Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2005

UNIVERSIDADE DE AVEIRO
SERVIÇOS DE DOCUMENTAÇÃO

Cristiana João
Soares da Silva

Abordagens do Cálculo das Variações e Controlo Óptimo ao Problema de Newton de Resistência Mínima

UA-SD
238321

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2005

Cristiana João Soares da Silva

Abordagens do Cálculo das Variações e Controlo Óptimo ao Problema de Newton de Resistência Mínima

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática, realizada sob a orientação científica do Prof. Doutor Delfim Fernando Marado Torres, Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

"One can obtain no knowledge about the real world by pure logic."

A. Einstein

o júri

presidente

Prof. Dr. Maria Rosália Dinis Rodrigues
professora associada da Universidade de Aveiro

Prof. Dr. Fernando A. C. C. Fontes
professor associado da Universidade do Minho

Prof. Dr. Alexander Plakhov
professor associado da Universidade de Aveiro

Prof. Dr. Delfim Fernando Marado Torres
professor auxiliar da Universidade de Aveiro

agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, o Prof. Doutor Delfim Fernando Marado Torres, por todo o apoio que me deu em todos os momentos da elaboração desta dissertação. O seu entusiasmo e alegria de viver a Matemática foram para mim fonte de motivação e encorajamento para uma maior dedicação. O seu apoio científico foi indiscutível e ser sua orientanda um enorme privilégio.

palavras-chave

Cálculo das variações, controlo óptimo, problema de Newton de resistência mínima

resumo

No seu célebre *Principia Mathematica*, publicado em 1687, Isaac Newton formulou aquele que é agora designado por *Problema de Newton de Resistência Mínima*. Ao longo desta dissertação vamos dedicar a nossa atenção ao estudo da formulação e resolução deste problema sob o ponto de vista do cálculo das variações e do controlo óptimo. Começamos por determinar a funcional integral para a resistência total do sólido de Newton, a qual pretendemos minimizar. De seguida, apresentamos a formulação matemática clássica do problema de Newton, de acordo com a teoria do cálculo das variações, e mostramos que este problema matemático não admite nenhuma extremal: nenhuma função satisfaz as condições necessárias clássicas de optimalidade. Concluímos que a formulação matemática clássica do problema de Newton não tem solução e não está bem posta. Assim, passamos à formulação correcta do problema de Newton de resistência mínima, que é um problema da teoria do controlo óptimo. Mostramos como podemos resolver o problema de Newton através do Princípio do Máximo de Pontryagin - o resultado principal do controlo óptimo - e apresentamos a sua solução. Terminamos dando referências a trabalhos recentes sobre problemas do tipo de Newton e apontando algumas direcções da investigação actual.

keywords Calculus of variations, optimal control, Newton’s problem of minimal resistance

abstract In the celebrated *Principia Mathematica*, published in 1687, Isaac Newton propose what is now called the *Newton's problem of minimal resistance*. Along this dissertation we dedicate our attention to the study of the formulation and resolution of this problem in agreement with calculus of variations and optimal control. We start by finding the integral functional that represents the total resistance of Newton's body which we want to minimize. We then proceed to present the classical mathematical formulation of Newton's problem in agreement with the theory of the calculus of variations, and we show that this mathematical problem fails to satisfy all the classical necessary optimality conditions. We conclude that the classical mathematical formulation of Newton's problem has no solution, and is not well posed. Next, we present the correct formulation for Newton's problem of minimal resistance, which is an optimal control problem. We show that one can easily solve it with the help of the Pontryagin Maximum Principle - the main result of optimal control theory - and present it's solution. We finish giving some references to recent works on Newton-type problems of minimal resistance and pointing out some directions of current investigation.

Conteúdo

Introdução **1**

1 Formulação do Problema de Newton de Resistência Mínima **9**
1.1 Introdução 9
1.2 Problema do tronco do cone 11
1.3 Problema de Newton para uma linha poligonal de um vértice 18
1.4 Problema de Newton para uma linha poligonal de n vértices 23
1.5 Conclusão 28
1.6 Comentários 29

2 O Cálculo das Variações e o Problema de Newton de Resistência Mínima **33**
2.1 Introdução 33
2.2 Breve resenha histórica do cálculo das variações 35
2.3 Problema fundamental do cálculo das variações 38
2.4 Condições necessárias clássicas de optimalidade 39
2.4.1 Minimizante global de $J[\cdot]$ 39
2.4.2 Minimizante local forte e fraco de $J[\cdot]$ 40
2.4.3 Condição necessária clássica para mínimo local forte 41
2.4.4 Condições necessárias clássicas para mínimo local fraco 41
2.5 O problema de Newton de resistência mínima e a teoria do cálculo das variações 42
2.5.1 Formulação clássica do problema de Newton de resistência mínima . . 42
2.5.2 Formulação paramétrica do problema de Newton de resistência mínima 43
2.5.3 Condição necessária de Weierstrass 43
2.5.4 Condição necessária de Euler-Lagrange e a condição necessária de Legendre 44
2.5.5 Conclusão 48
2.6 Formulação correcta do problema de Newton de resistência mínima 48
2.7 Comentários 49

3 O Controlo Óptimo e o Problema de Newton de Resistência Mínima **51**
3.1 Introdução 51

3.2 Breve resenha histórica do controlo óptimo 51
3.3 Problema de Lagrange do controlo óptimo 52
3.4 Princípio do Máximo de Pontryagin 54
3.5 O problema de Newton de resistência mínima e a teoria do controlo óptimo . 55
3.6 Comentários 63

Conclusão **65**

Apêndices **67**

A Cálculos auxiliares **67**
A.0.1 Problema 1.2.5 67
A.0.2 Proposição 1.3.2 68
A.0.3 Função Excesso de Weierstrass 68
A.0.4 Condição necessária de Legendre 69
A.0.5 Proposição 2.5.2 70
A.0.6 Solução do problema de Newton 70

Bibliografia **73**

Índice Remissivo **77**

Introdução

A publicação da obra de Newton intitulada *De Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (do latim, "Os princípios Matemáticos da Filosofia Natural"), usualmente referida apenas por *Principia* ou *Principia Mathematica*, ocorreu a 5 de Julho de 1687. Trata-se de um trabalho único da literatura matemática, sendo, talvez, o livro científico mais influente alguma vez publicado. A descrição do universo dada por Newton contém o tipo de descobertas que só podem ser feitas uma vez.

Esta obra está dividida em três volumes: *O movimento dos corpos*, *O movimento dos corpos (continuação)* e *O Sistema do Mundo*. Nela são estudadas as leis básicas da mecânica descobertas por Newton, assim como o movimento planetário e outros factos fundamentais. No entanto, grande parte desta obra é dedicada a problemas específicos.

Na secção VII do segundo volume do *Principia* [27, p. 327], Newton estuda o movimento de corpos em meios resistentes e estabelece as condições para o que frequentemente se designa por *meio raro*.[1] Newton considera que os corpos se movimentam com velocidade constante e que no meio onde se movem as partículas são iguais, estão igualmente espaçadas, não interagem entre si, isto é, não se atraem nem se repelem, e quando os corpos chocam com as partículas existe apenas um único movimento de choque e reflexão (as colisões com o corpo são perfeitamente elásticas).

Nestas condições, Newton enuncia e demonstra a Proposição XXXIV, onde conclui que se num meio raro uma esfera e um cilindro, com igual diâmetro, se movem a igual velocidade na direcção do eixo de rotação do cilindro, então a resistência da esfera é metade da resistência do cilindro [27, pp. 331-332].

No *Scholium* (anotação) desta proposição surge o que actualmente se designa por *problema de Newton de resistência mínima* ou *problema aerodinâmico de Newton* [27, pp. 333-334].

Neste *Scholium* Newton dá, sem demonstração, as condições geométricas que uma superfície de revolução deve satisfazer para que se possa mover com resistência mínima, na direcção do seu eixo de rotação, através de um meio raro - aqui nasce o problema de Newton de resistência mínima.

Na formulação das suas teorias físicas, Newton desenvolveu uma área da matemática

[1] Cf. Capítulo 1, §1.1.

conhecida por *Cálculo*. Contudo, a linguagem do cálculo foi largamente deixada de parte no *Principia Mathematica*. Em vez disso, Newton escreveu a maioria das suas demonstrações com argumentos geométricos. Nomeadamente, no que diz respeito ao problema de resistência mínima, a resposta dada tem um carácter eminentemente geométrico.

Apesar de Newton não ter publicado a demonstração da solução para o seu problema de resistência mínima, Florian Cajori no apêndice explicativo de [27, pp. 657-661], diz-nos que no livro *A Catalogue of the Portsmouth Collection of Books and Papers, Cambridge, 1888, (pp. 21-23)*, há um esboço de uma carta de Newton para um seu correspondente em Oxford, provavelmente David Gregory, e escrita por volta de 1694, na qual Newton explica o seu método para obter a solução do seu problema. Florian Cajori reproduz essa carta, fazendo apenas pequenas mudanças na notação, tal como, $(Nn)^2$ em vez de "Nn^{quad}", $\frac{dq}{dt}$ para "$\dot{q}$" ou o uso de parêntesis no lugar do traço horizontal por cima de uma ou mais expressões.

Analisemos a reprodução dessa carta dada por Florian Cajori.

A figura que sofre resistência mínima, dada no Scholium*, Proposição XXXIV, Livro II, é demonstrável através dos seguintes passos.*

1. Se sobre BM elevarmos, infinitamente, paralelogramos muito estreitos $BGhb$ e $MNom$ e a sua distância Mb e alturas MN, BG forem dadas, e a semi-soma das suas bases $\frac{Mm+Bb}{2}$ for também dada e chamada s e a sua semi-diferença $\frac{Mm-Bb}{2}$ chamada x; e se as rectas BG, bh, MN, mo, intersectam a curva $nNgG$ nos pontos n, N, g e G, e os infinitamente pequenos segmentos de recta on e hg forem iguais uns aos outros e chamados c, e a figura $mnNgGB$ for rodada em torno do seu eixo BM para gerar um sólido, e este sólido move-se uniformemente na água[2] *de M até B de acordo com a direcção do seu eixo BM: a soma das resistências das duas superfícies geradas pelos segmentos de recta infinitamente pequenos Gg, Nn, deve ser mínima quando $(gG)^4$ está para $(nN)^4$ tal como $BG \times Bb$ está para $MN \times Mm$.*

Como as resistências das superfícies geradas pela revolução de Gg e Nn estão para $\frac{BG}{(Gg)^2}$ e $\frac{MN}{(Nn)^2}$, isto é, se $(Gg)^2$ e $(Nn)^2$ forem chamadas p e q, como $\frac{BG}{p}$ e $\frac{MN}{q}$ a sua soma $\frac{BG}{p} + \frac{MN}{q}$ é mínima quando a fluxão[3] *delas $-\frac{BG}{p^2} \cdot \frac{dp}{dt} - \frac{MN}{q^2} \cdot \frac{dq}{dt}$ é nula, ou $-\frac{BG}{p^2} \cdot \frac{dp}{dt} = \frac{MN}{q^2} \cdot \frac{dq}{dt}$.*

Agora $p = (Gg)^2 = (Bb)^2 + (gh)^2 = s^2 - 2sx + x^2 + c^2$ e então

$$\frac{dp}{dt} = -2s\frac{dx}{dt} + 2x\frac{dx}{dt},$$

e pelo mesmo motivo $\frac{dq}{dt} = 2s\frac{dx}{dt} + 2x\frac{dx}{dt}$ e então

$$\frac{BG\left(2s\frac{dx}{dt} - 2x\frac{dx}{dt}\right)}{p^2} = \frac{MN\left(2s\frac{dx}{dt} + 2x\frac{dx}{dt}\right)}{q^2}$$

[2] Newton colocou e resolveu correctamente o seu problema em meios raros. A água não pode ser considerada um "meio raro", pelo que as previsões de Newton sobre a relevância do seu problema na construção de navios não são verdadeiras. A solução do problema de Newton veio a revelar-se, no entanto, útil na construção de artefactos espaciais (como salientaremos no comentário 1.6.2 da secção 1.6).

[3] Newton designou por *fluxão* o que actualmente chamamos *derivada* [6, p. 291].

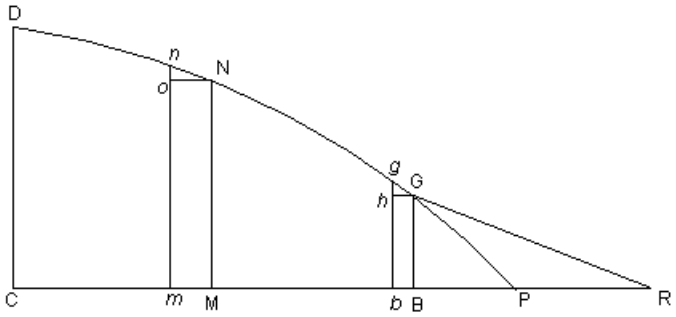


Figura 1: Sólido de Newton

ou $\frac{BG(s-x)}{p^2} = \frac{MN(s+x)}{q^2}$ *e logo* p^2 *está para* q^2 *assim como* $BG(s-x)$ *está para* $MN(s+x)$, *isto é,* $(gG)^4$ *está para* $(nN)^4$ *assim como* $BG \times Bb$ *para* $MN \times Mm$.

2. Se a linha curva $DnNgG$ *for tal que a superfície do sólido gerado pela sua revolução sofrer uma resistência menor do que a de qualquer sólido com a mesma frente e a mesma base* BG *e* CD, *então a resistência das duas superfícies estreitas anulares geradas pela revolução dos [segmentos de recta infinitamente pequenos* nN *e] Gg é menor do que se o sólido intermediário* $bgNM$ *for removido [ao longo de* CB *sem alterar* Mb, *até* bg *se tornar] em* BG *[supondo como antes que on é igual a hg e consequentemente é o menor possível], e então* $(gG)^4$ *está para* $(nN)^4$ *tal como* BG *[*$\times Bb$ *está para* $MN \times Mm$*].*

** [Também se] gh for igual a hG de modo a que o ângulo [gGh tem de amplitude 45º]então* $4(Bb)^4$ *estará [para* $(nN)^4$ *tal como* $BG \times Bb$ *está para] MN* $\times$ Mm, *e consequentemente* $4(BG)^4$ *está para* $(GR)^4$ *assim como* $(BG)^2$ *está para* $MN \times BR$ *ou* $4(BG)^2 \times BR$ *está para* $(GR)^3$ *[assim como GR para MN].*

*** Se a altura do tronco do cone, mencionada na parágrafo anterior, for infinitamente pequena, o semi-ângulo do cone torna-se igual a 45º. Logo, quando a resistência total é mínima, a curva encontra a ordenada extremal (óptima) GB no ângulo de 45º.*

Donde a proposição a ser demonstrada sai facilmente.

Vejamos, em pormenor, os argumentos de Newton.

Consideremos, primeiramente, o ponto 1.

Na figura 1, podemos observar os dados de Newton. Relativamente aos paralelogramos infinitamente pequenos $[BGhb]$ e $[MNom]$, as distâncias $\overline{Mb}$, $\overline{MN}$ e $\overline{BG}$ são dadas. Do mesmo modo, as semi-soma e semi-diferença das bases, também são dadas e denotadas por s e x, respectivamente, isto é,

$$\frac{\overline{Mm} + \overline{Bb}}{2} = s\,, \qquad \frac{\overline{Mm} - \overline{Bb}}{2} = x\,.$$

Mais ainda, sabemos que $\overline{on} = \overline{hg} = c$, isto é, os segmentos $[on]$ e $[hg]$ são iguais e o seu comprimento é designado pela constante c.

Newton explica quando é que a resistência das superfícies geradas pelos segmentos $[Gg]$ e $[Nn]$ é mínima. Vejamos o processo por ele escolhido para efectuar tal explicação.

Proposição 0.0.1. *A soma das resistências das superfícies geradas pela rotação dos segmentos de recta infinitamente pequenos $[Gg]$ e $[Nn]$ em torno do eixo BM é mínima quando*

$$\frac{\left(\overline{gG}\right)^4}{\left(\overline{nN}\right)^4} = \frac{\overline{BG} \times \overline{Bb}}{\overline{MN} \times \overline{Mm}}\,.$$

Demonstração. As resistências[4] das superfícies geradas pela revolução de $[Gg]$ e $[Nn]$ estão para $\frac{\overline{BG}}{(\overline{Gg})^2}$ e $\frac{\overline{MN}}{(\overline{Nn})^2}$, respectivamente. Para simplificar, vamos mudar a notação fixando $(\overline{Gg})^2 = p$ e $(\overline{Nn})^2 = q$.

Assim sendo, a soma da resistência das superfícies geradas por $[Gg]$ e $[Nn]$, $\frac{\overline{BG}}{p} + \frac{\overline{MN}}{q}$, é mínima quando a sua derivada é nula.

Calculemos esta derivada,

$$\left(\frac{\overline{BG}}{p} + \frac{\overline{MN}}{q}\right)' = -\frac{\overline{BG}}{p^2}\frac{dp}{dt} - \frac{\overline{MN}}{q^2}\frac{dq}{dt}\,.$$

Igualando-a a zero, obtemos a seguinte igualdade.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\overline{BG}}{p} + \frac{\overline{MN}}{q}\right)' = 0 &\Leftrightarrow -\frac{\overline{BG}}{p^2}\frac{dp}{dt} - \frac{\overline{MN}}{q^2}\frac{dq}{dt} = 0\\ &\Leftrightarrow -\frac{\overline{BG}}{p^2}\frac{dp}{dt} = \frac{\overline{MN}}{q^2}\frac{dq}{dt}\,.\end{aligned} \tag{0.0.1}$$

Pelo teorema de Pitágoras vem

$$p = (\overline{Gg})^2 = (\overline{Bb})^2 + (\overline{gh})^2 = (s-x)^2 + c^2 = s^2 - 2sx + x^2 + c^2\,,$$

uma vez que

$$(s-x)^2 = \left(\frac{\overline{Mm} + \overline{Bb}}{2} - \frac{\overline{Mm} - \overline{Bb}}{2}\right)^2 = (\overline{Bb})^2\,.$$

Donde, $\frac{dp}{dt} = -2s\frac{dx}{dt} + 2x\frac{dx}{dt}$.

Analogamente, obtemos $\frac{dq}{dt} = 2s\frac{dx}{dt} + 2x\frac{dx}{dt}$, pois

$$q = (\overline{Nn})^2 = (\overline{Mm})^2 + (\overline{no})^2 = (s+x)^2 + c^2 = s^2 + 2sx + x^2 + c^2$$

e

$$(s+x)^2 = \left(\frac{\overline{Mm} + \overline{Bb}}{2} + \frac{\overline{Mm} - \overline{Bb}}{2}\right)^2 = (\overline{Mm})^2\,.$$

[4] A análise detalhada da expressão da resistência será efectuada no Capítulo 1.

Substituindo em (0.0.1) o valor de $\frac{dp}{dt}$ e de $\frac{dq}{dt}$ vem

$$\begin{aligned} -\frac{\overline{BG}}{p^2}\frac{dp}{dt} = \frac{\overline{MN}}{q^2}\frac{dq}{dt} &\Leftrightarrow -\frac{\overline{BG}}{p^2}\left(-2s\frac{dx}{dt}+2x\frac{dx}{dt}\right) = \frac{\overline{MN}}{q^2}\left(2s\frac{dx}{dt}+2x\frac{dx}{dt}\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{2\frac{dx}{dt}\overline{BG}(s-x)}{p^2} = \frac{2\frac{dx}{dt}\overline{MN}(s+x)}{q^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{BG}(s-x)}{p^2} = \frac{\overline{MN}(s+x)}{q^2}\,. \end{aligned}$$

A partir deste resultado justificamos o facto pretendido: p^2 está para q^2 assim como $\overline{BG}(s-x)$ está para $\overline{MN}(s+x)$, ou seja,

$$\frac{\overline{BG}(s-x)}{p^2} = \frac{\overline{MN}(s+x)}{q^2} \Leftrightarrow \frac{p^2}{q^2} = \frac{\overline{BG}(s-x)}{\overline{MN}(s+x)}\,. \tag{0.0.2}$$

Substituindo $p = (\overline{Gg})^2$ e $q = (\overline{Nn})^2$ em (0.0.2) temos

$$\frac{(\overline{Gg})^4}{(\overline{Nn})^4} = \frac{\overline{BG}(s-x)}{\overline{MN}(s+x)} \Leftrightarrow \frac{(\overline{Gg})^4}{(\overline{Nn})^4} = \frac{\overline{BG}\times\overline{Bb}}{\overline{MN}\times\overline{Mm}}\,.$$

□

No que diz respeito ao ponto 2, Florian Cajori adverte o leitor para o facto da carta por ele transcrita ser apenas um esboço de uma carta de Newton, mantida na *Portsmouth Collection*, uma vez que esta foi emendada em algumas partes incompletas do manuscrito pela interpolação de palavras colocadas entre parêntesis. Estas interpolações foram feitas pelos editores da *Catalogue* da *Portsmouth Collection*. Segundo este autor os parêntesis não foram inseridos de modo apropriado. Ele justifica a sua afirmação com base na opinião de Oskar Bolza que tinha conseguido através de Arthur Berry, de Cambridge, um fascículo do manuscrito original.

Florian Cajori, informa-nos que Bolza efectuou um estudo exaustivo da solução apresentada por Newton e chegou à conclusão que as palavras "até *bg* se tornar", inseridas pelos editores de *Catalogue* da *Portsmouth Collection*, não são muito satisfatórias. E reproduz parte do artigo de Bolza no qual a figura e as suposições da carta de Newton são seguidas.

Vejamos, então a informação dada por Oskar Bolza.

Deslocando o arco Ng por uma distância infinitamente pequena K paralela ao eixo CB para a nova posição $N'g'$ e desenhando os segmentos de recta $N'n$, Gg', então, se em geral, para qualquer arco A situado no plano da figura, designarmos por (A) a resistência da superfície gerada pela rotação de A em torno do eixo BC, obtemos

$$(DnN'g'GB) > (DnNgGB)\,. \tag{0.0.3}$$

Como

$$(N'g') = (Ng)\,,$$

então segue-se de (0.0.3)

$$(nN') + (g'G) > (nN) + (gG)\,. \tag{0.0.4}$$

Mas a expressão $(nN') + (g'G)$*, sendo uma função de* K*, tem de ter um mínimo para* $K = 0$*. Isto é um problema usual de minimização que Newton resolve na primeira parte da sua demonstração pelo procedimento ainda comum, nos tempos actuais, sendo apenas necessário ter em atenção que nas expressões para* (nN) *e* (gG) *ele negligencia no início a magnitude* $hg = on$ *pois são infinitamente pequenas em comparação com* BG *e* MN*.*

Resolvendo o problema de minimização, Newton obtém a relação

$$\frac{BG \cdot Bb}{(Gg)^4} = \frac{MN \cdot Mm}{(Nn)^4} \tag{0.0.5}$$

a qual, de acordo com a linguagem moderna, não é nada mais do que o bem conhecido primeiro integral da equação diferencial de Euler para o problema variacional em causa.

Pois, se designarmos

$$g\hat{G}h = S_0\,,\ \ \cot S_0 = q_0\,,\ \ BG = y_0\,,\ \ n\hat{N}_0 = S\,,\ \ \cot S = q\,,\ \ MN = y\,,$$

e expressarmos a distância Bb*,* Gg*,* Mm*,* Nn *em termos de* $hg = on$*, então a equação* (0.0.5) *torna-se*

$$\frac{yq}{(1+q^2)^2} = \frac{y_0 q_0}{(1+q_0^2)^2} \tag{0.0.6}$$

ou

$$\frac{yq}{(1+q^2)^2} = constante \tag{0.0.7}$$

e isto é, de facto, o primeiro integral da equação diferencial de Euler[5] *para o nosso problema,*

$$\int_{y_0}^{y_1} \frac{y}{1+q^2} dy \to min\,.^{6} \tag{0.0.8}$$

Mas Newton avança um passo importante determinando o declive da curva no ponto G *e consequentemente a constante de integração em* (0.0.7)*.*

Pois na notação referida acima, ele deu o seguinte teorema: para obter o tronco de um cone com o raio da base dado, OC*, e de altura* OD *dada, o qual sofre resistência mínima na direcção do seu eixo* OD*, bissectando a altura* OD *em* Q*, e tal que* $QS = QC$*, então* S *é o vértice do tronco do cone pretendido.*

[5] Também designada por lei de conservação de Newton, cf. (1.5.4).

[6] No Capítulo 1 chegamos à mesma expressão, cf. (1.4.5).

