



**Paula Cristina Roque
da Silva Rama**

**Propriedades Combinatórias e Espectrais
de Grafos com Restrições de Regularidade**



**Paula Cristina Roque
da Silva Rama**

**Propriedades Combinatórias e Espectrais
de Grafos com Restrições de Regularidade**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Matemática, realizada sob a orientação científica do Prof. Doutor Domingos Moreira Cardoso, Professor Associado com Agregação do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

O júri

presidente

Reitora da Universidade de Aveiro

vogais

Doutor Jorge Orestes Lasbareres Cerdeira

Professor Associado com Agregação do Instituto Superior de Agronomia da Universidade Técnica de Lisboa

Doutor Domingos Moreira Cardoso

Professor Associado com Agregação da Universidade de Aveiro (orientador)

Doutor António José Esteves Leal Duarte

Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Doutora Maria Leonor Nogueira Coelho Moreira

Professora Auxiliar da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Doutora Rosa Amélia Batista Ferreira Soares Martins

Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

Agradecimentos

Ao meu orientador Doutor Domingos Moreira Cardoso, pela sua orientação científica, apoio e disponibilidade demonstrados ao longo destes anos de trabalho.

Ao Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro e ao seu Laboratório de Cálculo pelas facilidades concedidas durante a realização deste trabalho.

Ao Centro de Estudos em Optimização e Controlo (CEOC) pelo suporte financeiro das minhas participações em congressos e pelo equipamento informático.

Ao colegas do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro que de alguma forma me apoiaram durante a preparação desta tese, em particular à Natália Martins e à Paula Carvalho.

Resumo

Nesta tese consideram-se grafos com determinadas condições de regularidade, tais como a existência de conjuntos (k, τ) -regulares e partições equilibradas, e estabelecem-se novas propriedades relativamente à sua estrutura e aos valores e vectores próprios da matriz de adjacência. Estas propriedades incluem a determinação de emparelhamentos perfeitos e emparelhamentos induzidos perfeitos a partir da existência de determinados conjuntos (k, τ) -regulares, no grafo ou no seu grafo linha. No caso dos grafos com um independente máximo, S , que é $(0, \tau)$ -regular, são caracterizados os grafos cujo número de independência é inferior ao do seu complementar relativamente à bipartição $\pi = (S, V(G) \setminus S)$. Por outro lado, quando G é regular e S é (k, τ) -regular, determinam-se condições necessárias e suficientes para que o complementar de G relativamente à bipartição π (induzida por S), G^π , seja também regular. Adicionalmente, estabelecem-se condições que garantem igualdade para os graus de regularidade de G e G^π .

Prova-se que um grafo com dois ou mais conjuntos (k, τ) -regulares, tais que $k - \tau$ é constante, tem $k - \tau$ como valor próprio da matriz de adjacência. A partir dos vectores próprios da matriz de adjacência de um grafo fortemente regular primitivo, determina-se uma condição necessária e suficiente para que um subconjunto de vértices seja um conjunto (k, τ) -regular. Conclui-se ainda que, se um grafo tem uma partição equilibrada π , então o espectro da matriz de adjacência do seu grafo linha inclui o espectro de uma matriz determinada a partir de π .

Por último, introduzem-se as partições quase equilibradas (que são generalizações de partições equilibradas) e estabelecem-se relações entre os valores e vectores próprios da matriz laplaciana e a existência de partições quase equilibradas.

Palavras chave: Teoria dos Grafos, partições equilibradas, matriz de adjacência, matriz laplaciana, valores e vectores próprios de grafos.

Abstract

In this thesis, new relations between the existence of certain regularity conditions of the graph (like the existence of (k, τ) -regular sets and equitable partitions), and its combinatorial structure or adjacency eigenvalues and eigenvectors, are deduced. Those properties include the recognition of graphs with perfect matchings and perfect induced matchings from the existence of (k, τ) -regular sets, in the graphs or in their line graphs. It is also studied the effects of Seidel switching on the independence number of a graph with a bipartition of the vertex set, induced by a maximum independent set which is $(0, \tau)$ -regular. Necessary and sufficient conditions for the complement of a regular graph, with respect to an equitable bipartition, to be regular, are deduced. In addition, the characterization of the conditions that guarantee the same degree of regularity for the two graphs is done.

It is proved that a graph with more than one (k, τ) -regular set, with $k - \tau$ constant, has the adjacency eigenvalue $k - \tau$. Also, considering the adjacency eigenvectors, a necessary and sufficient condition for a particular subset of vertices of a primitive strongly regular graph to be (k, τ) -regular is introduced. Furthermore, if a graph has an equitable partition π it is shown that the adjacency spectrum of its line graph includes the spectrum of a certain matrix dependent on π .

Finally, some relations between the Laplacian eigenvalues and eigenvectors and the existence of almost equitable partitions (which are generalizations of equitable partitions) are presented.

Keywords: Graph Theory, equitable partitions, adjacency matrix, Laplacian matrix, graph eigenvalues and eigenvectors.

Índice

Lista de Figuras	iii
1 Introdução	1
2 Definições e resultados preliminares	7
3 Grafos com conjuntos (k, τ)-regulares	17
3.1 Valores próprios associados a conjuntos (k, τ) -regulares	21
3.2 Propriedades combinatórias	24
4 Grafos com partições equilibradas	37
4.1 Grafo quociente	39
4.2 Complementar relativamente a uma partição	42
4.3 Comportamento do número de independência	46
5 Resultados espectrais	51
5.1 Resultados previamente estabelecidos	52
5.2 Resultados espectrais adicionais	56
5.3 Vectores próprios de grafos fortemente regulares	61
5.4 Grafos com número de independência quadrático convexo	68
6 Partições quase equilibradas	73
6.1 Resultados sobre valores e vectores próprios	75
7 Conclusões e trabalho futuro	81

A	Conceitos e resultados auxiliares	83
A.1	Grafos fortemente regulares	83
A.2	Prova de um resultado usado na Seção 5.4	86
	Referências bibliográficas	89
	Índice remissivo	97

Lista de Figuras

3.1	Grafo com o conjunto $(1, 4)$ -regular $\{1, 3, 4, 6\}$ e o conjunto $(3, 2)$ -regular $\{1, 2, 5, 6\}$.	18
3.2	Grafo com vários conjuntos $(2, 1)$ -regulares e $(0, 1)$ -regulares, e conjuntos (k, τ) -regular únicos, para $(k, \tau) \in \{(1, 2), (1, 1)\}$.	20
3.3	Grafo 4-regular com conjuntos $(0, 2)$ -regulares e $(2, 2)$ -regulares.	22
3.4	Grafo com o conjunto $(0, 1)$ -regular $\{2, 5\}$, o conjunto $(0, 2)$ -regular $\{1, 3, 5\}$ e o conjunto $(1, 2)$ -regular $\{1, 3, 4, 6\}$.	22
3.5	Grafo de Petersen	27
3.6	Grafo de Hoffman-Singleton	28
3.7	Um grafo 3-regular com o conjunto $(1, 1)$ -regular $\{3, 6\}$ e o conjunto $(2, 1)$ -regular $\{1, 5, 6\}$.	33
4.1	Grafo quociente G/π e matriz de adjacência $A_{G/\pi}$, relativamente à bipartição equilibrada $\pi = (\{2, 5\}, \{1, 3, 4, 6\})$ do grafo G da Figura 3.1.	40
4.2	A bipartição equilibrada $\pi = (\{1, 2, 3, 4\}, \{2, 5\})$ de G e a correspondente partição equilibrada $\bar{\pi} = (\{a, d\}, \{b, c, e, f\}, \{g\})$ de $L(G)$.	42
4.3	Grafos G e G^π com $\pi = (\{2, 5\}, \{1, 3, 4, 6\})$.	43
4.4	Um grafo 4-regular conexo G e G^π com $\pi = (\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6, 7\})$.	48
4.5	Os grafos G e G^π com $\pi = (\{1, 5, 9\}, \{2, 3, 4, 6, 7, 8\})$.	49
5.1	Dois grafos 5-regulares de ordem 8 (G_1 e G_2) não isomorfos e dois grafos 3-regulares de ordem 6 (G_3 e G_4) não isomorfos.	60
5.2	Grafo com os subconjuntos $S = \{1, 2, 3\}$ e $\bar{S} = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ que induzem subgrafos 2-regulares.	71
6.1	Exemplo de uma partição quase equilibrada de C_5 .	74

6.2	Grafo sem partições quase equilibradas não triviais.	77
6.3	Grafo com apenas duas bipartições quase equilibradas $\pi = (\{1, 5\}, \{2, 3, 4, 6\})$ e $\pi' = (\{2, 5\}, \{1, 3, 4, 6\})$	79

Capítulo 1

Introdução

O trabalho desenvolvido teve como motivação inicial a existência de relações conhecidas entre as propriedades espectrais das matrizes de adjacência de grafos e a existência de estruturas de regularidade, das quais se salienta a possibilidade de obtenção de valores próprios da matriz de adjacência, a partir dos valores próprios de matrizes de adjacência de multigrafos de menor ordem. Com esta dissertação pretende-se contribuir para a caracterização de grafos com determinado tipo de restrições de regularidade que incluem a existência de conjuntos (k, τ) -regulares, partições equilibradas ou partições quase equilibradas. Com este objectivo, estabelecem-se novas propriedades referentes tanto à estrutura dos grafos como aos valores e vectores próprios da sua matriz de adjacência, terminando com breves considerações referentes à matriz laplaciana.

Note-se que grafos com o tipo de restrições de regularidade referidas têm vindo a ser amplamente estudados desde os anos sessenta do século vinte, surgindo no tratamento de diversas questões da Teoria dos Grafos: grafos com restrições de dominância [Tel93, HKT00], grafos fortemente regulares e *designs* [Tho81, Neu82], grupos de automorfismos de grafos [Mck76], partições associadas a matrizes de passeios¹ [PS82], construção de grafos com três valores próprios [MK98], caracterização de grafos com número de independência quadrático convexo [Car03], aplicação de funções de autocorrelação ao estudo de *landscapes* [ST99], grafos de

¹Designadas na literatura em língua inglesa por *walk partitions*.

distância regular² [God93], etc.

De acordo com [CRS97], os grafos com partições equilibradas foram introduzidos por Sachs em [Sac64, Sac66], onde é considerado o grafo quociente. Porém, a designação de partições equilibradas surge apenas em [Sch74, HS79]. As partições equilibradas surgem em [PS82] como um caso particular das partições associadas a matrizes de passeios. Em [Sch74, CDS80, God93, CRS97] mostra-se que a partir das partições equilibradas de um grafo é possível obter informação acerca dos valores próprios ou vectores próprios da respectiva matriz de adjacência com recurso a um multidigrafo de menor ordem, o grafo quociente. Em particular, mostra-se que o polinómio característico da matriz de adjacência do grafo quociente divide o polinómio característico da matriz de adjacência do grafo. Um resultado semelhante é provado em [MO87], onde os conceitos de partição equilibrada e grafo quociente são estendidos a grafos com conjuntos de vértices não finitos. A noção de grafo quociente foi redescoberta em [Yap75] onde se prova que para um multidigrafo D , o polinómio característico de uma matriz de adjacência, definida a partir das órbitas em $V(D)$ sob a acção do grupo de automorfismos de D , divide o polinómio característico da matriz de adjacência pesada A_D . As partições equilibradas e os grafos quocientes surgem ainda, em Teoria dos Códigos (em [CL77, CDS80] encontra-se uma prova do Teorema de Lloyd onde se recorre a estes conceitos). Além disso, as partições equilibradas e os grafos quocientes são referidos no estudo de grafos que têm uma matriz de adjacência com o segundo maior valor próprio (λ_2) pequeno; em particular, estes multidigrafos surgem na construção de uma colecção finita de subgrafos proibidos que caracteriza os grafos com $\lambda_2 < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ [Sim95, CRS97].

Os conjuntos (k, τ) -regulares surgem em [Tho81, Neu82] no contexto dos grafos fortemente regulares e dos *designs*. Dos resultados aí apresentados destaca-se o facto de um grafo regular com um conjunto (k, τ) -regular ter $k - \tau$ como valor próprio da sua matriz de adjacência. Como se verá no Capítulo 4, os conjuntos (k, τ) -regulares e as partições equilibradas estão relacionados já que um conjunto (k, τ) -regular de um grafo regular induz uma bipartição equilibrada.

O complementar de um grafo relativamente a uma partição do conjunto de vértices³, surge

²Designados na literatura em língua inglesa por *distance-regular graphs*.

³Designado na literatura em língua inglesa por *graph switching*.

na Geometria, através de J. J. Seidel e outros [LS66, LS73]. A obtenção de complementares relativamente a partições do conjunto de vértices é também utilizada como procedimento de construção de novos grafos fortemente regulares [Sei79] ou grafos não regulares cuja matriz de adjacência tem 3 valores próprios distintos [MK98], entre outras aplicações.

O trabalho apresentado nesta dissertação insere-se no contexto das interações entre a Teoria dos Grafos e a Teoria das Matrizes, situando-se na área usualmente designada por Teoria Espectral dos Grafos⁴. Dentro desta área estabelecem-se relações entre as propriedades dos grafos e das matrizes associadas, como por exemplo, a matriz de adjacência, a matriz de incidência, a matriz laplaciana e a matriz de adjacência de Seidel. A pesquisa de tais relações é abordada de forma explícita por Sachs [Sac64], Seidel [Sei68] e Hoffman [Hof69], entre outros, apesar de já ter sido iniciada anteriormente (ver, por exemplo, [CoSi57, Wei52, Lih56]). Paralelamente aos desenvolvimentos obtidos por Matemáticos, encontram-se na literatura referências a abordagens envolvendo espectros de matrizes associadas a modelos de grafos usados em outras áreas Científicas, como é o caso da Química [Huc31, CGT72, Wil89]. Nas últimas décadas o número de publicações que abordam a Teoria Espectral dos Grafos cresceu muito rapidamente. Da vasta literatura existente, destacam-se as monografias [CDS80, CDG⁺88], onde se reúnem muitos dos resultados publicados antes de 1984, incluindo ainda referências a áreas como a Química e a Física. Em [CRS97] é feita uma abordagem baseada nos espaços próprios e em [Chu97] considera-se o espectro associado a uma matriz laplaciana modificada. Existem ainda muitas outras publicações sobre os aspectos algébricos e combinatórios da Teoria dos Grafos, onde se inclui a Teoria Espectral dos Grafos, nomeadamente [SW79, Hae80, Sei89, Big93, God93, GR01].

Segue-se uma descrição abreviada dos restantes capítulos.

O Capítulo 2 inclui uma síntese de noções e resultados da Teoria dos grafos necessários à compreensão dos capítulos seguintes. Os resultados apresentados referem-se a propriedades dos grafos relacionadas com os valores e vectores próprios da matriz de adjacência. A selecção do material apresentado é baseada, essencialmente, em [CDS80].

No Capítulo 3 apresentam-se algumas propriedades dos grafos com conjuntos (k, τ) -regulares.

⁴Designação usual na literatura em língua inglesa: *Spectral Graph Theory*.

Nomeadamente, sob certas condições, estende-se a grafos arbitrários um resultado de [Tho81] que relaciona a existência de conjuntos (k, τ) -regulares num grafo regular com os valores próprios da sua matriz de adjacência. Para um grafo com dois conjuntos (k, τ) -regulares estabelecem-se igualdades que relacionam as cardinalidades destes conjuntos e da sua intersecção através dos parâmetros k e τ . Das propriedades combinatórias que são estabelecidas destaca-se a correspondência entre emparelhamentos induzidos perfeitos num grafo e os conjuntos $(0, 1)$ -regulares no seu grafo linha.

No Capítulo 4 consideram-se os grafos com partições equilibradas, assim como, os grafos quocientes e os complementares relativamente a estas partições equilibradas. Neste capítulo mostra-se que se um grafo tem uma partição equilibrada π , então o grafo linha também tem uma partição equilibrada que pode ser construída a partir de π . Estabelecem-se, ainda, condições necessárias e suficientes para que o complementar de um grafo regular relativamente a uma bipartição equilibrada também seja regular. Por último, caracterizam-se os grafos G com independentes máximos que são $(0, \tau)$ -regulares e tais que o número de independência de G é inferior ao do complementar de G relativamente à bipartição do conjunto de vértices induzida por este independente.

O Capítulo 5 contém resultados que referem os valores e vectores próprios da matriz de adjacência de grafos com conjuntos (k, τ) -regulares e partições equilibradas. No caso de grafos com uma partição equilibrada π , conclui-se que o espectro da matriz de adjacência do seu grafo linha contém o espectro de uma matriz determinada a partir de π . Por outro lado, Se G é um grafo regular com uma bipartição equilibrada π e o complementar de G relativamente a π também é regular mostra-se, que sob certas condições, as matrizes de adjacência dos dois grafos são coespectrais. Além disso, através dos vectores próprios da matriz de adjacência, caracterizam-se os grafos fortemente regulares primitivos e para estes grafos, estende-se uma condição necessária para que um subconjunto de vértices de um grafo regular seja um conjunto (k, τ) -regular, para uma condição necessária e suficiente. Este capítulo termina com alguns resultados da aplicação dos grafos com número de independência quadrático convexo a grafos com restrições de regularidade, nomeadamente com a determinação de um majorante do menor valor próprio que é atingido para a primeira classe de grafos referida.

No Capítulo 6 introduz-se a noção de partição quase equilibrada e deduzem-se alguns re-

sultados relativos aos valores e vectores próprios das matrizes laplacianas dos grafos com partições quase equilibradas, obtendo-se um valor próprio da matriz laplaciana de grafos com bipartições quase equilibradas.

Finalmente, no Capítulo 7 apresentam-se algumas conclusões e referências ao trabalho futuro.

O Apêndice inclui resultados básicos sobre grafos fortemente regulares e, contém ainda, a prova de um resultado utilizado no Capítulo 5 que foi conhecido por comunicação privada mas não se encontra publicado.

Por último, refira-se que os cálculos auxiliares, como a determinação de valores e vectores próprios, foram efectuados com o auxílio do Matlab 6.5.

Capítulo 2

Definições e resultados preliminares

Neste capítulo apresentam-se algumas definições e notações, assim como, vários resultados conhecidos da Teoria dos Grafos alguns dos quais são referidos nos capítulos seguintes. Pretende-se dar uma breve ideia sobre a interligação das propriedades dos grafos com as propriedades das matrizes de adjacência associadas.

Ao longo do texto consideram-se grafos não dirigidos simples, ou seja, sem lacetes nem arestas múltiplas, $G = (V(G), E(G))$, onde $V(G) \neq \emptyset$ denota o conjunto finito de vértices, $E(G)$ o conjunto de arestas e onde cada elemento de $E(G)$ é um subconjunto de dois elementos de $V(G)$. Se $|V(G)| = n$ diz-se que G é um *grafo de ordem n* . Um elemento de $E(G)$ com os vértices i e j denota-se por ij ; neste caso, diz-se que o vértice i é adjacente ao vértice j e que a aresta ij é incidente nos vértices i e j . Duas *arestas* dizem-se *adjacentes* se têm um vértice extremo em comum. Dado um vértice $v \in V(G)$, designa-se por *vizinhança* de v o conjunto de vértices denotado por $N_G(v) = \{w : vw \in E(G)\}$, cujos elementos se designam por *vizinhos* de v . O número de vizinhos de $v \in V(G)$ designa-se por *grau* do vértice v e denota-se por $d_G(v)$.

Um grafo $G = (V(G), E(G))$ diz-se *p -regular* se para todo o $v \in V(G)$, $d_G(v) = p$. Se G tem ordem n e é $(n - 1)$ -regular, então G é um *grafo completo* e denota-se por K_n . O *complementar* de um grafo G denotado por \bar{G} , é um grafo tal que $V(\bar{G}) = V(G)$ e $E(\bar{G}) = \{ij : i, j \in V(G), ij \notin E(G), i \neq j\}$. Um grafo G de ordem $n \in \mathbb{N}$ diz-se *nulo*

se G é o complementar de K_n , ou seja G é 0-regular.

Dois grafos simples, G e H , dizem-se isomorfos se existe uma função bijectiva $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que para quaisquer $u, v \in V(G)$, $uv \in E(G)$ se e só se $\phi(u)\phi(v) \in E(H)$.

Dados dois grafos H e G , diz-se que H é um *subgrafo* de G quando $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Por sua vez, designa-se por *subgrafo* de G *induzido* pelo subconjunto de vértices X , o subgrafo denotado por $G[X]$ e obtido de G ignorando o subconjunto de vértices $V(G) \setminus X$ e, conseqüentemente, as arestas que lhe são incidentes. Sejam G, H_1, H_2, \dots, H_s grafos. O grafo G diz-se (H_1, \dots, H_s) -livre se, para $i = 1, \dots, s$, G não contém H_i como subgrafo induzido. Se $s = 1$ e $H = H_1$ então G diz-se um grafo H -livre.

Designa-se por *passeio* num grafo G , entre os vértices x e y , toda a seqüência de vértices e arestas da forma

$$x = v_1, v_1v_2, v_2, \dots, v_{k-1}, v_{k-1}v_k, v_k = y,$$

com eventual repetição de vértices e arestas. Considere-se o subconjunto de vértices $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subseteq V(G)$, e suponha-se que $x_i x_{i+1} \in E(G)$ para todo o $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. Se os vértices de X são todos distintos diz-se que X define um *caminho*. Se os vértices de X são todos distintos excepto x_1 e x_k , que são iguais, então diz-se que X define um *ciclo*. Geralmente, os caminhos, passeios e ciclos representam-se pela respectiva seqüência de vértices. Dado um caminho P (respectivamente, ciclo C) de um grafo G designa-se por comprimento de P (respectivamente, C) e denota-se por $comp(P)$ (respectivamente, $comp(C)$) o número de arestas que o constitui. Um grafo conexo com $n \geq 2$ vértices, onde $n-2$ destes vértices têm grau 2 e os restantes 2 vértices têm grau 1 é um caminho e denota-se por P_n . Um grafo 2-regular conexo com $k \geq 4$ vértices diz-se um *ciclo sem cordas* e denota-se por C_k . Um grafo 2-regular com 3 vértices é um *triângulo* e denota-se por C_3 .

Um grafo G é *conexo* se para quaisquer $i, j \in V(G)$ existe um caminho entre i e j , e é *desconexo* se não é conexo. Uma *componente* de um grafo G é um subgrafo conexo de G , H , tal que para todo o $v \in V(G) \setminus V(H)$ o subgrafo induzido $G[V(H) \cup \{v\}]$ é desconexo.

Dado um grafo G de ordem n e dois vértices $x, y \in V(G)$, denotando por $\mathcal{P}_G(x, y)$ o conjunto

de todos os caminhos de G entre x e y , designa-se por *distância* entre vértices de G a função

$$\begin{aligned} dist : V(G) \times V(G) &\mapsto \{0, \dots, n-1\} \cup \{\infty\} \\ (x, y) &\rightsquigarrow dist(x, y) = \begin{cases} \min\{comp(P) : P \in \mathcal{P}_G(x, y)\} & \text{se } \mathcal{P}_G(x, y) \neq \emptyset, \\ \infty & \text{se } \mathcal{P}_G(x, y) = \emptyset. \end{cases} \end{aligned}$$

A maior distância entre vértices de um grafo G designa-se por *diâmetro* de G e denota-se por $diam(G)$; por sua vez, designa-se por *cintura* de G e denota-se por $g(G)$, o comprimento de um ciclo de menor comprimento contido em G . Se G não é conexo, diz-se que tem diâmetro infinito e escreve-se $diam(G) = \infty$, e se G é acíclico (ou seja, não tem ciclos) diz-se que G tem cintura infinita e escreve-se $g(G) = +\infty$.

Um grafo $G = (V(G), E(G))$ diz-se *bipartido* se o seu conjunto de vértices admite uma partição em subconjuntos V_1 e V_2 tal que não existem arestas que unem dois vértices de V_1 nem arestas que unem dois vértices de V_2 . Como consequência da definição, um grafo bipartido é usualmente representado por $G = (V_1, V_2, E(G))$. Se $|V_1| = m$, $|V_2| = n$ e para quaisquer $x \in V_1$ e $y \in V_2$, $xy \in E(G)$, este grafo denota-se por $K_{m,n}$ e designa-se por *grafo bipartido completo*. Seja $G = (V_1, V_2, E(G))$ um grafo bipartido. Se para qualquer $x \in V_1$ $d_G(x) = k_1$ e para qualquer $y \in V_2$ $d_G(y) = k_2$ diz-se que G é um *grafo semi-regular* com graus de regularidade k_1 e k_2 . Os grafos conexos acíclicos designam-se por *árvores* e constituem uma classe especial de grafos bipartidos.

Um subconjunto S de vértices diz-se um *independente* (respectivamente, *clique*) se nenhum (respectivamente, todo) par de vértices é adjacente. Um independente (clique) S de um grafo G é um *independente maximal* (respectivamente, *clique maximal*) se não existe $T \subset V(G)$ tal que $S \subset T$ e T é um independente (respectivamente, clique) de G . Um independente (respectivamente, clique) S é um *independente* (respectivamente, *clique*) *máximo* se não existe outro independente (respectivamente, clique) com um número superior de vértices. O número de vértices num independente (respectivamente, clique) máximo de um grafo G , designa-se por *número de independência* (respectivamente, *clique*) de G e denota-se por $\alpha(G)$ (respectivamente, $\omega(G)$).

Uma *coloração* de vértices de um grafo G é uma aplicação sobrejectiva

$$\begin{aligned} c : V(G) &\rightarrow \{1, \dots, k\} \\ v &\rightarrow c(v) \end{aligned}$$

tal que $c(x) \neq c(y)$ se $xy \in E(G)$. O menor valor de k para o qual existe uma coloração dos vértices de G designa-se por *número cromático* de G e denota-se por $\chi(G)$. Um grafo diz-se perfeito se para todo o $X \subseteq V(G)$ se tem $\chi(G[X]) = \omega(G[X])$.

De imediato se conclui que $\alpha(G) = \omega(\bar{G})$ e, portanto, a determinação do número de independência é equivalente à determinação do número de clique. Como foi provado em [Kar72], dado um número inteiro positivo k , o problema de determinar se G tem uma clique de tamanho k é um problema NP-completo¹ e, conseqüentemente, em geral a determinação de $\omega(G)$, assim como de $\alpha(G)$, é um problema difícil. Porém, existem várias classes de grafos para os quais o número de independência pode ser determinado em tempo polinomial¹, como é o caso dos grafos perfeitos [Lov86], os grafos $k_{1,3}$ -livres [Min80, Sbi80], os grafos $(P_6, \text{triângulo})$ -livres e (P_6, C_4) -livres [Mos99], entre outros.

Um subconjunto de arestas de um grafo, duas a duas não adjacentes, designa-se por *emparelhamento*. Um emparelhamento de máxima cardinalidade diz-se um *emparelhamento máximo*. Dado um grafo $G = (V(G), E(G))$, um emparelhamento que cobre todos os vértices de G , ou seja, um emparelhamento $M \subseteq E(G)$ tal que para qualquer vértice $u \in V(G)$ existe uma aresta de M incidente em u , designa-se por *emparelhamento perfeito*. Um emparelhamento $M \subset E(G)$, diz-se *induzido* se o subgrafo induzido pelos vértices pertencentes às arestas de M , é 1-regular, isto é, é um emparelhamento. Um *emparelhamento induzido* $M \subset E(G)$ de um grafo G diz-se *maximal* se não existe $T \subset E(G)$ tal que $S \subset T$ e T é um emparelhamento induzido maximal de G . Um *emparelhamento induzido perfeito*, M , é um emparelhamento induzido que cobre todas as arestas do grafo, isto é, qualquer aresta de $E(G) \setminus M$ é adjacente a exactamente uma aresta de M .

Dado um subconjunto S dos vértices de G , o vector $x \in \mathbb{R}^V$ tal que $x_v = 1$ se $v \in S$ e $x_v = 0$ se $v \notin S$, designa-se por *vector característico* de S . Ao longo do texto \hat{e} denota o vector com n componentes todas iguais a 1 e I_n denota a matriz identidade de ordem n .

O núcleo (ou espaço nulo) de uma aplicação linear, definida por uma matriz A , é denotado por $\text{Ker}(A)$. Seja A uma matriz de ordem n . O *polinómio característico* de A é denotado por $P_A(\lambda)$ e o *espectro* de A é o conjunto de valores próprios, $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, de A e denota-se

¹Ver [GJ78] para a definição formal deste e doutros conceitos da Teoria da Complexidade Computacional.

por $\sigma(A)$. Se A é uma matriz simétrica então as multiplicidades algébrica e geométrica de qualquer valor próprio $\lambda \in \sigma(A)$ são coincidentes e o seu valor será referido apenas como *multiplicidade do valor próprio* em questão. Para cada valor próprio $\lambda \in \sigma(A)$, o valor desta multiplicidade é denotado por $m_A(\lambda)$. Ocasionalmente, quando tal for vantajoso, os valores próprios do espectro $\sigma(A)$ são enumerados na forma $\sigma(A) = \{[\delta_1]^{m_A(\delta_1)}, \dots, [\delta_r]^{m_A(\delta_r)}\}$ com o objectivo de evidenciar os valores próprios distintos δ_i bem como as suas multiplicidades $m_A(\delta_i)$.

