um erro de cálculo não relevante para o problema.

Com base nos dados recolhidos realizou-se uma análise vertical e uma análise horizontal, globalizantes e com intenções interpretativas. Com a análise vertical pretendia-se: retratar a história de cada um dos problemas; comparar os desempenhos na resolução dos problemas dentro de cada etapa, entre as etapas e entre os problemas 'emparelhados'; o sentir dos alunos relativamente a cada uma das questões colocadas e a sua inter-relação. A análise horizontal permitiu-nos traçar o perfil dos alunos com respeito aos parâmetros anteriores.

Apresentação e discussão de alguns resultados[7]

Problema dos Candeeiros

Com base na leitura do quadro IV podemos ver que, à excepção de uma aluna que se limitou a apresentar os dados do problema numa outra forma, todas as outras tentaram resolvê-lo utilizando cálculo vectorial (porquê tal estratégia?) recorrendo, a maioria a um esquema que traduzisse a situação. Tais esquemas, na sua maioria, não foram, no entanto, elaborados com rigor.

Quadro IV – Resultados relativos ao Problema dos Candeeiros

	Tarefa				Questionário			
	Cat.					Ano	Estratégias	
Aluna	Res. Er.	Res. Parc.	Res. Total	Estratégia	Conteúdo	Just.	m	Outras Quais?
1	x			•Cálculo vectorial •Esquema	Distâncias e sua relação Proporcionalidade directa	8º cont.		Esquema e expressão
2			x	•Cálculo vectorial •Sistema equações •Esquema	Comprimento Soma de comprimentos Resolução de equações	8º/9º –	x	
3	x			•Cálculo vectorial •Esquema	Proporcionalidade Distância	8º dif.	x	
4	x			•Cálculo vectorial •Esquema	Proporcionalidade Relaç. entre duas distâncias	8º dif.	x	
5	x			–	Proporções	7º/8º –		Desenho
6		x		•Cálculo vectorial •Sistema equações •Esquema	–	– –		–
7	x			•Cálculo vectorial	Proporcionalidade Distância	8º dif.		Esquema
8		x		•Cálculo vectorial •Esquema	Proporcionalidade directa	8º –		Desenho
9	x			•Cálculo vectorial	Distância entre dois pontos Equações do 1º grau	7º cont.		Desenho
10			x	•Cálculo vectorial •Sistema equações •Esquema	Sistema aplicado ao comprimento de segmentos de recta	8º/9º –	x	

(7) Neste documento só referiremos os resultados relativos a um problema de cada uma das 1ª e 2ª etapas.

Seis alunas resolveram o problema de forma errada, não por terem tido dificuldade na sua compreensão, mas por terem estabelecido relações erradas entre os dados do problema.

Na figura 1 reproduz-se um trabalho que traduz o erro padrão cometido.

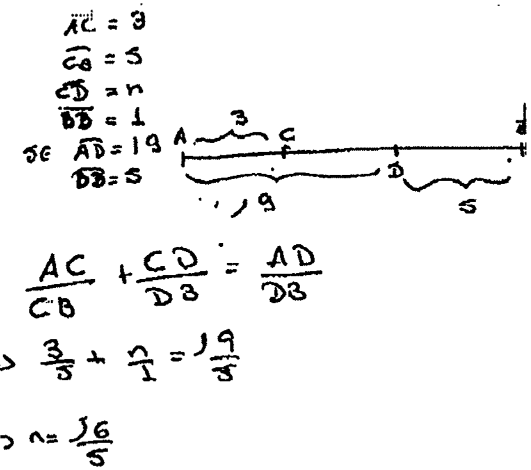


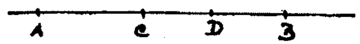
Figura 1 – Padrão de resolução incorrecta do problema dos candeeiros

Embora uma análise exaustiva dos erros cometidos saia fora do âmbito deste trabalho, com base nos valores atribuídos às medidas dos comprimentos dos segmentos, estas alunas demonstraram ter adquirido o conceito de proporcionalidade?