Quando OD se torna infinitamente pequeno, o ângulo SCO aproxima-se do valor 45^o. A partir disto Newton conclui, o que aparenta ser auto-evidente na concepção de uma curva como um polígono com um número infinito de lados infinitamente pequenos, que para o sólido de revolução de resistência mínima, a tangente no ponto G faz com o eixo BC um ângulo de 45^o: $\phi_0 = 45^o$. A equação (0.0.6) *torna-se então*[7]

$$\frac{yq}{(1+q^2)^2} = \frac{y_0}{4}\,. \tag{0.0.9}$$

Mas este é o teorema no Principia de Newton:

$$\frac{MN}{GB} = \frac{(GR)^3}{4BR\cdot(GB)^2} \tag{0.0.10}$$

(onde GR é paralelo à tangente à curva DG, em N), traduzindo da forma geométrica para a forma analítica.

Bolza é o primeiro a mostrar como o problema de Newton pode ser interpretado de acordo com a teoria do cálculo das variações.

Até ao nascimento do controlo óptimo, o problema de Newton era considerado um problema do cálculo das variações. Mais, era considerado *"o primeiro problema do tipo que actualmente são resolvidos pelo cálculo das variações"* (Florian Cajori, [27, p. 657]). O controlo óptimo nasceu nos anos '50 do século vinte como uma generalização do cálculo das variações.[8] Vladimir M. Tikhomirov, em [40, p. 67] afirma: *"O primeiro problema do controlo óptimo foi, sem dúvida, o problema aerodinâmico de Newton."* Esta é também a tese da presente dissertação: correctamente, o problema de Newton deve ser colocado como um problema do controlo óptimo.[9]

Ao longo deste trabalho iremos dedicar a nossa atenção exclusivamente ao problema de Newton de resistência mínima é à sua relação com as teorias do cálculo das variações e controlo óptimo.

O primeiro capítulo é dedicado à formulação do problema de Newton de resistência mínima no que diz respeito à determinação da funcional integral que traduz a resistência de um sólido nas condições impostas por Newton e a qual pretendemos minimizar.

No segundo capítulo formulamos o problema de Newton de resistência mínima como um problema do cálculo das variações e, após a aplicação das condições necessárias clássicas de optimalidade, concluímos que esta formulação é incorrecta e não permite encontrar a solução do problema. Desta feita, concluiremos que o problema de Newton de resistência mínima é um problema da teoria do controlo óptimo.

[7] Cf. Capítulo 1, §1.6, (1.6.1) e Capítulo 3, §3.5, (3.5.4).
[8] Cf. Capítulo 3, §3.2.
[9] Cf. Capítulo 2, §2.5.5 e §2.6; Capítulo 3, §3.5.

Finalmente, no terceiro capítulo, o problema de Newton de resistência mínima é formulado de acordo com a teoria do controlo óptimo e, através da aplicação do Princípio do Máximo de Pontryagin, determinamos a solução para o problema de Newton indicada no *Principia Mathematica*.

Para melhor enquadramento do trabalho, no segundo e terceiro capítulos é feita uma breve resenha histórica do cálculo das variações e do controlo óptimo, respectivamente, e são dados os conceitos e resultados fundamentais de cada uma das teorias, os quais são aplicados, adequadamente, ao problema de Newton de resistência mínima.

Cálculos auxiliares, realizados no sistema de computação algébrica Maple, são apresentados em Apêndice.

Capítulo 1

Formulação do Problema de Newton de Resistência Mínima

1.1 Introdução

Ao longo deste capítulo dedicaremos o nosso estudo à determinação da funcional integral que traduz a resistência do sólido que satisfaz as condições enunciadas por Newton no seu *Scholium*, onde formulou e solucionou o designado *problema de Newton de resistência mínima* ou *problema aerodinâmico de Newton.*

No *Scholium* da Proposição XXXIV, do segundo volume do *Principia Mathematica*, dedicado ao problema do sólido de resistência mínima, Newton começou por considerar o tronco de um cone e estabeleceu, geometricamente, as condições que o sólido com esta forma deveria respeitar de modo a que quando em movimento com velocidade constante num meio raro a sua resistência fosse mínima. Seguidamente, Newton generalizou este resultado enunciando e resolvendo, geometricamente, o problema de resistência mínima para qualquer sólido de revolução.

Neste *Scholium*, Newton proferiu a seguinte frase.

Se considerarmos uma curva, $DNFG$,(figura 1.1) tal que, por qualquer ponto da mesma, seja ele o ponto N, a recta NM, perpendicular ao eixo AB, o intersecta e se desenharmos a partir de um dado ponto G uma recta GR paralela a uma recta tangente à curva $DNFG$ no ponto N, intersectando o eixo em R, então $\overline{MN}$ está para $\overline{GR}$ assim como $\overline{GR}^3$ está para $4\overline{BR}\cdot\overline{GB}^2$. O sólido descrito pela rotação desta curva em torno do seu eixo AB, movendo-se no meio raro anteriormente mencionado de A até B, será menos resistente do que qualquer outro sólido circular qualquer que seja, descrito com o mesmo comprimento e largura.

[27, pp. 333-334]

Aquando da construção de cascos de navios, torpedos, ou foguetões, um dos objectivos principais é dar-lhes uma forma que minimize a resistência que encontrarão no seu movimento

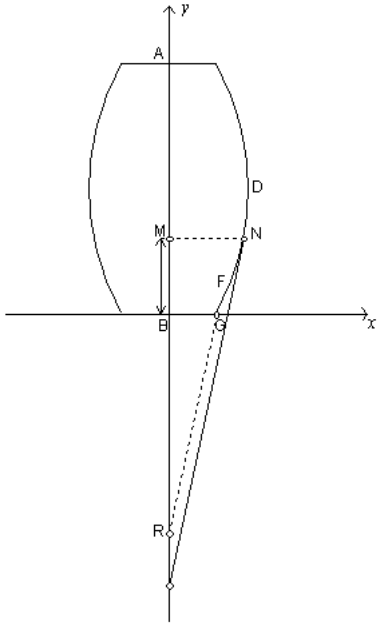


Figura 1.1: Sólido de Newton

em determinado meio.

Segundo as palavras de Newton, *"podemos comparar figuras entre si pela sua resistência; e é possível encontrar aquelas que melhor se adaptam a prolongar o seu movimento em meios resistentes"* [27, pp. 333-334].

Quando imaginamos a forma de um torpedo ou de um foguetão, vem-nos à ideia que as suas "secções de corte" têm de ser circulares, isto é, estes devem ter a forma de um *sólido de revolução*. Surge então uma questão pertinente: "Qual sólido de revolução?", "Uma esfera, um cone, ou ainda uma outra forma circular?". Tais questões não podem ser respondidas de maneira intuitiva, sem cálculos, sem a resolução de um problema de maximização ou minimização. Newton propôs um problema deste tipo e deu a sua solução na frase transcrita na página 9.

Podemos enunciar o problema de Newton de resistência mínima do seguinte modo.

Problema 1.1.1. Determinar a forma do sólido de revolução, de comprimento e largura fixos, que é sujeito a uma resistência mínima quando se move num meio raro.

Todos os conceitos, usados no enunciado do problema de Newton, merecem uma descrição detalhada e elucidativa relativamente às condições em que Newton o colocou. Nomeadamente, os conceitos de *comprimento*, *largura*, *movimento*, *simetria* e *meio raro*.

Debrucemo-nos na análise destes conceitos. Newton assume que o sólido de revolução é simétrico em relação ao plano que passa pelo ponto médio do eixo de rotação e que é perpendicular ao mesmo, deste modo, torna-se suficiente considerar apenas metade do sólido

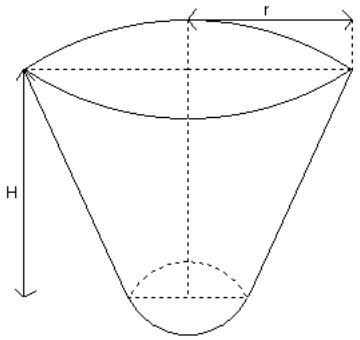


Figura 1.2: Tronco do cone

(o que, aliás, iremos fazer). O comprimento do sólido é o comprimento medido ao longo do seu eixo de rotação e a sua largura é o raio da sua secção central.

Em relação ao movimento, segundo Newton, o corpo move-se com velocidade constante v.

Finalmente, em relação ao meio onde o sólido se move, Newton designou-o por *meio raro* e caracterizou-o do seguinte modo: as partículas do meio são todas iguais, com massa fixa, estão igualmente espaçadas e não interagem umas com as outras. As partículas do meio estão imóveis e as colisões com o corpo são perfeitamente elásticas, ou seja, quando uma das partículas colide com o corpo em movimento, a velocidade com que ela colide é igual à velocidade com que ela é reflectida e o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

Formulado por palavras o problema, estamos em condições de iniciar o nosso estudo e determinar a funcional integral que nos irá conduzir à curva que quando em rotação em torno do seu eixo de simetria gera o sólido de resistência mínima no meio raro de Newton.

1.2 Problema do tronco do cone

Nesta secção iremos adoptar o raciocínio de Newton, isto é, em primeiro lugar determinaremos a função que minimiza um problema de carácter mais simples - o *problema do tronco do cone*.

Podemos enunciar o problema do tronco do cone do seguinte modo.

Problema 1.2.1. Determinar as dimensões do tronco de um cone sujeito a uma resistência mínima, quando este se move num meio raro, dados o raio da base e altura.

Para resolver o Problema 1.2.1 é necessário determinar a resistência oferecida pelo tronco de um cone em movimento num meio raro.

Seja H a altura do tronco do cone e r o raio da sua base superior (figura 1.2).

Newton escreveu, no início da demonstração da Proposição XXXIV que antecede o *Scholium*, onde propôs, e solucionou, o problema de resistência mínima o seguinte: *"como a acção do meio sobre o corpo é a mesma (pelo Corolário V das Leis) quer o corpo se mova num meio*

imóvel, quer as partículas do meio se desloquem e choquem com a mesma velocidade contra o corpo imóvel, vamos considerar que o corpo está imóvel" [27, p. 331].

Tal como Newton, vamos considerar que o tronco do cone está imóvel e que as partículas do meio se deslocam na direcção de rectas paralelas ao eixo de rotação e colidem contra o corpo no sentido "de baixo para cima" com velocidade constante v.

Deste modo, as partes da superfície do tronco do cone que são sujeitas a colisões são a base inferior e o lado.

Vamos, em primeiro lugar, determinar a resistência a que a base inferior está sujeita.

Seja x o raio da base inferior do tronco do cone, v a velocidade de movimento das partículas, ρ a densidade do meio e m a massa de cada partícula.

As partículas que chocam com a base inferior durante uma unidade de tempo encontram-se, inicialmente, num cilindro cuja base coincide com a base inferior do cone e cuja altura é v. O volume V_0 deste cilindro é $\pi x^2 v$.

Assim, o número de partículas que chocam com a base inferior do tronco do cone durante uma unidade de tempo é

$$N_0 = \frac{\rho}{m} V_0 = \frac{\rho}{m} \pi x^2 v \,.$$

Imediatamente após a colisão com a base inferior, cada partícula inverte a sua velocidade, tal que o seu momento[1] aumenta por $-2mv$, uma vez que o momento inicial é mv e o final é $-mv$ ($mv + (-2mv) = -mv$).

Pela terceira lei de Newton [33], o ganho total do momento da base inferior do tronco do cone, causado por N_0 partículas, é

$$N_0 \cdot 2mv = 2\pi\rho x^2 v^2 \,. \tag{1.2.1}$$

Considerações análogas podem aplicar-se ao lado do tronco do cone. As partículas que colidem com o lado do tronco do cone estão contidas num cilindro oco cujo volume V_1 é $\pi(r^2 - x^2)v$ (figura 1.3). Este cilindro oco corresponde à intersecção do exterior do cilindro de raio x e o interior do cilindro de raio r ambos com altura v.

O número de partículas que colidem com o lado do tronco do cone é

$$N_1 = \frac{\rho}{m} V_1 = \frac{\rho}{m} \pi (r^2 - x^2) v \,.$$

Seja v_1 a velocidade de cada partícula antes da colisão e v_2 a velocidade das mesmas após a colisão. É importante realçar que $\|v_2\| = \|v_1\| = v$, pois a colisão das partículas com o tronco do cone, em particular com o lado do tronco do cone, é perfeitamente elástica, isto é,

[1] O momento, também designado por momento cinético, ou quantidade de movimento, é a medida da inércia de um corpo [33]. Newton definiu o momento de um corpo como sendo proporcional à sua velocidade, sendo a constante de proporcionalidade (a propriedade que resiste à mudança) a sua massa ($p = mv$).

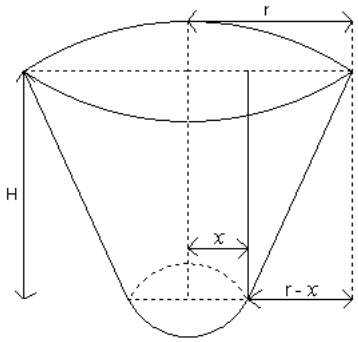


Figura 1.3: Tronco do cone

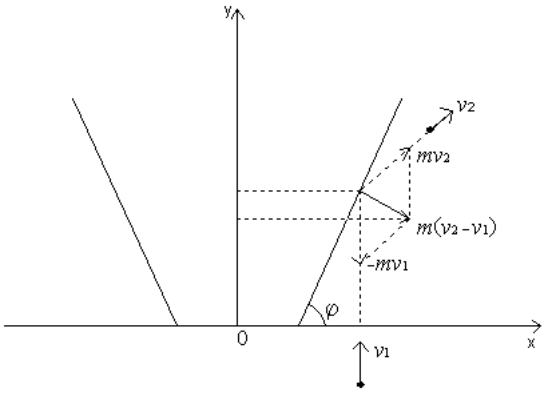


Figura 1.4: Choque das partículas com o lado do tronco do cone

a velocidade de cada partícula antes e após a colisão coincide em valor absoluto, no entanto a direcção é distinta.

Verificamos que o aumento do momento de cada partícula que colide com o lado do tronco do cone é $m(v_2 - v_1)$ (o momento inicial é mv_1 e o final é mv_2).

O vector $m(v_2 - v_1)$ tem de ser projectado no eixo dos yy (a projecção no eixo dos xx é irrelevante porque as projecções em cada um dos semi-eixos anulam-se em virtude da simetria), figura 1.4.

Proposição 1.2.2. *A projecção no eixo dos yy do aumento do momento de cada partícula que colide com o lado do tronco do cone é* $-2mvcos^2\varphi$*, onde* φ *é o ângulo entre a geratriz do tronco do cone e o plano da sua base inferior.*

Demonstração. Pretendemos determinar a projecção do vector $m(v_2 - v_1)$ no eixo dos yy. O vector $m(v_2 - v_1)$ é a soma do vector mv_2 com o vector $-mv_1$.

Pela propriedade da projecção de vectores [33, p. 74], a projecção da soma de vectores é igual à soma da projecção de cada um dos vectores somados.

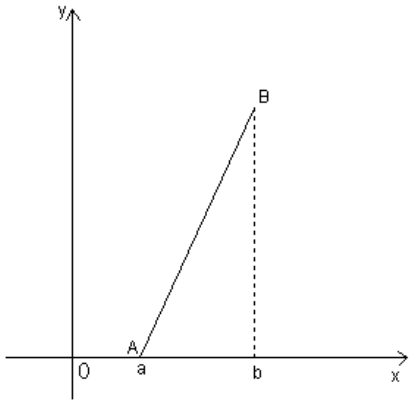


Figura 1.5: Tronco do cone (arbitrário)

Denotemos por a_y a projecção do vector a no eixo dos yy e por φ o ângulo formado pela geratriz do tronco do cone com o plano da sua base inferior.

Temos, então,

$$\begin{aligned}(m(v_2 - v_1))_y &= (mv_2)_y + (-mv_1)_y \\ &= \|mv_2\| \cos(\pi - 2\varphi) + \|-mv_1\| \cos(\pi) \\ &= -mvcos(2\varphi) - mv \\ &= -mv(cos^2\varphi - sen^2\varphi + cos^2\varphi + sen^2\varphi) \\ &= -2mvcos^2\varphi\,.\end{aligned}$$

□

Assim, o aumento total do momento provocado pelas partículas que colidem com o lado do tronco é

$$\begin{aligned}N_1 \cdot 2mvcos^2\varphi &= \frac{\rho}{m}\pi(r^2 - x^2)v \cdot 2mvcos^2\varphi \\ &= 2\pi\rho(r^2 - x^2)v^2cos^2\varphi\,.\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Podemos generalizar o resultado (1.2.2) para o tronco de um cone arbitrário.

Proposição 1.2.3. *Consideremos um referencial cartesiano ortonormado xOy. O lado do tronco de um cone - resultante da rotação do segmento $[AB]$, cujos extremos têm abcissas a e b, figura 1.5, em torno do eixo dos yy, e que faz um ângulo φ com o eixo dos xx, está sujeito a uma força de resistência dada por*

$$R = K(b^2 - a^2)cos^2\varphi\,,\ K = 2\pi\rho v^2\,. \tag{1.2.3}$$

Demonstração. Basta considerar em (1.2.2) $x = a$ e $r = b$. □

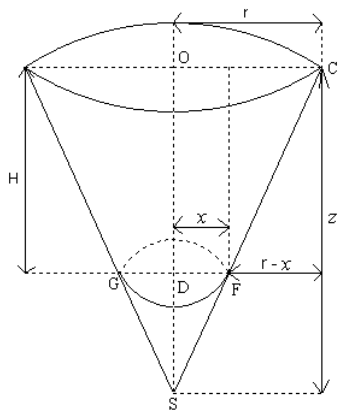


Figura 1.6: Tronco do cone (interpretação alternativa)

Relativamente ao tronco do cone da figura 1.3, a resistência total oferecida pelo tronco do cone, denotada por R, é dada pela soma da resistência oferecida pela base inferior, (1.2.1), com a resistência oferecida pelo lado do tronco do cone, (1.2.2), isto é,

$$R(x) = K\left[x^2 + (r^2 - x^2)cos^2\varphi\right]\ ,\ K = 2\pi\rho v^2\,.$$

De modo a simplificar a formulação matemática do nosso problema, podemos exprimir $cos\varphi$ em função de x, ou seja, $cos\varphi = \frac{r-x}{\sqrt{(r-x)^2+H^2}}$ e ignorar a constante K uma vez que esta não produz nenhum efeito na determinação dos extremos.

Formalizamos o problema do tronco do cone do seguinte modo.

Problema 1.2.4. Determinar o mínimo da função

$$f(x) = x^2 + (r^2 - x^2)\frac{(r-x)^2}{(r-x)^2 + H^2}\,, \tag{1.2.4}$$

para $0 < x < r$.

Novamente, vamos seguir os passos de Newton e considerar uma descrição alternativa para o Problema 1.2.4.

Consideremos a figura 1.6, que contém o tronco do cone da figura 1.3. Prolonguemos o segmento $[CF]$ até ao ponto S, onde S é o ponto de intersecção deste segmento com a recta OD e seja o comprimento do segmento $[OS]$ o valor de uma nova variável z.

Os triângulos $\Delta[SOC]$ e $\Delta[SDF]$ são semelhantes,[2] donde obtemos as seguintes igualdades

$$\frac{x}{r} = \frac{z-H}{z} \Leftrightarrow x = \frac{r(z-H)}{z}$$

e,

$$\frac{x}{r} = \frac{z-H}{z} \Leftrightarrow r(z-H) = zx \Leftrightarrow rz - rH = zx \Leftrightarrow z(r-x) = rH \Leftrightarrow r - x = \frac{rH}{z}\,.$$

[2]Pelo critério (*Ângulo, Ângulo*) da semelhança de triângulos [1, p. 52].

Substituindo estas expressões para x e $r-x$ em (1.2.4) obtemos uma nova expressão para a força de resistência do tronco do cone (omitindo a constante K) em termos da nova variável z,

$$g(z) = r^2 \frac{(z-H)^2 + r^2}{z^2 + r^2}\,, \tag{1.2.5}$$

com $z > H$.

Vejamos, em detalhe, como chegar à expressão para a função g, (1.2.5).

Fazendo as substituições mencionadas em (1.2.4), vem

$$\begin{aligned}
x^2 + (r^2 - x^2)\frac{(r-x)^2}{(r-x)^2 + H^2} &= \left(\frac{r(z-H)}{z}\right)^2 + \left(r^2 - \left(\frac{r(z-H)}{z}\right)^2\right) \frac{\left(\frac{rH}{z}\right)^2}{\left(\frac{rH}{z}\right)^2 + H^2} \\
&= \frac{r^2(z-H)^2}{z^2} + \left(r^2 - \frac{r^2(z-H)^2}{z^2}\right) \frac{\frac{(rH)^2}{z^2}}{\frac{(rH)^2}{z^2} + \frac{(Hz)^2}{z^2}} \\
&= \frac{r^2(z-H)^2}{z^2} + \left(r^2 - \frac{r^2(z-H)^2}{z^2}\right) \frac{r^2H^2}{r^2H^2 + H^2z^2} \\
&= \frac{r^2(z-H)^2}{z^2} + \left(r^2 - \frac{r^2(z-H)^2}{z^2}\right) \frac{r^2}{r^2 + z^2} \\
&= r^2 \left(\frac{(z-H)^2(r^2+z^2)}{z^2(r^2+z^2)} + \frac{r^2z^2}{z^2(r^2+z^2)} - \frac{r^2(z-H)^2}{z^2(r^2+z^2)}\right) \\
&= r^2 \left(\frac{(z-H)^2r^2 + (z-H)^2z^2 + r^2z^2 - r^2(z-H)^2}{z^2(r^2+z^2)}\right) \\
&= r^2 \left(\frac{(z-H)^2z^2 + r^2z^2}{z^2(r^2+z^2)}\right) \\
&= r^2 \frac{(z-H)^2 + r^2}{z^2 + r^2}\,.
\end{aligned}$$

Obtivemos a seguinte formulação alternativa ao problema do tronco do cone (podemos ignorar a constante multiplicativa r^2).

Problema 1.2.5 *(Formulação alternativa ao Problema 1.2.4).* Determinar o mínimo da função

$$h(z) = \frac{(z-H)^2 + r^2}{z^2 + r^2}\,, \tag{1.2.6}$$

onde $z > H$.

Vamos resolver o Problema 1.2.5 através do cálculo diferencial. A nossa resposta será a mesma que a dada por Newton.

Antes de resolvermos o Problema 1.2.5 pelo cálculo diferencial, recordemos o teorema [23, p. 223] (condição suficiente de optimalidade).

Teorema 1.2.6. *Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, n vezes derivável no ponto $a \in I$. Se $f'(a) = 0$, a chama-se um* ponto crítico *de f. Suponhamos que $f'(a) = f''(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0$, mas $f^{(n)} \neq 0$. Tem-se então:*

1.º) se n for par, então a será um ponto de máximo local se $f^{(n)}(a) < 0$ *ou um ponto de mínimo local se* $f^{(n)}(a) > 0$.

2.º) se n for ímpar, o ponto a não será nem ponto de máximo nem de mínimo.

Demonstração. Vide [23, pp. 223-224]. □

Passemos, então, à resolução do Problema 1.2.5.

A primeira derivada de h, h', tem a seguinte expressão[3]

$$h'(z) = \frac{2H(z^2 - r^2 - zH)}{(z^2 + r^2)^2}\,.$$

Calculemos os pontos críticos de h.

$$h'(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{2H(z^2 - r^2 - zH)}{(z^2 + r^2)^2} = 0 \Leftrightarrow 2H(z^2 - r^2 - zH) = 0 \wedge (z^2 + r^2)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 - Hz - r^2 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{H \pm \sqrt{H^2 + 4r^2}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{H}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 + r^2}$$

A igualdade $z = \frac{H}{2} - \sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 + r^2}$ nunca se verifica pois, nesse caso, z seria negativo e por hipótese temos $z > H > 0$. Logo, $\hat{z} = \frac{H}{2} + \sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 + r^2}$ é o único ponto crítico de h.

Calculando,[4] $h''(z)$, temos:

$$h''(z) = \frac{2H(-2z^3 + 6zr^2 + 3Hz^2 - Hr^2)}{(z^2 + r^2)^3}\,.$$

Analisemos o sinal de $h''(\hat{z})$. Como

$$h''\left(\frac{H}{2} + \sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 + r^2}\right) = \frac{8H\left(H^3 + H^2\sqrt{H^2 + 4r^2} + 4r^2\sqrt{H^2 + 4r^2} + 4Hr^2\right)}{\left(H^2 + H\sqrt{H^2 + 4r^2} + 4r^2\right)^3} > 0\,, \tag{1.2.7}$$

então, pelo Teorema 1.2.6

$$\hat{z} = \frac{H}{2} + \sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 + r^2} \tag{1.2.8}$$

é minimizante de h.

O que se segue é a resposta de Newton ao problema do tronco do cone.