Dado um grafo G de ordem $n > 1$, a matriz $A_G = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = 1$ se $ij \in E(G)$ e $a_{ij} = 0$ se $ij \notin E(G)$, denota a *matriz de adjacência* de G . Eventualmente, por simplicidade de linguagem, os valores próprios da matriz de adjacência de um grafo G também serão designados por valores próprios do grafo. O menor valor próprio de A_G é denotado por $\lambda_{\min}(A_G)$. Note-se que A_G é uma matriz simétrica pelo que tem n valores próprios reais. Se G tem pelo menos uma aresta então $\lambda_{\min}(A_G) \leq -1$. Com efeito, $\lambda_{\min}(A_G) = 0$ se e só se G não tem arestas, $\lambda_{\min}(A_G) = -1$ se e só se G tem pelo menos uma aresta e cada uma das suas componentes é um grafo completo e, caso contrário, $\lambda_{\min}(A_G) \leq -\sqrt{2}$ [Do82], verificando-se a igualdade se e só se $G = K_{1,2}$ [BW04].

Até ao final deste capítulo apresentam-se alguns resultados bem conhecidos, cujas provas podem ser encontradas em [CDS80] (exceptuando as provas das Proposições 2.3, 2.4, 2.8 e 2.12, para as quais são indicadas outras referências), pretendendo-se ilustrar de que forma é possível concluir acerca de algumas propriedades relativas à estrutura dos grafos (e referidas nos restantes capítulos) a partir da matriz de adjacência e mais concretamente, dos seus valores e vectores próprios.

Relativamente ao número de valores próprios distintos da matriz de adjacência A_G conhece-se o seguinte resultado:

Proposição 2.1 [Gan59] *Seja G um grafo conexo e A_G a sua matriz de adjacência. Então A_G tem pelo menos $\text{diam}(G) + 1$ valores próprios distintos.*

Considere-se um grafo G com espectro $\sigma(A_G) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Seja $U = [u_1 u_2 \dots u_n]$ a matriz cujas colunas, u_1, u_2, \dots, u_n , formam uma base de vectores próprios ortonormalizados

de A_G com $A_G u_j = \lambda_j u_j$ e $u_j = (u_{1j}, \dots, u_{nj})$. Seja Λ a matriz diagonal $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Uma vez que A_G é uma matriz simétrica, então

$$A_G = U \Lambda U^\top. \quad (2.1)$$

De (2.1) conclui-se que através dos valores próprios e dos vectores próprios da matriz de adjacência de um grafo G , é possível obter informação sobre a estrutura de G . Os resultados a seguir enunciados relacionam o número de passeios num grafo G com os valores e vectores próprios de A_G .

Proposição 2.2 [CDS80] *Sejam $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e $U = (u_{ij})$ as matrizes introduzidas em (2.1). Seja $k \in \mathbb{N}$ e denote-se por $a_{ij}^{(k)}$ o elemento $(A_G^k)_{ij}$ da matriz $A_G^k = A_G \times A_G \dots \times A_G$, e por $N_k(i, j)$ o número de passeios de comprimento k com início no vértice i e término no vértice j . Então*

$$N_k(i, j) = a_{ij}^{(k)} = \sum_{r=1}^n u_{ir} u_{jr} \lambda_r^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

De acordo com a Proposição 2.2, o número total de passeios de comprimento $k \in \mathbb{N}$ contidos num grafo G é dado por

$$\sum_{i,j=1}^n N_k(i, j) = \sum_{r=1}^n \left(\sum_{i=1}^n u_{ir} \right)^2 \lambda_r^k,$$

enquanto o número de passeios fechados de comprimento $k \in \mathbb{N}$ contidos em G é dado por

$$\sum_{i=1}^n a_{ii}^{(k)} = \sum_{i=1}^n N_k(i, i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k.$$

Em particular, o número de passeios fechados de comprimento 2, que é igual ao dobro do número de arestas, vem dado por

$$2|E(G)| = \sum_{i=1}^n N_2(i, i) = \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(2)} = \text{tr}(A_G^{(2)}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

Como se verá a seguir, a partir dos valores próprios da matriz de adjacência é possível verificar se um determinado grafo é bipartido.

Proposição 2.3 [God93] *Seja G um grafo com pelo menos uma aresta. Então G é bipartido se e só se para todo o $\lambda \in \sigma(A_G)$, $-\lambda \in \sigma(A_G)$.*

Consideram-se agora, propriedades dos valores e vectores próprios da matriz de adjacência que caracterizam os grafos regulares.

Proposição 2.4 [God93] *Um grafo G é regular se e só se \hat{e} é um vector próprio da matriz de adjacência A_G . Se G é p -regular então $p \in \sigma(A_G)$ e \hat{e} é um vector próprio associado a p .*

Proposição 2.5 [CoSi57] *Seja G um grafo de ordem n . Denotando-se o maior valor próprio de A_G por λ_1 e a média dos graus dos vértices de G por $\bar{d}(G)$, vem*

$$\bar{d}(G) \leq \lambda_1,$$

verificando-se igualdade se e só se G é regular.

Da Proposição 2.5 vem que, no caso de grafos regulares, o raio espectral, λ_1 , da matriz de adjacência coincide com o grau de regularidade p do grafo, utilizando-se indistintamente p para ambos.

Os resultados seguintes mostram que a existência de conexidade, bem como o número de componentes de um grafo G , podem ser estabelecidos tendo por base a multiplicidade do raio espectral de A_G .

Proposição 2.6 [CDS80] *Um grafo G é conexo se e só se o raio espectral da matriz de adjacência A_G é um valor próprio simples com um vector próprio positivo² associado.*

Proposição 2.7 [CDS80] *Se a matriz de adjacência de um grafo G tem um vector próprio positivo no subespaço invariante associado ao seu raio espectral ρ , então o número de componentes de G é igual à multiplicidade de ρ .*

Dado um grafo G , designa-se por *grafo linha* de G e denota-se por $L(G)$ o grafo que se obtém de G , considerando como vértices as arestas de G e como relação de adjacência entre os seus vértices a respectiva relação de adjacência entre arestas de G . Assim, dois vértices de $L(G)$ são adjacentes se e só se as arestas correspondentes em G são adjacentes. Em [Bei68], e

²Diz-se que $v = [v_1 \dots v_n]^\top \in \mathbb{R}^n$ é um vector positivo se $v_i > 0$ para todo o $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

mais recentemente em [Sol94] e [LS01], é feita a caracterização de grafos linha em termos de subgrafos induzidos proibidos. Os resultados seguintes apresentam algumas propriedades espectrais dos grafos linha.

Proposição 2.8 [GR01]^β *Um grafo conexo G (com $E(G) \neq \emptyset$) é regular ou semi-regular se e só se o grafo linha de G é regular. Se G é p -regular ou semi-regular com graus de regularidade p_1 e p_2 , onde $p_1 + p_2 = p$, então $L(G)$ é $(2p - 2)$ -regular.*

Proposição 2.9 [Sac67] *Se G é um grafo p -regular (com $p > 0$) com n vértices e m ($= \frac{1}{2}np$) arestas, então*

$$P_{A_{L(G)}}(\lambda) = (\lambda + 2)^{m-n} P_{A_G}(\lambda - p + 2). \quad (2.2)$$

A igualdade (2.2) estabelece uma relação bijectiva entre os valores próprios $\lambda \neq -p$ de A_G e $\mu \neq -2$ de $A_{L(G)}$. Se $\lambda \neq -p$ é um valor próprio de A_G com multiplicidade m_λ , então $\mu = \lambda + p - 2 \neq -2$ é um valor próprio de $A_{L(G)}$ com multiplicidade $m_\mu = m_\lambda$, e se $\mu \neq -2$ é um valor próprio de $A_{L(G)}$ de multiplicidade m_μ , então $\lambda = \mu - p + 2 \neq -p$ é um valor próprio de A_G com multiplicidade $m_\lambda = m_\mu$.

Proposição 2.10 [Doo73] *Para qualquer grafo G , $\lambda_{\min}(A_{L(G)}) \geq -2$. A igualdade verifica-se se e só se G contém um ciclo par ou 2 ciclos ímpares na mesma componente conexa.*

A partir do espectro da matriz de adjacência é possível obter informação relativamente ao número de independência de um grafo.

Proposição 2.11 [Cve73] *O número de independência, $\alpha(G)$, de um grafo G satisfaz a desigualdade*

$$\alpha(G) \leq p_0 + \min\{p_-, p_+\}, \quad (2.3)$$

onde p_-, p_0, p_+ designam o número de valores próprios de G inferiores a, iguais a e superiores a zero, respectivamente. Existem grafos para os quais (2.3) se verifica na forma de igualdade.

^βEm [GR01] prova-se a condição necessária para que o grafo linha, $L(G)$, seja regular. A condição suficiente deduz-se tendo em conta que para cada $u = xy \in E(G)$, $d_{L(G)}(u) = d_G(x) + d_G(y) - 2$.

Proposição 2.12 [A. J. Hoffman]⁴ *Seja G um grafo p -regular de ordem n cuja matriz de adjacência tem valores próprios $p \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Então*

$$\alpha(G) \leq n \frac{-\lambda_n}{p - \lambda_n}.$$

Para terminar este capítulo, consideram-se duas operações binárias (para as quais é adoptada a notação de [CDS80]) definidas no conjunto dos grafos simples com um número finito de vértices, assim como, as relações entre os polinómios das matrizes de adjacência dos vários grafos intervenientes e o polinómio da matriz de adjacência do grafo resultante. Considerem-se os grafos $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ e $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$. Se $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$, o grafo $G = G_1 + G_2$ é tal que $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ e $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. De acordo com [CDS80],

$$P_{A_G}(\lambda) = P_{A_{G_1}}(\lambda)P_{A_{G_2}}(\lambda). \quad (2.4)$$

O grafo $G_1 \nabla G_2$ é o grafo obtido de $G_1 + G_2$ unindo com arestas cada vértice de G_1 a todos os vértices de G_2 , ou seja,

$$E(G_1 \nabla G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{ij : i \in V(G_1), j \in V(G_2)\}.$$

Em [CDS80], a operação da qual resulta o grafo $G_1 + G_2$ é designada por *soma directa* (*direct sum*) de G_1 e G_2 , enquanto $G_1 \nabla G_2$ é designado por *produto completo* (*complete product*) de G_1 e G_2 .

Proposição 2.13 [FG65] *Sejam G_1 um grafo p_1 -regular de ordem n_1 e G_2 um grafo p_2 -regular de ordem n_2 tais que $n_1 - p_1 = n_2 - p_2 = s$. Então $G = G_1 \nabla G_2$ é um grafo p -regular com n vértices, onde $n = n_1 + n_2$ e $p = n - s$, e*

$$P_{A_G}(\lambda) = (\lambda - p)(\lambda + n - p) \frac{P_{A_{G_1}}(\lambda)P_{A_{G_2}}(\lambda)}{(\lambda - p_1)(\lambda - p_2)}.$$

Consequentemente, $\sigma(A_G) = (\sigma(A_{G_1}) \cup \sigma(A_{G_2}) \cup \{-(n - p), p\}) \setminus \{p_1, p_2\}$, onde as operações de união e diferença são executadas tendo em conta as multiplicidades dos valores próprios.

⁴De acordo com [CDS80], este resultado é atribuído a Hoffman mas não se encontra publicado. Ver o Lema 3 e o Teorema 9 de [Lov79] para uma prova deste resultado.

Capítulo 3

Grafos com conjuntos (k, τ) -regulares

Neste capítulo é apresentado o conceito de conjunto (k, τ) -regular bem como algumas propriedades dos grafos que contêm estes conjuntos. Em particular, na Secção 3.1 caracterizam-se os grafos com conjuntos (k, τ) -regulares utilizando o espectro da matriz de adjacência. Na Secção 3.2 estabelecem-se igualdades que relacionam o número de elementos de dois conjuntos (k, τ) -regulares num grafo e da sua intersecção, com os seus parâmetros k e τ . Verifica-se ainda que existem relações relativas à existência de conjuntos (k, τ) -regulares e de emparelhamentos, das quais se destaca a correspondência entre emparelhamentos induzidos perfeitos num grafo e conjuntos $(0, 1)$ -regulares no seu grafo linha.

De acordo com [Tel93] (ver também [HKT00]) um (ρ, γ) -conjunto de um grafo G de ordem n é um subconjunto não vazio de vértices $S \subseteq V(G)$ tal que

$$|N_G(v) \cap S| \in \rho, \forall v \in S, \quad \text{e} \quad |N_G(v) \cap S| \in \gamma, \forall v \in V(G) \setminus S,$$

onde ρ e γ são subconjuntos não vazios de $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Quando os subconjuntos ρ e γ têm um único elemento, $\rho = \{k\}$ e $\gamma = \{\tau\}$, diz-se que S é um *conjunto (k, τ) -regular*, ou seja, $S \subseteq V(G)$ é (k, τ) -regular se e só se é um $(\{k\}, \{\tau\})$ -conjunto. Se G é um grafo p -regular então o conjunto de vértices $V(G)$ é um conjunto (p, k) -regular para qualquer $k \in \mathbb{N}_0$. Por convenção, ao longo do texto considera-se que num grafo p -regular, G , $V(G)$ é um conjunto $(p, 0)$ -regular e se o grafo é conexo é o único conjunto $(p, 0)$ -regular de G .

Da definição anterior conclui-se que um conjunto (k, τ) -regular S de um grafo G é um sub-

conjunto não vazio de vértices que induz um subgrafo k -regular e, tal que, qualquer vértice não pertencente a S tem τ vizinhos em S . Portanto, se G tem um conjunto (k, τ) -regular S então no seu complementar, \bar{G} , S é $(|S| - k - 1, |S| - \tau)$ -regular. Adicionalmente, se G é p -regular, então $V(G) \setminus S$ é $(p - \tau, p - k)$ -regular em G . Para o grafo da Figura 3.1, $S_1 = \{1, 2, 3\}$ é um $(\{1, 2\}, \{2, 3\})$ -conjunto e $S_2 = \{1, 2, 5, 6\}$ é um conjunto $(3, 2)$ -regular.

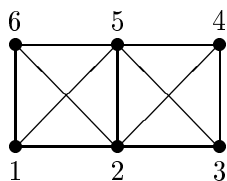


Figura 3.1: Grafo com o conjunto $(1, 4)$ -regular $\{1, 3, 4, 6\}$ e o conjunto $(3, 2)$ -regular $\{1, 2, 5, 6\}$.

Como já foi referido no Capítulo 1 (ver página 2), os conjuntos (k, τ) -regulares surgiram em [Tho81] e [Neu82]. Em [Neu82] estes conjuntos são designados por *conjuntos regulares* com *valência* k e *nexus* τ , distinguindo os conjuntos regulares *positivos*, quando $k \geq \tau$ e *negativos*, quando $k < \tau$. Em [Tho81] os subgrafos induzidos por conjuntos (k, τ) -regulares são designados por *subgrafos próprios do tipo* $k - \tau$.¹

Um caso particular de grafos com conjuntos (k, τ) -regulares são os grafos τ -regular-estáveis. De acordo com [BC03] um grafo é τ -regular-estável se tem um independente máximo S tal que para todo o $v \in V(G) \setminus S$, $|N_G(v) \cap S| = \tau$. Deste modo, G é τ -regular-estável se e só se G tem um conjunto $(0, \tau)$ -regular que é um independente máximo.

Observação 3.1 *Seja G um grafo de ordem $n \in \mathbb{N}$ com um conjunto (k, τ) -regular S . Em seguida são analisadas as diferentes possibilidades que podem ocorrer relativamente ao conjunto (k, τ) -regular S e ao grafo G quando $k = 0$ ou $\tau = 0$.*

1. *Suponha-se que $\tau = 0$.*

¹Esta designação decorre do resultado apresentado na Proposição 3.1 e é a tradução do termo *eigengraphs* usado em [Tho81].

- (a) Se $k = 0$ então G não é conexo e $S \subseteq V(G)$ é um subconjunto de vértices isolados. Adicionalmente, se G é p -regular conclui-se que G é o grafo nulo, isto é, $G = \bar{K}_n$ e $p = k = \tau = 0$.
- (b) Se $k > 0$ então S coincide com o conjunto de vértices de uma ou várias componentes de G que são subgrafos k -regulares. Adicionalmente, se G é p -regular então $p = k$ e todas as componentes de G são p -regulares. Por outro lado, como já se viu atrás (ver a página 17), se $k > 0$ e G é conexo então $S = V(G)$ e G é p -regular com $p = k$.

Das alíneas (a) e (b) conclui-se que se G é um grafo p -regular então $p = k - \tau$ (ou seja, $p = k$) se e só se $\tau = 0$.

2. Considere-se agora $k = 0$. O caso $\tau = 0$ foi analisado em 1. Se $\tau > 0$, S é um independente maximal.

Sendo G um grafo com um conjunto (k, τ) -regular $S \subset V(G)$, então a matriz de adjacência A_G , pode ser escrita na forma

$$A_G = \begin{bmatrix} A_{G[S]} & B \\ B^\top & A_{G[\bar{S}]} \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

onde $\bar{S} = V(G) \setminus S$, $A_{G[S]}$ e $A_{G[\bar{S}]}$ são as matrizes de adjacência dos subgrafos induzidos por S e \bar{S} , respectivamente, e $B \in \{0, 1\}^{|S| \times (n - |S|)}$ é a matriz que descreve as adjacências entre os vértices de S e os restantes vértices em \bar{S} . Se G é p -regular, das propriedades de um conjunto (k, τ) -regular, decorrem as seguintes igualdades:

$$A_{G[S]}\hat{e} = k\hat{e}, \quad B\hat{e} = (p - k)\hat{e}, \quad A_{G[\bar{S}]}\hat{e} = (p - \tau)\hat{e} \quad \text{e} \quad B^\top\hat{e} = \tau\hat{e}.$$

No desenvolvimento que se segue pretende-se relacionar a cardinalidade de um conjunto (k, τ) -regular, S , de um grafo G de ordem n com parâmetros que caracterizam $S \subset V(G)$ e G . Comece-se por verificar que

$$\sum_{v \in S} d_G(v) = (n - |S|)\tau + |S|k = n\tau + |S|(k - \tau),$$

portanto,

$$|S|\delta(G) \leq n\tau + |S|(k - \tau) \leq |S|\Delta(G), \quad (3.2)$$

onde $\Delta(G)$ e $\delta(G)$ denotam o maior e o menor dos graus dos vértices de G , respectivamente. Se $\delta(G) > k - \tau$ conclui-se que²

$$\frac{n\tau}{\Delta(G) - k + \tau} \leq |S| \leq \frac{n\tau}{\delta(G) - k + \tau}. \quad (3.3)$$

Conseqüentemente, se G é p -regular e $p > k - \tau$ (que, da Observação 3.1 (1.), é equivalente a $\tau > 0$) de (3.3) vem que³

$$|S| = \frac{n\tau}{p - k + \tau}. \quad (3.4)$$

Esta igualdade permite concluir que num grafo p -regular, os conjuntos (k, τ) -regulares ($\tau > 0$) com os mesmos valores para os parâmetros k e τ têm igual número de vértices.

Seja G um grafo p -regular com um conjunto (k, τ) -regular S . De (3.2) vem $n\tau = |S|(p - k + \tau)$. Então, de $|S| \geq \tau$ e da última igualdade tem-se que

$$0 \geq -n(|S| - \tau) = -n|S| + n\tau = -n|S| + |S|(p - k + \tau) = |S|(p - k + \tau - n)$$

o que conduz a

$$n \geq p - k + \tau. \quad (3.5)$$

com igualdade se e só se $|S| = \tau$.

Na Observação 3.1 - (2.) conclui-se que para $\tau > 0$, qualquer conjunto $(0, \tau)$ -regular é um independente maximal. Mas, nem sempre os conjuntos $(0, \tau)$ -regulares são independentes máximos (para o grafo da Figura 3.2, $S = \{1, 4\}$ é um conjunto $(0, 1)$ -regular, mas $T = \{1, 3, 5\}$ é um independente máximo). Porém, é possível obter alguma informação sobre

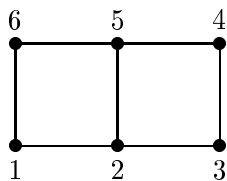


Figura 3.2: Grafo com vários conjuntos $(2, 1)$ -regulares e $(0, 1)$ -regulares, e conjuntos (k, τ) -regular únicos, para $(k, \tau) \in \{(1, 2), (1, 1)\}$.

estes casos. Seja G um grafo p -regular ($p > 0$) com um conjunto $(0, \tau)$ -regular S e um

²Em [BC03], usando um raciocínio semelhante, obtêm-se estas desigualdades para $k = 0$.

³Igualdade apresentada em [Tho81], usando outros argumentos.

independente T , e seja $\tau^* = \max\{|N_G(v) \cap T| : v \in V(G) \setminus T\}$. Contando por dois processos diferentes o número de arestas ij tais que $i \in T$ e $j \in V(G) \setminus T$, vem $p|T| \leq (n - |T|)\tau^*$, ou seja, $|T| \leq \frac{n\tau^*}{p+\tau^*}$. De (3.4) e da última desigualdade conclui-se [CR04] que $|S| \leq |T| \Leftrightarrow \tau \leq \tau^*$. Para os independentes $S = \{1, 4\}$ e $T = \{1, 3, 5\}$ do grafo da Figura 3.2 verifica-se que

$$1 = \tau \leq \max\{|N_G(v) \cap T| : v \in V(G) \setminus T\} = 3.$$

3.1 Valores próprios associados a conjuntos (k, τ) -regulares

Proposição 3.1 [Tho81] *Seja G um grafo p -regular e x o vector característico de $S \subseteq V(G)$. Então S é um conjunto (k, τ) -regular de G , com $\tau > 0$, se e só se $k - \tau \in \sigma(A_G)$ e $(p - k + \tau)x - \tau\hat{e}$ é um vector próprio associado.*

Note-se que da Observação 3.1 - (1.), se G é p -regular e $\tau = 0$ então $k - \tau = p$ e $(p - k + \tau)x - \tau\hat{e} = 0$. Além disso, da Proposição 2.4, verifica-se ainda que $k - \tau = p \in \sigma(A_G)$ e \hat{e} é um vector próprio associado a p .

Da Proposição 3.1 vem que, no caso de grafos regulares G , a cada conjunto (k, τ) -regular $S \subset V(G)$ corresponde um valor próprio $k - \tau \in \sigma(A_G)$. Note-se que se um grafo regular tem um conjunto (k, k) -regular, então $0 \in \sigma(A_G)$.

Considere-se, agora, G um grafo fortemente regular com parâmetros $(n, p; a, c)$ e S um conjunto (k, τ) -regular de G . Sejam λ_1 e λ_2 , com $\lambda_1 \geq 0 > -1 \geq \lambda_2$, os valores próprios restritos de A_G . Da Proposição 3.1 conclui-se que $k - \tau \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$. Adicionalmente, de (A.6, em apêndice) conclui-se que os valores próprios λ_1 e λ_2 são inteiros (uma conclusão semelhante é obtida em [Neu82]).

O corolário seguinte é consequência imediata da Proposição 3.1.

Corolário 3.1 *Se G é um grafo p -regular (com $p > 0$) e $\sigma(A_G) \cap \mathbb{Z} = \{p\}$ então não existe $S \subset V(G)$ tal que S é (k, τ) -regular, com $\tau > 0$.*

Da observação 3.1 verifica-se que a condição $\tau > 0$ exclui os grafos p -regulares não conexos

em que $S \subset V(G)$ é a união dos conjuntos de vértices de uma ou mais componentes de G . Neste caso, G tem vários conjuntos $(p, 0)$ -regulares associados ao valor próprio $p \in A_G$.

Existem grafos p -regulares com conjuntos (k, τ) -regulares associados a cada valor próprio $\lambda_i \in \sigma(A_G) \setminus \{p\}$. Um exemplo disso é o grafo G representado na Figura 3.3 que tem espectro $\sigma(A_G) = \{-2\}^2, [0]^3, [4]^1$ e tem conjuntos $(2, 2)$ -regulares (por exemplo, $\{1, 5, 6\}$) e conjuntos $(0, 2)$ -regulares (por exemplo, $\{2, 5\}$), para além do próprio $V(G)$ que é $(4, 0)$ -regular. Porém, nem sempre tal acontece. O ciclo C_5 representado na Figura 6.1, ou seja, o grafo

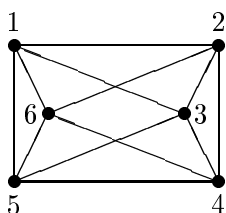


Figura 3.3: Grafo 4-regular com conjuntos $(0, 2)$ -regulares e $(2, 2)$ -regulares.

fortemente regular com parâmetros $(5, 2; 0, 1)$ e espectro $\sigma(A_{C_5}) = \{[-1.62]^2, [0.62]^2, [2]^1\}$, não tem conjuntos (k, τ) -regulares com $\tau > 0$. Note-se que o seu espectro não tem valores próprios inteiros $\lambda \neq p$, onde $p = 2$ é o grau de regularidade de C_5 . Por outro lado, o ciclo C_6 (representado na Figura 3.4) tem espectro $\sigma(A_{C_6}) = \{[-2]^1, [-1]^2, [1]^2, [2]^1\}$ e tem conjuntos (k, τ) -regulares, com $k - \tau \in \{-2, -1\}$, mas não tem conjuntos (k, τ) -regulares, com $k - \tau = 1$.

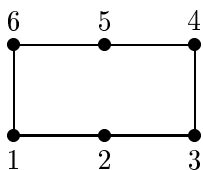


Figura 3.4: Grafo com o conjunto $(0, 1)$ -regular $\{2, 5\}$, o conjunto $(0, 2)$ -regular $\{1, 3, 5\}$ e o conjunto $(1, 2)$ -regular $\{1, 3, 4, 6\}$

Proposição 3.2 [CR04] *Um grafo G de ordem n tem um conjunto (k, τ) -regular S se e só se o vector característico de S , x , é uma solução do sistema linear*

$$A_G x = (k - \tau)x + \tau \hat{e}, \quad (3.6)$$

ou do sistema equivalente,

$$(A_G - (k - \tau)I_n)x = \tau\hat{e}. \quad (3.7)$$

Prova. Da definição de conjunto (k, τ) -regular vem que S é um conjunto (k, τ) -regular se e só se (3.6) se verifica dado que para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$(A_G x)_i = |N_G(i) \cap S| = \begin{cases} k & \text{se } i \in S \\ \tau & \text{se } i \in V(G) \setminus S. \end{cases}$$

■

Na Proposição 3.1 conclui-se que se um grafo regular G tem um conjunto (k, τ) -regular então $k - \tau \in \sigma(A_G)$. De acordo com o corolário seguinte se $\lambda \in \mathbb{Z}$ e G é um grafo (não necessariamente regular) com pelo menos dois conjuntos (k, τ) -regulares tais que $k - \tau = \lambda$, então $\lambda \in \sigma(A_G)$.

Corolário 3.2 *Seja $\lambda \in \mathbb{Z}$ e G um grafo de ordem n com um conjunto (k_1, τ_1) -regular S_1 e um conjunto (k_2, τ_2) -regular S_2 , tais que $S_1 \neq S_2$ e $k_1 - \tau_1 = k_2 - \tau_2 = \lambda$. Então $\lambda \in \sigma(A_G)$.*

Prova. Sejam x_1 e x_2 os vectores característicos de S_1 e S_2 , respectivamente. Como $S_1 \neq S_2$ e $x_1, x_2 \in \{0, 1\}^n$ então, se $\tau_1 > 0$ vem $x_1 \neq x_2$ e $\frac{\tau_2}{\tau_1}x_1 \neq x_2$. Adicionalmente, $\frac{\tau_2}{\tau_1}x_1$ é uma solução de (3.7) com $(k, \tau) = (k_2, \tau_2)$ concluindo-se que para estes valores de k e τ , (3.7) é um sistema indeterminado, ou seja, $\det(A_G - \lambda I_n) = 0$ pelo que $\lambda \in \sigma(A_G)$.

Por último, verifique-se que de $\tau_1 = \tau_2 = 0$ decorre que $k_1 = k_2$ e x_1 e x_2 (com $x_1 \neq x_2$) são soluções do sistema (3.7) para $k - \tau = k_1 = k_2 = \lambda$ pelo que $\det(A_G - \lambda I_n) = 0$ e $\lambda \in \sigma(A_G)$.