Duas alunas, embora enveredando por um dos possíveis caminhos correctos, não concluiram a resolução do problema, tendo só dois elementos resolvido totalmente o problema. Destas quatro alunas, três delas organizaram as equações estabelecidas em forma de sistema. Na figura 2 apresenta-se um desses trabalhos.

De notar que a aluna apresenta uma incorrecção numa das equações, que posteriormente ultrapassa e que, no final tem um erro de cálculo que não é rectificado.

As alunas mostraram uma certa preocupação na apresentação cuidada da resolução do problema e nenhuma resolveu o problema utilizando mais do que um processo. Limitaram-se, no entanto, a indicar o valor que encontraram para n, não se preocupando em tentar confirmar se tal resultado satisfazia as condições do problema.



$$\begin{cases} 5\overline{AC} = 3\overline{CD} \\ n\overline{DB} = \overline{CD} \\ \cancel{\overline{AB}} \quad 5\overline{AD} = 19\overline{DB} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(\overline{AC} + \overline{CD}) = 19(\overline{DB} - \overline{CD}) \\ n\overline{DB} = \overline{CD} \\ 5\overline{AC} = 3\overline{CB} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\overline{AC} + 5\overline{CD} = 3\overline{CD} + 5n\overline{DB} \\ 5\overline{CD} = n\overline{DB} \\ 5\overline{AD} = 19\overline{DB} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5\overline{AD} = 3\overline{CB} + 5n\overline{DB} \\ 5\overline{AD} = 19\overline{DB} \end{cases}$$

Mas: $3\overline{CB} + 5n\overline{DB} = 19\overline{DB}$

$\rightarrow (19 - 15n)\overline{DB} = 3\overline{CB}$

Por outro lado

$\overline{CB} = \overline{CD} + \overline{DB}$

É portanto

$(19 - 5n)\overline{DB} = 3\overline{CD} + 3\overline{DB}$

$\rightarrow (16 - 5n)\overline{DB} = 3\overline{CD}$

$\rightarrow (16 - 5n)\overline{DB} = 3n\overline{DB}$

$\rightarrow 16 - 5n = 3n$

$\rightarrow 16 = 8n$

$\rightarrow n = 3$

Figura 2 – Resolução do problema dos candeeiros apresentada por uma das alunas

Reportando-nos agora ao questionário, e não obstante terem utilizado como estratégia de resolução –cálculo vectorial– verificamos que cinco elementos consideraram que o conteúdo envolvido no problema era o da proporcionalidade tendo, à excepção de uma aluna, acrescentado àquele tópico, o das distâncias. Este grupo opinou, curiosamente, que o problema era adequado para o 8° ano de escolaridade principalmente devido ao grau de dificuldade. Tal opinião poder-se-à atribuir ao facto de o aliarem a problemas de distâncias? Prender-se-à com o facto de, actualmente, se abordarem unidades didácticas em anos sequenciais, com graus de complexidade crescente? Onde posicionam a unidade 'Proporcionalidade Directa' nos curricula?

As únicas alunas que resolveram integralmente o problema indicaram, como conteúdos nele envolvidos, tópicos relativos ao 'comprimento' e 'operações entre comprimentos', sistematizadas ou não em equações, tendo-o ambas considerado adequado para o 8°/9° ano de escolaridade. A que se deverá tal indecisão? Desconhecimento dos actuais programas? Grau de dificuldade do problema? As mesmas questões se poderão colocar relativamente à aluna que indicou as 'proporções' como o conteúdo com o qual o problema estaria relacionado, referindo que o mesmo estaria adequado para o 7°/8° ano de escolaridade.

Uma aluna não respondeu a nenhuma questão do questionário e outro elemento considerou o problema adequado para o 7° ano de escolaridade, provavelmente porque opinou tratar-se de um problema de distâncias entre dois pontos e de equações do 1° grau.

Quatro alunas indicaram expressamente que utilizariam a mesma estratégia que usaram na abordagem deste problema, tendo as restantes reforçado a ideia da necessidade de concretizar a situação com o auxílio de um esquema ou desenho. Para que tal procedimento possa, no entanto, vir a ser eficaz, terão que efectuar esse esquema com o máximo rigor, o que não aconteceu com frequência neste trabalho.