Se sobre uma base circular CKBL[5] *(figura 1.7) de centro O, com raio OC, e altura OD, construirmos um tronco de um cone CBGF - que deverá oferecer menor resistência que*

[3] Cf. Apêndice A.0.1, página 67.

[4] Cf. Apêndice A.0.1, página 67.

[5] Para evitar possíveis interpretações erróneas, considerámos, respectivamente, as letras K e L em vez de E e H (a notação de Newton), uma vez que H designa a altura do tronco do cone.

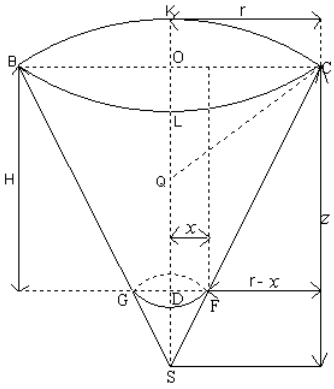


Figura 1.7: Tronco de cone (Newton)

qualquer outro tronco de cone construído, com a mesma base e altura, movendo-se para D na direcção do seu eixo de rotação - bissectando a altura OD em Q, tal que $\overline{QS}$ seja igual a $\overline{QC}$, então S será o vértice do cone cujo tronco de cone é procurado.

[27, p. 333]

Facilmente verificamos que a resposta geométrica de Newton coincide com a resposta algébrica dada pela equação (1.2.8). Segundo Newton $\overline{QS} = \overline{QC}$, e pelo Teorema de Pitágoras temos $\overline{QC}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OQ}^2$, donde obtemos $\overline{QC} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{H}{2}\right)^2}$. Mas, observando a figura 1.7 verificamos que $z = \overline{OQ} + \overline{QS} = \overline{OQ} + \overline{QC} = \frac{H}{2} + \sqrt{r^2 + \left(\frac{H}{2}\right)^2}$, que é exactamente o valor dado por (1.2.8).

Observamos que o sólido de revolução de resistência mínima que encontrámos não é pontiagudo, como seria talvez de esperar usando a intuição (cf. Comentário 1.6.2, pág. 30), mas de facto é simplesmente o tronco de um cone.

1.3 Problema de Newton para uma linha poligonal de um vértice

Passemos ao próximo passo para atingirmos a expressão da resistência de um sólido nas condições do problema de Newton.

Propomos resolver um caso especial deste problema para linhas poligonais com um vértice em que o vértice se encontra sobre a recta $x = \frac{r}{2}$.

Consideremos no plano um referencial cartesiano ortonormado xOy em que o eixo das abcissas coincide com a recta DF e o eixo das ordenadas coincide com a recta OD do tronco do cone representado na figura 1.7.

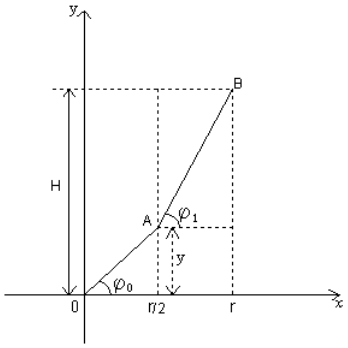


Figura 1.8: Linha poligonal de um vértice

Seja OAB uma linha poligonal em que $O = (0,0)$, $B = (r,H)$ e A é o seu vértice e pertence à recta $x = \frac{r}{2}$ (figura 1.8).

O ponto principal deste problema é determinar a ordenada do vértice A tal que a superfície obtida pela revolução da linha poligonal OAB em torno do eixo dos yy é sujeita a resistência mínima no meio raro de Newton.

Sejam, ainda, φ_0 e φ_1 os ângulos que os segmentos $[OA]$ e $[AB]$ fazem com o eixo dos xx, respectivamente. Denotemos por y a ordenada do ponto A.

Usando a equação (1.2.3), §1.2, concluímos que o sólido de revolução gerado por uma linha poligonal com um vértice OAB está sujeito a uma resistência traduzida pela força

$$R = K\left[\left(\frac{r}{2}\right)^2 cos^2\varphi_0 + 3\left(\frac{r}{2}\right)^2 cos^2\varphi_1\right]\ ,\ K = 2\pi\rho v^2\,, \tag{1.3.1}$$

onde

$$\cos\varphi_0 = \frac{r}{2\sqrt{y^2+(\frac{r}{2})^2}} \quad \text{e} \quad \cos\varphi_1 = \frac{r}{2\sqrt{(H-y)^2+(\frac{r}{2})^2}}\,.$$

Uma vez que, a partir da equação (1.2.3) obtemos,

$$\begin{aligned} R &= K\left[\left(\left(\frac{r}{2}\right)^2 - 0^2\right)\cos^2\varphi_0 + \left(r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2\right)\cos^2\varphi_1\right] \\ &= K\left[\left(\frac{r}{2}\right)^2\cos^2\varphi_0 + 3\left(\frac{r}{2}\right)^2\cos^2\varphi_1\right]\,. \end{aligned}$$

Da definição de co-seno de um ângulo temos as seguintes igualdades

$$\cos\varphi_0 = \frac{\frac{r}{2}}{\sqrt{y^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2}} = \frac{r}{2\sqrt{y^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2}}\,,\ \cos\varphi_1 = \frac{\frac{r}{2}}{\sqrt{(H-y)^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2}} = \frac{r}{2\sqrt{(H-y)^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2}}\,.$$

Substituindo $\cos\varphi_0$ e $\cos\varphi_1$, pela sua expressão em função de r e y na equação (1.3.1) e

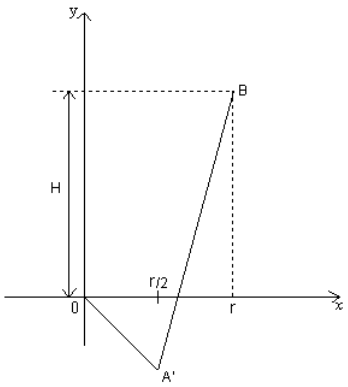


Figura 1.9: Linha poligonal de um vértice: y negativo

simplificando de modo conveniente, temos

$$\begin{aligned} R &= K\left[\left(\frac{r}{2}\right)^2 cos^2\varphi_0 + 3\left(\frac{r}{2}\right)^2 cos^2\varphi_1\right] \\ &= K\left[\left(\frac{r}{2}\right)^2 \frac{r^2}{4\left(y^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2\right)} + 3\left(\frac{r}{2}\right)^2 \frac{r^2}{4\left((H-y)^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2\right)}\right] \\ &= K\frac{r^4}{16}\left[\frac{1}{y^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2} + \frac{3}{(H-y)^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2}\right]. \end{aligned}$$

Negligenciando a constante multiplicativa $\frac{Kr^4}{16}$ e considerando $\frac{r}{2} = a$, concluímos que a função a minimizar é definida por

$$g_1(y) = \frac{1}{a^2+y^2} + \frac{3}{a^2+(H-y)^2}\,.$$

Observando a função g_1, verificamos: (i) $g_1(y) > 0\,, \forall y$; (ii) $\lim\limits_{|y|\to+\infty} g_1(y) = 0$. Isto significa que o ínfimo de g_1 é zero, mas este valor nunca é atingido. Logo, o caso em que $|y| \to +\infty$ não deve ser considerado.

De facto, y terá que pertencer, obrigatoriamente, ao intervalo $[0, H]$.

Vejamos em pormenor a razão pela qual y tem de tomar valores no intervalo $[0, H]$. Se $y < 0$, então obtemos uma uma linha poligonal $OA'B$, como mostra a figura 1.9. Esta linha poligonal quando em rotação em torno do eixo dos yy dá origem a um sólido de revolução com uma cratera. Assim sendo, as partículas do meio raro que colidem com a superfície da cratera do sólido seriam reflectidas várias vezes (figura 1.10). Newton assumiu que as partículas colidem com o corpo uma única vez ("single-impact assumption").[6] Por razões análogas, valores de y maiores que H devem ser excluídos quando assumimos a restrição de apenas uma colisão. O pressuposto implícito por Newton é a *monotonicidade da curva de*

[6] O caso de múltiplas colisões foi apenas estudado em 2003 por Alexander Yu. Plakhov [28].

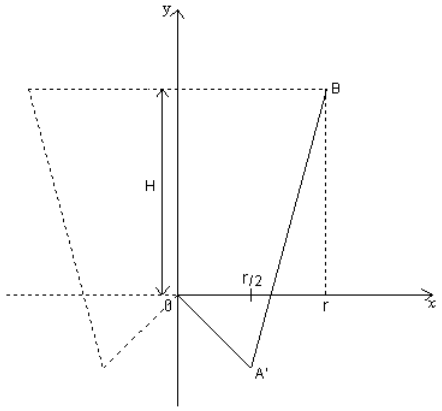


Figura 1.10: Sólido de revolução com "cratera"

revolução.[7]

Isto leva à seguinte formalização do problema para uma linha poligonal de um vértice.

Problema 1.3.1. Determinar o mínimo da função

$$g_1(y) = \frac{1}{a^2 + y^2} + \frac{3}{a^2 + (H - y)^2}\,, \tag{1.3.2}$$

sujeita à condição $0 \leq y \leq H$.

Proposição 1.3.2. *O mínimo da função g_1 é dado pelas seguintes condições:*

(a) existe $\delta > 0$, tal que para $0 < H \leq \delta$ o mínimo é atingido em 0;

(b) para $H > \delta$ o mínimo é alcançado num ponto interior do intervalo $[0, H]$.

Demonstração. A existência de mínimo para a função (1.3.2), com $0 \leq y \leq H$, no intervalo $[0, H]$ é garantida pelo Teorema de Weierstrass [23, p. 187].

Vejamos se o mínimo é atingido nos extremos do intervalo $[0, H]$, isto é, quando $y = 0$ ou $y = H$. Ora, $g_1(0) = \frac{1}{a^2} + \frac{3}{a^2+H^2}$ e $g_1(H) = \frac{1}{a^2+H^2} + \frac{3}{a^2}$.

Efectuando a diferença[8] $g_1(0) - g_1(H)$ obtemos

$$g_1(0) - g_1(H) = -\frac{2H^2}{a^2(a^2 + H^2)}\,.$$

Como as constantes H^2 e a^2 são sempre positivas, então o quociente $\frac{2H^2}{a^2(a^2+H^2)}$ também é sempre maior que zero e $g_1(0) - g_1(H) < 0$. Concluímos que $y = H$ não é ponto de mínimo para a função g_1, isto é, o mínimo de g_1 é atingido para $y = 0$ ou para um valor no interior do intervalo $[0, H]$.

[7] Esta exigência física foi formulada explicitamente, pela primeira vez, por Legendre em 1788 [3], cf. §2.5.5.

[8] Cf. Apêndice A.0.2, pág. 68.

Seja $\delta > 0$ e $0 < H \leq \delta$. Consideremos o caso em que δ é um valor infinitamente pequeno. Como, por hipótese, $0 \leq y \leq H$ então y e $(H - y)$ são também infinitamente pequenos. O mínimo de g_1 em $]0, H]$, $H \leq \delta$, é atingido quando $y = 0$ como afirmamos na alínea (a): $g_1(y) = \frac{1}{a^2+y^2} + \frac{3}{a^2+(H-y)^2} > \frac{1}{a^2} + \frac{3}{a^2+H^2} = g_1(0)$.

Resta-nos provar que quando $H > \delta$ o mínimo de g_1 é alcançado para um valor interior ao intervalo $[0, H]$. Para provarmos este ponto basta mostramos que para $H > \delta$ a função g_1 atinge valores inferiores (basta um) a $g_1(0)$.

Consideremos um valor real positivo, ϵ, e calculemos a diferença entre a imagem de g_1 em ϵ, isto é, num determinado valor maior que zero, e a imagem de g_1 em zero. Obtemos a seguinte expressão[9]

$$g_1(\epsilon) - g_1(0) = \frac{\epsilon(-4a^4\epsilon - \epsilon H^4 + 2\epsilon^2 H^3 - 4\epsilon^3 a^2 - \epsilon^3 H^2 + 6Ha^4 - 2a^2\epsilon H^2 + 8\epsilon^2 Ha^2)}{(a^2+\epsilon^2)\,(a^2+(H-\epsilon)^2)\,a^2(a^2+H^2)}\,. \tag{1.3.3}$$

Queremos mostrar que $g_1(\epsilon) - g_1(0) < 0$. O denominador de $g_1(\epsilon) - g_1(0)$ é claramente positivo. Quanto ao numerador, observando o termo de maior grau em H $(-\epsilon H^4)$ observamos que é negativo, enquanto os termos em H de potências inferiores a 4 estão multiplicados por potências de ϵ de ordem superior a um. Para valores de H suficientemente grandes e de ϵ suficientemente pequenos o termo $-\epsilon H^4$ é dominante e o numerador é negativo. Assim, para $H > \delta$ o minimizante é um valor do interior do intervalo $[0, H]$ e provámos a alínea (b) da proposição.

□

O resultado dado pela Proposição 1.3.2 é, exactamente, a solução para o Problema 1.3.1.

Derivando a função (1.3.2), igualando-a a zero e utilizando de forma adequada as igualdades

$$\tan\varphi_0 = \frac{y}{\frac{r}{2}}\,, \qquad \tan\varphi_1 = \frac{H-y}{\frac{r}{2}}$$

alcançamos um resultado interessante.

Lema 1.3.3. Na situação (b) da Proposição 1.3.2 temos:

$$\tan\varphi_0 \cos^4\varphi_0 = 3\tan\varphi_1 \cos^4\varphi_1\,. \tag{1.3.4}$$

[9] cf. Apêndice A.0.2, pág. 68.

Demonstração. A igualdade (1.3.4) é obtida usando a condição necessária $g_1'(y) = 0$:

$$\begin{aligned}
(g_1(y))' &= -\frac{2y}{\left(a^2+y^2\right)^2} - \frac{3(-2H+2y)}{\left(a^2+(H-y)^2\right)^2} \\
&= \frac{-2\times 16y}{r^4}\frac{r^4}{16\left(a^2+y^2\right)^2} - \frac{3\times 16(-2H+2y)}{r^4}\frac{r^4}{16\left(a^2+(H-y)^2\right)^2} \\
&= \frac{-2y2^4\cos^4\varphi_0}{r^4} - \frac{3(-2H+2y)2^4\cos^4\varphi_1}{r^4} \\
&= \frac{-2^4\cos^4\varphi_0}{r^3}\frac{y}{\frac{r}{2}} + \frac{3(H-y)}{\frac{r}{2}}\frac{2^4\cos^4\varphi_1}{r^3} \\
&= \frac{-2^4\cos^4\varphi_0}{r^3}\tan\varphi_0 + 3\tan\varphi_1\frac{2^4\cos^4\varphi_1}{r^3}
\end{aligned}$$

$$(g_1(y))' = 0 \Leftrightarrow \frac{-2^4\cos^4\varphi_0}{r^3}\tan\varphi_0 = -3\tan\varphi_1\frac{2^4\cos^4\varphi_1}{r^3} \Leftrightarrow \tan\varphi_0\cos^4\varphi_0 = 3\tan\varphi_1\cos^4\varphi_1\,.$$

□

A igualdade (1.3.4) será usada nas próximas secções deste capítulo.

1.4 Problema de Newton para uma linha poligonal de n vértices

Passemos ao último passo intermédio na formulação da expressão para a resistência de um sólido sob as restrições do problema aerodinâmico de Newton.

Sejam l_1, l_2, ..., rectas verticais de equações, respectivamente,

$$x = \frac{1}{n}\,, \quad x = \frac{2}{n}\,, \ \ldots \quad \text{com } \ n \in \mathbb{N}$$

e para o caso em que $r \neq \frac{k}{n}$ para algum k, $k \in \mathbb{N}$, consideremos a recta vertical $x = r$ (figura 1.11).

Vamos considerar a totalidade de linhas poligonais de n vértices, monotonamente crescentes, com vértices nas rectas l_k, unindo $(0,0)$ a (r,H), e tentar provar que uma destas linhas, quando em rotação em torno do eixo dos yy, gera um sólido que oferece resistência mínima num meio raro.

Para uma linha admissível, façamos denotar por y_k a ordenada do vértice na linha l_k, e seja φ_k a notação para o ângulo entre o segmento que une os vértices das rectas l_k e l_{k+1} e o eixo dos xx. Mais ainda, consideremos, de modo a simplificar os cálculos, que $r = \frac{N}{n}$, $N \in \mathbb{N}$.

Pela fórmula (1.2.3), §1.2, o corpo gerado pela rotação da linha em torno do eixo dos yy

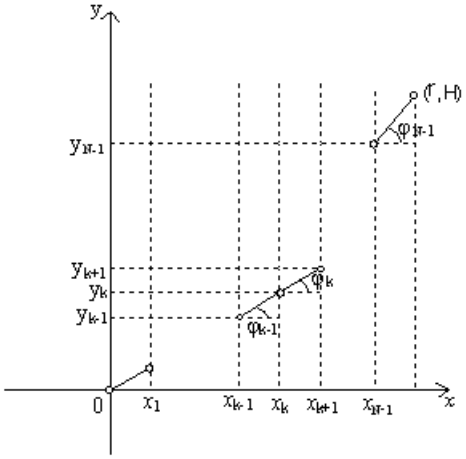


Figura 1.11: Linha poligonal de n vértices

é sujeito, num meio raro, a uma força de resistência

$$\begin{aligned} R &= K\left\{\frac{1}{n^2}cos^2\varphi_0+\left[\left(\frac{2}{n}\right)^2-\left(\frac{1}{n}\right)^2\right]cos^2\varphi_1+...+\left[\left(\frac{N}{n}\right)^2-\left(\frac{N-1}{n}\right)^2\right]cos^2\varphi_{N-1}\right\} \\ &= \frac{K}{n^2}\left[cos^2\varphi_0+3cos^2\varphi_1+...+(2N-1)cos^2\varphi_{N-1}\right], \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

com $K=2\pi\rho v^2$ e $\cos\varphi_k=\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+(y_{k+1}-y_k)^2}}$.

Efectuemos os cálculos em pormenor, para uma melhor compreensão do resultado alcançado em (1.4.1).

De facto, o resultado (1.4.1) é apenas a generalização do que obtivemos em (1.3.1), mas, neste caso, para uma linha poligonal de n vértices ($n\geq 1$). Vejamos, em pormenor, como efectuar esta generalização.

$$\begin{aligned} R &= K\left\{\frac{1}{n^2}cos^2\varphi_0+\left[\ \frac{2}{n}\ ^2-\frac{1}{n^2}\right]cos^2\varphi_1+\left[\ \frac{3}{n}\ ^2-\ \frac{2}{n}\ ^2\right]cos^2\varphi_2+...+\left[\ \frac{N}{n}\ ^2-\ \frac{N-1}{n}\ ^2\right]cos^2\varphi_{N-1}\right\} \\ &= K\left\{\frac{1}{n^2}cos^2\varphi_0+\ \frac{4}{n^2}-\frac{1}{n^2}\ \ cos^2\varphi_1+\ \frac{9}{n^2}-\frac{4}{n^2}\ \ cos^2\varphi_2+...+\ \frac{N^2}{n^2}-\frac{N^2-2N+1}{n^2}\ ^2cos^2\varphi_{N-1}\right\} \\ &= \frac{K}{n^2}\ \cos^2\varphi_0+3\cos^2\varphi_1+5\cos^2\varphi_2+...+(2N-1)\cos^2\varphi_{N-1}\ , \end{aligned}$$

em que, se considera $K=2\pi\rho v^2$ bem como as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \cos\varphi_0 &= \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{(\frac{1}{n})^2+y_1^2}}=\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+y_1^2}}, \\ \cos\varphi_1 &= \frac{\frac{2}{n}-\frac{1}{n}}{\sqrt{(\frac{2}{n}-\frac{1}{n})^2+(y_2-y_1)^2}}=\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+(y_2-y_1)^2}},..., \\ \cos\varphi_k &= \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+(y_{k+1}-y_k)^2}}. \end{aligned}$$

Notemos que quando $n = 1$ em (1.4.1) obtemos a expressão (1.3.1):

$$R = K\{\cos^2\varphi_0 + 3\cos^2\varphi_1\}\,, \;\; \text{com} \;\; K = 2\pi\rho v^2\,.$$

Deste modo, o problema de Newton para uma linha poligonal com n vértices consiste em minimizar a força R para todas as escolhas do $(N-1)$-uplo, $(y_1, ..., y_{N-1})$, para $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq ... \leq y_{N-1} \leq H$.

Para formularmos matematicamente este problema faremos uso da experiência adquirida na formulação do Problema 1.3.1.

Assumamos que o problema da linha poligonal com N-ligações tem uma solução, $(\hat{y}_1, ..., \hat{y}_{N-1})$, em que $(\hat{y}_1, ..., \hat{y}_{N-1})$ são as ordenadas dos vértices da linha poligonal de resistência mínima. Fixemos tudo excepto o k-ésimo vértice e escolhamos o seu valor de modo a minimizar o valor da resistência.

Isto é o mesmo que formular um problema variante do Problema 1.3.1 onde se pede que se determine o mínimo da função

$$\begin{aligned} g_k(y) &= \frac{1}{n^2}\left[(2k-1)cos^2\varphi_{k-1} + (2k+1)cos^2\varphi_k\right] \\ &= \frac{1}{n^4}\left[\frac{2k-1}{\frac{1}{n^2} + (y - \hat{y}_{k-1})^2} + \frac{2k+1}{\frac{1}{n^2} + (\hat{y}_{k+1} - y)^2}\right] \end{aligned}$$

para $\hat{y}_{k-1} \leq y \leq \hat{y}_{k+1}$.

Isto é, para obter $g_k(y)$ basta considerar em (1.3.2) que $\hat{y}_{k-1} \leq y \leq \hat{y}_{k+1}$. Onde y representa a ordenada do k-ésimo vértice - a ordenada do único vértice que não está fixo. Ou seja,

$$\begin{aligned} &\frac{K}{n^2}\left[(2k-1)cos^2\varphi_{k-1} + (2k+1)cos^2\varphi_k\right] = \\ &= \frac{K}{n^2}\left[(2k-1)\left(\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + (y_k - y_{k-1})^2}}\right)^2 + (2k+1)\left(\frac{1}{n}\right)^2\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + (y_{k+1} - y_k)^2}}\right)^2\right] \\ &= \frac{K}{n^4}\left[\frac{2k-1}{\frac{1}{n^2} + (y_k - y_{k-1})^2} + \frac{2k+1}{\frac{1}{n^2} + (y_{k+1} - y_k)^2}\right]. \end{aligned}$$

A função $g_k(y)$ é constituída pelo $(k-1)$-ésimo termo da soma (1.4.1) para a força R (novamente, omitimos a constante multiplicativa K no problema de minimização).

O problema de minimizar a função g_k é semelhante ao Problema 1.3.1. Segue-se, *mutatis mutandis*, as conclusões que obtivemos para o Problema 1.3.1.

Problema 1.4.1. Determinar o mínimo da função

$$g_k(y) = \frac{1}{n^4}\left[\frac{2k-1}{\frac{1}{n^2} + (y - \hat{y}_{k-1})^2} + \frac{2k+1}{\frac{1}{n^2} + (\hat{y}_{k+1} - y)^2}\right], \tag{1.4.2}$$

sujeita à condição $\hat{y}_{k-1} \leq y \leq \hat{y}_{k+1}$.

Proposição 1.4.2. *O mínimo da função g_k é dado pelas seguintes condições:*

(a) existe $\delta_k > 0$ tal que para $\hat{y}_{k+1} - \hat{y}_{k-1} \leq \delta_k$ o mínimo é atingido para $\hat{y}_k = \hat{y}_{k-1}$;

(b) para $\hat{y}_{k+1} - \hat{y}_{k-1} > \delta_k$ o mínimo é atingido num ponto interior do intervalo $[\hat{y}_{k-1}, \hat{y}_{k+1}]$ e temos a igualdade

$$\left(k - \frac{1}{2}\right) \tan\varphi_{k-1} \cos^4\varphi_{k-1} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \tan\varphi_k \cos^4\varphi_k \,. \tag{1.4.3}$$

Demonstração. A demonstração é uma generalização da demonstração da Proposição 1.3.2 e do Lema (1.3.3) da secção §1.3. Em particular a igualdade (1.4.3) é uma generalização de (1.3.4). □

Juntas, as alíneas (a) e (b) da proposição anterior implicam que a linha poligonal óptima segue durante um determinado período de tempo o eixo dos xx, $\hat{y}_1 = ... = \hat{y}_s = 0$ depois prossegue pela regra (1.4.3). A equação (1.4.3) significa que o valor de φ_{s+1} é obtido pela igualdade

$$\left(s - \frac{1}{2}\right) \tan\varphi_s \cos^4\varphi_s = \left(s + \frac{1}{2}\right) \tan\varphi_{s+1} \cos^4\varphi_{s+1} \,,$$

o valor de φ_{s+2} da igualdade

$$\left(s + \frac{1}{2}\right) \tan\varphi_{s+1} \cos^4\varphi_{s+1} = \left(s + \frac{3}{2}\right) \tan\varphi_{s+2} \cos^4\varphi_{s+2} \,,$$

e assim sucessivamente.