■

O grafo da Figura 3.2, denotado por G , tem conjuntos $(2, 1)$ -regulares $\{1, 2, 5, 6\}$ e $\{2, 3, 4, 5\}$ e conjuntos $(0, 1)$ -regulares $\{1, 4\}$ e $\{3, 6\}$, logo, $\{-1, 1\} \subset \sigma(A_G) = \{-2.41, -1, -0.41, 0.41, 1, 2.41\}$. Este grafo tem um único conjunto $(1, 1)$ -regular, $\{2, 5\}$, com $0 \notin \sigma(A_G)$. Note-se que dada a existência de conjuntos $(0, 1)$ -regulares, apesar de $\{1, 3, 4, 6\}$ ser o único conjunto $(1, 2)$ -regular, $-1 \in \sigma(A_G)$ está em concordância com o Corolário 3.2.

3.2 Propriedades combinatórias

Proposição 3.3 *Seja G um grafo com um conjunto (k, τ) -regular $S \subset V(G)$ com $k, \tau \in \mathbb{N}$. Então $L(S)$ é um $(\{2k - 2\}, \{0, k\})$ -conjunto de $L(G)$, onde $L(S)$ denota o subconjunto de vértices de $L(G)$ associados às arestas do subgrafo induzido $G[S]$.*

Prova. Como S induz um subgrafo k -regular em G , então o subgrafo induzido por $L(S)$ em $L(G)$ é $(2k - 2)$ -regular (ver Proposição 2.8). Considere-se agora, $u \in E(G)$ tal que $u = ij$ com $i \in S$ e $j \in V(G) \setminus S$. Então o vértice $u \in V(L(G))$ é adjacente a k vértices de $L(S)$, já que $i \in S$ e $G[S]$ é k -regular. Por outro lado, se $v \in E(G)$ é tal que $v = ij$ com $i, j \in V(G) \setminus S$, então o vértice $v \in V(L(G))$ não tem vizinhos em $L(S)$. Consequentemente, $L(S)$ é um $(\{2k - 2\}, \{0, k\})$ -conjunto de $L(G)$. ■

Na Observação 3.1, são analisadas as diferentes possibilidades que podem ocorrer em grafos com conjuntos (k, τ) -regulares quando $k = 0$ ou $\tau = 0$, concluindo-se, mais adiante (ver página 20), que os conjuntos $(0, \tau)$ -regulares são independentes máximos mas, não são necessariamente independentes máximos. Em [Tho81] mostra-se que um conjunto $(0, \tau)$ -regular num grafo fortemente regular é um independente máximo. Na proposição seguinte prova-se que, em grafos p -regulares ($p > 0$), os conjuntos $(0, p)$ -regulares são independentes máximos.

Proposição 3.4 [CR04] *Seja G um grafo p -regular ($p > 0$) de ordem n , com um conjunto $(0, \tau)$ -regular S . Então*

1. $p = \tau$ se e só se G é um grafo bipartido com $G = (S, V(G) \setminus S, E(G))$.
2. Se $p = \tau$ então $|S| = |V(G) \setminus S| = \frac{n}{2} = \alpha(G)$.
3. Se $p = \tau = \alpha(G)$ então $G = K_{p,p}$.

Prova.

1. Seja S um conjunto $(0, p)$ -regular do grafo p -regular G . Para todo o $v \in V(G) \setminus S$

$$|N_G(v) \cap S| = p \quad \text{e} \quad |N_G(v) \cap (V(G) \setminus S)| = 0$$

e, para todo o $v \in S$

$$|N_G(v) \cap S| = 0 \quad \text{e} \quad |N_G(v) \cap (V(G) \setminus S)| = p,$$

pelo que G é um grafo (p -regular) bipartido com $G = (S, V(G) \setminus S, E(G))$.

Reciprocamente, se G é um grafo p -regular bipartido tal que $G = (S, V(G) \setminus S, E(G))$, então S e $V(G) \setminus S$ são conjuntos $(0, p)$ -regulares pelo que $p = \tau$.

2. De 1., se $p = \tau$ então $G = (S, V(G) \setminus S, E(G))$. Adicionalmente, contando por dois processos distintos, o número de arestas que unem vértices de S com vértices de $V(G) \setminus S$, vem

$$p|V(G) \setminus S| = p|S| \Rightarrow |V(G) \setminus S| = |S| = \frac{n}{2}.$$
⁴

Falta provar que se $p = \tau$ então S é um independente máximo. Seja I um independente máximo de G e considere-se a seguinte partição de $V(G)$

$$V(G) = (S \setminus I) \cup (S \cap I) \cup (I \setminus S) \cup (V(G) \setminus (S \cup I)).$$

Dado que $G = (S, V(G) \setminus S, E(G))$ e que S e I são independentes de G então

- (a) $\forall v \in S \cap I, N_G(v) \subset V(G) \setminus (S \cup I)$,
- (b) $\forall v \in I \setminus S, N_G(v) \subset S \setminus I$,
- (c) $\forall v \in S \setminus I, N_G(v) \subset V(G) \setminus S = (I \setminus S) \cup (V(G) \setminus (S \cup I))$,
- (d) $\forall v \in V(G) \setminus (S \cup I), N_G(v) \subset S = (S \setminus I) \cup (S \cap I)$.

Além disso, como G é p -regular (com $p > 0$), considerando as arestas $ij \in E(G)$ tais que $i \in S \cap I$ e $j \in V(G) \setminus (S \cup I)$, de (a) e (d) vem

$$p|S \cap I| \leq p|V(G) \setminus (S \cup I)| \Leftrightarrow |S \cap I| \leq |V(G) \setminus (S \cup I)|;$$

considerando agora, as arestas $ij \in E(G)$ com $i \in I \setminus S$ e $j \in S \setminus I$, de (b) e (c) tem-se

$$p|I \setminus S| \leq p|S \setminus I| \Leftrightarrow |I \setminus S| \leq |S \setminus I|.$$

Consequentemente,

$$|I| = |S \cap I| + |I \setminus S| \leq |V(G) \setminus (S \cup I)| + |S \setminus I| = |V(G) \setminus I| = n - |I|$$

concluindo-se que $|I| \leq \frac{n}{2} = |S|$ e S é um independente máximo de G .

⁴Note-se que se $p = \tau$, de (3.4) também se conclui que $|S| = \frac{n\tau}{p-0+\tau} = \frac{n}{2}$.

3. De 1. e 2. vem que se $p = \tau$ então o grafo p -regular G é bipartido, com $G = (S, V(G) \setminus S, E(G))$ e $\alpha(G) = |S|$. Se além disso, $p = \tau = \alpha(G) = |S|$, conclui-se que $G = K_{p,p}$. ■

Os resultados seguintes são relativos a grafos com um conjunto (k_1, τ_1) -regular S_1 e um conjunto (k_2, τ_2) -regular S_2 . Neles se obtém igualdades que envolvem as cardinalidades destes conjuntos e da sua intersecção, relacionando-as com os correspondentes parâmetros k e τ .

Proposição 3.5 [Tho81] *Seja G um grafo p -regular de ordem n e $S_i \subset V(G)$ um conjunto (k_i, τ_i) -regular, para $i = 1, 2$, com $k_1 - \tau_1 \neq k_2 - \tau_2$. Então*

$$|S_1 \cap S_2| = \frac{|S_1||S_2|}{n}. \quad (3.8)$$

Seja G um grafo p -regular ($p > 0$) de ordem n com um conjunto (k_1, τ_1) -regular S_1 e um conjunto (k_2, τ_2) -regular S_2 , onde $\tau_1, \tau_2 > 0$. Da Proposição 3.5 vem que se $k_1 - \tau_1 \neq k_2 - \tau_2$ então $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$. Por outro lado, de (3.4) e (3.8) obtém-se

$$|S_1 \cap S_2| = \frac{n\tau_1\tau_2}{(p - k_1 + \tau_1)(p - k_2 + \tau_2)}. \quad (3.9)$$

Adicionalmente, se $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ então $k_1 - \tau_1 = k_2 - \tau_2$ mas, o recíproco não é necessariamente verdade.

O grafo de Petersen, P , representado na Figura 3.5, ou seja, o grafo fortemente regular com parâmetros $(10, 3; 0, 1)$ e espectro $\sigma(A_P) = \{[-2]^4, [1]^5, [3]^1\}$ é um exemplo ilustrativo destas observações. Este grafo admite uma partição do conjunto de vértices $V(P)$ em dois conjuntos $(2, 1)$ -regulares que induzem dois ciclos C_5 (por exemplo, $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $S_2 = \{6, 7, 8, 9, 10\}$) e tem também conjuntos $(0, 2)$ -regulares (por exemplo, $T_1 = \{1, 4, 7, 8\}$ e $T_2 = \{2, 4, 6, 10\}$).

Verifica-se que $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$ e, para $i, j = 1, 2$, $T_i \cap S_j \neq \emptyset$. De facto, da igualdade (3.9),

$$|T_i \cap S_j| = \frac{20}{(3 + 2)(3 - 1)} = 2, \text{ para } i, j = 1, 2.$$

Em geral, se T é um conjunto $(0, 2)$ -regular de P e (S, \bar{S}) é uma partição de $V(P)$ que induz dois ciclos C_5 , então T tem 2 vértices em cada um destes ciclos.

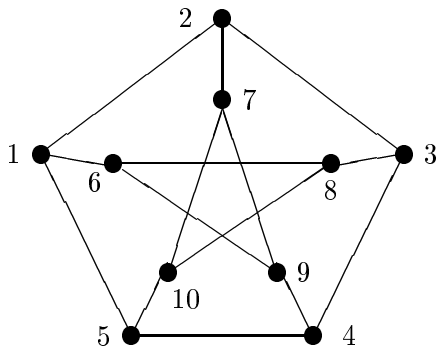


Figura 3.5: Grafo de Petersen

O grafo de Petersen é um dos grafos de Moore⁵, juntamente com o ciclo C_5 (que, como se provou na página 22, não tem conjuntos (k, τ) -regulares $S \subset V(C_5)$) e o grafo de Hoffman-Singleton.

O grafo de Hoffman-Singleton H , com parâmetros $(50, 7; 0, 1)$ e espectro $\sigma(A_H) = \{[-3]^{21}, [2]^{28}, [7]^1\}$ (obtido por aplicação de (A.3) e (A.7) ou (A.8, A.9), em apêndice), encontra-se representado na Figura 3.6, e admite uma partição de $V(H)$ em 5 conjuntos $(3, 1)$ -regulares S_j com 10 vértices cada, que induzem 5 grafos de Petersen. Prova-se [GR01] que este grafo admite também um conjunto $(0, 3)$ -regular T com 15 vértices, que é um independente máximo. Consequentemente, de (3.9), $|T \cap S_j| = \frac{150}{(7+3)(7-2)} = 3$, para $j = 1, \dots, 5$, isto é, um independente máximo de um grafo de Hoffman-Singleton tem três vértices em cada um dos cinco grafos de Petersen induzidos, nos quais o conjunto de vértices pode ser partido.

Por último, note-se que no grafo de Petersen, tal como no grafo de Hoffman-Singleton, verifica-se que para cada valor próprio, λ , da matriz de adjacência respectiva, existem conjuntos (k, τ) -regulares, com $k - \tau = \lambda$.

⁵De acordo com [GR01] um *grafo de Moore* é um grafo com diâmetro d e cintura $g = 2d + 1$. Em [Big93] mostra-se que os grafos de Moore de diâmetro 2 são grafos fortemente regulares com parâmetros $(n, p; 0, 1)$, onde $p \in \{2, 3, 7, 57\}$ e $n = 1 + p + p(p-1) = 1 + p^2$. A existência de um quarto grafo de Moore correspondente ao grafo fortemente regular com parâmetros $(3250, 57; 0, 1)$ constitui um problema em aberto na Teoria dos grafos e é considerado um dos seus grandes desafios actuais.

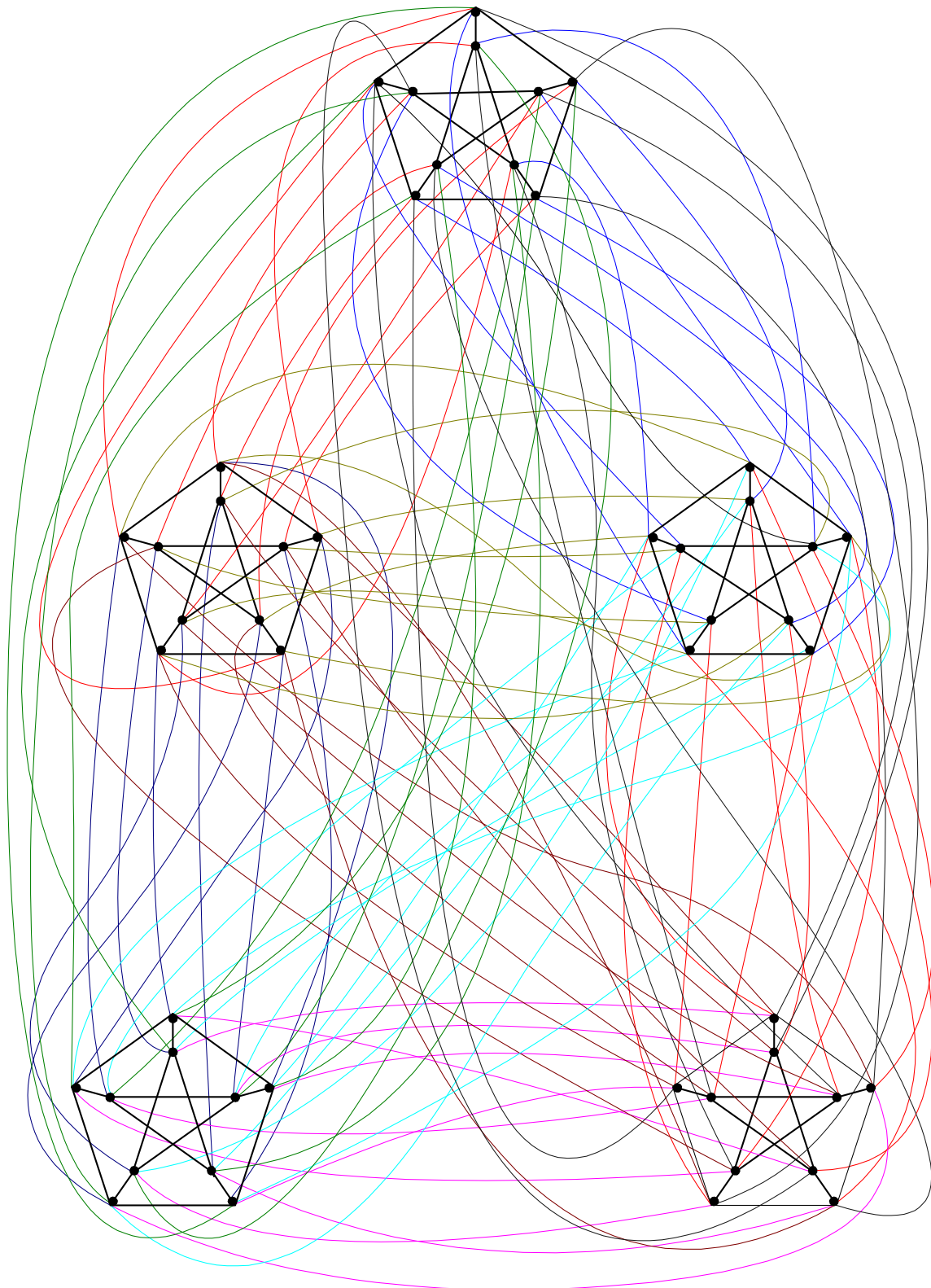


Figura 3.6: Grafo de Hoffman-Singleton

Proposição 3.6 [CR02] *Seja G um grafo com um conjunto (k_1, τ_1) -regular, S_1 , e um conjunto (k_2, τ_2) -regular, S_2 . Então*

$$\tau_2|S_1| - \tau_1|S_2| = |S_1 \cap S_2|((k_1 - \tau_1) - (k_2 - \tau_2)). \quad (3.10)$$

Prova. Considerem-se os seguintes subconjuntos de arestas de G :

$$\begin{aligned} A &= \{ij \in E(G) : i \in S_1 \setminus S_2 \text{ e } j \in S_2 \setminus S_1\}, \\ B &= \{ij \in E(G) : i \in S_1 \cap S_2 \text{ e } j \in S_2 \setminus S_1\}, \\ C &= \{ij \in E(G) : i, j \in S_1 \cap S_2\}, \\ D &= \{ij \in E(G) : i \in S_1 \setminus S_2 \text{ e } j \in S_1 \cap S_2\}. \end{aligned}$$

Tendo em conta que $\tau_1|S_2 \setminus S_1| = |A| + |B|$, $k_1|S_1 \cap S_2| = |C| + |D|$, $\tau_2|S_1 \setminus S_2| = |A| + |D|$ e $k_2|S_1 \cap S_2| = |B| + |C|$ tem-se

$$\tau_1|S_2 \setminus S_1| + k_1|S_1 \cap S_2| = \tau_2|S_1 \setminus S_2| + k_2|S_1 \cap S_2|,$$

e atendendo a que $|S_i \setminus S_j| = |S_i| - |S_i \cap S_j|$, vem

$$\tau_1|S_2| - \tau_1|S_1 \cap S_2| + k_1|S_1 \cap S_2| = \tau_2|S_1| - \tau_2|S_1 \cap S_2| + k_2|S_1 \cap S_2|,$$

ou seja,

$$\tau_2|S_1| - \tau_1|S_2| = |S_1 \cap S_2|((k_1 - \tau_1) - (k_2 - \tau_2)).$$

■

Note-se que para um grafo, G , p -regular de ordem n , considerando em (3.10) $S_2 = V(G)$ vem $k_2 = p$ e $\tau_2 = 0$, obtendo-se (3.4) (para $S = S_1$ e $(k, \tau) = (k_1, \tau_1)$).

Corolário 3.3 [CR02] *Seja G um grafo com um conjunto (k_1, τ_1) -regular S_1 e um conjunto (k_2, τ_2) -regular S_2 , tal que $\tau_2 > 0$.*

(a) *Se $k_1 = k_2$ então $|S_1| = \frac{\tau_1}{\tau_2}|S_2| + \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2}|S_1 \cap S_2|$, ou seja, $|S_1 \setminus S_2| = \frac{\tau_1}{\tau_2}|S_2 \setminus S_1|$.*

(b) *Se $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ então $|S_1| = |S_2| + \frac{k_1 - k_2}{\tau}|S_1 \cap S_2|$.*

(c) Se $k_1 - \tau_1 = k_2 - \tau_2$ ou $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ então $|S_1| = \frac{\tau_1}{\tau_2}|S_2|$.

Prova.

(a) Considerando $k_1 = k_2$, de (3.10) vem que $\tau_2|S_1| = \tau_1|S_2| + (\tau_2 - \tau_1)|S_1 \cap S_2|$ e, como $\tau_2 \neq 0$, conclui-se que

$$|S_1| = \frac{\tau_1}{\tau_2}|S_2| + \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2}|S_1 \cap S_2|. \quad (3.11)$$

Tendo em conta que

$$|S_i \setminus S_j| = |S_i| - |S_i \cap S_j| \Leftrightarrow |S_i| = |S_i \setminus S_j| + |S_i \cap S_j|,$$

de (3.11) obtém-se

$$|S_1 \setminus S_2| + |S_1 \cap S_2| = \frac{\tau_1}{\tau_2}(|S_2 \setminus S_1| + |S_1 \cap S_2|) + \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2}|S_1 \cap S_2|$$

que é equivalente a $|S_1 \setminus S_2| = \frac{\tau_1}{\tau_2}|S_2 \setminus S_1|$.

(b) Se $\tau_1 = \tau_2 = \tau > 0$, de (3.10) vem que

$$\tau(|S_1| - |S_2|) = (k_1 - k_2)|S_1 \cap S_2| \Leftrightarrow |S_1| = |S_2| + \frac{k_1 - k_2}{\tau}|S_1 \cap S_2|.$$

(c) Finalmente, se $k_1 - \tau_1 = k_2 - \tau_2$ ou $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, de (3.10) conclui-se que

$$\tau_2|S_1| = \tau_1|S_2|,$$

e, como $\tau_2 > 0$, então $|S_1| = \frac{\tau_1}{\tau_2}|S_2|$. ■

A Figura 3.4 representa um grafo com o conjunto $(0, 1)$ -regular $S_1 = \{2, 5\}$, o conjunto $(0, 2)$ -regular $S_2 = \{1, 3, 5\}$ e o conjunto $(1, 2)$ -regular $S_3 = \{1, 3, 4, 6\}$. Considerando $(k_1, \tau_1) = (0, 1)$, $(k_2, \tau_2) = (0, 2)$ e $(k_3, \tau_3) = (1, 2)$, então, de acordo com o Corolário 3.3 - (a)

$$|\{2\}| = |S_1 \setminus S_2| = \frac{\tau_1}{\tau_2}|S_2 \setminus S_1| = \frac{1}{2}|\{1, 3\}|,$$

do Corolário 3.3 - (b)

$$3 = |S_2| = |S_3| + \frac{k_2 - k_3}{\tau_2}|S_2 \cap S_3| = 4 + \frac{0 - 1}{2}|\{1, 3\}|,$$

e do Corolário 3.3 - (c)

$$2 = |S_1| = \frac{\tau_1}{\tau_3}|S_3| = \frac{1}{2}|S_3| = \frac{1}{2}|\{1, 3, 4, 6\}|.$$

As propriedades enunciadas no Corolário 3.3 induzem as seguintes relações de ordem parcial num grafo conexo de ordem n . Seja $k \in \mathbb{N}_0$ e $\mathcal{S}_k = \{S_i \subseteq V(G) : S_i \text{ é um conjunto } (k, \tau_i) \text{ --regular, } \tau_i \in \{1, \dots, n-1\}\}$. Tendo em conta que do Corolário 3.3 - (a), $|S_i| \geq |S_j|$ se e só se $\tau_i \geq \tau_j$, com $|S_i| = |S_j|$ se e só se $\tau_i = \tau_j$, então a relação binária \succeq definida por

$$\forall S_i, S_j \in \mathcal{S}_k, \quad S_i \succeq S_j \text{ se e só se } S_i = S_j \text{ ou } \tau_i > \tau_j \quad (3.12)$$

é uma relação de ordem parcial em \mathcal{S}_k . De forma análoga, para $\lambda \in \mathbb{Z}$, considerando o conjunto $\mathcal{S}_\lambda = \{S_i \subseteq V(G) : S_i \text{ é um conjunto } (k_i, \tau_i)\text{-regular, com } k_i \in \{0, \dots, n-1\}, \tau_i \in \{1, \dots, n-1\} \text{ e } k_i - \tau_i = \lambda\}$ e o Corolário 3.3 - (c), é possível definir uma relação de ordem parcial em \mathcal{S}_λ semelhante a \succeq (ver (3.12)). Finalmente, para $\tau \in \mathbb{N}$, o Corolário 3.3 - (b) induz uma relação de ordem parcial no conjunto $\mathcal{S}_\tau = \{S_i \subseteq V(G) : S_i \text{ é um conjunto } (k_i, \tau) \text{ --regular, com } k_i \in \{0, \dots, n-1\}\}$ definida por

$$\forall S_i, S_j \in \mathcal{S}, \quad S_i \succeq_\tau S_j \text{ se e só se } S_i = S_j \text{ ou } k_i > k_j.$$

No resultados apresentados a seguir são estabelecidas relações entre a existência de conjuntos (k, τ) -regulares e a existência de emparelhamentos, em particular, conclui-se que existe uma correspondência entre os emparelhamentos induzidos perfeitos de um grafo e os conjuntos $(0, 1)$ -regulares do seu grafo linha.

Proposição 3.7 [CR04] *Seja G um grafo conexo, $\emptyset \neq S \subset V(G)$ e $T = V(G) \setminus S$.*

- (a) *Se S é $(p, 1)$ -regular e T é $(q, 1)$ -regular então $M = \{ij \in E(G) : i \in S, j \in T\}$ é um emparelhamento perfeito de G .*
- (b) *Se G é p -regular, com $p \geq 2$, e S é $(2, p-2)$ -regular então cada componente do subgrafo $G[S] + G[T]$ é um triângulo ou um ciclo sem cordas.*
- (c) *Se G é p -regular, com $p \geq 2$, e $S \subset V(G)$ é $(k, p-1)$ -regular então $E(G[T])$ é um emparelhamento induzido maximal de G .*
- (d) *Se $M = E(G[S])$ é um emparelhamento induzido de G então existe um subgrafo H de $L(G)$ de ordem não inferior a $2|M|$ no qual $L(M)$ é $(0, 1)$ -regular, onde $L(M)$ é o subconjunto de vértices de $L(G)$ associados às arestas de M .*

Prova.

- (a) Dado que S é $(p, 1)$ -regular e T é $(q, 1)$ -regular, então, para todo o $v \in T$ existe um único $u \in S$ tal que $uv \in E(G)$ e, para todo o $i \in S$ existe um único $j \in T$ tal que $ij \in E(G)$. Logo, $|S| = |T|$ e $M = \{ij \in E(G) : i \in S, j \in T\}$ é um emparelhamento perfeito.
- (b) Da $(2, p - 2)$ -regularidade de S conclui-se que o subgrafo induzido $G[S]$ é 2-regular e para todo o $u \in T$, $|N_G(u) \cap S| = p - 2$. Consequentemente, como G é p -regular tem-se que, para todo o $u \in T$, $|N_G(u) \cap T| = 2$, ou seja, $G[T]$ é também 2-regular. Por último, (b) decorre do facto de que cada componente de um grafo 2-regular é um triângulo ou um ciclo sem cordas.
- (c) Tendo em conta que G é p -regular e S é $(k, p - 1)$ -regular, então T é $(1, p - k)$ -regular e $E(G[T])$ é um emparelhamento induzido, que é maximal (dado que $p - 1 \geq 1$ e $\forall v \in S \ |N_G(v) \cap T| = p - k \neq 0$).
- (d) Seja $M = E(G[S])$ um emparelhamento induzido de G . Verifica-se que $L(M)$ é um independente de $L(G)$ tal que

$$\forall v \in V(L(G)) \setminus L(M), \quad |N_{L(G)}(v) \cap L(M)| \leq 1, \quad (3.13)$$

ou seja, $L(M)$ é um $(\{0\}, \{0, 1\})$ -conjunto de $L(G)$. Por outro lado, como G é conexo,

$$\forall i \in L(M) \quad |N_{L(G)}(i) \cap (V(L(G)) \setminus L(M))| \geq 1. \quad (3.14)$$

Consequentemente, considerando $Q = \{v \in V(L(G)) \setminus L(M) : |N_{L(G)}(v) \cap L(M)| = 1\}$, de (3.13) e (3.14) vem que $|Q| \geq |L(M)| = |M|$ e $H = L(M) \cup Q$ é tal que $|H| \geq 2|M|$ e também que $L(M)$ é $(0, 1)$ -regular no subgrafo de $L(G)$ induzido por H . ■

O grafo representado na Figura 3.7 é um grafo 3-regular e tem os conjuntos $(2, 1)$ -regulares $S = \{1, 5, 6\}$ e $T = \{2, 3, 4\}$. De acordo com a Proposição 3.7 - (a), o conjunto de arestas $M = \{ij \in E(G) : i \in S, j \in T\} = \{12, 36, 45\}$ é um emparelhamento perfeito e, de acordo com a Proposição 3.7 - (b), $E(G[S] + G[T]) = \{15, 16, 56, 23, 24, 34\}$ pelo que o grafo $G[S] + G[T]$ tem como componentes dois triângulos. O ciclo C_6 (na Figura 3.4) é um grafo 2-regular que tem o conjunto $(0, 1)$ -regular $S = \{2, 5\}$ e, de acordo com a Proposição 3.7 - (c),

$T = V(C_6) \setminus S = \{1, 3, 4, 6\}$ induz um emparelhamento induzido perfeito. Por outro lado, para o grafo G da Figura 3.2, $M = \{16, 34\}$ é um emparelhamento induzido que corresponde a um emparelhamento induzido perfeito do subgrafo C_6 . Note-se que eliminando a aresta $25 \in E(G) \setminus M$ obtém-se C_6 e que este grafo é isomorfo ao seu grafo linha, $L(C_6)$. Além disso, o emparelhamento M corresponde a um conjunto $(0, 1)$ -regular de $L(C_6)$ (em concordância com a Proposição 3.7 - (d)).

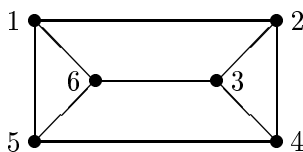


Figura 3.7: Um grafo 3-regular com o conjunto $(1, 1)$ -regular $\{3, 6\}$ e o conjunto $(2, 1)$ -regular $\{1, 5, 6\}$.