Problema do Trabalho

1° Processo de resolução.

A maioria das alunas (oito),como se pode ver no quadro V, resolveu totalmente o problema, tendo-o as restantes errado pelo facto de terem considerado, na determinação do valor unitário, estratégia utilizada por todos os elementos, respectivamente 4 e 7 dias de trabalho (figura 3).

De notar que nenhuma destas alunas, como se pode ver pelo trabalho apresentado, questiona o resultado obtido, à luz da sua pertinência. Não demonstraram preocupação na sua avaliação, mesmo quando um dos operários por ter trabalhado mais um dia que os outros, recebe bem mais do que eles.

Quadro 5 – Resultados relativos ao Problema do Trabalho

	1º processo				2º proces.				Questionário			
	cat				cat.					Ano	Estratégias	
Aluna	R. E.	R. P.	R. T.	Estratégia	R. E.	R. P.	R. T.	Estratégia	Conteúdos	just.	m	Outras Quais?
1			x	determinação do valor unitário (divisão)					–	–		esquema ou tabela
2			x	determinação do valor unitário/ descrição			x	det. valor unitário eq.1º grau	–	4º/5º dif.	x	
3			x	determinação do valor unitário e multiplicação					proporcionalidade directa	6º cont.	x	esquema
4			x	determinação do valor unitário (fracção) e multiplicação					proporcionalidade directa	6º –		esquema
5	x			determinação do valor unitário (4 dias) (divisão) e descrição	x			diagrama fracções	fracções	7º/8º –	x	
6			x	determinação do valor unitário (divisão) e multiplicação					resolução de equações	7º –	x	colocação questões
7			x	determinação do valor unitário (divisão) e multiplicação					proporcionalidade directa	7º dif.	x	esquema
8			x	determinação do valor unitário e por trabalhador (proporções)			x	det. do valor unit. equaç.1º grau e multipl.	proporcionalidade directa	7º/8º –		dedução lógica
9	x			determinação do valor unitário (7 dias) (divisão) e multiplicação					divisão e multiplicação	7º –	x	máquina calcular
10			x	determinação do valor unitário por equações do 1º grau			x	esquema e det. do valor unit. por porporção	res. de probl. proporc. directa	8º/9º –		quadro dedução lógica

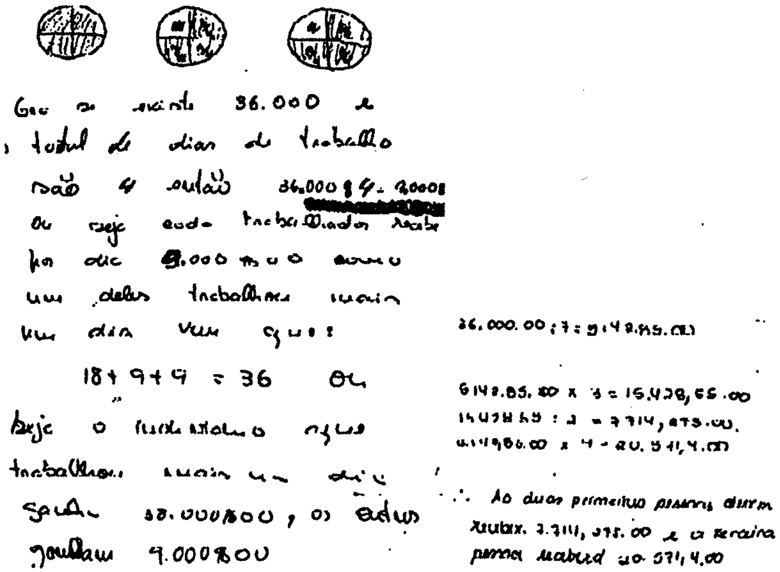


Figura 3 – Resoluções do problema do trabalho, apresentadas por duas alunas

Das restantes três alunas que calcularam o preço de um dia de trabalho por meio de uma divisão, uma delas fê-lo recorrendo a uma fracção tendo todas, no passo seguinte, efectuado multiplicações. Duas alunas após terem determinado o valor unitário (descreveram), calcularam os resultados finais através de multiplicações, tendo uma delas utilizado o mesmo processo depois de ter empregue uma equação na determinação do valor de um dia de trabalho. Os restantes elementos recorreram a proporções no primeiro passo tendo no segundo utilizado respectivamente outra proporção e uma multiplicação. O quadro VI pretende explicitar as estratégias utilizadas na resolução do problema do trabalho.