A força de resistência para uma linha poligonal com N-ligações pode ser escrita directamente em termos das coordenadas dos vértices da linha poligonal. Para este fim, tenhamos em conta que

$$\cos\varphi_k = \frac{n^{-1}}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + (y_{k+1} - y_k)^2}} \,,$$

e consideremos $\Delta_{y_k} = y_{k+1} - y_k$, $\Delta_x = \frac{1}{n}$.

Notemos que $\Delta_{x_k} = x_{k+1} - x_k = \frac{1}{n} \doteq \Delta_x \,, \ \forall k \in \{1, ..., N-1\}$. Usando (1.4.1), obtemos para R a expressão

$$R = 2K \left(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{k - \frac{1}{2}}{n} \frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta_{y_k}}{\Delta_x}\right)^2} \Delta_x \right) \,. \tag{1.4.4}$$

Apesar dos cálculos efectuados serem mais trabalhosos que difíceis, apresentamos os passos principais para chegarmos a esta expressão para R, a partir de (1.4.1):

$$\begin{aligned}
R &= \frac{K}{n^2}\left[\cos^2\varphi_0 + 3\cos^2\varphi_1 + ... + (2N-1)\cos^2\varphi_{N-1}\right] \\
&= \frac{k}{n^2}\left[\frac{(n^{-1})^2}{\frac{1}{n^2}+(y_1-y_0)^2} + \frac{3(n^{-1})^2}{\frac{1}{n^2}+(y_2-y_1)^2} + ... + \frac{(2N-1)(n^{-1})^2}{\frac{1}{n^2}+(y_{k+1}-y_k)^2}\right] \\
&= \frac{K}{n^4}\left[\frac{1}{\frac{1}{n^2}+(y_1-y_0)^2} + \frac{3}{\frac{1}{n^2}+(y_2-y_1)^2} + ... + \frac{(2N-1)}{\frac{1}{n^2}+(y_{k+1}-y_k)^2}\right] \\
&= \frac{K}{n^4}\left[\frac{1}{\frac{1+(y_1-y_0)^2n^2}{n^2}} + \frac{3}{\frac{1+(y_2-y_1)^2n^2}{n^2}} + ... + \frac{(2N-1)}{\frac{1+(y_{k+1}-y_k)^2n^2}{n^2}}\right] \\
&= K\left[\frac{1}{1+(y_1-y_0)^2n^2}\frac{1}{n^2} + \frac{3}{1+(y_2-y_1)^2n^2}\frac{1}{n^2} + ... + \frac{(2N-1)}{1+(y_{k+1}-y_k)^2n^2}\frac{1}{n^2}\right] \\
&= K\left[\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{(y_1-y_0)^2}{1/n^2}}\frac{1}{n} + \frac{3}{n}\frac{1}{1+\frac{(y_2-y_1)^2}{1/n^2}}\frac{1}{n} + ... + \frac{2N-1}{n}\frac{1}{1+\frac{(y_{k+1}-y_k)^2}{1/n^2}}\frac{1}{n}\right] \\
&= K\left[\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{(y_1-y_0)^2}{(\Delta_x)^2}}\Delta_x + \frac{3}{n}\frac{1}{1+\frac{(y_2-y_1)^2}{(\Delta_x)^2}}\Delta_x + ... + \frac{2N-1}{n}\frac{1}{1+\frac{(y_{k+1}-y_k)^2}{(\Delta_x)^2}}\Delta_x\right] \\
&= 2K\left(\sum_{k=1}^{N-1}\frac{(2k-1)/2}{n}\frac{1}{1+\frac{y_{k+1}-y_k}{(\Delta_x)^2}}\Delta_x\right) \\
&= 2K\left(\sum_{k=1}^{N-1}\frac{k-\frac{1}{2}}{n}\frac{1}{1+\left(\frac{\Delta_{y_k}}{\Delta_x}\right)^2}\Delta_x\right).
\end{aligned}$$

Tendo em conta a definição de integral de Riemann, e a igualdade aproximada $\frac{\Delta_{y_k}}{\Delta_{x_k}} \approx y'(x_k)$, vem que, quando N tende para infinito, (1.4.4) tende para o integral

$$R = 2K\int_0^r \frac{x}{1+(y'(x))^2}dx\,.$$

Foi, deste modo, que Newton determinou a funcional integral que nos dá a resistência total de um sólido que se desloca num meio raro.

Estamos, finalmente, em condições de dar uma primeira formulação do problema de Newton de resistência mínima (em termos de minimização, podemos desprezar a constante $2K$).

Problema 1.4.3. Determinar o mínimo da funcional integral

$$R[y(\cdot)] = \int_0^r \frac{x}{1+(y'(x))^2}dx\,. \tag{1.4.5}$$

Para o problema estar bem definido é necessário especificar a classe das funções $y(\cdot)$, condições de fronteira e demais requisitos físicos. Será este o assunto dos Capítulos 2 e 3.

1.5 Conclusão

Podemos mostrar que quando N aumenta, a linha poligonal com n vértices mínima, considerada na secção anterior, tende para a curva mínima que é a solução do problema de Newton. Segue-se da Proposição 1.4.2 que a curva mínima é constituída do modo seguinte: primeiro a função óptima $y(x)$ coincide com o eixo dos xx, isto é, $y(x) = 0$ para $0 \leq x \leq \delta$, e de seguida segue ao longo de uma curva (curva de Newton) sujeita à condição

$$x \tan \varphi(x) \cos^4 \varphi(x) = \mathrm{q}\,, \tag{1.5.1}$$

onde q é uma constante.

Aqui $\varphi(x)$ denota o ângulo entre a tangente ao gráfico da função $y(x)$ em $(x, y(x))$ e o eixo dos xx, e a igualdade (1.5.1) é a forma limite da igualdade (1.4.3) associada à formulação do problema para uma curva poligonal de n-vértices.

Reescrevamos a equação (1.5.1). Do ponto de vista do significado geométrico da derivada de uma função, temos

$$\tan \varphi(x) = y'(x)\,. \tag{1.5.2}$$

Por sua vez, pela fórmula fundamental da trigonometria

$$\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos x = \left(1 + \tan^2 x\right)^{-\frac{1}{2}}\,,$$

logo,

$$\cos \varphi(x) = \left[1 + \left(y'(x)\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\,. \tag{1.5.3}$$

Substituindo (1.5.2) e (1.5.3) em (1.5.1), vem

$$xy'(x)\left(\left(1 + \left(y'(x)\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^4 = q\,.$$

Donde,

$$\frac{xy'(x)}{\left[1 + (y'(x))^2\right]^2} = q\,. \tag{1.5.4}$$

A equação (1.5.4) é designada por *equação diferencial de Newton* ou *lei de conservação de Newton*.[10]

É importante realçar[11] que, de facto, Newton dá-nos toda a informação necessária para resolvermos a equação (1.5.4). Nomeadamente, Newton afirma que o ângulo no ponto em que a curva deixa o eixo dos xx é de 45^{o}.

No entanto, não vamos, neste momento, apresentar a solução da equação (1.5.4): tal será efectuado no Capítulo 3 (cf. Teorema 3.5.6).

[10] Cf. Capítulo 2, §2.5, (2.5.9) e Capítulo 3, §3.5, (3.5.4).

[11] Cf. §1.6, Comentário 1.6.1 e Capítulo 3, demonstração do Teorema 3.5.6.

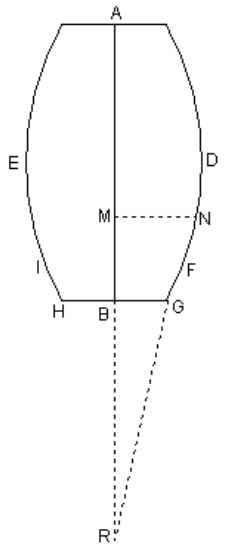


Figura 1.12: Sólido de Newton

1.6 Comentários

Uma vez encontrada a funcional integral a minimizar para o problema de Newton de resistência mínima, deixemos alguns comentários a este capítulo.

Comentário 1.6.1 *(Newton resolveu o problema de resistência mínima completamente).* Na frase de Newton transcrita na página 9 está presente a solução do problema aerodinâmico de Newton.

Consideremos a figura 1.12. Fixemos $\overline{MN} = x$, $\overline{MB} = w$, $\overline{BG} = b$ e denotemos por φ o ângulo entre o segmento $[MN]$ e a tangente à curva em N. A amplitude de φ é igual à amplitude do ângulo $H\hat{G}R$ (porque a recta tangente à curva $DNFG$ no ponto N é paralela à recta GR, logo os ângulos $H\hat{G}R$ e $\varphi = M\hat{N}G$ são ângulos de lados paralelos da mesma espécie). Além disso, $\tan\varphi = y'(x)$ (pela significado geométrico de derivada de uma função num ponto). Isto implica que

$$\overline{BR}/\overline{BG} = \tan\varphi \Longrightarrow \overline{BR} = by'(x)\,.$$

Logo, pelo Teorema de Pitágoras (aplicado ao triângulo $\Delta[BGR]$)

$$\overline{GR}^2 = \overline{BG}^2 + \overline{BR}^2 = b^2\left(1 + \left(y'(x)\right)^2\right)\,.$$

Agora a proporção de Newton

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{GR}} = \frac{\overline{GR}^3}{\left(4\overline{BR}\cdot\overline{GB}^2\right)}\,,$$

leva a

$$\frac{x}{b\sqrt{1+(y'(x))^2}} = \frac{b^3\left(1+(y'(x))^2\right)^{\frac{3}{2}}}{4by'(x)b^2} \Leftrightarrow \frac{xy'(x)}{\left(1+(y'(x))^2\right)^2} = \frac{b}{4}\,. \tag{1.6.1}$$

Esta é a equação diferencial de Newton (cf. (1.5.4)) uma vez que $\frac{b}{4}$ é constante.

Newton também antecipou o facto do sólido de revolução ter a face plana e um *ponto de quebra* em G (onde, recordamos, o ângulo é 45º), isto é, existe um ponto onde a curva óptima $y(\cdot)$ não é diferenciável.[12]

Dados o comprimento e a largura, a equação diferencial (1.6.1), ou (1.5.4), e a condição no *ponto de quebra*, determinam a curva pretendida de modo único. Podemos então afirmar que *Newton resolveu o problema de resistência mínima completamente.*

Comentário 1.6.2 *(O meio raro de Newton).* Quando imaginamos um sólido de revolução que oferece resistência mínima, dificilmente consideramos um cuja face seja plana e não pontiaguda. Talvez isto se deva ao facto de nem a água, nem o ar, nem mesmo os líquidos e gases usuais exibirem as propriedades do meio raro considerado por Newton. Isto torna a solução de Newton inútil na construção de barcos a motor, lanchas ou navios.

No entanto, em meados dos anos cinquenta do século vinte, quando se iniciou a era supersónica, as condições físicas de Newton e o seu problema aerodinâmico tornaram-se numa notícia científica de primeira página. De facto, a alta-altitude, o meio é raro, isto é, verificam-se as condições exigidas por Newton em relação ao meio onde o seu sólido se move oferecendo resistência mínima.

Desde o início da era supersónica que Newton se tornou num dos autores mais citados no que diz respeito à construção de naves espaciais, onde se exige que tais artefactos se desloquem a grandes velocidades e a alta-altitude [40]. O próprio Newton alertou os seus leitores para a possível utilidade do seu problema: *"esta Proposição, por mim concebida, pode ser útil na construção de navios"* [27, p. 333].

Comentário 1.6.3 *(O problema de Newton permaneceu esquecido por mais de 250 anos).* A anotação onde Newton propôs e deu a solução para o problema do sólido de resistência mínima atraiu a atenção dos seus contemporâneos cerca de nove anos depois da sua publicação, em 1696, quando o matemático Johann Bernoulli propôs à comunidade matemática o problema de Braquistócrona.[13]

Contudo, enquanto o problema de Braquistócrona mereceu uma admiração universal, o problema de Newton permaneceu esquecido durante mais de 250 anos. Aliás, durante todos estes anos parecia óbvio, como veremos no Capítulo 2, que o problema não tinha bases físicas e que a sua solução era absurda. Mas o "erro" de um génio revelou-se algo de conhecimento profundo.

[12] Na maior parte da literatura relativa ao problema de Newton de resistência mínima, o ponto G recebe a designação de *point of break* (cf. e.g. [39, 40]).

[13] Cf. Capítulo 2, §2.2.

Usando as palavras de Tikhomirov: *"julgamentos apressados são, por vezes, apenas isso. Pode acontecer que o pensamento de um génio, que nós tomamos como um erro, traga consigo nas entrelinhas a verdade - uma verdade clara para ele, mas ainda desconhecida para nós"* [39].

O problema de Newton é um problema do controlo óptimo, uma área que veio a ser desenvolvida apenas dois séculos e meio depois de Newton.

Capítulo 2

O Cálculo das Variações e o Problema de Newton de Resistência Mínima

2.1 Introdução

O cálculo das variações é um ramo da matemática cujo objectivo é solucionar problemas de optimalidade em espaços de funções, descrevendo as propriedades essenciais de tais soluções.

Consideremos os seguintes problemas: *qual a curva que liga dois pontos no plano, de comprimento mínimo?*; *sendo A e B dois pontos num plano vertical, qual o caminho AMB que a partícula móvel M atravessa em tempo mínimo, assumindo que a sua aceleração é apenas devida à gravidade?*;[1] *qual a superfície de revolução de área mínima que passa por dois pontos fixos, (x_A, y_A) e (x_B, y_B)?*

Todos estes problemas podem ser resolvidos pelo cálculo das variações, uma área que nasceu no século dezassete; se desenvolveu nos séculos dezoito e dezanove; atingiu a maturidade no século vinte; e contínua extremamente activa em pleno século vinte e um. Desde o seu início o cálculo das variações tem sido aplicado a uma miríade de problemas físicos, matemáticos, económicos e sociais.

Na sua essência o objectivo do cálculo das variações é encontrar um caminho, uma curva ou superfície, para os quais uma determinada funcional tem um valor mínimo ou máximo (nos três exemplos dados, mínimo).

A variedade e diversidade das aplicações práticas desta teoria é bastante surpreendente. De facto, na origem do cálculo das variações estão problemas da física, o que justifica o facto dos métodos variacionais estarem no coração das abordagens modernas a problemas da física teórica. O seu desenvolvimento também serviu como agente catalisador para avanços teóricos

[1] Este problema é conhecido por *problema de Braquistócrona*, cf. §2.2, página 35.

em áreas aparentemente distantes da matemática, tais como a análise, geometria, topologia, e equações diferenciais. De facto, pelo menos duas áreas modernas (isto é, desde o início do século vinte) de investigação podem reivindicar o cálculo das variações como um antepassado comum, nomeadamente a teoria de Morse [26] e a teoria do controlo óptimo [24].

Do ponto de vista da matemática moderna, o cálculo das variações é parte da análise funcional e tem nela o mesmo papel que a teoria de máximos e mínimos de funções tem no cálculo elementar [44, p. 3].

Este ramo da matemática tem uma história rica e continua, nos dias de hoje, uma área muito activa.

Neste capítulo vamos aplicar as condições necessárias do cálculo das variações ao problema de Newton de resistência mínima introduzido no Capítulo 1.

Começaremos por, em §2.2, apresentar uma breve resenha histórica do cálculo das variações.

Em §2.3 e §2.4 apresentaremos o problema fundamental do cálculo das variações e as condições necessárias clássicas de optimalidade para mínimo local forte e fraco, respectivamente.

De seguida, em §2.5 formularemos o problema de Newton de resistência mínima de acordo com a teoria do cálculo das variações, a chamada *formulação clássica do problema de Newton*. Com o objectivo de facilitar a aplicação das condições necessárias clássicas de optimalidade do cálculo das variações formularemos, também, o problema de Newton de resistência mínima na forma paramétrica.

Começaremos por aplicar a condição necessária de Weierstrass - condição necessária para mínimo local forte - e concluiremos que com esta formulação o problema de Newton de resistência mínima não admite mínimo local forte.

Passaremos, então, à aplicação das condições necessárias de Euler-Lagrange e de Legendre ao problema de Newton de resistência mínima. A primeira trata-se de uma condição necessária para mínimo local fraco de primeira ordem enquanto que a segunda é uma condição necessária para mínimo local fraco de segunda ordem.

A conclusão que obteremos com a aplicação destas condições é que o problema de Newton de resistência mínima (com esta formulação) não admite mínimo local fraco.

Consequentemente, em §2.6, concluiremos que a formulação clássica do problema de Newton de resistência mínima, (2.5.2), não é correcta, uma vez que para uma formulação correcta do problema é necessário exigir que as trajectórias admissíveis satisfaçam a condição $\dot{y}(x) \geq 0$, $\forall x$, tal como Legendre afirmou em 1788.

Nesta secção, afirmaremos que o problema de Newton de resistência mínima é, de facto, um problema da teoria do controlo óptimo e daremos a sua formulação de acordo com esta teoria.

2.2 Breve resenha histórica do cálculo das variações

O estudo de problemas do cálculo das variações é bastante antigo. Em certo sentido, tal estudo surge do facto de na existência humana, em muitas situações, apenas os melhores conseguirem ser suficientemente bons. Estamos então a lidar com problemas de optimalidade, isto é, problemas de máximo ou de mínimo. Alguns destes problemas podem ser encontrados no cálculo elementar, no entanto, a sua maioria requer métodos de resolução mais complexos.

O desenvolvimento histórico do cálculo das variações é rico em pormenores interessantes [16, 13].

Provavelmente, a primeira pessoa a considerar seriamente um problema de minimização do ponto de vista científico foi Hero da Alexandria, que viveu entre 150 a.C. e 300 d.C. Ele estudou a reflexão dos raios solares e afirmou, sem provar, que quando a luz emitida por um objecto é reflectida por um espelho segue o menor caminho possível desde o objecto até ao olho. Isto é um precursor do princípio de Fermat do tempo mínimo – *os raios solares seguem os caminhos mais rápidos, isto é, de tempo mínimo.*

Por sua vez Pappus (c. 290 d.C. - c. 350 d.C.), rei da Alexandria, prometeu uma recompensa excepcional aos serventes civis e ao pessoal militar, oferecendo-lhes toda a terra que eles conseguissem cercar com um arado num determinado período de tempo. Deste modo, o problema de encontrar a curva plana com um determinado comprimento, de área máxima, ou o *problema isoperimétrico*, nasceu. Este problema também é conhecido por *problema de Dido*. Pappus não foi o primeiro a considerar problemas isoperimétricos. Contudo, no seu livro *Mathematical Collection*, ele recolheu e sistematizou resultados de muitos matemáticos anteriores, extraindo-os de trabalhos de Euclides (325 a.C.-265 d.C.), Arquimedes (287 a.C.-212 d.C.), Zenorodus (200 a.C.-140 a.C.), e Hypsicles (190 a.C.-120 a.C.).

Um problema mais geral de minimização de óptica foi estudado em meados do século dezassete pelo matemático Pierre de Fermat (1601-1665). Ele acreditava que *"a natureza actua sempre através de meios e maneiras que são sempre as mais fáceis e rápidas"* mas nem sempre pelos caminhos mais curtos.

O primeiro problema normalmente associado ao desenvolvimento da teoria matemática do cálculo das variações é o problema de Braquistócrona. Este é também, indubitavelmente, o mais famoso problema da área. Em Junho de 1696, Johann Bernoulli (1667-1748) publicou um desafio à comunidade matemática com o seguinte problema:[2] *dados dois pontos A e B num plano vertical, qual o caminho AMB que a partícula móvel M atravessa em tempo mínimo, assumindo que a sua aceleração é devida apenas à gravidade.*

Depois de enunciar o problema, Johann Bernoulli assegurou aos seus leitores que a solução para o problema era muito útil na mecânica e que não era uma recta mas antes uma curva familiar aos geómetras. O prazo para entrega de respostas imposto por Johann Bernoulli foi até à Pascoa de 1697, altura em que ele prometeu publicar a sua própria solução. Aquando do

[2]Este problema já foi mencionado na introdução deste capítulo, cf. §2.1.

início do desafio, Johann Bernoulli também enviou o problema privadamente ao matemático Leibniz (1646-1716), numa carta datada de 9 de Junho de 1696. A 16 de Junho de 1696 ele recebeu uma solução completa como resposta. Newton (1643-1727) também resolveu o problema de Braquistócrona. No final, os únicos a conseguirem resolver correctamente este problema foram Jacob Bernoulli, Leibniz, Newton, Tschirnhaus e l'Hôpital.

O matemático Leonard Euler (1707-1783) linha ligações próximas com a família Bernoulli. Dada esta relação próxima, não é de estranhar que Euler se tenha interessado pelo cálculo das variações. Em 1728, Euler tinha já escrito *Acerca de encontrar equações para curvas geodésicas* e em 1744 publicou o seu livro de referência *Método para descobrir linhas curvas que gozam da propriedade de máximo ou de mínimo, ou a solução do problema isoperimétrico tomada no sentido mais amplo possível*. Alguns matemáticos preferem as datas 1728 ou 1744 para o nascimento da teoria do cálculo das variações em vez de 1697 (data em que foi publicada a solução para o problema de Braquistócrona).

Euler desenvolveu um método para resolver problemas específicos e sistematizou-o num instrumento poderoso. Com este novo método ele foi capaz de estudar uma classe bastante generalizada de problemas. O seu trabalho literário considerava uma grande variedade de problemas geodésicos, vários problemas de braquistrócrona modificados e mais gerais, problemas envolvendo restrições isoperimétricas e até questões de invariância. Apesar de alguns matemáticos antes de Euler terem dado atenção a tais problemas, ele examinou se as suas condições fundamentais se manteriam intactas com uma mudança geral de coordenadas (estas questões só foram completamente resolvidas no século vinte). Na sua publicação de 1744, Euler mostrou a primeira condição necessária para mínimo, a agora chamada *condição necessária de Euler-Lagrange*.[3]

Um outro tópico de interesse integrado no trabalho de Euler de 1744 é o da superfícies mínimas. Euler descobriu a primeira superfície não-trivial deste tipo, a catenóide.

Apesar de ser verdade que pouco tempo depois a técnica de Euler foi superada pela de Lagrange, naquela época tudo isto era matemática completamente inovadora. Os seus métodos, sistemáticos e elegantes, eram notáveis pela clareza e perspicácia.

Em 1755, Jean Louis Lagrange (1736-1813) enviou a Euler uma carta que continha detalhes de uma ideia nova e bela. Nessa carta, Lagrange mostrou a Euler como ele podia eliminar os métodos geométricos enfadonhos do seu processo. Essencialmente, ele tinha desenvolvido uma ideia de comparação de funções que levaria quase directamente à equação de Euler-Lagrange. Depois de considerar o método de Lagrange, Euler converteu-se instantaneamente, abandonou os seus antigos métodos geométricos e baptizou toda esta teoria pelo nome que agora utilizamos, o *cálculo das variações*, em honra ao método variacional de Lagrange.

Euler e Lagrange corresponderam-se frequentemente nos anos seguintes, com Lagrange a trabalhar arduamente para extender a sua teoria. Até ao final de 1760, ele foi capaz de

[3]Cf. §2.4.4, Teorema 2.4.7.

publicar um grande número de resultados no *Miscellanea Taurinensia*, um jornal científico em Turim, sobre o título *Ensaio acerca do novo método para determinar máximos e mínimos de fórmulas de integrais indefinidos*. Soluções para problemas mais gerais foram investigadas pela primeira vez, tais como problemas de braquistrócrona com pontos terminais variáveis, encontrar a superfície de área mínima de entre todas as superfícies limitadas por uma dada curva (um problema que associamos, actualmente, a Plateau) e encontrar um polígono cuja área é a maior de entre todas aqueles que têm um número fixo de lados.

Em 1786, Adrien Marie Legendre (1752-1833) apresentou uma dissertação literária à Academia de Paris intitulada *Sobre o método de distinguir máximos de mínimos no cálculo das variações*. Legendre considerou o problema de determinar se uma extremal é um arco minimizante ou maximizante. Analisou a segunda variação de uma funcional, motivado pelo Teorema de Taylor. Legendre foi capaz de mostrar a condição necessária de segunda ordem $f_{y'y'} \geq 0$ ao longo de uma curva minimizante; e $f_{y'y'} \leq 0$ ao longo de uma curva maximizante; o que é surpreendentemente semelhante ao que conhecemos do cálculo elementar com o teste da segunda derivada. Legendre tentou mostrar que a condição fortalecida $f_{y'y'} > 0$ conduz a uma condição suficiente, mas tal não é verdade.