Como aplicação dos conjuntos (k, τ) -regulares, note-se que de acordo com [BC03] um grafo conexo $G \neq P_2$ tem um emparelhamento perfeito se e só se o seu grafo linha é 2-regular-estável. Tem-se então o resultado a seguir que traduz esta relação em função da existência de determinados conjuntos (k, τ) -regulares.

Proposição 3.8 [BC03] *Seja $G \neq P_2$ um grafo conexo. Então $M \subset E(G)$ é um emparelhamento perfeito de G se e só se $L(M) \subset V(L(G))$ é um conjunto $(0, 2)$ -regular de $L(G)$, onde $L(M)$ denota o subconjunto dos vértices de $L(G)$ associados às arestas de M .*

Dado um grafo G , sabe-se que [Doo73] $-2 \in \sigma(A_{L(G)})$ se e só se cada componente de G tem um ciclo de comprimento par ou dois ciclos de comprimentos ímpares. Como aplicação das Proposições 3.2 e 3.8 conclui-se [Car03] que um grafo G , em que cada componente é uma árvore ou tem um único ciclo que tem comprimento ímpar, contém um emparelhamento perfeito M se e só se o sistema $(A_{L(G)} + 2I_m)x = 2\hat{e}$ (com $m = |V(L(G))|$) tem uma solução $\bar{x} \in \{0, 1\}^m$, que é a única solução deste sistema. Além disso, \bar{x} é o vector característico de $L(M)$.

A Proposição 3.7 - (d) relaciona a existência de emparelhamentos induzidos num grafo G com a existência de conjuntos $(0, 1)$ -regulares num subgrafo do grafo linha $L(G)$. Na proposição

seguinte considera-se o caso particular da existência de emparelhamentos induzidos perfeitos, isto é, emparelhamentos induzidos que cobrem todas as arestas do grafo.

Proposição 3.9 [CDR04] *Um grafo conexo $G \neq P_2$ tem um emparelhamento induzido perfeito $IM \subset E(G)$ se e só se $L(IM) \subset V(L(G))$ é um conjunto $(0,1)$ -regular de $L(G)$, onde $L(IM)$ denota o subconjunto dos vértices de $L(G)$ associados às arestas de IM .*

Prova. Se $IM \subset E(G)$ é um emparelhamento induzido perfeito de G , então qualquer aresta $xy \in E(G) \setminus IM$ verifica $|\{x, y\} \cap V(IM)| = 1$ (onde $V(IM)$ é o conjunto dos vértices extremos das arestas de IM) logo, $L(IM) \subset V(L(G))$ é um conjunto $(0,1)$ -regular de $L(G)$. Reciprocamente, seja $L(X) \subset V(L(G))$ um conjunto $(0,1)$ -regular de $L(G)$, onde $X \subset E(G)$ é o subconjunto de arestas de G associadas aos vértices de $L(X)$. Então, X é um emparelhamento de G e para todo $v \notin L(X)$, $|N_{L(G)}(v) \cap L(X)| = 1$, ou seja, qualquer aresta de G não pertencente a X é adjacente a exactamente uma aresta de X portanto, X é um emparelhamento induzido perfeito. ■

Corolário 3.4 *Se G é um grafo com um emparelhamento perfeito $M \subset E(G)$ e um emparelhamento induzido perfeito $IM \subset E(G)$, então [CR02]*

$$|IM \setminus M| \leq \frac{n}{4}. \quad (3.15)$$

Adicionalmente, se $|E(G)| = m$ e G é p -regular ou semi-regular com graus de regularidade p_1 e p_2 , onde $p_1 + p_2 = p$, então [CDR04]

$$|M| = \frac{m}{p}, \quad |IM| = \frac{m}{2p-1} \quad (3.16)$$

e

$$|M \cap IM| = \frac{m}{p(2p-1)}. \quad (3.17)$$

Prova. Se G é um grafo com um emparelhamento perfeito $M \subset E(G)$ e um emparelhamento induzido perfeito $IM \subset E(G)$ então, de acordo com a Proposição 3.8, $L(M)$ é um conjunto $(0,2)$ -regular de $L(G)$ e, pela Proposição 3.9, $L(IM)$ é um conjunto $(0,1)$ -regular de $L(G)$. Aplicando agora o Corolário 3.3 - (a) em $L(G)$, conclui-se que $\frac{n}{2} = |M| \geq |M \setminus IM| = 2|IM \setminus M|$, donde se obtém (3.15).

Por outro lado, se G é p -regular ($p > 0$) ou semi-regular com graus de regularidade p_1 e p_2 ($p_1 + p_2 = p > 0$), da Proposição 2.8, $L(G)$ é $(2p - 2)$ -regular e, atendendo a que $L(M)$ é um conjunto $(0, 2)$ -regular e que $L(IM)$ é $(0, 1)$ -regular, de (3.4) obtém-se (3.16) e de (3.9) obtém-se (3.17). ■

De (3.17) conclui-se que se um grafo p -regular (com $p > 0$) contém um emparelhamento perfeito e um emparelhamento induzido perfeito então estes emparelhamentos têm arestas em comum.

O ciclo C_6 (representado na Figura 3.4) é um grafo 2-regular de ordem $n = 6$ com um emparelhamento induzido perfeito $IM = \{12, 45\}$ e um emparelhamento perfeito $M = \{12, 34, 56\}$. C_6 e $L(C_6)$ são isomorfos pelo que facilmente se conclui (em concordância com as Proposições 3.8 e 3.9) que $L(M)$ é um conjunto $(0, 2)$ -regular de $L(G)$ e $L(IM)$ é um conjunto $(0, 1)$ -regular de $L(G)$. Note-se que de acordo com o Corolário 3.4, $|IM \setminus M| = |\{45\}| = 1 \leq \frac{6}{4}$, $|IM| = \frac{6}{2 \times 2 - 1} = 2$, $|M| = \frac{6}{2} = 3$ e $|IM \cap M| = |\{12\}| = \frac{6}{2(2 \times 2 - 1)} = 1$.

Capítulo 4

Grafos com partições equilibradas

Neste capítulo são apresentados os conceitos de partição equilibrada, grafo quociente e complementar de um grafo relativamente a uma partição do conjunto de vértices; em particular, consideram-se os grafos com bipartições (eventualmente equilibradas) do conjunto de vértices. Na Secção 4.1 mostra-se que se G é um grafo com uma partição equilibrada π então o grafo linha, $L(G)$, admite uma partição equilibrada $\bar{\pi}$, que se obtém a partir de π . Na Secção 4.2 considera-se um grafo regular G com um conjunto (k, τ) -regular S que induz uma bipartição equilibrada $\pi = (S, V(G) \setminus S)$ e, através dos parâmetros de G e S , determinam-se condições necessárias e suficientes para que o complementar de G relativamente a π também seja regular. Adicionalmente, estabelecem-se condições que garantem que os dois grafos tenham o mesmo grau de regularidade. Por último, na Secção 4.3, caracterizam-se os grafos G com um independente máximo S que é $(0, \tau)$ -regular¹ e tais que o número de independência de G é inferior ao do seu complementar relativamente à partição de $V(G)$ induzida por S .

Dado um grafo G de ordem n , uma *partição* $\pi = (V_1, V_2, \dots, V_r)$ ($1 \leq r \leq n$) de $V(G)$ é um conjunto cujos elementos V_j , para $j = 1, 2, \dots, r$, são subconjuntos não vazios de $V(G)$ tais que $\bigcup_{j=1}^r V_j = V(G)$ e para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, r\}$ $V_i \cap V_j = \emptyset$. Se $r \in \{1, n\}$ diz-se que π é uma *partição trivial*. De acordo com [Sch74], uma partição $\pi = (V_1, V_2, \dots, V_r)$ de

¹Recorde-se que da Observação 3.1, um conjunto $(0, \tau)$ -regular é um independente maximal.

$V(G)$ diz-se *equilibrada*² se para quaisquer $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$ existe $d_{ij} \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$\forall v \in V_i \quad |N_G(v) \cap V_j| = d_{ij}, \quad (4.1)$$

ou seja, o número de vizinhos que cada vértice de V_i tem num subconjunto V_j é independente da escolha do vértice em V_i . Se $r = 2$ em (4.1), diz-se que π é uma *bipartição equilibrada*. Note-se que uma partição π de $V(G)$ é equilibrada se os subgrafos induzidos por cada subconjunto V_i são regulares (com graus de regularidade d_{ii}) e as arestas que unem vértices de dois subconjuntos disjuntos (V_i e V_j) formam, juntamente com estes vértices, um subgrafo semi-regular (com parâmetros d_{ij} e d_{ji}).

De agora em diante, por simplicidade de linguagem, uma partição equilibrada do conjunto de vértices $V(G)$ de um grafo G também será designada por partição equilibrada do grafo G .

Para o grafo G representado na Figura 3.1 a bipartição $\pi = (V_1, V_2)$, com $V_1 = \{2, 5\}$ e $V_2 = \{1, 3, 4, 6\}$, é uma bipartição equilibrada. Relativamente a este grafo, verifica-se o seguinte:

$$\begin{aligned} \forall v \in V_1 \quad |N_G(v) \cap V_1| = 1 \quad \text{e} \quad |N_G(v) \cap V_2| = 4, \\ \forall u \in V_2 \quad |N_G(u) \cap V_1| = 2 \quad \text{e} \quad |N_G(u) \cap V_2| = 1. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Note-se que qualquer grafo admite uma partição equilibrada. De facto, sendo G um grafo de ordem $n \in \mathbb{N}$, a partição trivial de $V(G)$ em n subconjuntos é uma partição equilibrada para qualquer grafo (com $d_{ij} = (A_G)_{ij}$, $\forall i, j \in V(G)$). Por outro lado, a partição trivial $\pi = (V_1)$, com $V_1 = V(G)$, é uma partição equilibrada se e só se o grafo G é p -regular (neste caso, $d_{11} = p$).

Da definição de bipartição equilibrada conclui-se que uma bipartição do conjunto de vértices $V(G)$ de um grafo G , $\pi = (S, V(G) \setminus S)$, é equilibrada se e só se existem $d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22} \in \mathbb{N}_0$ tais que S é (d_{11}, d_{21}) -regular e $V(G) \setminus S$ é (d_{22}, d_{12}) -regular. Consequentemente, da Proposição 3.2, conclui-se que um grafo G , de ordem n , tem uma bipartição equilibrada se e

²Em [CDS80] é adoptada a designação *coloração admissível* e diz-se que um grafo tem uma coloração admissível se é possível colorir cada vértice com uma de r cores disponíveis (c_1, c_2, \dots, c_r) , por forma a que todos os vértices de cor c_i tenham o mesmo número de vizinhos de cor c_j .

só se existem $d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22} \in \mathbb{N}_0$ tais que o sistema (4.3) tem uma solução $\bar{x} \in \{0, 1\}^n$:

$$\begin{cases} A_G x = (d_{11} - d_{21})x + d_{21}\hat{e} \\ A_G(\hat{e} - x) = (d_{22} - d_{12})(\hat{e} - x) + d_{12}\hat{e}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Considere-se agora um grafo G com uma bipartição equilibrada $\pi = (V_1, V_2)$ tal que V_1 é (k_1, τ_1) -regular e V_2 é (k_2, τ_2) -regular.

- Como $d_G(v_1) = k_1 + \tau_2$ para $v_1 \in V_1$, e $d_G(v_2) = k_2 + \tau_1$ para $v_2 \in V_2$, então G é um grafo regular se e só se $k_1 - \tau_1 = k_2 - \tau_2$.
- Sendo $\pi = (V_1, V_2)$ uma partição de $V(G)$, então $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $|V_1| + |V_2| = n$ e do Corolário 3.3-(c) vem que

$$|V_1| = \frac{\tau_1}{\tau_2}|V_2| = \frac{\tau_1}{\tau_2}(n - |V_1|) = \frac{n\tau_1 - |V_1|\tau_1}{\tau_2},$$

concluindo-se que

$$|V_1| = \frac{n\tau_1}{\tau_1 + \tau_2} \quad \text{e} \quad |V_2| = n - |V_1| = \frac{n\tau_2}{\tau_1 + \tau_2}.$$

Observe-se que, se G é p -regular então $\tau_2 = p - k_1$ e $|V_1| = \frac{n\tau_1}{p - k_1 + \tau_1}$, em concordância com (3.4).

4.1 Grafo quociente

Considere-se um digrafo D como sendo um par de conjuntos $(V(D), E(D))$, onde $V(D)$ é um conjunto finito de elementos designados vértices e $E(D)$ é um conjunto de pares ordenados de elementos de $V(D)$, designados arcos. Se um digrafo D tem arcos múltiplos ou lacetes diz-se que D é um multidigrafo. No âmbito deste trabalho, a matriz de adjacência de um digrafo ou multidigrafo D de ordem n é a matriz $A_D = (a_{ij})$, de ordem n , tal que para $i, j \in V(D)$, $a_{ij} \in \mathbb{N}_0$ é o número de arcos com origem em i e término em j .

Seja G um grafo com uma partição equilibrada $\pi = (V_1, \dots, V_r)$. De acordo com [God93], o *grafo quociente*³ G/π de G relativamente à partição equilibrada π é um multidigrafo que tem

³Em [CDS80] é usada a designação *divisor*.

como vértices os subconjuntos de π e, para $i, j \in \{1, \dots, r\}$, G/π tem d_{ij} arcos de V_i para V_j , onde $d_{ij} = |N_G(v) \cap V_j|$ para todo o $v \in V_i$. Portanto G/π tem, em geral, lacetes e arcos múltiplos. A matriz de adjacência⁴ $A_{G/\pi}$ é a matriz de ordem r com entradas d_{ij} .

Se G é um grafo de ordem n e π é a partição equilibrada trivial com n subconjuntos, então $A_{G/\pi} = A_G$. Se G é um grafo p -regular e π é a partição equilibrada trivial com um conjunto $V_1 = V(G)$, então $A_{G/\pi} = [p]$. No caso particular de um grafo com uma bipartição equilibrada π , a matriz de adjacência do grafo quociente, $A_{G/\pi}$, é da forma

$$A_{G/\pi} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Em (4.2) verificou-se que $\pi = (\{2, 5\}, \{1, 3, 4, 6\})$ é uma bipartição equilibrada do grafo G representado na Figura 3.1. Na Figura 4.1 encontra-se o grafo quociente de G relativamente a π , bem como, a sua matriz de adjacência.

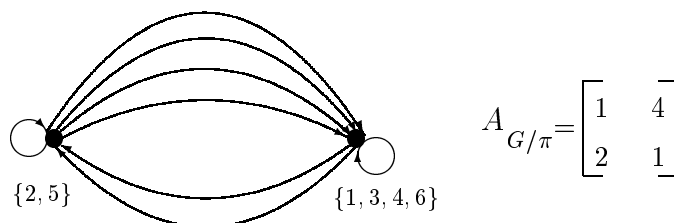


Figura 4.1: Grafo quociente G/π e matriz de adjacência $A_{G/\pi}$, relativamente à bipartição equilibrada $\pi = (\{2, 5\}, \{1, 3, 4, 6\})$ do grafo G da Figura 3.1.

Considerando o subconjunto de vértices S que tem como vector característico uma solução $\bar{x} \in \{0, 1\}^n$ ($n = |V(G)|$) do sistema (4.3), então $\pi = (S, V(G) \setminus S)$ é uma bipartição equilibrada de G tal que $A_{G/\pi}$ é a matriz (4.4). Se G é um grafo p -regular e $S \subset V(G)$ é (k, τ) -regular então $\pi = (S, V(G) \setminus S)$ é uma bipartição equilibrada tal que

$$A_{G/\pi} = \begin{bmatrix} k & p - k \\ \tau & p - \tau \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

⁴Em [Bol79], a matriz $(A_{G/\pi})^\top$ designa-se por *matriz colapsada* e diz-se que um grafo G é *altamente regular* com matriz de adjacência colapsada C (de ordem r) se para todo o $v \in V(G)$ existe uma partição equilibrada com r subconjuntos sendo um deles $V_1 = \{v\}$ e todas estas partições têm a mesma matriz colapsada C , isto é, grafo quociente.

Em particular, se $S \subset V(G)$ é um conjunto $(0, \tau)$ -regular vem

$$A_{G/\pi} = \begin{bmatrix} 0 & p \\ \tau & p - \tau \end{bmatrix}.$$

Na proposição seguinte prova-se que se π é uma partição equilibrada de um grafo G então, a partir de π , é possível obter uma partição equilibrada do grafo linha $L(G)$.

Proposição 4.1 *Se G é um grafo com uma partição equilibrada $\pi = (V_1, \dots, V_r)$, com $A_{G/\pi} = [d_{ij}]$, então $L(G)$ tem uma partição equilibrada $\bar{\pi} = \{U_{ij} : d_{ij} > 0 \text{ e } 1 \leq i \leq j \leq r\}$, onde U_{ij} denota o subconjunto de vértices de $L(G)$ correspondente ao conjunto de arestas $u = xy \in E(G)$ tais que $x \in V_i$ e $y \in V_j$. O número de subconjuntos de $\bar{\pi}$ é não superior a $\frac{r+r^2}{2}$.*

Prova. Considere-se $i, j, k, l \in \{1, 2, \dots, r\}$ com $i \leq j$, $k \leq l$ e $d_{ij}, d_{kl} \in \mathbb{N}$. Seja $v = xy \in E(G)$, com $x \in V_i$ e $y \in V_j$. Verifica-se que o número de arestas de $E(G)$, correspondentes a vértices de $U_{kl} \subset V(L(G))$, que são adjacentes a v não depende da escolha de v no subconjunto de arestas de $E(G)$ que unem vértices de V_i com vértices de V_j , sendo constante para cada escolha de i, j, k, l . De facto, $\forall v \in U_{ij} \subset V(L(G))$

$$|N_{L(G)}(v) \cap U_{kl}| = \begin{cases} 2d_{ii} - 2 & \text{se } i = j = k = l; \\ 2d_{il} & \text{se } i = j = k < l; \\ 2d_{ik} & \text{se } i = j = l > k; \\ d_{ii} & \text{se } i = k = l < j; \\ d_{jj} & \text{se } i < j = k = l; \\ d_{il} & \text{se } i = k < j, l \text{ e } j \neq l; \\ d_{jl} & \text{se } i < j = k < l; \\ d_{ik} & \text{se } k < i = l < j; \\ d_{jk} & \text{se } i, k < j = l \text{ e } i \neq k; \\ 0 & \text{se } i \leq j \text{ e } k = l \notin \{i, j\} \text{ ou,} \\ & \text{se } k \leq l \text{ e } i = j \notin \{k, l\} \text{ ou,} \\ & \text{se } i, j, k \text{ e } l \text{ têm valores distintos;} \\ d_{ij} + d_{ji} - 2 & \text{se } i = k \neq j = l. \end{cases} \quad (4.6)$$

Falta mostrar que o número de subconjuntos de $\bar{\pi}$ é no máximo $\frac{r+r^2}{2}$. Se $d_{ij} > 0$, para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, r\}$, então, para cada $j \in \{1, \dots, r\}$, o número de subconjuntos U_{ij} com $i \leq j$ é dado por j . Logo, o número de subconjuntos de $\bar{\pi}$ é dado por $\sum_{j=1}^r j = \frac{1+r}{2}r = \frac{r+r^2}{2}$.

■

O grafo G , representado na Figura 4.2, tem a bipartição equilibrada $\pi = (V_1, V_2)$, onde $V_1 = \{1, 3, 4, 6\}$ e $V_2 = \{2, 5\}$, com $A_{G/\pi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

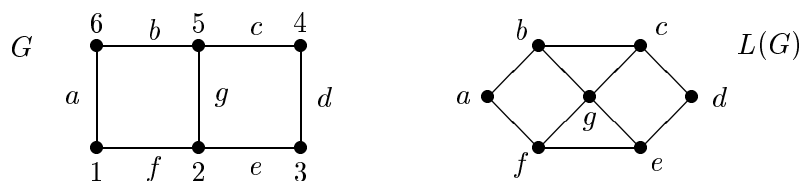


Figura 4.2: A bipartição equilibrada $\pi = (\{1, 2, 3, 4\}, \{2, 5\})$ de G e a correspondente partição equilibrada $\bar{\pi} = (\{a, d\}, \{b, c, e, f\}, \{g\})$ de $L(G)$.

De acordo com a Proposição 4.1, $L(G)$ tem a partição equilibrada $\bar{\pi} = (U_{11}, U_{12}, U_{22})$, onde $U_{11} = \{a, d\}$, $U_{12} = \{b, c, e, f\}$ e $U_{22} = \{g\}$, com

$$A_{L(G)/\bar{\pi}} = \begin{matrix} & U_{11} & U_{12} & U_{22} \\ U_{11} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ U_{12} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ U_{22} & \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

4.2 Complementar relativamente a uma partição

Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo com uma partição $\pi = (V_1, \dots, V_r)$ de $V(G)$. O *complementar de G relativamente à partição π* (denotado por G^π) é o grafo $G^\pi = (V(G^\pi), E(G^\pi))$ onde $V(G^\pi) = V(G)$ e

$$E(G^\pi) = \left(\bigcup_{i=1}^r E(G[V_i]) \right) \cup \left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq r} E_{ij} \right)$$

com $E_{ij} = \{uv \notin E(G) : u \in V_i \text{ e } v \in V_j\}$. De forma equivalente, G^π é o grafo que se obtém de G mantendo as arestas que unem vértices pertencentes ao mesmo subconjunto da partição

π , eliminando as arestas $xy \in E(G)$ tais que $x \in V_i, y \in V_j$ (com $i \neq j$) e, introduzindo arestas $xy \notin E(G)$, com $x \in V_i$ e $y \in V_j$ (com $i \neq j$). A Figura 4.3 representa o grafo G da Figura 3.1 e o seu complementar relativamente a uma bipartição equilibrada π .



Figura 4.3: Grafos G e G^π com $\pi = (\{2, 5\}, \{1, 3, 4, 6\})$.

A operação que transforma G em G^π (com π uma bipartição de $V(G)$) surge em [LS66] e [Sei68], onde é designada por *complementation*, e em [LS73] é designada por *switching*. Em [Sei76] mostra-se que esta operação induz uma relação de equivalência nos grafos com n vértices (em [LS66] e [Sei68] este facto já é referido), sendo dois grafos, G e H , equivalentes se cada um é isomorfo ao complementar do outro relativamente a alguma bipartição π do respectivo conjunto de vértices, ou seja, se e só se têm matrizes de Seidel⁵ semelhantes.

De acordo com a definição de complementar relativamente a uma partição do conjunto de vértices, o conceito usual de complementar de um grafo G (apresentado no Capítulo 2) corresponde ao complementar de G relativamente à partição trivial $\delta = (V_1, \dots, V_n)$ de $V(G)$, onde cada subconjunto V_i contém exactamente um vértice de $V(G)$.

Dado um grafo G com uma partição π de $V(G)$, conclui-se que π é uma partição equilibrada de G se e só se π é uma partição equilibrada de G^π . Se $\pi = (S, V(G) \setminus S)$ é uma bipartição de $V(G)$ então A_G é dada por (3.1) e

$$A_{G^\pi} = \begin{bmatrix} A_{G[S]} & J - B \\ J^\top - B^\top & A_{G[\bar{S}]} \end{bmatrix},$$

onde $\bar{S} = V(G) \setminus S$ e J denota a matriz de dimensão $|S| \times (n - |S|)$ cujas entradas são todas iguais a 1. Relativamente ao grafo quociente G^π/π , considerando $A_{G/\pi}$ escrita na forma

⁵Dado um grafo G de ordem n , a *matriz de Seidel* de G , denotada por S_G , é a matriz de ordem n tal que, para $i, j \in V(G)$, $(S_G)_{ij} = 1$ se $ij \notin E(G)$ e $i \neq j$, $(S_G)_{ij} = -1$ se $ij \in E(G)$ e $(S_G)_{ii} = 0$. Verifica-se que $S_G = J_n - I_n - 2A_G$, onde J_n é a matriz de ordem n cujas entradas são todas iguais a 1.

(4.4), tem-se

$$A_{G^\pi/\pi} = \begin{bmatrix} d_{11} & n - |S| - d_{12} \\ |S| - d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Na proposição a seguir, estabelecem-se condições necessárias e suficientes para que o complementar de um grafo regular relativamente a uma bipartição equilibrada também seja regular; e, quando estes dois grafos são regulares, analisam-se os casos em que os graus de regularidade coincidem.

Proposição 4.2 *Seja G um grafo p -regular de ordem n com um conjunto (k, τ) -regular (onde $\tau > 0$) $S \subset V(G)$ e $\pi = (S, V(G) \setminus S)$ a bipartição equilibrada induzida por S .*

1. *O grafo G^π é regular se e só se [CR02]*

$$n = 2(p + |S| - k - \tau). \quad (4.8)$$

2. *Se $p = k + \tau$ então G^π é p^* -regular com $p^* = \frac{n}{2} - p + 2k$. Adicionalmente, $p^* = p$ se e só se $|S| = 2\tau$, e se G^π é p -regular então $n = 4\tau$.*

3. *Se $p \neq k + \tau$ então [CR02] G^π é um grafo regular se e só se $|S| = 2\tau$, e se G^π é regular então o grau de regularidade de G^π é p .*

Prova.

1. Considere-se o grafo G^π e a matriz de adjacência de G/π obtida em (4.5)

$$A_{G/\pi} = \begin{bmatrix} k & p - k \\ \tau & p - \tau \end{bmatrix}.$$

Para $v \in S$, $|N_{G^\pi}(v) \cap S| = k$ e $|N_{G^\pi}(v) \cap (V(G) \setminus S)| = n - |S| - p + k$ pelo que

$$d_{G^\pi}(v) = n - |S| - p + 2k. \quad (4.9)$$

Para $u \in V(G) \setminus S$, $|N_{G^\pi}(u) \cap S| = |S| - \tau$ e $|N_{G^\pi}(u) \cap (V(G) \setminus S)| = p - \tau$ donde

$$d_{G^\pi}(u) = |S| + p - 2\tau. \quad (4.10)$$

Consequentemente, de (4.9) e (4.10) vem que G^π é regular se e só se

$$n - |S| - p + 2k = |S| + p - 2\tau \Leftrightarrow n = 2(p + |S| - k - \tau). \quad (4.11)$$

2. Se G é um grafo p -regular e S é um conjunto (k, τ) -regular com $p = k + \tau$, onde $\tau = p - k > 0$, então $\pi = (S, V(G) \setminus S)$ é uma bipartição equilibrada de $V(G)$ e S e $V(G) \setminus S$ são conjuntos $(k, p - k)$ -regulares. Além disso, de (3.4) $|S| = |V(G) \setminus S| = \frac{n}{2}$. Conseqüentemente, de (4.9) e (4.10) G^π é um grafo p^* -regular com $p^* = \frac{n}{2} - p + 2k = \frac{n}{2} + p - 2\tau$ e

$$p^* = p \Leftrightarrow \frac{n}{2} + p - 2\tau = p \Leftrightarrow |S| = 2\tau.$$

Se $p = k + \tau$ e $|S| = 2\tau$ então de (4.8) vem $n = 2(k + \tau + 2\tau - k - \tau) = 4\tau$.

3. Se G é p -regular e $p \neq k + \tau$ então, de (3.4) e (4.8) segue que G^π é regular se e só se

$$\begin{aligned} |S| = \frac{2(p + |S| - k - \tau)\tau}{p - k + \tau} &\Leftrightarrow |S|(p - k) + |S|\tau = 2(p - k - \tau)\tau + 2|S|\tau \\ &\Leftrightarrow |S|(p - k - \tau) = 2(p - k - \tau)\tau \Leftrightarrow |S| = 2\tau. \end{aligned}$$

Finalmente, se G^π é regular e $p \neq k + \tau$, então, considerando $|S| = 2\tau$, em (4.10) conclui-se que G^π é p -regular. ■

Note-se que se $p = k + \tau$, da Proposição 4.2 - (2.) vem que G e G^π são ambos regulares mas, podem ter diferentes graus de regularidade. Para o grafo p -regular G (representado na Figura 3.7), com $p = 3$, $S = \{1, 5, 6\}$ é um conjunto (k, τ) -regular, com $(k, \tau) = (2, 1)$, pelo que $p = k + \tau$, enquanto para $\pi = (S, V(G) \setminus S)$, G^π é 4-regular, com $4 \neq p$. Para o mesmo grafo G , $S' = \{3, 6\}$ é (k, τ) -regular, com $(k, \tau) = (1, 1)$, pelo que $p \neq k + \tau$. Considerando a bipartição equilibrada δ induzida por S' , conclui-se que G^δ é isomorfo a G , logo G^δ é 3-regular.