Quadro VI – Estratégias de resolução do Problema do Trabalho (entre parêntesis menciona-se o número de alunas)

Valor unitário (10)	(2) descrição		(1) multiplicação
	(2) proporção	36.000-10 x–1	(1) proporções (1) multiplicações
	(1) equação	3x+3x+4x=36.000	multiplicações
	(5) divisão	(2) 36.000 10 (1) 36000/10 (1) 36.000 7 (1) 36.000 4	multiplicações multiplicações multiplicações descrição

2º Processo de resolução

Só quatro alunas tentaram resolver o problema por outro processo, três das quais o resolveram totalmente, tendo a outra errado de novo, como se pode ver no quadro 5. Na figura 4 reproduzimos tal trabalho, que pertence à mesma aluna cujo primeiro processo de resolução apresentamos na primeira imagem da figura 3.

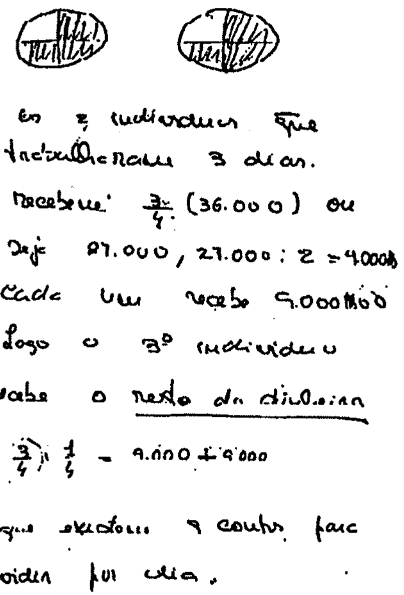


Figura 4 – 2º Processo de resolução do problema do trabalho, apresentado por uma das participantes

Curioso notar que a aluna anulou um dos três círculos que tinha desenhado aquando do primeiro processo de resolução, tendo sombreado as partes consideradas de forma diferente. Constata-se ainda que a necessidade, provavelmente, de que o valor unitário fosse o mesmo que o encontrado anteriormente, levou a aluna a considerar que metade de 27.000 fosse igual a 9.000. Interessante também a forma como é conseguido o valor total a pagar ao operário que trabalhou 4 dias.

As alunas que resolveram correctamente o problema utilizaram a mesma estratégia – da determinação do valor unitário, recorrendo, respectivamente, a duas equações, a uma equação seguida de multiplicação e a proporção seguida de descrição.

Duas alunas não deram resposta à questão relativa ao conteúdo envolvido no problema, tendo cinco elementos, dos quais um deles acrescentou a resolução de problemas, mencionado a respeito a proporcionalidade, não obstante terem utilizado estratégias bem menos formais do que as habituais no tratamento deste conteúdo. O que as terá levado a dar esta resposta? A consciência de que tais estratégias poderão de forma igualmente válida e eficaz contribuir para o desenvolvimento de um tipo de raciocínio proporcional? Das restantes participantes uma indicou as fracções (a que utilizou tal estratégia como 2º processo) como o conteúdo envolvido no problema, outra aluna a resolução de equações e finalmente a terceira, a divisão e multiplicação.

Relativamente ao ano de escolaridade para o qual o problema era adequado, as opiniões curiosamente, dividiram-se:

Alunas	Ano de escolaridade
1	4º/5º
3	6º
3	7º
2	7º/8º
1	8º/9º

apresentando como argumentos, a aluna que respondeu 4º/5º de escolaridade, o grau de dificuldade; uma das alunas que considerou ser adequado para o 6º, os conteúdos envolvidos, e uma das alunas que deu como resposta o 7º ano, também o grau de dificuldade.