Só passados cinquenta anos desde a descoberta inicial de Legendre relativa à condição necessária da segunda variação é que outro matemático se debruçou na tarefa de desenvolver esta teoria na direcção das condições suficientes. Em 1836, num artigo notável pela sua brevidade, Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) demonstrou rigorosamente o que agora chamamos de *condição suficiente de Jacobi*.

Apesar de não estar directamente relacionado com o desenvolvimento da teoria do cálculo das variações, é apropriado dar atenção a um outro aspecto do trabalho de Jacobi. Em meados dos anos 1830', William Rowan Hamilton (1805-1865) desenvolveu as fundações do que hoje chamamos *mecânica Hamiltoniana*. Intimamente relacionado com os métodos desenvolvidos por Lagrange, Hamilton mostrou que sob determinadas condições, os problemas em mecânica envolvendo muitas variáveis e restrições podem ser reduzidos a um exame das derivadas parciais de uma única função, o que nós agora chamamos o *Hamiltoniano*. Nos seus artigos originais de 1834 e 1835, faltava algum rigor mas Jacobi depressa interveio. Hamilton não mostrou sobre que condições a sua função possuía solução. Em 1838, Jacobi rectificou isto.

No início dos anos 1870', Karl Weierstrass (1815-1897) deu à teoria do cálculo das variações uma revisão completa. Levou bastante tempo até estes resultados se tornarem amplamente conhecidos pelo resto da comunidade matemática. Weierstrass foi o primeiro a realçar a importância do domínio da funcional que estamos a tentar minimizar. Ele também examinou a família das funções admissíveis. Um dos seus feitos mais notáveis foi a obtenção de um novo teorema de suficiência para mínimo. Dois novos conceitos, o *campo de extremais* e a *função excesso de Weierstrass*, foram desenvolvidos com o objectivo de tentar resolver o problema da suficiência assim como um novo tipo de mínimo, o chamado *mínimo forte*.

Com o cálculo das variações numa posição estável e firme, ajudado pelo trabalho rigoroso

da escola de Weierstrass, tudo estava preparado para a teoria se desenvolver ainda mais no decorrer do século vinte. Com base no trabalho realizado por Weierstrass, Oskar Bolza (1857-1942) e Gilbert Bliss (1876-1951) deram ao cálculo das variações uma estrutura matemática rigorosa [5, 4].

Placido Cicala [9] foi um dos primeiros matemáticos a escrever uma monografia directamente relacionada com as possíveis aplicações do cálculo das variações ao design na engenharia, e, por sua vez, Derek Lawden [21] foi o primeiro a verificar a utilidade do cálculo das variações nas trajectórias de naves espaciais.

Em pleno século vinte e um, o cálculo das variações contínua extremamente activo. A título de curiosidade, podemos mencionar que a MathScinet cataloga, todos os meses, mais de quarenta novos trabalhos na área.

2.3 Problema fundamental do cálculo das variações

O problema fundamental do cálculo das variações consiste na determinação de um extremante - um minimizante ou um maximizante - para uma funcional integral que depende da escolha de uma função pertencente a uma determinada classe de funções, em particular, funções cujos valores nos extremos de um dado intervalo real fechado são fixos.

Problema 2.3.1 *(Formulação não paramétrica).* Seja $[x_1, x_2]$, $x_1 < x_2$, um dado intervalo na recta real $\mathbb{R}$. Façamos $\mathcal{Y}$ representar a classe de todas as funções seccionalmente de classe C^1, $y(\cdot) : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, que satisfazem as condições de fronteira

$$y(x_1) = y_1\,, \quad y(x_2) = y_2 \tag{2.3.1}$$

onde $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$, são arbitrariamente fixos.

Seja ainda L uma função real definida em $[x_1, x_2] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de classe C^2.

O problema fundamental do cálculo das variações consiste na escolha de uma função na classe das funções admissíveis $\mathcal{Y}$, que minimiza a funcional integral $J[\cdot]$:

$$J[y(\cdot)] = \int_{x_1}^{x_2} L\left(x, y(x), \dot{y}(x)\right) dx \to \min\,, \tag{\textbf{P}}$$

onde $\dot{y}(x)$ representa a derivada $\frac{dy}{dx}$, isto é, $\dot{y}(x) = \left(\frac{dy^1(x)}{dx}, ..., \frac{dy^n(x)}{dx}\right)$.

Definição 2.3.2. À função L no Problema 2.3.1 chamamos *Lagrangeano* do problema fundamental do cálculo das variações.

Definição 2.3.3. As funções $y(\cdot)$ pertencentes à classe $\mathcal{Y}$ e que satisfazem as condições de fronteira (2.3.1) dizem-se *trajectórias admissíveis*.

Definição 2.3.4. Quando o Lagrangeano L do problema (**P**) não depende explicitamente da variável independente x diz-se que o problema é *autónomo*.

Por vezes, é mais conveniente considerar funcionais de curvas dadas na forma paramétrica. Vejamos a formulação paramétrica para o problema fundamental do cálculo das variações.

Comecemos por considerar a curva $y(x)$ dada na forma paramétrica. Para tal, façamos a nossa variável independente x depender de um novo parâmetro τ, $x = x(\tau)$.

Neste caso a funcional integral $J[\cdot]$ pode ser escrita na forma

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} L\left(x(\tau), y(\tau), \frac{y'(\tau)}{x'(\tau)}\right) x'(\tau) d\tau \doteq \int_{\tau_1}^{\tau_2} F\left(x(\tau), y(\tau), x'(\tau), y'(\tau)\right) d\tau$$

onde o símbolo $'$ denota a derivada com respeito a τ, $F(x, y, x', y') = L(x, y, \frac{y'}{x'})x'$ e τ_1, τ_2 são tais que $x(\tau_1) = x_1$, $x(\tau_2) = x_2$, respectivamente.

Problema 2.3.5 *(Formulação paramétrica).* O problema fundamental do cálculo das variações, na forma paramétrica, consiste na escolha de uma função na classe das funções admissíveis $\mathcal{Y}$, que minimiza a funcional integral

$$\begin{aligned} &\int_{\tau_1}^{\tau_2} F\left(x(\tau), y(\tau), x'(\tau), y'(\tau)\right) d\tau \to \min, \\ &\qquad x(\tau_1) = x_1, \quad x(\tau_2) = x_2 \\ &\qquad y(\tau_1) = y_1, \quad y(\tau_2) = y_2. \end{aligned} \tag{P'}$$

com $F(x, y, x', y')$ homogénea de grau um em relação a x' e y' ($F(x, y, \lambda x', \lambda y') = \lambda F(x, y, x', y')$).

2.4 Condições necessárias clássicas de optimalidade

2.4.1 Minimizante global de $J[\cdot]$

Definição 2.4.1. Uma trajectória admissível $y^*(\cdot)$ é um *minimizante global* (*absoluto*) de $J[\cdot]$ se para todas as trajectórias admissíveis $y(\cdot)$

$$J[y^*(\cdot)] \leq J[y(\cdot)]. \tag{2.4.1}$$

Observação 2.4.2. O maximizante global é definido de modo análogo invertendo o sentido da desigualdade na Definição 2.4.1. Apesar do nosso estudo se restringir a minimizantes, as condições que iremos analisar também são válidas para maximizantes, uma vez que (2.4.1) é equivalente a

$$-J[y^*(x)] \geq -J[y(x)], \ \ \forall y(\cdot) \in \mathcal{Y},$$

isto é, uma função $y^*(\cdot)$ que minimize $J[\cdot]$ também maximiza $-J[\cdot]$.

2.4.2 Minimizante local forte e fraco de $J[\cdot]$

Dizemos que uma função $y(\cdot) \in \mathcal{Y}$ é um *minimizante local* (*relativo*) de $J[\cdot]$ quando a condição

$$J[y^*(\cdot)] \leq J[y(\cdot)]$$

se verifica para todas as funções $y(\cdot) \in \mathcal{Y}$ que são suficientemente próximas de $y^*(\cdot)$.

Contudo, a noção de "suficientemente próximas" precisa de ser definida. É importante saber quando é que consideramos que duas funções estão suficientemente próximas. Para tal é importante definir uma métrica que permita introduzir o conceito de vizinhança. São usuais no cálculo das variações duas métricas: a forte e a fraca.

Consideremos as seguintes métricas (cf. [32, p. 45]):

$$\rho_0\left(y(\cdot), y_1(\cdot)\right)) = \sup_{x\in[x_1,x_2]} \{||y(x) - y_1(x)||\}$$

$$\rho_1\left(y(\cdot), y_1(\cdot)\right) = \sup_{x\in[x_1,x_2]} \{||y(x) - y_1(x)|| + ||\dot{y}(x) - \dot{y_1}(x)||\} \ .$$

Definição 2.4.3. Seja $y(\cdot) : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, uma função seccionalmente de classe C^1, com $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, e ϵ um número real positivo. O conjunto

$$\mathcal{N}_\epsilon\left(y(\cdot)\right) = \left\{y_1 : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}^n \,, \text{seccionalmente de classe } C^1 : \rho_0\left(y(\cdot), y_1(\cdot)\right) < \epsilon\right\}$$

designa-se por *vizinhança fraca* de $y(\cdot)$.

Por sua vez, o conjunto

$$\mathcal{N}_\epsilon^{'}\left(y(\cdot)\right) = \left\{y_1 : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}^n \,, \text{seccionalmente de classe } C^1 : \rho_1\left(y(\cdot), y_1(\cdot)\right) < \epsilon\right\}$$

designa-se por *vizinhança forte* de $y(\cdot)$.

Definição 2.4.4. Uma trajectória admissível $y(\cdot)$ diz-se um *minimizante local forte* do problema (**P**) se existir uma vizinhança forte $\mathcal{N}_\epsilon^{'}\left(y(\cdot)\right)$ de $y(\cdot)$ tal que

$$J\left[y(\cdot)\right] \leq J\left[y_1(\cdot)\right]$$

para toda a trajectória admissível $y_1(\cdot)$ em $\mathcal{N}_\epsilon^{'}\left(y(\cdot)\right)$.

Analogamente, dizemos que uma trajectória admissível $y(\cdot)$ é um *minimizante local fraco* do problema (**P**) se existir uma vizinhança fraca $\mathcal{N}_\epsilon\left(y(\cdot)\right)$ de $y(\cdot)$ tal que

$$J\left[y(\cdot)\right] \leq J\left[y_1(\cdot)\right]$$

para toda a trajectória admissível $y_1(\cdot)$ em $\mathcal{N}_\epsilon\left(y(\cdot)\right)$.

Todo o mínimo global de $J[y(\cdot)]$ é também um mínimo local. E, de modo semelhante, um mínimo local forte é também um mínimo local fraco. Em ambos os casos o oposto nem sempre é verdadeiro. Quando o problema em questão admite solução, se uma condição necessária para mínimo local forte não dá nenhum candidato, então podemos concluir que não existe nenhum mínimo local forte e que a solução é um minimizante local fraco. Por definição, tal minimizante tem de satisfazer as condições necessárias para mínimo local fraco. Na verdade, a teoria de existência no cálculo das variações verifica a existência numa classe maior de funções admissíveis para as quais as condições necessárias de optimalidade clássicas não são necessariamente válidas [42]. Muitos problemas de aspecto simples não admitem solução na classe de funções admissíveis onde eles são formulados, e onde as condições necessárias de optimalidade clássicas são válidas. Nesta situação, não faz sentido aplicar qualquer uma das condições necessárias: podemos ser levados a conclusões erradas, apenas porque a condição de existência que assumimos *a priori* não é satisfeita. Isto é conhecido como o *paradoxo de Perron* [44, § 10]. Podemos concluir, contudo, que o Problema 2.3.1 ou 2.3.5 não têm qualquer solução na classe $y(\cdot) \in PC^1([0,r];\mathbb{R})$ se quer as condições necessárias para mínimo forte quer as condições necessárias para mínimo fraco não derem nenhum candidato.

2.4.3 Condição necessária clássica para mínimo local forte

Recordemos uma condição necessária clássica para mínimo local forte do cálculo das variações – *condição necessária de Weierstrass*.

Antes de apresentarmos a condição necessária de Weierstrass é primordial definirmos a chamada *função excesso de Weierstrass*.

Definição 2.4.5 (Função Excesso de Weierstrass). A função excesso de Weierstrass $E : [x_1, x_2] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, associada ao Lagrangeano L de $(\mathbf{P})$, é definida por

$$E(x,y,p,q) = L(x,y,q) - L(x,y,p) - (q-p) \cdot \frac{\partial L}{\partial p}(x,y,p)\,,$$

onde $\cdot$ denota o produto escalar em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.4.6 (Condição necessária de Weierstrass – condição necessária de 1^a ordem). *Suponhamos que $y(\cdot)$ é um minimizante local forte de $(\mathbf{P})$. Então*

$$E\left(x, y(x), \dot{y}(x), q\right) \geqslant 0\,, \quad \forall q \in \mathbb{R}^n\,, \quad \forall x \in [x_1, x_2]\ . \tag{2.4.2}$$

Demonstração. Vide e.g. [16, pp. 233-236]. □

2.4.4 Condições necessárias clássicas para mínimo local fraco

Iremos considerar duas condições necessárias clássicas para mínimo local fraco – a *condição necessária de Euler-Lagrange* e a *condição necessária de Legendre*.

Teorema 2.4.7 (Equação de Euler-Lagrange – condição necessária de 1^a ordem). *Se $y(\cdot)$ é um minimizante local fraco de* (**P**)*, então*

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(x, y(x), \dot{y}(x)) = \frac{\partial L}{\partial y}(x, y(x), \dot{y}(x)). \tag{2.4.3}$$

Demonstração. Vide e.g. [22, p. 17]. □

A equação (2.4.3) designa-se por *equação de Euler-Lagrange* e as suas soluções são chamadas *extremais*.

Trata-se de uma condição necessária de primeira ordem para mínimo local fraco. Por sua vez, a condição que se segue é uma condição necessária para o mesmo tipo de mínimo local mas de segunda ordem.

Teorema 2.4.8 (Condição de Legendre – condição necessária de 2^a ordem). *Suponhamos que $y(\cdot)$ é um minimizante local fraco de* (**P**)*, e que L é uma função de classe C^2 em $[x_1, x_2] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Então*

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y}^2}(x, y(x), \dot{y}(x)) * \xi\right) \cdot \xi \geqslant 0 \ \ , \forall \xi \in \mathbb{R}^n \,, \tag{2.4.4}$$

onde $*$ denota o produto entre uma matriz e um vector.

Demonstração. Vide e.g. [16, pp. 229-231]. □

2.5 O problema de Newton de resistência mínima e a teoria do cálculo das variações

2.5.1 Formulação clássica do problema de Newton de resistência mínima

De acordo com a fórmula (1.4.5) do Capítulo 1, a força total da resistência R associada ao problema de Newton pode ser descrita pela funcional integral

$$R\left[\dot{y}(\cdot)\right] = \int_0^r \frac{x}{1 + \dot{y}(x)^2} dx \,, \tag{2.5.1}$$

onde $\dot{y}(x) = \frac{dy(x)}{dx}$. Se tentarmos minimizar (2.5.1) na classe das funções contínuas $[0, r] \to \mathbb{R}$ com derivada seccionalmente contínua e satisfazendo as condições de fronteira $y(0) = 0$, $y(r) = H$, $H > 0$, obtemos um problema típico do cálculo das variações:

$$\begin{gathered} \int_0^r L\left(x, y(x), \dot{y}(x)\right) dx \to \min \,, \\ y(0) = 0 \,, \quad y(r) = H \,, \end{gathered} \tag{2.5.2}$$

onde $L\left(x, y(x), \dot{y}(x)\right) = L\left(x, \dot{y}(x)\right) = \frac{x}{1+\dot{y}(x)^2}$.

2.5.2 Formulação paramétrica do problema de Newton de resistência mínima

O Lagrangeano $L = \frac{x}{1+\dot{y}^2}$ depende da variável independente x, e por essa razão a formulação matemática (2.5.2) do problema de Newton diz-se um *problema não autónomo*. É sempre possível reduzir um problema não autónomo a um problema autónomo equivalente, escrevendo-o na forma paramétrica. Isto é feito considerando x como uma função de um novo parâmetro τ, como vimos em §2.3, pág. 39:

$$\begin{aligned} x = x(\tau)\,, \quad x\left(\tau_0\right) = 0\,, \quad x\left(\tau_r\right) = r \\ y = y(\tau)\,, \quad y\left(\tau_0\right) = 0\,, \quad y\left(\tau_r\right) = H\,, \end{aligned}$$

a funcional integral do problema de Newton toma então a forma

$$\begin{aligned} R\left[\dot{y}(\cdot)\right] &= \int_0^r L\left(x, \dot{y}(x)\right) dx = \int_0^r L\left(x, \frac{dy(x)}{dx}\right) dx = \int_{\tau_0}^{\tau_r} L\left(x(\tau), \frac{\frac{dy(\tau)}{d\tau}}{\frac{dx(\tau)}{d\tau}}\right) \frac{dx(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau_r} \frac{x(\tau)x'(\tau)}{1+\left(\frac{y'(\tau)}{x'(\tau)}\right)^2} d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_r} \frac{x(\tau)\left(x'(\tau)\right)^3}{\left(x'(\tau)\right)^2 + \left(y'(\tau)\right)^2} d\tau\,. \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

Obtemos, então, para o problema (2.5.2), a seguinte formulação paramétrica, que coincide com a primeira formulação dada para o problema de Newton (cf. [14, 20]):

$$\begin{aligned} R\left[x(\cdot), y(\cdot)\right] = \int_{\tau_0}^{\tau_r} \frac{x(\tau)\left(x'(\tau)\right)^3}{\left(x'(\tau)\right)^2 + \left(y'(\tau)\right)^2} d\tau \to \min\,, \\ x\left(\tau_0\right) = 0\,, x\left(\tau_r\right) = r\,, \\ y\left(\tau_0\right) = 0\,, y\left(\tau_r\right) = H\,. \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

2.5.3 Condição necessária de Weierstrass

Vamos, agora, aplicar a condição necessária de Weierstrass ao problema de Newton na forma paramétrica (2.5.4).

Seja $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, arbitrário. A função excesso de Weierstrass (Definição 2.4.5) aplicada ao problema (**P'**) toma a forma

$$E(x, y, x', y', u, v) = F(x, y, u, v) - F(x, y, x', y') - ((u, v) - (x', y')) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x'}(x, y, x', y'), \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, x', y')\right)\,.$$

Efectuando os cálculos necessários[4] para o Lagrangeano de Newton, $F(x, x', y') = \frac{xx'^3}{x'^2+y'^2}$, obtemos

$$E(x, y, x', y', u, v) = \frac{x\left(-u^3(x')^2(y')^2 + u^3(y')^4 - (x')^4uv^2 - 3(x')^2uv^2(y')^2 + 2(x')^3y'vu^2 + 2(x')^3y'v^3\right)}{\left(u^2+v^2\right)\left((x')^2+(y')^2\right)^2}\,. \tag{2.5.5}$$

[4] Cálculos efectuados no sistema de computação algébrica Maple (cf. Apêndice A.0.3, página 68).

Não é tarefa fácil encontrar uma expressão simplificada para a igualdade (2.5.5). Assim, com o objectivo de facilitar os cálculos, escrevamos x', y', u e v em coordenadas polares, $x' = \rho\cos\theta$, $y' = \rho\sin\theta$, $u = s\cos\alpha$, $v = s\sin\alpha$, onde $\rho, s \in \mathbb{R}^+$ e $\theta, \alpha \in [0, 2\pi]$.

A função excesso de Weierstrass (2.5.5) toma a seguinte forma[5]

$$E(x, y, \theta, \alpha) = -sx\sin^2(\alpha - \theta)\cos(2\alpha + \theta)\,.$$

De acordo com a condição necessária de Weierstrass (2.4.2), temos

$$-sx\sin^2(\alpha - \theta)\cos(2\alpha + \theta) \geq 0,\ 0 \leq \alpha \leq 2\pi\,. \tag{2.5.6}$$

Como $s > 0$, $x \geq 0$, e $\sin^2(2\alpha - \theta) \geq 0$, então (2.5.6) é apenas satisfeito quando $\cos(2\alpha + \theta) \leq 0$, isto é, $(2\alpha + \theta) \in [90^o, 270^o]$. Mas se considerarmos, por exemplo, $\alpha = 0^{\text{o}}$ e $\theta = 45^{\text{o}}$ $(2\alpha + \theta = 45^{\text{o}})$, então (2.5.6) não é satisfeita.

Assim, podemos concluir que não existe mínimo local forte para a formulação (2.5.2) ou (2.5.4) do problema de Newton de resistência mínima.

2.5.4 Condição necessária de Euler-Lagrange e a condição necessária de Legendre

Pode, ainda, existir um mínimo local fraco para as formulações (2.5.2) ou (2.5.4) do problema de Newton de resistência mínima. Iremos considerar duas condições necessárias para mínimo local fraco – condição necessária de Euler-Lagrange e condição necessária de Legendre.

Vamos começar por aplicar a condição necessária de Euler-Lagrange à formulação paramétrica (2.5.4) do problema de Newton.

A condição necessária de Euler-Lagrange diz-nos que

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\tau}\dfrac{\partial F}{\partial x'} = \dfrac{\partial F}{\partial x}\,, \\ \dfrac{d}{d\tau}\dfrac{\partial F}{\partial y'} = \dfrac{\partial F}{\partial y}\,. \end{cases} \tag{2.5.7}$$

No caso paramétrico a função integranda F nunca depende da variável independente τ e é sempre uma função homogénea em relação às derivadas: $F(x, y, \lambda x', \lambda y') = \lambda F(x, y, x', y')$. Resulta então que no caso paramétrico as duas condições (2.5.7) não são independentes, bastando considerar a segunda equação em (2.5.7): $\dfrac{d}{d\tau}\dfrac{\partial F}{\partial y'} = \dfrac{\partial F}{\partial y}$ [15]. O Lagrangeano F de Newton não depende de y, pelo que a condição de Euler-Lagrange toma a forma simplificada

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial F}{\partial y'}\big(x(\tau), x'(\tau), y'(\tau)\big) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial y'}(x(\tau), x'(\tau), y'(\tau)) = k\,, \tag{2.5.8}$$

[5]Cf. Apêndice A.0.3, página 68.

com k uma constante.

Como

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\left(x(\tau), x'(\tau), y'(\tau)\right) = \frac{x(\tau)\left(x'(\tau)\right)^3 y'(\tau)}{\left(\left(x'(\tau)\right)^2 + \left(y'(\tau)\right)^2\right)^2},$$

obtemos de (2.5.8) a condição necessária

$$\frac{x(\tau)\left(x'(\tau)\right)^3 y'(\tau)}{\left(\left(x'(\tau)\right)^2 + \left(y'(\tau)\right)^2\right)^2} = k\,. \tag{2.5.9}$$

Definição 2.5.1. Chamamos a (2.5.9) *lei de conservação de Newton.*[6]

Vamos considerar dois casos distintos na lei de conservação de Newton: primeiro caso, a constante k é diferente de zero; segundo caso, a constante k é nula.

Antes de analisarmos, em pormenor, cada um destes casos, apliquemos a condição necessária de Legendre, (2.4.4), à formulação paramétrica do problema de Newton de resistência mínima. A partir da aplicação desta condição necessária obtemos, em coordenadas polares, o seguinte resultado

$$-2x\cos(3\alpha) \geq 0\,, \quad \alpha \in [0, 2\pi]. \tag{2.5.10}$$

Vejamos, em pormenor, como obter a condição (2.5.10). A condição necessária de Legendre, para o caso vectorial, diz-nos que a matriz Hessiana

$$\left\{\frac{\partial^2 L}{\partial p_i \partial p_j\left(x, y(x), \dot{y}(x)\right)}\right\}_{1\leq i,j\leq n}$$

tem de ser uma matriz semi-definida positiva.

Calculando a matriz Hessiana para a função F, temos

$$H = \begin{bmatrix} -\frac{2xx'(y')^2\left((x')^2-3(y')^2\right)}{\left((x')^2+(y')^2\right)^3} & \frac{2x(x')^2y'\left((x')^2-3(y')^2\right)}{\left((x')^2+(y')^2\right)^3} \\ \frac{2x(x')^2y'\left((x')^2-3(y')^2\right)}{\left((x')^2+(y')^2\right)^3} & -\frac{2x(x')^3\left((x')^2-3(y')^2\right)}{\left((x')^2+(y')^2\right)^3} \end{bmatrix}.$$

Por definição de matriz semi-definida positiva (cf. [12, p. 116]), provar que a matriz simétrica H é semi-definida positiva, é o mesmo que provar que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\xi\cdot\xi = \sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j}\xi_i\xi_j \geq 0\,,$$

para $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ arbitrariamente fixo.