O Teorema 2.4.9 de [CRS97] estabelece que se p^* é o grau de regularidade de G^π então $p^* - \frac{n}{2} \in \sigma(A_G)$. Este resultado pode também ser obtido de (4.9) e (4.10), tendo em conta que as igualdades $p^* = n - |S| - p + 2k = |S| + p - 2\tau$ conduzem a $k = \frac{p^* - n + |S| + p}{2}$ e $-\tau = \frac{p^* - |S| - p}{2}$. Conseqüentemente, atendendo à Proposição 3.1, $k - \tau \in \sigma(A_G)$, donde segue que $p^* - \frac{n}{2} = k - \tau$ é um valor próprio de A_G .

De (4.8) conclui-se, tal como no Corolário 2.4.10 de [CRS97], que se G é um grafo regular com um número ímpar de vértices então, não existe uma bipartição equilibrada de $V(G)$ tal que o complementar de G relativamente a esta bipartição seja um grafo regular. Em particular,

um grafo p -regular de ordem n ímpar não tem conjuntos $(k, p - k)$ -regulares (com $p > k$) pois, considerando $\tau = p - k > 0$ em (3.4), vem $|S| = \frac{n}{2} \Leftrightarrow n = 2|S|$.

Recorde-se que da Proposição 3.8 se G é um grafo de ordem n (tal que cada componente tem mais do que uma aresta⁶) com um emparelhamento perfeito, então, $L(G)$ tem um conjunto $(0, 2)$ -regular S com $|S| = \frac{n}{2}$. Por outro lado, da Proposição 2.8, se G é p -regular então $L(G)$ é $(2p - 2)$ -regular. Considere-se agora, a bipartição equilibrada $\pi = (S, V(L(G)) \setminus S)$ do grafo linha $L(G)$. Então,

- Se $p = k + \tau = 2$, G é um grafo cujas componentes são triângulos ou ciclos sem cordas e $L(G)$ é 2-regular pelo que da Proposição 4.2 - (2.) decorre que $L(G)^\pi$ também é regular. Novamente desta proposição, se p^π é o grau de regularidade de $L(G)^\pi$, então $p^\pi = 2$ se e só se $|S| = 2\tau = 4$, e se tal se verificar, $n = 4\tau = 8$. Consequentemente, se $L(G)^\pi$ é 2-regular, $|V(G)| = n = 8$ e $|E(G)| = \frac{np}{2} = 8$, pelo que G é isomorfo a C_8 ou $2C_4 = C_4 + C_4$, S corresponde a um independente máximo de G , e $L(G)$ e $L(G)^\pi$ são isomorfos a G .
- Se o grau de regularidade de $L(G)$ verifica $2p - 2 \neq k + \tau = 2$, ou seja, $p \neq 2$, da Proposição 4.2 - (3.) vem que $L(G)^\pi$ é regular se e só se $\frac{n}{2} = |S| = 2\tau = 4$, donde se obtém $|V(G)| = n = 8$ e, consequentemente, $|E(G)| = \frac{np}{2} = 4p$.

4.3 Comportamento do número de independência

Seja G um grafo, S um independente máximo de G que é $(0, \tau)$ -regular e $\pi = (S, V(G) \setminus S)$ a bipartição de $V(G)$ induzida por S . Verifica-se, com alguma frequência, que o grafo G e o seu complementar relativamente a π têm o mesmo o número de independência (logo, S continua a ser um independente máximo). Nos resultados apresentados nesta secção são analisados os grafos G onde o número de independência aumenta, ou seja, $\alpha(G) < \alpha(G^\pi)$. Para tais grafos G , se \bar{S} é um independente máximo de G^π , então $\bar{S} \cap S \neq \emptyset$ e $\bar{S} \cap (V(G) \setminus S) \neq \emptyset$ (caso contrário, se $\bar{S} \cap S = \emptyset$ conclui-se que $\bar{S} \subset V(G) \setminus S$ é um independente de G de cardinalidade superior a S , enquanto se $\bar{S} \cap (V(G) \setminus S) = \emptyset$ então $\bar{S} \subseteq S$).

⁶Note-se que a Proposição 3.8 é válida para um grafo não conexo desde que verifique esta condição.

No resultado a seguir considera-se um grafo G com um independente máximo S que é $(0, \tau)$ -regular e tal que G^π tem um independente \bar{S} , com $S \subset \bar{S}$.

Proposição 4.3 [CR04] *Seja G um grafo de ordem n , S um independente máximo de G que é $(0, \tau)$ -regular (com $\tau > 0$) e $\pi = (S, V(G) \setminus S)$ a bipartição de $V(G)$ induzida por S . Então G^π tem um independente máximo \bar{S} tal que $S \subset \bar{S}$ se e só se*

$$\text{existe um } v \in V(G) \setminus S \text{ tal que } N_G(v) \cap S = S, \quad (4.12)$$

ou o que é equivalente,

$$\alpha(G) = \tau. \quad (4.13)$$

Adicionalmente, se G é p -regular, estas condições são ainda equivalentes a

$$n = \tau + p. \quad (4.14)$$

Prova. Tendo em conta que S é um independente máximo de G e um conjunto $(0, \tau)$ -regular, então (4.12) é equivalente a (4.13). Por outro lado, das mesmas propriedades de S e da aplicação directa de (3.5), quando $k = 0$, resulta a equivalência entre (4.13) e (4.14).

Falta provar que G^π tem um independente máximo $\bar{S} \supset S$ se e só se (4.12) se verifica.

Se existe $v \in V(G) \setminus S$ tal que $N_G(v) \cap S = S$ então, da $(0, \tau)$ -regularidade de S , vem que para todo o $v \in V(G) \setminus S$, $N_G(v) \cap S = S$. Atendendo agora à definição de complementar de G relativamente a π , conclui-se que para todo o $v \in V(G) \setminus S$, $N_{G^\pi}(v) \cap S = \emptyset$, e o grafo G^π consiste exactamente nos vértices isolados de S e no subgrafo induzido $G[V(G) \setminus S]$. Consequentemente, sendo \tilde{S} um independente máximo de $G[V(G) \setminus S]$, segue que $\bar{S} = S \cup \tilde{S}$ é um independente máximo de G^π tal que $S \subset \bar{S}$. Reciprocamente, se G^π tem um independente máximo $\bar{S} \supset S$ então, atendendo à definição de complementar de G relativamente a π , se $v \in \bar{S} \setminus S$ tem-se que $v \in V(G) \setminus S$ e $N_G(v) \cap S = S$ (caso contrário, G^π contém uma aresta a unir v a um dos vértices de S e \bar{S} não é um independente de G^π), ficando provado (4.12). ■

A Figura 4.4 exemplifica um grafo 4-regular com independente máximo $S = \{1, 2, 3\}$ que é $(0, 3)$ -regular e para o qual, sendo $\pi = (S, V(G) \setminus S)$, o independente máximo $\bar{S} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ de G^π inclui S .

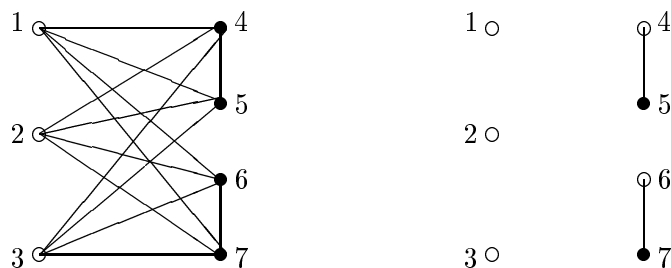


Figura 4.4: Um grafo 4-regular conexo G e G^π com $\pi = (\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6, 7\})$.

Como consequência imediata da Proposição 4.3, se G é um grafo p -regular com um independente máximo S que é $(0, \tau)$ -regular e $n = |V(G)| > 2p$ então [CR04], de (4.14), não existe um independente \bar{S} de G^π tal que $S \subset \bar{S}$.

Note-se ainda que, se G é um grafo p -regular de ordem n com um independente máximo S que é $(0, \tau)$ -regular então, de (3.5) sabe-se que $n \geq p + \tau$ com igualdade se e só se $|S| = \tau$, e da Proposição 4.3, $|S| = \tau$ é equivalente a G^π ter um independente máximo que contém S .

Ao analisar o caso geral conclui-se o seguinte, relativamente à estrutura de G .

Observação 4.1 *Seja G um grafo com um independente máximo S que é $(0, \tau)$ -regular e $\pi = (S, V(G) \setminus S)$ a bipartição de $V(G)$ induzida por S . Então $\alpha(G^\pi) > \alpha(G)$ se e só se $V(G) \setminus S$ contém um independente S_2 que juntamente com um subconjunto $S_1 \subseteq S$ induz um subgrafo bipartido completo e $|S_1| + |S_2| > |S|$. Note-se que a Proposição 4.3 corresponde ao caso em que $S_1 = S$.*

A Figura 4.5 representa um grafo 4-regular G , com independente máximo $S = \{1, 5, 9\}$ e a partição equilibrada $\pi = (S, V(G) \setminus S)$. Verifica-se que $\alpha(G) = 3 < 4 = \alpha(G^\pi)$ dado que G^π tem um independente máximo $\bar{S} = \{1, 3, 7, 9\}$ de cardinalidade superior a S . Note-se que o subgrafo induzido $G[\bar{S}]$ é um grafo bipartido completo $K_{2,2}$.

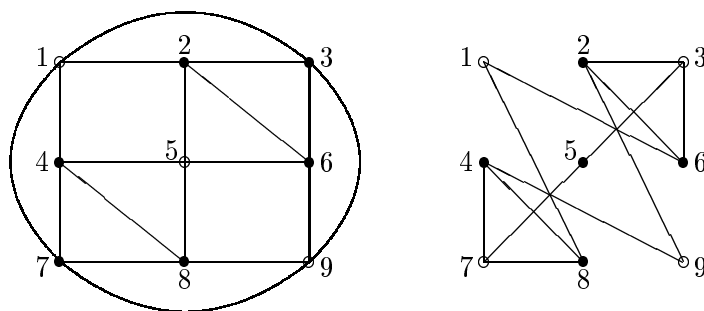


Figura 4.5: Os grafos G e G^π com $\pi = (\{1, 5, 9\}, \{2, 3, 4, 6, 7, 8\})$.

Capítulo 5

Resultados espectrais

O Capítulo 3 inclui alguns resultados sobre valores próprios e vectores próprios da matriz de adjacência de um grafo. Em particular, de acordo com a Proposição 3.1, se G é um grafo regular com um conjunto (k, τ) -regular então $k - \tau \in \sigma(A_G)$ e, do Corolário 3.2, esta conclusão estende-se a grafos arbitrários com pelo menos dois conjuntos (k, τ) -regulares, com $k - \tau$ constante.

No Capítulo 5 são apresentados resultados adicionais relativos aos espectros das matrizes de adjacência associadas a grafos com partições equilibradas, considerando-se o caso particular dos grafos com bipartições equilibradas. Na Secção 5.1, referem-se alguns resultados conhecidos sobre valores próprios e vectores próprios da matriz de adjacência, em grafos com partições equilibradas. Na Secção 5.2 considera-se um grafo com uma partição equilibrada π e mostra-se que o espectro da matriz de adjacência do grafo linha contém o espectro de uma matriz determinada a partir de π . Considera-se também, um grafo regular com uma bipartição equilibrada e mostra-se que, sob certas condições, se o complementar relativamente à bipartição equilibrada é regular, então as matrizes de adjacência dos dois grafos são coespectrais. Na Secção 5.3 caracterizam-se os grafos fortemente regulares primitivos a partir dos vectores próprios das suas matrizes de adjacência e determina-se uma condição necessária e suficiente para que um subconjunto de vértices de um grafo fortemente regular primitivo seja um conjunto (k, τ) -regular. Finalmente, na Secção 5.4 apresentam-se alguns resultados da aplicação dos grafos com número de independência quadrático convexo a grafos

com restrições de regularidade.

5.1 Resultados previamente estabelecidos

Os resultados apresentados nesta secção, bem como as suas provas, encontram-se em [God93] ou [GR01].

Seja G um grafo de ordem n e $\pi = (V_1, \dots, V_r)$ uma partição de $V(G)$. A *matriz característica* de π é a matriz $P^\pi \in \{0, 1\}^{n \times r}$ cujas colunas são formadas pelos vectores característicos dos subconjuntos de π , ou seja,

$$P_{ij}^\pi = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in V_j \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note-se que $(P^\pi)^\top P^\pi$ é uma matriz diagonal com $((P^\pi)^\top P^\pi)_{ii} = |V_i|$.

O resultado a seguir constitui uma caracterização matricial das partições equilibradas.

Proposição 5.1 [PS82] *Seja G um grafo e π uma partição do conjunto de vértices $V(G)$ com matriz característica P^π . Então π é uma partição equilibrada se e só se existe uma matriz B tal que $A_G P^\pi = P^\pi B$. Se π é uma partição equilibrada então $B = A_{G/\pi}$.*

Em [GR01] conclui-se que o polinómio mínimo de $A_{G/\pi}$ divide o polinómio mínimo de A_G logo, os valores próprios distintos de $A_{G/\pi}$ são valores próprios de A_G . Do resultado a seguir vem que a multiplicidade de λ enquanto valor próprio de A_G é não inferior à sua multiplicidade enquanto valor próprio de $A_{G/\pi}$, ou seja, tendo em conta as multiplicidade dos valores próprios, tem-se que $\sigma(A_{G/\pi}) \subset \sigma(A_G)$.

Proposição 5.2 [Sch74]¹ *Se π é uma partição equilibrada de G , então $P_{A_{G/\pi}}(\lambda)$ divide $P_{A_G(\lambda)}$.*

Proposição 5.3 [God93] *Se G é um grafo com uma partição equilibrada π então A_G e $A_{G/\pi}$ têm o mesmo raio espectral.*

¹ Esta proposição obtém-se como caso particular de um resultado de [Hay59, Teorema 1] sobre o espectro de matrizes por blocos.

Se G é um grafo p -regular com um conjunto (k, τ) -regular S e $\pi = (S, V(G) \setminus S)$ então a matriz de adjacência do grafo quociente de G relativamente a π é dada por (4.5). Das Proposições 3.1 e 5.3 vem

$$\sigma(A_{G/\pi}) = \{k - \tau, p\}, \quad (5.1)$$

o que se confirma calculando directamente o espectro desta matriz.

Como se verá a seguir, a matriz de adjacência do grafo quociente $A_{G/\pi}$ também fornece informação acerca dos vectores próprios de A_G . Com efeito, como aplicação da Proposição 5.1 obtém-se o seguinte resultado.

Proposição 5.4 [God93] *Seja G um grafo de ordem n com uma partição equilibrada $\pi = (V_1, \dots, V_r)$. Então*

$$u \in \text{Ker}(A_{G/\pi} - \lambda I_r) \setminus \{0\} \Leftrightarrow P^\pi u \in \text{Ker}(A_G - \lambda I_n) \setminus \{0\}. \quad (5.2)$$

Da Proposição 5.4, se v é um vector próprio de $A_{G/\pi}$ associado ao valor próprio λ , então λ é valor próprio de A_G e $P^\pi v$ é um vector próprio de A_G associado a λ . Atendendo a que $P^\pi v = v_1 x_1 + \dots + v_r x_r$, onde x_i é o vector característico do subconjunto V_i , da definição de matriz característica conclui-se o seguinte corolário.

Corolário 5.1 *Seja G um grafo de ordem n com uma partição equilibrada $\pi = (V_1, \dots, V_r)$. Então $\forall \lambda \in \sigma(A_{G/\pi}) \exists v \in \text{Ker}(A_G - \lambda I_n) \setminus \{0\}$ tal que*

$$\forall j \in \{1, \dots, r\} \forall t, s \in V_j \quad v_t = v_s.$$

De acordo com a proposição a seguir verifica-se que num grafo G com uma partição equilibrada π , os vectores próprios de A_G associados a valores próprios $\lambda \notin \sigma(A_{G/\pi})$ são ortogonais aos vectores característicos dos subconjuntos de π .

Proposição 5.5 [God93] *Seja G um grafo de ordem n com uma partição equilibrada $\pi = (V_1, \dots, V_r)$ e P^π a matriz característica de π . Se $\lambda \in \sigma(A_G)$, $\lambda \notin \sigma(A_{G/\pi})$ e $v \in \text{ker}(A_G - \lambda I_n)$, então $v^\top P^\pi = 0$, ou seja, para $i = 1, 2, \dots, r$,*

$$\sum_{j \in V_i} v_j = 0.$$

Seja G um grafo de ordem n com uma partição equilibrada $\pi = (V_1, \dots, V_r)$ e correspondente matriz característica P^π . Das Proposições 5.4 e 5.5 deduz-se o seguinte:

1. Se $\lambda \in \sigma(A_{G/\pi})$ então $P^\pi v \in \text{Ker}(A_G - \lambda I_n) \setminus \{0\}$ para todo $v \in \text{Ker}(A_{G/\pi} - \lambda I_r) \setminus \{0\}$.
2. Se $\lambda \in \sigma(A_G)$, $\lambda \notin \sigma(A_{G/\pi})$ e $w \in \text{ker}(A_G - \lambda I_n) \setminus \{0\}$, então $w^\top P^\pi = 0$.
3. Se $\lambda \in \sigma(A_{G/\pi})$ com $m_{A_G}(\lambda) > m_{A_{G/\pi}}(\lambda)$, o subespaço invariante de A_G associado a λ contém vectores próprios da forma $u = P^\pi v + w$ tais que $v \in \text{Ker}(A_{G/\pi} - \lambda I_r)$ e $w^\top P^\pi = 0$.

Observação 5.1 *Como ilustração de 3. considere-se o grafo 3-regular G representado na Figura 3.7 com espectro $\sigma(A_G) = \{[-2]^2, [0]^2, [1]^1, [3]^1\}$ e bipartição equilibrada $\pi = (\{3, 6\}, \{1, 2, 4, 5\})$. A tabela seguinte contém as colunas dos vectores próprios que geram os subespaços invariantes de A_G associados aos valores próprios $-2, 0, 1$ e 3 , respectivamente:*

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
-0.2030	0.5404	-0.5773	0.0118	-0.4082	1
0.2030	-0.5404	-0.5773	0.0118	0.4082	1
-0.5696	0.0944	0.2988	0.4940	0.4082	1
0.3666	0.4460	0.2785	-0.5058	0.4082	1
-0.3666	-0.4460	0.2785	-0.5058	-0.4082	1
0.5696	-0.0944	0.2988	0.4940	-0.4082	1

Relativamente ao valor próprio $0 \in \sigma(A_{G/\pi}) \subset \sigma(A_G)$, a multiplicidade $m_{A_{G/\pi}}(0) = 1$ enquanto $m_{A_G}(0) = 2$. Por outro lado, verifica-se que o vector próprio $v = [-0.8944 \quad 0.4472]^\top$ gera o subespaço invariante de $A_{G/\pi}$ associado a 0. Observe-se ainda que o vector próprio u_3 (associado a $0 \in \sigma(A_G)$) é tal que $u_3 = \beta P^\pi v + w$ com $\beta = -0.3340$ e $w = [-0.4278 \quad -0.4278 \quad 0 \quad 0.4278 \quad 0.4278 \quad 0]^\top$, onde w verifica $w^\top P^\pi = 0$.

Considere-se agora um grafo p -regular com um conjunto (k, τ) -regular S (onde $\tau > 0$). Seja x o vector característico de S . De acordo com a Proposição 3.1 conclui-se que $k - \tau \in \sigma(A_G) \setminus \{p\}$ e $u = (p - k + \tau)x - \tau \hat{e} = (p - k)x - \tau(\hat{e} - x)$ é um vector próprio de A_G associado a $k - \tau$,

tal que u não é ortogonal a x ($x^\top u = (p - k + \tau)|S| - \tau|S| = (p - k)|S| \neq 0$). Observe-se ainda que $u = P^\pi v$, onde $v = [p - k \quad -\tau]^\top$ é um vector próprio de $A_{G/\pi}$ correspondente ao seu valor próprio $k - \tau$. Como consequência directa da Proposição 5.5, conclui-se [CR02] que:

- $k - \tau$ e p são os únicos valores próprios de A_G cujos subespaços invariantes são não ortogonais ao vector característico de S ;
- se $k \geq \tau$ então $\lambda_{\min}(A_G) \neq k - \tau$ e portanto o subespaço invariante associado a $\lambda_{\min}(A_G)$ é ortogonal ao vector característico do conjunto (k, τ) -regular S .

Considere-se, novamente, o grafo G representado na Figura 3.7 e os vectores próprios u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 e u_6 referidos na Observação 5.1. Este grafo tem um conjunto (k, τ) -regular, $S = \{3, 6\}$, com $(k, \tau) = (1, 1)$, e verifica-se que $\lambda_{\min}(A_G) = -2 \neq k - \tau$. O subespaço invariante associado a $\lambda_{\min}(A_G) = -2$ (e gerado por u_1 e u_2) é ortogonal ao vector característico de S ($x^1 = (0, 0, 1, 0, 0, 1)$), o que está de acordo com a Proposição 5.5.

As observações anteriores fornecem informações que podem levar à determinação de conjuntos (k, τ) -regulares. Voltando ao grafo da Figura 3.7 e à Observação 5.1, note-se que os vectores próprios u_1 e u_2 que formam uma base do subespaço invariante de A_G associado a -2 são ambos ortogonais a $x^1 = (0, 0, 1, 0, 0, 1)$, $x^2 = (1, 1, 0, 0, 0, 0)$, $x^3 = (0, 0, 0, 1, 1, 0)$, $x^4 = (0, 1, 1, 1, 0, 0)$ e $x^5 = (1, 0, 0, 0, 1, 1)$. Adicionalmente, os vectores próprios u_3 e u_4 que formam uma base do subespaço invariante de A_G associado a 0 , são ortogonais a x^4 e x^5 , enquanto o vector próprio u_5 que gera o subespaço invariante associado a $1 \in \sigma(A_G)$, é ortogonal a x^1, x^2 e x^3 . Atendendo à Proposição 5.5 os vectores x^1, x^2 e x^3 são candidatos a vectores característicos de conjuntos (k, k) -regulares enquanto x^4 e x^5 são candidatos a vectores característicos de conjuntos (k, τ) -regulares com $k - \tau = 1$. Observando o grafo G verifica-se que os conjuntos $\{3, 6\}$, $\{1, 2\}$ e $\{4, 5\}$ são $(1, 1)$ -regulares e $\{2, 3, 4\}$ e $\{1, 5, 6\}$ são $(2, 1)$ -regulares. Por outro lado, u_3 e u_4 são ortogonais a $x^6 = (1, 0, 1, 1, 0, 0)$ mas, u_1, u_2 e u_5 não são ortogonais a x^6 logo, da Proposição 5.5, $\{1, 3, 4\}$ não é um conjunto (k, τ) -regular (o que se confirma por simples observação de G).

5.2 Resultados espectrais adicionais

Observação 5.2 *Recorde-se que da Proposição 2.9, se G é um grafo p -regular ($p > 0$) e $\lambda \neq -p$ é um valor próprio de A_G , então $\mu = \lambda + p - 2 \neq -2$ é um valor próprio de $A_{L(G)}$. Na Proposição 4.1 mostra-se que se G é um grafo com uma partição equilibrada π então, $L(G)$ admite uma partição equilibrada $\bar{\pi}$ com a matriz $A_{L(G)/\bar{\pi}}$ descrita em (4.6). Considerando agora, a Proposição 5.2, conclui-se que $\sigma(A_{L(G)/\bar{\pi}}) \subset \sigma(A_{L(G)})$.² Voltando aos grafos representados na Figura 4.2, tem-se que*

$$\sigma(A_{L(G)/\bar{\pi}}) = \{[-2]^1, [0]^1, [3]^1\} \subset \sigma(A_{L(G)}) = \{[-2]^2, [-1]^1, [0]^1, [1]^2, [3]^1\}.$$

Seja G um grafo com uma partição equilibrada π e G^π o complementar de G relativamente a π . Da Proposição 5.2 conclui-se que² $\sigma(A_{G/\pi}) \subset \sigma(A_G)$ e em [MK98] obtém-se a igualdade

$$\sigma(A_{G^\pi}) = \{\sigma(A_G) \cup \sigma(A_{G^\pi/\pi})\} \setminus \sigma(A_{G/\pi}), \quad (5.3)$$

onde as operações de união e diferença são executadas tendo em conta as multiplicidades dos valores próprios. Tem-se então que

$$\sigma(A_{G^\pi}) = (\sigma(A_G) \setminus \sigma(A_{G/\pi})) \cup \sigma(A_{G^\pi/\pi}). \quad (5.4)$$

Observe-se que sendo G um grafo p -regular de ordem n com um conjunto (k, τ) -regular S e $\pi = (S, V(G) \setminus S)$ a bipartição equilibrada correspondente, vem [CR02]

$$\sigma(A_{G^\pi/\pi}) = \left\{ \frac{p+k-\tau \pm \sqrt{(p-k+\tau)^2 + 4|S|(n-|S|-p+k+\tau) - 4n\tau}}{2} \right\}, \quad (5.5)$$

o que se confirma através da determinação do espectro da matriz (ver (4.7))

$$A_{G^\pi/\pi} = \begin{bmatrix} k & n - |S| - p + k \\ |S| - \tau & p - \tau \end{bmatrix}.$$

Proposição 5.6 [CR02] *Seja G um grafo p -regular de ordem n com um conjunto (k, τ) -regular S (onde $\tau > 0$) e $\pi = (S, V(G) \setminus S)$ a bipartição equilibrada induzida por S . Então*

² Tendo em conta as multiplicidades dos valores próprios.

(a) Verifica-se a seguinte equivalência:

$$\lambda_{\min}(A_{G^\pi/\pi}) \leq k - \tau \Leftrightarrow n \geq 2(p - k + \tau). \quad (5.6)$$

Adicionalmente, se $\lambda_{\min}(A_G) = k - \tau$ e $\lambda_{\min}(A_{G^\pi/\pi}) \leq k - \tau$ conclui-se que $\lambda_{\min}(A_{G^\pi}) = \lambda_{\min}(A_{G^\pi/\pi})$.

(b) Se $\lambda_{\min}(A_{G^\pi/\pi}) > k - \tau$ então

$$p - k + \tau \leq n < 2(p - k + \tau).$$

Prova. Tendo em conta (5.4), a Proposição 3.1, (5.1) e (5.5) vem

$$\sigma(A_{G^\pi}) = (\{\dots, k - \tau, \dots, p\} \setminus \{k - \tau, p\}) \cup \{\Delta^-, \Delta^+\}, \quad (5.7)$$

onde Δ^- e Δ^+ são o menor e maior valores próprios, respectivamente, do espectro $\sigma(A_{G^\pi/\pi})$ obtido em (5.5).

(a) Portanto, de (5.5) tem-se

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(A_{G^\pi/\pi}) \leq k - \tau &\Leftrightarrow \Delta^- \leq k - \tau \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(p - k + \tau)^2 + 4|S|(n - |S| - p + k + \tau) - 4n\tau} \geq p - k + \tau \\ &\Leftrightarrow (p - k + \tau)^2 + 4|S|(n - |S| - p + k + \tau) - 4n\tau \geq (p - k + \tau)^2 \\ &\Leftrightarrow |S|(n - |S| - p + k + \tau) \geq n\tau, \end{aligned}$$

que (sendo $p \neq k - \tau$) por (3.4) é equivalente a

$$\begin{aligned} |S|(n - |S| - p + k + \tau) \geq |S|(p - k + \tau) &\Leftrightarrow n - |S| - p + k + \tau \geq p - k + \tau \\ &\Leftrightarrow |S| \leq n - 2p + 2k. \end{aligned}$$

Tendo em conta, novamente (3.4), a última desigualdade é equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{n\tau}{p - k + \tau} \leq n - 2p + 2k &\Leftrightarrow n\tau \leq n(p - k + \tau) - 2(p - k)(p - k + \tau) \\ &\Leftrightarrow n(p - k) - 2(p - k)(p - k + \tau) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow n \geq 2(p - k + \tau), \end{aligned}$$

onde a última equivalência segue de $p > k$, já que $\tau > 0$ por hipótese.

Se $\lambda_{\min}(A_G) = k - \tau$ e $\lambda_{\min}(A_{G^\pi/\pi}) \leq k - \tau$ então, de (5.4), Proposição 3.1, (5.1) e (5.5) vem

$$\sigma(A_{G^\pi}) = (\{k - \tau, \dots, p\} \setminus \{k - \tau, p\}) \cup \{\Delta^-, \Delta^+\}, \text{ com } \Delta^- \leq k - \tau,$$

concluindo-se que $\lambda_{\min}(A_{G^\pi}) = \Delta^- = \lambda_{\min}(A_{G^\pi/\pi})$.