Como estratégias que utilizariam na abordagem do problema com aqueles alunos, seis elementos indicaram que usariam a mesma, tendo dois acrescentado que englobariam um esquema, e os outros a colocação de questões e máquina de calcular, respectivamente. Das restantes participantes, três consideraram que seria de fazer um esquema, uma tabela ou um quadro, tendo uma delas ainda acrescentado a dedução lógica, que seria a estratégia que o outro elemento utilizaria.

Principais Conclusões e Recomendações

A investigação exploratória levada a cabo, imbuída de certas limitações, algumas das quais já foram sendo referidas ao longo do texto e das quais destacamos: tempo de que dispúnhamos para a levar a cabo; altura do ano em que foram aplicadas as tarefas; extensão do trabalho condensado numa única sessão; número reduzido de participantes; estarem envolvidos em simultâneo noutras investigações; escassez de instrumentos de investigação (principalmente a falta de entrevistas); forma como foi colocada a questão relativa à(s) estratégia(s) que utilizariam na abordagem dos problemas e falta de uma questão no último questionário relativa ao(s) processo(s) de resolução que utilizariam com os alunos, dado que poderiam não ser precisamente coincidentes com os que consideravam mais adequados, permitiu-nos, no entanto, tirar algumas conclusões. Estas alunas futuras- -professoras manifestaram algumas dificuldades a nível da compreensão dos problemas, pelo que sugerimos que a nível da formação inicial e/ou contínua seja dado lugar de destaque ao módulo imprescindível de 'resolução de problemas' atendendo-se particularmente à fase 'compreensão do problema', promovendo actividades que a facilitem. Desta forma talvez se contribua para uma melhor preparação dos professores no sentido de eles próprios virem a desenvolver actividades que pressuponham a resolução de problemas como metodologia de ensino, que estamos cientes ser uma das formas mais ricas e eficazes de comunicar matemática. Talvez num futuro não muito próximo os alunos dos Ensinos Básico e Secundário não hesitem em afirmar que 'resolviam frequentemente' problemas nas aulas de matemática como 'metodologia de ensino' em detrimento de 'como prática depois da exploração de conteúdos', o que estamos em crer contribua para uma visão mais positiva da própria disciplina e uma aprendizagem mais efectiva da mesma.

Detectamos também preferência na resolução e ensino de problemas em que o valor unitário é dado, pela estratégia que recorre ao algoritmo do produto-cruzado. Deveremos pois alertar para o facto de que tal algoritmo é desprovido de significado, devendo ser introduzido somente depois de adquirido convenientemente o conceito de proporcionalidade.

Através essencialmente do problema dos candeeiros detectamos muitas dificuldades na aquisição/aplicação do conceito em estudo, pelo que sugerimos que a nível do Ensino Básico venha a ser dada mais ênfase a esta unidade didáctica e venha a ser abordada de forma mais significativa, de acordo com as sugestões referidas e, para quem já não possa usufruir daquela formação sejam dadas condições para que repensem a problemática em causa.

Foi nítida a preferência, na resolução e ensino de problemas em que o valor unitário não é dado, pela determinação do mesmo, através de processos menos formais do que os utilizados na abordagem do conteúdo 'proporcionalidade' (atente-se ao problema do trabalho). Neste contexto e aproveitando tal apetência, será de enfatizar a pertinência em contemplar tais processos no ensino/aprendizagem:

- pela facilidade com que se podem relacionar com outros tópicos,

- porque podem contribuir para uma melhor aquisição/assimilação do conceito,
- não devendo, no entanto, contribuir para camuflar outros processos mais elaborados de raciocínio proporcional (atente-se aos comentários suscitados pelo 5º processo de resolução do problema da vara apresentado).

Embora se tenham mostrado sensíveis à necessidade de abordar os problemas utilizando mais do que um processo, na situação (N) limitaram-se a propor as mesmas estratégias utilizadas, essencialmente algébricas, ou usar um esquema não se tendo, na situação (S), registado diferenças significativas. Sugerimos a propósito que os vários problemas explorados em situações de ensino/aprendizagem sejam resolvidos das formas mais variadas, recorrendo a processos geométricos, algébricos, analíticos, incluindo os menos formais e ortodoxos, atitude que, como já referimos, poderá contribuir para uma aprendizagem mais significativa e efectiva dos conteúdos envolvidos.