Isto é equivalente a

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\xi_1\xi_1 + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}\xi_1\xi_2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x'}\xi_2\xi_1 + \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\xi_2\xi_2 \geq 0\,.$$

[6] Cf. Capítulo 3, §3.5, (3.5.4) e Proposição 3.5.3; e nota de rodapé da pág. 28 – (1.5.4).

Ou seja,[7]

$$-\frac{2xx'\left((x')^2-3(y')^2\right)(x'\xi_2-y'\xi_1)^2}{\left((x')^2+(y')^2\right)^3}\geq 0\,.$$

Uma vez que na expressão anterior, o denominador é sempre não negativo, tal como a expressão $(x'\xi_2-y'\xi_1)^2$ do numerador, estas podem ser ignoradas e podemos considerar apenas a condição

$$-2xx'\left((x')^2-3(y')^2\right)\geq 0\,. \tag{2.5.11}$$

Analogamente à condição necessária de Weierstrass, com o objectivo de facilitar os cálculos, escrevamos x' e y' em coordenadas polares, isto é, $x'=\rho\cos\alpha$, $y'=\rho\sin\alpha$, onde $\rho\in\mathbb{R}^+$ e $\alpha\in[0,2\pi]$.

Substituindo em (2.5.11), obtemos

$$-2x\rho^3\cos(\alpha)\left(\cos^2(\alpha)-3\sin^2(\alpha)\right)\geq 0\,,\quad \forall\alpha\in[0,2\pi]\,. \tag{2.5.12}$$

Como, ρ^3 é uma constante positiva, também pode ser ignorada. Efectuando algumas simplificações, obtemos a condição final,

$$\begin{aligned}-2x\cos(\alpha)\left(\cos^2(\alpha)-3\sin^2(\alpha)\right)\geq 0 &\Leftrightarrow -2x\left(\cos^3(\alpha)-3\cos(\alpha)\sin^2(\alpha)\right)\geq 0\\ &\Leftrightarrow -2x\left(\cos^3(\alpha)-3\cos(\alpha)(1-\cos^2(\alpha))\right)\geq 0\\ &\Leftrightarrow -2x\left(4\cos^3(\alpha)-3\cos(\alpha)\right)\geq 0\\ &\Leftrightarrow -2x\cos(3\alpha)\geq 0\,.\end{aligned}$$

Uma vez que $x\geq 0$, podemos concluir que a inequação (2.5.10) é equivalente a $\cos(3\alpha)\leq 0$, isto é, $\pi/6\leq\alpha\leq\pi/2$.

Consideremos o primeiro caso na lei de conservação de Newton, o caso em que k é uma constante não nula.

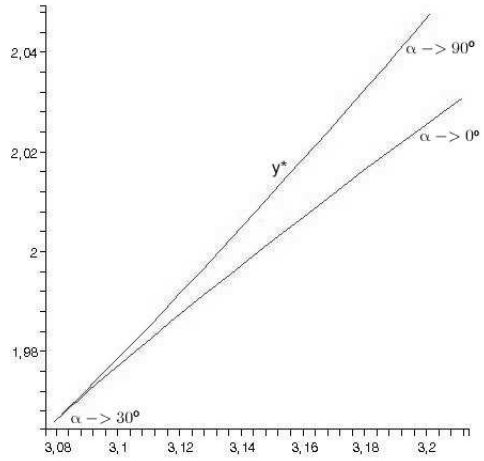
Proposição 2.5.2. *A solução paramétrica da lei de conservação de Newton* (2.5.9)*, para o caso em que a constante k é não nula, é dada por*

$$\begin{aligned}x(\alpha)&=\frac{k}{\tan\alpha}(1+\tan^2\alpha)^2\,,\\ y(\alpha)&=m+k(-\ln(\tan\alpha)+\tan^2\alpha+\frac{3}{4}\tan^4\alpha)\,,\end{aligned} \tag{2.5.13}$$

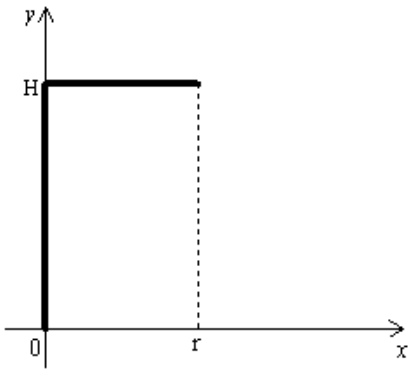
com m uma constante e $0\leq\alpha\leq 2\pi$.

Demonstração. Vamos provar que a solução paramétrica (2.5.13) satisfaz a lei de conservação de Newton (2.5.9).

[7] Cálculos efectuados no Maple, cf. Apêndice A.0.4, pág. 69.



(a) Primeiro caso: $k \neq 0$



(b) Segundo caso: $k = 0$

Figura 2.1: Solução da Lei de Conservação de Newton

Temos que a derivada de $x(\alpha)$ em ordem a α é dada por

$$\frac{dx}{d\alpha}(\alpha) = \frac{k\left(1+\tan^2\alpha\right)^2\left(-1+3\tan^2\alpha\right)}{\tan^2\alpha}\,,$$

e a derivada de $y(\alpha)$ em ordem a α é

$$\frac{dy}{d\alpha}(\alpha) = \frac{k\left(-1+\tan^2\alpha+5\tan^4\alpha+3\tan^6\alpha\right)}{\tan\alpha}\,.$$

Substituindo em (2.5.9), obtemos a igualdade pretendida.[8] □

Proposição 2.5.3. *A solução paramétrica* (2.5.13) *da lei de conservação de Newton* (2.5.9)*, para o caso em que* $k \neq 0$ *não é um minimizante local fraco do problema de Newton de resistência mínima.*

Demonstração. Podemos ver o gráfico desta solução na figura 2.1(a), para α a variar entre 0 e $\pi/2$.

Pela condição (2.5.10), $\pi/6 \leq \alpha \leq \pi/2$. Seja y^* a função que corresponde ao gráfico da solução para $\pi/6 \leq \alpha \leq \pi/2$. Acontece que a função y^* não é admissível (não satisfaz a condição de fronteira $y^*(0) = 0$). Logo, y^* não pode ser solução do problema. □

Para o segundo caso, $k = 0$, temos que

$$\begin{cases} x = 0\,, \quad y \in [0, H]\,, \\ y = H\,, \quad x \in [0, r]\,. \end{cases} \tag{2.5.14}$$

[8] Cálculos efectuados no Maple, cf. Apêndice A.0.5, pág. 70

é uma extremal, pois satisfaz (2.5.9) e as condições de fronteira $y(0) = 0$, $y(r) = H$ (figura 2.1(b)). A intuição diz-nos que o corpo de revolução correspondente maximiza a resistência. Iremos provar que, de facto, não é um minimizante.

Proposição 2.5.4. *A extremal dada pela fórmula* (2.5.14) *não é um minimizante local fraco do problema de Newton de resistência mínima.*

Demonstração. Sabemos a partir da condição de Legendre, (2.4.4), em concreto, da condição (2.5.10), que para que (2.5.14) seja um minimizante do problema de Newton de resistência mínima ele terá de satisfazer a condição $-2x\cos(3\alpha) \geq 0$.

Mas quando $y = H$ e $x \geq 0$, temos $\alpha = 0$, uma vez que

$$y' = 0 \Leftrightarrow \rho \sin(\alpha) = 0\,.$$

Donde $-2x\cos(3\alpha) = -2x$ e (2.5.10) não é satisfeita. □

Concluímos que não existe mínimo local fraco para a formulação (2.5.2) ou (2.5.4) do problema de Newton de resistência mínima.

2.5.5 Conclusão

Na formulação clássica (aquela com a qual temos trabalhado), o problema de Newton de resistência mínima não tem solução: não admite um mínimo local forte; nem mesmo um mínimo local fraco.

Conclusão 2.5.5. A formulação matemática (2.5.2) ou (2.5.4) para o problema de Newton de resistência mínima não está bem posta.

A conclusão 2.5.5 foi afirmada pela primeira vez por Legendre em 1788 [3]. De facto, é necessário ter em conta exigências físicas adicionais para a formulação correcta do problema de Newton: as trajectórias admissíveis $y(\cdot)$ têm que satisfazer a condição $\dot{y}(x) \geq 0$, $x \in [0, r]$.

2.6 Formulação correcta do problema de Newton de resistência mínima

O problema (2.5.2) não admite, como vimos em §2.5, solução: não admite mínimo forte nem mesmo mínimo fraco. Este facto ajuda a compreender melhor as exigências físicas que se impõem na modelação matemática do problema de Newton: as trajectórias admissíveis $y(\cdot)$ têm, necessariamente, que satisfazer a condição $\dot{y}(x) \geq 0$, $x \in [0, r]$. É curioso notar que Newton apenas colocou o problema e deu a sua solução. Nunca o formulou matematicamente, deixando essa tarefa para os seus sucessores. A formulação matemática do problema de Newton foi feita posteriormente ao *Principia* por muitos matemáticos, muitas vezes erradamente,

por não se assumir a restrição fisicamente relevante $\dot{y}(x) \geq 0$. A formulação correcta do problema de Newton de resistência mínima é:

$$\begin{gathered} R\left[u(\cdot)\right] = \int_0^r L\left(x, u(x)\right) dx \to \min \\ \dot{y}(x) = u(x)\,, \quad u(x) \geq 0\,, \\ y(0) = 0\,, \quad y(r) = H\,, \end{gathered} \tag{2.6.1}$$

com $L\left(x, u(x)\right) = \frac{x}{1+u^2(x)}$. Este é um problema do controlo óptimo, que nos vais conduzir à solução indicada por Newton no seu *Principia Mathematica*. Como mostraremos, a solução do problema de Newton é facilmente obtida por aplicação do Princípio do Máximo de Pontryagin.

2.7 Comentários

Comentário 2.7.1. Grande parte do trabalho deste capítulo foi apresentado no *Third Junior European Meeting on Control, Optimization and Computation*, que teve lugar de 6 a 8 de Setembro de 2004, no Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro [34].

Comentário 2.7.2. No decorrer do ano mundial da física não poderíamos deixar de referir a grande cumplicidade existente entre a física e a teoria do cálculo das variações [11]. Os problemas da física foram, e ainda o são, muitas vezes responsáveis pelo desenvolvimento da matemática bem como pelo surgimento de novas técnicas e de generalizações a técnicas mais abrangentes. A teoria do controlo óptimo é um exemplo dessas generalizações. Será esse o assunto do nosso próximo capítulo.

Capítulo 3

O Controlo Óptimo e o Problema de Newton de Resistência Mínima

3.1 Introdução

O controlo óptimo é uma área multidisciplinar e surgiu como uma generalização do cálculo das variações. O controlo óptimo constitui uma das metodologias que permitem resolver problemas de optimização em espaços de dimensão infinita. É uma área de investigação actual e alvo de grande desenvolvimento. A sua importância no estudo de trajectórias aeroespaciais e na robótica é inquestionável [7]. De igual modo, devido ao rápido desenvolvimento de métodos computacionais e analíticos de optimização, o controlo óptimo tem tido um papel de destaque na optimização dinâmica [24].

A teoria do controlo óptimo é uma área em constante desenvolvimento, quer na vertente teórica, quer em aplicações a situações reais [17].

Ao longo deste capítulo iremos dar continuidade ao estudo efectuado nos dois capítulos anteriores. Antes, em §3.2, iremos começar por apresentar uma breve resenha histórica do controlo óptimo.

Em §3.3 e §3.4, formularemos, respectivamente, o problema de Lagrange do controlo óptimo e o princípio do máximo de Pontryagin.

Em §3.5, concretizaremos o princípio do máximo de Pontryagin para a formulação correcta do problema de Newton de resistência mínima (2.6.1). Por fim, aplicaremos o princípio do máximo de Pontryagin ao problema de Newton de resistência mínima e determinaremos a sua solução.

3.2 Breve resenha histórica do controlo óptimo

A teoria do controlo óptimo tem as suas raízes no cálculo das variações, na teoria clássica do controlo, nos processos aleatórios, na programação linear e não linear, nos algoritmos

e nos computadores digitais, e na programação dinâmica. Na sua origem estão problemas da engenharia, tais como a condução de aviões, veículos espaciais, robots e outros veículos autónomos [7].

Tal como referimos em §2.2, o cálculo das variações surgiu no século dezassete com o contributo de Bernoulli, Fermat, Leibnitz e Newton. De facto, H.J. Sussmann e J.C. Willems defendem que a origem do controlo óptimo coincide com o nascimento do cálculo das variações em 1697 com a publicação da solução do problema de Braquistócrona pelo matemático Johann Bernoulli [36].[1]

No entanto, regra geral, considera-se que o controlo óptimo surgiu em finais dos anos cinquenta do século vinte, na antiga União Soviética, com a formulação e demonstração do *Princípio do Máximo de Pontryagin* por L.S. Pontryagin e seu grupo de colaboradores: V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze e E.F. Mishchenko [31].

Pontryagin e os seus companheiros confrontaram-se com alguns problemas de engenharia e de economia que pediam resposta urgente. Ao resolverem esses problemas introduziram ideias novas e importantes no cálculo das variações, assim como uma nova forma de formular os problemas. Esta formulação já tinha sido adoptada em 1950 por Magnus Hestenes. De facto, em 1933 L.M. Graves, num artigo publicado na *Transactions of the American Mathematical Society*, reescreveu o problema de Lagrange do cálculo das variações de acordo com a formulação do controlo óptimo e estabeleceu condições análogas às condições de Euler-Lagrange e de Weierstrass (sistema Hamiltoniano e condição de máximo). No entanto, essas condições só eram aplicáveis em casos particulares.

Aparentemente, Pontryagin e o seu grupo desconheciam que a notação por eles adoptada já tinha sido usada por Graves e Hestenes, e inventaram a mesma independentemente [25], sob hipóteses mais gerais. Contudo, Pontryagin e os seus companheiros introduziram um aspecto de importância primordial: generalizaram o problema do cálculo das variações a funções que tomam valores em espaços com fronteira. O princípio do máximo de Pontryagin é uma generalização das condições necessárias de Euler-Lagrange e de Weierstrass.

Desde a formulação do princípio do máximo de Pontryagin milhares de artigos e livros foram escritos associados à teoria do controlo óptimo (ver algumas referências em [41]). O controlo óptimo é uma área vasta, com inúmeras abordagens e aplicações, na matemática, engenharia, economia, ciências sociais, medicina, entre outras [37, 38].

3.3 Problema de Lagrange do controlo óptimo

O problema estudado pela teoria do controlo óptimo consiste na determinação de funções de controlo que optimizam um determinado processo ou fenómeno quando sujeito a restrições descritas por equações diferenciais.

[1] Nós vamos ainda mais longe e afirmamos que o controlo óptimo nasceu com o problema de Newton de resistência mínima, antes do cálculo das variações!

Diferentes formulações do problema matemático do controlo óptimo podem ser construídas, sendo todas elas equivalentes entre si [41, pp. 13-16]: *problema de Lagrange do controlo óptimo*, *problema de Bolza do controlo óptimo*, *problema de Mayer do controlo óptimo*, etc.

No que se segue, iremos considerar a formulação de Lagrange para o problema do controlo óptimo.

Problema 3.3.1 *(Problema de Lagrange do controlo óptimo).* Seja $x \in \mathbb{R}$, a variável independente. Designemos $y(x) = (y_1(x), ..., y_n(x)) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $x \in [x_1, x_2]$, $x_1\,, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ por *trajectória de estado* e $u(x) = (u_1(x), ..., u_r(x)) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^r$, $r \geq 1$, $x \in [x_1, x_2]$, por *variável de controlo*.

A função *Lagrangeano*, L, está definida em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$.

E, designemos ainda, por *dinâmica* a função φ definida em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$.

Consideremos que as trajectórias de estado, $y(\cdot)$, são funções seccionalmente de classe C^1 definidas em $[x_1, x_2]$, com valores em $\mathbb{R}^n$ e que as variáveis de controlo, $u(\cdot)$, são funções seccionalmente contínuas definidas no intervalo $[x_1, x_2]$, com valores em $\Omega \subseteq \mathbb{R}^r$, $x \in [x_1, x_2]$.

O problema do controlo óptimo na forma de Lagrange consiste na escolha de um par[2] $(y(\cdot), u(\cdot))$ nas condições enunciadas que minimize uma funcional integral do tipo

$$J[y(\cdot), u(\cdot)] = \int_{x_1}^{x_2} L\left(x, y(x), u(x)\right) \to \min\,, \tag{3.3.1}$$

onde o par $(y(\cdot), u(\cdot))$ deve satisfazer o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{y}(x) = \frac{dy(x)}{dx} = \varphi\left(x, y(x), u(x)\right)\,, \tag{3.3.2}$$

e as condições de fronteira

$$y(x_1) = y_1\,,\;\; y(x_2) = y_2\,, \tag{3.3.3}$$

com $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$, arbitrariamente fixos.

Definição 3.3.2. O sistema de equações diferenciais ordinárias dado por (3.3.2) designa-se por *sistema de controlo*.[3]

A principal diferença entre problemas de controlo óptimo e do cálculo das variações está no facto do conjunto Ω não ser em geral um conjunto aberto nos problemas do controlo óptimo. Se considerarmos $\Omega = \mathbb{R}^n$ e $\varphi(x, y, u) = u$ obtemos o problema fundamental do cálculo das variações (**P**) (cf. §2.3).

[2] Ao par $(y(\cdot), u(\cdot))$ também se dá a designação de *processo de controlo* ou apenas *processo*.

[3] No caso em que (3.3.2) é dado por uma única equação ($n = 1$) designa-se por *equação de controlo*.

3.4 Princípio do Máximo de Pontryagin

O resultado central da teoria do controlo óptimo é o princípio do máximo de Pontryagin [31], que nos dá uma condição necessária de optimalidade de primeira ordem, generalizando as condições necessárias clássicas de Euler-Lagrange e de Weierstrass[4] [36], para problemas onde o conjunto onde o controlo toma valores, Ω, é fechado.

Teorema 3.4.1 (Princípio do Máximo de Pontryagin). *Se $(y(\cdot), u(\cdot))$ é um minimizante do problema de controlo óptimo* (3.3.1)–(3.3.3)*, então existe um par não nulo $(\psi_0, \psi(\cdot))$, onde $\psi_0 \leq 0$ é uma constante e $\psi(\cdot)$ é uma função seccionalmente de classe C^1 de domínio $[x_1, x_2]$ e com valores em $\mathbb{R}^n$, tal que as seguintes condições são válidas para quase todo os x no intervalo $[x_1, x_2]$:*

(i) o sistema Hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{y}(x) & = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi}(x, y(x), u(x), \psi_0, \psi(x)) \\ \dot{\psi}(x) & = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}(x, y(x), u(x), \psi_0, \psi(x)) \end{cases}$$

(ii) a condição de máximo

$$\mathcal{H}(x, y(x), u(x), \psi_0, \psi(x)) = \max_{u \in \Omega} \mathcal{H}(x, y(x), u, \psi_0, \psi(x)) \,,$$

onde o Hamiltoniano $\mathcal{H}$ é definido por

$$\mathcal{H}\left(x, y(x), u(x), \psi_0, \psi(x)\right) = \psi_0 L(x, y(x), u(x)) + \psi(x) \cdot \varphi\left(x, y(x), u(x)\right) \,.$$

A primeira equação no sistema Hamiltoniano é apenas o sistema (3.3.2) *designado por* sistema de controlo *e a segunda equação é conhecida por* sistema adjunto*.*

Demonstração. Vide [35, pp. 88-93]. □

Definição 3.4.2 (Extremal de Pontryagin). Um quadruplo $(y(\cdot), u(\cdot), \psi_0, \psi(\cdot))$ satisfazendo as condições do Teorema 3.4.1 é chamado de *extremal de Pontryagin*. O controlo $u(\cdot)$ diz-se um *controlo extremal*.

Definição 3.4.3 (Extremal anormal). Uma extremal de Pontryagin, $(y(\cdot), u(\cdot), \psi_0, \psi(\cdot))$ diz-se *extremal anormal* quando $\psi_0 = 0$ e *extremal normal* caso contrário.

Observação 3.4.4. Se o quadruplo $(y(\cdot), u(\cdot), \psi_0, \psi(\cdot))$ é uma extremal de Pontryagin, então para qualquer $\gamma > 0$, $(y(\cdot), u(\cdot), \gamma\psi_0, \gamma\psi(\cdot))$ é também uma extremal de Pontryagin.

A partir desta observação, podemos considerar, sem perda de generalidade, que $\psi_0 = -1$ no caso normal.

[4] Cf. Teoremas 2.4.7 e 2.4.6, §2.4.

3.5 O problema de Newton de resistência mínima e a teoria do controlo óptimo

Na secção §2.6 do Capítulo 2, formulámos correctamente o problema de Newton de resistência mínima: um problema da teoria do controlo óptimo. De acordo com a formulação dada por (2.6.1), a formulação correcta do problema de Newton de resistência mínima é:

$$\begin{gathered} R\left[u(\cdot)\right]=\int_0^r L\left(x,u(x)\right)dx \to \min \\ \dot{y}(x)=u(x)\,, \quad u(x)\geq 0\,, \\ y(0)=0\,, \quad y(r)=H\,, \quad H>0\,, \\ L\left(x,u(x)\right)=\frac{x}{1+u^2(x)}\,. \end{gathered} \tag{3.5.1}$$

Da restrição $u(x)\geq 0\,, \forall x\in[0,r]$, observamos que $u(\cdot)$ toma valores num intervalo com fronteira: (3.5.1) é um problema do controlo óptimo.

Ao longo deste capítulo mostraremos que a solução para o problema de Newton de resistência mínima é obtida directamente da aplicação do princípio do máximo de Pontryagin e que esta coincide com a solução dada por Newton no seu *Principia Mathematica*.

Comecemos por concretizar o princípio do máximo de Pontryagin para o problema de Newton de resistência mínima (3.5.1).

Teorema 3.5.1 (Princípio do Máximo de Pontryagin para o problema de Newton). *Se $(y(\cdot),u(\cdot))$ é um minimizante de (3.5.1), então existe um par não nulo $(\psi_0,\psi(\cdot))$, onde $\psi_0\leq 0$ é uma constante e $\psi(\cdot)\in PC^1\left([0,r];\mathbb{R}\right)$, tal que as seguintes condições são satisfeitas para quase todos x em $[0,r]$:*

(i) o sistema Hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{y}(x) &= \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\psi}(x,u(x),\psi_0,\psi(x)) \text{ (equação de controlo)} \\ \dot{\psi}(x) &= -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y}(x,u(x),\psi_0,\psi(x)) \text{ (sistema adjunto)} \end{cases}$$

(ii) a condição de máximo

$$\mathcal{H}(x,u(x),\psi_0,\psi(x))=\max_{u\geq 0}\mathcal{H}(x,u,\psi_0,\psi(x))\,, \tag{3.5.2}$$

onde o Hamiltoniano $\mathcal{H}$ é definido por

$$\mathcal{H}(x,u(x),\psi_0,\psi(x))=\psi_0 L(x,u(x))+\psi(x)u(x)=\psi_0\frac{x}{1+u^2(x)}+\psi(x)u(x)\,.$$

O sistema adjunto afirma que $\dot{\psi}(x) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}(x, u(x), \psi_0, \psi(x)) = 0$, isto é, $\psi(x) = c$, com c uma constante real.

Da condição de máximo segue-se que $\psi_0 \neq 0$ (não existem extremais anormais).

Proposição 3.5.2. *Todas as extremais de Pontryagin $(y(\cdot), u(\cdot), \psi_0, \psi(\cdot))$ para o problema de Newton de resistência mínima* (3.5.1)*, são extremais normais ($\psi_0 = -1$) com $\psi(\cdot)$ uma constante negativa ($\psi(x) \equiv -\lambda\,, \lambda > 0, \forall x \in [0, r]$).*

Demonstração. O Hamiltoniano $\mathcal{H}$ para o problema de Newton

$$\mathcal{H}\,(x, u(x), \psi_0, \psi(x)) = \psi_0 \frac{x}{1 + u^2(x)} + \psi(x)u(x)\,,$$

não depende de $y(\cdot)$, donde pelo sistema adjunto concluímos que

$$\dot{\psi}(x) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}\,(x, u(x), \psi_0, \psi(x)) = 0\,,$$

ou seja, $\psi(x) \equiv c$, com c uma constante, $x \in [0, r]$.

Se c é igual a zero, então $\psi_0 < 0$ (porque não é permitido que ψ_0 e $\psi(\cdot)$ sejam ambas nulas) e a condição do máximo (3.5.2) simplifica-se para

$$\psi_0 L\,(x, u(x)) = \max_{u \geq 0}\{\ \psi_0 \frac{x}{1 + u^2}\}$$

donde concluímos que o máximo não é atingido ($u \to +\infty$). Logo $c \neq 0$.