(b) Da prova de (5.6), tem-se que

$$\lambda_{\min}(A_{G^\pi/\pi}) > k - \tau \Leftrightarrow |S| > n - 2p + 2k \Leftrightarrow n < 2(p - k + \tau).$$

Da última desigualdade e de (3.5), conclui-se que se $\lambda_{\min}(A_{G^\pi/\pi}) > k - \tau$ então

$$p - k + \tau \leq n < 2(p - k + \tau). \quad \blacksquare$$

Proposição 5.7 [CR02] *Seja G um grafo p -regular de ordem n com um conjunto (k, τ) -regular S e $\pi = (S, V(G) \setminus S)$ a bipartição equilibrada induzida por S . Suponha-se que G^π é um grafo regular. Se $p \neq k + \tau$ ou, sendo $p = k + \tau$, G e G^π têm o mesmo grau de regularidade, então*

1. S é um conjunto (k, τ) -regular de G^π ;
2. $\sigma(A_{G^\pi}) = \sigma(A_G)$.

Prova. Recorde-se que da Proposição 4.2 - (2., 3.), se G^π é um grafo regular e se $p \neq k + \tau$ ou, sendo $p = k + \tau$, G e G^π têm o mesmo grau de regularidade, então

$$|S| = 2\tau. \quad (5.8)$$

1. Se S é um conjunto (k, τ) -regular de G então S é um conjunto $(k, |S| - \tau)$ -regular de G^π , ou seja, de (5.8) vem que S é um conjunto (k, τ) -regular de G^π .
2. Da regularidade de G e da Proposição 3.1 segue que $\sigma(A_G) = \{\dots, k - \tau, \dots, p\}$. Por outro lado, de (5.4), (5.1) e de (5.5) tem-se, respectivamente,

$$\begin{aligned} \sigma(A_{G^\pi}) &= (\sigma(A_G) \setminus \sigma(A_{G/\pi})) \cup \sigma(A_{G^\pi/\pi}), \\ \sigma(A_{G/\pi}) &= \{k - \tau, p\}, \\ \sigma(A_{G^\pi/\pi}) &= \left\{ \frac{p + k - \tau \pm \sqrt{(p - k + \tau)^2 + 4|S|(n - |S| - p + k + \tau) - 4n\tau}}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Tendo em conta a regularidade de G^π , a Proposição 4.2 - (1.) e (5.8), conclui-se que $n = 2(p + |S| - k - \tau) = 2(p - k + \tau)$. Substituindo agora $|S|$ e n em $\sigma(A_{G^\pi/\pi})$, pelas expressões obtidas em (5.8) e na última igualdade, respectivamente, obtém-se

$$\begin{aligned} \sigma(A_{G^\pi/\pi}) &= \left\{ \frac{p + k - \tau \pm \sqrt{(p - k + \tau)^2 + 8\tau(p - k + \tau) - 8\tau(p - k + \tau)}}{2} \right\} \\ &= \left\{ \frac{p + k - \tau \pm \sqrt{(p - k + \tau)^2}}{2} \right\} = \left\{ \frac{p + k - \tau \pm (p - k + \tau)}{2} \right\} \\ &= \{k - \tau, p\} = \sigma(A_{G/\pi}). \end{aligned}$$

Consequentemente, $\sigma(A_{G^\pi}) = \sigma(A_G)$. ■

Note-se que combinando o Corolário do Lema 6.6³ em [CDS80] com o Corolário 3.3⁴ em [Sei76], conclui-se que dados dois grafos conexos p -regulares, se cada um é o complementar do outro relativamente a alguma partição do conjunto de vértices, então estes dois grafos têm matrizes de adjacência coespectrais. A diferença entre esta conclusão e a Proposição 5.7 - (2.) é que na Proposição 5.7 não é imposta a conexidade em ambos os grafos nem se impõem que, para $p \neq k + \tau$, G e G^π tenham o mesmo grau de regularidade. Porém, é necessário impor esta última condição no caso de se ter $p = k + \tau$. Por outro lado, a conclusão de que, para $p \neq k + \tau$, ambos os grafos, G e G^π , têm o mesmo grau de regularidade, é uma consequência da Proposição 4.2 - (3.).

Observe-se que o grafo 2-regular $G = C_6$, da Figura 3.4, tem o conjunto $(0, 2)$ -regular $S = \{1, 3, 5\}$ e o complementar de G relativamente à bipartição induzida por S (G^π) é 1-regular (e portanto não conexo). Porém, os dois grafos têm matrizes de adjacência com diferentes espectros ($\sigma(A_G) = \{[-2]^1, [-1]^2, [1]^2, [2]^1\}$ e $\sigma(A_{G^\pi}) = \{[-1]^3, [1]^3\}$), o que não entra em contradição com a Proposição 5.7 já que $p = k + \tau$ (com $p = 2$ e $(k, \tau) = (0, 2)$) e $3 = |S| \neq 2\tau = 4$, pelo que da Proposição 4.2 G e G^π não têm o mesmo grau de regularidade.

³Dois grafos conexos regulares com o mesmo grau de regularidade são coespectrais (relativamente às respectivas matrizes de adjacência) se e só se as suas $(-1, 1, 0)$ -matrizes de adjacência (matrizes de Seidel) são coespectrais. Note-se que duas matrizes simétricas de ordem n dizem-se coespectrais se têm o mesmo espectro e cada valor próprio tem a mesma multiplicidade relativamente às duas matrizes.

⁴Grafos equivalentes por complementaridade relativamente a alguma bipartição do conjunto de vértices têm o mesmo espectro, isto é, têm matrizes de Seidel com o mesmo espectro.

Por outro lado, usando a notação apresentada no Capítulo 2, a Proposição 5.7 aplica-se ao grafo 11-regular não conexo $G = (G_1 \nabla G_3) + (G_2 \nabla G_4)$, com o conjunto $(3, 6)$ -regular $S = V(G_3) \cup V(G_4)$, onde G_1, G_2, G_3 e G_4 são os grafos da Figura 5.1. Assim, considerando

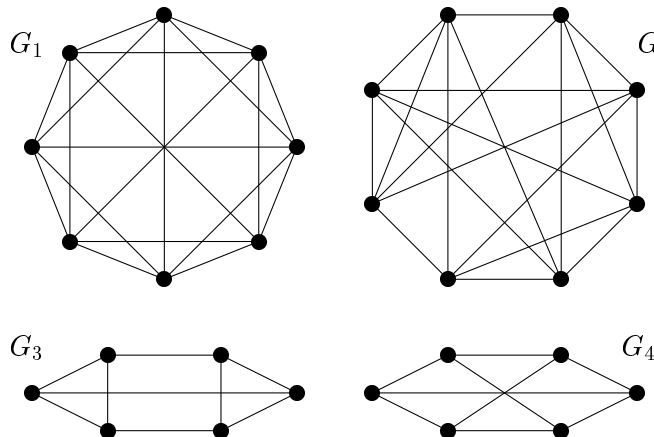


Figura 5.1: Dois grafos 5-regulares de ordem 8 (G_1 e G_2) não isomorfos e dois grafos 3-regulares de ordem 6 (G_3 e G_4) não isomorfos.

o grafo $G = (G_1 \nabla G_3) + (G_2 \nabla G_4)$ e a partição equilibrada $\pi = (S, V(G) \setminus S)$, uma vez que $11 = p \neq k + \tau = 9$ e G^π é regular, pela Proposição 5.7, S é um conjunto $(3, 6)$ -regular de G^π e $\sigma(A_{G^\pi}) = \sigma(A_G)$. Note-se ainda que G não é isomorfo a $G^\pi = (G_1 \nabla G_4) + (G_2 \nabla G_3)$, pois de (2.4), $\sigma(A_G) = \sigma(A_{G_1 \nabla G_3}) \cup \sigma(A_{G_2 \nabla G_4})$, com⁵

$$\sigma(A_{G_1 \nabla G_3}) = \{[-3]^1, [-2.41]^2, [-2]^2, [-1]^2, [0]^2, [0.41]^2, [1]^2, [11]^1\}$$

e

$$\sigma(A_{G_2 \nabla G_4}) = \{[-3]^3, [-1.62]^2, [0]^6, [0.62]^2, [11]^1\},$$

e $\sigma(A_{G^\pi}) = \sigma(A_{G_1 \nabla G_4}) \cup \sigma(A_{G_2 \nabla G_3})$, com

$$\sigma(A_{G_1 \nabla G_4}) = \{[-3]^2, [-2.41]^2, [-1]^2, [0]^4, [0.41]^2, [1]^1, [11]^1\}$$

e

$$\sigma(A_{G_2 \nabla G_3}) = \{[-3]^2, [-2]^2, [-1.62]^2, [0]^4, [0.62]^2, [1]^1, [11]^1\}.$$

⁵Apesar dos espectros seguintes terem sido calculados directamente com recurso ao Matlab 6.5, na Proposição 2.13 mostra-se como calcular estes espectros a partir dos espectros das matrizes de adjacência dos grafos intervenientes.

5.3 Vectores próprios de grafos fortemente regulares

Tendo em conta que um grafo fortemente regular conexo é um grafo de distância regular com diâmetro 2 (ver Secção A.1 do apêndice), obtém-se a proposição seguinte.

Proposição 5.8 [God93] *Um grafo G é fortemente regular com parâmetros $(n, p; a, c)$ se e só se $\forall k \in V(G)$, denotando $N_G[k] = N_G(k) \cup \{k\}$, existe uma partição equilibrada $\pi_k = (V_0, V_1, V_2)$, onde $V_0 = \{k\}$, $V_1 = N_G(k)$ e $V_2 = V(G) \setminus N_G[k]$, para a qual*

$$A_{G/\pi_k} = \begin{array}{c} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{array} \begin{array}{ccc} V_0 & V_1 & V_2 \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & p & 0 \\ 1 & a & p-a-1 \\ 0 & c & p-c \end{array} \right) \end{array}.$$

Note-se que

$$\sigma(A_{G/\pi_k}) = \left\{ \frac{a-c \pm \sqrt{(a-c)^2 - 4(c-p)}}{2}, p \right\}, \quad (5.9)$$

pelo que de (A.2) e (A.3) (em apêndice), A_G e A_{G/π_k} têm os mesmos valores próprios distintos (ver Secção A.1 do apêndice).

No resultado a seguir caracterizam-se os grafos fortemente regulares primitivos, utilizando-se para tal, os vectores próprios da sua matriz de adjacência.

Proposição 5.9 [CDR04] *Seja G um grafo conexo de ordem n (com $E(G) \neq \emptyset$), $p \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \mathbb{N} \setminus \{p\}$ um valor próprio de A_G . Então G é um grafo fortemente regular primitivo com parâmetros $(n, p; a, c)$ se e só se $\forall k \in V(G) \exists v^k \in \text{Ker}(A_G - \lambda I_n) \setminus \{0\}$ tal que*

$$v_i^k = \begin{cases} 1 & \text{se } i = k, \\ \frac{\lambda}{p} & \text{se } i \in N_G(k), \\ \frac{c\lambda}{p(\lambda-(p-c))} & \text{se } i \in V(G) \setminus N_G[k], \end{cases} \quad (5.10)$$

com $p \neq c \neq 0$ e $N_G[k] = N_G(k) \cup \{k\}$.

Prova.

(\Rightarrow) Seja G um grafo fortemente regular primitivo com parâmetros $(n, p; a, c)$. Então, da Proposição A.3 (em apêndice), $p \neq c \neq 0$ e, de acordo com a Proposição 5.8, existe uma partição equilibrada $\pi = (\{k\}, N_G(k), V(G) \setminus N_G[k])$, onde $k \in V(G)$, tal que

$$A_{G/\pi} = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 \\ 1 & a & p - a - 1 \\ 0 & c & p - c \end{bmatrix}.$$

Seja $\lambda \neq p$ um valor próprio de A_G . Se $u = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$ é o vector próprio de $A_{G/\pi}$ correspondente a λ então

$$A_{G/\pi}u = \lambda u \Leftrightarrow \begin{cases} pu_2 & = \lambda u_1, \\ u_1 + au_2 + (p - a - 1)u_3 & = \lambda u_2, \\ cu_2 + (p - c)u_3 & = \lambda u_3. \end{cases} \quad (5.11)$$

Note-se que $\lambda \neq p - c$, caso contrário, como G é primitivo, da Proposição A.3 (em apêndice) tem-se que $c < p$ e $\lambda > 0$. Além disso, se $\lambda_2 < 0$ é o outro valor próprio restrito de G , de (A.5) obtém-se $\lambda\lambda_2 = c - p$, pelo que $\lambda_2 = -1$, o que não é possível já que G é primitivo logo é conexo e $\lambda_2 \leq -\sqrt{2} < -1$ (ver página 11).

Se $u_1 = 0$ então, do sistema (5.11) e de $\lambda \neq p - c$ vem $u = 0$. Portanto, $u_1 \neq 0$ e, sem perda de generalidade, suponha-se que $u_1 = 1$. Como consequência, da primeira e terceira igualdades em (5.11) vem que $u_2 = \frac{\lambda}{p}$ e $u_3 = \frac{c\lambda}{p(\lambda - p + c)}$. Sendo P^π a matriz de característica da partição equilibrada π , da Proposição 5.4 segue que $v^k = P^\pi u$ é um vector próprio de A_G associado ao valor próprio λ e tal que

$$v_i^k = \begin{cases} 1 & \text{se } i = k, \\ \frac{\lambda}{p} & \text{se } i \in N_G(k), \\ \frac{c\lambda}{p(\lambda - p + c)} & \text{se } i \in V(G) \setminus N_G[k]. \end{cases} \quad (5.12)$$

(\Leftarrow) Seja $p \in \mathbb{N}$ e $\lambda \neq p$ um valor próprio de A_G . Considere-se que para todo o vértice $k \in V(G)$ existe um vector próprio $v^k \in \text{Ker}(A_G - \lambda I_n) \setminus \{0\}$ que satisfaz (5.10). Note-se que $\lambda \neq 0$, caso contrário v^k será 0 em todas as suas componentes excepto para $v_k^k = 1$, e $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $(A_G v^k)_i = 0$ o que conduz a k ser um vértice isolado contradizendo a hipótese de que G é conexo.

Prove-se, agora, que G é fortemente regular.

1. De

$$(A_G v^k)_k = \lambda v_k^k \Leftrightarrow \sum_{j \in N_G(k)} v_j^k = \lambda \Leftrightarrow |N_G(k)| \frac{\lambda}{p} = \lambda \Leftrightarrow |N_G(k)| = p$$

conclui-se que G é p -regular.

2. Seja $k, j \in V(G)$ com $kj \in E(G)$. Então $j \in N_G(k)$ e

$$(A_G v^k)_j = \lambda v_j^k \Leftrightarrow 1 + \sum_{i \in N_G(k) \cap N_G(j)} \frac{\lambda}{p} + \sum_{i \in (V(G) \setminus N_G[k]) \cap N_G(j)} \frac{c\lambda}{p(\lambda - (p - c))} = \frac{\lambda^2}{p}.$$

Seja $a = |N_G(k) \cap N_G(j)|$. Então a última igualdade é equivalente a

$$1 + a \frac{\lambda}{p} + (p - a - 1) \frac{c\lambda}{p(\lambda - p + c)} = \frac{\lambda^2}{p},$$

ou seja,

$$\left(\frac{c\lambda}{p(\lambda - p + c)} - \frac{\lambda}{p} \right) a = 1 + (p - 1) \frac{c\lambda}{p(\lambda - p + c)} - \frac{\lambda^2}{p},$$

ou ainda,

$$a\lambda(c - (\lambda - p + c)) = p(\lambda - p + c) + (p - 1)c\lambda - \lambda^2(\lambda - p + c) \quad (5.13)$$

De (5.13) obtém-se

$$a = \frac{(p - \lambda^2)(\lambda - p + c) + (p - 1)c\lambda}{\lambda(p - \lambda)},$$

concluindo-se que para $kj \in E(G)$, $a = |N_G(k) \cap N_G(j)|$ não depende dos vértices k e j escolhidos.

3. Seja $k, j \in V(G)$ com $k \neq j$ e $kj \notin E(G)$. Então $j \in V(G) \setminus N_G[k]$ e $(A_G v^k)_j = \lambda v_j^k$, ou seja,

$$\sum_{i \in N_G(k) \cap N_G(j)} \frac{\lambda}{p} + \sum_{i \in (V(G) \setminus N_G[k]) \cap N_G(j)} \frac{c\lambda}{p(\lambda - p + c)} = \frac{c\lambda^2}{p(\lambda - p + c)}. \quad (5.14)$$

Seja $q = |N_G(k) \cap N_G(j)|$. Então a igualdade (5.14) é equivalente a

$$\begin{aligned} q \frac{\lambda}{p} + (p - q) \frac{c\lambda}{p(\lambda - p + c)} &= \frac{c\lambda^2}{p(\lambda - p + c)} \Leftrightarrow q\lambda(\lambda - p + c) + c\lambda(p - q) = c\lambda^2 \\ &\Leftrightarrow q\lambda(\lambda - p) = c\lambda(\lambda - p) \\ &\Leftrightarrow q = c \end{aligned}$$

concluindo-se que para $kj \notin E(G)$, $c = q = |N_G(k) \cap N_G(j)|$ não depende dos vértices k e j escolhidos.

Consequentemente, de acordo com 1., 2. e 3., G é um grafo fortemente regular com parâmetros $(n, p; a, c)$. Finalmente, a primitividade é consequência directa da hipótese $(0 \neq c \neq p)$. ■

Como já se viu atrás (ver Secção 3.1) o grafo C_5 , representado na Figura 6.1, é um grafo fortemente regular primitivo (ver Proposição A.3, em apêndice) com parâmetros $(5, 2; 0, 1)$ e espectro $\sigma(A_{C_5}) = \{[-1.62]^2, [0.62]^2, [2]^1\}$. Seleccionando o vértice $k = 1$ e o valor próprio $\lambda = 0.62$, então de (5.10) da Proposição 5.9 obtém-se o vector próprio $v = [1 \ 0.3090 \ -0.8090 \ -0.8090 \ 0.3090]^\top$ que verifica

$$A_{C_5}v = \lambda v = [0.6180 \ 0.1910 \ -0.5000 \ -0.5000 \ 0.1910]^\top.$$

Como consequência da Proposição 5.9 obtém-se o seguinte corolário.

Corolário 5.2 [CDR04] *Seja S um independente máximo de um grafo fortemente regular primitivo G , com parâmetros $(n, p; a, c)$. Então*

$$\forall k \in S \quad \alpha(G) = \sum_{j \in N_G(k)} \frac{|N_G(j) \cap S|}{c} - \frac{p-c}{c}.$$

Prova. Considere-se $k \in S$ e seja v o vector próprio de A_G correspondente ao valor próprio restrito λ que, de acordo com a Proposição 5.9, é tal que $v_k = 1$, $v_i = \frac{\lambda}{p} \forall i \in N_G(k)$ e $v_j = \frac{c\lambda}{p(\lambda-p+c)} \forall j \in V(G) \setminus N_G[k]$. Suponha-se também que x é o vector característico de S . Então

$$\begin{aligned} x^T A_G v = \lambda x^T v &\Leftrightarrow \sum_{j \notin S} |N_G(j) \cap S| v_j = \lambda \sum_{j \in S} v_j \\ &\Leftrightarrow \sum_{j \in N_G(k)} |N_G(j) \cap S| \frac{\lambda}{p} + \sum_{j \notin S \cup N_G(k)} |N_G(j) \cap S| \frac{c\lambda}{p(\lambda - (p-c))} \\ &= \lambda + (\alpha(G) - 1) \frac{c\lambda^2}{p(\lambda - (p-c))} \\ &\Leftrightarrow \sum_{j \in N_G(k)} |N_G(j) \cap S| + \frac{c}{\lambda - (p-c)} \sum_{j \notin S \cup N_G(k)} |N_G(j) \cap S| \\ &= p + (\alpha(G) - 1) \frac{c\lambda}{\lambda - (p-c)} \\ &\Leftrightarrow \sum_{j \in N_G(k)} |N_G(j) \cap S| \left(1 - \frac{c}{\lambda - (p-c)}\right) + \frac{c}{\lambda - (p-c)} \sum_{j \notin S} |N_G(j) \cap S| \\ &= p + (\alpha(G) - 1) \frac{c\lambda}{\lambda - (p-c)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{\lambda - p}{\lambda - (p - c)} \sum_{j \in N_G(k)} |N_G(j) \cap S| + \frac{cp}{\lambda - (p - c)} \alpha(G) \\
&\quad = \frac{p(\lambda - (p - c)) + c\lambda(\alpha(G) - 1)}{\lambda - (p - c)} \\
&\Leftrightarrow (\lambda - p) \sum_{j \in N_G(k)} |N_G(j) \cap S| + cp\alpha(G) \\
&\quad = c\lambda\alpha(G) + \lambda(p - c) - p(p - c) \\
&\Leftrightarrow \alpha(G)c(p - \lambda) = (p - \lambda) \sum_{j \in N_G(k)} |N_G(j) \cap S| - (p - \lambda)(p - c) \\
&\Leftrightarrow \alpha(G) = \sum_{j \in N_G(k)} \frac{|N_G(j) \cap S|}{c} - \frac{p - c}{c}.
\end{aligned}$$

Note-se que a terceira e a sexta equivalências são válidas já que na prova da Proposição 5.9 conclui-se que se G é um grafo fortemente regular primitivo com parâmetros $(n, p; a, c)$ e λ é um valor próprio restrito de A_G então $\lambda \notin \{0, p - c\}$. ■

Para o grafo C_5 , representado na Figura 6.1, $S = \{2, 5\}$ é um independente máximo e seleccionando $k = 2$, do Corolário 5.2 vem

$$\alpha(C_5) = |N_G(1) \cap S| + |N_G(3) \cap S| - 1 = |\{2, 5\}| + |\{2\}| - 1 = 2.$$

Como já foi referido atrás (ver página 24), em [Tho81] mostra-se que um conjunto $(0, \tau)$ -regular S num grafo fortemente regular G é um independente máximo. Do Corolário 5.2, se G é um grafo fortemente regular primitivo com parâmetros $(n, p; a, c)$, então [CDR04]

$$\alpha(G) = \frac{p\tau - p + c}{c}. \quad (5.15)$$

Além disso, se λ_1 e λ_2 são os valores próprios restritos de G , com $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, então da Proposição 3.1, $\lambda_2 = -\tau$, e de (A.5, em apêndice), $c - p = \lambda_1\lambda_2$. Consequentemente, da igualdade (5.15) vem

$$\alpha(G) = \frac{-p\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2}{c} = -\lambda_2 \frac{p - \lambda_1}{c}. \quad (5.16)$$

Na Secção 3.2 conclui-se que o grafo de Petersen, P , representado na Figura 3.5, é um grafo fortemente regular primitivo (ver Proposição A.3, em apêndice) com parâmetros $(10, 3; 0, 1)$ e espectro $\sigma(A_P) = \{[-2]^4, [1]^5, [3]^1\}$. Verifica-se ainda que este grafo tem um conjunto $(0, 2)$ -regular $T_1 = \{1, 4, 7, 8\}$. De (5.16) tem-se

$$\alpha(P) = 2 \frac{3 - 1}{1} = 4,$$

o que permite concluir que T_1 é um independente máximo de P .

Proposição 5.10 [CDR04] *Seja G um grafo fortemente regular primitivo com parâmetros $(n, p; a, c)$ e $\lambda \in \sigma(A_G) \setminus \{p\}$. Se existe $S \subset V(G)$ tal que*

$$\forall v \in \text{Ker}(A_G - \lambda I_n) \quad \sum_{j \in S} v_j = 0,$$

então S é um conjunto (k, τ) -regular, com

$$k = \frac{c\lambda(|S| - 1) + pc}{\lambda(p - \lambda)} - \frac{p}{\lambda} \text{ e } \tau = \frac{c}{p - \lambda}|S|.$$

Prova. Seja $S \subset V(G)$ tal que $\forall v \in \text{Ker}(A_G - \lambda I_n) \quad \sum_{i \in S} v_i = 0$. Seja $x \in V(G)$ e v o vector próprio de A_G definido em (5.10), isto é, tal que

$$v_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i = x, \\ \frac{\lambda}{p} & \text{se } i \in N_G(x), \\ \frac{c\lambda}{p(\lambda - (p - c))} & \text{se } i \in V(G) \setminus N_G[x], \end{cases}$$

- Se $x \in S$, da Proposição 5.5 e de $\lambda \notin \{0, p - c\}$ (ver prova da Proposição 5.9) vem que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j \in S} v_j \\ &= 1 + \sum_{j \in N_G(x) \cap S} \frac{\lambda}{p} + \sum_{j \in S \setminus N_G[x]} \frac{c\lambda}{p(\lambda - (p - c))} \\ &= \frac{p}{\lambda} + |N_G(x) \cap S| + (|S| - |N_G[x] \cap S|) \frac{c}{\lambda - p + c} \\ &= \frac{p}{\lambda} - \frac{c}{\lambda - p + c} + |N_G(x) \cap S| \frac{\lambda - p}{\lambda - p + c} + |S| \frac{c}{\lambda - p + c} \\ &= |N_G(x) \cap S|(\lambda - p) + \frac{c\lambda(|S| - 1) + p(\lambda - p + c)}{\lambda}. \end{aligned} \tag{5.17}$$

De (5.17) tem-se que

$$\begin{aligned} |N_G(x) \cap S| &= \frac{c\lambda(|S| - 1) + pc - p(p - \lambda)}{\lambda(p - \lambda)} \\ &= \frac{c\lambda(|S| - 1) + pc}{\lambda(p - \lambda)} - \frac{p}{\lambda}. \end{aligned}$$

- Se $x \in V(G) \setminus S$ então, novamente da Proposição 5.5 e de $\lambda \notin \{0, p - c\}$ conclui-se que

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j \in S} v_j \\
&= \sum_{j \in N_G(x) \cap S} \frac{\lambda}{p} + \sum_{j \in S \setminus N_G(x)} \frac{c\lambda}{p(\lambda - (p - c))} \\
&= |N_G(x) \cap S| + (|S| - |N_G(x) \cap S|) \frac{c}{\lambda - (p - c)} \\
&= |N_G(x) \cap S| \frac{\lambda - p}{\lambda - p + c} + |S| \frac{c}{\lambda - p + c} \\
&= |N_G(x) \cap S|(\lambda - p) + |S|c.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

De (5.18) vem que

$$|N_G(x) \cap S| = \frac{c}{p - \lambda} |S|.$$

■

A Proposição 5.5 combinada com a Proposição 5.10, permite deduzir uma condição necessária e suficiente para um subconjunto de vértices de um grafo fortemente regular primitivo ser (k, τ) -regular.

Corolário 5.3 [CDR04] *Seja G um grafo fortemente regular primitivo com parâmetros $(n, p; a, c)$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\tau \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \sigma(A_G) \setminus \{k - \tau, p\}$. Então $S \subset V(G)$ é (k, τ) -regular se e só se $\forall v \in \text{Ker}(A_G - \lambda I_n)$,*

$$\sum_{j \in S} v_j = 0.$$

Adicionalmente, se S é (k, τ) -regular então $k = \frac{c\lambda(|S|-1)+pc}{\lambda(p-\lambda)} - \frac{p}{\lambda}$ e $\tau = \frac{c}{p-\lambda}|S|$.

Considerando novamente o grafo de Petersen P (na Figura 3.5), com $\sigma(A_P) = \{-2\}^4, [1]^5, [3]^1$ e o subconjunto $T_1 = \{1, 4, 7, 8\} \subset V(P)$, verifica-se (recorrendo ao Matlab 6.5) que o vector característico de T_1 é ortogonal ao subespaço invariante de $1 \in \sigma(A_G)$. Logo, da Proposição 5.10, T_1 é um conjunto (k, τ) -regular de P com

$$k = \frac{1(4-1)+3}{3-1} - \frac{3}{1} = 0 \quad \text{e} \quad \tau = \frac{1}{3-1}4 = 2.$$

5.4 Grafos com número de independência quadrático convexo

De acordo com [LC99], um grafo G de ordem n , com pelo menos uma aresta, tem número de independência quadrático convexo se $\alpha(G) = v(G)$, com

$$v(G) = \max\{2\hat{e}^\top x - x^\top (H_G + I_n)x : x \geq 0\}, \quad (5.19)$$

onde

$$H_G = \begin{cases} \frac{1}{-\lambda_{\min}(A_G)} A_G & \text{se } \lambda_{\min}(A_G) \neq 0 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como em [LC99], esta classe de grafos (que não é hereditária [LC99]) é denotada por \mathcal{Q} .

Em [Luz95] prova-se que para um grafo G , com pelo menos uma aresta, $\alpha(G) \leq v(G)$.

Na proposição seguinte é apresentada uma caracterização combinatória da classe de grafos \mathcal{Q} utilizando o menor valor próprio da matriz de adjacência.