Notória foi também a ausência à referência da ligação deste conteúdo– proporcionalidade– com outros tópicos, nomeadamente nas propostas de abordagem didáctica referidas. Uma das críticas mais acérrimas que se têm feito aos (antigos) programas curriculares é precisamente a falta de ligação horizontal e vertical entre os conteúdos programáticos. Embora já muito se tenha tentado fazer a esse respeito, nunca será demais enfatizar a necessidade e importância de estabelecer tais relações.

Finalmente, será de referir que as alunas demonstraram muita insegurança relativamente aos anos de escolaridade para os quais os problemas seriam adequados. A este respeito sugerimos que, no âmbito da formação inicial sejam proporcionadas condições aos futuros-professores para realizarem uma análise curricular aprofundada, no sentido de culmatarem tal lacuna.

Referências

Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo.* Lisboa: Edições 70.

Cabrita, I. (1992). Para uma reconceptualização da didáctica tecnológica nos curricula de formação de professores. Comunicação apresentada no *II Congresso da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação*, Braga, 30 de Novembro e 1 e 2 de Dezembro.

Carpenter, T. (1975). Reults and implications of the NAEP mathematics assessment: secondary school. *Mathematics Teacher, 68*, 453-472.

Carraher, T., Carraher, D. & Schliemann, A. (1991). *Na vida dez, na escola zero.* São Paulo: Cortez.

Chin, Y. (1992). Meaningful understanding of direct proportionality and consistency across different task among preservice science teachers. *International Journal of Science Education, 14*(3), 237-247.

Cramer, K., Post, T. & Behr, M. (1989). Interpreting proportional relationships. *Mathematics Teacher, 82*(6), 445-453.
Cramer, K., Post, T. & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: research implications. In D. T.Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom. Middle grades mathematics*. New York: MacMillan.
Erickson, (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research on Teaching*. New York: Macmillan.
Fisher, L. (1988). Srtategies used by secondary mathematics teachers to solve proportion problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(2), 157-168.
Hart, K. (1988). Ratio and proportion. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*. Reston: NCTM.
Heller, P., Ahlgren, A. & Post, T. (1989). Proportional reasoning: the effect of two context variables, rate type, and problem setting. *Journal fof research in Science teaching, 26*(3), 205-220.
Hoffer, A. (1988). Ratios and proportional thinking. In T. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades k-8*. Boston: Allyn & Bacon.
Karplus, R., Adi, H. & Lawson, A. E. (1981). Intellectual development beyond elementary school VIII: proportional, probalistic, and correlational reasoning. *School Science and Mathematics, 18*, 673-683.
Karplus, R., Karplus, E., Formisano, M. & Paulsen, A. (1977). A survey of proportional reasoning and control of variables in seven countries. *Journal of research in Science Teaching, 14*, 411-417.
Karplus, R., Pulos, S. & Stage E. (1983). Proportional reasoning. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press.
Lamon, S. (1993). Ratio and proportion: connecting content and children's thinking. *Journal of Research in Mathematics Education, 24*(1), 41-61.
Lawton, C. (1993). Contextual factors affecting errors in proportional reasoning. *Journal of Research in Mathematics Education, 24*(5), 460-466.
Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*. Reston: NCTM.
Matos, J. M. (1994). Os métodos próprios dos alunos: Início de uma investigação. Comunicação apresentada no *V Seminário de Investigação em educação Matemática*, Leiria.
NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston: NCTM.
Post, T., Behr, M. & Lesh, R. (1988). Proportionality and development of prealgebra understanding. In A. Coxford (Ed.), *Algebraic concepts in the curriculum k-12, Yearbook*. Reston: NCTM.
Tourniaire, F. & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: a review of the literature. *Educacional Studies in Mathematics, 16*, 181-204.
Vale, I., Fonseca L., Pimentel, T. (1993). *Tales 7 Exercícios e* problemas. Matemática. .Porto: Areal Editores.
Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.),

Acquisition of mathematics concepts and processes. New York: Academic Press.
Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*. Reston: NCTM.