Analogamente, para $c > 0$ o máximo

$$\max_{u \geq 0}\{\ \psi_0 L(x, u) + cu\} = \max_{u \geq 0}\{\psi_0 \frac{x}{1 + u^2} + cu\}$$

não existe e concluímos que $c < 0$. Podemos fixar $\psi(x) \equiv -\lambda$, onde $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Resta-nos provar que ψ_0 é diferente de zero. De facto, se $\psi_0 = 0$, a condição de máximo lê-se

$$-\lambda u(x) = \max_{u \geq 0}\{-\lambda u\}\,,\ \ \lambda \in \mathbb{R}^+\,,$$

e segue-se $u(x) \equiv 0$ e $y(x) \equiv w$, com w uma constante, pois $u(x) = \dot{y}(x)$. Isto não é possível uma vez que $y(0) = 0$ e $y(r) = H$ com $H > 0$. Logo, $\psi_0 \neq 0$ e concluímos que não existem extremais de Pontryagin anormais para o problema de Newton de resistência mínima.

Com base na Observação 3.4.4 podemos fixar, sem perda de generalidade, $\psi_0 = -1$. □

O Hamiltoniano toma a forma $\mathcal{H}\,(x, u(x)) = -\frac{x}{1+u^2(x)} - \lambda u(x)$, com $\lambda > 0$.

Para $u > 0$, segue-se a partir da condição de máximo, $\mathcal{H}(x, u(x)) = \max_{u>0}\{-\frac{x}{1+u^2} - \lambda u\}$ que $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(x, u(x)) = 0$, e temos

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(x, u(x)) = 0 \Leftrightarrow \frac{2xu(x)}{(1 + u^2(x))^2} - \lambda = 0 \Leftrightarrow \frac{xu(x)}{(1 + u^2(x))^2} = \frac{\lambda}{2}\,, \tag{3.5.3}$$

ou seja,

$$\frac{xu(x)}{(1+u^2(x))^2} = q\,, \qquad \text{com } q \text{ uma constante estritamente positiva}\,. \tag{3.5.4}$$

A equação (3.5.4) é a conhecida *equação diferencial de Newton*. Não é nada mais do que a *lei de conservação de Newton* (2.5.9), escrita na forma não paramétrica.

Proposição 3.5.3. *A lei de conservação de Newton* (2.5.9)*, correspondente à formulação paramétrica do problema de Newton do Capítulo 2 (cf.* (2.5.4)*, pág. 43), é equivalente à equação diferencial de Newton* (3.5.4)*.*

Demonstração. Consideremos a equação diferencial de Newton $\frac{xu(x)}{(1+u^2(x))^2} = q$, com q uma constante estritamente positiva. Como $u(x) = \dot{y}(x)$, então

$$\frac{x\dot{y}(x)}{\left(1+\dot{y}^2(x)\right)^2} = \frac{x\frac{dy}{dx}(x)}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}(x)\right)^2\right)^2}\,, \tag{3.5.5}$$

pois, por definição, $\dot{y}(x) = \frac{dy}{dx}(x)$.

Introduzindo uma nova variável independente τ e denotando $\frac{dy}{d\tau}(\tau)$ por $y'(\tau)$ e $\frac{dx}{d\tau}(\tau)$ por $x'(\tau)$, podemos escrever

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{dy}{d\tau}(\tau)\frac{d\tau}{dx}(\tau) = \frac{dy}{d\tau}(\tau)\frac{1}{\frac{dx}{d\tau}(\tau)} = \frac{y'(\tau)}{x'(\tau)}\,. \tag{3.5.6}$$

Substituindo (3.5.6) em (3.5.5) temos

$$\frac{x\dot{y}(x)}{\left(1+\dot{y}^2(x)\right)^2} = \frac{\frac{xy'(\tau)}{x'(\tau)}}{\left(1+\left(\frac{y'(\tau)}{x'(\tau)}\right)^2\right)^2} = \frac{\frac{x(\tau)y'(\tau)}{x'(\tau)}}{\left(\frac{(x'(\tau))^2+(y'(\tau))^2}{(x'(\tau))^2}\right)^2} = \frac{x(\tau)(x'(\tau))^3y'(\tau)}{\left((x'(\tau))^2+(y'(\tau))^2\right)^2}\,,$$

que corresponde, exactamente, à lei de conservação de Newton (2.5.9) (válida com a restrição $u(x) = \dot{y}(x) > 0$ e sabendo agora nós que a constante é estritamente positiva). □

O método standard para resolver um problema de controlo óptimo começa por garantir a existência de uma solução para o problema, assegurando-se depois a aplicabilidade do princípio do máximo de Pontryagin. Por fim, identificam-se as extremais de Pontryagin (os candidatos). Futuras eliminações, quando necessárias, identificam o minimizante ou minimizantes do problema.

Não é fácil provar a existência de solução para o problema de Newton de resistência mínima com argumentos clássicos. Vamos usar uma abordagem diferente. Vamos mostrar que para o problema de Newton de resistência mínima (3.5.1) as extremais de Pontryagin são minimizantes absolutos. Isto significa que, para resolver o problema de Newton, é suficiente

identificar as extremais de Pontryagin. Deste modo, reduzimos o procedimento de resolução do problema de Newton ao cálculo das extremais de Pontryagin.[5]

Teorema 3.5.4 (As extremais para o problema de Newton são minimizantes). *Se o controlo $\hat{u}(\cdot)$ é um controlo extremal para o problema de Newton de resistência mínima* (3.5.1)*, então $\hat{u}(\cdot)$ é um controlo minimizante absoluto (minimizante global).*

Demonstração. Pela Definição 3.4.2 de extremal de Pontryagin, o controlo $\hat{u}(\cdot)$ verifica a condição de máximo (3.5.2) do princípio do máximo de Pontryagin aplicado ao problema de Newton.

Como $L(x, u(x)) = \frac{x}{1+u^2(x)} \geq 0$ podemos escrever, da condição de máximo que

$$-L\left(x, \hat{u}(x)\right) - \lambda \hat{u}(x) \geq -L\left(x, u(x)\right) - \lambda u(x)\,, \quad \text{q.t.p. } x \in [0, r] \tag{3.5.7}$$

qualquer que seja o $u(\cdot) \in PC\left([0, r], \mathbb{R}^+\right)$.

Tendo em conta que todos os processos admissíveis $(y(\cdot), u(\cdot))$ do problema (3.5.1) satisfazem

$$\int_0^r u(x)dx = \int_0^r \dot{y}(x)dx = y(r) - y(0) = H\,,$$

basta integrar (3.5.7) para obter a conclusão desejada, isto é,

$$\begin{aligned}
&\int_0^r \left(-L\left(x, \hat{u}(x)\right) - \lambda \hat{u}(x)\right) dx \geq \int_0^r \left(-L\left(x, u(x)\right) - \lambda u(x)\right) dx \\
&\Leftrightarrow -\int_0^r \left(L\left(x, \hat{u}(x)\right) + \lambda \hat{u}(x)\right) dx \geq -\int_0^r \left(L\left(x, u(x)\right) + \lambda u(x)\right) dx \\
&\Leftrightarrow \int_0^r L\left(x, \hat{u}(x)\right) dx + \lambda \int_0^r \hat{u}(x)dx \leq \int_0^r L\left(x, u(x)\right) dx + \lambda \int_0^r u(x)dx \\
&\Leftrightarrow \int_0^r L\left(x, \hat{u}(x)\right) dx + \lambda H \leq \int_0^r L\left(x, u(x)\right) dx + \lambda H \\
&\Leftrightarrow \int_0^r L\left(x, \hat{u}(x)\right) dx \leq \int_0^r L\left(x, u(x)\right) dx\,.
\end{aligned}$$

Da conclusão obtida,

$$\int_0^r L\left(x, \hat{u}(x)\right) dx \leq \int_0^r L\left(x, u(x)\right) dx\,,$$

podemos concluir que $\hat{u}(\cdot)$ é um controlo minimizante absoluto para o problema de Newton de resistência mínima. □

Observação 3.5.5. A solução óptima pretendida para o problema de Newton (3.5.1) é exactamente a extremal de Pontryagin. Isto significa, essencialmente, que reduzimos um problema de optimização dinâmica (um problema de minimização num espaço de funções, de dimensão infinita) a um problema de optimização estática (de dimensão finita) dado pela condição de máximo.

[5] Um resultado mais geral - para problemas do tipo de Newton – é provado em [43].

Estamos em condições de determinar a solução $y(\cdot)$ para o problema de Newton de resistência mínima (3.5.1), a partir da condição de máximo do princípio do máximo de Pontryagin e comprovar que coincide com a solução indicada por Newton no seu *Principia Mathematica*.

Teorema 3.5.6 (Solução do problema de Newton de resistência mínima). *A solução $\hat{y}(\cdot)$ para o problema de Newton de resistência mínima,* (3.5.1)*, é dada por $\hat{y}(x) = 0$ para $0 \leq x \leq \xi$ e quando $\xi \leq x \leq r$ é dada na forma paramétrica por*

$$\begin{cases} x(u) = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{u} + 2u + u^3\right), \\ y(u) = \frac{\lambda}{2}\left(-\ln u + u^2 + \frac{3}{4}u^4\right) - \frac{7\lambda}{8} \end{cases} \tag{3.5.8}$$

onde a constante λ é determinada a partir da condição de fronteira $y(r) = H$ e $\xi = 2\lambda$.[6]

Demonstração. Seja $\hat{y}(\cdot)$ a solução do problema de Newton de resistência mínima (3.5.1).

A solução, $\hat{y}(\cdot)$, é dada por duas condições distintas, primeiramente é um segmento de recta com início na origem do referencial no plano e fim num determinado ponto, ξ, do semi-eixo positivo dos xx. Após o ponto ξ a solução de Newton segue a chamada *curva de Newton*.

Vejamos, em pormenor, cada uma das partes da solução para o problema de Newton.

Como já observámos, para o problema de Newton, (3.5.1), os controlos variam num intervalo que não é aberto, donde se torna necessário analisar separadamente os casos em que $u = 0$ e $u > 0$.

Quando $u = 0$ a solução é dada por $y(x) = 0$. Pois, se $u(x) = 0$, então, como $u(x) = \dot{y}(x)$, temos que $\dot{y}(x) = 0$, donde $y(x) = c$, com c uma constante real. Pela condição de fronteira $y(0) = 0$ concluímos que $c = 0$ e o minimizante (absoluto)[7] começa com o segmento de recta $y(x) = 0$, com $x \in [0, \xi]$ e $0 < \xi < r$ (a partir de um certo ponto ξ, $u > 0$ pois $y(r) = H$).

Por outro lado, quando $u > 0$ podemos definir parametricamente a solução do problema de Newton, a partir da equação diferencial de Newton, (3.5.3) (a qual deriva da condição de máximo do princípio do máximo de Pontryagin).

A partir da equação (3.5.3) podemos escrever x em função do parâmetro u, isto é,

$$\frac{xu}{(1+u^2)^2} = \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow 2ux = \lambda\left(1+u^2\right)^2 \Leftrightarrow x = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{u} + 2u + u^3\right).$$

Desta forma, definimos $x(\cdot)$ parametricamente por

$$x(u) = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{u} + 2u + u^3\right).$$

Para acharmos a forma paramétrica de $y(\cdot)$, recordemos a regra da cadeia

$$\frac{d}{du}y(x(u)) = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{du} = u\frac{dx}{du}.$$

[6] O ponto ξ corresponde ao *ponto de quebra*, cf. §1.6, Comentário 1.6.1.

[7] Cf. Teorema 3.5.4.

uma vez que $\frac{dy}{dx} = u$. Vem então que $y(u) = \int u \frac{dx}{du} du$. Como

$$\frac{dx}{du}(u) = \frac{\lambda}{2}\left(-\frac{1}{u^2} + 2 + 3u^2\right),$$

logo,

$$y(u) = \int \frac{\lambda}{2} u \left(-\frac{1}{u^2} + 2 + 3u^2\right) du = \frac{\lambda}{2}\left(-\ln u + u^2 + \frac{3}{4}u^4\right) + m, \tag{3.5.9}$$

onde m é uma constante.

Para podermos determinar a constante m da equação anterior, é necessário determinar o ponto onde $\hat{y}(\cdot)$ não é diferenciável, ξ, que também designamos por *ponto de quebra*.

Determinemos, então, o ponto ξ, $0 < \xi < r$, onde a função $\hat{y}(\cdot)$ não é diferenciável. Neste ponto, os dois ramos de $\hat{y}(\cdot)$ coincidem (pela continuidade de $\hat{y}(\cdot)$).

Seja $\hat{u}(x)$ o controlo minimizante do problema de Newton. Então,

$$\mathcal{H}(\xi, 0) = \mathcal{H}\left(\xi, \hat{u}(\xi)\right). \tag{3.5.10}$$

Pela definição de Hamiltoniano para o problema de Newton de resistência mínima, temos

$$\mathcal{H}(\xi, 0) = -\frac{\xi}{1+0^2} - \lambda \times 0 = -\xi \quad \text{e} \quad \mathcal{H}(\xi, \hat{u}(\xi)) = -\frac{\xi}{1+\left(\hat{u}(\xi)\right)^2} - \lambda \hat{u}(\xi).$$

Logo, a partir de (3.5.10), temos

$$\mathcal{H}(\xi, 0) = \mathcal{H}\left(\xi, \hat{u}(\xi)\right) \Leftrightarrow \xi = \frac{\xi}{1+\left(\hat{u}(\xi)\right)^2} + \lambda \hat{u}(\xi). \tag{3.5.11}$$

Por outro lado, $\hat{u}(\xi)$ tem que satisfazer a equação diferencial de Newton (3.5.3), donde

$$\frac{\xi \hat{u}(\xi)}{\left(1+\left(\hat{u}(\xi)\right)^2\right)^2} = \frac{\lambda}{2}. \tag{3.5.12}$$

Resolvamos a equação (3.5.11) em ordem à constante λ.

$$\xi = \frac{\xi}{1+\left(\hat{u}(\xi)\right)^2} + \lambda \hat{u}(\xi) \Leftrightarrow -\frac{\xi}{1+\left(\hat{u}(\xi)\right)^2} + \xi = \lambda \hat{u}(\xi) \Leftrightarrow \frac{-\xi + \xi\left(1+\left(\hat{u}(\xi)\right)^2\right)}{1+\left(\hat{u}(\xi)\right)^2} = \lambda \hat{u}(\xi)$$
$$\Leftrightarrow \frac{\xi\left(\hat{u}(\xi)\right)^2}{1+\left(\hat{u}(\xi)\right)^2} = \lambda \hat{u}(\xi) \Leftrightarrow \frac{\xi \hat{u}(\xi)}{1+\left(\hat{u}(\xi)\right)^2} = \lambda.$$

Ou seja, a constante λ é dada pela condição

$$\lambda = \frac{\xi \hat{u}(\xi)}{1+\left(\hat{u}(\xi)\right)^2}. \tag{3.5.13}$$

Substituindo (3.5.13) em (3.5.12) obtemos

$$\frac{\xi \hat{u}(\xi)}{\left(1+\left(\hat{u}(\xi)\right)^2\right)^2} = \frac{\xi \hat{u}(\xi)}{2\left(1+\left(\hat{u}(\xi)\right)^2\right)} \Leftrightarrow \hat{u}^2(\xi) = 1,$$

como $\hat{u}(x) \geq 0$, então $\hat{u}^2(\xi) = 1 \Rightarrow \hat{u}(\xi) = 1$.

Tal como Newton afirmou no seu *Principia*, "a tangente ao gráfico no ponto de *quebra* é igual a 1". Ou seja, afirmar que no ponto de *quebra*, designadamente, no ponto ξ, a tangente é 1, é equivalente a afirmar que $\hat{u}(\xi) = 1$ ($\tan\alpha = 1 \Leftrightarrow \dot{y}(\xi) = 1 \Leftrightarrow \hat{u}(\xi) = 1$).

Substituindo $\hat{u}(\xi) = 1$ na equação (3.5.12) temos $\frac{\xi}{(1+1^2)^2} = \frac{\lambda}{2}$, ou seja, $\xi = 2\lambda$.

Estamos em condições de determinar a constante m da equação (3.5.9). Tal é possível se tivermos em conta que no ponto ξ, $\hat{u}(\xi) = 1$ e $y\left(\hat{u}(\xi)\right) = 0$. Então,

$$y\left(\hat{u}(\xi)\right) = 0 \Leftrightarrow y(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{2}\left(-\ln 1 + 1 + \frac{3}{4}\right) + m = 0 \Leftrightarrow \frac{7\lambda}{8} = -m\,,$$

ou seja, $m = -\frac{7\lambda}{8}$.

Assim, podemos concluir que para o caso em que $u > 0$, a solução para o problema de Newton de resistência mínima é dada na forma paramétrica pelas equações (3.5.8),tal como pretendíamos mostrar. □

À curva obtida a partir do Teorema 3.5.6 dá-se o nome de *curva de Newton*.

É importante salientar a razão pela qual a solução para o problema de Newton é inicialmente dada por $y(x) = 0$ para $x \in [0, \xi]$, $0 < \xi = 2\lambda < r$, e para $x \in [\xi, r]$ por (3.5.8). De facto, se a solução de Newton fosse dada pelas equações (3.5.8) para todo o $x \in [0, r]$ a condição de fronteira $y(0) = 0$ não seria verificada, como vimos no Capítulo 2 (cf. Proposição 2.5.3).

Vejamos como obter a representação gráfica da solução do problema de Newton de resistência mínima, para um raio e uma altura previamente fixos.

A primeira parte da solução é dada por $y(x) = 0$ para todo o $x \in [0, \xi]$, em que $\xi = 2\lambda$, e a sua representação gráfica é facilmente obtida. Neste caso, por razões técnicas do sistema Maple, optaremos por representá-la também na forma paramétrica, uma vez que a segunda parte da solução é dada na forma paramétrica.

Em relação à segunda parte, $x \in [\xi, r]$, para representar a solução de Newton dada no Teorema 3.5.6 é necessário encontrar o valor da constante λ, o ponto de quebra ξ e o intervalo de variação do parâmetro u para o raio e altura previamente dados. Na prática, ao determinarmos o valor da constante λ o ponto ξ fica automaticamente determinado, pois $\xi = 2\lambda$.

O intervalo de variação do parâmetro u é determinado resolvendo as inequações:

$$\xi \leq x(u) \leq r \Leftrightarrow \xi \leq \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{u} + 2u + u^3\right) \leq r\,,$$

isto é, como $\xi = 2\lambda$,

$$2\lambda \leq \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{u} + 2u + u^3\right) \leq r\,.$$

Da inequação $2\lambda \leq \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{u} + 2u + u^3\right)$, obtemos que o valor mínimo tomado pelo parâmetro u é 1, independentemente do valor do raio e da altura do sólido, o que, mais uma vez, vai de encontro à afirmação de Newton: *"a tangente ao gráfico no ponto de quebra é igual a 1"*. O valor máximo tomado pelo parâmetro u pode ser encontrado em simultâneo com a determinação da constante λ resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x(u) = r \\ y(u) = H \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{u} + 2u + u^3\right) \\ H = \frac{\lambda}{2}\left(-\ln u + u^2 + \frac{3}{4}u^4\right) - \frac{7\lambda}{8} \end{cases}$$

uma vez que a constante λ é determinada recorrendo à condição de fronteira $y(r) = H$.

Resolvendo o sistema anterior[8] obtemos o valor máximo, u_{max}, tomado pelo parâmetro u e pela constante λ em função do valor dado ao raio e à altura.

Obtidos estes valores estamos em condições de representar graficamente a solução do problema de Newton de resistência mínima.

A forma paramétrica da primeira parte da solução é dada por

$$\begin{cases} x(u) = u \\ y(u) = 0\,, \end{cases}$$

onde o parâmetro u toma valores no intervalo $[0, 1]$.

Em relação à segunda parte da solução, a sua representação paramétrica é

$$\begin{cases} x(u) = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{u} + 2u + u^3\right) \\ y(u) = \frac{\lambda}{2}\left(-\ln u + u^2 + \frac{3}{4}u^4\right) - \frac{7\lambda}{8}\,, \end{cases}$$

em que u toma valores no intervalo $[1, u_{max}]$.

Na figura 3.1 podemos observar o gráficos da solução para o problema de Newton[9] considerando o raio fixo, $r = 1$ e a altura variando entre os valores $H = 0.5$, $H = 1$, $H = 2$ e $H = 5$.

Observação 3.5.7. Se considerarmos em (3.5.8) que $u = \tan\alpha$ obtemos a solução da *lei de conservação de Newton* dada pela equação (2.5.13), com a restrição $u > 0$.

Observação 3.5.8. Obter a solução $y(x)$ do problema de Newton na forma não paramétrica é uma tarefa difícil. A fórmula explícita para a função inversa $x(y)$ da solução do problema de Newton parece ter sido encontrada pela primeira vez, em [2].

[8] O sistema foi resolvido no Maple, cf. Apêndice A.0.6, página 70.

[9] Os gráficos foram construídos no sistema de computação Maple, cf. Apêndice A.0.6, página 70.

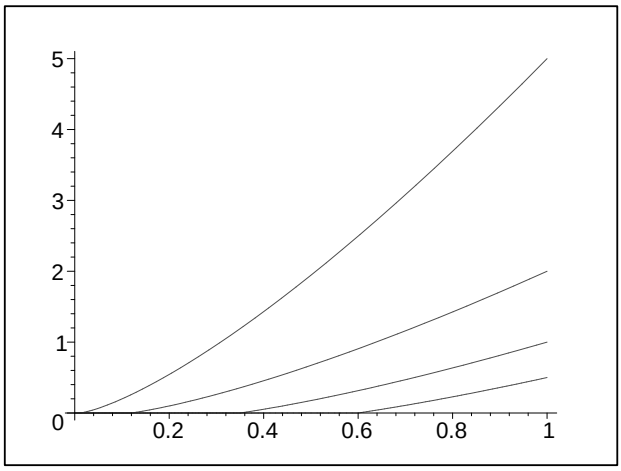


Figura 3.1: Solução do problema de Newton

3.6 Comentários

Comentário 3.6.1 *(O problema de resistência mínima colocou Newton 300 anos à frente do seu tempo.).* Dissemos anteriormente que o problema de Braquistócrona originou uma nova era - a era do cálculo das variações. Esta área experimentou um intenso crescimento durante mais de trezentos anos. No entanto, tal como referimos anteriormente, só em meados do século vinte foi bem compreendido que muitos problemas técnicos de interesse nas aplicações, não podem ser resolvidos através do cálculo das variações. Em alternativa, a necessidade de um novo passo em frente tornou-se real: uma nova teoria - que incorpora o cálculo das variações - conhecida por *controlo óptimo*. O problema de Newton pertence à categoria dos problemas de controlo óptimo. Em conformidade com a estrutura desta teoria o problema de Newton tem uma solução natural e standard. Por outro lado, este problema não tem nenhuma solução natural ou standard com a estrutura do cálculo das variações. *Logo este problema colocou Newton 300 anos à frente do seu tempo!*

Comentário 3.6.2. Em algumas conversas com especialistas da área, nomeadamente a propósito de uma visita do matemático T. Lachand-Robert ao Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, tomámos conhecimento que a solução do problema de Newton de resistência mínima tem aplicações na construção de balas para determinados tipos de armas de fogo.

Conclusão

Com a publicação de uma das obras mais importantes da história da matemática, abreviadamente designada por *Principia Mathematica*, da autoria de Sir Isaac Newton, em 1687, [27], surgiu um problema que suscitou grande controvérsia e que actualmente contínua a ser alvo de investigação - o chamado *Problema de Newton de Resistência Mínima*.

Neste problema pretende-se determinar a forma do corpo de revolução que oferece resistência total mínima quando em rotação em torno do seu eixo de simetria, com velocidade constante, e deslocando-se, num determinado meio resistente, na direcção do eixo. Newton considerou que o corpo se movimenta num meio raro; que as partículas do meio em que o corpo se desloca se encontram imóveis; que as colisões com o corpo são perfeitamente elásticas; que a massa é igual para todas as partículas; e que elas se encontram a igual distância umas das outras.

Newton não só formulou o problema, como indicou no seu livro a sua solução. No entanto, não deu a menor explicação de como a obter.

Na nossa opinião, não o fez por uma razão muito simples: no século dezassete tal não era possível. O problema de Newton de resistência mínima é um problema típico da teoria matemática do controlo óptimo, uma disciplina desenvolvida em meados do século vinte.