Proposição 5.11 [Luz95] *Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo com $E(G) \neq \emptyset$. Então $\alpha(G) = v(G)$ se e só se para um independente máximo S*

$$-\lambda_{\min}(A_G) \leq |N_G(i) \cap S| \quad \forall i \notin S. \quad (5.20)$$

Adicionalmente, (5.20) verifica-se para todos os independentes máximos de G .

A proposição que se segue inclui (em 1.) uma versão ligeiramente modificada da Proposição 5.11.

Proposição 5.12 [Cardoso,2002]⁶ *Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo com $E(G) \neq \emptyset$.*

1. $\alpha(G) = v(G)$ se e só se existe um independente S tal que

$$-\lambda_{\min}(A_G) \leq |N_G(i) \cap S| \quad \forall i \notin S. \quad (5.21)$$

Adicionalmente, S é um independente máximo.

⁶Comunicação privada. Ver prova na Secção A.2 do apêndice.

2. Se G é p -regular então $\alpha(G) = v(G)$ se e só se existe um independente S tal que

$$-\lambda_{\min}(A_G) = |N_G(i) \cap S| \quad \forall i \notin S. \quad (5.22)$$

Adicionalmente, S é um independente máximo e (5.22) verifica-se para todo o independente máximo de G .

De acordo com a Proposição 5.12-(2.) um grafo p -regular G , com pelo menos uma aresta, tem número de independência quadrático convexo se e só se tem um conjunto $(0, -\lambda_{\min}(A_G))$ -regular.

Recorrendo ao problema (5.19) e aos resultados anteriores, Cardoso deduz a proposição seguinte.

Proposição 5.13 [CR04] *Seja G um grafo conexo (com $E(G) \neq \emptyset$) tal que $-\lambda_{\min}(A_G) \leq \tau$. Se $S \subseteq V(G)$ é $(0, \tau)$ -regular então S é um independente máximo.*

Nos resultados a seguir é introduzido um majorante para $\lambda_{\min}(A_G)$ e prova-se que, sob certas condições, este majorante é atingido para grafos com número de independência quadrático convexo.

Proposição 5.14 [CR02] *Seja G um grafo com dois subconjuntos de vértices S e \bar{S} ($S \neq \bar{S}$) tal que $|S| = |\bar{S}|$ e ambos os subconjuntos induzem subgrafos k -regulares. Então*

$$\lambda_{\min}(A_G) \leq \frac{|S \setminus \bar{S}|k - \sum_{i \in S \setminus \bar{S}} |N_G(i) \cap \bar{S}|}{|S \setminus \bar{S}|} \quad (5.23)$$

Prova. Sejam x e \bar{x} os vectores característicos dos dois subconjuntos de vértices S e \bar{S} , respectivamente. Denotando a diferença simétrica entre S e \bar{S} por $S \Delta \bar{S}$, isto é, $S \Delta \bar{S} = (S \setminus \bar{S}) \cup (\bar{S} \setminus S)$, então como S e \bar{S} têm a mesma cardinalidade facilmente se deduz que

$$|S \Delta \bar{S}| = 2|S \setminus \bar{S}| = 2|\bar{S} \setminus S|.$$

Por outro lado, sabe-se que

$$\lambda_{\min}(A_G) = \inf \left\{ \frac{y^\top A_G y}{\|y\|^2} : y \neq 0 \right\} \quad (5.24)$$

e também que

$$\frac{(x - \bar{x})^\top A_G(x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|^2} = \frac{x^\top A_G x + \bar{x}^\top A_G \bar{x} - 2x^\top A_G \bar{x}}{|S \Delta \bar{S}|}. \quad (5.25)$$

Além disso,

$$(A_G x)_i = \begin{cases} k & \text{se } i \in S \\ |N_G(i) \cap S| & \text{se } i \notin S \end{cases}$$

portanto, $x^\top A_G x = k|S|$ e $\bar{x}^\top A_G \bar{x} = k|\bar{S}| = k|S|$. Finalmente, de $x^\top A_G \bar{x} = \bar{x}^\top A_G x$ vem

$$x^\top A_G \bar{x} = k|S \cap \bar{S}| + \sum_{i \in S \setminus \bar{S}} |N_G(i) \cap \bar{S}| = k|S \cap \bar{S}| + \sum_{i \in S \setminus \bar{S}} |N_G(i) \cap S|.$$

Continuando, agora, o desenvolvimento iniciado em (5.25) obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{(x - \bar{x})^\top A_G(x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|^2} &= \frac{2|S|k - 2|S \cap \bar{S}|k - 2 \sum_{i \in S \setminus \bar{S}} |N_G(i) \cap \bar{S}|}{2|S \setminus \bar{S}|} \\ &= \frac{|S \setminus \bar{S}|k - \sum_{i \in S \setminus \bar{S}} |N_G(i) \cap \bar{S}|}{|S \setminus \bar{S}|} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Finalmente, de (5.24) e (5.26),

$$\lambda_{\min}(A_G) \leq \frac{|S \setminus \bar{S}|k - \sum_{i \in S \setminus \bar{S}} |N_G(i) \cap \bar{S}|}{|S \setminus \bar{S}|}$$

■

Para o grafo G , representado na Figura 5.2, verifica-se que $S = \{1, 2, 3\}$ e $\bar{S} = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ induzem subgrafos 2-regulares. Aplicando a desigualdade (5.23) obtém-se

$$\lambda_{\min}(A_G) \leq \frac{3 \times 2 - \sum_{i=1}^3 |N_G(i) \cap \bar{S}|}{3} = \frac{6 - 12}{3} = -2,$$

enquanto $\sigma(A_G) = \{-2.25, -2, -1.39, -0.80, -0.56, 0.80, 1.06, 5.13\}$.

Corolário 5.4 *Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo com $E(G) \neq \emptyset$ e S um independente de G . Se $G \in \mathcal{Q}$ e $\bar{S} \neq S$ é um independente máximo de G , então*

$$-\lambda_{\min}(A_G) = \frac{\sum_{i \in S \setminus \bar{S}} |N_G(i) \cap \bar{S}|}{|S \setminus \bar{S}|}.$$

Prova. Da Proposição 5.11, se $G \in \mathcal{Q}$ então, para qualquer independente máximo \bar{S} verifica-se $-\lambda_{\min}(A_G) \leq \min\{|N_G(i) \cap \bar{S}| : i \notin \bar{S}\}$. Como $S \neq \bar{S}$ vem

$$-|S \setminus \bar{S}| \lambda_{\min}(A_G) \leq \sum_{i \in S \setminus \bar{S}} |N_G(i) \cap \bar{S}| \Leftrightarrow -\lambda_{\min}(A_G) \leq \frac{\sum_{i \in S \setminus \bar{S}} |N_G(i) \cap \bar{S}|}{|S \setminus \bar{S}|}.$$

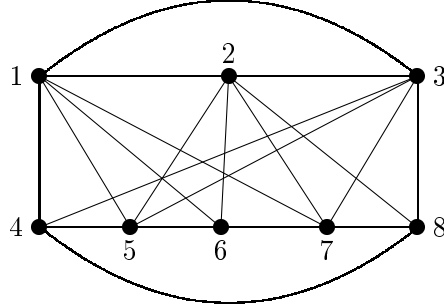


Figura 5.2: Grafo com os subconjuntos $S = \{1, 2, 3\}$ e $\bar{S} = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ que induzem subgrafos 2-regulares.

De (5.23) (com $k = 0$) e da última desigualdade conclui-se que

$$-\lambda_{\min}(A_G) = \frac{\sum_{i \in S \setminus \bar{S}} |N_G(i) \cap \bar{S}|}{|S \setminus \bar{S}|}.$$

■

Da Proposição 5.11 e do Corolário 5.4 conclui-se que se $G \in \mathcal{Q}$, S é um independente de G e $\bar{S} \neq S$ é um independente máximo de G , então

$$-\lambda_{\min}(A_G) = |N_G(i) \cap \bar{S}|, \forall i \in S \setminus \bar{S}.$$

Proposição 5.15 *Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo com $E(G) \neq \emptyset$ e \bar{S} um independente máximo de G que é $(0, \tau)$ -regular. Então $G \in \mathcal{Q}$ se e só se $-\lambda_{\min}(A_G) = \tau$.*

Prova. Se $\bar{S} \subset V(G)$ é um conjunto $(0, \tau)$ -regular, da Proposição 3.1 vem que $-\tau \in \sigma(A_G)$ pelo que $-\lambda_{\min}(A_G) \geq \tau$. Se $G \in \mathcal{Q}$, da Proposição 5.11 conclui-se que $-\lambda_{\min}(A_G) \leq |N_G(u) \cap \bar{S}| = \tau, \forall u \notin \bar{S}$, logo

$$-\lambda_{\min}(A_G) = \tau.$$

Reciprocamente, se $-\lambda_{\min}(A_G) = \tau$ da Proposição 5.11 vem que $G \in \mathcal{Q}$.

■

Capítulo 6

Partições quase equilibradas

No Capítulo 4 é apresentado o conceito de partição equilibrada do conjunto de vértices $V(G)$ de um grafo G . Recorde-se que uma partição $\pi = (V_1, \dots, V_r)$ de $V(G)$ é equilibrada se os subgrafos induzidos por cada subconjunto V_i são regulares e se para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, r\}$, com $i \neq j$, existe $d_{ij} \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$\forall x \in V_i \quad |N_G(x) \cap V_j| = d_{ij}. \quad (6.1)$$

Define-se agora uma *partição quase equilibrada* dos vértices de G , como uma partição $\pi = (V_1, \dots, V_r)$ de $V(G)$ que verifica (6.1) para $i, j \in \{1, \dots, r\}$, com $i \neq j$, não impondo a condição de regularidade dos subgrafos induzidos $G[V_i]$. De acordo com esta definição, toda a partição equilibrada é quase equilibrada mas o recíproco, em geral, não é verdade. Porém, se o grafo é regular, qualquer partição quase equilibrada é também uma partição equilibrada.

Se G é um grafo com uma partição quase equilibrada $\pi = (V_1, \dots, V_r)$, define-se a *matriz laplaciana generalizada* L^π como a matriz de ordem r tal que

$$(L^\pi)_{ij} = \begin{cases} -d_{ij} & \text{se } i \neq j, \\ s_i & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $s_i = \sum_{j \neq i} d_{ij}$. Como exemplo, o grafo C_5 , representado na Figura 6.1, admite a partição quase equilibrada $\pi = (V_1, V_2, V_3)$, onde $V_1 = \{1\}$, $V_2 = \{2, 5\}$ e $V_3 = \{3, 4\}$. Portanto, a

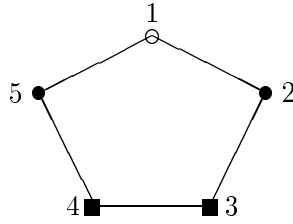


Figura 6.1: Exemplo de uma partição quase equilibrada de C_5 .

matriz laplaciana generalizada, L^π , desta partição quase equilibrada é a matriz de ordem 3

$$L^\pi = \begin{matrix} & V_1 & V_2 & V_3 \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Esta partição quase equilibrada é uma partição equilibrada já que V_1 e V_2 induzem subgrafos 0-regulares enquanto V_3 induz um subgrafo 1-regular (observe-se também que C_5 é regular). Como exemplo de uma partição quase equilibrada que não é uma partição equilibrada tem-se a bipartição $\delta = (\{5\}, \{1, 2, 3, 4, 6\})$ do conjunto de vértices do grafo representado na Figura 3.1.

Note-se que qualquer grafo admite uma partição quase equilibrada. De facto, no Capítulo 4 concluiu-se que para um grafo de ordem n a partição trivial $\pi = (V_1, \dots, V_n)$, onde cada V_i é um subconjunto com um vértice, é uma partição equilibrada portanto, qualquer grafo admite esta partição quase equilibrada. Por outro lado, a partição trivial $\pi = (V_1)$, com $V_1 = V(G)$, que é uma partição equilibrada quando o grafo é regular, é uma partição quase equilibrada para qualquer grafo. Se G é um grafo de ordem n e π é a partição quase equilibrada trivial com n subconjuntos então $L^\pi = L$, onde L é a matriz laplaciana de G . Enquanto, se π é a partição quase equilibrada trivial com um subconjunto $V_1 = V(G)$ então $L^\pi = 0$. Por último, qualquer grafo não conexo admite partições quase equilibradas. Se G_1, \dots, G_s ($s \geq 2$) são as componentes de G então $\pi = (V(G_1), \dots, V(G_s))$ é uma partição quase equilibrada, onde L^π é a matriz nula de ordem s . Adicionalmente, se $s > 2$, $\bar{\pi} = (\bar{V}, V(G) \setminus \bar{V})$, onde \bar{V} é o conjunto de vértices de uma ou mais componentes de G , é uma bipartição quase equilibrada com $\pi \neq \bar{\pi}$ e $L^{\bar{\pi}}$ é a matriz nula de ordem 2.

6.1 Resultados sobre valores e vectores próprios

Ao longo desta secção considera-se um grafo G de ordem n com *matriz laplaciana* $L = D - A_G$, onde $D = [d_{ij}]$ é uma matriz diagonal de ordem n tal que $d_{ii} = d_G(i)$, para todo o $i \in V(G)$, e A_G é a matriz de adjacência de G .

Nas duas proposições a seguir obtém-se conclusões semelhantes às obtidas nas Proposições 5.1 e 5.4, onde se considera partições equilibradas e matrizes de adjacência.

Proposição 6.1 [CDR04] *Seja G um grafo, L a sua matriz laplaciana, $\pi = (V_1, \dots, V_r)$ uma partição de $V(G)$ e P^π a matriz característica de π . Então π é uma partição quase equilibrada se e só se existe uma matriz B de ordem r tal que*

$$LP^\pi = P^\pi B. \quad (6.2)$$

Se π é uma partição quase equilibrada então B é a matriz laplaciana generalizada L^π .

Prova. Seja π uma partição quase equilibrada. Considere-se o produto das matrizes $P^\pi L^\pi$. Então para $i \in V_j$, as entradas da linha $(P^\pi L^\pi)_i$ são dadas por

$$-d_{j1}, \dots, -d_{j,j-1}, \sum_{t \neq j} d_{jt}, -d_{j,j+1}, \dots, -d_{j,r}. \quad (6.3)$$

Considere-se agora, o produto de matrizes LP^π e seja $i \in V_j$, novamente. Então as entradas da linha $(LP^\pi)_i$ são dadas por

$$-|V_1 \cap N_G(i)|, \dots, -|V_{j-1} \cap N_G(i)|, d_G(i) - |V_j \cap N_G(i)|, -|V_{j+1} \cap N_G(i)|, \dots, -|V_r \cap N_G(i)|$$

onde $d_G(i)$ é o grau do vértice i em G . Tendo em conta que $d_G(i) - |V_j \cap N_G(i)| = \sum_{t \neq j} d_{jt}$ e que $|V_t \cap N_G(i)| = d_{jt}$, para $t \neq j$, então a expressão obtida atrás para a linha $(LP^\pi)_i$ é igual a (6.3) e portanto $LP^\pi = P^\pi L^\pi$.

Reciprocamente, suponha-se que π é uma partição de $V(G)$ que satisfaz (6.2). Consequentemente cada coluna de LP^π é a combinação linear das colunas de P^π e, para $j, t \in \{1, 2, \dots, r\}$ e $k, l \in V_t$, $(LP^\pi)_{kj} = (LP^\pi)_{lj}$. Adicionalmente, para $i \in V_t$ com $t \neq j$,

$$(LP^\pi)_{ij} = \sum_{s=1}^n L_{is} P_{sj}^\pi = - \sum_{s \in N_G(i)} P_{sj}^\pi = -|N_G(i) \cap V_j|$$

pelo que, para $i, l \in V_t$,

$$|N_G(i) \cap V_j| = -(LP^\pi)_{ij} = -(LP^\pi)_{lj} = |N_G(l) \cap V_j|$$

concluindo-se que π é uma partição quase equilibrada. \blacksquare

Proposição 6.2 [CDR04] *Seja G um grafo de ordem n , L a sua matriz laplaciana, $\pi = (V_1, \dots, V_r)$ uma partição quase equilibrada de $V(G)$, P^π a matriz característica de π e L^π a matriz laplaciana generalizada associada a π . Então*

$$u \in \text{Ker}(L^\pi - \lambda I_r) \setminus \{0\} \Leftrightarrow P^\pi u \in \text{Ker}(L - \lambda I_n) \setminus \{0\}.$$

Prova. Sendo $u \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$ vem

$$u \in \text{Ker}(L^\pi - \lambda I_r) \Leftrightarrow L^\pi u = \lambda u \tag{6.4}$$

$$\Leftrightarrow P^\pi L^\pi u = \lambda P^\pi u \tag{6.5}$$

$$\Leftrightarrow LP^\pi u = \lambda P^\pi u \tag{6.6}$$

$$\Leftrightarrow P^\pi u \in \text{Ker}(L - \lambda I_n). \tag{6.7}$$

Note-se que a equivalência entre (6.4) e (6.5) decorre da independência linear das colunas de P^π , enquanto a equivalência entre (6.5) e (6.6) segue da igualdade (6.2) com $B = L^\pi$. Finalmente, a equivalência entre (6.6) e (6.7) conclui-se de $u \neq 0$ e, novamente, da independência linear das colunas de P^π . \blacksquare

O corolário seguinte é uma consequência directa da Proposição 6.2 e pode ser utilizado para verificar se existe uma partição quase equilibrada para grafos particulares.

Corolário 6.1 [CDR04] *Seja L a matriz laplaciana do grafo G de ordem n . Se $\pi = (V_1, \dots, V_r)$ é uma partição quase equilibrada de G , então os espectros $\sigma(L^\pi)$ e $\sigma(L)$ satisfazem $\sigma(L^\pi) \subset \sigma(L)$ e para todo o $\lambda \in \sigma(L^\pi)$ existe um $u \in \text{Ker}(L - \lambda I_n) \setminus \{0\}$ tal que*

$$\forall j \in \{1, \dots, r\} \quad \forall t, s \in V_j \quad u_t = u_s. \tag{6.8}$$

Prova. Supondo que L é a matriz laplaciana do grafo G e $\pi = (V_1, \dots, V_r)$ é uma partição quase equilibrada de G , então da Proposição 6.2 segue que para todo o $\lambda \in \sigma(L^\pi)$ e para todo o $u \in \text{Ker}(L^\pi - \lambda I_r) \setminus \{0\}$

$$LP^\pi u = \lambda P^\pi u.$$

Consequentemente, $P^\pi u \in \text{Ker}(L - \lambda I_n) \setminus \{0\}$ e, da definição de matriz característica P^π , segue que

$$\forall j \in \{1, \dots, r\} \quad \forall t, s \in V_j \quad (P^\pi u)_t = (P^\pi u)_s. \quad \blacksquare$$

Do Corolário 6.1 conclui-se que se existe uma bipartição quase equilibrada para um grafo com matriz laplaciana L , então L tem pelos menos dois vectores próprios ($P^\pi u$ e $P^\pi v$, com u e v vectores próprios linearmente independentes de L^π) que definem, pelos seus subconjuntos de componentes com valores iguais, a bipartição quase equilibrada. Mais geralmente, se existe uma partição quase equilibrada com r subconjuntos ($r \geq 2$) então L tem r vectores próprios definindo uma tal partição quase equilibrada. Porém, como a matriz laplaciana tem sempre um vector próprio associado ao valor próprio zero cujas componentes têm o mesmo valor, então a definição da partição quase equilibrada (não trivial) deve ser obtida a partir dos restantes $r - 1$ vectores próprios.

Como consequência directa do Corolário 6.1 verifica-se também, que existem grafos sem qualquer partição quase equilibrada não trivial, como é o caso do grafo da Figura 6.2. De facto,

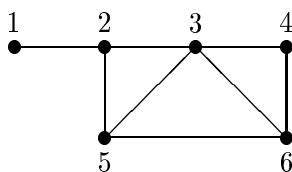


Figura 6.2: Grafo sem partições quase equilibradas não triviais.

a partir do espectro da matriz laplaciana do grafo da Figura 6.2, $\sigma(L) = \{0, 0.73, 2.14, 3.47, 4.55, 5.12\}$, conclui-se que cada subespaço invariante tem dimensão 1. Consequentemente, se existe uma partição quase equilibrada com r subconjuntos, com $1 < r < 6$, então é definida por pelo menos dois dos vectores próprios (isto é, existem pelo menos dois vectores próprios de L com valores constantes para os mesmos subconjuntos de componentes). Analisando os vectores próprios laplacianos que geram os subespaços invariantes (de dimensão 1) associados

a cada valor próprio de $\sigma(L)$ obtém-se, respectivamente,

u^1	u^2	u^3	u^4	u^5	u^6
0.0995	0.1040	-0.2376	0.3286	0.8051	1.0000
-0.4097	-0.3692	0.5858	-0.3730	0.2164	1.0000
0.8410	-0.2308	0.1549	-0.1147	-0.1886	1.0000
-0.1808	0.2799	0.3392	0.6718	-0.3949	1.0000
-0.0727	0.6988	-0.1902	-0.5365	-0.1255	1.0000
-0.2774	-0.4827	-0.6521	0.0238	-0.3125	1.0000.

Verifica-se que o vector próprio u^6 é o único vector próprio que tem duas componentes com igual valor. Consequentemente, existe apenas uma partição quase equilibrada com r subconjuntos, onde $r > 1$, que é a partição quase equilibrada trivial com 6 subconjuntos.

Proposição 6.3 [CDR04] *Seja G um grafo com matriz laplaciana L . Se G tem uma bipartição quase equilibrada $\pi = (V_1, V_2)$ tal que $\forall x \in V_1, |N_G(x) \cap V_2| = \tau_2$ e $\forall x \in V_2, |N_G(x) \cap V_1| = \tau_1$, então*

$$\tau_1 + \tau_2 \in \sigma(L) \cap \sigma(L^\pi).$$

Prova. De acordo com a definição de π segue que $L^\pi = \begin{bmatrix} \tau_2 & -\tau_2 \\ -\tau_1 & \tau_1 \end{bmatrix}$ e que $\sigma(L^\pi) = \{0, \tau_1 + \tau_2\}$. Portanto, pelo Proposição 6.2, o resultado segue. ■

Por exemplo, para o grafo da Figura 6.3, $\pi = (\{1, 5\}, \{2, 3, 4, 6\})$ é uma bipartição quase equilibrada e os valores próprios de $L^\pi = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ são 0 e $\tau_1 + \tau_2 = 1 + 2 = 3$.

Como consequência imediata da Proposição 6.3 temos o corolário seguinte.

Corolário 6.2 [CDR04] *Se a matriz laplaciana de um grafo G de ordem $n > 2$ não tem valores próprios inteiros não nulos então G não tem bipartições quase equilibradas $\pi = (V_1, V_2)$ tais que $|N_G(v) \cap V_1| > 0, \forall v \in V_2$.*

A condição de que $|N_G(v) \cap V_1| > 0, \forall v \in V_2$, implica a exclusão, em grafos desconexos, das bipartições quase equilibradas $\pi = (S, V(G) \setminus S)$ tais que $S \subset V(G)$ é a união dos conjuntos de

vértices de uma ou mais componentes de G . Recorde-se que no início deste capítulo concluiu-se que estas bipartições são quase equilibradas, independentemente dos valores próprios da matriz laplaciana L e a matriz laplaciana generalizada é a matriz nula de ordem 2.

Como aplicação directa do Corolário 6.2 verifica-se que o grafo conexo da Figura 6.1 com o espectro $\sigma(L) = \{[0]^1, [1.38]^2, [3.62]^2\}$ não tem bipartições quase equilibradas. Porém, existem grafos com valores próprios laplacianos inteiros $\lambda \neq 0$ e bipartições quase equilibradas π , nenhuma das quais é tal que $\lambda \in \sigma(L^\pi)$. Isto é verdade para o grafo da Figura 6.3, para o qual $2 \in \sigma(L) = \{[0]^1, [0.76]^1, [2]^1, [3]^2, [5.24]^1\}$ mas $2 \notin \sigma(L^\pi) = \sigma(L^{\pi'}) = \{-3, 0\}$.

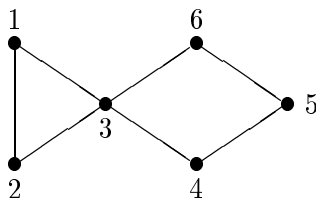


Figura 6.3: Grafo com apenas duas bipartições quase equilibradas $\pi = (\{1, 5\}, \{2, 3, 4, 6\})$ e $\pi' = (\{2, 5\}, \{1, 3, 4, 6\})$.

De acordo com a proposição a seguir concluiu-se que num grafo G com uma partição quase equilibrada π , os vectores próprios de L associados a valores próprios $\lambda \notin \sigma(L^\pi)$ são ortogonais aos vectores característicos dos subconjuntos de π . Conclusão semelhante é obtida na Proposição 5.5, onde se considera partições equilibradas e matrizes de adjacência.

Proposição 6.4 *Seja G um grafo de ordem n com uma partição quase equilibrada $\pi = (V_1, \dots, V_r)$ e P^π a matriz característica de π . Seja L a matriz laplaciana de G . Se $\lambda \in \sigma(L)$, $\lambda \notin \sigma(L^\pi)$ e $v \in \ker(L - \lambda I_n)$, então $v^\top P^\pi = 0$, ou seja, para $i = 1, 2, \dots, r$,*

$$\sum_{j \in V_i} v_j = 0.$$

Prova. Seja v um vector próprio de L associado ao valor próprio $\lambda \in \sigma(L)$, com $\lambda \notin \sigma(L^\pi)$. Suponha-se que $v^\top P^\pi \neq 0$, isto é, v^\top não é ortogonal ao subespaço gerado pelas colunas de P^π . Então $v = x + P^\pi u$ com $x^\top P^\pi = 0$ e $u \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$. Consequentemente,

$$Lv = \lambda v \Leftrightarrow Lx + LP^\pi u = \lambda x + \lambda P^\pi u,$$

ou seja, de (6.2)

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow Lx + P^\pi L^\pi u &= \lambda x + \lambda P^\pi u \\ \Leftrightarrow P^\pi (L^\pi - \lambda I_r)u &= (\lambda I_n - L)x \end{aligned}$$

o que implica que

$$\begin{aligned} ((P^\pi)^\top P^\pi)(L^\pi - \lambda I_r)u &= (\lambda(P^\pi)^\top - (P^\pi)^\top L)x \\ &= (\lambda(P^\pi)^\top - (LP^\pi)^\top)x \\ &= (\lambda(P^\pi)^\top - (L^\pi)^\top (P^\pi)^\top)x \\ &= (\lambda I_r - (L^\pi)^\top)((P^\pi)^\top x) = 0. \end{aligned}$$

Como $(P^\pi)^\top P^\pi$ é a matriz diagonal tal que $(P^\pi)^\top P^\pi = \text{diag}(|V_1|, \dots, |V_r|)$, então de

$$((P^\pi)^\top P^\pi)(L^\pi - \lambda I_r)u = 0$$

vem $L^\pi u = \lambda u$ o que entra em contradição com o facto de $\lambda \notin \sigma(L^\pi)$, pelo que $v^\top P^\pi = 0$. ■

Como já se viu atrás (ver página 74), $\delta = (V_1, V_2)$, com $V_1 = \{5\}$ e $V_2 = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, é uma bipartição quase equilibrada do grafo G representado na Figura 3.1. Verifica-se que

$$L^\delta = \begin{matrix} & V_1 & V_2 \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

$\sigma(L^\delta) = \{0, 6\}$ e $\sigma(L) = \{[0]^1, [2]^1, [4]^2, [6]^2\}$. Na tabela a seguir encontram-se os vectores próprios que geram os subespaços invariantes associados a cada valor próprio de $\sigma(L)$, respectivamente,

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
1	1	0.1556	0.6898	-0.2887	0
1	0	0.0000	0.0000	0.5774	-1
1	-1	0.6898	-0.1556	-0.2887	0
1	-1	-0.6898	0.1556	-0.2887	0
1	0	0.0000	0.0000	0.5774	1
1	1	-0.1556	-0.6898	-0.2887	0.

De imediato se conclui que os vectores próprios u_2 , u_3 e u_4 associados aos valores próprios 2 e 4 não pertencentes a $\sigma(L^\delta)$, são ortogonais aos vectores característicos dos subconjuntos V_1 e V_2 .

Capítulo 7

Conclusões e trabalho futuro

Com este trabalho estabeleceram-se vários resultados relacionados com os valores e vectores próprios da matriz de adjacência de grafos com partições equilibradas e conjuntos (k, τ) -regulares, dos quais se destacam, a seguir, alguns dos mais relevantes. Em particular, mostrou-se que se λ é um inteiro e G é um grafo com dois ou mais conjuntos (k, τ) -regulares, tais que $k - \tau = \lambda$, então λ é um valor próprio da matriz de adjacência de G . Verificou-se também que a existência de uma partição equilibrada π num grafo permite obter alguns valores próprios da matriz de adjacência do grafo linha, considerando a matriz de adjacência do grafo quociente da partição equilibrada do grafo linha, construída a partir de π . Determinou-se ainda, uma condição necessária e suficiente para que um subconjunto de vértices de um grafo fortemente regular primitivo seja um conjunto (k, τ) -regular, a partir dos vectores próprios da matriz de adjacência do grafo.