Assim sendo, tendo em conta que a publicação do problema de Newton de resistência mínima e da respectiva solução foi feita em 1687 e que a publicação da solução do problema de Braquistócrona foi feita em 1697, podemos dizer que o controlo óptimo nasceu antes do cálculo das variações [43]!

A utilidade prática do problema de Newton foi também prorrogada por muitos longos anos: nem a água, nem o ar envolvente, apresentam as propriedades do meio raro considerado por Newton. É mesmo interessante notar que a solução do problema de Newton não é intuitiva: a nossa intuição está condicionada aos meios que nos rodeiam, que estão longe do meio raro postulado. Nenhum navio, por exemplo, é construído com a forma óptima do problema de Newton! No entanto, a grande altitude, onde o ar é rarefeito, muitas aplicações são possíveis. Não é pois de estranhar que a recente importância das ciências do espaço tenha feito renascer o interesse num problema com mais de trezentos anos! Problemas do tipo de Newton aparecem naturalmente na construção de veículos espaciais de alta velocidade, a grande altitude, como mísseis ou satélites artificiais.

Extensões do problema de Newton, sobre condições mais realistas, é um assunto actual de intensa investigação. Resultados recentes incluem: corpos assimétricos [8]; uma colisão com corpos não convexos [10]; colisões com fricção (colisões não elásticas) [19]; permissão de múltiplas colisões [28]; partículas com temperatura [29, 30].

Muitas questões mantêm-se em aberto para futuras investigações: resolver problemas do tipo de Newton para corpos não convexos; considerar o caso, fisicamente importante, de misturas de gases; resolver problemas inversos de pressão do fluxo de partículas; estimar a resistência de corpos não contínuos; considerar problemas do tipo de Newton com rotação do corpo; explicar o papel da secção de ouro (mais precisamente, a raiz quadrada da secção de ouro!) que aparece em [30]; etc, etc. Estes e outros problemas são assuntos de investigação do *Centro de Estudos em Optimização e Controlo* (CEOC) da Universidade de Aveiro.

Bibliografia

[1] P.V. Araujo, *Curso de Geometria*, Gradiva, Lisboa, 1999. UCMA 51-01/ARA/ex.1

[2] I. M. Azevedo do Amaral. *Note sur la solution finie d'un problème de Newton*, Ann. Ac. Pol. Porto, Vol. 8, pp. 207–209, 1913.

[3] M. Belloni, B. Kawohl. *A paper of Legendre revisited*, Forum Mathematicum, Vol. 9, pp. 655–668, 1997.

[4] G.H. Bliss, *Lectures on Calculus of Variations*, University of Chicago, 1968. SDUA 517.9A.41

[5] O. Bolza, *Lectures on the Calculus of Variations*, AMS Chelsea Publishing, Providence, 1973. 517A.323.3ed

[6] C.B. Boyer, *História da Matemática*, Editora Edgard Blücher, São Paulo, Brazil, 1993. UCMA 01A05/BOY.His/trd.pt/ex.2

[7] A.E. Bryson Jr., Optimal control - 1950 to 1985 *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 16, Issue 3, pp. 26-33, 1996.

[8] G. Buttazzo, B. Kawohl. *On Newton's problem of minimal resistance*, Math. Intelligencer, Vol. 15, No. 4, pp. 7–12, 1993.

[9] P. Cicala, *An Engineering Approach to the Calculus of Variations*, Levrotto and Bella, Torino, 1957.

[10] M. Comte, T. Lachand-Robert. *Newton's problem of the body of minimal resistance under a single-impact assumption*, Calc. Var. Partial Differential Equations, Vol. 12, No. 2, pp. 173–211, 2001.

[11] F.S. David, *O Cálculo Variacional Clássico e algumas das suas aplicações à Física Matemática*, Gabinete de Planeamento de Centros Produtores, 1986. SDUA 517.9A.343

[12] F.R. Dias Agudo, *Introdução à Álgebra Linear e Geometria Analítica*, Livraria Escolar Editora, Lisboa, 1978. SDUA 512A.695.4ed

[13] J. Fergunson, *A Brief Survey of the History of the Calculus of Variations and its Applications*, University of Victoria. `http://arxiv.org/ftp/math/papers/0402/0402357.pdf`

[14] B. Fraeijs de Veubeke. *Le problème de Newton du solide de révolution présentant une trâinée minimum*, Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci., Vol. 52, No. 5, pp. 171–182, 1966.

[15] I.M. Gelfand and S.V. Fomin, *Calculus of Variations*, Dover Publications, Mineola, NY, 2000.

[16] M. Giaquinta, S. Hildebrant. *Calculus of Variations I*, Springer-Verlag, 1996. `SDUA 517.97A.5V.1`

[17] H. Górecki, A. Korytwoski, M. Szymkat, A. Turnau. *Optimal Control - a Survey*, St. Staszic Technical University - AGH, Kraków, Poland.

[18] E. Hairer and G. Wanner, *Analysis by Its History*, Springer, New York, 2000. `SDUA 517A.236`

[19] D. Horstmann, B. Kawohl, P. Villaggio. *Newton's aerodynamic problem in the presence of friction*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl., Vol. 9, No. 3, pp. 295–307, 2002.

[20] A. Kneser, E. Zermelo, H. Hahn, and M. Lecat. *Problème de Newton et questions analogues – Surfaces propulsives*, Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées, Édition Française, Tome II, Vol. 6, Fasc. 1, Calcul des variations, Paris: Gauthier Villars, Leipzig: B. G. Teubner, pp. 243–250, 1913.

[21] D.F. Lawden, *Optimal Trajectories for Space Navigation*, Butterworths, London, 1963.

[22] G. Leitmann, *The Calculus of Variations and Optimal Control – An introduction*, Plenum Press, New York, 1981. `UCEE-C 1180-LEI`

[23] E.L. Lima, *Curso de análise*, Vol. 1, Projecto Euclides, São Paulo, 1995. `SDUA 512A.636.1V.1.8ed`

[24] J. Macki, A. Strauss, *Introduction to Optimal Control Theory*, Springer-Verlag, New York, 1982. `SDUA 517.9.47`

[25] E.J. McShane, *The Calculus of Variations from the beginning through Optimal Control Theory*, SIAM J. Control and Optimization, Vol. 27,No. 5, pp. 916-939, Setembro 1989.

[26] J. Milnor, *Morse Theory* – Based on Lectures notes by M. Spivak and R. Wells, Princeton University Press, 1969. `SDUA 517.97.3`

[27] Sir I. Newton , *Mathematical Principles of Natural Philosophy and his system of the world – A revision of Motte's translation*, University of California Press, Berkeley, California, 1947. Tradução revista e aumentada com um apêndice histórico e explicativo por Florian Cajori `UCMA: CAVE-01A75/NEW.Sir`

[28] A. Yu. Plakhov. *Newton's problem of the body of minimal aerodynamic resistance*, Doklady of the Russian Academy of Sciences, Vol. 390, No. 3, pp. 1–4, 2003.

[29] A. Yu. Plakhov, D. F. M. Torres. *Two-dimensional problems of minimal resistance in a medium of positive temperature*, Proceedings of the 6th Portuguese Conference on Automatic Control - Controlo 2004, pp. 488–493, 2004. `arXiv:math.OC/0404194`

[30] A. Yu. Plakhov, D. F. M. Torres. *Newton's aerodynamic problem in a medium consisting of moving particles*, Pré-publicação: Cadernos de Matemática CM04/I-22, Dep. Matemática, Univ. Aveiro, Setembro 2004. E-Print: `arXiv:math.OC/0407406`. Publicação: *Newton's aerodynamic problem in a medium of chaotically moving particles*, Aceite para Sbornik Mathematics.

[31] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko. *The mathematical theory of optimal processes*, Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc. New York-London, 1962.

[32] H. Sagan, *Introduction to the Calculus of Variations*, Dover Publications, Mineola, NY, 1992. `SDUA 517.9A.101`

[33] I.V. Savelyev, *Physics - A General Course*, Vol. 1, Mir Publishers, Moscow, NY, 1980.

[34] C.J. Silva, D.F.M. Torres, *On the Classical Newton's Problem of Minimal Resistance*, 3rd Junior European Meeting on Control, Optimization, and Computation, Universidade de Aveiro, 6-8 Setembro 2004, Portugal. M. Guerra and D.F.M. Torres eds., Artigo de investigação CM05/I-04, Dep. Matemática, Univ. Aveiro, Fevereiro 2005, pp. 125–133.

[35] G. Smirnov, V. Bushenkov, *Curso de Optimização - Programação Matemática, Cálculo das Variações, Controlo Óptimo*, Escolar Editora, Lisboa, 2005.

[36] H.J. Sussmann, J.C. Willems, 300 Years of Optimal Control: From the Brachystochrone to the Maximum Principle – *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 17, Issue 3, pp. 32-44, 1997.

[37] H.J. Sussmann, Optimal Control. In *Three decades of mathematical system theory*, pp. 409-425, Springer, Berlin, 1989.

[38] H.J. Sussmann, Thirty years of optimal control. Was the path unique? In *Modern optimal control*, pp. 359-375, Dekker, New York, 1989.

[39] V.M. Tikhomirov, *Stories about maxima and minima*, American Mathematical Society, RI, 1990. SDUA 517.9A.328V.1

[40] V.M. Tikhomirov, Extremal Problems - Past and Present. In *The Teaching of Mathematics*, Vol. 2, pp. 59-69, 2002.

[41] D.F.M. Torres, *Regularidade dos Minimizantes no Cálculo das variações e Controlo Óptimo*. Tese de Doutoramento, Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, Dezembro 2002. SDUA 517.7(086.76)

[42] D.F.M. Torres. *Carathéodory-Equivalence, Noether Theorems, and Tonelli Full-Regularity in the Calculus of Variations and Optimal Control*, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 120, No. 1, pp. 1032–1050, 2004. arXiv:math.OC/0206230

[43] D.F.M. Torres, A. Yu. Plakhov. *Optimal Control of Newton-Type Problems of Minimal Resistance*, Aceite para publicação no *Rendiconti del Seminario Matematico di Torino*, para aparecer no Vol. 64 (2006) No.1.

[44] L. C. Young. *Lectures on the calculus of variations and optimal control theory*, Chelsea Publising Co., New York, 1980. SDUA 517.7A.23

Índice

autónomo, 38

Bliss, 38
Boltyanskii, 52
Bolza, 5, 38
Braquistócrona, 30, 35, 52

Cajori, 2
campo de extremais, 37
CEOC, 66
Cicala, 38
colisões não elásticas, 66
condição de máximo, 54, 55
condição necessária de Euler-Lagrange, 36, 41, 44
condição necessária de Legendre, 41, 44, 45
condição necessária de Weierstrass, 41, 43
condição suficiente de Jacobi, 37
controlo extremal, 54, 58
controlo óptimo, 7, 49, 51, 63
corpos assimétricos, 66
corpos não convexos, 66
curva de Newton, 28, 59, 61
cálculo das variações, 7, 33, 36, 51
cálculo diferencial, 16

dinâmica, 53

equação de controlo, 53, 55
equação de Euler-Lagrange, 36, 42
equação diferencial de Newton, 28, 30, 57
Euler, 36
extremais, 42
extremal anormal, 54
extremal de Pontryagin, 54
extremal normal, 54

Fermat, 35
Formulação clássica, 42
formulação correcta, 49, 55
Formulação não paramétrica, 38
Formulação paramétrica, 39, 43
função excesso de Weierstrass, 37, 41, 43

Gamkrelidze, 52
Graves, 52

Hamilton, 37
Hamiltoniano, 37, 54, 55
Hero da Alexandria, 35
Hestenes, 52

integral de Riemann, 27

Jacob Bernoulli, 36
Jacobi, 37
Johann Bernoulli, 30, 35

l'Hôpital, 36
Lagrange, 36
Lagrangeano, 38, 43, 44, 53
Legendre, 37, 48
lei de conservação de Newton, 6, 28, 45, 46, 57, 62
Leibniz, 36

matriz Hessiana, 45
matriz semi-definida positiva, 45
maximizante global, 39

meio raro, 1, 9–11, 23, 27, 30, 65
minimizante absoluto, 58
minimizante global, 39
minimizante local, 40
minimizante local forte, 40, 41
minimizante local fraco, 40, 42, 47, 48
Mishchenko, 52
momento, 12
mínimo forte, 37
mínimo global, 41
mínimo local, 41
métrica, 40
múltiplas colisões, 66

Newton, 1, 36, 65

optimização dinâmica, 58

Pappus, 35
paradoxo de Perron, 41
partículas com temperatura, 66
ponto de quebra, 30, 60
Pontryagin, 52
primeiro integral da equação diferencial de Euler, 6
Principia Mathematica, 1, 9, 49, 65
Princípio do Máximo de Pontryagin, 49, 52, 54, 55
problema autónomo, 43
problema de Bolza do controlo óptimo, 53
problema de Dido, 35
problema de Lagrange do controlo óptimo, 53
problema de Mayer do controlo óptimo, 53
problema de Newton de resistência mínima, 1, 10
problema do tronco do cone, 11
problema fundamental do cálculo das variações, 38, 53
problema isoperimétrico, 35
problema não autónomo, 43
problemas do tipo de Newton, 58, 66
processo, 53

secção de ouro, 66
sistema adjunto, 54, 55
sistema de controlo, 53, 54
sistema Hamiltoniano, 54, 55
Sussmann, 52

Tikhomirov, 7, 31
trajectória de estado, 53
trajectórias admissíveis, 38
Tschirnhaus, 36

variável de controlo, 53
vizinhança forte, 40
vizinhança fraca, 40

Weierstrass, 37
Willems, 52

Apêndice A

Cálculos auxiliares

Neste apêndice mostramos cálculos intermédios realizados com a ajuda do sistema de computação algébrica Maple.

A.0.1 Problema 1.2.5

Vejamos em pormenor alguns cálculos intermédios da resolução, através do cálculo diferencial, do Problema 1.2.5, §1.2.

Em particular, o cálculo da primeira e segunda derivadas da função h (cf. página 17).

```
> h:= z -> ((z-H)^2+R^2)/(z^2+R^2);
```

$$h := z \mapsto \frac{(z-H)^2+R^2}{z^2+R^2}$$

Consideremos a função h dada pela expressão anterior e calculemos a sua primeira derivada.

```
> diff(h(z), z);
```

$$\frac{2\,z-2\,H}{z^2+R^2} - 2\,\frac{\left((z-H)^2+R^2\right)z}{\left(z^2+R^2\right)^2}$$

```
> simplify(diff(h(z),z));
```

$$-2\,\frac{H\left(-z^2+R^2+zH\right)}{\left(z^2+R^2\right)^2}$$

Esta é a expressão simplificada da primeira derivada de h. De seguida vamos calcular a segunda derivada de h, simplificando de imediato a sua expressão.

```
> simplify(diff((h(z), z),z));
```

$$-2\,\frac{H\left(2\,z^3-6\,zR^2-3\,Hz^2+HR^2\right)}{\left(z^2+R^2\right)^3}$$

Calculemos, agora, o valor da segunda derivada de h para o ponto crítico encontrado igualando a primeira derivada de h a zero.

```
> simplify(subs(z=H/2+sqrt((H/2)^2+R^2), simplify(diff((h(z), z),z))));
```

$$8\,\frac{H\left(H^3+H^2\sqrt{H^2+4\,R^2}+4\,R^2\sqrt{H^2+4\,R^2}+4\,HR^2\right)}{\left(H^2+H\sqrt{H^2+4\,R^2}+4\,R^2\right)^3}$$

Esta é a expressão indicada em (1.2.7), na pág. 17.

A.0.2 Proposição 1.3.2

De seguida, apresentamos alguns dos cálculos efectuados na demonstração da Proposição 1.3.2 (cf. página 21).

Comecemos por mostrar que $g_1(0) < g_1(H)$.

```
> g1:=y -> 1/(a^2+y^2) + 3/(a^2+(H-y)^2);
```

$$g1 := y \mapsto \frac{1}{a^2+y^2} + \frac{3}{a^2+(H-y)^2}$$

```
> g1(0);
```

$$\frac{1}{a^2} + \frac{3}{a^2+H^2}$$

```
> g1(H);
```

$$\frac{1}{a^2+H^2} + \frac{3}{a^2}$$

```
> simplify(g1(0)-g1(H));
```

$$-2\,\frac{H^2}{a^2(a^2+H^2)}$$

Relativamente à alíena b), temos:

```
> simplify(g1(epsilon,H)-g1(0,H));
```

$$\frac{\epsilon\left(-4\,a^4\epsilon-\epsilon\,H^4+2\,\epsilon^2H^3-4\,\epsilon^3a^2-\epsilon^3H^2+6\,a^4H-2\,a^2\epsilon\,H^2+8\,\epsilon^2Ha^2\right)}{(a^2+\epsilon^2)(a^2+H^2-2\,H\epsilon+\epsilon^2)a^2(a^2+H^2)}$$

Tendo em conta que $a^2 + H^2 - 2H\epsilon + \epsilon^2 = a^2 + (H - \epsilon)^2$, obtemos a expressão (1.3.3).

A.0.3 Função Excesso de Weierstrass

Vejamos como efectuámos os cálculos, com a ajuda do Maple, para obter a expressão final para a função excesso de Weierstrass dada pela equação (2.5.5), §2.5.3.

```
> F:=(x,y,xl,yl)->(x*xl^3)/(xl^2+yl^2);
```

$$(x, y, xl, yl) \mapsto \frac{x\,xl^3}{xl^2+yl^2} := (x, y, xl, yl) \mapsto \frac{x\,xl^3}{xl^2+yl^2}$$

```
> dFdxl:=(x,y,xl,yl)->simplify(diff(F(x,y,xl,yl),xl)):
> dFdxl(x,y,u,v);
```

$$\frac{xu^2\left(u^2+3\,v^2\right)}{\left(u^2+v^2\right)^2}$$

```
> dFdyl:=(x,y,xl,yl)->simplify(diff(F(x,y,xl,yl),yl)):
> dFdyl(x,y,u,v);
```

$$-2\,\frac{xu^3v}{\left(u^2+v^2\right)^2}$$

```
> E:=(x,y,xl,yl,u,v)->simplify(F(x,y,u,v)-F(x,y,xl,yl)+
> dFdxl(x,y,xl,yl)*(xl-u)+dFdyl(x,y,xl,yl)*(yl-v)):
```

```
> E(x,y,xl,yl,u,v);
```

$$\frac{x\left(-u^3 xl^2 yl^2+u^3 yl^4-xl^4 uv^2-3\,xl^2 uv^2 yl^2+2\,xl^3 yl\,vu^2+2\,xl^3 yl\,v^3\right)}{(u^2+v^2)\left(xl^2+yl^2\right)^2}$$

Mudança para coordenadas polares:

```
> simplify(subs(xl=rho*cos(theta),yl=rho*sin(theta),u=s*cos(alpha),
> v=s*sin(alpha),E(x,y,xl,yl,u,v)));
```

$$xs\left((\cos(\alpha))^3+2\,(\cos(\theta))^4\cos(\alpha)-3\,(\cos(\theta))^2\cos(\alpha)+2\,(\cos(\theta))^3\sin(\theta)\sin(\alpha)\right)$$

```
> final:=-s*x*(sin(alpha-theta))^2*cos(2*alpha+theta);
```

$$final := -sx\,(\sin(-\alpha+\theta))^2\cos(2\,\alpha+\theta)$$

```
> simplify(expand(final));
```

$$sx\left((\cos(\theta))^3-3\,\cos(\theta)\,(\cos(\alpha))^2+2\,\cos(\theta)\,(\cos(\alpha))^4+2\,(\cos(\alpha))^3\sin(\theta)\sin(\alpha)\right)$$

A.0.4 Condição necessária de Legendre

Relativamente à aplicação da condição necessária de Legendre (2.4.4) em §2.5.4, ao problema de Newton de resistência mínima na forma paramétrica (2.5.4), vejamos alguns dos cálculos efectuados (cf. pág. 45).

```
> F:=(x,y,xl,yl)->(x*xl^3)/(xl^2+yl^2);
```

$$(x,y,xl,yl)\mapsto \frac{xxl^3}{xl^2+yl^2} := (x,y,xl,yl)\mapsto \frac{xxl^3}{xl^2+yl^2}$$

Vejamos se a matriz Hessiana H é semi-definida positiva.

```
> leg := simplify(evalm((evalm(hessian(F(x,y,xl,yl),[xl,yl]) &*
> vector(2,[xi1,xi2]))) &* vector(2,[xi1,xi2])));
```

$$leg := -2\,\frac{xxl\left(-3\,yl^2+xl^2\right)(-yl\,xi1+xl\,xi2)^2}{\left(xl^2+yl^2\right)^3}$$

Da condição necessária de Legendre, pretendemos verificar em que condições é que a expressão anterior é não negativa. Para tal, podemos ignorar o denominador e a expressão $(-ylxi1+xlxi2)^2$ uma vez que ambos são sempre não negativos. Consideremos então a expressão simplificada:

```
> leg1:=numer(leg)/((-yl*xi1+xl*xi2)^2);
```

$$leg1 := -2\,xxl\,\left(-3\,yl^2+xl^2\right)$$

Analogamente ao que fizemos na condição necessária de Weierstrass, façamos a mudança para coordenadas polares.

```
> leg2 := simplify(subs(xl=r*cos(alpha),yl=r*sen(alpha),leg1));
```

$$leg2 := -2\,xr^3\cos(\alpha)\left(-3\,(sen(\alpha))^2+(\cos(\alpha))^2\right)$$

Esta é a expressão indicada em (2.5.12).

A.0.5 Proposição 2.5.2

Relativamente à Proposição 2.5.2, §2.5.4, vejamos como podemos verificar que a solução paramétrica dada por (2.5.13) verifica a lei de conservação de Newton.

```
> LCN := (x,y) -> (x(alpha)*D(x)(alpha)^3*D(y)(alpha))/(D(x)(alpha)^2+
> D(y)(alpha)^2)^2;
```

$$LCN := (x,y) \mapsto \frac{x(\alpha)\left(\mathrm{D}(x)(\alpha)\right)^3 \mathrm{D}(y)(\alpha)}{\left(\mathrm{D}(x)(\alpha)\right)^2+\left(\mathrm{D}(y)(\alpha)\right)^2\ ^2}$$

```
> x := alpha -> (k/tan(alpha))*(1+(tan(alpha))^2)^2;
```

$$x := \alpha \mapsto \frac{k\left(1+(\tan(\alpha))^2\right)^2}{\tan(\alpha)}$$

```
> y := alpha -> m+k*(-ln(tan(alpha))+tan(alpha)^2+(3/4)*tan(alpha)^4);
```

$$y := \alpha \mapsto m + k\left(-\ln\left(\tan\left(\alpha\right)\right) + \left(\tan\left(\alpha\right)\right)^2 + 3/4\ \left(\tan\left(\alpha\right)\right)^4\right)$$

```
> simplify(LCN(x,y));
```

$$k$$

A.0.6 Solução do problema de Newton

No Teorema 3.5.6, §3.5, apresentamos a solução para o problema de Newton de resistência mínima. Para obter a representação gráfica da solução do problema de Newton é necessário determinar o valor da constante λ e o intervalo de variação do parâmetro u, uma vez que parte da solução de Newton é dada na forma paramétrica. No procedimento abaixo indicado (efectuado no sistema de computação algébrica Maple) calculamos o valor da constante λ e o valor máximo tomado pelo parâmetro u em função da condição de fronteira $y(r) = H$.

De seguida, representamos graficamente a solução do problema de Newton de resistência mínima para alguns casos específicos, nomeadamente quando o raio, r, é igual a 1 e a altura, H, toma os valores 0.5, 1, 2 e 5.

```
> restart;
> with(plots):
> solN := proc(r,H)
> local ax, eq1, eq2, lambdaeuM, x, y, p1, p2, lambda,uM:
> eq1 := (r,u) -> r = (lambda/2)*((1/u)+2*u+u^3);
> eq2 := (H,u) -> H = (lambda/2)*(-ln(u)+u^2+(3/4)*u^4) -
> (7/8)*lambda;
> lambdaeuM := (r,H) ->
> fsolve({eq1(r,uM),eq2(H,uM)},{lambda,uM}):
> ax := lambdaeuM(r,H);
>
> assign(ax);
```

```
> x := (u,lambda) -> (lambda/2)*((1/u)+2*u+u^3);
> y := (u,lambda) ->
> (lambda/2)*(-ln(u)+u^2+(3/4)*u^4)-(7*lambda)/(8);
> p1 := plot([u,0,u=0..2*lambda]):
> p2 := plot([x(u,lambda),y(u,lambda),u=1..uM]):
> return(display({p1,p2}));
> end proc:
> h05 := solN(1,0.5):
> h1 := solN(1,1):
> h2 := solN(1,2):
> h5 := solN(1,5):
> display({h05,h1,h2,h5});
```

(Gráficos mostrados na Figura 3.1.)