No estudo dos grafos com partições equilibradas e conjuntos (k, τ) -regulares foram igualmente abordados os aspectos relacionados com a sua estrutura. Em particular, concluiu-se quanto á existência de vários tipos de emparelhamentos num grafo, a partir da existência de determinados conjuntos (k, τ) -regulares no grafo ou no seu grafo linha. Foi ainda objecto de estudo o comportamento do número de independência de um grafo com um independente máximo que é $(0, \tau)$ -regular, e caracterizaram-se os grafos com um independente S que verifica as condições anteriores, cujo número de independência é inferior ao do complementar relativamente à bipartição do conjunto de vértices induzida por S .

Por último, introduziu-se o conceito de partição quase equilibrada e estabeleceram-se algumas propriedades relativamente aos valores e vectores próprios da matriz laplaciana, obtendo-se um valor próprio da matriz laplaciana de um grafo com uma bipartição quase equilibrada. Este último tópico continua a constituir motivação para investigação futura, na qual se inclui o aprofundamento do estudo dos grafos com este tipo de partições, determinando em que medida as propriedades combinatórias e espectrais num grafo estão relacionadas com a existência destas partições.

Apêndice A

Conceitos e resultados auxiliares

A.1 Grafos fortemente regulares

Esta secção do Apêndice reúne resultados básicos sobre grafos fortemente regulares, alguns dos quais são referidos nos capítulos anteriores. Estes resultados encontram-se frequentemente em publicações que abordam o estudo desta classe de grafos, optando-se aqui por seguir [God93], onde podem ser encontradas as provas dos resultados, excepto quando outras referências são indicadas.

Um grafo $G = (V(G), E(G))$, não completo e não nulo, é *fortemente regular* com parâmetros $(n, p; a, c)$ se G é um grafo p -regular de ordem n , e cada par de vértices $i, j \in V(G)$ (com $i \neq j$) tem a vizinhos em comum se $ij \in E(G)$ e c vizinhos em comum se $ij \notin E(G)$. A proposição a seguir constitui uma caracterização matricial dos grafos fortemente regulares.

Proposição A.1 [God93] *Seja G um grafo de ordem n que não é completo nem nulo. Então G é fortemente regular se e só se $A_G^2 = A_G \times A_G$ é uma combinação linear de A_G , I_n e J_n , onde J_n é a matriz de ordem n cujas entradas são todas iguais a 1. Mais concretamente, um grafo G de ordem n é um grafo fortemente regular com parâmetros $(n, p; a, c)$ se e só se*

$$A_G^2 = pI_n + aA_G + c(J_n - A_G - I_n) = (a - c)A_G + (p - c)I_n + cJ_n.$$

Exemplos de grafos fortemente regulares:

- o grafo de Petersen, representado na Figura 3.5, é um grafo fortemente regular com parâmetros $(10, 3; 0, 1)$;
- o ciclo C_5 , representado na Figura 6.1, é um grafo fortemente regular com parâmetros $(n, p; a, c) = (5, 2; 0, 1)$;
- para $n \geq 4$, o grafo linha do grafo completo K_n , usualmente designado por *grafo triangular* $T(n)$, é um grafo fortemente regular com parâmetros $(\frac{1}{2}n(n-1), 2(n-2); n-2, 4)$; (ver [CL91]);
- o grafo $K_{n,n}$ é um grafo fortemente regular com parâmetros $(2n, n; 0, n)$ e o seu grafo linha, $L(K_{n,n})$, é fortemente regular com parâmetros $(n^2, 2n-2; n-2, 2)$ (ver [GR01]).

Os parâmetros de um grafo fortemente regular não são independentes entre si. De facto, se G é um grafo fortemente regular com parâmetros $(n, p; a, c)$, então [God93]

$$p(p-1-a) = c(n-p-1). \quad (\text{A.1})$$

Proposição A.2 [CL91] *Um grafo é fortemente regular com parâmetros $(n, p; a, c)$ se e só se o seu complementar \bar{G} (eventualmente desconexo) é fortemente regular com parâmetros $(\bar{n}, \bar{p}, \bar{a}, \bar{c})$ e $A_{\bar{G}} = J - A_G - I$ onde $\bar{n} = n$, $\bar{p} = n - p - 1$, $\bar{a} = n - 2p + c - 2$ e $\bar{c} = n - 2p + a$.*

Um grafo fortemente regular G é *primitivo* se ambos G e o seu complementar, \bar{G} , são conexos, caso contrário, é designado *imprimitivo*.

Proposição A.3 [God93] *Um grafo fortemente regular com parâmetros $(n, p; a, c)$ é imprimitivo se e só se $c = p$ ou $c = 0$.*

Sabe-se (ver, por exemplo, [God93]) que um grafo conexo G é um grafo de distância regular se e só se, para $d = \text{diam}(G)$ e para todo o $v \in V(G)$, a partição $\pi(v) = (V_0, V_1, \dots, V_d)$ de $V(G)$, com $V_i = \{x \in V(G) : d_G(v, x) = i\}$ para $i = 1, \dots, d$, é equilibrada e as matrizes $A_{G/\pi(v)}$ são iguais. Mostra-se também [God93] que, se G é um grafo de distância regular

com diâmetro $d \in \mathbb{N}$ então A_G tem exactamente $d + 1$ valores próprios distintos que são os valores próprios de $A_{G/\pi(v)}$. Consequentemente, um grafo fortemente regular conexo é um grafo de distância regular com diâmetro 2 pelo que a sua matriz de adjacência tem exactamente 3 valores próprios distintos. De facto, os grafos regulares conexos cuja matriz de adjacência tem 3 valores próprios distintos são grafos fortemente regulares [God93]. Se um grafo fortemente regular conexo, G , tem parâmetros $(n, p; a, c)$, então um dos valores próprios de A_G é p e os outros dois, usualmente designados *valores próprios restritos*, são λ_1 e λ_2 com $p > \lambda_1 \geq 0 > -1 \geq \lambda_2$.

Proposição A.4 [God93] *Seja G um grafo fortemente regular conexo com parâmetros $(n, p; a, c)$, então*

$$\sigma(A_G) = \{[p]^1, [\lambda_1]^{m_1}, [\lambda_2]^{m_2}\}, \quad (\text{A.2})$$

com

$$\{\lambda_1, \lambda_2\} = \left\{ \frac{a - c \pm \sqrt{(c - a)^2 + 4(p - c)}}{2} \right\} \quad (\text{A.3})$$

e

$$n = m_1 + m_2 + 1 \quad e \quad p + m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 = 0, \quad (\text{A.4})$$

onde $\lambda_1 > \lambda_2$.

Note-se que de (A.3) tem-se [God93]

$$\lambda_1 \lambda_2 = c - p \quad (\text{A.5})$$

e

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a - c. \quad (\text{A.6})$$

Além disso, de (A.4) vem [God93]

$$m_1 = -\frac{\lambda_2(n - 1) + p}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad e \quad m_2 = n - m_1 - 1 = \frac{\lambda_1(n - 1) + p}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad (\text{A.7})$$

e substituindo λ_1 e λ_2 , em (A.7), pelas expressões equivalentes obtidas em (A.3), obtém-se [God93] as multiplicidades m_1 e m_2 em função dos parâmetros $(n, p; a, c)$:

$$m_1 = \frac{1}{2} \left(n - 1 - \frac{(n - 1)(a - c) + 2p}{\sqrt{((a - c)^2 + 4(p - c))}} \right) \quad (\text{A.8})$$

e

$$m_2 = \frac{1}{2} \left(n - 1 + \frac{(n-1)(a-c) + 2p}{\sqrt{(a-c)^2 + 4(p-c)}} \right). \quad (\text{A.9})$$

Seja G um grafo fortemente regular conexo com parâmetros $(n, p; a, c)$. Sejam m_1 e m_2 as multiplicidades dos valores próprios restritos $\lambda_1 > \lambda_2$ de A_G , respectivamente. São conhecidas algumas condições necessárias de admissibilidade relativamente aos parâmetros dos grafos fortemente regulares, assim como, condições de admissibilidade que envolvem os valores próprios da matriz de adjacência e respectivas multiplicidades (que, de (A.3), (A.8) e (A.9), podem ser obtidos através dos parâmetros $(n, p; a, c)$). Estas relações são utilizadas como critérios de não existência de grafos fortemente regulares com determinados valores para os parâmetros $(n, p; a, c)$. As igualdades (equivalentes) apresentadas em (A.1) constituem um exemplo de critério de admissibilidade que estes parâmetros têm que verificar. Além deste, destacam-se, aqui, os seguintes critérios (cujas provas e referências, indicadas a seguir, podem ser encontradas em [CL91]):

- *Condições de racionalidade*: como m_1 e m_2 são inteiros não negativos então os segundos membros nas igualdades (A.8) e (A.9) são também inteiros não negativos.
- *Condições de Krein* [Sco77]: se G é um grafo fortemente regular primitivo então

$$(\lambda_1 + 1)(p + \lambda_1 + 2\lambda_1\lambda_2) \leq (p + \lambda_1)(\lambda_2 + 1)^2$$

e

$$(\lambda_2 + 1)(p + \lambda_2 + 2\lambda_1\lambda_2) \leq (p + \lambda_2)(\lambda_1 + 1)^2.$$

- *Limite absoluto de Seidel* [DGS77]: se G é um grafo fortemente regular primitivo então

$$n \leq m_1(m_1 + 3)/2, \quad n \leq m_2(m_2 + 3)/2.$$

A.2 Prova de um resultado usado na Secção 5.4

Esta secção do Apêndice contém a prova de um resultado apresentado na Secção 5.4 e que não se encontra publicado.

Prova da Proposição 5.12 [*D. M. Cardoso, 2002*]

1. Se $\alpha(G) = v(G)$ então pela Proposição 5.11 a existência de um independente para o qual (5.21) se verifica segue de imediato.

Reciprocamente, seja S um independente com vector característico \bar{x} , para o qual (5.21) se verifica. Então existe $y^* \geq 0$ com

$$y_i^* = \begin{cases} 0 & \text{se } i \in S \\ |N_G(i) \cap S| + \lambda_{\min}(A_G) & \text{se } i \notin S, \end{cases}$$

tal que \bar{x} e y^* verificam as condições de optimalidade de Karush-Kuhn-Tucker:

$$\begin{aligned} A_G \bar{x} &= -\lambda_{\min}(A_G)(\hat{e} - \bar{x}) + y^*, \\ y^{*\top} \bar{x} &= 0. \end{aligned}$$

Consequentemente, \bar{x} é uma uma solução óptima para o programa convexo (5.19) e $v(G) = |S|$. Como $|S| \leq \alpha(G)$ e de [Luz95] $\alpha(G) \leq v(G)$ conclui-se que $\alpha(G) \leq v(G) = |S|$ e S é um independente máximo de G .

2. Note-se que para um grafo p -regular G ($p > 1$), se $x^* = \frac{-\lambda_{\min}(A_G)}{p - \lambda_{\min}(A_G)} \hat{e}$, então $A_G x^* = -\lambda_{\min}(A_G)(\hat{e} - x^*)$ e, consequentemente, considerando $y^* = 0$, as igualdades

$$A_G x^* = -\lambda_{\min}(A_G)(\hat{e} - x^*) + y^*, \tag{A.10}$$

$$y^{*\top} x^* = 0, \tag{A.11}$$

correspondem às condições de optimalidade de Karush-Kuhn-Tucker para (5.19).

Se $G \in \mathcal{Q}$ então $\alpha(G) = v(G)$ e o vector característico, \bar{x} , de qualquer independente máximo de G , é uma solução óptima para (5.19). Logo \bar{x} e $y^* = 0$ ¹ verificam as igualdades (A.10) e (A.11), concluindo-se que

$$A_G \bar{x} = -\lambda_{\min}(A_G)(\hat{e} - \bar{x}) \Leftrightarrow |N_G(i) \cap S| = \begin{cases} 0 & \text{if } i \in S \\ -\lambda_{\min}(A_G) & \text{if } i \notin S. \end{cases}$$

¹Em [Luz96, Teorema 2.4], prova-se que se x_1^* e x_2^* são soluções óptimas do problema (5.19) e y_1^* e y_2^* são as respectivas soluções complementares então $y_1^* = y_2^*$.

Adicionalmente, $\alpha(G) = v(G) = |S|$ e portanto S é um independente máximo. Por outro lado, como o vector característico de qualquer independente máximo é uma solução óptima para (5.19), então qualquer independente máximo de S verifica (5.22).

Reciprocamente, se G é um grafo, com pelo menos uma aresta, tal que G verifica (5.22) para algum independente S , então de 1. desta proposição, conclui-se que $G \in \mathcal{Q}$, isto é, $\alpha(G) = v(G)$.

Referências bibliográficas

- [BC03] R. Barbosa and D. M. Cardoso. On regular-stable graphs. *Ars Combinatoria*, 70: 149–159, 2004.² {18,20,33}
- [Bei68] L. W. Beineke. Derived graphs and digraphs. *Beiträge zur Graphentheorie*, pp. 17–33, 1968. {13}
- [BW04] L. W. Beineke and R. J. Wilson. *Topics in Algebraic Graph Theory*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 102, Cambridge University Press, Cambridge, 2004. {11}
- [Big93] N.-L. Biggs. *Algebraic Graph Theory*, second edition. Cambridge University Press, Cambridge, 1993. {3,27}
- [Bol79] B. Bollobás. *Graph Theory - An Introductory Course*. Graduate Texts in Mathematics, 63, Springer-Verlag, New York, 1979. {40}
- [CL91] P. J. Cameron and J. H. van Lint. *Designs, Graphs Codes and their links*. London Mathematical Society Students Texts, 22, Cambridge University Press, Cambridge, 1991. {84,86}
- [Car03] D. M. Cardoso. On graphs with stability number equal to the optimal value of a Convex Quadratic Program. *Matemática Contemporânea*, 25: 9–24, 2003. {1,33}
- [CDR04] D. M. Cardoso, C. Delorme and P. Rama. On Laplacian eigenvectors and eigenvalues and almost equitable partitions. *Cadernos de Matemática*, CM04/I-09, Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, 15 p., 2004. {34,61,64,65,66,67,75,76,78}

²Os números entre {} indicam as páginas no texto onde o documento em questão foi citado.

- [CR02] D. M. Cardoso and P. Rama. Spectral results on regular graphs with (k, τ) -regular sets. *Cadernos de Matemática*, CM02/I-22, Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, 14 p., 2002. (Recomendado para publicação pelos Editores dos *Proceedings* da "Fourth Cracow Conference on Graph Theory – Czorsztyn '02", que serão publicados na *Discrete Mathematics*.) {29,34,44,55,56,58,69}
- [CR04] D. M. Cardoso and P. Rama. Equitable bipartitions of graphs and related results. *Journal of Mathematical Sciences*, 120: 869–880, 2004. {21,22,24,31,47,48,69}
- [Chu97] Fan R. K. Chung. *Spectral Graph Theory*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 92, American Mathematical Society, Providence, Rhode Islands, USA, 1997. {3}
- [CoSi57] L. Collatz and U. Sinogowitz. Spektren endlicher Grafen. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 21: 63–77, 1957. {3,13}
- [Cve73] D. Cvetković. Inequalities obtained on the basis of the spectrum of the graph. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 8: 433–436, 1973. {14}
- [CDS80] D. Cvetković, M. Doob and H. Sachs. *Spectra of Graphs*. Pure and Applied Mathematics, 87, Academic Press, New York, 1980. {2,3,11,12,13,15,38,39,59}
- [CDG⁺88] Cvetković D., M. Doob, I. Gutman e A. Torgåsev. *Recent Results in the Theory of Graph Spectra*. Annals of Discrete Mathematics, 36, North-Holland, Amsterdam, 1988. {3}
- [CGT72] D. Cvetković, I. Gutman and N. Trinajstić. Graph Theory and molecular orbitals. II. *Croatica Chemica Acta*, 44: 365–374, 1972. {3}
- [CL77] D. Cvetković and J. H. van Lint. An elementary proof of Lloyd's theorem. *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Ser. A*, 80: 6–10, 1977. {2}
- [CRS97] D. Cvetković and P. Rowlinson and S. Simić. *Eigenspaces of Graphs*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 66, Cambridge University Press, Cambridge, 1997. {2,3,45}

- [DGS77] Ph. Delsarte, J.-M. Goethals and J. J. Seidel. Spherical codes and designs. *Geometriae Dedicata*, 6: 363–388, 1977. {86}
- [Doo73] M. Doob. An interrelation between line graphs, eigenvalues, and matroids. *Journal of Combinatorial Theory Ser. B*, 15: 40–50, 1973. {14,33}
- [Do82] M. Doob. A surprising property of the least eigenvalue of a graph. *Linear Algebra and its Applications*, 46: 1–7, 1982. {11}
- [FG65] H.-J. Finck and G. Grohmann. Vollständiges Produkt, chromatische Zahl und charakteristisches Polynom regulärer Graphen, I. *Wiss. Z. TH Ilmenau*, 11: 1–3, 1965. {15}
- [Gan59] F. R. Gantmacher. *The Theory of Matrices II*. Chelsea Publishing Company, New York, 1959. {11}
- [GJ78] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. Freeman, San Francisco, 1979. {10}
- [God93] C. D. Godsil. *Algebraic Combinatorics*. Chapman & Hall, New York, 1993. {2,3,12,13,39,52,53,61,83,84,85}
- [GR01] C. D. Godsil and G. Royle. *Algebraic Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics, 207, Springer-Verlag, New York, 2001. {3,14,27,52,84}
- [Hae80] W. H. Haemers. *Eigenvalue Techniques in Design and Graph Theory*. Ph.D. Thesis, Mathematical Centre Tracts, 121, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1980. {3}
- [HKT00] M. M. Halldórsson, J. Kratochvíl and J. A. Telle. Independent sets with domination constraints. *Discrete Applied Mathematics*, 99: 39–54, 2000. {1,17}
- [HS79] F. Harary and A. J. Schwenk. The spectral approach to determining the number of walks in a graph. *Pacific Journal of Mathematics*, 80: 443–449, 1979. {2}
- [Hay59] E. V. Haynsworth. Applications of a theorem on partitioned matrices. *Journal of Research of the National Bureau of Standards Sect. B*, 63: 73–78, 1959. {52}
- [Hof69] A. J. Hoffman. The change in the least eigenvalue of the adjacency matrix of a graph under imbedding. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 17: 664–677, 1969. {3}

- [Huc31] E. Hückel. Quantentheoretische Beiträge zum Benzolproblem. *Z. Phys.* 70: 204–286, 1931. {3}
- [Kar72] R. M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. *Complexity of Computer Computations*, R.E. Miller and J. W. Thatcher (eds.), Plenum Press, New York, pp. 85–104, 1972. {10}
- [LS01] H.-J. Lai and Ľ. Šoltés. Line graphs and forbidden induced subgraphs. *Journal of Combinatorial Theory Ser. B*, 82: 38–55, 2001. {14}
- [LS73] P. W. H. Lemmens and J. J. Seidel. Equiangular lines. *Journal of Algebra*, 24: 494–512, 1973. {3,43}
- [Lih56] L. M. Lihtenbaum. Characteristic values of a simple graph (in Russian). *Trudy 3-go Vses. matem. sezda*, tom 1, pp. 135–136, 1956. {3}
- [LS66] J. H. van Lint and J. J. Seidel. Equilateral point sets in elliptic geometry. *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Ser. A*, 69: 335–348, 1966. {3,43}
- [Lov79] L. Lovász. On the Shannon capacity of a graph. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-25: 1–7, 1979. {15}
- [Lov86] L. Lovász. *An Algorithm Theory of Numbers, Graphs and Convexity*. CBMS - NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 50, SIAM, Philadelphia, 1986. {10}
- [LC99] V. V. Lozin and D. M. Cardoso. On hereditary properties of the class of graphs with quadratic stability number. *Cadernos de Matemática*, CM/I-50, Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, 8 p., 1999. {68}
- [Luz95] C. Luz. An upper bound on the independence number of a graph computable in polynomial-time. *Operations Research Letters*, 18: 139–145, 1995. {68,87}
- [Luz96] C. Luz. *Um novo majorante para o número de independência de um grafo obtido por técnicas de Programação Quadrática*. Tese de Doutorado, Universidade de Aveiro, 1996. {87}

- [Mck76] G. J. McKay. *Backtrack programming and the graph isomorphism problem*. M. Sc. Thesis, University of Melbourne, 1976. ^{1}
- [Min80] B. D. Minty. On maximal independent sets of vertices in claw-free graphs. *Journal of Combinatorial Theory Ser. B*, 28: 284–304, 1980. ^{10}
- [MO87] B. Mohar and M. Omladič. Divisors and spectrum of infinite graphs. *Linear Algebra and its Applications*, 91: 99–106, 1987. ^{2}
- [Mos99] R. Mosca. Stable sets in certain P_6 -free graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 92: 177–191, 1999. ^{10}
- [MK98] M. Muzychuk and M. Klin. On graphs with three eigenvalues. *Discrete Mathematics*, 189: 191–207, 1998. ^{1,3,56}
- [Neu82] A. Neumaier. Regular sets and quasi-symmetric 2-designs. *Combinatorial Theory, Lecture Notes in Mathematics*, 969, D. Jungnickel and K. Vedder (eds.), Springer-Verlag, Berlin, pp. 258–275, 1982. ^{1,2,18,21}
- [PS82] D. L. Powers and M. M. Sulaiman. The walk partition and colorations of a graph. *Linear Algebra and its Applications*, 48: 145–159, 1982. ^{1,2,52}
- [Sac64] H. Sachs. Beziehungen zwischen den in einem Graphen enthaltenen Kreisen und seinem charakterischen Polynom. *Publ. Math. Debrecen*, 11: 119–134, 1964. ^{2,3}
- [Sac66] H. Sachs. Über Teiler, Faktoren und charakteristische Polynome von Graphen I. *Wiss. Z. TH Ilmenau*, 12: 7–12, 1966. ^{2}
- [Sac67] H. Sachs. Über Teiler, Faktoren und charakteristische Polynome von Graphen II. *Wiss. Z. TH Ilmenau*, 13: 405–412, 1967. ^{14}
- [Sbi80] N. Sbihi. Algorithme de recherche d’un stable de cardinalité maximum dans un graphe sans étoile. *Discrete Mathematics*, 29: 53–76, 1980. ^{10}
- [Sch74] A. J. Schwenk. Computing the characteristic polynomial of a graph. *Graphs and Combinatorics*, R. Bari and F. Harary (eds.), Springer, Berlin, pp. 153–172, 1974. ^{2,37,52}

- [SW79] A. J. Schwenk and R. Wilson. On the eigenvalues of a graph. *Selected Topics in Graph Theory*, L. Beineke and R. Wilson (eds.), Academic Press, London, pp. 307–336, 1979. {3}
- [Sco77] L. L. Scott Jr. Some properties of character products. *Journal of Algebra*, 45: 259–265, 1977. {86}
- [Sei68] J. J. Seidel. Strongly regular graphs with $(-1, 1, 0)$ adjacency matrix having eigenvalue 3. *Linear Algebra and its Applications*, 1: 281-298, 1968. {3,43}
- [Sei76] J. J. Seidel. A survey of two-graphs. *Proc. International Colloquium Theorie Combinatorie, Rome, 1973*, Atti Conv. Lincei, Accademia Nazionale dei Lincei, Rome, 17: 481–511, 1976. {43,59}
- [Sei79] J. J. Seidel. Strongly regular graphs. *Surveys in Combinatorics*, London Math. Soc. Lect. Notes Ser., 38: 157-180, 1979. {3}
- [Sei89] J. J. Seidel. Graphs and their spectra. *Combinatorics and Graph Theory*, Banach Center Publications, vol. 25, PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, pp. 147–162, 1989. {3}
- [Sim95] S. Simić. Some notes on graphs whose second largest eigenvalue is less than $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. *Linear and Multilinear Algebra*, 39: 59-71, 1995. {2}
- [Sol94] Ľ. Šoltés. Forbidden induced subgraphs for line graphs. *Discrete Mathematics*, 132: 391–394, 1994. {14}
- [ST99] P. F. Stadler and G. Tinhofer. Equitable partitions, coherent algebras and random walks: Applications to the correlation structure of landscapes. *MATCH Communications in Mathematics and in Computer Chemistry*, 40: 215–261, 1999. {1}
- [Tel93] J. A. Telle. Characterization of domination-type parameters in graphs. *Congressus Numerantium*, 94: 9–16, 1993. {1,17}
- [Tho81] D. M. Thompson. Eigengraphs: constructing strongly regular graphs with block designs. *Utilitas Mathematica*, 20: 83–115, 1981. {1,2,4,18,20,21,24,26,65}

-
- [Wei52] T. H. Wei. *The Algebraic Foundations of Ranking Theory*. Cambridge University Press, London, 1952. ^{3}
- [Wil89] R. J. Wilson. Singular graphs. *Recent Studies in Graph Theory*. V. R. Kulli (ed.), Vishwa International Publications, Gulbarga, India, pp. 228–236, 1989. ^{3}
- [Yap75] H. P. Yap. The characteristic polynomial of the adjacency matrix of a multi-digraph. *Nanta Mathematica*, 8: 41–46, 1975. ^{2}

Índice remissivo

- (ρ, γ) -conjunto, 17
- A_G , 11
- C_k , 8
- $E(G)$, 7, 39
- $G = (V_1, V_2, E(G))$, 9
- $G[X]$, 8
- G^π , 42
- $G_1 + G_2$, 15
- $G_1 \nabla G_2$, 15
- I_n , 10
- K_n , 7
- $K_{m,n}$, 9
- $Ker(A)$, 10
- L , 75
- $L(G)$, 13
- $N_G(v)$, 7
- $N_G[k]$, 61
- $P_A(\lambda)$, 10
- P_n , 8
- $V(G)$, 7
- $\alpha(G)$, 9
- \tilde{G} , 7
- $\chi(G)$, 10
- \hat{e} , 10
- $\lambda_{min}(A)$, 11
- $\omega(G)$, 9
- $\sigma(A)$, 11
- $comp(P)$, 8
- $d_G(v)$, 7
- $diam(G)$, 9
- $dist(x, y)$, 9
- $g(G)$, 9
- ij , 7
- $m_A(\lambda)$, 11
- árvore, 9
- arestas
 - adjacentes, 7
 - incidentes, 7
- bipartição equilibrada, 38
- caminho, 8
- ciclo, 8
 - sem cordas, 8
- cintura, 9
- clique, 9
 - máxima, 9
 - maximal, 9
- coloração, 9
- complementar, 7
 - relativamente a uma partição de $V(G)$,
42
- componente, 8

- comprimento, 8
- condições
- de Krein, 86
 - de racionalidade, 86
- conjunto (k, τ) -regular, 17
- diâmetro, 9
- digrafo, 39
- distância, 9
- emparelhamento, 10
- induzido, 10
 - induzido maximal, 10
 - induzido perfeito, 10
 - máximo, 10
 - perfeito, 10
- espectro, 10
- grafo, 7
- (H_1, \dots, H_s) -livre, 8
 - H -livre, 8
 - τ -regular-estável, 18
 - de distância regular, 84
 - de Moore, 27
 - acíclico, 9
 - bipartido, 9
 - bipartido completo, 9
 - completo, 7
 - conexo, 8
 - de Hoffman-Singleton, 27
 - de ordem n , 7
 - de Petersen, 26
 - desconexo, 8
 - fortemente regular, 83
 - fortemente regular primitivo, 84
 - linha, 13
 - nulo, 7
 - quociente, 39
 - regular, 7
 - semi-regular, 9
 - simples, 7
 - triangular, $T(n)$, 84
- grafos isomorfos, 8
- independente, 9
- máximo, 9
 - maximal, 9
- limite absoluto de Seidel, 86
- matriz
- de adjacência, 11
 - de Seidel, 43
 - laplaciana, 75
 - laplaciana generalizada, 73
- matrizes coespectrais, 59
- multidigrafo, 39
- multiplicidade do valor próprio, 11
- número
- de independência, 9
 - cromático, 10
 - de clique, 9
- partição, 37
- equilibrada, 38
 - matriz característica de uma, 52

- quase equilibrada, 73
- trivial, 37
- passeio, 8
- polinómio
 - característico, 10
- produto completo, 15
- soma directa, 15
- subgrafo, 8
 - induzido, 8
- triângulo, 8
- vértice
 - grau do, 7
- vértices
 - adjacentes, 7
- valores próprios restritos, 85
- vector característico, 10
- vizinhança, 7